Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

N° d'ordre : 4187

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir du grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE EN MECANIQUE DES FLUIDES

par

Qi Zhang

Théorie et simulation de la conjugaison de phase magnéto-acoustique

soutenue le 19 juin 2008 devant la commission d'examen :

Président de jury :	O. BOU MATAR LACAZE Professeur à l'Ecole Centrale de Lille.
Rapporteur :	D. ROYER Professeur à l'Université de Paris VII.
Rapporteur :	J. M. GENEVEAUX Professeur à l'Université du Maine.
Examinateurs :	V. PREOBRAZHENSKI Professeur à l'Ecole Centrale de Lille.
	P. VOINOVICH Directeur Scientifique au JSC Ioffe Institute, St Petersburg, Russie.
	S. DOS SANTOS Maître de Conférences à l'Université de Tours.
Directeur de thèse :	A. Merlen Professeur à l'USTL.
	P. Pernod Professeur à l'Ecole centrale de lille.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Théorie et simulation de la conjugaison de phase magnéto-acoustique

RESUME

Cette thèse présente des solutions analytiques en conjugaison de phase acoustique unidimensionnelle dans un milieu actif. Le conjugateur dans ces études est en contact direct avec des milieux passifs et la zone active peut occuper la totalité ou une partie du conjugateur.

La base de la théorie développée dans cette thèse est une analyse directe par une méthode multi-échelle. Les résultats sont obtenues sous une formes simple à utiliser : le seuil du mode supercritique, les taux de croissance et sa relation avec les répartitions spatiales de contrainte dans le conjugateur sont donnés sous forme analytique.

Une approche du problème de focalisation est présentée par transposition des résultats 1D à la symétrie sphérique. Toutes les solutions analytiques sont comparées avec des résultats numériques. Enfin le problème de la conjugaison de phase en 2D est initié numériquement.

Theory and simulation of magneto-acoustic wave phase conjugation

ABSTRACT

This thesis presents the analytical solutions for the acoustic wave phase conjugation in an active medium in one dimension. In this work, the conjugator is in direct contact with arbitrary passive media but the active zone can be limited inside the conjugator.

The theory presented in this thesis is based on a straightforward analysis using a dual time-scale method and provides very practical results like the threshold of the supercritical modes, the rate of amplification, and its link with the stress repartition in the conjugator.

The duality property of the conjugator in even and odd solutions clarifies the theoretical reason for the experiment problem where we have a modulation depth higher than the threshold but there isn't an exponential amplification.

The focalization problem is described schematically through a transposition of 1D result to spherical symmetry conjugator. All the analytical solutions are compared with the numerical simulations. Finally the problem of multidimensional phase conjugation is initiated by 2D numerical simulation.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Remerciements

Les quatre années de la thèse ont été pour moi une expérience inoubliable. La passion scientifique, l'exigence, la cordialité et l'humour qui règnent dans l'équipe font un excellent mélange. Je remercie tout le groupe pour cet environnement privilégié.

En premier lieu je dois mon apprentissage à Mr Alain Merlen. Sa motivation, ses analyses, son originalité et ses connaissances n'ont cessées de m'impressionner un peu plus tous les jours. Sachant que quelques mots ne suffiront pas à résumer les autres choses que je lui dois, je le remercie simplement d'avoir dirigé ma thèse, et de m'avoir fait partager ses qualités.

Je remercie également Mr Philippe Pernod qui est mon codirecteur. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir accueilli en thèse dans son groupe, et j'espère beaucoup que ses qualités scientifiques et humaines ont un peu déteint sur moi.

J'adresse mes remerciements à Mr Petr Voinovich qui a collaboré à ce travail et y a apporté ses méthodes numériques qui ont enrichi cette thèse sur les aspects multidimensionnels.

Je remercie également Mr Vladimir Preobrazhenski qui est à l'origine de cette thématique dans l'équipe à laquelle il a apporté sa très grande culture scientifique

Je dois exprimer toute ma reconnaissance à Mr Daniel Royer et à Mr Jean Michel Genevaux pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Mes remerciements vont aussi à Messieurs Olivier Bou Matar Lacaze et Serge Dos Santos qui me font l'honneur d'examiner de travail.

Je veux enfin étendre cette reconnaissance à tous les chercheurs et thésards que j'ai côtoyés pour la sincère amitié qu'ils m'ont toujours témoignée. Il est impossible d'en dresser la liste et je les prie de bien vouloir m'en excuser. Je dois cependant mentionner particulièrement Mr Fatah Mejni.

Mes pensées affectueuses vont enfin aux amis et à ma famille qui m'ont soutenue tout au long de la thèse. J'espère qu'ils savent combien je leur dois.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Table des matières

Introduction générale **iv**

1 Introduction à la conjugaison de phase **1**
1.1 Principe de la conjugaison de phase 1
1.2 Conjugaison de phase optique 2
1.2.1 Processus 3
1.2.1.1 Conjugaison de phase par le mélange à quatre ondes . . 3
1.2.1.2 Conjugaison de phase par la diffusion Brillouin stimulée 3
1.2.1.3 Applications 4
1.2.2 Théorie 5
1.2.2.1 Méthode de mélange à quatre ondes 5
1.2.2.2 Méthode de diffusion Brillouin stimulée 6
1.2.2.3 Comparaison des différentes méthodes 7
1.3 Conjugaison de phase acoustique 7
1.3.1 Développement expérimental 8
1.3.1.1 Miroir à retournement temporel 8
1.3.1.2 Conjugaison de phase purement acoustique 9
1.3.1.3 Conjugaison de phase piézoélectrique 10
1.3.1.4 Conjugaison de phase magnéto-acoustique (CPMA) . . . 10
1.3.1.5 Applications de la conjugaison de phase magnéto-acoustique 12
1.3.2 Méthodes théoriques 15
1.3.2.1 Méthode de D. L. Bobroff et H. A. Haus 15
1.3.2.2 Méthode de R. B. Thompson et C. F. Quate 15
1.3.2.3 Méthode de A. P. Brysev et al 16
1.3.2.4 Méthode de P. Pernod et V. Preobrazhensky 16
1.3.3 Simulations numériques 17
1.3.3.1 Algorithme pseudospectral 17
1.3.3.2 Schema Godunov 18
1.3.4 Positionnement de la présente thèse 19

2 Equations modèles générales **22**
2.1 Analyse théorique de l'approximation paraxiale 22
2.1.1 Le problème physique simplifié 22

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

2.1.2 Equations générales . . . 22
2.1.3 Existence de solutions résonnantes . . . 25
2.1.4 Solutions résonnantes physiques paraxiales . . . 29
2.1.4.1 Conjugateur fini et pompage homogène . . . 30
2.1.4.2 Milieu homogène avec zone active finie . . . 40
2.1.4.3 Milieu semi-homogène . . . 47
2.2 Conjugaison de phase en symétrie sphérique . . . 52
2.2.1 Equations générales . . . 52
2.2.2 Solution générale . . . 54
2.2.3 Conditions aux frontières . . . 56
2.2.4 Résolution du problème . . . 57

3 Approche des situations réalistes 63
3.1 Conjugateur monodimensionnel à zone active interne . . . 63
3.1.1 Problème physique . . . 63
3.1.2 Solutions théoriques . . . 64
3.1.3 Résultats . . . 68
3.2 Dualité des solutions résonnantes supercritiques . . . 71
3.2.1 Résolution au premier ordre de l'équation modèle . . . 71
3.2.2 Existence des solutions duales : "paires" ou "impaires" . . . 72
3.2.2.1 Solutions paires . . . 73
3.2.2.2 Solutions impaires . . . 82
3.2.3 Mise en évidence numérique de la dualité . . . 87
3.2.4 Synchronisation temporelle des solutions . . . 103
3.2.4.1 Cas pair . . . 104
3.2.4.2 Cas impair . . . 111
3.2.5 Conclusions . . . 114

4 Problèmes ouverts et exploitation pratique 117
4.1 Les équations modèles alternatives . . . 117
4.2 Les équations de la solution générale . . . 120
4.2.1 Solution analytique . . . 120
4.2.2 Simulations numériques du cas général . . . 126
4.3 Exploitation des résultats en termes énergétiques . . . 130
4.3.1 Optimisation en fonction d'impédance . . . 130
4.3.2 Taux de croissance . . . 133
4.4 Simulation numérique en 2-D . . . 136

Conclusion 140

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Introduction générale

La conjugaison de phase (Wave Phase Conjugation ou WPC) correspond à un phénomène physique qui a attiré l'attention depuis longtemps car presque toutes ses manifestations ont un intérêt pour les applications. La conjugaison de phase veut s'interpréter comme le retournement de vecteurs d'ondes dans le spectre d'une onde de propagation. Ceci est parfois appelé aussi "retournement temporel" car il est possible de montrer les analogies formelles entre inversions des vecteurs d'onde et inversion du temps. Le premier domaine dans lequel la WPC a été étudiée est l'optique, où la conjugaison de phase peut être traitée comme un processus d'holographie dynamique. En diffusion Brillouin stimulée, une onde optique de pompage excite un effet électrostrictif dans un milieu diélectrique transparent où se produit une onde acoustique progressive qui module l'indice de réfraction par l'effet élasto-optique. Ceci produit l'équivalent d'un réseau dynamique de diffraction de phase répliquant l'onde incidente dans la direction opposée. Dans ces processus, les ondes de pompage, l'onde incidente et l'onde conjuguée ont la même (ou presque la même) fréquence. Cette recherche acousto-optique, commencée autour de l'année 1965 [1, 2], a très vite donné lieu à un développement théorique pour trouver les solutions des équations modèles couplées du processus. Le papier de Bobroff et Haus [3] est probablement le plus avancé de l'époque puisqu'il résout le cas d'un système infini avec une zone active de pompage homogène et finie pour une onde incidente à large bande. Bobroff et Haus ont utilisé la transformée de Laplace en temps et la transformée de Fourier en espace qui mènent à un formalisme très compliqué mais permet une discussion large sur les différentes solutions oscillantes. Ils ont montré l'existence de situations absolument instables, qui s'amplifient exponentiellement en temps. Malheureusement le papier focalise plus sur la diffusion Brillouin et fournit très peu de commentaires sur ces dernières solutions croissantes dont l'intérêt pratique n'apparaît pas évident en optique où les effets de saturation non linéaires éliminent cette amplification géante. [4, 5, 6, 7]

A la même période, Thompson et Quate [8] ont démontré une possibilité de conjugaison de phase en acoustique dans une expérience sur des piézoélectriques et au début 1970 à l'aide cristaux piézoélectriques de $LiNbO_3$. Ils ont particulièrement étudié un processus physique de résonance paramétrique où la fréquence du pompage électrique $\Omega = 2.86$ GHz est double de celle de l'onde $\omega = 1.43$ GHz. Malheureusement, là encore, le milieu était non linéaire et le processus d'amplification arrive très vite à saturation.

Depuis les années 1980s, Bunkin et al. [9] ont commencé des études systématiques sur les

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

applications de la WPC. L'effet de résonance paramétrique a vraiment pu être exploité quand on a commencé à utiliser certains solides actifs comme milieux de pompage. Dans ces milieux élastiques aucune saturation non linéaire ne peut provenir de la nature du matériaux. Le conjugateur est en général un cylindre avec des solénoïdes bobinés autour pouvant créer un champ magnétique à la fréquence du pompage Ω.

Il existe donc deux techniques principales de conjugaison de phase. La première est un processus d'holographie dynamique, comme dans la technique de mélange à quatre ondes, où deux ondes planes de sens de propagation opposés créent un réseau qui diffracte la réplique conjuguée d'une onde incidente faible. Dans tous ces processus, l'onde du pompage, l'onde incidente et l'onde conjuguée ont la même (ou presque la même) fréquence. Le réseau est créé par un couplage nonlinéaire dû aux propriétés du matériau. La deuxième technique est la conjugaison de phase paramétrique où une source d'énergie externe est couplée avec l'onde incidente de pulsation ω par une modulation de la vitesse du son dans le milieu à la pulsation $\Omega = 2\omega$. Ce couplage a lieu dans une zone localisée intérieure au milieu que l'on appellera la zone active.

Certains matériaux magnétiques (de type ferrites par exemple) possèdent un couplage entre leur sous-système magnétique et leur sous-système acoustique permettant d'obtenir des matériaux massifs dont le module de compressibilité peut variée de 4% avec le champ magnétique dans les conditions optimales. On peut donc dans ces conditions moduler les vitesses du son dans le solide de façon instantanée avec un champ magnétique oscillant et par conséquent fabriquer des conjugateurs avec de tels matériaux.

Cette solution est appelée conjugaison de phase magnétoacoustique (CPMA). Elle a été proposée pour la première fois en 1988 par Brysev et al [10]. Ces développements sont poursuivis depuis dans le cadre d'un fort partenariat franco-russe au quel s'est associé récemment un laboratoire ukrainien dans le cadre de laboratoire Européen Associé en Magnétoacoustique nonlinéaire de la matière condensée (LEMAC).

Cette thèse va présenter principalement des solutions analytiques du problème 1D de la conjugaison de phase magnétoacoustique réalisée avec de tels conjugateurs. Des solutions numériques et des solutions théoriques sont présentées et comparées.

La thèse est structurée de la façon suivante :

Un premier chapitre s'appuyant sur une synthèse bibliographique présente l'histoire et le principe des conjugaisons de phase optique et acoustique. Pour l'optique, on exposera deux principaux types de WPC : la conjugaison de phase par mélange à quatre ondes (Four-Wave Mixing) et la conjugaison de phase par diffusion Brillouin stimulée (Stimulated Brillouin Scattering). En acoustique, on mentionnera deux types principaux : le miroir à retournement temporel et la conjugaison de phase magnétoacoustique.

On présentera également la méthode numérique utilisée ici pour la conjugaison de phase magnétoacoustique qui a été développée dans les papiers [11, 12]. Les études théoriques qui initient nos analyses seront également exposées. Les applications de la conjugaison de phase magnétoacoustique sont nombreuses et on présentera principalement celles qui

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

sont réalisées dans le laboratoire européen associé en magnétoacoustique nonlinéaire de la matière condensée (LEMAC).

Le chapitre 2 décrit les solutions analytiques de la conjugaison de phase paraxiale unidimensionnelle et à symétrie sphérique. Une méthode multi-échelle est utilisée pour trouver des solutions résonnantes. Les comparaisons théorie-simulation valident les développements de ce chapitre. Les cas homogène et semi-homogène illustrent des solutions particulières de la WPC. Enfin l'étude de la conjugaison de phase en symétrie sphérique est un premier pas vers celle de la focalisation de l'onde conjuguée.

Le chapitre 3 décrit le cas de conjugateurs "réalistes" où la zone active est à l'intérieur du conjugateur mais pas en contact avec les milieux insonifiés. Dans la deuxième partie de ce chapitre on met en évidence l'existence de deux types de solutions fondamentales. On soulignera le fait que le rapport entre la longueur de la zone active et la longueur d'onde des ondes progressives est un paramètre très sensible. Bien sûr cette solution duale est aussi comparée avec les simulations numériques.

Enfin, un quatrième chapitre présente quelque problèmes ouverts. Il propose différentes équations modèles pour le problème résonnant. Une tentative de généralisation des solutions est entreprise mais non aboutie. On présentera également quelques premiers résultats d'optimisation énergétique. Enfin la question de la sensibilité à la longueur de la zone active est initiée en 2D par de premières simulations numériques.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre 1

Introduction à la conjugaison de phase

1.1 Principe de la conjugaison de phase

La conjugaison de phase (WPC) est un couplage linéaire ou non linéaire entre une onde incidente et une source oscillante d'énergie. La WPC est étudiée d'abord dans le domaine optique et ensuite en acoustique.

En optique, le phénomène a déjà été étudié dans les années soixante et soixante-dix, surtout dans le cadre des mélanges à quatre ondes (Four Waves Mixing) et de la diffusion Brillouin stimulée (Stimulated Brillouin Scattering). [13] et [14] ont présenté la conjugaison de phase optique par ces deux méthodes en détail.

À partir des années 60, les réalisations pratiques de la conjugaison de phase ont permis des résultats impressionnants dans les systèmes optiques couplés et non linéaires, qui sont bien connus aujourd'hui. La diffusion Brillouin stimulée qui est une des plus beaux effets en optique non linéaire, est observé par R. Y. Chiao, B. P. Stoicheff et C. H. Townes qui sont de l'institut de technologie de Massachusetts en 1964 [15]. La conjugaison de phase par la diffusion Brillouin stimulée est d'abord réalisé par V. V. Ragul'skii, V. I. Popovichev, F. S. Faizullov et B. Y. Zel'dovich en 1972 [16]. L'enregistrement photographique d'amplitude et l'hologramme de phase, l'holographie en volume et la conjugaison de phase d'un rayon laser de haute puissance dû aux propriétés non linéaires d'un milieu représentent une liste incomplète des accomplissements indiqués. Presque en même temps, l'application des techniques de conjugaison de phase (par exemple les réseaux adaptables pour transmettre-recevoir) était également initiée dans des systèmes de radio-technologie. Dans le travail des premiers pionniers en holographie comme D. Gabor [17], on peut voir les idées de conjugaison de phase par les mélanges à quatre ondes.

En acoustique, dans les années 80, les études systématiques de la conjugaison de phase ont commencé théoriquement et expérimentalement par F. V. Bunkin et al [9, 18]. La mise en oeuvre en acoustique des idées et des technologies fournies par la physique du

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

laser a stimulé la recherche dans le domaine de la conjugaison de phase des faisceaux ultrasonores. Après, la focalisation par conjugaison de phase est devenue un domaine de la recherche expérimentale lié au développement de techniques efficaces d'acoustique dans les liquides [19, 20] (y compris dans l'océan [21, 22, 23]) et dans les solides [24]. La référence [24] a discuté le génération des ondes ultrasonores conjuguées, et plus important, la méthode paramétrique est discutée en utilisant le pompage électromagnétique dans les solides.

L'effet de la conjugaison de phase peut être mis en application expérimentalement par la méthode des miroirs à retournement temporel [25]. Ce domaine d'investigation a également montré des progrès considérables [21, 22, 23, 25, 26, 27].

1.2 Conjugaison de phase optique

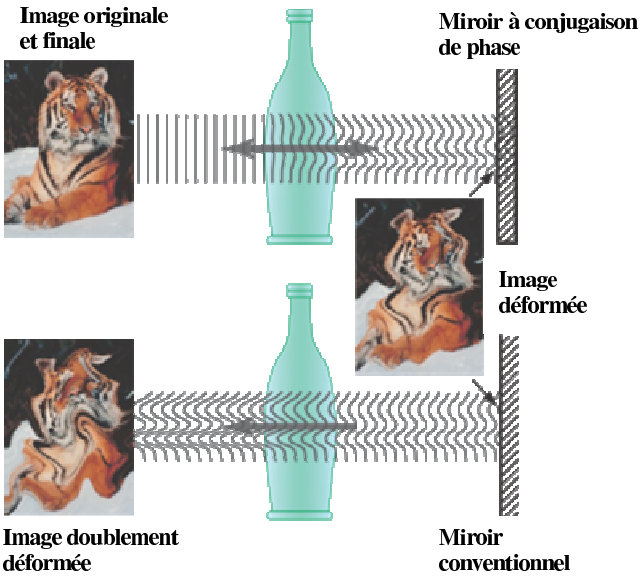


FIGURE 1.1 – Comparaison du miroir à conjugaison de phase et du miroir conventionnel. Avec le miroir à conjugaison de phase l'image n'est pas déformée quand elle passe deux fois par un élément d'aberration. Les fronts d'onde de l'image conjuguée sont renversés (conjugués) en respectant leur direction de la propagation. Les déviations introduites par l'élément d'aberration (la bouteille) sont donc éliminées lors du trajet inverse. En revanche l'image réfléchie par un miroir normal est plus déformée quand elle passe à travers la bouteille pour la deuxième fois.

En optique non linéaire, on peut renverser la direction de la propagation et la variation de phase d'un faisceau de lumière par un effet spatial. Le faisceau renversé est appelé l'onde conjuguée, et la technique, conjugaison de phase optique (ou retournement temporel,

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

retournement de front d'onde ou dispositif rétro-réfléchissant). Un exemple visuel est donné dans la figure (1.1). Ici on peut remarquer que le miroir conventionnel l'image du tigre est déformée deux fois en passant deux fois par la bouteille, mais quand on remplace ce miroir par le miroir à conjugaison de phase, l'onde réfléchie parcourt le même chemin comme l'onde initiale, on peut avoir une image non déformée comme originaire même passé des milieux de l'oberration.

On peut interpréter cette interaction optique non linéaire comme l'analogue d'un processus holographique en temps réel. Dans ce cas, les faisceaux interagissent dans un matériau optique pour construire un hologramme dynamique (deux des trois faisceaux incidents), ou diffractogramme en temps réel dans le matériau. Le troisième faisceau incident diffracte cet hologramme dynamique et produit une onde conjuguée. En fait, les trois faisceaux incidents interagissent (essentiellement) simultanément pour former des hologrammes en temps réel. Il en résulte une série d'ondes diffractées qui se forment en faisceau de "retournement temporel". Dans la langue de l'optique non linéaire on dit que les faisceaux en interaction créent une polarization non linéaire dans le matériau, ce qui produit l'onde conjuguée par radiation cohérente.

1.2.1 Processus

1.2.1.1 Conjugaison de phase par le mélange à quatre ondes

La façon la plus ordinaire pour produire la conjugaison de phase optique est d'utiliser la technique de mélange à quatre ondes dégénérées (Degenerate four-wave mixing). Le phénomène de la conjugaison de phase d'une onde électromagnétique peut être produit par cette technique. Dans la figure (1.2), il existe quatre faisceaux optiques, dans un cristal, verre, liquide ou un milieu de gaz comprimé. Les trois faisceaux de ces quatre sont donnés : un est le faisceau d'objet (ici c'est une onde sphérique) qui est conjugué par le système, les deux autres sont des faisceaux de référence. Le quatrième faisceau, le faisceau de sortie, est l'onde conjuguée désirée par l'onde d'objet.

1.2.1.2 Conjugaison de phase par la diffusion Brillouin stimulée

Il est aussi possible d'utiliser le processus de diffusion Brillouin stimulée (stimulated Brillouin scattering). En diffusion Brillouin stimulée, l'onde sonore ou la variation de pression-densité, n'est pas appliquée à l'extérieur du matériau, elle est stimulée à l'intérieur par des paires d'ondes optiques contra-propagatives. Comme l'onde sonore peut être comparée avec l'onde de pression-densité, la lumière peut être comparée avec le champ électrique en mouvement.

La diffusion Brillouin est la diffusion de la lumière par une onde sonore, c'est-à-dire par une onde de pression (et donc de densité) se propageant dans le milieu. Dans la diffusion Brillouin stimulée, l'onde de pompage excite un effet électrostrictif dans un milieu

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

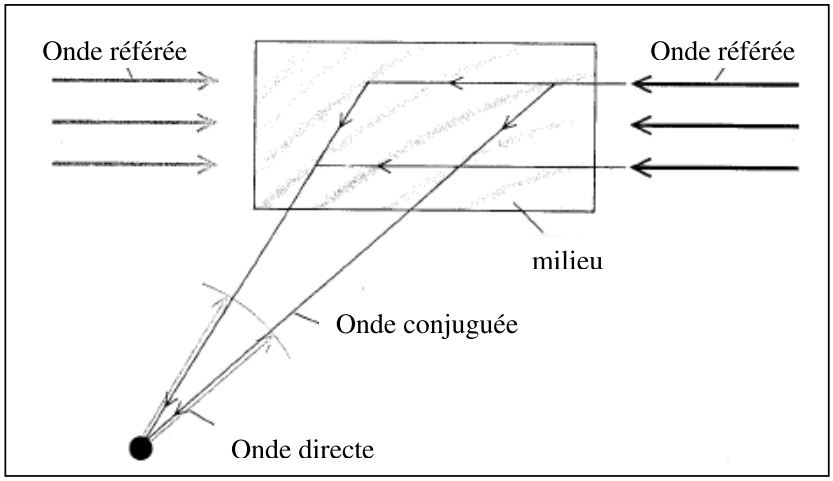


FIGURE 1.2 – Principe de la conjugaison de phase par le mélange à quatre ondes [13]

diélectrique transparent où l'on produit une onde acoustique progressive qui module l'indice de réfraction par l'effet élasto-optique. C'est l'équivalent d'un réseau dynamique de phase de diffraction, avec en direction opposée, une réplique conjuguée en phase d'une onde incidente.

Dans la première figure (1.3), un faisceau de lumière puissant et très orienté est déformé en traversant la plaque en verre qui est inhomogène en épaisseur (gauche). Le faisceau déformé entre dans un milieu transparent tel que cristal, verre, liquide ou gaz comprimé. Il diffuse par les petites fluctuations de densités distribuées statistiquement à l'extrémité du milieu, ce qui donne lieu à des ondes de différentes configurations spatiales. Lorsque la fréquence et la direction d'une onde diffusée sont justes, cette onde va interférer avec le faisceau incident et générer plus de variations de pression-densité dans le milieu. Ensuite ces variations réfléchissent une partie du faisceau incident. La partie réfléchie interfère avec le faisceau incident en retour en générant plus de variations de pression-densité. Les variations de pression-densité vont générer plus de réflexions du faisceau incident. Les réflexions s'établissent exponentiellement jusqu'à ce que le faisceau conjugué émerge du milieu. Un faisceau de haute qualité est rétabli par le faisceau conjugué en passant la plaque en verre.

1.2.1.3 Applications

Il existe nombreuses applications pour la conjugaison de phase optique car dans les systèmes optiques il est souvent nécessaire de compenser les distorsions statiques et dynamiques cas. L'article de D. M. Pepper [28] est un bilan de ces applications.

Dans les cas pratiques, c'est le miroir de conjugaison de phase qui donne des effets de propiétés de la conjugaison de phase. La figure (1.1) est un exemple simple. Dans la photolithographie, un échantillon de modèle peut être transféré d'un plan à l'autre en

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

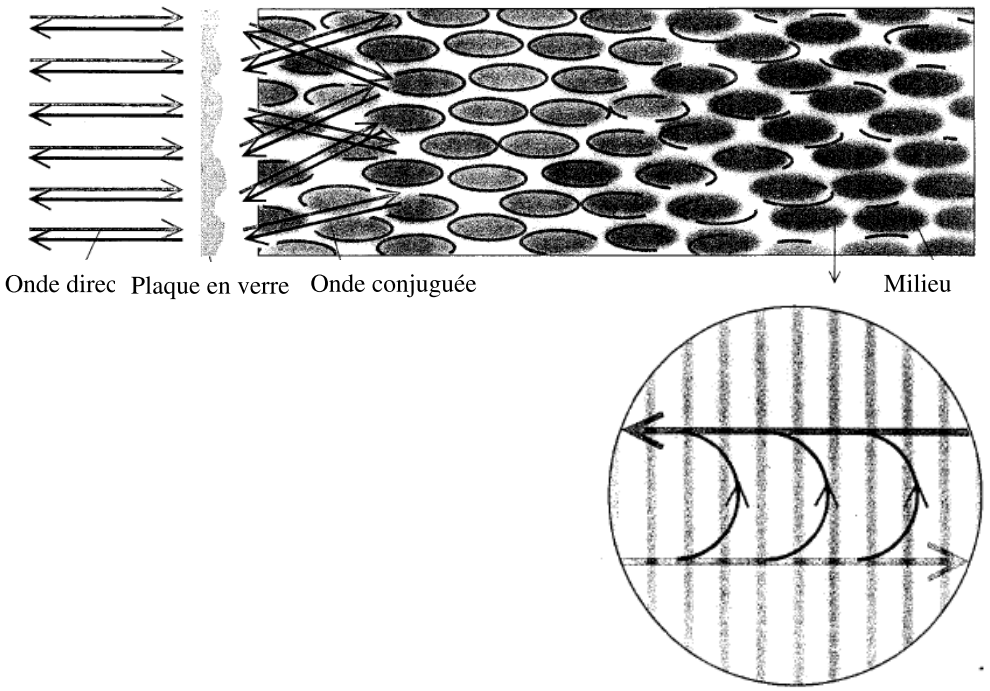


FIGURE 1.3 – Principe de la conjugaison de phase par la diffusion Brillouin stimulée [13]

utilisant un miroir de conjugaison de phase et sans lentille optique [29, 30]. Dans une fibre optique, le miroir de conjugaison de phase peut restorer les images déformées par les cables de fibre optique [31]. Dans le domaine atmosphérique, la turbulence qui produit des distorsions peut être compensée par la conjugaison de phase optique [32].

1.2.2 Théorie

1.2.2.1 Méthode de mélange à quatre ondes

Dans la technique de mélange à quatre ondes, un réseau est créé dans un milieu optique non linéaire du troisième ordre par deux ondes planaires de pompage avec les propagations opposées. Une onde faible incidente est couplée avec ces deux ondes par la nonlinéarité du troisième ordre. Une solution stable de cette interaction implique la création d'une onde conjuguée qui peut être amplifiée relativement à l'onde incidente. Cette amplification est stable et dépend des propriétés du système et en particulier de l'intensité des ondes du pompage.

Pour cette technique, on peut décrire les quatre faisceaux ($j = 1, 2, 3, 4$) avec des champs électriques :

$$\Xi_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} E_j(\mathbf{x}) e^{i(\omega_j t - \mathbf{k_j}\cdot\mathbf{x})},$$

où E_j sont les amplitudes du champ électrique. Ξ_1 et Ξ_2 sont les ondes du pompage, Ξ_3

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

l'onde du signal, et Ξ_4 l'onde conjuguée.

Si les ondes du pompage et l'onde du signal sont superposées dans un milieu avec un $\chi^{(3)}$ (indice du troisième ordre) non nul, ils vont produire un champ de polarisation non linéaire :

$$P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(3)} \Xi_1 \Xi_2 \Xi_3,$$

d'où il résulte une génération d'ondes avec des fréquences données par $\omega = \pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$ et les ondes de troisième harmonique avec $\omega = 3\omega_1, 3\omega_2, 3\omega_3$.

La condition sur la phase (phase-matching) détermine quelle onde est dominante. En choisissant les conditions où $\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ et $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$, on peut avoir un champ de polarization :

$$P_\omega = \frac{1}{2}\chi^{(3)} \epsilon_0 E_1 E_2 E_3^* e^{i(\omega t - \mathbf{k_j}\cdot\mathbf{x})}.$$

L'indice étoile signifie le complexe conjugué des amplitudes du champ électrique. C'est un champ qui produit le faisceau conjugué Ξ_4. Sa direction est donnée par $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$, donc si les deux faisceaux du pompage sont contrapropagatifs ($\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$), le faisceau conjugué et le faisceau signal se propagent suivant les directions opposées ($\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4$). Cela donne un effet de propriété rétro-réfléchissante.

1.2.2.2 Méthode de diffusion Brillouin stimulée

Pour la conjugaison de phase par la diffusion Brillouin stimulée, on considère une situation avec deux ondes monochromatiques avec différentes fréquences $E_L(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{2}[E_L(\mathbf{R}) \exp(-i\omega_L t) + c.c.]$ et $E_S(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{2}[E_S(\mathbf{R}) \exp(-i\omega_S t) + c.c.]$ qui se propagent dans un milieu. Ici, selon la terminologie établie, E_L est l'onde du pompage laser et E_s est l'onde de Stokes. Le processus de diffusion stimulée est possible quand la différence entre les fréquences de ces deux ondes $\Omega = \omega_L - \omega_S > 0$ est proche de la fréquence Ω_0 d'une certaine oscillation intrinsèque du milieu. En plus, un certain mécanisme doit exister pour permettre au réseau d'interférences des champs $[E_L^*(\mathbf{R}) E_S(\mathbf{R}) \exp(i\Omega t) + c.c.]$ d'exciter ces oscillations intrinsèques, et permettre en même temps la modulation de la permittivité du milieu.

Dans la diffusion Brillouin stimulée, ces oscillations intrinsèques du milieu correspondent à des ondes acoustiques de très haute fréquence $\Omega_0/2\pi \sim 10^9$ Hz (hypersonique), et le mécanisme d'excitation est produit par la force électrostrictive pour une grande valeur de l'intensité du champ local $|E(\mathbf{R}, t)|$.

La diffusion Brillouin stimulée se manifeste généralement sur le spectre de transmission de l'onde sonore sous la forme des deux résonances de forme lorentzienne centrées en Ω_B fréquence de 1'onde acoustique, et dont l'amplitude est d'autant plus importante

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

que l'angle entre le pompage et l'onde sonore est proche de π (ondes se propageant en sens opposés). Son interprétation est particulièrement commode dans le cadre d'une approche classique, en termes de couplage paramétrique entre les champs lasers et l'onde de densité, considérée comme un champ de phonon acoustique [33].

1.2.2.3 Comparaison des différentes méthodes

La plupart des investigations en optique sont consacrées à deux méthodes principales : la conjugaison de phase par diffusion Brillouin stimulée et le mélange à quatre ondes.

Chaque méthode de conjugaison de phase optique a son avantage et en même temps son inconvénient. Pour la diffusion Brillouin stimulée, un avantage important est le fait que l'auto-conjugaison de la phase est réalisée. Grâce à cela, l'aberration arbitraire, qui se produit quand l'onde excitante passe par des éléments optiques hétérogènes, a très peu d'effet sur la conjugaison de phase optique. La qualité est ainsi assez élevée. L'inconvénient de la diffusion Brillouin stimulée est qu'il faut dépasser un seuil pour que le processus s'installe. Pour cela, on a besoin d'une énergie assez forte pour que l'onde puisse être conjuguée.

Pour les méthodes holographiques (mélange à quatre ondes, holographie statique, etc.) l'énergie des ondes incidente et conjuguée peut être plus faible. Un avantage de ces méthodes est la possibilité d'avoir une réflectivité supérieure à 1, c'est à dire la possibilité d'amplification. En plus, ces types de méthodes permettent des possibilités plus larges pour la sélection du signal, le contrôle de l'onde conjuguée et le choix de la vitesse de réponse. L'inconvénient principal de ces méthodes porte sur les conditions de qualité optique des ondes incidentes et sur la nonlinéarité du milieu qui sont assez strictes.

La méthode de conjugaison de phase paramétrique est assez attractive du point de vue général, mais elle est peu utilisée en optique à cause de la difficulté de création de modulation synchrone à la fréquence double de l'onde incidente dans un grand volume.

1.3 Conjugaison de phase acoustique

Les études de la conjugaison de phase acoustique commencent dès les années 1980. Plusieurs méthodes pour générer la conjugaison de phase sont proposées. Certains phénomènes physiques connus contiennent la conjugaison de phase. Depuis lors, un nombre considérable d'études sur ce sujet a été rapporté. Les études se prolongent aussi sur les applications pratiques avec des instruments ultrasonores. La plupart des études en conjugaison de phase acoustique ont été faites ces 20 dernières années.

Par exemple, les expériences de la conjugaison de phase acoustique pour la technique de la réflexion de surface [34]. La nonlinéarité associée au changement de profil de surface d'un liquide due à la pression radiale (proposé originalement pour les ondes optique de

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

la conjugaison de phase [35]) est beaucoup plus efficace en acoustique qu'en optique. En fait, la pression radiale sur une surface complètement réfléchissante est définie par $p = 2I/v$, où $I = |A|^2$ est la densité d'énergie et v est la vitesse radiale du son. Comme la vitesse du son est 10^5 à 10^6 moins élevée que celle de lumière, pour la même valeur d'énergie, les effets acoustiques de surface sont plus importants qu'en optique avec le même facteur. Dans ces expériences, l'onde acoustique et le signal ont une fréquence $f = 3$ MHz, la durée d'impulsion est $\sim 4 \times 10^{-4} s$ [34].

1.3.1 Développement expérimental

En 1981, la première étude expérimentale de la conjugaison de phase acoustique est faite par F. V. Bunkin et al [36]. Les auteurs ont discuté le retournement de l'onde acoustique avec amplification dans une surface liquide. Dans cette article, la nonlinéarité temporelle pour la conjugaison de phase est considérée. Aussi, cette propriété peut être appliquée à la conjugaison de phase seulement dans certains cas particuliers de liquides visqueux. Les premiers matériaux non linéaires utilisés pour réaliser le mécanisme d'holographie acoustique étaient les liquides. Cependant le succès a été limité à cause de la propriété d'advection des liquides qui produisait des ondes en dents de scie. Dans les liquides avec des bulles [18] le phénomène peut être observé avec environ 1% d'efficacité [37]. La conjugaison de phase paramétrique a vraiment été développée quand le pompage acoustique a été abandonné pour la modulation des paramètres du milieu. C'est la raison du choix de milieux actifs solides dans lesquels la vitesse du son peut être modulée par un champ externe. Parmi eux certaines ferrites de Nickel magnétostrictives présentent un intérêt particulier à cause de leur magnetostriction géante. Le champ externe est donc un champ magnétique.

Selon M. Ohno et al [38], les méthodes expérimentales de la conjugaison de phase acoustique ont été classées en quatre groupes : la méthode purement acoustique [36, 39, 40, 41], piézoélectriques non linéaire [8, 38, 42, 43], magnetoacoustic non linéaire [10, 44], et la méthode purement électrique [45, 25, 26, 27, 46]. Nous allons utiliser la même méthode de classement dans ce chapitre. Les trois premières méthodes impliquent une certaine interaction physique entre les ondes acoustiques elles-mêmes ou entre les ondes acoustiques et le champ extérieur électrique ou magnétique, tandis que la quatrième méthode utilise le traitement de signal avec les circuits électriques.

1.3.1.1 Miroir à retournement temporel

Nous allons d'abord présenter la quatrième catégorie : la méthode purement électrique. Cette méthode est souvent appelée miroir à retournement temporel acoustique, et est très différente des trois méthodes de conjugaison de phase acoustique. Depuis les années 90, les expériences de retournement temporel sont mises en oeuvre en acoustique par M. Fink et al[45, 25, 46] en utilisant des matrices de capteurs piézo-électriques. Un miroir

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

à retournement temporel échantillonne et enregistre la trace d'un champ acoustique incident, puis reémet ce champ dans une chronologie inversée. Un tel dispositif permet de focaliser une onde à travers un milieu hétérogène.

Le retournement temporel acoustique est réalisé expérimentalement par des transducteurs piézoélectiques pour transformer les ondes acoustiques en signaux électriques. Les transducteurs sont connectés à un ordinateur pour numériser et renverser les signaux électriques. La figure (1.4) représente le principe du retournement temporel acoustique [46].

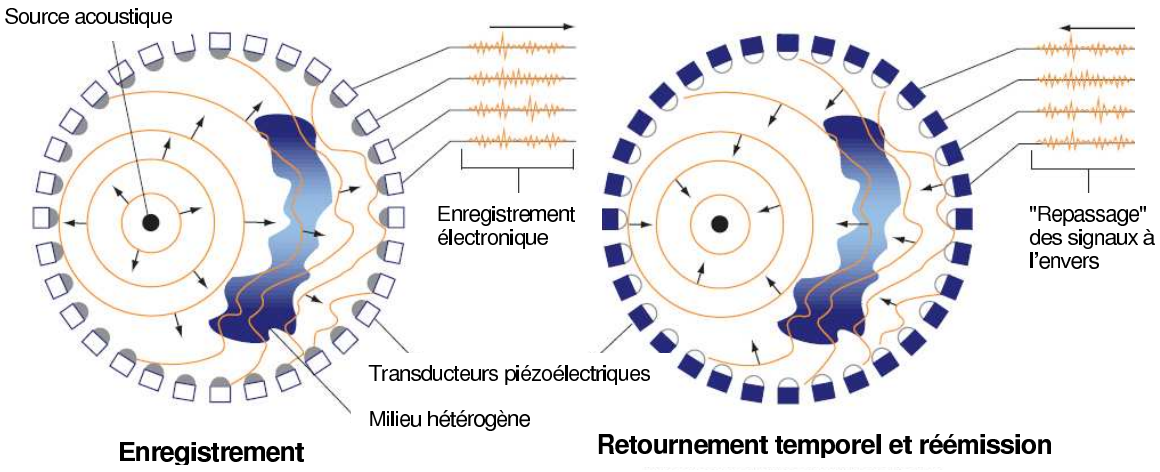


FIGURE 1.4 – Miroir du retournement temporel acoustique. Le processus est fait en deux étapes. Dans la première étape (gauche) une source émet des ondes acoustiques qui se propagent et sont déformées par l'effet hétérogène dans le matériau. Chaque transducteur de l'ensemble du miroir détecte l'arrivée du son à sa position et communique le signal à l'ordinateur. Dans la seconde étape (droite), chaque transducteur repasse son signal acoustique à l'envers et en synchronisation avec les autres transducteurs. Les ondes originales sont recrées et se propagent à l'envers, en retraçant en l'envers leur chemin incident dans le matériau. Malgré leur déformations, elles se refocalisent au point original de la source. [45]

Cette technique est extrêmement efficace quand la fréquence est inférieure à 10 MHz mais ici le retournement temporel est obtenu par un processus numérique et non par un effet physique. Cette technique a le grand avantage d'ignorer des restrictions liées à la forme du signal, mais peut parfois s'avérer complexe.

1.3.1.2 Conjugaison de phase purement acoustique

Les études systématiques des méthodes de conjugaison de phase purement acoustiques ont été commencées au début des années 80 par F. V. Bunkin et al. [9] quand le pro-

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

grès des techniques expérimentales d'acoustique les a rendues possibles. La plupart des études expérimentales sur la conjugaison de phase acoustique sont catégorisées dans la méthode purement acoustique. Dans [9], F. V. Bunkin et al. ont discuté l'amplification de la conjugaison de phase acoustique paramétrique. Le milieu actif utilisé dans cette expérience était un liquide qui contient des bulles, et le pompage était un champ électrique alternatif. Dans le même période, les autres auteurs ont aussi suggéré et démontré expérimentalement la génération de la conjugaison de phase via des effets non linéaires dans un liquide contenant des bulles [39, 40], la surface liquide [36], et les ondes thermiques [41]. Ces méthodes purement acoustiques fonctionnent à des fréquences acoustiques relativement faibles (kHz-MHz). C'est parce que l'interaction non linéaire se fait dans les liquides, où l'absorption acoustique est grande à fréquence élevée.

1.3.1.3 Conjugaison de phase piézoélectrique

La deuxième catégorie est la méthode non linéaire piézoélectrique. Cette méthode est basée sur l'interaction paramétrique entre des ondes acoustiques à une fréquence ω et un champ électrique à une fréquence 2ω. R. B. Thompson et C. F. Quate [47, 8] ont beaucoup étudié ce phénomène, avec un intérêt particulier dans la génération d'un champ électrique à 2ω (3 GHz) en mélangeant deux ondes acoustiques à ω. Cependant dans ce contexte physique, la croissance exponentielle était rapidement contrebalancée par des processus de saturation dus à la nonlinéarité des propriétés du milieu. Dans les années 1980, après la prospérité de la recherche de la conjugaison de phase optique, cette interaction non linéaire piézoélectrique a attiré l'attention des chercheurs avec un intérêt particulier pour le front d'onde des ondes acoustiques. M. Ohno et K. Yamamoto [48, 38] ont présenté le principe et les résultats expérimentaux de la conjugaison de phase acoustique non linéaire par piézoélectricité. Dans ces expériences, les ondes conjuguées à la fréquence ω sont générées comme le résultat de l'interaction entre les ondes acoustiques incidentes et les champs électriques de pompage à 2ω. La vitesse du son est modulée par le champ électrique.

Expérimentalement, A. P. Brysev et al. [43, 49] ont réussi la conjugaison de phase paramétrique en modulant les paramètres du milieu à fréquence double de celle de l'onde incidente. L'onde conjuguée acoustique est aussi observée par la répartition spatiale complexe des amplitudes et phases. Dans cette expérience, la vitesse du son dans le cristal $LiNbO_3$ est modulée par un champ électrique uniforme avec une fréquence 16 MHz double de l'onde du signal. Le champ externe E est $\sim 30kV/cm$, la longueur de l'interaction est $\sim 2cm$.

1.3.1.4 Conjugaison de phase magnéto-acoustique (CPMA)

La troisième catégorie est la méthode de conjugaison de phase magnéto-acoustique. C'est la même méthode que la deuxième catégorie mais avec un milieu magnétique. La recherche sur cette méthode est un sujet principal du laboratoire Européen Associé en

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Magnétoacoustique non linéaire de la matière condensée (LEMAC). Ici l'onde acoustique conjuguée est produite par l'interaction paramétrique entre l'onde initiale à une fréquence ω et le champ magnétique à une fréquence 2ω. Cette interaction s'effectue dans un milieu magnéto-acoustique par exemple à hematite ($\alpha - Fe_2O_3$) [50, 51]. Il faut noter ici que, dans la méthode non linéaire piézoélectrique et la méthode magnéto-acoustique, la fréquence acoustique peut être relativement élevée (MHz-GHz). Ceci est lié au fait que ces interactions se produisent dans des milieux solides, où l'absorption acoustique est beaucoup plus petite que dans un liquide.

En 1986, T. A. Krasil'nikov et al [51] ont vérifié le possibilité de l'amplification de l'onde conjuguée expérimentalement pour la WPC acoustique dans un cristal d'hématite de $7 \times 3 \times 2$ mm. La fréquence de l'onde était 30 MHz. Le champ magnétique était de moins de 0.5 kOe (39.8 A/m). L'amplification substantielle était de 35 dB. La nonlinéarité du milieu rend le signal conjugué d'amplitude assez faible par rapport aux énergies émises et donc cette technique n'est pas adaptable en pratique.

En 1988 A. P. Brysev et al [10, 44] ont trouvé expérimentalement une bonne efficacité de la conjugaison de phase magnéto-acoustique dans une céramique magnetostrictive à base de ferrite de nickel ($NiFe_2O_3$). Dans cette expérience, la fréquence est 30 MHz, l'amplification dépasse 80 dB. C'est le début de toutes les expériences faites par LEMAC. L'article [24] est une bonne revue pour la conjugaison de phase ultrasonore. Dans cet article, on peut avoir une connaissance d'ensemble de toutes les expériences faites avant l'année 1998. L'article [52] est une autre bonne revue sur la conjugaison de phase acoustique mais décrit aussi les résultats expérimentaux et théoriques récents de la conjugaison de phase acoustique non linéaire.

Cette méthode de conjugaison de phase acoustique ou ultrasonore est un couplage non linéaire au sein d'un milieu actif entre une onde acoustique incidente et une source d'énergie oscillante. Sous l'effet de cette source d'énergie, le milieu actif module ses propriétés élastiques, ce qui permet à l'onde acoustique de pomper cette énergie lorsque certaines conditions de résonance paramétrique sont remplies. L'onde incidente est alors amplifiée exponentiellement et par conservation de la quantité de mouvement donne naissance à une onde "conjuguée" inversée temporellement mais ayant la même amplification, c'est le mode supercritique. En pratique le conjugateur est un cylindre de matériau magnétostrictif (exemple : une ferrite de Nickel) qui permet une modulation d'amplitude de l'ordre de 4 % de son module de compressibilité sous l'effet d'un champ magnétique alternatif (Fig. 1.5) [10]. Ce champ est réalisé à l'aide d'un solénoïde coaxial au conjugateur. En première approximation, une théorie unidimensionnelle suffit à décrire les principales caractéristiques du comportement du conjugateur. Pour que la résonance paramétrique survienne, l'onde incidente doit contenir une composante de fréquence ω, moitié de celle du champ magnétique Ω.

Le régime supercritique, comparable au régime LASER, procure l'obtention d'une émission stimulée de paires de phonons d'impulsions opposées et finalement une amplification géante des ondes ultrasonores conjuguées en phase. Le gain de cette amplification peut atteindre plus de $80dB$.

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

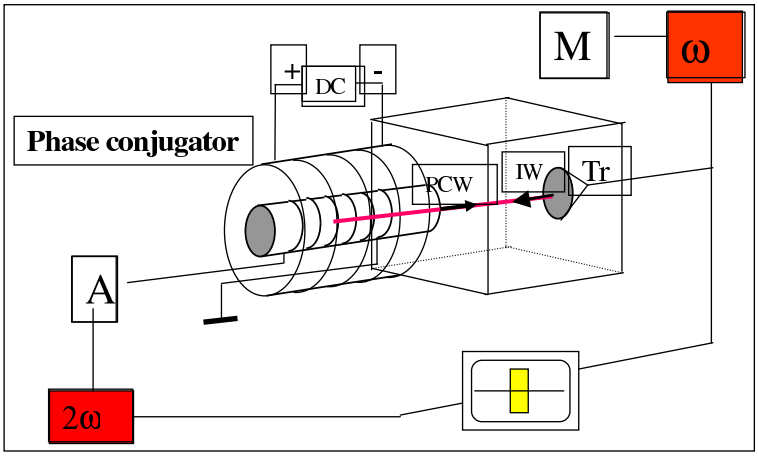


FIGURE 1.5 – Conjugateur à magnétoacoustique.

Pour une modulation donnée de la vitesse du son, l'efficacité de la conjugaison de phase paramétrique augmente si l'on augmente le rapport entre la zone d'interaction et la longueur d'onde acoustique. Pour une longueur de la zone active fixe, cette efficacité va augmenter avec la fréquence. Ainsi les conjugateurs utilisés dans les expériences se limitent à la gamme ultrasonore. Dans les expériences, cette efficacité est mesurée par la détection de l'amplification de l'onde conjuguée dans le milieu extérieur. Le pompage dans les expériences doit dépasser un seuil de l'instabilité paramétrique absolue de phonons spécifié.De part ses performances et potentialités c'est toujours le mode supercritique qui attire le plus l'attention pour l'instant pour les applications et les recherches théoriques.

1.3.1.5 Applications de la conjugaison de phase magnéto-acoustique

Du point de vue des applications, le grand intérêt de la WPC paramétrique a été démontré récemment en imagerie acoustique [53, 54, 52]. La méthode de CPMA offre de nombreuses nouvelles fonctions pour les techniques ultrasonores, avec des perspectives d'applications dans des domaines très divers, tels que l'imagerie et la thérapie acoustique, le contrôle non destructif et la mesure ultrasonore. En particulier, le LEMAC a étudié les propriétés générales de la conjugaison de phase permettant le pointage ou la focalisation automatique temps réel des faisceaux ultrasonores sur des cibles. Ce phénomène est applicable pour la focalisation automatique d'ultrasons dans le domaine médical, comme par exemple en hyperthermie ou lithotritie. Par ailleurs il a étudié les possibilités de compensation des distorsions de phase engendrées par la propagation des ondes au travers de milieux hétérogènes. Les améliorations des images obtenues par cette approche sont illustrées (Fig. 1.6) dans un exemple de microscopie acoustique [53]. Ainsi cette technique permet le développement d'une nouvelle approche des systèmes d'imagerie échographique et de contrôle non destructif.

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

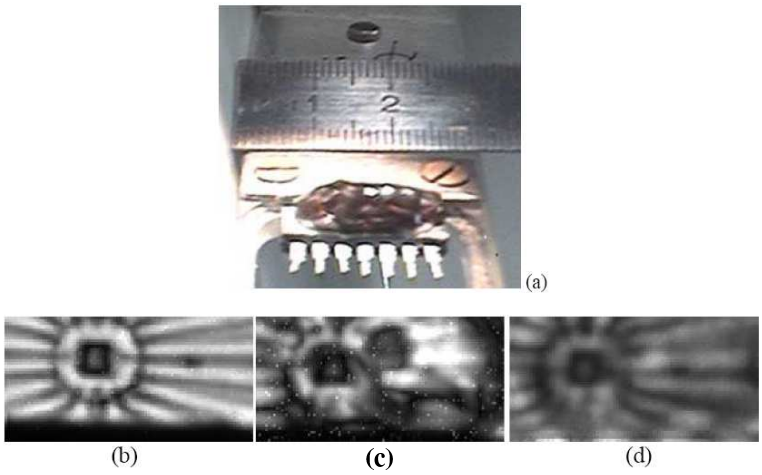


FIGURE 1.6 – (a) objet observé, (b)-(d) images par microscope acoustique : (b) image par mode de transmission conventionnel sans couche d'aberration, (c) identique à (b) avec couche d'aberration, (d) identique à (c), avec compensation par conjugaison de phase [53].

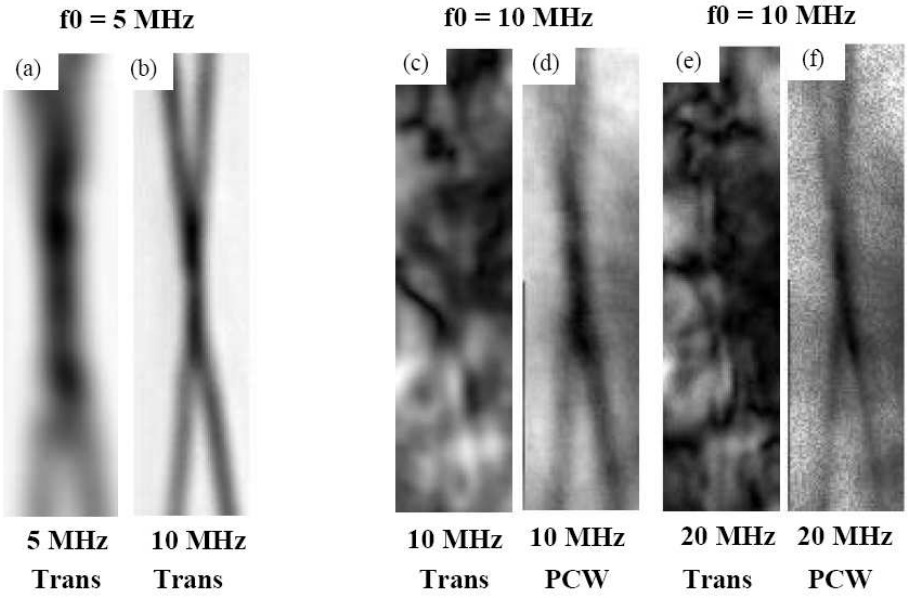


FIGURE 1.7 – Imagerie non linéaire par CPMA : Figures (a) et (b) : Images de microscopie acoustique conventionnelle par transmission réalisée avec la première et deuxième harmonique respectivement au travers d'un milieu homogène. Figures (c) et (e) : Même configuration mais en présence d'un milieu de distorsion : l'objet n'est plus visible. Figures (d) et (f) : Même configuration que (c) et (e) mais avec CPMA : L'image est restaurée aussi bien pour la première harmonique, que pour la seconde [54].

De plus, en raison de sa spécificité d'amplification géante, la sphère d'applications de cette nouvelle technique peut être étendue au domaine de l'acoustique non linéaire, avec des applications à l'imagerie harmonique, à l'élastographie ou aux techniques ultrasonores de haute puissance [54]. Il a en particulier montré dernièrement que la spécificité

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

de compensation des distorsions par la conjugaison de phase est conservée en imagerie harmonique avec la possibilité d'amélioration de la résolution (Fig. 1.7). Par ailleurs, le couplage de la conjugaison magnétoacoustique avec les techniques non linéaires permet d'obtenir une super-résolution de positionnement.

Depuis 2004, la WPC a été appliquée pour mesurer la distribution de la vitesse d'un écoulement liquide [55]. Une propriété fondamentale de la WPC est la reconstruction de l'onde principale sur le point de source. Cette reconstruction de la phase est directement liée à l'invariance du champ acoustique par retournement temporel. Cela permet de compenser les aberrations de phase. Comme la présence de l'écoulement dans la propagation peut entraîner un déphasage Doppler non-compensé de l'onde conjuguée sur le point initial, cela peut être utilisé pour mesurer la vitesse de l'écoulement à l'aide d'un conjugateur. En détail, quand l'onde directe passe par l'écoulement qui a une vitesse v, elle subit un incrément de phase $\Delta\varphi_i = k \cdot d/(1 - v/c)$. L'onde conjuguée aura un déphasage $\Delta\varphi_c = k \cdot d/(1 + v/c)$. Par conséquent, le signal détecté a donc une phase

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_i - \Delta\varphi_c = \frac{2kd \cdot \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

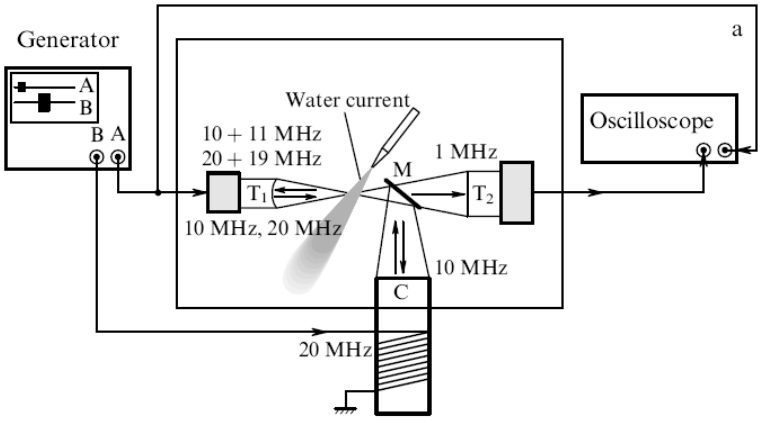


FIGURE 1.8 – Mesure de vitesses dans l'eau par WPC : dispositif experimental (T1 et T2 sont la source ultrasonore et le détecteur, C est le conjugateur.) [56].

Donc si $v \ll c$ le déphasage total est proportionnel à la vitesse de l'écoulement et peut être utilisé pour la mesure la valeur et la direction. En [56], Pyl'nov et al a analysé l'harmonique fondamental et le second harmonique de la conjugaison de phase pour des signaux avec une onde basse fréquence. Dans cette expérience (Fig. 1.8), une onde basse fréquence est produite par l'interaction du second harmonique conjugué à 20MHz et avec une impulsion additionnelle à 19 MHz suivant la même direction. La phase de l'onde à basse fréquence est analysée pour produire l'image. L'utilisation du second harmonique a doublé le déphasage enregistré, l'utilisation de l'excitation basse fréquence a augmenté le rapport signal/bruit, et cela peut améliorer le traitement numérique des signaux enregistrés.

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

1.3.2 Méthodes théoriques

1.3.2.1 Méthode de D. L. Bobroff et H. A. Haus

En 1965, la recherche en acousto-optique est initiée par N. M. Kroll [1] et D. L. Bobroff [2], auteurs d'un développement théorique pour trouver les solutions des équations couplées du processus. En 1967, D. L. Bobroff et H. A. Haus [3] ont mit en evidence des solutions générales pour la réponse impulsionnelle d'un système à deux ondes couplées avec un pompage linéaire. Les solutions concernent un système homogène infini ou fini unidimensionnel, avec une zone active finie pour une onde initiale à large bande. Le système infini est analysé par transformée de Laplace en temps et transformée de Fourier en espace. La solution pour le système fini est obtenue par deux méthodes. La première est une transformée Laplace-Fourier comme le cas précédent, la seconde est une méthode des images utilisée dans les problèmes électromagnétiques conventionnels. Les solutions sont obtenues sous forme de formules très compliquées mais permettant une discussion large sur les différentes solutions oscillantes. L'existence de situations absolument instables est établie. Ces solutions croissent exponentiellement en fonction du temps. Malheureusement le papier est focalisé plus sur la diffusion Brillouin et fournit très peu de commentaires sur ces dernières solutions "instables". La solution trouvée dans cet article est construite comme une étape parcours des ondes. Quand il y a plusieurs parcours, la solution n'est plus exploitable.

1.3.2.2 Méthode de R. B. Thompson et C. F. Quate

En acoustique, dès l'année 1970, R. B. Thompson et C. F. Quate [47, 8] ont étudié la théorie non linéaire pour l'amplification et génération des onde acoustique dans un cristal de $LiNbO_3$. Là, le processus physique n'était pas de type holographique mais bien une résonance paramétrique entre le champ électrique uniforme dans l'espace (pompage) à la fréquence 2ω et une onde acoustique de fréquence ω. Dans ces études théoriques, pour décrire le couplage entre les propriétés électrique et élastique des solides cristallins, les auteurs ont utilisé la dérivation des équations du mouvement et les relations constitutives nonlinéaires. Ils ont trouvé des équations couplées en appliquant les principles de couplage paramétrique [57]. La solution exponentielle trouvée est

$$U_1 = A\left(\sin\Gamma a + \frac{\Gamma\cos\Gamma a}{|\kappa/r_0| - \delta/v}\right)\exp[(\delta - \alpha v)t + j\phi]$$

$$U_2 = \frac{jA}{\kappa_{12}^*}\left(\frac{|\kappa/r_0|\delta/v - |\kappa|^2}{|\kappa/r_0| - \delta/v}\sin\Gamma a + \frac{\Gamma|\kappa/r_0|\cos\Gamma a}{|\kappa/r_0| - \delta/v}\right)\exp[(\delta - \alpha v)t - j\phi]$$

où $U_{1,2}$ sont des amplitudes lentes des ondes, A est une constante réelle arbitraire, $\Gamma = [\kappa_{12}\kappa_{21}^* - \alpha^2]^{1/2}$, $\tan\phi = \alpha/\Gamma$, a est la coordonnée matérielle du treillis, κ est le coefficient de couplage paramétrique, v est la vitesse du son non modulée, α est le coefficient de

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

dissipation, r est le coefficient de réflexion aux frontières. L'équation

$$\tan \Gamma L = -\frac{\Gamma(1-|r_0 r_L|)}{\delta v(1+|r_0 r_L|)-|r_0\kappa|-|r_L\kappa|}$$

peut décrire les conditions aux frontières avec $\delta = v(|\kappa|^2-\Gamma^2)^{1/2}$. Malheureusement, dans ce travail, l'intérêt principal était l'effet de convolution des deux ondes acoustiques mais pas la propriété d'amplification de l'onde conjuguée.

1.3.2.3 Méthode de A. P. Brysev et al

En 1988, A. P. Brysev et al [10] ont analysé le mécanisme de formation du signal de la conjugaison de en la mode transitoire. Cette étude a expliqué théoriquement pour la première fois l'instabilité exponentielle. Dans ce travail, le système est décrit par les équations paramétriques couplées pour les amplitudes des onde directe $A(z,t)$ et onde conjuguée $B(z,t)$:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+c\frac{\partial A}{\partial z}+hB^*=0; \quad \frac{\partial B^*}{\partial t}-c\frac{\partial B}{\partial z}+hA=0$$

où c est la vitesse du son, et h est le coefficient de l'interaction paramétrique. La solution de l'onde conjuguée à l'instant τ dans la période du pompage et sur $z=0$ est donnée comme

$$\begin{aligned} B^*(z=0,\tau) &= \left[\frac{2}{h\tau}I_1(h\tau)-I_0(h\sqrt{\tau^2-T^2})+2\frac{\tau-T}{\tau+T}I_2(h\sqrt{\tau^2-T^2})\right. \\ &\quad \left.-(\frac{\tau-T}{\tau+T})^2 I_4(h\tau)-I_0(h\sqrt{\tau^2-T^2})\right]\left(-\frac{A_0 h}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où I_i est la fonction de Bessel modifiée, T est le temps initial du pompage.

Cette équation décrit une impulsion à fort accroissement avec une enveloppe asymétrique sous la condition $hT > \pi$ ce qui correspond au cas où le pompage excède la valeur du seuil.

1.3.2.4 Méthode de P. Pernod et V. Preobrazhensky

En 2000, P. Pernod et V. Preobrazhensky [58] ont démontré par la technique magnéto-acoustique la possibilité de la conjugaison de phase paramétrique de l'impulsion à large bande. Dans cette recherche, le mode de la conjugaison de phase était supercritique, ce qui permet d'avoir un processus efficace dans le cas quasi-linéaire. La théorie linéaire pour

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

le cas supercritique est trouvée dans cet article et correspond au résultat expérimental. La répartition spatiale est décrite comme

$$B_\delta = B_0 \sin[qL(z/L - 1)],$$

où z est l'axe parallèle au conjugateur, L est la longueur de la zone active. qL est un paramètre en fonction du taux de croissance Γ, et

$$\Gamma = -v/L(qL)\cot(qL) \tag{1.2}$$

où v est la vitesse du son transversale dans le conjugateur ($v = 3100m/s$). Dans cette interprétation, l'équation (1.2) donne une expression de la fonction de l'enveloppe exponentielle. L'expression du seuil de l'instabilité paramétrique est donnée :

$$I_c = I_0 \frac{\pi}{2} / \sqrt{(\frac{I}{v}\Gamma)^2 + (qL)^2} \tag{1.3}$$

Cette équation pour la formule du seuil théorique à un intérêt pratique car dans les expériences il est souvent difficile de trouver la valeur du seuil I_c. En effet dans les expérience pour trouver cette valeur du seuil, on a besoin d'une durée du pompage suffisamment longue et à ce moment là la compétition entre le signal d'onde et les phonons thermiques est plus important.

1.3.3 Simulations numériques

1.3.3.1 Algorithme pseudospectral

Pour le cas du conjugateur bidimensionnel axisymétrique, O. Bou Matar et al a développé un modèle numérique pour la conjugaison de phase paramétrique ultrasonore dans un solide actif cylindrique et de longueur finie [59]. Ils ont utilisé un algorithme pseudospectral dans le domaine temporel efficace pour les problèmes à grande échelle. Ils ont tenu compte de la différence de modulation entre les ondes longitudinales et transversales. Le champ acoustique dans la zone active cylindrique est calculé pour la WPC paramétrique supercritique. Les résultats sont comparés avec les résultats numériques unidimensionnels déjà obtenus [11] et les expressions analytiques qui sont présentées dans [60].

Dans ce travail, les auteurs ont aussi étudié numériquement la conjugaison de phase du deuxième harmonique. Dans le calcul numérique, le faisceau focalisé est déformé lors de sa propagation au travers d'une couche hétérogène. La compensation des déformations de phase permet d'obtenir une excellente rétro focalisation. Les résultats numériques obtenus sont en concordance avec les calculs analytiques d'acoustique géométrique non linéaire.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

1.3.3.2 Schema Godunov

Les études numériques de WPC unidimensionnelle ont été faites pour des pompages linéaires [11] et avec régime de saturation non linéaires [12].

Dans le papier de Ben Khelil et al [11], le schéma du type Godounov est appliqué à la simulation numérique de propagation des ondes pour des milieux hétérogènes (à la fois solides et liquides). Les auteurs ont considéré une impulsion large bande. La dynamique supercritique du champ acoustique est décrite pour un système unidimensionnel qui contient une zone active solide. Les calculs numériques correspondent bien avec la théorie asymptotique analytique de Bobroff [3] et Thompson [47, 8] pour la réponse à une impulsions dans une zone active finie au sein d'un milieu infini.

L'investigation menée dans le papier [12] concerne le mécanisme de saturation du cas supercritique de la conjugaison de phase paramétrique dans un milieu magnétostrictif. La simulation numérique considère deux mécanismes non linéaires d'interaction entre la déformation élastique et l'excitation électromagnétique.

Le premier est la déplétion du pompage où le feed-back du conjugateur est en phase avec le champ du pompage. Cette situation se produit dans le conjugateur magnétostrictif quand le matériau actif et le solénoïde autour sont introduits dans un champ électrique résonnant. Dans ce cas là, la modulation de la vitesse du son $c(t)$ par le champ magnétique externe est décrit par la formule :

$$c^2(t) = c_0^2 \left[1 + m \left(\cos(\Omega t + \psi) + \frac{mMc_0^2}{2P_e l} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \right],$$

où u est le déplacement élastique, M et l sont la masse et la longueur de la partie active de l'échantillon, $P_e = U_0^2/R$ est la puissance électrique de la source du pompage, U_0 est l'amplitude de la tension de la source électrique, R est la résistance active du circuit. m la profondeur de modulation et ψ le déplacement de phase arbitraire. Ces notations sont utilisées aussi dans cette thèse.

Le second mécanisme est un mécanisme où le feed-back entraîne un déplacement de phase du champ magnétique. Ce mécanisme peut être observé si la source de la tension électrique est chargée directement par le solénoïde autour du milieu actif magnétostrictif. Ce cas correspond à la formule de modulation de la vitesse du son :

$$c^2(t) = c_0^2 \left[1 + m \left(\cos(\Omega t + \psi) + \frac{mMc_0^2\Omega}{2P_e l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \right],$$

avec ici $P_e = U_0^2/(\Omega L)$, et L coefficient d'induction du circuit.

Les comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux montrent que le mécanisme de déplétion d'amplitude correspond mieux aux résultats expérimentaux.

Pour étudier l'influence de la géométrie du conjugateur, des simulations ont été étendues à deux dimensions. P. Voinovich et A. Merlen ont présenté une simulation numérique

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

pour la WPC en 2D [61]. Le papier est concentré sur les effets de réflexion oblique des ondes aux frontières d'un échantillon solide magnétostrictif bidimensionnel. Le code qui est présenté dans ce papier a été testé pour les effets de dispersion et dissipation numérique, et les effets géométriques ont été analysés pour le milieu élastique isotrope et pour un pompage linéraire isotrope. Le modèle est mis en oeuvre par les schémas de type Godounov du second ordre comme dans les papiers [62, 11]. Ce sont les mêmes types de schémas que ceux utilisés dans cette thèse.

1.3.4 Positionnement de la présente thèse

Cette thèse est une étude théorique et numérique de la conjugaison de phase magnétoacoustique non linéaire paramétrique. On va traiter le problème dans le cadre de l'hypothèse de pompage linéaire. Cela signifie que les propriétés du milieu actif sont données par une petite perturbation du premier ordre des propriétés passives. La vitesse du son modulée c est donc liée à la vitesse du son au repos c_0 par :

$$c^2 = C^2(t) = c_0^2[1 + m\cos(\Omega t + \varphi)],$$

où la profondeur de modulation m est un petit paramètre ($m \ll 1$). Elle caractérise l'effet magnéto-strictif à l'origine des phénomènes magnétoacoustiques.

Le travail théorique sur la WPC commence sur la base de celui de Bobroff et Haus, mais en utilisant une méthode plus souple mathématiquement : la méthode multi-échelles. Cela nous donnera accès à des expressions formelles plus simples et de sens physique évident. On pourra donc traiter des cas plus complexes que ceux étudiés par ces auteurs.

Dans ce travail, on a étudié plus fondamentalement le problème 1D et on a trouvé des équations modèles pour la conjugaison de phase acoustique, en fournissant des solutions analytiques concernant le régime d'amplification géante caractérisé par la croissance exponentielle en temps. Quand l'énergie fournie par le pompage excède les pertes dues à la progression des ondes directes et conjuguées hors de la zone active, l'amplification commence. Un seuil de l'énergie doit être dépassé pour atteindre cette situation qui est le mode supercritique de WPC paramétrique.

La méthode multi-échelles utilisée ici peut être comparée avec une technique plus formelle : l'approximation de l'enveloppe lentement variable (slow-varying envelope approximation) qui est souvent utilisée en WPC optique [63] pour des solutions stables (WPC holographe) [64] ou instables [65]. Comme en pratique, le conjugateur magnétoacoustique sera un cylindre de matériau magnétostrictif soumis partiellement à un champ magnétique (zone active). L'onde incidente se déplace approximativement suivant l'axe du conjugateur, de ce fait le plus simple modèle théorique est la situation unidimensionnelle où la configuration générale est présentée par la figure (1.9) qui correspond à l'approximation paraxiale en optique.

En acoustique, à la différence du cas optique, le processus de saturation ne vient pas des propriétés du milieu car la variation relative de la vitesse du son avec l'intensité de

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

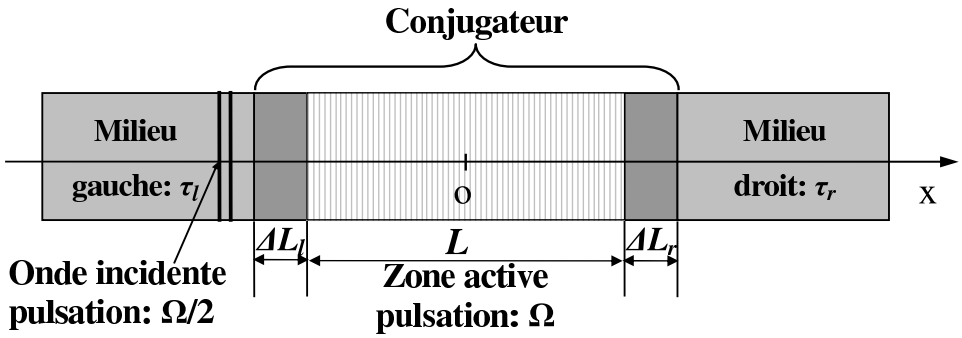


FIGURE 1.9 – Principe de conjugateur magnétoacoustique : La zone active est un solide élastique où la vitesse du son peut être modulée en fonction du temps par le champ magnétique. La conjugaison de phase a lieu quand la fréquence du pompage est double de celle de l'onde incidente.

l'onde est négligeable par rapport à ce qui arrive à l'indice de réfraction et aux pertes en optique. Le processus non linéaire menant à la saturation est plutôt le feed-back de l'énergie élastique vers l'énergie électrique [12]. Ceci se produit seulement quand la contrainte devient très grande. Ceci explique pourquoi on peut observer une longue croissance exponentielle avant la saturation. Par conséquent, la théorie du pompage linéaire est beaucoup plus utile en acoustique qu'en optique. L'hypothèse de base de cette théorie réduit le pompage à une petite oscillation harmonique autour d'une valeur constante de la vitesse du son du milieu. En acoustique, la longue durée de la croissance exponentielle et par conséquent, la validité de l'hypothèse de pompage linéaire, confèrent un intérêt pratique aux solutions analytiques du problème du présent modèle. Ces solutions analytiques expliquent beaucoup de propriétés du conjugateur (le seuil critique, variation de la répartition spatiale des contraintes à l'intérieur de l'échantillon) et donnent des expressions théoriques qui lient ces dernières propriétés aux paramètres donnés. Par ailleurs ils peuvent permettre l'optimisation du conjugateur au regard du rapport d'impédance entre le solide et le fluide, de la longueur de la zone active afin d'obtenir un maximum possible d'énergie acoustique pour un pompage donné. C'est un point clef, entre autre, pour des applications médicales comme l'hyperthermie des cellules cancéreuses qui nécessite beaucoup d'énergie.

Finalement malgré la simplification due à l'hypothèse 1D, les conclusions obtenues ici sont très semblables aux résultats expérimentaux et numériques. Ces résultats analytiques aident à donner une compréhension plus profonde et plus quantitative du phénomène. Ils répondent à des questions non résolues jusqu'à présent. Ce travail présente successivement la solution pour le système infini, et la zone active finie, la discussion de cas particuliers significatifs (homogène et semi-homogène) avec un conjugateur en contact direct avec les milieux passifs. On a également étudié le cas où le conjugateur est à symétrie sphérique pour approcher l'effet de refocalisation au point initial de la source. On a modélisé ensuite un conjugateur "réaliste" où il existe une distance ΔL entre la zone active du conjugateur et les milieux passifs. Le seuil est déterminé et présenté pour tous les types de solutions. Les calculs numériques ont alors mis en évidence

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

une grande sensibilité de la longueur de la zone active du conjugateur. On a alors compris l'existence de solutions théoriques de deux types particuliers : dits pairs et impairs dont nous fournissons maintenant d'une solution théorique. Pour les cas intermédiaires, nous avons seulement des résultats de simulations numériques, les solutions théoriques sont en cours de recherche et ne sont pas dans ce document. Le choix du modèle de l'équation et la façon d'obtenir des solutions par la méthode multi-échelles sont également discutées et clarifiées.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre 2

Equations modèles générales

Dans ce chapitre, nous allons présenter les équations générales de la conjugaison de phase d'abord dans l'approximation unidimensionnelle puis avec une hypothèse de symétrie sphérique.

2.1 Analyse théorique de l'approximation paraxiale

2.1.1 Le problème physique simplifié

Le problème physique traité est celui d'un conjugateur magnéto-acoustique. C'est généralement un cylindre de matériau magnétostrictif soumis partiellement à un champ magnétique. La partie qui est soumise au champ magnétique est appelée zone active. En pratique, l'onde incidente se déplace approximativement suivant l'axe du conjugateur. On peut donc traiter le problème par une approximation paraxiale, autrement dit monodimensionnelle. Le schéma (Fig. 2.1) présente la configuration simplifiée traitée ici. La zone active est en contact direct avec les milieux passifs gauche et droit.

2.1.2 Equations générales

On suppose que le matériau magnéto-acoustique est élastique linéaire et isotope. Le problème physique est alors régi par l'équation de Navier. En supposant que la contrainte et le déplacement sont unidimensionnels selon l'axe x, la seule composante de contrainte non nul σ_{xx} peut être remplacée par :

$$\theta = -\frac{\sigma_{xx}}{\rho_0 c}$$

unité m/s, avec ρ_0 la densité de matériau et c la vitesse longitudinale instantanée du son dans le matériau. La spécificité de la magnéto acoustique est que cette vitesse dépend

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

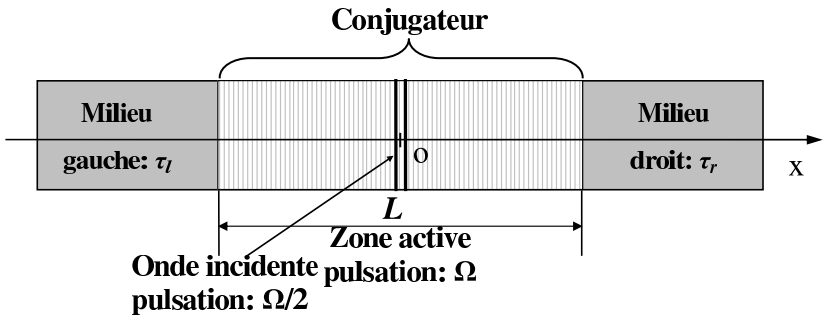


FIGURE 2.1 – Principe de WPC magnéto-acoustique : La zone active est un solide élastique où la vitesse du son peut être modulée en fonction du temps par le champ magnétique. La conjugaison de phase a lieu quand la fréquence du pompage est double de celle de l'onde incidente.

du temps. L'équation de Navier s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

où v est la vitesse particulaire selon l'axe x. Avec les mêmes variables, la loi de comportement élastique (Loi de Hooke) devient :

$$\theta = -c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.2}$$

où u le déplacement et la vitesse v sont liés par $v = \partial u/\partial t$ dans le cadre de l'approximation des déformations infinitésimales.

La dérivation temporelle de l'équation (2.2) donne l'évolution de θ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial t}$$

et, en tenant compte de l'équation (2.2) on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\theta}{c}\frac{\partial c}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Ces équations forment le système classique de l'acoustique dans les liquides si c est une constante et si les seconds membres sont nuls. Mais dans notre cas, il y a un terme de source dans le second membre de l'équation. C'est en fait le terme de pompage. Il est non linéaire et donc conduit à des phénomènes de seuil. Il existe donc une situation où l'apport d'énergie par le champ magnétique sera insuffisant pour compenser l'émission des ondes par les extrémités du conjugateur (cas subcritique) et un cas où l'énergie est plus importante que celles des ondes émises et où elle s'accumule dans la zone active (cas supercritique). Donc pour le mode supercritique, quand l'amplitude du pompage est plus grande que la valeur de seuil, il existe une amplification géante. Ce seuil est fonction

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

du matériau et la longueur de l'échantillon. Ce seuil se caractérise par une valeur m_0 de la profondeur de modulation.

Dans nos études, le pompage est faible. On peut traiter le problème dans le cadre de l'hypothèse de pompage linéaire. Cela signifie que les propriétés du milieu actif sont données par une petite perturbation du premier ordre des propriétés passives. La vitesse du son modulée c est donc liée à la vitesse du son au repos c_0 par :

$$c^2 = c_0^2[1 + m\cos(\Omega t + \varphi)],$$

où la profondeur de modulation m est un petit paramètre ($m \ll 1$). Elle caractérise l'effet magnéto-strictif à l'origine des phénomènes magnéto-acoustiques.

La pulsation du pompage est appellée Ω, la constante φ est une phase arbitraire. Il est clair que le système (2.1, 2.3) peut être remplacé par

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = -m\Omega\frac{\theta}{2}\sin(\Omega t + \varphi), \quad \frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \tag{2.4}$$

En introduisant comme nouvelles variables, l'onde directe $w_1 = v + \theta$ et l'onde conjuguée $w_2 = v - \theta$ dans l'équation (2.4) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + c\frac{\partial w_1}{\partial x} &= -m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi), \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - c\frac{\partial w_2}{\partial x} &= m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.5}$$

En optique, w_1 et w_2 doivent être le champ électrique de l'onde incidente et de l'onde conjuguée, m un coefficient de couplage qui dépend du processus (Mélange à quatre ondes, la diffusion Brillouin...) et c la vitesse de la lumière dans le matériau. Le lecteur peut transposer la discussion suivante à l'optique ou aux micro-ondes en utilisant cette analogie.

Le problème (2.5) et ses conditions initiales peuvent être écrits sous la forme symbolique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} &= S, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ U(x,0) &= U_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$F(U) = \begin{pmatrix} cw_1 \\ -cw_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

et

$$S = \begin{pmatrix} -m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi) \\ m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Sous cette forme conservative, le système hyperbolique (2.6) peut être résolu numériquement par une méthode explicite de volumes finis basée sur des schémas de type Godounov du second ordre [62, 11].

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En développant $c = c_0[1 + m/2\cos(\Omega t + \varphi)]$, le système (2.4) devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -m\Omega \frac{\theta}{2} \sin(\Omega t + \varphi) - c_0 \frac{m}{2} \cos(\Omega t + \varphi) \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} = -c_0 \frac{m}{2} \cos(\Omega t + \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.8)$$

L'élimination de θ dans les premiers membres des équations donne :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c_0^2 \frac{m}{2} \cos(\Omega t + \varphi) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c_0 \frac{m}{2} \cos(\Omega t + \varphi) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t},$$

et en utilisant (2.7), on obtient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} = -c_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + O(m).$$

Ainsi l'équation modèle pour la conjugaison de phase pour v dans la zone active revient à :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m c_0^2 \cos(\Omega t + \varphi) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

On définit la zone active par $|x| \leq L/2$. A l'extérieur de la zone active la profondeur de modulation m est nulle et les équations se réduisent à celles des ondes linéaires.

Le matériau extérieur au conjugateur est traité par la même méthode mais ici c est constant et égal à la vitesse du son dans le matériau extérieur c_f. Pour un fluide, θ est défini par :

$$\theta = \frac{p}{\rho_0 c_f}$$

où p est la pression acoustique. Évidemment la profondeur de modulation est nulle dans cette partie extérieure.

2.1.3 Existence de solutions résonnantes

L'équation (2.9) dans la zone active est simplement l'équation d'onde avec une petite perturbation au second membre. Nous allons montrer que malgré la petite valeur de m, il existe des situations résonnantes où le terme de perturbation est fondamental.

Pour le cas particulier où la zone active est infinie, on peut trouver des solutions asymptotiques régulières en m, de (2.9). On pose $v = V(x)e^{i\omega t}$ et $\tau = \omega t$, $V = V(\tau)\sin(k_0 x)$, $k_0 = \omega/c_0$, l'équation (2.9) devient :

$$\frac{d^2 V}{d\tau^2} + (1 - m\cos(2\tau + \varphi))V = 0$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

C'est l'équation de Mathieu qui a des solutions de la forme : $e^{m\tau/4}\cos\tau$ ou $e^{m\tau/4}\sin\tau$ [66]. Sous forme adimensionnée, cela correspond à une amplification exponentielle : $e^{\Gamma t}$ avec $\Gamma = m\Omega/8$ qui donne le maximum possible du taux d'amplification pour m donné $\forall L$. En termes physiques on voit que pour une zone active infinie, il y a résonance paramétrique si $\Omega = 2\omega$. Les ondes internes à l'échantillon sont amplifiées exponentiellement. Dans le cas d'une zone active finie dans un matériau homogène infini, Bobroff et Haus [3] ont obtenu des résultats en utilisant la transformation de Laplace. Cette méthode a aussi été utilisée pour la conjugaison de phase des micro-ondes dans un cristal fini [8] mais les détails mathématiques ne sont pas explicités dans les papiers. Dans cette référence, les pertes d'énergie par dissipation sont prises en compte dans les équations et des réflexions partielles sont supposées aux bords du cristal.

Pour le cas général où la zone active est finie et non dissipative en contact avec des milieux passifs arbitraires des deux côtés, on a une équation modèle pour la vitesse particulaire (2.9) présentée précédemment :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = mc_0^2\cos(\Omega t+\varphi)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

La solution peut se trouver en considérant le fait qu'on peut traiter le système comme un oscillateur dont la fréquence varie dans la gamme : $k_0c_0(1-m/2)$ et $k_0c_0(1+m/2)$ où k_0 est le nombre d'onde de l'onde incidente. Les conditions résonnantes sont supposées remplies, soit $k_0 = k/2$, avec $k = \Omega/c_0$, le nombre d'onde du pompage. Dans la gamme d'excitation, le nombre d'onde des modes peut être écrit :

$$\frac{k}{2}(1\pm\frac{\alpha}{2}), \qquad \text{pour} \quad 0\le\alpha\le m$$

où α est le déplacement de la fréquence en proportion de k_0.

La forme générale du mode excité est donc :

$$v = A(t)\sin(\frac{k}{2}(1\pm\frac{\alpha}{2})x+\xi) \tag{2.10}$$

où ξ est une constante arbitraire. Pour clarifier, on choisit le signe moins dans la formule précédente pour les prochains développements. Avec ce choix, l'équation (2.9) devient :

$$\begin{aligned}\frac{d^2A}{dt^2}\sin(\frac{k}{2}(1-\frac{\alpha}{2})x+\xi) + \frac{c_0^2k^2}{4}(1-\frac{\alpha}{2})^2A\sin(\frac{k}{2}(1-\frac{\alpha}{2})x+\xi)\\ = c_0^2m\cos(\Omega t+\varphi)[\frac{k^2}{4}(1-\frac{\alpha}{2})^2A\sin(\frac{k}{2}(1-\frac{\alpha}{2})x+\xi)].\end{aligned}$$

Comme α et m sont des petits paramètres, le développement pour le premier ordre en α et m est donc :

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{c_0^2k^2}{4}(1-\alpha)A = m\frac{k^2c_0^2}{4}A\cos(\Omega t+\varphi).$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Il y a deux temps caractéristiques dans cette expression : $2/(kc_0)$ et un "plus lent" $2/(mkc_0)$. La méthode à deux échelles, renormalise les échelles de temps par $\tau = t, \quad T = mt$ et permet d'écrire la solution comme un développement régulier en τ et T de la forme : $A(t,m) = A_0(\tau,T) + mA_1(\tau,T)$. L'équation pour A devient :

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial \tau^2} + \frac{c_0^2 k^2}{4} A_0 - \alpha \frac{c_0^2 k^2}{4} A_0 + m[\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 A_0}{\partial \tau \partial T} + \frac{c_0^2 k^2}{4} A_1]$$
$$= m\frac{c_0^2 k^2}{4} A_0 \cos(\Omega\tau + \varphi)$$

L'ordre zéro donne

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial \tau^2} + \frac{c_0^2 k^2}{4} A_0 = 0$$

dont la solution générale peut être écrite $A_0 = a(T)\cos[\frac{c_0 k}{2}\tau + \psi(T) + \frac{\varphi}{2}]$.

L'ordre 1 pour m (et α) est :

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \frac{c_0^2 k^2}{4} A_1 = \frac{c_0^2 k^2}{4} A_0 \cos(\Omega\tau + \varphi) - 2\frac{\partial^2 A_0}{\partial \tau \partial T} + \frac{c_0^2 k^2 \alpha}{4m} A_0$$

En tenant compte de l'expression de A_0, en développant et négligeant les termes non séculaires (avec pulsation $3\Omega/2$) l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \frac{\Omega^2}{4} A_1 = \frac{\Omega^2}{8} a(T)\cos[\frac{\Omega}{2}\tau + \psi(T) + \frac{\varphi}{2}]\cos[2\psi(T)]$$
$$+\frac{\Omega^2}{8} a(T)\sin[\frac{\Omega}{2}\tau + \psi(T) + \frac{\varphi}{2}]\sin[2\psi(T)] + \Omega\frac{da(T)}{dT}\sin[\frac{\Omega}{2}\tau + \psi(T) + \frac{\varphi}{2}]$$
$$+\Omega a(T)\frac{d\psi(T)}{dT}\cos[\frac{\Omega}{2}\tau + \psi(T) + \frac{\varphi}{2}] + \frac{\Omega^2}{4}\frac{\alpha}{m} a(T)\cos[\frac{\Omega}{2}\tau + \psi(T) + \frac{\varphi}{2}]$$
$$+\text{termes non-séculaires.}$$

Le développement de A est valable si les termes séculaires sont nuls, c'est-à-dire

$$\frac{da(T)}{dT} = -a(T)\frac{\Omega}{8}\sin[2\psi(T)] \tag{2.11}$$
$$-\frac{d\psi(T)}{\frac{1}{2}\cos[2\psi(T)] + \frac{\alpha}{m}} = \frac{1}{4}\Omega dT \tag{2.12}$$

L'équation (2.12) a une solution périodique si $\alpha/m > 1/2$:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{1}{4}}}{2}\Omega(T - T_0)\right) = -\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{1}{4}}\sin[2\psi(T)]}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{m}\cos[2\psi(T)]}$$

où T_0 est une constante d'intégration. Dans ce cas, $\psi(T)$ est une fonction périodique de la fréquence $\Omega\sqrt{\alpha^2/m^2 - 1/4}/(4\pi)$. L'élimination de T pour ψ dans l'équation (2.11) et l'intégration donnent :

$$a = a_0\sqrt{\frac{1}{2}\cos(2\psi) + \frac{\alpha}{m}}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

où a_0 est une constante. Cela montre que a est aussi une fonction périodique de la même fréquence. Il est clair que le changement de signe de moins à plus dans l'équation (2.10) va donner le même résultat avec $\psi^+ = \pi - \psi^-$. L'équation (2.12) est remplacée par

$$-\frac{d\psi(T)}{\frac{1}{2}\cos[2\psi(T)] - \frac{\alpha}{m}} = \frac{1}{4}\Omega dT$$

et elle a une solution périodique si $-\alpha/m > 1/2$:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{1}{4}}}{2}\Omega(T - T_0)\right) = -\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{1}{4}}\sin[2\psi(T)]}{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{m}\cos[2\psi(T)]}$$

En comparant avec la solution donnée précédemment, on trouve qu'il y a un changement de signe devant le terme $\cos[2\psi(t)]$ mais pas devant le terme $\sin[2\psi(t)]$. Donc dans la solution finale pour $a(T)$, on a une même forme de résultat mais avec un ψ^+ où $\psi^+ = \pi - \psi^-$.

Un cas plus intéressant est celui où : $\alpha/m < 1/2$. La solution de l'équation (2.12) devient :

$$-\frac{\Omega}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{m^2}}(T - T_0) = \tanh^{-1}\frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{m^2}}\sin[2\psi(T)]}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{m}\cos[2\psi(T)]}.$$

Pour T suffisamment grand, on a

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{m^2}}\sin[2\psi(T)]}{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{m}\cos[2\psi(T)]} = -\tanh\frac{\Omega}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{m^2}}(T - T_0) \to -1.$$

Ainsi, après un temps transitoire, la solution asymptotique de cette équation est $\cos[2\psi(T)] = -2\alpha/m$, et $\sin[2\psi(T)] = -\sqrt{1 - 4\alpha^2/m^2}$. Donc pour $m \geq 2\alpha \geq 0$, ψ tend vers une constante limite :

$$\psi_0 = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{2\alpha}{m}). \tag{2.13}$$

En remplaçant $\sin[2\psi(T)]$ dans l'équation (2.11) pour les grandes valeurs de T, on a :

$$\frac{da(T)}{a(T)} = \frac{\Omega}{8}\sqrt{1 - (\frac{2\alpha}{m})^2}dT$$

donc, après une phase initiale transitoire, la solution revient à :

$$a(T) = a_0 e^{\frac{\Omega}{8}(T - T_0)\sqrt{1 - \frac{(2\alpha)^2}{m^2}}} = a_0 e^{\frac{\Omega}{8}(t - t_0)\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}.$$

Ici $T_0 = mt_0$ correspond à la durée de la phase transitoire d'ajustement de la phase, où $\psi \longrightarrow \psi_0$. Donc, la solution générale est

$$\begin{aligned} A(t, m) &= A_0(1 + O(m)) \\ &= a_0 e^{\frac{\Omega}{8}(t - t_0)\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}\cos(\frac{\Omega}{2}t + \psi_0 + \frac{\varphi}{2})(1 + O(m)) \end{aligned} \tag{2.14}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Le changement de α à $-\alpha$ va donner le même résultat. Cela montre que les solutions avec une croissance exponentielle sont possibles si les conditions aux frontières sélectionnent un mode où $2|\alpha| < m$, dont le taux de croissance $\Gamma = \frac{\Omega}{8}\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}$ est indépendant du signe de déplacement de la fréquence. Finalement, après la phase transitoire, une solution générale pour v est composée par des éléments de la forme :

$$E_0 = a_0 e^{\Gamma t} \cos[\frac{\Omega}{2}t \pm \psi_0 + \varphi] \sin(\frac{k}{2}(1 \pm \frac{\alpha}{2})x + \xi) \tag{2.15}$$

où les constantes a_0, ξ et les signes indéterminés sont fixés par les conditions de symétrie et les conditions aux frontières du problème. L'équation (2.7) ou (2.8) montre que, en négligeant les termes d'ordre m, les solutions avec une croissance exponentielle de type (2.15) existe aussi pour θ.

Il est donc intéressant de considérer une équation modèle pour θ, obtenue par élimination de v entre les équations (2.7) et (2.8). Celle ci est

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = mc_0^2\cos(\Omega t + \varphi)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{m}{2}\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi)\theta.$$

Prenant les solutions de type (2.15) pour une valeur de α et négligeant les termes en ordre m, on a :

$$\frac{\Omega^2}{4}\theta = -c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},$$

et finalement

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -mc_0^2\cos(\Omega t + \varphi)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \tag{2.16}$$

cela montre que les modes résonnants pour θ satisfont la même équation modèle que v et avec un signe opposé dans le second membre de l'équation.

Il faut souligner que, comme on l'a dit ci-dessus, plus le déplacement de l'amplitude de la fréquence α est faible plus l'amplification est importante. Donc, seulement le mode le plus amplifié des valeurs sélectionnées par le système peut être observé [11].

Ce processus de sélection de α est présenté ci-dessous pour l'approximation paraxiale.

2.1.4 Solutions résonnantes physiques paraxiales

Les solutions physiques résonnantes pour v et θ dépendent des conditions aux frontières. Elles peuvent être construites par combinaison linéaire d'éléments de type E_0. C'est donc aussi le cas pour w_1 et w_2. Comme les conditions aux frontières pour les solutions résonnantes sont plus faciles à écrire analytiquement pour w_1 et w_2, cette représentation du système d'ondes est utilisée dans cette section. D'autre part, n'importe quelle combinaison linéaire d'éléments E_0 peut être utilisée comme une base de solutions. Nous partirons d'expressions comme :

$$W_0 = Ae^{\Gamma t}\sin\frac{k\alpha}{4}(x + \xi)\sin(\frac{k}{2}x \pm \frac{\Omega}{2}t \pm \varphi_0) \tag{2.17}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

qui sont aussi des solutions générales du problème résonnant et sont extrêmement bien adaptées aux problèmes avec la zone active finie.

2.1.4.1 Conjugateur fini et pompage homogène

Ici la zone active de longueur L est en contact avec des milieux qui ont des impédances acoustiques différentes (Fig. 2.2). Ce cas n'est pas exposé explicitement dans la littérature mais une solution est donnée en [8]. On pose $\tau_l = (\rho_l c_l)/(\rho_0 c_0)$ taux d'impédance entre le milieu gauche et la zone active et $\tau_r = (\rho_r c_r)/(\rho_0 c_0)$ pour le côté droit. Dans ces deux expressions, les indices l et r correspondent au milieu gauche et milieu droit de la zone active.

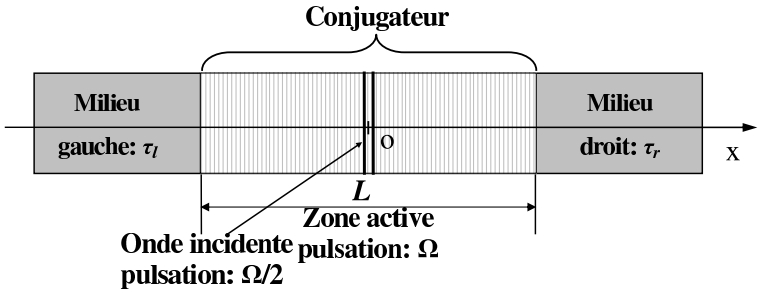


FIGURE 2.2 – Principe du conjugateur hétérogène. La zone active est un solide élastique où l'on peut moduler la vitesse du son en fonction du temps par le champ magnétique. La conjugaison de phase commence si la fréquence du pompage est le double de celle de l'onde incidente.

A l'intérieur de la zone active w_1 et w_2 s'écrivent :

$$w_1 = -Ae^{\Gamma t}\left(\sin(\frac{k\alpha}{4}x + \xi_1)\sin(-\frac{k}{2}x + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1) + mf_1(x,t)\right) \tag{2.18}$$

et

$$w_2 = Ae^{\Gamma t}\left(\sin(\frac{k\alpha}{4}x + \xi_2)\sin(\frac{k}{2}x + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2) - mf_1(x_0 - x,t)\right) \tag{2.19}$$

où ξ_1 et ξ_2 sont des inconnues déterminées par les conditions aux frontières sur $x = \pm L/2$. La fonction f_1 représente les termes d'ordre m dans la solution et x_0 est une constante. On peut voir que les équations (2.18) et (2.19) respectent l'invariabilité du système (2.5) dans le changement de variables $x \to x_0 - x$, et $w_1 \to w_2$ sous les conditions convenables pour $\xi_1,\ \xi_2,\ \varphi_1,\ \varphi_2$.

En $x = -L/2$, seule l'onde conjuguée peut rayonner vers la gauche, donc en dehors de la zone active, $w_{1l} = v_l + \theta_l = 0$ ainsi $w_{2l} = v_l - \theta_l = 2v_l = -2\theta_l$. Les autres conditions sont la condition pour la pression en $x = -L/2$, $\theta(-L/2) = \tau_l\theta_l(-L/2)$ et la condition pour la vitesse $v(-L/2) = v_l(-L/2)$. Ces conditions peuvent être exprimées par les variables

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

w_1 et w_2, car

$$w_2(-\frac{L}{2},t) = v(-\frac{L}{2},t) - \theta(-\frac{L}{2},t) = v_l(-\frac{L}{2},t) - \tau_l\theta_l(-\frac{L}{2},t) = \frac{(1+\tau_l)}{2}w_{2l}(-\frac{L}{2},t)$$

et :

$$w_1(-\frac{L}{2},t) = v(-\frac{L}{2},t) + \theta(-\frac{L}{2},t) = v_l(-\frac{L}{2},t) + \tau_l\theta_l(-\frac{L}{2},t) = \frac{(1-\tau_l)}{2}w_{2l}(-\frac{L}{2},t).$$

Ce qui donne un lien entre w_1 et w_2 pour respecter l'impédance gauche

$$w_1(-\frac{L}{2},t) = \frac{(1-\tau_l)}{(1+\tau_l)}w_2(-\frac{L}{2},t). \tag{2.20}$$

En utilisant les équations (2.18), (2.19) et négligeant les termes d'ordre m, on obtient :

$$-\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1)\sin(\frac{kL}{4}+\frac{\Omega}{2}t+\varphi_1) = \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{4}+\xi_2)\sin(-\frac{kL}{4}+\frac{\Omega}{2}t+\varphi_2) \quad \forall t.$$

ou :

$$\begin{aligned} & \sin(\frac{kL}{4}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_1)\left[\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1)\right. \\ + \quad & \left.\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2)\cos(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)\right] \\ + \quad & \cos(\frac{kL}{4}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_1)\left[\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2)\sin(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)\right] = 0 \end{aligned}$$

Ceci devrait être vrai $\forall t$, on aura au premier ordre :

$$\sin(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1) = O(m) \tag{2.21}$$

et

$$\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1) \pm \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2) = O(m) \tag{2.22}$$

Un résultat similaire peut être obtenu en $x = L/2$ où les conditions aux frontières expriment le non rayonnement de l'onde conjuguée à droite ($w_{2r} = 0$). Sa continuité de la vitesse v et de la pression conduisent à :

$$w_1(\frac{L}{2},t) = \frac{(1+\tau_r)}{(1-\tau_r)}w_2(\frac{L}{2},t) \tag{2.23}$$

et finalement à

$$\sin(\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1) = O(m) \tag{2.24}$$

et

$$\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1) \pm \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2) = O(m). \tag{2.25}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Les équations (2.21) et (2.24) sont compatibles seulement quand : $kL = 0 \mod \pi$. En appelant $\lambda = 2\pi/k_0 = 4\pi/k$ la longueur d'onde des ondes progressives, cette condition s'écrit $L/\lambda - p/4 = 0$ où p est un nombre entier. En fait les équations (2.21) et (2.24) sont vraies au premier ordre donc la condition n'est pas aussi stricte qu'il n'y paraît. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3 où il sera établi que les conditions (2.21) et (2.24) méritent une étude minutieuse. Les équations (2.22) et (2.25) fournissent deux relations entre ξ_1, ξ_2 et α, on a donc besoin d'une autre équation pour résoudre le problème. Cette équation de fermeture vient du fait que les équations (2.18) et (2.19) ne sont des solutions du problème que sous une condition de compatibilité qui s'obtient en injectant les solutions tests dans le système (2.5). En développant le terme d'advection avec $c^2 = c_0^2[1 + m\cos(\Omega t + \varphi)]$, ces équations gouvernantes (2.5) deviennent :

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c_0\frac{\partial w_1}{\partial x} = -m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi) - \frac{m}{2}c_0\frac{\partial w_1}{\partial x}\cos(\Omega t + \varphi), \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c_0\frac{\partial w_2}{\partial x} = m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi) + \frac{m}{2}c_0\frac{\partial w_2}{\partial x}\cos(\Omega t + \varphi). \tag{2.27}$$

En prenant par exemple l'équation pour w_1 et en introduisant les équations (2.18) et (2.19), et en négligeant les termes d'ordre supérieurs, on a :

$$\begin{aligned}
&[\Gamma \quad \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1) + \frac{\Omega\alpha}{4}\cos(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1)]\sin(-\frac{kx}{2} + \frac{\Omega t}{2} + \varphi_1) \\
&+ \quad m(\frac{\partial}{\partial t} + c_0\frac{\partial}{\partial x})f_1 = \frac{m\Omega}{8}\Big[2\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1)\cos(-\frac{kx}{2} + \frac{3\Omega t}{2} + \varphi_1 + \varphi) \\
&+ \quad \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2)\cos(\frac{kx}{2} + \frac{3\Omega t}{2} + \varphi_2 + \varphi) \\
&- \quad \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2)\cos(-\frac{kx}{2} + \frac{\Omega t}{2} - \varphi_2 + \varphi)\Big]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

On voit que si la fonction f_1 contient un terme d'onde progressive en $(-kx/2 + \Omega t/2)$, ou un tel terme lentement modulé en espace, elle disparaît du problème ou est rejetée à l'ordre $m^2\Omega$ par application de l'opérateur d'advection. Ainsi, en projection sur $\sin(-kx/2 + \Omega t/2 + \varphi_1)$, l'équation (2.28) se réduit à

$$\begin{aligned}
&\Gamma \quad \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1) + \frac{\Omega\alpha}{4}\cos(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1) \\
&= \quad \frac{m\Omega}{8}\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2)\sin(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2) \quad \forall x.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

La projection sur $\cos(kx/2 + \Omega t/2 + \varphi_1)$ donne :

$$\cos(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

donc

$$\sin(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2) = \pm 1. \tag{2.30}$$

Il en découle immédiatement :

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2} \mod \pi \tag{2.31}$$

et en prenant en considération (2.21) et $\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi + \pi/2$, nous trouvons :

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{2} - \frac{kL}{4} + \frac{\pi}{4} \tag{2.32}$$

et

$$\varphi_2 = \frac{\varphi}{2} + \frac{kL}{4} + \frac{\pi}{4}. \tag{2.33}$$

Il existe d'autres possibilités des valeurs de φ_1 et φ_2 dépendant de la condition choisie. On va discuter ce problème en détail dans le chapitre (3). Avec l'équation (2.29), ce résultat conduit à :

$$\cos(\gamma)\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1) + \sin(\gamma)\cos(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1) = \pm\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2) \quad \forall x \tag{2.34}$$

où, on a posé que $\cos(\gamma) = 8\Gamma/(m\Omega)$ et $\sin(\gamma) = (2\alpha)/m$. Pour vérifier cette relation pour tout x, on choisit le signe "+" dans l'équation, ainsi :

$$\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1 + \gamma) = \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2) \tag{2.35}$$

et finalement :

$$\gamma = \xi_2 - \xi_1 \mod 2\pi \tag{2.36}$$

Le même processus appliqué sur l'équation pour w_2 aboutit au même résultat.

En mettant la relation (2.36) dans les équations (2.22) et (2.25) où on prend le signe "-", on obtient :

$$\tan\xi_1 = \frac{\sin(\frac{k\alpha L}{8}) - \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8}) + \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\cos(-\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}$$

et

$$\tan\xi_1 = \frac{-\sin(\frac{k\alpha L}{8}) - \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8}) + \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\cos(\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}.$$

Elimination de ξ_1 aboutit à :

$$\left(\tan(\frac{\gamma}{2})\right)^2 - (\tau_l + \tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\tan(\frac{\gamma}{2}) - \tau_l\tau_r = 0.$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

dont la solution est :

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left[(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\pm\sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\tau_l\tau_r}\right].$$

Finalement, selon la définition de γ, la valeur α_s de α sélectionnée par le système doit être la plus lente solution positive de :

$$G(\alpha)=\frac{\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}}{2\alpha}-\cot\left(2\arctan G_0(\alpha)\right)=0 \tag{2.37}$$

avec

$$G_0(\alpha)=\frac{(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\pm\sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\tau_l\tau_r}}{2} \tag{2.38}$$

Bien sûr l'équation (2.37) peut avoir des solutions multiples pour chaque lot de paramètres (Fig. 2.3) mais comme la plus lente, α_s correspond à la plus grande valeur de Γ, seul ce mode le plus amplifié sera observable.

Le tableau (2.1) donne la solution théorique de l'équation (2.37) avec différents valeurs de τ_l et τ_r pour $m=0.028$, $\Omega=4\pi\times10^7$ Hz, $L=2.5\ cm$ (valeurs réalistes pour les expériences menées à l'IEMN).

TABLE 2.1 – Cas hétérogène : α_s théorique auprès τ_l et τ_r pour des matériaux génériques

matériau gauche	matériau actif	matériau droit	τ_l	τ_r	α_s
air	ferrite	air	≈ 0	≈ 0	≈ 0
eau	ferrite	air	0.0412	≈ 0	0.002329
eau	ferrite	eau	0.0412	0.0412	0.003341
verre	ferrite	air	0.4073	≈ 0	0.005592
verre	ferrite	eau	0.4073	0.0412	0.006225
verre	ferrite	verre	0.4073	0.4073	0.008753
acier	ferrite	air	1.2996	≈ 0	0.006970
acier	ferrite	eau	1.2996	0.0412	0.007576
acier	ferrite	acier	1.2996	1.2996	0.010558

La figure (2.4) montre l'accord total entre le calcul numérique et la valeur de α_s calculée théoriquement par l'équation (2.37) pour le cas $\tau_l=0.3$ et $\tau_r=0.1$ de tableau (2.1). Cette figure montre la pression juste au bord gauche de la zone active où l'onde conjuguée quitte la zone active. Dans cette simulation on utilise les conditions initiales suivantes, utilisées dans tous les calculs numériques présentés dans ce chapitre :

$$\begin{cases} w_1=w_2=2\times10^{-3}\sin(\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-x_L)) & \text{pour } x_L<x<x_R \\ w_1=w_2=0 & \text{autres} \end{cases} \tag{2.39}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

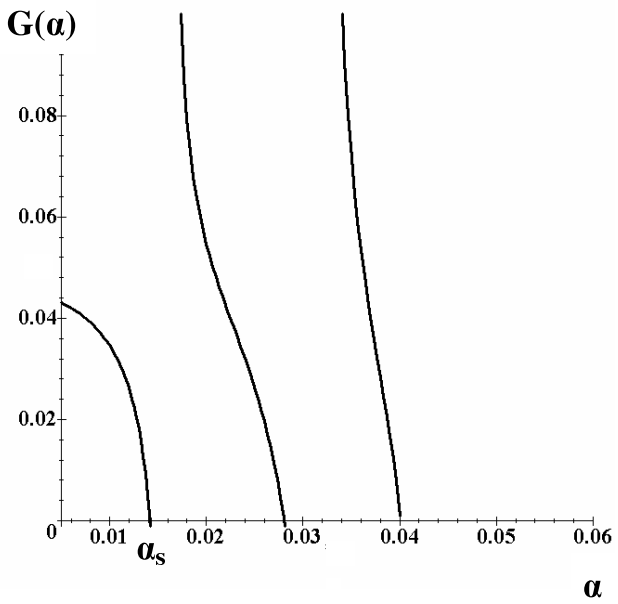


FIGURE 2.3 – La fonction $G(\alpha)$. On remarque que les solutions de $G(\alpha) = 0$ sont multiples. Comme le taux d'amplification exponentiel est une fonction décroissante de α, seule la solution la plus faible est pertinente.

Les abscisses x_L et x_R sont choisies pour que $(x_R - x_L) = 3\lambda$, où λ est la longueur d'onde : $\lambda = 2\pi\omega/c_0$. La condition initiale du calcul numérique dans nos travaux est donc une impulsion d'une longueur de 3λ avec une pulsation $\omega = \Omega/2$ qui est "lâchée" au milieu de la zone active. Cette impulsion donne lieu à deux ondes qui se propagent en directions opposées. La partie de cette onde se propageant vers la gauche (w_2) est visible sur la figure (2.4) à approximativement 3 μs. Cette condition initiale est juste un démarreur pour la résonance paramétrique car son spectre est dominé par la fréquence ω. La propagation symétrique des deux impulsions n'est pas nécessaire pour le processus mais elle permet d'illustrer la précision des calculs numériques en fournissant un repère spatiotemporel facilement identifiable au début du calcul. La réflexion de l'impulsion initiale directe (w_1) sur la limite droite de la zone active est visible, légèrement amplifiée par la résonance paramétrique à environ 9 μs dans la figure (2.4). Le temps entre les deux impulsions est exactement le temps pour traverser la longueur de la zone active avec la vitesse du son c_0, ce qui montre que le schéma numérique n'introduit pas de dispersion numérique.

Les figures (2.5, 2.6 et 2.7) montrent la distribution spatiale des ondes directe (w_1) et conjuguée (w_2) qui évoluent en fonction de temps. Avec ces conditions initiales symétriques, la dénomination d'onde directe ou conjuguée est purement conventionnelle car le signal initial ne vient pas d'une direction déterminée. Dans la pratique, la condition initiale est une situation instantanée crée par une onde progressive, par exemple, w_1 de gauche [11], ainsi l'onde conjuguée w_2 est l'onde progressant à l'opposé. Les ondes w_1 et w_2 créées dans la zone active par la résonance paramétrique sur les composantes de

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

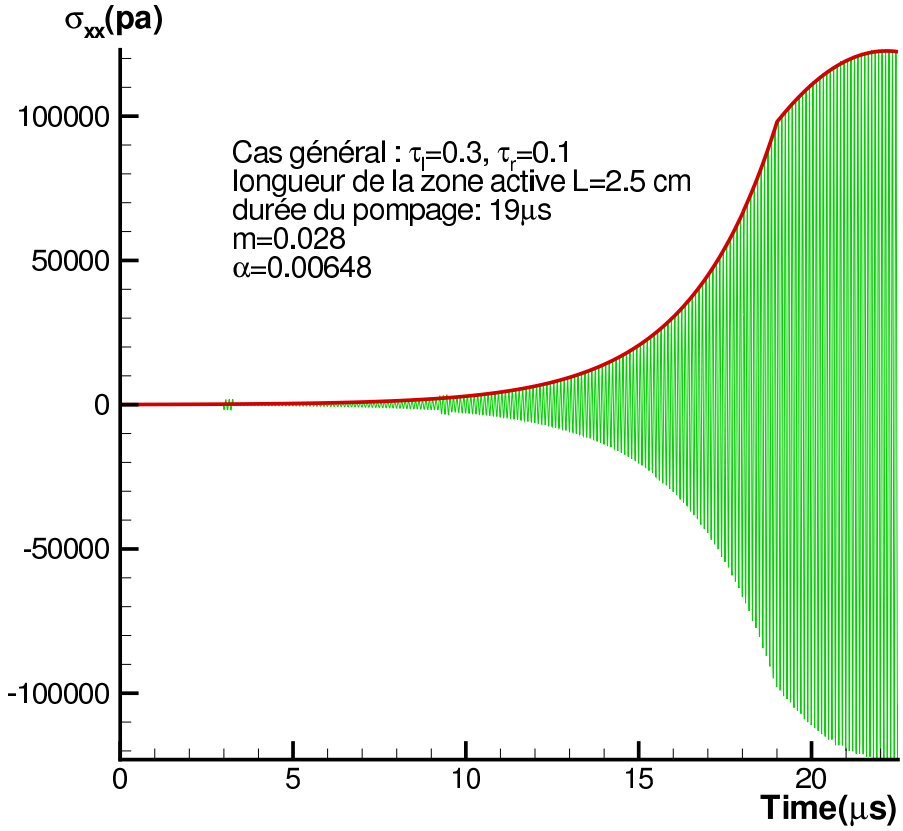


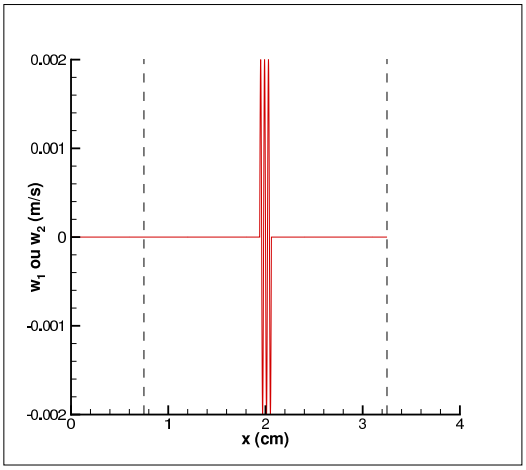
FIGURE 2.4 – L'évolution temporelle de la contrainte mesurée à l'interface de la zone active et milieu gauche dans le cas général. La durée de pompage est $19\mu s$. $c_0 = 4\times10^3 m/s$, $\Omega = 4\pi\times10^7$ Hz, $\rho_0 = 9000 kg/m^3$. —— théorie $(Ce^{\Gamma t}\sin(-k\alpha L/8+\xi_2))$, —— simulation $(w_2(-L/2,t)$ par schéma type Godounov [62]

pulsation ω dans le spectre de l'impulsion initiale, sont symétriques jusqu'à ce qu'elles arrivent aux limites de la zone active. Après quoi, elles se réfléchissent partiellement et se propagent vers la frontière opposée. Ce n'est qu'après une seconde réflexion que le système d'ondes adapte sa répartition spatiale définitive. Dès lors la seule évolution dans la zone active est une croissance exponentielle homogène dans l'espace. L'onde directe (w_1) et l'onde conjuguée (w_2), issue de la composante de pulsation ω de l'impulsion initiale, sont partiellement évacuées par les frontières. Le processus persiste jusqu'à la fin du pompage. Ultérieurement, les ondes w_1 et w_2 deviennent des ondes progressives classiques modulées spatialement. Elles s'évacuent de la zone active avec la vitesse du son locale avec plus ou moins de réflexions aux frontières suivant les rapports d'impédances.

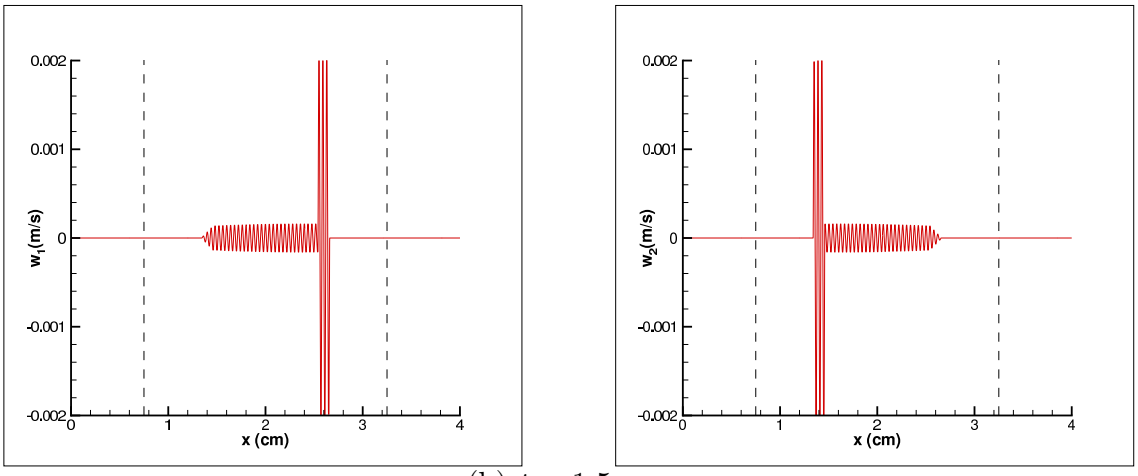
Dans la simulation, à exactement 19 μs, le pompage cesse et l'exponentielle théorique $Ce^{\Gamma t}$ et le calcul numérique s'écarte. L'onde conjuguée commence à s'évacuer de la zone active. La forme du signal temporel devient alors la même que celle de la répartition

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

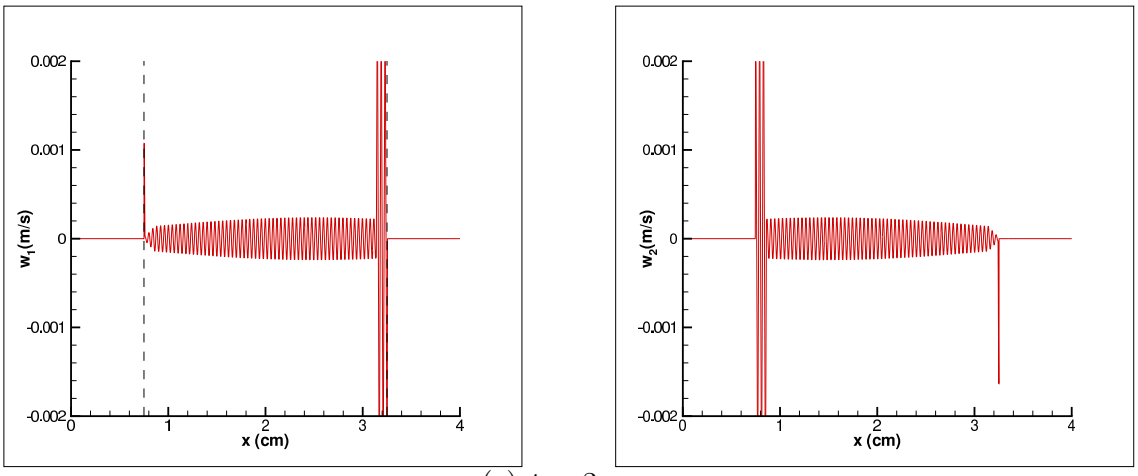
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(a) $t = 0$



(b) $t = 1.5\mu s$



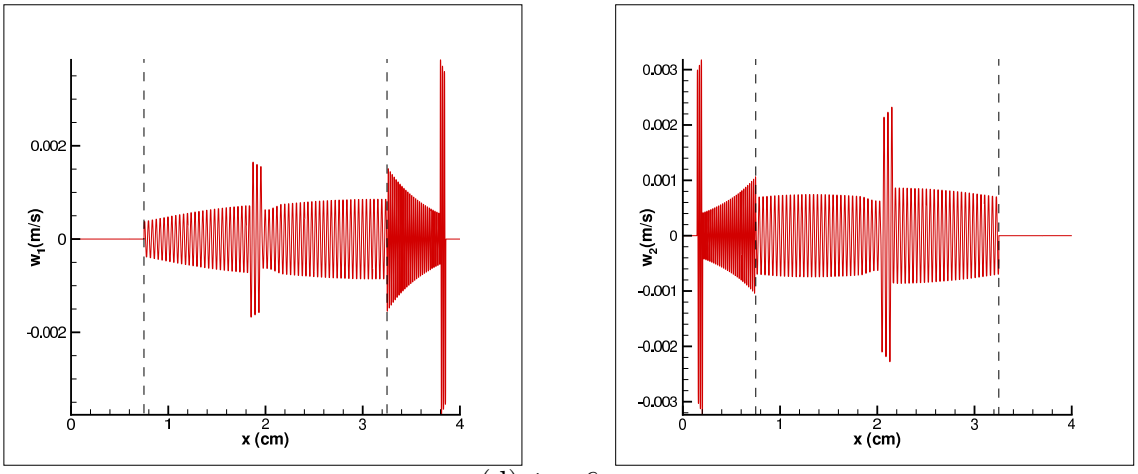
(c) $t = 3\mu s$

FIGURE 2.5 – Répartitions spatiales des onde directe w_1 et onde conjuguée w_2, en $t = 0$, $1.5\mu s$, $3\mu s$, $6\mu s$, $9\mu s$, $12\mu s$, $15\mu s$, $18\mu s$, pour le cas hétérogène et la même condition comme dans la figure 2.4. L'onde directe ne rayonne pas vers la gauche de la zone active et l'onde conjuguée ne rayonne pas vers la droite de la zone active.

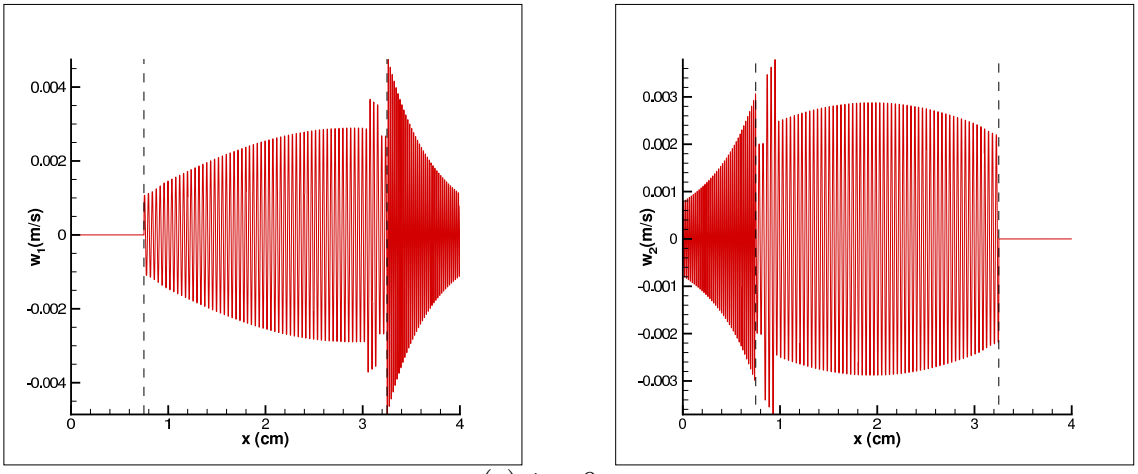
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

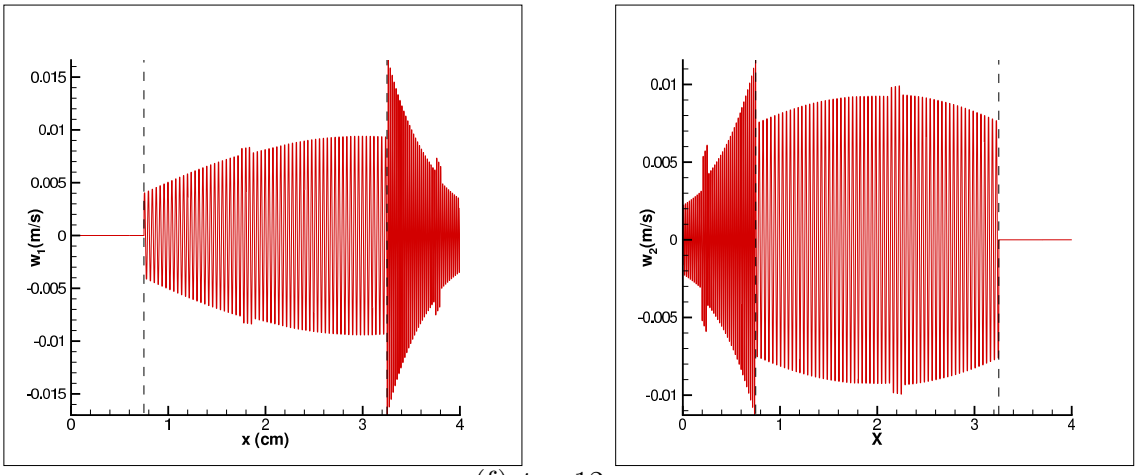
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(d) $t = 6\mu s$



(e) $t = 9\mu s$

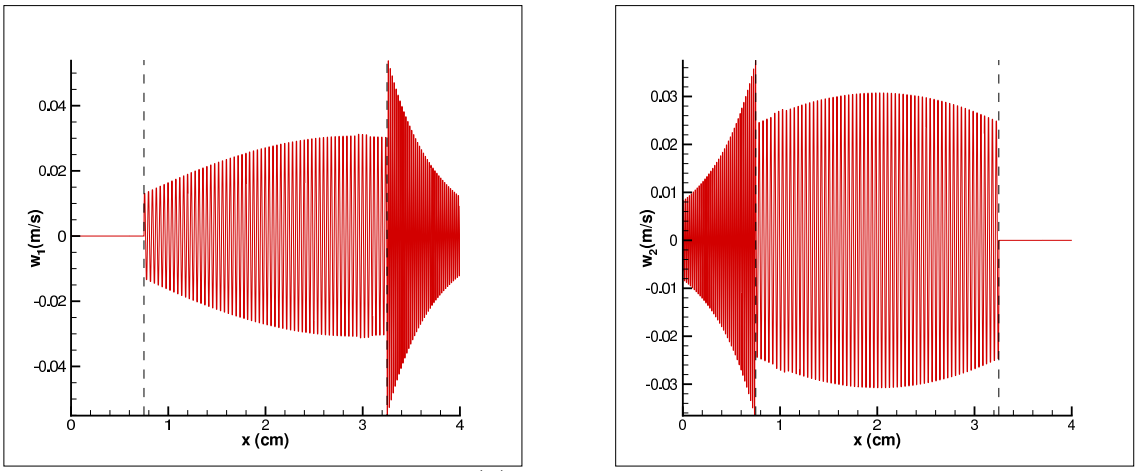


(f) $t = 12\mu s$

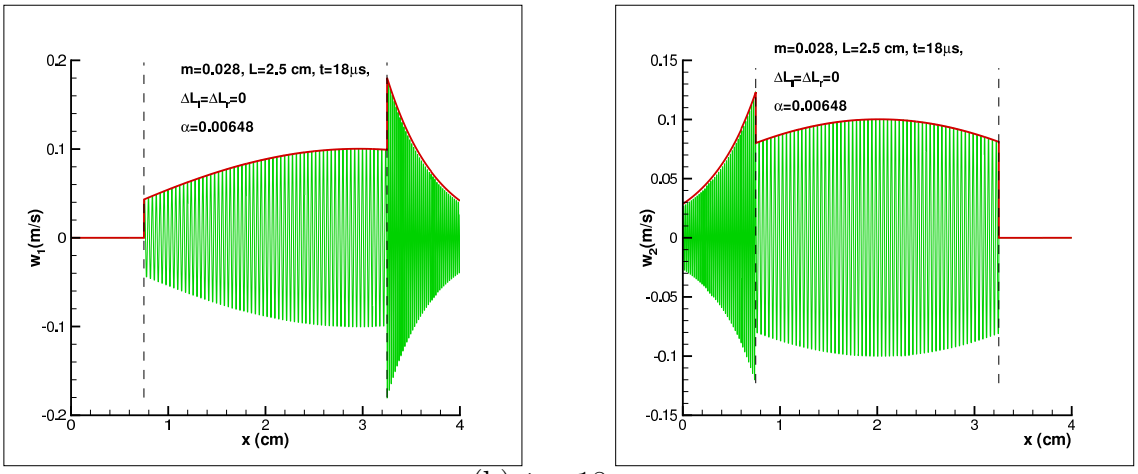
FIGURE 2.6 – Répartitions spatiales des onde directe w_1 et onde conjuguée w_2 (suite)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl



(g) $t = 15\mu s$



(h) $t = 18\mu s$

FIGURE 2.7 – Répartitions spatiales des onde directe w_1 et onde conjuguée w_2 (suite)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

spatiale dans la zone active.

Les simulations numériques qui sont présentées dans la figure (2.4) et les figures suivantes ont été obtenues par le même schéma de Godounov du second ordre avec un limiteur de pente, méthode qui a montré sa capacité pour les ondes élastiques et pour la WPC [62, 61]. La caractéristique principale de ce schéma est sa faible dissipation numérique qui évite l'atténuation numérique de la haute fréquence ω si le maillage est choisi suffisamment fin. Dans la simulation unidimensionnelle, il y a environ 100 points par longueur d'onde λ. Cette résolution est aussi suffisante pour capturer des petites composantes non résonnantes du spectre (par exemple les raies à $3\Omega/2$) qui sont négligées dans la théorie mais évidemment présentes dans les simulations.

2.1.4.2 Milieu homogène avec zone active finie

Lorsque $\tau_l = \tau_r = 1$, la théorie présentée permet une comparaison explicite des résultats analytiques et des simulations. Dans ce cas, la zone active de longueur L est en contact avec deux milieux constitués des mêmes matériaux (Fig.2.8). Les solutions résonnantes doivent satisfaire les conditions

$$w_{1l}(-L/2, t) = w_1(-L/2, t) = 0 \ \forall t$$

et

$$w_{2r}(L/2, t) = w_2(L/2, t) = 0 \ \forall t.$$

L'équation (2.17) donne une forme générale de l'onde directe w_1 dans la zone active :

$$w_1 = Ae^{\Gamma t} \sin \frac{k\alpha}{4}(x + \frac{L}{2}) \sin(\frac{k}{2}x - \frac{\Omega}{2}t - \varphi)$$

et

$$w_2 = Ae^{\Gamma t} \sin \frac{k\alpha}{4}(x - \frac{L}{2}) \sin(\frac{k}{2}x + \frac{\Omega}{2}t + \varphi)$$

pour l'onde conjuguée w_2.

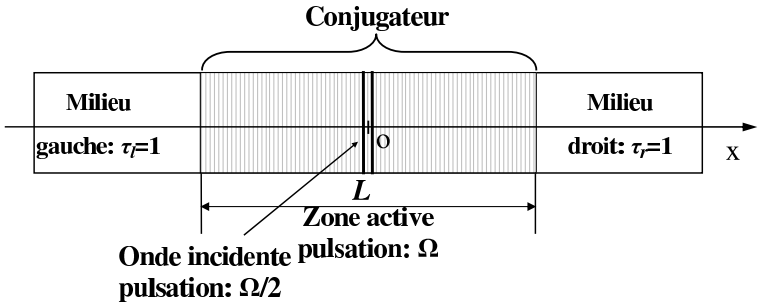


FIGURE 2.8 – Principe de la magnéto-acoustique dans un milieu homogène.

L'équation (2.36) conduit à $\gamma = -k\alpha L/4$ et la fonction G aura la forme beaucoup plus simple ci-dessous :

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$G_h(\alpha) = \frac{\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{2\alpha} + \cot(\frac{k\alpha L}{4}) = 0 \tag{2.40}$$

Cette équation peut avoir une interprétation spécifique. En fait, dans le cas homogène, l'équation (2.35) devient triviale et le second membre de l'équation (2.34) devient égal à 0 en $x = L/2$. Dans ce cas précis, cela permet de montrer que la valeur α_s sélectionnée par le système assure la continuité de l'enveloppe spatiale de l'onde aux frontières. Prenant par exemple w_1, pour $x > L/2$, l'onde directe est solution de l'équation d'advection linéaire sans perturbation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0\frac{\partial}{\partial x}\right) w_1 = 0.$$

Comme $w_2 = 0$ pour $x > L/2$, les relations suivantes sont satisfaites :

$$w_1 = 2v = 2\theta = F(x - c_0 t).$$

La continuité de v et θ, donc celle de w_1 en $x = L/2$, permet d'écrire la solution w_1^+ pour $x = L/2$ du côté extérieur à la zone active :

$$w_1^+ = Ae^{\frac{\Gamma L}{2c_0}} e^{\frac{\Gamma}{c_0}(c_0 t - x)} \sin\frac{k\alpha L}{4} \sin(\frac{k}{2}(x - c_0 t - \varphi)(1 + O(m)).$$

Comme pour tout t, $w_1^- = w_1^+$ en $x = L/2$, l'égalité

$$\frac{\partial w_1^-}{\partial t}|_{L/2} = \frac{\partial w_1^+}{\partial t}|_{L/2}$$

est également vérifiée pour tout t. Ainsi, l'équation d'advection donne

$$\frac{\partial w_1^-}{\partial x}|_{L/2} = \frac{\partial w_1^+}{\partial x}|_{L/2} + m\frac{\Omega}{4c_0} w_1|_{L/2} \sin(\Omega t + \varphi)$$

qui réduit l'équation (2.34) en $x = L/2$, à la forme condensée :

$$\alpha \cot(\frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\alpha_0}) = -\frac{\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{2} \tag{2.41}$$

où

$$\alpha_0 = \frac{2\pi c_0}{\Omega L} \tag{2.42}$$

L'équation (2.41) est simplement la continuité de la pente de l'amplitude de l'onde directe au travers du bord de la zone active en $x = L/2$. En effet, en appelant $\mathcal{A}_{w_1}$ cette amplitude, on a

$$\mathcal{A}_{w_1^-} = Ae^{\frac{\Omega}{8}(t)\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}} \sin\frac{k\alpha}{4}(x + \frac{L}{2}).$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

et

$$\mathcal{A}_{w_1^+} = Ae^{\frac{\Gamma L}{2c_0}} e^{\frac{\Gamma}{c_0}(c_0 t - x)} \sin \frac{k\alpha L}{4}.$$

et on peut facilement vérifier que l'égalité de ces deux expressions n'est autre que (2.41).

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{w_1^+}}{\partial x}|_{\frac{L}{2}} = \frac{\partial \mathcal{A}_{w_1^-}}{\partial x}|_{\frac{L}{2}}.$$

Cette propriété est mentionnée dans [58] sur la base des expériences. Une équation analogue (2.41) est donc déduite par la continuité de l'amplitude et sa pente.

Ici, la théorie confirme cette déduction expérimentale en montrant que cette continuité de la pente est une conséquence directe de la continuité de la pression et du déplacement. Néanmoins, dans les expériences, nous avons une zone active finie à l'intérieur d'un échantillon qui est en contact avec l'eau à un côté et de l'air à l'autre. Cependant la zone active n'est pas en contact direct avec les milieux extérieurs. Nous verrons au chapitre 4 que c'est pour cela que le résultat expérimental coïncide bien avec les solutions en milieu homogène malgré les rapports d'impédance τ_l et τ_r différents de 1. Cette continuité de la pente de l'amplitude est confirmée par les simulations numériques dans [11] mais toujours avec une longue distance entre la fin de la zone active et le bord de l'échantillon. La présente théorie montre que cette "continuité de la pente" est une propriété du cas homogène et n'est pas strictement vérifiée pour les cas plus généraux.

La solution de l'équation (2.41) donne la valeur de α_s pour chaque m (Tab. 2.2). La

TABLE 2.2 – Cas homogène : comparaison pour les valeurs de α_s numérique et théorique

m	α_s numérique	α_s théorie
0.016	0.008000	0.008000
0.028	0.011396	0.011248
0.041	0.012698	0.012622

formule (2.42) donne facilement la valeur du seuil d'amplification pour le cas homogène, car pour $\alpha_s = \alpha_0$, il est clair que $m = 2\alpha_0 = m_0$ et $\Gamma = 0$; c'est la solution marginale. Pour $m < m_0$ la solution réelle de l'équation (2.41) n'existe pas, c'est le cas subcritique.

La formule (2.41) peut être interprétée en termes de longueur d'onde Λ de l'enveloppe de la répartition spatiale dans la zone active :

$$\frac{k\alpha}{4} = \frac{2\pi}{\Lambda} \tag{2.43}$$

Au seuil (Fig. 2.14), $m = m_0$ et $\alpha_s = \alpha_0$, la longueur d'onde d'amplitude Λ est donc exactement $4L$ et l'enveloppe de w_1 et w_2 est un quart d'une période de sinusoïde. Pour $\alpha_s > \alpha_0$, Λ décroît quand α_s croît. C'est à dire que le maximum de l'amplitude migre

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

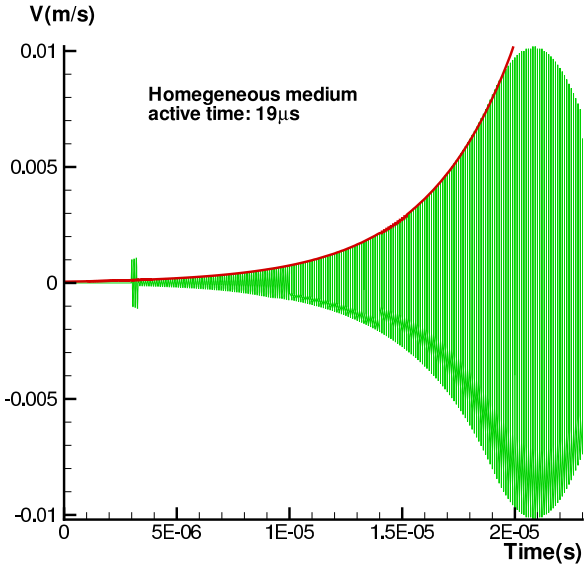


FIGURE 2.9 – L'évolution temporelle de la vitesse du déplacement mesurée à la limite gauche de la zone active pour le cas homogène. $m = 0.028$, $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, $\rho_0 = 9000 kg/m^3$. La zone active se localise de $0.5cm$ à $3.0cm$. —— théorie, —— simulation.

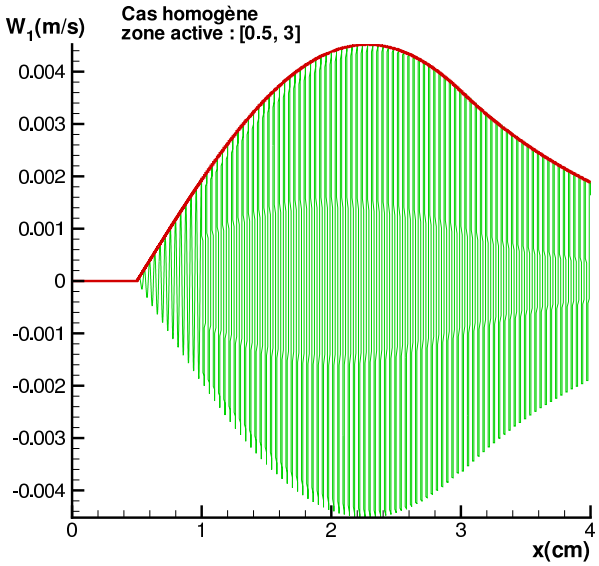


FIGURE 2.10 – Répartition spatiale de l'onde directe w_1, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. Cette onde de rayonne pas vers le gauche de la zone active. —— théorie, —— simulation.

progressivement vers le centre de la zone active. Les figures (2.9, 2.10, 2.11) montrent l'accord entre la théorie et les solutions numériques calculées par l'équation (2.5). Sur la

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

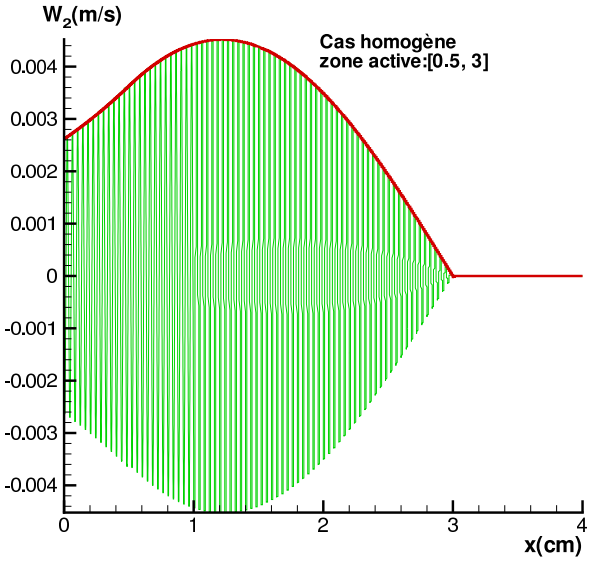


FIGURE 2.11 – Répartition spatiale de l'onde conjuguée w_2, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. Cette onde de rayonne pas vers le droit de la zone active. —— théorie, —— simulation.

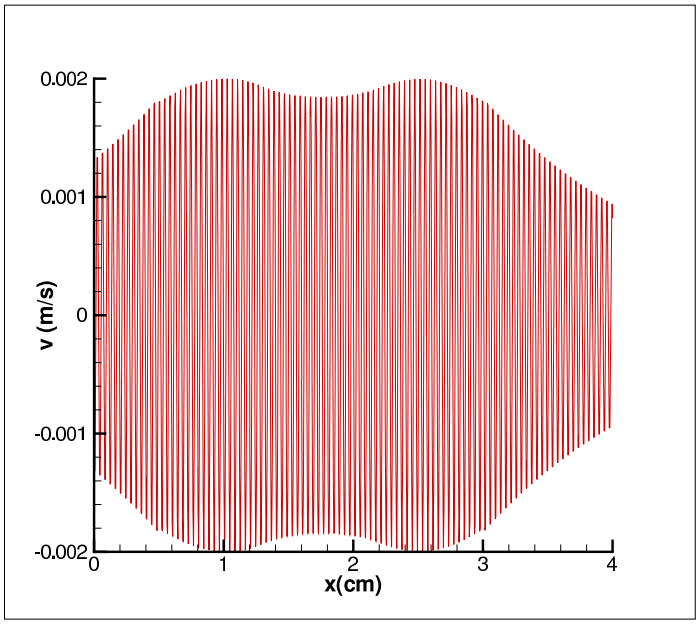


FIGURE 2.12 – Répartition spatiale de la vitesse particulaire v, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. —— théorie, —— simulation.

figure (2.9), la condition initiale est visible une seule fois car il n'y a pas de réflexion à la limite droite de la zone active en raison de l'homogénéité $\tau_r = 1$. La forme du signal après la fin du pompage peut être comparée avec la répartition spatiale de w_2 (Fig. 2.11).

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

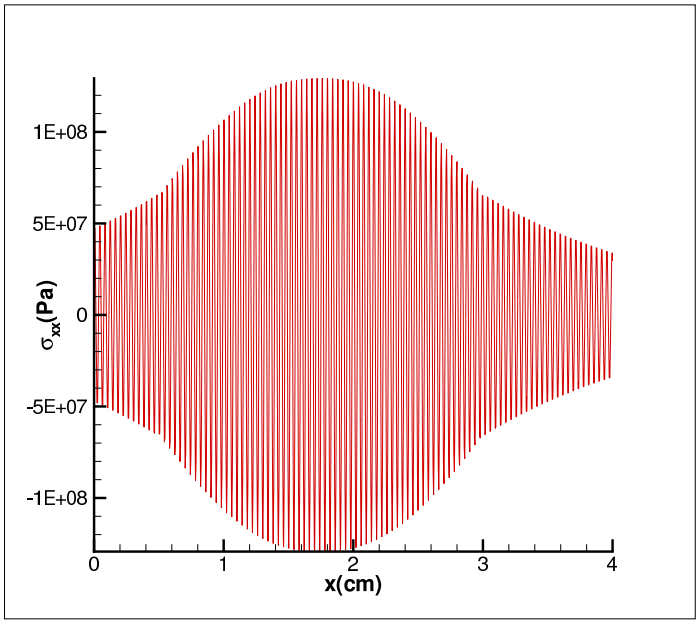


FIGURE 2.13 – Répartition spatiale de la contrainte σ_{xx}, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. —— théorie, —— simulation.

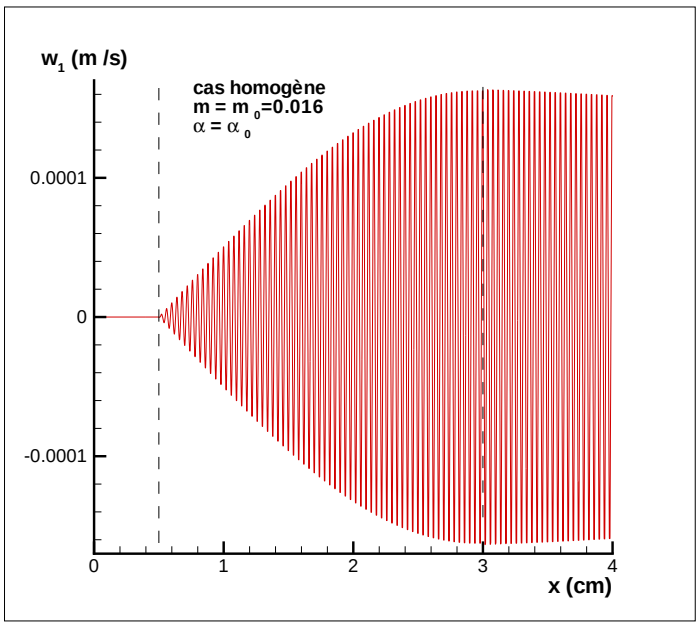


FIGURE 2.14 – Répartition spatiale de l'onde directe w_1 pour le cas homogène avec la même condition que dans Fig. 2.10 mais avec $m = 0.016$. La zone active est entre $0.5cm$ et $3cm$. La prédiction théorique est confirmée : l'enveloppe de l'amplitude mesure juste un quart d'une période sinusoïde. On peut tracer la même figure pour l'onde conjuguée w_2 mais en direction opposée.

La comparaison entre les figures (2.10) et (2.11) montre que les valeurs maximales pour

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

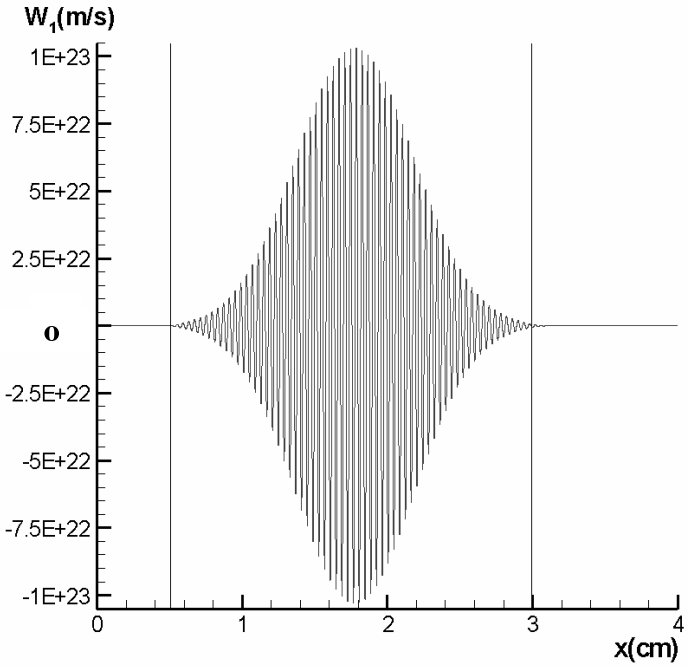


FIGURE 2.15 – Répartition spatiale de l'onde directe w_1 pour le cas homogène avec la même condition que dans Fig. 2.10 mais avec $m = 0.5$. Après $19\mu s$, les valeurs sont extrêmement grandes en raison de la croissance exponentielle. La simulation présentée n'est pas une situation réelle mais seulement une extrapolation de la théorie pour le pompage linéaire avec une haute énergie. La prédiction théorique est confirmée : il y a un noeud d'amplitude de chaque côté de la zone active et le rendement énergétique d'onde conjuguée est très petit par rapport à l'énergie totale durant le pompage. On peut tracer la même figure pour l'onde conjuguée w_2.

w_1 et w_2 sont égales. Ce qui est conforme à la théorie et à la propriété d'invariance du système (2.18), (2.19) par retournement du nombre d'onde.

Les figures (2.12 et 2.13) montrent les répartitions spatiales de la vitesse particulaire et la contrainte. Elles sont obtenues par les formules

$$v = (w_1 + w_2)/2,$$

$$\sigma_{xx} = \rho_0 c_0 \theta = \rho_0 c_0 (w_1 - w_2)/2.$$

Comme l'équation (2.41) a une solution asymptotique pour $\alpha_s \to 2\alpha_0$ où $m \to \infty$, toutes les situations physiques vérifient que $\alpha_s < 2\alpha_0$ et $\Lambda < 2L$. Donc, si m est suffisamment grand, $\Lambda \to 2L$ (Fig. 2.15). Dans le cas où l'énergie du pompage dans l'échantillon est importante, les maxima des amplitudes de w_1 et w_2 migrent vers le milieu de la zone active. Il doit donc y avoir un noeud à la frontière de la zone active. Par conséquent, l'amplitude du signal diminue à la frontière de la zone active et très peu d'énergie peut sortir avant la fin du pompage. Cela implique que pour une excitation forte (m grand),

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

l'énergie s'accumule dans l'échantillon pendant la durée du pompage. Ceci peut expliquer les phénomènes d'échauffement du matériau observés expérimentalement dans de telles configurations. L'efficacité énergique du processus chute très vite avec l'augmentation de l'excitation. Par conséquent, les applications de conjugaison de phase ultrasonore à forte énergie, par exemple l'hyperthermie, doivent être étudiées sérieusement du point de vue de l'optimisation.

L'étude du cas homogène permet donc des analyses directes. Elle donne les tendances principales. Bien sûr il reste beaucoup de possibilités d'optimisation, soit par l'exploitation géométrique d'échantillons à trois dimensions, soit par la modification des conditions aux frontières du problème, par exemple, en variant le ratio d'impédance aux bords de la zone active. En comparant avec la solution de Bobroff [3], la méthode multi-échelle appliquée ici permet d'aboutir à des formules simples et de tirer des conclusions physiques générales importantes dans un cadre plus large.

2.1.4.3 Milieu semi-homogène

Il est intéressant toutefois d'analyser le cas où une seule extrémité de la zone active présente un saut d'impédance. Ici la zone active de longueur L est en contact avec un milieu d'impédance acoustique différente d'un côté. De l'autre côté, le milieu reste homogène. Ce cas qui n'est pas résolu dans la littérature peut être traité en posant $\tau_r = 1$ dans les expressions générales (Fig. 2.16).

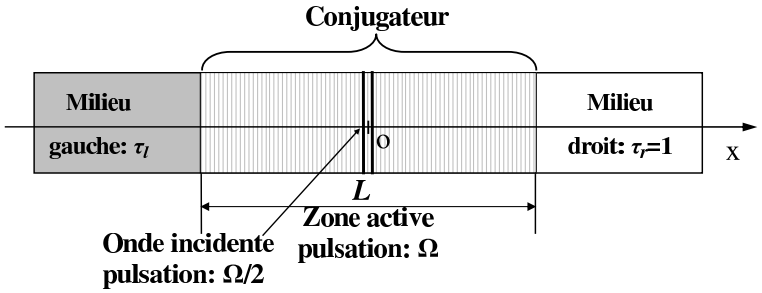


FIGURE 2.16 – Principe de la magnéto-acoustique dans un milieu semi-homogène.

Comme dans le cas homogène sur le côté droit du conjugateur on a $\xi_2 = -k\alpha L/8$, et on peut simplifier les équations (2.18 et 2.19) pour w_1 et w_2 :

$$w_1 = -Ae^{\Gamma t}\sin(\frac{k\alpha}{4}x + \xi_1)\sin(-\frac{k}{2}x + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1) \tag{2.44}$$

et

$$w_2 = Ae^{\Gamma t}\sin\frac{k\alpha}{4}(x - \frac{L}{2})\sin(\frac{k}{2}x + \frac{\Omega}{2}t + \varphi) \tag{2.45}$$

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En $x = -L/2$, comme le milieu gauche est différent du milieu actif, on a la relation identique à celle du cas hétérogène

$$w_1(-\frac{L}{2},t) = \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l} w_2(-\frac{L}{2},t).$$

En mettant les équations (2.44 et 2.45) en $x = -L/2$, on a

$$-\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1)\sin(\frac{kL}{4}+\frac{\Omega}{2}t+\varphi_1) = -\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin\frac{k\alpha L}{4}\sin(-\frac{kL}{4}+\frac{\Omega}{2}t+\varphi_2) \quad \forall t.$$

D'où on trouve l'expression pour ξ_1 qui peut être écrite comme :

$$\xi_1 = \frac{k\alpha L}{8} + n\pi + (-1)^n \arcsin(\frac{\tau_l - 1}{\tau_l + 1}\sin\frac{k\alpha L}{4}) \tag{2.46}$$

avec $n \in \mathbb{N}$. L'équation (2.37) peut être écrite sous la forme

$$G_{sh}(\alpha) = \alpha\cot[\frac{k\alpha L}{4} \pm \arcsin(\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin\frac{k\alpha L}{4})] + \frac{\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}}{2} = 0 \tag{2.47}$$

TABLE 2.3 – α_s pour le cas semi-homogène

matériau gauche	matériau actif et droit	τ_l	α_s
air	ferrite	0	0.006724
eau	ferrite	0.0412	0.007333
verre	ferrite	0.4073	0.009935
acier	ferrite	1.2996	0.010897

Cette forme est plus pratique que celle du cas général pour étudier spécifiquement l'influence du rapport d'impédance. Le tableau 2.3 donne quelque valeurs de α_s pour un ensemble de paramètres réalistes et pour $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, $L = 2.5$ cm. Les figures (2.17, 2.18 et 2.19) montrent un accord total entre la théorie et les simulations numériques. Ici, l'impulsion initiale est visible (Fig. 2.17) mais il n'y a pas la deuxième impulsion car l'homogénéité à la limite droite évite les réflexions. La forme du signal après la fin du pompage peut être comparée avec la répartition spatiale de w_2 dans la zone active (Fig. 2.19). On remarque ici qu'il n'y a pas une continuité de la pente à la fin du pompage comme le prévoit la théorie. La mesure est située à la limite entre le conjugateur semi-homogène et milieu gauche où il existe un rapport d'impédance différent de 1 ($\tau_l = 0.042$). En comparant avec la répartition spatiale de w_2 (Fig. 2.19), après la fin du pompage la forme de l'évolution doit être la même que cette onde qui décroît de façon monotone contrairement au cas homogène. Dans la figure (2.17), on a tracé les résultats numériques en courbe fine et la solution théorique en courbe grasse. On voit que la comparaison théorie simulation est excellente pour toute la durée du

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

pompage et aussi après le pompage. En comparant avec le cas homogène (Fig. 2.11), on peut remarquer que cette répartition spatiale est fortement transformée. Cela montre que la condition à la frontière peut fortement affecter le phénomène. Le changement d'impédance en $x = 0.5cm$ donne lieu à un changement de valeur de w_2, conséquence de la discontinuité sur θ. Le changement d'impédance est visible aussi par la modification de la longueur d'onde due au changement de la vitesse du son. La comparaison entre la figure (2.10) et (2.18) montre que le changement de l'impédance modifie aussi l'onde directe par la condition $w_{1l}(-L/2, t) = 0$ qui donne $w_1(-L/2, t) \neq 0$ quand $\tau_l \neq 0$.

Les figures (2.20 et 2.21) montre des répartitions spatiales de la vitesse particulaire et la contrainte. Elles sont obtenues par les formules

$$v = (w_1 + w_2)/2,$$

$$\sigma_{xx} = \rho c\theta = \rho c(w_1 - w_2)/2,$$

où ρ et c correspondent aux différents milieux. En comparant ces deux résultats avec les répartitions spatiales du cas homogène (Figs. 2.12 et 2.13), on voit qu'en modifiant l'impédance du milieu, les formes des répartitions sont fortement changées.

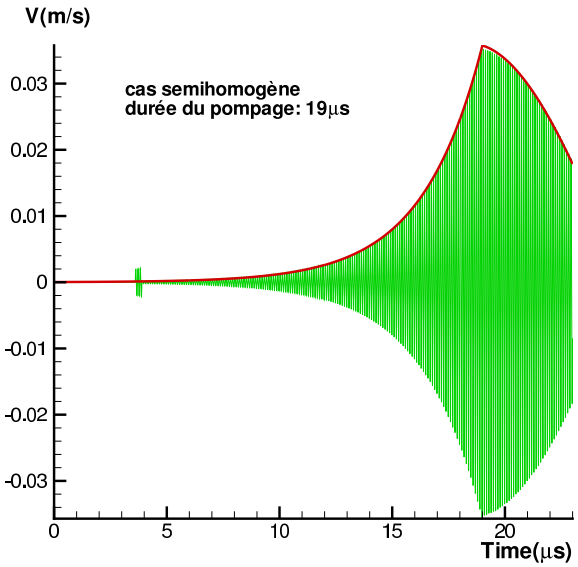


FIGURE 2.17 – Evolution temporelle pour la vitesse particulaire mesurée à la limite gauche de la zone active pour le cas semi-homogène avec $\tau_l = 0.042$. $m = 0.028$, $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, $\rho_0 = 9000kg/m^3$. La zone active est située de $0.5cm$ à $3.0cm$. —— théorie, —— simulation.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

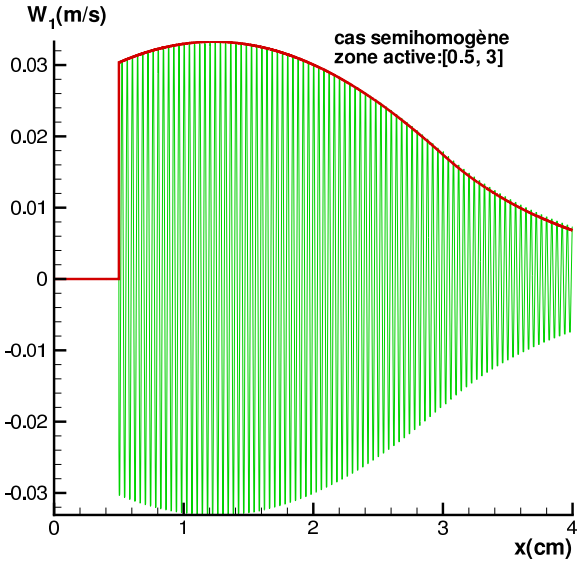


FIGURE 2.18 – Répartition spatiale de l'onde directe w_1, à la fin du pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). Cette onde ne rayonne pas vers la gauche de la zone active. —— théorie, —— simulation.

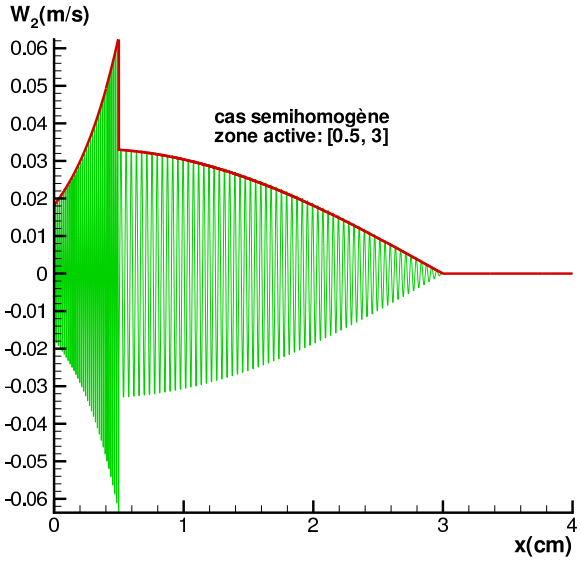


FIGURE 2.19 – Répartition spatiale de l'onde directe w_2, à la fin de pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). Cette onde ne rayonne pas vers la droite de la zone active. —— théorie, —— simulation.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

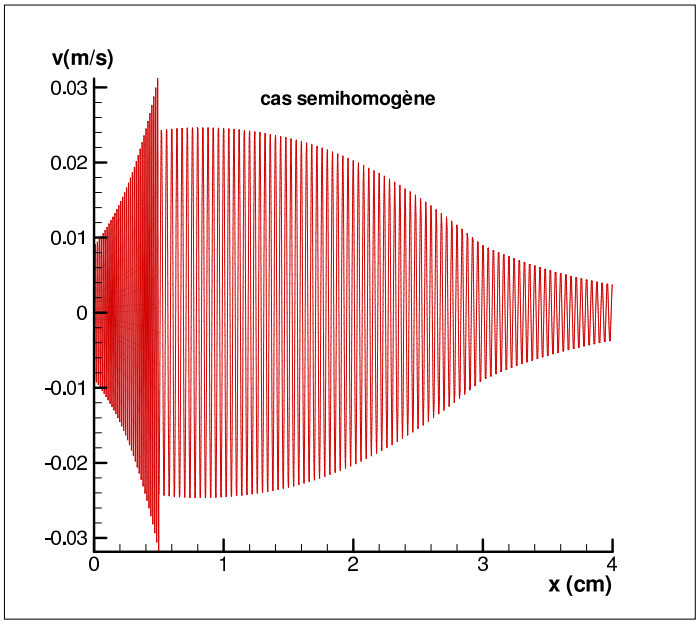


FIGURE 2.20 – Répartition spatiale de la vitesse particulaire, à la fin de pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). —— théorie, —— simulation.

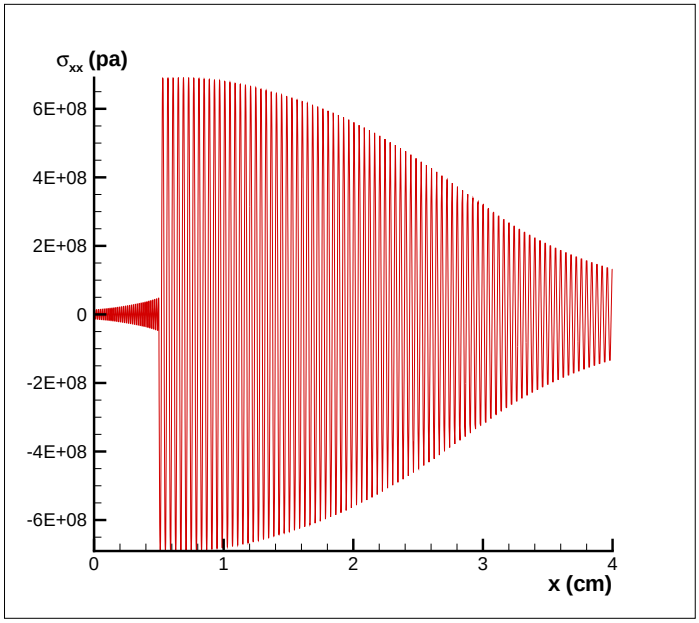


FIGURE 2.21 – Répartition spatiale de la contrainte, à la fin de pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). —— théorie, —— simulation.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

2.2 Conjugaison de phase en symétrie sphérique

Comme l'un des intérêts de la WPC est de la focalisation du faisceau conjugué, il semblait nécessaire de sortir du cadre paraxial. De toute évidence le premier pas consiste à transposer le problème 1D au cas de la symétrie sphérique. Loin du point focal l'approximation linéaire reste valable pour l'opérateur d'advection.

2.2.1 Equations générales

En opposition au problème paraxial où le conjugateur est un cylindre, il est constitué ici par l'intersection d'un cône avec deux sphères centrées à son apex (Fig. 2.22). En

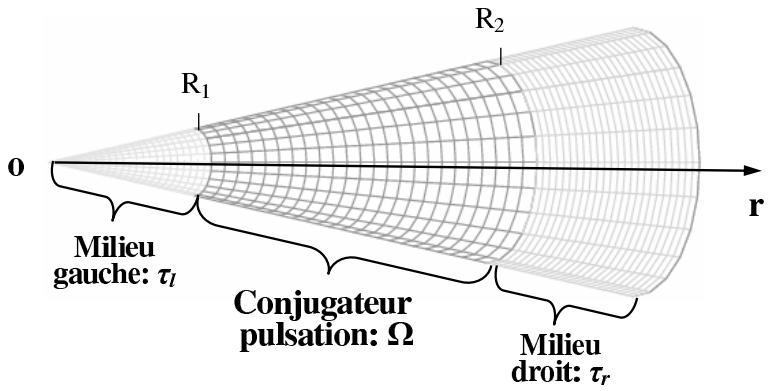


FIGURE 2.22 – Géométrie du problème symétrie sphérique.

supposant que le problème est à symétrie sphérique, le rayon r devient la seule variable spatiale du problème. Le conjugateur est défini par $R_1 < r < R_2$ et est supposé totalement actif. Pour un matériau homogène linéaire isotrope, en utilisant les coefficients de Lamé, la loi du Hooke entre le tenseur de la contrainte σ_{ij} et le tenseur de la tension ε_{ij} peut toujours être exprimé comme suit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

où les coefficients de Lamé λ, μ sont liés au module de Young E et le coefficient de Poisson ν par les relations connues :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

En symétrie sphérique, l'équivalent de l'hypothèse de déplacement unidimensionnel, consiste à considérer un déplacement purement radial $u_r(r)$. En conséquence, le tenseur des déformations se réduit aux composantes diagonales :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Le tenseur de la contrainte est aussi diagonal avec :

$$\sigma_{rr} = \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] + 2\mu\varepsilon_{rr}$$

et

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}$$

Pour les développements futurs, le coefficient de contrainte σ_{rr} est écrit :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r}) - 4\mu\frac{u_r}{r} = \sigma_p + \sigma_s.$$

Il est la somme d'une contrainte "principale" $\sigma_p = (\lambda + 2\mu)[(\partial u_r)/(\partial r) + 2u_r/r]$, qui est associée à la variation de volume et d'une contrainte $\sigma_s = -4\mu u_r/r$ qui est associée à la déformation sous l'effet du coefficient de Poisson. En acoustique ou ultrasonique, la vitesse particulaire radiale est obtenue par la dérivation partielle par rapport au temps $v_r = (\partial u_r)/(\partial t)$.

Pour simplifier les notations, on introduit les constantes c_1, c_2, c_3 qui sont exprimées par les coefficients de Lamé de la façon suivante :

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}.$$

Dans un solide élastique, c_1 et c_2 correspondent respectivement à la vitesse du son longitudinale c_L et transversale c_T, ρ est la masse volumique et $c_3^2 + 2c_2^2 = c_1^2$.

La contrainte "principale" est donc

$$\sigma_p = \rho c_1^2(\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r}),$$

et la contrainte "secondaire"

$$\sigma_s = -4\rho c_2^2\frac{u_r}{r}.$$

En supposant que le milieu reste isotrope même quand il est excité par un champ magnétique, l'effet magnéto-acoustique peut être exprimé par [62]

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{c_i^2}\frac{dc_i^2}{dt} = -m\Omega\sin(\Omega t + \varphi_T) \tag{2.48}$$

et par conséquent pour les deux contraintes, on a :

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial t} = \rho c_1^2(\frac{\partial v_r}{\partial r} + 2\frac{v_r}{r}) - m\Omega\sin(\Omega t + \varphi_T)\sigma_p$$

$$\frac{\partial\sigma_s}{\partial t} = -4\rho c_2^2\frac{v_r}{r} + m\Omega\sin(\Omega t + \varphi_T)\sigma_s \tag{2.49}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Cette modélisation du pompage est appelée linéaire dans la littérature car le terme de pompage multiplie linéairement les fonctions d'onde. Selon la définition de contrainte suivant la direction des coordonnées θ et φ :

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} = \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2(\lambda+\mu)\frac{u_r}{r} = \sigma_{rr} - 2\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r})$$

et

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - 2\mu(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r}),$$

la composante radiale de l'équation de Navier en coordonnées sphériques est :

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{4\mu}{r}(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r}) \\ &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_s}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_p}{\partial r}.\end{aligned}$$

Finalement, le système pour σ_p et v_r revient à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_p}{\partial t} = \rho c_1^2(\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + 2\dfrac{v_r}{r}) - m\Omega\sin(\Omega t + \varphi_T)\sigma_p \\ \rho\dfrac{\partial v_r}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma_p}{\partial r} \end{cases} \tag{2.50}$$

et est complété par l'équation (2.49) pour σ_s.

2.2.2 Solution générale

Appliquons maintenant le changement de variables :

$$\Theta = \frac{r\sigma_p}{\rho c_1} \quad \text{et} \quad \Phi = -\frac{\partial}{\partial r}(r\int v_r dr) = -\int v_r dr - r v_r.$$

Il conduit à

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -r\frac{\partial v_r}{\partial r} - 2v_r,$$

et le système (2.50) peut être exprimé comme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Theta}{\partial t} + c_1\dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -m\Omega\sin(\Omega t + \varphi_T)\Theta. \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + c_1\dfrac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

ce qui est justement le système général de la conjugaison de phase unidimensionnelle [11], mais ici avec des variables Θ et Φ qui ont une dimension m^2/s au lieu de m/s.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Par l'analogie avec le problème unidimensionnel, la solution peut être recomposée par l'onde directe $W_1 = \Phi + \Theta$ et l'onde conjuguée $W_2 = \Phi - \Theta$ qui sont des solutions des équations du problème paraxial :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial t} + c_0 \dfrac{\partial W_1}{\partial r} = -m\Omega(W_1 - W_2)\sin(\Omega t + \varphi_T) - \dfrac{m}{2} c_0 \dfrac{\partial W_1}{\partial r}\cos(\Omega t + \varphi_T) \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial t} - c_0 \dfrac{\partial W_2}{\partial r} = m\Omega(W_1 - W_2)\sin(\Omega t + \varphi_T) + \dfrac{m}{2} c_0 \dfrac{\partial W_2}{\partial r}\cos(\Omega t + \varphi_T). \end{cases}$$

Les solutions classiques sont les fonctions de r et t :

$$W_1 = -Ce^{\Gamma t}\sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_1)\sin(-\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1) \tag{2.52}$$

$$W_2 = Ce^{\Gamma t}\sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_2)\sin(\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2). \tag{2.53}$$

Les inconnus α, Γ, ξ_1 et ξ_2 sont à déterminer par les conditions aux frontières sur $r = R_1$ et $r = R_2$. Les phases φ_1 et φ_2 sont à déterminer par la synchronisation temporelle des ondes entre tronçons de part et d'autre de la zone active. Les expressions de Φ et Θ sont :

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) &= -\frac{1}{2}Ce^{\Gamma t}[\sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_1)\sin(-\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1) \\ &- \sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_2)\sin(\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2)] \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2}(W_1 - W_2) &= -\frac{1}{2}Ce^{\Gamma t}[\sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_1)\sin(-\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1) \\ &+ \sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_2)\sin(\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2)] \end{aligned} \tag{2.55}$$

Maintenant, il est temps de présenter une considération extrêmement importante. La plupart des expériences en WPC sont réalisées dans le régime ultrasonique avec des fréquences caractéristiques de l'ordre de $10M$ Hz pour une longueur du conjugateur de 10 cm. Le nombre d'onde k satisfait alors la relation $kr \gg 1$ à l'intérieur de la zone active. Nous pouvons donc négliger les termes d'ordre m, α et $1/kr$ dans les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial}{\partial r}[-\frac{1}{r}\int \Phi dr] = -\frac{1}{r}\Phi + \frac{1}{r^2}\int \Phi dr \simeq -\frac{1}{r}\Phi \\ &= \frac{1}{2r}Ce^{\Gamma t}[\sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_1)\sin(-\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1) \\ &- \sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_2)\sin(\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2)] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} u_r = \int v_r dt &\simeq \frac{Ce^{\Gamma t}}{r\Omega}[-\sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_1)\cos(-\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1) \\ &+ \sin(\frac{k\alpha}{4}r + \xi_2)\cos(\frac{k}{2}r + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2)] \end{aligned} \tag{2.56}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Donc nous pouvons vérifier facilement que

$$\frac{u_r}{r} \sim \frac{1}{kr}\frac{\partial u_r}{\partial r},$$

ce qui signifie que $\sigma_s \sim \sigma_p/(kr)$ et que $\sigma_{rr} \simeq \sigma_p = \rho c_1 \Theta / r$

2.2.3 Conditions aux frontières

On suppose que la zone active est en contact avec les milieux intérieur et extérieur. A la frontière de la zone active, la vitesse v_r, le déplacement u_r et la contrainte σ_{rr} sont continus. A la limite "intérieure" $r = R_1$, seule l'onde conjuguée peut rayonner vers du domaine géométrique, on a donc

$$W_{1I}(R_1, t) = \Phi_I(R_1, t) + \Theta_I(R_1, t) = 0$$

où "I" désigne la zone inactive intérieure ($r < R_1$). Par conséquent,

$$\Phi_I(R_1, t) = -\Theta_I(R_1, t),$$

et

$$W_{2I}(R_1, t) = \Phi_I(R_1, t) - \Theta_I(R_1, t) = 2\Phi_I(R_1, t).$$

D'après nos approximations, la continuité de la vitesse, du déplacement, et de la contrainte sur le point limite $r = R_1$ à l'intérieur de la zone active donne :

$$\begin{aligned} W_2(R_1, t) &= \Phi(R_1, t) - \Theta(R_1, t) \qquad (2.57)\\ &= [-\int v_r dr](R_1, t) - R_1 v_r(R_1, t) - \Theta(R_1, t) - 4\frac{c_2^2}{c_1} u_r(R_1, t) \\ &= [-\int v_r dr]_I(R_1, t) - R_1 v_{rI}(R_1, t) - \tau_I \Theta_I(R_1, t) - 4\tau_I \frac{c_{2I}^2}{c_{1I}} u_{rI}(R_1, t) \\ &\quad -4(\frac{c_2^2}{c_1} - \tau_I \frac{c_{2I}^2}{c_{1I}}) u_r(R_1, t) \\ &= \frac{1+\tau_I}{2} W_{2I}(R_1, t) - 4(\frac{c_2^2}{c_1} - \tau_I \frac{c_{2I}^2}{c_{1I}}) u_r(R_1, t) \end{aligned}$$

et de même pour $W_1(R_1, t)$

$$W_1(R_1, t) = \frac{1-\tau_I}{2} W_{2I}(R_1, t) + 4(\frac{c_2^2}{c_1} - \tau_I \frac{c_{2I}^2}{c_{1I}}) u_r(R_1, t) \qquad (2.58)$$

avec $\tau_I = (\rho_I c_I)/(\rho c_1)$ et $\tau_E = (\rho_E c_E)/(\rho c_1)$ les rapports d'impédance entre les milieux environnants et le conjugateur.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

La comparaison avec le cas 1D montre que'il existe ici un terme en plus :

$$4(\frac{c_2^2}{c_1} - \tau_I \frac{c_{2I}^2}{c_{1I}})u_r(R_1, t).$$

Mais d'après notre approximation pour $kr \gg 1$, ce terme peut être négligé puisque dans l'équation (2.56)

$$u_r \sim \frac{W_1}{kr}.$$

Donc, à la limite intérieure $r = R_1$:

$$W_1(R_1, t) = \frac{1 - \tau_I}{1 + \tau_I} W_2(R_1, t)$$

ce qui est justement la condition à la frontière du problème paraxial. Cela conduit à [4] :

$$\sin(kR_1 + \varphi_2 - \varphi_1) = 0 \tag{2.59}$$

et

$$\sin(\frac{k\alpha}{4}R_1 + \xi_1) \pm \frac{1 - \tau_I}{1 + \tau_I} \sin(\frac{k\alpha}{4}R_1 + \xi_2) = 0 \tag{2.60}$$

La même chose se passe au bord en contact avec le milieu extérieur en $r = R_2$, pour la condition $W_{2E} = 0$, où "E" désigne cette limite "extérieur". On a donc encore

$$\sin(kR_2 + \varphi_2 - \varphi_1) = 0 \tag{2.61}$$

et

$$\sin(\frac{k\alpha}{4}R_2 + \xi_1) \pm \frac{1 + \tau_E}{1 - \tau_E} \sin(\frac{k\alpha}{4}R_2 + \xi_2) = 0 \tag{2.62}$$

Finalement, la transformation standard du problème acoustique 1D vers la solution sphérique s'applique aussi pour WPC si $kr >> 1$ et sous la condition du pompage linéaire. La solution sphérique peut être déduite de la solution paraxiale par une simple division par r. De plus toutes les inconnues comme Γ, ξ_1, ξ_2 ou la valeur du seuil m_0 pour le régime supercritique sont les mêmes en symétrie sphérique qu'en symétrie paraxiale. De même les considérations sur la continuité de la pente de l'amplitude à la limite de la zone active restent valables.

2.2.4 Résolution du problème

Les solutions W_1 et W_2 sont obtenues pour le cas 1D de la section 2.1.4.1. La clé est la détermination de α, ce qui provient de la résolution des démarches successives suivantes : La compatibilité des solutions tests avec les équations qui donne : $\gamma = \xi_2 - \xi_1$, avec

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$\cos\gamma = (8\Gamma)/(m\Omega)$ et $\sin\gamma = (2\alpha)/(m)$. Les conditions aux frontières (Eqs. 2.60 et 2.62) qui conduisent à :

$$\tan\xi_1 = \frac{-\sin(\frac{k\alpha}{4}R_1) + \frac{1-\tau_I}{1+\tau_I}\sin(\frac{k\alpha}{4}R_1+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha}{4}R_1) - \frac{1-\tau_I}{1+\tau_I}\cos(\frac{k\alpha}{4}R_1+\gamma)}$$

$$\tan\xi_1 = \frac{-\sin(\frac{k\alpha}{4}R_2) + \frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}\sin(\frac{k\alpha}{4}R_2+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha}{4}R_2) - \frac{1+\tau_E}{1-\tau_E}\cos(\frac{k\alpha}{4}R_2+\gamma)}$$

et l'élimination de ξ_1 qui fournit

$$G_s(\alpha) = \frac{\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}}{2\alpha} - \cot(2\arctan G_{s0}(\alpha)) = 0 \tag{2.63}$$

avec

$$G_{s0}(\alpha) = \frac{(\tau_I+\tau_E)\cot(\frac{k\alpha}{4}\Delta R) \pm \sqrt{\left((\tau_I+\tau_E)\cot(\frac{k\alpha}{4}\Delta R)\right)^2 + 4\tau_I\tau_E}}{2} \tag{2.64}$$

La solution est obtenue quand la solution minimale de l'équation (2.63) est obtenue. Tous les autres paramètres peuvent être déduits des relations précédentes. Les figures (2.23 et 2.24) montrent des résultats numériques des répartitions spatiales de l'onde directe W_1 et l'onde conjuguée W_2 dans le cas hétérogène. La zone active est en contact direct avec les milieux extérieurs. En comparant ces résultats avec ceux du cas paraxial, on remarque que l'onde conjuguée focalise son énergie dans la direction du point source initial. Les figures (2.25, 2.26, 2.27) sont des répartitions spatiales des ondes directe et conjuguée en symétrie sphérique en $t = 0, 1.5\mu s, 3\mu s, 6\mu s, 9\mu s, 12\mu s, 15\mu s, 18\mu s$, pour le cas $\tau_I = 0.3$ et $\tau_E = 0.1$. La fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. Dans les figures on remarque que l'onde directe ne rayonne pas vers la gauche de la zone active et l'onde conjuguée ne rayonne pas vers la droite de la zone active.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

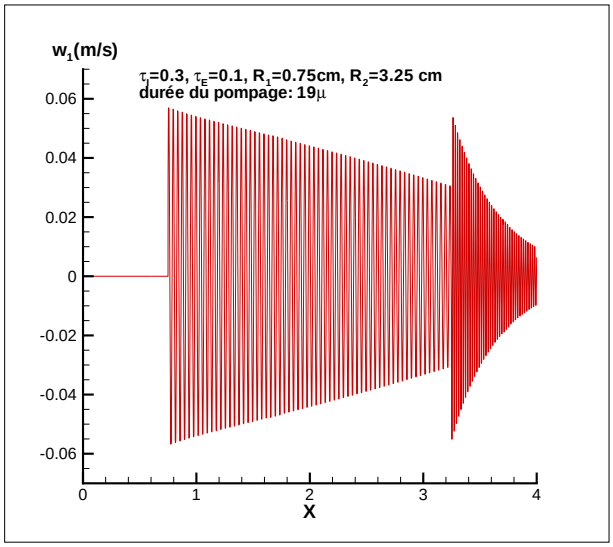


FIGURE 2.23 – Répartition spatiale de l'onde directe W_1 en symétrie sphérique, en $t = 18\mu s$ avant la fin du pompage $t = 19\mu s$, pour le cas hétérogène où $\tau_I = 0.3$ et $\tau_E = 0.1$, la fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz.

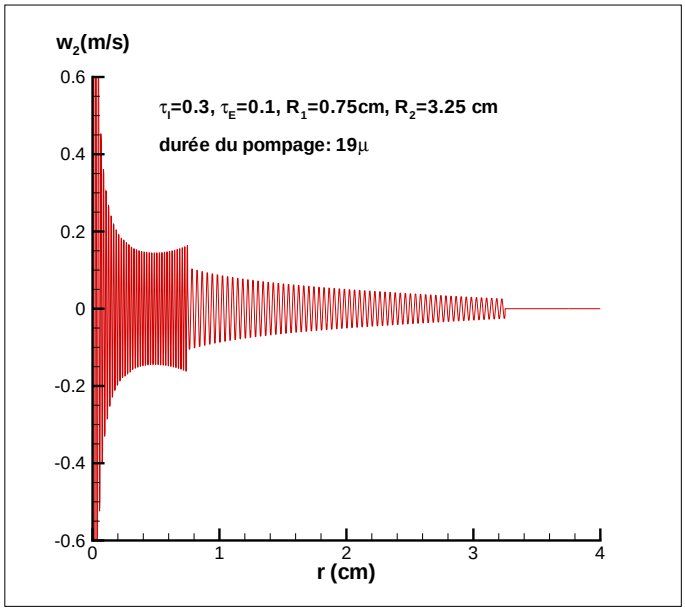
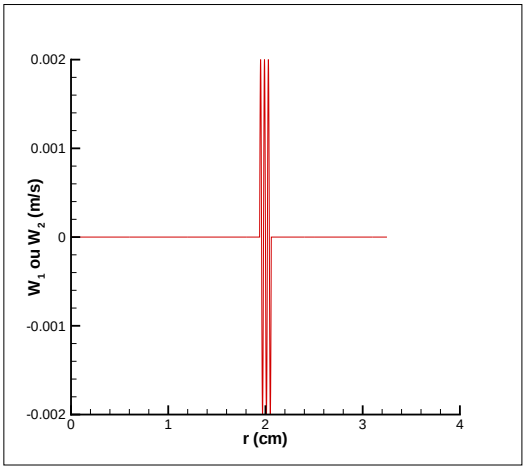


FIGURE 2.24 – Répartition spatiale de l'onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique, en $t = 18\mu s$ avant la fin du pompage $t = 19\mu s$, pour le cas hétérogène où $\tau_I = 0.3$ et $\tau_E = 0.1$, la fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. .

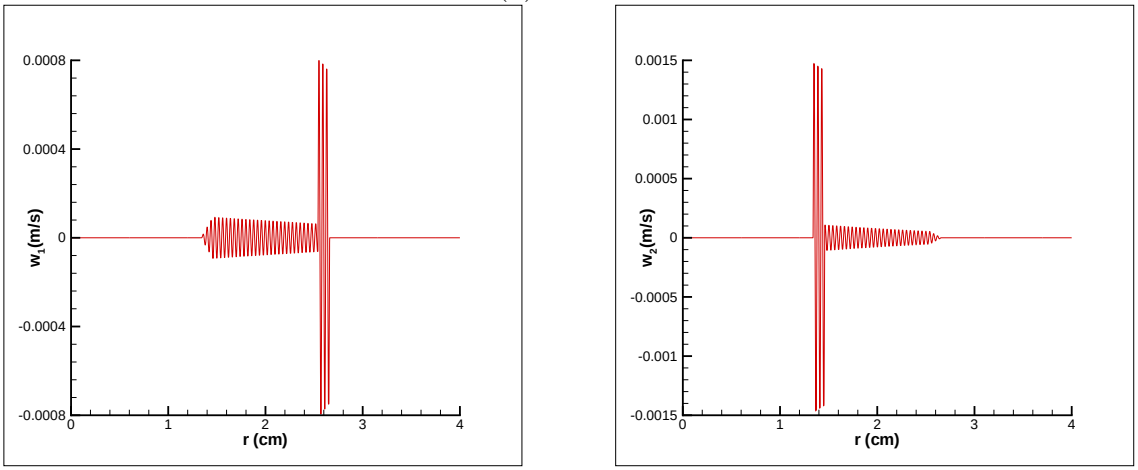
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

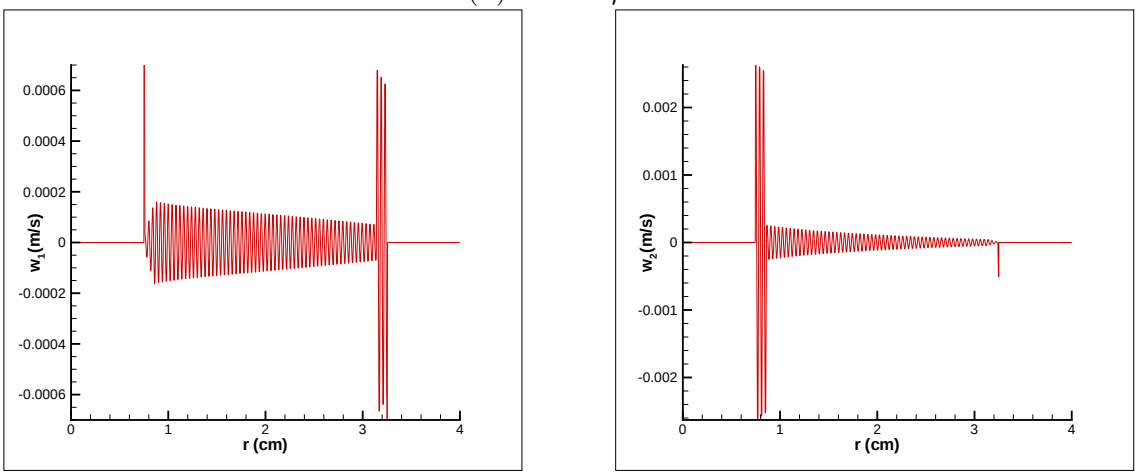
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(a) $t = 0$



(b) $t = 1.5\mu s$



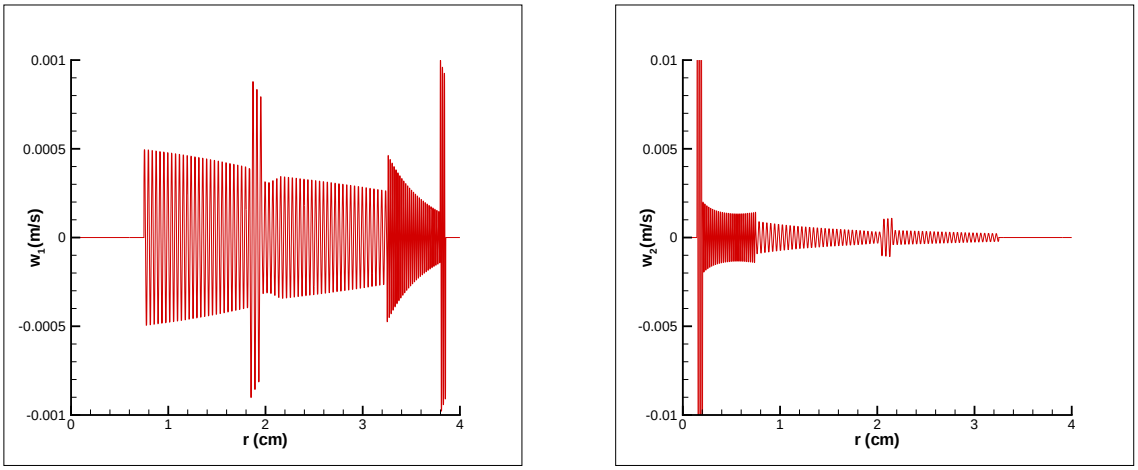
(c) $t = 3\mu s$

FIGURE 2.25 – épartitions spatiales des onde directe W_1 et onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique, en $t = 0, 1.5\mu s, 3\mu s, 6\mu s, 9\mu s, 12\mu s, 15\mu s, 18\mu s$, pour le cas hétérogène où $\tau_I = 0.3$ et $\tau_E = 0.1$. La fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. L'onde directe ne rayonne pas vers la gauche de la zone active et l'onde conjuguée ne rayonne pas vers la droite de la zone active.

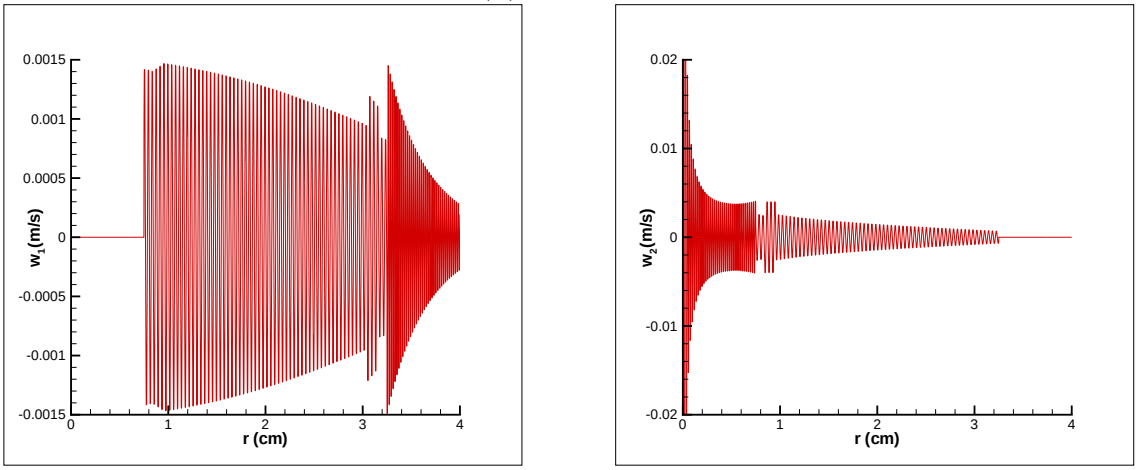
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

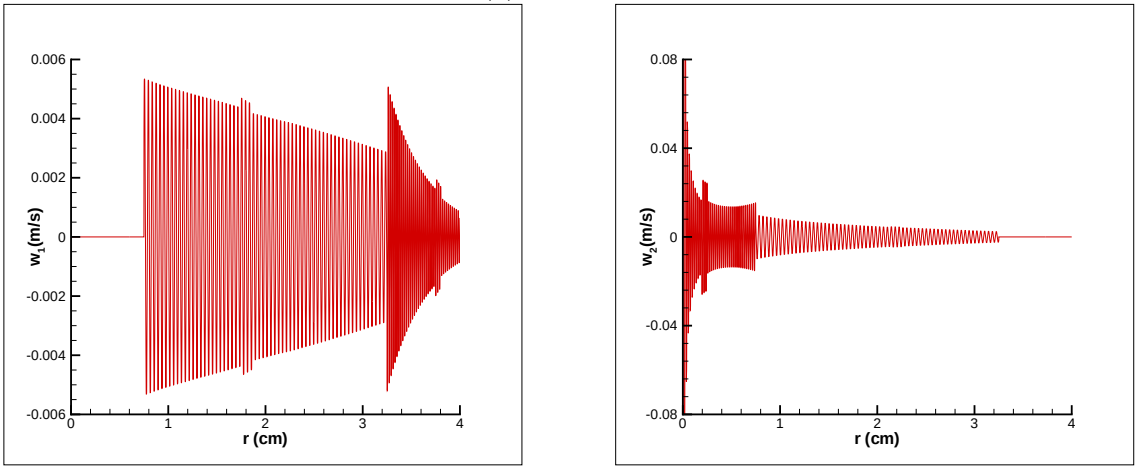
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(d) $t = 6\mu s$



(e) $t = 9\mu s$

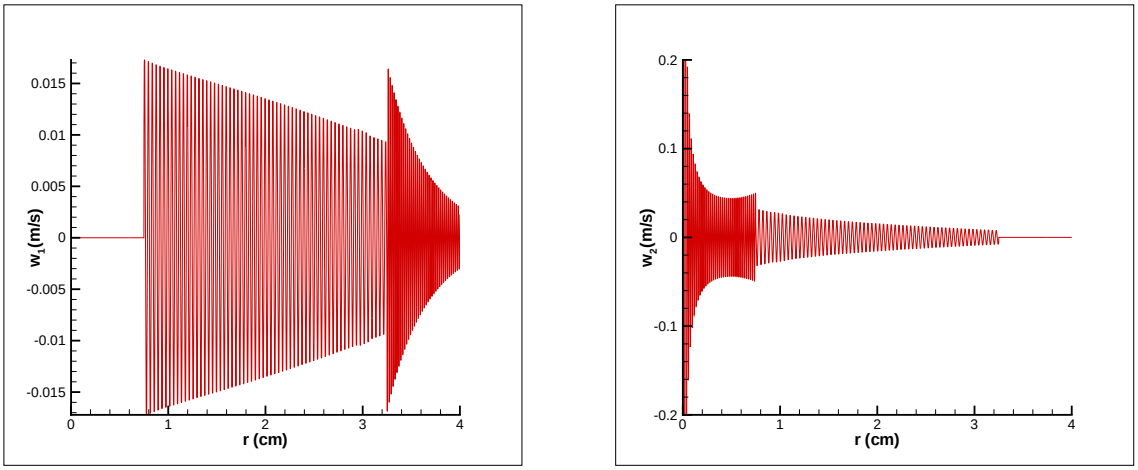


(f) $t = 12\mu s$

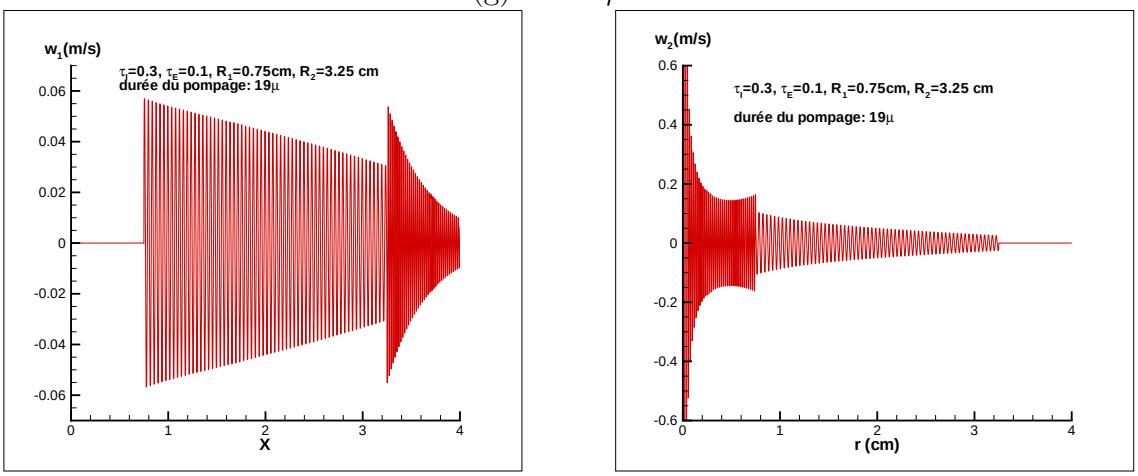
FIGURE 2.26 – Répartitions spatiales des onde directe W_1 et onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique (suite).

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl



(g) $t = 15\mu s$



(h) $t = 18\mu s$

FIGURE 2.27 – Répartitions spatiales des onde directe W_1 et onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique (suite).

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre 3

Approche des situations réalistes

3.1 Conjugateur monodimensionnel à zone active interne

3.1.1 Problème physique

Nous avons présenté dans la section (2.1) une théorie détaillée qui donne explicitement, par une méthode de multi-échelle, les solutions résonnantes paramétriques pour une zone active finie en contact avec des milieux passifs arbitraires. Mais en général dans les expériences, la zone active n'est pas en contact direct avec les milieux externes. Cette section va généraliser la théorie dans cette situation plus réaliste où la taille du conjugateur excède la taille de la zone active. Cette amélioration théorique permet de démontrer la possibilité d'une adaptation d'impédance artificielle. Ces résultats nous rapprocherons des conditions expérimentales car on sait que la théorie unidimensionnelle est suffisante pour décrire les caractères principaux du phénomène [11] même en acoustique où les réflexions aux frontières sont plus compliquées qu'en optique sauf pour l'approximation paraxiale.

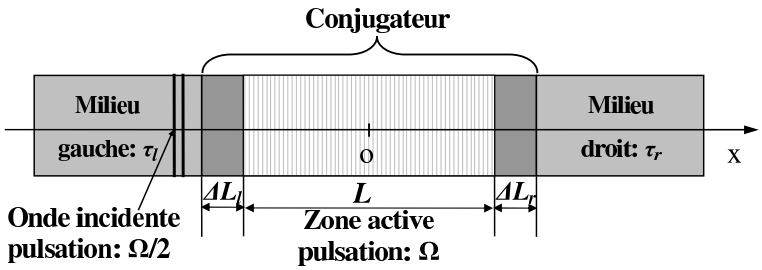


Figure 3.1 – Problème physique unidimensionnel réaliste

Dans cette section, le même point de vue unidimensionnel est donc adopté. Une descrip-

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

tion schématique du processus peut alors se réduire à la séquence d'événements suivante. Une onde incidente se propage depuis le milieu gauche avec une composante de pulsation ω dans son spectre. Elle entre dans le conjugateur puis dans la zone active et le pompage commence à la fréquence $\Omega = 2\omega$. Une onde conjuguée de la composante spectrale ω est alors créée. L'onde directe w_1 et l'onde conjuguée w_2 s'accroissent exponentiellement jusqu'a la fin du pompage.

3.1.2 Solutions théoriques

Le rapport d'impédance est encore défini par $\tau_i = (\rho_i c_i)/(\rho_0 c_0)$ où ρ est la densité, c la vitesse du son, l'indice 0 désigne le conjugateur, $i = l, r$ désignent respectivement le milieu gauche et le milieu droit. D'une manière plus générale, le problème peut être traité par les coefficients de réflexion r_l et r_r à la limite du conjugateur. Ces coefficients sont fonction du rapport d'impédance selon la relation $r_i = (1-\tau_i)/(1+\tau_i)$. En optique, r_i correspond à l'indice de réfraction. La source d'énergie est toujours simulée dans le cadre de l'hypothèse de pompage linéaire, en supposant l'absence de dissipation. Dans ces conditions, à l'intérieur de la zone active $|x| \leq L/2$, les équations modèles [3, 11] sont (2.4) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = -m\Omega\frac{\theta}{2}\sin(\Omega t + \varphi),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$$

Ici, à la différence du cas traité dans la section (2.1), les sauts d'impédance sont décalés en $x = -L/2 - \Delta L_l$ et $x = L/2 + \Delta L_r$, ΔL_i et ΔL_r sont des distances entre la limite de la zone active et la limite du conjugateur gauche et droite. Les conditions aux frontières s'écrivent donc :

$$w_1(-\frac{L}{2} - \Delta L_l, t) = \frac{(1-\tau_l)}{(1+\tau_l)} w_2(-\frac{L}{2} - \Delta L_l, t), \tag{3.1}$$

$$w_1(\frac{L}{2} + \Delta L_R, t) = \frac{(1+\tau_r)}{(1-\tau_r)} w_2(\frac{L}{2} + \Delta L_R, t). \tag{3.2}$$

On peut obtenir des solutions exactes par la même technique que celle de l'approximation paraxiale de la section (2.1) si les conditions (3.1) et (3.2) sont transportées en $x = \pm L/2$. Ceci n'est possible que dans une situation stable où la forme d'enveloppe reste inchangée pendant la croissance exponentielle. C'est exactement le cas de la solution résonnante paramétrique. Ici, aucune onde directe ne provient de $x < -L/2 - \Delta L_l$, mais l'onde conjuguée est partiellement réfléchie en $x = -L/2 - \Delta L_l$ et crée donc une onde directe qui arrive en $x = -L/2$ après un temps $\Delta L_l/c_0$. Pendant ce temps, cette onde n'est pas amplifiée car elle se propage à l'extérieur de la zone active. Supposons que l'amplitude de l'onde conjuguée au bord de la zone active est C au temps t. L'onde conjuguée émise va se réfléchir au bord du conjugateur au temps $t + \Delta L_l/c_0$ et arriver de nouveau à la

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

frontière de la zone active au temps $t+2\Delta L_l/c_0$ avec l'amplitude $(1-\tau_l)C/(1+\tau_l)$. A ce moment-là, l'onde conjuguée émise en $x=-L/2$ a une amplitude $Ce^{2\Gamma\Delta L_l/c_0}$. Comme il n'y a pas de saut d'impédance en $x=-L/2$, la condition (3.1) peut être écrite :

$$w_1(-\frac{L}{2},t)=\frac{(1-\tau_l)}{(1+\tau_l)}w_2(-\frac{L}{2},t)e^{-2\Gamma\Delta L_l/c_0}, \tag{3.3}$$

ou :

$$w_1(-\frac{L}{2},t)=\frac{(1-\tau_l')}{(1+\tau_l')}w_2(-\frac{L}{2},t) \tag{3.4}$$

où τ' se déduit de l'égalité $1-\tau_l'=\dfrac{1-\tau_l}{1+\tau_l}e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}}(1+\tau_l')$. C'est à dire

$$1-\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c-0}}=\tau_l'(1+\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}})$$

et donc

$$\tau_l'=\frac{(1+\tau_l)-(1-\tau_l)e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}}}{(1+\tau_l)+(1-\tau_l)e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}}}.$$

A partir de l'expression alternative

$$\tau_l'=\frac{(1-e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}})+\tau_l(1+e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}})}{(1+e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}})+\tau_l(1-e^{-\frac{2\Gamma\Delta L_l}{c_0}})}$$

on obtient encore

$$\tau_l'=\frac{(e^{\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}}-e^{-\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}})+\tau_l(e^{\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}}+e^{-\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}})}{(e^{\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}}+e^{-\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}})+\tau_l(e^{\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}}-e^{-\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}})}$$

et donc

$$\tau_l'=\frac{\sinh\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}+\tau_l\cosh\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}}{\cosh\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}+\tau_l\sinh\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0}}$$

ou

$$\tau_l'=\frac{\tau_l+\tanh(\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0})}{1+\tau_l\tanh(\frac{\Gamma\Delta L_l}{c_0})}. \tag{3.5}$$

Pour τ_r' sur la frontière de la zone active droite du conjugateur, nous pouvons obtenir la même relation en remplaçant l'indice l par r dans (3.5) :

$$\tau_r'=\frac{\tanh\frac{\Gamma\Delta L_r}{c_0}+\tau_r}{1+\tau_r\tanh\frac{\Gamma\Delta L_r}{c_0}} \tag{3.6}$$

Finalement, le problème de l'échantillon "réaliste" est équivalant au cas d'une zone active en contact direct avec des milieux arbitraires, résolu dans la section (2.1) si le rapport

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

d'impédance artificiel τ_i' remplace τ_i dans les conditions aux frontières de la zone active. Comme τ_i' est une fonction continue de ΔL_i, le rapport d'impédance artificiel peut être ajusté continûment entre τ_i pour $mk\Delta L_i \ll 1$ et 1 (i.e. le cas homogène) pour $mk\Delta L_i \gg 1$.

En effet on remarque que dans les équations (3.5) et (3.6), quand les longueurs entre la limite de la zone active et la limite du conjugateur ΔL_l et ΔL_r sont suffisamment grandes, on peut avoir $\Gamma\Delta L_i/c_0 \gg 1$, alors $\tanh(\Gamma\Delta L_i/c_0)$ tend vers 1, et τ_i' tend vers 1 (tend vers le cas homogène). Physiquement, on peut aussi voir quand ΔL_i est très grand, le milieu passif est très loin du conjugateur, on peut donc avoir un conjugateur homogène.

En revanche, si les longueurs entre les limites de la zone active et les limites du conjugateur ΔL_l et ΔL_r sont très petites, on va avoir $\Gamma\Delta L_i/c_0 \ll 1$, alors $\tanh(\Gamma\Delta L_i/c_0)$ est une valeur qui tend vers 0, et donc τ_i' tend vers τ_i, c'est à dire tend vers un cas où le conjugateur est actif sur toute sa longueur dont la zone active est en contact direct avec les milieux passifs.

Pour un coefficient d'amplitude A donné, la solution du problème dans la zone active est donnée par les formules (2.18, 2.19) :

$$w_1 = -Ae^{\Gamma t}\left(\sin(\frac{k\alpha}{4}x+\xi_1)\sin(-\frac{k}{2}x+\frac{\Omega}{2}t+\varphi_1)+mf_1(x,t)\right)$$

et

$$w_2 = Ae^{\Gamma t}\left(\sin(\frac{k\alpha}{4}x+\xi_2)\sin(\frac{k}{2}x+\frac{\Omega}{2}t+\varphi_2)-mf_1(x_0-x,t)\right)$$

où α est toujours la plus petite solution de :

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}}{2\alpha} - \cot\left(2\arctan G_0(\alpha)\right) = 0 \tag{3.7}$$

mais avec cette fois

$$G_0(\alpha) = \frac{\left[(\tau_l'+\tau_r')\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((\tau_l'+\tau_r')\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\tau_l'\tau_r'}\right]}{2}. \tag{3.8}$$

L'inconnue ξ_1 est obtenue par

$$\tan\xi_1 = \frac{\sin(\frac{k\alpha L}{8})+\frac{1-\tau_l'}{1+\tau_l'}\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8})-\frac{1-\tau_l'}{1+\tau_l'}\cos(-\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}$$

ou

$$\tan\xi_1 = \frac{-\sin(\frac{k\alpha L}{8})+\frac{1+\tau_r'}{1-\tau_r'}\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8})-\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r'}\cos(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

où

$$\cos\gamma = \frac{8\Gamma}{m\Omega}, \quad \sin\gamma = \frac{2\alpha}{m}$$

et ξ_2 par :

$$\xi_2 = \xi_1 + \gamma.$$

A l'extérieur de la zone active, la solution peut être écrite :

$$w_1 = A_1 \sin(-\frac{kx}{2} + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_1')$$
$$w_2 = A_2 \sin(\frac{kx}{2} + \frac{\Omega}{2}t + \varphi_2')$$

où les amplitudes A_1 et A_2 sont :

pour $-L/2 - \Delta L_l < x < -L/2$

$$\begin{aligned} A_1 &= -Ae^{\frac{-\Gamma L}{2c_0}} e^{\frac{\Gamma}{c_0}(c_0 t - x)} \sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1) \\ A_2 &= Ae^{\frac{\Gamma L}{2c_0}} e^{\frac{\Gamma}{c_0}(c_0 t + x)} \sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_2), \end{aligned}$$

pour $L/2 < x < L/2 + \Delta L_R$

$$\begin{aligned} A_1 &= -Ae^{\frac{\Gamma L}{2c_0}} e^{\frac{\Gamma}{c_0}(c_0 t - x)} \sin(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1) \\ A_2 &= Ae^{\frac{-\Gamma L}{2c_0}} e^{\frac{\Gamma}{c_0}(c_0 t + x)} \sin(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_2) \end{aligned}$$

pour $x < -L/2 - \Delta L_l$,

$$A_1 = 0$$
$$A_2 = \frac{2Ae^{\frac{-\Gamma \Delta L_l}{c_0} + \frac{\Gamma}{c_l}(L/2 + \Delta L_l)} e^{\frac{\Gamma}{c_l}(c_l t + x)} \sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_2)}{1 + \tau_l}$$

pour $L/2 + \Delta L_R < x$,

$$A_1 = \frac{-2Ae^{\frac{-\Gamma \Delta L_R}{c_0} + \frac{\Gamma}{c_R}(L/2 + \Delta L_R)} e^{\frac{\Gamma}{c_R}(c_R t - x)} \sin(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1)}{1 + \tau_R}$$
$$A_2 = 0$$

Les valeurs de φ_i' $(i = 1, 2)$ dépendent de la zone où l'onde située.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

3.1.3 Résultats

Les figures (3.2), (3.3) et (3.4) comparent une simulation numérique directe de la conjugaison de phase magnéto-acoustique avec les résultats théoriques pour les amplitudes A_1 et A_2 données ci-dessus. Une valeur réaliste de $\rho_0 c_0 = 3.6\ 10^7 kg/m^2 s$ pour la ferrite magnéto-acoustique est simulée avec $\Omega = 4\pi\ 10^7$ Hz et la vitesse du son est toujours $c_0 = 4000 m/s$. Les milieux gauche et droit sont choisis artificiellement à des fins d'illustration mais correspondent respectivement et approximativement au verre et à la bakélite. On remarque que la théorie correspond bien au calcul numérique et donne explicitement la solution comme une fonction des paramètres physiques.

La figure (3.2) est une évolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et du milieu gauche, le point de calcul est du côté du milieu gauche. Dans cette figure, l'onde initiale qui commence au milieu de la zone active et qui se propage vers la gauche (w_2) apparaît à $3.125\mu s$, et la réflexion de l'onde initiale (w_1) qui arrive au point de calcul à $9.375\mu s$. Dans cette figure, l'enveloppe de l'évolution temporelle de la contrainte après la fin du pompage est en fait le transport de la répartition spatiale à l'intérieure de conjugateur. Comme l'onde directe w_1 est nulle dans le milieu gauche, la contrainte rayonnée à gauche ne dépend que de w_2.

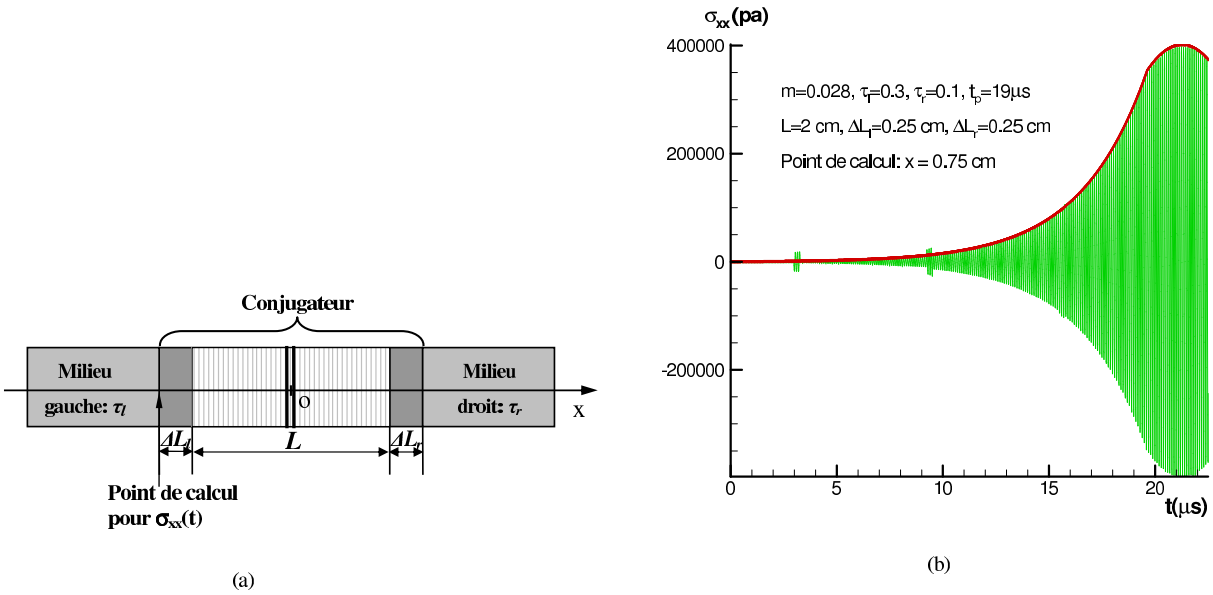


FIGURE 3.2 – Evolution temporelle de σ_{xx} sur le point initial gauche du conjugateur ($x = 0.75cm$). La zone active est située entre $x = 1cm$ et $x = 3cm$, le conjugateur étend de $x = 0.75cm$ à $x = 3.25cm$. **—** amplitude théorique, — calcul numérique.

Les figures (3.3) et (3.4) sont des répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et l'onde conjuguée w_2. Le conjugateur est entre 0.75 et $3.25cm$ et la zone active entre 1 et $3cm$, donc $\Delta L_l = 0.25cm, \Delta L_r = 0.25cm$. Ce sont des répartitions à $t = 18\mu s$ juste avant la

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

fin du pompage ($19\mu s$). Nous pouvons comparer ces deux figures avec les deux figures en $t = 18\mu s$ pour w_1 et w_2 (Figs. 2.5, 2.6, 2.7) dans le chapitre 2. On avait les mêmes conditions sauf que le conjugateur était totalement actif. On peut remarquer que dans les figures (3.3) et (3.4), il y a une discontinuité de la pente de l'amplitude aux extrémités de la zone active ($x = 1cm$) ou ($x = 3cm$). La pente est continue seulement dans le cas homogène. Ici, quoique le milieu soit le même pour les zones actives et passive du conjugateur ce n'est pas un cas homogène à cause des valeurs de τ_l' et τ_r' (3.5 et 3.6). On sait que c'est seulement quand ΔL_l et ΔL_r sont suffisamment grands que les τ_i' tendent vers 1 et que la situation devient homogène. Ici $\Delta L_l = \Delta L_r = 0.25cm$ ne sont pas assez longs de sorte que τ_l' et τ_r' sont trop différents de 1 pour que cette pente soit continue.

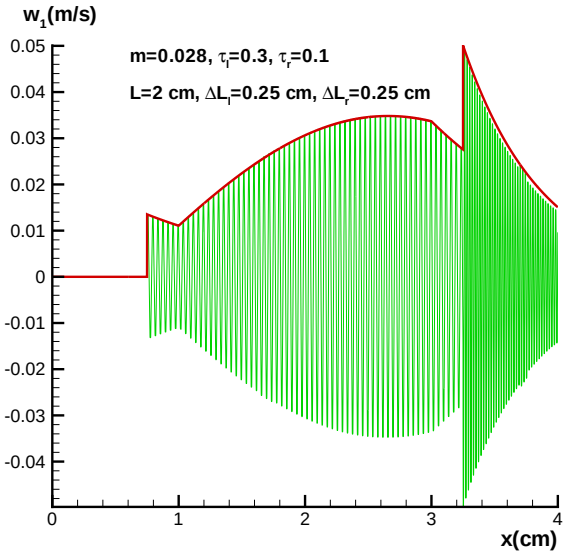


FIGURE 3.3 – Répartition spatiale de l'onde directe w_1 en $t = 18\mu s$ pour la zone active située entre $x = 1cm$ et $x = 3cm$, le conjugateur étend de $x = 0.75cm$ à $x = 3.25cm$. — amplitude théorique, — calcul numérique.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

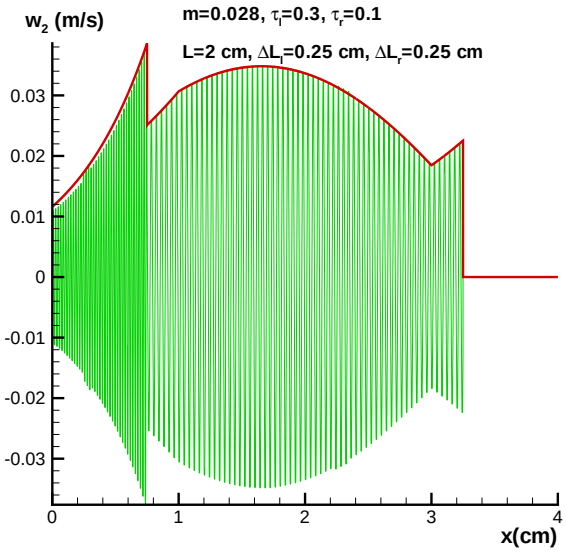


FIGURE 3.4 – Répartition spatiale de l'onde conjuguée w_2 en $t = 18\mu s$ pour la zone active située entre $x = 1cm$ et $x = 3cm$, le conjugateur étend de $x = 0.75cm$ à $x = 3.25cm$. — amplitude théorique, — calcul numérique

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

3.2 Dualité des solutions résonnantes supercritiques

Ici, l'étude des solutions analytiques du régime supercritique de la conjugaison de phase magnéto-acoustique est enrichie d'un nouveau type de solutions qui souligne le fait que les solutions classiques obtenues jusqu'alors sont d'un type particulier. Cette dualité des solutions s'accompagne d'une différence de seuil de pompage qui explique pourquoi la solution nouvelle dite "impaire" est moins facile à observer. Le passage d'une solution à l'autre est cependant très sensible à la valeur du rapport entre la longueur de la zone active et la longueur d'onde.

3.2.1 Résolution au premier ordre de l'équation modèle

Le succès des comparaisons simulation-théorie, la concordance des résultats théoriques avec ceux de l'acousto-optique, et le fait que la théorie soit valable à l'ordre $O(m)$, n'avaient pas, jusqu'à présent, conduit à étudier en détail deux autres inconnues du problème, à savoir φ_1 et φ_2. Celles-ci étaient obtenues à $O(m)$ près comme une condition de phase nécessaire à l'élimination du temps dans la résolution du problème. Maintenant on va chercher la résolution à l'ordre m pour préciser les valeurs de φ_1 et φ_2. Reprenons les solutions tests pour w_1 et w_2 (2.18) et (2.19) en fonction de x et t telles qu'on les avait posées dans la section (2.1.4). Introduisons les dans l'équation de w_1 (Eq. 2.26) par exemple, sans limiter aux termes résonnants. L'équation (2.28) est écrite :

$$\begin{aligned}
&[\Gamma \quad \sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)+\frac{\Omega\alpha}{4}\cos(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)]\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_1)\\
&+ \quad m(\frac{\partial}{\partial t}+c_0\frac{\partial}{\partial x})f_1=\frac{m\Omega}{8}\left[2\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)\cos(-\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_1+\varphi)\right.\\
&+ \quad \sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\cos(\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_2+\varphi)\\
&- \quad \left.\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\cos(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}-\varphi_2+\varphi)\right] \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

On remarque que la fonction $f_1(x,t)$ doit être une solution qui intègre un terme $3\Omega/2$ dans son expression. Ainsi

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}+c_0\frac{\partial}{\partial x})f_1 \quad &= \quad \frac{\Omega}{8}\left[2\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)\cos(-\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_1+\varphi)\right.\\
&\quad \left.+\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\cos(\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_2+\varphi)\right]
\end{aligned}$$

posons $f_1(x,t)=f_{11}(x,t)+f_{12}(x,t)$ avec

$$f_{11}=a_{11}(x)\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_1+\varphi),$$

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$f_{12} = a_{12}(x)\sin(\frac{kx}{2} + \frac{3\Omega t}{2} + \varphi_2 + \varphi).$$

Les solutions pour a_{11} et a_{12} sont trouvées facilement :

$$a_{11}(x) = \frac{1}{4}\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1),$$
$$a_{12}(x) = \frac{1}{16}\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2)$$

donc,

$$f_1(x,t) = \frac{1}{4}\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_1+\varphi)+\frac{1}{16}\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\sin(\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_2+\varphi).$$

En calculant de la même façon pour l'équations de w_2 (2.19), on a

$$-f_1(x_0-x,t) = \frac{1}{4}\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\sin(\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_2+\varphi)+\frac{1}{16}\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{3\Omega t}{2}+\varphi_1+\varphi).$$

On trouve ici que les termes à l'ordre m sont des termes en $3\Omega/2$ non-résonnants. Cela montre donc que la relation entre φ_1 et φ_2 dans les termes de pulsation $\Omega/2$ de l'ordre 0 était exacte et pas uniquement valable à $O(m)$ près. Ceci pose un problème, en termes de généralité de la solution, que nous allons étudier ci-dessous.

3.2.2 Existence des solutions duales : "paires" ou "impaires"

La relation entre ξ_1 et ξ_2 provient des conditions à la frontière. Comme dans la section (2.1.4), les conditions aux frontières ont conduit en $x = -L/2$ aux équations,

$$\sin(-\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1) = 0 \tag{3.10}$$

$$\sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1) \pm \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_2) = 0 \tag{3.11}$$

et en $x = L/2$ à

$$\sin(\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1) = 0 \tag{3.12}$$

$$\sin(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1) \pm \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_2) = 0. \tag{3.13}$$

Cette fois nous devons écrire que les premiers membres sont strictement nuls et non $O(m)$. De ce fait, les équations (3.10) et (3.12) imposent donc strictement $kL = 0$ (

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

mod π) ! Ce qui signifie que la zone active doit être nécessairement un nombre entier de fois $\lambda/4$ où λ est la longueur d'onde associée à la fréquence $\Omega/2$. De plus, dans les équations (3.11) et (3.13), il y a des signes "$\pm$" dont on n'a pas utilisé toutes les combinaisons.

Dans l'équation (3.11), le signe "$\pm$" signifie que $\cos(-kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = \pm 1$ et dans l'équation (3.13) que $\cos(kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = \pm 1$.

Il y a donc 4 types de solutions compatibles avec les conditions aux deux frontières.

La condition de compatibilité (2.30) $\sin(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2) = \pm 1$ conduit à

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \mp 1, \tag{3.14}$$

où on a posé $\varphi = 0$ sans perte de généralité (en fait un simple changement de variable $\varphi_i' \rightarrow \varphi_i + \varphi/2$ peut aussi éliminer φ).

L'équation (2.29) peut être écrite comme :

$$\Gamma \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1) + \frac{\Omega\alpha}{4} \cos(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1) = \pm \frac{m\Omega}{8} \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2) \ \ \forall x. \tag{3.15}$$

Selon le signe choisi au second membre, on pose

$$\cos(\gamma) = \pm \frac{8\Gamma}{m\Omega} \text{ et } \sin(\gamma) = \pm \frac{2\alpha}{m} \tag{3.16}$$

en adoptant le même signe que celui du second membre, alors :

$$\sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_1 + \gamma) = \sin(\frac{k\alpha x}{4} + \xi_2). \tag{3.17}$$

et donc, $\xi_2 = \xi_1 + \gamma \mod (2\pi)$.

3.2.2.1 Solutions paires

Premier type de solution On prend

$$\cos(-\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1) = -1$$

et

$$\cos(\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1) = -1.$$

Ces deux conditions donnent $kL = 2n\pi$. En remplaçant ξ_2 par $\xi_1 + \gamma$ on aura pour $x = -L/2$ et $x = L/2$:

$$\sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1) - \frac{1 - \tau_l}{1 + \tau_l} \sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1 + \gamma) = 0 \tag{3.18}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1)-\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1+\gamma)=0 \tag{3.19}$$

Les deux équations pour ξ_1 peuvent être écrites :

$$\tan\xi_1=\frac{\sin(\frac{k\alpha L}{8})+\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8})-\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\cos(-\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}$$

et

$$\tan\xi_1=\frac{-\sin(\frac{k\alpha L}{8})+\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8})-\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\cos(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}.$$

L'élimination de ξ_1 aboutit à :

$$\left(\tan(\frac{\gamma}{2})\right)^2-(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\tan(\frac{\gamma}{2})-\tau_l\tau_r=0$$

dont la solution est :

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left[(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\pm\sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\tau_l\tau_r}\right].$$

Finalement, selon la définition de γ (3.16), la valeur de $\alpha=\alpha_s$ sélectionnée par le système doit être la plus petite solution positive qui correspond au mode plus amplifié visible de :

$$G(\alpha)=\frac{\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}}{2\alpha}-\cot\left(2\arctan G_0(\alpha)\right)=0 \tag{3.20}$$

avec

$$G_0(\alpha)=\frac{(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\pm\sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\tau_l\tau_r}}{2} \tag{3.21}$$

La fonction G et l'expression G_0 sont en fait celles qu'on avait présenté dans la section (2.1.4).

Second type de solution On a :

$$\cos(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=1$$

et

$$\cos(\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=1.$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Ces deux conditions donnent aussi $kL = 2n\pi$. Prenant la relation $\xi_2 = \xi_1 + \gamma$ en $x = -L/2$ et $x = L/2$, on a :

$$\sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1) + \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1 + \gamma) = 0 \tag{3.22}$$

$$\sin(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1) + \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8} + \xi_1 + \gamma) = 0 \tag{3.23}$$

les deux équations pour ξ_1 deviennent maintenant :

$$\tan\xi_1 = \frac{\sin(\frac{k\alpha L}{8}) - \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8}) + \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\cos(-\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}$$

et

$$\tan\xi_1 = \frac{-\sin(\frac{k\alpha L}{8}) - \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8}) + \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\cos(\frac{k\alpha L}{8} + \gamma)}.$$

Elimination de ξ_1 aboutit à :

$$\left(\tan(\frac{\gamma}{2})\right)^2 - (\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_r})\cot(\frac{k\alpha L}{4})\tan(\frac{\gamma}{2}) - \frac{1}{\tau_l\tau_r} = 0$$

qui donne une solution

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_r})\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_r})\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\frac{1}{\tau_l\tau_r}}\right].$$

La fonction G ici est

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{2\alpha} - \cot\left(2\arctan G_0(\alpha)\right) = 0 \tag{3.24}$$

avec

$$G_0(\alpha) = \frac{(1/\tau_l + 1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((1/\tau_l + 1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4/(\tau_l\tau_r)}}{2} \tag{3.25}$$

Discussion pour les deux premiers types de solutions-cas "pair" En comparant ces deux premières solutions pour G on remarque que si on change τ_i à $1/\tau_i,\ i = l, r$ on retrouve les mêmes équations pour $G_0(\alpha)$ et donc pour $G(\alpha)$. Comme on a toujours la relation $kL = 2n\pi$, on appelle solution paire ces deux premiers types de solutions.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Maintenant on va vérifier que ces deux premières solutions donnent la même valeur pour α. Pour clarifier, on pose $G_0 = G_0^A$ dans le premier type de solution , et $G_0 = G_0^B$ est pour le second type de solution.

La condition pour obtenir un α identique dans les deux cas s'écrit :

$$\cot\left(2\arctan G_0^B(\alpha)\right) = \cot\left(2\arctan G_0^A(\alpha)\right)$$

ce qui donne

$$2\arctan G_0^B(\alpha) = n\pi + 2\arctan G_0^A(\alpha)$$

et donc

$$\arctan G_0^B(\alpha) = \frac{n}{2}\pi + \arctan G_0^A(\alpha)$$

Pour $n = 1$, on a

$$\tan[\arctan G_0^B(\alpha)] = -\cot[\arctan G_0^A(\alpha)]$$

et donc on a la relation entre G_0^A et G_0^B

$$G_0^A(\alpha)G_0^B(\alpha) = -1$$

Or on peut calculer :

$$\begin{aligned} G_0^A(\alpha)\cdot G_0^B(\alpha) &= \frac{(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\tau_l\tau_r}}{2} \\ &\times \frac{(1/\tau_l+1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((1/\tau_l+1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4/(\tau_l\tau_r)}}{2} \end{aligned}$$

On peut remarquer que si on choisit le signe opposé dans les deux expressions, on peut retrouver la relation $G_0^A(\alpha)G_0^B(\alpha) = -1$.

Donc si dans le premier type de solution, on écrit $G_0^A(\alpha)$ avec "$\pm$" comme

$$G_0^A(\alpha) = \frac{(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\tau_l\tau_r}}{2} \tag{3.26}$$

on a pour $G_0^B(\alpha)$ dans le second type de solution avec un signe "$\mp$"

$$G_0^B(\alpha) = \frac{(1/\tau_l+1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \mp \sqrt{\left((1/\tau_l+1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4/(\tau_l\tau_r)}}{2} \tag{3.27}$$

Réciproquement si $\alpha = \alpha_s$ est la plus petite solution pour $G^A(\alpha) = 0$ (premier type de solution), alors en remplaçant $2\arctan G_0^A$ par $(\pi + 2\arctan G_0^B)$, on ne change pas la formule de $G(\alpha)$ de sorte que

$$G^A(\alpha) = G^B(\alpha) = 0,$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

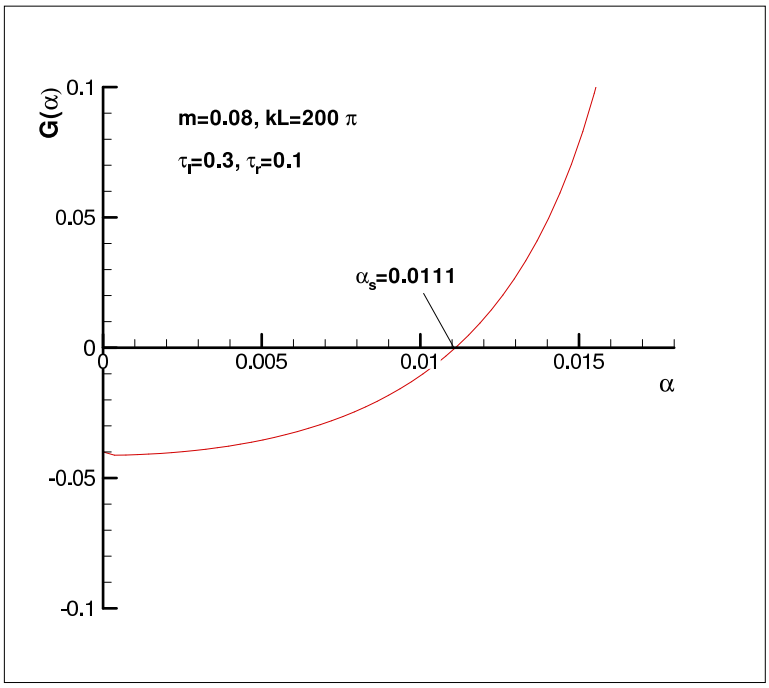


FIGURE 3.5 – Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 200\pi$, $\tau_l = 0.3$, $\tau_r = 0.1$.

ce qui signifie que si α_s est la plus petite solution pour $G^A(\alpha) = 0$, elle est aussi la plus petite solution de $G^B(\alpha) = 0$. A l'aide du logiciel Maple, on peut obtenir la solution α_s (Fig. 3.5) pour un cas pair où $kL = 200\pi$ en résolvant $G(\alpha) = 0$. La figure (3.5) présente le cas où on prend le signe "+" dans l'équation de $G_0^A(\alpha)$ (3.26) et le signe "-" dans l'équation de $G_0^B(\alpha)$ (3.27). Si on prend le signe "-" dans l'équation de $G_0^A(\alpha)$ (3.26) et le signe "+" dans l'équation de $G_0^B(\alpha)$ (3.27), on obtient une racine de l'équation qui a la même valeur absolue que α_s mais avec un signe opposé.

Ici, les rapports d'impédance sont $\tau_l = 0.3$ et $\tau_r = 0.1$ dont $\tau_l \cdot \tau_r = 0.03 < 1$. Dans l'équation de $G_0^A(\alpha)$ (3.26), on doit choisir le signe "+" pour trouver la valeur positive de α_s et pour donc l'équation de $G_0^B(\alpha)$ (3.27) on doit choisir le signe "-".

Maintenant, dans l'équation de $G_0^B(\alpha)$ (3.27), si on pose deux rapports d'impédance fictifs $\tau_l^f = 1/\tau_l = 1/0.3 = 3.33$ et $\tau_r^f = 1/\tau_r = 1/0.1 = 10$, on peut considérer que c'est aussi une équation $G_0^A(\alpha)$

$$G_0^A(\alpha) = \frac{(\tau_l^f + \tau_r^f)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((\tau_l^f + \tau_r^f)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\tau_l^f \tau_r^f}}{2}$$

mais avec le produit des rapports d'impédance supérieurs à 1, ce produit est $\tau_l^f \cdot \tau_r^f = 33.3$, et ici on a pris un signe "-" pour avoir une valeur positive pour α.

Pour clarifier ce point, on a fait un autre calcul montré dans la figure (3.6) avec les

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

mêmes conditions que dans la figure (3.5) mais avec des rapports d'impédance $\tau_l = 3$ et $\tau_r = 2$, de produit $\tau_l \cdot \tau_r > 1$. Pour trouver la valeur positive de α_s, on doit choisir alors le signe "-" dans l'équation de $G_0^A(\alpha)$ ou signe "+" dans l'équation de $G_0^B(\alpha)$.

En résumé on doit choisir le signe "+" dans l'expression de $G_0^A(\alpha)$ et "-" dans celle de $G_0^B(\alpha)$ quand $\tau_l \cdot \tau_r < 1$ et "-" dans $G_0^A(\alpha)$, "+" dans celle de $G_0^B(\alpha)$ quand $\tau_l \cdot \tau_r > 1$ pour obtenir la valeur positive de α_s.

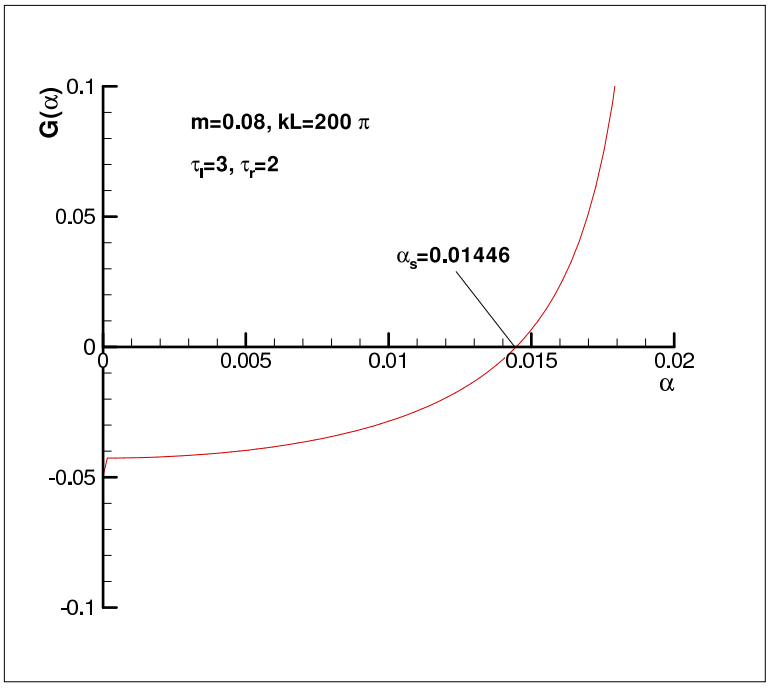


FIGURE 3.6 – Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 200\pi$, $\tau_l = 3$, $\tau_r = 2$.

Le cas où le produit $\tau_l \cdot \tau_r = 1$ est un cas particulier où l'on obtient simultanément les solutions α_s et $-\alpha_s$. Le choix des signes est donc sans importance.

Un calcul dans ce cas particulier avec $kL = 200\pi$, $\tau_l = 0.5, \tau_r = 2$ est présenté dans la figure (3.7).

Désormais, on sait comment choisir le signe dans les équations pour $G_0(\alpha)$. Pour le cas $\tau_l \cdot \tau_r < 1$, par exemple $\tau_l = 0.3, \tau_r = 0.1$ où on fait souvent des calculs, on doit prendre

$$G_0^A(\alpha) = \frac{(\tau_l + \tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) + \sqrt{\left((\tau_l + \tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\tau_l\tau_r}}{2} \tag{3.28}$$

et si on utilise le formule $G_0^B(\alpha)$ pour résoudre le problème, on doit prendre

$$G_0^B(\alpha) = \frac{(1/\tau_l + 1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) - \sqrt{\left((1/\tau_l + 1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4/(\tau_l\tau_r)}}{2}. \tag{3.29}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

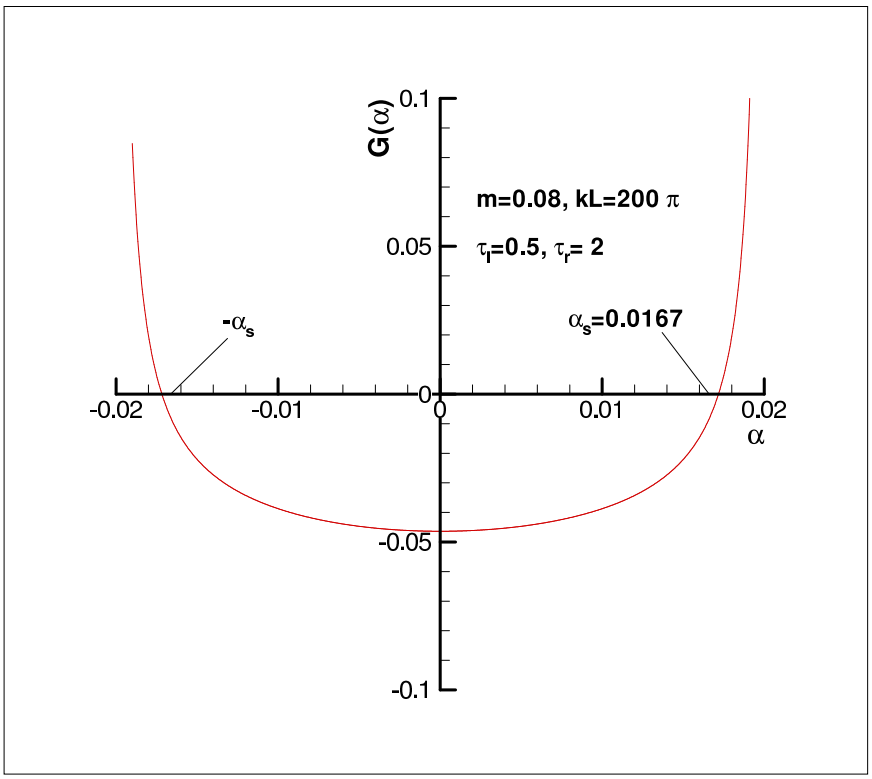


FIGURE 3.7 – Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 200\pi$, $\tau_l = 0.5$, $\tau_r = 2$.

Pour le cas où $\tau_l \cdot \tau_r > 1$ ($\tau_l = 3, \tau_r = 2$ par exemple), on doit choisir

$$G_0^A(\alpha) = \frac{(\tau_l + \tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) - \sqrt{\left((\tau_l + \tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\tau_l\tau_r}}{2} \tag{3.30}$$

et pour G_0^B on doit choisir

$$G_0^B(\alpha) = \frac{(1/\tau_l + 1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) + \sqrt{\left((1/\tau_l + 1/\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4/(\tau_l\tau_r)}}{2} \tag{3.31}$$

Discussions sur le seuil du cas pair Pour le seuil d'amplification $m_0 = 2\alpha_0$, on avait obtenu l'expression (2.42) pour le cas homogène dans la section (2.1.4.2)

$$m_0 = 2\alpha_0 = \frac{4\pi c_0}{\Omega L}$$

Ici, pour un cas où la zone active est en contact avec des milieux passifs hétérogènes, on va chercher une expression pour le seuil $m_0 = 2\alpha_0$ en résolvant l'équation de $G(\alpha) = 0$ pour $m_0 = 2\alpha_0$. On a donc

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$\frac{\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}}{2\alpha}=0$$

d'où

$$\cot\left[2\arctan(G_0(\alpha))\right]=0.$$

soit

$$2\arctan(G_0(\alpha))=\frac{\pi}{2}\mod\pi$$

ou

$$\arctan(G_0(\alpha))=\frac{\pi}{4}\mod\frac{\pi}{2}$$

finalement on doit résoudre

$$G_0=\pm 1.$$

Pour $G_0^A(\alpha)$, on aura

$$\left[\frac{(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\pm\sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\tau_l\tau_r}}{2}\right]=\pm 1 \tag{3.32}$$

ici le signe "±" dans le second membre de l'équation correspond au signe "±" dans le premier membre car dans notre calcul τ_l et τ_r sont toujours positifs. C'est à dire que quand $\tau_l\cdot\tau_r<1$, le signe dans le premier membre est "+", le signe du second membre doit aussi être "+". Par contre, si $\tau_l\cdot\tau_r<1$, on avait choisi "-" dans l'équation de $G_0^A(\alpha)$, l'égalité est vrai quand on a "-1" pour le second membre. Pour résoudre, on peut remplacer α par $m_0/2$ dans cette équation et on trouve l'expression pour le seuil :

$$m_0=\frac{8}{kL}\mathrm{arccot}(\pm\frac{1-\tau_l\tau_r}{\tau_l+\tau_r}) \tag{3.33}$$

Si on cherche cette expression par $G_0^B(\alpha)$, on a

$$m_0=\frac{8}{kL}\mathrm{arccot}(\pm\frac{\tau_l\tau_r-1}{\tau_l+\tau_r}) \tag{3.34}$$

On peut vérifier tout de suite que pour le cas homogène où $\tau_l=\tau_r=1$

$$m_0=\frac{8}{kL}\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi}{kL}$$

ce qui correspond à l'expression trouvée précédemment.

Comme le signe "±" dans l'expression du seuil correspond à celui de l'expression de $G_0^A(\alpha)$, on peut écrire pour $\tau_l\cdot\tau_r<1$,

$$m_0=\frac{8}{kL}\mathrm{arccot}(\frac{1-\tau_l\tau_r}{\tau_l+\tau_r}) \tag{3.35}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

pour $\tau_l = 0.3, \tau_r = 0.1, kL = 200\pi$, cela donne $m_0 = 0.00488$.

Et si $\tau_l \cdot \tau_r > 1$ les mêmes raisons imposent de renverser les deux éléments du numérateur :

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\frac{\tau_l\tau_r - 1}{\tau_l + \tau_r}) \tag{3.36}$$

dans le cas $\tau_l = 3, \tau_r = 2, kL = 200\pi$, on a $m_0 = 0.01$.

Dans l'équation (3.32) le fait qu'on choisisse le signe "+" ou "-" pour "± 1" selon le signe choisi dans l'expression de $G_0^A(\alpha)$ impose aussi le choix de signe dans la condition de compatibilité (3.14). Par exemple pour le cas $\tau_l \cdot \tau_r < 1$, avec

$$\cos\gamma = \frac{8\Gamma}{m\Omega} = \frac{\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{m}, \quad \sin\gamma = \frac{2\alpha}{m}$$

on a

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{m - \sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{2\alpha}$$

et quand on cherche le seuil $m_0 = 2\alpha_0$, on aboutit à

$$\tan\frac{\gamma}{2} = 1.$$

Or comme $G_0 = \tan\frac{\gamma}{2}$ (2.38) cela correspond donc à l'équation (3.35). Ainsi que pour $\tau_l \cdot \tau_r < 1$, on doit choisir la condition de compatibilité

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -1.$$

Le choix de la condition de compatibilité

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$$

donne

$$\cos\gamma = \frac{8\Gamma}{m\Omega} = -\frac{\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{m}, \quad \sin\gamma = -\frac{2\alpha}{m}$$

et donc

$$G_0(\alpha) = \tan\frac{\gamma}{2} = -1,$$

ce qui correspond au cas $\tau_l \cdot \tau_r > 1$ (3.36).

On peut écrire ces deux types d'expressions sous une formule simple :

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\frac{|1 - \tau_l\tau_r|}{\tau_l + \tau_r}). \tag{3.37}$$

Comme les termes dans "arccot" sont toujours positifs, on sait que le seuil du cas pair est toujours inférieure à $4\pi/(kL)$ qui est le seuil du cas pair homogène. Autrement dit, ce cas homogène a un seuil plus élevé de tous les autres cas pairs.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

3.2.2.2 Solutions impaires

Par opposition au cas pair, on appellera cas impair ou solution impaire le cas où $kL = (2n+1)\pi$ où on a :

$$\cos(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=1 \text{ et } \cos(\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=-1$$

ou

$$\cos(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=-1 \text{ et } \cos(\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=1.$$

Troisième type de solution Prenons

$$\cos(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=1 \text{ et } \cos(\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=-1,$$

les équations pour ξ_1 sont :

$$\tan\xi_1=\frac{\sin(\frac{k\alpha L}{8})-\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8})+\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\cos(-\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}$$

et

$$\tan\xi_1=\frac{-\sin(\frac{k\alpha L}{8})+\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}{\cos(\frac{k\alpha L}{8})-\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\cos(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}.$$

En éliminant ξ_1 cela donne :

$$\left(\tan(\frac{\gamma}{2})\right)^2-(\frac{1}{\tau_l}+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\tan(\frac{\gamma}{2})-\frac{\tau_r}{\tau_l}=0$$

et donc

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{\tau_l}+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\pm\sqrt{\left((\frac{1}{\tau_l}+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\frac{\tau_r}{\tau_l}}\right].$$

La fonction $G(\alpha)$ et $G_0(\alpha)$ sont donc :

$$G(\alpha)=\frac{\sqrt{m^2-(2\alpha)^2}}{2\alpha}-\cot\left(2\arctan G_0(\alpha)\right)=0 \tag{3.38}$$

avec

$$G_0(\alpha)=\frac{(\frac{1}{\tau_l}+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\pm\sqrt{\left((\frac{1}{\tau_l}+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2+4\frac{\tau_r}{\tau_l}}}{2} \tag{3.39}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En simplifiant, on a

$$G_0^C(\alpha) = \frac{\left[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{G_1(\alpha)}\right]}{2\tau_l}, \tag{3.40}$$

avec

$$G_1(\alpha) = [(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})]^2 + 4\tau_l\tau_r.$$

Quatrième type de solution Si on prend

$$\cos(-\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1) = -1 \text{ et } \cos(\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1) = 1.$$

On a la même équation pour $G(\alpha)$ mais $G_0(\alpha)$ est donné par

$$G_0^D(\alpha) = \frac{\left[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{G_1(\alpha)}\right]}{2\tau_r}, \tag{3.41}$$

et avec le même $G_1(\alpha)$ que dans le troisième type de solution.

Ici aussi, le système va sélectionner la même valeur pour α_s par les équations (3.40) ou (3.41). On peut vérifier que pour le cas impair, le produit

$$G_0^C(\alpha) \cdot G_0^D(\alpha) = -1$$

est vrai quand on choisit les signes opposés dans les deux expressions.

La différence entre le cas impair et le cas pair est que le choix de signe "+" et "-" dans les expression de $G_0(\alpha)$ dépend de la comparaison τ_l et τ_r mais pas comme dans le cas pair (comparaison entre $\tau_l \cdot \tau_r$ et 1). Pour avoir la valeur de α_s, on doit prendre le signe "+" pour $G_0^C(\alpha)$ et le signe "-" pour $G_0^D(\alpha)$ quand $\tau_l > \tau_r$, et quand $\tau_l < \tau_r$ on doit choisir le signe "-" pour $G_0^C(\alpha)$ et le signe "+" pour $G_0^D(\alpha)$. Le cas où $\tau_l = \tau_r$ est particulier car on peut y négliger le choix de signe.

La figure (3.8) montre un exemple de calcul de α_s par le logiciel Maple pour le cas impair. Dans ce calcul on a pris $m = 0.08$, la fréquence du pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, la vitesse du son $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, les rapports d'impédance $\tau_l = 0.3$, $\tau_r = 0.1$, la longueur de la zone active est $2.01cm$ qui est complètement active et en contact direct avec les milieux passifs. Cette figure confirme que la plus petite racine α_s de $G(\alpha)$ est obtenue en choisissant le signe "+" dans l'équation de $G_0^C(\alpha)$ (Eq. 3.40) ou obtenue en choisissant le signe "-" dans l'équation de $G_0^D(\alpha)$ (Eq. 3.41).

La figure (3.9) présente le cas impair $kL = 201\pi$, mais $\tau_l = 2$, $\tau_r = 3$. Ces deux figures confirment que pour $\tau_l < \tau_r$ on doit choisir le signe "-" pour $G_0^C(\alpha)$ et le signe "+" pour $G_0^D(\alpha)$ pour avoir une valeur positive de α_s.

La figure (3.10) est le cas particulier où $\tau_l = \tau_r (= 0.3)$.

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

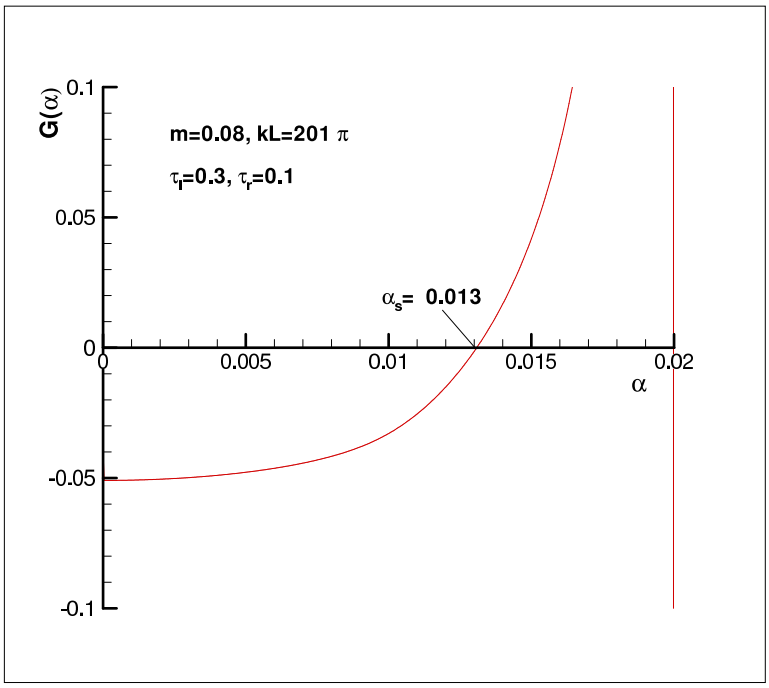


FIGURE 3.8 – Plus petite racine de α_s pour le cas impair avec $m = 0.08$, $kL = 201\pi$, $\tau_l = 0.3$, $\tau_r = 0.1$.

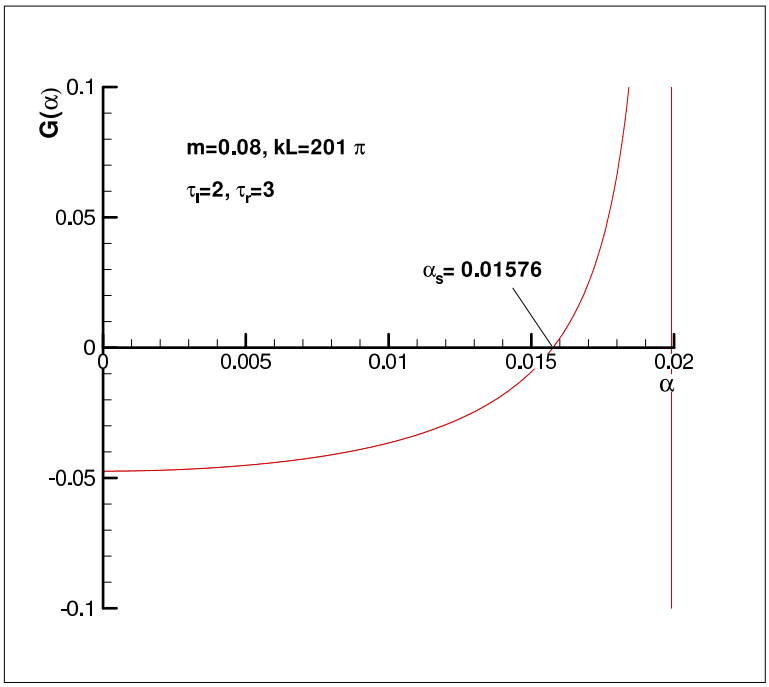


FIGURE 3.9 – Plus petite racine de α_s pour le cas impair avec $m = 0.08$, $kL = 201\pi$, $\tau_l = 2$, $\tau_r = 3$.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

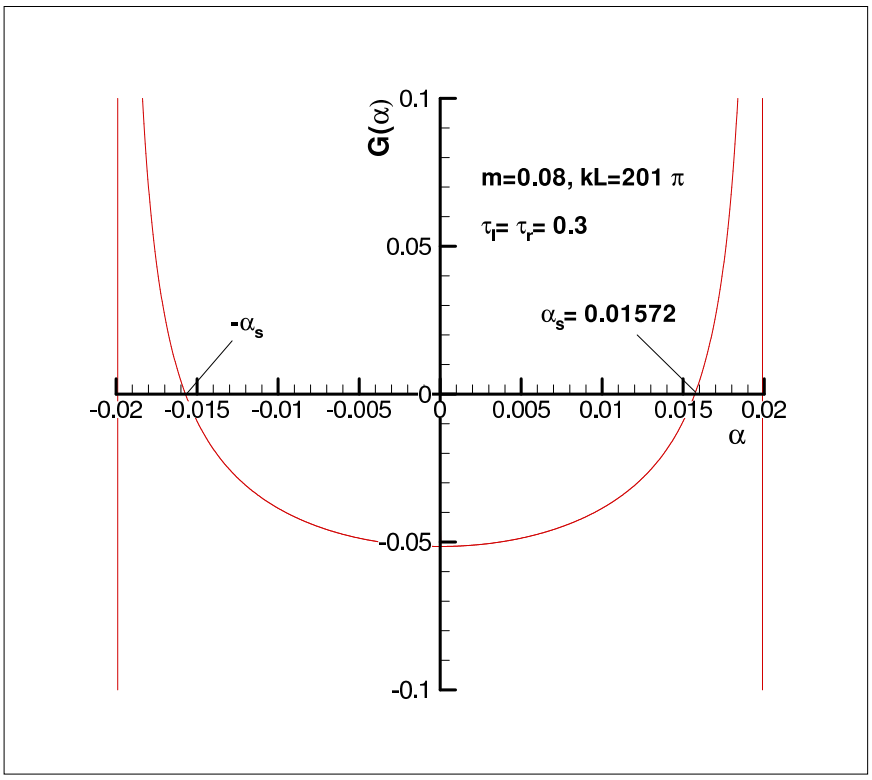


FIGURE 3.10 – Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 201\pi$, $\tau_l = \tau_r = 0.3$.

Seuil du cas impaire Dans le cas impair, le seuil est obtenu comme dans le cas pair par la relation :

$$G_0(\alpha) = \pm 1.$$

Nous cherchons les expression de m_0 pour identifier ensuite le choix du signe "$\pm$" dans les expressions de $G_0(\alpha)$ du cas impair.

Tout d'abord, pour $G_0^C(\alpha)$ dans le troisième type de solution (cas impair) on a

$$\begin{aligned} G_0^C(\alpha) &= \frac{\left[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{G_1(\alpha)}\right]}{2\tau_l} \\ &= \frac{\left[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})]^2 + 4\tau_l\tau_r}\right]}{2\tau_l} \\ &= \pm 1 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Comme les rapports d'impédance τ_l, τ_r sont toujours positifs, le signe "$\pm$" devant 1 correspond au celui dans l'expression dans $G_0(\alpha)$. En remplaçant α par $m_0/2$ on trouve une expression du seuil pour le cas impair :

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\pm\frac{\tau_l - \tau_r}{1+\tau_l\tau_r}) \tag{3.43}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

l'expression du seuil m_0 est trouvé aussi par l'expression de $G_0^D(\alpha)$ en calculant

$$\begin{aligned} G_0^D(\alpha) &= \frac{\left[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{G_1(\alpha)}\right]}{2\tau_r} \\ &= \frac{\left[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{[(1+\tau_l\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})]^2 + 4\tau_l\tau_r}\right]}{2\tau_r} \\ &= \pm 1 \end{aligned} \tag{3.44}$$

on a

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\pm\frac{\tau_r - \tau_l}{1+\tau_l\tau_r}) \tag{3.45}$$

Pour le cas homogène, l'expression de m_0 est aussi vérifiée ici comme dans le cas pair. Pour $\tau_l = \tau_r = 1$, on a

$$m_0 = \frac{8}{kL}\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{kL}.$$

Différant que les cas pairs, dans les cas impairs, l'expression $m_0 = 4\pi/kL$ n'est pas seulement vraie dans le cas homogène mais aussi vérifiée pour tous les cas où on a $\tau_l = \tau_r$. Ainsi pour tous les cas où $kL = 201\pi$, cette valeur de seuil est 0.01990 si $\tau_l = \tau_r$.

D'après le choix du signe "+" et "-" dans les équations de $G_0^D(\alpha)$ et $G_0^C(\alpha)$, les termes dans l'expression de "arccot" dans les équations pour m_0 doivent toujours être positifs. On peut en déduire une expression valable dans tous les cas :

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\frac{|\tau_l - \tau_r|}{1+\tau_l\tau_r}). \tag{3.46}$$

La plus grande valeur de m_0 est toujours obtenue pour $\tau_l = \tau_r$, et est égale à $4\pi/(kL)$. Le seuil du cas homogène et tous les cas où $\tau_l = \tau_r$ sont les seuils maximums des cas impairs.

Comme dans le cas pair, le fait qu'on choisisse le signe "+" ou "-" pour "± 1" dans (Eq. 3.42) et le signe dans l'expression de $G_0(\alpha)$ impose le choix de la condition de compatibilité (3.14) pour le cas impair.

Ici, pour l'expression de $G_0^C(\alpha)$ (premier type de solution impaire), si on a $\tau_l > \tau_r$, on doit choisir que "+1" dans le second membre de équation (3.42). Ceci impose que la condition de compatibilité soit

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -1$$

qui donne

$$\cos\gamma = \frac{8\Gamma}{m\Omega} = \frac{\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}}{m}, \quad \sin\gamma = \frac{2\alpha}{m}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

et

$$G_0^C(\alpha) = \tan\frac{\gamma}{2} = 1$$

d'où

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\frac{\tau_l - \tau_r}{1 + \tau_l\tau_r}). \tag{3.47}$$

De même pour l'expression de $G_0^D(\alpha)$ (second type de solution impaire), pour $\tau_l > \tau_r$, on doit choisir le signe "-". Donc "-1" dans l'équation de seuil

$$G_0^D(\alpha) = -1.$$

Pour cela, il faut choisir la condition de la compatibilité

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$$

pour en fin avoir un seuil positif comme (3.47).

Dès lors, les solutions obtenues dans le chapitre 2 ne correspondent qu'au cas où kL est un nombre pair fois π et où le signe "+" ou "-" doit être retenu simultanément dans les équations (3.11) et (3.13). Désormais, le choix alternatif où l'un des signes est "+" et l'autre "-" s'impose. L'existence d'une plus large gamme de solutions n'avait été évoquée que succinctement en [12] mais dans le cadre d'une théorie de pompage non linéaire.

3.2.3 Mise en évidence numérique de la dualité

Pour vérifier notre théorie, des simulations numériques ont été réalisées pour les solutions paires et impaires avec une zone active en contact direct avec les milieux passifs. Pour ces simulations, la fréquence Ω est de $4\pi \times 10^7$ Hz, la vitesse du son $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$ ce qui correspond à un nombre d'onde $k = 100\pi$. La longueur de la zone active était $L = 2.5cm$ pour le cas pair comme dans le chapitre 2, et $L = 2.51cm$ pour le cas impair. La différence de longueur de la zone active de $0.01cm$ correspond à un quart de longueur d'onde de l'onde progressive. Les rapports d'impédances sont $\tau_l = 0.3$, $\tau_r = 0.1$. Dans ce cas, le seuil du cas pair est $m_0 = 0.00398$, alors que $m_0 = 0.01399$ pour le cas impair. Pour $m = 0.028$, $\alpha_s = 0.00648$ pour le cas pair et $\alpha_s = 0.0088$ pour le cas impair. Le seuil m_0 et α_s sont plus faibles dans le cas pair que dans le cas impair, le taux de croissance du cas pair est donc plus élevé. Cette amplification plus importante pour le cas pair est donc obtenue pour un seuil d'énergie plus faible. Le très faible changement de longueur de la zone active donne donc un résultat très sensible sur l'énergie sortie de l'échantillon.

Les solutions du chapitre 2 ne sont donc que le cas particulier pair que l'on peut comparer avec les figures (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18) qui montrent des différents aspects des résultats du cas impair. La figure (3.11) présente une évolution temporelle de la pression mesurée à la limite entre le conjugateur et le milieu gauche pour la solution impaire. On peut comparer cette figure avec la figure (2.4) dans la section (2.1.4.1) qui présente le cas pair équivalent.

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

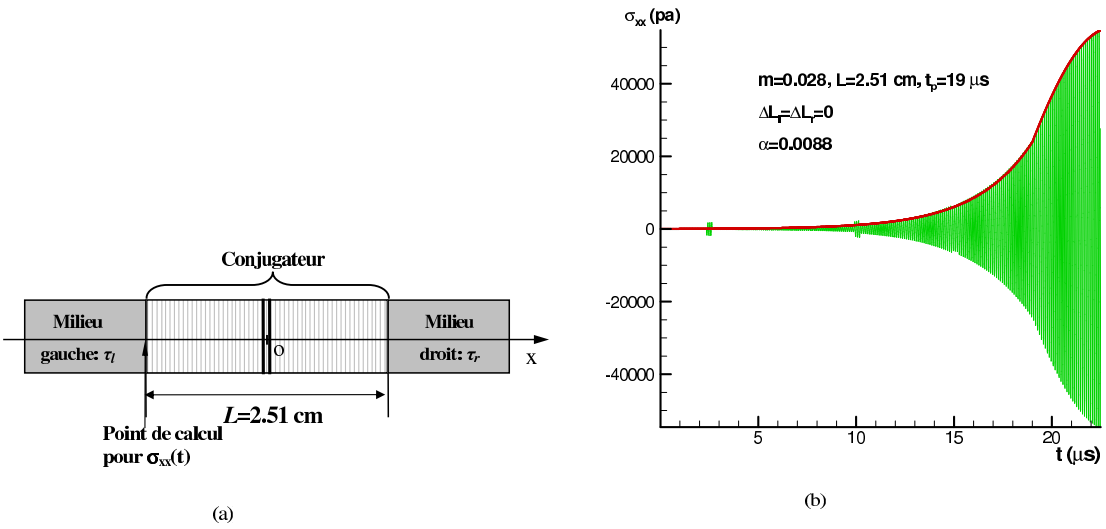


FIGURE 3.11 – Evolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et du milieu gauche pour le cas impair. **—** Amplitude théorique, — Simulation

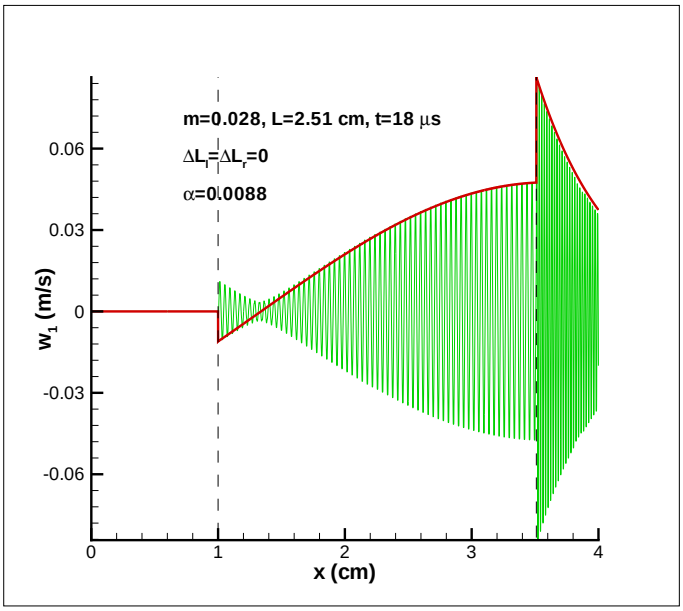


FIGURE 3.12 – Répartition spatiale pour l'onde directe w_1 pour $t = 18\mu s$ du cas impair. **—** Amplitude théorique, — Simulation

Les figures (3.12) et (3.13) montrent des répartitions spatiales d'une solution impaire en $t = 18\mu s$ pour l'onde directe w_1 et l'onde conjuguée w_2 quand la zone active $L = 2.51cm$, le conjugateur complètement actif est en contact direct avec les milieux passifs. Ces deux dernières figures peuvent être comparées avec les deux figures pour w_1 et w_2 des figures (2.7) pour $t = 18\mu s$ dans la section (2.1.4). On remarque qu'il y a un changement de forme des répartitions pour w_1 et w_2 particulièrement sensible pour w_1. Pour le cas

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

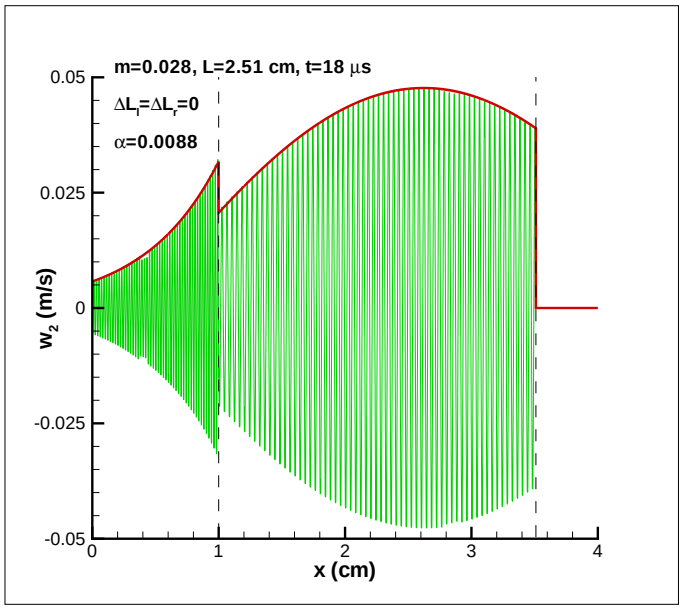


FIGURE 3.13 – Répartition spatiale pour l'onde conjuguée w_2 pour $t = 18\mu s$ du cas impair. **—** Amplitude théorique, — Simulation

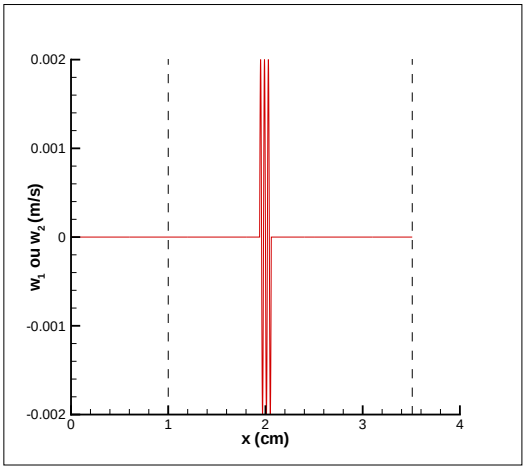
pair, l'enveloppe de l'onde est toujours positive, mais pour le cas impair, cette enveloppe présente un changement de signe dans la zone active.

Les figures (3.14, 3.15, 3.16) montrent une évolution des répartitions spatiales des ondes directe w_1 et conjuguée w_2 dans le cas impair avec une longueur de la zone active de $L = 2.51cm$ situé entre 1 et $3.51cm$, la fréquence du pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, la vitesse du son $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, les rapports d'impédance $\tau_l = 0.3$ et $\tau_r = 0.1$, la zone active est en contact direct avec les milieux extérieurs. La durée du pompage est $t_p = 19\mu s$. On peut comparer ces figures avec les figures (2.5, 2.6, 2.7) dans la section (2.1.4). Comme pour le cas pair, on remarque que l'onde directe ne rayonne pas vers la gauche de la zone active et l'onde conjuguée ne rayonne pas vers la droite de la zone active. Sur les figures relatives au cas pair la zone active était située entre 0.75 et $3.25cm$. Dans les figures (3.14) à $t = 3\mu s$ la réflexion de l'onde conjuguée est déjà apparu dans la répartition de l'onde directe, et dans le cas pair (Fig. 2.5), on peut avoir le même phénomène à partir de $t = 3.625\mu s$ simplement parce que dans les deux cas la condition initiale est lancée depuis la valeur $x = 2cm$. A partir de $t = 9\mu s$ (Fig. 3.15), l'enveloppe de l'onde directe du cas impair commence à avoir un changement de signe qui initie la forme théorique du cas impair. A ce moment là, les ondes du cas pair et du cas impair ont presque les mêmes amplitudes globales. Ensuite, les formes des ondes ne changent plus beaucoup. L'amplitude du cas pair est finalement plus élevée que celle du cas impair, et le cas pair a une durée de transitoire plus courte que le cas impair.

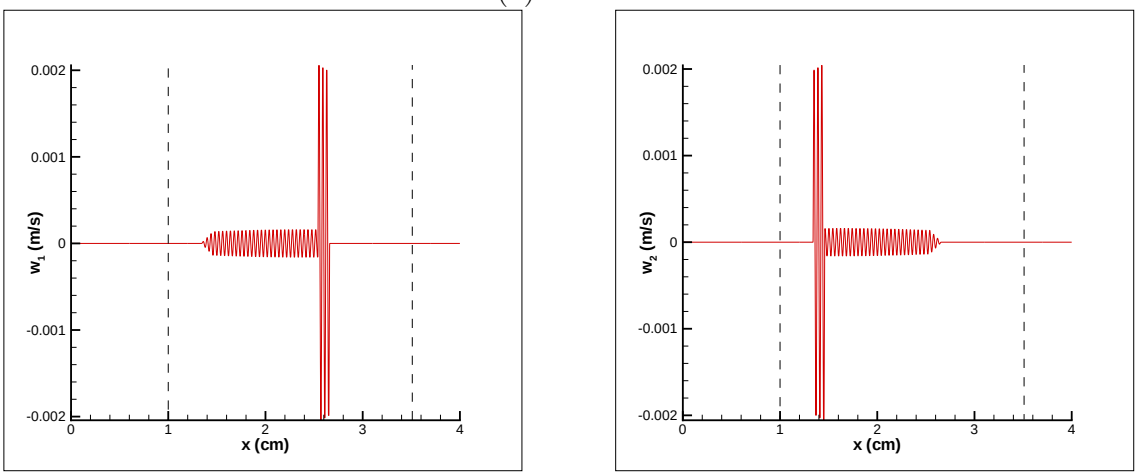
Les figures (3.17) et (3.18) présentent des répartitions spatiales des paramètres physiques : la contrainte et la vitesse particulaire pour les mêmes conditions. On remarque une discontinuité de l'amplitude dans ces deux figures aux frontières du conjugateur, elle

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

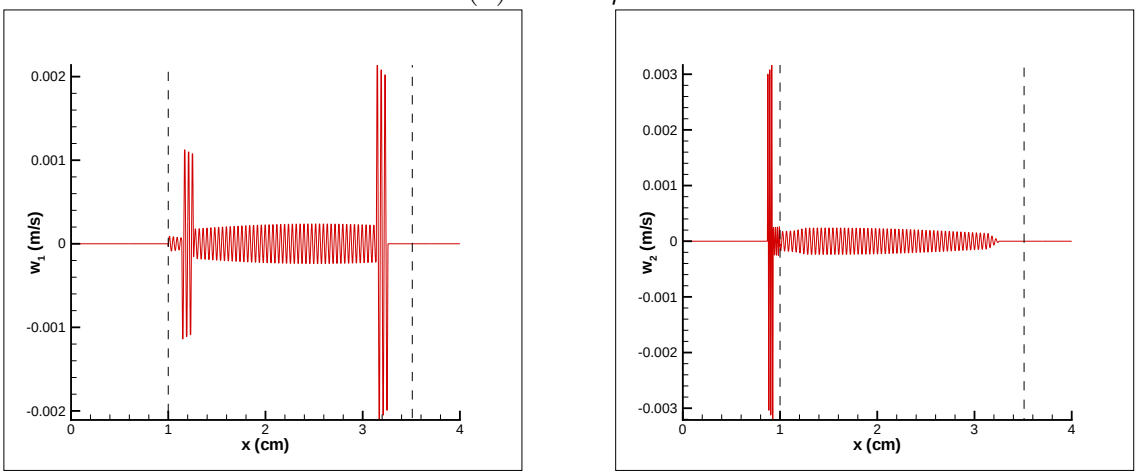
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(a) $t = 0$



(b) $t = 1.5\mu s$



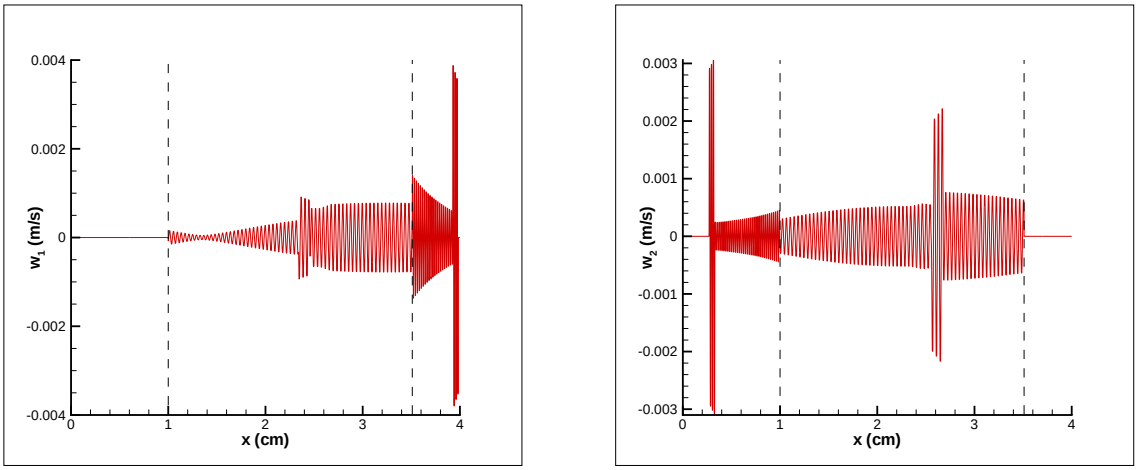
(c) $t = 3\mu s$

FIGURE 3.14 – Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.51cm$), en $t = 0, 1.5\mu s, 3\mu s, 6\mu s, 9\mu s, 12\mu s, 15\mu s, 18\mu s$. La zone active est en contact direct avec les milieux passifs : $\tau_l = 0.3$ et $\tau_r = 0.1$. Fréquence du pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz.

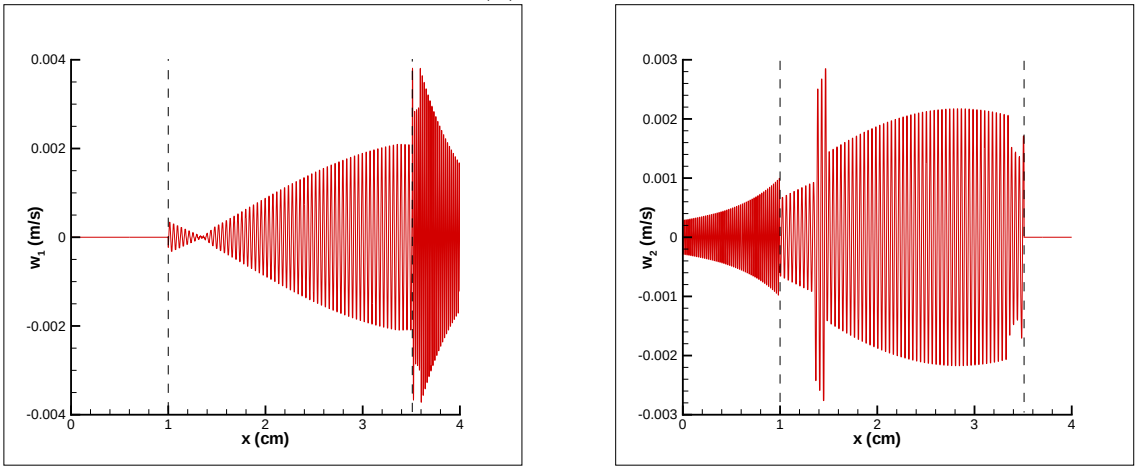
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

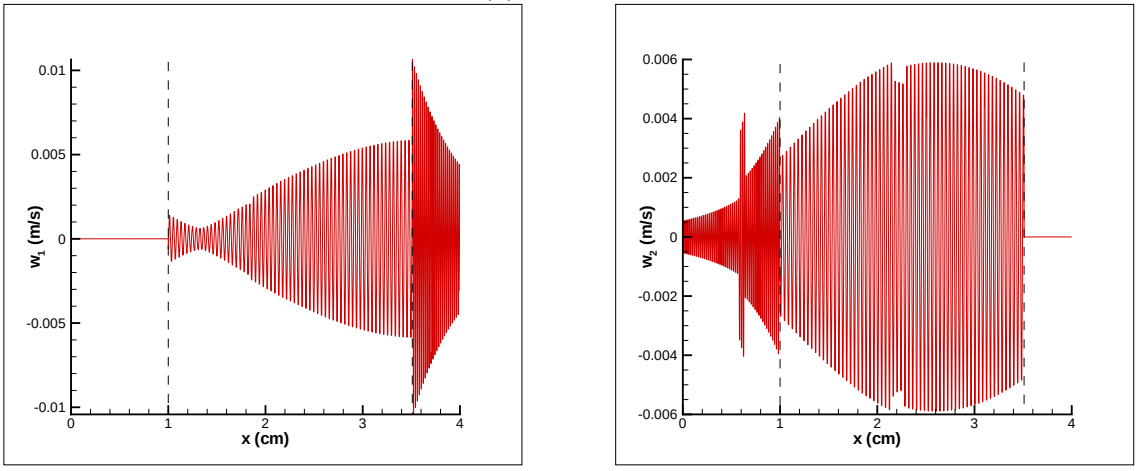
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(d) $t = 6\mu s$



(e) $t = 9\mu s$



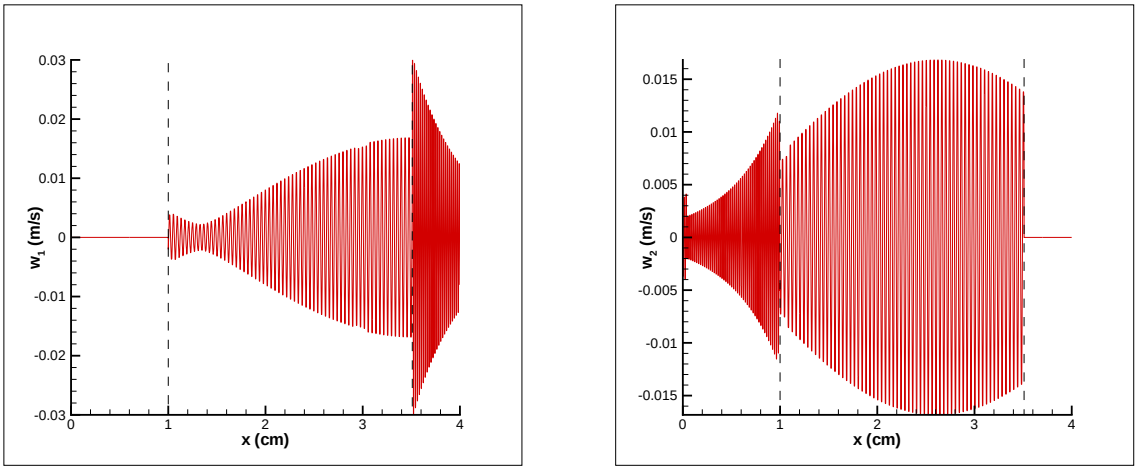
(f) $t = 12\mu s$

FIGURE 3.15 – Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.51cm$) (suite)

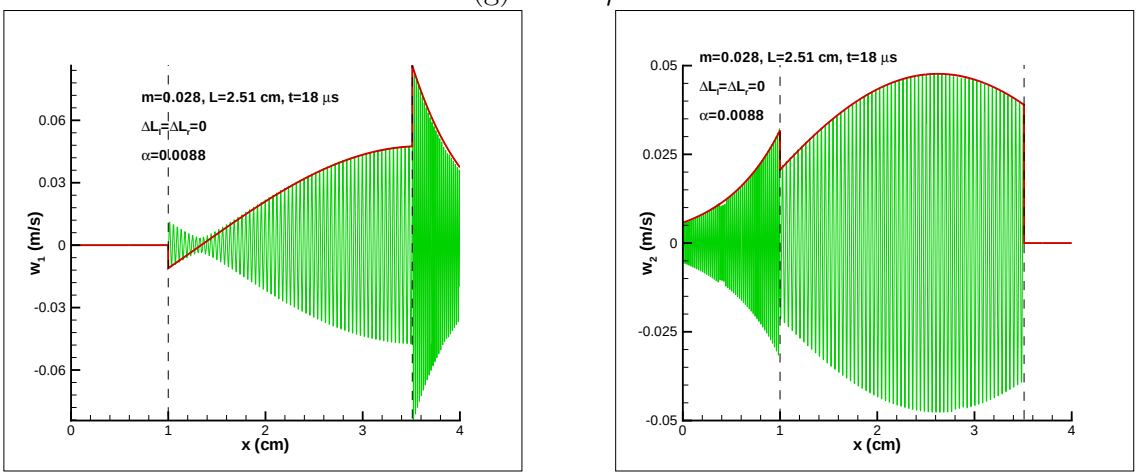
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(g) $t = 15\mu s$



(h) $t = 18\mu s$

FIGURE 3.16 – Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.51cm$) (suite)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

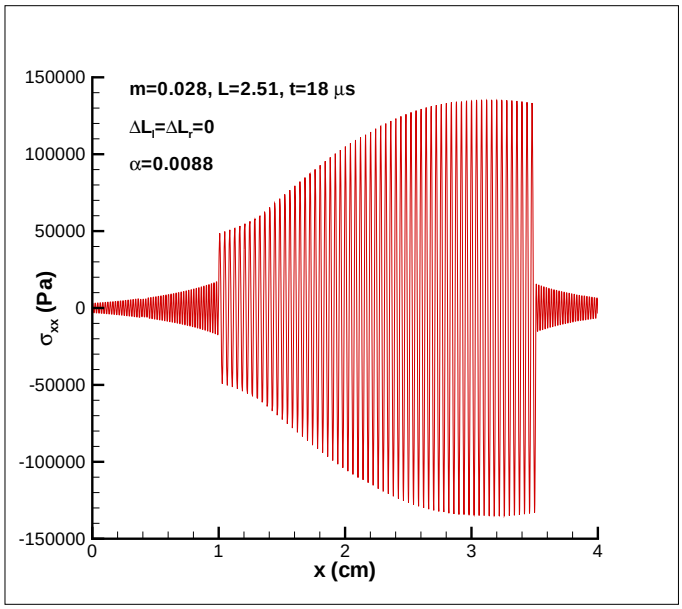


FIGURE 3.17 – Répartition spatiale pour la contrainte σ_{xx} pour $t = 18\mu s$ du cas impair.

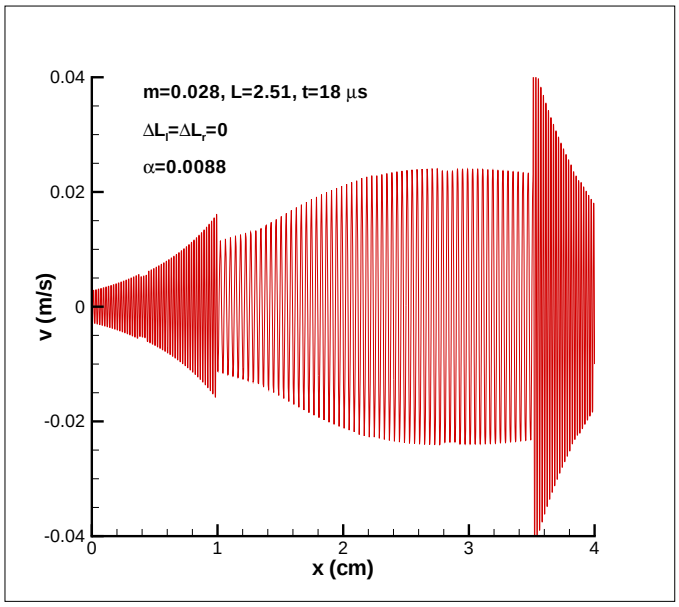


FIGURE 3.18 – Répartition spatiale pour la vitesse particulaire v pour $t = 18\mu s$ du cas impair.

est due au changement de rapport d'impédance. L'onde est bien sûr encore continue et seul l'amplitude des ondes est discontinue.

Dans la suite on va comparer le cas impair "réaliste" avec le cas pair "réaliste". Ici le conjugateur est partiellement actif. Dans le cas impair la longueur du conjugateur est $L = 2.51cm$ avec une longueur de la zone active de longueur $L = 2.01cm$ et deux morceaux

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

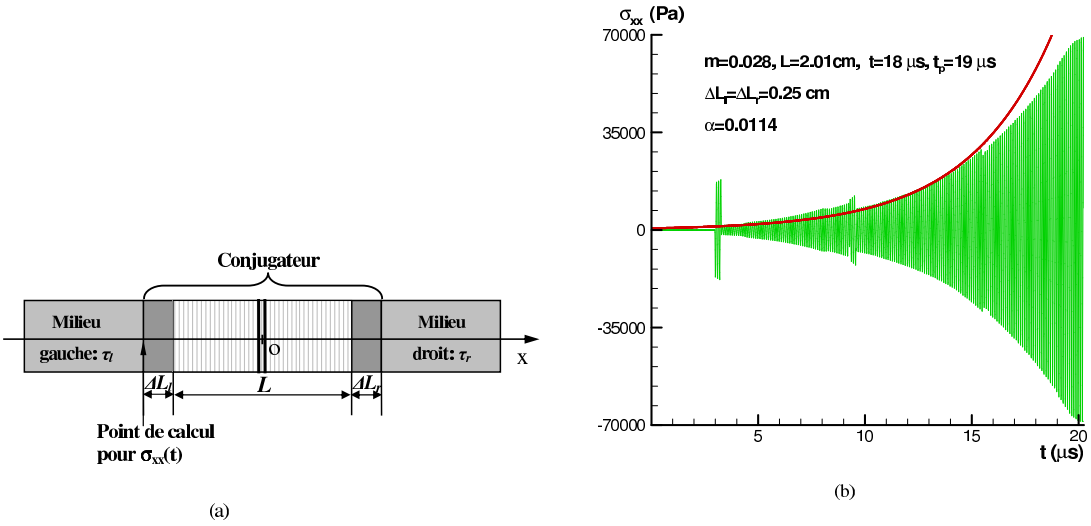


FIGURE 3.19 – Evolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et milieu gauche pour le cas impair réaliste et la durée du pompage $T_p = 19\mu s$. **—** Amplitude théorique, — Simulation

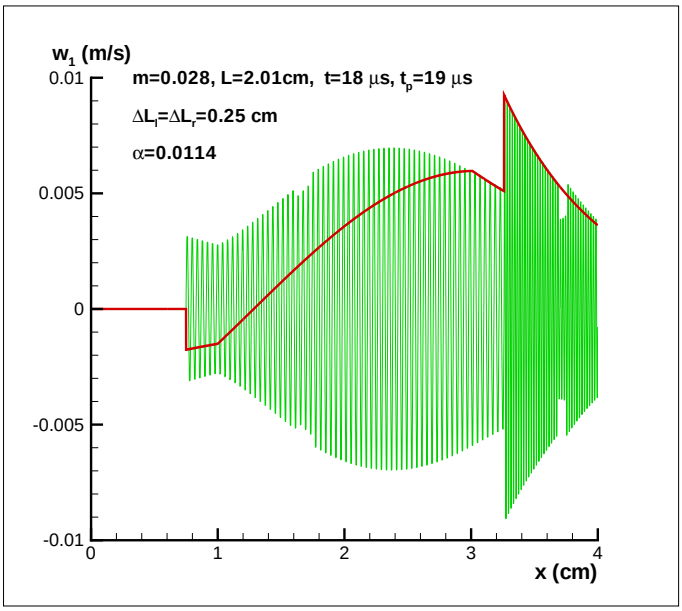


FIGURE 3.20 – Répartition spatiale pour l'onde directe w_1 pour $t = 18\mu s$ du cas impair "réaliste". **—** Amplitude théorique, — Simulation

de longueurs passives $\Delta L_l = \Delta L_r = 0.25cm$. La durée du pompage est $T_p = 19\mu s$. Les figures (3.19) montrent une évolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et du milieu gauche. Les figures (3.20) et (3.21) montrent des répartitions spatiales pour l'onde directe w_1 et l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair "réaliste". Ce cas doit être comparé avec le cas pair "réaliste" montré dans la section (3.1.3), figures

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

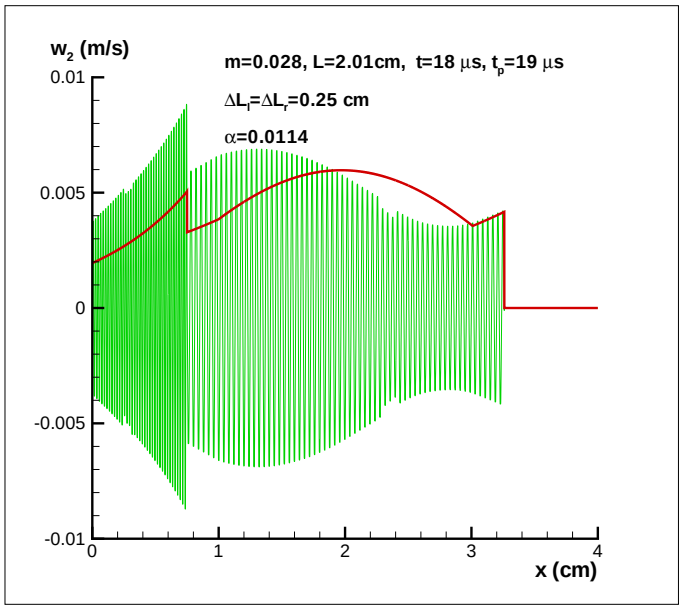


FIGURE 3.21 – Répartition spatiale pour l'onde conjuguée w_2 pour $t = 18\mu s$ du cas impair "réaliste". **—** Amplitude théorique, — Simulation

(3.3) et (3.4). Cependant ici on trouve que l'évolution temporelle ne correspond pas au résultat théorique (Fig : 3.19), et les répartitions spatiales ne s'accordent pas non plus avec les courbes théoriques (Figs. 3.20, 3.21).

Pour bien expliquer ce point, on a fait une autre simulation numérique avec les mêmes valeurs de paramètres mais avec une durée de pompage prolongée de $19\mu s$ à $40\mu s$. Cette fois, les figures (3.22), (3.23), (3.24), (3.28) et (3.29) montrent des répartitions numériques différentes de celles des figures (3.17) et (3.18). La figure (3.22) montre une évolution temporelle de la contrainte mesurée à la limite gauche du conjugateur. Les figures (3.23), (3.24) montrent des répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et l'onde conjuguée w_2. Les figures (3.28) et (3.29) montrent des répartitions spatiales de la contrainte σ_{xx} et de la vitesse particulaire v. Toutes les simulations numériques pour ce cas coïncident bien avec les solutions théoriques. On peut comparer ces résultats numériques avec les figures (3.2), (3.3) et (3.4) dans la section (3.1.3). On voit bien que pour la répartition spatiale de l'onde directe w_1, il y a encore un changement de signe dans la zone active pour le cas impair et non dans le cas pair.

La raison essentielle pour laquelle on doit pomper plus longtemps pour le cas impair est que le seuil m_0 du cas impair est plus élevé que celui du cas pair, le taux de croissance est donc plus faible. Quand la durée du pompage n'est pas suffisante, les distributions ne sont pas bien établies. Ceci peut encore expliquer que le cas impair soit plus difficile à observer dans les expériences. C'est sans doute pourquoi cette dualité n'avait jamais été signalée auparavant.

Les figures (3.25, 3.26, 3.27) montrent une évolution des répartitions spatiales des ondes

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

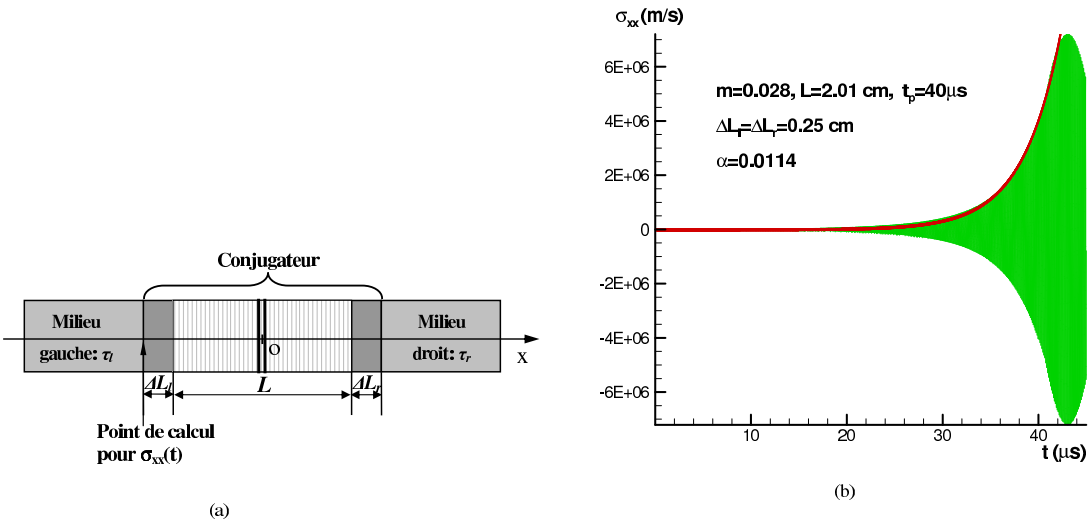


FIGURE 3.22 – Evolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et du milieu gauche pour le cas impair réaliste avec une durée du pompage $T_p = 40\mu s$. **—** Amplitude théorique, — Simulation

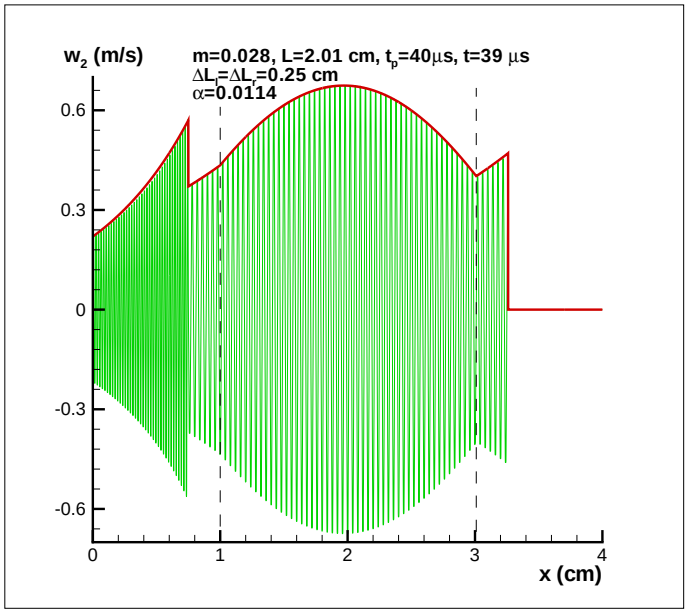


FIGURE 3.23 – Répartition spatiale pour l'onde directe w_1 pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste". **—** Amplitude théorique, — Simulation

directe w_1 et conjuguée w_2 pour le cas impair "réaliste". On voit que la forme d'amplitude de la simulation est établie seulement quand la durée du pompage est de $t = 33\mu s$. Avant ce moment, la simulation numérique ne correspond pas au résultat théorique.

Les figures (3.28) et (3.29) montrent des répartitions spatiales des paramètres physiques : la contrainte σ_{xx} et la vitesse particulaire v pour le cas impair "réaliste" et $t = 39\mu s$.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

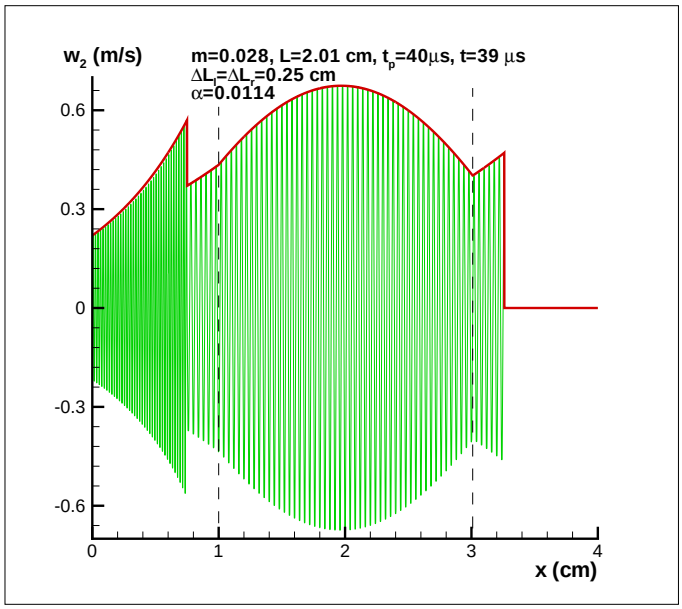


FIGURE 3.24 – Répartition spatiale pour l'onde conjuguée w_2 pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste". **—** Amplitude théorique, — Simulation

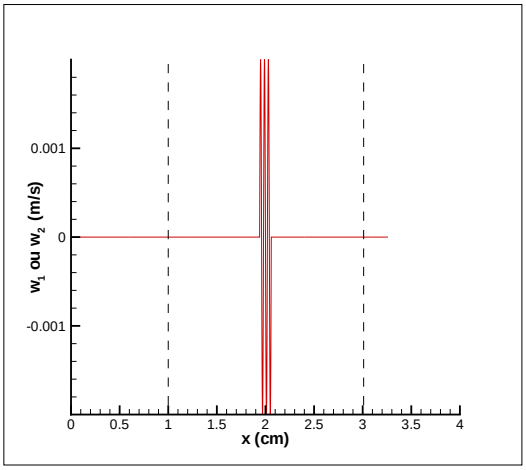
La discontinuité de la pente à la frontière de la zone active est due, comme expliqué dans le cas pair (Sec : 3.1.3) au fait que ΔL_l et ΔL_r ne sont pas assez longs pour qu'on s'approche du cas homogène.

La répartition des contraintes dans le conjugateur n'est pas la seule différence entre les deux solutions. La différence la plus importante est, comme nous l'avons dit, dans le fait que la solution marginale, donnée par $G_0(\alpha) = 1$ se situe à un niveau de seuil $m = m_0$ supérieur pour la solution impaire avec un taux de croissance exponentiel plus faible. Il existe donc des situations où la solution paire est supercritique et où une augmentation de $\lambda/4$ de la longueur de la zone active fait basculer le système dans une situation impaire subcritique (Fig. 3.30).

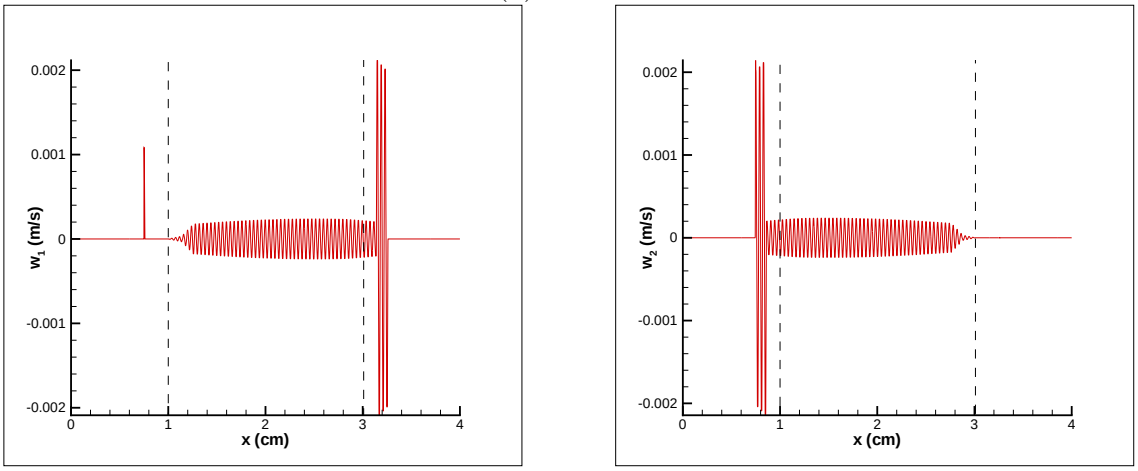
Cette sensibilité du système à la valeur du rapport λ/L, montre la complexité des phénomènes qui peuvent se produire dans un conjugateur dans le cas où l'hypothèse monodimensionnelle n'est pas exactement satisfaite, soit sous l'effet d'une légère incidence, soit sous l'effet d'une imperfection géométrique. Il en découle vraisemblablement l'instauration de systèmes d'ondes se déplaçant dans la direction orthogonale à l'axe du conjugateur et pouvant pomper une partie importante de l'énergie (voir chapitre 4). Ces ondes pourraient expliquer une partie de la surchauffe des conjugateurs dans les applications à forte puissance (Hyperthermie...)

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

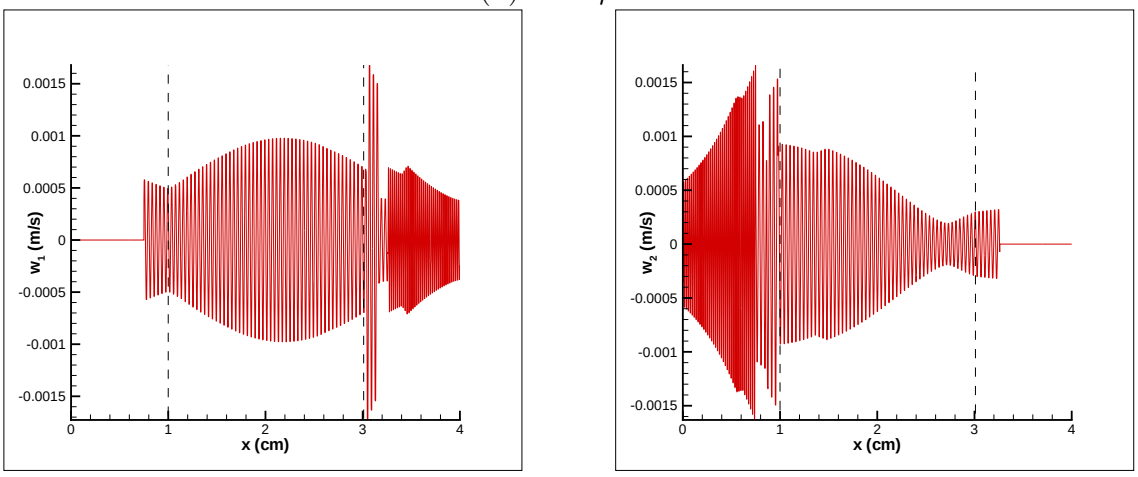
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(a) $t = 0$



(b) $t = 3\mu s$



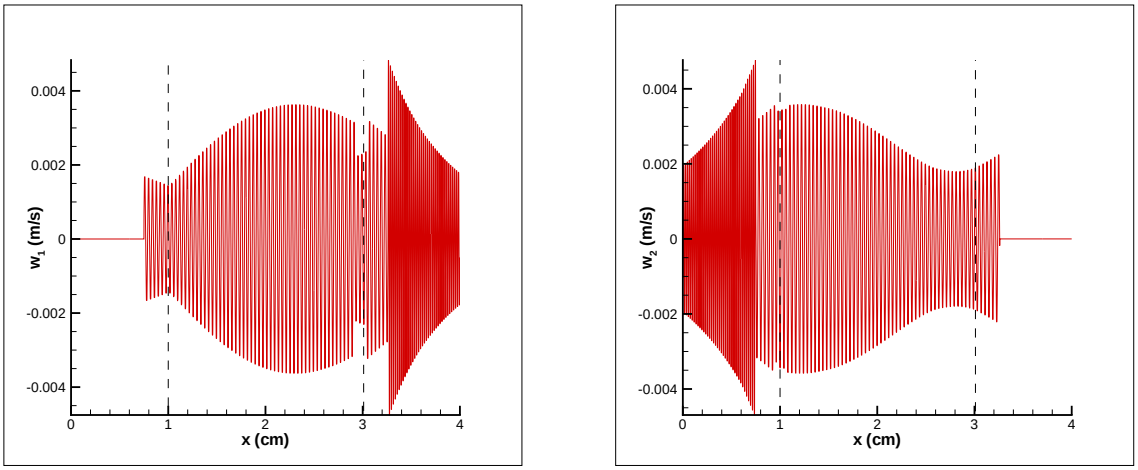
(c) $t = 9\mu s$

FIGURE 3.25 – Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.01cm$), en $t = 0, 1.5\mu s, 3\mu s, 6\mu s, 9\mu s, 12\mu s, 15\mu s, 18\mu s$. Entre la zone active et les milieux passifs : $\tau_l = 0.3$ et $\tau_r = 0.1$, $\Delta L_l = \Delta L_r = 0.25cm$. Fréquence du pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz.

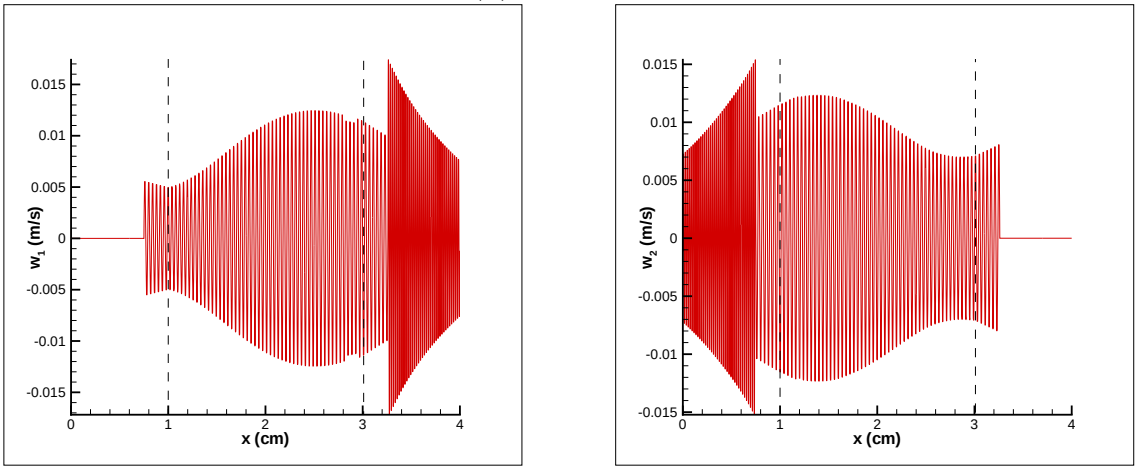
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

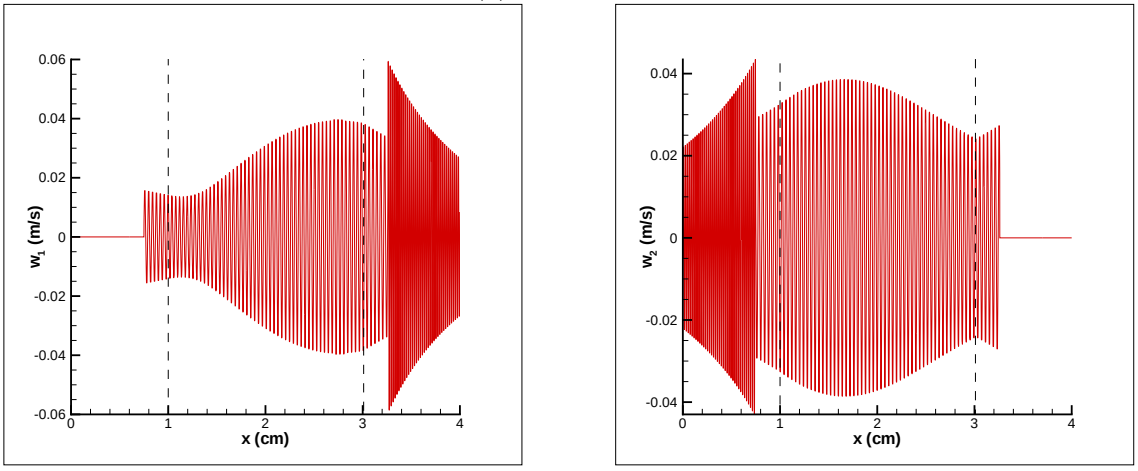
Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(d) $t = 15\mu s$



(e) $t = 21\mu s$

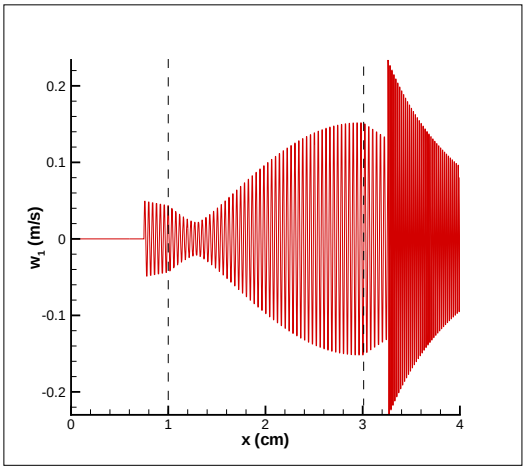


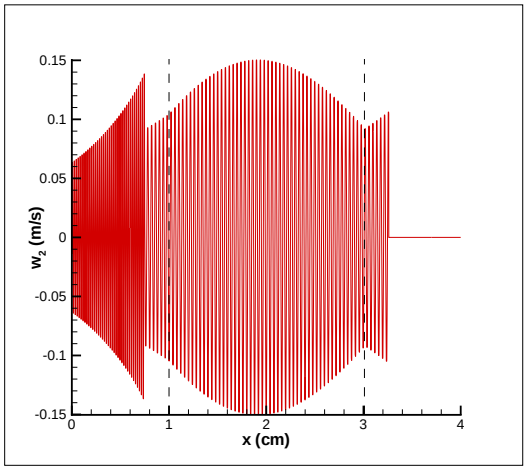
(f) $t = 27\mu s$

FIGURE 3.26 – Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.01cm$) (suite)

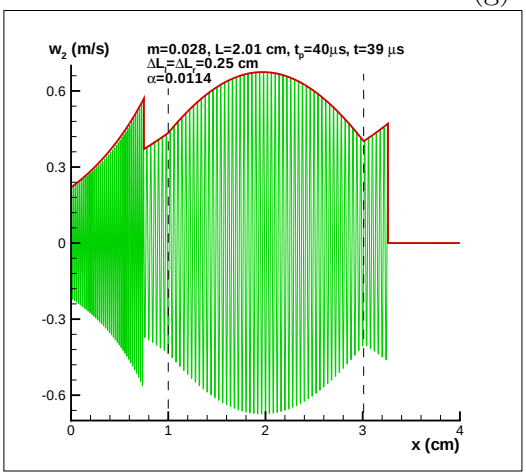
© 2008 Tous droits réservés.

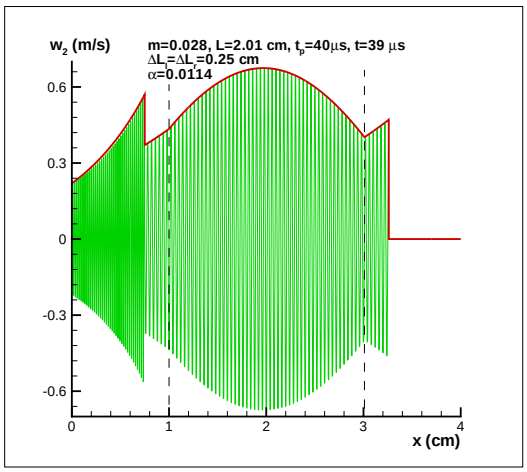
http://www.univ-lille1.fr/bustl





(g) $t = 33\mu s$





(h) $t = 39\mu s$

FIGURE 3.27 – Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.01cm$) (suite)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

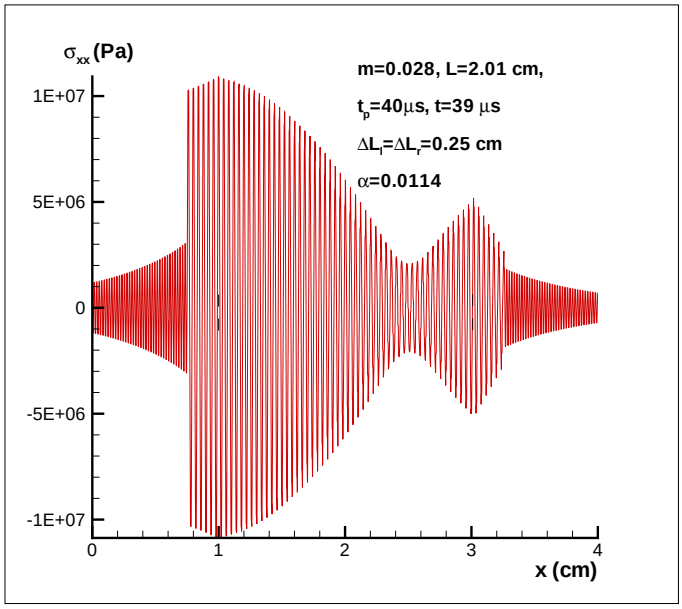


FIGURE 3.28 – Répartition spatiale pour la contrainte σ_{xx} pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste".

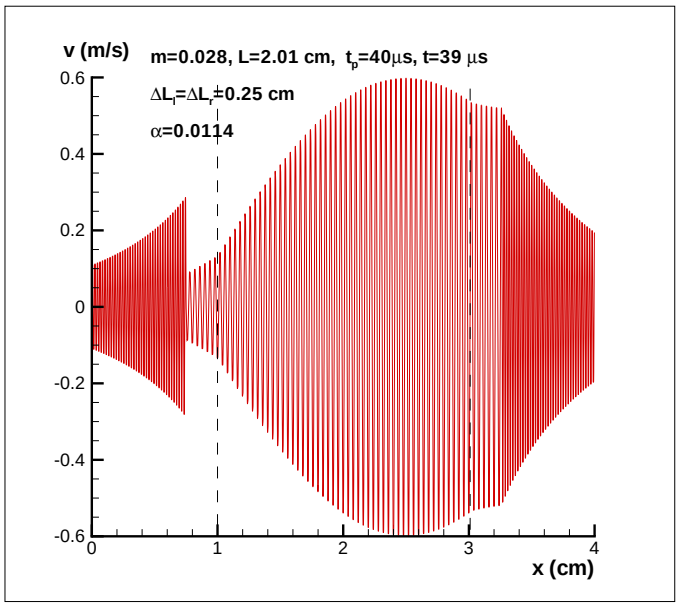


FIGURE 3.29 – Répartition spatiale pour la vitesse particulaire v pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste".

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

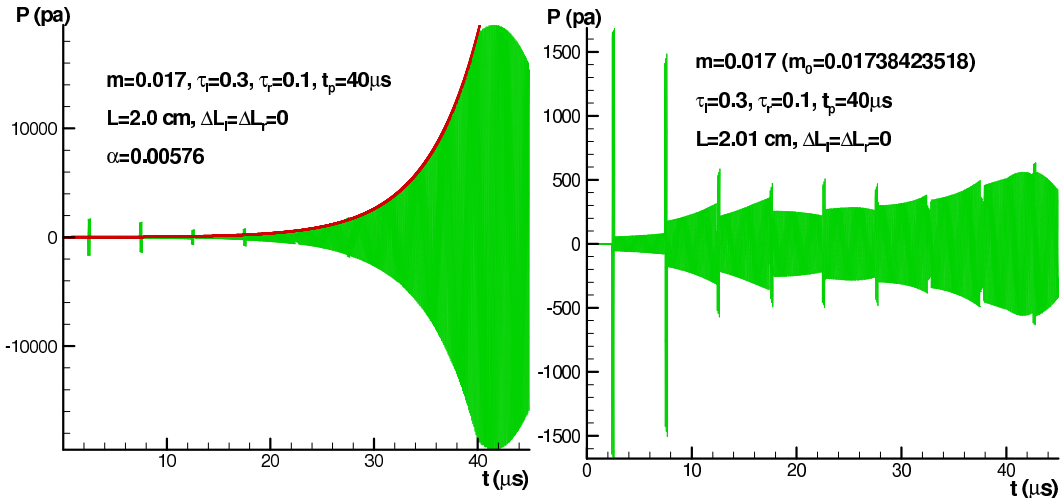


FIGURE 3.30 – Onde conjuguée en fonction du temps à la limite droite de la zone active pour les mêmes paramètres sauf une variation de $\lambda/4$ de la longueur d'onde dans la zone active. (Simulation de gauche : $L = 2cm$ cas supercritique pair, simulation de droite : $L = 2.01cm$ cas subcritique impair)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

3.2.4 Synchronisation temporelle des solutions

Dans cette section nous revenons sur l'aspect temporel des conditions aux frontières (3.10) à (3.13) et à ses conséquences sur φ_1 et φ_2.

On a 4 types de conditions aux frontières qui imposent 4 types de solutions au problème. Deux types de solutions paires, premier type :

$$\cos(-kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=-1, \cos(kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=-1 \tag{3.48}$$

et second type :

$$\cos(-kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=1, \cos(kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=1. \tag{3.49}$$

et deux types de solutions impaires, premier type :

$$\cos(-kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=1, \cos(kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=-1 \tag{3.50}$$

et second type :

$$\cos(-kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=-1, \cos(kL/2+\varphi_2-\varphi_1)=1. \tag{3.51}$$

Il y a aussi deux types de conditions compatibilités issues de formule (3.14) à choisir pour completer ces 4 types de conditions et pour ensuite trouver des solutions analytiques de φ_1 et φ_2 :

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=-1. \tag{3.52}$$

et

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=1. \tag{3.53}$$

Pour la condition (3.52), l'équation (3.15) s'écrit avec un signe positif dans le second membre, soit :

$$\Gamma\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)+\frac{\Omega\alpha}{4}\cos(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)=\frac{m\Omega}{8}\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2) \tag{3.54}$$

et donc on peut poser

$$\cos(\gamma^A)=\frac{8\Gamma}{m\Omega} \text{ et } \sin(\gamma^A)=\frac{2\alpha}{m} \tag{3.55}$$

comme ce que l'on a fait dans la section (2.1).

Ici, l'indice "A" de γ correspond au signe dans la condition (3.52).

En revanche, si on prend la condition (3.53) pour l'équation (3.15), on obtient un signe négatif dans le second membre :

$$\Gamma\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)+\frac{\Omega\alpha}{4}\cos(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)=-\frac{m\Omega}{8}\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2) \tag{3.56}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

et donc ici on pose

$$\cos(\gamma^B) = -\frac{8\Gamma}{m\Omega} \text{ et } \sin(\gamma^B) = -\frac{2\alpha}{m} \tag{3.57}$$

l'indice "B" de γ correspond donc au signe "+" de la condition (3.53).

La comparaison entre les équations (3.55) et (3.57) détermine la relation entre γ^A et γ^B :

$$\gamma^A - \gamma^B = \pi \mod 2\pi.$$

On obtient ainsi que

$$\tan(\frac{\gamma^B}{2}) = \tan(\frac{\gamma^A}{2} \pm \frac{\pi}{2}) = -\cot(\frac{\gamma^A}{2})$$

Dans la section (3.2.2) on avait montré que le choix de la condition de compatibilité dépendait de la comparaison entre $\tau_l \cdot \tau_r$ et 1 pour le cas pair et entre τ_l et τ_r pour le cas impair. Pour ne pas compliquer les classifications des différents cas pairs et impairs, on posera toujours ici pour le cas pair $\tau_l \cdot \tau_r < 1$ et pour le cas impair $\tau_l > \tau_r$. Les comparaisons des solutions théoriques et des résultats numériques correspondent à $\tau_l = 0.3$ et $\tau_r = 0.1$.

Bien sûr pour les deux autres choix de τ_l et τ_r on peut aussi faire les mêmes développements. On trouvera les valeurs de φ_1 et φ_2 pour $\tau_l \cdot \tau_r > 1$ dans le cas pair et $\tau_l < \tau_r$ dans le cas impair en utilisant exactement la même méthode que ci-dessous.

3.2.4.1 Cas pair

φ_1 et φ_2 pour le premier type de solution On sait déjà d'après la section (2.1) que la solution pour $\tan(\gamma^A/2)$ avec les conditions aux frontières (3.48) est donnée par :

$$\tan\frac{\gamma^A}{2} = \frac{1}{2}\left[(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\tau_l\tau_r}\right].$$

ce qui définit le premier type de solution dans la section (3.2.2) pour le cas pair. On peut remarquer qu'ici on a pris un γ^A, donc la condition de compatibilité (3.52). Autrement dit, les deux équations de la condition aux frontières (3.48)

$$\cos(-kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = -1, \cos(kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = -1$$

et l'équation de compatibilité (3.52)

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -1$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

sont combinées pour fournir le premier type de solution paire dont on va maintenant chercher les valeurs de φ_1 et φ_2 qui sont deux inconnues dans ces trois équations, la troisième étant kL.

En posant que $\overline{n}, n, n'$ sont des nombres entiers appartenant à $\mathbb{N}$, on a

$$-\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 = \pi - 2n\pi$$

$$\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 2n'\pi$$

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \frac{3}{2}\pi + 2\overline{n}\pi$$

qui donnent des solutions suivantes, en posant que $N = n' - n$, $M = n' + n$:

$$kL = 2M\pi$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} + (\overline{n} - \frac{N}{2})\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{5}{4}\pi + (\overline{n} + \frac{N}{2})\pi$$

Pour parcourir l'ensemble des valeurs possibles modulo 2π, $\overline{n}$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, et N les valeur $0, 1, 2, 3$. Soit, modulo 2π, les 4 cas suivants :

$$\overline{n} = 0, N = 0 \quad \varphi_1 = \frac{1}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{5}{4}\pi;$$

$$\overline{n} = 0, N = 1 \quad \varphi_1 = -\frac{1}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{7}{4}\pi;$$

$$\overline{n} = 0, N = 2 \quad \varphi_1 = -\frac{3}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{9}{4}\pi;$$

$$\overline{n} = 0, N = 3 \quad \varphi_1 = -\frac{5}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{11}{4}\pi.$$

Or

$$\overline{n} = 1, N = 0 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 2;$$

$$\overline{n} = 1, N = 1 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 3;$$

$$\overline{n} = 1, N = 2 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 0;$$

$$\overline{n} = 1, N = 3 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 1.$$

Il y a donc en fait 4 cas :

$$N = 0 \rightarrow n' = n \Rightarrow M = 2n \Rightarrow kL = 4n\pi \quad (a)$$

$$N = 1 \rightarrow n' = 1 + n \Rightarrow M = 2n + 1 \Rightarrow kL = (4n + 2)\pi \quad (b)$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$N = 2 \rightarrow n' = 2 + n \Rightarrow M = 2n + 2 \Rightarrow kL = (4n + 4)\pi \quad (c)$$
$$N = 3 \rightarrow n' = 3 + n \Rightarrow M = 2n + 3 \Rightarrow kL = (4n + 6)\pi \quad (d)$$

aussi on parcourt les valeurs de M en changeant successivement de cas. Pour $M = 4n+4$ on doit retrouver le cas (a), c'est à dire $M = 2(2n+2)$. On voit donc qu'il faut incrémenter n de deux en deux pour obtenir la succession des séquences, (a)(b)(c)(d)(a)...etc. La question est donc de savoir si on commence la suite en $n = n_0 = 0$ ou $n = n_0 = 1$. Mais comme il n'y a que 4 cas, ces deux choix revient en fait à choisir la valeur de $\overline{n}$. Les équations ne permettent pas de faire cette association $(\overline{n}, n_0)$, peut-être parce que celle-ci dépend du transitoire entre la condition initiale et l'établissement de la solution stable. A ce stade nous avons résolu le problème en utilisant la solutions numérique. Pour la condition initiale se situe à côté gauche de la zone active (trois longueurs d'onde des ondes directe et conjuguée entre 1 et 1.3 cm), le cas $kL = 80\pi$ ne révèle appartenir au cas (a) $(N = 0, \varphi_1 = \pi/4, \varphi_2 = 5\pi/4)$ pour $n = 20$ et non au cas (c) pour $n = 19$. Il en résulte que nous devons associer $\overline{n}$ aux valeur paires de n. Les valeurs de φ_1 et φ_2 sont variées en fonction de la condition initiale, mais restent dans le quatre cas précédents.

φ_1 et φ_2 pour le second type de solution Maintenant on doit prendre γ^B, avec la relation

$$\tan(\frac{\gamma^B}{2}) = -\cot(\frac{\gamma^A}{2}),$$

et

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1.$$

On aura

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\gamma^B}{2} &= -\cot(\frac{\gamma^A}{2}) \\
&= \frac{1}{2\tau_l\tau_r}\left[(\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \mp \sqrt{\left((\tau_l+\tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\tau_l\tau_r}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{\tau_l}+\frac{1}{\tau_r})\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \mp \sqrt{\left((\frac{1}{\tau_l}+\frac{1}{\tau_r})\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + \frac{4}{\tau_l\tau_r}}\right].
\end{aligned}$$

Cette solution correspond à la solution pour $G_0(\alpha)$ (3.25) trouvée dans la section (3.2.2) si on choisit la solution paire de type 2 avec les conditions (3.49).

$$\cos(-kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = 1, \quad \cos(kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = 1.$$

On peut constater qu'on obtient la même solution si on prend la condition (3.48) en remplaçant τ_l et τ_r par $1/\tau_l$ et $1/\tau_r$ respectivement et en changeant le signe "$\pm$" en "$\mp$" dans l'expression de γ. Ceci déjà été montré dans la section (3.2.2).

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

On avait trouvé la même valeur de α_s pour ces deux premiers types de solutions paires, mais comme ces deux types ne sont pas régis par les mêmes équations aux frontières et de compatibilité, les valeurs de φ_1 et φ_2 ne doivent pas être les mêmes. Pour ce type 2, φ_1 et φ_2 sont obtenues par les conditions aux frontières (3.49) et la condition de compatibilité $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$, d'où

$$\begin{aligned} -\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 &= -2n\pi \\ \frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 &= 2n'\pi \\ \varphi_2 + \varphi_1 &= \frac{1}{2}\pi + 2\overline{n}\pi \end{aligned}$$

qui donnent des solutions suivantes, en posant encore que $N = n' - n$, $M = n' + n$:

$$\begin{aligned} kL &= 2M\pi \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{4} + (\overline{n} - \frac{N}{2})\pi \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{4} + (\overline{n} + \frac{N}{2})\pi \end{aligned}$$

Soit, pour $\overline{n} = 0$ modulo 2π, on a les 4 cas suivants :

$$\begin{aligned} \overline{n} = 0, N = 0 \quad & \varphi_1 = \frac{1}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{1}{4}\pi; \\ \overline{n} = 0, N = 1 \quad & \varphi_1 = -\frac{1}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi; \\ \overline{n} = 0, N = 2 \quad & \varphi_1 = -\frac{3}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{5}{4}\pi; \\ \overline{n} = 0, N = 3 \quad & \varphi_1 = -\frac{5}{4}\pi, \varphi_2 = \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$

Or de même qu'avec le type 1, on a

$$\begin{aligned} \overline{n} = 1, N = 0 \quad & \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 2; \\ \overline{n} = 1, N = 1 \quad & \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 3; \\ \overline{n} = 1, N = 2 \quad & \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 0; \\ \overline{n} = 1, N = 3 \quad & \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 1. \end{aligned}$$

Il y a encore 4 cas :

$$N = 0 \rightarrow n' = n \Rightarrow M = 2n \Rightarrow kL = 4n\pi \quad (a)$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$N = 1 \rightarrow n' = 1 + n \Rightarrow M = 2n + 1 \Rightarrow kL = (4n + 2)\pi \quad (b)$$
$$N = 2 \rightarrow n' = 2 + n \Rightarrow M = 2n + 2 \Rightarrow kL = (4n + 4)\pi \quad (c)$$
$$N = 3 \rightarrow n' = 3 + n \Rightarrow M = 2n + 3 \Rightarrow kL = (4n + 6)\pi \quad (d)$$

Pour la condition initiale se situe à côté gauche de la zone active (trois longueurs d'onde des ondes directe et conjuguée entre 1 et 1.3 cm), le cas $kL = 80\pi$ appartient encore à la suite (a) où $N = 0, \varphi_1 = \pi/4, \varphi_2 = \pi/4$ et $n = 20$. C'est donc encore l'association entre $\overline{n}$ et n pair qui doit être retenue. La seule différence entre les solutions type 1 et 2 est la valeur de φ_2.

Comparaison avec les résultats numériques Pour le cas pair, on connaît les valeurs de φ_1 et φ_2, on peut tracer les courbes théoriques de toutes les variables pour les ondes résonnantes dans la zone active. La théorie est comparée avec les résultats de simulations numériques, pour le cas pair avec la fréquence du pompage $\Omega = 1.6 \times 10^7 \times \pi$ Hz, la vitesse du son $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, et le nombre d'onde $k = \Omega/c_0 = 40\pi$, et avec l'amplitude de modulation $m = 0.08$. Les longueurs de la zone active sont $L = 2.0cm, 2.05cm, 2.1cm, 2.15cm$. Ce sont en fait des cas particuliers pairs où $kL = 80\pi, 82\pi, 84\pi, 86\pi$. Le système va choisir les solutions correspondant aux cas ci-dessus.

Les figures (3.31, 3.32) montrent des comparaisons entre les répartitions spatiales théoriques et numériques pour la vitesse particulaire v. Ici le choix d'une fréquence plus faible que celle des calculs habituels ($\Omega = 4\pi \times 10^7$) permet d'avoir une longueur d'onde plus longue pour faciliter la comparaison théorie-simulation sur les figures. Les tableaux (3.1) et (3.2) donnent les résultats théoriques des cas pairs où $\overline{n} \in \mathbb{N}$.

TABLE 3.1 – Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas pair aux conditions (3.48) et $\sin(\varphi_1+\varphi_2) = -1$ (Type 1)

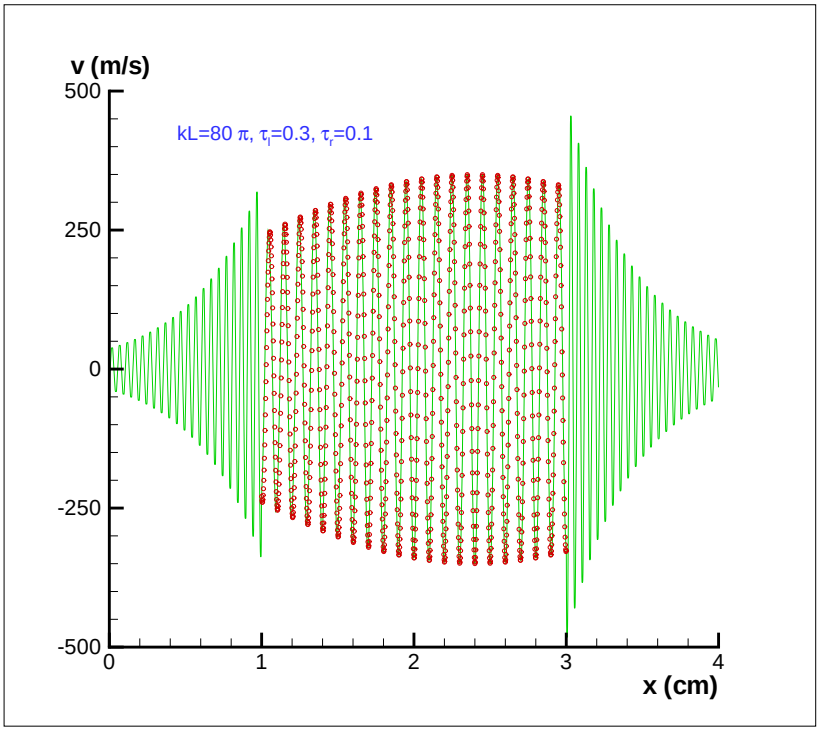
φ_1	φ_2	kL	α	m_0	Γ
$\pi/4$	$5\pi/4$	80π	0.0195	0.01245	4.39×10^5
$7\pi/4$	$7\pi/4$	82π	0.0192	0.01215	4.41×10^5
$5\pi/4$	$\pi/4$	84π	0.0190	0.01186	4.43×10^5
$3\pi/4$	$3\pi/4$	86π	0.0187	0.01158	4.44×10^5

TABLE 3.2 – Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas pairs aux conditions (3.49) et $\sin(\varphi_1+\varphi_2) = 1$ (Type 2)

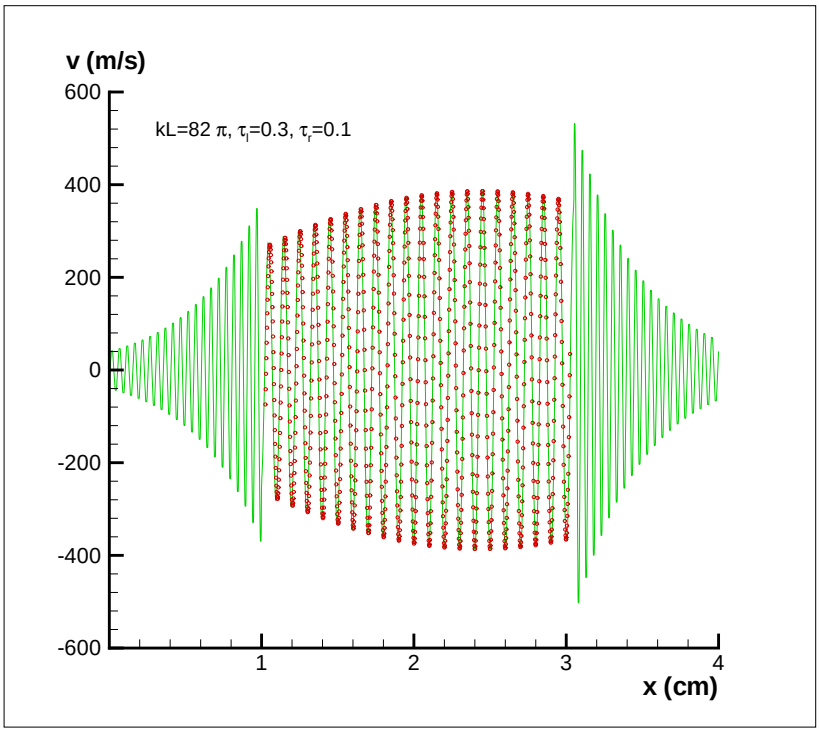
φ_1	φ_2	kL	α	m_0	Γ
$\pi/4$	$\pi/4$	80π	0.0195	0.01245	4.39×10^5
$7\pi/4$	$3\pi/4$	82π	0.0192	0.01215	4.41×10^5
$5\pi/4$	$5\pi/4$	84π	0.0190	0.01186	4.43×10^5
$3\pi/4$	$7\pi/4$	86π	0.0187	0.01158	4.44×10^5

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(a) $kL = 80\pi$

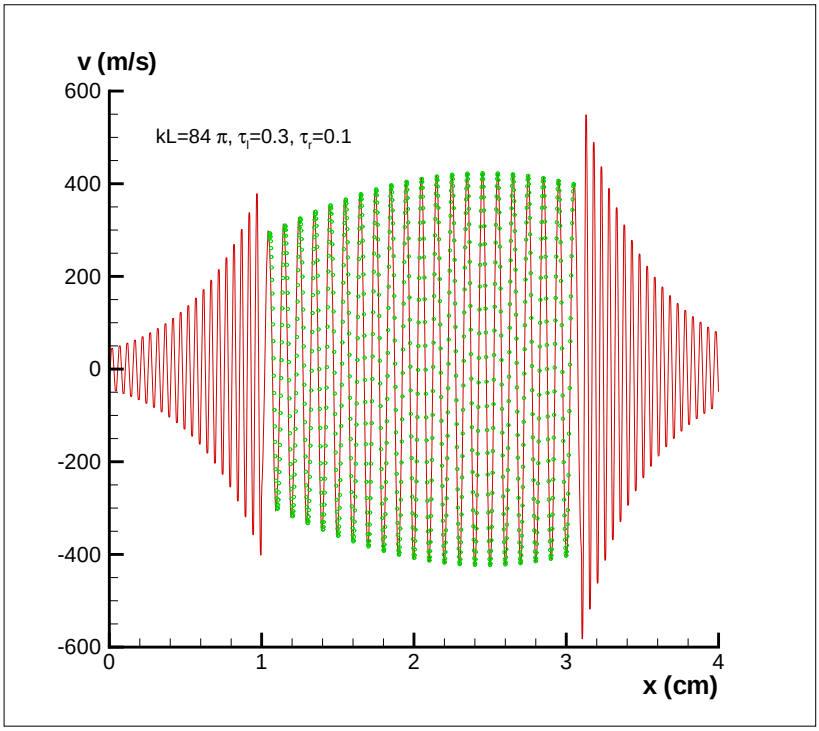


(b) $kL = 82\pi$

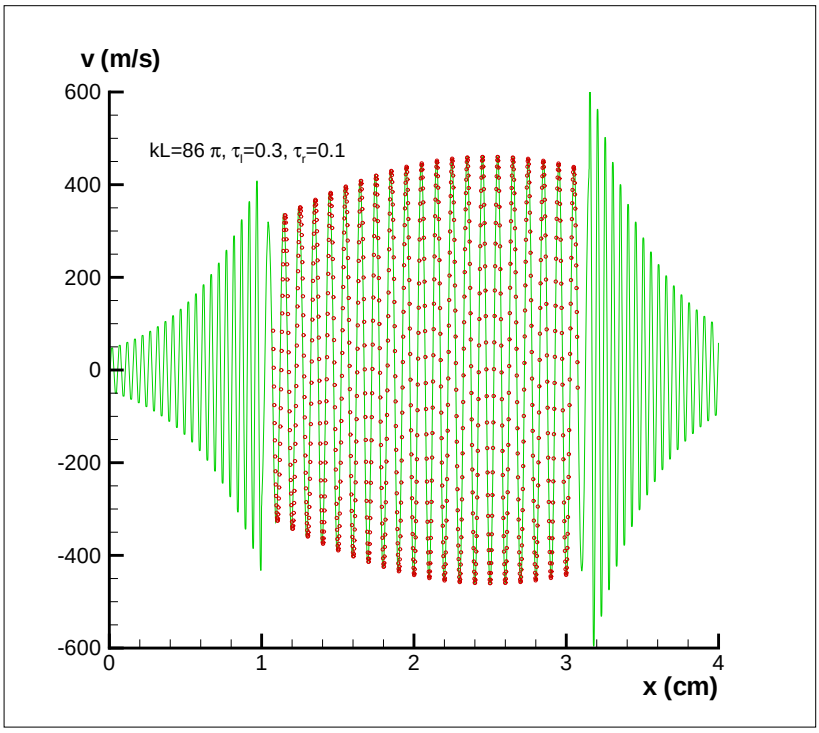
FIGURE 3.31 – Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas pair $kL = 80\pi, 82\pi, 84\pi, 86\pi$, théorie-simulation. ∘ ∘ ∘ solution théorique, — calcul numérique.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl



(c) $kL = 84\pi$



(d) $kL = 86\pi$

FIGURE 3.32 – Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas pair (suite)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

3.2.4.2 Cas impair

φ_1 et φ_2 pour le troisième type de solution (premier cas impair) Pour les cas impairs, les solutions de φ_1 et φ_2 peuvent être trouvées comme dans les cas pairs. Pour les conditions aux frontières (3.50),

$$\cos(-kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = 1, \quad \cos(kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = -1$$

la formule correspondante pour $G_0^A(\alpha)$ dans la section (3.2.2) est (3.40) :

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{\tau_l} + \tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4}) \pm \sqrt{\left((\frac{1}{\tau_l} + \tau_r)\cot(\frac{k\alpha L}{4})\right)^2 + 4\frac{\tau_r}{\tau_l}}\right].$$

Pour la condition de compatibilité, ce type correspond à : $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -1$. On a donc les trois relations suivantes, en posant que $\overline{n}, n, n'$ entiers :

$$\begin{aligned} -\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 &= -2n\pi \\ \frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 &= \pi + 2n'\pi \\ \varphi_2 + \varphi_1 &= \frac{3}{2}\pi + 2\overline{n}\pi \end{aligned}$$

avec $N = n' - n$ et $M = n + n'$, les solutions sont :

$$\begin{aligned} kL &= (2M+1)\pi \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} + (\overline{n} - \frac{N}{2})\pi \\ \varphi_2 &= \pi + (\overline{n} + \frac{N}{2})\pi \end{aligned}$$

Soit, pour $\overline{n} = 0$ modulo 2π, on a les 4 cas suivants :

$$\begin{aligned} &\overline{n} = 0, N = 0 \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \pi; \\ &\overline{n} = 0, N = 1 \quad \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi; \\ &\overline{n} = 0, N = 2 \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2 = 2\pi; \\ &\overline{n} = 0, N = 3 \quad \varphi_1 = -\pi, \varphi_2 = \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

Or on a toujours

$$\overline{n} = 1, N = 0 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 2;$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$\begin{aligned}
\overline{n} = 1, N = 1 \quad &\text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 3; \\
\overline{n} = 1, N = 2 \quad &\text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 0; \\
\overline{n} = 1, N = 3 \quad &\text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 1.
\end{aligned}$$

Il y a donc encore 4 cas :

$$N = 0 \rightarrow n' = n \Rightarrow M = 2n \Rightarrow kL = (4n+1)\pi \quad (a)$$

$$N = 1 \rightarrow n' = 1+n \Rightarrow M = 2n+1 \Rightarrow kL = (4n+3)\pi \quad (b)$$

$$N = 2 \rightarrow n' = 2+n \Rightarrow M = 2n+2 \Rightarrow kL = (4n+5)\pi \quad (c)$$

$$N = 3 \rightarrow n' = 3+n \Rightarrow M = 2n+3 \Rightarrow kL = (4n+7)\pi \quad (d)$$

Ici encore la succession des suites s'obtient en incrémentant n de 2 en 2. Il y a encore deux choix possibles pour n, soit n pair soit n impair. Pour la condition initiale se situe à côté gauche de la zone active (trois longueurs d'onde des ondes directe et conjuguée entre 1 et 1.3 cm), $kL = 81\pi$ appartient à la suite (c) où $N = 0, \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2 = 0$ et $n = 19$. Ce sont donc les valeurs impaires de n qui conviennent.

Le tableau (3.3) montre des résultats théoriques des cas impairs à fréquence de pompage $\Omega = 1.6\pi \times 10^7$, la vitesse du son $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, le nombre d'onde $k = \Omega/c_0 = 40\pi$ et la profondeur de modulation $m = 0.08$. Les longueurs de la zone active sont $L = 2.025cm, 2.075, 2.125, 2.175$ pour avoir les produits $kL = 81\pi, 83\pi, 85\pi, 87\pi$, respectivement donnant les différents cas impairs.

TABLE 3.3 – Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas impairs aux conditions (3.50) et $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -1$

φ_1	φ_2	kL	α	m_0	Γ
$-\pi/2$	0	81π	0.0269	0.04335	3.72×10^5
π	$\pi/2$	83π	0.0264	0.04231	3.78×10^5
$\pi/2$	π	85π	0.0259	0.04131	3.83×10^5
0	$-\pi/2$	87π	0.0254	0.04036	3.88×10^5

φ_1 et φ_2 pour le quatrième type de solution (second cas impair) Pour le type 4, le second type de solution impaire, on prend les conditions aux frontières (3.51).

$$\cos(-kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = -1, \cos(kL/2 + \varphi_2 - \varphi_1) = 1.$$

Pour la condition de compatibilité, il reste $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$. En posant n, n' et $\overline{n}$ sont entiers on a

$$-\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 = \pi - 2n\pi$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$\frac{kL}{2} + \varphi_2 - \varphi_1 = 2n'\pi$$
$$\varphi_2 + \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + 2\overline{n}\pi$$

où les solutions sont$(N = n' - n, M = n' + n)$:

$$kL = (2M - 1)\pi$$
$$\varphi_1 = (\overline{n} - \frac{N}{2})\pi$$
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + (\overline{n} + \frac{N}{2})\pi$$

Soit, pour $\overline{n} = 0$ modulo 2π, on a les 4 cas suivants :

$$\overline{n} = 0, N = 0 \quad \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2};$$
$$\overline{n} = 0, N = 1 \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \pi;$$
$$\overline{n} = 0, N = 2 \quad \varphi_1 = -\pi, \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi;$$
$$\overline{n} = 0, N = 3 \quad \varphi_1 = -\frac{3}{2}\pi, \varphi_2 = 2\pi.$$

Or

$$\overline{n} = 1, N = 0 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 2;$$
$$\overline{n} = 1, N = 1 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 3;$$
$$\overline{n} = 1, N = 2 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 0;$$
$$\overline{n} = 1, N = 3 \quad \text{identique à} \quad \overline{n} = 0, N = 1.$$

Il y a donc 4 cas :

$$N = 0 \rightarrow n' = n \Rightarrow M = 2n \Rightarrow kL = (4n - 1)\pi \quad (a)$$
$$N = 1 \rightarrow n' = 1 + n \Rightarrow M = 2n + 1 \Rightarrow kL = (4n + 1)\pi \quad (b)$$
$$N = 2 \rightarrow n' = 2 + n \Rightarrow M = 2n + 2 \Rightarrow kL = (4n + 3)\pi \quad (c)$$
$$N = 3 \rightarrow n' = 3 + n \Rightarrow M = 2n + 3 \Rightarrow kL = (4n + 5)\pi \quad (d)$$

Pour la condition initiale se situe à côté gauche de la zone active (trois longueurs d'onde des ondes directe et conjuguée entre 1 et 1.3 cm), $kL = 81\pi$ appartient à la suite (b) où $N = 1, \varphi_1 = \frac{3}{2}\pi, \varphi_2 = \pi$ et $n = 20$. Les résultats sont résumés dans le tableau (3.4). Les paramètres physiques sont les mêmes que dans le type président : la fréquence de pompage est $\Omega = 1.6\pi \times 10^7$, la vitesse du son est $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, le nombre d'onde est $k = \Omega/c_0 = 40\pi$ et la profondeur de modulation est $m = 0.08$.

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

TABLE 3.4 – Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas impair aux conditions (3.51) et $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$

φ_1	φ_2	kL	α	m_0	Γ
$-\pi/2$	π	81π	0.0269	0.04335	3.72×10^5
π	$-\pi/2$	83π	0.0264	0.04231	3.78×10^5
$\pi/2$	0	85π	0.0259	0.04131	3.83×10^5
0	$\pi/2$	87π	0.0254	0.04036	3.88×10^5

Comparaison avec les résultats numériques Pour le cas impair, on peut aussi tracer des courbes théoriques dans la zone active. Les figures (3.33, 3.34) montrent une comparaison de répartition spatiale de la vitesse particulaire théorique avec des simulations numériques. Les conditions physiques correspondent aux 4 cas dans les tableaux (3.3) et (3.4). Ces deux derniers types de cas impairs ne donnent pas les mêmes valeurs de φ_1 et φ_2, mais ils tracent les mêmes ondes dans les figures.

3.2.5 Conclusions

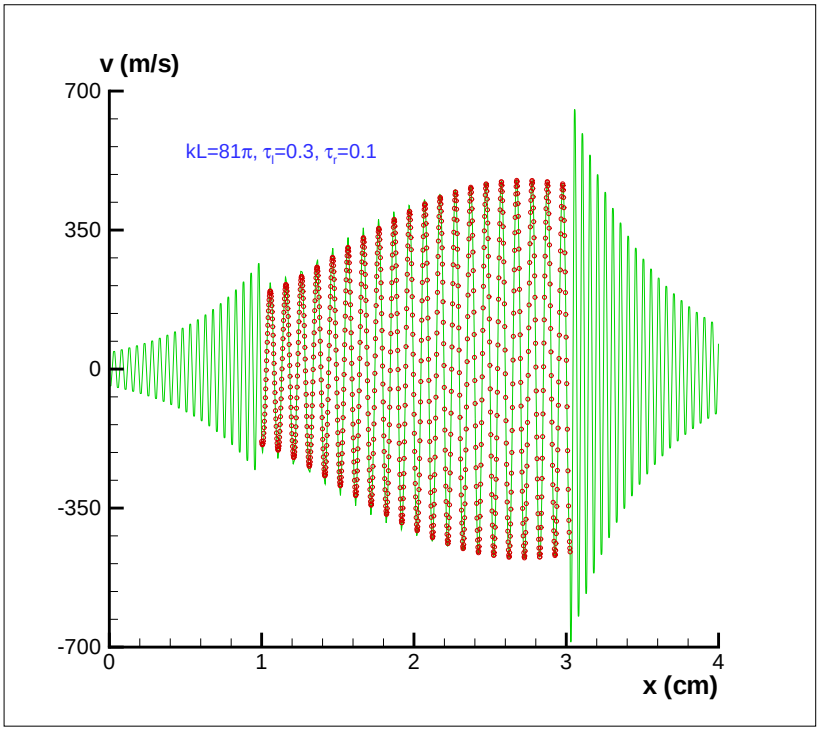
Les tableaux et les figures présentés dans cette section nous montrent que les solutions de type paire ou impaire se déclinent en 4 différentes solutions pour φ_1 et φ_2 une fois fixés la fréquence du pompage Ω, la profondeur du modulation m et les rapports d'impédance τ_l, τ_r. Ces solutions sont déterminées par les valeurs de kL.

Nous avons pour les cas pairs et impairs une parfaite connaissance des solutions analytiques. Désormais on peut tracer les courbes des ondes théoriquement et pas seulement leur enveloppe.

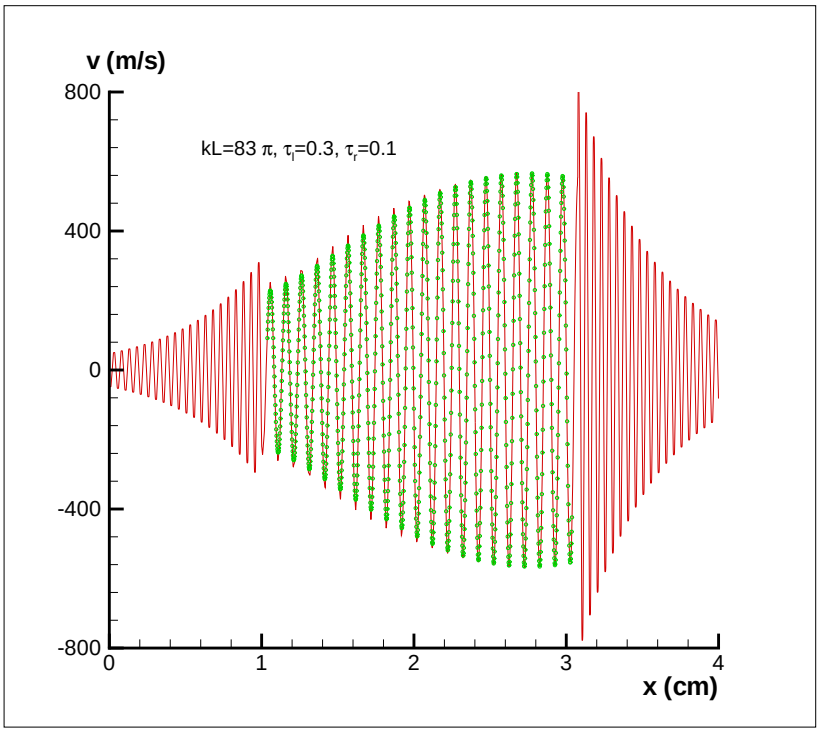
La théorie monodimensionnelle de la conjugaison de phase supercritique a permis d'approfondir la connaissance de la physique du phénomène. Elle a montré que les solutions habituellement trouvées dans les simulations et confrontées avec succès à la théorie ne sont pas les seules possibles. De plus, ces solutions n'apparaissent plus maintenant que comme un cas particulier, elles ne s'appliquent que pour des longueurs de la zone active multiple paire du quart de longueur d'onde. A l'opposé, une solution dite impaire apparaît si la longueur de la zone active est un multiple impair du quart longueur d'onde. Entre ces deux solutions, il existe des situations intermédiaires qui n'ont pas encore de solutions analytiques mais dont les simulations que l'on va présenter dans le chapitre suivant montreront qu'elles évoluent continûment du cas pair au cas impair. Cette grande sensibilité du phénomène à la longueur de la zone active montre que la réalisation d'un conjugateur efficace dans une large gamme d'incidences est un défi technologique que l'approfondissement de l'étude des solutions résonnantes peut aider à résoudre.

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(a) $kL = 81\pi$



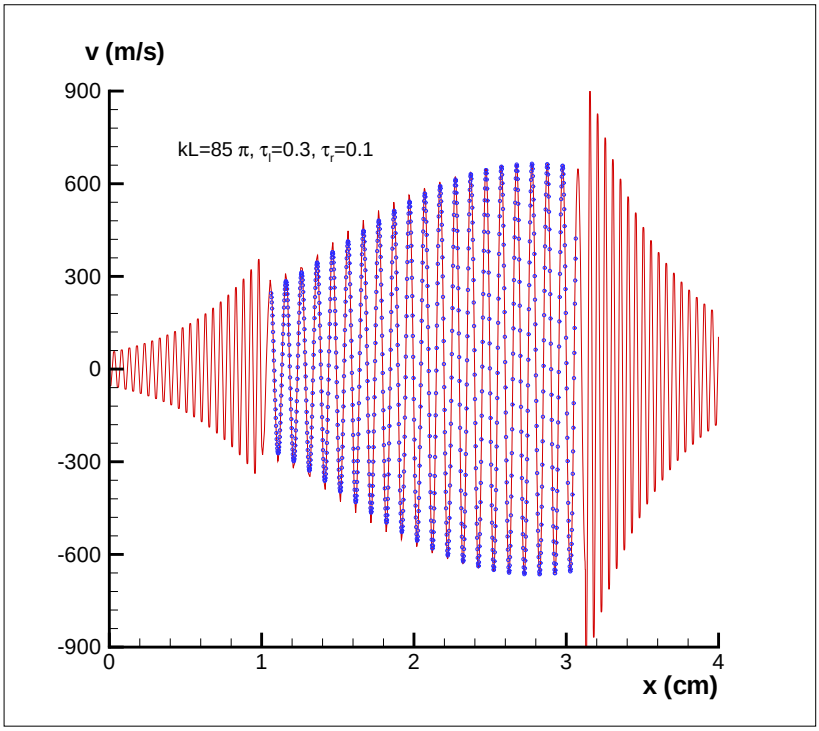
(b) $kL = 83\pi$

FIGURE 3.33 – Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas impair $kL = 81\pi, 83\pi, 85\pi, 87\pi$, théorie-simulation. ∘∘∘ solution théorique, — calcul numérique.

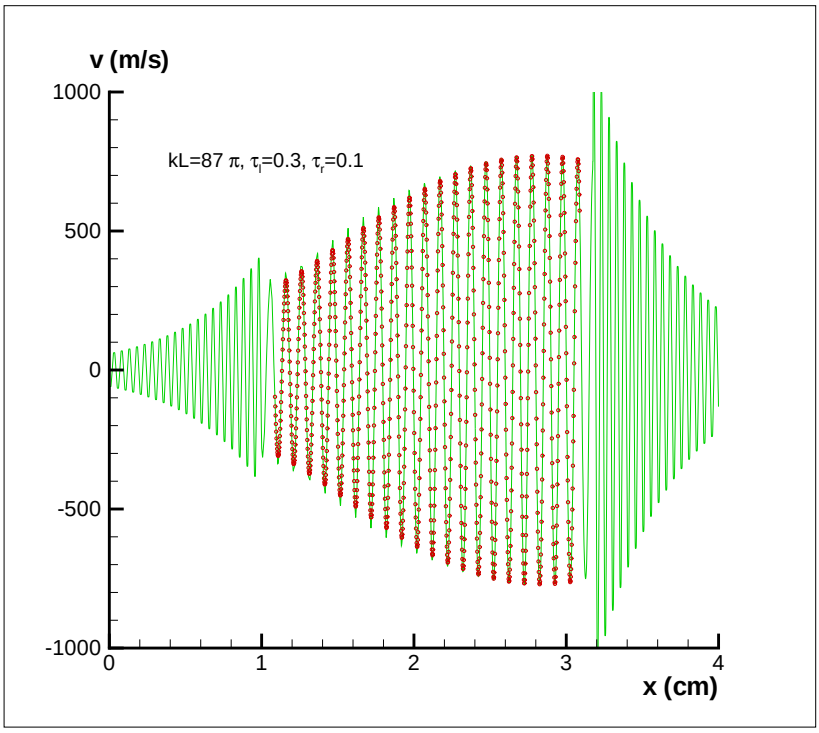
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



(c) $kL = 85\pi$



(d) $kL = 87\pi$

FIGURE 3.34 – Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas impair (suite)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Chapitre 4

Problèmes ouverts et exploitation pratique

4.1 Les équations modèles alternatives

Pour traiter le problème de la WPC du point de vue théorique, il faut essayer de réduire le problème aux termes essentiels c'est à dire aux termes résonnants dans le terme source des équations (2.5) :

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c\frac{\partial w_1}{\partial x} = -m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi),$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c\frac{\partial w_2}{\partial x} = m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi).$$

ou dans les opérateurs à gauche de l'équation. Si on remplace la vitesse du son instantanée c par c_0 comme dans la référence [11], on ramène le système à

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c_0\frac{\partial w_1}{\partial x} = m\frac{\Omega}{4}(w_2 - w_1)\sin(\Omega t + \varphi),$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c_0\frac{\partial w_2}{\partial x} = m\frac{\Omega}{4}(w_1 - w_2)\sin(\Omega t + \varphi). \tag{4.1}$$

En négligeant les termes de l'ordre m^2, l'équation de la vitesse particulaire (2.9), est remplacée par :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{m}{2}\Omega\sin(\Omega t + \varphi)\frac{\partial v}{\partial t} \tag{4.2}$$

Mais pour les solutions résonnantes de type (2.18) et (2.19), on doit avoir les relations suivantes :

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$\begin{aligned} c_0^2 \cos(\Omega t+\varphi)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\Omega}{2}\sin(\Omega t+\varphi)\frac{\partial v}{\partial t}(1+O(m)) \\ &= \frac{\Omega^2}{4}\cos(\Omega t+\varphi)v(1+O(m)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

ces relations permettent d'identifier l'équation (4.2) et (2.9) pour les solutions amplifiées. Cela signifie que la modulation de la vitesse du son dans l'opérateur de transport n'influence pas les solutions amplifiées en terme de seuil ou de taux d'amplification.

Prenant l'équation (4.3) en négligeant les termes d'ordre m^2, l'équation modèle originale pour θ devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= \frac{m}{2}\Omega^2\cos(\Omega t+\varphi)\theta + mc_0^2\cos(\Omega t+\varphi)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ &= -mc_0^2\cos(\Omega t+\varphi)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

identique à (2.16).

Une seconde façon de procéder est de réécrire le système (2.5) en développant c et utilisant la relation suivante pour la solution résonnante :

$$\frac{\Omega}{2}\sin(\Omega t+\varphi)w_i = c_0\cos(\Omega t+\varphi)\frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \text{pour} \quad i=1,2$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + c_0\frac{\partial w_1}{\partial x} &= m\frac{\Omega}{4}(w_2-2w_1)\sin(\Omega t+\varphi), \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - c_0\frac{\partial w_2}{\partial x} &= m\frac{\Omega}{4}(w_1-2w_2)\sin(\Omega t+\varphi). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Seuls les termes sources restent inchangés dans les couplage des deux équations en passant de la forme (4.1) à la forme (4.5). Comme l'amplification vient du couplage entre ces deux équations, le système résonnant revient encore à

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + c_0\frac{\partial w_1}{\partial x} &= m\frac{\Omega}{4}w_2\sin(\Omega t+\varphi), \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - c_0\frac{\partial w_2}{\partial x} &= m\frac{\Omega}{4}w_1\sin(\Omega t+\varphi). \end{aligned} \tag{4.6}$$

qui donne effectivement les mêmes équations modèles pour v et θ. On vérifie bien que le reste du système :

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = -2m\frac{\Omega}{4} w_1 \sin(\Omega t + \varphi),$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c_0 \frac{\partial w_2}{\partial x} = -2m\frac{\Omega}{4} w_2 \sin(\Omega t + \varphi).$$

donne

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m^2 \frac{\Omega^2}{16} \sin^2(\Omega t + \varphi) v$$

dont le terme source est de l'ordre de m^2 et ne contient pas de termes résonnants en $\Omega/2$. Finalement, (4.6) est le système générique pour la conjugaison de phase à pompage linéaire. Les systèmes (2.9) et (4.2) sont des variantes qui n'en différent qu'au second ordre. Il est intéressant de réécrire le système avec les quantités physiques v et θ, ce qui donne :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} = m\frac{\Omega}{4} v \sin(\Omega t + \varphi),$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - c_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -m\frac{\Omega}{4} \theta \sin(\Omega t + \varphi). \tag{4.7}$$

Le système (4.7) peut être considéré comme la forme physique du système générique de la conjugaison de phase par pompage linéaire.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

4.2 Les équations de la solution générale

4.2.1 Solution analytique

Pour le problème de la WPC en fonction de la longueur de la zone active, on a déjà des solutions pour le cas pair et le cas impair. Il faut donc chercher la solution pour les cas où kL n'est pas un nombre entier fois π, c'est à dire les cas intermédiaires.

On ne détaille ici que la piste qui semblait prometteuse, mais qui n'a pas aboutit. Elle consiste à ajouter à la solution générale une solution homogène qui ne perturbe pas la condition à la frontière au moins d'un côté. On pose

$$w_1 = -ce^{\Gamma t}[\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_1)+\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x+\frac{L}{2}))\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_{H1})] \tag{4.8}$$

$$w_2 = ce^{\Gamma t}[\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\sin(\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_2)+\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x-\frac{L}{2}))\sin(\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_{H2})] \tag{4.9}$$

Comme d'habitude la condition à la frontière gauche donne

$$w_1(-\frac{L}{2},t) = \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}w_2(-\frac{L}{2},t)$$

soit

$$\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2)\sin(-\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)+\beta\sin(-\frac{k\alpha L}{4})\sin(-\frac{kL}{4}+\varphi_{H2}-\varphi_1)=0 \tag{4.10}$$

$$\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1)\sin(-\frac{kL}{2}+\varphi_{H2}-\varphi_1)+\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2)\sin(\varphi_{H2}-\varphi_2)=0 \tag{4.11}$$

La condition à la frontière droite

$$w_1(\frac{L}{2},t) = \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}w_2(\frac{L}{2},t)$$

donne

$$\beta\sin(\frac{k\alpha L}{4})\sin(\varphi_{H1}-\varphi_1)+\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2)\sin(\frac{kL}{2}+\varphi_2-\varphi_1)=0 \tag{4.12}$$

$$\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\xi_1)\sin(\varphi_{H1}-\varphi_1)+\frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\xi_2)\sin(-\frac{kL}{2}+\varphi_{H2}-\varphi_2)=0 \tag{4.13}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En utilisant le système générique (4.6), on a pour l'équation de w_1 :

$$\begin{aligned}[\Gamma\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)+\frac{\Omega\alpha}{4}\cos(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)]\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_1)\\ +\beta[\Gamma\sin(\frac{k\alpha}{4}(x+\frac{L}{2}))+\frac{\Omega\alpha}{4}\cos(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1)]\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_{H1})\\ +\frac{m\Omega}{8}[\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\cos(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi-\varphi_2)\\ \beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x-\frac{L}{2}))\cos(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi-\varphi_{H2})]=0\end{aligned}$$

On pose toujours $\cos\gamma=\dfrac{8\Gamma}{m\Omega}$, et $\sin\gamma=\dfrac{2\alpha}{m}$ comme dans les chapitres précédents. On a donc

$$\begin{aligned}&\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1+\gamma)\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_1)+\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x+\frac{L}{2})+\gamma)\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_{H1})\\ &+\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\cos(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi-\varphi_2)+\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x-\frac{L}{2}))\cos(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi-\varphi_{H2})=0.\end{aligned}$$

La projection sur $\sin(-\frac{kx}{2}+\frac{\Omega t}{2}+\varphi_1)$ conduit à

$$\begin{aligned}&\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_1+\gamma)+\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x+\frac{L}{2})+\gamma)\cos(\varphi_{H1}-\varphi_1)\\ &-\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)-\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x-\frac{L}{2}))\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})=0\end{aligned}\quad(4.14)$$

et

$$\begin{aligned}\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x+\frac{L}{2})+\gamma)\sin(\varphi_{H1}-\varphi_1)+\sin(\frac{k\alpha x}{4}+\xi_2)\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)\\ +\beta\sin(\frac{k\alpha}{4}(x-\frac{L}{2}))\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})=0\end{aligned}\quad(4.15)$$

En développant et projetant sur $\sin(\dfrac{k\alpha x}{4})$ et $\cos(\dfrac{k\alpha x}{4})$, on obtient les relations suivantes :

pour l'équation (4.14)

$$\cos(\xi_1+\gamma)+\beta\cos(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)\cos(\varphi_{H1}-\varphi_1)-\cos\xi_2\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)-\beta\cos(\frac{k\alpha L}{8})\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})=0\quad(4.16)$$

$$\sin(\xi_1+\gamma)+\beta\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)\cos(\varphi_{H1}-\varphi_1)-\sin\xi_2\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)+\beta\sin(\frac{k\alpha L}{8})\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})=0,\quad(4.17)$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

et pour l'équation (4.15)

$$\beta\cos(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)\sin(\varphi_{H1}-\varphi_1)+\cos\xi_2\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)+\beta\cos(\frac{k\alpha L}{8})\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2}) \tag{4.18}$$

$$\beta\sin(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)\sin(\varphi_{H1}-\varphi_1)+\sin\xi_2\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)-\beta\sin(\frac{k\alpha L}{8})\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2}). \tag{4.19}$$

En passant en notation complexe par (4.16)+i(4.17), on obtient

$$e^{i(\xi_1+\gamma)}+\beta\cos(\varphi_{H1}-\varphi_1)e^{i(\frac{k\alpha L}{8})}-\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)e^{i\xi_2}-\beta\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})e^{-i\frac{k\alpha L}{8}}=0 \tag{4.20}$$

et par (4.18)+i(4.19)

$$\beta\sin(\varphi_{H1}-\varphi_1)e^{i(\frac{k\alpha L}{8})}+\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)e^{i\xi_2}+\beta\cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})e^{-i\frac{k\alpha L}{8}}=0 \tag{4.21}$$

Puis par (4.21)-i(4.20) et (4.21)+i(4.20) aboutit à

$$e^{i\xi_2}e^{i(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)}=ie^{i(\xi_1+\gamma)}+i\beta e^{i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{i(\varphi_{H1}-\varphi_1)}-\beta e^{-i\frac{k\alpha L}{8}}e^{i(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})} \tag{4.22}$$

et

$$e^{i\xi_2}e^{-i(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)}=-ie^{i(\xi_1+\gamma)}-i\beta e^{i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{-i(\varphi_{H1}-\varphi_1)}-\beta e^{-i\frac{k\alpha L}{8}}e^{-i(\varphi-\varphi_1-\varphi_{H2})} \tag{4.23}$$

Pour w_2, le même calcul donne :

$$e^{i\xi_2}e^{i(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)}=ie^{i(\xi_2-\gamma)}+i\beta e^{-i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{i(\varphi_{H2}-\varphi_1)}-\beta e^{i\frac{k\alpha L}{8}}e^{i(\varphi-\varphi_2-\varphi_{H1})} \tag{4.24}$$

et

$$e^{i\xi_2}e^{-i(\varphi-\varphi_1-\varphi_2)}=-ie^{i(\xi_2-\gamma)}-i\beta e^{-i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{-i(\varphi_{H2}-\varphi_1)}-\beta e^{i\frac{k\alpha L}{8}}e^{-i(\varphi-\varphi_2-\varphi_{H1})} \tag{4.25}$$

On élimine φ dans les équations en posant $\varphi_i=\Phi_i+\frac{\varphi}{2}$ soit pour w_1 :

$$e^{i\xi_2}e^{-i(\Phi_1+\Phi_2)}=ie^{i(\xi_1+\gamma)}+i\beta e^{i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{i(\Phi_{H1}-\Phi_1)}-\beta e^{-i\frac{k\alpha L}{8}}e^{-i(\Phi_1+\Phi_{H2})} \tag{4.26}$$

et

$$e^{i\xi_2}e^{i(\Phi_1+\Phi_2)}=-ie^{i(\xi_1+\gamma)}-i\beta e^{i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{-i(\Phi_{H1}-\Phi_1)}-\beta e^{-i\frac{k\alpha L}{8}}e^{i(\Phi_1+\Phi_{H2})} \tag{4.27}$$

et pour w_2

$$e^{i\xi_1}e^{-i(\Phi_1+\Phi_2)}=ie^{i(\xi_2-\gamma)}+i\beta e^{-i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{i(\Phi_{H2}-\Phi_2)}-\beta e^{i\frac{k\alpha L}{8}}e^{-i(\Phi_{H1}+\Phi_2)} \tag{4.28}$$

et

$$e^{i\xi_1}e^{i(\Phi_1+\Phi_2)}=-ie^{i(\xi_2-\gamma)}-i\beta e^{-i(\frac{k\alpha L}{8}+\gamma)}e^{-i(\Phi_{H2}-\Phi_2)}-\beta e^{i\frac{k\alpha L}{8}}e^{i(\Phi_{H1}+\Phi_2)} \tag{4.29}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En combinant (4.26) et (4.27) on obtient

$$e^{i(\xi_2-\frac{\gamma}{2})}\cos(\Phi_1+\Phi_2) = -\beta e^{i(\frac{k\alpha L}{8}+\frac{\gamma}{2})}\sin(\Phi_{H1}-\Phi_1) - \beta e^{-i(\frac{k\alpha L}{8}+\frac{\gamma}{2})}\cos(\Phi_1+\Phi_{H2})$$

dont le module est

$$\cos^2(\Phi_1+\Phi_2) = \beta^2[\sin^2(\Phi_{H1}-\Phi_1)+\cos^2(\Phi_1+\Phi_{H2})+2\sin(\Phi_{H1}-\Phi_1)\cos(\Phi_1+\Phi_{H2})\cos(\frac{k\alpha L}{4}+\gamma)], \tag{4.30}$$

et la pente

$$\tan(\xi_2-\frac{\gamma}{2}) = \frac{\sin(\Phi_{H1}-\Phi_1)-\cos(\Phi_1+\Phi_{H2})}{\sin(\Phi_{H1}-\Phi_1)+\cos(\Phi_1+\Phi_{H2})}\tan(\frac{k\alpha L}{8}+\frac{\gamma}{2})). \tag{4.31}$$

Les équations (4.28) et (4.29) conduisent à :

$$e^{i(\xi_1+\frac{\gamma}{2})}\cos(\Phi_1+\Phi_2) = -\beta e^{-i(\frac{k\alpha L}{8}+\frac{\gamma}{2})}\sin(\Phi_{H2}-\Phi_2) - \beta e^{i(\frac{k\alpha L}{8}+\frac{\gamma}{2})}\cos(\Phi_{H1}+\Phi_2)$$

de module

$$\cos^2(\Phi_1+\Phi_2) = \beta^2[\sin^2(\Phi_{H2}-\Phi_2)+\cos^2(\Phi_2+\Phi_{H1})+2\sin(\Phi_{H2}-\Phi_2)\cos(\Phi_2+\Phi_{H1})\cos(\frac{k\alpha L}{4}+\gamma)], \tag{4.32}$$

et de pente

$$\tan(\xi_1+\frac{\gamma}{2}) = -\frac{\sin(\Phi_{H2}-\Phi_2)-\cos(\Phi_2+\Phi_{H1})}{\sin(\Phi_{H2}-\Phi_2)+\cos(\Phi_2+\Phi_{H1})}\tan(\frac{k\alpha L}{8}+\frac{\gamma}{2})). \tag{4.33}$$

L'égalité des équations (4.30) et (4.32) donne

$$\begin{aligned}&\cos^2(\Phi_1+\Phi_{H2})-\cos^2(\Phi_2+\Phi_{H1})+\sin^2(\Phi_{H1}-\Phi_1)-\sin^2(\Phi_{H2}-\Phi_2)\\ &=2\cos(\frac{k\alpha L}{4}+\gamma)[\sin(\Phi_{H2}-\Phi_2)\cos(\Phi_2+\Phi_{H1})-\sin(\Phi_{H1}-\Phi_1)\cos(\Phi_1+\Phi_{H2})]\end{aligned}$$

ce qui conduit à une formule très simple :

$$\sin(\Phi_{H2}+\Phi_{H1}) = -\cos(\frac{k\alpha L}{4}+\gamma)$$

Si

$$\Phi_2-\Phi_1+\Phi_{H1}-\Phi_{H2} \neq 0(\mod \pi)$$

on a aussi une relation entre Φ_{H1}, Φ_{H2} et γ :

$$\Phi_{H2}+\Phi_{H1} = \frac{3\pi}{2} \pm (\gamma+\frac{k\alpha L}{4}) \tag{4.34}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En remplaçant l'égalité (4.34) dans le module de w_1 (Eq. 4.30) ou celui de w_2 (Eq. 4.32) on trouve

$$\beta^2 = \frac{\cos^2(\Phi_1 + \Phi_2)}{\cos^2(\Phi_{H1} + \Phi_{H2})} \tag{4.35}$$

Enfin si on met (4.34) dans les équations de pente (4.31) et (4.33), on aboutit à

$$\tan(\xi_2 - \frac{\gamma}{2}) = \pm \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_{H1} - \Phi_{H2}}{2} + \Phi_1)$$

$$\tan(\xi_1 + \frac{\gamma}{2}) = \mp \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_{H2} - \Phi_{H1}}{2} + \Phi_2).$$

soit

$$\xi_2 = \frac{\gamma}{2} \pm (\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_{H1} - \Phi_{H2}}{2} + \Phi_1) \mod \pi$$

$$\xi_1 = -\frac{\gamma}{2} \mp (\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_{H2} - \Phi_{H1}}{2} + \Phi_2) \mod \pi$$

et donc

$$\xi_1 + \xi_2 = \pm(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1}) \mod \pi$$

$$\xi_2 - \xi_1 - \gamma = \pm(\frac{\pi}{2} + \Phi_1 + \Phi_2) \mod \pi$$

Ces formules semblent prometteuses, malheureusement les conditions aux frontières vont conduire à une trivialité incompatible avec la forme de la solution ! Les conditions aux frontières s'écrivent en effet :

$$\begin{cases} \sin(\frac{k\alpha L}{8})\cos\xi_1 + \cos(\frac{k\alpha L}{8})\sin\xi_1 = -\beta\sin(\frac{k\alpha L}{4})\frac{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H1} - \Phi_2)}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_1 - \Phi_2)} \\ -\sin(\frac{k\alpha L}{8})\cos\xi_1 + \cos(\frac{k\alpha L}{8})\sin\xi_1 = \beta\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(\frac{k\alpha L}{4})\frac{\sin(\Phi_2 - \Phi_{H2})}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_2 - \Phi_1)} \end{cases} \tag{4.36}$$

$$\begin{cases} -\sin(\frac{k\alpha L}{8})\cos\xi_2 + \cos(\frac{k\alpha L}{8})\sin\xi_2 = \beta\sin(\frac{k\alpha L}{4}) + \sin(-\frac{\frac{kL}{2} + \Phi_{H2} - \Phi_1)}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_2 - \Phi_1)} \\ \sin(\frac{k\alpha L}{8})\cos\xi_2 + \cos(\frac{k\alpha L}{8})\sin\xi_2 = -\beta\frac{1-\tau_r}{1+\tau_r}\sin(\frac{k\alpha L}{4})\frac{\sin(\Phi_1 - \Phi_{H1})}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_1 - \Phi_2)} \end{cases}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En utilisant $\xi_2 = -\xi_1 \pm (\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1})$, on obtient

$$\begin{cases} -\cos\xi_1 \sin(\pm(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1}) - \dfrac{k\alpha L}{8}) + \sin\xi_1 \cos(\pm(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1}) - \dfrac{k\alpha L}{8}) \\ = \beta \sin(\dfrac{k\alpha L}{4}) \dfrac{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H2} - \Phi_1)}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_2 - \Phi_1)} \\ \cos\xi_1 \sin(\pm(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1}) + \dfrac{k\alpha L}{8}) + \sin\xi_1 \cos(\pm(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1}) + \dfrac{k\alpha L}{8}) \\ = -\beta \dfrac{1-\tau_r}{1+\tau_r} \sin(\dfrac{k\alpha L}{4}) \dfrac{\sin(\Phi_1 - \Phi_{H1})}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_1 - \Phi_2)} \end{cases} \tag{4.37}$$

Examinons les premiers membres des équations. L'identification ligne par ligne donne

$$\sin(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1}) = 0$$

L'identification de la première lignes pour ξ_1 dans (4.36) et de la seconde ligne pour ξ_2 dans (4.37) ou de la seconde lignes pour ξ_1 dans (4.36) et de la première ligne pour ξ_2 dans (4.37) donne

$$\sin[\frac{k\alpha L}{4} \pm (\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1})] = 0$$

qui ne sont compatibles que si $\dfrac{k\alpha L}{4} = 0$. Cela ne correspond pas à la réalité des solutions.

Il faut donc reprendre le problème avec

$$\sin(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_{H2} - \Phi_{H1}) = 0.$$

La condition d'égalité des modules des équations pour w_1 et w_2 est implicitement vérifiée mais on peut avoir :

$$\sin(\Phi_{H1} + \Phi_{H2}) \neq -\cos(\frac{k\alpha L}{4} + \gamma)$$

et

$$\beta^2 \neq \frac{\cos^2(\Phi_1 + \Phi_2)}{\cos^2(\Phi_{H1} + \Phi_{H2})}$$

et

$$\xi_1 + \xi_2 = 0 \mod \pi$$

Examinons les seconds membres des équations des conditions aux frontières (4.36) et (4.36), on a :

$$\frac{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H1} - \Phi_2)}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_1 - \Phi_2)} = \frac{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H2} - \Phi_1)}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_2 - \Phi_1)}$$

$$\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l} \frac{\sin(\Phi_2 - \Phi_{H2})}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_2 - \Phi_1)} = -\frac{1-\tau_r}{1+\tau_r} \frac{\sin(\Phi_1 - \Phi_{H1})}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_1 - \Phi_2)}$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

En simplifiant ces deux relations, on trouve

$$\cos(-kL + \Phi_{H1} - \Phi_1) = \cos 2(\Phi_2 - \Phi_1)\cos(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} - \frac{\Phi_{H1} + \Phi_{H2}}{2})$$
$$\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(-\frac{kL}{2} - \Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1-\tau_r}{1+\tau_r}\sin(\frac{kL}{2} - \Phi_1 - \Phi_2)$$

Remplaçons ξ_2 par $\xi_1 \mod \pi$ dans les conditions aux frontières (Eqs. 4.11 et 4.13), on peut trouver deux équations pour ξ_1 :

$$\tan\xi_1 = \tan\frac{k\alpha L}{8}\frac{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H2} - \Phi_1) + \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(\Phi_{H2} - \Phi_2)}{\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H2} - \Phi_1) - \frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(\Phi_{H2} - \Phi_2)}$$

et

$$\tan\xi_1 = \tan\frac{k\alpha L}{8}\frac{\sin(\Phi_{H1} - \Phi_1) + \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H1} - \Phi_2)}{-\sin(\Phi_{H1} - \Phi_1) + \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(-\frac{kL}{2} + \Phi_{H1} - \Phi_2))}$$

Pour trouver une équation $G(\alpha)$ comme dans les cas pair et impair, on peut éliminer ξ_1, et donc on a

$$\tan\frac{kL}{2} = \frac{\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\sin(\Phi_{H2} - \Phi_1) - \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\sin(\Phi_{H1} - \Phi_2)}{\frac{1-\tau_l}{1+\tau_l}\cos(\Phi_{H2} - \Phi_1) - \frac{1+\tau_r}{1-\tau_r}\cos(\Phi_{H1} - \Phi_2)}$$

Malheureusement, il n'existe plus α dans cette expression. On n'aboutit pas à une solution analytique pour le cas général par cette méthode. La solution théorique est donc encore à trouver.

4.2.2 Simulations numériques du cas général

Quoique les solutions analytiques soient encore à chercher théoriquement, on peut résoudre numériquement les cas intermédiaires en faisant varier la longueur de la zone active dans les simulations numériques. Les valeurs des taux de croissance Γ pour de tels cas sont présentés par la figure (4.1) pour $m = 0.028$ avec une fréquence de pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, une vitesse du son $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$ et avec une longueur de la zone active variante entre 2 cm et 2.01 cm. La durée du pompage est de $19\mu s$. On voit que le taux de croissance varie continûment en fonction de kL entre les valeurs paire et impaire. On peut en déduire que le seuil varie aussi continûment en fonction de ce paramètre.

Les simulations ont été faites pour deux différentes conditions initiales. La première consiste à libérer à $t = 0$ au milieu de la zone active trois longueurs d'onde des ondes directe et conjuguée d'amplitude $2\times10^{-3}m/s$ et de fréquence $\omega = \Omega/2 = 2\pi\times10^7$ Hz qui est la moitié de celle du pompage. La seconde condition initiale consiste à produire un déplacement de l'interface gauche du conjugateur pendant trois périodes à une fréquence $\omega = 2\pi \times 10^7$ Hz du début du pompage. Il en découle une différence entre les courbes obtenues qui est visible du coté de la solution impaire ($kL = 201\pi$). Ceci montre que la

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

solution impaire "pure" n'apparaît pas immédiatement et peut être perturbée facilement par des effets parasites initiaux. Elle est donc plus difficile à observer et sans doute cela explique qu'elle n'a jamais été détectée auparavant.

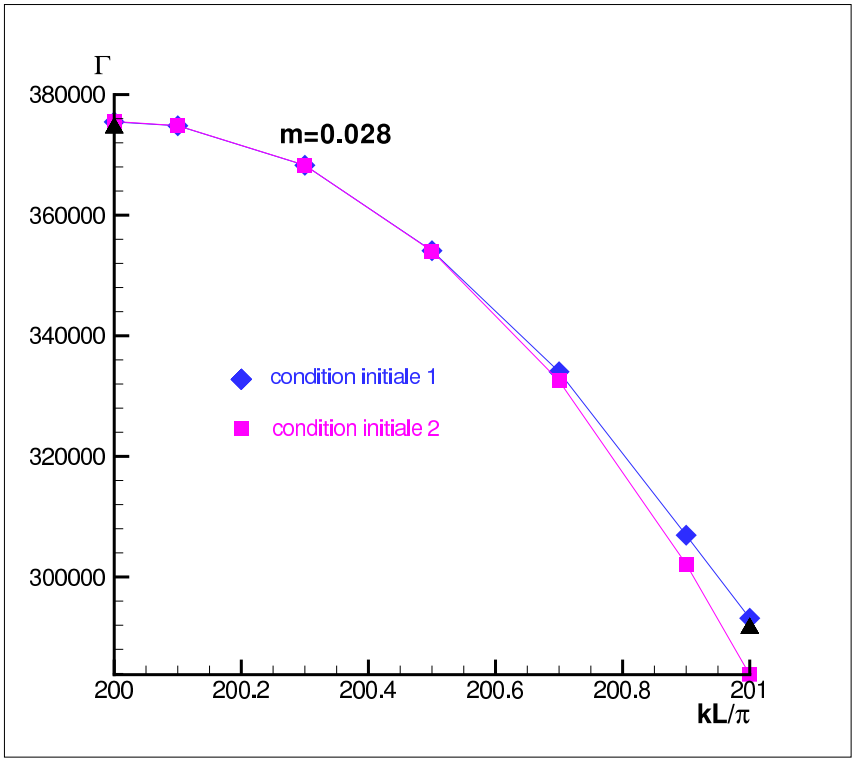
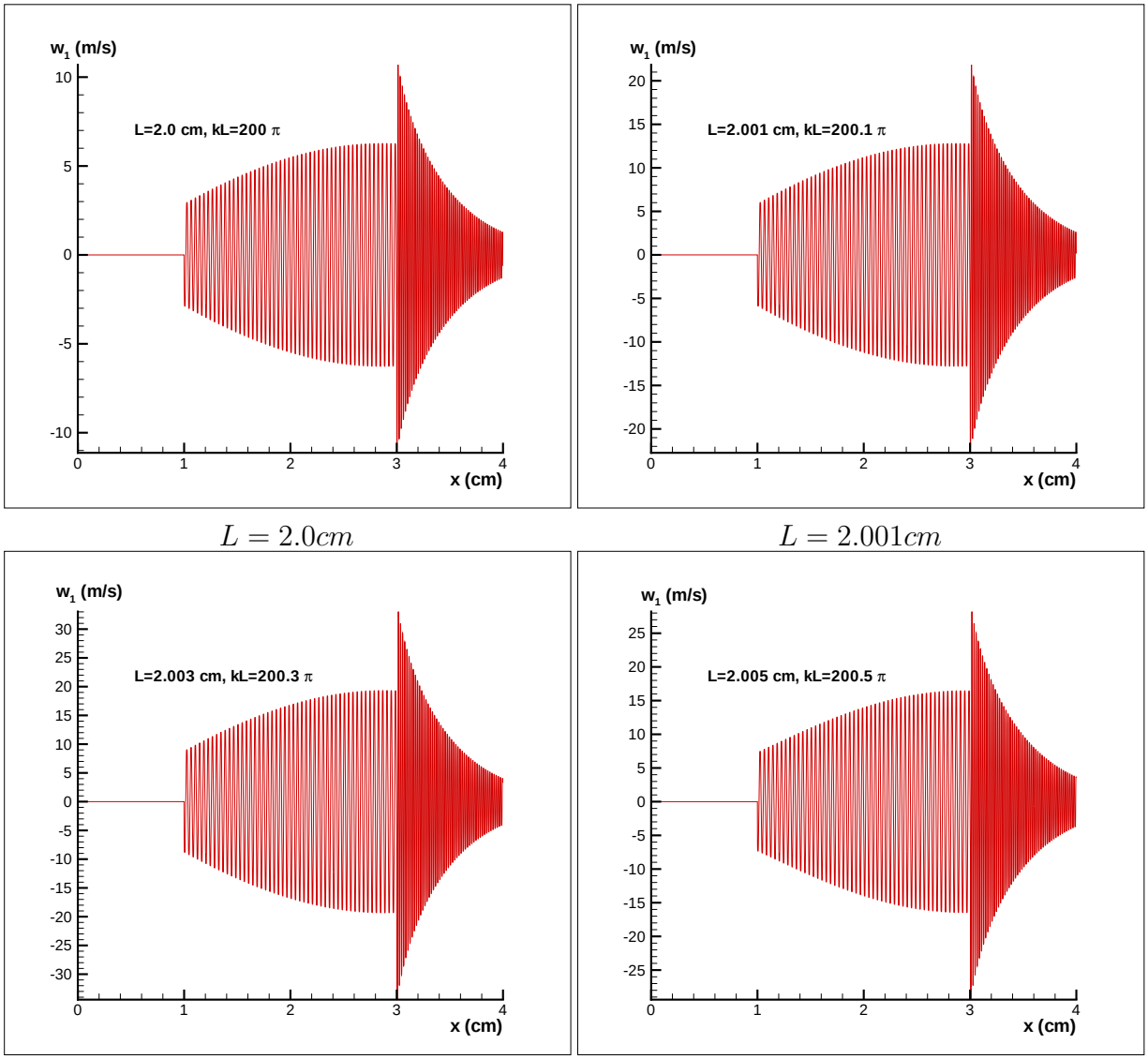


FIGURE 4.1 – Solutions des Γ en fonction du produit kL/π, les solutions théoriques pour le cas pair et le cas impair sont marquées par deux $\triangle$; les solutions numériques avec la première condition initiale sont marquées par les $\diamond$; et les solutions numériques avec la seconde condition initiale sont marquées par les $\square$.

Les figures (4.2 et 4.3) montrent une comparaison des répartitions spatiales des ondes directes w_1 pour $L = 2.0cm, 2.001cm, 2.003cm, 2.005cm, 2.007cm, 2.009cm$ et $2.01cm$. La fréquence de pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$, la vitesse du son $c_0 = 4000m/s$. Les temps de calcul $t = 18\mu s$ et la durée du pompage $t = 19\mu s$. On peut constater que les enveloppes de ces répartitions évoluent continûment avec kL. Ici, on voit bien pour les cas intermédiaires, un changement lent en fonction de kL avec une répartition spatiale qui reste longtemps voisine de celle du cas pair. Cette tendance montre aussi que le cas pair est sans doute plus facile à observer dans les expériences. On voit également que l'amplitude maximale à $t = 18\mu s$, ne varie pas de façon monotone avec kL. On a un maximum autour de $L = 2.003cm$. Ceci est sans doute lié à la rapidité d'établissement du processus d'amplification qui est associé du fait que φ_1 et φ_2 atteignent plus ou moins vite une valeur constante. Donc on peut dire que pour avoir une énergie émise plus forte, ce n'est pas nécessairement le cas pair qu'il faut choisir. Ceci est une raison supplémentaire pour rechercher les solutions analytiques générales.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl



$L = 2.0cm$ $L = 2.001cm$

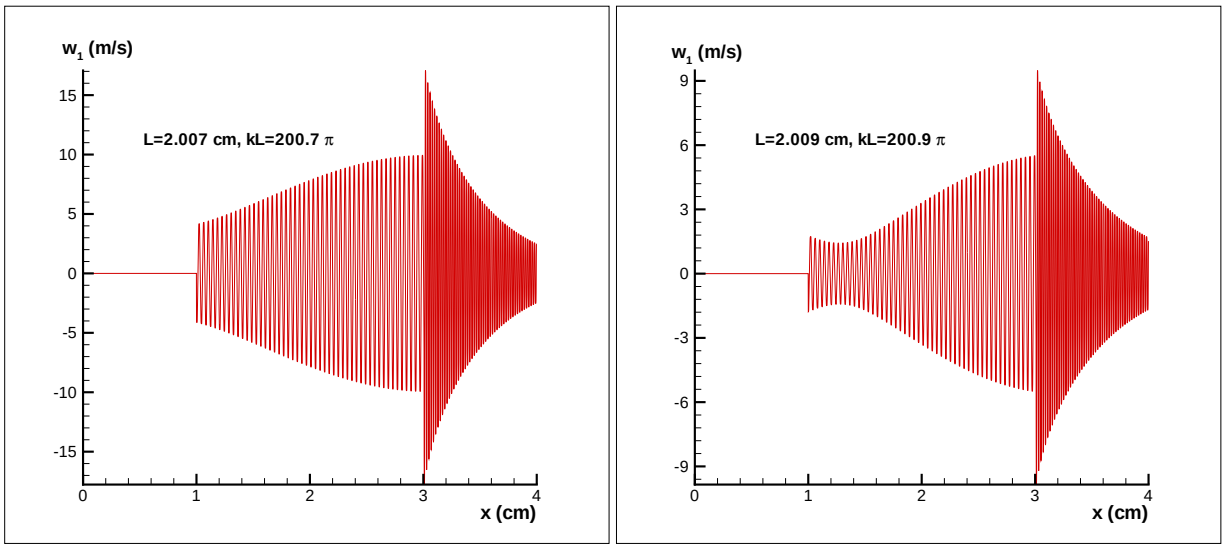
$L = 2.003cm$ $L = 2.005cm$

FIGURE 4.2 – Comparaison des répartitions spatiales des ondes directes w_1 intermédiaires en $t = 18\mu s$ et $L = 2.0cm, 2.001cm, 2.003cm, 2.005cm, 2.007cm, 2.009cm, 2.01cm$, pour $m = 0.028$, la fréquence de pompage $\Omega = 4 \times 10^7\pi$, la vitesse du son $c_0 = 4000m/s$.

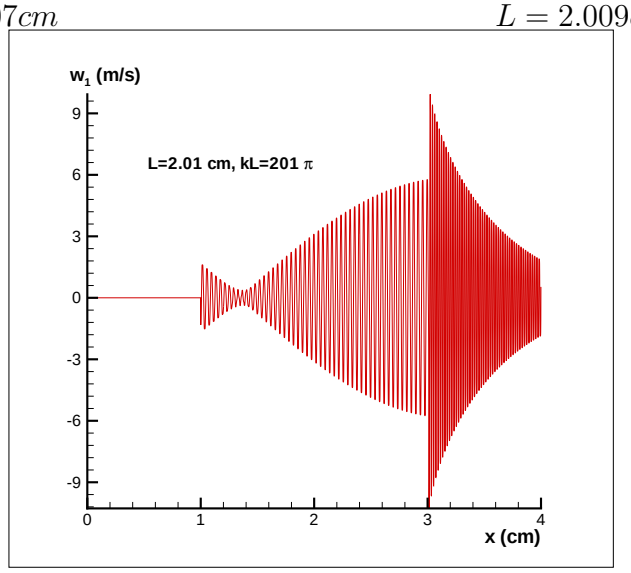
© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008



$L = 2.007cm$ $L = 2.009cm$



$L = 2.01cm$

FIGURE 4.3 – Comparaison des répartitions spatiales des ondes directes w_1 intermédiaires (suite)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

4.3 Exploitation des résultats en termes énergétiques

4.3.1 Optimisation en fonction d'impédance

Les solutions analytiques permettent des analyses plus simples que les simulations numériques et les expériences. Par exemple, la figure (2.15) de la section (2.1.4.2) présente un cas spatial où l'énergie du pompage dans l'échantillon est très important, et il y a peu d'énergie sortant pendant la durée du pompage. Ce cas peut expliquer les phénomènes d'échauffement du conjugateur dans les expériences. On peut penser que les applications de la WPC à forte énergie sont limitées par un mauvais rapport entre le flux d'énergie de l'onde conjuguée et celle de pompage.

Cette situation peut être clarifiée par une analyse de l'effet du rapport d'impédance. La figure (4.4) montre un cas semi-homogène pair ($\tau_r = 1$). La variation est le rapport d'amplitude de flux d'énergie

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\tau_l \theta_l v_l}{\tau_0 \theta_0 v_0} = \frac{4\tau_l}{(1+\tau_l)^2} e^{2\Gamma t} \sin^2 \frac{k\alpha L}{8}.$$

Ici l'amplitude de flux d'énergie est pris à la fin du pompage à la frontière de l'échantillon. Il est clair sur la figure que le cas optimum n'est pas le cas homogène où $\tau_l = 1$ et que le rapport d'impédance peut changer dramatiquement l'énergie de l'onde conjuguée.

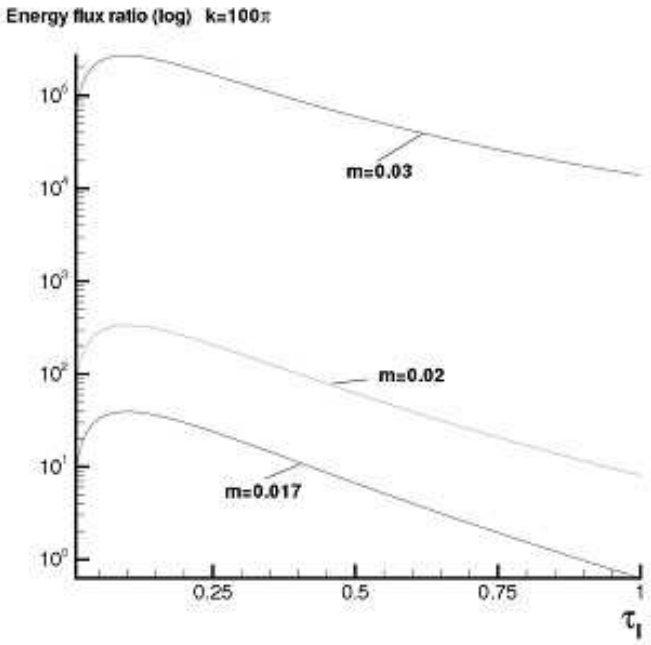


FIGURE 4.4 – Le rapport de flux d'énergie en fonction de τ_l pour un nombre d'onde $k = 100\pi$ et $\tau_r = 1$.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Un autre résultat important est le fait que l'optimum varie en fonction de la fréquence (Fig. 4.5). Aussi, pour avoir une meilleure efficacité, la fréquence du pompage peut être adaptée pour chaque valeur de τ_l et τ_r. Cependant il faut garder à l'esprit qu'on peut alors passer d'un cas pair à un cas impair et modifier de ce fait les courbes d'optimum.

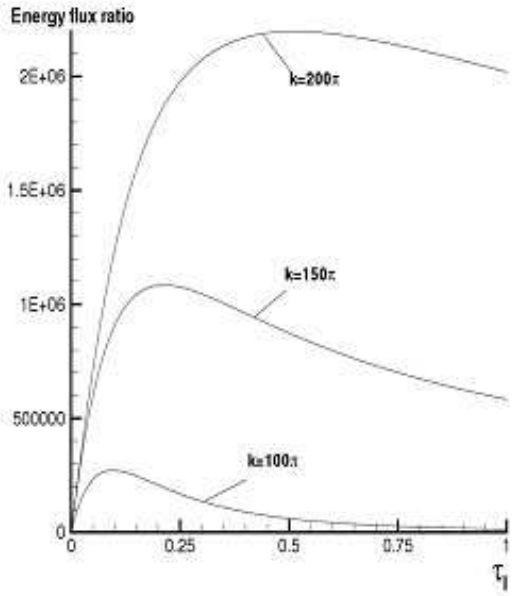


FIGURE 4.5 – Le rapport de flux d'énergie en fonction de τ_l pour $m = 0.03$ et $\tau_r = 1$.

L'approche analytique permet également la détermination du seuil d'amplification en fonction de tous les paramètres. Pour ce problème qui correspond à la solution marginale $\Gamma = 0$, on a déjà trouvé des solutions analytiques dans le chapitre 3 pour le seuil dans les cas pair et impair. On peut donc tracer des figures de seuil en fonction de τ_l et τ_r pour un kL fixé. La figure (4.6) présente m_0 pour le cas pair où $kL = 250\pi$ et pour le rapport d'impédance τ_l qui varie entre 0 et 10, et $\tau_r = 0.001, 0.2, 1, 5, 10, 1000$. Sur la figure on remarque que le maximum du seuil est à $m_0 = 0.016$ qui est le seuil du cas homogène et tous les cas où $\tau_l\tau_r = 1$.

Pour les cas impairs, la figure (4.7) présente le cas $kL = 251\pi$ et avec les mêmes conditions de rapports d'impédance τ_l et τ_r que précédemment. Le maximum du seuil dans ce cas est aussi à $m_0 = 0.0159$ qui est le seuil du cas homogène et tous les cas où $\tau_l = \tau_r$. Ce seuil maximal est un peu plus petit que celui du cas pair parce que le produit kL est plus élevé.

En comparant ces deux résultats théoriques pour le cas pair et impair, on remarque que les courbes du cas semi-homogène où $\tau_r = 1$ sont presque les mêmes. Pour expliquer cela, revenons aux expressions de m_0 de ces deux cas (3.37, 3.46), pour $\tau_r = 1$, on aura

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

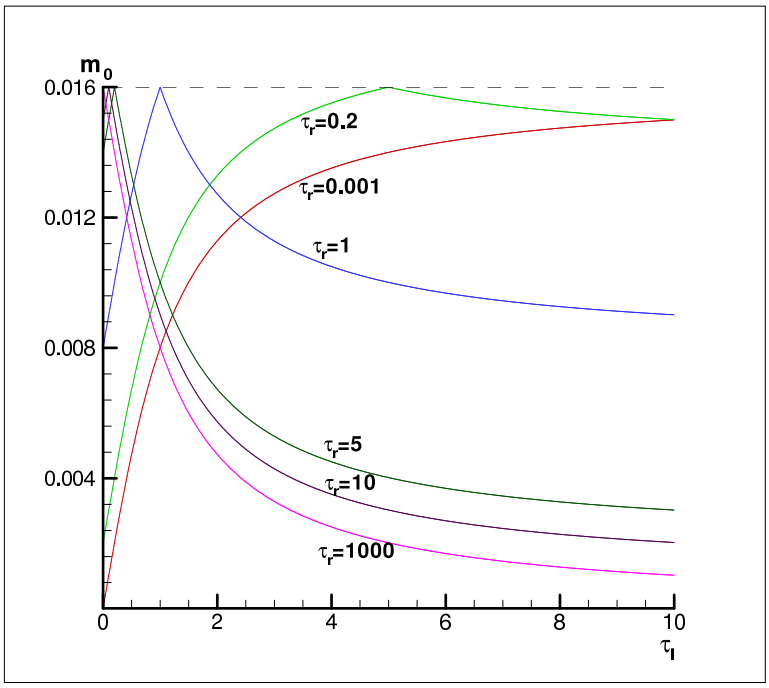


FIGURE 4.6 – Seuil m_0 pour $kL = 250\pi$

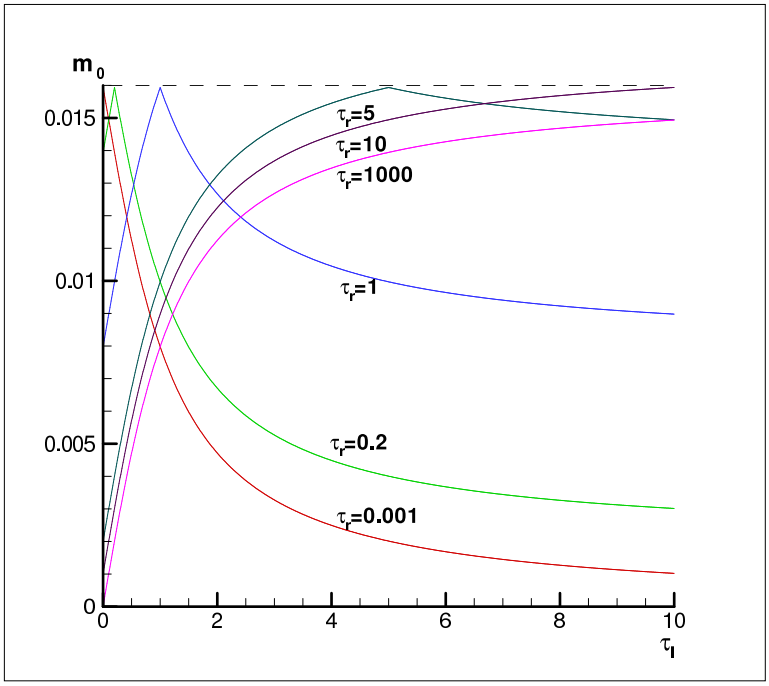


FIGURE 4.7 – Seuil m_0 pour $kL = 251\pi$

la même équation pour les cas pair et impair.

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\frac{|1-\tau_l|}{1+\tau_l}),$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

la différence des longueur de la zone active $L = 2.5cm$ pour le cas pair et $L = 2.51cm$ pour le cas impair explique la petite différence de ces deux courbes pour $\tau_r = 1$.

De même pour le cas semi-homogène où $\tau_l = 1$, l'équation de seuil est :

$$m_0 = \frac{8}{kL}\text{arccot}(\frac{|1-\tau_r|}{1+\tau_r})$$

pour les deux cas. Ainsi dans les cas semi-homogènes et a fortiori homogène la distinction paire et impaire disparaît pour les valeurs du seuil. Les cas intermédiaires ont donc aussi le même seuil. Ceci permet de penser que les défauts géométriques de la zone active inévitables dans un échantillon réel 3D, auront moins d'influence dans les situations proches des cas homogènes ou semi-homogènes. C'est ce qui doit se passer dans un échantillon réaliste pour peu que ΔL_l et ΔL_r soient assez grandes pour que les impédances effectives τ_l' et τ_r' tendent vers 1. Il semble donc, qu'au moins, pour le seuil, il y ait des solutions simples pour remédier à la grande sensibilité du phénomène avec la longueur de la zone active.

4.3.2 Taux de croissance

On a déjà trouvé que le taux de croissance pour le cas homogène pour une longueur de la zone active infinie est $\Gamma = \frac{m\Omega}{8}$. Pour les autres cas avec la zone active finie c'est $\Gamma = \frac{\Omega}{8}\sqrt{m^2 - (2\alpha)^2}$. Pour le cas homogène, α dépend de L, c_0 et Ω (2.41), mais il dépend aussi de τ_l pour le cas semi-homogène (2.47), et de τ_l et τ_r pour le cas général (2.37, 2.38). On présente ici une approche numérique pour le taux de croissance en fonction de τ_l et τ_r quand on fixe L, c_0 et Ω dans le cas pair et le cas impair.

Les figures (4.8) et (4.10) présentent le taux de croissance en fonction des rapports d'impédance pour le cas pair et impair. Dans ces calculs, la fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi^7$, la vitesse du son $c_0 = 4000m/s$, la longueur de la zone active $L = 2.5cm$ pour le cas pair et $L = 2.51cm$ pour le cas impair. Les figures (4.9) et (4.11) sont des zooms des deux premières pour τ_l compris en 0 et 1. Sur les figures (4.8) et (4.10) on remarque qu'il existe bien une asymptote maximale absolue $\Gamma_{max} = \frac{m\Omega}{8}$ (le cas où $\alpha_s = 0$) pour les différentes valeurs de τ_l et τ_r. On remarque aussi que c'est pour $\tau_l = \tau_r = 1$, c'est à dire pour le cas homogène qu'on aura le plus petit taux de croissance.

Pour chaque courbe de la figure (4.8), on a un minimum toujours situé au point $\tau_l \cdot \tau_r = 1$. Pour ces cas pair, à gauche du minimum ($\tau_l \cdot \tau_r < 1$) on doit choisir le signe "+" dans les équations (3.21) pour obtenir le taux de croissance avec le plus petit α_s. A droite ($\tau_l \cdot \tau_r > 1$), on choisit le signe "−".

Pour les courbes des cas impairs (4.10), on a un minimum qui est toujours situé au point $\tau_l = \tau_r$. A gauche du minimum, cas $\tau_l < \tau_r$, on doit choisir le signe "+" dans l'équation (3.40) pour chercher le taux de croissance avec le plus petit α_s. A droite, le cas $\tau_l > \tau_r$, on choisit le signe "−".

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

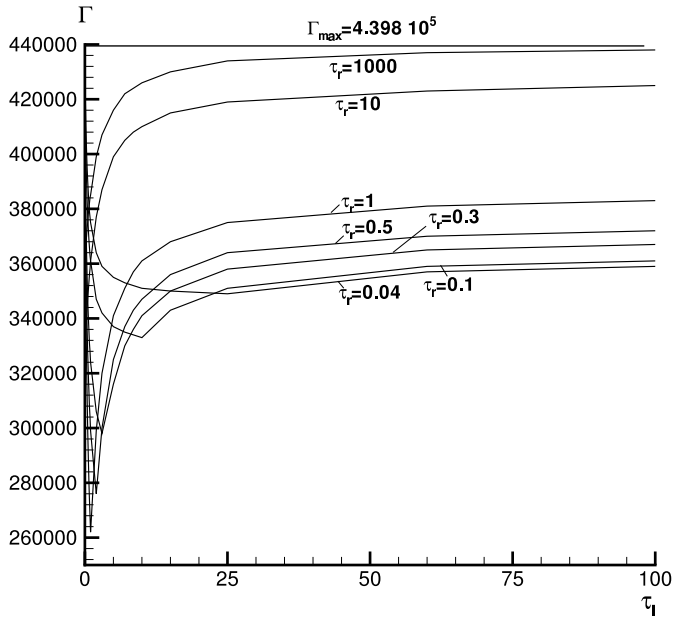


FIGURE 4.8 – Taux de croissance Γ pour $kL = 250\pi$

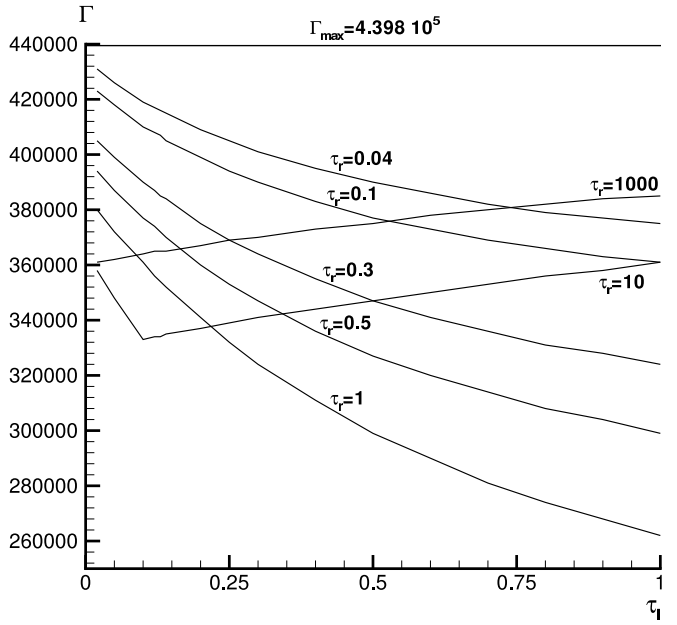


FIGURE 4.9 – Taux de croissance Γ pour $kL = 250\pi$ (dilatation des échelles au voisinage de $\tau_l = 0.$)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

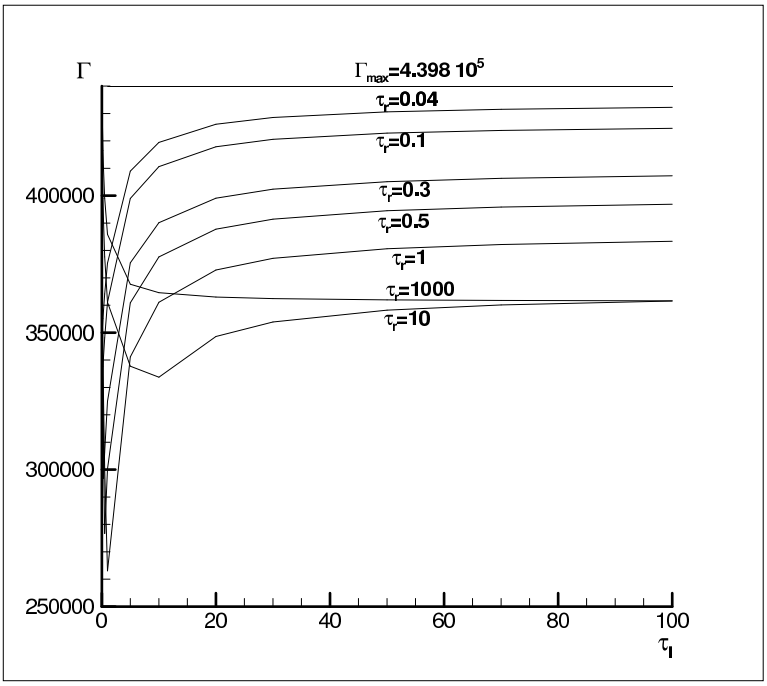


FIGURE 4.10 – Taux de croissance Γ pour $kL = 251\pi$

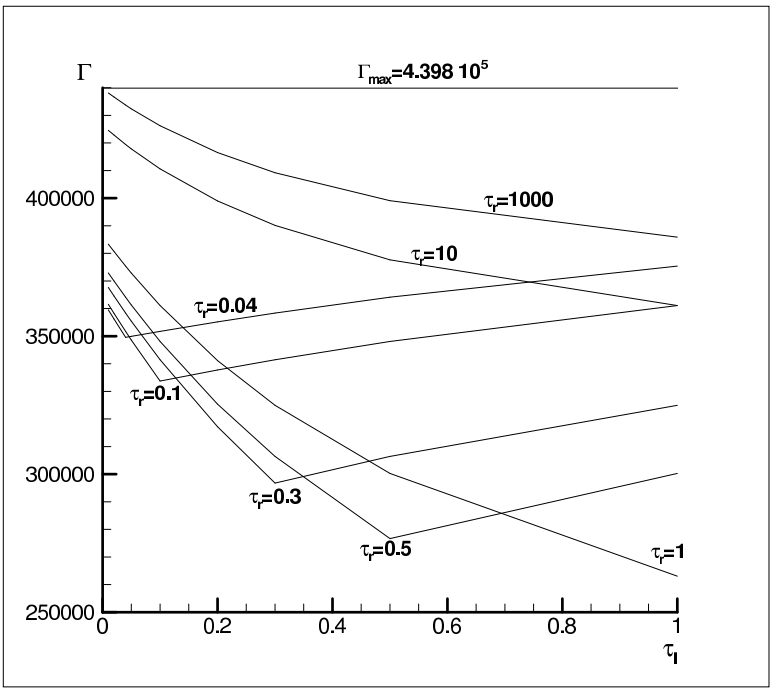


FIGURE 4.11 – Taux de croissance Γ pour $kL = 251\pi$ (dilatation des échelles au voisinage de $\tau_l = 0.$)

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

4.4 Simulation numérique en 2-D

Nous avons trouvé des solutions paire et impaire ainsi que des cas intermédiaires pour le problème unidimensionnel. La solution analytique apparaît comme très sensible au rapport de la longueur de la zone active et la longueur d'onde. Comme cela avait été discuté dans la section (3.2), un quart de longueur d'onde de différence va changer le problème du cas pair au cas impair. Pour un cas unidimensionnel, la longueur de la zone active est fixée pour être soit dans un cas pair, soit impair, soit intermédiaire. Mais pour un cas bidimensionnel, cette longueur peut être différente dans la largeur de l'échantillon. C'est pourquoi on va commencer à étudier le problème en 2-D.

Pour le problème en 2 dimensions, on part des équations d'élasto-dynamique sous forme conservative intégrée :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \vec{Q}dv = \oint_s (\vec{F}n_x + \vec{G}n_y)ds + \int_v \vec{H}dv \tag{4.38}$$

n_x, n_y sont des projections cartésiennes du vecteur normal $\vec{n}$ vers l'extérieur d'une surface fermée S de volume V. $\vec{Q}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ sont donnés par

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \rho\dot{U}_x \\ \rho\dot{U}_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \rho c_1^2\dot{U}_x \\ \rho c_2^2\dot{U}_y \\ \rho c_3^2\dot{U}_x \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \rho c_3^2\dot{U}_y \\ \rho c_2^2\dot{U}_x \\ \rho c_1^2\dot{U}_y \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{xx} \\ H_{yy} \\ H_{xy} \end{pmatrix},$$

où ρ est la masse volumique de matériau, $\dot{U}_x, \dot{U}_y$ sont les projections cartésiennes de la vitesse particulaire $\vec{\dot{U}}$, σ_{xx}, σ_{yy} sont les contraintes de compression, et σ_{xy} est la contrainte de cisaillement. Les constantes c_1, c_2, c_3 sont données par les coefficients de Lamé :

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}. \tag{4.39}$$

Dans un milieu solide élastique, c_1 et c_2 correspondent aux vitesses de propagation de l'onde longitudinale c_L et de l'onde transversale c_T.

Les deux premières équations (4.38) représentent les projections cartésiennes de l'équation du mouvement. Les trois dernières équations sont obtenues par la différentiation temporelle et l'intégrale sur un volume arbitraire V délimité par la surface S, des relations contrainte-déformation classiques. Par exemple la loi généralisée de Hooke pour un matériel élastique isotrope sous une petite déformation.

Avec les composants non nuls H_{xx}, H_{yy} et H_{xy} dans les trois dernières équations, le terme source H est destiné à décrire le couplage entre la contrainte et le champ magnétique externe dans un solide magnétostrictif.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Les équations (4.38) représentent un système de conservation hyperbolique qui permet d'utiliser des technologies numériques issues de l'aérodynamique classique et qui ont d'ailleurs été utilisées en 1D dans la présente thèse.

Les termes sources sont connus en fonction de temps par :

$$H_{ij} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(\lambda \epsilon_{kk}\delta_{ij}) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}(2\mu\epsilon_{ij})$$

avec ϵ_{ij} une composante du tenseur des déformations, ϵ_{kk} la trace de ce tenseur et δ_{ij} le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En utilisant la loi de Hooke, cette expression peut être écrite comme une fonction de tenseur des contraintes :

$$H_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}\right]\delta_{ij} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}\sigma_{ij}.$$

Utilisons les formules (4.39) on a

$$H_{ij} = \frac{c_L^2 - 2c_T^2}{3c_L^2 - 4c_T^2}\sigma_{kk}\left[\frac{1}{c_L^2 - 2c_T^2}\frac{\partial (c_L^2 - 2c_T^2)}{\partial t} - \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial c_T^2}{\partial t}\right]\delta_{ij} + \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial c_T^2}{\partial t}\sigma_{ij}.$$

Comme dans le cas 1D, pour les paramètres réalistes du couplage magnétostrictif, l'effet du champ magnétique peut être traité comme une petite perturbation de la vitesse du son. Le pompage en 2D est toujours supposé linéaire pour que nos études se focalisent sur les effets des conditions aux frontières et non sur des propriétés non linéaires complexes. Nous avons donc les vitesses du son modulées comme suit :

$$c_L^2 = c_{L0}^2\left[1 + M_L\cos(\Omega t + \varphi_L)\right],$$

$$c_T^2 = c_{T0}^2\left[1 + M_T\cos(\Omega t + \varphi_T)\right].$$

Ce qui nous conduit aux formes explicites pour les termes sources :

$$H_{xx}(t) = -M_T\Omega\sin(\Omega t + \varphi_T)\sigma_{xx} + \frac{c_L^2}{2(c_L^2 - c_T^2)}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(M_T - M_L)\Omega\sin(\Omega t + \varphi_L)$$

$$H_{yy}(t) = -M_T\Omega\sin(\Omega t + \varphi_T)\sigma_{yy} + \frac{c_L^2}{2(c_L^2 - c_T^2)}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(M_T - M_L)\Omega\sin(\Omega t + \varphi_L)$$

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

$$H_{xy}(t) = -M_T \Omega \sin(\Omega t + \varphi_T).$$

Ces équations ont déjà servi à simuler une focalisation par WPC [61]. Nous voulons les utiliser désormais pour traiter la question de la juxtaposition de deux zones actives, l'une paire et l'autre impaire. Un travail en ce sens consiste à calculer la configuration présentée par la figure (4.13).

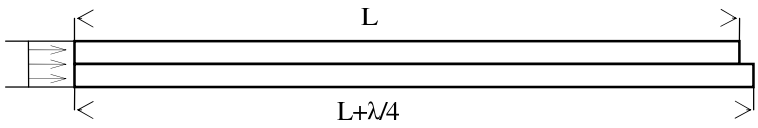


FIGURE 4.12 – Conjugateur magnéto-acoustique 2 dimensionnels.

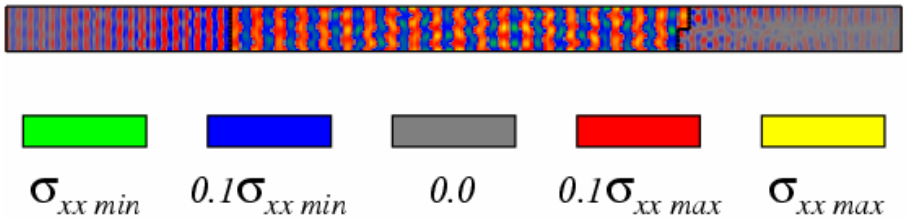
La condition initiale étant une perturbation à l'entrée gauche du conjugateur identique au second type de condition initiale pour les calculs numériques des cas intermédiaires dans le section (4.2.2). Les résultats sont présentés sur les figures (4.13). En comparant ces trois figures, on voit que l'amplitude de la contrainte est plus élevé pour le premier cas que dans les deux autres. Le troisième a une plus faible amplitude. Ceci peut signifier que pour un conjugateur réel où la longueur de la zone active n'est pas tout à fait une constante, on va perdre beaucoup d'efficacité. La solution technique est déjà indiquée dans la section (3.2) : il faut que les distances entre les limites du conjugateur et les limites de la zone active soient suffisamment grandes pour que la situation tende vers un cas homogène.

Pour vérifier cela, on a calculé le taux de croissance Γ pour les cas pairs et impairs en fonction des distances entre les limites du conjugateur et celles de la zone active à gauche ΔL_l et à droite ΔL_r, dans ce calcul, on a pris $\Delta L_l = \Delta L_r$ entre 0 et 5 cm, tous les autres paramètres sont pareils pour les deux cas. Les résultats sont montrés dans la figure (4.14). On peut remarquer que les taux de croissance pour le cas pair et le cas impair sont très différents quand $\Delta L_l = \Delta L_r = 0$ mais en augmentant ΔL_l et ΔL_r, les deux courbes s'approchent et quand $\Delta L_l = \Delta L_r = 4$ cm à peu près elles se croissent. C'est à dire que quand la distance entre la limite du conjugateur et la zone active est suffisamment grande, le cas pair et impair tendent vers un même cas-le cas homogène.

© 2008 Tous droits réservés.
http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

(a) Deux couches de zone active avec les mêmes valeurs de kL.



(b) Deux couches de zone active avec différentes valeurs de kL.

(c) Couche impaire au-dessus et couche paire au-dessous.

FIGURE 4.13 – Répartition spatiales de la contrainte en 2D.

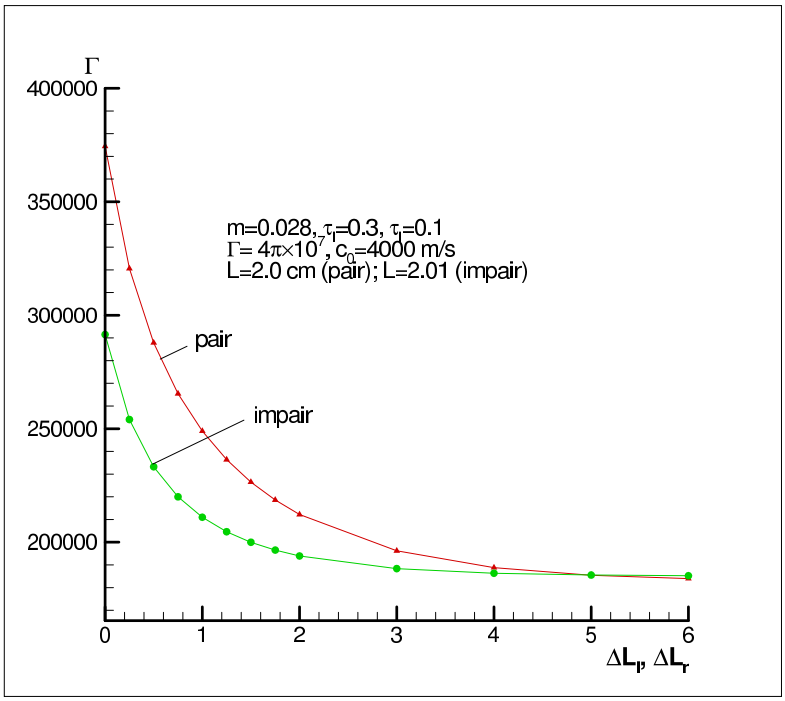


FIGURE 4.14 – Taux de croissance varie en fonction de ΔL_l et ΔL_r

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié systématiquement la théorie de la conjugaison de phase acoustique (WPC) principalement dans le cas unidimensionnel avec l'hypothèse de pompage linéaire. Nous avons d'abord trouvé des solutions analytiques pour un cas idéalisé du conjugateur totalement actif et en contact direct avec des milieux passifs. Nous avons trouvé une équation algébrique qui donne accès à toutes les inconnues du problème.

Pour vérifier nos théories, des simulations numériques avec une méthode de volume fini de type Godounov ont permis les comparaisons adéquates. Nous avons pu comparer les résultats numériques avec les solutions analytiques des évolutions temporelles et des répartitions spatiales des grandeurs caractéristiques des ondes. Les comparaisons sont très satisfaites. Ces résultats initient donc les études plus profondes de la WPC unidimensionnelle.

Dans la réalité, les solénoïdes bobinés autour du conjugateur définissant la zone active n'ont pas la même longueur que le conjugateur. La zone active est donc interne au conjugateur. Entre les limites de la zone active et celle du conjugateur, des distances ΔL_l et ΔL_r non nulles existent. Nous avons donc étudié cette configuration pour nous rapprocher du cas réel. Nous avons découvert que le problème peut être résolu en posant des rapports d'impédance fictifs τ_l' et τ_r' qui sont des fonctions de ΔL_l et ΔL_r. L'analyse de ces deux rapports d'impédance nous prouve que selon les longueurs ΔL_l et ΔL_r on peut faire fonctionner le conjugateur en mode complètement actif ou en mode homogène. En fait il est montré qu'en jouant sur ΔL_l et ΔL_r il est possible d'ajuster l'impédance vue par la zone active dans un intervalle compris entre celle du milieu passif externe et celle du milieu actif.

L'étude des conditions aux frontières a montré que le rapport entre la longueur de la zone active L et la longueur d'onde λ de l'onde incidente est un paramètre très influent. En particulier une variation de $\lambda/4$ de L change dramatiquement le seuil et le taux d'amplification de la solution résonnante. On a pu montrer que cela était lié à la parité du rapport L/λ et on a pu obtenir le détail même des phases φ_1 et φ_2 chaque fois que L/λ est un nombre entier. Dans ces cas notre connaissance des solutions ne se limite pas à leur amplitude mais concerne aussi la phase. On a pu aussi montrer que celles-ci s'ajustent suivant 4 suites arithmétiques. Pour un conjugateur donné, on a également obtenu analytiquement les valeurs de seuils et taux de croissance en fonction des rapports

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

d'impédance avec les milieux extérieurs.

L'étude analytique des cas intermédiaires où L/λ n'est pas entier n'a pas abouti mais les simulations numériques montrent que les solutions évoluent continûment entre les configurations paire (L/λ pair) et impaire (L/λ impair).

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous avons donné quelques problèmes ouverts. Par exemple les différentes équations modèles de la WPC 1D, la piste pour trouver des solutions génériques analytiques, l'optimisation d'un conjugateur semi-homogène et bien sûr une initiation du problème 2D constitué de deux couches de différentes longueurs de zone active.

En termes de perspectives, il reste à trouver la solution analytique pour les cas intermédiaires entre le cas pair et le cas impair. Une approche du pompage non homogène est également envisageable ($m = \mu(x)$) car cela correspond encore mieux à la réalité. Le problème 2D est maintenant prêt pour les simulations numériques et des analyses pertinentes s'appuyant sur nos connaissances des solutions 1D. En particulier il convient maintenant d'évaluer la pertinence, généralement admise, des modèles 1D pour la description du phénomène.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Table des figures

1.1 **Comparaison du miroir à conjugaison de phase et du miroir conventionnel.** Avec le miroir à conjugaison de phase l'image n'est pas déformée quand elle passe deux fois par un élément d'aberration. Les fronts d'onde de l'image conjuguée sont renversés (conjugués) en respectant leur direction de la propagation. Les déviations introduites par l'élément d'aberration (la bouteille) sont donc éliminées lors du trajet inverse. En revanche l'image réfléchie par un miroir normal est plus déformée quand elle passe à travers la bouteille pour la deuxième fois. . . . 2
1.2 Principe de la conjugaison de phase par le mélange à quatre ondes [13] . 4
1.3 Principe de la conjugaison de phase par la diffusion Brillouin stimulée [13] 5
1.4 **Miroir du retournement temporel acoustique.** Le processus est fait en deux étapes. Dans la première étape (gauche) une source émet des ondes acoustiques qui se propagent et sont déformées par l'effet hétérogène dans le matériau. Chaque transducteur de l'ensemble du miroir détecte l'arrivée du son à sa position et communique le signal à l'ordinateur. Dans la seconde étape (droite), chaque transducteur repasse son signal acoustique à l'envers et en synchronisation avec les autres transducteurs. Les ondes originales sont recrées et se propagent à l'envers, en retraçant en l'envers leur chemin incident dans le matériau. Malgré leur déformations, elles se refocalisent au point original de la source. [45] 9
1.5 **Conjugateur à magnétoacoustique.** 12
1.6 (a) objet observé, (b)-(d) images par microscope acoustique : (b) image par mode de transmission conventionnel sans couche d'aberration, (c) identique à (b) avec couche d'aberration, (d) identique à (c), avec compensation par conjugaison de phase [53]. 13
1.7 Imagerie non linéaire par CPMA : Figures (a) et (b) : Images de microscopie acoustique conventionnelle par transmission réalisée avec la première et deuxième harmonique respectivement au travers d'un milieu homogène. Figures (c) et (e) : Même configuration mais en présence d'un milieu de distorsion : l'objet n'est plus visible. Figures (d) et (f) : Même configuration que (c) et (e) mais avec CPMA : L'image est restaurée aussi bien pour la première harmonique, que pour la seconde [54]. 13

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

1.8 Mesure de vitesses dans l'eau par WPC : dispositif experimental (T1 et T2 sont la source ultrasonore et le détecteur, C est le conjugateur.) [56]. . 14
1.9 **Principe de conjugateur magnétoacoustique** : La zone active est un solide élastique où la vitesse du son peut être modulée en fonction du temps par le champ magnétique. La conjugaison de phase a lieu quand la fréquence du pompage est double de celle de l'onde incidente. 20

2.1 **Principe de WPC magnéto-acoustique** : La zone active est un solide élastique où la vitesse du son peut être modulée en fonction du temps par le champ magnétique. La conjugaison de phase a lieu quand la fréquence du pompage est double de celle de l'onde incidente. 23
2.2 Principe du conjugateur hétérogène. La zone active est un solide élastique où l'on peut moduler la vitesse du son en fonction du temps par le champ magnétique. La conjugaison de phase commence si la fréquence du pompage est le double de celle de l'onde incidente. 30
2.3 La fonction $G(\alpha)$. On remarque que les solutions de $G(\alpha) = 0$ sont multiples. Comme le taux d'amplification exponentiel est une fonction décroissante de α, seule la solution la plus faible est pertinente. 35
2.4 L'évolution temporelle de la contrainte mesurée à l'interface de la zone active et milieu gauche dans le cas général. La durée de pompage est $19\mu s$. $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, $\rho_0 = 9000 kg/m^3$. —— théorie $(Ce^{\Gamma t}\sin(-k\alpha L/8 + \xi_2))$, —— simulation $(w_2(-L/2, t)$ par schéma type Godounov [62] 36
2.5 Répartitions spatiales des onde directe w_1 et onde conjuguée w_2, en $t = 0$, $1.5\mu s$, $3\mu s$, $6\mu s$, $9\mu s$, $12\mu s$, $15\mu s$, $18\mu s$, pour le cas hétérogène et la même condition comme dans la figure 2.4. L'onde directe ne rayonne pas vers la gauche de la zone active et l'onde conjuguée ne rayonne pas vers la droite de la zone active. 37
2.6 Répartitions spatiales des onde directe w_1 et onde conjuguée w_2 (suite) . 38
2.7 Répartitions spatiales des onde directe w_1 et onde conjuguée w_2 (suite) . 39
2.8 **Principe de la magnéto-acoustique dans un milieu homogène.** . 40
2.9 L'évolution temporelle de la vitesse du déplacement mesurée à la limite gauche de la zone active pour le cas homogène. $m = 0.028$, $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, $\rho_0 = 9000 kg/m^3$. La zone active se localise de $0.5cm$ à $3.0cm$. —— théorie, —— simulation. 43
2.10 Répartition spatiale de l'onde directe w_1, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. Cette onde de rayonne pas vers le gauche de la zone active. —— théorie, —— simulation. 43
2.11 Répartition spatiale de l'onde conjuguée w_2, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. Cette onde de rayonne pas vers le droit de la zone active. —— théorie, —— simulation. 44
2.12 Répartition spatiale de la vitesse particulaire v, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. —— théorie, —— simulation. 44

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

2.13 Répartition spatiale de la contrainte σ_{xx}, en $t = 13.5\mu s$, pour le cas homogène et la même condition que dans la figure 2.9. —— théorie, —— simulation. 45
2.14 Répartition spatiale de l'onde directe w_1 pour le cas homogène avec la même condition que dans Fig. 2.10 mais avec $m = 0.016$. La zone active est entre $0.5cm$ et $3cm$. La prédiction théorique est confirmée : l'enveloppe de l'amplitude mesure juste un quart d'une période sinusoïde. On peut tracer la même figure pour l'onde conjuguée w_2 mais en direction opposée. 45
2.15 Répartition spatiale de l'onde directe w_1 pour le cas homogène avec la même condition que dans Fig. 2.10 mais avec $m = 0.5$. Après $19\mu s$, les valeurs sont extrêmement grandes en raison de la croissance exponentielle. La simulation présentée n'est pas une situation réelle mais seulement une extrapolation de la théorie pour le pompage linéaire avec une haute énergie. La prédiction théorique est confirmée : il y a un noeud d'amplitude de chaque côté de la zone active et le rendement énergétique d'onde conjuguée est très petit par rapport à l'énergie totale durant le pompage. On peut tracer la même figure pour l'onde conjuguée w_2. 46
2.16 **Principe de la magnéto-acoustique dans un milieu semi-homogène.** 47
2.17 Evolution temporelle pour la vitesse particulaire mesurée à la limite gauche de la zone active pour le cas semi-homogène avec $\tau_l = 0.042$. $m = 0.028$, $c_0 = 4 \times 10^3 m/s$, $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz, $\rho_0 = 9000 kg/m^3$. La zone active est située de $0.5cm$ à $3.0cm$. —— théorie, —— simulation. 49
2.18 Répartition spatiale de l'onde directe w_1, à la fin du pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). Cette onde ne rayonne pas vers la gauche de la zone active. —— théorie, —— simulation. 50
2.19 Répartition spatiale de l'onde directe w_2, à la fin de pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). Cette onde ne rayonne pas vers la droite de la zone active. —— théorie, —— simulation. 50
2.20 Répartition spatiale de la vitesse particulaire, à la fin de pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). - —— théorie, —— simulation. 51
2.21 Répartition spatiale de la contrainte, à la fin de pompage ($19\mu s$), pour le cas semi-homogène avec la même condition que la figure (2.17). —— théorie, —— simulation. 51
2.22 Géométrie du problème symétrie sphérique. 52
2.23 Répartition spatiale de l'onde directe W_1 en symétrie sphérique, en $t = 18\mu s$ avant la fin du pompage $t = 19\mu s$, pour le cas hétérogène où $\tau_I = 0.3$ et $\tau_E = 0.1$, la fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. 59
2.24 Répartition spatiale de l'onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique, en $t = 18\mu s$ avant la fin du pompage $t = 19\mu s$, pour le cas hétérogène où $\tau_I = 0.3$ et $\tau_E = 0.1$, la fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. . . . 59

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

2.25 épartitions spatiales des onde directe W_1 et onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique, en $t = 0, 1.5\mu s, 3\mu s, 6\mu s, 9\mu s, 12\mu s, 15\mu s, 18\mu s$, pour le cas hétérogène où $\tau_I = 0.3$ et $\tau_E = 0.1$. La fréquence du pompage est $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. L'onde directe ne rayonne pas vers la gauche de la zone active et l'onde conjuguée ne rayonne pas vers la droite de la zone active. 60
2.26 Répartitions spatiales des onde directe W_1 et onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique (suite). 61
2.27 Répartitions spatiales des onde directe W_1 et onde conjuguée W_2 en symétrie sphérique (suite). 62

3.1 Problème physique unidimensionnel réaliste 63
3.2 Evolution temporelle de σ_{xx} sur le point initial gauche du conjugateur ($x = 0.75cm$). La zone active est située entre $x = 1cm$ et $x = 3cm$, le conjugateur étend de $x = 0.75cm$ à $x = 3.25cm$. — amplitude théorique, — calcul numérique. 68
3.3 Répartition spatiale de l'onde directe w_1 en $t = 18\mu s$ pour la zone active située entre $x = 1cm$ et $x = 3cm$, le conjugateur étend de $x = 0.75cm$ à $x = 3.25cm$. — amplitude théorique, — calcul numérique. 69
3.4 Répartition spatiale de l'onde conjuguée w_2 en $t = 18\mu s$ pour la zone active située entre $x = 1cm$ et $x = 3cm$, le conjugateur étend de $x = 0.75cm$ à $x = 3.25cm$. — amplitude théorique, — calcul numérique . . . 70
3.5 Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 200\pi$, $\tau_l = 0.3$, $\tau_r = 0.1$. 77
3.6 Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 200\pi$, $\tau_l = 3$, $\tau_r = 2$. 78
3.7 Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 200\pi$, $\tau_l = 0.5$, $\tau_r = 2$. 79
3.8 Plus petite racine de α_s pour le cas impair avec $m = 0.08$, $kL = 201\pi$, $\tau_l = 0.3$, $\tau_r = 0.1$. 84
3.9 Plus petite racine de α_s pour le cas impair avec $m = 0.08$, $kL = 201\pi$, $\tau_l = 2$, $\tau_r = 3$. 84
3.10 Plus petite racine de α_s pour le cas pair avec $m = 0.08$, $kL = 201\pi$, $\tau_l = \tau_r = 0.3$. 85
3.11 Evolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et du milieu gauche pour le cas impair. — Amplitude théorique, — Simulation 88
3.12 Répartition spatiale pour l'onde directe w_1 pour $t = 18\mu s$ du cas impair. — Amplitude théorique, — Simulation 88
3.13 Répartition spatiale pour l'onde conjuguée w_2 pour $t = 18\mu s$ du cas impair. — Amplitude théorique, — Simulation 89
3.14 Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.51cm$), en $t = 0, 1.5\mu s, 3\mu s, 6\mu s, 9\mu s, 12\mu s, 15\mu s, 18\mu s$. La zone active est en contact direct avec les milieux passifs : $\tau_l = 0.3$ et $\tau_r = 0.1$. Fréquence du pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. 90

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

3.15 Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.51cm$) (suite) 91
3.16 Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.51cm$) (suite) 92
3.17 Répartition spatiale pour la contrainte σ_{xx} pour $t = 18\mu s$ du cas impair. . 93
3.18 Répartition spatiale pour la vitesse particulaire v pour $t = 18\mu s$ du cas impair. 93
3.19 Evolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et milieu gauche pour le cas impair réaliste et la durée du pompage $T_p = 19\mu s$. — Amplitude théorique, — Simulation 94
3.20 Répartition spatiale pour l'onde directe w_1 pour $t = 18\mu s$ du cas impair "réaliste". — Amplitude théorique, — Simulation 94
3.21 Répartition spatiale pour l'onde conjuguée w_2 pour $t = 18\mu s$ du cas impair "réaliste". — Amplitude théorique, — Simulation 95
3.22 Evolution temporelle de la pression mesurée à la limite du conjugateur et du milieu gauche pour le cas impair réaliste avec une durée du pompage $T_p = 40\mu s$. — Amplitude théorique, — Simulation 96
3.23 Répartition spatiale pour l'onde directe w_1 pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste". — Amplitude théorique, — Simulation 96
3.24 Répartition spatiale pour l'onde conjuguée w_2 pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste". — Amplitude théorique, — Simulation 97
3.25 Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.01cm$), en $t = 0, 1.5\mu s, 3\mu s, 6\mu s, 9\mu s, 12\mu s, 15\mu s, 18\mu s$. Entre la zone active et les milieux passifs : $\tau_l = 0.3$ et $\tau_r = 0.1$, $\Delta L_l = \Delta L_r = 0.25cm$. Fréquence du pompage $\Omega = 4\pi \times 10^7$ Hz. 98
3.26 Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.01cm$) (suite) 99
3.27 Répartitions spatiales de l'onde directe w_1 et de l'onde conjuguée w_2 pour le cas impair ($L = 2.01cm$) (suite) 100
3.28 Répartition spatiale pour la contrainte σ_{xx} pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste". 101
3.29 Répartition spatiale pour la vitesse particulaire v pour $t = 39\mu s$ du cas impair "réaliste". 101
3.30 Onde conjuguée en fonction du temps à la limite droite de la zone active pour les mêmes paramètres sauf une variation de $\lambda/4$ de la longueur d'onde dans la zone active. (Simulation de gauche : $L = 2cm$ cas supercritique pair, simulation de droite : $L = 2.01cm$ cas subcritique impair) . 102
3.31 Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas pair $kL = 80\pi, 82\pi, 84\pi, 86\pi$, théorie-simulation. ∘ ∘ ∘ solution théorique, — calcul numérique. 109
3.32 Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas pair (suite) 110

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

3.33 Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas impair $kL = 81\pi, 83\pi, 85\pi, 87\pi$, théorie-simulation. ∘∘∘ solution théorique, — calcul numérique. 115
3.34 Comparaison des répartitions spatiales de la vitesse particulaire pour le cas impair (suite) 116

4.1 Solutions des Γ en fonction du produit kL/π, les solutions théoriques pour le cas pair et le cas impair sont marquées par deux △ ; les solutions numériques avec la première condition initiale sont marquées par les ⋄ ; et les solutions numériques avec la seconde condition initiale sont marquées par les □. 127
4.2 Comparaison des répartitions spatiales des ondes directes w_1 intermédiaires en $t = 18\mu s$ et $L = 2.0cm, 2.001cm, 2.003cm, 2.005cm, 2.007cm, 2.009cm, 2.01cm$, pour $m = 0.028$, la fréquence de pompage $\Omega = 4 \times 10^7\pi$, la vitesse du son $c_0 = 4000m/s$. 128
4.3 Comparaison des répartitions spatiales des ondes directes w_1 intermédiaires (suite) 129
4.4 Le rapport de flux d'énergie en fonction de τ_l pour un nombre d'onde $k = 100\pi$ et $\tau_r = 1$. 130
4.5 Le rapport de flux d'énergie en fonction de τ_l pour $m = 0.03$ et $\tau_r = 1$. . 131
4.6 Seuil m_0 pour $kL = 250\pi$ 132
4.7 Seuil m_0 pour $kL = 251\pi$ 132
4.8 Taux de croissance Γ pour $kL = 250\pi$ 134
4.9 Taux de croissance Γ pour $kL = 250\pi$ (dilatation des échelles au voisinage de $\tau_l = 0$.) 134
4.10 Taux de croissance Γ pour $kL = 251\pi$ 135
4.11 Taux de croissance Γ pour $kL = 251\pi$ (dilatation des échelles au voisinage de $\tau_l = 0$.) 135
4.12 **Conjugateur magnéto-acoustique 2 dimensionnels.** 138
4.13 Répartition spatiales de la contrainte en 2D. 139
4.14 Taux de croissance varie en fonction de ΔL_l et ΔL_r 139

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Liste des tableaux

2.1 Cas hétérogène : α_s théorique auprès τ_l et τ_r pour des matériaux génériques 34
2.2 Cas homogène : comparaison pour les valeurs de α_s numérique et théorique 42
2.3 α_s pour le cas semi-homogène 48

3.1 Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas pair aux conditions (3.48) et $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -1$ (Type 1) 108
3.2 Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas pairs aux conditions (3.49) et $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$ (Type 2) 108
3.3 Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas impairs aux conditions (3.50) et $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = -1$ 112
3.4 Solutions de φ_1, φ_2 et kL pour les cas impair aux conditions (3.51) et $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$ 114

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Bibliographie

[1] N.M. Kroll. Excitation of Hypersonic Vibrations by Means of Photoelastic Coupling of High-Intensity Light Waves to Elastic Waves. *Journal of Applied Physics*, 36 :34–43, 1965.

[2] D.L. Bobroff. Coupled-Modes Analysis of the Phonon-Photon Parametric Backward-Wave Oscillator. *Journal of Applied Physics*, 36 :1760–1769, 1965.

[3] D.L. Bobroff and H.A. Haus. Impulse Response of Active Coupled Wave Systems. *Journal of Applied Physics*, 38 :390–403, 1967.

[4] A. Merlen and Q. Zhang. Resonant solutions in wave phase conjugation induced by a limited magneto-acoustic conjugator. *J. Acous. Soc. Am.*, 119(6) :3637–3649, 2006.

[5] A. Merlen and Q. Zhang. Theory and simulation of wave phase conjugation. *Ultrasonics*, 44 :e1475–e1478, 2006.

[6] A. Merlen and Q. Zhang. Supercritical Magneto-Acoustic Wave Phase Conjugation in Spherical Symmetry. *Acta Acustica united with Acustica*, 94(1) :72–78, 2008.

[7] A. Merlen and Q. Zhang. Paraxial theory of supercritical wave phase conjugation in a realistic magnetoacoustic conjugator. *Applied Physics Letters*, 89 :194102, 2006.

[8] R.B. Thompson and C.F. Quate. Nonlinear interaction of microwave electric fields and sound in $linbo_3$. *J. Appl. Phys.*, 42(3) :907–919, 1971.

[9] F.V. Bunkin, DV Vlasov, and Yu.A. Kravtsov. Problem of reversal of an acoustic wavefront and amplification of reversed wave of conjugate wave. *Sov. J. Quantum Electron.*, 11 :687–688, 1981.

[10] A.P. Brysev, F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, L.M. Krutyansky, V.L. Preobrazhensky, and A.D. Stakhovsky. Regenerative amplification of acoustic waves with phase conjugation in a ferrite. *Sov. Phys. Acoust*, 34 :567–569, 1988.

[11] S. Ben Khelil, A. Merlen, V. Preobrazhensky, and P. Pernod. Numerical simulation of acoustic wave phase conjugation in active media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(1) :75–83, 2001.

[12] A. Merlen, V. L. Preobrazhenski, and P. Pernod. Supercritical parametric phase

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

conjugation of ultrasound. numerical simulation of non linear and non stationary modes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(6) :2656–2665, 2002.

[13] V.V. Shkunov and B.Ya. Zel'dovich. Optical phase conjugation. *Scientific American*, 253(6) :54, 1985.

[14] R.A. Fisher et al. *Optical phase conjugation*. Academic Press New York, NY, 1983.

[15] Stimulated Brillouin Parametric Devices, 1969. US Patent 3,469,107.

[16] B. Ya. Zel'dovich, V.I. Popovichev, V.V. Ragul'ski, and F.S. Fazulov. Connection Between the Wave Fronts of the Reflected and Exciting Light in Stimulated Mandel'shtem-Brillouin Scattering. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 15 :109, 1972.

[17] D. Gabor. Associative holographic memories. *IBM J. Res. Dev*, 13(2) :156, 1969.

[18] F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, E.A. Zabolotskaya, and Yu.A. Kravtsov. Wave-front inversion of sound beams and other nonlinear effects in a medium containing bubbles. *Sov. Phys. Acoust.*, 28 :249, 1982.

[19] A.P. Brysev, F.V. Bunkin, A.D. Stakhovski, L.M. Krutyanski, V.L. Preobrazhenski, and Y.V. Pyl'nov. Self-focusing of ultrasound by random scattering objects in a liquid via parametric phase conjugation. *JETP Letters*, 61 :464, 1995.

[20] A.P. Brysev, F.V. Bunkin, L.M. Krutyanskii, A.D. Stakhovskii, V.L. Preobrazhenskii, and Y.V. Pyl'nov. Parametric phase conjugation of ultrasonic waves in water in a wide range of angles. *Acoustical Physics*, 43 :207, 1997.

[21] WA Kuperman, W.S. Hodgkiss, H.C. Song, T. Akal, C. Ferla, and D.R. Jackson. Phase conjugation in the ocean : Experimental demonstration of an acoustic time-reversal mirror. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103 :25, 1998.

[22] H.C. Song, WA Kuperman, and WS Hodgkiss. A time-reversal mirror with variable range focusing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103 :3234, 1998.

[23] HC Song, WA Kuperman, WS Hodgkiss, T. Akal, and C. Ferla. Iterative time reversal in the ocean. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105 :3176, 1999.

[24] A.P. Brysev, L.M. Krutyianskii, and V.L. Preobrazhenskii. Wave phase conjugation of ultrasonic beams. *Phys. Usp.*, 41(8) :793–805, 1998.

[25] M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields - Part I : Basic principles. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 39(5) :555–566, 1992.

[26] P. Roux and M. Fink. Time reversal in a waveguide : Study of the temporal and spatial focusing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107 :2418, 2000.

[27] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Time reversal versus phase conjugation in a multiple scattering environment. *Ultrasonics*, 40(1-8) :275–280, 2002.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

[28] DM Pepper. Applications of optical phase conjugation. *Scientific American*, 254 :74–83, 1986.

[29] MD Levenson, KM Johnson, VC Hanchett, and K. Chiang. Projection photolithography by wave-front conjugation. *Journal of the Optical Society of America*, 71(6) :737, 1981.

[30] MD Levenson, NS Viswanathan, and RA Simpson. Improving resolution in photolithography with a phase-shifting mask. *Electron Devices, IEEE Transactions on*, 29(12) :1828–1836, 1982.

[31] G.J. DUNNING and RC LIND. Demonstration of image transmission through fibers by optical phase conjugation. *Optics Letters*, 7(11) :558, 1982.

[32] RC Lind and GJ Dunning. Real time compensation of atmospheric turbulence by nonlinear phase conjugation demonstrated. *Laser Focus*, 19(9) :14–15, 1983.

[33] JY Courtois. « Optique non linéaire». *Les lasers et leurs applications scientifiques et médicales chez EDP Sciences*, 2002, 1996.

[34] N.P. Andreeva, F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, and K Karshiev. Demonstration of phase conjugation of sound on the surface of a liquid. *Pis'ma Zh. Tekhn. Fiz*, 8 :104, 1982.

[35] BYa Zel'dovich, NF Philipetsky, AN Sudarkin, and VV Shkunov. Phase conjugation by a surface. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 252 :92, 1980.

[36] F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, and Yu.A. Kravtsov. Phase conjugation and self-focusing of sound by a nonlinear interaction with a liquid surface. *Sov. Tech. Phys. Lett*, 7 :138–140, 1981.

[37] L. M. Kustov, V. E. Nazarov, and A. M. Sutin. Nonlinear sound scattering by a bubble layer. *Sov. Phys. Acoust.*, 32(6) :500–503, 1986.

[38] M. Ohno, K. Yamamoto, A. Kokubo, K. Sakai, and K. Takagi. Acoustic phase conjugation by nonlinear piezoelectricity. I. Principle and basic experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106(3) :1330–1338, 1999.

[39] D. V. Vlasov, E. A. Zabolotskaya, and Yu. A. Kravtsov. Acoustic phase conjugation in water containing bubbles. *Sov. Phys. Acoust.*, 29 :69–70, 1983.

[40] E. A. Zabolotskaya. Phase conjugation of sound beams in connection with four-phonon interaction in a liquid containing gas bubbles. *Sov. Phys. Acoust.*, 30 :462–463, 1984.

[41] F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, E.A. Zabolotskaya, and Y.A. Kravtsov. Phase conjugation of sound beams in four-phonon interaction with temperature waves. *Sov. Phys. Acoust*, 28 :440–441, 1983.

[42] K. Yamamoto, M. Ohno, A. Kokubo, K. Sakai, and K. Takagi. Acoustic phase conjugation by nonlinear piezoelectricity. II. Visualization and application to ima-

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

ging systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106(3) :1339–1345, 1999.

[43] A.P. Brysev, F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, and Y.A. Kazarov. Model realization of a nbli parametric phase-conjugating sound amplifier. *Pis'ma Zh. Tokhn.*, 8 :546, 1982.

[44] A.P. Brysev, F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, L.M. Krutianskii, V.L. Preobrazhenskii, and A.D. Stakhovskii. Parametric phase conjugation of an ultrasonic wave in a ferrite. *Sov. Phys. Acoust*, 34 :642–643, 1988.

[45] M. FINK. Time-Reversed Acoustic. *Scientific American*, 281(5) :91–97, 1999.

[46] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J.L Thomas, and F. Wu. Time-reversed acoustics. *Rep. Prog. Phys.*, 63 :1933–1995, 2000.

[47] RB Thompson and CF Quate. Convolution and Correlation in Real Time with Nonlinear Acoustics. *Applied Physics Letters*, 16 :494–496, 1970.

[48] M. Ohno and K. Takagi. Enhancement of the acoustic phase conjugate reflectivity in nonlinear piezoelectric ceramics by applying static electric or static stress fields. *Appl. Phys. Lett.*, 69 :3483–3485, 1996.

[49] A.P. Brysev, F.V. Bunkin, D.V. Vlasov, and Y.A. Kazarov. Prototype lithium niobate parametric phase-conjugation acoustic amplifier. *Sov. Phys. Tech. Lett.*, 8 :237, 1982.

[50] VI OZHOGIN and VL PREOBRAZHENSKII. Nonlinear dynamics of coupled systems near magnetic phase transitions of the order-order type. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 100(1-3) :544–571, 1991.

[51] V.A. Krasil'nikov, T.A. Mamatova, and V.G. Prokoshev. Parametric amplification in reversal of the wavefront of a magnetoelastic wave in hematite. *Sov. Phys. Solid State*, 28(2) :346–347, February 1986.

[52] A.P. Brysev, L.M. Krutyansky, P. Pernod, and V.L. Preobrazhensky. Nonlinear ultrasonic phase-conjugate beams and their application in ultrasonic imaging. *Acoustical Physics*, 50(6) :623–640, 2004.

[53] A. Brysev, L. Krutyansky, P. Pernod, and V. Preobrazhensky. Acoustic microscope based on magneto-elastic wave phase conjugator. *Appl. Phys. Lett.*, 76(21) :3133–3135, 2000.

[54] L. Krutyansky, P. Pernod, A. Brysev, F.V. Bunkin, and V. Preobrazhensky. Supercritical parametric wave phase conjugation as an instrument for narrowband analysis in ultrasonic harmonic imaging. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 49(4) :409–414, 2002.

[55] Yu. Pyl'Nov, V. Preobrazhensky, and P. Pernod. Detection of moving objects and flows in liquids by ultrasonic phase. *Acoust. Phys.*, 51(1) :105–109, 2005.

© 2008 Tous droits réservés. http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

[56] Yu. Pyl'nov, V. Preobrazhensky, P. Pernod, and P. Smagin. Flow velocity measurements by means of nonlinear interaction of phase conjugate ultrasonic waves. *IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 2100–2103, 2005.

[57] W.H. Louisell. *Coupled mode and parametric electronics*. Wiley New York, 1960.

[58] P. Pernod and V. Preobrazhensky. Parametric phase conjugation of a wide-band acoustic pulse in supercritical mode. *Appl. Phys. Lett.*, 76(3) :387–389, 2000.

[59] O. Bou Matar, V. Preobrazhensky, and P. Pernod. Two-dimensional axisymmetric numerical simulation of supercritical phase conjugation of ultrasound in active solid media. *Acoustical Society of America Journal*, 118(5) :2880–2890, 2005.

[60] V. Preobrazhensky. Overthreshold nonlinearity of parametric sound wave phase conjugation in solids. *Jpn. J. Appl. Phys., Part*, 1(32) :2247–2251, 1993.

[61] P. Voinovich and A. Merlen. Two-dimensional numerical simulation of acoustic wave phase conjugation in magnetostrictive elastic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(6) :3491–3498, 2005.

[62] P. Voinovich, A. Merlen, E. Timofeev, and K. Takayama. A godunov-type finite-volume scheme for unified solid-liquid elastodynamics on arbitrary two-dimensional grids. *Shock Waves*, 13 :221–230, 2003.

[63] A.E. Siegman. Lasers. *Lasers, by Anthony E. Siegman. Published by University Science Books, ISBN 0-935702-11-3, 1283pp, 1986.*, 1986.

[64] M.W. Bowers and R.W. Boyd. Phase locking via Brillouin-enhanced four-wave-mixing phaseconjugation. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 34(4) :634–644, 1998.

[65] M. Tsang and D. Psaltis. Spectral phase conjugation with cross-phase modulation compensation. *Optics Express*, 12(10) :2207–2219, 2004.

[66] F.F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1990.

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl

Thèse de Qi Zhang, Lille 1, 2008

Liste des publications :

Articles

1. A. Merlen and Q. Zhang. Resonant solutions in wave phase conjugation induced by a limited magneto-acoustic conjugator. *J. Acous. Soc. Am.*, 119(6) :3637-3649, 2006.
2. A. Merlen and Q. Zhang. Theory and simulation of wave phase conjugation. *Ultrasonics*, 44 :e1475-e1478, 2006.
3. A. Merlen and Q. Zhang. Paraxial theory of supercritical wave phase conjugation in a realistic magnetoacoustic conjugator. *Applied Physics Letters*, 89 :194102, 2006.
4. A. Merlen and Q. Zhang. Supercritical Magneto-Acoustic Wave Phase Conjugation in Spherical Symmetry. *Acta Acustica united with Acustica*, 94(1) :72-78, 2008.

Congrès

1. A.Merlen, Q.Zhang Théorie de la conjugaison de phase acoustique en milieu actif, *17e congrès français de mécanique*, Troyes, France, Oral, 2005
2. A.Merlen, Q.Zhang Theory of acoustic wave phase conjugation in active media, *7th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (WAVES'05), Providence, RI, USA*, Oral, 2005
3. A.Merlen, Q.Zhang Theory and simulation of wave phase conjugation, *World Congress on Ultrasonics-Ultrasonics International'05,Beijing*, China, Oral, 2005
4. A.Merlen, Q.Zhang Theory of one-dimensional acoustic wave phase conjugation, *2005 IEEE International Ultrasonics Symposium*, Rotterdam, Netherlands, Poster, 2005.
5. A.Merlen, Q.Zhang Théorie de la conjugaison de phase supercritique paraxiale dans un conjugateur réaliste, *8ème Congrès Français d'Acoustique*,Tours, France, Oral, 2006
6. A.Merlen, Q.Zhang Theory of realistic phase conjugator : applications to back focussing, *The International Congress on Uktrasonics*,Vienna, Austria, Oral, 2007
7. P.Voinovich, A.Merlen, Q.Zhang Fine variations in wavelength strongly influencing amplification by wave phase conjugation : a numerical study, *Advanced Problems in Mechanics*, St.Petersburg, Russian, Oral, 2007.
8. Q.Zhang, A.Merlen, Dualité des solutions résonnantes supercritiques en conjugaison de phase acoustique *18e congrès français de mécanique*, Grenoble, France, Oral, 2007

© 2008 Tous droits réservés.

http://www.univ-lille1.fr/bustl