



# THESE

*pour obtenir le grade de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE 1

*Discipline : Mécanique*

présentée par

**Hasna BEN SAID**

---

**Prédiction numérique d'écoulements turbulents en présence de  
paroi à l'aide d'un modèle à relaxation elliptique**

---

*Soutenue le 18 décembre 2009  
devant le jury composé de:*

Abdellatif OUAHSINE	Professeur, Université de Compiègne	Rapporteur
Abdelghani SAOUAB	Professeur, Université du Havre	Rapporteur
Gilmar MOMPEAN	Professeur, Université de Lille 1	Directeur
Hassan NAJI	HDR, Université de Lille 1	Co-directeur
Murilo F. TOME	Professeur, Université de Sao Paulo	Examineur
M'hamed SOULI	Professeur, Université de Lille 1	Examineur

# THESE

*pour obtenir le grade de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE 1

*Discipline : Mécanique*

présentée par

**Hasna BEN SAID**

---

Prédiction numérique d'écoulements turbulents en présence de  
paroi à l'aide d'un modèle à relaxation elliptique

---

*Soutenue le 18 décembre 2009  
devant le jury composé de:*

Abdellatif OUAHSINE	Professeur, Université de Compiègne	Rapporteur
Abdelghani SAOUAB	Professeur, Université du Havre	Rapporteur
Gilmar MOMPEAN	Professeur, Université de Lille 1	Directeur
Hassan NAJI	HDR, Université de Lille 1	Co-directeur
Murilo F. TOME	Professeur, Université de Sao Paulo	Examineur
M'hamed SOULI	Professeur, Université de Lille 1	Examineur

## **Remerciements**

*Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein de l'Université Lille 1/ Ecole Polytechnique Universitaire de Lille et du Laboratoire de Mécanique de Lille (LML UMR 8107 CNRS). Je tiens donc tout d'abord à remercier l'ensemble du personnel enseignant et administratif pour leur accueil et leur convivialité.*

*Je tiens à manifester ma sincère reconnaissance envers mon directeur de thèse Monsieur **Gilmar MOMPEAN** pour m'avoir offert la possibilité de réaliser ce travail. Sa rigueur scientifique, ses conseils avisés et ses précieuses remarques m'ont aidé et motivé dans la réalisation de cette thèse. Il a su m'orienter et m'apporter l'optimisme et la confiance nécessaire à la réalisation d'un tel projet. Pour tout cela, merci.*

*Je remercie également mon co-directeur Monsieur **Hassan NAJI** pour ses orientations scientifiques et sa disponibilité durant toutes les années de réalisation de cette thèse.*

*Je souhaite remercier sincèrement Monsieur **Abdellatif OUAHSINE**, Professeur à l'Université de Compiègne et Monsieur **Abdelghani SAOUAB**, Professeur à l'Université du Havre, pour avoir consacré une partie de leurs temps comme rapporteurs de ce manuscrit.*

*J'adresse mes remerciements également à Monsieur **Murilo F. Tome**, Professeur à l'Université de Sao Paulo (Brésil) et Monsieur **M'hamed Souli**, Professeur à l'Université Lille 1, pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury.*

*Je n'oublie pas les thésards et les post-doctorants pour les nombreuses discussions dont j'ai bénéficié, pour leur sympathie et leurs encouragements.*

*Enfin, un grand merci à :*

*Tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.*

*Tous mes amis avec qui j'ai passé de très agréables moments et qui m'ont toujours aidé, Ahlem, Xi, Jamila, Halima, Rim, Saida, Haytham, Soheir et le petit Majd.*

*Mes grands trésors **Sourour et Chefia** pour m'avoir soutenu moralement et financièrement.*

*Mon Cher père pour m'avoir poussé à suivre mes études doctorales et pour ses conseils super- précieux qu'il m'a accordé.*

*Ma mère pour son douâa, sa patience et pour son soutien sans faille malgré la tristesse de me voir partir à l'étranger.*

*Ma famille et plus particulièrement à mes frères et sœurs pour leur soutien et leur patience.*

# Table des matières

## Introduction générale

I. Etude bibliographique .....	7
1. Modèle à zéro équation .....	8
2. Modèles à une équation .....	9
3. Modèles à deux équations .....	9
4. Modélisation des effets de paroi .....	12
II. Modélisation statistique de la turbulence .....	15
1. Les équations de départ .....	16
2. Décomposition statistique .....	17
3. Valeurs moyennes .....	18
4. Equations moyennées .....	18
4.1. Equation de continuité .....	19
4.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement .....	19
5. Modélisation numérique .....	20
5.1 Premier élément de la modélisation : l'hypothèse de Boussinesq .....	20
5.2 Le modèle k- $\epsilon$ .....	23
5.2.1 Analyse d'ordre de grandeur .....	24
5.2.2 Modélisation de l'équation de k .....	28
5.2.3 Modélisation de l'équation de la dissipation .....	29
5.3 Le modèle $\overline{v^2}$ -f .....	33
5.3.1. L'équation de relaxation elliptique .....	35
5.3.2. Terme de dissipation .....	40

III. Traitement numérique .....	47
1. Discrétisation spatiale .....	48
1.1 Le maillage .....	50
1.2 Equation de conservation pour un scalaire .....	52
1.2.1 Le terme de diffusion .....	52
1.2.2 Le terme de convection .....	52
1.2.3 Le schéma numérique .....	53
1.3 Equation de quantité de mouvement .....	54
1.4 Les équations de transport .....	57
2. Discrétisation temporelle .....	58
IV. Résultats et discussions .....	64
1. Le modèle k- $\epsilon$ .....	65
1.1 Le modèle k- $\epsilon$ standard .....	65
1.2 Utilisation des fonctions de paroi .....	68
2. Etude <i>a priori</i> .....	73
2.1 Procédure numérique utilisée et test <i>a priori</i> .....	73
2.2 Simulation numérique directe (DNS) .....	74
2.3 Le modèle k- $\epsilon$ .....	75
2.4 Le modèle $\overline{v^2}$ -f .....	76
2.5 Le modèle de Shih .....	76
2.6 Résultats et discussions .....	77
2.6.1 Tensions normales .....	77
2.6.2 Tensions de cisaillement .....	78
2.7 Conclusion .....	79
3. Le modèle $\overline{v^2}$ -f .....	84
Conclusions et perspectives .....	95
Bibliographie .....	98
Résumé .....	106
Abstract .....	107

# Table des figures

1.1 Profil de la viscosité turbulente dans un canal plan, comparaison des modèles, — DNS ..... $k$ - $\epsilon$ , -- $k$ - $\epsilon$ - $\overline{v^2}$ .....	4
2.1 L'énergie cinétique turbulente $k^+$ et la contrainte de cisaillement $-\overline{u'v'}$ en fonction de la distance à la paroi, comparaison de quatre modèles avec les résultats expérimentaux (Wilcox, 1988). .....	33
2.3 Les différents termes de production, diffusion et dissipation de l'équation de transport de la dissipation (Mansour et al. 1988). .....	45
3.1 Maillage entrelacé : position des variables .....	51
3.2 Position des composantes de la vitesse dans le volume de contrôle .....	53
3.3 Illustration du schéma décentré Le schéma numérique .....	54
3.4 Bilan pour la vitesse $u$ au point $e$ .....	56
3.5 Bilan des termes sources .....	57
4.1 Etude d'un écoulement turbulent dans un canal plan .....	65
4.2 Maillage du domaine .....	66
4.3 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds pour $Re_\tau = 180$ à l'aide du modèle standard $k$ - $\epsilon$ .....	66
4.4 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle standard $k$ - $\epsilon$ pour $Re_\tau = 395$ . .....	67
4.5 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle standard $k$ - $\epsilon$ pour $Re_\tau = 590$ . .....	67

4.6 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle k-ε avec fonction de parois pour $Re_\tau = 180$ . .....	68
4.7 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle k-ε avec fonction de parois pour $Re_\tau = 395$ . .....	69
4.8 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle k-ε avec fonction de parois pour $Re_\tau = 590$ . .....	69
4.9 Profil de (a) $u^+$ , (b) $k^+$ et (c) $\epsilon^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al., 1999) pour $Re_\tau=180$ . .....	70
4.10 Profil de (a) $u^+$ , (b) $k^+$ et (c) $\epsilon^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al., 1999) pour $Re_\tau=395$ . .....	71
4.11 Profil de (a) $u^+$ , (b) $k^+$ et (c) $\epsilon^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al., 1999) pour $Re_\tau=590$ . .....	72
4.12 Schéma numérique du test <i>a priori</i> . .....	73
4.13 Comparaison de la composante $\overline{uu}^+$ du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a) $Re_\tau=180$ , (b) $Re_\tau=395$ , (c) $Re_\tau=590$ . .....	80
4.14 Comparaison de la composante $\overline{vv}^+$ du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a) $Re_\tau=180$ , (b) $Re_\tau=395$ , (c) $Re_\tau=590$ . .....	81
4.15 Comparaison de la composante $\overline{ww}^+$ du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a) $Re_\tau=180$ , (b) $Re_\tau=395$ , (c) $Re_\tau=590$ . .....	82
4.16 Comparaison de la composante $\overline{uv}^+$ du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a) $Re_\tau=180$ , (b) $Re_\tau=395$ , (c) $Re_\tau=590$ . .....	83
4.17 Profil de l'énergie cinétique turbulente $k^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=590$ . .....	84
4.18 Profil de la vitesse moyennée $u^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=590$ . .....	85



4.19 Profil de la dissipation $\varepsilon^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=590$ . .....	85
4.20 Profil de la contrainte de cisaillement $\overline{uv}^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=590$ . .....	86
4.21 Profil de l'énergie cinétique turbulente $k^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=395$ . .....	87
4.22 Profil de la dissipation $\varepsilon^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=395$ . .....	87
4.23 Profil des contraintes normales (a) $\overline{uu}^+$ , (b) $\overline{vv}^+$ , (c) $\overline{ww}^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=395$ . .....	88
4.24 Profil de la contrainte de cisaillement $\overline{uv}^+$ en fonction de $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=395$ . .....	89
4.25 Comparaison avec le modèle k- $\varepsilon$ ; (a) profils de l'énergie cinétique turbulente $k^+$ , (b) et de la contrainte de cisaillement $\overline{uv}^+$ et validation par les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=395$ . .....	90
4.26 Profil de l'énergie cinétique turbulente $k^+$ : comparaison avec le modèle k- $\varepsilon$ et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=180$ . .....	91
4.27 Profil de la dissipation $\varepsilon^+$ : comparaison avec le modèle k- $\varepsilon$ et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=180$ . .....	92
4.28 Profil des contraintes normales (a) $\overline{uu}^+$ , (b) $\overline{vv}^+$ , (c) $\overline{ww}^+$ : comparaison avec le modèle k- $\varepsilon$ et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=180$ . .....	93
4.29 Profil de la contrainte de cisaillement $\overline{uv}^+$ : comparaison avec le modèle k- $\varepsilon$ et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour $Re_\tau=180$ . .....	94

# Liste des tableaux

I.1 : exemple de la variable Z dans quelques versions du modèle à deux équations. ....	10
II.1 Les constantes du modèle k- $\epsilon$ . ....	30
II.2 Différentes propositions de la littérature pour les fonctions du modèle k- $\epsilon$ . ....	32
III.1 Expression des termes de l'équation (3.1). ....	50
IV. 1 Les différents paramètres du maillage des trois cas de calcul. ....	75

---

« D'un côté, sur un pic couvert de neiges éternelles, flotte dans la solitude et le silence, l'étendard des équations de Navier ; un abîme insondable sépare ce sommet du terrain sur lequel se déverse la pluie incessante des résultats de l'expérience... un seul pont est tendu au-dessus de cet abîme... ce pont est constitué par les équations de Reynolds. »

J. KOMPET DE FERIET (1962).

« Peut-on définir la turbulence ?

Travailler sur la turbulence, c'est tenter de prévoir l'imprévisible. »

Marcel LESIEUR (1994).

« Pour certains, l'étude de la turbulence en mécanique des fluides constitue une branche de mathématique ou de l'analyse numérique ; pour d'autres, il s'agit plutôt d'une discipline relevant des sciences de l'ingénieur ou de la physique appliquée. De là découle la diversité des écoles de pensée qui préconisent, pour la prédiction des écoulements turbulents, des voies d'approche souvent liées à la branche des sciences dont se réclament leurs auteurs. »

J. JACQUET (1979).

« Nous n'avons pas de bonne théorie fondamentale du tout de la turbulence. »

Richard FEYNMAN (1979).

« L'écoulement turbulent pose un problème mathématique à ce point complexe que sa solution exige de recourir largement aux données expérimentales. »

A. TOWENSEND (1976).

---

# Introduction

Le domaine de la turbulence fut un centre d'intérêt pour les chercheurs. Diverses études ont été achevées durant toute l'histoire humaine. En effet, se manifestant dans tous les domaines de la vie quotidienne (l'aérodynamique, mouvements de fluides biologiques, mouvements de géo-fluides, l'hydraulique...), la turbulence fut un sujet d'attraction pour les physiciens à cause de l'ambiguïté qui l'entoure. Ainsi, l'étude de la turbulence est devenue un sujet de première importance. Les équations de Navier-stokes constituent le support mathématique de la représentation physique des écoulements. En attendant des ordinateurs toujours plus puissants, la simulation numérique directe (DNS), qui constitue une première véritable tentative de prédétermination de la turbulence, se limite à des configurations simples ne répondant pas aux besoins industriels. La résolution numérique de ces équations en utilisant une approche explicite de toute les échelles spatio-temporelles actives au sein de l'écoulement turbulent, depuis les plus grandes imposées par la taille du problème jusqu'aux plus petites dissipatives (échelle de Kolmogorov (1941)), ne peut être envisagée à l'heure actuelle. La modélisation reste donc une voie d'investigation de tout premier ordre et l'évaluation des modèles de turbulence est un sujet de grand intérêt scientifique et industriel.

Le succès de toute simulation numérique des écoulements turbulents est fortement lié aux choix du modèle de turbulence. Dans la littérature, il y a une grande variété de modèles qui se distinguent en fonction de leurs capacités à prédire les écoulements turbulents. Cependant, il est actuellement admis que sans modification, les modèles conventionnels à viscosité turbulente sont incapables de reproduire fidèlement le comportement des écoulements secondaires.

D'autres types de modèles ne s'appuyant pas sur le concept de la viscosité turbulente, sont alors proposés. Dès lors, pour prédire des écoulements turbulents complexes dans des configurations réelles, une solution consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes sur une gamme restreintes d'échelles et de modéliser les actions des autres. Cette séparation d'échelles est le principe de résolution de la modélisation de type LES (Large Eddy

---

Simulation). C'est une approximation par filtrage en espace qui consiste à résoudre les grande et moyenne échelles porteuses d'énergie et de modéliser les petites échelles en utilisant un modèle dit de sous-maille pour représenter l'action des échelles dont la taille est inférieure à celle de la maille de calcul. Cette approche requiert un maillage très fin et est encore très couteuse en terme temps de calcul.

Dans la littérature, on dispose aussi de modèles du second ordre appelés RSM (Reynolds Stress Models). Ces modèles, initialement proposés par Launder, Reece et Rodi (1975) se sont avérés capables de prédire l'anisotropie des écoulements turbulents (Speziale 1989, Launder 1989, Minh 1999). Ils s'agissent de modèles qui résolvent les six équations de transport pour chaque composante du tenseur de Reynolds au lieu d'une seule équation pour l'énergie cinétique turbulente dans le cas des modèles à viscosité turbulente. Ce qui requiert des machines à mémoires gigantesques et un temps de calcul très élevé (Minh 1999, Basara 2004). A ceci, s'ajoute les difficultés d'ordre numériques, rencontrées lors de l'utilisation de ces modèles. Ils requièrent une variété de fonctions de parois et leurs coefficients sont estimés d'une manière empirique (voir par exemple les modèles de Launder et al. (1975), Gibson and Launder (1978), Spéziale et al. (1991)).

Une nouvelle génération portant le nom des modèles explicites à contraintes algébriques, EASM (Explicit Algebraic Stress Model) est alors proposée. Ces modèles s'appuient sur une expression algébrique explicite du tenseur de Reynolds. Cependant, comme les modèles à viscosité turbulente à deux équations, ces modèles sont complétés par deux équations d'échelles, qui sont l'équation de transport de l'énergie cinétique et celle de son taux de dissipation. En plus, cette alternative de modèles RSM ne permette pas de résoudre le problème des fonctions de parois et des différents coefficients utilisés dans le modèle.

Durbin (1991, 1993) propose une nouvelle approche tout a fait différente, qui évite l'introduction des termes empiriques et non-linéaires en résolvant six équations différentielles supplémentaires dites de relaxation elliptique, pour chaque composante du tenseur de Reynolds. L'influence de la paroi se fait alors sentir à travers l'opérateur elliptique qui préserve le caractère non local de la pression. Ainsi, ce modèle évite l'utilisation des fonctions de paroi, fonctions « ad-hoc », contrairement aux modèles RANS, à viscosité turbulente (modèle  $k-\varepsilon$ , comme exemple), qui font appel à ces

fonctions correctrices  $f_\mu$ . Ces fonctions n'ont pas de fondement théorique, elles sont choisies arbitrairement, de façon à s'accorder avec les résultats expérimentaux.

Le fondement de ce modèle consiste à utiliser le concept de relaxation elliptique pour prendre en compte la non localité du terme de pression dans les équations de transport des tensions de Reynolds (Manceau 1999).

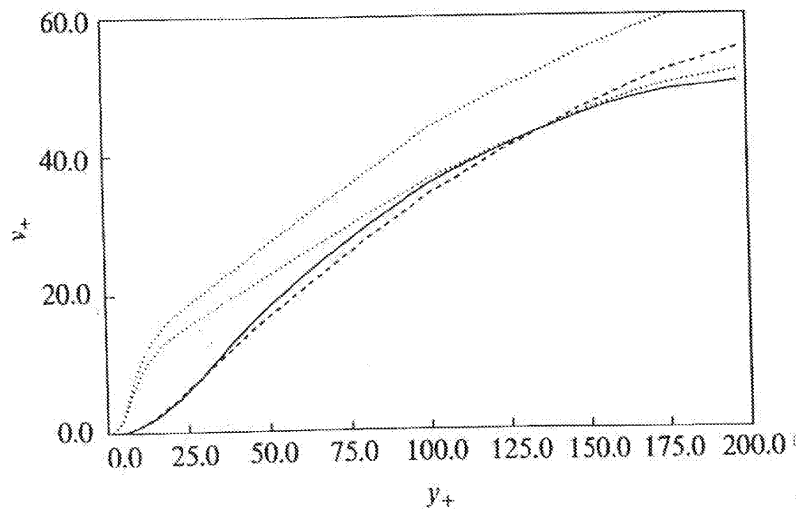


Fig 1.1 : Profil de la viscosité turbulente dans un canal plan, comparaison des modèles,

— DNS, .....  $k-\epsilon$ , --  $k-\epsilon-\bar{v}^2$

Dans la figure (1.1), Durbin compare, par une étude *a priori* utilisant les données de la DNS de Moser et al. (1999), la viscosité turbulente issue de son modèle avec celle du modèle standard  $k-\epsilon$ . Les deux courbes en pointillé sont obtenues en utilisant deux valeurs pour la constante  $c_\mu$ , 0.09 et 0.075.

On observe que, contrairement au modèle  $k-\epsilon$ , la courbe du modèle  $\bar{v}^2-f(k-\epsilon-\bar{v}^2)$  est très proche des données de la DNS essentiellement dans la zone de proche paroi, ce qui prouve que ce modèle conserve l'aspect anisotrope de la turbulence sans avoir besoin à une fonction correctrice tel que le cas des modèles à viscosité turbulente classiques. La raison d'un tel comportement est que les modèles bas Reynolds découlent en général des modèles haut Reynolds basés sur des hypothèses de localité du terme de pression et de quasi-homogénéité de la vitesse, non valides en proche paroi (Manceau, 1999, Manceau et al. 2001). C'est la raison pour laquelle l'introduction de termes correctifs afin de prendre

---

en compte les effets de paroi, telle que fonction d'amortissement et termes d'écho de paroi (Manceau, 1999, Fadaï-Ghotbi 2007) a été entreprise. Ces termes sont empiriques, non universels et peuvent avoir une grande influence sur le type de solution obtenue, comme par exemple une relaminarisation non physique (Rumsey et al., 2006). Durbin propose une nouvelle approche pour prendre en compte l'effet de blocage de la paroi. Dans le cas du modèle  $k-\varepsilon$ , où le terme choisi comme caractéristique de la vitesse est l'énergie cinétique turbulente, Durbin affirme que cette dernière est isotrope en proche paroi alors que la turbulence est fortement anisotrope dans cette zone. Un tel choix n'est donc pas basé sur des observations physiques, ce qui altère l'exactitude des résultats obtenus. Cet auteur a introduit la composante normale du tenseur de Reynolds  $\overline{v^2}$  comme une nouvelle échelle pour la vitesse, ce qui ajoute une valeur physique réelle sur le modèle.

Dans le chapitre I, une étude bibliographique est consacrée à la présentation des principales modélisations de la turbulence. La motivation de cette revue est de souligner les limites de ces modèles et de choisir la meilleure approche capable de répondre aux contraintes de notre problème.

Dans le chapitre II, le modèle  $\overline{v^2}$ -f et le modèle  $k-\varepsilon$ , sont expliqués d'une manière détaillée. Ainsi, en partant des équations de Navier-Stokes, qui constituent le support mathématiques de la représentation de la physique des écoulements (De Feriet, 1962), on explique la démarche suivie afin d'aboutir à la notion de la moyenne de Reynolds. Ensuite, nous faisons un large bilan bibliographique sur la modélisation statistique de la turbulence. Les différents mécanismes présents dans les deux principaux modèles utilisés sont décrits et les expressions classiques de leur modélisation sont présentées.

Le troisième chapitre est consacré au traitement numérique des équations du problème. Dans un premier temps, nous présenterons la méthode numérique de volumes finis utilisée pour résoudre le système d'équations. Dans un second temps, le schéma numérique utilisé ainsi que les discrétisations temporelle et spatiale choisies seront également traités. L'étude est mise en œuvre en s'appuyant sur un maillage non uniforme très fins au voisinage des parois et relâché ailleurs.

Le dernier chapitre est dédié à l'évaluation de l'aptitude des deux modèles concernés à prédire des écoulements de fluides incompressibles dans un canal plan. Le modèle  $k-\varepsilon$  ayant corroboré les données de la simulation numérique directe de Moser et al. (1999), a

---

été retenu pour une comparaison *a priori* avec le modèle  $\overline{v^2}$ -f. Les résultats obtenus sont comparés à la fois avec les données de la DNS et avec les résultats du modèle non-linéaire de Shih et al. (1995). Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présenterons les prédictions numériques *a posteriori* issues du modèle à relaxation elliptique  $\overline{v^2}$ -f tout en le validant par confrontation avec les résultats de Moser et al. (1999).

Enfin, en concluant, nous mettons l'accent sur les principaux points détectés dans ce mémoire et invoquons les perspectives possibles pour ces travaux.



---

Chapitre I :

Etude bibliographique

---

# Etude bibliographique

Le choix d'un modèle de turbulence parmi les nombreuses formulations disponibles dans la littérature scientifique est souvent un problème délicat pour l'utilisateur. Ce choix dépend essentiellement des réponses attendues, c'est-à-dire du type d'information que l'on désire obtenir de la variété des écoulements considérés, qui dictent ainsi le niveau de complexité de la modélisation et son degré d'universalité.

Toutes les méthodes de simulation de la turbulence (LES, DNS, RANS, ...) sont utilisées actuellement, ce qui prouve qu'aucune d'entre elles n'est parfaite, il convient donc de parler de complémentarité que de concurrence de ces approches (Chassaing, 2000). Dans cette étude, on s'intéresse essentiellement aux modèles dits de viscosité turbulente.

## 1. Modèle à zéro équation

C'est un modèle au premier ordre qui consiste à relier les corrélations doubles  $\overline{u'_i u'_j}$  aux inconnues principales que sont les grandeurs moyennes  $\overline{u_i}$ . C'était Boussinesq qui fut le premier à introduire en 1877 le concept de la viscosité turbulente :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (1.1)$$

où, il supposait la viscosité cinématique turbulente comme constante. Ce modèle, même s'il a donné de bons résultats pour des cas simples d'écoulements, reste insignifiant, vu que  $\nu_t$  n'était pas une propriété physique du fluide.

Une première approche consiste à considérer  $\nu_t$  comme une fonction des échelles caractéristique de l'écoulement : l'échelle de longueur  $l$  et de vitesse représentatives de l'agitation turbulente  $v$

$$\nu_t = l.v$$

C'est le schéma dit longueur de mélange, largement redevable des travaux de Prandtl (1925) et Taylor (1960).

---

Ce modèle est très largement utilisé, puisqu'il est parmi les plus simples et les plus rapides à mettre en œuvre. Il a été et reste encore employé avec succès dans des configurations classiques de l'aérodynamique de profils simple en l'absence de décollement. Ce modèle a subi divers développements, on peut citer les travaux de Reichardt (1942), Prandtl (1945), Clauser (1956), Hinze et al. (1974)...

Ce modèle a été utilisé dans une première partie de ces travaux et a donné des résultats satisfaisants mais ceux-ci ne seront pas présentés ici.

## **2. Modèles à une équation**

Étant une version développée des modèles de la classe précédente, ces modèles s'appuient sur une équation concernant la grandeur en général représentative de l'échelle de vitesse des fluctuations turbulente (Bradshaw et al., 1971), i.e. équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente ou les composantes du tenseur de Reynolds. Parmi les auteurs qui ont contribué à l'évolution de ce type de modèle, on trouve Bradshaw et al. (1967), Donaldson (1969), Jeandel (1972), Jeandel et Mathieu (1973)...par rapport aux modèles à zéro équation de transport, le gain en général est fort limité dans la mesure où l'échelle de longueur est toujours prescrite de façon algébrique. C'est la raison pour laquelle ces modèles sont très vite supplantés par les modèles à deux équations.

## **3. Modèles à deux équations**

Ces modèles reposent sur le fait que la valeur locale de la viscosité turbulente dépend de deux caractéristiques représentatives des échelles de vitesse et de longueur de la fluctuation turbulente.

Pour l'échelle de vitesse, le choix se porte naturellement sur l'énergie cinétique de turbulence. Pour l'échelle de longueur, plusieurs voies ont été explorées. L'ensemble de ces alternatives définissent un paramètre  $Z = k^m . l^n$ .

Le tableau I.I suivant regroupe les propositions relatives au terme  $Z$ .

Auteur (Année)	Z	Symbole
Kolmogoroff (1942) Wilcox (1988)	$k^{1/2}/l$	F
Spalding (1972) Wilcox et Traci (1976) Saffmann (1970)	$k/l^2$	$w^2$
Rotta (1950) Spalding (1969)	1	1
Rodi et Spalding (1970) Rotta (1968, 1971) Ng- Spalding (1972)	k.l	k.l
Chou (1945) Davidov (1961) Harlow et Nakayama (1967) Jones et Launder (1972)	$k^{3/2}/l$	$\varepsilon$

Tableau I.1 : exemple de la variable Z dans quelques versions du modèle à deux équations

En résumé, dans cette catégorie de modèles, les échelles caractéristiques de l'agitation turbulente  $l$  et  $v$ , sont représentées par deux équations de transport. Ce type de modèles a été impliqué dans une gamme très variée et très riche dont le plus répondu est le modèle  $k$ - $\varepsilon$  de Jones and Launder (1972).

Avec ce type d'approches, le problème de fermeture se trouve reporté sur certains termes des équations de transport de  $k$  et  $l$  qui doivent être correctement schématisés. C'est à ce niveau que seront introduits les coefficients ou les constantes du modèle dont la détermination par référence à l'équation pose des problèmes d'universalité pour le modèle.

Avec des valeurs standards des constantes, le modèle  $k$ - $\varepsilon$  conduit en général à des résultats qui sans être toujours d'une précision suffisante, permettent de disposer d'une première approche des caractéristiques locales de tout écoulement turbulent pour une très large gamme de configurations.

---

Parmi les auteurs qui ont étudié ce modèle et qui ont montré sa simplicité et sa souplesse, on trouve, Hirt (1969), Daly and Harlaw (1970), Wolfstein (1970), Mathieu and Jeandel (1975). On peut citer aussi les travaux de Wilcox (1993 a, b, c, 1994), où il a étudié les méthodes possibles qui permettent de développer les modèles à deux équations. Dans son article (AIAA, 1988), Wilcox introduisait une révision historique concernant les modèles à deux équations et en particulier, il s'intéresse aux échelles utilisées dans ces modèles, afin de chercher la meilleure approximation qui résout le problème de fermeture des équations de Navier-Stokes.

Diverses études de comparaison entre ces modèles sont aussi disponibles dans la littérature. Lai et Yang (1997) ont fait une comparaison entre quatre versions du modèle k- $\epsilon$ , pour prédire un écoulement turbulent dans un canal plan à différents diamètres et avec un obstacle en proche paroi. Un travail de comparaison plus étendu a été fait par Patel et al. en 1984. Il s'agit d'une révision des différentes versions des modèles k- $\epsilon$  et k- $\omega$ , à bas nombre de Reynolds en proche paroi.

Pourahmadi et Humphrey (1983) ont contribué aussi à l'évolution du modèle k- $\epsilon$ , en proposant une nouvelle constante pour l'expression de la viscosité turbulente pour les modèles à deux équations. Dans leur étude ils ont utilisé des coordonnées polaires pour la simulation d'un écoulement 2D, dans une conduite courbée.

Cette catégorie de modèles a été perfectionnée par des modèles k- $\epsilon$  non-linéaires de Spziale (1987), Craft et al. (1993), Shih et al. (1995), Mompean et al. (1996), ainsi que les modèle k- $\epsilon$  RNG Yakhot et al. (1986, 1992), Mompean (1998)... Certains modèles récents introduisent une troisième équation de transport pour un invariant anisotrope (Craft et al. 1995, Suga 1997) ce qui permet de sensibiliser le modèle k- $\epsilon$  à l'anisotropie.

D'autres méthodes dites hybrides ont utilisé le modèle k- $\epsilon$  en association avec un autre modèle tel que les travaux de Basara et Jakirlic (2003), où ils ont couplé les deux modèles RSM et le k- $\epsilon$ . Leur méthode consiste à calculer le tenseur de Reynolds à partir du premier modèle. La valeur de l'énergie cinétique est alors calculée comme étant la somme des composantes normales du tenseur de Reynolds. Ensuite, ils introduisent ces valeurs dans l'équation de quantité de mouvement via la viscosité turbulente, tout en corrigeant la valeur de la constante  $C_\mu$  du modèle en la recalculant à partir des données de la DNS comme étant une fonction du type de l'écoulement.  $C_\mu = \left( \overline{-uv}/k \right)^2$  pour les écoulements

---

de canal plan et pour une large gamme de nombres de Reynolds. Sa valeur est égale à  $\left(\sqrt{\overline{uv^2} + \overline{uw^2} + \overline{vw^2}}/k\right)^2$  pour les écoulements dans des conduites avec rotation axiale.

Les modèles présentés précédemment négligent tout effet visqueux direct sur la turbulence et en particulier ils ne sont donc pas applicables dans la sous couche visqueuse adjacente à la paroi. Dans la sous couche visqueuse, le transport moléculaire est du même ordre ou même plus grand que le transport turbulent. Les échelles des tourbillons porteurs de l'énergie et des tourbillons dissipateurs se recouvrent. Les tourbillons dissipateurs sont alors directement influencés par le mouvement moyen et ne sont donc pas isotropes et les structures à grande échelle sont influencées par la viscosité moléculaire. Pour prendre en compte ces phénomènes, certaines constantes empiriques des modèles devront être considérées comme des fonctions du nombre de Reynolds turbulent. Cette influence est donc prise en compte de façon empirique. Les formulations utilisées sont souvent pratiquement limitées à l'étude de la sous-couche visqueuse adjacente à la paroi. Parmi les travaux qui ont utilisé cette démarche de correction du phénomène de la turbulence en proche paroi, on peut citer les premiers travaux de Van Driest (1956) qui portaient sur une modification du modèle longueur de mélange, ainsi que ceux de Cousteix et al. (1972). Dans les modèles à deux équations de transport, Glushko (1971) a fait une étude d'un écoulement sur une plaque plane, en tenant compte des effets de proche paroi. De nombreux travaux sont accomplis dans l'étude des modèles k-ε à bas nombre de Reynolds, on peut citer les contributions de Jones and Launder (1972), Harlow (1968), Gibson et al. (1978). Pour plus d'explication sur ce problème, on pourra se reporter au chapitre II.

#### **4. Modélisation des effets de paroi**

L'influence de la paroi se fait sentir sur toute la couche limite par le biais des phénomènes de transport : diffusion moléculaire, transport turbulent et transport par la pression. L'utilisation des lois de paroi a l'avantage de ne pas nécessiter l'intégration des équations jusqu'à la paroi. Par contre, les fonctions de paroi généralement utilisées, sont choisies arbitrairement afin d'avoir des résultats satisfaisant l'expérimental.

---

D'autre part, Hanjalic et Launder (1976) ont utilisé le modèle  $k-R_{12}-\varepsilon$  (Schiestel, 1998), vu que dans les écoulements de couches limites bidimensionnelles,  $\partial \overline{U}_1 / \partial x_2$  est le seul gradient important et  $R_{12}$  est la seule contrainte de cisaillement importante. Hanjalic et Launder ont négligé l'effet de paroi sur le terme de pression pour les contraintes de Reynolds. Une autre voie originale proposée par Durbin consiste à utiliser le concept de relaxation elliptique pour prendre en compte la non localité du terme de pression des équations de transport des tensions de Reynolds. Cette méthode permet aussi d'éviter la non validité des modèles classiques à deux équations en proche paroi. L'idée est de développer une équation différentielle pour le terme de pression, ce qui permet d'éviter l'utilisation des fonctions de paroi.

En pratique, dans le modèle  $\overline{v^2}$ -f, les variables énergie cinétique turbulente  $k$  et sa dissipation  $\varepsilon$  restent des inconnues du problème. Une variable supplémentaire  $\overline{v^2}$  est introduite et représente approximativement la tension de Reynolds dans la direction normale aux lignes de courant de l'écoulement. Ces trois variables  $k$ ,  $\varepsilon$  et  $\overline{v^2}$  permettent de calculer la viscosité turbulente requise selon la relation  $\nu_t = C_\mu \overline{v^2} \frac{k}{\varepsilon}$ .

Le seul problème de ce modèle se situe au niveau des conditions aux limites pour la variable  $f$  qui représente les effets de redistribution dans l'équation de transport de  $\overline{v^2}$  à la paroi. De nombreuses améliorations sont proposées (Hanjalic et al. 2004, Manceau et al. 2002, Wizman et al. 1996, Manceau et al. 2000, Lien et al. 1998) et semblent alliés des propriétés de robustesse et simplicité d'implication numérique.

Une version simplifiée a été proposée aussi par Rahman et Siikonen (2007), où ils ont modifié les valeurs des constantes pour prendre en compte l'amplification de la dissipation dans les zones de forte anisotropie. Ils ont validé leurs travaux avec différents résultats expérimentaux. Pettersson (2007) a essayé d'écrire une version non-linéaire du modèle  $\overline{v^2}$ -f, en suivant une procédure analogue à celle utilisée dans les versions des modèles non-linéaires à deux équations. Il a présenté des résultats très satisfaisants en les comparant avec la DNS, et ceux pour diverses géométries de l'écoulement étudié.

Une alternative au modèle  $\overline{v^2}$ -f est le modèle de pondération elliptique proposé par Manceau et Hanjalic en 2002 et modifié par Manceau en 2005 se basant sur le concept de la relaxation elliptique. Ce modèle permet de réduire le nombre d'inconnues par

---

l'utilisation d'une seule équation de relaxation elliptique au lieu des six équations des contraintes de Reynolds, en préservant le bon comportement du terme de redistribution dans tout l'écoulement.





Chapitre II :

Modélisation statistique de la turbulence

---

# Modélisation statistique de la turbulence

## 1. Les équations de départ

On considère un fluide incompressible et newtonien en régime turbulent. On peut simuler la turbulence par une approche directe à partir des équations de Navier-Stokes. Ces équations constituent le support mathématique de la représentation physique des écoulements turbulents. Elles sont basées sur le principe de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Tennekes and Lumley, 1977). Cette approche nommée simulation directe est aussi appelée DNS (Direct Numerical Simulation) dans la littérature anglo-saxonne.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad (2.2)$$

avec :

$u_i = u, v, w$  : les composantes instantanées de la vitesse suivant les directions  $x, y, z$ ,

$p$  : pression,

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide,

$\rho$  : masse volumique.

En introduisant, les conditions aux limites, ces équations permettent d'aboutir à une prédiction numérique de l'écoulement. Par contre, il est généralement admis que la turbulence résulte d'une succession d'instabilités subites par l'écoulement initialement

---

laminaire, lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds. La solution peut devenir instationnaire. Donc, la turbulence peut faire partie des conditions aux limites. Ainsi un problème d'échelle entre les valeurs macroscopiques de l'écoulement et leurs fluctuations se pose. Cette approche reste aujourd'hui très cher au niveau du temps de calcul et de stockage (mémoire) nécessaire pour de nombre de Reynolds encore faible dans le cas de la turbulence. Une autre approche, qui sera utilisée dans cette thèse constitue la décomposition statistique des variables instantanées en une valeur moyenne et une valeur fluctuante. Cette approche reste aujourd'hui très chère au niveau du temps de calcul et de la mémoire de stockage nécessaire pour des nombre de Reynolds encore faible de la turbulence.

## 2. Décomposition statistique

La vitesse et la pression sont traitées comme des fonctions aléatoires de l'espace et du temps, dont on décompose les valeurs instantanées en :

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= \overline{u_i}(x, t) + u_i'(x, t) \\ p(x, t) &= \overline{p}(x, t) + p'(x, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où le symbole  $\overline{(\quad)}$  est l'opérateur de moyenne statistique ou moyenne d'ensemble et les  $u_i'$  et  $p'$  sont les fluctuations ou écarts par rapport aux moyennes.

Dans ce cadre, on définit la probabilité  $P_{u, u+\Delta u} = \lim \frac{1}{N} \sum_1^N n$  où  $\begin{cases} n = 1 \text{ si } u \in [u, u + \Delta u] \\ n = 0 \text{ sin on} \end{cases}$

avec N le nombre de points de calcul.

La densité de probabilité pour une variable aléatoire est  $P(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N n$

---

### 3. Valeurs moyennes

- on définit la moyenne statistique de  $u$  :

$$\bar{u}^{-st} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_0, t_1) P(u) du.$$

Dans le cas d'une turbulence stationnaire on fait l'hypothèse que cette moyenne est égale à la moyenne temporelle :

$$\bar{u}^{-t} = \frac{1}{T} \int_0^T u(x_0, t) dt. \quad (2.4)$$

Le temps  $T$  doit être plus grand que l'échelle de temps caractéristique de la turbulence.

- Propriétés de la moyenne

Cette moyenne vérifie les règles suivantes (Favre et al. 1976, Hinze 1975) pour une valeur moyenne  $\bar{A}$  et fluctuante  $a'$  :

$$\begin{aligned} A &= \bar{A} + a' \\ \overline{A+B} &= \bar{A} + \bar{B} \\ \overline{\lambda A} &= \lambda \bar{A} \quad \lambda, \text{ constante numérique} \\ \overline{A \cdot B} &= \bar{A} \cdot \bar{B} \\ \overline{\bar{A}} &= \bar{A} \\ \overline{a'} &= 0 \end{aligned}$$

### 4. Equations moyennées

Suivant la décomposition de Reynolds, toute variable  $\phi$  est décomposée en une valeur

moyenne et une valeur fluctuante,  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$   $\left\{ \begin{array}{l} u = \bar{u} + u' \\ p = \bar{p} + p' \end{array} \right.$

---

En appliquant ce type de décomposition aux équations de Navier-Stokes, des inconnues supplémentaires dans les équations de ces grandeurs moyennées vont apparaître.

#### 4.1. Equation de continuité

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0.$$

L'opérateur de moyenne appliqué à cette équation fournit la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.5)$$

#### 4.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

De même si on applique l'opérateur moyenne à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.2) après application de la décomposition de Reynolds, on aura l'équation suivante :

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \mu \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

Donc une nouvelle inconnue  $\overline{u_i' u_j'}$  apparaît dans le système d'équations et un problème de fermeture se pose par l'apparition d'un tenseur d'ordre 2.

Le terme  $(-\rho \overline{u_i' u_j'})$  est appelé le tenseur des contraintes de Reynolds. C'est un tenseur symétrique dont les composantes non diagonales sont les contraintes de cisaillement et les composantes diagonales sont les contraintes normales. Dû à la symétrie, ce tenseur qui traduit la corrélation entre les fluctuations de vitesses, fait apparaître six nouvelles

---

inconnues. Ainsi une question à propos la modélisation des contraintes de ce tenseur de Reynolds se pose.

## 5. Modélisation numérique

### 5.1 Premier élément de la modélisation : l'hypothèse de Boussinesq

En 1877, Boussinesq a proposé une hypothèse supposant que les contraintes turbulentes agissent d'une façon analogue aux contraintes visqueuses pour un fluide newtonien en régime laminaire. Elles sont alors proportionnelles aux gradients de vitesse :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_t \overline{S_{ij}} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right), \quad (2.7)$$

où  $\mu_t$  est la viscosité dynamique turbulente et  $\nu_t = \mu_t / \rho$  la viscosité cinématique turbulente du fluide. Afin de corriger cette relation, tenant en compte que l'énergie cinétique  $k$  est donnée par  $\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ , on écrit :

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_t \overline{S_{ij}}. \quad (2.8)$$

Il est nécessaire de déterminer les composantes du tenseur de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  qui sont des moments de deuxième ordre, à fin de résoudre le système d'équation moyennées cité ci-dessus.

Pour ce fait, de nombreuses méthodes sont possibles. On peut modéliser directement les inconnues à l'aide des relations algébriques comme on peut les calculer à partir de leurs équations de transport. Ce deuxième chemin conduit à l'apparition des moments d'ordre supérieur et de nouvelles inconnues qui nécessitent, elles aussi une modélisation.

Tout d'abord, pour écrire les équations de transport des composantes du tenseur de Reynolds, on part de l'équation de Navier- Stokes (2.2), et en utilisant la décomposition de Reynolds :

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2}. \quad (2.9)$$

En prenant la moyenne statistique on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}. \quad (2.10)$$

Par soustraction entre (2.9) et (2.10), on déduit l'équation de l'évolution de la fluctuation de vitesse :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}. \quad (2.11)$$

Si on refait la même opération pour  $u_j$ , on obtient :

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j u'_k - \overline{u'_j u'_k}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_j^2}. \quad (2.12)$$

Arrivant à ce stade, si on multiplie (2.11) par  $u'_j$  et (2.12) par  $u'_i$  et si on additionne les résultats et on prend la moyenne on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = & - \left( \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k} \\ & - \frac{1}{\rho} \left( \overline{u'_j} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} + \overline{u'_i} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_j} \right) + \nu \left( \overline{u'_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} + \overline{u'_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k^2} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour le terme de redistribution entre les composantes de fluctuation de vitesse par la pression, on peut écrire :

$$\overline{u_i \frac{\partial p'}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u_i'}) - \overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}.$$

Le terme visqueux peut être séparé en un terme de dissipation visqueuse et un terme de diffusion visqueuse par la relation suivante :

$$\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k^2}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_k^2}} = \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k^2} - 2 \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}.$$

En remplaçant ces deux termes dans l'équation (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \overline{u_k \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k}} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{v \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k}} - \overline{u_i' u_j' u_k'} \right) \\ -1- & \qquad \qquad \qquad -2- \quad -3- \\ -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{p' u_i'}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{p' u_j'}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)} & \qquad \qquad \qquad (2.14) \\ -4- & \qquad \qquad \qquad -5- \\ -\overline{u_j' u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{u_i' u_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - 2 \overline{v \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} & \\ -P_{ij}- & \qquad \qquad \qquad -\varepsilon- \end{aligned}$$

C'est l'équation de transport du tenseur de Reynolds (voir par exemple Hinze (1975), Launder et al. (1975), Hanjalic et Launder (1976)) dont les termes ont la signification suivante:

-1- Evolution et transport de la tension de Reynolds due à la convection par l'écoulement moyen.



- 
- 2- Transport de la tension de Reynolds due à la viscosité.
  - 3- Transport de la tension de Reynolds due à la convection par les fluctuations de vitesse.
  - 4- Diffusion par effet des fluctuations de pression.
  - 5- Corrélation entre les fluctuations de pression et le taux de déformation.
  - $P_{ij}$ - production par le gradient de vitesse moyen.
  - $\epsilon$ - Dissipation par les effets visqueux.

En revenant à l'équation (2.8), l'inconnue principale est la viscosité turbulente  $\nu_t$ . Ce terme est un scalaire mais pas une constante, il varie dans l'espace et dans le temps. Pour le déterminer, il est nécessaire d'utiliser un des modèles conçus pour cet effet. D'abord, on va présenter le modèle le plus répandu le k- $\epsilon$ . Puis, on décrira un modèle récemment publié le  $\overline{v^2}$ -f et qui fait l'objet de cette thèse.

## 5.2 Le modèle k- $\epsilon$

Dans ce modèle la viscosité turbulente est estimée comme étant un produit d'une échelle de longueur caractéristique des fluctuations turbulentes par une échelle de vitesse fluctuante (Hinze, 1975).

$$\nu_t \approx u' l$$

$$\text{On prend } \begin{cases} u' = k^{1/2} \\ l = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \end{cases} \text{ donc } \nu_t \text{ devient } \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.15)$$

où  $c_\mu$  est une constante de valeur 0.09

Pour ce fait, il nous faut deux équations de transport pour l'énergie turbulente k et pour la dissipation  $\epsilon$ .

Pour avoir l'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente, il suffit de revenir à

l'équation (2.14) et prendre  $i=j$  car  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ , on aura donc :

Equation de transport pour  $k$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \overline{u'_j k} - \overline{u'_j p'} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \quad (2.16)$$

Pour l'équation de dissipation, il suffit de multiplier l'équation de la fluctuation de vitesse

(2.12) par  $\nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$ , pour trouver l'équation de transport de la dissipation  $\varepsilon$ , car

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \nu \overline{u'_j} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \\ & - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \\ & - 2\nu \overline{u'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_i} - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - 2 \left( \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 5.2.1 Analyse d'ordre de grandeur

Dans ces équations caractéristiques de l'énergie et de dissipation, chaque terme a un poids qui ne peut être déterminé que par une analyse d'ordre de grandeur. Dans ce but, on définit des échelles pour les variables de base de chaque mouvement :

$T$  : échelle de temps.

$u$  : échelle de vitesse.

$l$  : échelle de longueur des grands tourbillons porteurs de l'énergie cinétique turbulente

$\lambda$  : micro échelle, d'après G. I. Taylors elle est définie par  $\varepsilon = 15\nu u^2 / \lambda^2$ .

---

D'abord, on doit étudier la relation entre ces différentes échelles, afin de mettre la bonne grandeur pour chaque terme des équations de transport à étudier. Pour ce fait, on va introduire la variable sans dimension, le nombre de Reynolds  $Re = \frac{ul}{\nu}$ .

D'autre part,  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $\frac{u^3}{l}$ , alors et à partir de la définition de  $\lambda$ , on peut déduire

$$\text{que } \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 = \frac{15\nu}{ul}, \text{ donc } \frac{\lambda}{l} = \sqrt{15} Re^{-1/2}.$$

Dans un deuxième temps, on introduit le nouveau nombre de Reynolds basé sur la longueur  $\lambda$ ;  $Re_\lambda = \frac{u\lambda}{\nu}$ , d'où la relation  $Re_\lambda = \sqrt{15} Re^{1/2}$ .

Ces différentes relations vont être utilisées dans ce qui suit.

➤ Analyse d'ordre de grandeur pour l'équation de l'énergie :

On va étudier cette équation terme par terme :

$$\text{-1- } \frac{\partial k}{\partial t} \sim \frac{u^2}{T} \sim \frac{u^3}{l}$$

$$\text{-2- } u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \sim \frac{u^3}{l}$$

$$\text{-3- } \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \sim \nu \frac{u^2}{l^2} \sim \frac{ul}{Re} \frac{u^2}{l^2} \sim \frac{u^3}{l} Re^{-1}$$

$$\text{-4- } \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j k}) \sim \frac{u^3}{l}$$

En suivant l'estimation de Tennekes et Lumley (1977), On prend  $u^2$  comme ordre de grandeur pour la pression.

$$\text{-5- } \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j p'}) \sim \frac{u^3}{l}$$

---


$$-6- \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \sim \frac{u^3}{l}$$

$$-7- \overline{v \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \sim v \frac{u^2}{\lambda^2} = \frac{u^3}{l} \frac{l^2}{\lambda^2} \text{Re}^{-1} = \frac{u^3}{l} \frac{\text{Re}}{\sqrt{15}} \text{Re}^{-1} \sim \frac{u^3}{l}$$

Pour ce dernier terme -7-, sous l'hypothèse d'homogénéité, on peut le garder comme étant un terme de dissipation et on le note  $-\varepsilon$  même sans avoir besoin à étudier son ordre de grandeur.

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \frac{\partial k}{\partial x_j} - \overline{u'_j k} - \overline{u'_j p'} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - v \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \\ (1) \quad (1) \quad & \quad (1) \quad (1) \quad (1) \quad (1) \quad (1) \end{aligned}$$

➤ Analyse d'ordre de grandeur pour l'équation de  $\varepsilon$  :

L'équation de transport de la dissipation de l'énergie turbulente est plus délicate à interpréter et à modéliser.

$$-1- \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \sim \varepsilon \frac{u}{l}$$

$$-2- \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \sim \varepsilon \frac{u}{l}$$

$$-3- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \sim \frac{\varepsilon}{l^2} v \sim \varepsilon \frac{u}{l} \text{Re}^{-1}$$

Le terme suivant contient le terme -7- de l'équation de l'énergie précédente  $v \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}$

$$-4- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{v u'_j \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right) \sim \varepsilon \frac{u}{l}$$

$$-5- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{2v \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) \sim \frac{1}{l} v \frac{u^2}{\lambda} \frac{u}{\lambda} = v \frac{u^2}{\lambda^2} \frac{u}{l} \sim \varepsilon \frac{u}{l} \text{ car } \varepsilon = 15v u^2 / \lambda^2$$

$$-6- \quad v \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left( \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_1} \frac{\partial u_j'}{\partial x_1}} + \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_1} \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} \right) \sim v \frac{u}{l} \frac{u^2}{\lambda^2} \sim \varepsilon \frac{u}{l}$$

$$-7- \quad v \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_1}} \sim \frac{u^2}{\lambda} \frac{u}{l^2} v = v \frac{u^3}{l} \frac{1}{\lambda l} = \frac{u \lambda}{\text{Re}_\lambda} \varepsilon \frac{1}{\lambda l} \sim \varepsilon \frac{u}{l} \text{Re}^{-1/2}$$

$$-8- \quad v \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_1} \frac{\partial u_j'}{\partial x_1}} \sim v \frac{u^3}{\lambda^3} \sim \frac{u \lambda}{\text{Re}_\lambda} \frac{u^3}{\lambda^3} \sim \varepsilon \frac{u}{l} \frac{l^2}{\lambda^2} \text{Re}_\lambda^{-1} \sim \varepsilon \frac{u}{l} \text{Re}^{1/2}$$

Il faut signaler aussi que pour les dérivées secondes, on va définir une nouvelle échelle  $\delta$

(voir R. Schiestel, 1998) tel que  $\frac{\delta}{\lambda} = \text{Re}_\lambda^{-1/2}$ . Ce terme a pour origine l'équation de

dissipation elle-même. En effet, si la dissipation soit égale à la production, on se trouvera

face à l'égalité d'ordre de grandeur suivante :

$$v \underbrace{\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_1} \frac{\partial u_j'}{\partial x_1}}}_{v \frac{u^3}{\lambda^3}} = \underbrace{\overline{\left( v \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_1} \right)^2}}_{v^2 \frac{u^2}{\lambda^2 \delta^2}}$$

Ainsi  $\frac{\delta^2}{\lambda} = \frac{v}{u}$  et  $\frac{\delta}{\lambda} = \text{Re}^{-1/2}$

$$-9- \quad \overline{\left( v \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_1} \right)^2} \sim \left( v \frac{u}{\delta \lambda} \right)^2 \sim u^2 \left( \frac{u \lambda}{\text{Re}_\lambda \lambda \text{Re}_\lambda^{-1/2}} \right)^2 \sim \frac{u^3}{l} \frac{u}{l} \text{Re}^{1/2} \sim \varepsilon \frac{u}{l} \text{Re}^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \underbrace{v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_{\text{Re}_i^{-1}} - \underbrace{v u'_j \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \right)^2}_{(1)} - \underbrace{2v \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}_{(1)} \right) \\
&\quad - 2v \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right) \\
&\quad - 2v u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_1} - 2v \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} - 2 \left( v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_1} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

(1)
(1)
(1)
(1)
(1)
(1)
(1)

Si le nombre de Reynolds est trop grand, on peut négliger les termes dont la puissance de grandeur est négative.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \underbrace{v u'_j \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}_{-2-} + \underbrace{2v \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}_{-3-} \right) - 2v \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right) \\
&\quad - 2v \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} - 2 \left( v \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_1} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.19}$$

-1-
-2-
-3-
-4-
-5-
-6-

Avec :

- -1- convection
- -2- diffusion par la viscosité
- -3- diffusion par fluctuation de pression
- -4- production
- -5- et -6- dissipation

De même, pour l'équation de l'énergie, il nous reste :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \underbrace{-\overline{u'_j k'}}_{-1-} - \underbrace{\overline{u'_j p'}}_{-2-} \right) - \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{-3-} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} - v \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \tag{2.20}$$

-1-
-2-
-3-
-4-

- -1- convection par écoulement moyen
- -2- convection par la pression totale turbulente
- -3- production
- -4- dissipation

### 5.2.2 Modélisation de l'équation de k

Dans le terme -2- de l'équation (2.20),

$$-\overline{u'_j k'} = \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.21)$$

où  $\sigma_k$  est une constante. Le terme  $-\overline{u'_j p'}$  est souvent négligé par les auteurs ou bien, il peut être regroupé avec le  $\overline{u'_j k'}$  avec ajustement de  $\sigma_k$ .

$$\text{En fait, } -\overline{u'_j p'} = \frac{v_t}{\sigma_p} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \text{ et } \frac{\partial p'}{\partial x_j} \simeq \frac{\partial u'^2}{\partial x_j} \simeq \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.22)$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \varepsilon \quad (2.23)$$

### 5.2.3 Modélisation de l'équation de la dissipation

$$\text{Les termes -2- et -3-} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

$$\text{Le terme -4-} \longrightarrow -c_{\varepsilon 1} a_{ij} \varepsilon \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \text{ avec } a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$$

$$\text{-4-} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P$$

$$\text{Les termes -5- et -6-} \longrightarrow c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.24)$$

Suivant la littérature plusieurs valeurs de constantes ont été proposées par différents travaux, ces propositions ont été groupé dans le tableaux suivant, par Aupoix (2004).

Modèle	$C_\mu$	$\sigma_K$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_\varepsilon$
Jones & Launder (1972)	0.09	1.0	1.57	2.00	1.3
Launder & Sharma (1974)	0.09	1.0	1.44	1.92	1.3
Chien (1982)	0.09	1.0	1.35	1.80	1.3
Nagano and Tagawa (1990)	0.09	1.4	1.45	1.90	1.3
Myong & Kasagi (1990)	0.09	1.4	1.40	1.80	1.3
Michelassi & Shih (1991)	0.09	1.3	1.45	2.00	1.3
So & al. (1992)	0.09	1.0	1.50	1.83	1.45
Bézard (2000)	0.09	0.57	1.32	1.84	1.80
Bézard (2000)	0.09	0.58	1.48	1.97	1.14

Tableau II.1 Les constantes du modèle k-ε

Ce modèle n'est valable que pour des nombres de Reynolds turbulent ( $R_T = k^2/\tilde{\nu}\varepsilon$ ) grands, alors qu'au voisinage des parois, ce nombre est en baisse. Certaines constantes du modèle vont varier avec ce dernier. D'autres modifications doivent être prises en compte tel que la diffusion visqueuse dans la zone de proche paroi et de nouveaux termes doivent être introduits pour prendre en compte l'anisotropie des structures dissipatives.

A partir de l'étude faite par Patel et al (1984) à propos des différentes versions proposées pour le modèle k-ε, la forme générale des équations de transport pour l'énergie cinétique et pour sa dissipation s'écrivent respectivement :



$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \varepsilon \quad (2.25)$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P - c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E \quad (2.26)$$

avec  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D$ . Une autre fonction  $f_\mu$  intervient dans l'équation de la viscosité turbulente pour corriger son profil en proche paroi,

$$v_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.27)$$

Différentes propositions sont mises en places pour la détermination de  $f_\mu$  et des autres fonctions et variables présentes dans les équations de transport de  $k$  et de  $\varepsilon$ . Le tableau suivant résume une partie de ces propositions :

Modèle	D	E
Jones and Launder (1972)	$-2v \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$2vv_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$
Launder and Sharma (1974)	$-2v \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$2vv_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$
Chien (1982)	$-2v \frac{k}{y^2}$	$-2vv_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$
Nagano and Tagawa (1990)	0	0
Myong and Kasagi (1990)	0	0
Michelassi and Shih (1991)	$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{0.004v_t}{f_\mu^2 \sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right)$	$vv_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$

SO et al. (1992)	0	0
------------------	---	---

Modèle	$f_2$	$f_\mu$
Jones and Launder (1972)	$1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$\exp\left(-\frac{2.5}{1 + \frac{R_t}{50}}\right)$
Launder and Sharma (1974)	$1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$\exp\left(-\frac{3.4}{\left(1 + \frac{R_t}{50}\right)^2}\right)$
Chien (1982)	$1 - \frac{0.4}{1.8} \exp\left(-\frac{R_t^2}{36}\right)$	$1 - \exp(-0.0115y^+)$
Nagano and Tagawa (1990)	$\left(1 - 0.3 \exp\left(-\left(\frac{R_t}{6.5}\right)^2\right)\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{6}\right)\right)^2$	$(1 + 4.1R_t^{-3/4}) \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right)\right)^2$
Myong and Kasagi (1990)	$\left(1 - \frac{2}{9} \exp\left(-\frac{R_t^2}{36}\right)\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{5}\right)\right)^2$	$\left(1 + \frac{3.45}{\sqrt{R_t}}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{70}\right)\right)$
Michelassi and Shih (1991)	$f_p \left(1 - 0.22 \exp\left(-\left(\frac{R_t}{6}\right)^2\right)\right)$	$f_p^{-1} \left(1 - \frac{\exp(-0.0004 \exp(1.2R_L^{1/4}))}{\exp(-0.0004)}\right)$
SO et al. (1992)	$\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} \left(1 - \frac{2 - C_{\varepsilon 2} f_{p2}}{C_{\varepsilon 2}}\right) - \frac{1}{2} f_{p2} \left(\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon}\right)^2$	$\left(1 + \frac{3.45}{\sqrt{R_t}}\right) \tanh\left(\frac{y^+}{115}\right)$

$$f_p = 1 - \exp(-\sqrt{R_t}), \quad f_{p2} = \exp\left(-\left(\frac{R_t}{64}\right)^2\right), \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}, \quad R_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}, \quad R_L = \frac{k^{3/2}|u|}{\nu\varepsilon}, \quad \varepsilon^* = \varepsilon - 2\nu \frac{k}{y^2}$$

Tableau II.2 Différentes propositions de la littérature pour les fonctions du modèle k-ε

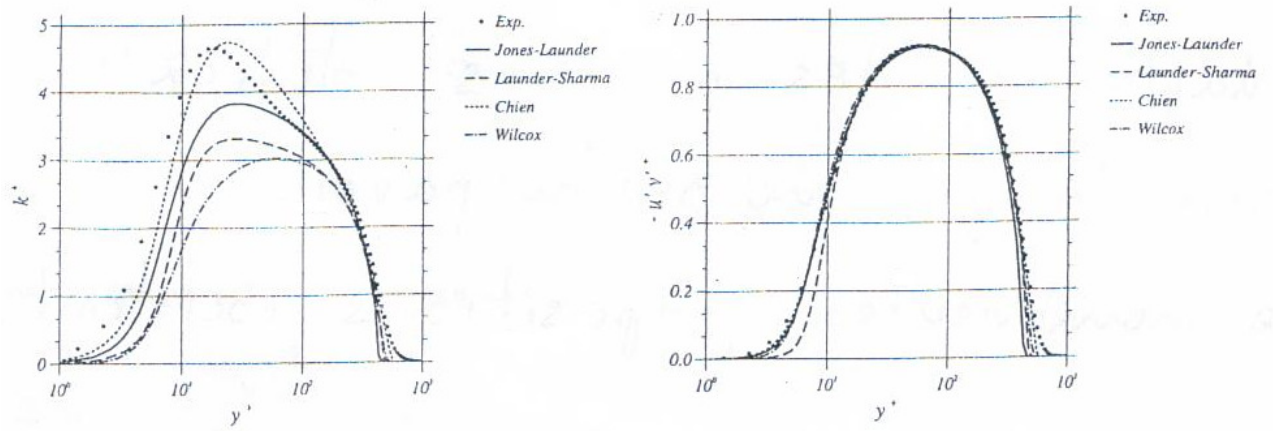


Fig 2.1 : l'énergie cinétique turbulente  $k^+$  et la contrainte de cisaillement  $-\overline{u'v'}$  en fonction de la distance à la paroi, comparaison de quatre modèles avec les résultats expérimentaux (Wilcox, 1988).

Ces figures de comparaison montrent que le modèle de Chien (1982) est le plus proche des points expérimentaux. C'est pourquoi, il est le modèle le plus proche du réel et donc le plus convenable pour l'utilisation du modèle k-ε.

$$f_{\mu} = 1 - \exp(-0.0115y^+) \quad (2.28)$$

$$E = -2\nu \frac{\epsilon}{y^2} \exp(-0.5y^+)$$

$$D = 2\nu \frac{k}{y^2}$$

$$c_{\mu} = 0.09, c_{\epsilon 1} = 1.35, c_{\epsilon 2} = 1.8$$

$$\sigma_k = 1, \sigma_{\epsilon} = 1.3$$

$$f_1 = 1, f_2 = 1 - 0.22 \exp(-(R_T/6)^2)$$

$$y^+ = y \cdot u_{\tau} / \nu$$

### 5.3 Le modèle $\overline{v^2}$ -f

---

Le modèle  $\overline{v^2}$ -f est du type modèles à viscosité turbulente. D'abord proposé par Durbin (1991), ce modèle a été initialement appelé k- $\varepsilon$ - $\overline{v^2}$ , vu qu'il est réduit à trois équations de transport pour l'énergie cinétique k, pour sa dissipation  $\varepsilon$  et pour la composante normale du tenseur de Reynolds  $\overline{v^2}$ .

En effet, le modèle  $\overline{v^2}$ -f utilise la composante  $\overline{v^2}$  comme échelle caractéristique pour la vitesse, par contre, dans le cas du modèle k- $\varepsilon$ , cette échelle est représentée en fonction de l'énergie cinétique. Durbin a expliqué dans ses travaux (Durbin, 1991, 1993) que cette dernière est isotrope dans la zone de proche paroi, alors que la turbulence est fortement anisotrope dans cette zone, ce qui justifie le choix de  $\overline{v^2}$  comme une nouvelle échelle de longueur. Ainsi, la viscosité turbulente devient :

$$\nu_t = C_\mu \overline{v^2} T \quad (2.29)$$

Dont T est une échelle de temps,  $T = \frac{k}{\varepsilon}$ , qu'on expliquera plus tard.

D'autre part, ce modèle s'appuie sur l'idée d'introduire l'aspect elliptique pour résoudre la fermeture de proche paroi. Dans les écoulements incompressibles, les fluctuations de pression sont régies par une équation elliptique. Donc, il est intéressant d'introduire l'ellipticité à travers les termes de corrélations pression - vitesse dans les équations de transport du tenseur de Reynolds.

De la même façon que pour les équations de l'énergie cinétique k et de la dissipation  $\varepsilon$ , on va modéliser l'équation du tenseur de Reynolds (2.14). Dans cette dernière, le terme de production  $P_{ij}$  est exact, contrairement aux autres modèles à viscosité turbulente, ainsi que le terme de diffusion visqueuse -2-. Seuls trois termes sont à modéliser : le terme de

pression -4- et -5- qu'on appellera  $\phi_{ij}$ , le terme de dissipation  $\varepsilon$  et le terme de diffusion turbulente -3-.

En effet, les corrélations triples -3- intervenant dans cette équation se modélisent à l'aide d'une hypothèse du gradient généralisée due à Daly et Harlow (1970) :

$$-\overline{u'_i u'_j u'_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_i} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i} \quad (2.30)$$

Cette expression n'est pas invariante par changement des axes du repère, ce qui conduit d'autres auteurs à proposer d'autres modèles, comme par exemple, Mellor et Herring(1973):

$$-\overline{u'_i u'_j u'_k} = C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) \quad (2.31)$$

D'autres modèles plus élaborés existent, comme ceux proposé par Hanjalic et Launder (1972), Lumley (1978), Magnaudet (1992) et d'autres.

Cependant, le modèle (2.31) utilise le concept de viscosité turbulente ( $c_\mu k^2/\varepsilon$ ), ce qui est un peu restrictif dans le cadre d'un modèle de second ordre. C'est pourquoi la plupart des travaux utilisent la première proposition (2.30).

### 5.3.1. L'équation de relaxation elliptique

Classiquement les termes -4- et -5- de l'équation du transport du tenseur de Reynolds (2.14) se modélisent séparément. Le terme de corrélation pression – déformation -5- est de trace nulle en écoulement incompressible. Elle n'intervient donc pas dans le bilan de l'énergie cinétique turbulente : c'est un terme de redistribution d'énergie entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds. Par contre, l'origine physique du terme -4- est la moyenne de la puissance des forces de pression fluctuantes dans le mouvement

fluctuant. Ce terme apparait sous forme d'une divergence. Il ne correspond pas à une création d'énergie, mais plutôt à un transport d'énergie entre différentes régions c'est pourquoi il est abusivement appelé terme de diffusion par la pression. Cette décomposition -4- et -5- permet d'introduire deux termes de signification physique simple pour mieux comprendre le rôle de  $\phi_{ij}$ . Cependant cette décomposition n'est pas unique comme l'a noté Lumley (1975), qui propose la décomposition suivante :

$$\phi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\left( \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)}_{\text{dev}(\phi_{ij})} + \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k p'} \delta_{ij} - \underbrace{\frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k p'} \delta_{ij}}_{D_{ij}^p} \quad (2.32)$$

Avec la partie déviatrice de  $\phi_{ij}$  est définie par :

$$\text{dev}(\phi_{ij}) = \phi_{ij} - \frac{1}{3} \phi_{kk} \delta_{ij} \quad (2.33)$$

Par définition,  $\text{dev}(\phi_{ij})$  est de trace nulle : c'est un terme redistributif comme le terme -5- dans la décomposition précédente.  $D_{ij}^p$  est un terme de diffusion par la pression. La non unicité d'une telle décomposition en partie redistributive et diffusive, ainsi que divers arguments plaident également en défaveur de ces décompositions. Spéziiale (1985) note que les termes introduits ne sont pas indépendants de la rotation du repère dans la limite de la turbulence à deux composantes. Manceau (1999, Manceau et al. 2002) alors a modélisé le terme  $\phi_{ij}$  sans introduire de décomposition même si sa signification physique est moins claire que celle des deux termes de sa décomposition.

On modélise alors le terme  $\phi_{ij}$  défini par :

$$\rho \phi_{ij} = -\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} - \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \quad (2.34)$$

La pression fluctuante  $p'$  obéit à une équation de Poisson. En effet, si on prend la divergence de l'équation (2.11) des fluctuations de vitesse, on obtient :

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p' = -2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u'_i u'_j - \bar{u}'_i \bar{u}'_j) \quad (2.35)$$

En prenant la dérivée spatiale de cette équation (2.35), on en déduit que le gradient de pression obéit également à une équation de Poisson :

$$\nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u'_i u'_j - \bar{u}'_i \bar{u}'_j) \right) \quad (2.36)$$

A noter qu'en proche paroi, à partir d'une étude asymptotique (Mansour et al. 1988) :

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} = 0 \quad (2.37)$$

Par analogie avec ce résultat, le gradient de pression fluctuante, obéit à la condition aux limites suivante (Manceau, 1999, Fadai-Ghotbi, 2007) :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p'}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (2.38)$$

La solution  $\frac{\partial p'}{\partial y}$  de l'équation (2.36) peut être exprimé sous forme intégrale en utilisant la

fonction de Green du domaine  $G_\Omega$  (Dautray et Lions 1987, Euvrard 1994, Manceau et al. 2001)

$$\frac{\partial p'}{\partial x_k}(x) = \int_\Omega \psi_{ij}(x, x') G_\Omega(x, x') dV(x') \quad (2.39)$$

Alors l'équation de  $\phi_{ij}$  (2.34) devient,

$$\rho \phi_{ij}(x) = \int_\Omega \psi_{ij}(x, x') G_\Omega(x, x') dV(x') \quad (2.40)$$

avec

---


$$\psi_{ij}(x, x') = -u_i' \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j}(x') - u_j' \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(x') \quad (2.41)$$

Cette équation fait intervenir des corrélations en deux points. Durbin (1991) propose de définir la fonction  $f(x, x')$  reliant la corrélation en deux points  $\psi_{ij}(x, x')$  à la corrélation en un point  $\psi_{ij}(x', x')$ ,

$$\psi_{ij}(x, x') = \psi_{ij}(x', x') f_{ijkl}(x, x') \quad (2.42)$$

Dans cette relation, le tenseur à quatrième ordre  $f_{ijkl}$  contient 81 coefficients. Cependant, il est toujours compliqué de modéliser ce type de relation, voir même impossible. C'est pourquoi on se contente ici par une simple fonction scalaire  $f$ , c'est-à-dire on prend un tenseur d'ordre zéro, tout en tenant en compte que cette fonction ne peut représenter qu'approximativement, l'effet non local (Manceau et al. 2001).

La fonction  $f$  se modélise simplement par (Manceau et Hanjalic, 2000, 2002):

$$f(x, x') = \exp\left(-\frac{r}{L}\right) \quad (2.43)$$

où  $r = \|x' - x\|$  et  $L$  est une longueur de corrélation des effets de pression. L'équation (2.40) devient alors :

$$\rho \phi_{ij}(x) = \int_{\Omega} \psi_{ij}(x', x') f(x, x') G_{\Omega}(x, x') dV(x') \quad (2.44)$$

Dans le cas d'un domaine semi-infini limité par une paroi  $y=0$ ,  $\Omega = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^+ \cdot \mathbb{R}$ , la fonction de Green associée à  $\nabla^2$  est (Manceau et al. 2001, Euvrard 1994) :

$$G_{\Omega}(x, x') = -\frac{1}{4\prod r} - \frac{1}{4\prod r^*} \quad (2.45)$$

où  $r^* = \|x - x'^*\|$  et  $x'^*$  étant la symétrique de  $x'$  par rapport à la paroi.

L'équation intégrale de  $\phi_{ij}$  s'écrit alors :



$$\rho\phi_{ij}(x) = -\int \underbrace{\psi_{ij}(x', x')}_{M_\Omega} \left( \frac{e^{-r/L}}{4\prod r} + \frac{e^{-r^*/L}}{4\prod r^*} \right) dV(x') \quad (2.46)$$

Or la fonction de Green dans l'espace  $\Omega$ , associé à l'opérateur  $(1/L^2 - \nabla^2)$  (Manceau et al. 2001), vaut :

$$g_\Omega(x, x') = -\frac{e^{-r/L}}{4\prod r} - \frac{e^{-r^*/L}}{4\prod r^*} \quad (2.47)$$

Si le point courant  $x'$  est loin de la paroi, alors on a :

$r \ll r^*$ , signifiant que le terme d'écho est négligeable dans les équations (2.46) et (2.47), alors :

$$g_\Omega \approx M_\Omega \quad (2.48)$$

Alors que si le point  $x'$  est en proche paroi,  $r \approx r^*$ . Ainsi, l'égalité (2.48) est toujours correcte.

En supposant que la longueur  $L$  est constante dans tout le domaine et à partir de l'équation (2.46), on peut déduire que,

$$\nabla^2 \phi_{ij}(x) - \frac{1}{L^2} \phi_{ij}(x) = \frac{1}{\rho} \psi_{ij}(x, x) \quad (2.49)$$

$$\phi_{ij}(x) - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}(x) = \phi_{ij}^h \quad (2.50)$$

C'est l'équation de relaxation elliptique. Le terme de droite  $\phi_{ij}^h$  peut être modélisé par différents types de modèles quasi homogènes. On peut citer le modèle de Rotta avec IP, le SSG (Demuren et Wilson 1994, Laurence et Durbin 1995, Parneix et al. 1998), le modèle de Craft et Launder (Laurence et Durbin, 1995) et d'autres (Launder et al. 1975, Wizman 1996, Jones et Musogno 1988).

L'expression utilisée par SSG se voit la plus convenable à utiliser dans cette étude :

---


$$\phi_{ij}^h = -C_1 \frac{1}{T} \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (2.51)$$

$$\text{où } P = \frac{1}{2} P_{ii}$$

Le terme de pression est alors solution d'une équation différentielle et elliptique qui permet de prendre en compte l'effet non-local contrairement aux modèles classiques où la pression est exprimée sous forme d'une relation algébrique. Cet aspect non local permet à  $\phi_{ij}$  de sentir l'effet de la paroi à distance.

Une étude asymptotique montre que les conditions aux limites vont permettre d'imposer un comportement correct de  $\phi_{ij}$  à la paroi.

### 5.3.2. Terme de dissipation

Avant d'aborder l'étude des conditions aux limites de cette équation elliptique, on va modéliser le terme de dissipation, qui va faire une partie de cette équation.

Les modèles classiques utilisent un modèle de proche paroi,  $\epsilon_{ij}^*$ , pour reproduire correctement l'anisotropie dans cette région. Puis, une fonction  $f$  permet de corriger le modèle de  $\epsilon_{ij}^*$  à  $\frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij}$  dans la zone loin de paroi. Cette fonction dépend en général du nombre de Reynolds turbulent (Hanjalic et Launder 1976, Prud'homme et Elghobashi 1986, So et al. 1987, Kebede et al. 1985, lai et al. 1990) ou du paramètre d'aplatissement de Lumley (1978). Le recours à ce type de fonction d'ad hoc est contradictoire avec la logique du modèle  $\overline{v^2} - f$ . C'est pour quoi Durbin a proposé l'utilisation d'une équation elliptique également pour modéliser  $\epsilon_{ij}$ .

---

D'abord,  $\epsilon_{ij}^*$ , la forme limite de  $\epsilon_{ij}$  en proche paroi, est choisie, tel que l'a proposé Lumley (1978) pour les équations du tenseur de Reynolds, on utilise le modèle de Rotta qui prend en compte l'anisotropie dans cette zone (Mansour et al. 1988) :

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} \epsilon. \quad (2.52)$$

Alors que loin des parois, on peut supposer une forme isotrope de la dissipation :

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} \quad (2.53)$$

On peut alors décomposer le tenseur de dissipation de la forme suivante :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^* + (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) \quad (2.54)$$

Ainsi, au voisinage de la paroi,  $(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) \rightarrow 0$

Tandis que, loin de celle-ci,  $(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) \rightarrow \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} - \epsilon_{ij}^*$

Alors, par analogie avec  $\phi_{ij}$ ,  $(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*)$  se calcule à l'aide d'une équation elliptique ayant

pour terme source  $\left( \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} - \epsilon_{ij}^* \right)$  :

$$(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) - L^2 \nabla^2 (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} - \epsilon_{ij}^* \quad (2.55)$$

Cependant, il est possible de résoudre une seule équation de relaxation elliptique pour les deux termes  $\phi_{ij}$  et  $(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*)$ . En effet, dans l'équation de transport des composantes du tenseur de Reynolds, apparaît la différence  $\phi_{ij} - \epsilon_{ij}$ , qui peut s'écrire tel que :

$$\phi_{ij} - \epsilon_{ij} = \phi_{ij} - (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*) - \epsilon_{ij}^*$$

Puisque  $\epsilon_{ij}^*$  se modélise facilement suivant (2.52), on définit :

$$\wp_{ij} = \phi_{ij} - (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*). \quad (2.56)$$

Ainsi une seule équation de relaxation elliptique pour  $\wp_{ij}$  va être résolue, en prenant la différence de (2.50) et (2.55) :

$$\wp_{ij} - L^2 \nabla^2 \wp_{ij} = \phi_{ij}^h - \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} + \epsilon_{ij}^* \quad (2.57)$$

Cette équation devra respecter la condition aux limites  $\wp_{ij} = O(y^2)$ , à la paroi.

Dans le cas de la deuxième composante diagonale du tenseur de Reynolds, cette condition ne peut être suffisante que si on le renforce par une fonction  $f_{22} = \wp_{22}/k$  (Launder et al.) qui obéit alors à la condition  $f_{22} = O(1)$ , en proche paroi.

Une étude asymptotique (Manceau, 1999) montre que :

$$(f_{22})_{y=0} = -\frac{20v^2}{\epsilon} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v^2}{y^4} \quad (2.58)$$

Cette condition (2.58) permet d'assurer la condition de  $\wp_{22}$  en proche paroi.

Finalement, pour obtenir le bon comportement de  $\overline{v^2}$  à la paroi, il faut imposer la condition (2.58). Ainsi il est nécessaire de résoudre une équation pour  $f_{22}$  au lieu de  $\wp_{22}$ .

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = \frac{1}{k} \left( \phi_{ij}^h - \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} + \epsilon_{ij}^* \right) \quad (2.59)$$

C'est cette équation qui sera résolue conjointement à l'équation de transport de  $\overline{u_i' u_j'}$ , (2.14), dans laquelle la différence entre les termes -3- et -ε- sera modélisée par  $k f_{ij} - \epsilon_{ij}^*$ .

Ainsi, le modèle de Durbin pour le tenseur de Reynolds s'écrit :

$$\frac{D \overline{u_i' u_j'}}{Dt} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + k f_{ij} - \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_k} \overline{u_l' u_m'} T \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_m} \right) + v \nabla^2 \overline{u_i' u_j'} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} &= \frac{1}{k} \left( -C_1 \frac{1}{T} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \frac{k}{T} \delta_{ij} + \frac{\overline{u'_i u'_j}}{T} \right) \\
&= \frac{1-C_1}{kT} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right)
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont données par LRR (Launder et al. 1975) :  $C_1 = 1.4$ ;  $C_2 = 0.6$ ,  $C_\mu = 0.22$ , tel qu'elle est prise dans la littérature (Manceau et al. 2002, Manceau et al. 2001, Wizman 1996), et  $\sigma_k = 1$ . Les termes  $k/\varepsilon$  ont été remplacés par  $T$ , l'échelle de temps de la turbulence.

Ainsi, à partir de cette équation des tensions de Reynolds. On, dispose de la composante normale  $\overline{v^2}$  dans un modèle à viscosité turbulente. La reconstruire par l'équation de Boussinesq n'étant évidemment pas possible. C'est pourquoi, Durbin a proposé de résoudre une équation de transport pour  $\overline{v^2}$ . Pour cela, on peut remarquer que dans le cas d'un cisaillement pur, ce système d'équations, dans le modèle au second ordre de Durbin, (2.60)-(2.61) s'écrit :

$$\frac{D\overline{v^2}}{Dt} = k f_{22} - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{C_\mu \overline{v^2}}{\sigma_k} T \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) + v \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial^2 y} \tag{2.62}$$

$$f_{22} - L^2 \nabla^2 f_{22} = \frac{1-C_1}{kT} \left( \overline{v^2} - \frac{2}{3} k \right) + \frac{2}{3} \frac{C_2}{k} P. \tag{2.63}$$

On peut donc utiliser l'expression de la viscosité turbulente (2.29) en association avec une équation de transport pour  $\overline{v^2}$  et une équation elliptique, déduites respectivement de (2.62) et (2.63)

$$\frac{D\overline{v^2}}{Dt} = k f - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) \tag{2.64}$$

---


$$f - L^2 \nabla^2 f = (C_1 - 1) \left( \frac{2/3 - \bar{v}^2/k}{T} \right) + C_2' \frac{P}{k}. \quad (2.65)$$

Il est à noter, dans ces équations, que  $\sigma_k$  a été prise égale à 1,  $f_{22}$  a simplement été noté  $f$  pour alléger les notations et que l'on a posé  $C_2' = \frac{2}{3} C_2$ .

L'équation de  $k$  est modélisée de la même manière que dans le cas du modèle  $k-\varepsilon$

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right), \quad (2.66)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right). \quad (2.67)$$

tout en écrivant  $\varepsilon^2/k$  sous la forme  $\varepsilon/T$ . Pour éviter la singularité dans cette expression, il suffit de borner cette échelle de temps  $T$  par l'échelle de Kolmogorov  $v^{1/2}/\varepsilon^{1/2}$ . Durbin (1991) a donc proposé d'utiliser :

$$T = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}, C_T \left( \frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right). \quad (2.68)$$

Cette échelle de temps est également utilisée dans le terme de génération  $P\varepsilon/k$  qui est réécrit sous la forme  $P/T$ .

Pour calculer la constante  $C_T$ , on utilise l'équation de transport de  $\varepsilon$ , (2.67), en plus de l'expression de  $T$ , (2.68), pour avoir :

$$v \partial_y^2 \varepsilon = \frac{C_{\varepsilon 2} \varepsilon^{3/2}}{C_T v^{1/2}} \quad (2.69)$$

et à partir de Mansour et al. (1988), on a  $\varepsilon = 0.166 R_\tau$ , et  $D_\varepsilon = v \partial_y^2 \varepsilon = 0.02 R_\tau^2$  (voir figure 2.3) pour  $y=0$ .

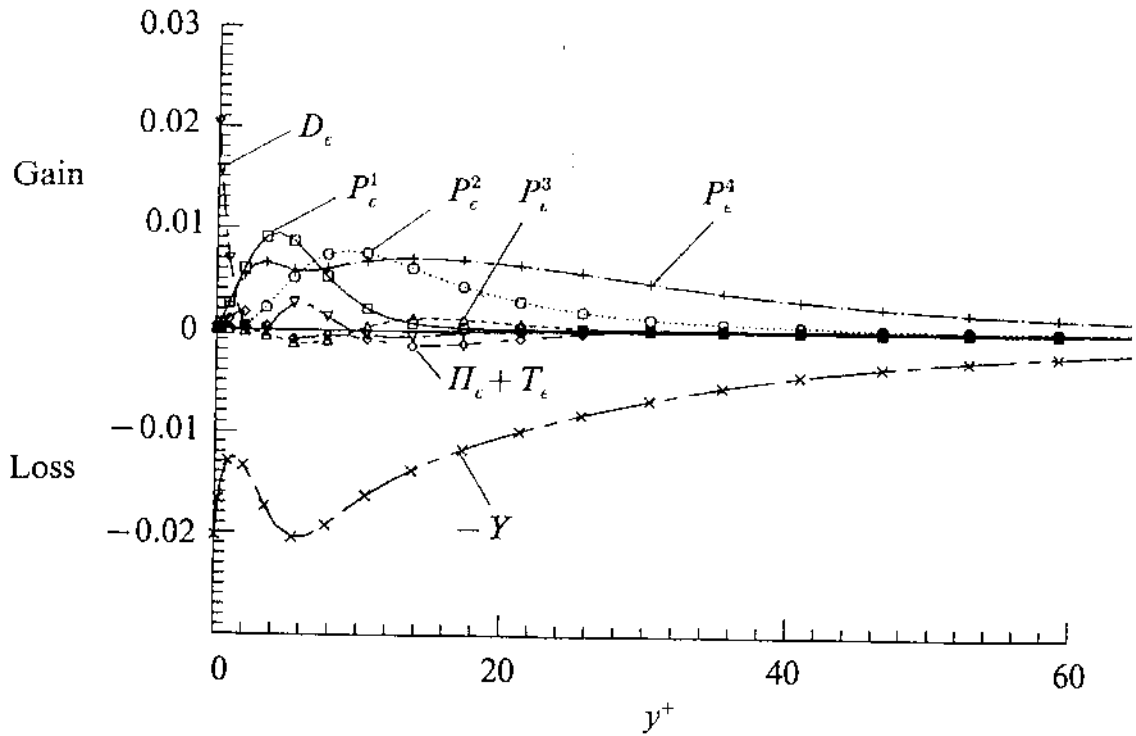


Fig 2.3 : Les différents termes de production, diffusion et dissipation de l'équation de transport de la dissipation (Mansour et al. 1988).

Ainsi, si on prend  $C_{\epsilon_2} = 1.9$ , on aura une valeur de  $C_T = 6.4$  à partir de l'équation (2.69).

La valeur  $C_T = 6$ , est satisfaisante pour avoir une bonne échelle de temps.

Enfin, et en revenant à l'équation (2.67), pour prendre en compte l'augmentation de la génération de  $\epsilon$  près de la paroi, Durbin a proposé d'utiliser une fonction  $f_{\epsilon 1}$  de la forme :

$$f_{\epsilon 1} = 1 + 0.1 \frac{P}{\epsilon} \quad (2.70)$$

Cette fonction intervient dans l'équation de  $\epsilon$  par l'intermédiaire du coefficient  $C'_{\epsilon 1}$ . En effet,  $C'_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 1} f_{\epsilon 1}$  et  $C_{\epsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\epsilon 2} = 1.9$ ,  $\sigma_{\epsilon} = 1.65$  sont des constantes empiriques (Durbin, 1991).

---

L'échelle de longueur qui apparaît dans l'équation de relaxation elliptique de la fonction  $f$  (2.65) doit également être modélisée. L'échelle turbulente classique  $k^{3/2}/\varepsilon$  est utilisée mais, puisqu'elle tend vers zéro à la paroi, et pour éviter une singularité de l'équation de relaxation elliptique, elle est bornée par l'échelle de kolmogorov  $v^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$ . On a donc :

$$L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{v^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \quad (2.71)$$

avec  $C_L=0.2$  et  $C_\eta=80$ , deux constantes empiriques (voir tableau 1 de Manceau et al. 2002, pour le choix des coefficients).



---

Chapitre III :

Traitement numérique

---

# Traitement numérique

Dans ce chapitre, on présente la méthode numérique qu'on a utilisée dans ce travail. En effet, les modèles utilisés dans cette thèse sont les modèles à deux équations de transport le k- $\epsilon$  et le modèle à relaxation elliptique à trois équations de transport le  $\overline{v^2}$ -f.

La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations de ces modèles et de l'écoulement en général. Les équations de conservation sont intégrées sur un volume de control et ensuite les intégrales de volume sont transformées en intégrales de surface via le théorème de Gauss.

Le maillage qu'on va utiliser est un maillage entrelacé, où toutes les intégrales scalaires sont traitées aux centres des mailles, par contre, les vitesses sont localisées aux centres des faces des volumes. La discrétisation dans le temps se fait sous la forme semi-implicite.

## 1. Discrétisation spatiale

Les équations qu'on va étudier dans cette partie sont les équations de bilan pour les grandeurs vectorielles et scalaires suivantes :

- Conservation de la masse (2.5)
- Quantité de mouvement (2.6)
- Energie cinétique turbulente k (2.23)
- Taux de dissipation  $\epsilon$  (2.24)
- Composante normale du tenseur de Reynolds  $\overline{v^2}$  (2.38)
- La fonction source f (2.39)

On observe que l'ensemble de toutes ces équations s'écrivent sous la même forme, à l'exception la dernière :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j \phi}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (J_\phi) = S_\phi \quad (3.1)$$

En projetant les équations vectorielles sur un repère cartésien, on peut écrire les différentes équations des différentes variables.

On écrit ici les équations de transport des modèles k- $\epsilon$  et  $\overline{v^2}$ -f, (2.23), (2.24) et (2.38) d'une façon plus simplifiée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla_1 \left( u_1 k - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_1} \right) + \nabla_2 \left( u_2 k - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_2} \right) \\ + \nabla_3 \left( u_3 k - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_3} \right) = P - \varepsilon \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla_1 \left( u_1 \varepsilon - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \right) + \nabla_2 \left( u_2 \varepsilon - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right) \\ + \nabla_3 \left( u_3 \varepsilon - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{T} (c'_{\varepsilon 1} P - c'_{\varepsilon 2} \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial t} + \nabla_1 \left( u_1 \bar{v}^2 - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x_1} \right) + \nabla_2 \left( u_2 \bar{v}^2 - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x_2} \right) \\ + \nabla_3 \left( u_3 \bar{v}^2 - \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x_3} \right) = \varepsilon k f - \frac{\bar{v}^2}{k} \varepsilon \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{Avec } P = \frac{v_t}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right)^2 \text{ et } \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \text{ et } \nabla_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

(3.6)

L'ensemble de ces équations discrétisées sont rassemblées dans le tableau III.1 sous la forme de l'équation (3.1).

équation	$\varphi$	$J_\varphi$	$S_\varphi$
Conservation de la masse	1	0	0
Quantité de mouvement ox	$\bar{u}$	$\bar{p}\delta_{1j} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + \overline{uu_j}$	0
oy	$\bar{v}$	$\bar{p}\delta_{2j} - v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \overline{vu_j}$	0
oz	$\bar{w}$	$\bar{p}\delta_{1j} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + \overline{uu_j}$	0

Energie cinétique turbulente	k	$-\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial x_j}$	$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \epsilon$
Dissipation	$\epsilon$	$-\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon}\right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}$	$-C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}$
Composante normale du tenseur de Reynolds	$\overline{v^2}$	$-\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_j}$	$\epsilon k f - \frac{\overline{v^2}}{k} \epsilon$

Tableau III.1 : Expression des termes de l'équation (3.1).

La discrétisation d'une telle équation sur le volume de contrôle est mise en œuvre en s'appuyant sur le théorème de Gauss. Ce théorème s'écrit pour un vecteur  $\vec{a}$ , tel que :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds \quad (3.7)$$

où V est le volume de contrôle, S est la surface qui le délimite,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à la surface S et ds est l'élément de surface.

Il est à noter que le terme de droite de cette équation représente le flux à travers la surface S. Ainsi, en intégrant l'équation (3.1) et en lui appliquant le théorème de Gauss, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV + \int_S \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \int_S J_\phi \vec{n} ds = \int_V S_\phi dv \quad (3.8)$$

Cette équation est l'équation de bilan pour la grandeur  $\phi$  et elle constitue la base de la discrétisation spatiale de la méthode des volumes finis.

### 1.1 Le maillage

On considère que l'écoulement a une épaisseur l. le maillage utilisé dans cette étude est un maillage entrelacé. La pression ainsi que les tensions normales de Reynolds sont traitées aux centres des volumes de contrôle, les vitesses sont évaluées aux centres des faces et les composantes de cisaillement des tenseurs des extra- tensions sont calculées aux coins des mailles de pression. La figure 3.1 montre la position de ces variables. On utilisera ces volumes de contrôle pour exprimer les équations du bilan.

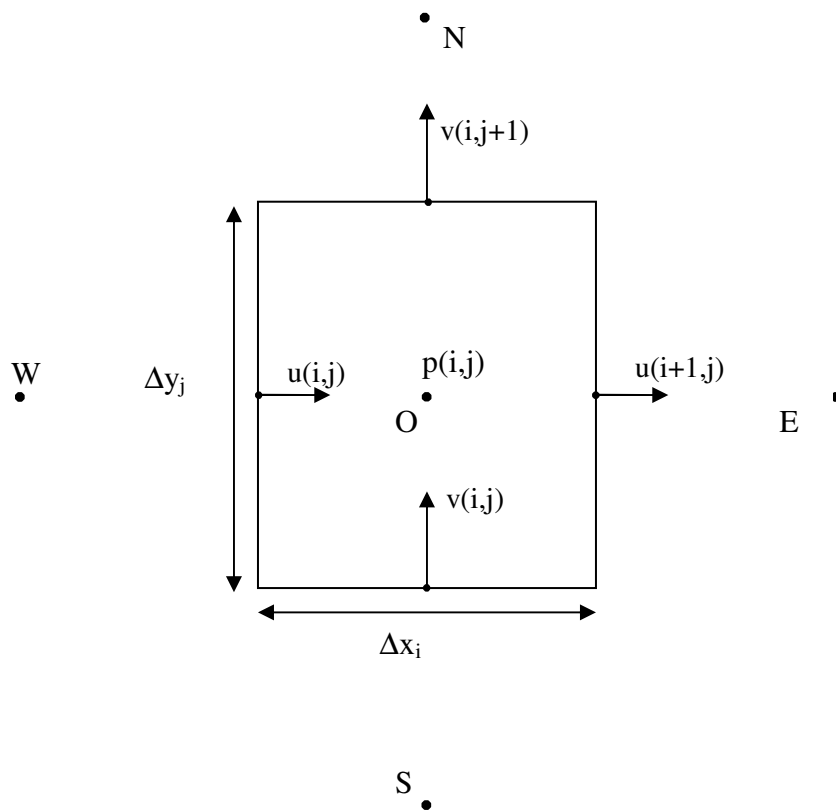
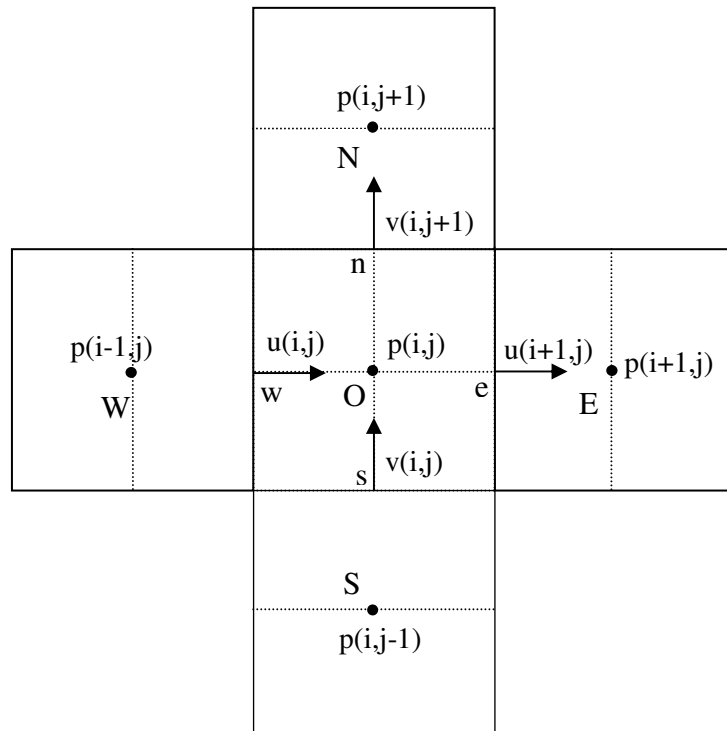


Figure 3.1. Maillage entrelacé : position des variables

Notons O le centre du volume de contrôle, et E, W, N et S les centres des volumes de contrôles adjacents est, ouest, nord et sud respectivement.

Les points e, w, n et s sont les centres des faces est, ouest, nord et sud respectivement du volume de contrôle.

Notons que les grandeurs  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  et  $\Delta z_k$  représentent les grandeurs physiques des frontières du volume de contrôle V centré sur un nœud de pression.

## 1.2 Equation de conservation pour un scalaire

Dans l'équation (3.8), on a des intégrales de volume, leur résolution se fait par le théorème de la moyenne. En effet,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dv = V \frac{\partial \phi_O}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\int_V S_\phi dv = VS_{\phi_O} \quad (3.10)$$

Le traitement des intégrales de surface se fait comme suit :

### 1.2.1 Le terme de diffusion

$$\int_S \vec{J}_\phi \vec{n} ds = \sum_{i=1}^4 Sf_i (\vec{J}_\phi \vec{n})_i \quad (3.11)$$

où i est l'indice des 4 faces w, e, s et nord et  $Sf_i$  sont leurs surfaces respectivement.

Le flux de diffusion s'écrit :

$$\int_S \vec{J}_\phi \vec{n} ds = J_{\phi_1} (Sf_e - Sf_w) + J_{\phi_2} (Sf_n - Sf_s) \quad (3.12)$$

### 1.2.2 Le terme de convection

$$\int_S \phi \vec{v} \vec{n} ds = \sum_{i=1}^4 Sf_i \phi_i (\vec{v} \vec{n})_i \quad (3.13)$$

Les vitesses sont localisées aux centres des faces, tel que le présente la figure suivante 3.2.

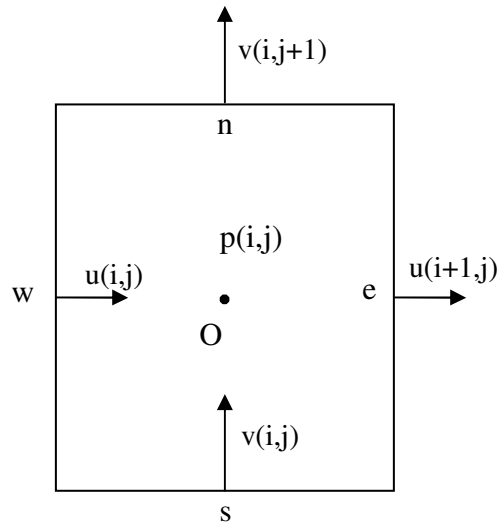


FIG 3.2 Position des composantes de la vitesse dans le volume de contrôle

Et le flux total de convection s'écrit :

$$\int_S \vec{\phi} \vec{v} nds = Sf_e \overline{u}_e \phi_e - Sf_w \overline{u}_w \phi_w + Sf_n \overline{v}_n \phi_n - Sf_s \overline{v}_s \phi_s \quad (3.14)$$

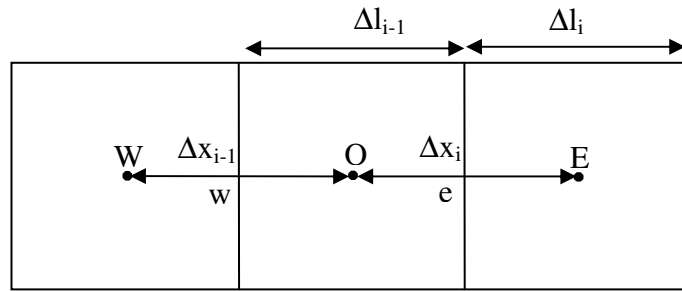
### 1.2.3 Le schéma numérique

Dans l'équation (3.14) la valeur de  $\phi_i$  peut se calculer en choisissant une discrétisation centrée :

$$\phi_e = (\phi_E + \phi_O)/2$$

Or ce type de discrétisation peut amener à une valeur de  $\phi$  non réaliste dans le cas des grands nombres de Reynolds (Patankar, 1980).

Le schéma numérique qui convient pour ce calcul est le schéma décentré au premier ordre dit up-wind ou le schéma au second ordre appelé QUICK (Leonard, 1979). La figure 3.3 illustre ce schéma :



$\Delta l$  : pas de maillage de la vitesse

$\Delta x$  : pas de maillage de la pression

Figure 3.3 Illustration du schéma décentré

- **Le schéma Up-Wind :**

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_E & \text{si } u_e < 0 \\ \varphi_O & \text{si } u_e > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

- **Le schéma QUICK :**

$$\varphi_e = \frac{1}{2}(\varphi_{i-1} + \varphi_i) + \frac{\Delta x_{ip}^2}{8} \left( \frac{\varphi_{ip} - \varphi_{ip-1}}{\Delta x_{ip}} - \frac{\varphi_{ip-1} - \varphi_{ip-2}}{\Delta x_{ip-1}} \right) \frac{1}{\Delta l_{ip-1}} \quad (3.16)$$

$$ip = i \quad \text{si } u_e \geq 0$$

$$ip = i+1 \quad \text{si } u_e < 0$$

En utilisant le premier schéma, le terme convectif (3.14) s'écrit alors, tel que :

$$\overline{u_e \varphi_e} = \overline{u_e} \begin{cases} \varphi_E & \text{si } u_e < 0 \\ \varphi_O & \text{si } u_e > 0 \end{cases}$$

### 1.3 Equation de quantité de mouvement

Après projection de l'équation de quantité de mouvement sur les axes x, y et z, on écrit les termes de convection et de diffusion de la même manière que pour l'équation de conservation pour un scalaire.

Le terme de pression est traité de manière différente. En effet, sur la face ouest par exemple, le bilan de  $u(i,j,k)$  s'écrit :

$$\int_S p \delta_{ij} n ds = (Sf_w p_w - Sf_o p_o) \quad (3.17)$$



Ainsi, pour la composante  $u_w$ , par exemple, l'équation de quantité de mouvement prend la forme suivante :

$$v \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{u}_w) = \text{Sf}_w p_w - \text{Sf}_o p_o \quad (3.18)$$

ou en écriture indicielle  $v \frac{\partial \bar{u}(i, j, k)}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{u}(i, j)) = \text{Sf}_w p(i-1, j) - \text{Sf}_o p(i, j)$

où le terme  $\text{FLUX}(\bar{u})$  représente la somme des termes diffusif et convectif :

$$\text{FLUX}(\bar{u}) = \text{Conv}(\bar{u}) + \text{Diff}(\bar{u}) \quad (3.19)$$

Comme exemple, on montre ici la discrétisation des termes convectifs et diffusifs de la composante  $(\bar{u}(i, j))$  dans la direction  $x$ . les expressions de ces termes pour les composantes dans les autres directions s'obtiennent de façon similaire.

$$v \frac{\partial \bar{v}(i, j)}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{v}(i, j)) = \text{Sf}_s p_s - \text{Sf}_o p_o$$

$$v \frac{\partial \bar{v}(i, j)}{\partial t} + \text{FLUX}(\bar{v}(i, j)) = \text{Sf}_w p(i, j-1) - \text{Sf}_o p(i, j)$$

Le terme convectif se discrétise de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Conv}(\bar{u}) = & \text{Sf}_1 \frac{1}{2} (\bar{u}(i+1, j) + \bar{u}(i, j)) \bar{u}(i + \frac{1}{2}, j) \\ & - \text{Sf}_2 \frac{1}{2} (\bar{u}(i-1, j) + \bar{u}(i, j)) \bar{u}(i - \frac{1}{2}, j) \\ & + \text{Sf}_3 \frac{1}{2} (\bar{v}(i-1, j+1) + \bar{u}(i, j+1)) \bar{u}(i, j + \frac{1}{2}) \\ & - \text{Sf}_4 \frac{1}{2} (\bar{u}(i-1, j) + \bar{u}(i, j)) \bar{u}(i, j - \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\text{où, } \bar{u}(i+1/2, j) = \begin{cases} \bar{u}(i, j) & \text{si } \frac{1}{2} (\bar{u}(i+1, j) + \bar{u}(i, j)) > 0 \\ \bar{u}(i+1, j) & \text{si } \frac{1}{2} (\bar{u}(i+1, j) + \bar{u}(i, j)) < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\text{et } \bar{u}(i, j+1/2) = \begin{cases} \bar{u}(i, j) & \text{si } \frac{1}{2} (\bar{v}(i-1, j+1) + \bar{v}(i, j+1)) > 0 \\ \bar{u}(i, j+1) & \text{si } \frac{1}{2} (\bar{v}(i-1, j+1) + \bar{v}(i, j+1)) < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

La figure 3.4 représente les différents  $\bar{u}_{i,j}$  du terme  $\text{Conv}(\bar{u})$ .

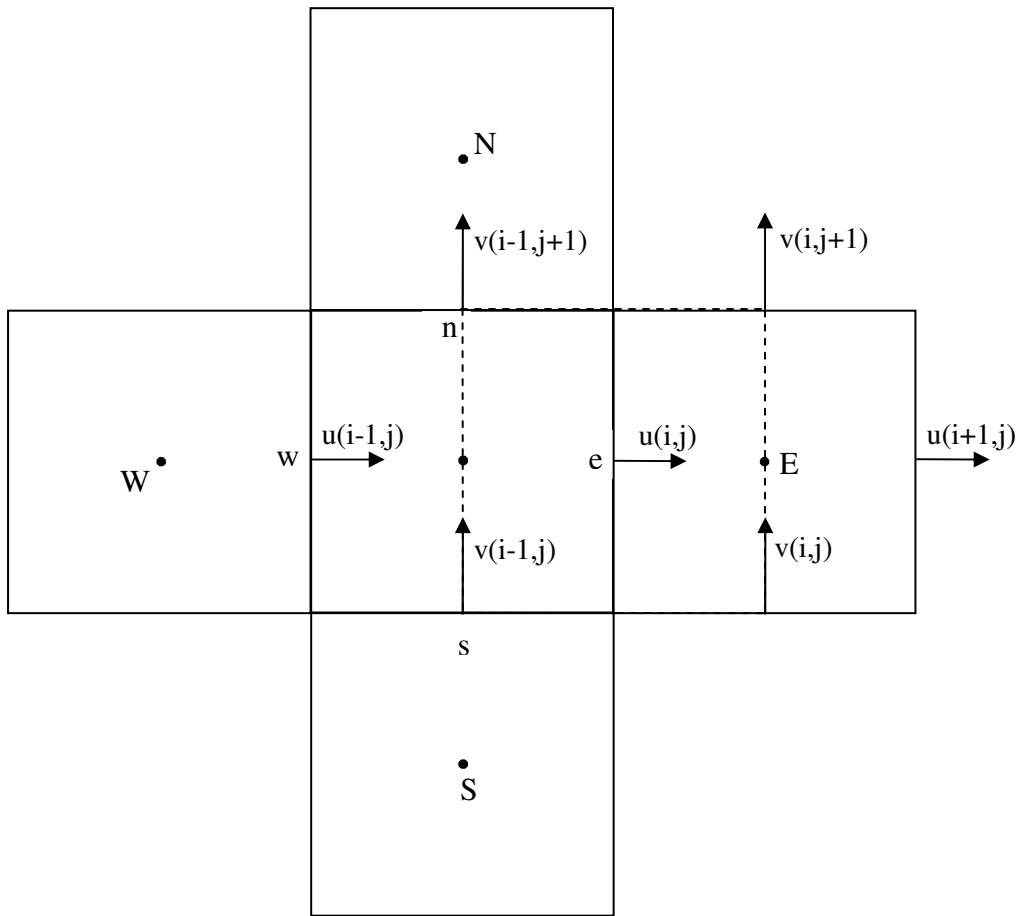


Fig 3.4 Bilan pour la vitesse u au point e

Et le terme diffusif est discrétisé par le schéma suivant :

$$\text{Diff}(\bar{u}(i,j)) = t_{xx}(i,j)Sf_1 - t_{xx}(i-1,j)Sf_2 + t_{xy}(i,j+1)Sf_3 - t_{xy}(i,j)Sf_4 \quad (3.23)$$

où

$$t_{xx}(i,j) = \overline{uu}(i,j) - v\tau_{xx}(i,j) \quad (3.24)$$

$\overline{uu}$  est la première composante diagonale du tenseur de Reynolds et elle se discrétise de la façon suivante :

$$\overline{uu}(ij) = \frac{2}{3}k(i,j) - 2v_t(i,j) \frac{\bar{u}(i+1,j) - \bar{u}(i,j)}{\Delta x_i} \quad (3.25)$$

Par contre,

$$\tau_{xx}(i, j) = \frac{\bar{u}(i+1, j) - \bar{u}(i, j)}{\Delta x_i} \quad (3.26)$$

De même,

$$t_{xy}(i, j) = \bar{uv}(i, j) - v\tau_{xy}(i, j) \quad (3.27)$$

$$\text{où } \bar{uv}(i, j) = -2\nu_t(i, j) \frac{\bar{u}(i+1, j) - \bar{u}(i, j)}{\Delta x_i} \quad (3.28)$$

$$\text{et } \tau_{xy}(i, j) = \frac{\bar{v}(i, j) - \bar{v}(i-1, j)}{\Delta x_{i-1/2}} \quad (3.29)$$

#### 1.4 Les équations de transport

Les termes de diffusions et de convection dans les équations de l'énergie cinétique, la dissipation et celle de la composante  $\bar{v}^2$  du tenseur de Reynolds sont traités de la même façon que celle pour l'équation de quantité de mouvement. Quand aux termes sources, ils sont discrétisés de la façon suivante.

La figure 3.5 représente la position des variables des termes sources des équations à discrétiser.

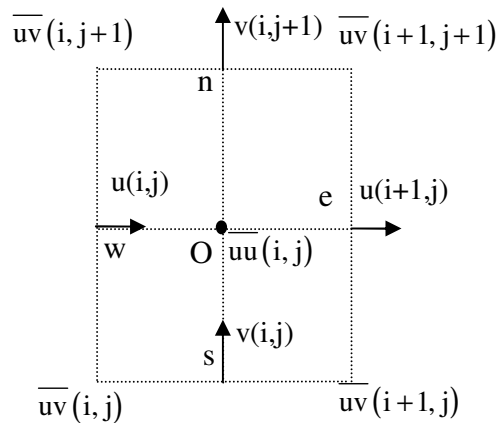


Fig. 3.5 Bilan des termes sources

Le premier terme source qui intervient dans les équations de l'énergie, de la dissipation et de la composante normale du tenseur de Reynolds, est le terme de production P dû aux gradients de vitesse.

$$P = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad (3.30)$$

Ce terme peut se décomposer sous la forme

$$P = P_1 + P_2 \quad (3.31)$$

$$\text{où } P_1 = -\overline{uu} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \overline{vv} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \quad (3.32)$$

$$\text{et } P_2 = -\overline{uv} \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right) \quad (3.33)$$

Ainsi,

$$P_1(i, j) = -\overline{uu}(i, j) \tau_{xx}(i, j) - \overline{vv}(i, j) \tau_{yy}(i, j) \quad (3.34)$$

et

$$P_2(i, j) = -\frac{1}{4} (\overline{uv}(i, j) (\tau_{xy}(i, j) + \tau_{yx}(i, j)) + \overline{uv}(i+1, j) (\tau_{xy}(i+1, j) + \tau_{yx}(i+1, j)) + \overline{uv}(i+1, j+1) (\tau_{xy}(i+1, j+1) + \tau_{yx}(i+1, j+1)) + \overline{uv}(i, j+1) (\tau_{xy}(i, j+1) + \tau_{yx}(i, j+1))) \quad (3.35)$$

$$\text{où, } \tau_{yy}(i, j) = \frac{\overline{v}(i, j+1) + \overline{v}(i, j)}{\Delta y_j} \quad (3.36)$$

$$\text{et, } \tau_{yx}(i, j) = \frac{\overline{u}(i, j) + \overline{u}(i, j-1)}{\Delta y_{j-1/2}} \quad (3.37)$$

Dans l'équation de la composante du tenseur de Reynolds, le terme source est le (ekf). La fonction f obéissant à l'équation (2.65), se discrétise comme suit :

$$f - L^2 \nabla^2 f = f(i, j) - L^2 \frac{f(i-1, j) - 2f(i, j) + f(i+1, j)}{\Delta x_i^2} - L^2 \frac{f(i, j-1) - 2f(i, j) + f(i, j+1)}{\Delta y_j^2} \quad (3.38)$$

## 2. Discrétisation temporelle :

Un calcul itératif dans le temps se fait pour les équations de conservation.

À l'instant  $n+1$ , la dérivé temporelle  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$  dans l'équation (3.1) se discrétise en utilisant

le schéma d'Euler explicite au premier ordre:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} \quad (3.39)$$

L'équation (3.1) s'écrit alors,

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u_j} \varphi) + \frac{\partial}{\partial x} (J_\varphi) - S_\varphi \right]^n = 0 \quad (3.40)$$

En appliquant la méthode de projection semi-implicite de Harlow et Welch (1965) à l'instant  $n+1$  aux équations de conservation, nous obtenons :

Conservation de la masse

$$\left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} \right)^{n+1} = 0 \quad (3.41)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\overline{u_i}^{n+1} - \overline{u_i}^n}{\Delta t} + \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right) \right]^n + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.42)$$

Soit,

$$\overline{u_i}^{n+1} = \Delta t \left[ S U_i^n - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right] \quad (3.43)$$

où  $(S U_i^n)$  est la partie explicite de l'équation (3.42) regroupant les termes de convection et de diffusion.

Par analogie avec l'équation de quantité de mouvement, on peut calculer

L'énergie cinétique turbulente :

$$k^{n+1} = k^n + \Delta t \left[ -\overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - P - \varepsilon \right]^n \quad (3.44)$$

La dissipation

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + \Delta t \left[ -\overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - c_{\varepsilon 1} P \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \right]^n \quad (3.45)$$

La composante normale du tenseur de Reynolds

$$\overline{v}^{n+1} = \overline{v}^n + \Delta t \left[ -\overline{u}_j \frac{\partial \overline{v}^2}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \overline{v}^2}{\partial x_j} \right) - \epsilon k f - \epsilon \frac{\overline{v}^2}{k} \right]^n \quad (3.46)$$

La méthode de résolution de Harlow et Welch (1965) consiste à exprimer la vitesse  $\overline{u}^{n+1}$  en fonction de la pression  $p^{n+1}$  dans l'équation (3.43).

L'expression obtenue est reportée dans l'équation de continuité (3.40). On obtient alors une équation de Poisson qui permet de calculer la pression à l'instant  $n+1$ .

Après application du théorème de Gauss, l'équation de conservation de la masse peut être discrétisée à l'instant  $n+1$  comme suit :

$$\left( \overline{u}(i+1, j) - \overline{u}(i, j) \right)^{n+1} \Delta y_j - \left( \overline{v}(i, j+1) - \overline{v}(i, j) \right)^{n+1} \Delta x_i = 0 \quad (3.47)$$

En reportant les valeurs fournies par l'équation (3.43) dans l'équation de continuité (3.47), on obtient :

$$\left[ AW_{ij} p(i-1, j) + AE_{ij} p(i+1, j) + AS_{ij} p(i, j-1) + AN_{ij} p(i, j+1) \right]^{n+1} - \left( AW_{ij} + AE_{ij} + AS_{ij} + AN_{ij} \right) p(i, j)^n = M(i, j)^n \quad (3.48)$$

avec

$$AW_{ij} = \frac{\Delta y_j}{\Delta x_{i-1/2}} \quad AE_{ij} = \frac{\Delta y_j}{\Delta x_{i+1/2}}$$

$$AN_{ij} = \frac{\Delta x_i}{\Delta y_{j+1/2}} \quad AS_{ij} = \frac{\Delta x_i}{\Delta y_{j-1/2}}$$

$$M(i, j)^n = \Delta y_j \left( SU(i+1, j) - SU(i, j) \right)^n + \Delta x_i \left( SV(i, j+1) - SV(i, j) \right)^n \quad (3.49)$$

On obtient alors un système linéaire dont la résolution permet d'obtenir la pression à l'instant  $n+1$  :

$$Ap^{n+1} = M(i, j)^n, \quad (3.50)$$

où  $A$  est une matrice définie positive et symétrique. Les coefficients de cette matrice ne dépendent que des grandeurs géométriques. La résolution de l'équation (3.48) peut être réalisée à l'aide de la méthode de Cholesky. La matrice  $A$  s'écrit sous la forme du produit :

$$A = L.L^T \quad (3.51)$$

L est une matrice triangulaire inférieure et  $L^T$  est sa transposée. Cette décomposition n'est faite qu'une seule fois au démarrage du calcul car tous ses éléments ne dépendent que des données géométriques inhérentes au maillage. Ensuite, un algorithme de montée et de descente résout le système à chaque pas de temps,

$$LX=B,$$

$$L^T Y=X.$$

Le pas de temps utilisé est calculé en appliquant la condition de stabilité CFL (Courant Frederich-Lewy). Cette condition précise la limite pour le pas de temps de convection  $\Delta t_c$  :

$$\Delta t_c = \frac{1}{\max\left(\frac{|\bar{u}|}{\Delta x} + \frac{|\bar{v}|}{\Delta y}\right)} \quad (3.52)$$

Pour le pas de temps de diffusion  $\Delta t_d$ , elle est donnée par la condition de diffusion visqueuse (Patankar, 1980) :

$$\Delta t_d = \frac{1}{3\nu \max\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)} \quad (3.53)$$

Ensuite, on calcule la moyenne pondérée correspondant au pas de temps réel :

$$\Delta t = \frac{1}{\frac{1}{\Delta t_c} + \frac{1}{\Delta t_d}} \quad (3.54)$$

Pour ces calculs, le pas de temps  $\Delta t_c$  a été limité à une valeur satisfaisant la condition de CFL suivante :

$$CFL_{\max} = \Delta t_c \max\left(\frac{|\bar{u}|}{\Delta x} + \frac{|\bar{v}|}{\Delta y}\right) \leq 0.3 \quad (3.55)$$

En appliquant ce traitement numérique aux modèles décrits dans le chapitre II, on obtient des résultats de modélisations numériques qui seront comparés aux données de la DNS.

### Conditions aux limites :

A l'entrée de la conduite, des profils constants pour  $u$ ,  $k$  et  $\varepsilon$  sont donnés. Notons que les valeurs d'entrée pour les grandeurs turbulentes sont obtenues à partir de l'intensité de la turbulence et de la viscosité turbulente issues de la DNS.

La vitesse moyenne normale  $\bar{v}$  est initialisée à zéro dans tout le domaine. A la sortie, les conditions d'homogénéité de Neumann (gradient nul) sont utilisées pour toutes les variables de l'écoulement, à l'exception de la pression qui est considérée comme nulle.

Au pas de temps suivant, les valeurs calculées à la sortie du fluide sont utilisées comme conditions d'entrée. Cette procédure permet d'avoir un écoulement pleinement développé et elle est utilisée tout au long du calcul jusqu'à convergence.

Les conditions aux limites pour les valeurs de l'énergie cinétique et sa dissipation  $\epsilon$  en un point sur la première maille près de la paroi, ont été calculées en considérant que ce point est dans la sous couche visqueuse. Sur la paroi, les conditions aux limites de ces grandeurs sont définies par Patel et al. (1984), à savoir :

$$k=0.$$

Par contre la problématique qui a été posé par Patel et al. (1984) est la bonne condition aux limites pour l'équation de  $\epsilon$ . Généralement, on ne peut pas imposer des conditions sur  $\epsilon$  (Durbin, 1991), mais pour les écoulements stationnaires, la condition aux limites pour l'énergie peut être utilisée pour l'équation de  $\epsilon$  en éliminant le terme  $\epsilon$  du système d'équations (2.66) et (2.67). Dans ce cas, on aura un système d'équations de quatrième degré de  $k$ , qui va être résolu via les conditions de Patel et al.

$$k=0, \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \text{ sur la paroi, et } \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial^3 k}{\partial y^3} = 0 \text{ au centre du canal.}$$

D'autres chercheurs ont imposé des conditions aux limites pour  $\epsilon$  en  $y = 0$ .

A partir d'une étude asymptotique (Jones et Launder, 1972),  $\epsilon \rightarrow 2\nu \frac{k}{y^2}$ , ce qui donne la

valeur de  $\epsilon_{(1)} = 2\nu \frac{k_{(1)}}{y_{(1)}^2}$  pour  $\epsilon$  en proche paroi. L'indice (1) désigne la première maille au dessus de la paroi.

Pour la fonction de relaxation elliptique  $f$ , à partir de sa définition (Laurence et al., 2004) (2.56)

$$kf = kf_{22} = \phi_{22} = \phi_{22} - (\epsilon_{22} - \epsilon_{22}^*)$$

$$kf = \phi_{22} - \epsilon_{22} + \frac{\bar{v}^2}{k} \epsilon$$



---

Mansour et al (1988) ont montré qu'en proche paroi :

$$\phi_{22} = -2 \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon \text{ et } \varepsilon_{22} = 4 \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon.$$

Ainsi,  $f = -5 \frac{\overline{v^2}}{k^2} \varepsilon$ . D'où, on fixe la valeur de  $f$  en proche paroi à :  $f = -\frac{20v^2 \overline{v^2}_{(1)}}{\varepsilon^2 y^4_{(1)}}$ .

---

Chapitre IV :

Résultats et discussions

---

# Résultats et discussions

Ce chapitre a deux objectifs principaux. Dans un premiers temps, il étudie l'aptitude des modèles linéaires présentés dans le chapitre II, à prédire des écoulements turbulents de fluides incompressibles, à travers une gamme de tests *a priori*. Ces modèles sont évalués par des simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes pour les écoulements de canal plan.

Dans un deuxième temps, ce chapitre est consacré à la simulation numérique par l'approche RANS appliqué pour un écoulement turbulent de canal plan d'un fluide newtonien et incompressible, en utilisant les deux modèles évalués dans la première partie, le  $k-\epsilon$  et le  $\overline{v^2}$ -f. Les principaux résultats issus de cette simulation *a posteriori* seront présentés et discutés.

## 1. Le modèle $k-\epsilon$

### 1.1 Le modèle $k-\epsilon$ standard

Les équations de transport de ce modèle sont citées dans le chapitre théorique (II), voir les équations (2.23) et (2.24). Dans un premier temps, on va étudier un exemple simple d'écoulement, le canal plan, tel que le représente la figure 4.1. L'écoulement est pleinement développé avec un nombre de Reynolds de 4600 basé sur la vitesse moyenne  $\overline{u}$  et la distance  $2h$ .

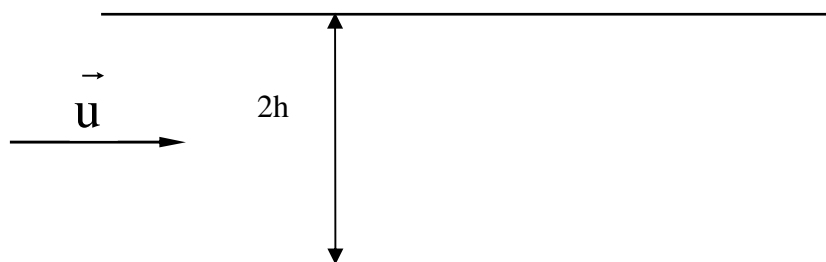


Figure 4.1 Etude d'un écoulement turbulent dans un canal plan

Le maillage utilisé est de  $51 \times 41$  nœuds et avec une concentration de nœuds dans la région près de la paroi.

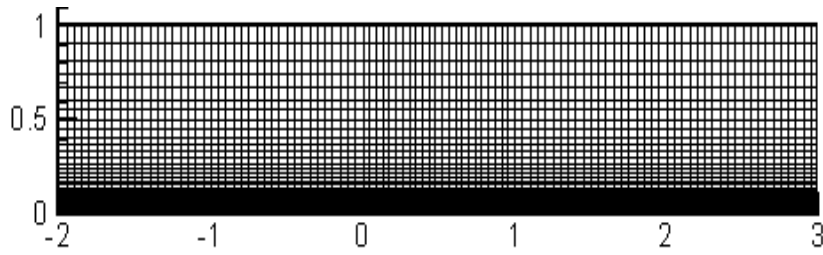


Figure 4.2 Maillage du domaine

En imposant une vitesse à l'entrée du domaine et en respectant les conditions aux limites pour l'énergie cinétique et son taux de dissipation, on représente la composante de cisaillement du tenseur de Reynolds adimensionnée par la vitesse de frottement pariétale  $u_\tau$  ( $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho} = \sqrt{\nu(\partial\bar{u}/\partial y)}$ ),  $\overline{u_i u_j}^+ = \overline{u_i' u_j'}/u_\tau^2$ . Les figures 4.3, 4.4 et 4.5 présentent cette composante calculée pour trois nombres de Reynolds turbulent basé sur la vitesse  $u_\tau$ , 180, 395 et 590 respectivement.

Pour analyser ces résultats on fait appel aux données de la simulation numérique directe de Moser et al. (1999).

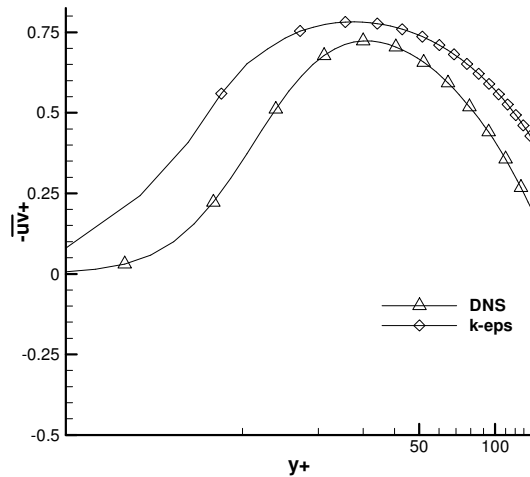


Figure 4.3 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds pour  $Re_\tau = 180$  à l'aide du modèle standard k- $\epsilon$

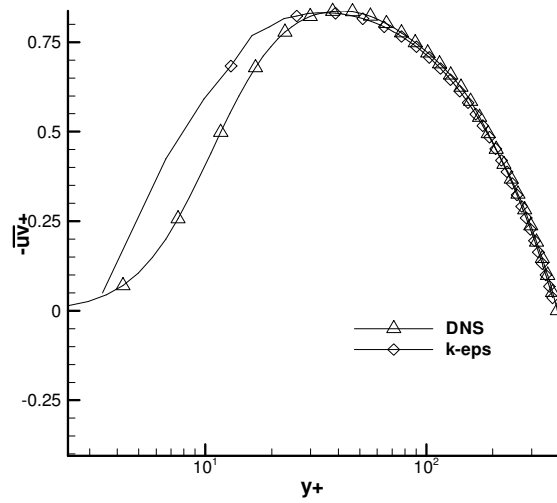


Figure 4.4 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle standard k- $\epsilon$  pour  $Re_\tau = 395$ .

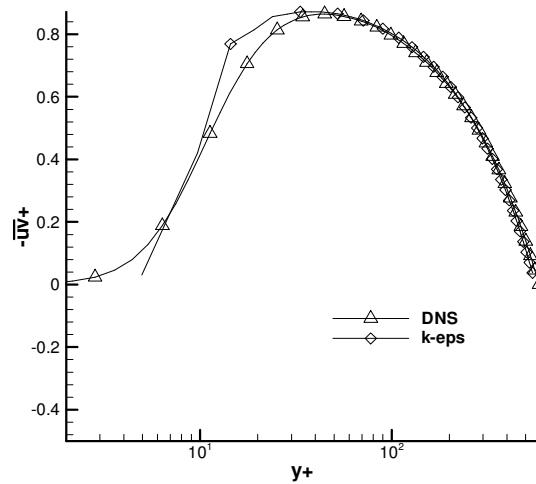


Figure 4.5 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle standard k- $\epsilon$  pour  $Re_\tau = 590$ .

Cette comparaison avec les données de la DNS montre que pour ce modèle, il existe un problème en proche paroi. En introduisant alors la fonction de paroi  $f_\mu$  la viscosité

turbulente s'écrit  $\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ .

## 1.2. Utilisation des fonctions de paroi

Différentes propositions sont mises en places pour la détermination de  $f_\mu$  et des autres variables présentes dans les équations de transport corrigées de  $k$  et de  $\varepsilon$  (2.25) et (2.26). A partir de ces formules on a choisi celle de Chien (1982) dont les variables sont définies par les expressions ci dessous :

$$\begin{aligned}
 f_\mu &= 1 - \exp(-0.0115y^+) \\
 E &= -2\nu \frac{\varepsilon}{y^2} \exp(-0.5y^+) \\
 c_\mu &= 0.09, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.35, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.8 \\
 \sigma_k &= 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \\
 f_1 &= 1, \quad f_2 = 1 - 0.22 \exp(-(R_T / 6)^2) \\
 R_T &= \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \\
 y^+ &= y \cdot u_\tau / \nu
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour le même écoulement ci-dessus, on fait les calculs de la composante  $\overline{u_i u_j}^+$  du tenseur de Reynolds avec le modèle modifié  $k$ - $\varepsilon$ . Les résultats sont montrés dans les figures 4.6, 4.7 et 4.8 respectivement pour  $Re_\tau = 180, 395$  et  $590$ .

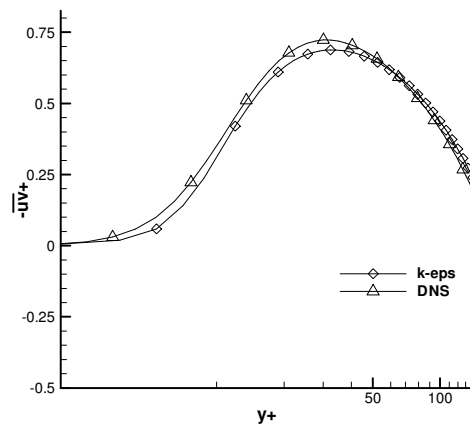


Figure 4.6 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle  $k$ - $\varepsilon$  avec fonction de parois pour  $Re_\tau = 180$ .

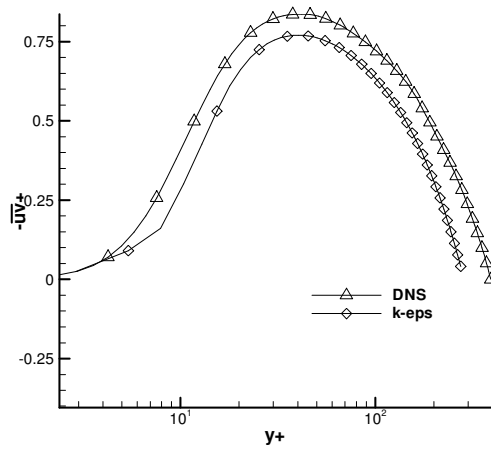


Figure 4.7 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle k- $\epsilon$  avec fonction de parois pour  $Re_\tau = 395$ .

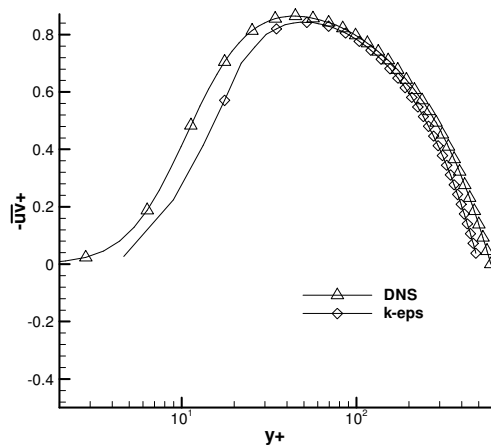


Figure 4.8 Composante de cisaillement du tenseur de Reynolds à l'aide du modèle k- $\epsilon$  avec fonction de parois pour  $Re_\tau = 590$ .

On remarque qu'en proche parois, les courbes sont en bon accord avec les résultats de DNS. C'est l'effet rapporté par la fonction de parois  $f_\mu$ . A l'aide de ce modèle, on a tracé les courbes de la vitesse  $u^+ = u/u_\tau$ , de l'énergie cinétique turbulente  $k^+ = k/u_\tau^2$  et de sa dissipation  $\epsilon^+ = \mu\epsilon/u_\tau^4$  en unité pariétale en fonction de la distance à la parois  $y^+$  ( voir les courbes a, b et c des figures 4.9, 4.10 et 4.11 respectivement pour chaque nombre de Reynolds ).

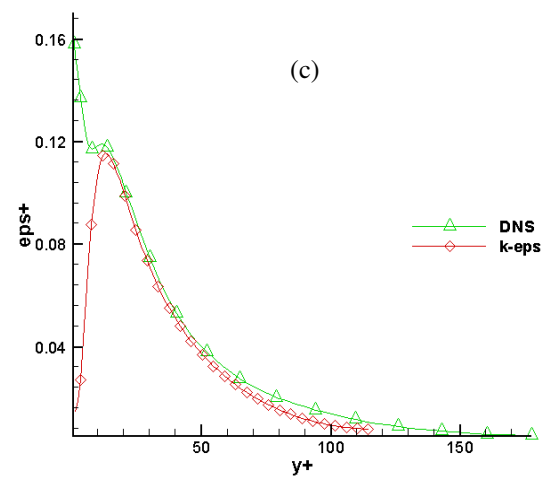
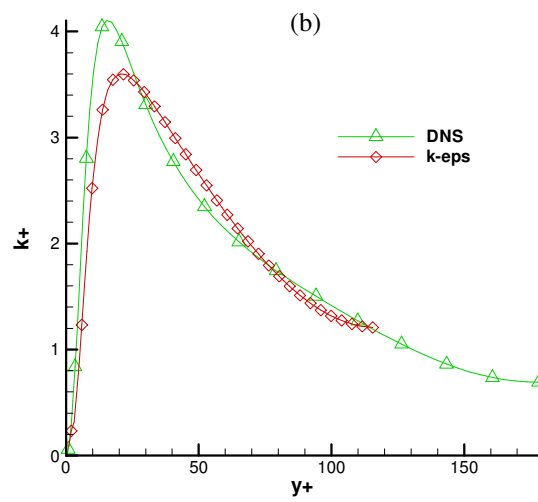
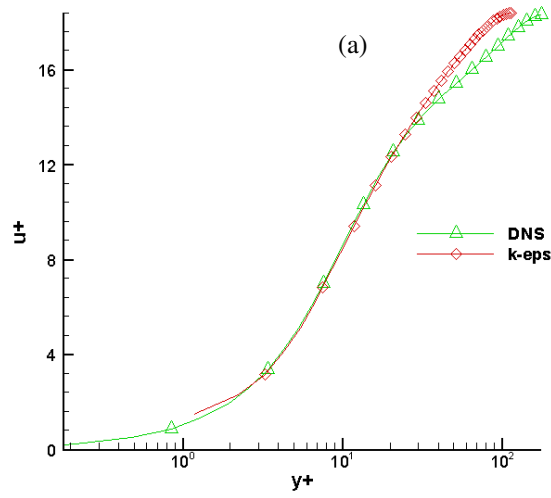


Figure 4.9 Profil de (a)  $u^+$ , (b)  $k^+$  et (c)  $\epsilon^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al., 1999) pour  $Re_\tau=180$



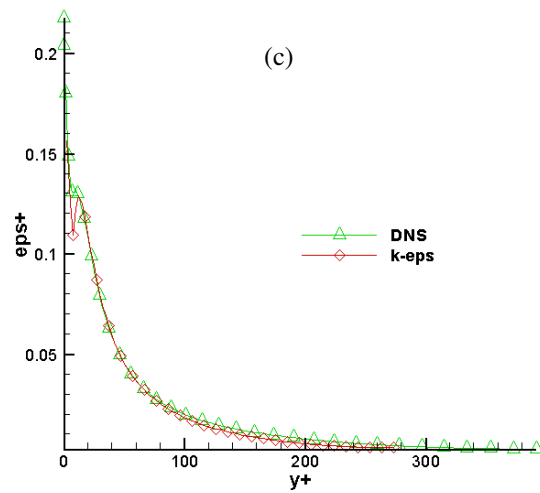
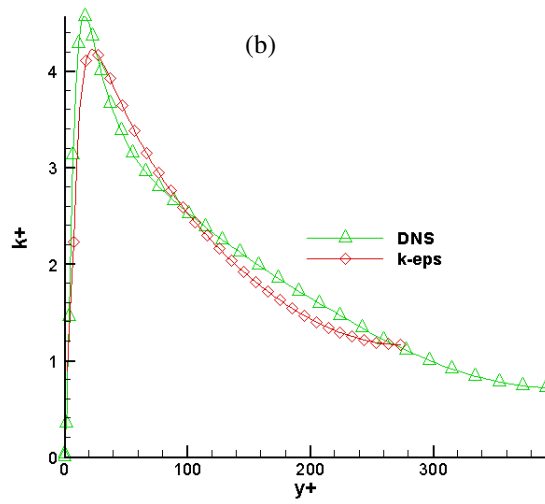
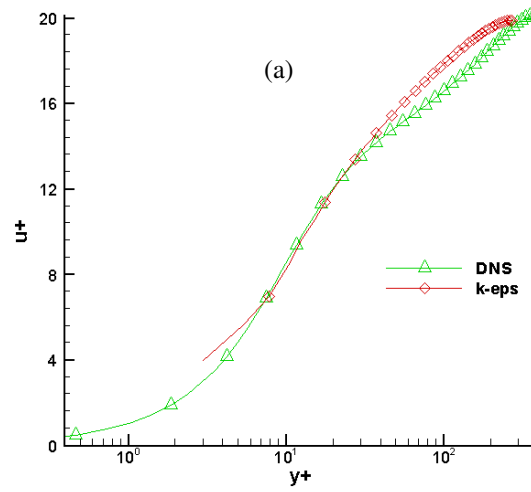


Figure 4.10 Profil de (a)  $u^+$ , (b)  $k^+$  et (c)  $\epsilon^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al., 1999) pour  $Re_\tau=395$

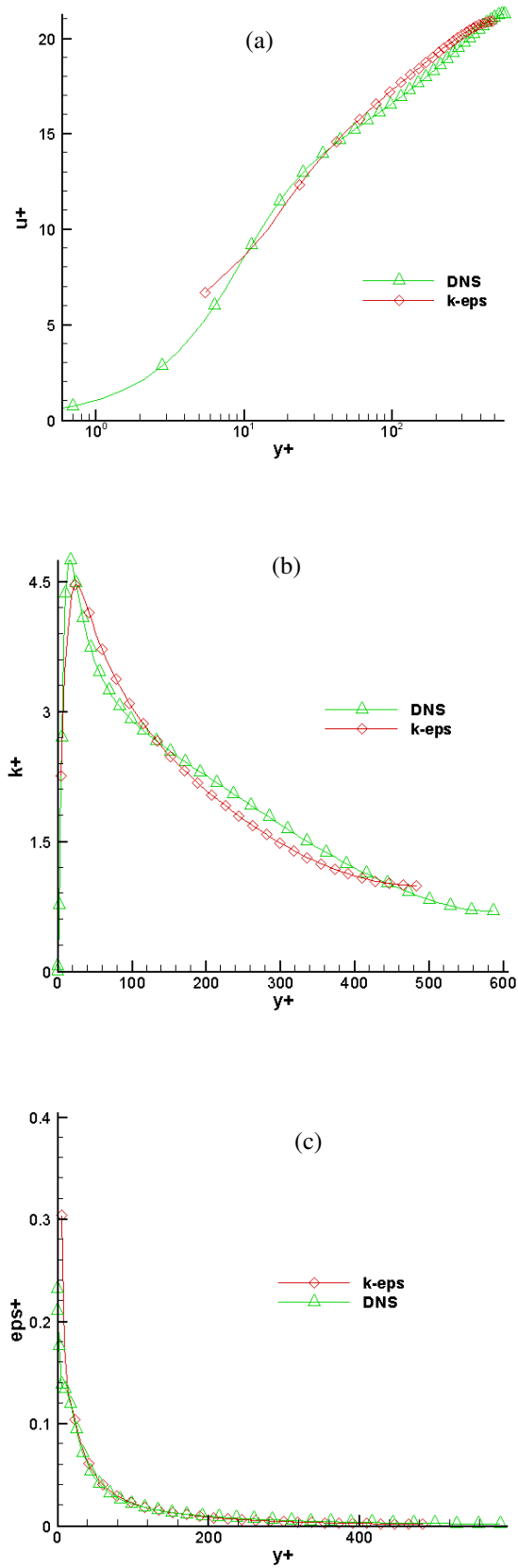


Figure 4.11 Profil de (a)  $u^+$ , (b)  $k^+$  et (c)  $\epsilon^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al., 1999) pour  $Re_\tau=590$

---

## 2. Etude *a priori*

L'objectif principal de cette partie est l'étude de l'aptitude des modèles retenus dans le chapitre II à simuler les écoulements turbulents des fluides newtoniens incompressibles. L'évaluation des capacités prédictives de ces modèles est faite d'abord *a priori* en comparant nos résultats aux données de la DNS de Moser et al. (1999). Ensuite, une étude *a posteriori* de ces modèles va être effectuée.

### 2.1 Procédure numérique utilisée et test *a priori*

Un premier objectif de ce chapitre est l'évaluation *a priori* du modèle  $\overline{v^2}$ - $f$ . Cette évaluation s'appuie sur les résultats de la simulation numérique directe de Moser et al. (1999). La démarche utilisée est la suivante : les valeurs moyennes du champ de vitesse ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) et des grandeurs turbulentes tel que l'énergie cinétique de turbulence  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$  provenant des données de la DNS sont injectés dans les relations explicites algébriques du modèle. Les valeurs obtenues par cette prédiction sont alors comparées aux valeurs de la DNS. La figure 4.12 est un schéma explicatif de cette procédure.

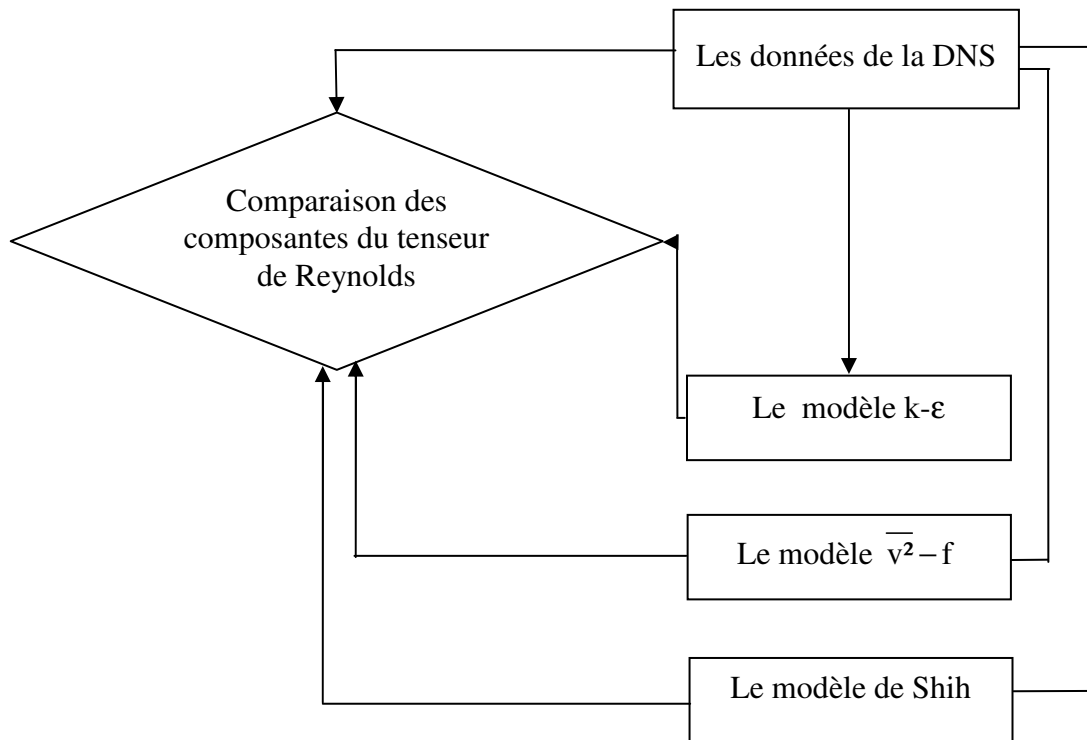


Figure 4.12 Schéma numérique du test *a priori*

## 2.2 Simulation numérique directe (DNS)

Les données de la DNS utilisés dans cette étude sont les résultats de Moser et al. (1999). L'écoulement est complètement développé dans la direction principale ( $x$ ).

Dans la mise en œuvre de cette DNS, les équations de Navier-Stokes sont discrétisées en utilisant la méthode numérique Chebychev-taux pour la direction normale de l'écoulement et une méthode basée sur la représentation de Fourier pour la direction horizontale. Des conditions aux limites périodiques sont appliquées dans les directions longitudinale et transversale.

Dans cette étude, un écoulement turbulent développé de fluide newtonien incompressible dans un canal plan est utilisé pour trois nombres de Reynolds turbulent,  $Re_\tau=180$ ,

$Re_\tau=395$  et  $Re_\tau=590$ , où  $Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}$  ( $u_\tau$  et  $\delta$  sont respectivement la vitesse de frottement

et la hauteur du demi canal ).

Le maillage utilisé ainsi que les différents paramètres de la simulation étaient les mêmes que ceux de la DNS, tel que le présente le tableau IV. 1 suivant pour les trois cas de calcul. A noter aussi, que le maillage au voisinage de la paroi est suffisamment fin, avec un nombre minimum de 13 mailles au dessous de  $y^+ = 10$ .

$Re_\tau$	$Re_\tau$ réel	Longueur $L_x$	Hauteur $L_y$	Nombre de mailles
180	178	$4\Pi\delta$	$\frac{4}{3}\Pi\delta$	128*129
395	392	$2\Pi\delta$	$\Pi\delta$	192*256
590	578	$2\Pi\delta$	$\Pi\delta$	384*257

Tableau IV. 1 Les différents paramètres du maillage des trois cas de calcul

En plus des données de DNS, le modèle algébrique non linéaire de Shih qui a été testé dans le cas d'un écoulement de canal à section carré par Honoré (2008), est invité ici à fin de valider le modèle de viscosité turbulente le  $k-\varepsilon$  et le modèle à relaxation elliptique le  $\overline{v^2}-f$ . Ci-dessous, on rappelle les systèmes d'équations de chaque modèle utilisé dans cette étude *a priori*.

### 2.3 Le modèle $k-\varepsilon$ :

$$v_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \varepsilon \quad (4.2)$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P - c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E \quad (4.2)$$

$$\text{où } P = -\overline{u_i u_j} S_{ij} \quad \text{et } \varepsilon = \tilde{\varepsilon} - 2\nu \frac{k}{y^2}$$

Les constantes  $c_i$  et les fonctions  $f_i$  sont définies dans le système (4.1).

## 2.4 Le modèle $\overline{v^2}$ -f :

$$v_t = c_\mu \overline{v^2} T$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \varepsilon \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_j} \right) + \varepsilon k f - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon \quad (4.5)$$

Où f est la solution de l'équation elliptique :

$$f - L^2 \nabla^2 f = (C_1 - 1) \frac{2}{\varepsilon T} \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{2}{3} C_2 \frac{P}{k} \quad (4.6)$$

$$\text{et } T = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}, C_T \sqrt{\frac{v}{\varepsilon}} \right); L = C_L \max \left( \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \right)$$

$$C_1=1,8; C_2=0,6; C_t=6; C_L=0,38; C_\eta=85.$$

Pour les deux modèles ci-dessus k- $\varepsilon$  et  $\overline{v^2}$ -f, les composantes de tenseur de Reynolds s'écrivent, d'après l'hypothèse de Boussinesq  $\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2v_t S_{ij}$ , avec,  $\delta_{ij}$  est l'opérateur de Kronecker,  $S_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})/2$  est le tenseur de déformation, et  $U_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ .

## 2.5 Le modèle de Shih:

Pour ce modèle, les composantes de tenseur de Reynolds sont définis par :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S_{ij}^* + 2C_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (-S_{ik}^* \Omega_{kj}^* + \Omega_{ik}^* S_{kj}^*) \quad (4.7)$$

$$S_{ij}^* = S_{ij} - (S_{kk} \delta_{ij} / 3)$$

$$\Omega_{ij}^* = \Omega_{ij} = (U_{i,j} - U_{j,i}) / 2$$

$$C_\mu = 1 / \left( A_0 + A_s \frac{U^* k}{\varepsilon} \right)$$

$$C_2 = \left( \sqrt{1 - 9C_\mu^2 \left( \frac{S^* k}{\varepsilon} \right)^2} \right) / \left( C_0 + 6 \left( \frac{S^* k}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\Omega^* k}{\varepsilon} \right) \right)$$

$$A_0 = 6.5; A_s \in \left[ \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6} \right]; C_0 = 1$$

$$U^* = \sqrt{S_{ij}^* S_{ij}^* + \Omega_{ij}^* \Omega_{ij}^*}; S^* = \sqrt{S_{ij}^* S_{ij}^*}; \Omega^* = \sqrt{\Omega_{ij}^* \Omega_{ij}^*}$$

## 2.6 Résultats et discussions

Le problème posé était la prédiction numérique d'un écoulement turbulent développé d'un fluide incompressible dans un canal plan pour trois différents nombres de Reynolds  $Re_\tau=180$ ,  $Re_\tau=395$  et  $Re_\tau=590$ .

Les résultats obtenus par les tests *a priori* des différents modèles sont présentés dans les figures de (4.13) à (4.16).

Ces figures décrivent l'évolution des tensions adimensionnelles normales en unité de parois  $\overline{u'_i u'_i}^+ = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{u_\tau^2}$  ( $u'_i = u', v'$  ou  $w'$ ) et de cisaillement  $\overline{uv}^+ = \frac{\overline{uv}}{u_\tau^2}$  en fonction de la

distance à la paroi  $y^+ = \frac{u_\tau}{\nu} y$ .

Les figures indiquées par les lettres (a), (b) et (c) sont pour  $Re_\tau=180$ ,  $Re_\tau=395$  et  $Re_\tau=590$  respectivement.

### 2.6.1 Tensions normales

Les figures 4.13, 4.14 et 4.15 suivantes montrent les distributions des trois composantes normales du tenseur de Reynolds.

Il est remarquable que les deux modèles  $\overline{v^2}$ -f et k- $\varepsilon$ , qui expriment les contraintes normales par l'expression de Boussinesq, sont les deux confondus et donnent la même valeur pour les trois composantes,  $\overline{uu}^+$ ,  $\overline{vv}^+$ , et  $\overline{ww}^+$ , égale à  $(2/3)k$ .

Par contre, on constate que les contraintes normales prédites par le modèle de Shih sont en bon accord avec les données de la DNS pour les trois nombres de Reynolds turbulent.

Cependant, on constate sur la figure 4.13, que les maximums de la composante  $\overline{uu}^+$  prédite, surestiment les valeurs de la DNS d'environ 16% pour  $Re_\tau=180$ , de 27% pour  $Re_\tau=395$  et 7% pour  $Re_\tau=590$ . Ces valeurs sont restituées sur la figure 4.15, par la sous-estimation de la troisième composante normale  $\overline{ww}^+$  d'une valeur de 25% pour  $Re_\tau=180$ , de 27% pour  $Re_\tau=395$  et 28% pour  $Re_\tau=590$ . Cependant, dans le cas de la composante  $\overline{vv}^+$ , les valeurs prédites par Shih sont presque confondues avec les résultats de la DNS tel que le montre le figure 4.14.

De manière générale, on constate que les modèles de type EASM non linéaires se comportent mieux que les modèles linéaires. Ainsi, à l'issue de cette première analyse sur la prédiction des contraintes normales, c'est le terme non linéaire qui corrige l'expression de Boussinesq pour avoir un bon comportement des contraintes normales.

En vue de compléter l'analyse sur la prédiction des contraintes, nous présentons ci-après les profils des tensions de cisaillement turbulentes.

### 2.6.2 Tensions de cisaillement

On représente sur les figures 4.16, a, b et c, les distributions de la tension de cisaillement turbulente  $\overline{uv}^+$  pour  $Re_\tau=180$ , 395 et 590 respectivement. Sur ces figures, on compare les profils de cette composante calculée par les trois modèles à celle de la DNS (Moser et al. 1999).

De manière générale, les profils des résultats du modèle k- $\epsilon$  ne sont pas suffisamment proches de ceux de la DNS dans les trois figures. Par contre, il est clair que le nouveau modèle à relaxation elliptique le  $\overline{v^2}$ -f reproduit mieux les résultats de la simulation numérique direct. On constate alors que le  $\overline{v^2}$ -f est mieux adapté en étude *a posteriori* comme en *a priori* que le modèle k- $\epsilon$  et qu'il est plus performant à prédire les écoulements turbulents à cisaillement.

Par contre, comme pour le cas du modèle k- $\epsilon$ , les profils des résultats de Shih dans la figure (4.16), malgré le succès qu'il représente en reproduisant les données de DNS dans le cas des contraintes normales, ils restent moins efficaces que les courbes du modèle à relaxation elliptique le  $\overline{v^2}$ -f qui donne les résultats les plus proche des données de la DNS parmi les trois modèles testés. Donc, ce modèle reste toujours le plus adapté pour la



---

simulation des écoulements turbulents et l'étude *a posteriori* de ce modèle qui suivra dans la section d'après va confirmer ses tendances.

## 2.7 Conclusion

Ainsi, deux conséquences principales sont retenues à partir de nos résultats prédits par les simulations numériques. D'abord pour les contraintes normales du tenseur de Reynolds, le modèle de Shih a donné des résultats en bon accord avec les données de la DNS.

Ensuite, pour les contraintes de cisaillement, c'était le modèle  $\overline{v^2}-f$  qui a donné les meilleurs résultats en comparaison avec la DNS.

A noter aussi que le modèle de Shih utilise des fonctions d'amortissement qui améliorent significativement ses prédictions (Honoré, 2007) sans avoir, elles mêmes un fondement théorique de la même manière que le modèle  $k-\varepsilon$ . C'est pourquoi, on a choisi le modèle  $\overline{v^2}-f$  pour être utilisé dans la section des calculs *a posteriori* qui suivra.

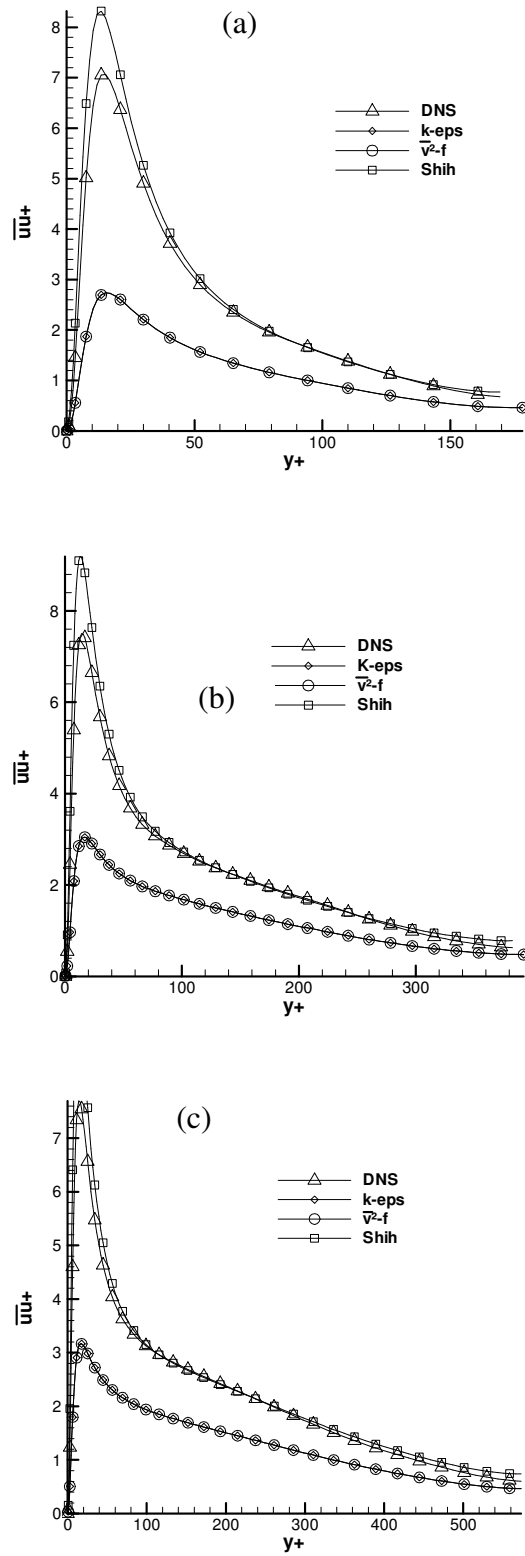


Figure 4.13 Comparaison de la composante  $-\overline{uu}^+$  du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a)  $Re_\tau=180$ , (b)  $Re_\tau=395$ , (c)  $Re_\tau=590$ .

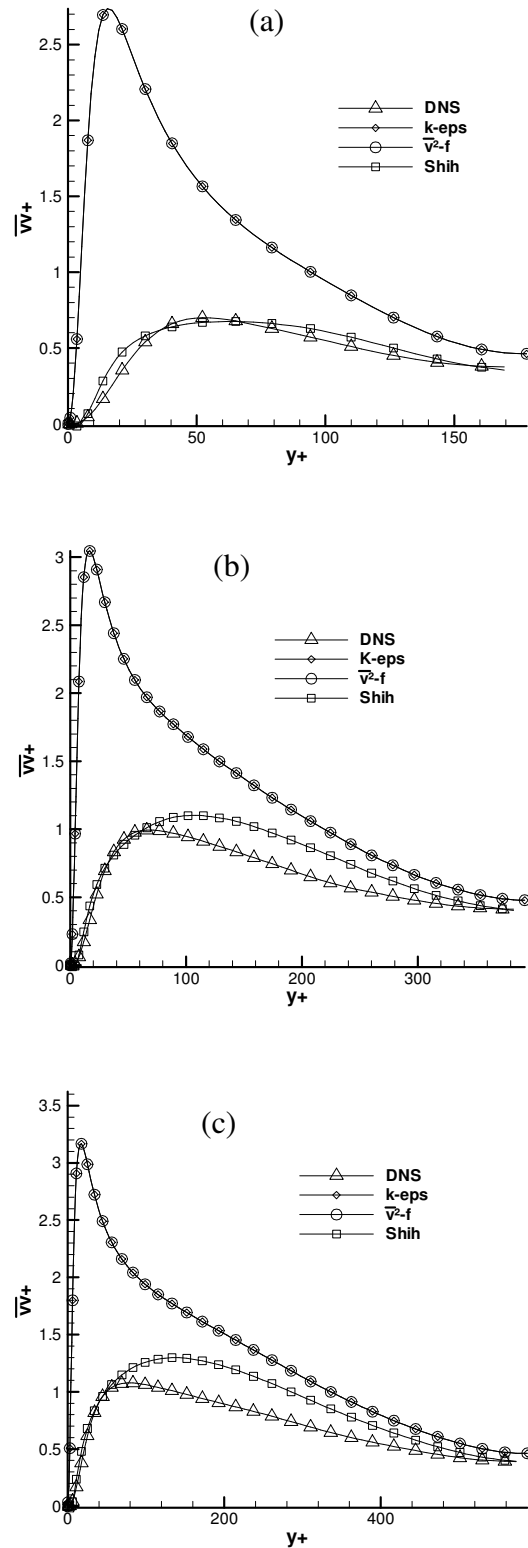


Figure 4.14 Comparaison de la composante  $-\overline{v'v'}^+$  du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a)  $Re_\tau=180$ , (b)  $Re_\tau=395$ , (c)  $Re_\tau=590$ .

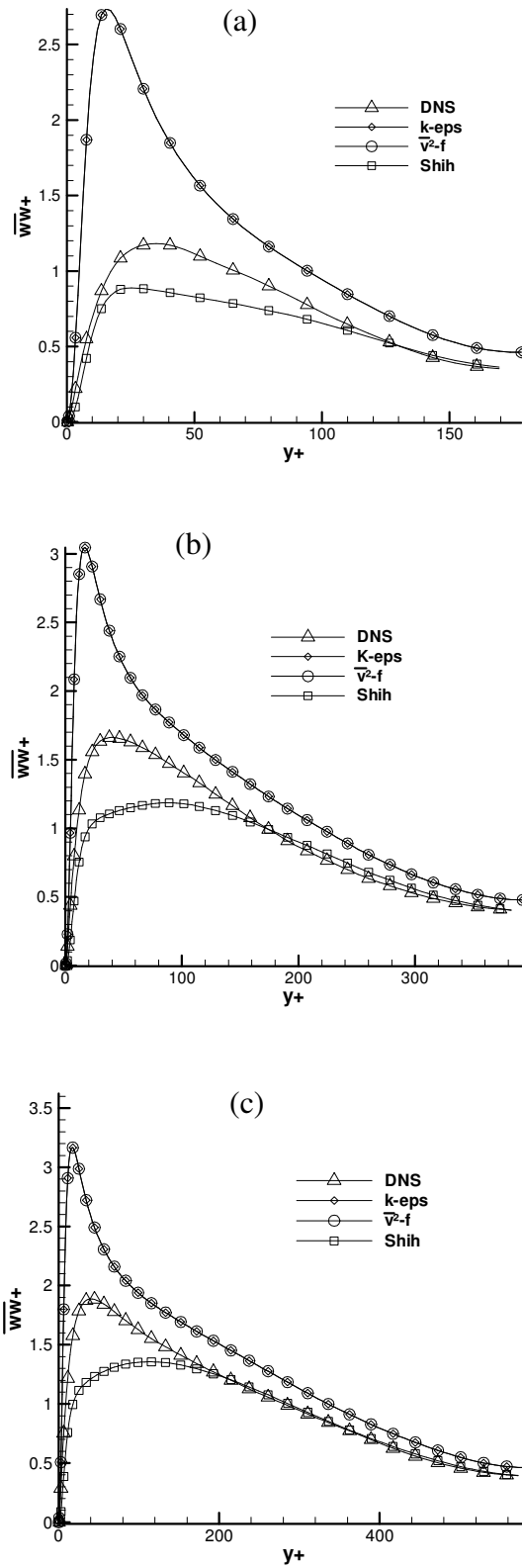


Figure 4.15 Comparaison de la composante  $\overline{ww^+}$  du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a)  $Re_\tau=180$ , (b)  $Re_\tau=395$ , (c)  $Re_\tau=590$ .

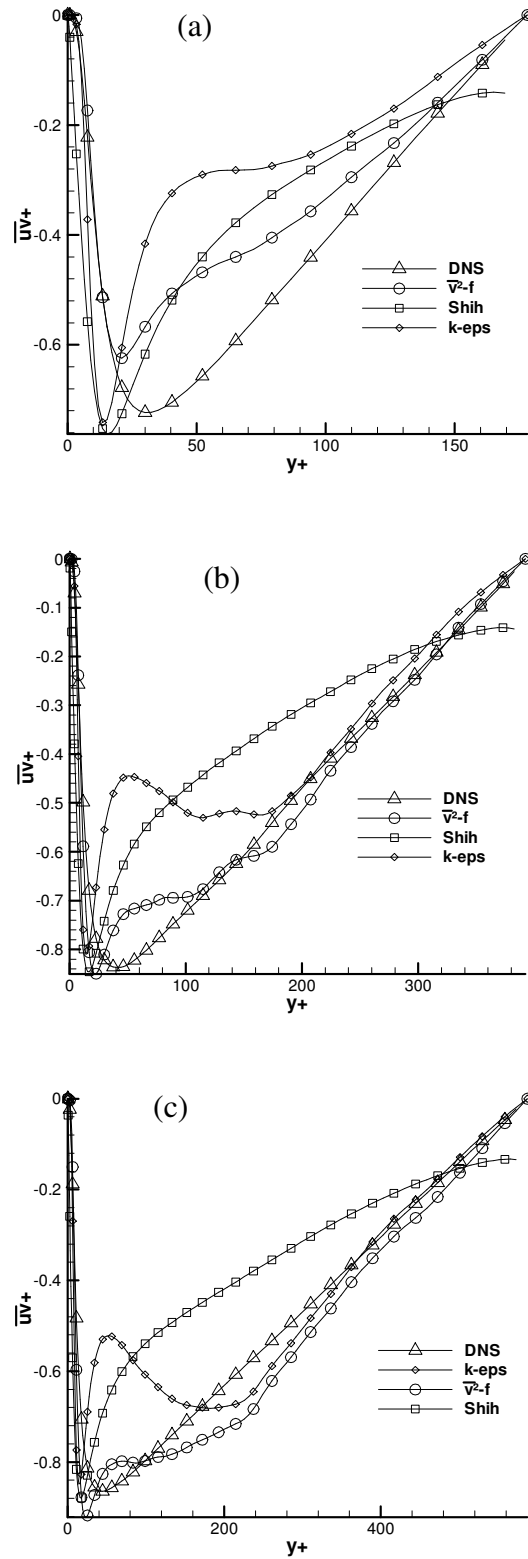


Figure 4.16 Comparaison de la composante  $-\overline{uv}^+$  du tenseur de Reynolds des modèles étudiés avec les données de DNS (Moser et al., 1999) dans un écoulement de canal plan pour trois nombres de Reynolds, (a)  $Re_\tau=180$ , (b)  $Re_\tau=395$ , (c)  $Re_\tau=590$ .

---

### 3. Le modèle $\overline{v^2-f}$

Dans cette étude *a posteriori*, on refait les calculs du paragraphe 1 de ce chapitre sauf que dans cette partie on utilise le modèle de turbulence  $\overline{v^2-f}$ . Les résultats obtenus vont être commentés en comparaison avec ceux de la DNS de Moser et al. (1999).

Sur la figure 4.17, on montre l'énergie cinétique turbulente adimensionnée pour un nombre de  $Re_\tau = 590$ . Le modèle présente un bon accord avec la DNS. Sur la figure 4.18, on représente la vitesse pour le même nombre de Reynolds. La dissipation est présentée sur la figure 4.19 et la contrainte de cisaillement du tenseur de Reynolds  $\overline{uv}^+$  sur la figure 4.20. Les trois courbes sont en accord satisfaisant avec les résultats de la DNS.

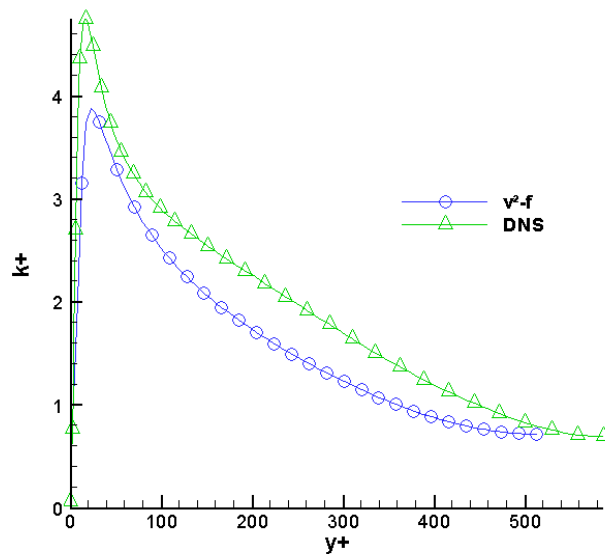


Figure 4.17 Profil de l'énergie cinétique turbulente  $k^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=590$ .

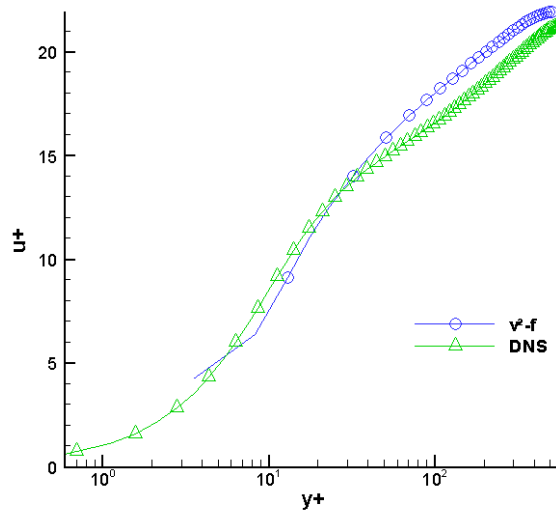


Figure 4.18 Profil de la vitesse moyennée  $u^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=590$ .

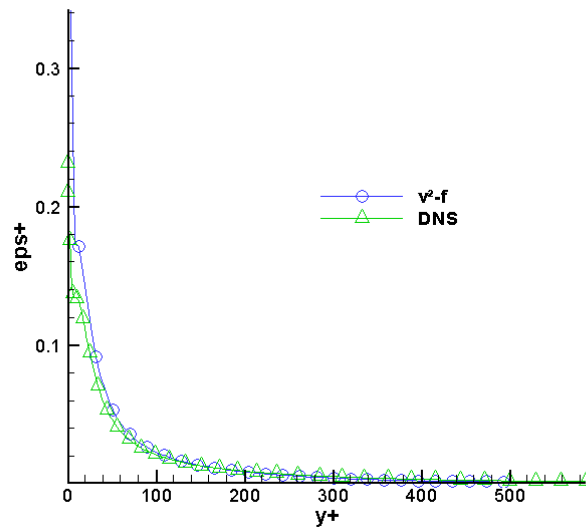


Figure 4.19 Profil de la dissipation  $\epsilon^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=590$ .

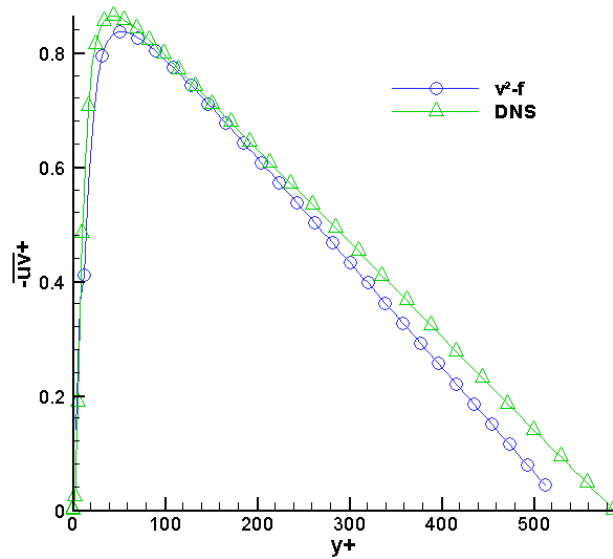


Figure 4.20 Profil de la contrainte de cisailment  $\overline{uv}^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=590$ .

Dans les figures 4.21 – 4.24, on représente les mêmes variables pour un nombre de Reynolds turbulent  $R_t = 395$ .

Comme pour le cas précédent, les résultats sont généralement en bon accord avec les données de la DNS à l'exception de la figure 4.23. Dans cette dernière, on représente les contraintes normales du tenseur de Reynolds. Ces courbes, avec la figure 4.24, vérifient les conclusions de la partie *a priori*. En effet, les contraintes normales prédites ne sont pas en bon accord avec la DNS. Par contre, pour la contrainte de cisailment, la comparaison avec les données de la DNS (fig 4.24) montrent que l'allure du profil est bien reproduite.



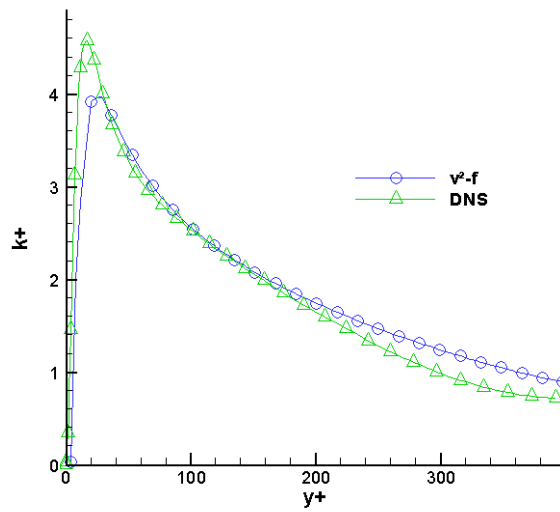


Figure 4.21 Profil de l'énergie cinétique turbulente  $k^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=395$ .

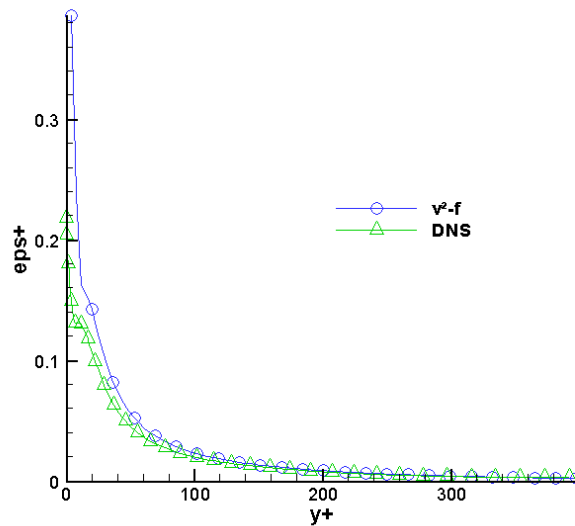
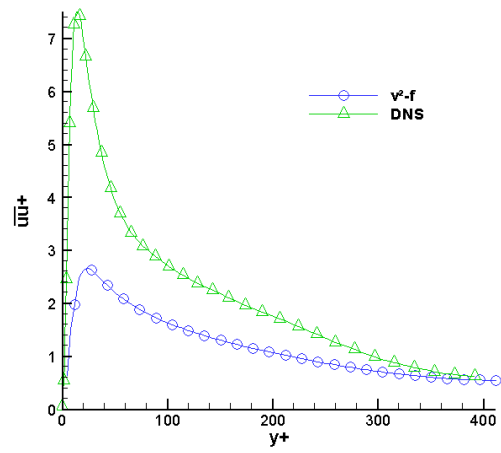
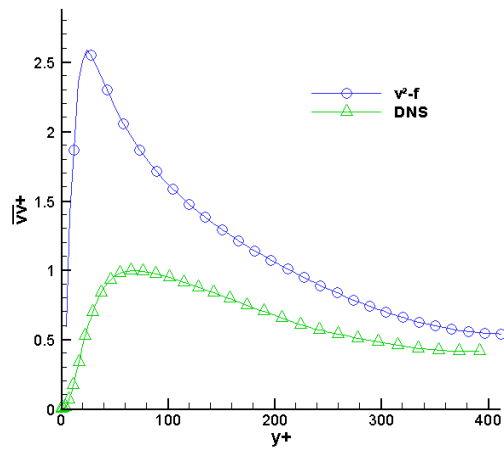


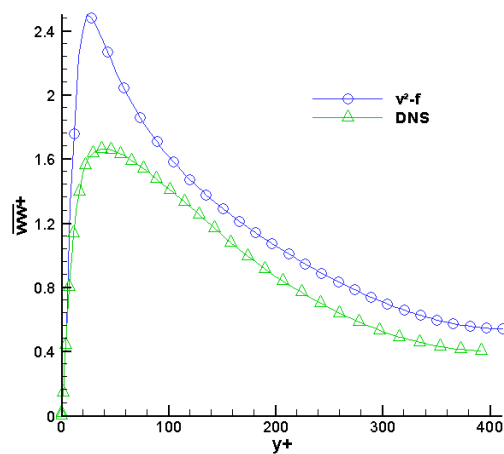
Figure 4.22 Profil de la dissipation  $\epsilon^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=395$ .



(a)



(b)



(c)

Figure 4.23 Profil des contraintes normales (a)  $\overline{uu}^+$ , (b)  $\overline{vv}^+$ , (c)  $\overline{ww}^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=395$ .

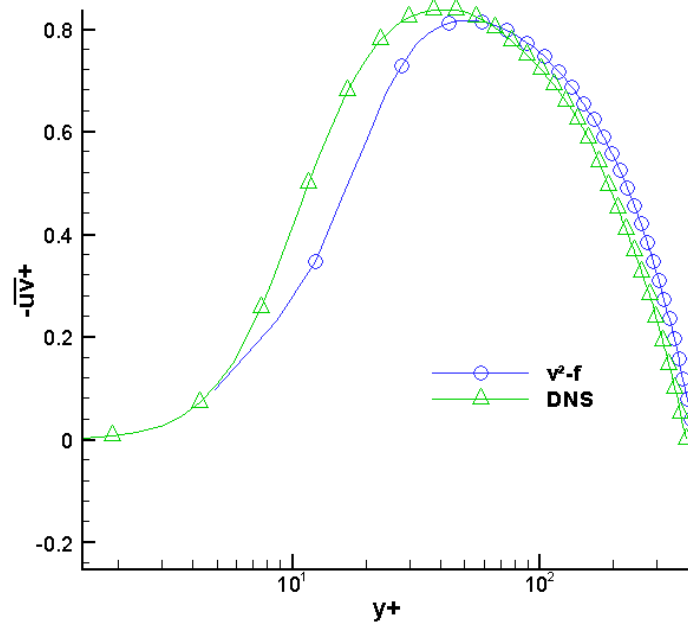
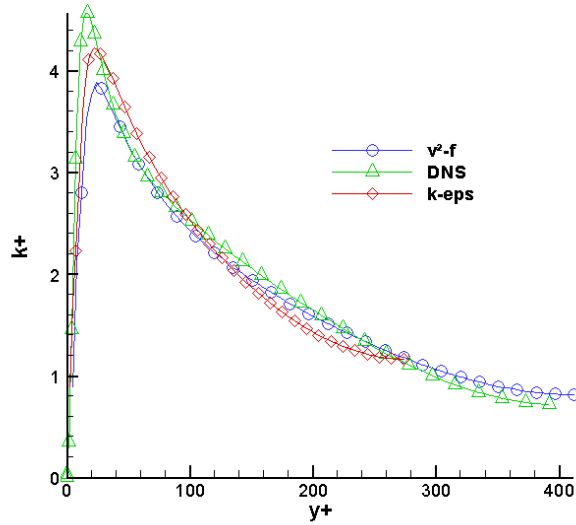
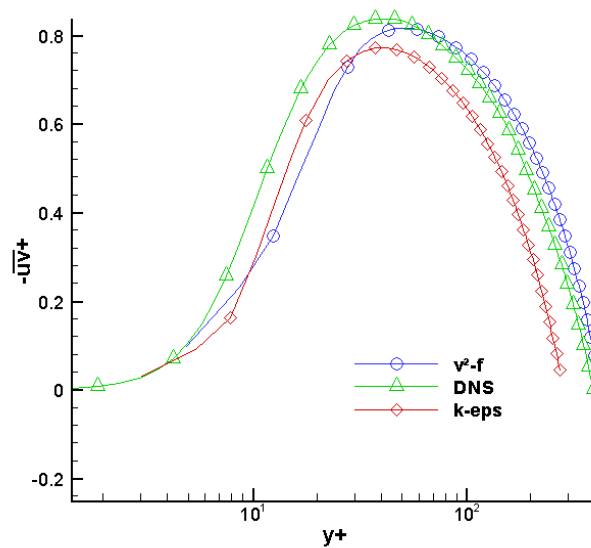


Figure 4.24 Profil de la contrainte de cisailment  $\overline{uv}^+$  en fonction de  $y^+$ : comparaison avec les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=395$ .

En comparaison avec le modèle précédent le k- $\epsilon$ , la figure 4.25 confirme le progrès qu'emporte le modèle  $\overline{v^2-f}$  par rapport à son ancêtre le k- $\epsilon$ .



(a)



(b)

Figure 4.25 Comparaison avec le modèle  $k-\varepsilon$  ; (a) profils de l'énergie cinétique turbulente  $k^+$ , (b) et de la contrainte de cisaillement  $\overline{uv}^+$  et validation par les résultats de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=395$ .

Dans cette figure (4.25), il est remarquable que pour ces variables le modèle  $\overline{v^2}-f$  se comporte mieux que le modèle  $k-\varepsilon$  dans les zones loin de la paroi, alors qu'en proche paroi, la fonction correctrice  $f_\mu$  porte légèrement, au mieux le dernier modèle.

Le dernier cas représenté ici concernant le nombre de Reynolds turbulent  $R_t = 180$ , est alors comparé avec le modèle  $k-\varepsilon$  d'une part, et puis validé par la DNS d'autre part. Les

---

figures 4.26 à 4.29 présentent respectivement l'énergie cinétique turbulente, sa dissipation  $\varepsilon$  et les contraintes normales et de cisaillement du tenseur de Reynolds.

Dans la première figure, le profil de l'énergie cinétique prédite par le modèle  $\overline{v^2}-f$  est plus satisfaisant que celui du modèle  $k-\varepsilon$ . Cependant, en proche paroi, la courbe correspondante au  $k-\varepsilon$ , approche mieux les données de la DNS. La même conclusion est à retirer à partir de la figure 4.28 concernant les composantes normales du tenseur de Reynolds.

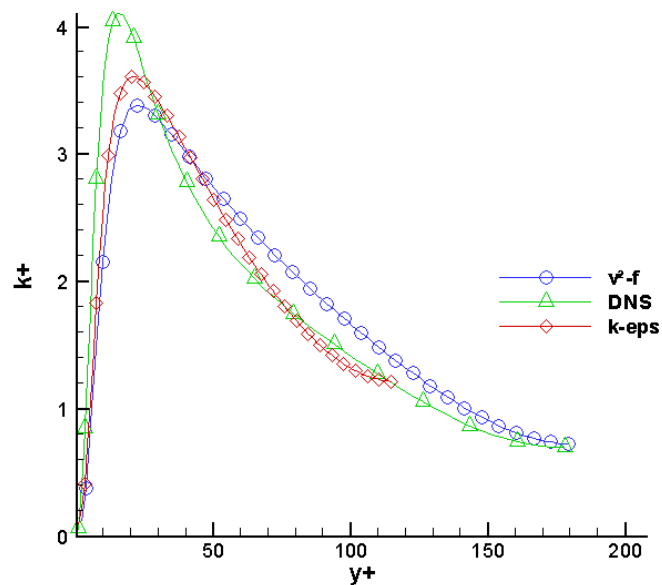


Figure 4.26 Profil de l'énergie cinétique turbulente  $k^+$ : comparaison avec le modèle  $k-\varepsilon$  et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=180$ .

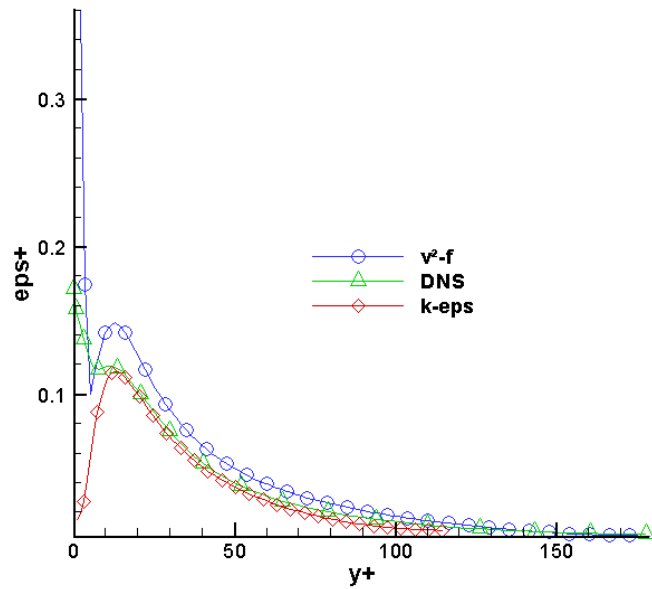
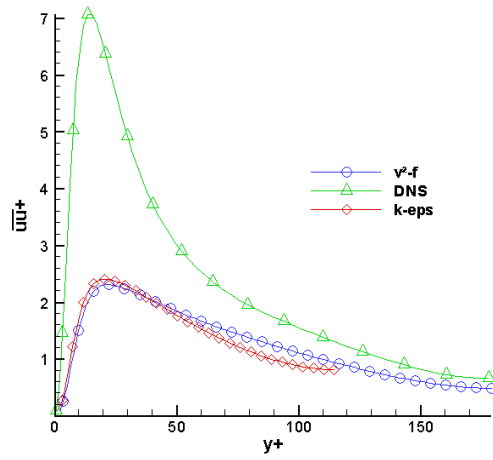
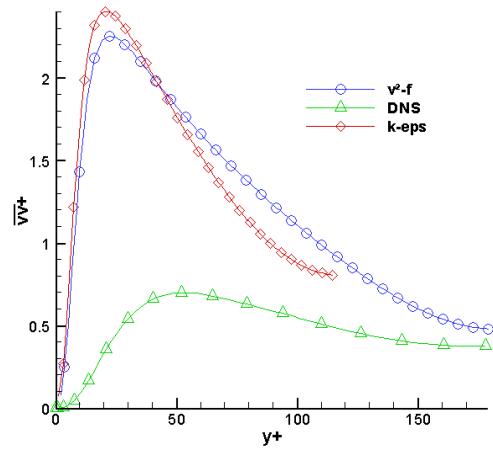


Figure 4.27 Profil de la dissipation  $\varepsilon^+$ : comparaison avec le modèle k- $\varepsilon$  et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=180$ .

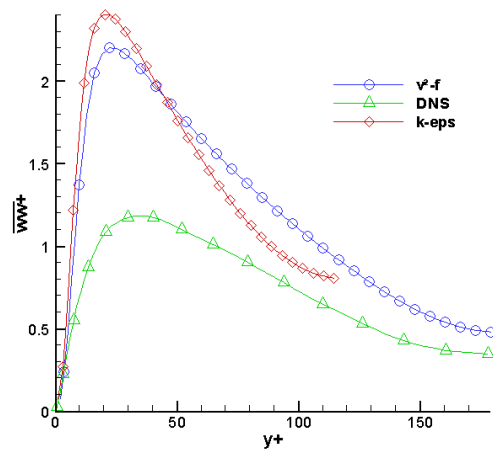
Pour les figures 4.27 et 4.29 concernant la dissipation  $\varepsilon$  et la contrainte de cisaillement, le modèle  $\overline{v^2}-f$  se comporte mieux que le modèle k- $\varepsilon$ . Les conséquences de l'étude *a priori* sont alors confirmées.



(a)



(b)



(c)

Figure 4.28 Profil des contraintes normales (a)  $\overline{uu}^+$ , (b)  $\overline{vv}^+$ , (c)  $\overline{ww}^+$  : comparaison avec le modèle k- $\epsilon$  et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=180$ .

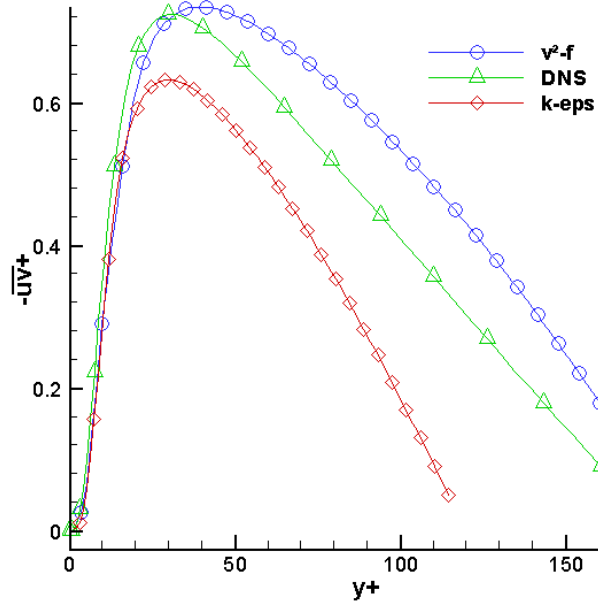


Figure 4.29 Profil de la contrainte de cisaillement  $\overline{uv}^+$  : comparaison avec le modèle k- $\epsilon$  et les données de la DNS (Moser et al. 1999) pour  $Re_\tau=180$ .

A partir de ces figures, on constate que généralement, le modèle  $\overline{v^2}-f$  donne un meilleur accord avec les résultats de la DNS, alors qu'il évite l'utilisation des fonctions correctrices au voisinage de la paroi.



---

## Conclusions et perspectives

Le travail présenté dans cette thèse constitue une étude de l'évaluation de deux types de modèles de turbulence tout en les comparant. Outre l'étude bibliographique, cette thèse se décompose de trois parties. D'abord, nous avons étudié le modèle k- $\epsilon$  et son influence sur la prédiction des écoulements avec paroi, ainsi que l'effet de la fonction d'amortissement et de son choix souvent basé sur la littérature. Ensuite, nous avons effectué une étude *a priori* comparative entre trois types de modèles : deux sont linéaires, les modèles  $\overline{v^2}$ -f et k- $\epsilon$ , alors que le troisième est non linéaire, le modèle de Shih. Les résultats ont été validés par les données de la DNS de Moser et al. (1999). Le modèle retenu à partir de ces tests était le modèle à relaxation elliptique le  $\overline{v^2}$ -f, qui a été impliqué dans une étude *a posteriori* dans la troisième partie.

Premièrement, une étude a été consacrée au modèle k- $\epsilon$ , et l'effet des fonctions d'amortissement qu'il utilise sur le comportement de l'écoulement de la zone proche paroi. A la lumière d'une comparaison des résultats avant et après utilisation de cette fonction de type Van Driest, nous avons constaté une amélioration importante portée par ces fonctions dans les zones pariétales.

La deuxième partie a été consacrée en premier lieu à l'évaluation *a priori* du modèle à relaxation elliptique en comparaison avec les résultats des deux modèles; linéaire k- $\epsilon$  et non linéaire de Shih. Tous les résultats ont été validés par les données de DNS. Les modèles linéaires ne permettent pas de bien prédire les contraintes normales du tenseur de Reynolds contrairement au modèle non linéaire de Shih. D'autre part, la prédiction de la contrainte de cisaillement était plus précise et plus correcte dans le cas du modèle  $\overline{v^2}$ -f en comparaison avec les deux autres modèles. Les résultats obtenus par ce modèle à relaxation elliptique sont en très bon accord avec les valeurs de la DNS de Moser et al. (1999), tout au long de l'écoulement. Le problème de proche paroi est alors résolu sans recours aux fonctions correctrices.

A l'issue de ces tests *a priori*, le modèle retenu était le modèle à relaxation elliptique le  $\overline{v^2}$ -f, qui va être impliqué dans la suite du travail dans une procédure *a posteriori*.

---

Le travail effectué a permis de montrer l'intérêt pour la prise en compte des effets de paroi pour la turbulence de l'approche de Durbin. La force de cette approche réside dans la résolution d'une équation différentielle pour le terme de pression  $\phi_{ij}^*$ , un terme essentiel pour les équations de transport des tensions de Reynolds.

Dans les modèles classiques de type RANS, des hypothèses fortes non valables en écoulement de paroi, tel que la localité de la pression et la quasi-homogénéité de la vitesse, ont été supposées valides à bas nombre de Reynolds. Ces hypothèses ont abouti à des versions de modèles non consistants.

D'autre part, et dans la continuité de la théorie de la relaxation elliptique proposée par Durbin (1991, 1993) de nouvelles versions plus robustes et plus simples ont été développées par Manceau et Hanjalic (2002), puis modifiées par Manceau (2005). Le modèle utilisée dans cette thèse résout une seule équation elliptique en plus des trois équations de transport pour les échelles caractéristiques de l'écoulement,  $k$ ,  $\varepsilon$  et  $\overline{v^2}$ .

Le coefficient de pondération  $L$  permet le passage des variables turbulentes des zones homogènes loin de la paroi aux zones au voisinage des parois. Le caractère elliptique de son équation permet de conserver la non localité du terme de pression. Des lors, il est vital de prendre en compte l'amortissement de la redistribution d'énergie due à ce terme, et de reproduire avec exactitude sa contribution dans les bilans asymptotiques des composantes  $\overline{uv}$  et  $\overline{v^2}$ , dans lesquels il joue un rôle prépondérant.

Bien que le modèle  $\overline{v^2}$ - $f$  traité dans cette étude corrobore les résultats de la littérature en plus de la simplicité de son implantation dans les codes numériques, il peut toujours être amélioré. Comme perspectives, nous proposons d'étendre l'étude de ces modèles à la prédiction d'écoulements fortement anisotropes et à trois dimensions. La littérature est presque pauvre de ce type d'étude à part quelques travaux éloignés. Comme exemple, on peut citer les travaux de Parneix et Durbin (1997).

Puisque le but des modèles de turbulence est la prévision numérique des écoulements turbulents, et non pas d'expliquer la turbulence, et qu'on utilise ces modèles pour avoir une description approchée de l'écoulement, on peut procéder de la même manière du développement du modèle  $k$ - $\varepsilon$ . Pettersson Reif (2006) a introduit des termes non linéaires dans l'expression du tenseur de Reynolds, tout en utilisant le modèle à relaxation

---

elliptique pour exprimer ces contraintes. Une autre méthode peut être proposée c'est de procéder par l'utilisation des fonctions correctrices pour développer les résultats du modèle et même pour le généraliser à une gamme d'écoulements plus large.

Fadai-Ghotbi (2007) a récemment, développé une approche hybride LES- $\overline{v^2}$ -f en suivant la méthode de Sciestel et Dejoan (2005) qui ont proposé un modèle hybride non-zonal dit PITM. Vu, sa simplicité, l'introduction du modèle  $\overline{v^2}$ -f dans des approches hybrides avec d'autres types de modèles reste un champ de travail ouvert.

---

# Bibliographie

Aupoix, B. Introduction to turbulence modeling, From mixing length to Reynolds stress models. ONERA Toulouse, France, 2004.

B. Basara. Employment of the second-moment turbulence closure on arbitrary structured grid. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 44 (4): 377-407, 2004.

B. Basara and S. Jakirlic. A new hybrid turbulent modeling strategy for industrial CFD. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 42, pp 89-116, 2003.

P. Bradshaw. Calculation of three dimensional turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 46, pp 417, 1971.

P. Bradshaw, D.H. Ferris and N.P. Atwell. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. *J. Fluid Mech.*, 28, pp 593, 1967.

K. Y. Chien. Predictions of channel and boundary layer flows with a low Reynolds number turbulence model. *AIAA Journal*. 20, pp 33-38 (1982).

F.H. Clauser. The turbulent boundary layer. *Advanced in Appl. Mech. IV* (Academic Press, New-York), pp 1-51, 1956.

J. Cousteix, C. Quemard et R. Michel. Application d'un schéma amélioré de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes tridimensionnelles. *AGARD Conférence Proc. CP 93 on turbulent shear flows*, London, (Sept. 1971), 1972.

T.J. Craft, B.E. Launder and K. Suga. Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants an non-linear element. 5<sup>th</sup> IAHR Conference on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Press Ponts et Chaussées, Paris, pp 125-132, 1993.

T.J. Craft, B.E. Launder and K. Suga. A non-linear eddy viscosity model including sensitivity to stress anisotropy. *Proc. 10<sup>th</sup> Symp. on Turbulent Shear Flows*, Penn. State Univ., Vol. 3, pp 23/19-23/24, 1995.

B. J. Daly et F. H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, vol. 13, p. 2634-2649, 1970.

---

R. Dautray et J. L. Lions. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome2 : l'opérateur de Laplace. Collection enseignement – INSTN CEA. Masson, 1987.

A. O. Demuren et R. V. Wilson. On elliptic relaxation near wall model. In: Proc. of the ICASE/ LaRC Workshop on turb. Transition and Comb., 2, pp 61-71, 1994.

C. du P. Donaldson. A computer study of an analytical model of boundary layer transition. AIAA. J. vol. 7, No. 1, pp 271, 1969.

P. A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without damping functions. Theor. Compt. Fluid Dyn. 3, 1, pp 1-13, 1991.

P. A. Durbin. A Reynolds stress model for near-wall turbulence. J. Fluids Mech. 249, pp 465-498, 1993.

D. Euvrard. Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. Différences finies, éléments finis, problèmes en domaine non-borné. Masson, 1994.

A. Fadaï-Ghotbi. Modélisation de la turbulence en situation instationnaire par approche URANS et hybride RANS-LES. Prise en compte des effets de paroi par pondération elliptique. Thèse de doctorat. université de Poitiers, 2007.

Favre, Kovasznay, Dumas, Yaviglio. Coantic: la turbulence en mécanique des fluides. Guathier- Villars 1976.

R. Feynman. La nature de la physique. Editions de Seuil, 1980.

T. B. Gatski and T. Jongen. Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows. Prog. Aerospace Sci. 36, 8, 655-682 (2000).

M. M. Gibson. An algebraic stress and heat flux model for turbulent shear flow with streamline curvature. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 21, No. 12, pp 1609- 1617, 1978.

M.M. Gibson and B. E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. J. Fluid Mech., 86: 491-511, 1978.

G.S. Glushko. Quelques particularités des écoulements turbulents de fluides incompressibles avec mutations transversales. Mécanique des liquides et des gaz 4, Isv. Acad. Sc. URSS, pp 126, 1971.

H. Gnanga. Analyse numérique d'écoulements turbulents anisotropes à l'aide de modèles non-linéaires de turbulence. Thèse de doctorat. université de Lille1, 2008.

---

K. Hanjalic et B. E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, vol.52, pp. 609-638, 1972.

k. Hanjalic et B. E. Launder. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, vol.74, No 4, pp. 593-610, 1976.

F.H. Harlow. Transport of anisotropic or low-intensity turbulence. Los Alamos Scientific Laboratory Report, 1968.

F. H. Harlow et J. E. Welch. Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182-2189, 1965.

J. O. Hinze. *Turbulence*. 2<sup>nd</sup> ed., McGraw Hill Book Co., New York, 1975

J.O. Hinze, R.E. Sonnenberg and P.J.H. Bultjes. Memory effect in a turbulent boundary layer flow due to a relatively strong axial variation of the mean velocity gradient. *Appli. Sci. Res.*, Vol. 29, pp 1-13, Jan., 1974.

D. Jeandel. Méthode de calcul de la couche limite turbulente utilisant une equation de comportement du coefficient de Boussinesq. Univ. Claude Bernard Lyon, Thèse de Dr. Ing., 1972.

D. Jeandel et J. Mathieu. Méthode de calcul de la couche limite turbulente utilisant une équation de comportement du coefficient de Boussinesq. *J. Mécanique* 12, pp 629, 1973.

W. P. Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a tow-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, No , pp 301-314, 1972.

J. Jacquet. Préface dans "Réflexions sur quelques approches de la turbulence". Bulletin de la D.E.R.-E.D.F. No. 2. la Houille Blanche, Grenoble, France, 1979.

W. P. Jones and P. Musogne, Closure of the Reynolds-stress and scalar flux equations. *Phys. Fluids*, vol. 31, pp 3589-3604, 1988.

J. Kampé De Fériet. Nouvelles conceptions et contributions récentes. *Mécanique de la turbulence*. No 108 : 467-468. Coll. Int. Du C.N.R.S., ed du CNRS, 1962.

W. Kebede, B. E. Launder and B. A. Younis. Large amplitude periodic pipe flow : a second-moment closure study. In Proc. 5th Symp. Turb. Shear Flows, Cornell Univ., Ithaca, New York, USA, vol. 16, pp 23-29, 1985.

---

A.N. Kolmogorov. Local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, Doklady Akad., Nauk SSSR, 30:299-303, 1941.

A.N. Kolmogorov. Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. Izvest. Acad. of Sci., SSSR, Physics, 6(1 et 2), pp 56-58, 1942.

Y. G. Lai and R. M. C. So. Near-wall modeling of turbulent heat fluxes. Intl J. Heat Mass Transfer, vol. 33, No 7, pp 1429-1440, 1990.

J.C.S. Lai and C.Y. Yang. Numerical simulation of turbulence suppression: comparison of the performance of four k- $\epsilon$  turbulence models. Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 18, pp 575-584, 1997.

B. E. Launder. Second-moment closure: present... and future? Int. J. Heat and Fluid Flow, 10 (4): 280-300, 1989.

B. E. Launder, G. J. Reece et W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. J. Fluid Mech., 68, 537, 1975.

B. E. Launder and D. P. Tselepidakis. Directions in second-moment modeling of near-wall turbulence. In the 29<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting, AIAA, 219, pp 1-10, 1991.

D. Laurence and P. A. Durbin. Modelling near-wall effects in second moment closures by elliptic relaxation. In: Proc. Tenthth symp. Turb. Shear Flows. Pennsylvania State Univ., 1995.

D. R. Laurence, J. C. Uribe and S. V. Utyuzhnikov. A robust formulation of the  $\overline{v^2}$ -f model. Flow. Turb. and Combust. 73, pp 169-185 (2004).

B. P. Leonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. Compt. Methods in Applied Mech and Eng. 19, pp 59-98 (1979).

M. Lesieur. La turbulence. Presses Universitaires de Grenoble, 1994.

J. Lumley. Pressure-strain correlation. Phys. Fluids, vol 18, No 6, pp 750-750, 1975.

J. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. In: Advances and Applied Mechanics, volume 18, pages 123-175. Academic Press, 1978.

J. Magnaudet. The modeling of inhomogeneous turbulence in the absence of the mean velocity gradient. In: proc. Fourth Eur. Turb. Conf., 1992.

R. Manceau. Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l'influence des parois par relaxation elliptique. Thèse de doctorat. Université de Nantes, 1999.

- 
- R. Manceau, J. R. Carlson et T. B. Gatski. A rescaled elliptic relaxation approach : Neutralizing the effect on the log layer. *Physics of Fluids*, vol. 14, No11, pp. 3868-3879, 2002.
- R. Manceau et K. Hanjalic. A new form of the elliptic relaxation equation to account for wall effects in RANS modelling. *phys. Fluids*, vol. 12, pp 2345-2351, 2000.
- R. Manceau et K. Hanjalic. Elliptic blending model: A new near wall Reynolds-stress turbulence closure. *phys. Fluids*, vol. 14, No 2, pp 744-754, 2002.
- R. Manceau, M. Wang and D. Laurence. Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-Averaged Navier-Stokes modelling. *J. Fluid Mech.*, vol.438, pp. 307-338, 2001.
- N. N. Mansour, J. Kim and P. Moin. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, vol.194, pp. 15-44, 1988.
- G. L Mellor et H. J. Herring. A survey of the mean turbulent field closure models. *AIAA J.* , vol. 11, No 5, P. 590, 1973.
- H. Ha Minh. La modélisation statistique de la turbulence : ses capacités et ses limitations. *C. R. Acad. Sci. Paris,327 (Iib) :* 343-358, 1999.
- G. Mompean. Numerical simulation of a turbulent flow near a right-angled corner using the Speziale non-linear model with RNG k- $\epsilon$  equations. *Computer & Fluids*. Vol. 27, No. 7, pp 847-859, 1998.
- G. Mompean, S. Gavrilakis, L. Machiels and M. O. Deville. On predicting the turbulence-induced secondary flows using nonlinear k- $\epsilon$  models. *Phys. Fluids* 8, 7 (1996) 1856-1863.
- D.J. Monson, H.L. Seegmiller, P.K. McConnaughey, Y.S. Chen. Comparison of experiment with calculations using curvature-correct zero and two equation turbulence models for a two-dimensional U-duct. *AIAA*, pp 1484-1502, 1990.
- R. D. Moser, J. Kim and N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Re=590. *Phys. fluids* 11, 4, pp 943-945 (1999).
- C. L. Rumsey, B. A. Petterson Reif and T. B. Gatski. Arbitrary steady-state solutions with the k- $\epsilon$  model. *AIAA*, vol.44, pp. 1586-1592, 2006.



- 
- S. Parneix and P.A. Durbin. Numerical simulation of 3D turbulent boundary layers using the  $\overline{v^2}$ -f model. Center for Turbulence Research. Annual Research Briefs, pp 135-148, 1997.
- S. Parneix, D. Laurence et P. A. Durbin. A procedure for using DNS databases. J. Fluid Engng, vol. 120, pp 40-47, 1998.
- S.V. Patankar. Numerical heat transfert and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation. 1980.
- V. C. Patel, W. Rodi and G. Scheurer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. AIAA 23, 9, pp 1308-1319 (1984).
- B.A. Pettersson Reif, Towards a non linear eddy viscosity-model based on elliptic relaxation. Flow Turbulence Combust, Vol. 76, pp 241-256, 2006.
- F. Pourahmadi and J. A. C. Humphrey. Prediction of curved channel flow with an extended k- $\epsilon$  model of turbulence. AIAA. J., Vol. 21, No. 10, pp 1365-1373, 1983.
- M. Prud'homme and S. Elghobashi. Turbulent heat transfer near the reattachment of flow downstream of a sudden pipe expansion. Num. Heat Transfer, vol. 10, pp 349-368, 1986.
- P.G. Saffman. A model for inhomogeneous turbulent flow. Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 317, No. 1530, pp 417-433, 1970.
- R. Schiestel. Les écoulements turbulents, modélisation et simulation, 2<sup>e</sup> édition revue et augmentée. Paris :Hermès, 1998
- R. Schiestel and A. Dejoan. Towards a new partially integrated transport model for coarse grid and unsteady turbulent flow simulations. Theoret. Comput. Fluid Dynamics, Vol. 18, pp 443-468, 2005.
- T.H. Shih, J. Zhu and J. Lumley. A new Reynolds stress algebraic equation model. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 125, 1, pp. 287-302 (1995).
- R. M. C. So and G. J. Yoo. Low Reynolds number modeling of turbulent flows with and without wall transpiration. AIAA, vol. 25, No 12, pp 1556-1564, 1987.
- D.B. Spalding. A two equation model of turbulence. VDI Forsch-Heft, 549, pp 5, 1972.
- C. G. Speziale. Modelling the pressure gradient-velocity correlation of turbulence. Phys. Fluids, vol. 28, No1 pp. 69-71, 1985.

---

C. G. Speziale. On non-linear k-l and k- $\epsilon$  models of turbulence. *J. Fluid Mech.* Vol. 178, pp 459-475, 1987.

C.G. Speziale. Turbulence modeling for time dependent RANS and VLES: a review. *AIAA J.*, 36 (2): 173, 1998.

C.G. Speziale, S. Sarkar and T. B. Gatski. Modeling the pressure-strain correlation of the turbulence: an invariant dynamical system approach. *J. Fluid Mech.*, 227: 245-272, 1991.

K. Suga. Non-linear eddy viscosity modelling with a transport equation for Lumley's stress flatness parameter. *Proc. 11<sup>th</sup> Symp. on Turbulent Shear Flows*, Grenoble, France, Vol. 2, pp 13/18-13/23, 1997.

G.I. Taylor. *The scientific papers of sir G.I. Taylor*. Cambridge Univ. Press, vol. 2, 1960.

H. Tennekes and J.L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press 1977

A.A. Townsend. *Early days of turbulent shear flow*. University press, Cambridge, 2<sup>nd</sup> edition, 1976.

E.R. Van Driest. On turbulent flow near a wall. *J. Aero. Sci.*, vol. 23, pp 1007-1011, 1956.

D.C. Wilcox. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA. J.*, Vol. 26, No. 11, pp 1299-1310, 1988.

D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, Inc, La Canada, CA., 1993a.

D.C. Wilcox. A two-equation model for wall-bounded and free-shear flows. *AIAA. J.* 1993b.

D.C. Wilcox. Comparison of two-equation turbulence model for bound layers with pressure gradient. *AIAA. J.*, Vol. 31, No. 8, pp 1414-21, 1993c.

D.C. Wilcox. Simulation of transition with a two-equation turbulence model. *AIAA. J.*, Vol. 32, No. 2, pp 247-55, 1994.

D.C. Wilcox, R.M. Traci. A complete model of turbulence. *AIAA. J.*, pp 76-351, 1976.

---

V. Wizman, D. Laurence, M. Kanniche, P. A. Durbin et A. Demuren. Modeling near-wall effects in second moment closures by elliptic relaxation. *Intl. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 17, No 3, pp 255-266, 1996.

V. Yakhot and S.A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence -1- Basic theory. *J. of Scientific Computing*, Vol. 1, No. 1, pp 3-51, 1986.

V. Yakhot, S.A. Orszag, S. Thangam, T.B. Gatski and C.G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. of Fluids A*. Vol. 4, No. 7, pp 1510-1520, 1992.

---

Titre : Prédiction numérique d'écoulements turbulents en présence de paroi à l'aide d'un modèle à relaxation elliptique.

Résumé : L'objectif de ce travail est la prédiction numérique d'écoulements turbulents de fluides newtoniens et incompressibles à l'aide de modèles à viscosité turbulente. La présence des parois est la plupart du temps prise en compte par l'introduction des fonctions d'amortissement ou par des termes non-linéaires dans les équations du modèle, ce qui pénalise l'universalité du modèle. L'approche de relaxation elliptique permet d'éviter ces types de problèmes. Le modèle  $\overline{v^2}$ -f développé par Manceau et Hanjalic et basé sur la pondération elliptique a été utilisé dans cette thèse. En s'appuyant sur des procédures *a priori* et *a posteriori*, ce modèle a été comparé avec les modèles linéaire k- $\epsilon$  et non-linéaire de Shih. Les tests *a priori* ont montré l'aptitude du modèle à relaxation elliptique à prédire les contraintes du tenseur de Reynolds. La comparaison des grandeurs moyennes et statistiques de l'écoulement, prédites avec les données de la DNS de la littérature pour une large gamme de nombre de Reynolds en canal, montre une bonne performance de ce modèle.

Mots clés : Modélisation de la turbulence, Turbulence de paroi, Modèle à relaxation elliptique, Modèles non-linéaires.

---

Title: Numerical prediction of wall-bounded turbulent flows using an elliptic relaxation model.

Abstract : The aim of this work is to predict numerically the turbulent flows of the newtonian and incompressible fluid using eddy viscosity models. The presence of walls is usually accounted for by introducing damping functions or non linear terms in the model equations. This approach does not favor its universality. The elliptic relaxation approach avoids these problems. The  $\overline{v^2}$ -f model developed by Manceau and Hanjalic and based on the elliptic blending was studied here. By using an *a priori* and *a posteriori* approaches, this model was compared with the linear k- $\epsilon$  and the non linear Shih models. The *a priori* tests demonstrate the capability of the elliptic relaxation model to predict the Reynolds stress tensor. The mean flow field and the turbulent statistics are compared to the existing DNS data of a turbulent channel flow for a wide range of Reynolds numbers. The model performance is shown to be satisfactory.

Keywords: Turbulence modeling, Near-wall turbulence, Elliptic relaxation model, Non-linear models.