

Numéro d'ordre: 4394

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ LILLE I
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR LILLE

Présentée pour obtenir
le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Discipline : Mathématiques

Par

Mouzher CHEBIB

sous la direction de Daniel Tanré
et la codirection de J.-P. Doeraene et M. El Haouari

L.S-Catégorie relative et Invariant de Hopf

soutenue le 7 Juillet 2009 devant le jury composé de :

M. Daniel TANRÉ	(Univ. Lille I Sciences et Technologies)	Directeur
M. Yves FELIX	(Univ. Louvain, Belgique)	Rapporteur
M. Aniceto MURILLO	(Univ. Malaga, Espagne)	Rapporteur
M. Benoit FRESSE	(Univ. Lille I Sciences et Technologies)	Examinateur

Résumé

Notre travail s'inscrit dans un domaine initié en 1934 par Lusternik et Schnirelmann qui associent à une variété un invariant appelé catégorie qui permet de minorer le nombre des points critiques d'une fonction différentiable sur cette variété.

Nous nous intéressons à une généralisation au cas des applications continues entre espaces topologiques, auxquelles nous associons un invariant appelé σ^i -catégorie.

Nous obtenons plusieurs caractérisations de la σ^i -catégorie d'une application.

Nous examinons ensuite l'effet sur la σ^i -catégorie d'un attachement d'une cellule à la source d'une application. Cette étude est faite au moyen d'un nouvel invariant, appelé invariant de Hopf relatif.

Enfin nous examinons les relations entre les catégories de produit et de produit smash.

Abstract

Our work is registered in a field initiated in 1934 by Lusternik and Schnirelmann, which associate with a variety an invariant called category, which allows to undervalue the number of the critical points of a differentiable function on this variety.

We are interested in a generalization in the case of the continuous applications between topological spaces in which we associate an invariant called σ^i -category.

We obtain several characterizations of the σ^i -category on an application

We examine then the effect on the σ^i -category of a cell attachment on an application source. This study is made with a new invariant, called invariant of relative Hopf.

Finally we examine the relations between the categories of product and product smash.

Remerciements

Mes premiers mots de remerciements vont à Daniel Tanré. Il a su m'encourager à poursuivre le chemin des mathématiques pures. C'est pour moi une grande fierté qu'il était mon directeur de thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers les professeurs Jean-Paul Doeraene et Mohammed El Haouari, qui ont su avec beaucoup de compétence m'initier au domaine de l'enseignement et de la recherche et qui m'ont apporté aussi bien scientifiquement qu'humainement. Tout au long de ces années, ils ont toujours été disponibles pour d'intenses et rationnelles discussions. Pour tout cela, leur confiance et leur nombreux conseils et corrections visant à améliorer la rédaction de la thèse et des articles, je leur remercie vivement.

Je leur remercie aussi pour leur soutien moral et leur attention qu'ils ont consacré à la préparation de cette thèse, sans lesquels ce travail n'aurait pas pu voir le jour.

Ensuite je souhaite aussi exprimer ma gratitude envers Yves Félix et Aniceto Murillo qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire malgré les contraintes de temps.

Merci à Benoit Fresse d'avoir accepté d'être un membre de ce jury.

Je remercie tous les membres du laboratoire de mathématiques de Lille 1, tous mes amis et tous ceux qui ont assisté à la soutenance.

Enfin, ce travail a été réalisable grâce au soutien de mes parents, mes proches et de tous mes amis. Je ne peux pas les citer tous mais je pense en particulier à ma mère pour son soutien morale et son encouragement.

Table des matières

0.1	Introduction	6
1	LS-catégories	16
1.1	La LS-catégorie	16
1.2	Équivalence entre les LS-catégories d'un espace au sens de Ganea et Whitehead	16
1.3	Équivalence des LS-catégories d'une application au sens de Ganea et Whitehead	20
2	La σ-catégorie d'une application	25
2.1	Lemmes	25
2.2	Suspension d'application	26
2.3	Caractérisation d'épimorphisme	32
2.4	Généralisation du lemme de Puppe	36
2.5	Variations de Ganea et Whitehead de la L-S catégorie	40
3	Attachement d'une cellule et invariant de Hopf	60
3.1	La construction de γ'_k	60
3.2	L'utilité de l'invariant de Hopf	65
4	L-S σ^i-catégorie d'un produit d'applications	74
4.1	σ^i -catégorie et le produit	74
4.2	σ^i -catégorie et le produit smash	75

0.1 Introduction

Notre travail s'inscrit dans un domaine initié en 1934. L. Lusternik et L. Schnirelmann associent à une variété M un entier appelé catégorie de M qui permet de minorer le nombre de points critiques d'une fonction différentiable définie sur M . Quelques années plus tard, R. H. Fox étend la définition de Lusternik et Schnirelmann aux espaces topologiques et aux applications continues entre des espaces topologiques.

Dans la suite, nous nous intéressons au cas d'applications continues entre espaces topologiques. À une telle application sont classiquement associés les invariants homotopiques suivants :

Définition 1.3.1 *La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'une application continue $f : X \longrightarrow Y$, notée $\text{cat } f$, est le plus petit entier n tel qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_j)_{0 \leq j \leq n}$ de X pour lequel la restriction de f à chaque U_j est homotopiquement nulle.*

Dans le cas où $f = \text{id} : X \longrightarrow X$, nous retrouvons la définition de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de l'espace X .

Exemple

- La catégorie d'une sphère de dimension n est 1 car on peut la recouvrir par deux ouverts ayant le type d'homotopie de ses deux hémisphères.
- La catégorie d'un espace contractile est 0 et $\text{cat}(S^1 \times S^1) = 2$.
- La catégorie d'une application contractile, par exemple de l'injection de S^1 dans S^2 vaut 0, tandis que la catégorie de l'injection de S^1 dans $S^1 \times S^1$ vaut 1.

Un élément important dans l'étude de la catégorie réside dans les caractérisations introduites respectivement par G. Whitehead et T. Ganea [57], [19]. Celles-ci permettent d'exprimer la L.S- catégorie d'une application $f : X \longrightarrow Y$ en terme d'existence de relèvement à homotopie près.

Théorème 1.3.3 [19] *La L.S-catégorie d'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ à la méthode de Ganea est inférieure ou égale à n si et seulement si l'application f se factorise par $g_n(Y) : G_n(Y) \longrightarrow Y$ à homotopie près.*

Théorème 1.3.6 [57] *La L.S-catégorie d'une application $f : X \longrightarrow Y$ à la méthode de Whitehead est inférieure ou égale à n si et seulement s'il existe une application $g : X \longrightarrow T^n(Y)$ rendant commutatif à homotopie près le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & T^n(Y) \\
 \downarrow f & & \downarrow j_n(Y) \\
 Y & \xrightarrow{\Delta_Y^{n+1}} & Y^{n+1}
 \end{array}$$

Les caractérisations de Whitehead et de Ganea ont également donné lieu à des approximations de cet invariant parmi lesquelles on trouve les catégories faibles $W\text{-}wcat$ au sens de Whitehead, et $G\text{-}wcat$ au sens de Ganea.

Dans cette perspective, nous nous intéressons à l'information contenue dans la L.S- catégorie d'une application f , plus précisément nous définissons des variantes de la catégorie.

Définition 2.2.9 (Ganea) *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sigma^i cat f$ est le plus petit entier n pour lequel l'application $\Sigma^i f$ se factorise par $\Sigma^i g_n(Y) : \Sigma^i G_n(Y) \longrightarrow \Sigma^i Y$.*

Nous obtenons également une suite décroissante d'entiers dont la limite est notée $\sigma cat f$,

$$\sigma cat f \leq \dots \leq \sigma^{i+1} cat f \leq \sigma^i cat f \leq \dots \leq \sigma^0 cat f = cat f.$$

Nous examinons dans la section 2.3 la σ^i -catégorie d'un épimorphisme.

Théorème 2.3.6 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme, où Y est $(q - 1)$ -connexe, ($q \geq 2$), $i \geq 0$. Si $\sigma^i cat f = n$ et $dim Y \leq q(n + 1) - 2$, alors*

1. $\sigma^i cat f = \sigma^i cat Y$.
2. $\sigma^{i+p} cat f = \sigma^i cat f$ pour tout $p \geq 0$.

Corollaire 2.3.7 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si $cat f$ est finie ($cat f < \infty$), alors $\sigma cat f = cat f$.*

Conjecture 2.3 *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme, nous conjecturons que $cat f = cat Y$.*

Nous montrons que la conjecture est une conséquence de la conjecture de Ghorbal [22].

Nous généralisons le lemme de Puppe.

Lemme 2.4.1 *Soient $i : A \longrightarrow B$ et $i' : A' \longrightarrow B'$ deux applications continues. Soient α et β , deux applications rendant commutatif à homotopie près le carré suivant :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' \end{array}$$

Considérons les cofibrations homotopiques $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} C$ et $A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{\rho'} C'$, leurs suites de Puppe sont respectivement :

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma \rho} \Sigma C \dots$$

et

$$A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{\rho'} C' \xrightarrow{\delta'} \Sigma A' \xrightarrow{\Sigma i'} \Sigma B' \xrightarrow{\Sigma \rho'} \Sigma C' \dots$$

Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près où γ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\rho} & C & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A & \xrightarrow{\Sigma i} & \Sigma B & \longrightarrow & \dots \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \Sigma \alpha \downarrow & & \Sigma \beta \downarrow & & \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\rho'} & C' & \xrightarrow{\delta'} & \Sigma A' & \xrightarrow{\Sigma i'} & \Sigma B' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Parmi les 4 conditions suivantes :

1. $\gamma \circ \rho$ est homotopiquement triviale.
2. $\Sigma A \vee_C C' \simeq \Sigma B \vee C'$.
3. il existe $r : \Sigma A \longrightarrow C'$ tel que $r \circ \delta \simeq \gamma$.
4. il existe $\xi : \Sigma B \longrightarrow \Sigma A'$ tel que $\Sigma i' \circ \xi \simeq \Sigma \beta$.

Les trois premières sont équivalentes et impliquent la quatrième.

Grâce à cette généralisation, nous allons définir la σ^i wcat f (σ^i -catégorie faible pour f au sens de Ganea).

Définition 2.4.3 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.

On a σ^i wcat $f \leq n$ si et seulement si $\Sigma^i \gamma \circ \Sigma^i c_n(X)$ est homotopiquement nulle

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} G_n(X) & \xrightarrow{g_n(X)} & X & \xrightarrow{c_n(X)} & C_n(X) & \dots & \longrightarrow & \Sigma^i G_n(X) & \xrightarrow{\Sigma^i g_n(X)} & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i c_n(X)} & \Sigma^i C_n(X) & \longrightarrow & \dots \\ G_n(f) \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \gamma & & & \Sigma^i G_n(f) \downarrow & & \downarrow \Sigma^i f & & \downarrow \Sigma^i \gamma & & \\ G_n(Y) & \xrightarrow{g_n(Y)} & Y & \xrightarrow{c_n(Y)} & C_n(Y) & \dots & \longrightarrow & \Sigma^i G_n(Y) & \xrightarrow{\Sigma^i g_n(Y)} & \Sigma^i Y & \xrightarrow{\Sigma^i c_n(Y)} & \Sigma^i C_n(Y) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où l'application γ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Dans le cas où $f = id_X$ et $i = 0$, on retrouve la L.S-catégorie faible de X.

Et nous montrons :

Proposition 2.4.4 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors pour tout $i \geq 1$, σ^i cat $f \leq \sigma^{i-1}$ wcat $f \leq \sigma^{i-1}$ cat f .

D'autre part, nous donnons plusieurs versions équivalentes à la méthode de Ganea et Whitehead pour une application quelconque puis nous généralisons ces versions à la σ^i -catégorie.

Définition 2.5.1 Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et si i est un entier positif ou nul nous posons :

- $\sigma^i \text{G1cat } f \leq n$ si elle vérifie la condition suivante :

G1) L'application $\Sigma^i f : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i Y$ se factorise à homotopie près par la $i^{\text{ème}}$ suspension du $n^{\text{ième}}$ espace de Ganea, i.e. s'il existe une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma^i G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\ \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y \end{array}$$

- G2) $\sigma^i \text{G2cat } f = 0$ si et seulement si l'application $\Sigma^i f$ est homotopiquement nulle.

Si $n \geq 1$, $\sigma^i \text{G2cat } f \leq n$ s'il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc} Z_{j-1} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\ Y_{j-1} & \xrightarrow{\alpha_{j-1}} & Y_j \end{array}$$

avec $0 < j \leq n$, α_0 homotopiquement nulle et $\Sigma^i f$ se factorisant par $\Sigma^i y_n : \Sigma^i Y_n \longrightarrow \Sigma^i Y$.

- G3) $\sigma^i \text{G3cat } f = 0$ si et seulement si l'application $\Sigma^i f$ est homotopiquement nulle.

Si $n \geq 1$, $\sigma^i \text{G3cat } f \leq n$ s'il existe une somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\ \tilde{L} & \xrightarrow{\alpha} & L \end{array}$$

où $\sigma^0 \text{G3cat } \alpha \leq n-1$ et $\Sigma^i f$ se factorise par une application $\Sigma^i l : \Sigma^i L \longrightarrow \Sigma^i Y$, i.e. on a un triangle commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma^i L & \\ \nearrow & & \searrow \Sigma^i l \\ \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y \end{array}$$

- $\sigma^i \text{G4cat } f \leq n$ si elle vérifie la condition suivante :

G4) Il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc}
 V_j & \longrightarrow & U_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{X}_{j-1} & \longrightarrow & X_j \\
 & \searrow & \downarrow \alpha_j \\
 & & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

$0 < j \leq n$, dans laquelle

- $X_0 \simeq *$.
- $\alpha_n \simeq \Sigma^i f$.
- L'application $\tilde{X}_{j-1} \longrightarrow X_j \longrightarrow \Sigma^i Y$ se factorise par α_{j-1} .
- L'application $U_j \longrightarrow \Sigma^i Y$ est homotopiquement nulle.

Théorème 2.5.2 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, alors pour tout $i \geq 0$, on a $\sigma^i G1cat f = \sigma^i G2cat f = \sigma^i G3cat f$.

Avec les axiomes du cube, nous avons aussi, $\sigma^i G4cat f \leq \sigma^i G1cat f$.

Dans le cas où $i = 0$: $\sigma^0 G1cat f = \sigma^0 G4cat f$.

Introduisons des variantes de la catégorie d'une application dans le cadre du fat wedge.

Définition 2.5.11 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.

- $W1cat f \leq n$ si la condition suivante est satisfaite :

W1) Il existe une application $g : X \longrightarrow T^n(Y)$ qui rend le carré suivant commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & T^n(Y) \\
 \downarrow f & & \downarrow j_n(Y) \\
 Y & \xrightarrow{\Delta_Y^{n+1}} & Y^{n+1}
 \end{array}$$

- $W2cat f \leq n$ si la condition suivante est satisfaite :

W2) Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc}
 S_{i-1} & \longrightarrow & Y^i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R_{i-1} \times Y & \longrightarrow & R_i \\
 & \searrow & \downarrow r_i \\
 & & Y^{i+1}
 \end{array}$$

dans laquelle

$R_0 \simeq *$ et $\Delta_Y^{n+1} \circ f : X \longrightarrow Y^{n+1}$ se factorise par l'application $r_n : R_n \longrightarrow Y^{n+1}$.

• $W3cat f \leq n$ si la condition suivante est satisfaite :

W3) Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc}
 Q_i & \longrightarrow & P_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \widetilde{W}_{i-1} & \longrightarrow & W_i \\
 & \searrow & \downarrow w_i \\
 & & Y^{i+1}
 \end{array}$$

dans laquelle

- L'application $\widetilde{w}_{i-1} : \widetilde{W}_{i-1} \longrightarrow Y^{i+1}$ se factorise par $w_{i-1} \times id_Y$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 & W_{i-1} \times Y & \\
 & \nearrow & \searrow w_{i-1} \times id \\
 \widetilde{W}_{i-1} & \longrightarrow & Y^{i+1}
 \end{array}$$

- $W_0 \cong *$.
- L'application $P_i \longrightarrow Y^{i+1}$ se factorise par $Y^i \times *$.
- L'application w_n est homotope à $\Delta_Y^{n+1} \circ f$.

Théorème 2.5.12 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.

Alors $W1cat f = W2cat f = W3cat f$.

Dans le chapitre 3, nous associons à une application $f : X \longrightarrow Z$ de L.S catégorie inférieure ou égale à k et à une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$, un élément $\overline{H}(\alpha)$ du groupe $\pi_p(G_k(Z))$, appelé invariant de Hopf :

Définition 3.2.3 Soient $f : X \longrightarrow Z$, de σ^i -catégorie inférieure ou égale à k et $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ un relèvement de $\Sigma^i f$ via la $i^{\text{ème}}$ suspension du $k^{\text{ème}}$ espace de Ganea. Notons $\zeta : G_k(Z) \longrightarrow C(s)$ l'application obtenue en construisant la cofibre homotopique de s . À une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ nous associons deux classes d'homotopie :

1. $\overline{H}_i(\alpha) = \Sigma^i \gamma'_k - s \circ \Sigma^i \alpha \in \pi_{p+i}(\Sigma^i G_k(Z))$, la classe $\overline{H}_i(\alpha)$ mesure la commutativité du triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) \\
 \Sigma^i \alpha \downarrow & \nearrow s & \\
 \Sigma^i X & &
 \end{array}$$

où γ'_k est défini en 3.1.1.

2. $\overline{H}'_i(\alpha) = \zeta \circ \overline{H}_i(\alpha) \simeq \zeta(\Sigma^i \gamma'_k - s \circ \Sigma^i \alpha) \simeq \zeta \circ \Sigma^i \gamma'_k \in \pi_{p+i}(C(s))$, défini à partir du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & & C(s) \\
 & \nearrow \overline{H}'_i(\alpha) & \uparrow \zeta \\
 S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) \\
 & \searrow \Sigma^i \alpha & \uparrow s \\
 & & \Sigma^i X
 \end{array}$$

En général, quand on étend une application f de σ^i -catégorie inférieure ou égale à k en ajoutant une cellule à sa source, la σ^i -catégorie des applications induites \tilde{f} et \tilde{f}' (voir proposition 2.5.9 et proposition 2.5.10) est inférieure ou égale à $k + 1$. La question qui se pose ici est : "sous quelle condition $\sigma^i \text{cat} \tilde{f} \leq k$? et $\sigma^i \text{cat} \tilde{f}' \leq k$?". Les théorèmes suivants apportent des réponses à cette question, et généralise le travail de Berstein-Hilton et le travail de Vandembroucq dans le cas où f est la cofibre homotopique de α , et dans le cas où $f = id_X$ respectivement.

Théorème 3.2.5 *Soit $f : X \longrightarrow Z$ une application continue. Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$, telle que $f \circ \alpha$ est homotopiquement triviale. Notons $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ sa cofibre homotopique. L'application \tilde{f} est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique :*

$$\begin{array}{ccccc}
 S^p & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{f} & Z \\
 \downarrow & & \downarrow j & \nearrow \tilde{f} & \\
 * & \longrightarrow & X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} & &
 \end{array}$$

Alors pour tout $i \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\sigma^i \text{cat} f \leq k$ et $\overline{H}_i(\alpha) = 0$;
2. $\sigma^i \text{cat} \tilde{f} \leq k$.

Théorème 3.2.6 *Soient $f : X \longrightarrow Z$ une application continue de σ^i -catégorie inférieure ou égale à k et $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ un relèvement de $\Sigma^i f$. Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ et notons $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ sa cofibre homotopique.*

L'application $\tilde{f}' : X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \longrightarrow Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}$ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique, et on a le diagramme

commutatif à homotopie près suivant.

$$\begin{array}{ccc}
S^p & \longrightarrow & * \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \\
X & \longrightarrow & X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \\
f \downarrow & & \tilde{f}' \downarrow \\
Z & \longrightarrow & Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}
\end{array}$$

Si $\overline{H}_i(\alpha) = 0$ alors $\sigma^i \text{cat} \tilde{f}' \leq k$.

Théorème 3.2.7 Soient $f : X \longrightarrow Z$ une application continue de σ^i -catégorie inférieure ou égale à k pour tout $i \geq 0$, $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ un relèvement de $\Sigma^i f$, $\zeta : \Sigma^i G_k(Z) \longrightarrow C(s)$ une cofibre de s . Nous supposons de plus que Z un CW complexe $(q-1)$ -connexe ($q \geq 2$) et que X est de dimension inférieure ou égale à $q(k+1) - 2$. Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$.

Notons $X' := X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$, $Z' := Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}$ et $\tilde{f}' : X' \longrightarrow Z'$ l'application induite par la propriété universelle de somme amalgamée homotopique.

1. Si $\sigma^i \text{cat} \tilde{f}' \leq k$ alors $\overline{H}'_i(\alpha) = 0$.
2. Si f est un épimorphisme, et Z de dimension inférieure ou égale à $q(k+1) - 2$ alors, pour tout $j \geq 1$, l'égalité $\Sigma^j \overline{H}'_i(\alpha) = 0$, implique $\sigma^{i+j} \text{cat} Z' \leq k$.

Pour les invariants $\sigma^i \text{cat} f$ de produits d'applications nous montrons :

Théorème 4.1.2 Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues. Alors pour tout $i \geq 0$, $\sigma^i \text{cat}(f \times g) \leq \sigma^i \text{cat} f + \sigma^i \text{cat} g$.

Nous utilisons le produit smash pour montrer des théorèmes qui généralisent des résultats obtenus par Berstein-Hilton et Vandembroucq, et qui donnent des exemples qui vérifient la conjecture de Ganea ($\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat} X + 1$).

Nous introduisons une variante de la σ^i -catégorie.

Définition 4.2.9 Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues et notons $g_k^{Y'}(Y) := g_k(Y) \wedge id_{Y'}$. Alors $\text{cat}_g f \leq k$ si et seulement si $f \wedge g$ se factorise à homotopie près via $G_k(Y) \wedge Y'$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
& & G_k(Y) \wedge Y' \\
& \nearrow s & \downarrow g_k^{Y'}(Y) \\
X \wedge X' & \xrightarrow{f \wedge g} & Y \wedge Y'
\end{array}$$

- Dans le cas où l'application $g = \Sigma^i g'$, alors $\text{cat}_g f = \sigma^i \text{cat}_{g'} f$.
- Dans le cas où l'application $g = \text{id}_A$ et l'application $f = \text{id}_X$, alors $\text{cat}_g f = \text{cat}_A X$.

Définition 4.2.10 Supposons que $\text{cat}_A X \leq k$ et $s : X \wedge A \longrightarrow G_k(X) \wedge A$ une section homotopique de $g_k^A(X)$.

Notons $\xi : G_k(X) \wedge A \longrightarrow C(s)$ la cofibre homotopique de s .

Pour toute application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ on définit l'invariant de Hopf $H_A(\alpha) := \xi \circ (\gamma_k' \wedge A)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_A(\alpha) & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 S^p \wedge A & \xrightarrow{\gamma_k' \wedge A} & G_k(X) \wedge A & \xrightarrow{\xi} & C(s) \\
 & & \uparrow s & & \\
 & & X \wedge A & &
 \end{array}$$

Remarque 4.2.11 Remarquons :

1. $\Sigma^i H_A(\alpha) \cong H_{\Sigma^i A}(\alpha)$, puisque $\Sigma^i(S^p \wedge A) \cong S^p \wedge \Sigma^i A$.
2. $\Sigma^i C(s) \cong C(\Sigma^i s)$.
3. $\sigma^i \text{cat}_A(Y) = \text{cat}_{\Sigma^i A}(Y)$.

Théorème 4.2.12 Soient A un espace quelconque, et X un 1-connexe CW-complexe, tels que $\text{cat}_A X \leq k$. Considerons $s : X \wedge A \longrightarrow G_k(X) \wedge A$ une section homotopique de $g_k^A(X)$, et $\alpha : S^p \longrightarrow X$. Notons $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$, pour tout $i \geq 1$:

Si $H_{\Sigma^i A}(\alpha) = 0$, alors $\text{cat}_{\Sigma^i A}(Y) \leq k$.

Dans le cas où $A = S^0$, nous retrouvons les résultats [5] [56].

Théorème 4.2.14 Soient X, X' et A des espaces quelconques. Alors pour tout $i \geq 1$, on a $\text{cat}_{\Sigma^i A}(X \times X') \leq \text{cat}_{\Sigma^i A} X + \text{cat}_{\Sigma^i A} X'$.

Théorème 4.2.16 Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues, dont au moins une est non nulle. Alors pour tout $i \geq 1$, on a, $\sigma^i \text{cat}(f \wedge g) + 1 \leq \sigma^i \text{cat}_g f + 1 \leq \sigma^i \text{cat}(f \times g) \leq \sigma^i \text{cat} f + \sigma^i \text{cat} g$.

Dans le cas où $g = \text{id}_{S^m}$ et en passant à la limite nous obtenons $\sigma \text{cat}(f \times \text{id}_{S^m}) = \sigma \text{cat} f + 1$, ce qui généralise la conjecture de Ganea et répond positivement à cette généralisation pour les applications f dont lesquelles $\sigma \text{cat} f = \text{cat} f$.

Dans le cas où $f = \text{id}_X$ et $g = \text{id}_{S^m}$, nous trouvons le théorème de Vandembroucq [55], après l'exemple d'Iwase[29], qui a répondu par la négative à la conjecture de Ganea, la question de Ganea devient naturellement : pour quels espaces X a-t-on l'égalité $\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat} X + 1$? Les résultats déjà obtenus sur la conjecture de Ganea sont autant d'éléments de réponses à

cette question. Récemment J. Strom a montré qu'un CW-complexe X $(q - 1)$ -connexe dont la dimension majorée par $q(\text{cat } X + 1) - 2$ vérifie cette égalité [49]. La combinaison des théorèmes 2.3.6 et 4.2.16 dans le cas où $f = id_X$ et de catégorie finie nous permet d'avoir certains exemples.

Nous examinons également les relations entre les catégories de produit et de produit smash, et nous montrons :

Proposition 4.2.18 *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues. Alors pour tout $i \geq 0$, on a*

1. $\sigma^i \text{cat}(f \wedge g) \leq \min\{\sigma^i \text{cat} f, \sigma^i \text{cat} g\}$.
2. $\max\{\sigma^i \text{cat} f, \sigma^i \text{cat} g\} \leq \sigma^i \text{cat}(f \times g)$.

Chapitre 1

LS-catégories

Dans ce chapitre, nous définissons la catégorie de Lusternik-Schnirelmann (LS) dans la catégorie Top^* des espaces topologiques pointés et des applications continues pointées. Nous allons d'abord aborder l'historique de la LS-catégorie. Elle fut introduite en 1934 par Lusternik et Schnirelmann sur une variété (pour minorer le nombre de points critiques d'une fonction différentiable) puis fut étendue par R. Fox aux espaces topologiques. Nous présentons dans ce chapitre la LS-catégorie de cet invariant celle qu'elle a été caractérisée par T. Ganea, et G. W. Whitehead.

1.1 La LS-catégorie

Soit $X \in \text{Top}^*$, un ouvert $U \subset X$ contenant le point de base est dit contractile dans X si l'inclusion $U \hookrightarrow X$ est homotopiquement triviale.

1.2 Équivalence entre les LS-catégories d'un espace au sens de Ganea et Whitehead

Définition 1.2.1 *La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace $X \in \text{Top}^*$, notée $\text{cat}X$, est le plus petit entier n tel qu'il existe un recouvrement d'ouverts $(X_j)_{0 \leq j \leq n}$ de X , contractiles dans X .
S'il n'existe aucun entier qui vérifie cette propriété, on pose $\text{cat}X = \infty$.*

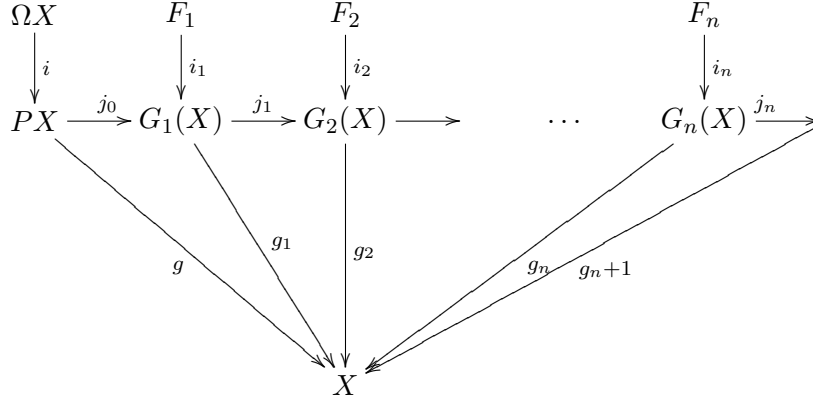
Exemple 1.2.2 – *La catégorie d'un espace contractile est nulle.
– La catégorie d'une sphère S^n est 1, car tout simplement il y a deux ouverts de S^n contractiles dans S^n , et recouvrant S^n .*

Caractérisation de Ganea

Considérons la fibration $\Omega X \xrightarrow{i} PX \xrightarrow{g} X$ où PX est l'espace des applications continues α de $[0, 1]$ dans X telles que $\alpha(0) = *$ et g est définie par $g(\alpha) = \alpha(1)$, et i l'inclusion de l'espace des lacets. Plus généralement, Ganea

a défini, par récurrence, une suite de fibrations $F_n(X) \xrightarrow{i_n(X)} G_n(X) \xrightarrow{g_n(X)} X$ dans laquelle $F_0(X) = \Omega X$, $G_0(X) = PX$, $i_0(X) = i$, et $g_0(X) = g$.

Formons le diagramme :



par les espaces $G_{n+1}(X)$ s'obtiennent par récurrence de la façon suivante :

1. F_n est la fibre homotopique de g_n .
2. j_n est la cofibre homotopique de i_n .
3. Comme $g_n \circ i_n$ est homotopiquement nulle, alors g_n se factorise à homotopie près par $G_{n+1}(X)$ pour donner g_{n+1} .
4. En particulier $G_1(X)$ et $\Sigma\Omega X$ ont le même type d'homotopie.

Définition 1.2.3 Soit X un espace. Posons $G\text{-cat}X \leq n$ si l'application $g_n(X)$ admet une section homotopique i.e. s'il existe une application $s : X \longrightarrow G_n(X)$ telle que $g_n(X) \circ s \simeq id_X$.

Théorème 1.2.4 [19] $G\text{-cat}X = \text{cat}X$.

Remarque 1.2.5

La LS-catégorie de X est un invariant du type d'homotopie de X .

Proposition 1.2.6 ([12]) Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\rho} Y/X$ est une cofibration homotopique, on a $\text{cat}(Y/X) \leq \text{cat}Y + 1$.

Proposition 1.2.7 ([7]) Si $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ est une fibration, on a $\text{cat}\{E \sqcup_i CF\} \leq \text{cat}B$.

Démonstration. Cette proposition sera montrée dans un cas plus général dans la proposition 2.5.8 \square

Proposition 1.2.8 Soit X un espace, alors
 – $\text{cat}(G_n(X)) \leq n$ pour tout entier n .

- L'espace $F_n(X)$ a le type d'homotopie de $*^{n+1}\Omega X$ le produit joint de ΩX itéré $n + 1$ fois.

Caractérisation de Whitehead

Soit X un espace. La construction de Whitehead de X , notée $T^n(X)$ (ou T^n si la confusion n'est pas possible), est obtenue par récurrence comme la somme amalgamée homotopique suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 T^{n-1} & \longrightarrow & X^n \times * \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T^{n-1} \times X & \longrightarrow & T^n \\
 & \searrow & \downarrow j_n(X) \\
 & & X^{n+1}
 \end{array}$$

où $T^n(X) := T^n$, $T^0 = *$ et $j_n(X)$ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Remarque 1.2.9

$T^n(X)$ est à homotopie près le sous-espace de X^{n+1} appelé le fat wedge de X défini par $T^n(X) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X^{n+1} / \exists i \in \{0, \dots, n\} / x_i = *\}$. C'est le sous-espace de $n + 1$ -uplets dont au moins l'une des composantes est le point de base. Par exemple, $T^1(X) = X \vee X$.

Définition 1.2.10 Soit X un espace. Posons $W\text{-cat}X \leq n$ si et seulement si la diagonale Δ_X^{n+1} se factorise à homotopie près via le fat wedge $T^n(X)$. Autrement dit $W\text{-cat}X = \min\{n \in \mathbb{N} / \exists \Phi : X \longrightarrow T^n(X) ; j_n(X) \circ \Phi \simeq \Delta_X^{n+1}\}$. S'il n'existe pas un entier n , alors $W\text{-cat}X = \infty$.

Théorème 1.2.11 Soit X un espace, alors l'existence d'une section pour la $n^{\text{ième}}$ fibration de Ganea ($g_n(X)$) équivaut à l'existence d'une application relevant la $(n + 1)^{\text{ième}}$ diagonale dans le fat wedge $T^n(X)$.

Démonstration. ([20]) Grâce au produit fibré homotopique suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 G_n(X) & \xrightarrow{\gamma_n} & T^n(X) \\
 g_n(X) \downarrow & & \downarrow j_n(X) \\
 X & \xrightarrow{\Delta_X^{n+1}} & X^{n+1}
 \end{array}$$

- Si $s : X \longrightarrow G_n(X)$ existe tel que $g_n \circ s \simeq id_X$, alors $\Phi := \gamma_n \circ s$ est un relevé de Δ_X^{n+1} .

- Si $\Phi : X \longrightarrow T^n(X)$ existe tel que $j_n(X) \circ \Phi \simeq \Delta_X^{n+1}$ alors, par la propriété universelle du produit fibré homotopique il existe une application $s : X \longrightarrow G_n(X)$ telle que $g_n(X) \circ s \simeq id_X$.

□

Approximations de la catégorie

Définition 1.2.12 Soit X un espace. Considérons le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 G_n(X) & \xrightarrow{\gamma_n} & T^n(X) \\
 g_n(X) \downarrow & & \downarrow j_n(X) \\
 X & \xrightarrow{\Delta_X^{n+1}} & X^{n+1} \\
 \rho_n(X) \downarrow & \searrow \overline{\Delta}_X^{n+1} & \downarrow q_{n+1} \\
 \mathcal{C}_n & \xrightarrow{c_n(X)} & X^{(n+1)}
 \end{array}$$

dans lequel :

- \mathcal{C}_n est la cofibre homotopique de $g_n(X)$ et $\rho_n(X) : X \longrightarrow \mathcal{C}_n$ l'application induite.
- $X^{(n+1)}$ est la cofibre homotopique de $j_n(X) : T^n(X) \longrightarrow X^{n+1}$. C'est le produit-smash itéré de $(n+1)$ copies de X , et $q_{n+1} : X^{n+1} \longrightarrow X^{(n+1)}$ est l'application d'identification. Alors
 - $G\text{-wcat}X$ (la catégorie faible à la méthode de Ganea) est le plus petit entier n tel que l'application $\rho_n(X)$ est homotopiquement triviale.
 - $W\text{-wcat}X$ (la catégorie faible à la méthode de Whitehead) est le plus petit entier n tel que la diagonale réduite $\overline{\Delta}_X^{n+1} := q_{n+1} \circ \Delta_X^{n+1}$ est homotopiquement triviale.

Définition 1.2.13 Soit \mathbb{K} un corps commutatif et X un espace. L'invariant de Toomer de l'espace X , noté $e_{\mathbb{K}}(X)$, est le plus petit entier n pour lequel l'application $H_*(g_n(X)) : H_*(G_n(X); \mathbb{K}) \longrightarrow H_*(X; \mathbb{K})$, est surjective.

Proposition 1.2.14 Soient X un espace et \mathbb{K} un corps commutatif, alors $e_{\mathbb{K}}(X) \leq G\text{-wcat}X \leq \text{cat}X$ et $W\text{-wcat}(X) \leq G\text{-wcat}X \leq \text{cat}X$.

Nous avons vu qu'il y avait égalité des catégories d'un espace quelconque au sens de Ganea et Whitehead. Mais pour la catégorie faible, il n'y a pas d'égalité.

Cependant, à partir du diagramme précédent, nous voyons que $\rho_n(X)$ est homotopiquement triviale, implique que $\overline{\Delta}_X^{n+1}$ est homotopiquement triviale, i.e. on a $W\text{-wcat}X \leq G\text{-wcat}X$.

L'invariant de Toomer $e_{\mathbb{K}}$ et la catégorie faible au sens de Whitehead $W\text{-wcat}$ ne sont pas comparables, par exemple les espaces $X = S^3 \bigcup_{\alpha} e^7$ et

$Y = s_a^2 \vee s_b^2 \cup_{\beta} e^5$, où $\alpha \in \pi_6(s^3)$ est un élément d'ordre 4 et $\beta = [i_a, [i_a, i_b]] \in \pi_4(s_a^2 \vee s_b^2)$ est le crochet de Whitehead itéré des inclusions, vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} W\text{-wcat}(X)=2 \text{ et } e_{\mathbb{K}}(X) = 1 \\ W\text{-wcat}(Y)=1 \text{ et } e_{\mathbb{K}}(Y) = 2 \end{cases}$$

Les égalités $e_{\mathbb{K}}(X) = 1$, $W\text{-wcat}(X) = 2$, et $e_{\mathbb{K}}(Y) = 2$ sont prouvées dans [56]. L'égalité $W\text{-wcat}(Y) = 1$ est prouvée dans [5]. Comme annoncé dans la proposition 1.2.14 on a bien : $W\text{-wcat}(Y) = 1 < e_{\mathbb{K}}(Y) = 2 \leq G\text{-wcat}(Y)$.

1.3 Équivalence des LS-catégories d'une application au sens de Ganea et Whitehead

Définition 1.3.1 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, alors la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de f , notée $\text{cat } f$, est le plus petit entier n tel qu'il existe un recouvrement de $(n+1)$ ouverts $(U_j)_{0 \leq j \leq n}$ de X pour lequel la restriction $f|_{U_j}$ est homotopiquement nulle pour tout j . Dans le cas où $f = \text{id}_X$, nous retrouvons la définition de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de l'espace X .

Exemple 1.3.2 La catégorie d'une application homotopiquement triviale est nulle.

Construction de Ganea

Définition 1.3.3 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors $\text{cat } f \leq n$ si et seulement s'il existe une application $s : X \longrightarrow G_n(Y)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} & & G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow g_n(Y) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Proposition 1.3.4 ([3]) Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications continues, alors on a :

1. $\text{cat } f \leq \min\{\text{cat } X, \text{cat } Y\}$.
2. $\text{cat}(\text{id}_X) = \text{cat } X$.
3. $\text{cat}(g \circ f) \leq \min\{\text{cat } g, \text{cat } f\}$.
4. $\text{cat } f_0 = \text{cat } f_1$ si f_0 est homotope à f_1 .

Proposition 1.3.5 Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ tel que $g \circ f \simeq \text{id}_X$, alors $\text{cat } f \leq \text{cat } g = \text{cat } X$.

Démonstration.

- Supposons que $s : X \longrightarrow G_n(Y)$ existe tel que le triangle suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} & & G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow g_n(Y) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Grâce au carré commutatif à homotopie près,

$$\begin{array}{ccc} G_n(Y) & \xrightarrow{\gamma_n(Y)} & T^n(Y) \\ g_n(Y) \downarrow & & \downarrow j_n(X) \\ Y & \xrightarrow{\Delta^{n+1}(Y)} & Y^{n+1} \end{array}$$

nous obtenons l'application $g := \gamma_n(Y) \circ s$ qui rend le carré suivant commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & T^n(Y) \\ \downarrow f & & \downarrow j_n(Y) \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y^{n+1}} & Y^{n+1} \end{array}$$

- Supposons que $g : X \longrightarrow T^n(Y)$ existe tel que le carré suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & T^n(Y) \\ \downarrow f & & \downarrow j_n(Y) \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y^{n+1}} & Y^{n+1} \end{array}$$

Grâce au produit fibré homotopique suivant,

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow s & & \searrow g & \\ & & G_n(Y) & \xrightarrow{\quad} & T^n(Y) \\ & \searrow f & \downarrow g_n(Y) & & \downarrow \\ & & Y & \xrightarrow{\quad} & Y^{n+1} \end{array}$$

nous obtenons l'application s demandée. □

Catégorie relative

Définition 1.3.8 Soient X un espace, et Y un sous espace de X . Alors la catégorie relative de (X, Y) , notée $\text{cat}(X, Y)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe un recouvrement de $(n+1)$ ouverts $(U_j)_{0 \leq j \leq n}$ de X dans lesquels pour tout j , $0 \leq j \leq n$, l'inclusion $U_j \hookrightarrow X$ se factorise par Y comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \nearrow & \searrow \\ U_j \hookrightarrow & & X \end{array}$$

Remarque 1.3.9

Par définition, $T^n(X, Y)$ est le sous-espace de X^{n+1} appelé le fat wedge de X sur Y défini par $T^n(X, Y) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X^{n+1} / \exists i \in \{0, \dots, n\} / x_i \in Y\}$. C'est le sous-espace de $n+1$ -uplets dont au moins l'une des composantes appartient à Y .

Théorème 1.3.10 Soient X un espace, Y un sous espace de X . Alors la catégorie relative $\text{cat}(X, Y)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe une application continue g rendant commutatif à homotopie près le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & T^n(X, Y) \\ & \searrow \Delta_X^{n+1} & \downarrow \\ & & X^{n+1} \end{array}$$

Si $Z \subset Y$, alors $\text{cat}(X, Y) \leq \text{cat}(X, Z)$. En particulier, $\text{cat}(X, Y) \leq \text{cat}(X, *) = W\text{-cat } X$.

Proposition 1.3.11 Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration, alors $W\text{-cat } p = \text{cat}(E, F)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du produit fibré homotopique suivant :

$$\begin{array}{ccc} T^n(E, F) & \longrightarrow & E^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow p^{n+1} \\ T^n(B) & \longrightarrow & B^{n+1} \end{array}$$

□

Proposition 1.3.12 [12] Soit $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$ une cofibration fermée, alors $\text{cat}(X/A) \leq \text{cat}(X, A) + 1$.

Le théorème suivant montre l'équivalence de la catégorie d'une application définie par la méthode de Lusternik-Schnirelmann et celle défini par la méthode de Whitehead.

Théorème 1.3.13 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue telle que X est un espace normal connexe par arc et Y est un espace ayant un point de base non dégénéré.*

Démonstration. Adaptation immédiate du théorème pour les catégories d'espaces [31]. □

Chapitre 2

La σ -catégorie d'une application

Dans le chapitre 1, nous avons vu que pour une application continue $f : X \longrightarrow Y$, la fibration de Ganea $g_n(Y) : G_n(Y) \longrightarrow Y$ permet de caractériser la catégorie de l'application f en termes de déformation dans la $n^{\text{ème}}$ fibration de Ganea $G_n(Y)$.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'information contenue dans les suspensions successives de l'application f et des fibrations de Ganea. Nous rappelons la σ^i cat d'un espace X quelconque définie par L. Vandembroucq, puis nous définissons notre version de la σ^i -catégorie d'une application.

2.1 Lemmes

Commençons par rappeler deux propriétés classiques des sommes amalgamées homotopiques, et des produits fibrés homotopiques.

Lemme 2.1.1 [39] *Supposons le diagramme suivant commutatif à homotopie près.*

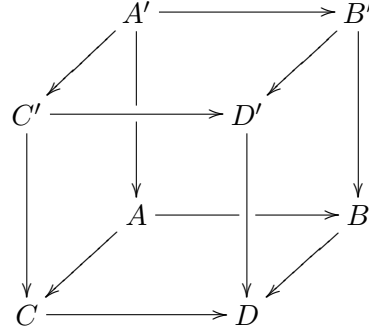
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \end{array}$$

1. *Si le carré à gauche est une somme amalgamée homotopique, alors le carré à droite est une somme amalgamée homotopique si et seulement si le grand carré est une somme amalgamée homotopique.*
2. *Si tous les espaces sont CW-complexes, A est connexe, et B et D sont 1-connexes, et le carré à droite et le grand carré sont des sommes amalgamées homotopiques, alors le carré à gauche est une somme amalgamée homotopique.*

3. Si le carré à droite est un produit fibré homotopique, alors le carré à gauche est un produit fibré homotopique si et seulement si le grand carré est un produit fibré homotopique.

Lemme 2.1.2 [39] (Lemme du cube)

Soit (C) un cube homotopiquement commutatif dans Top^*



1. Supposons :

Les deux faces arrière et de gauche sont des produits fibrés homotopiques.

Les deux faces du haut et du bas sont des sommes amalgamées homotopiques.

Alors les deux faces avant et de droite sont des produits fibrés homotopiques.

2. Supposons :

Les quatre faces verticales sont des produits fibrés homotopiques.

La face du bas est une somme amalgamée homotopique

Alors la face du haut est une somme amalgamée homotopique.

2.2 Suspension d'application

Définition 2.2.1 Soit X un espace quelconque. Pour tout $i \geq 0$, $\sigma^i \text{cat} X$ est le plus petit entier n pour lequel l'application $\Sigma^i g_n(X) : \Sigma^i G_n(X) \longrightarrow \Sigma^i X$ a une section homotopique.

Proposition 2.2.2 [56] Soit X un espace 1-connexe. Pour i et j , $1 \leq i \leq j$, et pour tout corps \mathbb{K} , alors
 $e_{\mathbb{K}}(X) \leq \sigma \text{cat} X \leq \sigma^j \text{cat} X \leq \sigma^i \text{cat} X \leq \sigma^1 \text{cat} X \leq \text{cat} X$.

Remarque 2.2.3 La σ^i -catégorie de X est un invariant du type d'homotopie de X .

Proposition 2.2.4 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et $i \geq 0$, si $\Sigma^i f$ a une section homotopique, alors $\sigma^i \text{cat} Y \leq \sigma^i \text{cat} X$.

Démonstration. Soit $h : \Sigma^i Y \longrightarrow \Sigma^i X$ une section homotopique de $\Sigma^i f$ telle que $\Sigma^i f \circ h \simeq id_{\Sigma^i Y}$. Supposons que $\sigma^i \text{cat} X \leq n$ et soit $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(X)$ une section homotopique de $\Sigma^i g_n(X)$. D'après le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Sigma^i G_n(X) & \xrightarrow{\Sigma^i G_n(f)} & \Sigma^i G_n(Y) \\
 & & \downarrow \Sigma^i g_n(X) & \nearrow & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\
 \Sigma^i Y & \xrightarrow{h} & \Sigma^i X & \xrightarrow{id_{\Sigma^i X}} & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y \\
 & \nearrow s' & \nearrow s & & & &
 \end{array}$$

dans lequel $s' := \Sigma^i G_n(f) \circ s \circ h$, nous obtenons que $\sigma^i \text{cat} Y \leq n$. \square

Corollaire 2.2.5 Soit $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ tel que $f \circ g \simeq id_Y$ (X domine Y), alors $\sigma^i \text{cat} Y \leq \sigma^i \text{cat} X$ pour tout $i \geq 0$.

Lemme 2.2.6 Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f$, une cofibration homotopique dont la suite de Puppe est

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f \xrightarrow{\rho} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma C_f \longrightarrow \dots$$

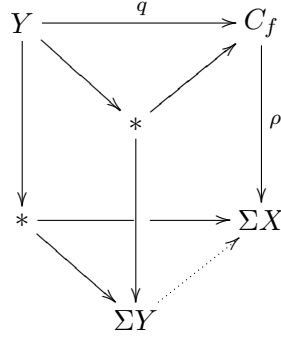
Parmi les 4 conditions suivantes, les trois premières sont équivalentes et impliquent la quatrième,

1. q est homotopiquement trivial,
2. La cofibration $C_f \xrightarrow{\rho} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$ est homotopiquement triviale, i.e. $\Sigma X \simeq C_f \vee \Sigma Y$,
3. ρ a une rétraction homotopique,
4. Σf a une section homotopique.

Si de plus les espaces sont des CW-complexes 1-connexes, alors la quatrième propriété implique les trois premières propriétés précédentes.

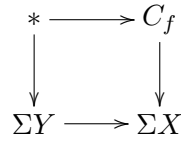
Démonstration.

- 1) \implies 2) On a le diagramme commutatif à homotopie près suivant



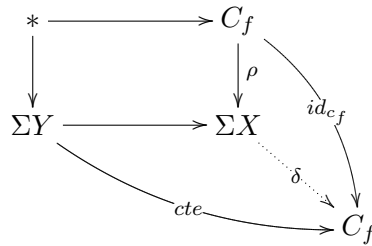
où l'application $\Sigma Y \longrightarrow \Sigma X$ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Comme le carré du fond et le carré à gauche sont des sommes amalgamées homotopiques, le lemme 2.1.1 implique que le carré à droite est aussi une somme amalgamée homotopique,



i.e. $\Sigma X \simeq \Sigma Y \vee C_f$.

- 2) \implies 3) Le diagramme plein suivant est commutatif à homotopie près



Nous obtenons δ par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

- 3) \implies 1) Supposons que l'application ρ a une rétraction homotopique, i.e. il existe une application $\delta : \Sigma X \longrightarrow C_f$ telle que $\delta \circ \rho \simeq id_{C_f}$. D'autre part l'application ρ représente une cofibre homotopique de l'application q , en particulier $\rho \circ q \simeq 0$. Ceci implique que $q \simeq id_{C_f} \circ q \simeq \delta \circ \rho \circ q \simeq 0$.

- 2) \implies 4) Dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant,

$$\begin{array}{ccccc}
* & \xrightarrow{\quad} & C_f & \xrightarrow{\quad} & * \\
\downarrow & & \downarrow \rho & & \downarrow \\
\Sigma Y & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & \Sigma Y \vee C_f \simeq \Sigma X & \xrightarrow{\quad \Sigma f \quad} & \Sigma Y \\
& \searrow & \text{---} & \nearrow & \\
& & id_{\Sigma Y} & &
\end{array}$$

les deux carrés de gauche et de droite sont des sommes amalgamées homotopiques, le lemme 2.1.1 implique que le grand carré est une somme amalgamée homotopique, ce qui montre que ξ est la section homotopique de Σf .

- 4) \implies 2) Dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
* & \xrightarrow{\quad} & C_f & \xrightarrow{\quad} & * \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Sigma Y & \xrightarrow{\quad} & \Sigma X & \xrightarrow{\quad} & \Sigma Y
\end{array}$$

le grand carré et le carré à droite sont des sommes amalgamées homotopiques, le lemme 2.1.1 implique que le carré à gauche est aussi une somme amalgamée homotopique i.e. $\Sigma X \simeq \Sigma Y \vee C_f$. \square

Corollaire 2.2.7 Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f$, une cofibration homotopique, et $i \geq 1$. Parmi les 4 conditions suivantes :

1. $\Sigma^{i-1}q$ est homotopiquement triviale,
2. La cofibration $\Sigma^{i-1}C_f \xrightarrow{\Sigma^{i-1}\rho} \Sigma^i X \xrightarrow{\Sigma^i f} \Sigma^i Y$ est homotopiquement triviale i.e. $\Sigma^i X \simeq \Sigma^i Y \vee \Sigma^{i-1}C_f$,
3. $\Sigma^{i-1}\rho$ a une rétraction homotopique,
4. $\Sigma^i f$ a une section homotopique,

les trois premières sont équivalentes et impliquent la quatrième.

Si de plus les espaces sont des CW-complexes 1-connexes, alors la quatrième propriété implique les 3 premières propriétés précédentes.

Proposition 2.2.8 Soit X un espace 1-connexe, l'application $c_n(X) : X \longrightarrow C_n(X)$ est la cofibre homotopique de $g_n(X)$. Pour tout $i \geq 1$, on a $\sigma^i \text{cat} X \leq n$ si et seulement si l'application $\Sigma^{i-1}X \longrightarrow \Sigma^{i-1}C_n(X)$ est homotopiquement triviale. En particulier $\sigma^1 \text{cat} X = G\text{-wcat} X$ si X est un CW-complexe.

Démonstration. Pour la cofibration homotopique $G_n(X) \xrightarrow{g_n(X)} X \xrightarrow{c_n(X)} C_n(X)$, d'après le corollaire 2.2.7, $\Sigma^i g_n(x)$ a une section homotopique équivalente à $\Sigma^{i-1} c_n(X)$ est homotopiquement triviale. \square

Définition 2.2.9 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. La σ^i -catégorie de f , notée $\sigma^i \text{cat} f$, est le plus petit entier n pour lequel $\Sigma^i f$ factorise par la $i^{\text{ème}}$ suspension du $n^{\text{ième}}$ espace de Ganea $G_n(Y)$. i.e. il existe une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$ qui rend le triangle suivant

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma^i G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\ \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y \end{array}$$

commutatif à homotopie près

- S'il n'existe pas un tel entier n , on pose : $\sigma^i \text{cat} f = \infty$.
- La σ -catégorie de f est le nombre $\sigma \text{cat} f := \min\{\sigma^i \text{cat} f, \text{pour tout } i \in \mathbb{N}\}$.
- $\sigma^0 \text{cat} f = \text{cat} f$.

Remarque 2.2.10 La catégorie $\sigma^i \text{cat} f$ généralise la version absolue en 2.2.1 car $\sigma^i \text{cat}(id_X) = \sigma^i \text{cat} X$.

Proposition 2.2.11 Soit $f : X \longrightarrow Y$, $i \in \mathbb{N}$, alors :

1. $\sigma^i \text{cat} f \leq \min\{\sigma^i \text{cat} X, \sigma^i \text{cat} Y\}$.
2. $\sigma^i \text{cat}(g \circ f) \leq \min\{\sigma^i \text{cat} f, \sigma^i \text{cat} g\}$, où $g : Y \longrightarrow Z$.
3. $\sigma^i \text{cat} h_0 = \sigma^i \text{cat} h_1$, si h_0 est homotope à h_1 .
4. $\sigma \text{cat} f \leq \dots \leq \sigma^{i+1} \text{cat} f \leq \sigma^i \text{cat} f \leq \dots \leq \sigma^0 \text{cat} f = \text{cat} f$.

Démonstration.

1. Supposons que $\sigma^i \text{cat} X \leq n$, alors il existe une application continue $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(X)$, tel que $\Sigma^i g_n(X) \circ s \simeq id_{\Sigma^i X}$. Notons $s' := \Sigma^i G_n(f) \circ s$, l'application $\Sigma^i f$ est homotope à $\Sigma^i g_n(Y) \circ s'$ ce qui montre que $\sigma^i \text{cat} f \leq n$.
Supposons que $\sigma^i \text{cat} Y \leq n$, donc l'application $\Sigma^i g_n(Y)$ a une section homotopique $s : \Sigma^i Y \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$. Notons $s' := s \circ \Sigma^i f$, l'application $\Sigma^i f$ est homotope à $\Sigma^i g_n(Y) \circ s'$, ce qui montre que $\sigma^i \text{cat} f \leq n$, donc $\sigma^i \text{cat} f \leq \min\{\sigma^i \text{cat} X, \sigma^i \text{cat} Y\}$.

2. Soit $g : Y \longrightarrow Z$ une application continue. Supposons que $\sigma^i \text{cat } f \leq n$, i.e. il existe une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$ tel que $\Sigma^i g_n(Y) \circ s \simeq \Sigma^i f$. Notons $s' := \Sigma^i G_n(g) \circ s$, l'application $\Sigma^i(g \circ f)$ est homotope à $\Sigma^i g_n(Z) \circ s'$, alors $\sigma^i \text{cat } (g \circ f) \leq n$.
Supposons que $\sigma^i \text{cat } g \leq n$, i.e. il existe une application $s : \Sigma^i Y \longrightarrow \Sigma^i G_n(Z)$ tel que $\Sigma^i g_n(Z) \circ s \simeq \Sigma^i g$. Notons $s' := s \circ \Sigma^i f$, l'application $\Sigma^i(g \circ f)$ est homotope à $\Sigma^i g_n(Z) \circ s'$, alors $\sigma^i \text{cat } (g \circ f) \leq n$, donc $\sigma^i \text{cat } (g \circ f) \leq \min\{\sigma^i \text{cat } f, \sigma^i \text{cat } g\}$.
3. Si $f_0 \simeq f_1$, $\Sigma^i f_0 \simeq \Sigma^i f_1$, donc si on a $\Sigma^i g_n(Y) \circ s \simeq \Sigma^i f_0$, on a aussi $\Sigma^i g_n(Y) \circ s \simeq \Sigma^i f_1$ par transitivité à l'homotopie.
4. Soit $0 \leq i \leq j$, tel que $\sigma^i \text{cat } f \leq n$, alors il existe une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$ tel que le triangle suivant est commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
& & \Sigma^i G_n(Y) \\
& \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\
\Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y
\end{array}$$

Il suffit d'appliquer Σ^{j-i} sur le triangle précédent pour montrer que $\sigma^j \text{cat } f \leq n$, ce qui montre que $\sigma^j \text{cat } f \leq \sigma^i \text{cat } f$. □

Remarque 2.2.12 D'après la proposition 2.2.11 (3), la σ^i -cat f est un invariant homotopique.

Proposition 2.2.13 Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$, tel que $g \circ f \simeq \text{id}_X$, alors pour tout $i \geq 0$, $\sigma^i \text{cat } f = \sigma^i \text{cat } g = \sigma^i \text{cat } X \leq \sigma^i \text{cat } Y$.

Démonstration. Supposons que $\sigma^i \text{cat } f \leq n$ i.e. il existe une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$, qui rend le triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc}
& & \Sigma^i G_n(Y) \\
& \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\
\Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y
\end{array}$$

commutatif à homotopie près.

Le diagramme homotopiquement commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \Sigma^i G_n(Y) & \xrightarrow{\Sigma^i G_n(g)} & \Sigma^i G_n(X) \\
& \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) & & \downarrow \Sigma^i g_n(X) \\
\Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y & \xrightarrow{\Sigma^i g} & \Sigma^i X \\
& \dashrightarrow & \text{id}_{\Sigma^i X} & \dashrightarrow &
\end{array}$$

montre que $\sigma^i \text{cat} X \leq n$, le lemme 2.2.11 implique $\sigma^i \text{cat} f = \sigma^i \text{cat} X$.
D'autre part on a : $\sigma^i \text{cat} f = \sigma^i \text{cat} X = \sigma^i \text{cat} (id_X) = \sigma^i \text{cat} (g \circ f) \leq \sigma^i \text{cat} g$
 $\leq \min\{\sigma^i \text{cat} X, \sigma^i \text{cat} Y\}$ d'où le résultat. \square

2.3 Caractérisation d'épimorphisme

Proposition 2.3.1 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme, alors pour tout $i \geq 1$, $\Sigma^i f$ a une section homotopique.*

Démonstration. La suite de Puppe de f est

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f \xrightarrow{\delta} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma \delta} \dots$$

Comme $q \circ f \simeq 0$ et f un épimorphisme, alors $q \simeq 0$. D'après le lemme 2.2.6, Σf a une section homotopique. Et par conséquence $\Sigma^i f$ a une section homotopique pour tout $i \geq 1$. \square

Corollaire 2.3.2 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme, alors pour tout $i \geq 0$ $\Sigma^i f$ est aussi un épimorphisme.*

Proposition 2.3.3 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si f est un épimorphisme homotopique, alors pour tout $i \geq 1$ $\sigma^i \text{cat} f = \sigma^i \text{cat} Y$.*

Démonstration. D'après 2.2.11, il suffit de démontrer que $\sigma^i \text{cat} Y \leq \sigma^i \text{cat} f$. Puisque f est un épimorphisme ; ceci implique que $\Sigma^i f$ ($i \geq 1$) a une section homotopique. Supposons que $\sigma^i \text{cat} f \leq n$ i.e. nous avons l'application s qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma^i G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\ \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y \end{array}$$

Notons α : une section homotopique de $\Sigma^i f$. L'application $s \circ \alpha$ est une section homotopique de $\Sigma^i g_n(Y)$. Ceci implique que $\sigma^i \text{cat} Y \leq n$ i.e. $\sigma^i \text{cat} f = \sigma^i \text{cat} Y$. \square

Corollaire 2.3.4 *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.3. Pour tout $i \geq 1$, $\sigma^i \text{cat} Y \leq \sigma^i \text{cat} X$.*

Lemme 2.3.5 *Soit $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C$ une cofibration dans laquelle tous les espaces sont 1-connexes. Notons F la fibre homotopique de ρ , $\mathcal{X} : F \longrightarrow B$ l'application induite et $d : A \longrightarrow F$ un relèvement de ι (d induite par la propriété universelle du produit fibré homotopique) i.e. \mathcal{X} et d vérifient $\mathcal{X} \circ d \simeq \iota$. Si A et C sont respectivement $(a - 1)$ et $(c - 1)$ -connexes, alors l'application d est une $(a + c - 2)$ -équivalence.*

Démonstration. On peut toujours supposer que la cofibration homotopique $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C$ est une vraie cofibration. Convertissons l'application $\rho : B \longrightarrow C$ en fibration et notons $\mathcal{X}' : F \longrightarrow P_\rho = C^I \times_C B$ l'inclusion de la fibre

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\mathcal{X}'} & P_\rho \\ d \uparrow & & \uparrow e \simeq \\ A & \xrightarrow{\iota} & B \xrightarrow{\rho} C \end{array}$$

où C^I est l'espace des chemins libres sur C .

L'application $\mathcal{X} : F \longrightarrow B$ de l'énoncé est la composée $F \xrightarrow{\mathcal{X}'} P_\rho \xrightarrow{pr} B$. Par le lemme des cinq appliqué aux longues suites exactes d'homotopie des paires (P_ρ, F) et (B, A) , l'application d est une $a + c - 2$ équivalence si et seulement si l'application de paires $e : (B, A) \longrightarrow (P_\rho, F)$ est une $a + c - 1$ équivalence. La paire (B, A) et l'espace A sont respectivement $(c - 1)$ -connexe et $(a - 1)$ -connexe. Il résulte donc du théorème d'excision homotopique de Blakers-Massey que l'application d'identification $\rho : (B, A) \longrightarrow (C, *)$ est une $a + c - 1$ équivalence. Puisque l'application $\varrho : (P_\rho, F) \longrightarrow (C, *)$ induit un isomorphisme en homotopie, le diagramme commutatif suivant implique que l'application e est une $(a + c - 1)$ -équivalence.

$$\begin{array}{ccc} (B, A) & \xrightarrow{e} & (P_\rho, F) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \varrho \\ (C, *) & \xlongequal{\quad} & (C, *) \end{array}$$

□

Théorème 2.3.6 Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme où Y est $(q - 1)$ -connexe, avec $(q \geq 2)$. Pour tout $i \geq 0$, si $\sigma^i \text{cat} f = n$ et $\dim Y \leq q(n + 1) - 2$, on a :

1. $\sigma^i \text{cat} f = \sigma^i \text{cat} Y$.
2. $\sigma^{i+p} \text{cat} f = \sigma^i \text{cat} f$ pour tout $p \geq 0$.

Démonstration.

1. D'après 2.3.3, il suffit de montrer le cas $i = 0$.
 - Si $n = 0$, alors l'application f est homotopiquement nulle, i.e. f se factorise par une application constante comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & * & \\ & \nearrow & \searrow \text{cte} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

l'application f est un épimorphisme, alors l'application cte est un épimorphisme aussi, ceci implique que id_Y est homotopiquement nulle, donc $cat Y = 0$.

- Si $n \geq 1$, par hypothèse il existe une application $s : X \longrightarrow G_n(Y)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} & & G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow g_n(Y) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

notons :

- C_f la cofibre homotopique de f .
- $C_n(Y)$ la cofibre homotopique de $g_n(Y)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \nearrow d & \downarrow l & & \\ G_n(Y) & \xrightarrow{g_n(Y)} & Y & \xrightarrow{c_n(Y)} & C_n(Y) \\ \uparrow s & & \uparrow = & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & C_f \end{array}$$

Dans ce diagramme commutatif à homotopie près,

- F est la fibre homotopique de $c_n(Y)$.
- d est un relèvement homotopique de $g_n(Y)$ (induit par la propriété universelle du produit fibré homotopique) i.e. $l \circ d \simeq g_n(Y)$

Puisque $G_n(Y)$ et $C_n(Y)$ sont respectivement $(q-1)$ et $(qn-1)$ -connexes, il découle du lemme 2.3.5 que d est une $q(n+1)-2$ équivalence. L'hypothèse de dimension implique alors que l'application $d_\zeta : [Y, G_n(Y)] \longrightarrow [Y, F]$ est surjective. Par ailleurs, puisque f est un épimorphisme, l'application g est homotopiquement triviale, ce qui implique que l'application $c_n(Y)$ est aussi homotopiquement triviale, implique $F \simeq Y \times \Omega C_n(Y)$ donc l'application l admet une section homotopique $\xi : Y \longrightarrow F$. D'après la surjectivité de d_ζ , il existe une application $\beta : Y \longrightarrow G_n(Y)$, telle que $d_\zeta(\beta) = d \circ \beta = \xi$.

L'application β est une section homotopique de $g_n(Y)$ i.e. $cat Y = cat f$

2. Il suffit de travailler à $p = 1$. Supposons que $\sigma^{i+1} cat f \leq n-1$ i.e. il existe une application $s : \Sigma^{i+1} X \longrightarrow \Sigma^{i+1} G_{n-1}(Y)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma^{i+1} G_{n-1}(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow \Sigma^{i+1} g_{n-1}(Y) \\ \Sigma^{i+1} X & \xrightarrow{\Sigma^{i+1} f} & \Sigma^{i+1} Y \end{array}$$

Le diagramme commutatif à homotopie près suivant est construit comme dans la première partie de la preuve.

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & F \\
& & & \nearrow d & \downarrow l \\
\Sigma^{i+1}G_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\Sigma^{i+1}g_{n-1}(Y)} & \Sigma^{i+1}Y & \xrightarrow{\Sigma^{i+1}c_{n-1}(Y)} & \Sigma^{i+1}C_{n-1}(Y) \\
\uparrow s & & \uparrow = & & \uparrow \\
\Sigma^{i+1}X & \xrightarrow{\Sigma^{i+1}f} & \Sigma^{i+1}Y & \xrightarrow{\Sigma^{i+1}g} & \Sigma^{i+1}C_f
\end{array}$$

Par le même chemin de la démonstration de la partie précédente, nous avons

$\sigma^{i+1}cat Y \leq n - 1$. Or, c'est impossible car L. Vandembroucq ([55] proposition 1.5) a montré que $\sigma^{i+1}cat Y = \sigma^i cat Y$, ce qui prouve que $\sigma^{i+1}cat f = n$.

□

Corollaire 2.3.7 *Sous les hypothèses du théorème 2.3.6., si $cat f$ est finie ($cat f < \infty$), alors $\sigma cat f = cat f = cat Y$.*

Définition 2.3.8 *Soit X un espace. Alors $\sigma^i epi(X) \leq n$ si et seulement si $\Sigma^i g_n(X) : \Sigma^i G_n(X) \longrightarrow \Sigma^i X$ est un épimorphisme.*

Proposition 2.3.9 *Soient X un espace et $wcat X$ la catégorie faible de l'espace X .*

Alors $\sigma^i wcat X \leq \sigma^i epi(X) \leq \sigma^i cat X$.

Démonstration. Supposons que $\sigma^i cat X \leq n$ i.e. l'application $\Sigma^i g_n(X)$ admet une section homotopique, ceci implique que $\Sigma^i g_n(X)$ est un épimorphisme ce qui montre que $\sigma^i epi(X) \leq n$.

Supposons que $\sigma^i epi(X) \leq n$ i.e. l'application $\Sigma^i g_n(X)$ est un épimorphisme. Notons $c_n(X)$ la cofibre homotopique de l'application $g_n(X)$. D'après la suite de Puppe $\Sigma^i c_n(X)$ est la cofibre homotopique de $\Sigma^i g_n(X)$ comme suit :

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^i G_n(X) \xrightarrow{\Sigma^i g_n(X)} \Sigma^i X \xrightarrow{\Sigma^i c_n(X)} \Sigma^i C_n(X) \longrightarrow \cdots$$

L'application $\Sigma^i c_n(X) \circ \Sigma^i g_n(X)$ est homotopiquement triviale. Comme l'application $\Sigma^i g_n(X)$ est un épimorphisme alors l'application $\Sigma^i c_n(X)$ est homotopiquement nulle ce qui montre que $\sigma^i wcat X \leq n$. □

Proposition 2.3.10 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme. Si $epi(Y) = cat(Y)$, alors $cat f = cat Y$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\text{cat} Y \leq \text{cat} f$. Supposons que $\text{cat} f \leq n$, alors il existe une application $s : X \longrightarrow G_n(Y)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} & & G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow g_n(Y) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

L'application f est un épimorphisme implique que $g_n(Y)$ est un épimorphisme. D'après l'hypothèse : $\text{cat} Y = \text{epi}(Y) \leq n$. \square

Conjecture Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme, nous conjecturons que $\text{cat} f = \text{cat} Y$. D'après [22], si Y est formel alors cette conjecture est vraie.

2.4 Généralisation du lemme de Puppe

Le lemme suivant représente une généralisation du lemme de Puppe 2.2.6.

Lemme 2.4.1 Soient $i : A \longrightarrow B$ et $i' : A' \longrightarrow B'$ deux applications continues.

Soient α et β , deux applications rendant commutatif à homotopie près le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' \end{array}$$

Considérons les cofibrations homotopiques $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} C$ et $A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{\rho'} C'$. Leurs suites de Puppe sont respectivement :

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma \rho} \Sigma C \dots$$

et

$$A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{\rho'} C' \xrightarrow{\delta'} \Sigma A' \xrightarrow{\Sigma i'} \Sigma B' \xrightarrow{\Sigma \rho'} \Sigma C' \dots$$

Le diagramme en traits pleins suivant est commutatif à homotopie près où γ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\rho} & C & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A & \xrightarrow{\Sigma i} & \Sigma B & \longrightarrow & \dots \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & \nearrow r & \Sigma \alpha \downarrow & \nearrow \xi & \Sigma \beta \downarrow & & \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\rho'} & C' & \xrightarrow{\delta'} & \Sigma A' & \xrightarrow{\Sigma i'} & \Sigma B' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

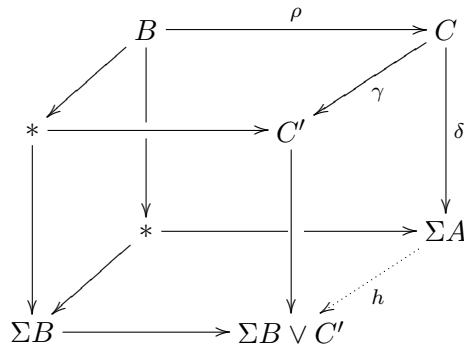
Parmi les 4 conditions suivantes :

1. $\gamma \circ \rho$ est homotopiquement triviale,
2. $\Sigma A \vee_C C' \simeq \Sigma B \vee C'$,
3. il existe $r : \Sigma A \longrightarrow C'$ tel que $r \circ \delta \simeq \gamma$,
4. il existe $\xi : \Sigma B \longrightarrow \Sigma A'$ tel que $\Sigma i' \circ \xi \simeq \Sigma \beta$,

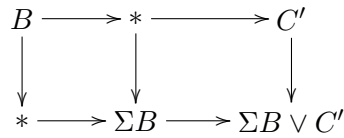
Les trois premières sont équivalentes et impliquent la quatrième.

Démonstration.

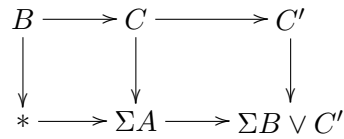
- 1) \implies 2) Considérons le cube commutatif à homotopie près



où l'application h est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique. Dans le diagramme suivant



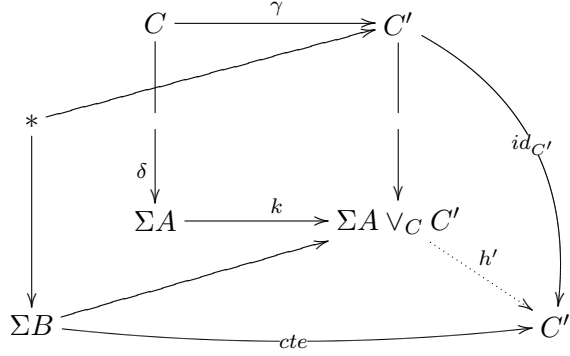
les deux carrés sont des sommes amalgamées homotopiques, le lemme 2.1.1 implique que le grand rectangle est aussi une somme amalgamée homotopique. Le grand rectangle et le carré de gauche du diagramme suivant



sont des sommes amalgamées homotopiques, le lemme 2.1.1 implique que le carré de droite est aussi une somme amalgamée homotopique, ce qui montre que $\Sigma A \vee_C C' \simeq \Sigma B \vee C'$.

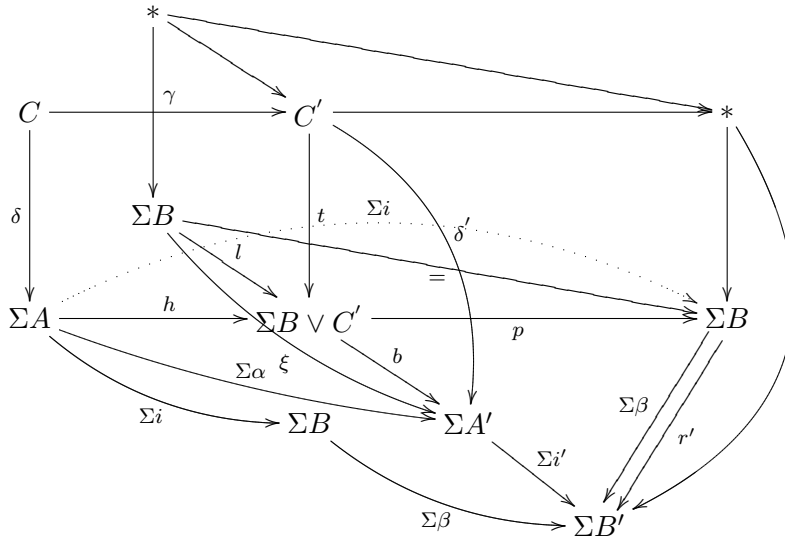
- 2) \implies 3) Dans le diagramme suivant, l'application h' est obtenue par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique du carré construit

sur $\Sigma B \longleftarrow * \longrightarrow C'$

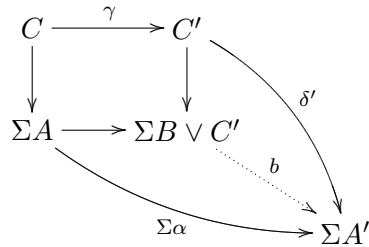


Notons $r := h' \circ k : \Sigma A \longrightarrow C'$, l'application $r \circ \delta$ est homotope à γ .

- 3) \implies 1) $\gamma \circ \rho \simeq r \circ \delta \circ \rho \simeq r \circ 0 \simeq 0$.
- 2) \implies 4) Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près



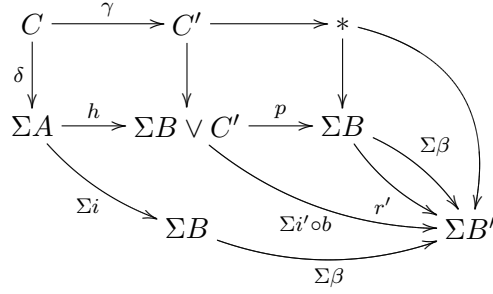
dans lequel l'application $b : \Sigma B \vee C' \longrightarrow \Sigma A'$ est obtenue par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique du diagramme suivant



Notre but est de trouver $\xi : \Sigma B \longrightarrow \Sigma A'$ tel que $\Sigma i' \circ \xi \simeq \Sigma \beta$.

Notons $\xi := b \circ l$. Il reste à montrer que $\Sigma i' \circ \xi \simeq \Sigma \beta$.

Dans le grand diagramme, le grand carré de derrière et le carré de derrière à gauche, sont des sommes amalgamées homotopiques. Donc le carré à droite est une somme amalgamée homotopique, ce qui montre que le grand carré de devant est une somme amalgamée homotopique et $p \circ h \simeq \Sigma i$.
Donc dans le diagramme homotopiquement commutatif suivant,



tous les carrés sont des sommes amalgamées homotopiques dans lesquelles

- $\Sigma \beta$ est la flèche induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique du grand carré.
- L'application r' est la flèche induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique du carré de droite.

$\Sigma \beta$ et r' rendant les deux triangles du grand carré commutatifs à homotopies près, par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique, nous avons $\Sigma \beta \simeq r'$.

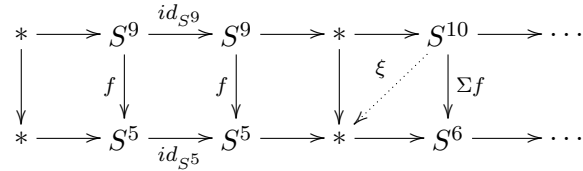
Dans le grand diagramme au-dessus nous avons $\Sigma i' \circ \xi \simeq r' \circ p \circ l \simeq r' \simeq \Sigma \beta$.
 \square

Remarque 2.4.2 *Sous les mêmes hypothèses du lemme précédent, nous montrons par un contre exemple que la quatrième propriété n'implique pas les trois premières propriétés (4) $\not\Rightarrow$ 1).*

En effet

Soit $f \in \pi_9(S^5) = \mathbb{Z}_2$ une application non nulle, alors l'application $\Sigma f \in \pi_{10}(S^6) = 0$

Le diagramme commutatif à homotopie près suivant :



montre que la quatrième propriété n'implique pas la première propriété, car $f \circ id_{S^9} \simeq f$ n'est pas homotopiquement nulle.

Définition 2.4.3 *Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, notons $\sigma^i \text{wcat } f$ la σ^i -catégorie faible de l'application f :*

$\sigma^i \text{wcat } f \leq n$ si et seulement si $\Sigma^i \gamma \circ \Sigma^i c_n(X)$ est homotopiquement nulle

$$\begin{array}{ccccccccccc}
G_n(X) & \xrightarrow{g_n(X)} & X & \xrightarrow{c_n(X)} & C_n(X) \dots & \longrightarrow & \Sigma^i G_n(X) & \xrightarrow{\Sigma^i g_n(X)} & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i c_n(X)} & \Sigma^i C_n(X) \dots \\
\downarrow G_n(f) & & \downarrow f & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma^i G_n(f) & & \downarrow \Sigma^i f & & \downarrow \Sigma^i \gamma \\
G_n(Y) & \xrightarrow{g_n(Y)} & Y & \xrightarrow{c_n(Y)} & C_n(Y) \dots & \longrightarrow & \Sigma^i G_n(Y) & \xrightarrow{\Sigma^i g_n(Y)} & \Sigma^i Y & \xrightarrow{\Sigma^i c_n(Y)} & \Sigma^i C_n(Y) \dots
\end{array}$$

où l'application γ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Proposition 2.4.4 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors pour tout $i \geq 1$, $\sigma^i \text{cat } f \leq \sigma^{i-1} \text{wcat } f \leq \sigma^{i-1} \text{cat } f$.

Démonstration. Supposons que $\sigma^{i-1} \text{cat } f \leq n$ alors il existe une application $s : \Sigma^{i-1} X \longrightarrow \Sigma^{i-1} G_n(Y)$ telle que $\Sigma^{i-1} g_n(Y) \circ s \simeq \Sigma^{i-1} f$. On a alors $\Sigma^{i-1} \gamma \circ \Sigma^{i-1} c_n(X) \simeq \Sigma^{i-1} c_n(Y) \circ \Sigma^{i-1} f \simeq \Sigma^{i-1} c_n(Y) \circ \Sigma^{i-1} g_n(Y) \circ s \simeq 0$ ce qui montre que $\sigma^{i-1} \text{wcat } f \leq n$.

Supposons que $\sigma^{i-1} \text{wcat } f \leq n$. Dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots \Sigma^{i-1} G_n(X) & \xrightarrow{\Sigma^{i-1} g_n(X)} & \Sigma^{i-1} X & \xrightarrow{\Sigma^{i-1} c_n(X)} & \Sigma^{i-1} C_n(X) & \xrightarrow{\Sigma^{i-1} \delta} & \Sigma^i G_n(X) & \xrightarrow{\Sigma^i g_n(X)} & \Sigma^i X & \dots \\
\downarrow \Sigma^{i-1} G_n(f) & & \downarrow \Sigma^{i-1} f & & \downarrow \Sigma^{i-1} \gamma & & \downarrow \Sigma^i G_n(f) & & \downarrow \Sigma^i f & \\
\dots \Sigma^{i-1} G_n(Y) & \xrightarrow{\Sigma^{i-1} g_n(Y)} & \Sigma^{i-1} Y & \xrightarrow{\Sigma^{i-1} c_n(Y)} & \Sigma^{i-1} C_n(Y) & \xrightarrow{\Sigma^{i-1} \delta'} & \Sigma^i G_n(Y) & \xrightarrow{\Sigma^i g_n(Y)} & \Sigma^i Y & \dots
\end{array}$$

comme l'application $\Sigma^{i-1} \gamma \circ \Sigma^{i-1} c_n(X)$ est homotopiquement nulle, le lemme 2.4.1 implique qu'il existe une application $\xi : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$ tel que $\Sigma^i g_n(Y) \circ \xi \simeq \Sigma^i f$.

L'application ξ est la relevée cherchée. \square

2.5 Variations de Ganea et Whitehead de la L-S catégorie

Dans cette section nous donnerons quatre versions équivalentes de la méthode de Ganea et Whitehead pour une application quelconque, en généralisant ces versions à la σ^i -catégorie.

Définition 2.5.1 Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et $i \geq 0$ alors

- $\sigma^i G1\text{cat } f \leq n$ si elle vérifie la condition suivante :
G1) L'application $\Sigma^i f : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i Y$ se factorise à homotopie près par la $i^{\text{ème}}$ suspension du $n^{\text{ème}}$ espace de Ganea, i.e. s'il existe une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie

près.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Sigma^i G_n(Y) \\
 & \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

$\sigma^i G1cat f$ est ce que nous avons noté $\sigma^i cat f$ dans la définition 2.2.9.

- $\sigma^i G2cat f \leq n$ si elle vérifie la condition suivante :
 $G2) \sigma^i G2cat f = 0$ si et seulement si l'application $\Sigma^i f$ est homotopiquement nulle.

Si $n \geq 1$, il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc}
 Z_{j-1} & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\
 Y_{j-1} & \xrightarrow{\alpha_{j-1}} & Y_j
 \end{array}$$

$0 < j \leq n$, où α_0 est homotopiquement nulle et $\Sigma^i f$ factorise à travers $\Sigma^i y_n : \Sigma^i Y_n \longrightarrow \Sigma^i Y$.

- $\sigma^i G3cat f \leq n$ si elle vérifie la condition suivante :
 $G3) \sigma^i G3cat f = 0$ si et seulement si l'application $\Sigma^i f$ est homotopiquement nulle.

Si $n \geq 1$, il existe une somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccc}
 M & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\
 \tilde{L} & \xrightarrow{\alpha} & L
 \end{array}$$

où $G3cat \alpha \leq n-1$ et $\Sigma^i f$ se factorise par une application $\Sigma^i l : \Sigma^i L \longrightarrow \Sigma^i Y$, i.e. on a un triangle commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma^i L & \\
 \nearrow & & \searrow \Sigma^i l \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

- $\sigma^i G4cat f \leq n$ si elle vérifie la condition suivante :

G4) Il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc}
 V_j & \longrightarrow & U_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{X}_{j-1} & \longrightarrow & X_j \\
 & \searrow & \swarrow \alpha_j \\
 & & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

$0 < j \leq n$, dans laquelle

- $X_0 \simeq *$.
- $\alpha_n \simeq \Sigma^i f$.
- L'application $\tilde{X}_{j-1} \longrightarrow X_j \longrightarrow \Sigma^i Y$ se factorise par α_{j-1} .
- L'application $U_j \longrightarrow \Sigma^i Y$ est homotopiquement nulle.

On pose $G_k \text{cat } f = \sigma^0 G_k \text{cat } f$ pour tout $1 \leq k \leq 4$.

Théorème 2.5.2 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, alors pour tout $i \geq 0$, $\sigma^i G1 \text{cat } f = \sigma^i G2 \text{cat } f = \sigma^i G3 \text{cat } f$.

Nous avons aussi, $\sigma^i G4 \text{cat } f \leq \sigma^i G1 \text{cat } f$.

Démonstration.

• G1) \implies G2) Par la construction de Ganea, nous avons la suite de sommes amalgamées homotopiques suivante,

$$\begin{array}{ccc}
 F_{j-1}(Y) & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\
 G_{j-1}(Y) & \longrightarrow & G_j(Y)
 \end{array}$$

($j \geq 1$) et un triangle commutatif à homotopie près,

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Sigma^i G_n(Y) \\
 & \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

Il suffit de noter $Z_{j-1} := F_{j-1}(Y)$, $Y_{j-1} := G_{j-1}(Y)$ et $Y_j := G_j(Y)$.

• G2) \implies G1) Nous allons montrer par récurrence que l'application $y_j = y_n \circ \alpha_{n-1} \circ \dots \circ \alpha_j : Y_j \longrightarrow Y$ se factorise via $G_j(Y)$ i.e. il existe une application $\gamma_j : Y_j \longrightarrow G_j(Y)$ telle que $g_j(Y) \circ \gamma_j \simeq y_j$.

L'application y_0 se factorise par $G_0(Y)$ car y_0 est homotopiquement triviale.

Supposons le résultat vrai pour $j - 1$. Nous pouvons alors construire le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & Z_{j-1} & \longrightarrow & * & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \searrow \\
 Y_{j-1} & \longrightarrow & Y_j & \xrightarrow{y_j} & Y \\
 \downarrow \gamma_{j-1} & & \downarrow \gamma_j & & \downarrow \\
 & F_{j-1} & \longrightarrow & * & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \searrow \\
 G_{j-1} & \longrightarrow & G_j & \xrightarrow{g_j} & Y
 \end{array}$$

dans lequel

$G_j := G_j(Y)$ et $F_{j-1} := F_{j-1}(Y)$.

L'application $Z_{j-1} \longrightarrow F_{j-1}$ est obtenue par la propriété universelle du produit fibré homotopique.

L'application $\gamma_j : Y_j \longrightarrow G_j$ est obtenue par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique telle que $g_j \circ \gamma_j$ est homotope à y_j par l'unicité de la propriété universelle.

De plus nous avons par hypothèse $\Sigma^i f$ qui se factorise par $\Sigma^i y_n$, donc le triangle suivant est commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^i X & \xrightarrow{a} & \Sigma^i Y_n \xrightarrow{\Sigma^i \gamma_n} \Sigma^i G_n(Y) \\
 & \searrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

L'application $s := \Sigma^i \gamma_n \circ a$ est telle que $\Sigma^i g_n(Y) \circ s \simeq \Sigma^i f$, ce qui montre que $\sigma^i \text{G1cat } f \leq n$.

- G2) \implies G3) Il suffit de montrer que $\text{G3cat}(\alpha_{j-1}) \leq j - 1$ pour $0 < j \leq n$.
 - Pour $j = 1$, nous avons $\alpha_0 : Y_0 \longrightarrow Y_1$ homotopiquement nulle, donc $\text{G3cat}(\alpha_0) = 0$.
 - Par récurrence, nous supposons que $\text{G3cat}(\alpha_{j-2}) \leq j - 2$, nous allons montrer que $\text{G3cat}(\alpha_{j-1}) \leq j - 1$.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 Z_{j-2} & \longrightarrow & * & & \\
 \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow & & \\
 Y_{j-2} & \xrightarrow{\alpha_{j-2}} & Y_{j-1} & \xrightarrow{\alpha_{j-1}} & Y_j \\
 & \nearrow = & & & \\
 & Y_{j-1} & \xrightarrow{\alpha_{j-1}} & & Y_j
 \end{array}$$

Par hypothèse $G3cat(\alpha_{j-2}) \leq j - 2$, alors $G3cat(\alpha_{j-1}) \leq j - 1$.

• G3) \implies G2) Nous allons d'abord montrer par récurrence sur n , (P_j) : $G3cat \alpha \leq j \implies G2cat \alpha \leq j$.

Si $n = 1$, $G3cat \alpha = 0 \implies G2cat \alpha = 0$ car α est homotopiquement nulle.

Si $n \geq 2$, nous supposons que (P_{n-2}) est vrai, et montrons que (P_{n-1}) est vrai.

$G3cat \alpha \leq n - 1$ i.e. nous avons la somme amalgamée homotopique suivant,

$$\begin{array}{ccc} M' & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{L}' & \xrightarrow{\alpha'} & L' \end{array}$$

telle que le triangle suivant est commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} & L' & \\ & \nearrow & \searrow \\ \tilde{L}' & \xrightarrow{\alpha} & L' \end{array}$$

et $G3cat \alpha' \leq n - 2$. Comme $G3cat \alpha' \leq n - 2$ implique $G2cat \alpha' \leq n - 2$, i.e. il existe une suite des sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc} Z_{j-1} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\ Y_{j-1} & \xrightarrow{\alpha_{j-1}} & Y_j \end{array}$$

$(0 < j \leq n - 2)$ avec un triangle suivant commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} & Y_{n-2} & \\ & \nearrow & \searrow \\ \tilde{L}' & \xrightarrow{\alpha'} & L' \end{array}$$

Notons Y_{n-1} la cofibre homotopique de l'application $M' \longrightarrow Y_{n-2}$ dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \longrightarrow & \tilde{L}' & \longrightarrow & Y_{n-2} & & \\ \downarrow & & \downarrow \alpha' & & \downarrow & & \\ * & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & Y_{n-1} & \xrightarrow{a} & L' \\ & & & & \downarrow id & & \\ & & & & L' & & \end{array}$$

Le grand carré est une somme amalgamée homotopique.

Notons $Z_{n-2} := M'$. De plus α se factorise par Y_{n-1} .

En effet

$$\begin{array}{ccccc}
 & & id & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 L' & \longrightarrow & Y_{n-1} & \longrightarrow & L' \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 \tilde{L} & \xrightarrow{\alpha} & & \longrightarrow & L
 \end{array}$$

ce qui montre que $G2cat \alpha \leq n - 1$.

De plus α se factorise par Y_{n-1} . Notons que Y_n est la cofibre homotopique de l'application $M \xrightarrow{\quad} \tilde{L} \xrightarrow{\quad} Y_{n-1}$

Dans le diagramme homotopiquement commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z_{n-1} = M & \longrightarrow & \tilde{L} & \longrightarrow & Y_{n-1} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow & \searrow \alpha & \\
 * & \longrightarrow & L & \longrightarrow & Y_n \cdots b & \longrightarrow & L \\
 & & & & \downarrow id & \curvearrowright & \\
 & & & & & & L
 \end{array}$$

$id_{\Sigma^i L}$ se factorise par $\Sigma^i Y_n$, par hypothèse $\Sigma^i f$ se factorise par $\Sigma^i L$, donc $\Sigma^i f$ se factorise par $\Sigma^i Y_n$ comme suit :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & id & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \Sigma^i L & \longrightarrow & \Sigma^i Y_n & \xrightarrow{\Sigma^i b} & \Sigma^i L \\
 \uparrow & \nearrow & \searrow \Sigma^i y_n & & \downarrow \Sigma^i l \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & & \longrightarrow & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

où on pose : $y_n := l \circ b$.

Donc $\sigma^i G2cat f \leq n$.

• G1) \implies G4) Pour montrer (G4), nous allons utiliser les axiomes de cube. Pour $j = n$, nous construisons le diagramme homotopiquement commutatif

suisant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V_n & \xrightarrow{\quad} & U_n \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \downarrow \\
 \tilde{X}_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & X_n & \xrightarrow{\alpha_n} & \Sigma^i Y \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \Sigma^i F_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & * \\
 & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 \Sigma^i G_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i G_n & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i Y
 \end{array}$$

dans lequel, $F_n := F_n(Y)$, $G_n := G_n(Y)$ et $X_n := \Sigma^i X$. Les applications du carré de droite sont $\Sigma^i f$, s et $\Sigma^i g_n(Y)$. Les espaces \tilde{X}_{n-1}, U_n et V_n sont construits de telle façon que les carrés verticaux du cube sont des produits fibrés homotopiques.

D'après le théorème du cube 2.1.2, le carré en haut est une somme amalgamée homotopique. L'application $\tilde{X}_{n-1} \longrightarrow \Sigma^i Y$ se factorise par l'application $\alpha_{n-1} := \Sigma^i g_{n-1} : X_{n-1} := \Sigma^i G_{n-1} \longrightarrow \Sigma^i Y$.

Pour tout $j \leq n - 1$: on pose $V_j = \Sigma^i F_{j-1}$, $U_j = *$, et $X_{j-1} = \tilde{X}_{j-1} = \Sigma^i G_{j-1}$. \square

Proposition 2.5.3 *Pour toute application continue $f : X \longrightarrow Y$, $G1cat f \leq G4cat f$.*

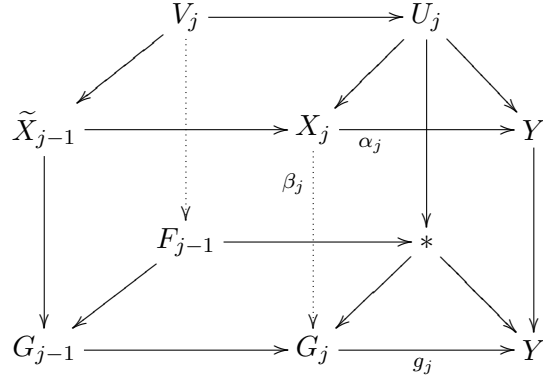
Démonstration. Nous allons montrer que $\alpha_j : X_j \longrightarrow Y$ se factorise par $g_j(Y)$, ce qui implique le résultat

C'est vrai pour $j = 0$.

Supposons que c'est vrai pour $\alpha_{j-1} : X_{j-1} \longrightarrow Y$, montrons que c'est vrai pour α_j .

Comme l'application $\tilde{\alpha}_{j-1} : \tilde{X}_{j-1} \longrightarrow Y$ se factorise par α_{j-1} , elle se factorise par $g_{j-1}(Y)$. On va construire le diagramme suivant dans lequel l'application $V_j \longrightarrow F_{j-1}$ est obtenue par la propriété universelle du produit

fibré homotopique



et $\beta_j : X_j \longrightarrow G_j$ est obtenue par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique. De plus, $g_j\beta_j$ est homotope à α_j par l'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

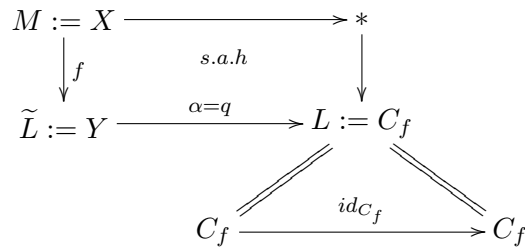
Maintenant, comme on a que l'application f est homotope à α_n , le relèvement demandé est β_n . \square

En particulier, G_2 implique le résultat bien comme suivant.

Corollaire 2.5.4 Soient X un espace topologique, et n un entier. Alors $\text{cat}G_n(X) \leq n$.

Proposition 2.5.5 Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f$ une cofibration homotopique. Alors $\text{cat}C_f \leq \text{cat}q + 1$.

Démonstration. Supposons que $\text{cat}q \leq n$, le diagramme commutatif à homotopie près suivant



montre d'après G3 (2.5.1) que $\text{cat}C_f \leq n + 1$. \square

Remarque La proposition précédente améliore l'inégalité : $\text{cat}C_f \leq \text{cat}Y + 1$.

Corollaire 2.5.6 Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} C_f$ une cofibration homotopique, $g : C_f \longrightarrow Z$ une application continue. Alors $\text{cat}g \leq \text{cat}q + 1$.

Proposition 2.5.7 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Notons $q : Y \longrightarrow C_f$ la cofibre homotopique de l'application f . Si l'application q est homotopiquement nulle, alors C_f est un co-H-espace.

Démonstration. Nous démontrons cette proposition par les deux méthodes G1 et G3 et nous construisons une comultiplication $\mu : C_f \longrightarrow C_f \vee C_f$ qui vérifie les conditions de co-H-espace par rapport à G1 et G3 respectivement.

1. 1^{ère} méthode

Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & * & & \\
 \downarrow h & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 Y & \xrightarrow{q} & C_f & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow s \\
 \Omega C_f & \xrightarrow{\quad} & * & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 * & \xrightarrow{\quad} & \Sigma \Omega C_f & \xrightarrow{g_1(C_f)} & C_f
 \end{array}$$

dans lequel

- L'application h est induite par la propriété universelle du produit fibré homotopique,
- L'application s est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Par l'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique $g_1(C_f) \circ s$ est homotope à id_{C_f} ce qui montre que $cat C_f \leq 1$, donc C_f est un co-H-espace.

Notons $\mu := (g_1(C_f) \vee g_1(C_f)) \circ p \circ s$ comme suit

$$C_f \xrightarrow{s} \Sigma \Omega C_f \xrightarrow{p} (\Sigma \Omega C_f) \vee (\Sigma \Omega C_f) \xrightarrow{g_1(C_f) \vee g_1(C_f)} C_f \vee C_f$$

où l'application p est le pincement de $\Sigma \Omega C_f$. L'application μ vérifie les conditions de co-H-espace.

2. 2^{ème} méthode

$cat q = 0$ car l'application q est homotopiquement nulle ceci implique que $cat C_f \leq 1$ (proposition 2.5.5), donc C_f est co-H-espace.

L'application q est homotopiquement nulle implique $\Sigma X \simeq \Sigma Y \vee C_f$ (lemme 2.2.6).

Notons $\mu := (q_2 \vee q_2) \circ p \circ i$ comme suit

$$C_f \xrightarrow{i} \Sigma X \simeq \Sigma Y \vee C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \vee \Sigma X \simeq \Sigma Y \vee C_f \vee \Sigma Y \vee C_f \xrightarrow{q_2 \vee q_2} C_f \vee C_f$$

dans lequel

- i est l'inclusion de C_f dans $\Sigma Y \vee C_f$,
 - p est le pincement de ΣX ,
 - q_2 est la projection de $\Sigma Y \vee C_f$ dans C_f .
- L'application μ vérifie les conditions de co-H-espace.

□

Proposition 2.5.8 Soient $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{h} B$ une fibration homotopique, $f : B' \rightarrow B$ une application continue, et P le produit fibré homotopique des applications f et h .

Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \xlongequal{\quad} & F & & \\
 \downarrow i' & & \downarrow i & & \\
 P & \xrightarrow{\quad} & E & & \\
 \downarrow h' & \searrow & \downarrow h & \searrow & \\
 & & C' & \xrightarrow{f'} & C \\
 & \swarrow r' & \downarrow r & \swarrow r & \\
 B' & \xrightarrow{f} & B & &
 \end{array}$$

dans lequel,

- L'application i' est la fibre homotopique de h' .
- C et C' sont les cofibres homotopiques des applications i et i' .
- Les applications r, r' et f' sont induites par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Alors $\text{cat } f' \leq \text{cat } f$.

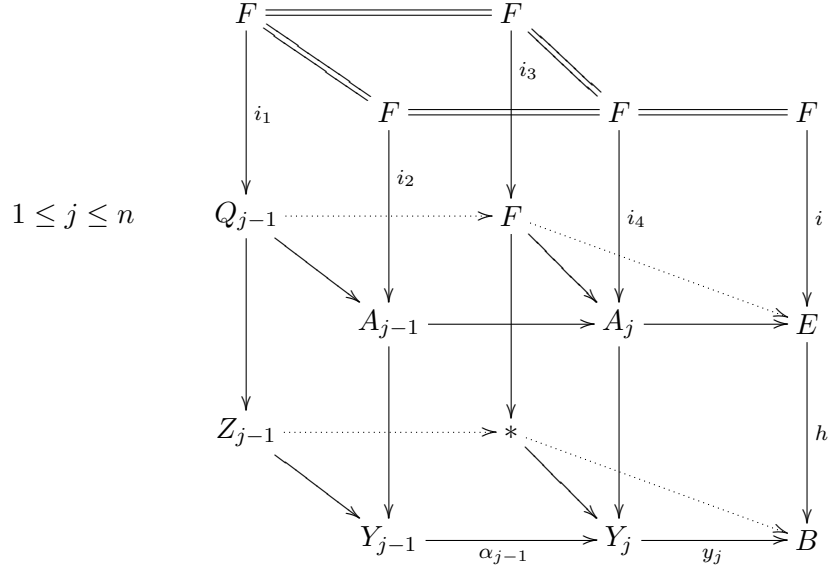
Démonstration. Supposons que $\text{cat } f \leq n$, d'après G2 (2.5.1), il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc}
 1 \leq j \leq n & Z_{j-1} & \longrightarrow * \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & Y_{j-1} & \xrightarrow{\alpha_{j-1}} Y_j
 \end{array}$$

telle que l'application f se factorise via Y_n comme suit

$$\begin{array}{ccc}
 & Y_n & \\
 s \nearrow & & \searrow y_n \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Considérons le diagramme homotopiquement commutatif



dans lequel,

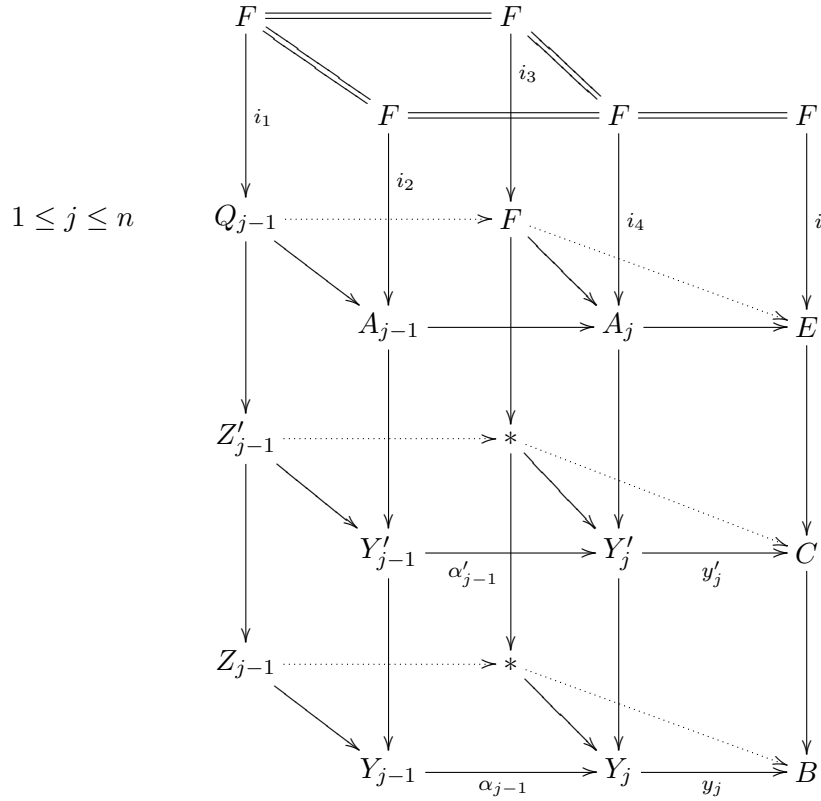
- A_j est le produit fibré homotopique des applications h et y_j , et de même pour les autres carrés verticaux.
- A partir du lemme de cube, pour tout $1 \leq j \leq n$ le carré

$$\begin{array}{ccc}
 Q_{j-1} & \longrightarrow & F \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_{j-1} & \longrightarrow & A_j
 \end{array}$$

est une somme amalgamée homotopique.

- Grâce aux produits fibrés homotopiques verticaux, les fibres homotopiques des applications verticales sont égales à F .

A partir des cofibrations homotopiques des applications i, i_1, i_2, i_3 et i_4 , nous obtenons le diagramme commutatif à homotopie près



dans lequel,

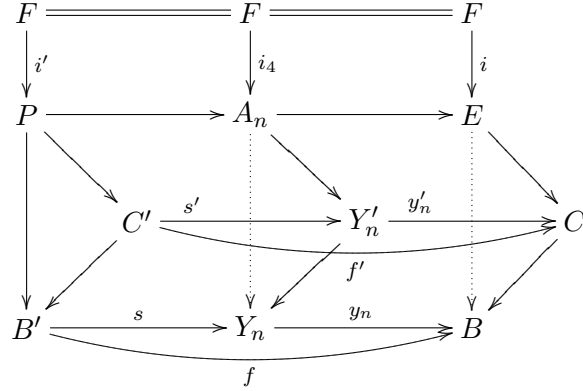
- Pour tout $j, 1 \leq j \leq n$, les espaces $C, Z'_{j-1}, Y'_{j-1}, *$ et Y'_j sont respectivement les cofibres homotopiques des applications i, i_1, i_2, i_3 et i_4 .
- Pour tout $j, 1 \leq j \leq n$, les diagrammes $Z'_{j-1} \longrightarrow *$

$$\begin{array}{ccc}
 Z'_{j-1} & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y'_{j-1} & \xrightarrow{\alpha'_{j-1}} & Y'_j
 \end{array}$$

sont des sommes amalgamées homotopiques (lemme des 4 cofibrations, Doeraene [9]).

- Les applications α'_{j-1} et y'_j sont obtenues par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.
- De $\alpha_0 \simeq *$ on déduit facilement $\alpha'_0 \simeq *$ aussi.

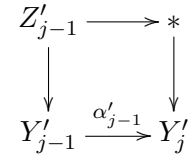
Il reste à montrer que l'application f' se factorise via l'application y'_n . Ceci se déduit du diagramme commutatif à homotopie près suivant.



dans lequel,

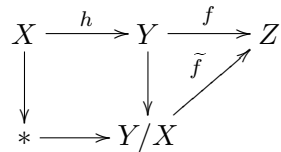
- L'application s' est obtenue par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.
- Les applications f' et $y'_n \circ s'$ sont homotopes par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Donc à partir de la suite des sommes amalgamées homotopiques



$1 \leq j \leq n$, où α'_0 est homotopiquement nulle et f' factorise à travers l'application y'_n , nous montrons que $\text{cat } f' \leq n$. \square

Proposition 2.5.9 Soient $h : X \longrightarrow Y$, $f : Y \longrightarrow Z$ des applications continues telle que $f \circ h \simeq 0$, et $\tilde{f} : Y/X \longrightarrow Z$ l'application induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique, comme dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant



Alors $\text{cat } f \leq \text{cat } \tilde{f} \leq \text{cat } f + 1$.

Démonstration. Nous utilisons G3 (2.5.1) pour montrer la proposition.

- Supposons que $\text{cat } f \leq k$, il existe une somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\ \tilde{L} & \xrightarrow{\alpha} & L \end{array}$$

où $\text{cat } \alpha \leq k - 1$, et f se factorise par une application $l : L \longrightarrow Z$, i.e. on a un triangle commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \nearrow & & \searrow l \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow h & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y/X \\ \downarrow s & & \downarrow s' \\ L & \xrightarrow{\alpha'} & L' \\ & \searrow l & \downarrow l' \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \tilde{f} \\ \curvearrowleft \tilde{f} \end{array}$$

dans lequel,

- L' est la cofibre homotopique de l'application $s \circ h$.
- Les applications s' et l' sont induites par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.
- L'application \tilde{f} est homotope à $l' \circ s'$, par l'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Nous avons la somme amalgamée homotopique suivante

$$\begin{array}{ccc} M' := X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\ \tilde{L}' := L & \xrightarrow{\alpha'} & L' \end{array}$$

et \tilde{f} se factorise par l' comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & L' & \\ s' \nearrow & & \searrow l' \\ Y/X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z \end{array}$$

et la corollaire 2.5.6 montre que $\text{cat } \alpha' \leq k$.

- Supposons que $\text{cat } \tilde{f} \leq k$, il existe une somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\ \tilde{L} & \xrightarrow{\alpha} & L \end{array}$$

où $\text{cat } \alpha \leq k - 1$, et \tilde{f} se factorise par une application $l : L \longrightarrow Z$.

Comme l'application \tilde{f} se factorise par l'application l , alors l'application f se factorise aussi par l , ce qui montre que $\text{cat } f \leq \text{cat } \tilde{f}$. \square

Proposition 2.5.10 Soient $h : X \longrightarrow Y$, $f : Y \longrightarrow Z$ des applications continues, et $\tilde{f}' : Y/X \longrightarrow Z/X$ l'application induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique, comme dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow h & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y/X \\ \downarrow f & & \downarrow \tilde{f}' \\ Z & \longrightarrow & Z/X \end{array}$$

Alors $\text{cat } \tilde{f}' \leq \text{cat } f + 1$

Démonstration. Nous allons utiliser la version G3 (2.5.1).

Supposons que $\text{cat } f \leq k$, alors il existe une somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\ \tilde{L} & \xrightarrow{\alpha} & L \end{array}$$

où $\text{cat } \alpha \leq k - 1$, et f se factorise par une application $l : L \longrightarrow Z$, i.e. on a un triangle commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \nearrow & & \searrow l \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & * \\
 \downarrow h & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & Y/X \\
 \downarrow s & \xrightarrow{\alpha'} & \downarrow s' \\
 L & \longrightarrow & L' \\
 \downarrow l & & \downarrow l' \\
 Z & \longrightarrow & Z/X
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \curvearrowright \\
 \tilde{f}'
 \end{array}$$

dans lequel,

- L' est la cofibre homotopique de l'application $s \circ h$.
- Les applications s' et l' sont induites par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.
- L'application \tilde{f}' est homotope à $l' \circ s'$, par l'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Nous avons la somme amalgamée homotopique suivante

$$\begin{array}{ccc}
 M' := X & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & \text{s.a.h.} & \downarrow \\
 \tilde{L}' := L & \xrightarrow{\alpha'} & L'
 \end{array}$$

telle que \tilde{f}' se factorise via l'application l' comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 & L' & \\
 s' \nearrow & & \searrow l' \\
 Y/X & \xrightarrow{\tilde{f}'} & Z/X
 \end{array}$$

et le corollaire 2.5.6 montre que $\text{cat } \alpha' \leq k$. □

Notre travail a porté sur la σ^i -catégorie par la méthode de Ganea, mais nous allons également présenter d'autres versions de la catégorie d'une application, par la méthode de Whitehead.

Définition 2.5.11 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.

- $W1\text{cat } f \leq n$, si la condition suivante est satisfaite :

W1) Il existe une application $g : X \longrightarrow T^n(Y)$ qui rend le carré suivant

commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & T^n(Y) \\ \downarrow f & & \downarrow j_n(Y) \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y^{n+1}} & Y^{n+1} \end{array}$$

$W1cat f$ est ce que nous avons noté $W\text{-cat } f$ en 1.3.6.

• $W2cat f \leq n$, si la condition suivante est satisfaite :

W2) Il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc} S_{i-1} & \longrightarrow & Y^i \times * \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{i-1} \times Y & \longrightarrow & R_i \\ & \searrow & \downarrow r_i \\ & & Y^i \times Y \end{array}$$

pour $i = 1, \dots, n$, dans laquelle

$R_0 \simeq *$ et $\Delta_Y^{n+1} \circ f$ se factorise par l'application $r_n : R_n \longrightarrow Y^{n+1}$.

• $W3cat f \leq n$, si la condition suivante est satisfaite :

W3) Pour $i = 1, \dots, n$, il existe une suite de sommes amalgamées homotopiques

$$\begin{array}{ccc} Q_i & \longrightarrow & P_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{W}_{i-1} & \longrightarrow & W_i \\ & \searrow & \downarrow w_i \\ & & Y^{i+1} \end{array}$$

$\widetilde{w}_{i-1} \searrow$

dans laquelle

– L'application $\widetilde{w}_{i-1} : \widetilde{W}_{i-1} \longrightarrow Y^{i+1}$ se factorise par $w_{i-1} \times id_Y$ comme suit :

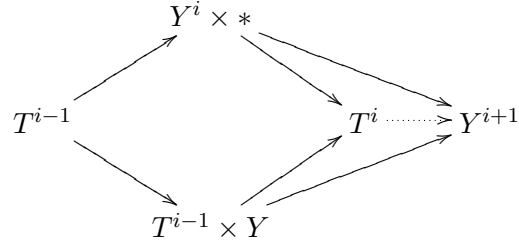
$$\begin{array}{ccc} & W_{i-1} \times Y & \\ s_{i-1} \nearrow & & \searrow w_{i-1} \times id \\ \widetilde{W}_{i-1} & \longrightarrow & Y^{i+1} \end{array}$$

- $W_0 \simeq *$.
- L'application $P_i \longrightarrow Y^{i+1}$ se factorise par $Y^i \times *$.
- $W_n = X$ et l'application w_n est homotope à $\Delta_Y^{n+1} \circ f$.

Théorème 2.5.12 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.
Alors $W1cat f = W2cat f = W3cat f$.

Démonstration.

- W1) \implies W2) Grâce à la construction de Whitehead suivante :

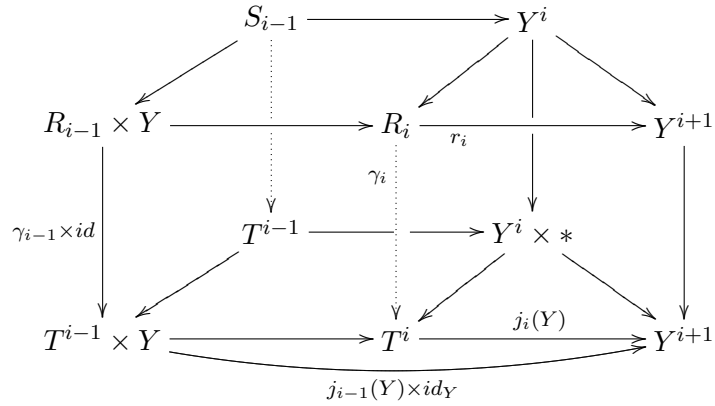


Notons $S_{i-1} := R_{i-1} = T^{i-1}$, avec la condition (W1) nous obtenons le résultat.

- W2) \implies W1) Nous allons montrer inductivement que l'application $r_i : R_i \longrightarrow Y^{i+1}$ se factorise via $j_i(Y) : T^i(Y) \longrightarrow Y^{i+1}$.

Par récurrence, pour $i = 0$ c'est évident.

Supposons que c'est vrai pour $i - 1$, i.e. nous avons $\gamma_{i-1} : R_{i-1} \longrightarrow T^{i-1}$ telle que $j_{i-1} \circ \gamma_{i-1}$ est homotope à r_{i-1} , et montrons que c'est vrai pour i . Nous pouvons ainsi construire le diagramme homotopiquement commutatif suivant :



où l'application $S_{i-1} \longrightarrow T^{i-1}$ est obtenue par la propriété universelle du produit fibré homotopique.

Alors l'application $\gamma_i : R_i \longrightarrow T^i$ existe par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique et encore $j_i \gamma_i$ est homotope à r_i par l'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Pour $i = n$, $\Delta_Y^{n+1} \circ f$ se factorise par r_n , qui se factorise par $j_n(Y)$ donc $\Delta_Y^{n+1} \circ f$ se factorise par $j_n(Y)$.

• W3) \implies W1) Nous allons montrer que $w_i : W_i \longrightarrow Y^{i+1}$ se factorise par $j_i(Y)$.

C'est vrai pour $i = 0$. Supposons que c'est vrai pour $i - 1$, i.e. w_{i-1} est homotope à $j_{i-1}(Y) \circ \gamma_{i-1}$, où $\gamma_{i-1} : W_{i-1} \longrightarrow T^{i-1}$.

Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, notons $\varphi_{i-1} := (\gamma_{i-1} \times id_Y) \circ s_{i-1}$. Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{W}_{i-1} & \longrightarrow & W_i & \xrightarrow{w_i} & Y^{i+1} = Y^i \times Y \\
 & \searrow^{s_{i-1}} & & \nearrow^{w_{i-1} \times id_Y} & \parallel \\
 & \searrow^{\varphi_{i-1}} & W_{i-1} \times Y & & \\
 & & \downarrow^{\gamma_{i-1} \times id_Y} & & \\
 & & T^{i-1} \times Y & \xrightarrow{j_{i-1}(Y) \times id_Y} & Y^i \times Y
 \end{array}$$

Nous pouvons construire le diagramme homotopiquement commutatif suivant :

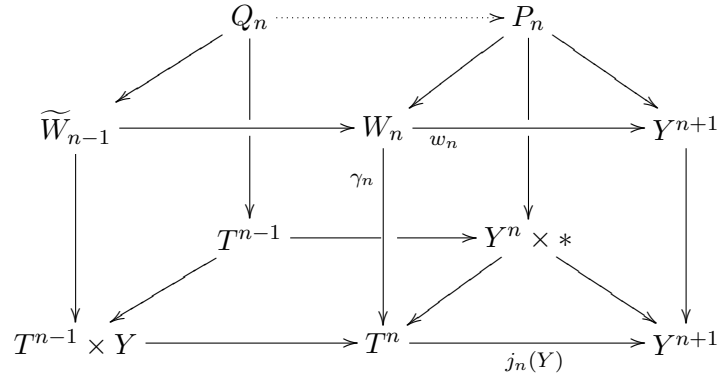
$$\begin{array}{ccccc}
 & & Q_i & \longrightarrow & P_i \\
 & \swarrow & \vdots & & \swarrow \downarrow \searrow \\
 \widetilde{W}_{i-1} & \longrightarrow & W_i & \xrightarrow{w_i} & Y^{i+1} \\
 \downarrow^{\varphi_{i-1}} & & \downarrow^{\gamma_i} & & \parallel \\
 T^{i-1} \times Y & \longrightarrow & T^{i-1} & \longrightarrow & Y^i \times * \\
 & \searrow & \vdots & & \swarrow \downarrow \searrow \\
 & & T^i & \xrightarrow{j_i(Y)} & Y^{i+1} \\
 & \searrow^{j_{i-1}(Y) \times id_Y} & & &
 \end{array}$$

dans lequel

l'application $Q_i \longrightarrow T^{i-1}$ est obtenue par la propriété universelle du produit fibré homotopique. Donc l'application $\gamma_i : W_i \longrightarrow T^i$ est obtenue aussi par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique. Par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique on a $j_i \gamma_i$ est homotope à w_i .

Pour $i = n$, w_n est homotope à $\Delta_Y^{n+1} \circ f$, i.e. $\Delta_Y^{n+1} \circ f$ se factorise à homotopie près par $j_n(Y)$ et γ_n l'application demandée.

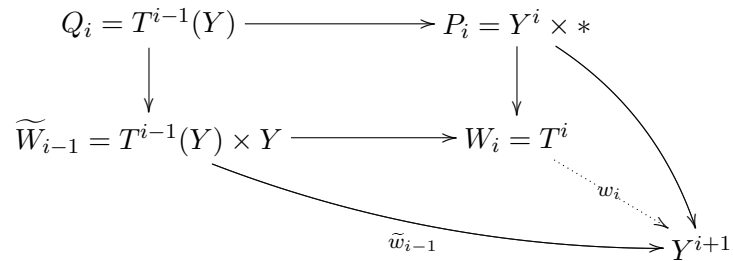
- W1) \implies W3) cette implication est basée sur le théorème de cube. Posons $W_n = X$; soit le diagramme homotopiquement commutatif suivant



$\gamma_n := g$, et $w_n := \Delta_Y^{n+1} \circ f$.

\widetilde{W}_{n-1} est le produit fibré homotopique des applications $X \longrightarrow T^n$, et $T^{n-1} \times Y \longrightarrow T^n$. Les autres carrés verticaux du cube sont des produit fibrés homotopiques. L'application $Q_n \longrightarrow P_n$ est induite par la propriété universelle du produit fibré homotopique.

Par le théorème du cube 2.1.2, le carré du haut est une somme amalgamée homotopique. Pour tout $1 \leq i \leq n - 1$ la suite de sommes amalgamées homotopiques



donne le résultat. □

Chapitre 3

Attachement d'une cellule et invariant de Hopf

Berstein et Hilton [5] ont étudié quel est l'effet sur la catégorie d'un attachement de cellule à un espace X CW -complexe $(q - 1)$ connexe $(q \geq 2)$. Ils ont montré que l'augmentation ou non de la catégorie lors d'un attachement de cellule dépend d'une classe d'homotopie appelée invariant de Hopf. Notre travail établit un invariant semblable pour étudier l'effet sur la σ^i -catégorie d'une application $f : X \longrightarrow Z$, lorsqu'on attache une cellule à la source X , suivant une application d'attachement $\alpha : S^p \longrightarrow X$. Nous considérons les applications $\tilde{f} : X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \longrightarrow Z$ et $\tilde{f}' : X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \longrightarrow Z \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ induites par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique, et nous étudions l'augmentation ou non de la σ_i -catégorie de ces applications par rapport à celle de f . L'invariant que nous construisons pour étudier cela généralise l'invariant de Hopf qui a été utilisé par Bernstein et Hilton et l'invariant de Hopf qui a été utilisé par Vandembroucq.

3.1 La construction de γ'_k

Notons $j : X \longrightarrow X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ l'inclusion de X dans la cofibre homotopique de l'application $\alpha : S^p \longrightarrow X$,
aussi $j' : Z \longrightarrow Z \sqcup_{\alpha'} e^{p+1}$ l'inclusion de Z dans la cofibre homotopique de $\alpha' := f \circ \alpha$.

L'adjointe de l'application α est notée $\alpha_{\#} : S^{p-1} \longrightarrow \Omega X$.

Proposition 3.1.1 *Soient X un espace, $\alpha : S^p \longrightarrow X$ une application continue, et $\xi_k(X) : G_1(X) \longrightarrow G_k(X)$ les applications continues déduites de la construction de Ganea. Alors le carré suivant est commutatif à homo-*

topie près.

$$\begin{array}{ccc}
 S^p & \xrightarrow{\Sigma\alpha_{\#}} & G_1(X) \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \xi_k(X) \\
 X & \xleftarrow{g_k(X)} & G_k(X)
 \end{array}$$

Démonstration. Considérons le diagramme homotopiquement commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{p-1} & & & & \\
 \downarrow \alpha_{\#} & \searrow (id_{S^p})_{\#} & & \searrow & \\
 \Omega S^p & \xrightarrow{\quad} & * & \xrightarrow{\quad} & S^p \\
 \downarrow \Omega\alpha & & \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 \Omega X & \xrightarrow{\quad} & * & \xrightarrow{\Sigma\alpha_{\#}} & X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 * & \xrightarrow{\quad} & \Sigma\Omega X \simeq G_1(X) & \xrightarrow{g_1(X)} & X \\
 & & \downarrow \xi_k(X) & & \downarrow \\
 & & G_k(X) & \xrightarrow{g_k(X)} & X
 \end{array} \tag{C}$$

Dans lequel :

Les deux carrés du cube en haut et en bas sont des produits fibrés homotopiques. Le grand carré en haut et le petit carré en bas sont des sommes amalgamées homotopiques.

Les deux applications $\Sigma\alpha_{\#}$ et $g_1(X)$ sont obtenues par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Nous obtenons donc l'homotopie entre $g_k(X) \circ \xi_k(X) \circ \Sigma\alpha_{\#}$ et α . □

Remarque 3.1.2 Les deux applications $\Omega f \circ \alpha_{\#}$ et $\Omega(f \circ \alpha) \circ (id_{S^p})_{\#} = \Omega f \circ \Omega\alpha \circ (id_{S^p})_{\#}$ sont homotopes.

Posons $\gamma_k := \xi_k(X) \circ \Sigma\alpha_{\sharp}$. La proposition 3.1.1 entraîne que le diagramme suivant commute à homotopie près.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \Sigma(\alpha')_{\sharp} & & \\
& & \curvearrowright & & \\
S^p & \xrightarrow{\Sigma\alpha_{\sharp}} & G_1(X) & \xrightarrow{G_1(f)} & G_1(Z) \\
& \searrow^{\gamma_k} & \downarrow \xi_k(X) & \searrow^{\gamma'_k} & \downarrow \xi_k(Z) \\
& & G_k(X) & \xrightarrow{G_k(f)} & G_k(Z) \\
& \searrow^{\alpha} & \downarrow & & \downarrow \\
& & X & \xrightarrow{f} & Z
\end{array}$$

Définition L'application γ'_k est $G_k(f) \circ \xi_k(X) \circ \Sigma\alpha_{\sharp} \simeq \xi_k(Z) \circ \Sigma\alpha'_{\sharp}$

Lemme 3.1.3 Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications continues, notons \mathcal{C}_f la cofibre homotopique de l'application f et $j : Y \longrightarrow \mathcal{C}_f$ l'application induite.

Alors $g \circ f$ est homotopiquement triviale si et seulement si il existe une application $\tilde{g} : \mathcal{C}_f \longrightarrow Z$ telle que $\tilde{g} \circ j \simeq g$.

Notons $j' : Z \longrightarrow Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1} := Z'$ l'inclusion de Z dans la cofibre homotopique de l'application $f \circ \alpha : S^p \longrightarrow X \longrightarrow Z$. L'application $\Omega j' \circ \Omega f \circ \alpha_{\sharp}$ est homotopiquement triviale. Nous obtenons donc, par la propriété universelle de somme amalgamée homotopique une factorisation de $\Omega j'$:

$$\begin{array}{ccc}
S^{p-1} & \xrightarrow{\Omega f \circ \alpha_{\sharp}} & \Omega Z \\
\downarrow & & \downarrow \\
e^p & \longrightarrow & \Omega Z \sqcup_{\Omega f \circ \alpha_{\sharp}} e^p \\
& \searrow & \downarrow \varrho \\
& & \Omega Z'
\end{array}$$

Lemme 3.1.4 Soient $f : X \longrightarrow Z$ une application continue, et Z $(q-1)$ -connexe ($q \geq 2$). Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ telle que $p \geq q+1$. Alors l'application $\varrho : \Omega Z \sqcup_{\Omega f \circ \alpha_{\sharp}} e^p \longrightarrow \Omega Z'$ est une $(p+q-2)$ -équivalence.

Démonstration. Il suffit de montrer que la fibre homotopique F' de l'application ϱ est $(p+q-3)$ -connexe. Considérons F la fibre homotopique de l'inclusion $j' : Z \longrightarrow Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1} := Z'$. Notons $\chi : F \longrightarrow Z$ l'application induite et $d : S^p \longrightarrow F$ un relèvement de $f \circ \alpha$ dans $F : \chi \circ d \simeq f \circ \alpha$. D'après

le lemme 2.3.5, l'application d est une $(p + q - 2)$ -équivalence, il en découle que son adjoint $d_{\sharp} : S^{p-1} \longrightarrow \Omega S^p \xrightarrow{\Omega d} \Omega F$ est une $\min(2p - 3, p + q - 3)$ -équivalence, soit une $(p + q - 3)$ -équivalence. La cofibre homotopique $\Omega F \sqcup_{d_{\sharp}} e^p$ de d_{\sharp} est donc $(p + q - 3)$ -connexe. Dans [44], H. Scheerer et D. Tanré montrent que les espaces $\Omega F \sqcup_{d_{\sharp}} e^p$ et F' s'inscrivent dans une cofibration homotopique $\Omega F \sqcup_{d_{\sharp}} e^p \longrightarrow F' \longrightarrow \Omega^2 Z' * S^{p-1}$. Le joint $\Omega^2 Z' * S^{p-1}$ étant $(p + q - 3)$ -connexe, il en résulte que F' est également $(p + q - 3)$ -connexe. \square

Proposition 3.1.5 *Soient $f : X \longrightarrow Z$ une application continue, et Z $(q - 1)$ -connexe ($q \geq 2$). Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ telle que $p \geq q + 1$. Pour tout $n \geq 1$, on a un diagramme commutatif à homotopie près*

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(Z) & \xrightarrow{F_n(j')} & F_n(Z') \\
 \downarrow i_n(Z) & \searrow^{G_n(j')} & \downarrow i_n(Z') \\
 G_n(Z) & \xrightarrow{j'_n} G_n(Z) \sqcup_{\gamma'_n} e^{p+1} \xrightarrow{\varrho_n} & G_n(Z') \\
 \downarrow g_n(Z) & \searrow^{\tilde{g}_n} & \downarrow g_n(Z') \\
 Z & \xrightarrow{j'} Z' = Z \sqcup_{\alpha'} e^{p+1} = Z \sqcup_{g_n(Z) \circ \gamma'_n} e^{p+1} & \xlongequal{\quad} Z'
 \end{array}$$

qui vérifie :

1. Le carré en bas à gauche est une somme amalgamée homotopique.
2. $F_n(j')$ est une $(nq + p - 1)$ -équivalence.
3. ϱ_n est une $(p + q - 1)$ -équivalence.
4. Les applications $g_n(Z)$ et $g_n(Z')$ induisent une application $C(G_n(j')) \longrightarrow C(j') = S^{p+1}$ qui est un isomorphisme en homologie jusqu'au degré $p + q - 1$.

Démonstration. L'existence de \tilde{g}_n et ϱ_n provient du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 S^p & \xrightarrow{\gamma'_n} & G_n(Z) & \xrightarrow{G_n(j')} & G_n(Z') \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow^{j'_n} & \downarrow \\
 e^{p+1} & \xrightarrow{\quad} & G_n(Z) \sqcup_{\gamma'_n} e^{p+1} & \xrightarrow{\varrho_n} & G_n(Z') \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 S^p & \xrightarrow{\alpha'} & Z & \xrightarrow{j'} & Z' \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 e^{p+1} & \xrightarrow{\quad} & Z' = Z \sqcup_{\alpha'} e^{p+1} & \xlongequal{\quad} & Z'
 \end{array}$$

1. Dans le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
& & \alpha' & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
S^p & \xrightarrow{\gamma'_n} & G_n(Z) & \xrightarrow{g_n(Z)} & Z \\
\downarrow & & \downarrow j'_n & & \downarrow j' \\
e^{p+1} & \longrightarrow & G_n(Z) \sqcup_{\gamma'_n} e^{p+1} & \xrightarrow{\tilde{g}_n} & Z'
\end{array}$$

le grand carré et le carré de gauche sont des sommes amalgamées homotopiques, alors d'après le lemme 2.1.1 le carré de droite est aussi une somme amalgamée homotopique.

2. Rappelons que l'application $F_n(j')$ entre les fibres s'identifie au joint itéré $*^{n+1}\Omega j'$. L'application $\Omega j' : \Omega Z \longrightarrow \Omega Z'$ est une $(p-1)$ -équivalence. Par la connexité de ΩZ , il est facile d'en déduire le résultat.
3. Cet énoncé se prouve par récurrence sur n . Le cas $n=1$ vient du fait que l'application ϱ_1 est exactement la suspension de l'application ϱ (lemme 3.1.4). Supposons que le résultat est vrai pour $n \geq 1$. Remarquons que l'espace $G_{n+1}(Z) \sqcup_{\gamma'_k} e^{p+1}$ est, via l'équivalence d'homotopie, $G_n(Z) \sqcup F_n(Z) \longrightarrow G_{n+1}(Z)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
F_n(Z) & \xlongequal{\quad} & F_n(Z) & \xrightarrow{F_n(j')} & F_n(Z') \\
i_n(Z) \downarrow & & \downarrow j' \circ i_n(Z) & & \downarrow i_n(Z') \\
G_n(Z) & \xrightarrow{j'_n} & G_n(Z) \sqcup_{\gamma'_n} e^{p+1} & \xrightarrow{\varrho_n} & G_n(Z')
\end{array}$$

En prenant les cofibres homotopiques des applications $i_n(Z)$, $j'_n \circ i_n(Z)$ et $i_n(Z')$ nous obtenons une suite

$G_{n+1}(Z) \longrightarrow G_{n+1}(Z) \sqcup_{\gamma'_{n+1}} e^{p+1} \longrightarrow G_{n+1}(Z')$. Par la propriété universelle, il est facile d'identifier cette suite avec la composée $\varrho_{n+1} \circ j'_{n+1}$. D'après le point (2), l'application $F_n(j')$ est une $(nq+p-1)$ -équivalence. Il résulte alors du lemme des cinq et de l'hypothèse de récurrence que ϱ_{n+1} est aussi une $(p+q-1)$ -équivalence, ce qui termine la preuve.

4. La construction des cofibres homotopiques des applications j'_n , $G_n(j')$

et j' donne, en particulier, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
G_n(Z) & \xrightarrow{j'_n} & G_n(Z) \sqcup_{\gamma'_n} e^{p+1} & \longrightarrow & C(j'_n) = S^{p+1} \\
\parallel & & \downarrow \varrho_n & & \downarrow \\
G_n(Z) & \xrightarrow{G_n(j')} & G_n(Z') & \longrightarrow & C(G_n(j')) \\
\downarrow g_n(Z) & & \downarrow g_n(Z') & & \downarrow \\
Z & \xrightarrow{j'} & Z' & \longrightarrow & C(j')
\end{array}
=$$

dans lequel l'application $C(G_n(j')) \longrightarrow C(j')$ est induite par $g_n(Z)$ et $g_n(Z')$ et le grand carré de gauche est une somme amalgamée homotopique. L'application $S^{p+1} \longrightarrow C(G_n(j'))$ a pour inverse à gauche $C(G_n(j')) \longrightarrow C(j') = S^{p+1}$; elle induit donc un morphisme injectif en homologie. D'autre part, puisque le carré supérieur à droit du diagramme ci-dessus est une somme amalgamée, nous pouvons déduire du point (3) que $S^{p+1} \longrightarrow C(G_n(j'))$ est une $(p + q - 1)$ -équivalence. En définitive, cette application induit un isomorphisme en homologie jusqu'au degré $p + q - 1$ et il en est donc de même de son inverse à gauche.

□

3.2 L'utilité de l'invariant de Hopf

Soient $i \geq 0$, $k \geq 1$, et $f : X \longrightarrow Z$ une application continue.

Supposons que la catégorie de f est inférieure ou égale à k .

Soit $j : X \longrightarrow X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ l'inclusion de X dans la cofibre homotopique de l'application $\alpha : S^p \longrightarrow X$. Notons $\tilde{f} : X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \longrightarrow Z$ (dans le cas où $f \circ \alpha$ est homotopiquement nulle), et $\tilde{f}' : X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \longrightarrow Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}$ (dans le cas générale).

Les catégories des applications \tilde{f} et \tilde{f}' induites par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique sont au plus $k + 1$ (proposition 2.5.9 et proposition 2.5.10). Alors la question se pose : « Sous quelles conditions les catégories des applications induites sont elles inférieures ou égales à k ? » Berstein et Hilton ont répondu dans le cas absolu par le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 ([5]). *Soient X un espace $(q-1)$ -connexe ($q \geq 2$) de catégorie inférieure ou égale à k , et Φ est un relèvement de Δ_X^{k+1} . Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$, $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ sa cofibre homotopique. Si l'invariant de Hopf $\mathcal{H}_{\Phi}(\alpha)$ est nul alors $\text{cat} Y \leq k$. La réciproque est vraie lorsque $\dim(X) \leq q(k + 1) - 2$.*

La version de cet invariant par la méthode de Ganea apparaît dans les travaux d'Iwase. L. Vandembroucq a utilisé l'invariant de Hopf par la méthode de Ganea et a montré :

Lemme 3.2.2 ([55]) Soient X un CW complexe $(q - 1)$ -connexe ($q \geq 2$) de catégorie inférieure ou égale à k et $s : X \longrightarrow G_k(X)$ une section de $g_k(X)$. Considérons $\alpha : S^p \longrightarrow X$ ($p \geq q + 1$) et $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ sa cofibre homotopique. Pour tout $i \geq 0$:

- Si $\Sigma^i H(\alpha) = 0$ (invariant de Hopf à la méthode de Vandembroucq) alors $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$.
- Si, de plus $\dim(X) \leq q(k + 1) - 2$, alors la réciproque est vraie i.e. $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$ implique $\Sigma^i H(\alpha) = 0$.

Définition 3.2.3 Soient $f : X \longrightarrow Z$, de σ^i -catégorie inférieure ou égale à k et $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ un relèvement de $\Sigma^i f$ sur la $i^{\text{ème}}$ suspension du $k^{\text{ième}}$ espace de Ganea. Notons $\zeta : \Sigma^i G_k(Z) \longrightarrow C(s)$ l'application obtenue en construisant la cofibre homotopique de s . À une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ nous associons :

1. $\overline{H}_i(\alpha) = \Sigma^i \gamma'_k - s \circ \Sigma^i \alpha \in \pi_{p+i}(\Sigma^i G_k(Z))$, la classe $\overline{H}_i(\alpha)$ mesure la commutativité du triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) \\ \Sigma^i \alpha \downarrow & \nearrow s & \\ \Sigma^i X & & \end{array}$$

où γ'_k est défini en 3.1.1.

2. $\overline{H}'_i(\alpha) = \zeta \circ \overline{H}_i(\alpha) \simeq \zeta(\Sigma^i \gamma'_k - s \circ \Sigma^i \alpha) \simeq \zeta \circ \Sigma^i \gamma'_k \in \pi_{p+i}(C(s))$, défini à partir du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & C(s) \\ & & & & \uparrow \zeta \\ & & \overline{H}'_i(\alpha) & \nearrow & \\ S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) & & \\ & \searrow \Sigma^i \alpha & & \uparrow s & \\ & & \Sigma^i X & & \end{array}$$

Remarque 3.2.4 Dans le cas où $f = id_X$, on retrouve les invariants de Hopf de Vandembroucq.

Théorème 3.2.5 Soient $f : X \longrightarrow Z$ une application continue. Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ ($p \geq 1$), telle que $f \circ \alpha$ est homotopiquement triviale. Notons $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ sa cofibre homotopique, et \tilde{f}

l'application induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique :

$$\begin{array}{ccccc}
 S^p & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{f} & Z \\
 \downarrow & & \downarrow j & \nearrow \tilde{f} & \\
 * & \longrightarrow & X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} & &
 \end{array}$$

Alors pour tout $i \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\sigma^i \text{cat} f \leq k$ et $\overline{H}_i(\alpha) = 0$;
2. $\sigma^i \text{cat} \tilde{f} \leq k$.

Démonstration.

1) \implies 2) Nous avons une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma^i G_k(Z) & \\
 s \nearrow & \downarrow \Sigma^i g_k(Z) & \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Z
 \end{array}$$

$\overline{H}_i(\alpha) = \Sigma^i \gamma'_k - s \circ \Sigma^i \alpha = 0$, ce qui signifie que le triangle suivant est homotopiquement commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) \\
 \searrow \Sigma^i(\alpha) & & \nearrow s \\
 & \Sigma^i X &
 \end{array}$$

L'application $\Sigma^i \gamma'_k$ est homotopiquement nulle, puisque $f \circ \alpha$ est homotopiquement nulle. Donc $s \circ \Sigma^i \alpha$ est homotopiquement nulle, ce qui montre la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^{p+i} & \xrightarrow{\quad} & * & & & & \\
 \downarrow \Sigma^i \alpha & & \downarrow & \searrow \text{cte} & \searrow \text{cte} & & \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i X \sqcup_{\Sigma^i \alpha} e^{p+i+1} \simeq \Sigma^i (X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}) & \xrightarrow{s'} & \Sigma^i G_k(Z) & \xrightarrow{\Sigma^i g_k(Z)} & \Sigma^i Z \\
 & \searrow s & \searrow \Sigma^i \tilde{f} & \searrow \Sigma^i \tilde{f} & & & \\
 & & & & \Sigma^i Z & &
 \end{array}$$

$\Sigma^i f$ (arrow from $\Sigma^i X$ to $\Sigma^i Z$)

dans lequel l'application s' est obtenue par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Par l'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique, $\Sigma^i g_k(Z) \circ s'$ est homotope à $\Sigma^i \tilde{f}$, i.e. $\sigma^i \text{cat} f \leq k$.

2) \implies 1) Il existe une application $s' : \Sigma^i(X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}) \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ telle que $\Sigma^i g_k(Z) \circ s' \simeq \Sigma^i \tilde{f}$. Ceci implique que $\Sigma^i g_k(Z) \circ s' \circ \Sigma^i j \simeq \Sigma^i \tilde{f} \circ \Sigma^i j \simeq \Sigma^i f$. Notons $s := s' \circ \Sigma^i j$, on a alors $\Sigma^i g_k(Z) \circ s \simeq \Sigma^i f$. i.e. $\sigma^i \text{cat} f \leq k$.

Nous avons $\Sigma^i \gamma'_k \simeq 0$, donc il suffit de montrer que $s \circ \Sigma^i \alpha$ est homotopiquement triviale. On a $s \circ \Sigma^i \alpha$ est égale à $s' \circ \Sigma^i j \circ \Sigma^i \alpha$, et celle-ci est homotopiquement triviale, car l'application j est la cofibre homotopique de l'application α , donc $\overline{H}_i(\alpha) = 0$. \square

Théorème 3.2.6 Soient $f : X \longrightarrow Z$ une application continue de σ^i -catégorie inférieure ou égale à k et $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ un relèvement de $\Sigma^i f$. Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ et notons $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$ sa cofibre homotopique.

L'application $\tilde{f}' : X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \longrightarrow Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}$ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique. On a le diagramme commutatif à homotopie près suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 S^p & \longrightarrow & * \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \\
 f \downarrow & & \tilde{f}' \downarrow \\
 Z & \longrightarrow & Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}
 \end{array}$$

Si $\overline{H}_i(\alpha) = 0$ alors $\sigma^i \text{cat} \tilde{f}' \leq k$.

Démonstration. Nous pouvons démontrer ce théorème de deux façons différentes :

1. 1^{ère} méthode

Nous avons $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Sigma^i G_k(Z) \\
 & \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_k(Z) \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Z
 \end{array}$$

$\overline{H}_i(\alpha) = \Sigma^i \gamma'_k - s \circ \Sigma^i \alpha$, $\overline{H}_i(\alpha) = 0$, ce qui signifie que le triangle

suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) \\
 & \searrow \Sigma^i(\alpha) & \nearrow s \\
 & & \Sigma^i X
 \end{array}$$

est commutatif à homotopie près.

Grâce à l'application $\gamma'_k : S^p \longrightarrow G_k(Z)$ et à la trivialité de l'invariant de Hopf, nous avons :

$$\Sigma^i(G_k(Z) \sqcup_{\gamma'_k} e^{p+1}) \simeq \Sigma^i G_k(Z) \sqcup_{s \circ \Sigma^i \alpha} e^{p+i+1}.$$

Considérons le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^{p+i} & \xrightarrow{\quad} & * & & & & \\
 \downarrow \Sigma^i \alpha & & \downarrow & & & & \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i(X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}) \simeq \Sigma^i X \sqcup_{\Sigma^i \alpha} e^{p+i+1} & & & & \\
 \downarrow s & & \downarrow b & & & & \\
 \Sigma^i G_k(Z) & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i(G_k(Z) \sqcup_{\gamma'_k} e^{p+1}) \simeq \Sigma^i G_k(Z) \sqcup_{s \circ \Sigma^i \alpha} e^{p+i+1} & \xrightarrow{r} & \Sigma^i G_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) & & \\
 \downarrow \Sigma^i g_k(Z) & & \downarrow \Sigma^i \tilde{g}_k & & \downarrow \Sigma^i g_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) & & \\
 \Sigma^i Z & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) & \xlongequal{\quad} & \Sigma^i(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) & & \\
 \uparrow \Sigma^i f & & \uparrow \Sigma^i \tilde{f}' & & & &
 \end{array}$$

construit comme suit :

– L'application r existe d'après la proposition 3.1.3

Pour faciliter la démonstration de l'existence de l'application r , il suffit de montrer la trivialité de l'application $\Sigma^i G_k(j') \circ \Sigma^i \gamma'_k$, dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S^{p+i} \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} \Sigma^i G_k(Z) & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i G_k(Z) \sqcup_{\Sigma^i \gamma'_k} e^{p+i+1} \\
 & \searrow \Sigma^i G_k(j') & \swarrow r \\
 & & \Sigma^i G_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1})
 \end{array}$$

Dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 S^p & \xrightarrow{\Sigma \alpha'_\#} & G_1(Z) & \xrightarrow{G_1(j')} & G_1(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) \\
 & \searrow \gamma'_k & \downarrow \xi_k & & \downarrow \xi_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) \\
 & & G_k(Z) & \xrightarrow{G_k(j')} & G_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1})
 \end{array}$$

Les applications $\Sigma^i G_k(j') \circ \Sigma^i \gamma'_k$ et $\Sigma^i \xi_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) \circ \Sigma^i G_1(j') \circ \Sigma^{i+1}(\alpha'_\#)$ sont homotopes ($\alpha' := f \circ \alpha$).

Remarquons que $G_1(j') \circ \Sigma(\alpha'_\#) \simeq \Sigma\Omega(j') \circ \Sigma\Omega(\alpha') \circ \Sigma(id_{S^p})_\# \simeq \Sigma\Omega(j' \circ \alpha') \circ \Sigma(id_{S^p})_\# \simeq 0$

car j' est la cofibre homotopique de l'application α' , donc $\Sigma^i G_k(j') \circ \Sigma^i \gamma'_k$ est homotopiquement triviale.

– Nous obtenons alors les deux applications b et $\Sigma^i \tilde{g}_k$ par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.

Aussi les deux applications $\Sigma^i \tilde{f}'$ et $\Sigma^i \tilde{g}_k \circ b$ sont homotopes grâce à l'unicité de la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique, de même que les applications $\Sigma^i g_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) \circ r$ et $\Sigma^i \tilde{g}_k$.

Notons $s' := r \circ b$, l'application $\Sigma^i \tilde{f}'$ est homotope à $\Sigma^i g_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) \circ s'$, ce qui montre que $\sigma^i \text{cat} \tilde{f}' \leq k$.

2. 2^{ème} méthode

Considérons le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 S^p & \longrightarrow & * \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{j} & X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} \\
 f \downarrow & \searrow f' & \downarrow \tilde{f}' \\
 Z & \xrightarrow{j'} & Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}
 \end{array}$$

Notons $f' := j' \circ f \simeq \tilde{f}' \circ j$, remarquons que $\sigma^i \text{cat} f' \leq k$ puisque $\sigma^i \text{cat} f' \leq \min\{\sigma^i \text{cat} f, \sigma^i \text{cat} j'\}$

Nous avons par hypothèse $\overline{H}_i(\alpha) := \overline{H}_{if}(\alpha) = 0$. Le diagramme suivant montre que $\overline{H}_{if'}(\alpha) := \Sigma^i \gamma''_k - s'' \circ \Sigma^i \alpha = 0$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Sigma^i \gamma''_k & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) & \xrightarrow{\Sigma^i G_k(j')} & \Sigma^i G_k(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) \\
 & \searrow \Sigma^i \alpha & \nearrow s & \searrow \Sigma^i G_k(j') \circ s := s'' & \\
 & & \Sigma^i X & &
 \end{array}$$

Nous avons dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 S^p & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{f'} & Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1} \\
 \downarrow & & \downarrow j & & \nearrow \tilde{f}' \\
 * & \longrightarrow & X \sqcup_{\alpha} e^{p+1} & &
 \end{array}$$

- $f' \circ \alpha \simeq 0$
- $\sigma^i \text{cat} f' \leq k$
- $\overline{H}_{i f'}(\alpha) = 0$

D'après le théorème 3.2.5, $\sigma^i \text{cat} \tilde{f}' \leq k$.

□

Théorème 3.2.7 Soient $f : X \longrightarrow Z$ une application continue de σ^i -catégorie inférieure ou égale à k pour tout $i \geq 0$, $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ un relèvement de $\Sigma^i f$, $\zeta : \Sigma^i G_k(Z) \longrightarrow C(s)$ une cofibre de s , Z un CW complexe $(q-1)$ -connexe ($q \geq 2$) et X de dimension inférieure ou égale à $q(k+1) - 2$. Considérons une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$.

Notons $Y := X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$, $Z' := Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}$ et $\tilde{f}' : Y \longrightarrow Z'$ l'application induite par la propriété universelle de somme amalgamée homotopique.

1. Si $\sigma^i \text{cat} \tilde{f}' \leq k$ alors $\overline{H}_i(\alpha) = 0$.
2. Si f est un épimorphisme, et Z aussi de dimension inférieure ou égale à $q(k+1) - 2$ alors, pour tout $j \geq 1$, $\Sigma^j \overline{H}_i(\alpha) = 0$ implique $\sigma^{i+j} \text{cat} Z' \leq k$.

Démonstration.

1. Notons $\tilde{s} : \Sigma^i Y \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z')$ un relèvement de $\Sigma^i \tilde{f}'$.

Nous allons d'abord montrer que le diagramme suivant est commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i G_k(Z) & \xrightarrow{\Sigma^i G_k(j')} & \Sigma^i G_k(Z') \\ \uparrow s & & \uparrow \tilde{s} \\ \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i Y \end{array}$$

Nous avons

$$\begin{cases} \Sigma^i g_k(Z) \circ s \simeq \Sigma^i f \\ \Sigma^i g_k(Z') \circ \tilde{s} \simeq \Sigma^i \tilde{f}' \\ \Sigma^i g_k(Z') \circ \Sigma^i G_k(j') \simeq \Sigma^i j' \circ \Sigma^i g_k(Z) \end{cases}$$

Les deux applications $\Sigma^i g_k(Z') \circ \Sigma^i G_k(j') \circ s$ et $\Sigma^i g_k(Z') \circ \tilde{s} \circ \Sigma^i j$ sont homotopes puisque

$$\Sigma^i g_k(Z') \circ \Sigma^i G_k(j') \circ s \simeq \Sigma^i j' \circ \Sigma^i g_k(Z) \circ s \simeq \Sigma^i j' \circ \Sigma^i f \simeq \Sigma^i \tilde{f}' \circ \Sigma^i j \simeq \Sigma^i g_k(Z') \circ \tilde{s} \circ \Sigma^i j.$$

Par la connectivité de $F_k(Z')$ (la fibre de $g_k(Z')$), l'application $g_k(Z')$ est une $(q(k+1) - 1)$ - équivalence.

Alors l'application $\Sigma^i g_k(Z')$ est une $q(k+1) + i - 1$ - équivalence et avec l'hypothèse sur la dimension de X, l'application induite

$g_{\#} : [\Sigma^i X, \Sigma^i G_k(Z')] \longrightarrow [\Sigma^i X, \Sigma^i Z']$ définie par $g_{\#}(h) = \Sigma^i g_k(Z') \circ h$ est injective donc les deux applications $\Sigma^i G_k(j') \circ s$ et $\tilde{s} \circ \Sigma^i j$ sont homotopes.

Notons $C(j)$ (resp $C(j')$) la cofibre homotopique de j (resp j').

Le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^i Z & \xrightarrow{\Sigma^i j'} & \Sigma^i Z' \end{array}$$

est une somme amalgamée homotopique. Grâce à la propriété de la somme amalgamée homotopique :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i Y & \longrightarrow & \Sigma^i C(j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \Sigma^i Z & \xrightarrow{\Sigma^i j'} & \Sigma^i Z' & \longrightarrow & \Sigma^i C(j') \end{array}$$

nous avons $\Sigma^i C(j) \simeq \Sigma^i C(j')$.

Considérons le diagramme commutatif à homotopie près suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & C(s) & \xrightarrow{\Psi} & C(\tilde{s}) & \longrightarrow & C(\Psi) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \overline{H}_i(\alpha) & \nearrow & \uparrow \zeta & & \uparrow & & \uparrow \\ S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) & \xrightarrow{\Sigma^i G_k(j')} & \Sigma^i G_k(Z') & \longrightarrow & \Sigma^i C(G_k(j')) \\ & & \nearrow \Sigma^i l & \searrow h & & & \\ & & \Sigma^i G_k(Z) \sqcup_{\Sigma^i \gamma'_k} e^{p+i+1} & & & & \\ & & \downarrow \Sigma^i g_k(Z) & & \downarrow \Sigma^i g_k(Z') & & \\ & & \Sigma^i Z & \xrightarrow{\Sigma^i j'} & \Sigma^i Z' & \longrightarrow & \Sigma^i C(j') \\ & & \uparrow \Sigma^i f & & \uparrow \Sigma^i \tilde{f}' & & \uparrow r \\ & & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i Y & \longrightarrow & \Sigma^i C(j) \equiv S^{p+i+1} \\ & & \uparrow s & & \uparrow \tilde{s} & & \uparrow r' \end{array}$$

Dans lequel :

- Les deux application r et r' sont induites par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique.
- L'application r' est une section homotopique de l'application r , de plus r induit un isomorphisme en homologie en degré plus grand que $p + q + i - 1$ (proposition 3.1.5). De même pour son inverse homotopique r' .
- L'espace $C(\Psi)$ représente la cofibre homotopique de l'application r' [9].

– L'application l est donnée par la somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccc} S^p & \longrightarrow & e^{p+1} \\ \gamma'_k \downarrow & & \downarrow \\ G_k(Z) & \xrightarrow{l} & G_k(Z) \sqcup_{\gamma'_k} e^{p+1} \end{array}$$

et l'application h par la propriété universelle.

Comme $q \geq 2$, la cofibre homotopique de l'application Ψ est au moins $p + i + 1$ -connexe, alors Ψ est une $p + i + 1$ -équivalence.

$\Psi \circ \overline{H}'_k(\alpha)$ est homotopiquement nulle parce que $\Sigma^i G_k(q) \circ \Sigma^i \gamma'_k$ est homotopiquement nulle.

Comme Ψ est une $(p + i + 1)$ -équivalence, alors $\overline{H}'_k(\alpha)$ est homotopiquement nulle.

2. L'application f est un épimorphisme et avec la condition de la dimension, nous obtenons d'après 2.3.6 $\sigma^i \text{cat} f = \sigma^i \text{cat} Z$, donc il existe $s' : \Sigma^i Z \longrightarrow \Sigma^i G_k(Z)$ une section de $\Sigma^i g_k(Z)$.

Nous avons $\Sigma^i g_k(Z) \circ s \simeq \Sigma^i f \simeq \text{id}_{\Sigma^i Z} \circ \Sigma^i f \simeq \Sigma^i g_k(Z) \circ s' \circ \Sigma^i f$.

Comme $\Sigma^i g_k(Z) \circ s \simeq \Sigma^i g_k(Z) \circ s' \circ \Sigma^i f$, alors $s \simeq s' \circ \Sigma^i f$ par la même technique que celle de la première partie. Considérons le diagramme homotopiquement commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & C(s) & \xrightarrow{\Psi} & C(s') \\ & \nearrow \overline{H}'_i(\alpha) & \uparrow \zeta & \nearrow H'_i(\alpha) & \uparrow \zeta' \\ S^{p+i} & \xrightarrow{\Sigma^i \gamma'_k} & \Sigma^i G_k(Z) & \xrightarrow{\text{id}} & \Sigma^i G_k(Z) \\ & & \uparrow s & & \uparrow s' \\ & & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Z \end{array}$$

dans lequel $H'_i(\alpha) = \Psi \circ \overline{H}'_i(\alpha)$. D'après l'hypothèse $\Sigma^j \overline{H}'_i(\alpha) = 0$, on a $\Sigma^j H'_i(\alpha) = 0$. L. Vandembroucq ([55] théorème 2.2) a montré que, sous ses condition, on a $\sigma^{i+j} \text{cat}(Z \sqcup_{f \circ \alpha} e^{p+1}) \leq k$.

□

Chapitre 4

L-S σ^i -catégorie d'un produit d'applications

La catégorie d'un produit d'espaces a déjà été étudiée par Fox [18]. Puis le travail de généralisation à la σ^i -catégorie a été fait par Vandembroucq [55]. Dans ce chapitre, nous obtenons des résultats sur les produits des applications, qui généralisent le travail de Vandembroucq et Fox, et nous obtenons aussi des résultats sur le produit smash, qui sont des généralisations des théorèmes proposés par Berstein et Hilton [5] puis par Vandembroucq en 1998. Bien sûr, notre travail central portera sur la σ^i -catégorie.

4.1 σ^i -catégorie et le produit

Proposition 4.1.1 [9] *Soient Z et Z' deux espaces, alors pour tout $i \geq 1$, $\Sigma^i(Z \times Z') \simeq \Sigma^i Z \vee \Sigma^i Z' \vee \Sigma^i(Z \wedge Z')$.*

Théorème 4.1.2 *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues. Alors pour tout $i \geq 0$, $\sigma^i \text{cat}(f \times g) \leq \sigma^i \text{cat} f + \sigma^i \text{cat} g$.*

Démonstration. Soit $i \geq 0$, supposons que $\sigma^i \text{cat} f \leq n$ et $\sigma^i \text{cat} g \leq n'$ et notons s_f et s_g des relèvements homotopiques respectifs de $\Sigma^i f$ et $\Sigma^i g$ dans $\Sigma^i G_n(Y)$ et $\Sigma^i G_{n'}(Y')$ tels que $\Sigma^i g_n(Y) \circ s_f \simeq \Sigma^i f$ et $\Sigma^i g_{n'}(Y') \circ s_g \simeq \Sigma^i g$. Nous allons construire un relèvement $s_{f \times g}$ de $\Sigma^i(f \times g)$ qui vérifie $\Sigma^i g_{n+n'}(Y \times Y') \circ s_{f \times g} \simeq \Sigma^i(f \times g)$. Nous allons aussi à partir de s_f et s_g , construire une application $\lambda : G_n(Y) \times G_{n'}(Y') \longrightarrow G_{n+n'}(Y \times Y')$.

Détaillons la construction de λ .

Nous avons $\text{cat}(G_n(Y) \times G_{n'}(Y')) \leq n + n'$ ([18] et corollaire 2.5.4); ceci implique que $g_{n+n'}(G_n(Y) \times G_{n'}(Y'))$ a une section homotopique. Donc le

diagramme suivant est commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccccc}
& & G_{n+n'}(G_n(Y) \times G_{n'}(Y')) & \xrightarrow{G_{n+n'}(g_n(Y) \times g_{n'}(Y'))} & G_{n+n'}(Y \times Y') \\
& \nearrow s & \downarrow g_{n+n'}(G_n(Y) \times G_{n'}(Y')) & \searrow \lambda & \downarrow g_{n+n'}(Y \times Y') \\
G_n(Y) \times G_{n'}(Y') & \xrightarrow{id} & G_n(Y) \times G_{n'}(Y') & \xrightarrow{g_n(Y) \times g_{n'}(Y')} & Y \times Y'
\end{array}$$

Notons $\lambda := G_{n+n'}(g_n(Y) \times g_{n'}(Y')) \circ s$.

Pour $i = 0$, notons $S := \lambda \circ (s_f \times s_g)$, l'application $g_{n+n'}(Y \times Y') \circ S$ est homotope à $f \times g$, ce qui montre que $cat(f \times g) \leq cat f + cat g$.

Pour $i \geq 1$, nous avons $\Sigma^i(X \times X') \simeq \Sigma^i X \vee \Sigma^i X' \vee \Sigma^i(X \wedge X')$;
 $\Sigma^i(G_n(Y) \times G_{n'}(Y')) \simeq (\Sigma^i G_n(Y)) \vee (\Sigma^i G_{n'}(Y')) \vee \Sigma^i(G_n(Y) \wedge G_{n'}(Y'))$
(proposition 4.1.1).

Nous allons construire une application $S' : \Sigma^i(X \times X') \longrightarrow \Sigma^i(G_n(Y) \times G_{n'}(Y'))$ qui rend le triangle suivant commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^i(G_n(Y) \times G_{n'}(Y')) & & \\
\uparrow S' & \searrow \Sigma^i(g_n(Y) \times g_{n'}(Y')) & \\
\Sigma^i(X \times X') & \xrightarrow{\Sigma^i(f \times g)} & \Sigma^i(Y \times Y')
\end{array}$$

Pour cela, il suffit de construire $s_{f \wedge g} : \Sigma^i(X \wedge X') \longrightarrow \Sigma^i(G_n(Y) \wedge G_{n'}(Y'))$.

Notons $a : \Sigma^i(A \wedge B) \xrightarrow{\simeq} A \wedge \Sigma^i B$ et $b : \Sigma^i(A \wedge B) \xrightarrow{\simeq} (\Sigma^i A) \wedge B$.

Soit $s_{f \wedge g} := b^{-1} \circ (s_f \wedge id) \circ b \circ a^{-1} \circ (id \wedge s_g) \circ a$. Posons $S' = s_f \vee s_g \vee s_{f \wedge g}$, à partir du diagramme homotopiquement commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^i(G_n(Y) \times G_{n'}(Y')) & \xrightarrow{\Sigma^i \lambda} & \Sigma^i G_{n+n'}(Y \times Y') \\
\uparrow S' & \searrow \Sigma^i(g_n \times g_{n'}) & \downarrow \Sigma^i g_{n+n'} \\
\Sigma^i(X \times X') & \xrightarrow{\Sigma^i(f \times g)} & \Sigma^i(Y \times Y')
\end{array}$$

nous obtenons $\sigma^i cat(f \times g) \leq n + n'$. □

4.2 σ^i -catégorie et le produit smash

Dans cette section nous voulons montrer que le théorème de Vandembroucq ([55] thm 2.2) se généralise au produit smash.

Commençons par un rappel de quelques propriétés bien connues des produit smash.

Proposition 4.2.1 *Soit X un espace quelconque. Dans les carrés commutatifs à homotopie près suivants,*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A \vee X & \longrightarrow & B \vee X \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \vee X & \longrightarrow & D \vee X \end{array}$$

si le premier carré est une somme amalgamée homotopique, alors le second l'est aussi.

Démonstration. A partir du diagramme commutatif à homotopie près suivant,

$$\begin{array}{ccccc} * & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & A \vee X & \longrightarrow & B \vee X \end{array}$$

et du lemme 2.1.1, nous obtenons la somme amalgamée homotopique suivante :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \vee X & \longrightarrow & B \vee X \end{array} .$$

Aussi dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant, le grand carré est une somme amalgamée homotopique (lemme 2.1.1)

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C \vee X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D \vee X \end{array} .$$

La commutativité à homotopie près du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A \vee X & \longrightarrow & C \vee X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \vee X & \longrightarrow & D \vee X \end{array}$$

dans lequel le grand carré et le carré à gauche sont des sommes amalgamées homotopiques, et le lemme 2.1.1 impliquent que le carré à droite est une somme amalgamée homotopique. \square

Proposition 4.2.2 *Soit X un espace quelconque. Considérons les carrés suivants commutatifs à homotopie près :*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & D
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 X \times A & \longrightarrow & X \times B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X \times C & \longrightarrow & X \times D
 \end{array}
 .$$

Si le premier carré est une somme amalgamée homotopique, alors le second est une somme amalgamée homotopique.

Démonstration. Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccccc}
 A \times X & \longrightarrow & C \times X & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

Du lemme 2.1.1, nous obtenons le produit fibré homotopique suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A \times X & \longrightarrow & C \times X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

Dans le cube suivant, les quatre carrés verticaux sont des produits fibrés homotopiques et le carré du bas est une somme amalgamée homotopique, donc le carré en haut est une somme amalgamée homotopique (Mather [39] deuxième théorème du cube).

$$\begin{array}{ccccc}
 A \times X & \longrightarrow & B \times X & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & C \times X & \longrightarrow & D \times X & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 A & \longrightarrow & B & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & C & \longrightarrow & D &
 \end{array}$$

□

Lemme 4.2.3 Soit X un espace quelconque. Considérons les carrés commutatifs à homotopie près suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & D
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 A \wedge X & \longrightarrow & B \wedge X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C \wedge X & \longrightarrow & D \wedge X
 \end{array}
 .$$

Si le premier carré est une somme amalgamée homotopique, alors le second l'est aussi.

Démonstration. Soit le diagramme commutatif à homotopie près suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 A \vee X & \longrightarrow & B \vee X & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & C \vee X & \longrightarrow & D \vee X & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 A \times X & \longrightarrow & B \times X & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & C \times X & \longrightarrow & D \times X & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 A \wedge X & \longrightarrow & B \wedge X & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & C \wedge X & \longrightarrow & D \wedge X &
 \end{array}$$

dans lequel les deux premiers carrés horizontaux du haut sont des sommes amalgamées homotopiques (prp 4.2.1 et 4.2.2), et les quatre suites d'applications verticales sont des cofibrations homotopiques.

Donc le carré horizontal du bas est une somme amalgamée homotopique (Doeraene [9]). \square

Lemme 4.2.4 Soient X , Y et Z des espaces quelconques. Alors $(X \vee Y) \wedge Z$ est équivalent à homotopie près à $(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$.

Démonstration. Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près,

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \longrightarrow & X \vee Z & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & Y \vee Z & \longrightarrow & (X \vee Y) \vee Z & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 Z & \longrightarrow & X \times Z & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & Y \times Z & \longrightarrow & (X \vee Y) \times Z & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 * & \longrightarrow & X \wedge Z & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & Y \wedge Z & \longrightarrow & (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) &
 \end{array}$$

et les carrés horizontaux sont des sommes amalgamées homotopiques (4.2.1 et 4.2.2). En passant aux cofibres, le lemme des quatre cofibrations [9] donne le résultat. \square

En particulier en posant $Z = S^i$, on a :

Corollaire 4.2.5 $\Sigma^i(X \vee Y) \simeq \Sigma^i X \vee \Sigma^i Y$.

Lemme 4.2.6 Soient X, Y et Z des espaces quelconques. Alors

1. $(X \wedge Y) \wedge Z \simeq X \wedge (Y \wedge Z)$ (associativité).
2. $X \wedge Y \simeq Y \wedge X$ (commutativité).

Corollaire 4.2.7 Pour $Z = S^i$, $\Sigma^i(X \wedge Y) \simeq \Sigma^i X \wedge Y \simeq X \wedge \Sigma^i Y$.

Remarque 4.2.8 Le produit smash est définie comme la cofibre homotopique de $X \vee Y \longrightarrow X \times Y$. Il coincide avec le produit smash classique ([40], théorème 6.5.2 page 244) lorsque $X \vee Y \longrightarrow X \times Y$ est une cofibration.

Définition 4.2.9 Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues. Alors $\text{cat}_g f \leq k$ si et seulement si $f \wedge g$ se factorise à homotopie près via $G_k(Y) \wedge Y'$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & & G_k(Y) \wedge Y' \\ & \nearrow s & \downarrow g_k(Y) \wedge id_{Y'} \\ X \wedge X' & \xrightarrow{f \wedge g} & Y \wedge Y' \end{array}$$

- On notera $\sigma^i\text{-cat}_g f := \text{cat}_{\Sigma^i g} f$.
- On notera $\text{cat}_A f := \text{cat}_{id_A} f$.

Définition 4.2.10 Supposons que $\text{cat}_A X \leq k$ et $s : X \wedge A \longrightarrow G_k(X) \wedge A$ une section homotopique de $g_k^A(X)$.

Notons $\xi : G_k(X) \wedge A \longrightarrow C(s)$ la cofibre homotopique de s .

Pour une application $\alpha : S^p \longrightarrow X$ on définit l'invariant de Hopf $H_A(\alpha) := \xi \circ (\gamma_k \wedge A)$

$$\begin{array}{ccccc} & & H_A(\alpha) & & \\ & \curvearrowright & \text{---} & \curvearrowleft & \\ S^p \wedge A & \xrightarrow{\gamma_k \wedge A} & G_k(X) \wedge A & \xrightarrow{\xi} & C(s) \\ & & \uparrow s & & \\ & & X \wedge A & & \end{array}$$

Remarque 4.2.11 Remarquons :

1. $\Sigma^i H_A(\alpha) \simeq H_{\Sigma^i A}(\alpha)$.
2. $\Sigma^i C(s) \simeq C(\Sigma^i s)$.
3. $\text{cat}_{S^0} X = \sigma^0 \text{cat} X = \text{cat} X$.
4. $\sigma^i \text{cat}_A(Y) = \text{cat}_{\Sigma^i A}(Y)$.
5. $\sigma^i \text{cat}_{S^n} X = \sigma^{i+n} \text{cat} X$.

Théorème 4.2.12 Soient A un espace quelconque, et X un CW-complexe 1-connexe, tels que $\text{cat}_A X \leq k$ et $s : X \wedge A \longrightarrow G_k(X) \wedge A$ une section homotopique de $g_k(X) \wedge \text{id}_A := g_k^A(X)$. Considérons $\alpha : S^p \longrightarrow X$. Notons $Y = X \sqcup_{\alpha} e^{p+1}$, pour tout $i \geq 1$:
Si $H_{\Sigma^i A}(\alpha) = 0$, alors $\text{cat}_{\Sigma^i A}(Y) \leq k$.

Démonstration. Remarquons que d'après le corollaire 2.2.7, l'application $\Sigma^i g_k^A(Y)$ a une section homotopique si et seulement si $\Sigma^{i-1} c_k^A(Y)$ est homotopiquement triviale, où $c_k^A(Y) : Y \wedge A \longrightarrow C(g_k^A(Y))$ est la cofibre homotopique de $g_k^A(Y)$.

L'application $\tilde{g}_k^A : (G_k(X) \sqcup_{\gamma_k} e^{p+1}) \wedge A \longrightarrow Y \wedge A$ est induite par la propriété universelle de la somme amalgamée homotopique dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
S^p \wedge A & \longrightarrow & * & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
G_k(X) \wedge A & \longrightarrow & (G_k(X) \sqcup_{\gamma_k} e^{p+1}) \wedge A & \xrightarrow{\varrho_k} & G_k(Y) \wedge A \\
\downarrow & & \downarrow \tilde{g}_k^A & & \downarrow g_k^A(Y) \\
X \wedge A & \longrightarrow & Y \wedge A & \xrightarrow{=} & Y \wedge A \\
& & \downarrow \tilde{c}_k^A & & \downarrow c_k^A(Y) \\
& & C(\tilde{g}_k^A) & \longrightarrow & C(g_k^A(Y))
\end{array}$$

Dans lequel :

- L'application $\varrho_k : (G_k(X) \sqcup_{\gamma_k} e^{p+1}) \wedge A \longrightarrow G_k(Y) \wedge A$ existe d'après la proposition 3.1.3
- Les carrés de gauche sont des sommes amalgamées homotopiques (lemme 4.2.3).
- L'application \tilde{g}_k^A est égale à $g_k(X)$ sur l'espace $G_k(X)$ et l'identité sur e^{p+1} et A .

Si \tilde{c}_k^A est homotopiquement triviale, alors $c_k^A(Y)$ est homotopiquement triviale.

Donc au lieu de montrer que $\Sigma^{i-1} c_k^A$ est homotopiquement triviale, nous allons montrer que $\Sigma^{i-1} \tilde{c}_k^A$ est homotopiquement triviale.

Or $g_k^A(X) \circ (\gamma_k \wedge A) \simeq \alpha \wedge A$ (chp 3 proposition 3.1.1), ce qui montre que le diagramme suivant est commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccccc}
& & X \wedge A & \longrightarrow & * \\
& & \downarrow s & & \downarrow \\
S^p \wedge A & \xrightarrow{\gamma_k \wedge A} & (G_k(X) \wedge A) & \xrightarrow{\zeta} & C(s) \\
\downarrow = & & \downarrow g_k^A(X) & & \downarrow \\
S^p \wedge A & \xrightarrow{\alpha \wedge A} & X \wedge A & \xrightarrow{l} & *
\end{array}$$

Dans lequel le carré en bas à droite est une somme amalgamée homotopique (lemme 2.1.1).

A partir des cofibrations homotopiques des applications $\gamma_k \wedge A$, $H_A(\alpha)$, $\alpha \wedge A$, et $l \circ (\alpha \wedge A)$, nous obtenons le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
S^p \wedge A & \xrightarrow{=} & S^p \wedge A & & S^p \wedge A & & \\
\downarrow \gamma_k \wedge A & \searrow = & \downarrow & \xrightarrow{=} & \downarrow H_A(\alpha) & \searrow = & \\
G_k(X) \wedge A & & S^p \wedge A & \xrightarrow{=} & C(s) & & S^p \wedge A \\
\downarrow & \searrow & \downarrow \alpha \wedge A & & \downarrow & \searrow & \downarrow l \circ (\alpha \wedge A) \\
(G_k(X) \sqcup_{\alpha} e^{p+1}) \wedge A & & X \wedge A & \xrightarrow{=} & * & & * \\
\downarrow & \searrow \tilde{g}_k^A & \downarrow & & \downarrow q & \searrow \delta & \\
& & Y \wedge A & \xrightarrow{\text{---}} & \Sigma(S^p \wedge A) \simeq C(l \circ (\alpha \wedge A)) & & \\
\downarrow \tilde{c}_k^A & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \Sigma H_A(\alpha) \simeq H_{\Sigma A}(\alpha) & & \\
C(\tilde{g}_k^A) & \xrightarrow{\simeq} & C(\delta) \simeq \Sigma C(s) & & & &
\end{array}$$

dans lequel les deux carrés horizontaux du haut sont des sommes amalgamées homotopiques, donc le troisième carré horizontal du bas est une somme amalgamée homotopique (Doeraene [9]).

Le carré suivant est une somme amalgamée homotopique.

$$\begin{array}{ccc}
C(s) & \longrightarrow & * \\
\downarrow q & & \downarrow \\
C(H_A(\alpha)) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma(S^p \wedge A)
\end{array}$$

Donc δ est la cofibre homotopique de q , ce qui montre que $C(l \circ (\alpha \wedge A)) \simeq \Sigma(S^p \wedge A)$.

Aussi $C(\tilde{g}_k^A) \simeq C(\delta) \simeq \Sigma C(s)$ grâce à la somme amalgamée homotopique horizontale du bas et la suite de Puppe respectivement.

Considérons, le carré commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y \wedge A & \longrightarrow & \Sigma(S^p \wedge A) \\ \downarrow \tilde{c}_k^A & & \downarrow H_{\Sigma A}(\alpha) \\ C(\tilde{g}_k^A) & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma C(s) \end{array}$$

Par hypothèse $H_{\Sigma^i A}(\alpha) \simeq 0$, il suffit d'appliquer la suspension Σ^{i-1} au carré précédent pour montrer que $\Sigma^{i-1}\tilde{c}_k^A$ est homotopiquement triviale. \square

Remarque 4.2.13 Pour $A = S^0$, $cat_{\Sigma^i S^0}(Y) = \sigma^i cat Y$ et $H_{\Sigma^i S^0}(\alpha) = \Sigma^i H^1(\alpha)$ (défini par Vandembroucq) ce qui montre que le théorème de Vandembroucq, ([55] théorème 2.2, page 192) est un cas particulier du produit smash.

Théorème 4.2.14 Soient X, X' et A des espaces quelconques. alors pour tout $i \geq 1$ $cat_{\Sigma^i A}(X \times X') \leq cat_{\Sigma^i A} X + cat_{\Sigma^i A} X'$.

Démonstration. Supposons que $cat_{\Sigma^i A} X \leq n$ et $cat_{\Sigma^i A} X' \leq n'$, s_X^A et $s_{X'}^A$ les sections homotopiques de $\Sigma^i g_n^A(X)$ et $\Sigma^i g_{n'}^A(X')$ respectivement.

Nous avons :

- L'application $\lambda : G_n(X) \times G_{n'}(X') \longrightarrow G_{n+n'}(X \times X')$ (voir la preuve du thm 4.1.2) qui vérifie $\Sigma^i g_{n+n'}^A(X \times X') \circ (\Sigma^i \lambda \wedge A) \simeq \Sigma^i (g_n(X) \times g_{n'}(X')) \wedge A$.
- $\Sigma^i (X \times X') \wedge A \simeq (\Sigma^i X \vee \Sigma^i X' \vee \Sigma^i (X \wedge X')) \wedge A \simeq (\Sigma^i X \wedge A) \vee (\Sigma^i X' \wedge A) \vee (\Sigma^i (X \wedge X') \wedge A)$.
- $\Sigma^i (G_n(X) \times G_{n'}(X')) \wedge A \simeq (\Sigma^i G_n(X) \wedge A) \vee (\Sigma^i G_{n'}(X') \wedge A) \vee \Sigma^i (G_n(X) \wedge G_{n'}(X')) \wedge A$.

Par le même chemin de démonstration que dans le théorème 4.1.2, nous allons construire l'application $s_{X \wedge X'}^A$ comme suit :

$s_{X \wedge X'}^A := L \circ (\mathcal{C}\mathcal{A}) \circ L^{-1} \circ (s_X^A \wedge id) \circ L \circ (\mathcal{C}\mathcal{A}) \circ R^{-1} \circ (id \wedge s_{X'}^A) \circ (id \wedge L^{-1}) \circ A \circ (R \wedge id) : \Sigma^i (X \wedge X') \wedge A \longrightarrow \Sigma^i (G_n(X) \wedge G_{n'}(X')) \wedge A$, où

- $L : \Sigma^i (A \wedge B) \xrightarrow{\simeq} (\Sigma^i A) \wedge B$ et $R : \Sigma^i (A \wedge B) \xrightarrow{\simeq} A \wedge (\Sigma^i B)$.
- \mathcal{C} la commutativité et \mathcal{A} l'associativité.

À partir de $s_X^A, s_{X'}^A$ et $s_{X \wedge X'}^A$ nous pouvons construire l'application $s : \Sigma^i (X \times X') \wedge A \longrightarrow \Sigma^i (G_n(X) \times G_{n'}(X')) \wedge A$, $s := s_X^A \vee s_{X'}^A \vee s_{X \wedge X'}^A$ telle que $(\Sigma^i \lambda \wedge A) \circ s$ est la section homotopique de $\Sigma^i g_{n+n'}^A(X \times X')$ i.e. $cat_{\Sigma^i A}(X \times X') \leq n + n'$. \square

Proposition 4.2.15 *Soient X et A deux espaces quelconques. Alors pour tout $i \geq 0$, $\sigma^i \text{cat}(X \wedge A) \leq \text{cat}_{\Sigma^i A} X \leq \sigma^i \text{cat} X$.*

Démonstration.

• Supposons que $\sigma^i \text{cat} X \leq n$, donc il existe une section $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(X)$

telle que $\Sigma^i g_n(X) \circ s \simeq id_{\Sigma^i X}$. Avec le produit smash de l'espace A et le corollaire 4.2.7, nous obtenons $\Sigma^i g_n^A(X) \circ s' \simeq id_{\Sigma^i(X \wedge A)}$ ($g_n^A(X) := g_n(X) \wedge id_A$ et $s' := s \wedge id_A$), ce qui montre que $\text{cat}_{\Sigma^i A} X \leq n$.

• Supposons que $\text{cat}_{\Sigma^i A} X \leq n$, alors il existe une section $s : \Sigma^i(X \wedge A) \longrightarrow \Sigma^i(G_n(X) \wedge A)$

telle que $\Sigma^i g_n^A(X) \circ s \simeq id_{\Sigma^i(X \wedge A)}$.

Le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma^i(G_n(X) \wedge A) & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i(T^n(X) \wedge A) & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i T^n(X \wedge A) \\
 \uparrow s & \searrow \Sigma^i h & \downarrow \Sigma^i g_n^A(X) & \nearrow & \downarrow \\
 \Sigma^i(X \wedge A) & \xrightarrow{id_{\Sigma^i(X \wedge A)}} & \Sigma^i(X \wedge A) & \xrightarrow{\Sigma^i g_n(X \wedge A)} & \Sigma^i G_n(X \wedge A) \\
 & & \downarrow \Sigma^i(\Delta_X^{n+1} \wedge id_A) & & \downarrow \\
 \Sigma^i(X \wedge A) & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i(X^{n+1} \wedge A) & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i((X \wedge A)^{n+1}) \\
 & & \downarrow \Sigma^i \Delta_{X \wedge A}^{n+1} & & \downarrow
 \end{array}$$

L'application h était induite par la propriété universelle du produit fibré homotopique.

Notons $s' := \Sigma^i h \circ s$. On a $\Sigma^i g_n(X \wedge A) \circ s' \simeq id_{\Sigma^i(X \wedge A)}$ donc $\sigma^i \text{cat}(X \wedge A) \leq n$. □

Théorème 4.2.16 *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues, dont l'une au moins est non nulle. Alors pour tout $i \geq 1$, $\sigma^i \text{cat}(f \wedge g) + 1 \leq \sigma^i \text{cat}_g f + 1 \leq \sigma^i \text{cat}(f \times g) \leq \sigma^i \text{cat} f + \sigma^i \text{cat} g$.*

Démonstration. L'inégalité de droite est le théorème 4.1.2. Nous montrons les inégalités $\sigma^i \text{cat}(f \wedge g) \leq \sigma^i \text{cat}_g f$ et $\sigma^i \text{cat}_g f + 1 \leq \sigma^i \text{cat}(f \times g)$.

Supposons que $\sigma^i \text{cat}(f \times g) \leq n+1$, et $s : \Sigma^i(X \times X') \longrightarrow \Sigma^i G_{n+1}(Y \times Y')$ un relèvement de $\Sigma^i(f \times g)$ qui vérifie $\Sigma^i g_{n+1}(Y \times Y') \circ s \simeq \Sigma^i(f \times g)$.

dans lequel :

- $G_n(Y \wedge Y')$ (le $n^{\text{ième}}$ espace de Ganea de $Y \wedge Y'$) représente le produit fibré homotopique des applications
 $j_n(Y \wedge Y') : T^n(Y \wedge Y') \longrightarrow (Y \wedge Y')^{n+1}$ et $\Delta_{Y \wedge Y'}^{n+1} : Y \wedge Y' \longrightarrow (Y \wedge Y')^{n+1}$.
- L'application h est induite par la propriété universelle du produit fibré homotopique.

Remarquons que l'application $\Sigma^i \pi_X : \Sigma^i(X \times X') \longrightarrow \Sigma^i(X \wedge X')$ a une section homotopique ξ pour tout $i \geq 1$, puisque $\Sigma^i(X \times X') \simeq \Sigma^i X \vee \Sigma^i X' \vee \Sigma^i(X \wedge X')$, comme suit :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{id} & \\ \Sigma^i(X \wedge X') & \xleftarrow{\xi} \Sigma^i(X \times X') & \xrightarrow{\Sigma^i \pi_X} \Sigma^i(X \wedge X') \end{array}$$

L'application $\Sigma^i \tilde{\pi}_{G_n(Y)} : \Sigma^i \tilde{G}_{n+1} = \Sigma^i(G_n(Y) \times Y') \sqcup C(\Sigma^i(F_n(Y) \times *)) \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y) \wedge Y'$ est définie comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i(F_n(Y) \times *) & \longrightarrow & \Sigma^i(G_n(Y) \times Y') \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \Sigma^i \tilde{G}_{n+1} \\ & \searrow & \swarrow \Sigma^i \tilde{\pi}_{G_n(Y)} \\ & & \Sigma^i G_n(Y) \wedge Y' \end{array}$$

- Notons $s' := \Sigma^i \tilde{\pi}_{G_n(Y)} \circ \Sigma^i r \circ s \circ \xi$, $\Sigma^i(f \wedge g) \simeq \Sigma^i g_n^{Y'}(Y) \circ s'$ ce qui montre que $\sigma^i \text{cat}_g f + 1 \leq \sigma^i \text{cat}(f \times g)$.
- Notons $s'' := \Sigma^i h \circ s'$, $\Sigma^i(f \wedge g) \simeq \Sigma^i g_n(Y \wedge Y') \circ s''$ ce qui montre que $\sigma^i \text{cat}(f \wedge g) \leq \sigma^i \text{cat}_g f$.

Comme dans le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^i(X \times X') & \xrightarrow{s} & \Sigma^i G_{n+1}(Y \times Y') & \xrightarrow{\Sigma^i r} & \Sigma^i \tilde{G}_{n+1} & \xrightarrow{\Sigma^i \tilde{\pi}_{G_n(Y)}} & \Sigma^i G_n(Y) \wedge Y' & \xrightarrow{\Sigma^i h} & \Sigma^i G_n(Y \wedge Y') \\ \uparrow \xi & & \searrow \Sigma^i(f \times g) & & \downarrow \Sigma^i \tilde{p}_{n+1} & & \downarrow & & \downarrow \Sigma^i g_n(Y \wedge Y') \\ \Sigma^i(X \wedge X') & & \Sigma^i(Y \times Y') & \xrightarrow{\Sigma^i pr} & \Sigma^i Y \wedge Y' & \xlongequal{\quad} & \Sigma^i Y \wedge Y' \\ & & \searrow \Sigma^i(f \wedge g) & & & & & & \end{array}$$

□

En particulier, dans le cas $g = id_{S^n}$, le théorème donne :

Corollaire 4.2.17 Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $g = id_{S^m}$ et $m \geq 1$, on a :

- $\sigma^i cat(\Sigma^m f) + 1 \leq \sigma^{i+m} cat f + 1 \leq \sigma^i cat(f \times id_{S^m}) \leq \sigma^i cat f + 1$.
- À la limite $\sigma cat(f \times id_{S^m}) = \sigma cat f + 1$.

Le théorème précédent généralise le théorème de Vandembroucq [56] (théorème 4.1.3. page 64), et aussi la corollaire précédente généralise la conjecture de Ganea et répond positivement à cette généralisation pour les applications f dont lesquelles $\sigma cat f = cat f$.

Proposition 4.2.18 Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X' \longrightarrow Y'$ deux applications continues. Alors pour tout $i \geq 0$,

1. $\sigma^i cat(f \wedge g) \leq \min\{\sigma^i cat f, \sigma^i cat g\}$.
2. $\max\{\sigma^i cat f, \sigma^i cat g\} \leq \sigma^i cat(f \times g)$.

Démonstration.

1. Supposons que $\sigma^i cat f \leq n$, i.e. il existe une application $s : \Sigma^i X \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y)$, telle que $\Sigma^i g_n(Y) \circ s \simeq \Sigma^i f$.

Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Sigma^i G_n(Y) & \longrightarrow & \Sigma^i T^n(Y) \\
 & \nearrow s & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) & & \downarrow \Sigma^i j_n \\
 \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i f} & \Sigma^i Y & \xrightarrow{\Sigma^i \Delta_{n+1}} & \Sigma^i Y^{n+1}
 \end{array}$$

En passant au produit smash, le diagramme suivant est aussi commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Sigma^i G_n(Y) \wedge Y' & \longrightarrow & \Sigma^i T^n(Y) \wedge Y' & \xrightarrow{k_n} & \Sigma^i T^n(Y \wedge Y') \\
 & \nearrow s \wedge id & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Sigma^i j_n(Y \wedge Y') \\
 \Sigma^i X \wedge Y' & \longrightarrow & \Sigma^i Y \wedge Y' & \longrightarrow & \Sigma^i Y^{n+1} \wedge Y' & \longrightarrow & \Sigma^i (Y \wedge Y')^{n+1} \\
 & & & \searrow \Sigma^i \Delta_{n+1}^{Y \wedge Y'} & & &
 \end{array}$$

dans lequel l'application $k_n((y_0, y_1, \dots, y_n) \wedge y') = (y_0 \wedge y', \dots, y_n \wedge y')$. A partir du diagramme précédent, nous allons construire le diagramme commutatif à homotopie près suivant,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Sigma^i G_n(Y) \wedge Y' & \longrightarrow & \Sigma^i T^n(Y \wedge Y') & & \\
 & & \downarrow & \searrow \Sigma^i h & \downarrow & & \\
 & \nearrow s \wedge id_{Y'} & \Sigma^i G_n(Y \wedge Y') & & \downarrow & & \\
 \Sigma^i X \wedge X' & \xrightarrow{id_{\Sigma^i X} \wedge g} & \Sigma^i X \wedge Y' & \xrightarrow{\Sigma^i f \wedge id} & \Sigma^i (Y \wedge Y') & \longrightarrow & \Sigma^i (Y \wedge Y')^{n+1} \\
 & \searrow s' & \downarrow \Sigma^i g_n(Y \wedge Y') & & \downarrow & & \\
 & & \Sigma^i (Y \wedge Y') & & \downarrow & & \\
 & & & \searrow \Sigma^i \Delta_{n+1}^{Y \wedge Y'} & & &
 \end{array}$$

dans lequel $G_n(Y \wedge Y')$ est le produit fibré homotopique des applications $j_n(Y \wedge Y')$ et $\Delta_{n+1}^{Y \wedge Y'}$, et h existe par la propriété universelle de produit fibré homotopique.

Notons $s' := \Sigma^i h \circ (s \wedge id_{Y'}) \circ (id_{\Sigma^i X} \wedge g)$. On a alors $\Sigma^i g_n(Y \wedge Y') \circ s' \simeq \Sigma^i (f \wedge g)$ ce qui implique que $\sigma^i cat(f \wedge g) \leq \sigma^i cat f$.

(Même chemin de démonstration pour $\sigma^i cat(f \wedge g) \leq \sigma^i cat g$.)

2. Supposons que $\sigma^i cat(f \times g) \leq n$, i.e. il existe une application $s : \Sigma^i(X \times X') \longrightarrow \Sigma^i G_n(Y \times Y')$, telle que $\Sigma^i g_n(Y \times Y') \circ s \simeq \Sigma^i(f \times g)$. Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i G_n(Y \times Y') & \xrightarrow{\Sigma^i G_n(q_1)} & \Sigma^i G_n(Y) \\ \downarrow \Sigma^i g_n(Y \times Y') & & \downarrow \\ \Sigma^i(Y \times Y') & \xrightarrow{\Sigma^i q_1} & \Sigma^i Y \end{array}$$

dans lequel l'application $q_1 : Y \times Y' \longrightarrow Y$ est la première projection.

Notons $i_1 : X \hookrightarrow X \times X'$ l'inclusion de X dans $X \times X'$ et $s' := \Sigma^i G_n(q_1) \circ s \circ \Sigma^i i_1$.

Nous montrons, à partir du diagramme commutatif à homotopie près suivant, que $\Sigma^i g_n(Y) \circ s' \simeq \Sigma^i f$ i.e. $\sigma^i cat f \leq \sigma^i cat(f \times g)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & s' \\ & & & & \curvearrowright \\ & & \Sigma^i G_n(Y \times Y') & \xrightarrow{\Sigma^i G_n(q_1)} & \Sigma^i G_n(Y) \\ & \nearrow s & \downarrow & & \downarrow \Sigma^i g_n(Y) \\ \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i i_1} & \Sigma^i(X \times X') & \xrightarrow{\Sigma^i(f \times g)} & \Sigma^i(Y \times Y') & \xrightarrow{q_1} & \Sigma^i Y \\ & \searrow & \Sigma^i f & & \dashrightarrow & & \end{array}$$

De la même façon, $\sigma^i cat g \leq \sigma^i cat(f \times g)$.

□

Bibliographie

- [1] J.-F. Adams et P.-J. Hilton, *On the chain algebra of a loop space*, Comment. Math. Helvetici **30** (1956), 305-330.
- [2] J.-C. Beker et D.-H. Gottlieb, *The transfer map for fibrations and duality*, **33** (1976), 107-133.
- [3] I. Berstein et T. Ganea, *The category of a map and of a cohomology class*, Fundam. Math. **50** (1961/2), 265-279.
- [4] I. Berstein et T. Ganea, *On the homotopy-commutativity of suspensions*, Illinois J. Math., vol **6** (1962), 336-340.
- [5] I. Berstein et P.-J. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois J. Math., vol **4** 437-451.
- [6] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology, vol **33** 95-111.
- [7] O. Cornea, *Strong LS-category equals cone-length*, Topology, Vol **34** (1995), 377-381.
- [8] J.-P. Doeraene, *L.S. category in a model category*, Journal of Pure and Appl. Algebra **84** (1993), 215-261.
- [9] J.-P. Doeraene, *Homotopy pull backs, homotopy push outs and joins*, Bull. of the Belg. Math. Soc. **5** (1998), 15-37.
- [10] J.-P. Doeraene and Mohammed El Haouari, *The Ganea and Whitehead Variants of the Lusternik-Schnirelmann Category*, Canad. Math. Bull. vol. **49**(1), 2006, 41-54.
- [11] J.-P. Doeraene, D. Tanré, *Axiome du Cube et Foncteurs de Quillen*, Annales de l'Institut Fourier **45-4**, (1995), 1061-1077.
- [12] Y. Félix, *La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle*. SMF. Astérisque **176**, 1989.
- [13] Y. Félix et S. Halperin, *Rational LS category and its applications*, Trans. Amer. math. Soc., vol **273** (1982), 1-37.
- [14] Y. Félix, S. Halperin, et J.-M. Lemaier, *The rational LS-category of products and of Poincaré duality complexes*, Topology, vol **37** (1998), 749-756.

- [15] Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas, *LS-catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol **111** (1983), 89-96.
- [16] Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Version June 1997.
- [17] Y. Félix, D. Tanré, *Sur la formalité des applications*, LNM, vol **1318**, Springer Verlag, 1988.
- [18] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Annals of Math., vol **42** (1941), 333-370.
- [19] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois J. Math., vol **11** (1967) 417-427.
- [20] T.Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, Symposium on Algebraic Topology. LNM, vol**249**, Springer Verlag, 1971, 23-30.
- [21] T. Ganea, *A generalization of the homology and homotopy suspension*, Comment . Math. Helv., vol**39**, 295-322.
- [22] S. Ghorbal, *Monomorphismes et épimorphismes homotopique*, Thèse, UCL Université Catholique de Louvain (1996).
- [23] W.J.Gilbert, *Some examples for weak category and conilpotency*, Illinois J. Math., vol**12** 421-432.
- [24] D.H.Gottlieb, *Fibre bundles and the Euler characteristic*, J. Diff. Geom. **10** (1975) 39-48.
- [25] S. Halperin, *Universal enveloping algebras and loop space homology*, J. Pure Appl. Algebra **83** (1992), 237-282.
- [26] S. Halperin et J-M. Lemaire, *Notions of category in differential algebra*, Algebraic Topology - Rational Homotopy LNM, vol **1318**, Springer Verlag, 1988, 138-154.
- [27] K. Hess, *A proof of Ganea's conjecture for rational spaces*, Topology **30** (1991), 205-214.
- [28] P.J. Hilton, *Generalizations of the Hopf invariant*, Colloque de Topologie algebrique , Louvain, 1956, 9-27.
- [29] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, to appear in Bull. London Math. Soc.
- [30] N. Iwase, *A_∞ -method in Lusternik-Schnirelmann category*, preprint.
- [31] I.M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.
- [32] I.M. James, *Lusternik-Schnirelmann category* , in : Hndbook of Algebraic Topology, Elsevier (1995), 1293-1310.
- [33] B. Jessup, *Rational approximations to L-S category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317**, 655-660.

- [34] T. Kahl, *Lusternik-Schnirelmann-Category und axiomatische Homotopietheorie*, Diplomarbeit, FU Berlin (1994).
- [35] J-M. Lemaire, *Le transfert dans les espaces fibrés (d'après J.Becker et D. Gotlieb)*, Séminaire Bourbaki 23^e année 1975/76 n 472.
- [36] J-M. Lemaire et F. Sigrist, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L-S catégorie*, Comment. Math. Helvetici **56** (1981), 103-122.
- [37] L. Lusternik et L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, Paris, (1934).
- [38] M. Majewski, *A cellular Lie algebra model for spaces and its equivalence with the models of Quillen and Sullivan*, Thèse, FU Berlin (1996).
- [39] M. Mather, *Pull-backs in homotopy theory*, Can. J. Math., **28** (1976), 225-263.
- [40] C.R.F. Maunder, *ALGEBRAIC TOPOLOGY*
- [41] L. Menichi, *Sur l'algèbre de cohomologie d'une fibre*, Thèse, Lille (1997).
- [42] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. Math. **90** (1969), 205-295.
- [43] Yu. B. Rudiak, *On category weight and its applications*, Topology, to appear.
- [44] H. Scheerer et D. Tanré, *Fibrations à la Ganea*, Bull. Bel. Math. Soc. **4** (1997), 333-353.
- [45] P. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Topology **3** (1965), 337-355.
- [46] W. Singhof, *Minimal covering of manifolds with balls*, Manuscripta Mth., vol **29** (1979), 385-415.
- [47] D. Stanley, *Spaces with Lusternik -Schnirelmann category n and cone length $n + 1$* , preprint.
- [48] N. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Mich. Math. J. **14** (1967), 133-152.
- [49] J. Strom, *Two special cases of Ganea's conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.
- [50] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes études, Sci. Publ. Math. **47** (1978), 269-331.
- [51] D. Tanré, *Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, LNM, vol **1025**, Springer Verlag, 1983.
- [52] H. Toda, *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Annals of mathematics studies **49**.
- [53] G.H.Toomer, *Lusternik-Schnirelmann category and the moore spectral sequence*, Math. Z. **27** (1974), 123-143.
- [54] G.H. Toomer, *Topological localisation, category and cocommutator*, Canadian J. Math. **27** (1975), 319-322.

- [55] L. Vandembroucq, *Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant*, *Topology and its Applications* **105** (2000), 187-200.
- [56] L. Vandembroucq, *Suspension des fibrations de Ganea et invariant de Hopf*, Thèse, Lille (1998)
- [57] G.W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer Verlag, Berlin, GTM series 61 (1978).

Résumé

Notre travail s'inscrit dans un domaine initié en 1934 par Lusternik et Schnirelmann qui associent à une variété un invariant appelé catégorie qui permet de minorer le nombre des points critiques d'une fonction différentiable sur cette variété.

Nous nous intéressons à une généralisation au cas des applications continues entre espaces topologiques, auxquelles nous associons un invariant appelé σ^i -catégorie.

Nous obtenons plusieurs caractérisations de la σ^i -catégorie d'une application.

Nous examinons ensuite l'effet sur la σ^i -catégorie d'un attachement d'une cellule à la source d'une application. Cette étude est faite au moyen d'un nouvel invariant, appelé invariant de Hopf relatif.

Enfin nous examinons les relations entre les catégories de produit et de produit smash.

Abstract

Our work is registered in a field initiated in 1934 by Lusternik and Schnirelmann, which associate with a variety an invariant called category, which allows to undervalue the number of the critical points of a differentiable function on this variety.

We are interested in a generalization in the case of the continuous applications between topological spaces in which we associate an invariant called σ^i -category.

We obtain several characterizations of the σ^i -category on an application

We examine then the effect on the σ^i -category of a cell attachment on an application source. This study is made with a new invariant, called invariant of relative Hopf.

Finally we examine the relations between the categories of product and product smash.