

N° d'ordre : 40097

THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

dans la discipline :

LASERS, MOLECULES ET RAYONNEMENT ATMOSPHERIQUE

soutenue le 24/09/2009 par

Clément EVAIN

**Dynamique de sources sur accélérateur : contrôle de
“structures turbulentes” dans les lasers à électrons
libres et étude du rayonnement synchrotron cohérent
induit par laser**

Membres du jury :

Serge Bielawski	Université de Lille 1	Directeur de thèse
Christophe Szwaj	Université de Lille 1	Codirecteur de thèse
Marie-Emmanuelle Couprie	CEA/Synchrotron SOLEIL	Rapporteur
Francesco Papoff	University of Strathclyde	Rapporteur
Dominique Derozier	Université de Lille 1	Examineur
Jorge R. Tredicce	Institut Non Linéaire de Nice	Examineur

Remerciements

Ça a été un véritable plaisir et très formateur de travailler avec Serge Bielawski et Christophe Szwaj pendant 4 ans. Je leur suis infiniment reconnaissant, en particulier et dans le désordre, pour leur patience à enseigner, leur confiance, leur rigueur scientifique, les sujets sur lesquels nous avons travaillé, leur enthousiasme et leur manière d’appréhender la recherche.

Un grande partie du travail présenté dans cette thèse vient d’une collaboration entre notre équipe au laboratoire PhLAM et le groupe machine du centre de rayonnement synchrotron UVSOR à Okazaki au Japon. Je tiens à remercier chaleureusement toute l’équipe de UVSOR, et en particulier Katoh-san, Hosaka-san, Shimada-san et Adachi-san.

Merci au directeur du laboratoire PhLAM, M. Włodarczak, ainsi qu’au directeur du CERLA, Dominiquez Derozier, de nous permettre de travailler dans de très bonnes conditions.

Je remercie les rapporteurs et les examinateurs de cette thèse (M.-E. Couprie, F. Papoff, D. Derozier, J. R. Tredicce) pour l’intérêt et le temps qu’ils ont consacré à étudier cette thèse.

Merci à toute l’équipe de dynamique non linéaire du PhLAM (M. Lefranc, Q. Thommen, M. Taki, E. Louvergneaux, S. Randoux, P. Suret, E. Courtade).

Merci aussi aux plus jeunes des anciens : H. Lignier, G. Agez, M. Lancry, M. Lepers, L. Aballea, P.-E. Morant, M. Goubet.

Merci à l’équipe du service de mécanique et d’électronique, ainsi qu’à l’ingénieur de recherche du CERLA M. Le-Parquier.

Je remercie aussi N. Semmoud et D. Urschitz, de l’école Télécom Lille 1.

Finalement, je remercie très fortement Patricia, Bernard, Caroline, Clara et Quentin Evain, Jean-Louis Melisse, Gérard et Louise Evain et J. Galas, S. Despinoy, S. Deltombe, A. Duthoit, A. Guaguère, J. Rougelot, C. Vandermoere, F. Anquez, M. Warembourg, F. Vasconcelos, E. Creton, S. Benhajlasen, A. Betourne, C. Noot, C. Baude et J. Chabé.

Table des matières

Première partie : Contrôle de systèmes soumis à une dérive	7
1 Systèmes étudiés	7
1.1 Introduction sur les systèmes soumis à une dérive	8
1.1.1 Influence du bruit, structures entretenues par le bruit	9
1.1.2 Instabilité convective - instabilité absolue	10
1.1.3 Études expérimentales et théoriques	10
1.2 Laser à électrons libres sur anneau de stockage	11
1.2.1 Présentation du laser à électrons libres sur anneau de stockage . . .	11
1.2.2 Dynamique en fonction de la vitesse de dérive : données expérimentales	13
1.2.3 Équation d'évolution de l'impulsion laser	15
1.2.4 Dynamique en fonction de la dérive : données numériques	17
1.3 Équation de Ginzburg-Landau	20
1.3.1 Équation de Ginzburg-Landau à saturation locale	21
1.3.2 Équation de Ginzburg-Landau à saturation globale	25
1.3.3 Lien avec le laser à électrons libres	26
1.3.4 Instabilité convective et instabilité absolue : étude analytique	27
1.4 Conclusion	30
2 Contrôle des “structures turbulentes”	33
2.1 Étude du contrôle dans l'équation de Ginzburg-Landau	34
2.1.1 Étude qualitative sur deux exemples de résultats numériques	34
2.1.2 Étude quantitative : seuil convectif/absolu	36
2.1.3 Effet d'une phase dans la rétroaction	43
2.1.4 Conclusion	53
2.2 Application au laser à électrons libres	54
2.2.1 Modèle	55
2.2.2 Dispositif expérimental	55
2.2.3 Résultats numériques et expérimentaux en zones de grande dérive .	56
2.2.4 Effet de la face arrière du miroir de sortie de la cavité laser	59
2.2.5 Effet de deux rétroactions dans la zone de grande dérive	61
2.2.6 Suppression des grandes fluctuations du régime pulsé	63
2.2.7 Étude quantitative de l'effet de la phase de la rétroaction.	66

Deuxième partie : Rayonnement Synchrotron Cohérent induit par laser hors zone d'instabilité CSR 73

3	Introduction au rayonnement synchrotron émis dans un aimant de courbure et à la trajectoire d'un électron dans un anneau de stockage	73
3.1	Centre de rayonnement synchrotron UVSOR II	74
3.1.1	Accélération des électrons	74
3.1.2	Anneau de stockage	74
3.2	Rayonnement synchrotron dans un aimant de courbure	76
3.2.1	Rayonnement synchrotron incohérent	76
3.2.2	Rayonnement synchrotron cohérent	78
3.3	Distribution de charge du paquet d'électrons à l'équilibre	78
3.4	Trajectoire d'un électron dans l'anneau de stockage	79
4	Rayonnement synchrotron cohérent induit par laser	81
4.1	Principe et modélisation de l'expérience	83
4.1.1	Principe de l'expérience	83
4.1.2	Modélisation de l'expérience	87
4.2	Dispositif expérimental	90
4.2.1	Paramètres de l'anneau de stockage	91
4.2.2	Impulsion laser	91
4.2.3	Focalisation de l'impulsion laser sur le paquet d'électrons	97
4.2.4	Enregistrement des spectres térahertz	98
4.3	Résultats expérimentaux	98
4.3.1	Spectres du rayonnement synchrotron cohérent	98
4.3.2	Puissance térahertz en fonction du courant et de la puissance laser .	102
4.3.3	Puissance térahertz en fonction de la fréquence d'excitation	103
4.3.4	Étude comparative du CSR et de la puissance térahertz du rayonnement synchrotron classique incohérent	104

Troisième partie : Rayonnement Synchrotron Cohérent induit par laser en zone d'instabilité CSR et à son voisinage 109

5	Introduction aux instabilités CSR	109
5.1	Observations expérimentales	110
5.1.1	Rayonnement synchrotron térahertz en fonction du courant	110
5.1.2	Évolution temporelle du signal térahertz en zone instable	111
5.1.3	Détails des bouffées de CSR	111
5.1.4	Évolution temporelle de la longueur du paquet d'électrons en zone instable	112
5.1.5	Liste des anneaux de stockage sur lesquels ont été observés des instabilités CSR	112
5.2	Descriptions des instabilités	113
5.2.1	Explications qualitatives	113
5.2.2	Équation de Vlasov-Fokker-Planck	113
5.2.3	Analyse de stabilité	116

5.2.4	Résultats numériques	117
6	Interaction laser/électrons en zone d'instabilité CSR et à son voisinage	119
6.1	Modélisation de l'expérience sans force collective	121
6.1.1	Distribution de la densité de charge avant et juste après l'interaction	121
6.1.2	Distribution de la densité de charge et puissance térahertz émise après l'interaction	122
6.2	Expérience sur l'anneau de stockage UVSOR-II	125
6.2.1	Dispositif expérimental	125
6.2.2	Résultats expérimentaux	128
	Annexes	147
A	Gain du laser à électrons libres : détails de l'interaction entre le paquet d'électrons et l'impulsion laser	147
B	Méthodes de calcul numérique des dérivées spatiales	149
C	Dispositif expérimental d'enregistrement des diagrammes spatio-temporels et spectro-temporels des impulsions lasers en sortie du LEL	151
D	Recouvrement transverse entre le faisceau optique de la rétroaction et le mode du laser à électrons libres	153
E	Estimation de la largeur du spectre du rayonnement synchrotron inco- hérent	157
F	Modèle de l'anneau circulaire, oscillations synchrotron et bêtatron	159
G	Détails de l'étireur du système de mise en forme de l'impulsion laser	161
H	Détails de la modélisation des expériences d'interaction laser/électrons	163
I	Expression analytique de la puissance térahertz émise après une inter- action avec une impulsion laser modulée, sans force collective	175

Introduction

Les accélérateurs de particules peuvent être utilisés comme sources de lumière, produisant un rayonnement très intense sur une gamme de fréquences très étendue (du térahertz jusqu'aux rayons X). Ce rayonnement, appelé rayonnement synchrotron, est émis lorsqu'une particule relativiste chargée est accélérée. Il est produit au niveau d'onduleurs ou d'aimants de courbure d'un accélérateur ou d'un anneau de stockage. Une des caractéristiques de ce rayonnement est qu'il est composé d'une partie cohérente, et d'une partie incohérente. Une manière d'obtenir un rayonnement fortement cohérent est d'utiliser un amplificateur. Ce dernier est composé d'un ou plusieurs onduleurs, et constitue l'élément de base des lasers à électrons libres (LEL).

Sur les sources sur accélérateurs, on rencontre des problématiques de dynamique non linéaire, comme par exemple des phénomènes d'oscillations [1], d'instabilités [2, 3, 4, 5, 6], ou des processus de contrôle d'instabilités [7, 8, 9]. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à deux types de problématiques. D'abord au contrôle de structures "turbulentes" dans une impulsion d'un LEL de type oscillateur. Et ensuite à une instabilité apparaissant sur un paquet d'électrons circulant dans un anneau de stockage, qui mène à la formation de structures dans le paquet.

Sur les LEL de type oscillateur, un désaccord entre la fréquence de répétition des impulsions laser et la fréquence de passage des électrons, mène à des comportements instables. La modélisation de la dynamique des impulsions laser révèle une analogie formelle avec des systèmes spatio-temporels soumis à une dérive. Dans de tels systèmes, la dynamique fait naître une structure, par exemple une onde qui est entraînée par la dérive dans une direction privilégiée de l'espace. Un exemple typique est la formation de rides à la surface de l'eau, provoquée par le vent. Dans cette thèse, nous présentons une méthode pour contrôler les structures "turbulentes" qui apparaissent lorsque la dérive devient importante. Ces travaux sont appliqués au LEL, et possèdent une portée très générale car ils interviennent dans de nombreux types de sources optiques (LEL de type oscillateur [6], lasers à blocage de modes actif [10, 11], cavité optique rempli d'un milieu non linéaire [12, 13]), ainsi qu'en hydrodynamique [14, 15, 16, 17], ou en physique des plasmas [18].

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés au comportement instable d'un paquet d'électrons dans un anneau de stockage, comportement qui apparaît lorsque la densité de charge du paquet dépasse une valeur critique. En effet, à densité de charge élevée, l'effet du rayonnement des électrons sur eux-mêmes ne peut plus être négligé. Et par un processus d'auto-amplification d'une fluctuation initiale, des instabilités peuvent apparaître sous forme de bouffées aléatoires de rayonnement térahertz cohérent intense. Cette insta-

bilité est appelée instabilité CSR (*Coherent Synchrotron Radiation*), car contrairement au rayonnement synchrotron térahertz classique, le rayonnement émis par les électrons dans la zone instable est cohérent. Il est difficile d’obtenir des informations sur la dynamique des électrons dans l’anneau, car les variables pertinentes (positions et impulsions des électrons, formant l’espace des phases) ne sont pas observables directement. Pour étudier cette instabilité, notre stratégie a été de perturber le paquet d’électrons, pour ensuite observer le rayonnement synchrotron émis en réaction à la perturbation. Nous avons perturbé le paquet d’électrons en “imprimant” un motif périodique à son espace des phases grâce à une interaction avec une impulsion laser. Les caractéristiques importantes de l’impulsion laser que nous avons choisie sont premièrement une longueur comparable à celle du paquet d’électrons (de l’ordre de la centaine de picosecondes) et deuxièmement une modulation de son enveloppe à une fréquence térahertz. Nos études se sont déroulées en deux étapes.

La première étape a consisté à étudier l’interaction d’un paquet d’électrons avec l’impulsion laser en zone stable. Cette expérience se situe dans la continuité d’expériences effectuées récemment sur l’interaction entre un paquet d’électrons et une impulsion laser femtoseconde (expériences de *slicing*) [19, 20, 21]. Ces études ont fait l’objet d’un grand intérêt car elles ouvrent la voie à des potentielles sources de rayonnement térahertz intense. L’idée est que l’interaction avec une impulsion laser modifie la structure du paquet d’électrons ; ces derniers vont ensuite émettre en phase un rayonnement synchrotron cohérent. Notre expérience avec une impulsion laser modulée s’inscrit dans le cadre de l’optique non linéaire, le milieu non linéaire étant ici un paquet d’électrons relativistes. Plus précisément, cette étude présente des similarités avec les expériences de rectification optique dans les cristaux non linéaires [22], puisque son principe consiste à convertir un rayonnement laser en un rayonnement synchrotron de plus basse fréquence. Le rayonnement synchrotron obtenu après l’interaction est cohérent, spectralement fin, et accordable dans le domaine térahertz.

La deuxième étape a consisté à tester la dynamique des électrons à une perturbation provenant de l’interaction avec l’impulsion laser, au voisinage de l’instabilité. Ces études préliminaires ont montré qu’il est possible d’obtenir des informations relative au champ de sillage, élément important de l’instabilité CSR. En particulier, des phénomènes appelés précurseurs ont été observés. Les précurseurs sont des structures apparaissant en dessous du seuil d’instabilité, mais qui possèdent toutefois des informations sur les structures qui se manifestent au dessus du seuil. Ces travaux s’inscrivent dans un cadre d’étude général sur la formation de motifs, qui sont étudiés en physique, chimie, biologie, informatique, etc.

La **première partie** de ce mémoire traite du contrôle de systèmes soumis à une dérive. Le premier chapitre introduira ces systèmes. Il résumera principalement les résultats obtenus par notre équipe avant mon arrivée. Ces études sont basées à la fois sur un système expérimental, le laser à électrons libres de UVSOR, et sur une équation plus générale, l’équation de Ginzburg-Landau. Au deuxième chapitre, une méthode de contrôle des instabilités sera présentée et nous étudierons son effet sur les deux systèmes décrits au premier chapitre.

Dans la **seconde partie**, nous allons nous intéresser à l’interaction entre un paquet d’électrons et une impulsion provenant d’un laser externe, dont l’enveloppe a été modulée à une

fréquence térahertz. Nous allons étudier la réponse du paquet d'électrons à cette interaction, et plus particulièrement le rayonnement synchrotron émis par les électrons après l'interaction. Le troisième chapitre posera les bases nécessaires pour comprendre nos travaux. On y introduira certaines caractéristiques du rayonnement synchrotron, le principe de fonctionnement d'un anneau de stockage et un formalisme pour décrire la trajectoire des électrons. Le quatrième chapitre présentera les résultats que nous avons obtenus sur le rayonnement synchrotron émis par un paquet d'électrons après une interaction avec une impulsion laser modulée.

La **troisième et dernière partie** traite des instabilités CSR (*Coherent Synchrotron Radiation*). Le cinquième chapitre sera une introduction à ces instabilités, on y présentera leurs caractéristiques et leurs origines. Une caractéristique en ressortira : certaines informations sur la dynamique du paquet ne peuvent être obtenues expérimentalement que de manière indirecte, à partir du rayonnement émis. Le sixième chapitre présentera des résultats préliminaires sur l'instabilité CSR, provenant de l'interaction entre un paquet d'électrons et une impulsion laser.

Contrôle de systèmes soumis à une dérive

Chapitre 1

Systemes étudiés

Sommaire

1.1	Introduction sur les systèmes soumis à une dérive	8
1.1.1	Influence du bruit, structures entretenues par le bruit	9
1.1.2	Instabilité convective - instabilité absolue	10
1.1.3	Études expérimentales et théoriques	10
1.2	Laser à électrons libres sur anneau de stockage	11
1.2.1	Présentation du laser à électrons libres sur anneau de stockage	11
1.2.2	Dynamique en fonction de la vitesse de dérive : données expérimentales	13
1.2.3	Équation d'évolution de l'impulsion laser	15
1.2.4	Dynamique en fonction de la dérive : données numériques	17
1.3	Équation de Ginzburg-Landau	20
1.3.1	Équation de Ginzburg-Landau à saturation locale	21
1.3.2	Équation de Ginzburg-Landau à saturation globale	25
1.3.3	Lien avec le laser à électrons libres	26
1.3.4	Instabilité convective et instabilité absolue : étude analytique	27
1.4	Conclusion	30

Les systèmes que nous étudions dans cette partie sont des systèmes spatio-temporels soumis à une dérive. Ces systèmes se rencontrent dans de nombreux domaines, par exemple en hydrodynamique [14], en optique [12, 13] ou en physique des plasmas [18]. Dans une première section, une présentation du comportement général à tous ces systèmes sera introduit, et nous verrons que lorsque la dérive est forte, ces systèmes présentent une hypersensibilité au bruit qui rend leur comportement turbulent. Ensuite, nous étudierons en détail deux systèmes : le laser à électrons libres (section 1.2) et une équation de Ginzburg-Landau (section 1.3). Nous verrons que cette équation a un comportement proche de celui du laser à électrons libres au voisinage du seuil d'instabilité. Ces deux dernières sections sont une extension des travaux publiés dans l'article [6].

1.1 Introduction sur les systèmes soumis à une dérive

D'une manière générale, deux types de dynamiques peuvent se manifester selon l'intensité de la dérive. Dans le cas d'une intensité faible, la solution qui s'installera dans le système aura une structure spatiale qui s'étendra dans toutes les directions de l'espace, comme c'est le cas généralement dans les systèmes sans dérive. Dans le cas d'une intensité forte, une structure spatiale, comme par exemple une onde (Fig. 1.1), sera entraînée par la dérive dans une direction privilégiée de l'espace.

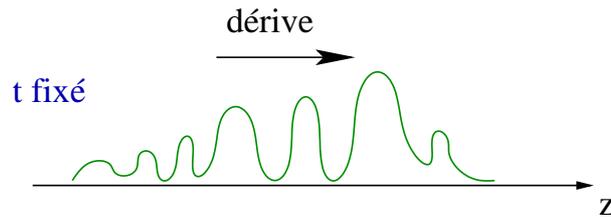


FIG. 1.1: Exemple schématique d'une solution d'un système à une dimension spatiale z soumis à une dérive.

Une illustration de ce type de dynamique sur un système hydrodynamique est présentée figure 1.2. Cette figure montre l'évolution spatio-temporelle de la surface d'un fluide dans un système de Taylor-Couette avec un flot axial¹ [17]. Lorsque le flot axial est fort, une perturbation placée en $z = 0$ est emportée vers les extrémités du système (Fig. 1.2 a). Lorsque le flot axial est faible, la solution en régime permanent remplit quasiment tout l'espace (Fig. 1.2 b).

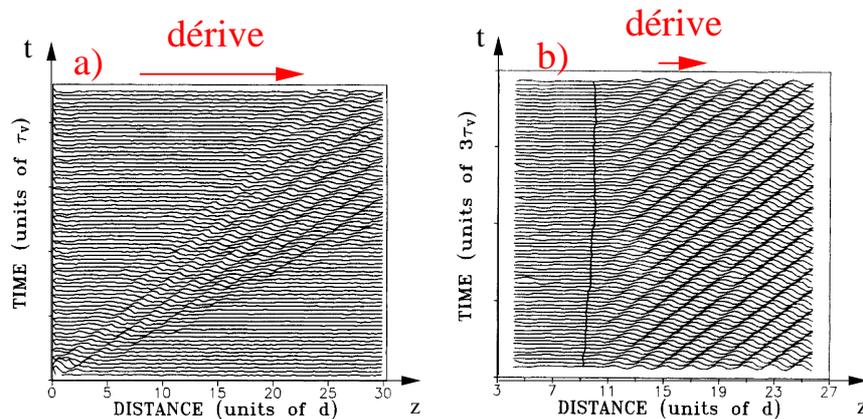


FIG. 1.2: Dynamique spatio-temporelle de la surface d'un fluide dans un système de Taylor-Couette avec un flot axial. D'après [17]. (a) forte dérive : une perturbation localisée en $t = 0$ et $z = 0$ est emportée vers les extrémités du système. (b) faible dérive : en régime permanent, une solution non nulle remplit quasiment tout l'espace. Les solutions ont une structure interne, leur enveloppe lentement variable est modulée.

¹Le système de Couette-Taylor est formé par deux cylindres concentriques de rayon et de vitesses de rotation différents. L'espace entre les deux cylindres est rempli par le fluide.

1.1.1 Influence du bruit, structures entretenues par le bruit

Si la dérive est forte et le système limité spatialement, l'onde finira par s'annuler sur les bords. Dans cette configuration, une fois perturbé le système reviendra à sa position d'équilibre, qui est la solution uniforme d'amplitude nulle. Cependant, la présence d'un bruit permanent aura pour conséquence que des perturbations seront constamment amplifiées et le système aura un comportement bruyant. Il présentera des structures appelées *structures entretenues par le bruit* [23, 15, 24].

Une illustration sur un laser impulsionnel est présentée figure 1.3. Cette figure montre l'évolution spatio-temporelle de l'enveloppe d'une impulsion laser émise par un laser à blocage de modes actif [10] (résultat numérique). Sur cet exemple, ce système est soumis à une forte dérive², et à du bruit provenant de l'émission spontanée. Des perturbations situées en amont (à gauche) sont constamment amplifiées et emmenées vers une extrémité du système où elles s'annulent (à droite). Ce processus forme des *structures entretenues par le bruit*, puisque sans bruit ces structures n'apparaîtraient pas.

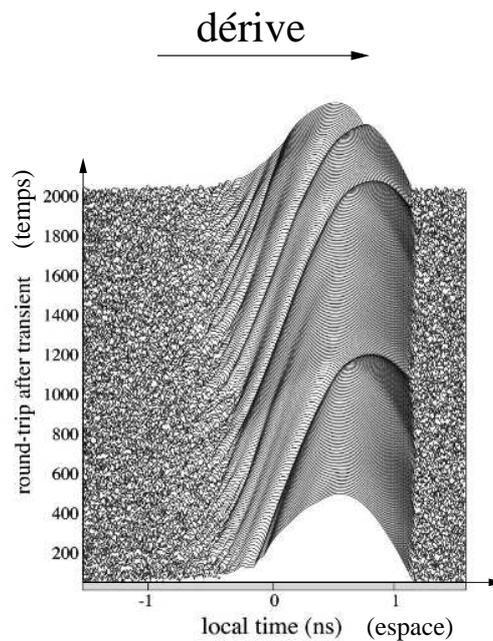


FIG. 1.3: Exemple d'évolution spatio-temporelle de l'enveloppe d'une impulsion laser produite par un laser à blocage de modes actif, lorsque l'intensité de la dérive est importante. D'après [10] (résultat numérique). L'enveloppe de la solution est modulée à la fréquence optique; cependant celle-ci est trop rapide pour être observable.

²Dans ce type de laser, une dérive apparaît lorsque le taux de répétition du laser est différent de la fréquence de modulation des pertes, et affecte la dynamique longitudinale des impulsions. Ce comportement est très similaire à celui du laser à électrons libres (voir section 1.2).

1.1.2 Instabilité convective - instabilité absolue

En 1958, P.A. Sturrock mit en évidence qu'il est possible, "juste" en étudiant localement le système, de différencier un comportement où une solution s'étend sur tout le système (Fig 1.2 b), d'un comportement où une solution est entraînée dans une direction privilégiée de l'espace [25] (Fig 1.2 a). Le seuil délimitant ces deux comportements est appelé le seuil convectif/absolu (seuil C/A). Son principe consiste à perturber la solution uniforme d'amplitude nulle, et d'étudier l'évolution de l'amplitude de la perturbation à l'endroit où elle a été initialement appliquée.

Si l'intensité de la dérive est en dessous du seuil C/A, la perturbation s'étalera spatialement et envahira tout l'espace (Fig. 1.4 b). Dans ce cas, l'amplitude de la perturbation à l'endroit où elle a été initialement appliquée croîtra dans le temps, jusqu'à ce qu'une saturation intervienne; l'instabilité est dite absolue.

Lorsque l'intensité de la dérive dépasse le seuil C/A, la perturbation sera emmenée vers les extrémités du système et l'amplitude de la perturbation tendra vers zéro à l'endroit où elle a été appliquée (Fig. 1.4 c); l'instabilité est dite convective.

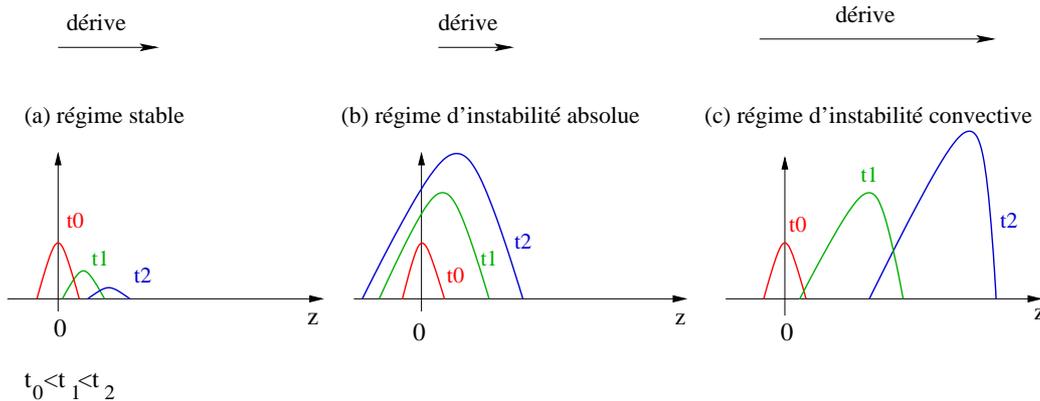


FIG. 1.4: Illustration des phénomènes d'instabilité convective et absolue. À t_0 , on perturbe le système au voisinage de $z = 0$. (a) Sous le seuil d'instabilité, la perturbation décroît. (b) Au delà du seuil, lorsque l'instabilité est absolue, la perturbation croît et remplit l'espace. (c) Au delà du seuil, lorsque l'instabilité est convective, la perturbation croît mais son amplitude tend vers zéro en $z = 0$.

1.1.3 Études expérimentales et théoriques

Les notions d'instabilité convective/absolue et de structures entretenues par du bruit ont été utilisées pour comprendre le comportement de systèmes très variés, comme en physique des plasmas [18], en hydrodynamique [14, 15, 16, 17, 26, 27, 28, 29, 30], en optique [12, 10, 13, 11, 31, 6] ou dans la formation d'embouteillages fantômes dans le flot de voitures sur autoroute [32]. Le comportement d'équations générales, comme l'équation de Kuramoto ou l'équation de Ginzburg-Landau avec dérive, a aussi été analysé dans ce

cadre d'étude [24, 33, 34, 27, 35].

Des études théoriques se sont intéressées à l'effet d'un couplage (couplage local, global) [36, 37, 38] et aux effets de bords [39, 40, 23] sur le seuil d'instabilité convective/absolue. D'autres études ont montré que ces comportements d'hyper-sensibilité au bruit [24, 41, 11] peuvent aussi être analysés en terme de non-orthogonalité des valeurs propres du système linéarisé [42, 43, 11, 31].

1.2 Laser à électrons libres sur anneau de stockage

1.2.1 Présentation du laser à électrons libres sur anneau de stockage

Un laser à électrons libres (LEL) est une source de lumière cohérente impulsionnelle. Le principe du LEL fut proposé en 1971 par J. Madey [44] et démontré expérimentalement en 1977 à Standford [45]. La particularité d'un LEL réside dans le fait que le milieu amplificateur, contrairement aux lasers dit "conventionnel"³, est constitué par un paquet d'électrons relativistes traversant une zone de champ magnétique périodique permanent, créée par un onduleur [46]. Les détails de l'interaction entre le paquet d'électrons et la lumière laser sont présentés en annexe. Le résultat de cette interaction est une amplification cohérente de la lumière (l'équivalent de l'émission stimulée dans les lasers traditionnels). Il existe plusieurs types de LEL, principalement sur accélérateur linéaire et sur anneau de stockage. Nous allons nous intéresser ici aux LEL en mode oscillateur, sur anneau de stockage⁴.

L'amplification cohérente du LEL provient de l'interaction dans le klystron optique entre l'impulsion laser dans la cavité et un paquet d'électrons relativistes en rotation dans un anneau de stockage (Fig. 1.5). Le rayonnement laser est stocké dans une cavité optique formée par deux miroirs sphériques, en mode oscillateur.

Un des principaux avantages du LEL réside dans le fait que la longueur d'onde du rayonnement laser est accordable. En effet, contrairement aux lasers traditionnels où la longueur d'onde est fixée par les niveaux d'énergies du milieu amplificateur, celle du LEL peut être ajustée de manière continue. Par exemple, le LEL du synchrotron Ultraviolet Synchrotron Orbital Radiation (UVSOR) au Japon, sur lequel les résultats expérimentaux ont été obtenus, peut émettre entre 590 et 200 nm [47].

³dont le milieu amplificateur est formé d'un ensemble d'atomes sous forme solide, liquide ou gazeuse

⁴des détails d'un anneau de stockage sont présentés au chapitre 3.

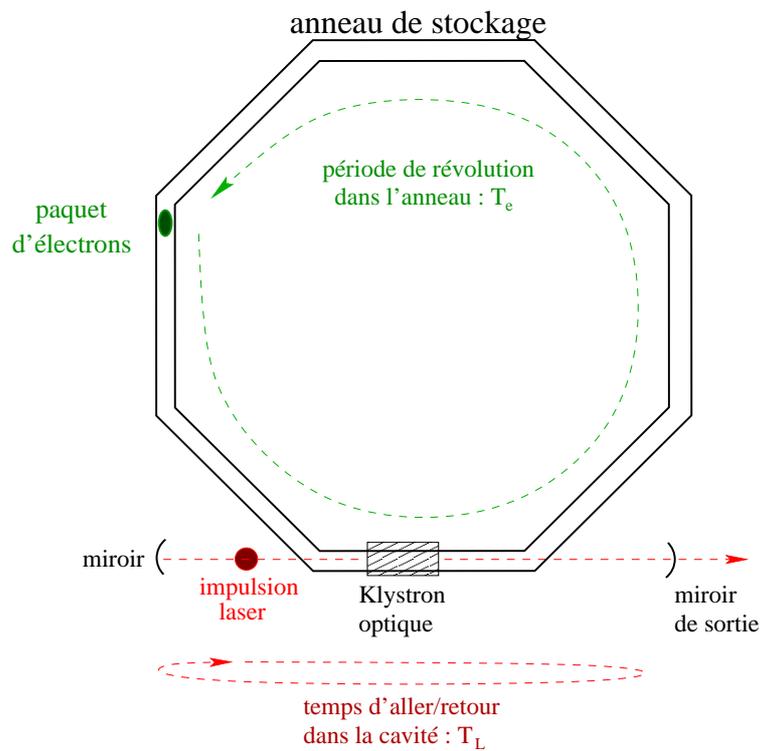


FIG. 1.5: Le gain des lasers à électrons libres provient de l'interaction dans un klystron optique entre une impulsion laser et un paquet d'électrons relativistes circulant dans un anneau de stockage. Le rayonnement laser est stocké dans une cavité optique formée par deux miroirs sphériques, en mode oscillateur.

1.2.2 Dynamique en fonction de la vitesse de dérive : données expérimentales

1.2.2.1 Origine de la dérive

Une dérive apparaît lorsqu'on désynchronise les fréquences associées au paquet d'électrons et à l'impulsion laser. Chacun de ces deux éléments a une période propre : le paquet d'électrons met un temps T_e pour faire le tour de l'anneau de stockage et l'impulsion laser met un temps T_L pour faire l'aller/retour dans la cavité (Fig. 1.5). Un désaccord entre ces deux périodes va décaler, à chaque tour, l'impulsion laser par rapport au paquet d'électrons. Autrement dit, dans le référentiel du paquet d'électrons, l'impulsion laser dérivera.

1.2.2.2 Zones du LEL

La figure 1.6 présente les différents régimes du LEL de UVSOR en fonction de la valeur de la dérive (d'après [48]). La valeur de la dérive est modifiée en augmentant ou en diminuant le temps de rotation des électrons dans l'anneau de stockage, techniquement en modifiant la fréquence RF de la cavité accélératrice⁵.

Ces images montrent que l'impulsion du LEL n'est stable que pour un décalage de fréquence Δ_{RF}/f_{RF} proche de zéro (Fig. 1.6 d). En augmentant ou diminuant légèrement le décalage en fréquence, le LEL passe dans un régime où l'intensité reste quasiment constante, et la structure des impulsions devient irrégulière (Fig. 1.6 c,e). Pour des valeurs de décalage supérieures, le LEL passe dans un régime dit pulsé (Fig. 1.6 b,f), caractérisé par d'importantes variations de l'intensité des impulsions à la centaine de Hertz. Pour des valeurs de décalage encore supérieures, l'intensité redevient en moyenne constante, et plus le décalage est important, plus l'intensité diminue. Dans ces zones, la structure des impulsions présentent des variations rapides (Fig. 1.6 a,g). Ces images montrent que la dérive a aussi pour effet de décaler la position centrale moyenne des impulsions : plus la dérive est forte, plus le décalage du centre de l'impulsion est loin par rapport à celui d'une dérive nulle.

On peut séparer le comportement du LEL en 5 zones, en fonction de l'intensité moyenne des impulsions (Fig. 1.6), avec une symétrie par rapport au zéro de la dérive (zone 3) :

- **zone 3** : caractérisée par une amplitude des impulsions constante ou très faiblement perturbée . La dérive y est nulle ou faible. Les impulsions sont régulières (Fig. 1.6 d) ou irrégulières (Fig. 1.6 c,e).
- **zones 2 et 4** : L'amplitude des impulsions est modulée (Fig. 1.6 b,f). Ce régime est dit pulsé.
- **zones 1 et 5** : Les variations sont très rapides, et en moyenne l'amplitude des impulsions est constante (Fig. 1.6 a,g).

À noter que la première explication de ces zones a été faite sur le LEL de super-ACO en France [49]. Enfin, l'intensité du spectre des impulsions a aussi été observée en temps

⁵Voir chapitre 3.

réel sur le LEL de super-ACO [6], et sur le LEL de UVSOR [50]. Nous observerons des spectres similaires dans la partie sur les résultats numériques (section 1.2.4).

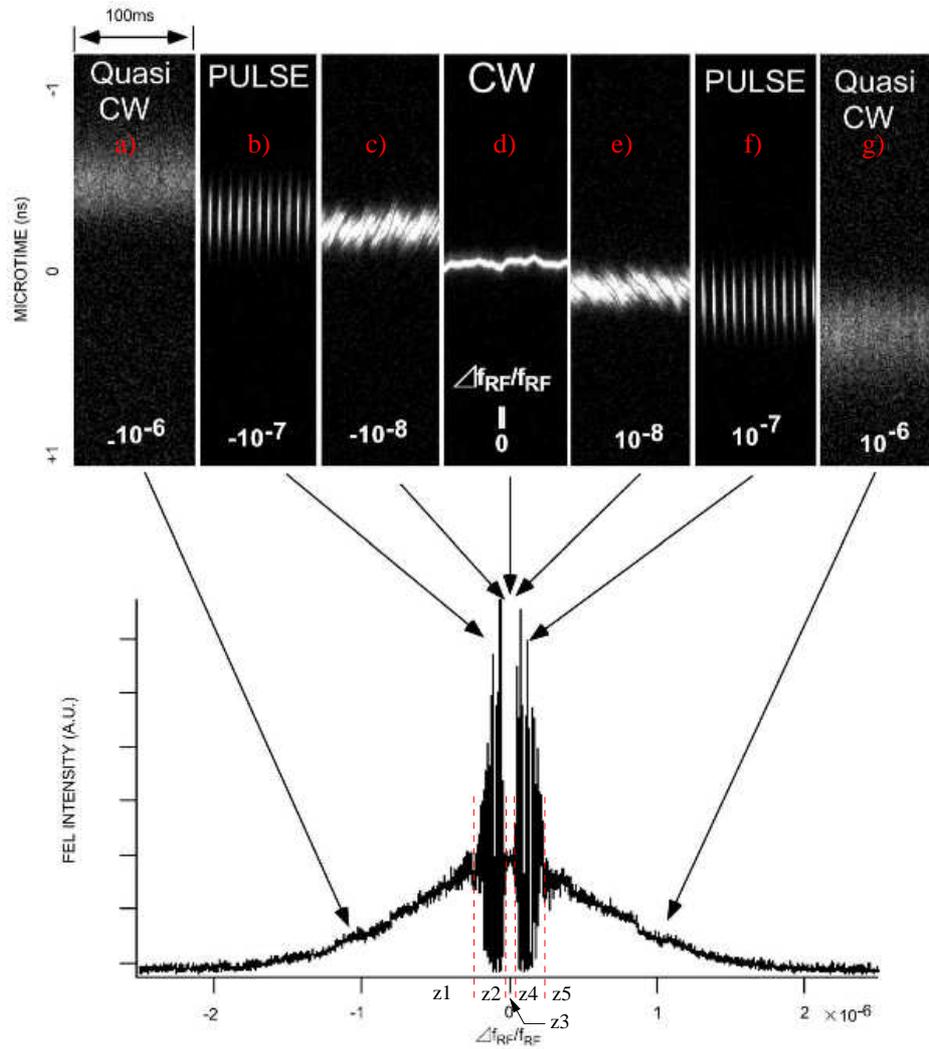


FIG. 1.6: Réponse du LEL UVSOR, en fonction du décalage RF. Les figures en haut montrent les structures temporelles mesurées par une caméra à balayage de fente, pour différentes valeurs de décalage RF $\Delta f_{RF}/f_{RF}$. La figure du bas montre la dépendance de l'intensité du LEL en fonction du décalage. La fréquence RF nominale était 90.10 MHz. La longueur d'onde du laser était de 520 nm et le courant de faisceau était ~ 20 mA/2-paquet. D'après [48].

1.2.3 Équation d'évolution de l'impulsion laser

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la modélisation des phénomènes observés expérimentalement. Pour ces études de dynamiques, une modélisation adaptée correspond à celle qui reproduit la dynamique longitudinale de l'impulsion laser [51, 52]. De la même manière que pour les lasers traditionnels impulsions [31, 53, 54], l'évolution de l'impulsion laser $e(z, t)$ est modélisée par une équation appelée équation maîtresse (*master equation*) décrivant l'évolution de l'impulsion entre deux tours de cavités successifs $e_n(\theta)$ et $e_{n+1}(\theta)$, $e_n(\theta)$ étant l'enveloppe complexe⁶ de l'impulsion au $n^{\text{ième}}$ tour, et θ la variable temporelle associée à la coordonnée longitudinale ($\theta = z/c$) (Fig. 1.7). Les séries $e_n(\theta)$ sont prises en synchronisation avec le passage du paquet d'électrons.

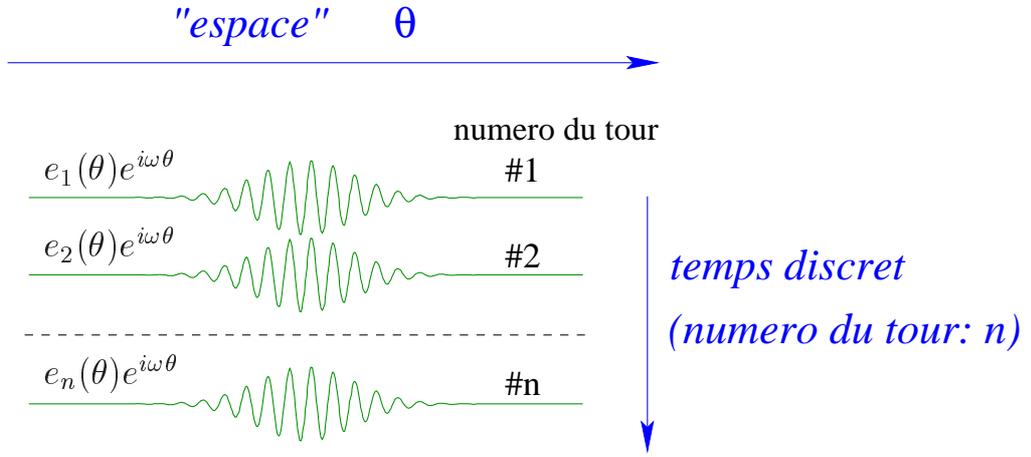


FIG. 1.7: Schéma des impulsions $e_n(\theta)e^{i\omega\theta}$, observées d'un tour sur l'autre de cavité. $e_n(\theta)$ est l'enveloppe de l'impulsion au tour numéro n ; ω est la pulsation optique du laser. L'hypothèse de variations lentes d'un tour sur l'autre de l'enveloppe $e_n(\theta)$ permet un passage en temps continu [53]. La variable étudiée devient $e(\theta, T)$.

En faisant l'hypothèse de variations faibles de l'enveloppe $e_n(\theta)$ d'un tour de cavité sur l'autre, on transforme le temps discret n en un temps "lent" continu T [53]. Ainsi, $e_n(\theta)$ devient $e(\theta, T)$. L'évolution de $e(\theta, T)$ est donnée par l'équation adimensionnée :

$$e_T(\theta, T) = -e - ve_\theta + Gf(\theta)(e + e_{\theta\theta}) + \sqrt{\eta}\xi(\theta, T) \quad (1.1)$$

Dans cette équation :

- T représente le temps lent associé aux tours de cavité. Il est exprimé en unité du temps de vie des photons dans la cavité τ_c (typiquement de l'ordre de la milliseconde).
- θ est le temps rapide, exprimé en unité de $t_u = \frac{\pi}{\sqrt{2\Delta\omega_g}}$ (de l'ordre du dixième de picoseconde). $\Delta\omega_g$ est la largeur du gain.
- v est le paramètre de dérive. Il exprime le décalage entre la période du passage du paquet d'électrons T_e et le temps d'aller/retour dans la cavité T_L : $v = \frac{T_L - T_e}{T_L} \frac{\tau_c}{t_u}$.
- L'effet de l'émission spontanée est pris en compte dans le terme de bruit blanc $\xi(\theta, T)$, avec $\langle \xi^*(\theta', t')\xi(\theta, t) \rangle = \delta(\theta - \theta')\delta(t - t')$. η représente le niveau de bruit.

⁶le module décrit l'enveloppe de l'impulsion, la phase décrit le déphasage par rapport à la fréquence optique.

La dynamique du gain dépend du type d'accélérateur et des éléments d'insertion. Une expression simple, pour les anneaux de stockage, peut être écrite, en unités adimensionnées [55, 9] :

$$f(\theta) = e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_b^2}} \quad (1.2)$$

$$G = \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(\sigma^2-1)}{2}} \quad (1.3)$$

$$\frac{d\sigma^2}{dT} = \frac{1}{T_s} \left(1 - \sigma^2 + \int_0^L |e(\theta, T)|^2 d\theta \right) \quad (1.4)$$

$f(\theta)$ modélise la forme longitudinale du paquet d'électrons, et σ_b est la longueur du paquet d'électrons en unité de temps t_u . L'équation (1.3) lie le gain G à la largeur RMS de la distribution d'énergie des électrons σ (normalisée à sa valeur sans émission laser). A est le gain maximum en unité des pertes de la cavité (le laser fonctionne si $A > 1$). L'équation (1.4) décrit à la fois le processus de relaxation de σ^2 , et le chauffage du paquet par le laser. Ce dernier élément joue le rôle de saturation. Le temps de relaxation T_s est égal au temps d'amortissement synchrotron en unité du temps de vie des photons dans la cavité ($T_s \gg 1$). Enfin, L est le temps d'aller/retour dans la cavité en unité de t_u .

Pour les simulations numériques, nous avons pris des valeurs de paramètres proches des conditions d'utilisation de l'anneau de stockage UVSOR-II : $T_s = 263$, $A = 2.17$, $\sigma_b = 900$, $t_u = 100$ fs, $\tau_c = 20$ ms. Ces valeurs de paramètres correspondent à une période de rotation des électrons dans l'anneau de 88.7 ns, à un temps d'amortissement synchrotron $\tau_s = 20$ ms, à un courant proche de 30 mA, une largeur spectrale $\Delta\lambda = 4.2$ nm, centrée sur 417 nm et à un coefficient de réflexion du miroir de sortie $R = 99.58\%$. Le niveau de bruit n'étant pas facilement mesurable, on prendra $\eta = 10^{-20}$ ⁷.

⁷valeur prise à partir de résultats de simulations numériques présentées au chapitre 2

1.2.4 Dynamique en fonction de la dérive : données numériques

Les résultats de l'intégration numérique des équations (1.1) à (1.4) vont être présentés.

1.2.4.1 "Énergie" maximale des impulsions en fonction du paramètre de dérive v

La figure 1.8 représente "l'énergie" maximale A_{\max} des impulsions en fonction du paramètre de dérive v ($A_{\max} = \max_T \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |e(\theta, T)|^2 d\theta \right]$). Ce résultat est à rapprocher de l'expérience dans laquelle l'intensité des impulsions laser est enregistrée avec une photodiode (Fig. 1.6).

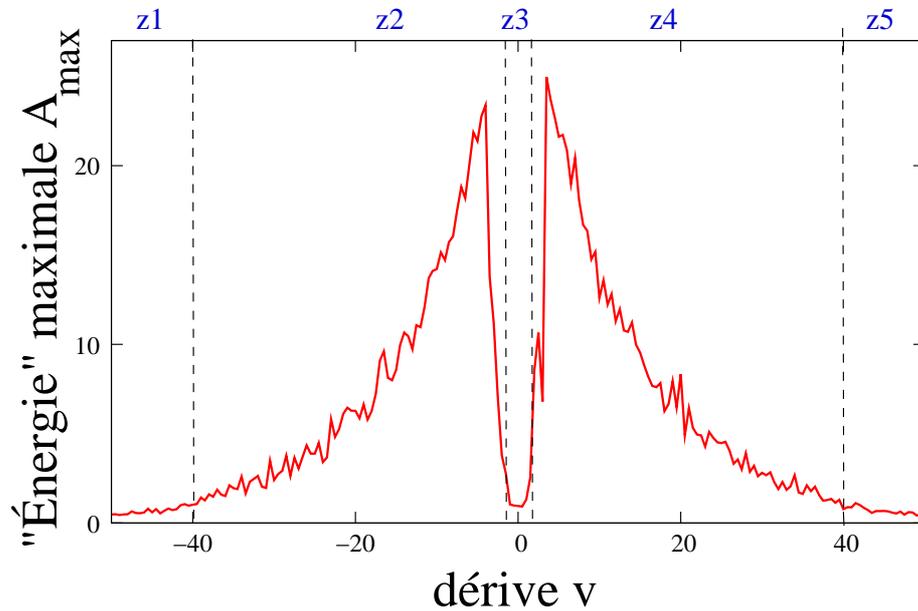


FIG. 1.8: "Énergie" maximale A_{\max} des impulsions en fonction du paramètre de dérive v , avec $A_{\max} = \max_T \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |e(\theta, T)|^2 d\theta \right]$. Comme la figure expérimentale (Fig. 1.6), cette image peut être décomposée en cinq zones. Paramètres : $T_s = 263$, $A = 2.17$, $\sigma_b = 900$, $\eta = 10^{-20}$.

1.2.4.2 Diagrammes spatio-temporels et spectro-temporels des impulsions lasers

La figure 1.9 présente en détail l'évolution de $e(\theta, T)$ et de son spectre $\tilde{e}(k, T)$. Ces résultats sont à rapprocher des figures obtenues expérimentalement avec la caméra à balayage de fente (Fig. 1.6).

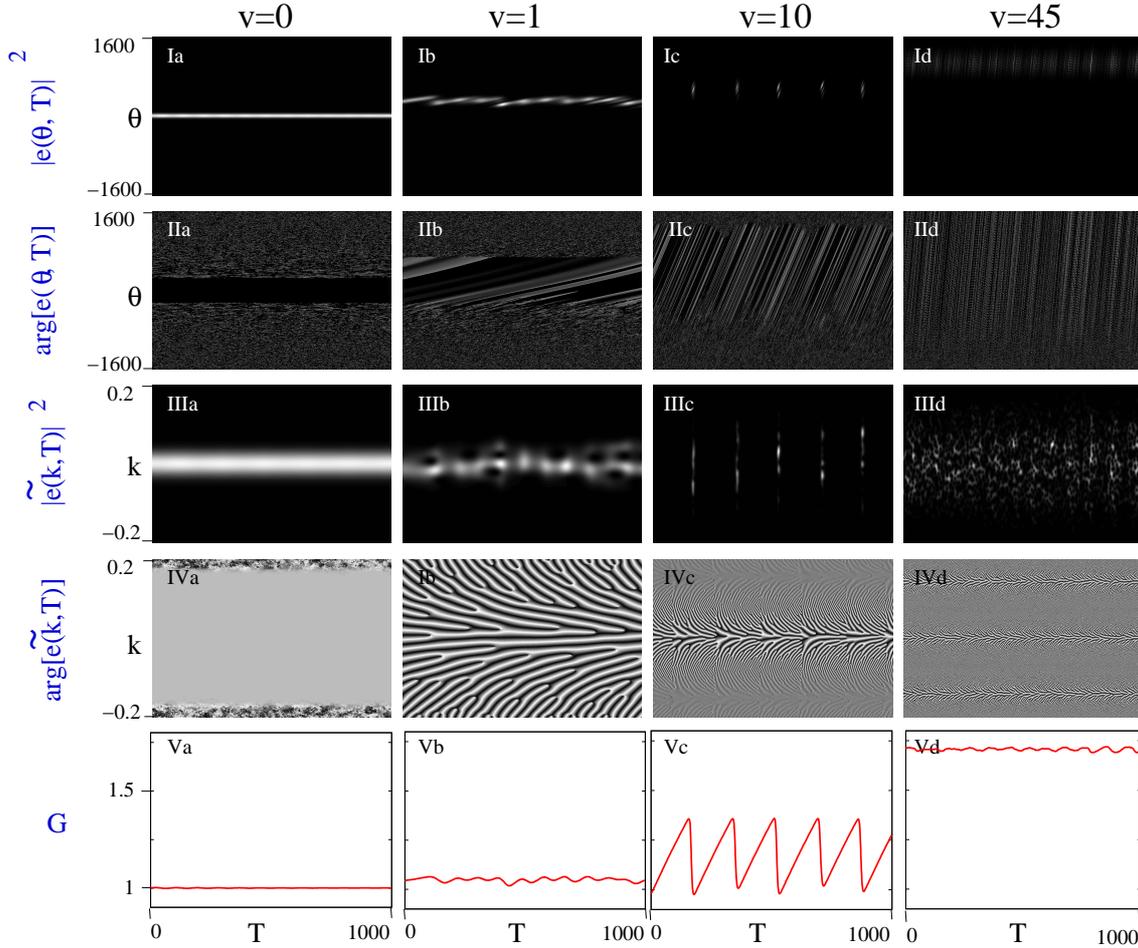


FIG. 1.9: Ligne I et II : diagrammes spatio-temporels de l'intensité $|e(\theta, t)|^2$ et de son argument $\arg[e(\theta, t)]$, ligne III et IV : diagrammes spectro-temporels du spectre : module $|\tilde{e}(k, t)|^2$ et argument $\arg[\tilde{e}(k, t)]$, ligne V : gain G . Colonnes : différents régimes du LEL associés aux valeurs de dérive : $v = 0, 1, 10, 45$. Paramètres : $T_s = 263$, $A = 2.17$, $\sigma_b = 900$, $\eta = 1e^{-20}$.

Ces résultats numériques montrent que la modélisation du LEL reproduit les comportements observés expérimentalement. De plus, nous voyons que l'intensité des spectres des impulsions ($|\tilde{e}(k, t)|^2$) présentent des structures sous forme de trous ; ces structures ont aussi été observées expérimentalement [6].

Ces simulations permettent aussi de visualiser certaines informations inaccessibles expérimentalement comme l'évolution du gain, de la phase de $e(\theta, T)$ et de $\tilde{e}(k, T)$ (ligne II et IV). Ainsi, ces résultats montrent que le gain est modulé lorsque le régime est pulsé (Fig. 1.9 Vc), et aussi que les trous dans le module du spectre $|\tilde{e}(k, T)|^2$ sont liés à des singularités de phase dans l'argument du spectre $\arg[\tilde{e}(k, T)]$ (Fig. 1.10).

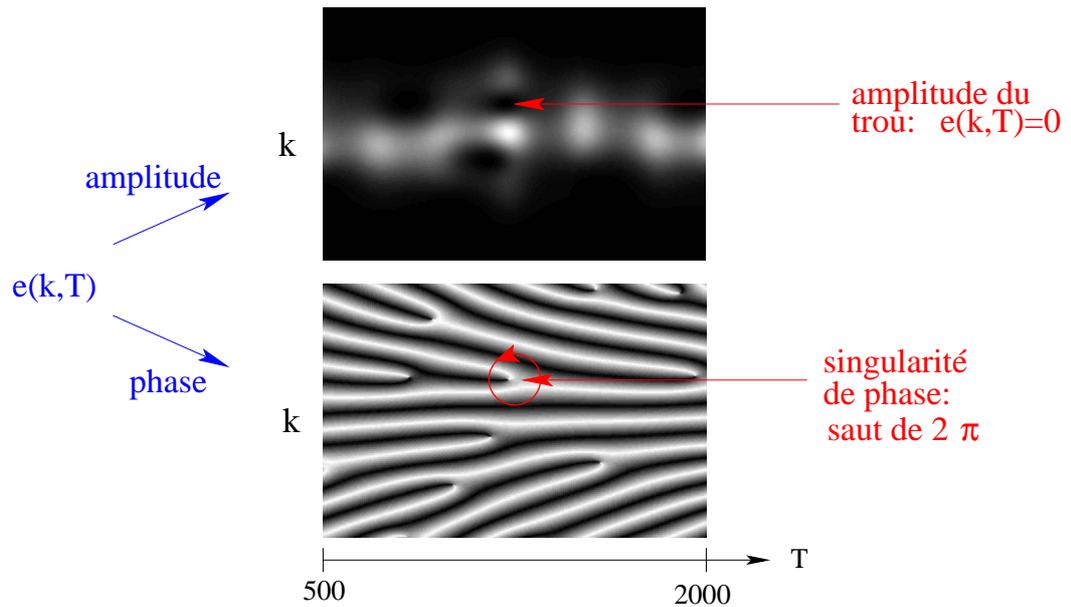


FIG. 1.10: Diagrammes spectro-temporels de $|\tilde{e}(k, T)|^2$ et $\arg[\tilde{e}(k, T)]$. Les trous dans le spectre $|\tilde{e}(k, T)|^2 = 0$ sont associés à une singularité de phase. Paramètres : $v = 1, T_s = 263, A = 2.17, \sigma_b = 900, \eta = 10^{-20}$. Ces images sont des détails des figures IIIb et IVb de la figure 1.9.

1.2.4.3 Méthode d'intégration

La méthode d'intégration consiste à discrétiser l'espace θ et à "ranger" les valeurs de $e(\theta, T)$ (pour un T fixé) dans un tableau. À partir de ce tableau, les dérivées spatiales sont calculées, et l'équation est intégrée dans le temps grâce à une méthode de Runge-Kutta stochastique [56]. Nous utilisons deux méthodes pour calculer les dérivées spatiales. Une méthode pseudo-spectrale pour l'intégration du système avec bruit, et une méthode des différences finies pour l'intégration des équations sans bruit ($\eta = 0$)⁸.

⁸Des détails sur ces méthodes sont présentés en annexe.

1.3 Équation de Ginzburg-Landau

Une des forces de la dynamique non linéaire est sa capacité à s'abstraire des détails d'un système particulier, pour généraliser grâce à une seule et même équation des comportements se retrouvant dans des domaines de la physique très différents (hydrodynamique, optique ou physique des plasmas par exemple). L'idée étant qu'au voisinage d'une bifurcation, les détails propres à un système physique ne sont pas prédominants. Dans cette perspective, nous allons voir dans cette section qu'une équation appartenant à la famille des équations de Ginzburg-Landau possède un comportement se rapprochant de celui du laser à électrons libres [6]. Un autre point important est que le sujet d'étude va être élargi. En effet, nous allons à la fois travailler sur une équation avec un *couplage global*, comme c'est le cas du LEL [Eq. (1.4)] et aussi sur une équation à *couplage local*, décrivant par exemple des systèmes hydrodynamiques [57].

Avant de nous focaliser sur l'équation avec dérive, regardons brièvement l'histoire et les applications de cette équation qui est une des équations spatio-temporelle les plus étudiées [57]. Elle doit son nom aux Russes Lev Landau et Vitaly Ginzburg, tous deux prix nobel de physique respectivement en 1962 et 2003. En 1950, à partir d'arguments thermodynamiques, ils développèrent une théorie, dites théorie de Ginzburg-Landau, pour modéliser la transition de phase de la supraconductivité dans des matériaux [58]. Une forme voisine de cette équation, avec toutefois une dépendance temporelle, a été retrouvée par Newell et Whitehead en 1969 dans le cadre de la convection entre deux fluides près du seuil d'instabilité [59]. Cela a donné l'équation de Ginzburg-Landau réelle (appelée ainsi car les coefficients sont réels). L'équation complexe (à coefficients complexes) a pour sa part été dérivée pour la première fois par Stewartson et Stuart en 1971 sur les flots de Poiseuille [60]. Cette famille d'équations est omniprésente en dynamique non linéaire, car elle permet de modéliser de nombreux systèmes au seuil d'une bifurcation [57].

Pour étudier de manière générale les systèmes soumis à une dérive, nous utiliserons l'équation de Ginzburg-Landau avec des coefficients réels, et par rapport à sa forme habituellement utilisée [57] nous introduisons une localisation de la solution (variation lente dans l'espace) et une dérive [6] :

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial e(z, t)}{\partial z} + Rg(\epsilon z)e(z, t) + \frac{\partial^2 e(z, t)}{\partial z^2} - Se(z, t) + \sqrt{\eta}\xi(z, t) \quad (1.5)$$

- v est l'intensité de la dérive.
- R est l'amplitude du gain et $g(\epsilon z)$ est une variation lente dans l'espace qui a pour effet de localiser la solution. Pour la suite nous prendrons comme dépendance spatiale : $g = 1 - (\epsilon z)$.
- S est un terme de saturation qu'on prend local $S = |e(z, t)|^2$, ou global $S = \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^2 dz$.
- η est l'amplitude du bruit et ξ est un terme de bruit blanc non corrélé : $\langle \xi^*(z', t')\xi(z, t) \rangle = \delta(z - z')\delta(t - t')$.

L'amplitude de $e(z, t)$ est normalisée pour que le coefficient de la saturation soit égal à 1. L'unité d'espace z est choisie de façon à ce que le coefficient de diffusion soit aussi égal à 1.

Nous allons d'abord étudier l'équation avec une saturation locale, puis celle avec une saturation globale.

1.3.1 Équation de Ginzburg-Landau à saturation locale

L'équation avec saturation locale est :

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial e}{\partial z} + R(1 - (\epsilon z)^2) e + \frac{\partial^2 e(z, t)}{\partial z^2} - |e|^2 e + \sqrt{\eta} \xi(z, t) \quad (1.6)$$

1.3.1.1 Diagrammes spatio-temporels et spectro-temporels des impulsions

L'évolution des solutions de cette équation en fonction du paramètre de dérive v est présentée figure 1.11.

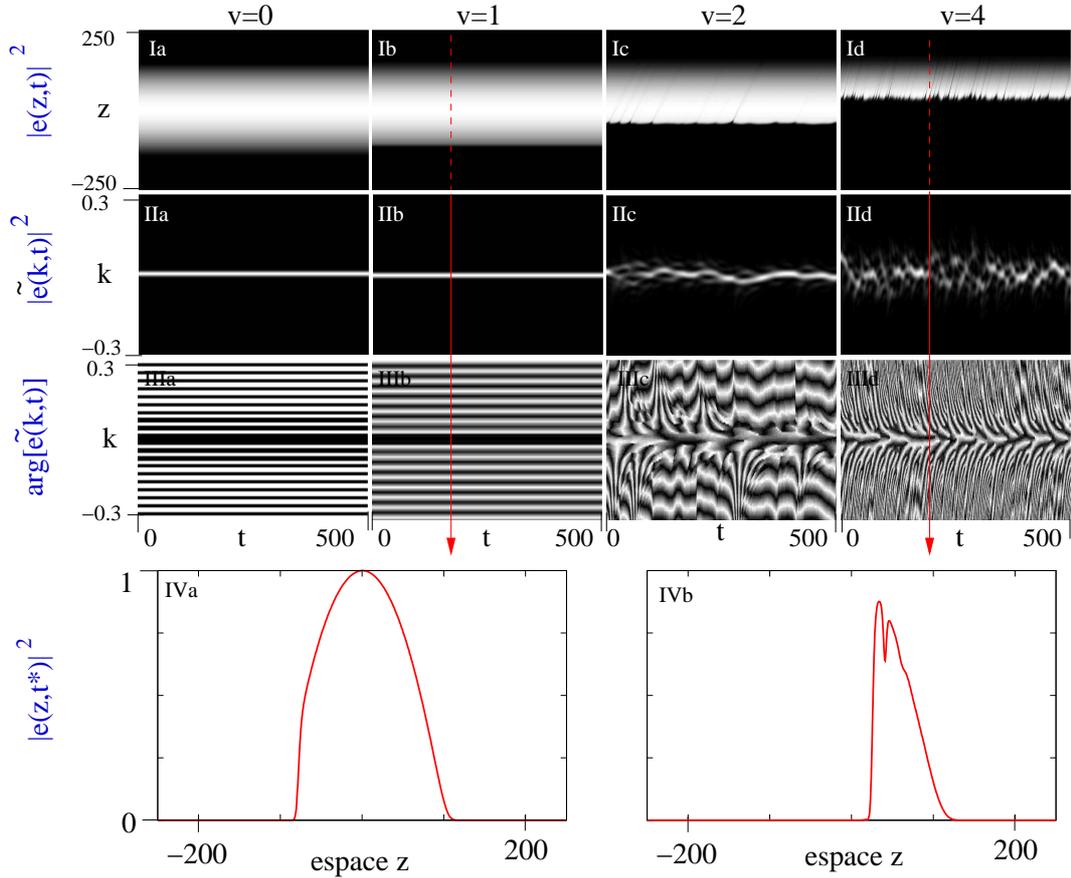


FIG. 1.11: Ligne I : diagrammes spatio-temporels du module $|e(\theta, t)|^2$. Ligne II et III : diagrammes spectro-temporels, module $|\tilde{e}(k, t)|^2$ et argument $\arg[\tilde{e}(k, t)]$. Les valeurs de la dérive sont $v = 0, 1, 2, 4$ (colonne a, b, c, d). Paramètres : $R = 1, \epsilon = 10^{-2}, \eta = 10^{-20}$. Ligne IV : $|e(z, t)|^2$ pour un t fixé avec $v = 1$ (a) et $v = 4$ (b). Il faut noter que les informations sur la phase ($\arg[\tilde{e}(k, t)]$) ne sont pertinentes que dans les domaines où le module associé ($|\tilde{e}(k, t)|^2$) n'est pas infiniment petit, en particulier les lignes noires et blanches sur les images IIIa et IIIb n'ont pas de signification physique.

Nous voyons sur ces figures qu'une dérive importante rend le système instable et que les structures obtenues présentent des ressemblances avec celles du LEL (trous dans le spectre et singularités de phase dans son argument) [6]. Par contre contrairement à ce dernier, il n'y apparaît pas de régime où l'amplitude des solutions varie très fortement (zone 2 et 4 de la figure 1.8).

1.3.1.2 Structures entretenues par du bruit, excès de gain, croissance transitoire

Jusqu'à présent, que ce soit pour le laser à électrons libres ou pour l'équation de Ginzburg-Landau, nous nous sommes limités à observer l'évolution des solutions en fonction du paramètre de dérive. Nous allons maintenant nous intéresser à l'origine de ces phénomènes.

Les simulations numériques avec un niveau de bruit nul ($\eta = 0$) nous indiquent que l'équation de Ginzburg-Landau locale possède une solution stationnaire stable quelque soit la valeur de la dérive [24] :

- soit une solution qui remplit quasiment tout l'espace où il y a du gain lorsque la dérive est faible (Fig. 1.12 a),
- soit la solution uniforme d'amplitude nulle partout $e(z, t) = 0$ lorsque la dérive est forte (Fig. 1.12 b). Nous voyons sur cette figure qu'après avoir été perturbé, le système revient à sa position d'équilibre.

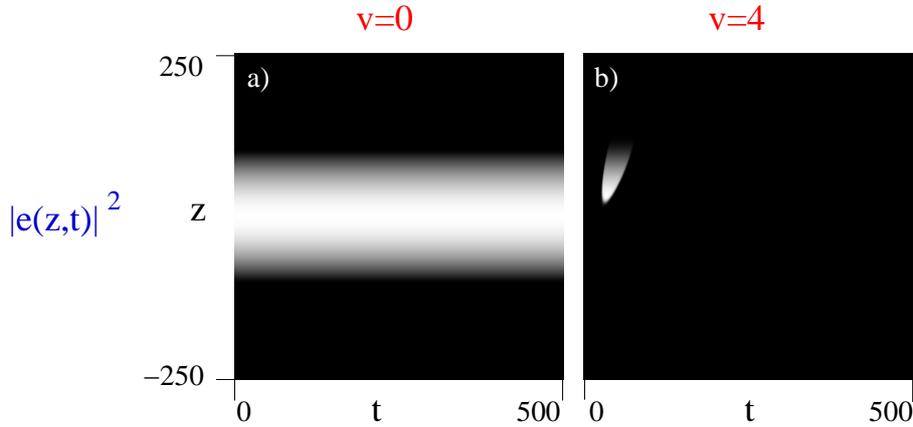


FIG. 1.12: Évolution du module de $e(z, t)$ dans le système sans bruit, pour deux valeurs de la dérive : $v = 0$ et $v = 4$. Dans ces deux cas, il existe une solution stationnaire stable. Pour $v = 0$, la solution stationnaire remplit quasiment tout l'espace avec du gain. Pour $v = 4$, la solution stable est la solution uniforme $e(z, t) = 0$. Pour $v = 4$, on voit l'évolution d'une perturbation placée à $t = 0$, en $z = -95$.

Ainsi, les structures observées précédemment (colonnes *c* et *d* de la figure 1.11) sont des structures entretenues par du bruit (*noise sustained structures*) [23, 15, 24] : lorsqu'il n'y a pas de bruit, il n'y a pas d'instabilités. Et lorsqu'il y a du bruit, la solution stationnaire stable $e(z, t) = 0$ n'est pas observée en pratique.

L'importance du bruit provient d'un excès de gain [11]. Il y a un excès de gain dans le système car il n'y a pas de perte due à la saturation, puisque la solution stable est la solution

uniforme d'amplitude nulle ($e(z, t) = 0$) (Fig. 1.13). Une perturbation en amont va pouvoir, tout en dérivant "utiliser" cet excès de gain et devenir macroscopique⁹. Ce processus, appelé croissance transitoire (*transient growth*) [11, 30], est illustré sur la figure 1.12 (b). À $t = 0$, en $z = -95$ nous avons perturbé le système en appliquant une perturbation d'amplitude $\sqrt{\eta} = 10^{-10}$. Rapidement l'amplitude de la solution atteint une valeur de l'ordre de l'unité et l'amplification devient limitée par la saturation. Finalement, lorsque la perturbation arrive sur les bords du système (zone où les pertes sont très grandes), son amplitude décroît. Comme du bruit est présent en permanence, ce scénario se répète à l'infini et forme les structures qui ont été observées précédemment (Fig. 1.11, colonnes c et d).

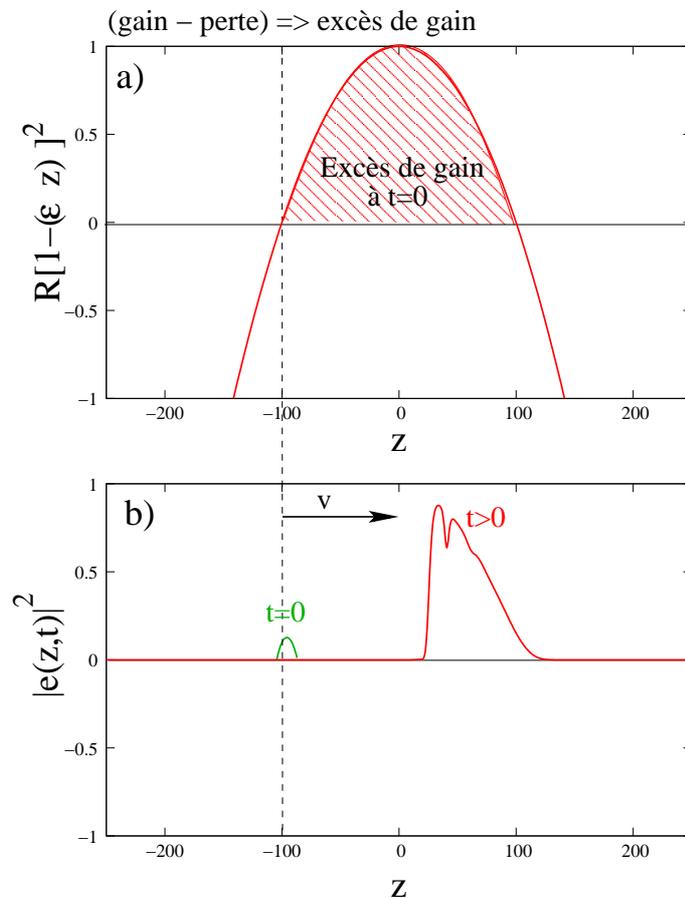


FIG. 1.13: a) $R(1 - (\epsilon z)^2)$ représente le gain du système lorsque la seule solution stable est la solution uniforme $e(z, t) = 0$. (b) Une perturbation placée en $t = 0$ en amont va être amplifiée en dérivant. La solution à $t = 0$ a été prise de manière schématique. La solution pour $t > 0$ est celle de la figure 1.12 IV b. Paramètres : $R = 1$, $\epsilon = 0.01$.

⁹Dans le système linéarisé et sans diffusion, le coefficient d'amplification entre $z = -\frac{1}{\epsilon}$ et $z = \frac{1}{\epsilon}$ est de $e^{\frac{2R}{v\epsilon}}$ ($\simeq 5 \cdot 10^{21}$ avec les paramètres utilisés précédemment).

1.3.1.3 Corrélation entre “l'énergie” de la solution stationnaire et le niveau d'irrégularité

La figure 1.14 met en évidence une corrélation entre “l'énergie” A de la solution stationnaire stable ($A = \int_{-\infty}^{\infty} |e(z,t)|^2 dz$), et le niveau d'irrégularité dans le système avec bruit. Pour mesurer quantitativement les irrégularités, on utilise l'expression suivante :

$$N = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} |e(z,t)|^4 - \langle |e(z,t)|^2 \rangle^2 dz \right\rangle \quad (1.7)$$

Les crochets indiquent une moyenne temporelle. Cette expression mesure la moyenne des écarts de la solution $|e(z,t)|^2$ par rapport à la valeur moyenne $\langle |e(z,t)|^2 \rangle$. Si le système est stable, $e(z,t) = \langle e(z,t) \rangle$ et $N^2 = 0$. Si le système est instable la valeur de N^2 est différente de zéro. Nous voyons sur cette figure que l'apparition de fluctuations importantes coïncide avec la diminution de “l'énergie” de la solution stable.

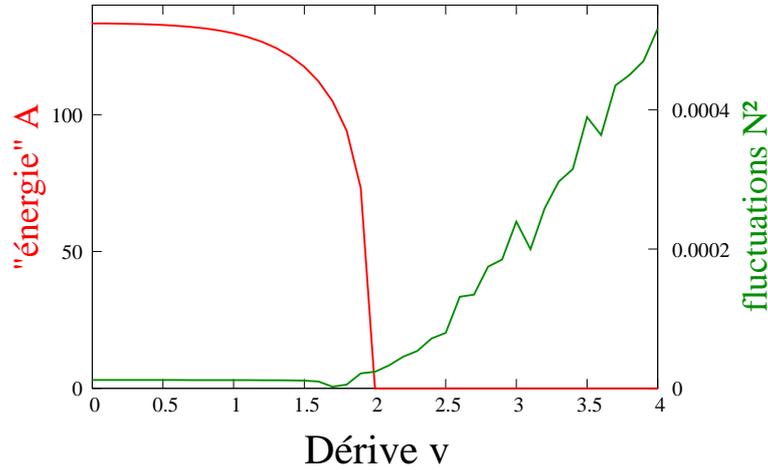


FIG. 1.14: “Énergie” A de la solution stationnaire stable. $A = \int_{-\infty}^{\infty} |e(z,t)|^2 dz$ et mesure des irrégularités dans le système avec bruit $N = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} |e(z,t)|^4 - \langle |e(z,t)|^2 \rangle^2 dz \right\rangle$, en fonction du paramètre de dérive.

1.3.2 Équation de Ginzburg-Landau à saturation globale

Nous allons refaire la même étude avec l'équation à saturation globale :

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial e}{\partial z} + R(1 - (\epsilon z)^2) e + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} - e \int_{-\infty}^{\infty} |e|^2 dz + \sqrt{\eta} \xi \quad (1.8)$$

1.3.2.1 Diagrammes spatio-temporels et spectro-temporels des impulsions

L'évolution des solutions de cette équation en fonction du paramètre de dérive v est présentée figure 1.15. De même que pour le laser à électrons libres et que pour l'équation de Ginzburg-Landau à couplage local, nous voyons qu'une dérive importante rend le comportement du système turbulent. Les structures obtenues présentent des ressemblances avec celles des deux autres systèmes (trous dans le spectre et singularités de phase dans son argument), et contrairement au LEL, il n'y a pas de régime pulsé (zone 2 et 4 de la figure 1.8).

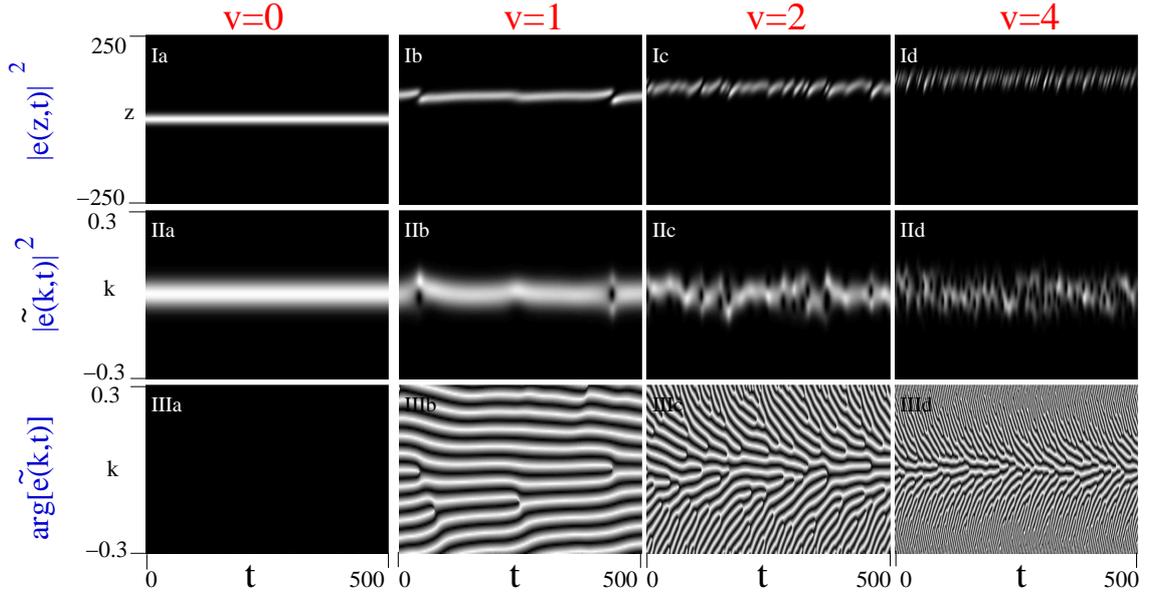


FIG. 1.15: Ligne I : diagrammes spatio-temporels du module $|e(\theta, t)|^2$. Ligne II et III : diagrammes spectro-temporels, module $|\tilde{e}(k, t)|^2$ et argument $\arg[\tilde{e}(k, t)]$. Les valeurs de la dérive sont $v = 0, 1, 2, 4$ (colonne a, b, c, d). Paramètres : $R = 1, \epsilon = 10^{-2}, \eta = 10^{-20}$.

1.3.2.2 Absence de corrélation entre “l'énergie” de la solution stationnaire et le niveau d'irrégularité

Les valeurs de N^2 et de A en fonction de la dérive sont présentées sur la figure 1.16. Nous observons un comportement similaire au cas du couplage local, avec toutefois une différence notable : les instabilités apparaissent avant que la solution stationnaire ne soit la solution uniforme nulle. Cet écart est observé de manière récurrente et le désaccord peut devenir très important pour certaines valeurs de paramètres. Ce désaccord s'explique

par le fait que “l’énergie” A de la solution stationnaire du couplage global diminue plus rapidement que celle du couplage local, donc l’excès de gain apparaît plus rapidement [11].

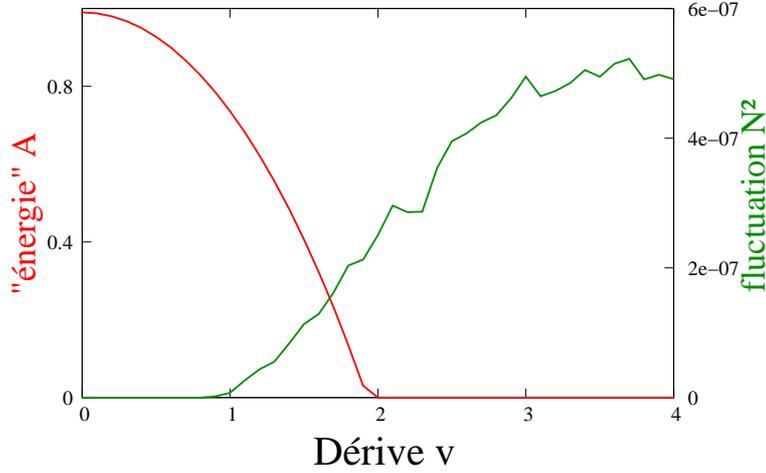


FIG. 1.16: “Énergie” A de la solution stationnaire stable $A = \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^2 dz$ et mesure des irrégularités dans le système avec bruit $N = \langle \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^4 - \langle |e(z, t)|^2 \rangle^2 dz \rangle$, en fonction du paramètre de dérive.

Dans le cas d’un couplage global, il est possible de connaître la solution analytique de la solution stationnaire stable $e_s(z)$, c’est une gaussienne décalée qui s’écrit [31] :

$$e_s(z) = ae^{-\left(\frac{z-b}{c}\right)^2} \quad (1.9)$$

$$\text{avec } b = \frac{vc^2}{4}, \quad c = \sqrt[4]{\frac{4}{R\epsilon^2}} \quad (1.10)$$

$$\text{et } a \text{ solution de } : a^2 c \sqrt{\frac{\pi}{2}} = R + \frac{4b^2}{c^4} - \frac{2}{c^2} \quad (1.11)$$

1.3.3 Lien avec le laser à électrons libres

Grâce aux études précédentes, il est possible d’expliquer qualitativement les ressemblances et les différences entre la dynamique de l’équation de Ginzburg-Landau et celle du LEL. Tout d’abord, nous voyons sur l’équation d’évolution du gain (réécrite équation (1.12)) que le LEL est un système à couplage global. La principale différence est que l’évolution du gain est déterminée par une équation différentielle de temps caractéristique T_s . Ainsi, lorsque le gain est constant ou quasiment constant (zones 1, 3 et 5, Fig. 1.8), le comportement du LEL est proche du comportement décrit par l’équation de Ginzburg-Landau avec couplage global. Lorsque le gain n’est pas constant (zone 2 et 4), l’analogie n’est plus possible. Des études théoriques avec un autre type de modélisation du LEL ont montré que le passage de la zone centrale du LEL (zone 3) à une zone pulsée (zone 2 ou zone 4) suit une bifurcation de Hopf [1].

$$G = \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(\sigma^2-1)}{2}} \quad (1.12)$$

$$\frac{d\sigma^2}{dT} = \frac{1}{T_s} (1 - \sigma^2 + \overbrace{\int_0^L |e(\theta, T)|^2 d\theta}^{\text{couplage global}}) \quad (1.13)$$

1.3.4 Instabilité convective et instabilité absolue : étude analytique

Nous avons vu en introduction qu'il existe un critère pour prédire si un système va être sensible au bruit. C'est le critère convectif/absolu, introduit par P.A. Sturrock en 1958 à propos de "la distinction entre des ondes amplifiées et des ondes évanescentes" [25, 61]. Nous allons d'abord énoncer sa définition, puis étudier son application à l'équation de Ginzburg-Landau dans le but d'obtenir une expression analytique du seuil d'instabilité [43, 24].

1.3.4.1 Définition

Le critère d'instabilité convective/absolue est basé sur une analyse de stabilité locale de la solution $e(z, t) = 0$, dans le système pris spatialement infini. Dans le système linéarisé autour de la solution $e(z, t) = 0$, si la réponse à une perturbation localisée (fonction de Green) décroît asymptotiquement dans n'importe quel référentiel, le système est dit linéairement stable. Si ce n'est pas le cas, il est dit linéairement instable. Il est convectivement instable si la perturbation finit par décroître à un endroit fixe (Fig. 1.17 c) et absolument instable si à n'importe quel endroit la réponse croît dans le temps (Fig. 1.17 a) [61].

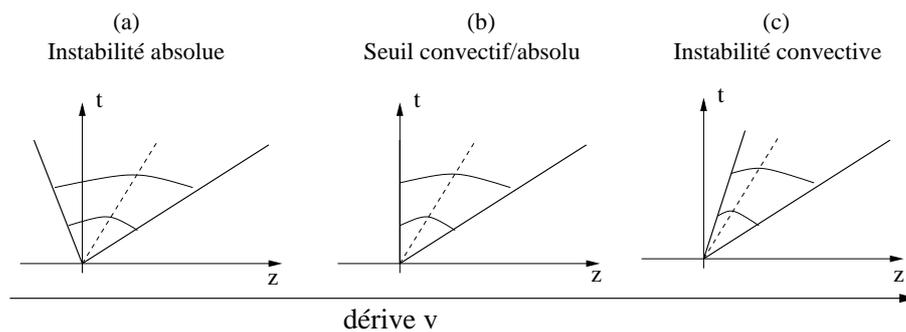


FIG. 1.17: Illustration de la réponse à une perturbation en $z = 0$ et en $t = 0$ dans les différentes situations : (a) instabilité absolue, (c) instabilité convective, et un cas critique (b) marquant le changements de régime. Le paquet d'onde est symbolisé par une enveloppe gaussienne.

1.3.4.2 Seuil convectif/absolu de l'équation de Ginzburg-Landau

Dans le système linéarisé et sans bruit [43, 24] :

$$\partial_t e(z, t) = -v\partial_z e + Re + \partial_{zz} e \quad (1.14)$$

La méthode consiste à appliquer à la solution uniforme $e(z, t) = 0$ une perturbation sous forme d'une impulsion de Dirac $e(z = z^*, t = 0) = \delta(z - z^*, t)$, et de calculer la réponse du système à l'endroit où a été appliquée la perturbation, c'est à dire en $z = z^*$. Dans la suite, on prendra, sans perte de généralité, $z^* = 0$.

La méthode consiste à passer dans l'espace réciproque en z :

$$\partial_t \tilde{e}(k, t) = -ikv\tilde{e} + R\tilde{e} - k^2\tilde{e} \quad (1.15)$$

$$\tilde{e}(k, t) = \tilde{e}(k, t = 0)e^{(-ikv + R - k^2)t} \quad (1.16)$$

$$= 2\pi e^{(-ikv + R - k^2)t} \quad (1.17)$$

puis de repasser dans l'espace direct :

$$e(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ikv + R - k^2)t} e^{ikz} dk \quad (1.18)$$

$$e(z = 0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ikv + R - k^2)t} dk \quad (1.19)$$

$$e(z = 0, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{\frac{v^2 - 4R}{4}t} \quad (1.20)$$

Finalement, le seuil d'instabilité convective/absolue est [43, 24] :

$$\boxed{v^2 = 4R} \quad (1.21)$$

- si $v^2 > 4R$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(z = 0, t) = 0$: le régime est linéairement convectif.
- si $v^2 < 4R$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(z = 0, t) = \infty$: le régime est linéairement absolu.

L'équation (1.21) montre que le seuil convectif/absolu dépend du paramètre de dérive v , du gain R et aussi du coefficient de diffusion, qui n'apparaît pas explicitement puisque la variable spatiale z est en unité du coefficient de diffusion. L'expression du seuil met en évidence que les effets de la diffusion et du gain s'opposent à l'effet de la dérive.

Ce seuil a été obtenu dans le cas d'une analyse locale de la stabilité linéaire de la solution $e(z, t) = 0$. Nous allons maintenant utiliser les simulations numériques pour observer comment se comporte le système par rapport à ce seuil, dans les cas avec et sans bruit. Sur les courbes précédentes présentant N^2 et "l'énergie" de la solution stationnaire A , le

seuil convectif/absolu a été superposé (Fig. 1.18 et Fig. 1.19).

Dans le système sans bruit, ces deux figures montrent que avant le seuil ($v > 2$), la solution $e(z, t) = 0$ est la solution stationnaire stable. Une fois le seuil dépassé ($v < 2$), le système converge vers une solution stationnaire d'amplitude non nulle.

Dans le cas d'un couplage local, la transition entre un régime calme et turbulent dans le système avec bruit coïncide avec l'apparition d'une "énergie" non nulle de la solution stationnaire (Fig. 1.18, Fig. 1.14). De ce fait le seuil convectif/absolu est un bon critère pour caractériser la transition entre un régime calme ou turbulent [43]. En revanche, ce n'est pas le cas pour un couplage global.

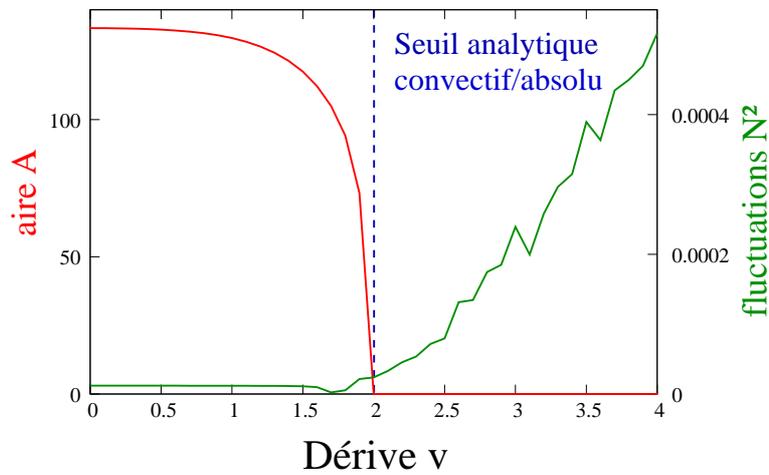


FIG. 1.18: Couplage local. Aire de la solution stationnaire sans bruit $A = \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^2 dz$, mesure des irrégularités dans le système avec bruit $N = \langle \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^4 - \langle |e(z, t)|^2 \rangle^2 dz \rangle$ et seuil convectif/absolu

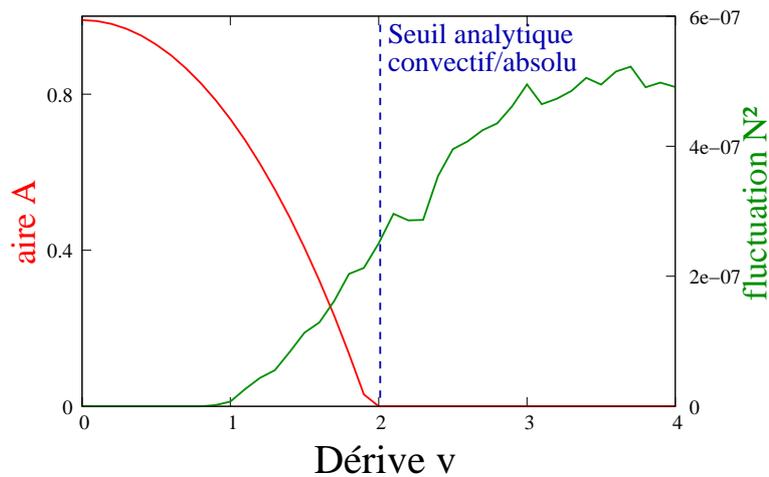


FIG. 1.19: Couplage global. Aire de la solution stationnaire sans bruit $A = \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^2 dz$, mesure des irrégularités dans le système avec bruit $N = \langle \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^4 - \langle |e(z, t)|^2 \rangle^2 dz \rangle$ et seuil convectif/absolu

1.3.4.3 Couplage global : lien entre le seuil convectif/absolu et la bifurcation de la solution stationnaire

Pour un couplage global, une expression analytique de la solution stationnaire non nulle existe [31]. Cette expression va nous permettre de montrer analytiquement le lien entre le seuil convectif/absolu et l'apparition d'une solution stationnaire d'amplitude non nulle. Cette étude est complémentaire de l'étude du seuil convectif/absolu, puisque dans celle-ci nous avons étudié les caractéristiques de la solution stationnaire uniforme $e(z, t) = 0$, et maintenant nous allons étudier les caractéristiques de la solution stationnaire d'amplitude non nulle.

La gaussienne décalée $ae^{-(\frac{z-b}{c})^2}$ est une solution de l'équation de Ginzburg-Landau avec couplage global [31] avec :

$$b = \frac{vc^2}{4} \quad (1.22)$$

$$c = \sqrt[4]{\frac{4}{R\epsilon^2}} \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

avec a solution de l'équation

$$a^2 c \sqrt{\frac{\pi}{2}} = R + \frac{4b^2}{c^4} - \frac{2}{c^2}$$

L'expression de a nous indique que cette solution existe, c'est à dire n'est pas imaginaire pure, lorsque $\boxed{v^2 < 4(R - \sqrt{R\epsilon})}$.

Ainsi, nous avons montré de manière analytique que le seuil convectif/absolu correspond à l'apparition (à $O(\epsilon)$ près) d'une solution stationnaire non nulle dans l'équation de Ginzburg-Landau à couplage global.

1.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que les systèmes présentant des comportements instables à cause d'une dérive se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique (hydrodynamique, physique des plasmas, optique), et nous avons présenté en détail deux systèmes appartenant à cette catégorie. Cette partie est basée sur les travaux de notre équipe avant mon arrivée, dont les résultats ont été publiés dans l'article [6]. Le premier système présenté est *le laser à électrons libres* pour lequel la dérive provient d'un décalage entre le temps d'aller/retour de l'impulsion laser dans la cavité et, le temps de rotation des électrons dans l'anneau de stockage. Le deuxième système est une équation appartenant à la famille des *équations de Ginzburg-Landau*, que nous avons étudiée avec un *couplage local* et *couplage global*. Nous avons vu que sous certaines conditions, en particulier près du seuil d'instabilité, ces deux systèmes ont des comportements proches. Dans ces systèmes, et plus généralement dans tous les systèmes présentant des instabilités convectives, il n'est pas suffisant qu'une solution stationnaire stable existe pour que le régime soit régulier : la

présence d'un *excès de gain* et d'un *bruit* (même extrêmement faible) peuvent induire un comportement "turbulent" et former des *structures entretenues par du bruit*. Autrement dit, pour que le système puisse avoir un comportement régulier, il faut aussi que la solution stationnaire stable ne soit pas hyper-sensible au bruit. Finalement, nous avons vu que dans le cas d'un couplage local, il est possible de connaître une expression analytique approchée de la transition entre un régime calme et un régime turbulent, en calculant le seuil d'instabilité convective/absolue.

Chapitre 2

Contrôle des “structures turbulentes”

Sommaire

2.1	Étude du contrôle dans l'équation de Ginzburg-Landau . . .	34
2.1.1	Étude qualitative sur deux exemples de résultats numériques . . .	34
2.1.2	Étude quantitative : seuil convectif/absolu	36
2.1.3	Effet d'une phase dans la rétroaction	43
2.1.4	Conclusion	53
2.2	Application au laser à électrons libres	54
2.2.1	Modèle	55
2.2.2	Dispositif expérimental	55
2.2.3	Résultats numériques et expérimentaux en zones de grande dérive	56
2.2.4	Effet de la face arrière du miroir de sortie de la cavité laser . . .	59
2.2.5	Effet de deux rétroactions dans la zone de grande dérive	61
2.2.6	Suppression des grandes fluctuations du régime pulsé	63
2.2.7	Étude quantitative de l'effet de la phase de la rétroaction.	66

Les systèmes soumis à une dérive forte ont généralement un comportement turbulent. Ce comportement est dû à une hyper-sensibilité au bruit, qui fait que le système s'écarte grandement de la solution stable. Nous allons présenter dans ce chapitre une méthode de contrôle permettant de rendre régulier les comportements turbulents. Bien que cette méthode soit basée sur l'utilisation d'une rétroaction (*feedback*), son principe est différent du contrôle du chaos par la méthode OGY (du nom de leurs auteurs : Ott, Grebogi et Yorke) [62]. Dans les systèmes que nous étudions, la méthode OGY est inapplicable, car il ne s'agit pas ici de stabiliser une solution instable. La condition de “stabilité” dans notre cas est que la solution stable soit insensible au bruit. La méthode de contrôle que nous présentons consiste à réinjecter une partie de la solution dans le système, avec un décalage spatial (Fig. 2.1).

Chronologiquement, nous avons d'abord étudié le contrôle des régimes turbulents du laser à électrons libres (LEL), ce qui nous a amené par la suite à une généralisation grâce aux équations de Ginzburg-Landau. Dans ce chapitre, nous allons suivre l'ordre inverse : nous considérerons d'abord l'effet de la rétroaction sur les équations de Ginzburg-Landau (section 2.1) et ensuite sur le laser à électrons libres d'UVSOR (section 2.2). Une partie des résultats présentés dans ce chapitre a été publiée dans l'article [50].

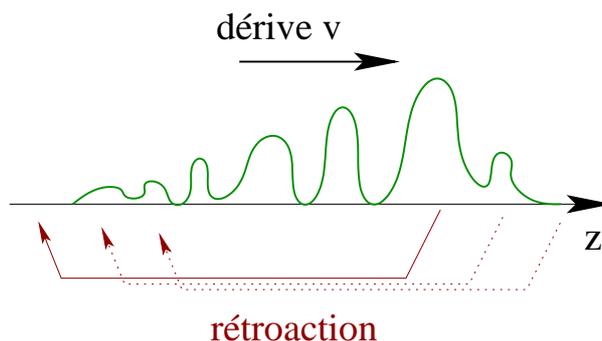


FIG. 2.1: La méthode de contrôle consiste à réinjecter une partie de la solution, avec un décalage spatial.

2.1 Étude du contrôle dans l'équation de Ginzburg-Landau

Afin d'étudier la possibilité de contrôler les structures bruyantes présentées dans la section 1.3, nous considérons une équation de Ginzburg-Landau réelle [Eq. (2.1)] dans laquelle nous introduisons une rétroaction décalée spatialement.

$$\frac{\partial e(z, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial e(z, t)}{\partial z} + Rg(\epsilon z)e(z, t) + \frac{\partial^2 e(z, t)}{\partial z^2} - Se(z, t) + \overbrace{\alpha e(z - a, t)e^{i\phi}}^{\text{rétroaction}} + \sqrt{\eta}\xi(z, t) \quad (2.1)$$

α est le coefficient de gain de la rétroaction, a son décalage spatial et ϕ sa phase. Dans un premier temps, nous prendrons $\phi = 0$. L'effet d'une phase non nulle fera l'objet de la section 2.1.3.

2.1.1 Étude qualitative sur deux exemples de résultats numériques

Nous avons réalisé des intégrations numériques pour différentes valeurs de paramètres. Un exemple est présenté Fig. 2.2. Les paramètres du système sont les mêmes que ceux utilisés au chapitre précédent ($R = 1, v = 4, \epsilon = 1e - 2, \eta = 1e - 20$), et les paramètres de la rétroaction sont : $\alpha = 0.1, a = 10$ et $\phi = 0$. Ces figures montrent clairement que la rétroaction permet d'obtenir des solutions dans lesquelles les fluctuations sont supprimées dans une large mesure.

On constate que l'effet de la rétroaction est de créer une nouvelle solution stationnaire “insensible” au bruit. Le processus est visible sur la figure 2.2, où on a représenté le profil de la solution à un instant donné. Sans rétroaction (Fig. 2.2 IIa, IIc), la solution stationnaire est la solution uniforme nulle ($e(z, t) = 0$) (courbe verte), et avec du bruit la solution est irrégulière (courbe rouge). La rétroaction permet de créer une nouvelle solution stationnaire, et lorsque du bruit est présent, la solution qui s'installe reste au voisinage de cette solution stationnaire, le bruit a juste un rôle perturbatif (Fig. 2.2 IIb, II d).

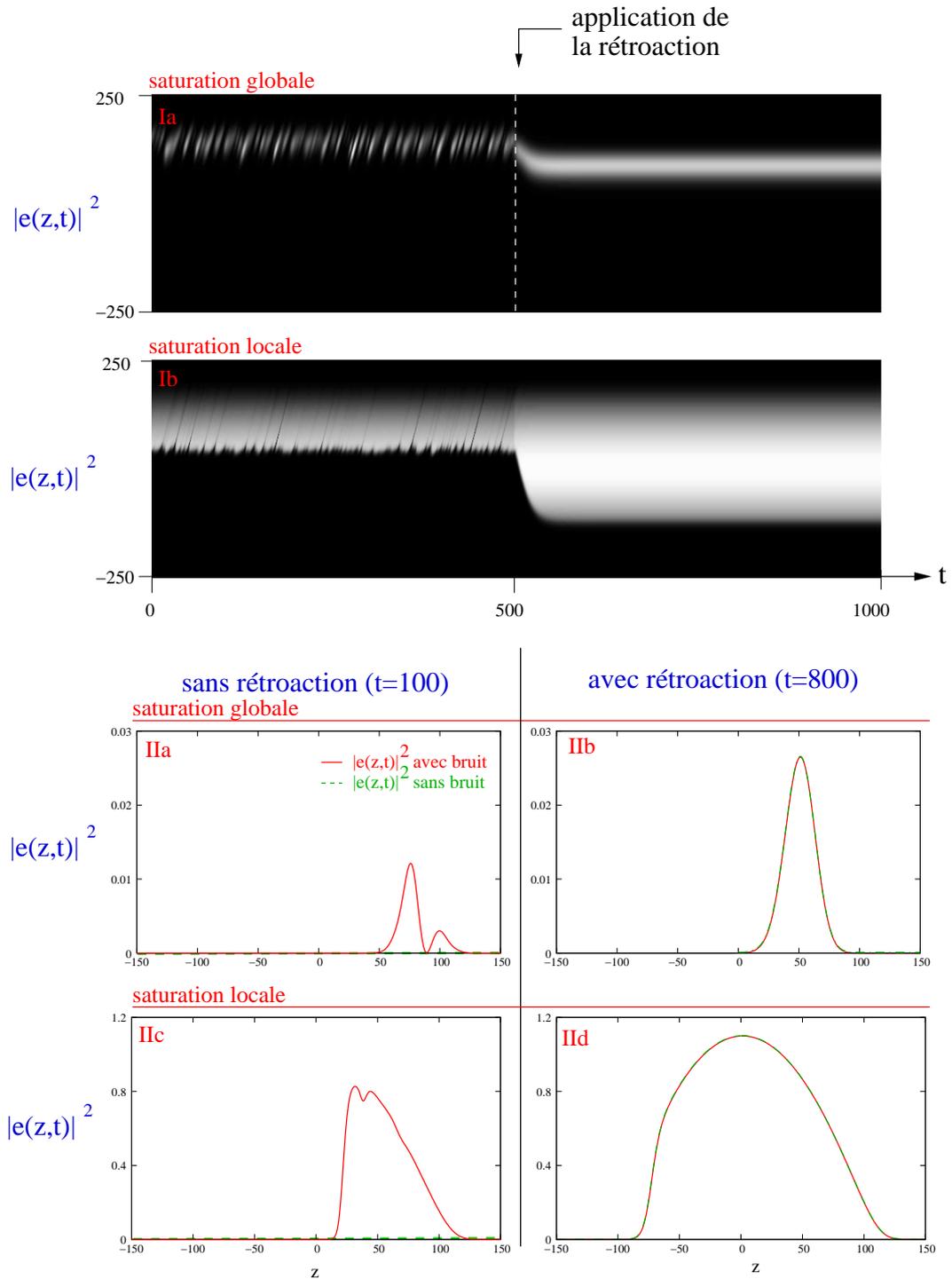


FIG. 2.2: I : évolution spatio-temporelle du module $|e(z,t)|^2$ lorsqu'une rétroaction est appliquée (en $t = 500$). Ia : couplage global ($S = \int_{-\infty}^{\infty} |e|^2 dz$). Ib : couplage local ($S = |e|^2$). II : $|e(z,t)|^2$ à t fixé. Ligne rouge : système avec bruit. Ligne verte : système sans bruit. IIa et IIc : $t = 100$ (sans rétroaction). IIb et IId : $t = 800$ (avec rétroaction). Paramètres : $v = 4$, $R = 1$, $g(\epsilon z) = 1 - (\epsilon z)^2$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-20}$, $\alpha = 10^{-2}$, $a = 10$.

2.1.2 Étude quantitative : seuil convectif/absolu

Nous venons de voir numériquement qu’une rétroaction permet de stabiliser des régimes turbulents. Nous allons maintenant tenter de comprendre le processus de contrôle en effectuant une étude analytique de l’équation de Ginzburg-Landau. En faisant le lien entre les explications du premier chapitre, et le fait que la solution qui s’installe est très peu affectée par le bruit (Fig. 2.2), une hypothèse serait qu’en appliquant une rétroaction nous avons déplacé le seuil convectif/absolu. Nous allons vérifier cette hypothèse en commençant par calculer le seuil convectif/absolu sur l’équation avec rétroaction.

2.1.2.1 Expression analytique du seuil convectif/absolu

On reprend la même méthode qu’au chapitre précédent. Pour analyser la stabilité de la solution stationnaire $e(z, t) = 0$, on étudie le système linéarisé suivant :

$$\partial_t e(z, t) = -v\partial_z e + Re + \partial_{zz} e + \alpha e(z - a, t) \quad (2.2)$$

On applique à la solution uniforme $e(z, t) = 0$ une perturbation sous forme d’un pic de Dirac $e(z = z^*, t = 0) = \delta(z - z^*, t)$, et on calcule la réponse du système à l’endroit où a été appliquée la perturbation, c’est à dire en $z = z^*$. Pour la suite, sans perte de généralité, on posera $z^* = 0$. On obtient :

$$e(z = 0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(k)t} dk \quad \text{avec} \quad f(k) = -ikv + R - k^2 + \alpha e^{ika} \quad (2.3)$$

Nous voulons connaître le comportement asymptotique de $e(z = 0, t)$, c’est à dire : est ce que l’instabilité est convective ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(z = 0, t) \rightarrow 0$) ou absolue ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(z = 0, t) \rightarrow \infty$) ?

La présence du terme e^{ika} complique l’analyse de stabilité, car un calcul direct de l’intégrale de l’équation (2.3) mène à une indétermination, comme dans les travaux de Papoff et Zambrini [38]¹. Nous allons appliquer la méthode appelée *steepest descent* [64], utilisée pour calculer les intégrales du type : $\int_a^b e^{My(x)} dx$ où M est un grand nombre². Lorsque la fonction $y(x)$ est complexe, comme c’est le cas pour $f(k)$, la méthode consiste déformer le chemin d’intégration en passant dans l’espace complexe $x = x_r + ix_i$.

L’application de cette méthode à l’équation (2.3) donne :

$$e(z = 0, t) = \int_C e^{f(k_r + ik_i)t} dk \quad (2.4)$$

$$= \int_C e^{(f_r(k_r + ik_i) + i f_i(k_r + ik_i))t} dk \quad (2.5)$$

$$= \int_C e^{f_r t} [\cos(f_i t) + i \sin(f_i t)] dk \quad (2.6)$$

¹Cette complication est également typique des systèmes temporels avec délai [63].

² $y(x)$ doit être deux fois dérivable et continue. Les bornes a , et b peuvent être infinies.

avec :

$$f_r(k_r + ik_i) = k_i v + R - k_r^2 + k_i^2 + \alpha e^{-k_i a} \cos(k_r a) \quad (2.7)$$

$$f_i(k_r + ik_i) = -k_r v - 2k_i k_r + \alpha e^{-k_i a} \sin(k_r a) \quad (2.8)$$

L'objectif est ensuite de suivre un chemin appelé *steepest path*, un chemin dont la partie imaginaire de $f(k)$ est constante³. Sur ce chemin, le comportement asymptotique de l'intégrale sera donné par le signe du maximum de la partie réelle de $f(k)$ [38].

Mathématiquement, cela se traduit d'abord par la recherche d'un chemin avec une partie imaginaire constante, c'est à dire : $\frac{\partial f_i}{\partial k_r} = 0$ ou de manière équivalente, d'après les relations de Cauchy [65], $\frac{\partial f_r}{\partial k_i} = 0$.

$$\frac{\partial f_r}{\partial k_i} = -\frac{\partial f_i}{\partial k_r} = 0 \Leftrightarrow v + 2k_i - \alpha e^{-k_i a} \cos(k_r a) = 0 \quad (2.9)$$

Ensuite, sur ce chemin, nous cherchons le maximum de la partie réelle de f_r :

$$\frac{\partial f_r}{\partial k_r} = 0 \Leftrightarrow 2k_r + \alpha e^{-k_i a} \sin(k_r a) = 0 \quad (2.10)$$

Le point recherché est donc un extremum dans les deux directions de l'espace complexe k_r et k_i . Il peut être démontré que c'est un point selle ("saddle point") [65], c'est à dire un point qui se situe sur un maximum selon une direction (ici k_r) et sur un minimum dans l'autre (k_i). Nous noterons le point selle : $k^* = k_r^* + ik_i^*$. Le seuil sera atteint dès que la valeur de f_r passe par zéro sur un point selle.

$$f_r = 0 \Leftrightarrow k_i^* v + R - k_r^{*2} + k_i^{*2} + \alpha e^{-k_i^* a} \cos(k_r^* a) = 0 \quad (2.11)$$

Une solution de l'équation (2.10) est la valeur $k_r = 0$. Une démonstration rigoureuse reste un problème ouvert. Néanmoins les résultats numériques montreront que c'est effectivement pour cette valeur de k_r que le premier point selle traverse le seuil. Un argument est qu'en fonction de k_r , la fonction f_r est une parabole renversée centrée en $k_r = 0$ et modulée par un cosinus qui est aussi centré en $k_r = 0$ [Eq. (2.7)].

Nous pouvons vérifier que f_r possède un point selle en $k_r = 0$:

$$\frac{\partial^2 f_r}{\partial k_r^2} = -2 - \alpha a^2 e^{-ik_i^* a} \sin(k_r^* a) = -2 < 0 : \text{maximum} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 f_r}{\partial k_i^2} = 2 + \alpha a^2 e^{-k_i^* a} \sin(k_r^* a) = 2 > 0 : \text{minimum} \quad (2.13)$$

Finalement, on obtient à la fois l'expression du seuil et la valeur de k_i au seuil en combinant l'équation (2.9) et (2.11). L'expression analytique du seuil d'instabilité convective/absolue est :

³Le nom de *steepest descent*, la descente maximale, vient du fait que la phase de $e^{f(k)t}$ étant fixe, c'est le module qui varie le plus rapidement.

$$\alpha = \frac{e^{k_{i_s}^* a}}{a} (2k_{i_s}^* + v) \quad (2.14)$$

avec $k_{i_s}^*$, la valeur de k_i^* au seuil, solution de :

$$k_{i_s}^{*2} + 2k_{i_s}^* \left(\frac{1}{a} + \frac{v}{2} \right) + \frac{v}{a} + R = 0 \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) admet deux solutions de $k_{i_s}^*$. Une application numérique montre que seule la plus grande des deux est efficace, l'autre valeur étant associée à une valeur négative de l'amplitude de la rétroaction.

En résumé, l'ajout d'une rétroaction déplace le seuil convectif/absolu. Son expression analytique est donnée par les équations (2.14) et (2.15). Ce seuil délimite les régimes pour lesquels une perturbation initialement localisée s'éloigne (régime linéairement convectif) et les régimes pour lesquels une perturbation s'étend sur tout l'espace (régime linéairement absolu). Nous allons maintenant étudier ce seuil, d'abord en observant le point selle avant et après le seuil (section 2.1.2.2), puis en étudiant la dépendance de ce seuil en fonction des paramètres (section 2.1.2.3) et enfin en regardant le lien entre ce seuil obtenu dans le système linéarisé, et le comportement du système complet (section 2.1.2.4).

2.1.2.2 Observation du point selle au seuil convectif/absolu

En reprenant les paramètres utilisés précédemment ($R = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$, $v = 4$) et en fixant l'amplitude de la rétroaction α à 10^{-4} , nous obtenons un seuil pour a compris entre 23 et 24. La figure 2.3 illustre pour ces paramètres le passage du régime convectif (Fig. 2.3 a) au régime absolu (Fig. 2.3 b). Nous voyons qu'au point selle repéré par le croisement des courbes bleues ($\frac{\partial f_r}{\partial k_r} = 0$ et $\frac{\partial f_r}{\partial k_i} = 0$), f_r passe d'une valeur négative (Fig. 2.3 a) à une valeur positive (Fig. 2.3 b).

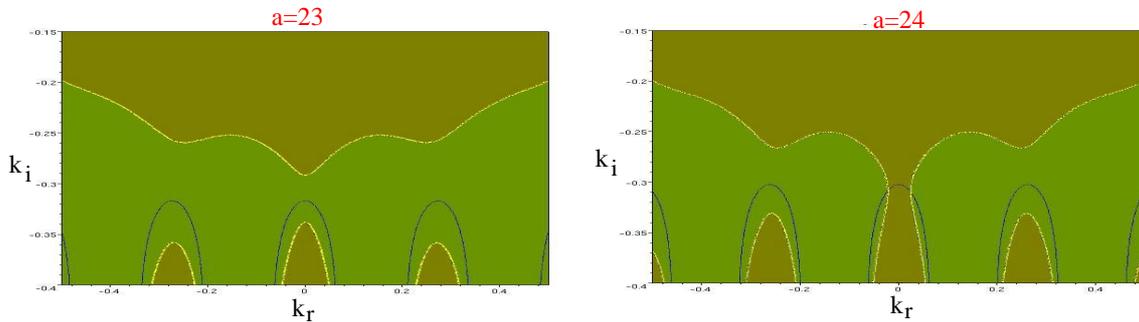


FIG. 2.3: Point selle avant et après le seuil convectif/absolu. Gauche : $a = 23$, droite $a = 24$. Dans l'espace k_r, k_i sont représentés :

$f_r(k)$ avec un code de couleur : vert $f_r(k) < 0$ et rouge $f_r(k) > 0$.

$f_r(k) = 0$: courbe jaune, $\frac{\partial f_r}{\partial k_r} = 0$: courbe bleue et $\frac{\partial f_r}{\partial k_i} = 0$: courbe bleue.

Paramètres : $R = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$, $v = 4$, $\alpha = 10^{-4}$.

2.1.2.3 Étude du seuil convectif/absolu en fonction des paramètres

La figure 2.4 illustre la dépendance du seuil en fonction de la valeur de la dérive v , du décalage a et de l'amplitude de la rétroaction α .

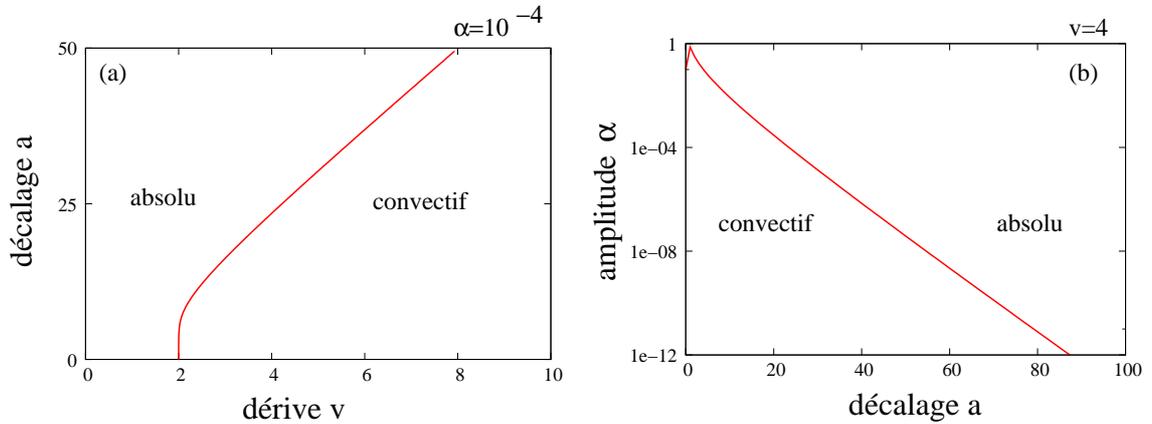


FIG. 2.4: (a) seuil convectif/absolu en fonction du décalage a de la rétroaction et de la dérive v . (b) seuil convectif/absolu en fonction de l'amplitude de la rétroaction α et du décalage a . Paramètre : $R = 1$.

Nous voyons qu'un plus grand décalage a de la rétroaction permet de compenser une plus grande dérive v (Fig. 2.4 a), et que l'amplitude de la rétroaction α nécessaire pour rester en régime absolu tend vers zéro lorsque le décalage a augmente (Fig. 2.4 b). Nous allons insister sur ce dernier point car il est remarquable que "l'énergie" pour créer une nouvelle solution soit si faible. Autrement dit, une petite amplitude de rétroaction a un très grand effet. L'explication vient du même élément que celui à l'origine des instabilités : l'excès de gain. Le système en régime instable présente un excès de gain. Si on rajoute une rétroaction son effet sera amplifié considérablement par cet excès de gain. Ainsi en pratique, on s'attend à ce qu'une amplitude de rétroaction plus grande que le bruit soit suffisante pour contrôler le système.

2.1.2.4 Corrélation entre la stabilité linéaire de la solution $e(z, t) = 0$ et le comportement global du système

Le seuil convectif/absolu (seuil C/A) a été obtenu dans le cas d'une analyse locale de la stabilité linéaire de la solution $e(z, t) = 0$. Nous allons maintenant utiliser les simulations numériques pour observer comment se comporte globalement le système par rapport à ce seuil.

La figure (2.5) représente une mesure des fluctuations N^2 en fonction du délai a de la rétroaction dans le cas du couplage local (Fig. 2.5 a) et dans le cas du couplage global (Fig. 2.5 b), avec $N = \langle \int_{-\infty}^{\infty} |e(z, t)|^4 - \langle |e(z, t)|^2 \rangle^2 dz \rangle$ (les crochets indiquent une moyenne temporelle)⁴. Sur ces graphiques, le seuil C/A est indiqué par une ligne verticale. Dans le cas d'un couplage local, le seuil convectif/absolu coïncide avec la transition entre un régime calme et un régime turbulent (Fig. 2.5 a). Et donc, le seuil convectif/absolu

⁴voir chapitre 1 pour plus de détails.

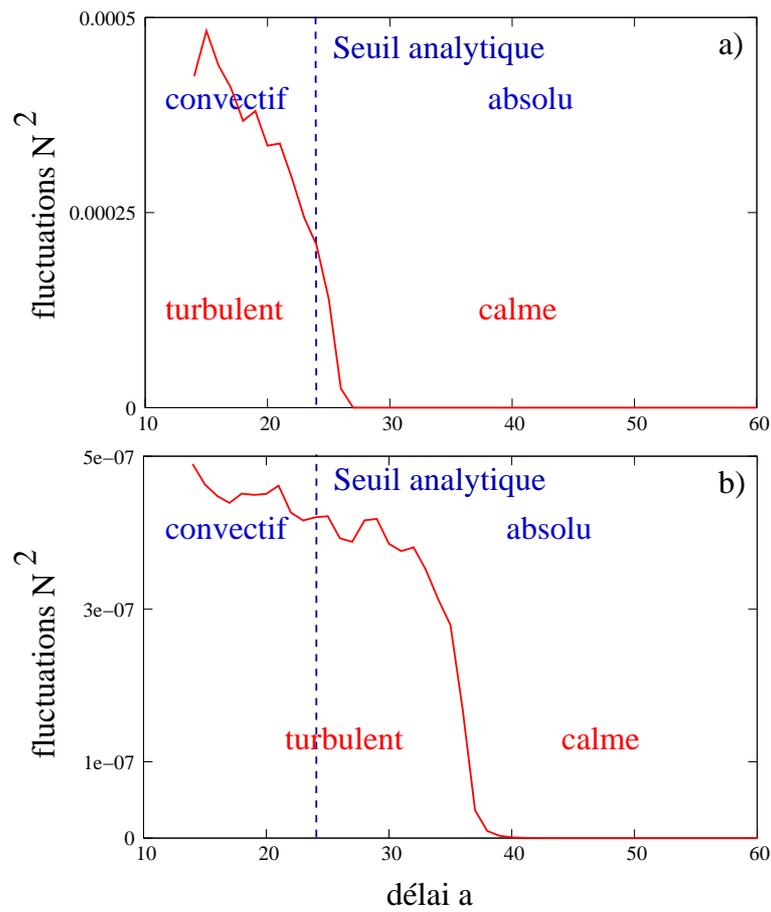


FIG. 2.5: Diagramme de bifurcation : fluctuations N^2 en fonction du délai a de la rétroaction. (a) couplage local. (b) couplage global. Paramètres : $R = 1$, $v = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-20}$, $\alpha = 10^{-4}$. Le seuil convectif/absolu est $a_c = 23.4$.

donne des informations quantitatives sur cette transition. En revanche, ce n'est pas le cas pour un couplage global (Fig. 2.5 b). Nous pouvons nous attendre à ce résultat puisque c'était déjà le cas pour le système sans rétroaction. Nous allons continuer à nous intéresser au couplage local ; néanmoins nous pouvons retenir que les conclusions qualitatives seront aussi valables pour le couplage global puisque nous voyons sur cet exemple que l'ordre de grandeur du seuil C/A est le même que celui du passage calme/"turbulent" dans le système complet. L'expression d'un seuil analytique pour un couplage global reste une question ouverte.

La figure 2.6 reprend les courbes analytiques présentées figure 2.4 auxquelles nous avons rajouté les courbes du seuil dans le système complet, obtenues à partir de N^2 .

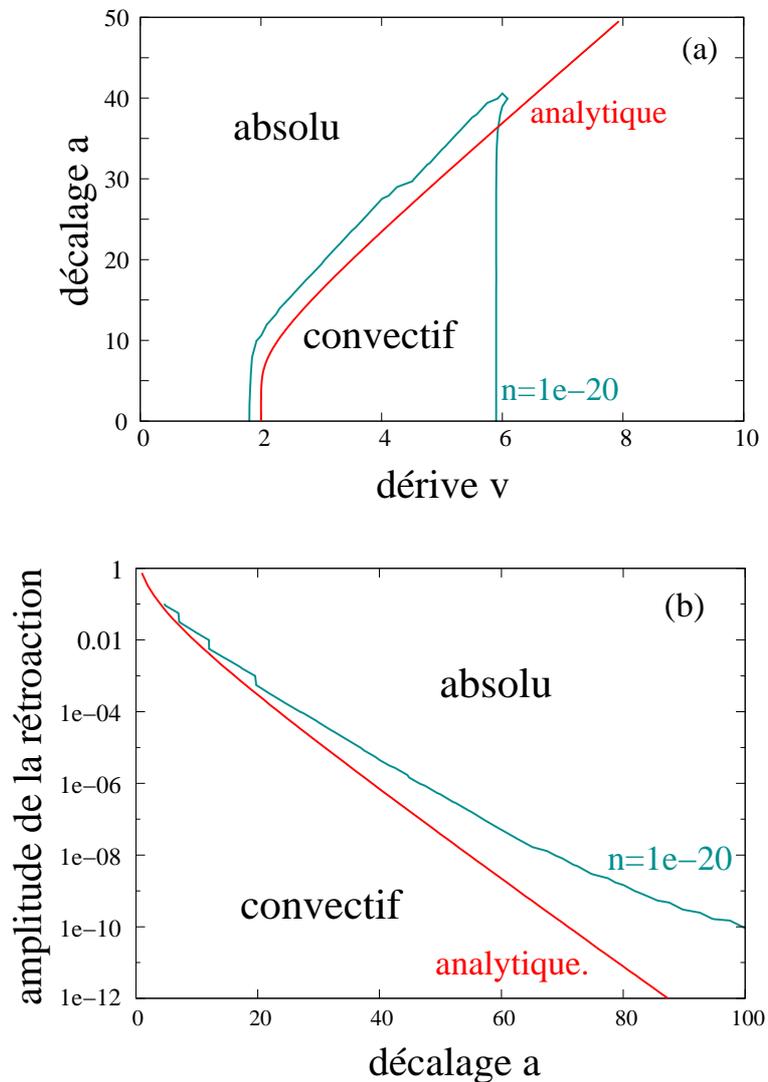


FIG. 2.6: Seuil convectif/absolu (analytique) et seuil calme/turbulent (numérique), (a) en fonction de la dérivée v et du délai a , (b) en fonction du délai a et du gain de la rétroaction α . Paramètres : $R = 1$, $v = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-20}$, $\alpha = 10^{-4}$

Il apparaît un bon accord entre le seuil analytique et le seuil numérique. Les écarts peuvent être attribués aux simplifications utilisées pour calculer le seuil analytique. On s'attend

à ce que trois conditions soient remplies pour que le seuil C/A coïncide avec le seuil calme/turbulent :

- $\epsilon \ll 1$ puisque le seuil C/A a été obtenu dans un système spatialement infini et que $1/\epsilon$ représente l’extension spatiale du système (le système est spatialement infini pour $\epsilon = 0$).
- $a < 1/\epsilon$ puisque la solution réinjectée ne doit pas sortir de la zone où il y a du gain.
- $\alpha > \eta$ puisque l’amplitude de la rétroaction doit être supérieure au niveau de bruit (origine de l’écart sur la figure 2.6 (b) qui s’agrandit pour des valeurs de α qui s’approchent du niveau de bruit).

En résumé, nous venons de voir que la rétroaction décale le seuil convectif/absolu, dont nous avons obtenu une expression analytique. Nous avons étudié le comportement de ce seuil en fonction des paramètres du système, en particulier nous avons vu que l’amplitude de la rétroaction nécessaire pour contrôler les régimes instables était de l’ordre du niveau de bruit. Comme dans le cas sans rétroaction, le seuil convectif/absolu permet d’avoir des informations quantitatives sur la transition calme/turbulent dans le système avec couplage local.

2.1.3 Effet d'une phase dans la rétroaction

Dans de nombreux cas, la variable décrite par l'équation de Ginzburg-Landau est l'enveloppe de la solution du système [57], c'est à dire que la solution a une structure interne. Dans le cas du laser à électrons libre, la structure interne est une modulation à la fréquence optique. Dans ce cas, la rétroaction peut être à la fois décalée spatialement et déphasée par rapport à la solution existante (Fig. 2.7). Il est donc nécessaire d'ajouter un terme de phase ϕ dans la rétroaction, qui devient : $\alpha e(z - a, t)e^{i\phi}$ ($\phi \in [0, 2\pi]$).

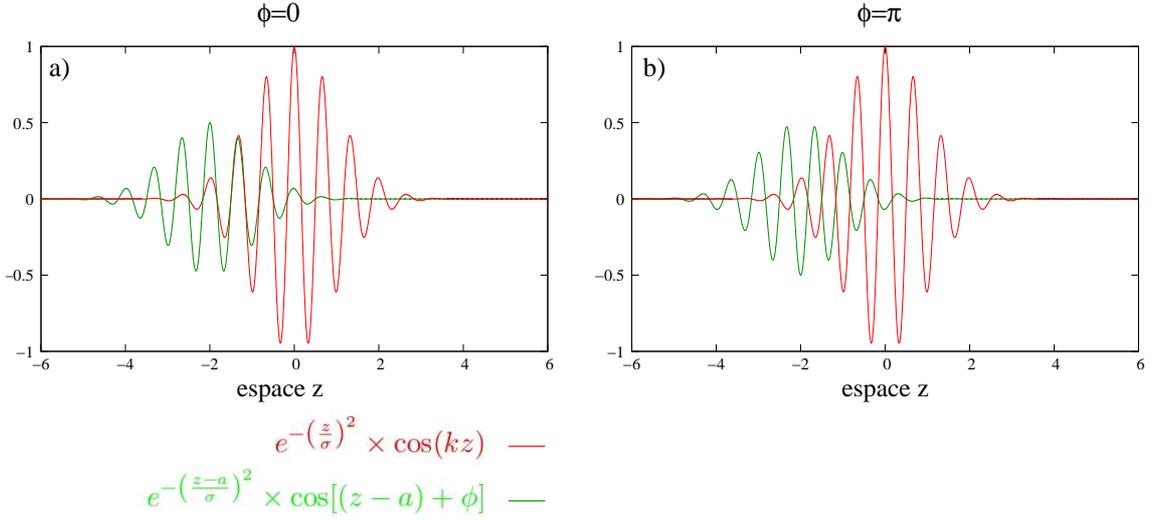


FIG. 2.7: Illustration d'une solution ayant une modulation interne (ligne rouge), et d'une rétroaction associée (ligne verte). La rétroaction est décalée spatialement et peut être déphasée. a) : exemple où la solution et la rétroaction sont en phase ($\phi = 0$). b) : exemple où la solution et la rétroaction sont en opposition de phase ($\phi = \pi$). L'enveloppe de la solution a été choisie de forme gaussienne : $e^{-(z/\sigma)^2}$. Paramètres : $\alpha = 0.5$, $a = -2$, $\sigma = \sqrt{2}$, le nombre d'onde de la modulation est $k = 2\pi \times 1.5$.

Nous allons commencer par étudier l'effet de cette phase sur l'expression du seuil convectif/absolu.

2.1.3.1 Seuil d'instabilité convective/absolue

On reprend la même méthode qu'à la section 2.1.2.1. Les équations (2.7) et (2.8) deviennent :

$$f_r(k_r + ik_i) = k_i v + R - k_r^2 + k_i^2 + \alpha e^{-k_i a} \cos(k_r a + \phi) \quad (2.16)$$

$$f_i(k_r + ik_i) = -k_r v - 2k_r k_i + \alpha e^{-k_i a} \sin(k_r a + \phi) \quad (2.17)$$

2.1.3.1.1 Coordonnée du point selle Le seuil apparaît au maximum de la fonction f_r , en première approximation pour k_r tel que $\cos(k_r a + \phi) = 1$, c'est à dire :

$$\frac{\partial f_r}{\partial k_r} = 0 \Leftrightarrow k_r^* = \begin{cases} -\frac{\phi}{a} & \text{pour } 0 \leq \phi \leq \pi \\ \frac{2\pi - \phi}{a} & \text{pour } \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.18)$$

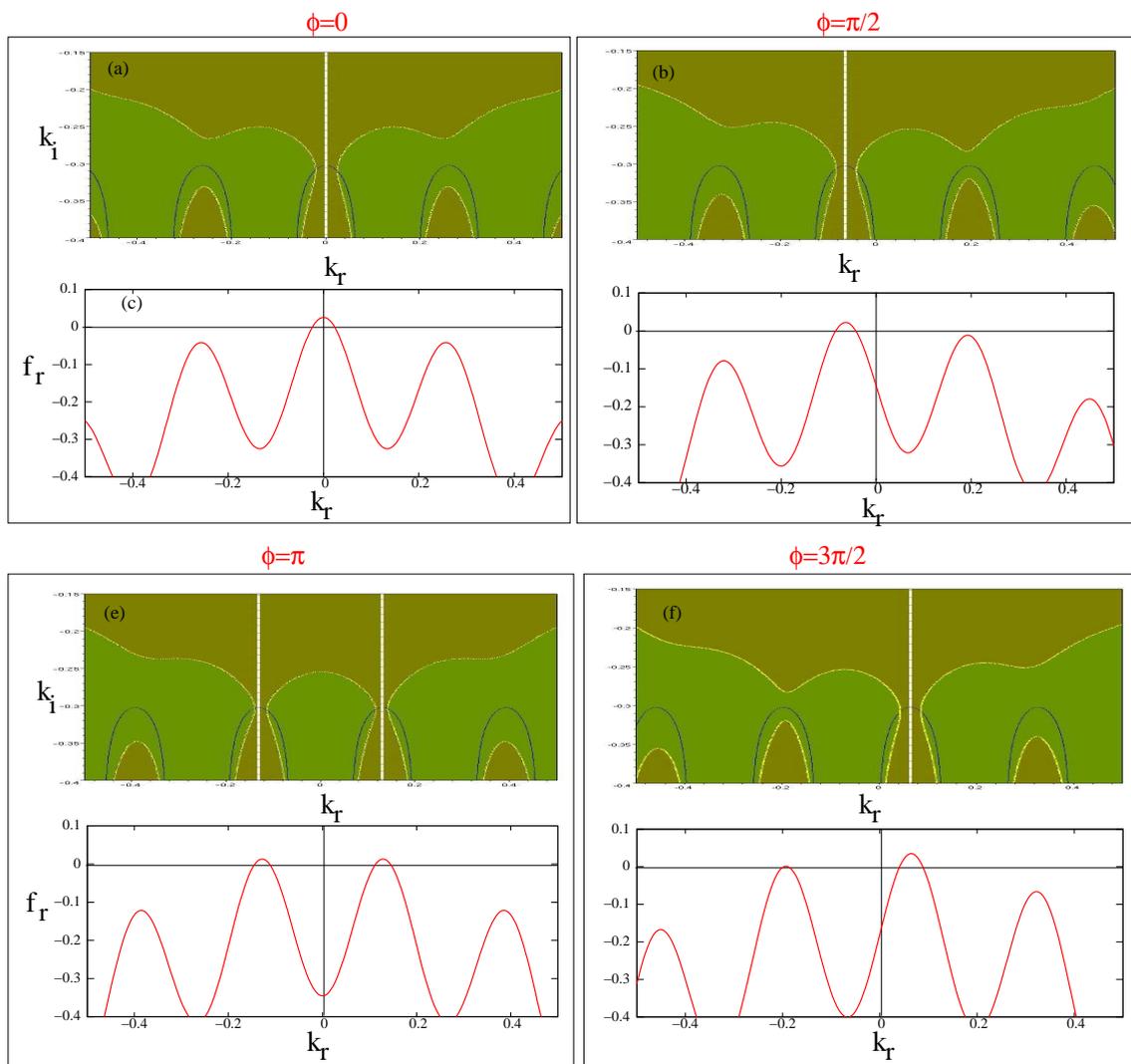


FIG. 2.8: (a)(b)(e)(f) : point selle dans l'espace k_r, k_i pour une phase $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Code de couleur : valeur de $f_r(k)$. Courbes jaunes : $f_r(k) = 0$. Courbes bleues : $\frac{\partial f_r}{\partial k_r} = 0$ et $\frac{\partial f_r}{\partial k_i} = 0$. Le point selle se situe à une intersection des courbes bleues. Les lignes verticales blanches sont la valeur de k_r donnée par l'équation (2.18). (c)(d)(g)(h) : f_r en fonction de k_r , en $k_i = k_i^*$. Paramètres : $R = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\nu = 4$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 24$.

Le déplacement du point selle en fonction de la valeur de la phase ϕ dans l'espace complexe k_r, k_i est illustré figure 2.8 .

Les expressions de k_i au seuil sont solutions des équations :

$$\frac{\partial f_r}{\partial k_i} = 0 \text{ et } f_r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_{i1}^* + R + \frac{\phi^2}{a^2} + k_{i1}^{*2} + \frac{v+2k_{i1}^*}{a} = 0 & \text{pour } 0 \leq \phi \leq \pi \\ k_{i2}^* + R + \frac{(2\pi-\phi)^2}{a^2} + k_{i2}^{*2} + \frac{v+2k_{i2}^*}{a} = 0 & \text{pour } \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

avec $\alpha = \frac{e^{k_{is}^* a}}{a}(2k_{is}^* + v)$ ($k_{is}^* = k_{i1}^*$ ou k_{i2}^*).

2.1.3.1.2 Valeur de $f_i(k)$ au point selle et conséquence sur la dynamique En remplaçant les valeurs de k_i^* et k_r^* dans l'équation (2.17), nous obtenons :

$$f_i(k_r^* + ik_i^*) = \begin{cases} \frac{\phi}{a}(v + 2k_{i1}^*) & \text{pour } 0 \leq \phi \leq \pi \\ \frac{-(2\pi-\phi)}{a}(v + 2k_{i2}^*) & \text{pour } \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.19)$$

Contrairement au cas où la rétroaction est en phase ($\phi = 0$), la valeur de $f_i(k_r^* + ik_i^*)$ est maintenant non nulle (Eq. (2.19) et Fig. 2.9 a). Au dessus du seuil convectif absolu, on s'attend maintenant à ce que la croissance d'une perturbation à partir de la solution $e(z, t) = 0$ se fasse avec une phase non nulle, égale à $f_i(k_r^* + ik_i^*)t$.

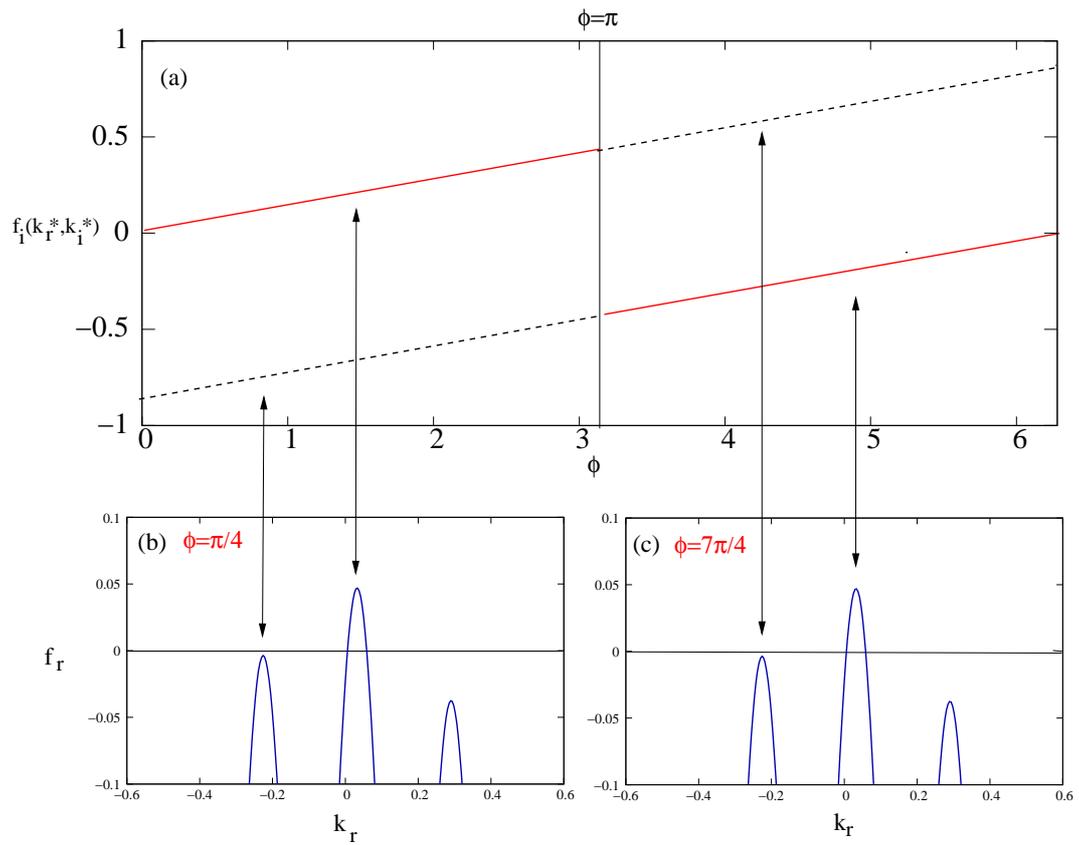


FIG. 2.9: (a) : valeur de f_i en fonction de la phase ϕ (d'après l'équation (2.19)). La courbe rouge en trait plein représente la valeur de f_i associée au maximum global de f_r . La courbe noire en pointillés représente la valeur de f_i associée au maximum secondaire de f_r . (b) et (c) : f_r en fonction de k_r pour $\phi = \pi/4$ (b) et $\phi = 7\pi/4$ (c). Les flèches indiquent à quel maximum de f_r les valeurs de f_i sont associées. Paramètres : $R = 1$, $\nu = 4$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 24$.

2.1.3.2 Dynamique de l'équation avec couplage local

Nous venons d'étendre l'analyse de stabilité de la solution $e(z, t) = 0$ au cas $\phi \neq 0$. À présent, nous allons nous intéresser aux solutions obtenues numériquement dans l'équation de Ginzburg-Landau avec couplage local. En particulier, nous verrons que les valeurs de f_i correspondent à une signature particulière caractéristique des régimes observés numériquement.

2.1.3.2.1 Évolution spatio-temporelle du système L'évolution spatio-temporelle du module et de l'argument de $e(z, t)$ pour différentes valeurs de phase est présentée figure 2.10. Nous voyons que pour $\phi \neq 0$ l'argument de $e(z, t)$ pour un z fixé évolue

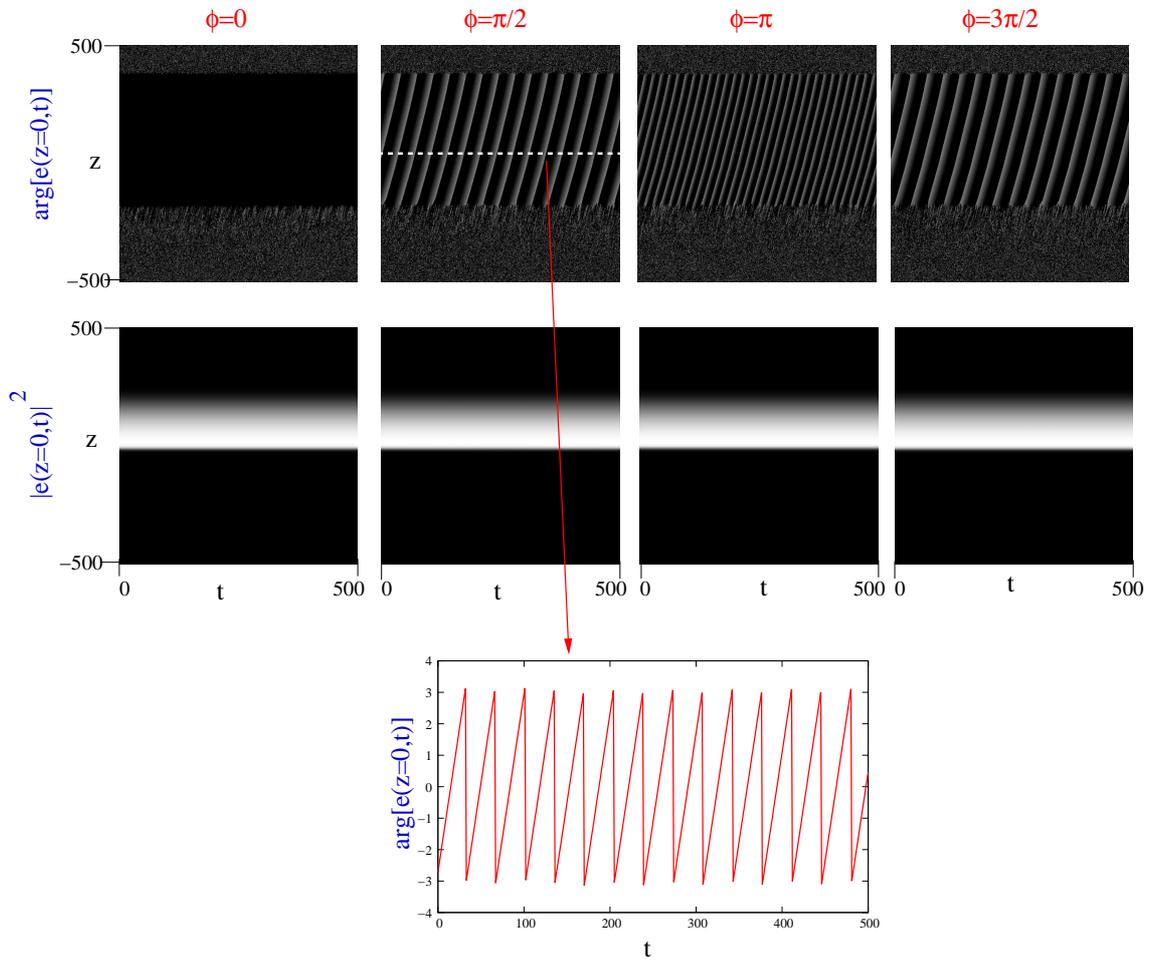


FIG. 2.10: Diagrammes spatio-temporels de $e(z, t)$: argument (ligne du haut) et module (ligne du bas), pour différentes valeurs de phase $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. L'évolution temporelle de l'argument à une position fixe ($z = 0$) est présentée pour $\phi = \frac{\pi}{2}$. Paramètres : $R = 1, v = 4, \epsilon = 10^{-2}, \alpha = 10^{-4}, a = 30, \eta = 10^{-20}$.

linéairement en fonction du temps (modulo 2π) et que son module est constant. Autrement dit, une phase ϕ non nulle dans la rétroaction a pour effet de décaler la fréquence centrale du spectre $\tilde{e}(k, t)$. L'étude analytique précédente a montré que pour $\phi \neq 0$, la solution $e(z, t) = 0$ se déstabilisait aussi avec une dépendance linéaire de son argument, avec un

coefficient directeur égal à f_i [Eq. (2.19)]. Une interprétation possible est que la solution qui s’installe dans le système (Fig. 2.10) soit liée à la manière dont se déstabilise la solution $e(z, t) = 0$. Pour vérifier cette hypothèse, nous allons comparer quantitativement les valeurs de f_i , à la phase des solutions obtenues numériquement.

2.1.3.2.2 Lien entre la solution qui s’installe au dessus du seuil convectif/absolu et la manière dont se déstabilise la solution $e(z, t) = 0$ au seuil.

La figure 2.11 présente en fonction de la phase ϕ la courbe analytique $f_i(k_r^*, k_i^*)$ (d’après l’équation 2.19) et les valeurs de $\frac{d(\arg[e(z=0, t)])}{dt}$ mesurées sur les courbes numériques. Les simulations numériques ont été faites en balayant la phase ϕ à la fois de manière croissante ($0 \rightarrow 2\pi$) et de manière décroissante ($2\pi \rightarrow 0$), afin de détecter des effets éventuels de bistabilité. On constate que les valeurs de $f_i \neq 0$ possèdent une signature dans les simulations nu-

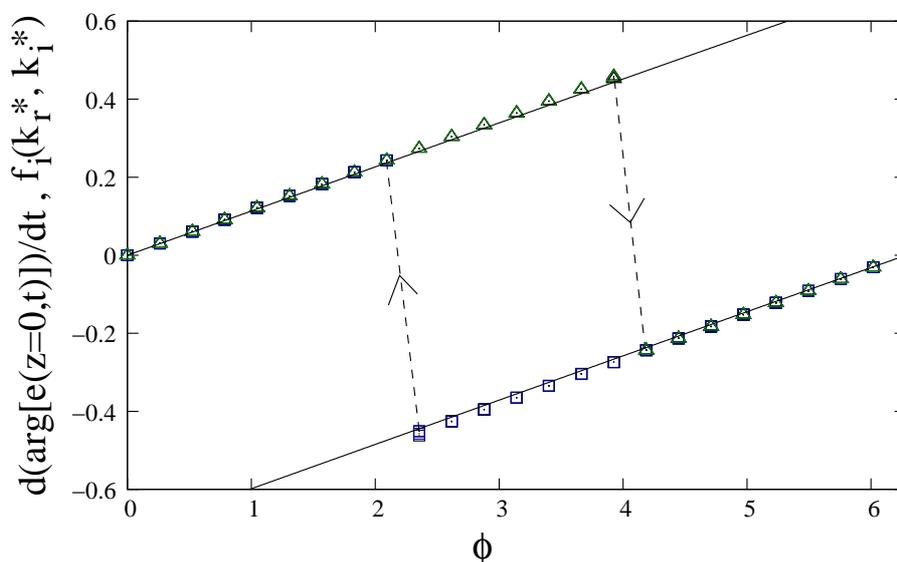


FIG. 2.11: Évolution de f_i (résultats analytiques, ligne noire) et de la pente de $\arg[e(z, t)]$ en fonction de la phase (résultats numériques). Les simulations ont été réalisées en faisant varier la phase de manière croissante (triangle vert) et de manière décroissante (carré bleu). Les traits en pointillés indiquent le passage entre les valeurs positives et négatives. Paramètres : $R = 1$, $v = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 30$, $\eta = 10^{-20}$. En chaque point, l’intégration numérique est effectuée sur une durée $\Delta T = 3000$.

mériques. Les solutions qui s’installent au dessus du seuil d’instabilité convectif/absolu gardent une trace sur la manière dont se déstabilise la solution $e(z, t) = 0$. De plus, l’accord entre les valeurs comparées est très bon (Fig. 2.11).

Ensuite, nous voyons que les points se répartissent sur deux ensembles de solutions : le segment à valeurs positives et celui à valeurs négatives. L’étude analytique précédente ne permet pas de prévoir comment le système passe d’une solution à l’autre, nous continuerons donc en analysant les résultats numériques. Nous voyons qu’il y a un hystérésis, il existe une région où le système est bistable. Par conséquent, le système n’a pas forcément la dynamique associée au point selle qui a la plus grande valeur de f_r , cela dépend aussi de son histoire.

2.1.3.3 Dynamique de l'équation avec couplage global

Nous allons refaire la même étude avec l'équation de Ginzburg-Landau à couplage global.

2.1.3.3.1 Évolution spatio-temporelle du système L'évolution du module et de l'argument de la solution $e(z, t)$, pour différentes valeurs de phase, est présentée figure 2.12.

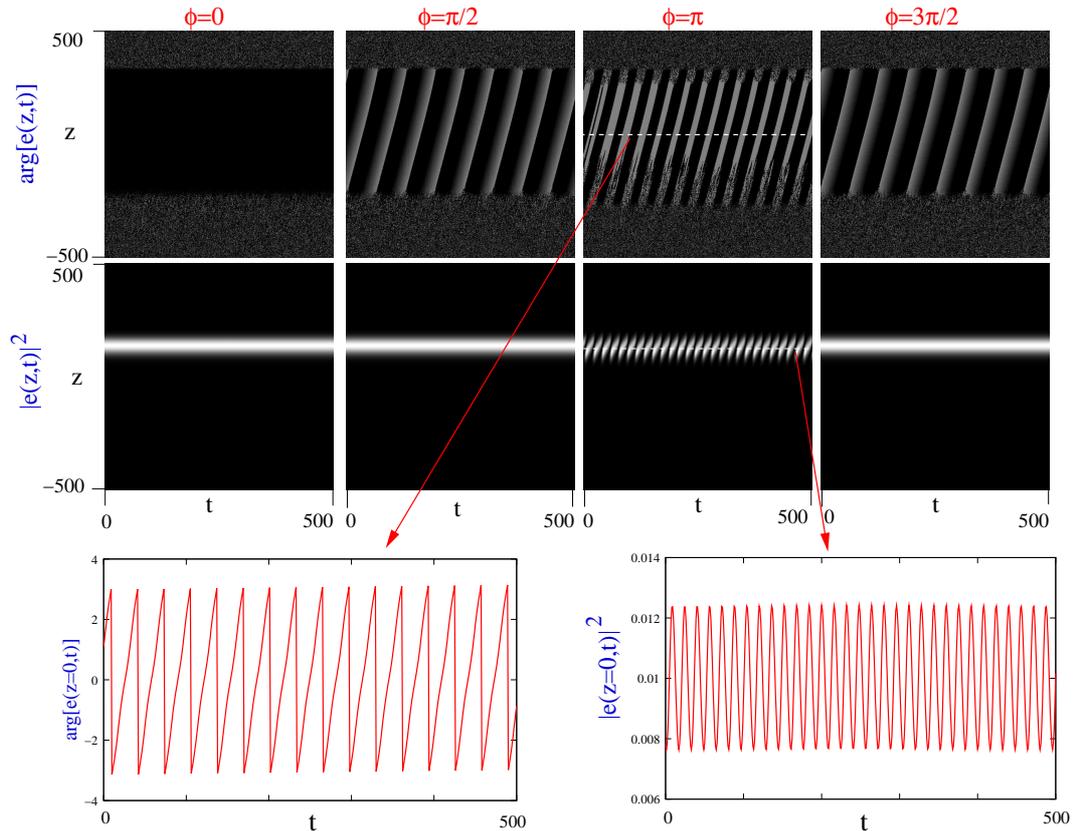


FIG. 2.12: Diagrammes spatio-temporels de $e(z, t)$: argument (ligne du haut) et module (ligne du bas), pour différentes valeurs de phase $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. L'évolution temporelle du module et de l'argument à une position fixe ($z = 0$) est représentée pour $\phi = \pi$. Paramètres : $R = 1, v = 4, \epsilon = 10^{-2}, \alpha = 10^{-4}, a = 60, \eta = 10^{-20}$.

Comme pour le couplage local, il y a un comportement linéaire (modulo 2π) de l'argument pour un z fixé, et le module est constant sauf en $\phi = \pi$. Sur ce dernier aspect, par contre, il y a une différence avec le couplage local. Pour cette valeur de phase ($\phi = \pi$), les diagrammes spectro-temporels présentent aussi des structures intéressantes (Fig. 2.13).

Les simulations numériques montrent aussi qu'une perturbation s'atténuera avec un temps d'autant plus long que la phase est proche de π . Cela est illustré sur la figure 2.14. À $t = 4000$, on perturbe la solution stationnaire en augmentant sa partie réelle de 25% : $Re[e(z, t)] = Re[e(z, t)](1 + 0.25)$. En $\phi = \frac{\pi}{4}$ (colonne de gauche), le système relaxe vers son équilibre, le taux de décroissance est positif. En $\phi = \pi$ (colonne de droite), la perturbation ne décroît pas. En terme de dynamique non-linéaire, le système en $\phi = \pi$ est dit marginalement stable, c'est à dire que le taux de décroissance d'une perturbation est égale à zéro, le résultat est une modulation d'amplitude constante.

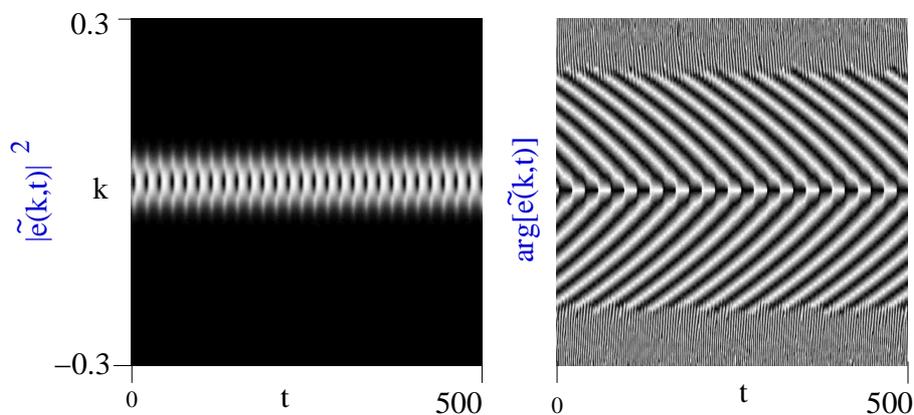


FIG. 2.13: Diagrammes spectro-temporels de $\tilde{e}(k, t)$: module (gauche) et argument (droite) pour une phase $\phi = \pi$.

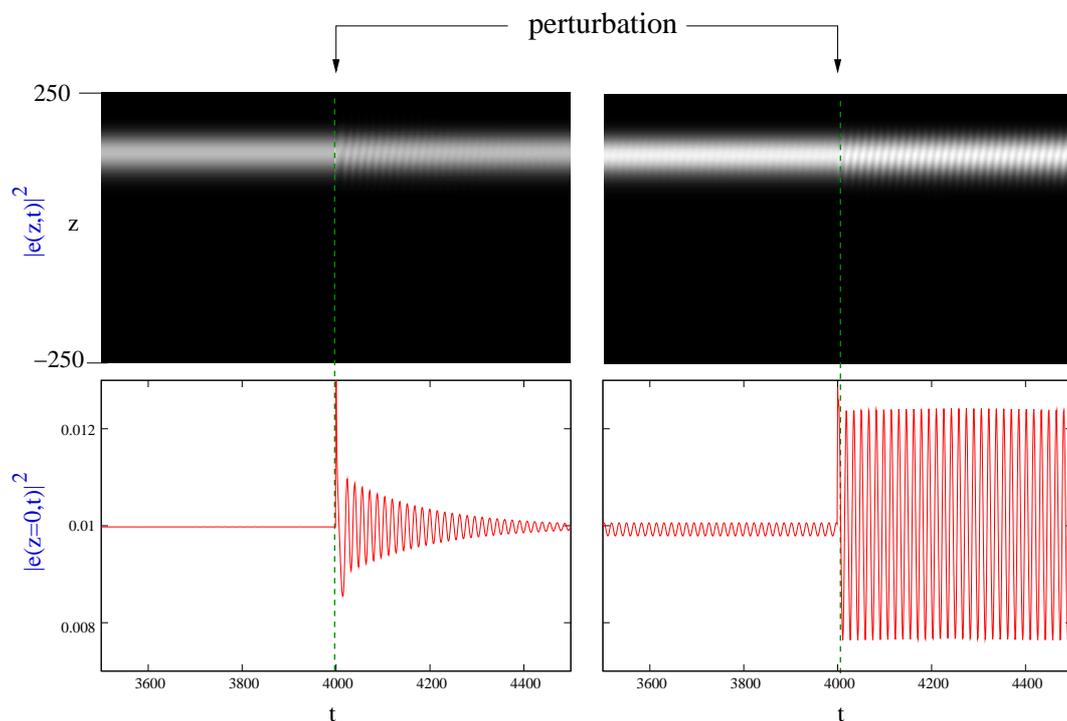


FIG. 2.14: Ligne du haut : évolution spatio-temporel du module de $e(z, t)$. Ligne du bas : évolution temporel du module en $z = 0$, $|e(z = 0, t)|^2$. Colonne de gauche : $\phi = \frac{\pi}{4}$. Colonne de droite : $\phi = \pi$. À $t = 4000$, nous perturbons le système en augmentant la partie réelle de la solution stationnaire de 25%. Paramètres : $R = 1$, $v = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 60$, $\eta = 10^{-20}$.

2.1.3.3.2 Lien entre la solution qui s'installe au dessus du seuil convectif/absolu et la manière dont se déstabilise la solution $e(z, t) = 0$ au seuil. De la même manière que pour l'équation à couplage local, nous allons comparer les valeurs de f_i [Eq. (2.19)], à la phase des solutions obtenues numériquement.

La figure 2.15 présente en fonction de la phase ϕ à la fois les valeurs de $\frac{d(\arg[e(z=0, t)])}{dt}$ mesurées sur les courbes numériques et la courbe analytique $f_i(k_r^*, k_i^*)$ [Eq. (2.19)]. Les simulations numériques ont été faites en variant la phase à la fois de manière croissante ($0 \rightarrow 2\pi$) et de manière décroissante ($2\pi \rightarrow 0$).

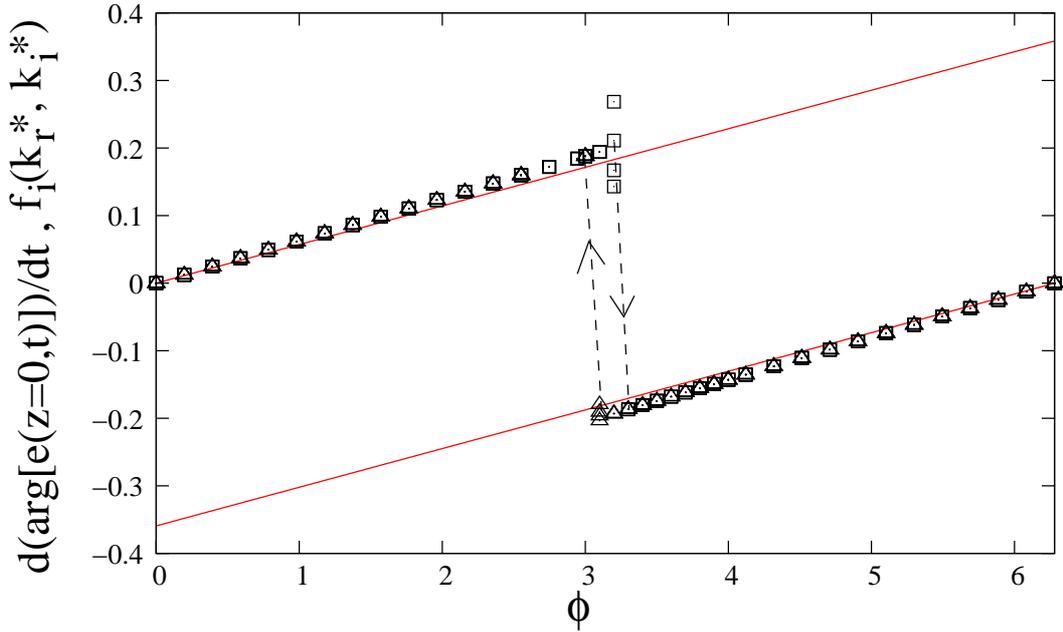


FIG. 2.15: Évolution de f_i (résultats analytiques, ligne rouge) et de la pente de $\arg[e(z, t)]$ en fonction de la phase (résultats numériques). Les simulations ont été réalisées en faisant varier la phase de manière croissante (carré) et de manière décroissante (triangle). Les traits en pointillés indiquent le passage entre les valeurs positives et négatives. Paramètres : $R = 1$, $\nu = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 60$, $\eta = 10^{-20}$. En chaque point, l'intégration numérique est effectuée sur une durée $\Delta t = 20000$.

Comme pour le couplage local, on constate que les valeurs de $f_i \neq 0$ ont une signature sur les simulations numériques. Ceci est d'autant plus intéressant que le critère d'instabilité convective/absolu utilisé pour obtenir les expressions analytiques de f_i n'est pas un bon critère pour connaître le seuil d'instabilité du système. Autrement dit, le critère d'instabilité convective/absolu ne permet pas de prédire si le système est calme ou turbulent ; en revanche, si on sait qu'il est stable, nous venons de voir qu'il permet de prédire le comportement du système.

Par ailleurs, contrairement au couplage local, les simulations montrent que la zone de bistabilité est beaucoup plus petite. D'autres simulations montrent que le cycle hystérésis dépend fortement de la vitesse de balayage du paramètre ϕ (plus la vitesse de balayage est rapide, plus le cycle hystérésis est grand). La question de savoir si la bistabilité existe

réellement dans le système (même si sa zone est extrêmement petite), ou si l’observation de cet effet provient d’une limitation technique liée à des régimes transitoires très longs, restera ouverte. Dans ce dernier cas, cela signifierait que le système possède la dynamique associée au maximum global de la fonction f_r .

Nous allons maintenant nous intéresser au cas particulier d’une rétroaction en opposition de phase ($\phi = \pi$). Pour cette valeur de phase précise, les simulations numériques montrent que le module $|e(z, t)|^2$ a un comportement périodique (Fig. 2.12 et Fig. 2.14). On peut trouver une interprétation simple en reprenant le problème du système linéarisé autour de la solution $e(z, t) = 0$. En calculant l’évolution d’une perturbation de la solution stationnaire $e(z, t) = 0$, au seuil convectif/absolu en $\phi = \pi$, nous trouvons que son module, en un z fixé, présente un comportement périodique [Eq. (2.21)]. Les deux termes de phases qui apparaissent dans cette équation correspondent aux deux maximums de la fonction f_r , qui passent par zéro en même temps, pour $\phi = \pi$ [Eq. (2.18)].

$$e(z = 0, t) \propto e^{if_{i1}t} + e^{if_{i2}t} \quad (2.20)$$

$$|e(0, t)|^2 \propto 2(1 + \cos[(f_{i1} - f_{i2})t]) \quad (2.21)$$

Nous allons vérifier cette interprétation en comparant les valeurs de la fréquence de modulation $(f_{i1} - f_{i2})/2\pi$ aux valeurs numériques. La figure 2.16 présente en fonction du décalage de la rétroaction a la période de $|e(z = 0, t)|^2$ mesurée sur les courbes numériques, et la courbe analytique $(\frac{2\pi}{f_{i1} - f_{i2}})$ [Eq. (2.21)].

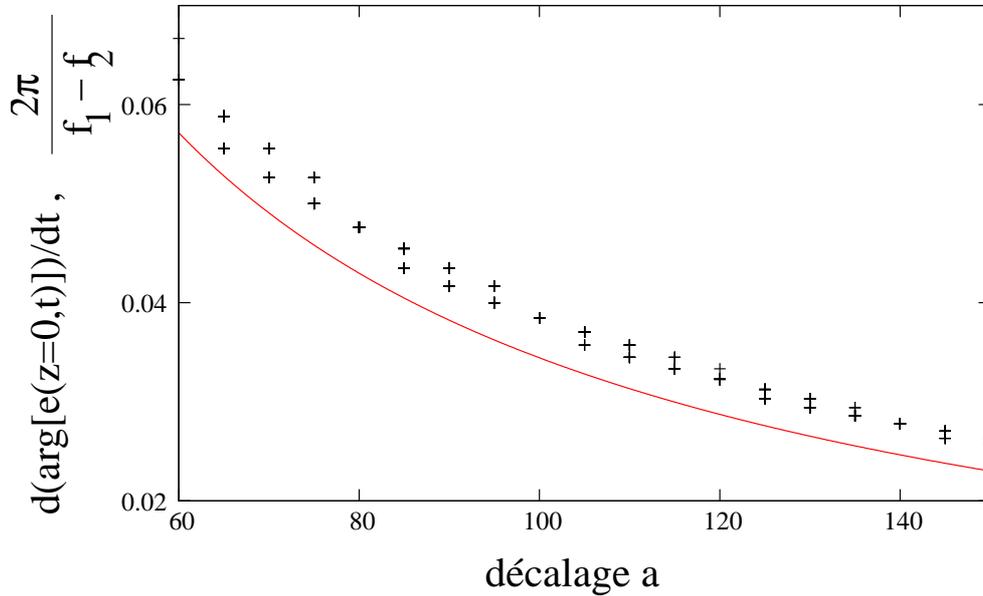


FIG. 2.16: Évolution de $\frac{2\pi}{f_{i1} - f_{i2}}$ (ligne rouge, résultats analytiques, Eq. (2.21)) et de la période de $|e(z, t)|^2$ en fonction de la phase (croix noires, résultats numériques). Paramètres : $R = 1$, $v = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 60$, $\eta = 10^{-20}$.

Nous voyons ici encore qu’il y a un bon accord entre les résultats numériques et l’analyse de stabilité linéaire de la solution $e(z, t) = 0$.

2.1.4 Conclusion

En résumé de cette section sur l'équation de Ginzburg-Landau, nous avons vu que l'on pouvait contrôler les régimes instables en appliquant une rétroaction avec un décalage spatial. En particulier, on s'attend à ce qu'une amplitude de rétroaction juste supérieure au niveau de bruit soit suffisante pour contrôler les régimes instables. Le critère convectif/absolu permet de prévoir quand le régime sera contrôlé, dans le cas du couplage local. Obtenir une expression analytique dans cas du couplage global est plus compliqué, et reste un problème ouvert. Lorsque la solution présente une structure interne sous la forme d'une modulation, il est nécessaire de prendre en compte un terme de phase dans la rétroaction, dont l'effet peut aussi être interprété dans le cadre de l'étude du seuil convectif/absolu. L'effet principal de la phase est de décaler la fréquence centrale du spectre (l'argument évolue linéairement en fonction du temps). Dans le cas particulier d'un couplage global et d'une opposition de phase de la rétroaction, on observe des régimes oscillants.

2.2 Application au laser à électrons libres

La technique appelée *Coherent Photon Seeding* (CPS) [10, 66, 67, 68] est connue pour réduire fortement la largeur spectrale des lasers à blocage actifs et des oscillateurs paramétriques optiques pompés de manière synchrone [69]. La technique CPS consiste en une rétroaction optique de faible amplitude avec un délai proche du temps d’aller/retour dans la cavité τ_T , ou d’un multiple entier de celui-ci. Néanmoins, cette technique n’a pas été étudiée du point de vue de dynamique non linéaire [66, 67, 68], excepté dans les travaux de Morgner et Mitschke [10]. Dans ces études, l’interprétation est donnée du point de vue de l’optique : le miroir rajouté forme une nouvelle cavité avec le premier miroir du laser et oblige l’émission laser à remplir de nouvelles conditions limites, ce qui a pour conséquence un affinement du spectre.

La technique CPS peut être modélisée par l’addition d’un terme $\alpha e(\theta + a)$ à l’équation décrivant l’évolution de l’enveloppe de l’impulsion du LEL [Eq. (2.22)], avec α la fraction de la lumière réinjectée dans le mode par la rétroaction, et $-a$ le délai de la rétroaction modulo τ_R . Nous allons montrer que la technique CPS peut être comprise dans le cadre de nos études.

Dans cette section nous allons appliquer, pour la première fois à notre connaissance, la technique CPS au laser à électrons libres. Les équations et le dispositif expérimental du système avec rétroaction seront tout d’abord exposés, puis nous présenterons les résultats expérimentaux, analytiques et numériques. Au chapitre précédent, nous avons vu que la dynamique du LEL en fonction de la dérive peut se décomposer en cinq zones. Dans un premier temps, nous étudierons l’effet de la rétroaction dans les zones où la dynamique du LEL est proche de celle de l’équation de Ginzburg-Landau, c’est à dire dans les zones où l’amplitude des impulsions ne varie pas fortement (zones 1,3,5). Ensuite, nous étudierons l’effet de la rétroaction dans les zones 2 et 4, où le régime est dit pulsé. Finalement, on tentera d’appliquer au LEL les études faites sur l’équation de Ginzburg-Landau sur l’effet d’une phase dans la rétroaction. Les figures expérimentales ont été obtenues à UVSOR par S. Bielawski, C. Sz waj, M. Hosaka, A. Mochihashi et M. Katoh. Le dispositif expérimental utilisé pour visualiser en temps réel l’intensité des impulsions et l’intensité du spectre des impulsions est décrit en annexe.

2.2.1 Modèle

L'équation d'évolution de l'enveloppe de l'impulsion laser avec rétroaction devient :

$$e_T(\theta, T) = -e - ve_\theta + Gf(\theta)(e + e_{\theta\theta}) + \overbrace{\alpha e(\theta - a, T)e^{i\phi}}^{\text{rétroaction}} + \sqrt{\eta}\xi(\theta, T) \quad (2.22)$$

Les autres équations restent inchangées. La rétroaction contient un terme de phase, puisque la variable $e(\theta, T)$ représente l'enveloppe de l'impulsion laser.

2.2.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 2.17. Ajouter une rétroaction avec un décalage est en théorie simple, cela consiste à placer un miroir en sortie du laser, à une distance proche de la longueur de la cavité (L)⁵. Les impulsions de la rétroaction et de la cavité se recouvriront après une durée proche de celle d'un aller/retour dans la cavité. Pour varier la valeur du décalage spatial, il suffit de changer la distance du miroir de rétroaction (δL). Les conditions d'utilisation du laser sont les mêmes que celles décrite au chapitre précédent. Tout les paramètres sont contrôlables sauf la valeur de la phase, car la distance L n'était pas contrôlée de manière interférométrique.

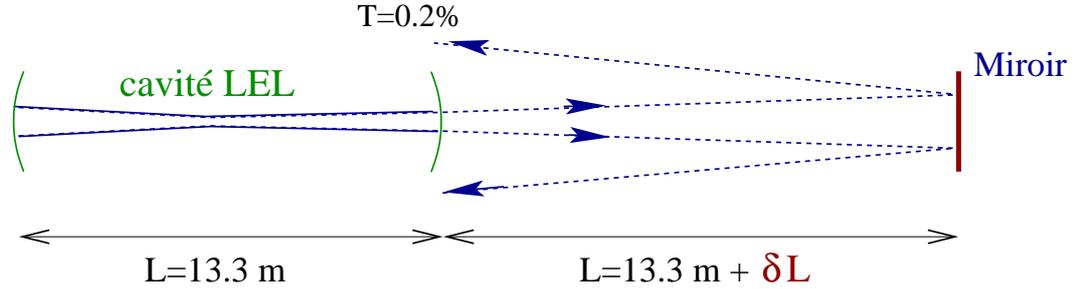


FIG. 2.17: Schéma du dispositif expérimental utilisé pour contrôler le LEL : en sortie de cavité, un miroir plan est placé à une distance proche de la taille de la cavité laser $L = 13.3$ m.

En utilisant le formalisme des matrices ABCD nous pouvons calculer la valeur de l'amplitude de l'impulsion réinjectée par la rétroaction. Cette valeur est obtenue en tenant compte du coefficient de réflexion des miroirs et du recouvrement transverse entre l'impulsion dans la cavité et l'impulsion provenant de la rétroaction. Les détails du calcul sont donnés en annexe. Le résultat obtenu indique que le coefficient de gain α de la rétroaction est faible : $\alpha^2 \simeq 0.5 \times 10^{-8}$. Nous utiliserons cette valeur dans les simulations numériques.

⁵Les miroirs de la cavité étant placés dans le vide, il n'est pas possible de placer le miroir de rétroaction près du miroir de sortie de la cavité.

2.2.3 Résultats numériques et expérimentaux en zones de grande dérive

La figure 2.18 présente un exemple de contrôle obtenu numériquement lorsque la dérive est forte, en zone 5 du LEL. Nous constatons que le contrôle fonctionne, les fluctuations sont supprimées dans une large mesure⁶. Pour la valeur bien précise de la phase de la rétroaction $\phi = \pi$, on observe sur les diagrammes spatio-temporels et spectro-temporels, des motifs avec une structure interne similaire à celle obtenue avec l'équation de Ginzburg-Landau avec un couplage global.

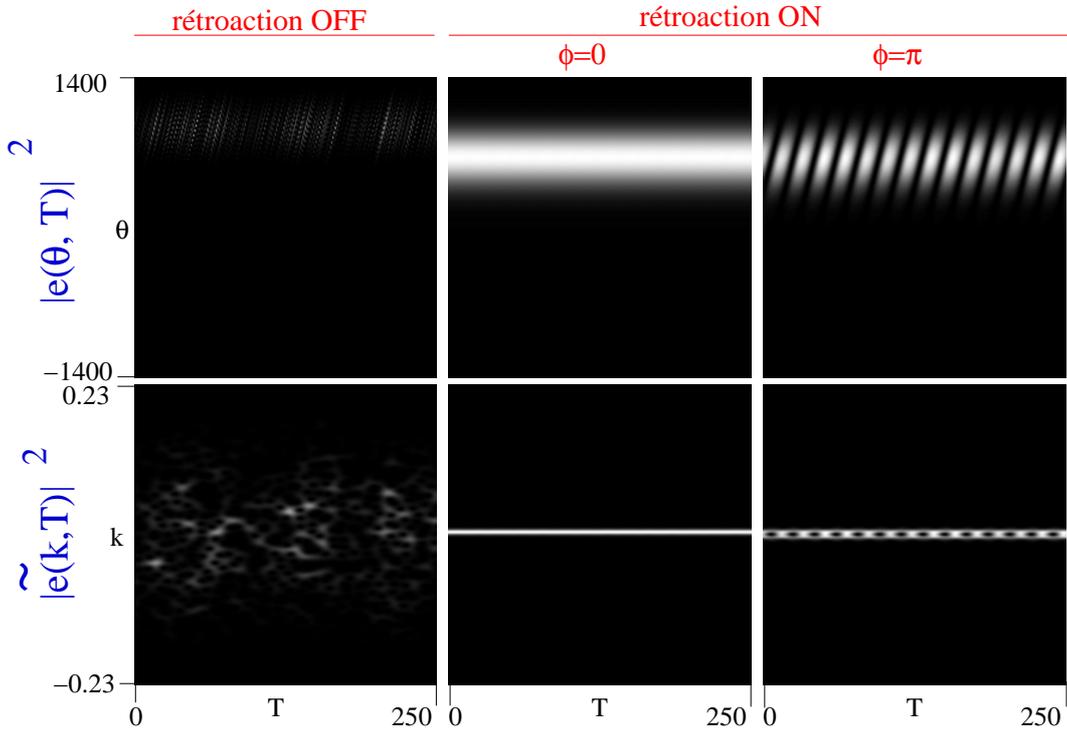


FIG. 2.18: Ligne du haut : diagrammes spatio-temporels de l'intensité $|e(\theta, T)|^2$. Ligne du bas : diagrammes spectro-temporels du module du spectre $|\tilde{e}(k, T)|^2$. Sur la première colonne, il n'y a pas de rétroaction. Sur la deuxième colonne la rétroaction est en phase ($\phi = 0$). Sur la troisième colonne la rétroaction est en opposition de phase ($\phi = \pi$). Paramètres : $v = 45, \alpha = 10^{-3}, a = 800, A = 2.17, T_s = 263, \sigma_b = 900, \eta = 10^{-20}$.

⁶le coefficient de gain α de la rétroaction a été augmenté d'un facteur 10 par rapport à la valeur calculée théoriquement (section 2.2.2).

La figure 2.19 présente un exemple de contrôle obtenu expérimentalement lorsque la dérive est forte, en zone 5 du LEL. Le spectre avec rétroaction montre une diminution des fluctuations très nette : la largeur spectrale des impulsions est très réduite. Sans rétroaction, le spectre est trop large pour être entièrement enregistré (Fig. 2.19 c) alors qu'avec rétroaction le spectre est trop fin pour que tous les détails soient observables (Fig. 2.19 d,g,h).

Ces enregistrements ont été obtenus successivement sans changer les conditions de l'expérience (valeur de la dérive, distance du miroir) ; néanmoins on observe quand même des comportements très différents les uns des autres (Fig. 2.19 b,e,f). toutefois un paramètre dans le système n'est pas contrôlable : la phase de la rétroaction du miroir extra-cavité. Ce miroir est soumis à des fluctuations de l'environnement, qui même si elles sont faibles, peuvent être suffisantes pour faire varier la phase de la rétroaction puisqu'une vibration de $0.5 \mu\text{m}$ fait passer cette phase de 0 à 2π . Une interprétation serait que ces différentes images sont la conséquence de différentes valeurs de la phase de la rétroaction. Cependant, les simulations numériques avec des conditions similaires et avec des valeurs de phase différentes ne reproduisent pas ces comportements (Fig. 2.18). Nous allons voir que nous devons prendre en compte un autre élément pour parvenir à retrouver ces images numériquement (voir section 2.2.5).

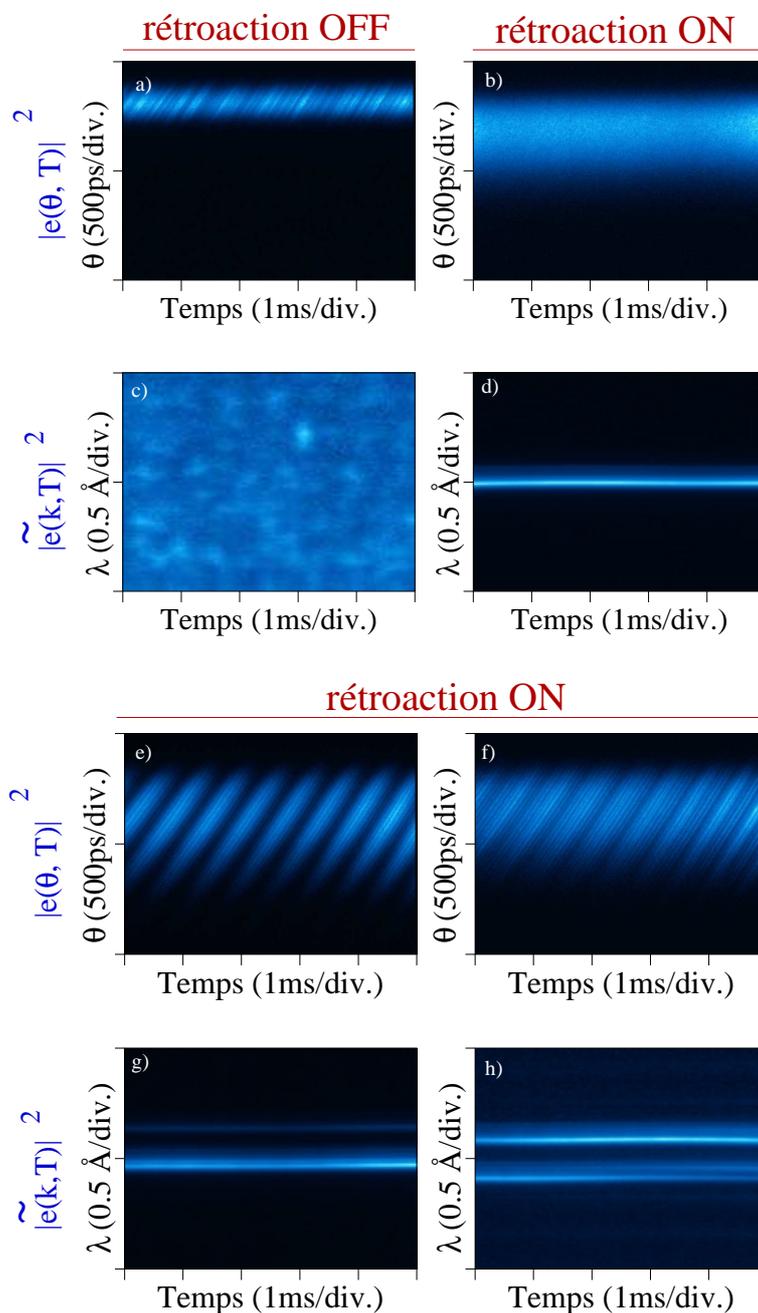


FIG. 2.19: Évolution de l'intensité des impulsions laser (a,b,e,f) et de l'intensité du spectre des impulsions (c,d,g,h). Ces images ont été enregistrées sans changer volontairement les conditions de l'expérience. Paramètres : $\Delta\nu_{RF} = 50.2$ Hz, $I = 22$ mA, $a = 40$ mm, délai de la rétroaction $\simeq 130$ ps, $\alpha^2 \simeq 0.5 \times 10^{-8}$.

2.2.4 Effet de la face arrière du miroir de sortie de la cavité laser

En étudiant en détail les enregistrements sans rétroaction, nous nous sommes aperçus que la symétrie entre la dérive positive ($v > 0$) et la dérive négative ($v < 0$) n'était pas toujours respectée (Fig. 2.20). Sur ces images, nous voyons que dans le cas de la dérive négative le spectre est étroit et régulier alors que pour la dérive positive, il est large, avec des trous.

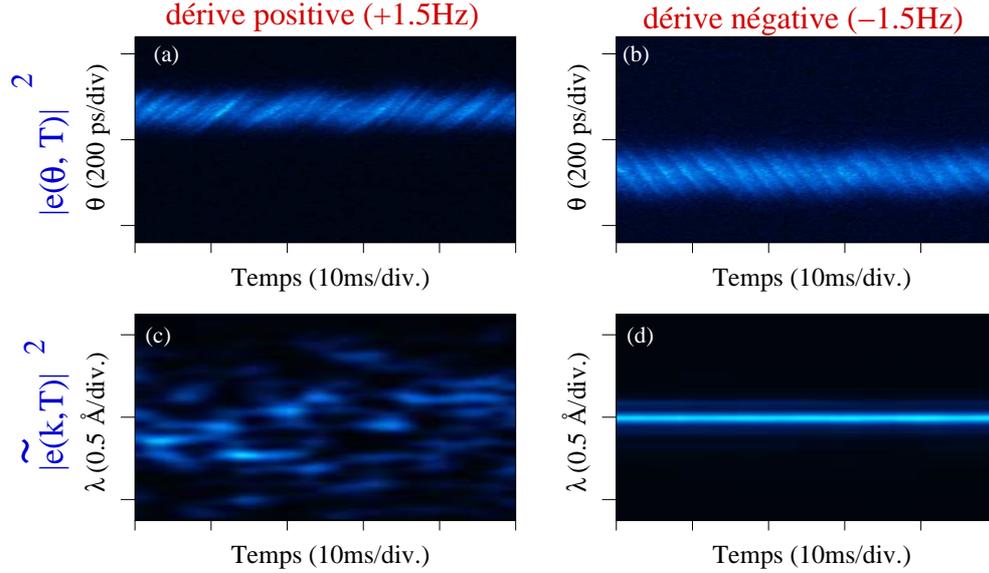


FIG. 2.20: Évolution de l'intensité des impulsions laser (a et b) et de l'intensité du spectre des impulsions (c et d) sans rétroaction pour une dérive positive (a, c) et négative (b,d). $\Delta\nu_{RF} = +/- 1.5$ Hz.

L'intégration des équations du LEL dans des conditions "similaires" montrent qu'on devrait effectivement s'attendre à avoir une symétrie entre les dérives positives et négatives (Fig. 2.21).

Les images précédentes des enregistrements expérimentaux (Fig. 2.20) ressemblent à une stabilisation par une rétroaction avec décalage spatial, et nous ont amené à chercher un élément qui pourrait jouer le rôle de rétroaction. Une hypothèse est que la rétroaction pourrait venir du miroir de sortie qui, contrairement au deuxième miroir de cavité, n'a pas de traitement anti-reflet (Fig. 2.22).

En calculant avec le formalisme des matrices ABCD le coefficient de gain α de la rétroaction⁷ et en prenant un coefficient de réflexion de 4% (interface verre/air), nous avons calculé que l'amplitude de l'impulsion réinjectée dans le mode de la cavité a une valeur très proche de celle provenant du miroir extra-cavité : $\alpha^2 = 0.496 \times 10^{-8}$. Des simulations numériques avec des paramètres similaires à l'expérience ($\alpha = 10^{-4}$, $a = -600$, $v = -4$) montrent que la réflexion sur la face arrière du miroir peut effectivement rendre régulier le système (Fig. 2.23 b,d). Comme pour les images expérimentales (Fig. 2.20), l'effet

⁷détails en annexe

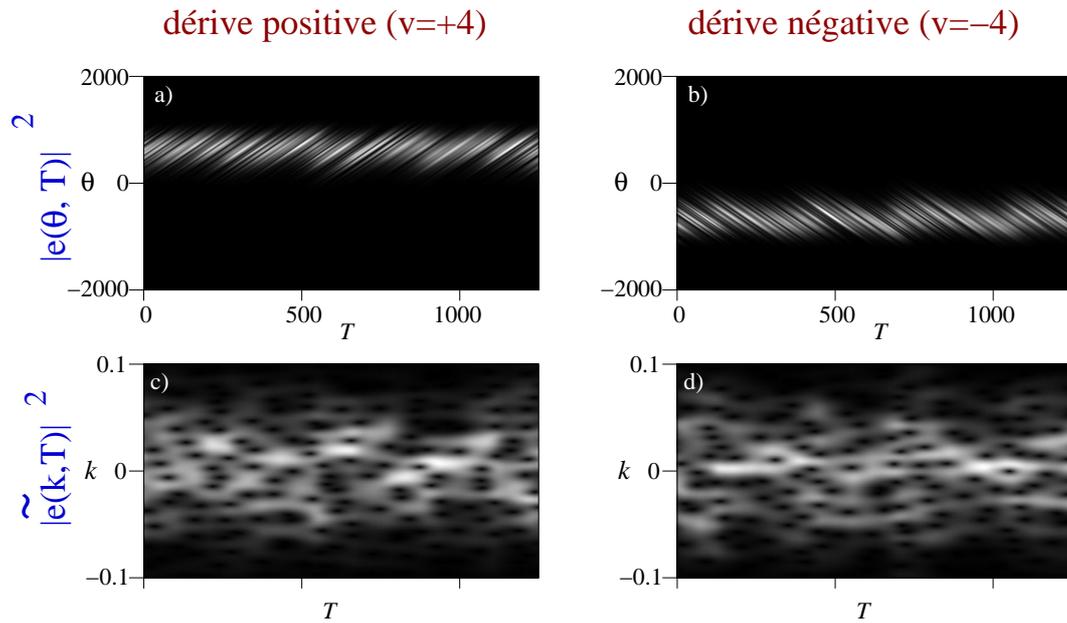


FIG. 2.21: Évolution de l'intensité des impulsions laser (a et b) et de l'intensité du spectre des impulsions (c et d) sans rétroaction, pour une dérive négative (a,c) et une dérive positive (b,d). Paramètres : $\sigma_b = 1200$, $T_s = 263$, $A = 5$, $\eta = 10^{-10}$

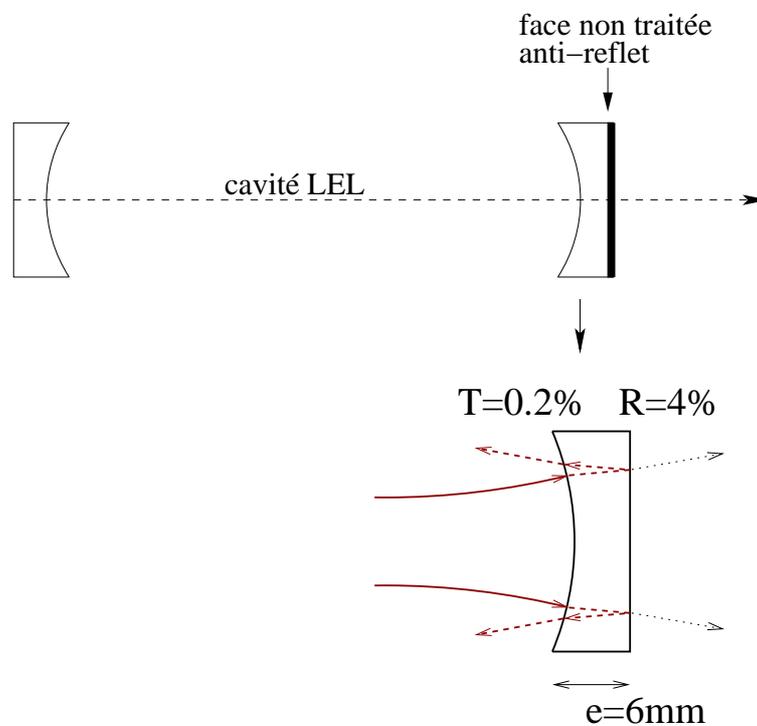


FIG. 2.22: La face arrière du miroir de sortie de la cavité LEL n'a pas de traitement anti-reflet. La réflexion joue un rôle de rétroaction avec un décalage spatial.

stabilisant n'apparaît que pour des dérives négatives, le comportement avec des dérives positives est toujours irrégulier (Fig. 2.23 a,c).

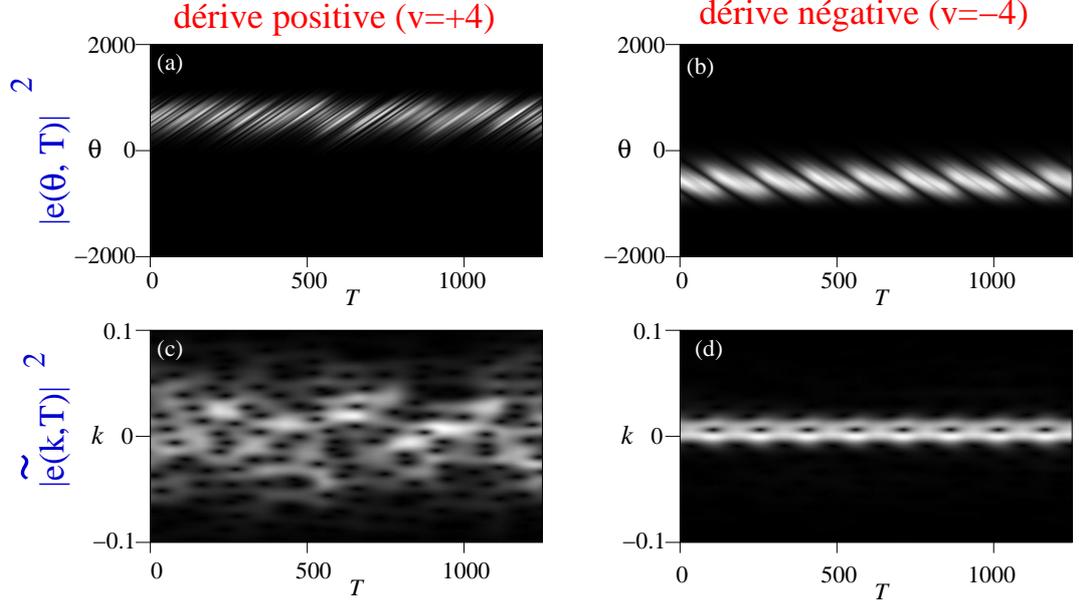


FIG. 2.23: Évolution de l'intensité des impulsions laser (a et b) et de l'intensité du spectre des impulsions (c et d) avec une rétroaction, pour une dérive négative (a,c) et une dérive positive (b,d). Paramètres : $\sigma_b = 1200$, $T_s = 263$, $A = 5$, $\eta = 10^{-10}$, $a = 600$, $\alpha = 10^{-4}$, $\phi = 0$.

2.2.5 Effet de deux rétroactions dans la zone de grande dérive

Ainsi, tous les résultats expérimentaux ont été obtenus avec une rétroaction non voulue provenant de la face arrière du miroir de sortie de la cavité laser. En prenant en compte cet élément, nous avons réussi à reproduire numériquement les comportements que nous n'arrivions pas à retrouver précédemment (Fig. 2.19). Les résultats sont présentés sur la figure 2.25. Dans ces simulations numériques, deux rétroactions ont été appliquées, celle provenant du miroir de sortie ϕ_2 est fixe et celle provenant du miroir extra-cavité ϕ_1 prends différentes valeurs de phase [Eq. (2.23)] (Fig. 2.24)

$$e_T(\theta, T) = -e - ve_\theta + Gf(\theta)(e + e_{\theta\theta}) + \sqrt{\eta}\xi(\theta, T) \quad (2.23)$$

$$+ \alpha_1 e(\theta - a_1, T)e^{i\phi_1} + \alpha_2 e(\theta - a_2, T)e^{i\phi_2} \quad (2.24)$$

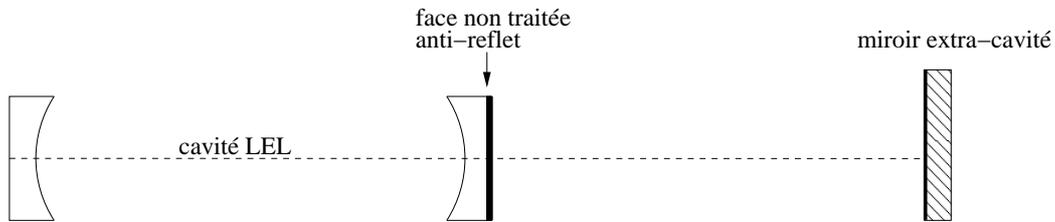


FIG. 2.24: Deux rétroactions interviennent : celle de la face arrière du miroir de sortie et celle du miroir extra-cavité.

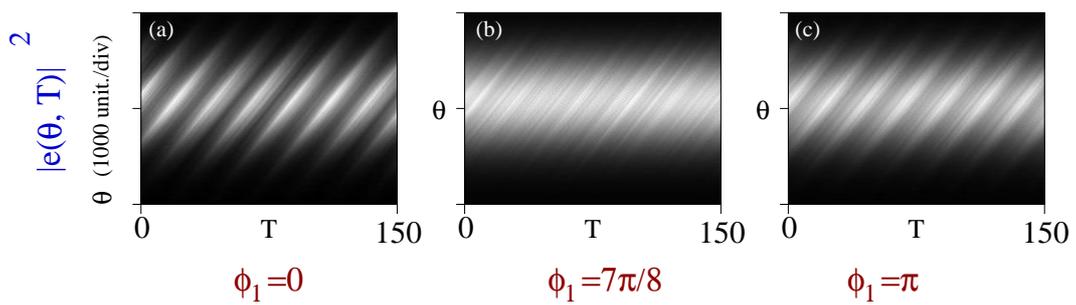


FIG. 2.25: Évolution spatio-temporelle de $|e(\theta, T)|^2$ dans un système avec deux rétroactions où la phase de la première varie : (a) $\phi_1 = 0$, (b) $\phi_1 = \frac{7\pi}{8}$, (c) $\phi_1 = \pi$. Paramètres : $v = 220$, $A = 2.17$, $\sigma_b = 900$, $T_s = 263$, $\eta = 10^{-10}$, $\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^{-2}$, $a_1 = 2000$, $a_2 = 500$, $\phi_2 = \pi/2$.

2.2.6 Suppression des grandes fluctuations du régime pulsé

Nous allons maintenant nous intéresser à l'effet de la rétroaction lorsque le régime du LEL est pulsé, c'est à dire dans les zones où l'amplitude des impulsions fluctue de manière importante à quelques centaines de Hertz (zones 2 et 4) (Fig. 2.26). Les résultats ne sont à priori pas évident à prédire, car les résultats montrés jusqu'à présent, sur l'équation de Ginzburg-Landau ou sur le LEL, correspondaient à des cas où les fluctuations d'amplitude restaient relativement faibles.

La figure 2.26 présente les résultats d'une expérience où le délai de la rétraction a été fixé et la valeur de la dérive est balayée continûment. La puissance des l'impulsions laser est enregistrée avec une photodiode.

Nous voyons que la rétroaction permet de supprimer les grandes fluctuations. On constate qu'un délai positif ($a > 0$) permet de contrôler une dérive positive ($v > 0$), et vice-versa. Cette symétrie se retrouve également dans les équations [Eq. (2.22)].

Lorsque la position du miroir est balayée entre -3 cm et $+3$ cm, il y a une position où la rétroaction n'a pas d'effet sur la dynamique du LEL, c'est la position associée à un délai nul. Cette information permet de connaître relativement précisément la position du miroir externe associée à un délai nul.

Nous venons de voir que les grandes fluctuations ont été supprimées; nous allons maintenant regarder en détails la structure des impulsions pour savoir si les fluctuations d'amplitudes moyennes ont aussi été supprimées. Les deux figures suivantes présentent un exemple d'évolution de l'intensité des impulsions, et de l'intensité du spectre des impulsions, obtenu expérimentalement (Fig. 2.27) et numériquement (Fig. 2.28).

On constate que la rétroaction a un effet similaire à celui en zones non pulsées, le régime est régulier, et le spectre étroit. Une interprétation possible de l'origine de la modulation de l'intensité sur l'image (b) de la figure 2.27, peut être que la rétroaction n'est pas en phase avec l'impulsion laser dans la cavité. En faisant l'hypothèse que l'analogie avec l'équation de Ginzburg-Landau à couplage global est valable, deux cas sont alors possibles. Soit on est dans le cas d'une opposition de phase ($\phi = \pi$) et on observe un régime permanent. Soit la phase est différente de π , et on observe un régime transitoire.

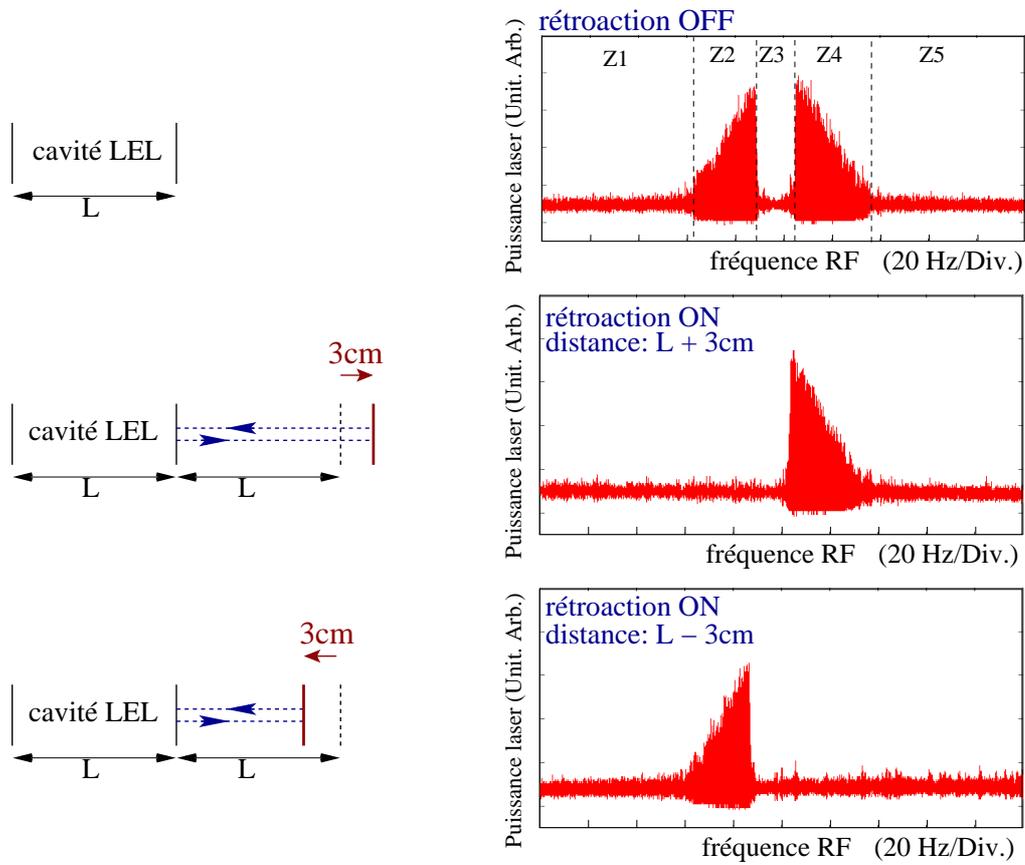


FIG. 2.26: Puissance en sortie du laser, enregistrée par une photodiode, en fonction de la dérive. Ligne du haut : pas de rétroaction. Ligne du milieu : rétroaction avec un délai négatif. Ligne du bas : rétroaction avec un délai positif.

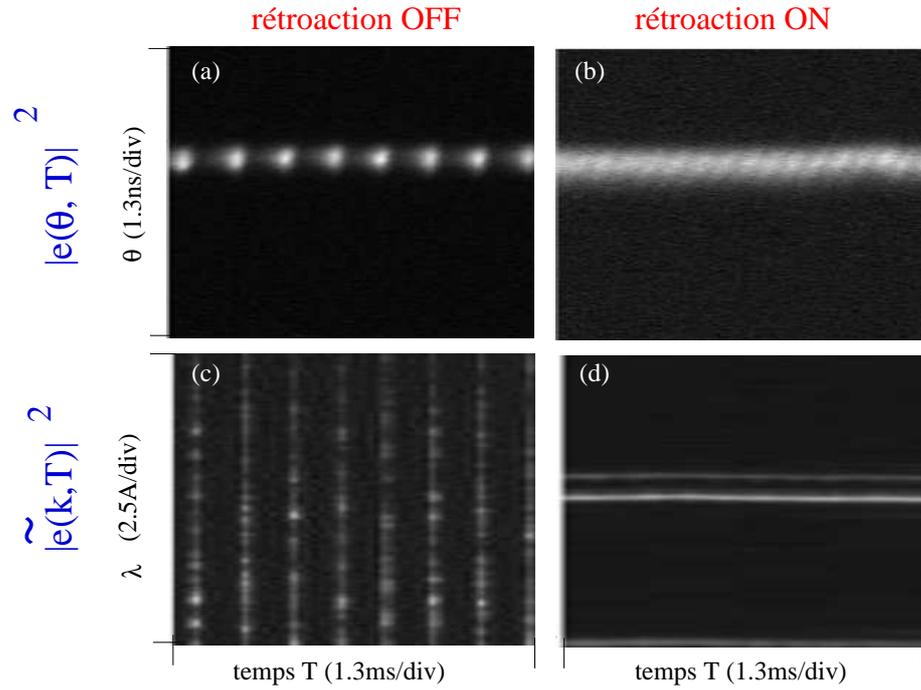


FIG. 2.27: Résultats expérimentaux. Intensité des impulsions laser (a,b) et intensité du spectre des impulsions (c,d) avec et sans rétroaction. $\Delta\nu_{RF} = 7.9$ Hz, délai de la rétroaction $\simeq 60$ ps, $\alpha^2 \simeq 0.5 \times 10^{-8}$.

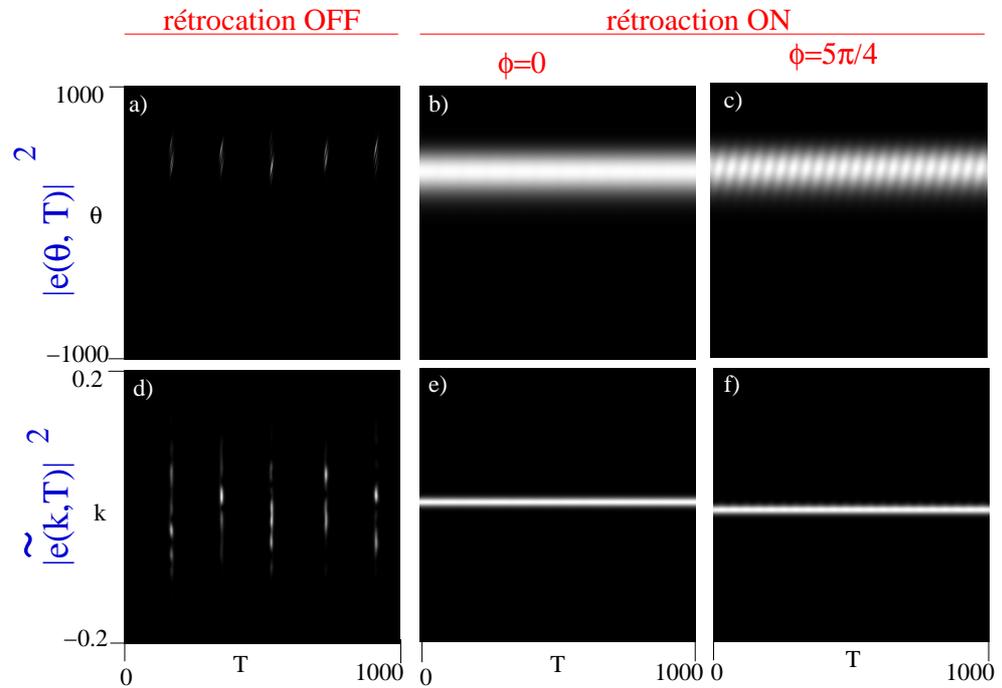


FIG. 2.28: Résultats numériques. Intensité des impulsions laser (a,b,c) et intensité du spectre des impulsions (d,e,f) avec et sans rétroaction. (b,e) la rétroaction est en phase ($\phi = 0$). (c,f) la phase de la rétroaction vaut ($\phi = 5\pi/4$). La modulation observée en (c) est transitoire. Paramètres : $v = 10$, $\alpha = 10^{-3}$, $a = 450$, $A = 2.17$, $T_s = 263$, $\sigma_b = 900$, $\eta = 10^{-20}$.

2.2.7 Étude quantitative de l’effet de la phase de la rétroaction.

Nous allons maintenant tenter de transposer sur le LEL les résultats obtenus sur l’équation de Ginzburg-Landau, sur l’effet d’une phase dans la rétroaction (section 2.1.3), l’objectif étant de pouvoir comprendre de manière quantitative l’effet de la phase dans la rétroaction. Cette étude sera analytique et numérique.

En faisant l’hypothèse d’une amplitude constante du gain G ($G = G_c$)⁸, l’équation précédente peut se mettre sous une forme proche de l’équation de Ginzburg-Landau (GL)[Eq. (2.25, 2.26)]. Comme à “l’équilibre” et pour une solution non nulle le gain G_c est proche de l’unité, nous prendrons $G_c = 1$. Si nous faisons l’hypothèse que les variations spatiales ($f(\theta), g(\epsilon z)$) n’ont pas d’effets prédominants, nous pouvons appliquer les résultats obtenus sur l’équation de Ginzburg-Landau au LEL juste en remplaçant R par zéro ($G_c - 1 = 0$).

$$\begin{aligned} \text{LEL : } e_T(\theta, T) &= -ve_\theta + e[G_c f(\theta) - 1] + G_c f(\theta) e_{\theta\theta} + \alpha e(\theta - a, T) e^{i\phi} + \sqrt{\eta} \xi(\theta, T) \\ \text{GL : } e_t(z, t) &= -ve_z + Rg(\epsilon z) e + e_{zz} - Se + \alpha e(z - a, t) e^{i\phi} + \sqrt{\eta} \xi(z, t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nous allons vérifier si avec les hypothèses formulées, nous pouvons obtenir des informations quantitatives sur l’effet de la phase de la rétroaction. Nous ferons cette étude sur les différentes zones du LEL, par valeur croissante de la dérive v .

2.2.7.1 zone de faible dérive

Pour une valeur de dérive faible ($v = 1$), nous avons tracé en fonction de la phase ϕ de la rétroaction, le coefficient directeur de l’argument de $e(\theta, T)$ en $\theta = 0$, à partir des données numériques et des expressions analytiques [Eq. (2.19)] avec $R = 0$, $v = 1$, $a = 100$ et $\alpha = 10^{-4}$. Les résultats sont présentés figure 2.29.

Nous observons un très bon accord entre la courbe théorique et les résultats numériques. Nous pouvons conclure que proche du seuil de bifurcation, le LEL a un comportement proche de celui de l’équation de Ginzburg-Landau à couplage global.

La phase du champ électrique n’étant pas directement observable expérimentalement, nous allons regarder l’effet de la phase de la rétroaction sur l’intensité du spectre. Nous venons de voir que pour $\phi \neq 0$ l’argument de $e(z, t)$ évolue linéairement en fonction du temps. La signature sur le spectre sera un décalage de la longueur d’onde centrale du spectre des impulsions (Fig. 2.30). Par rapport au cas $\phi = 0$, le décalage sera négatif pour des valeurs de phase comprise ϕ entre 0 et π , et le décalage sera positif pour des valeurs de phase comprise ϕ entre π et 2π .

2.2.7.2 Zone de dérive moyenne

De la même manière que pour la zone de faible dérive, nous allons tester si les résultats analytiques obtenus sur l’équation de Ginzburg-Landau s’appliquent encore en zone de

⁸lorsque le système est stable, le gain a une valeur quasiment constante.

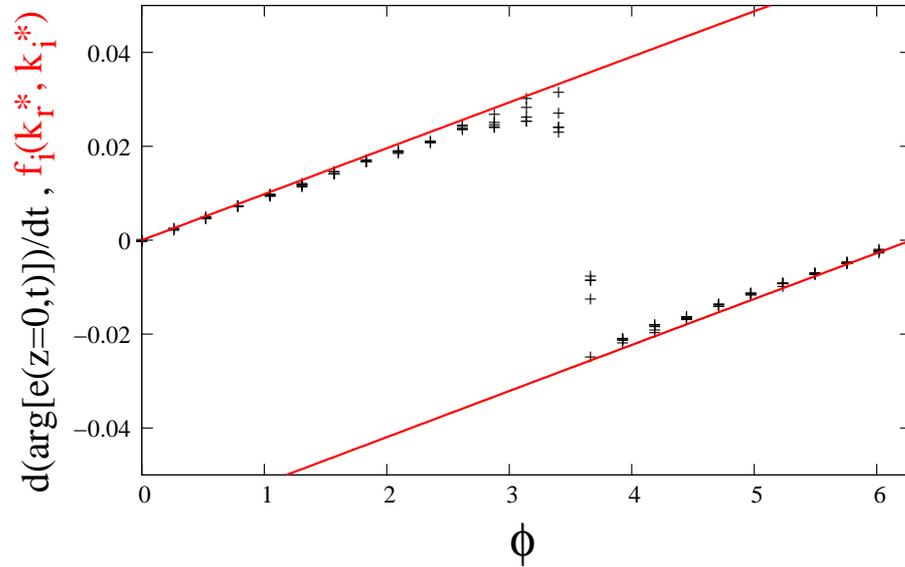


FIG. 2.29: valeurs de f_i (résultat analytique, courbe rouge) et de la dérivée de $\arg[e(\theta, T)]$ (résultat numérique, croix noires), en fonction de la phase de la rétroaction ϕ . Paramètres : $v = 1$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 100$, $A = 2.17$, $T_s = 263$, $\sigma_b = 900$, $\eta = 10^{-20}$, $R = 0$.

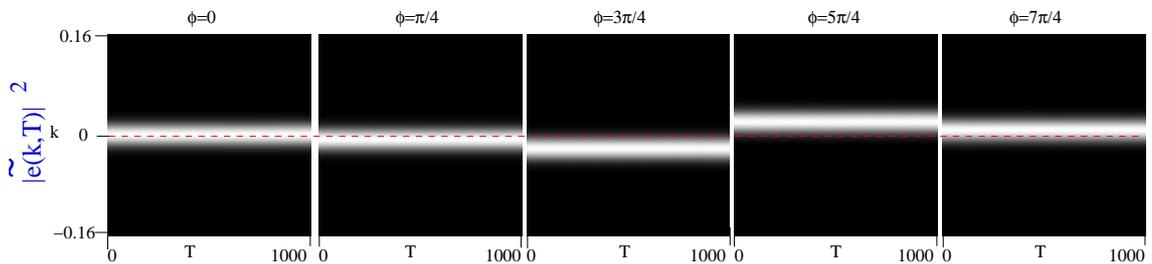


FIG. 2.30: Diagrammes spectro-temporels de l'intensité du spectre $|\tilde{e}(k, T)|^2$ pour différentes valeurs de la phase de la rétroaction : $\phi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Paramètres : $v = 1$, $\alpha = 10^{-4}$, $a = 100$, $A = 2.17$, $T_s = 263$, $\sigma_b = 900$, $\eta = 10^{-20}$.

dérive moyenne (zones 2 et 4). La figure 2.31 présente en fonction de la phase ϕ de la rétroaction, le coefficient directeur de l’argument de $e(\theta, T)$ en $\theta = 0$, à partir des données numériques et des expressions analytiques [Eq. (2.19)] avec $R = 0$, $v = 10$, $a = 450$.

Nous voyons que les valeurs analytiques et numériques se superposent bien. En revanche, les valeurs numériques ne sont que positives contrairement à ce que nous pouvions attendre puisque nous avons vu sur l’équation de Ginzburg-Landau à couplage global que ces valeurs devraient se répartir entre les valeurs positives et négatives de chaque côté de la valeur de phase $\phi = \pi$. La raison est à priori que le temps nécessaire pour atteindre le régime permanent devient très long. Par exemple, il faut une durée $\Delta T = 15000$ pour atteindre le régime permanent avec une phase $\phi = 5\pi/6$ en prenant comme condition initiale la solution stationnaire du système avec une phase $\phi = \pi/2$. Néanmoins, il est surprenant qu’il y ait un si bon accord car le décalage de la rétroaction ($a = 450$) est de l’ordre de l’extension spatiale du système ($\sigma_b = 900$).

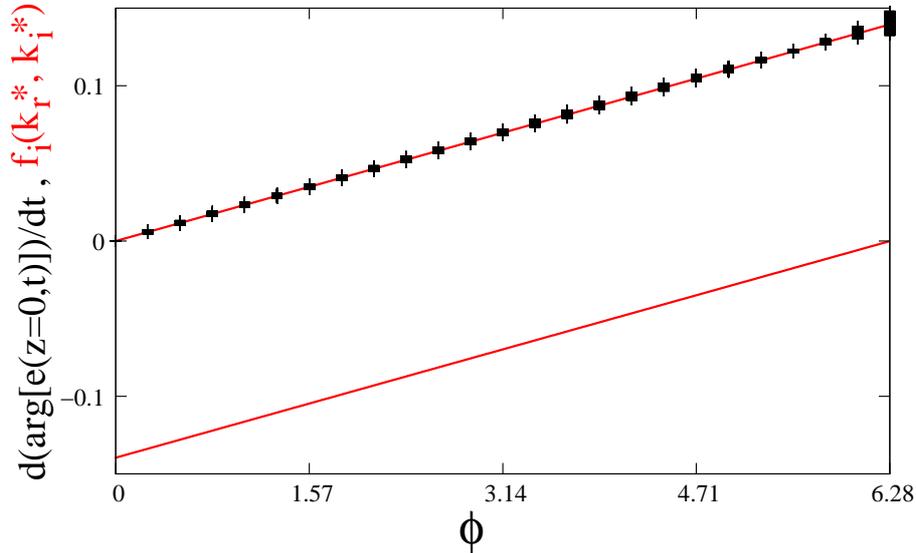


FIG. 2.31: Valeurs de f_i (résultat analytique, courbe rouge) et de la dérivée de $\arg[e(\theta, T)]$ (résultat numérique, croix noires), en fonction de la phase de la rétroaction ϕ . Paramètres : $v = 10, \alpha = 10^{-3}, a = 450, A = 2.17, T_s = 263, \sigma_b = 900, \eta = 10^{-20}, R = 0$.

2.2.7.3 Zone de forte dérive

De la même manière que pour les zones 2, 3 et 4, nous allons vérifier si les résultats analytiques obtenus sur l’équation de Ginzburg-Landau s’appliquent encore. La figure 2.32 présente en fonction de la phase, le coefficient directeur de l’argument de $e(\theta, T)$ en $\theta = 0$ à partir des données numériques et des expressions analytiques [Eq. 2.19] avec $R = 0$, $v = 45$, $a = 800$ et $\alpha = 10^{-3}$.

Nous pouvons faire les mêmes remarques que pour la zone à dérive moyenne : les données analytiques et numériques se superposent bien, néanmoins les valeurs sont seulement positives, à priori parce que les temps pour atteindre la solution stable (c’est à dire les

valeurs négatives lorsque $\phi > \pi$) sont très longs. Toutefois, il est toujours surprenant qu'il reste un si bon accord, car le décalage spatial ($a = 800$) est proche de l'extension spatiale du système ($\sigma_b = 900$).

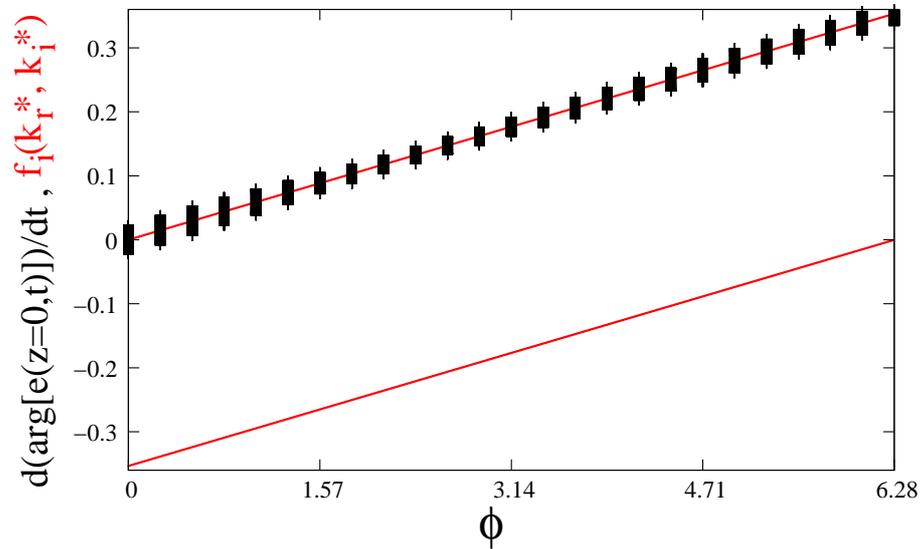


FIG. 2.32: Valeurs de f_i (résultat analytique, courbe rouge) et de la dérivée de $\arg[e(\theta, T)]$ (résultat numérique, croix noires), en fonction de la phase de la rétroaction ϕ . Paramètres : $v = 45, \alpha = 10^{-3}, a = 800, A = 2.17, T_s = 263, \sigma_b = 900, \eta = 10^{-20}, R = 0$.

Conclusion

Les systèmes spatio-temporels soumis à une dérive induisant des structures entretenues par du bruit peuvent être stabilisés en utilisant une simple rétroaction avec un décalage spatial. Le processus implique la création d’une nouvelle solution stationnaire dans le système déterministe associé. Dans le cas d’un couplage local, l’apparition de la solution suffit à rendre le système régulier et un critère analytique peut être trouvé. Dans le cas d’un couplage global, la situation est plus compliquée car le seuil de création d’une solution stable et la baisse de la sensibilité au bruit apparaissent pour des valeurs de paramètres différents. Néanmoins, à côté de ces différences, dans les deux cas le coefficient de gain de la rétroaction nécessaire à la stabilisation est très faible, une amplitude supérieure au niveau de bruit est suffisante. Lorsque la solution possède une modulation interne, il faut prendre en compte le déphasage pouvant intervenir entre la solution dans le système et la solution réinjectée. Dans le cas d’un couplage local, le déphasage a pour conséquence de décaler la longueur d’onde du spectre des impulsions. Dans le cas d’un couplage global, le déphasage peut aussi avoir pour conséquence de moduler l’enveloppe de la solution. Dans les deux cas, une description analytique reproduit bien les comportements observés.

La stabilisation présentée donne aussi un cadre dans lequel on peut étudier la technique de *coherent photon seeding* déjà utilisée sur des lasers à blocage de modes. Nous l’avons appliquée à un laser à électrons libres (LEL), celui de UVSOR à Okazaki au Japon, pour la première fois à notre connaissance. Expérimentalement, rajouter une rétroaction revient à placer un miroir à l’extérieur de la cavité laser. La sensibilité du LEL à une petite rétroaction a pu être vérifiée, et nous avons mis en évidence qu’une stabilisation intervenait “naturellement”, provenant de la réflexion à l’interface verre/air d’une face non traitée d’un miroir de la cavité. Finalement, l’effet de la phase de la rétroaction sur le LEL a révélé une ressemblance quantitative entre celui-ci et l’équation de Ginzburg-Landau.

Rayonnement Synchrotron Cohérent
induit par laser hors zone d'instabilité
CSR

Chapitre 3

Introduction au rayonnement synchrotron émis dans un aimant de courbure et à la trajectoire d'un électron dans un anneau de stockage

Sommaire

3.1	Centre de rayonnement synchrotron UVSOR II	74
3.1.1	Accélération des électrons	74
3.1.2	Anneau de stockage	74
3.2	Rayonnement synchrotron dans un aimant de courbure . . .	76
3.2.1	Rayonnement synchrotron incohérent	76
3.2.2	Rayonnement synchrotron cohérent	78
3.3	Distribution de charge du paquet d'électrons à l'équilibre . .	78
3.4	Trajectoire d'un électron dans l'anneau de stockage	79

Dans cette seconde partie, nous allons nous intéresser à l'interaction entre un paquet d'électrons circulant dans un anneau de stockage et une impulsion provenant d'un laser externe lorsque le système est stable, c'est à dire lorsque que la densité de charge du paquet d'électrons est suffisamment faible pour que le système ait un comportement régulier. Ce chapitre a pour objectif de résumer les connaissances nécessaires à la compréhension de nos travaux présentés au chapitre suivant. Dans une première section, le centre de rayonnement synchrotron UVSOR II sera décrit. Les propriétés du rayonnement synchrotron produit dans un aimant de courbure seront ensuite énoncées. Enfin la dernière section présentera un formalisme permettant de décrire la trajectoire d'un électron. Ce formalisme, appelé formalisme des matrices de transfert, sera utilisé au chapitre suivant pour modéliser nos expériences.

3.1 Centre de rayonnement synchrotron UVSOR II

En général, le rayonnement synchrotron est obtenu en faisant circuler des paquets d'électrons à des vitesses relativistes dans un anneau de stockage. Lorsque les électrons subissent une accélération, ils émettent un rayonnement. Dans un anneau de stockage, les électrons émettent principalement à deux types d'endroit : au niveau des aimants de courbure, et dans les onduleurs. Les onduleurs sont installés au niveau des sections droites de l'anneau, et créent un champ magnétique périodique permanent, faisant prendre aux électrons une trajectoire approximativement sinusoïdale ou hélicoïdale (voir annexe A). Les éléments d'un centre de rayonnement synchrotron vont être brièvement décrits. Nous prendrons comme exemple d'illustration le centre de rayonnement synchrotron UVSOR (Ultraviolet Synchrotron Orbital Radiation) [48] à Okazaki au Japon (Fig. 3.1), sur lequel nos expériences ont été réalisées.

3.1.1 Accélération des électrons

Les électrons émis par un canon à électrons sont accélérés par un accélérateur linéaire de longueur 2.5 m jusqu'à 15 MeV. Ils entrent ensuite dans un autre accélérateur, cette fois hexagonal de circonférence 26.6 m, appelé *booster synchrotron*, qui accélère les électrons jusqu'à 600 MeV. Ils sont finalement envoyés dans l'anneau de stockage, où ils peuvent encore être accélérés jusqu'à 750 MeV.

3.1.2 Anneau de stockage

Dans l'anneau de stockage le rayonnement produit par les électrons au niveau des onduleurs et des aimants de courbure est transporté jusqu'aux utilisateurs par les lignes de lumières (*beamlines*). Chaque ligne a des caractéristiques différentes liées aux propriétés du rayonnement transporté¹. Lorsque les électrons rayonnent, ils perdent de l'énergie c'est à dire de la vitesse. Pour compenser cette perte d'énergie, une cavité radio-fréquence (cavité RF) accélère les électrons à chaque tour de cavité. Dans le plan transverse à la direction de propagation, le paquet garde une taille finie grâce à des systèmes d'aimants (quadrupôles et sextupôles) [70].

¹Lors de nos expériences, nous avons travaillé sur la ligne *BL6B*, utilisée pour la spectroscopie infrarouge et térahertz du solide. L'interaction laser/électrons avait lieu dans l'onduleur du laser à électrons libres.

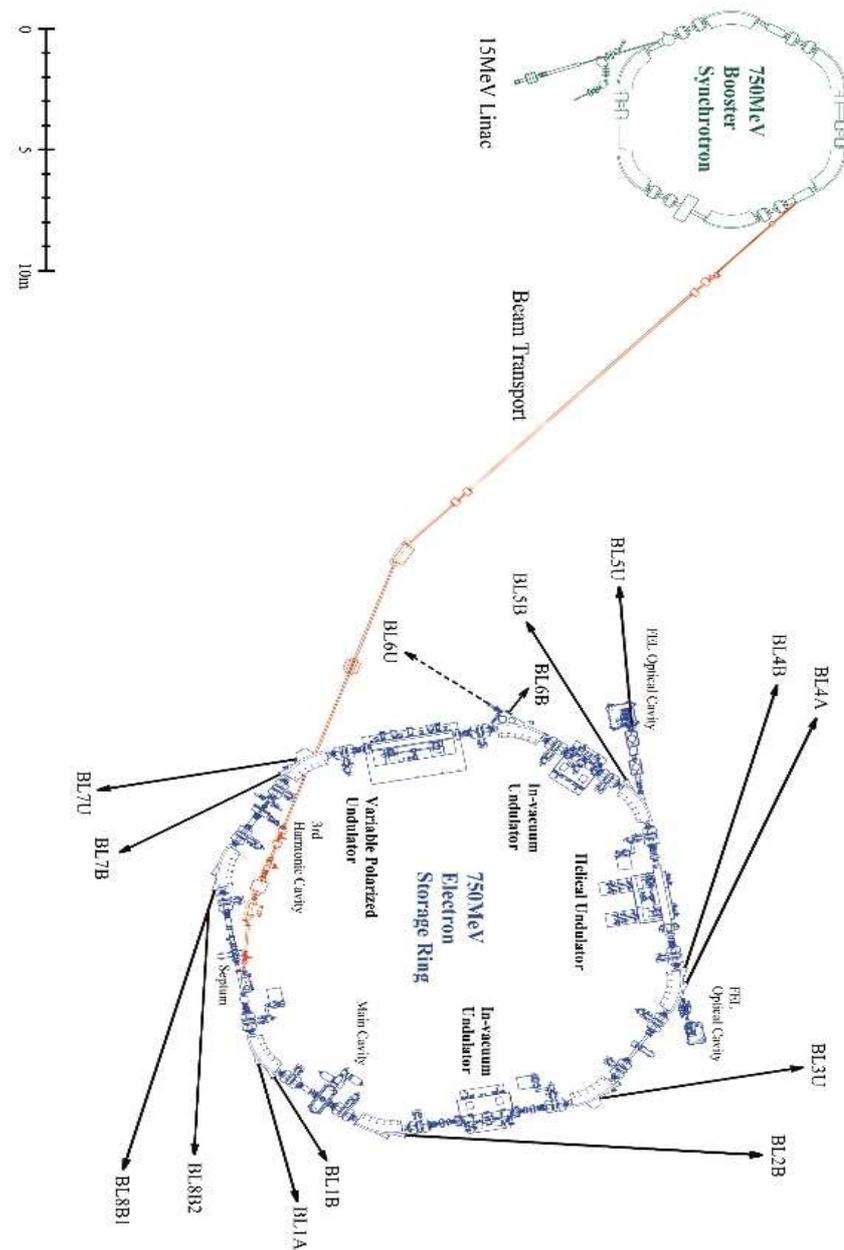


FIG. 3.1: Plan du centre de rayonnement synchrotron UVSOR (Ultraviolet Synchrotron Orbital Radiation), à Okazaki, Japon. b) Détails de l'anneau de stockage.

3.2 Rayonnement synchrotron dans un aimant de courbure

Nos travaux étant axés principalement sur le rayonnement émis dans les aimants de courbure, nous nous limiterons à l'étude des propriétés de celui-ci². Un aimant de courbure est un dipôle qui courbe la trajectoire des électrons. Lorsqu'un électron le traverse, l'accélération donne naissance à une onde électromagnétique émise tangentiellement à la trajectoire des électrons (Fig. 3.2) [70]. Le rayonnement émis par un paquet d'électrons dans un aimant de courbure comporte deux parties : une partie cohérente et une partie incohérente, typiquement aux longueurs d'ondes respectivement plus longues et plus courtes que la longueur du paquet d'électrons [71].

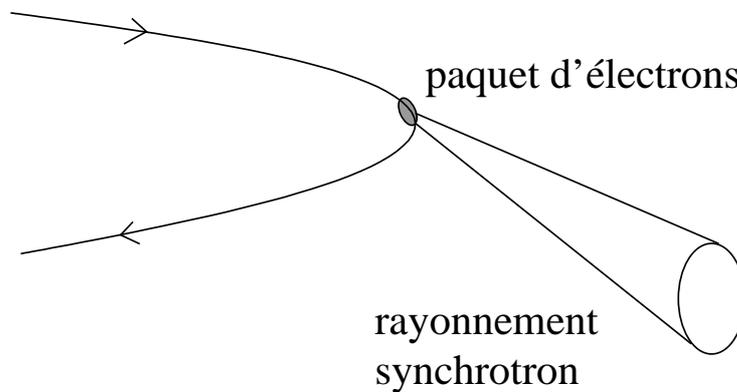


FIG. 3.2: Rayonnement d'un paquet d'électrons parcourant une trajectoire courbée.

3.2.1 Rayonnement synchrotron incohérent

Le rayonnement synchrotron émis par un paquet d'électrons \vec{E}_T est la somme du rayonnement de chaque électron dans le paquet \vec{E}_i . Aux longueurs d'ondes plus courtes que la longueur du paquet d'électrons, il n'y a pas de relation de phase entre le rayonnement de chaque électron (Fig. 3.3).

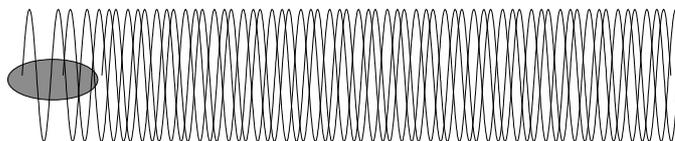


FIG. 3.3: Schéma du rayonnement de 3 électrons dans un paquet d'électrons à une longueur d'onde plus courte que la largeur du paquet (d'après [72]).

²Néanmoins, l'effet d'un onduleur sur un paquet d'électrons est décrit à deux endroits différents de cette thèse : dans la description du gain du laser à électrons libres (voir annexe A) et dans la description de l'interaction entre un laser et un paquet d'électrons (voir chapitre 4).

L'intensité résultante est proportionnelle au nombre d'électrons N [71] :

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\omega) = \sum_{i=1}^N \vec{E}(\omega) e^{i\phi_i} \quad (3.1)$$

$$= 0 \text{ à } \sqrt{N} \text{ près} \quad (3.2)$$

$$|\vec{E}_T|^2 = N \times I_0 \text{ à } \sqrt{N} \text{ près} \quad (3.3)$$

Avec \vec{E}_i le champ électrique produit par un électron, décomposé en un module \vec{E} identique pour tous les électrons et une phase ϕ aléatoire. $I_0 = |E|^2$ est l'intensité du rayonnement émis par un seul électron, et ω la pulsation du rayonnement. Ces expressions montrent aussi que les fluctuations du rayonnement synchrotron incohérent sont très importantes (de l'ordre de \sqrt{N}), et sont une source de bruit non négligeable. Typiquement, N est de l'ordre de $10^8 - 10^{10}$.

Le spectre du rayonnement émis par un paquet d'électrons dans un aimant de courbure est large bande (Fig. 3.4) [70]. Un développement pour obtenir une valeur approchée de la pulsation critique ω_c est présenté dans l'annexe E.

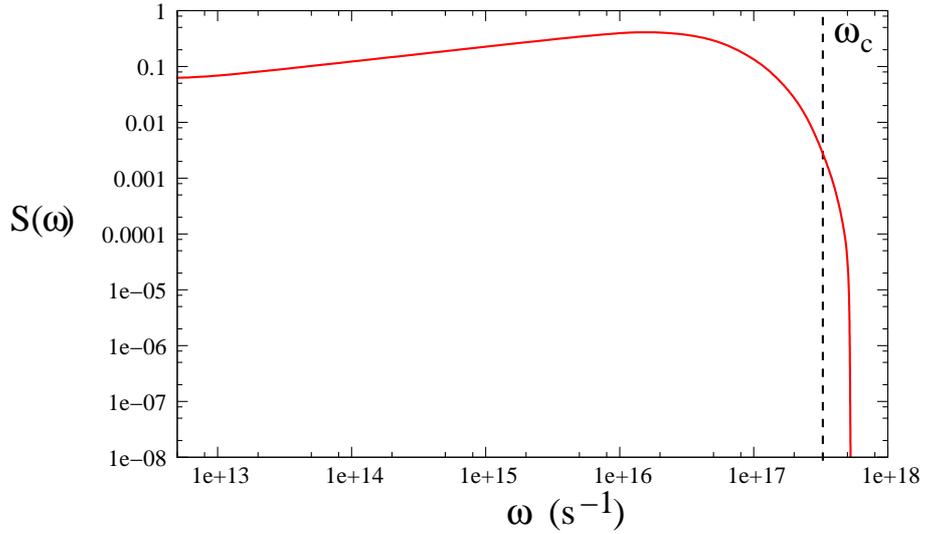


FIG. 3.4: Spectre du rayonnement d'un électron d'énergie $E = 600$ MeV parcourant une trajectoire circulaire de rayon $\rho = 2.2$ m. $S(\frac{\omega}{\omega_c}) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} K_{5/3}(x) dx$. $K_{5/3}$ étant la fonction de Bessel modifiée (Eq. (9.47) dans [70]). Les paramètres de E et ρ sont ceux de UVSOR-II. $\omega_c = \frac{2\pi c}{\lambda_c} = 3.3 \times 10^{17}$ rad.s^{-1} avec $\lambda_c = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho}{\gamma^3}$ [Eq. (E.6)].

3.2.2 Rayonnement synchrotron cohérent

Aux longueurs d'ondes plus grandes que la longueur du paquet d'électrons, toutes les ondes sont en phases (à une fraction de λ près)(Fig. 3.5).

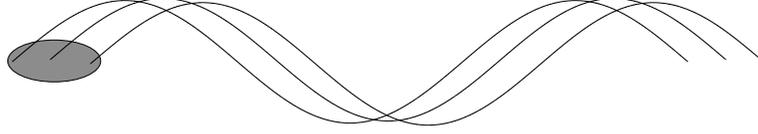


FIG. 3.5: Schéma du rayonnement de 3 électrons dans le paquet, à une longueur d'onde plus longue que la largeur du paquet (d'après [72]).

L'intensité totale est proportionnelle au carré du nombre d'électrons N , ainsi qu'à la transformée de Fourier de la densité longitudinale du paquet d'électrons [71] :

$$I = N(N - 1)\tilde{\rho}^2(\omega) \times I_0 \quad (3.4)$$

$$\text{avec } \tilde{\rho}^2(\omega) = \left| \int \rho(z)e^{i\omega z/c} dz \right|^2 \quad (3.5)$$

$\tilde{\rho}(\omega)$ est la transformée de Fourier de la densité longitudinale de charge $\rho(z)$ du paquet [71], I_0 l'intensité du rayonnement émis par un seul électron, et c la vitesse de la lumière dans le vide. Comme N est typiquement de l'ordre de $10^8 - 10^{10}$, dans les zones où le spectre $\tilde{\rho}(\omega)$ a une composante non négligeable, le rayonnement cohérent est beaucoup plus intense que le rayonnement incohérent. En faisant l'approximation d'une largeur de spectre de l'ordre de grandeur de l'inverse de la taille du paquet ($1/\sigma_z$), et en prenant $\sigma_z = 1$ cm (paramètres de l'anneau UVSOR-II), on trouve que le rayonnement cohérent a une composante non négligeable jusque approximativement 30 GHz. Nous verrons au chapitre suivant qu'en modifiant la forme du profil longitudinal $\rho(z)$ du paquet, il est possible d'avoir une contribution du rayonnement cohérent dans le domaine des fréquences térahertz.

3.3 Distribution de charge du paquet d'électrons à l'équilibre

Dans les études d'interaction laser/électrons dans un onduleur plan, la distribution de charge du paquet d'électrons est habituellement décrite dans un espace des phases à quatre dimensions $(x, x', z, w)^3$ [19, 21]. z étant la coordonnée associée à la position de l'électron dans la direction longitudinale; x étant la coordonnée associée à la position de l'électron perpendiculaire à la direction longitudinale et dans le plan de l'onduleur, x' est l'impulsion dans la direction transverse associée. w est la déviation relative de l'impulsion longitudinale ($w = \frac{\Delta p}{p}$), avec $\Delta p = p - p_0$, p l'impulsion selon la direction longitudinale et p_0 l'impulsion liée à l'énergie nominale de l'anneau⁴ [73]. À l'équilibre, la distribution

³Dans ce type de problèmes, le comportement des électrons selon les coordonnées y et y' ne joue pas un rôle prédominant dans la dynamique [19, 21].

⁴voir annexe F

$f(x, x', z, w)$ des électrons est modélisée par une gaussienne dans les quatre directions [Eq. (3.6)]. Les variables (x, x', z, w) sont normalisées par rapport à leur valeur rms respective $\sigma_x, \sigma'_x, \sigma_z, \sigma_w$ [19, 21]. Le paquet d'électrons peut être considéré comme un gaz, et la valeur des largeurs rms peut être calculée en prenant en compte les aspects statistiques (les fluctuations quantiques) provenant de la composante incohérente du rayonnement synchrotron [70].

$$f(x, x', z, w) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{x^2+x'^2+z^2+w^2}{2}} \quad (3.6)$$

La constante de normalisation a été choisie pour que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x', z, w) dx dx' dz dw = 1;$$

3.4 Trajectoire d'un électron dans l'anneau de stockage

Nous allons présenter le formalisme que nous utiliserons pour modéliser notre expérience, le formalisme des matrices de transfert. Les matrices de transfert permettent de connaître l'évolution des coordonnées d'un électron en fonction des différents éléments qu'il traverse (section droite, aimant de courbure, etc.) [70]. Ce formalisme est extrêmement proche de celui de matrices ABCD de l'optique géométrique [74]. Après un élément caractérisé par une matrice M , les coordonnées de l'électron (x_1, x'_1, z_1, w_1) deviennent (x_2, x'_2, z_2, w_2) tel que [70] :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \\ z_2 \\ \frac{\Delta p_2}{p_2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ z_1 \\ \frac{\Delta p_1}{p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{25} & R_{26} \\ R_{51} & R_{52} & R_{55} & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & R_{65} & R_{66} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Deux exemples de matrice sont présentés ci-dessous [70]. Dans le cas d'une propagation libre de longueur L , la matrice s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Lorsque le trajet a lieu dans un aimant rayon ρ :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & 0 & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) & 1 & \rho(\theta - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Où θ est l'angle parcouru (Fig. 3.6).

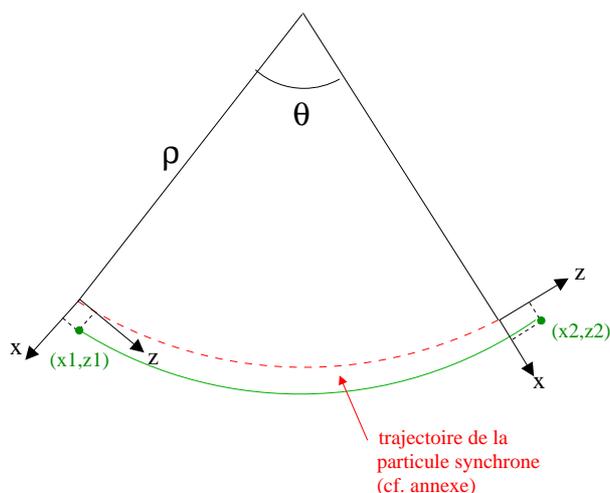


FIG. 3.6: Position d'un électron avant (x_1, z_1) et après (x_2, z_2) le passage dans un aimant de courbure d'angle θ et de rayon ρ . L'origine du système de coordonnées (trajectoire en pointillés) est la position de la particule synchrone (voir annexe F).

La matrice résultante M du passage dans plusieurs éléments (M_1, M_2, \dots, M_i) est le produit des matrices de chaque élément :

$$M = M_i \dots M_4 M_3 M_2 M_1 \quad (3.10)$$

Conclusion

Dans ce chapitre d'introduction, nous avons résumé les connaissances nécessaires pour comprendre nos travaux présentés au chapitre suivant, sur l'interaction entre un paquet d'électrons et une impulsion laser. Le rayonnement d'un paquet d'électrons dans un aimant de courbure est composé de deux parties : une partie incohérente, dont le spectre est large, et dont la puissance est proportionnelle au nombre d'électrons dans le paquet ; et une partie cohérente, dont la largeur du spectre est liée à la longueur du paquet, et dont la puissance est proportionnelle au nombre d'électrons au carré. Pour des paramètres typiques d'anneau de stockage, le rayonnement cohérent a une contribution jusqu'à la dizaine ou la centaine de GHz. Nous allons voir au chapitre suivant, qu'en modifiant la distribution de charge longitudinale du paquet, il est possible d'accéder à des fréquences térahertz.

Les mouvements d'un électron traversant différents éléments de l'anneau (section droite, aimant de courbure, etc.) peuvent être décrits par le formalisme des matrices de transfert. Ce formalisme décrit une dynamique déterministe et non dissipative. Le temps est fractionné en intervalles correspondants au temps mis par à un électron pour traverser les éléments décrits par les matrices de transfert. La dynamique continue d'un électron dans le cas simplifié d'un anneau circulaire est présentée en annexe F. Ce modèle permet d'introduire les oscillations synchrotron et bêtatron d'un électron autour de la trajectoire idéale de la particule synchrone. Une modélisation du paquet d'électrons, prenant en compte des aspects statistiques et dissipatifs, sera présentée en troisième partie.

Chapitre 4

Rayonnement synchrotron cohérent induit par laser

Sommaire

4.1	Principe et modélisation de l'expérience	83
4.1.1	Principe de l'expérience	83
4.1.2	Modélisation de l'expérience	87
4.2	Dispositif expérimental	90
4.2.1	Paramètres de l'anneau de stockage	91
4.2.2	Impulsion laser	91
4.2.3	Focalisation de l'impulsion laser sur le paquet d'électrons . . .	97
4.2.4	Enregistrement des spectres térahertz	98
4.3	Résultats expérimentaux	98
4.3.1	Spectres du rayonnement synchrotron cohérent	98
4.3.2	Puissance térahertz en fonction du courant et de la puissance laser	102
4.3.3	Puissance térahertz en fonction de la fréquence d'excitation . .	103
4.3.4	Étude comparative du CSR et de la puissance térahertz du rayonnement synchrotron classique incohérent	104

Dans ce chapitre, nous allons étudier la réponse d'un paquet d'électrons à une impulsion laser dont l'enveloppe est modulée à une fréquence térahertz, lorsque le système est loin en dessous du seuil d'instabilité CSR.

En général, le rayonnement synchrotron émis par un paquet d'électrons dans les aimants de courbure d'un anneau de stockage est spectralement large et incohérent aux longueurs d'ondes plus courtes que la longueur du paquet d'électrons. Dans ce chapitre nous allons voir qu'il est possible de rendre ce rayonnement cohérent et spectralement étroit en structurant le paquet d'électrons grâce à une impulsion laser. L'impulsion laser utilisée a une durée de l'ordre de celle du paquet d'électrons et son enveloppe est modulée à une fréquence térahertz.

Au delà de l'intérêt fondamental d'étudier la réaction d'électrons relativistes à une impulsion laser, ces expériences ont montré que le rayonnement synchrotron cohérent est

potentiellement une source de rayonnement térahertz intense, dont le développement reste encore aujourd'hui un défi majeur. Cette gamme de fréquences se situe en effet entre les fréquences pouvant être émises par les sources optiques (supérieures au térahertz) et par les sources électroniques (inférieures au térahertz) [75, 76].

Nous pouvons aussi envisager notre expérience d'un point de vue d'optique non linéaire dans un milieu non conventionnel, à savoir dans un paquet d'électrons relativistes. Dans ce sens, cette expérience serait l'analogie de la rectification optique [22] puisque son principe consiste à convertir un rayonnement laser en un rayonnement synchrotron de plus basse fréquence¹.

Les phénomènes de conversion de fréquence lors de l'interaction entre une impulsion laser et un paquet d'électrons dans un anneau de stockage est un domaine d'étude relativement récent². Les premiers travaux expérimentaux et théoriques sur la génération d'harmonique datent des années 80 [79, 80]. En 1996, A. A. Zholents et M. S. Zolotarev ont montré théoriquement qu'il est possible de produire des impulsions femtosecondes de rayon X en faisant interagir un paquet d'électrons et une impulsion laser femtoseconde, processus appelé *slicing* [81]. Cette idée a été mise en pratique en 2000 [82]. Par la suite, des expériences ont montrées que le *slicing* permet aussi de produire un rayonnement cohérent térahertz à large spectre dans les aimants de courbure [20, 21, 19, 83]. Ces expériences ont des applications directes et très rapides puisqu'un anneau de stockage entièrement dédié à la production de rayonnement térahertz cohérent est actuellement en construction en Californie. C'est le projet CIRCE (*Coherent InfraRed Center*) pour lequel les hautes fréquences térahertz seront obtenues par la méthode de *slicing* [21]. Notre expérience se situe dans la continuité des expériences de *slicing* avec toutefois deux différences : la première est que la largeur de l'impulsion laser utilisée est de l'ordre de grandeur de la largeur du paquet d'électrons, typiquement entre la dizaine et la centaine de picosecondes (contre la centaine de femtosecondes pour le *slicing*) et la deuxième est que l'enveloppe de l'impulsion laser est modulée à une fréquence térahertz. Bien que l'idée de réaliser expérimentalement un tel processus fut proposée dans des études théoriques et numériques il y a quelque temps par le groupe de UVSOR [84] et par le laboratoire LBNL [21], et bien que des expériences de *slicing* aient été réalisées avec succès, une preuve expérimentale de l'émission térahertz dans le cas avec modulation restait encore une question ouverte.

Ce chapitre présente nos travaux expérimentaux et théoriques sur le Rayonnement Synchrotron Cohérent (*Coherent Synchrotron Radiation*(CSR)) TéraHertz (THz) induit par laser. Il est divisé en trois sections qui détaillent dans l'ordre, le principe et la modélisation de notre expérience, le dispositif expérimental, et les résultats expérimentaux. Une partie des résultats présentées dans ce chapitre a été publiée dans l'article [85].

¹La rectification optique dans des cristaux est d'ailleurs aussi une manière de générer un rayonnement térahertz [77]

²Dans les matériaux "conventionnels", les études datent des premières années du laser : génération d'harmoniques en 1961 [78] et rectification optique en 1962 [22].

4.1 Principe et modélisation de l'expérience

4.1.1 Principe de l'expérience

4.1.1.1 Vue globale

L'expérience consiste à faire interagir un paquet d'électrons relativistes, circulant dans un anneau de stockage, avec une impulsion laser dont l'enveloppe est modulée. L'interaction s'effectue au niveau d'un onduleur, zone où il y a un champ magnétique périodique permanent (Fig. 4.1). Le paquet d'électrons est ensuite dévié par un aimant dipolaire, et émet un rayonnement, qui est analysé sur une ligne de lumière térahertz.

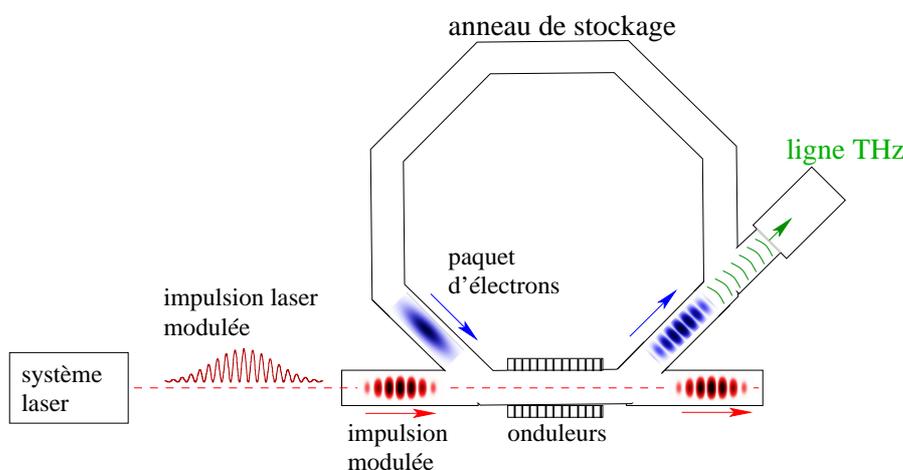


FIG. 4.1: Principe de l'expérience. Une impulsion laser est mise en forme (modulation sinusoïdale de son enveloppe) avec une période de l'ordre de la picoseconde. L'impulsion interagit avec un paquet d'électrons circulant dans un anneau de stockage dans une région de champ magnétique périodique permanent (créée par des onduleurs). Le paquet d'électrons est ensuite dévié par un aimant dipolaire, et le rayonnement émis dans les aimants de courbure est analysé dans la ligne THz.

4.1.1.2 Interaction laser/électrons dans un onduleur

Dans cette section, nous allons décrire qualitativement l'interaction laser/électrons.

Sans champ magnétique, l'interaction entre l'onde lumineuse et les électrons aurait très peu d'effet. Les électrons ayant une vitesse inférieure à l'onde lumineuse, il y aurait le long de la propagation un glissement entre l'onde et les électrons. Schématiquement, un électron se verrait périodiquement accéléré (force électrique dans le sens du mouvement), et décéléré (force électrique dans le sens opposé au mouvement). Après interaction, son énergie serait sensiblement la même.

Dans un onduleur, le champ magnétique fait prendre aux électrons une trajectoire sinusoïdale dans le plan transverse. Lorsque l'onduleur est accordée à la fréquence de l'onde optique, un électron va tout au long de la propagation être continuellement accéléré (Fig. 4.2 a), ou continuellement décéléré (Fig. 4.2 b), selon la valeur de la phase

de l'onde lumineuse au moment où l'électron est à l'entrée de l'onduleur. Ainsi, si l'onde lumineuse a une amplitude constante, comme sur la figure 4.2, en sortie de l'onduleur, le paquet d'électrons aura une modulation d'énergie à la fréquence de l'onde optique [81].

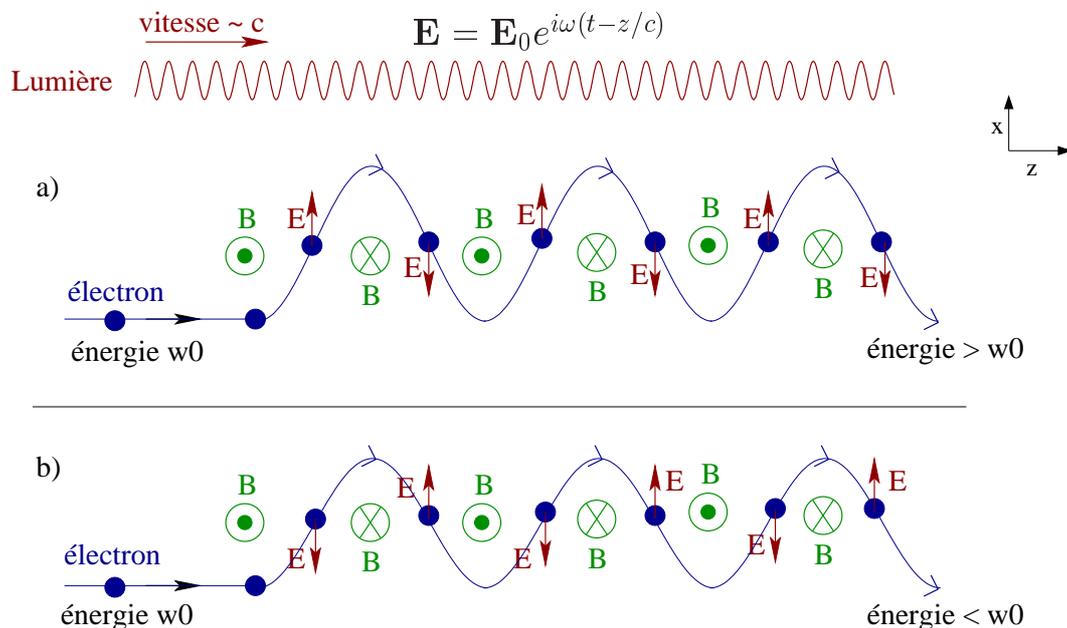


FIG. 4.2: Interaction entre une onde lumineuse d'amplitude constante et un électron dans une zone de champ magnétique périodique permanent, créée par un onduleur. En fonction du moment d'arrivée de l'électron par rapport à l'onde lumineuse à l'entrée de l'onduleur, l'énergie de l'électron à la sortie de l'onduleur sera supérieure (a) ou inférieure (b) à celle à l'entrée.

La figure suivante (Fig. 4.3) représente schématiquement la distribution des électrons $f(x, x', z, w)$ dans l'espace des phases (x, x', z, w) , projetée dans le plan z, w . Avant l'interaction (Fig. 4.3 a,c), la densité d'électrons f a la forme d'une gaussienne dans les deux directions z et w (voir chapitre 3). Après l'interaction (Fig. 4.3 b,d), l'énergie des électrons est modulée à la fréquence de l'onde lumineuse (Fig. 4.3 b). À l'échelle du paquet, la distribution en énergie est élargie (Fig. 4.3 d).

4.1.1.3 Interaction avec une impulsion laser modulée et rayonnement térahertz cohérent

Nous allons maintenant suivre le même raisonnement avec une impulsion lumineuse dont l'enveloppe est modulée (Fig. 4.4). Avant l'interaction, la distribution du paquet d'électrons $f(x, x', z, w)$ a une forme gaussienne dans la direction de z et de w (Fig. 4.4 a). Après l'interaction, à la sortie de l'onduleur, l'énergie est modulée à la fois à la période de modulation de l'enveloppe et à la fréquence optique (Fig. 4.4 b).

Nous avons vu au chapitre 3 que le spectre du rayonnement synchrotron cohérent (CSR) est proportionnel à la transformée de Fourier de la densité longitudinale des électrons $\rho(z)$ (Fig. 4.4 d,e,f), avec $\rho(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x', z, w) dx dx' dw$. À la sortie de l'onduleur, le paquet ne rayonnera pratiquement pas de CSR THz car la densité longitudinale $\rho(z)$

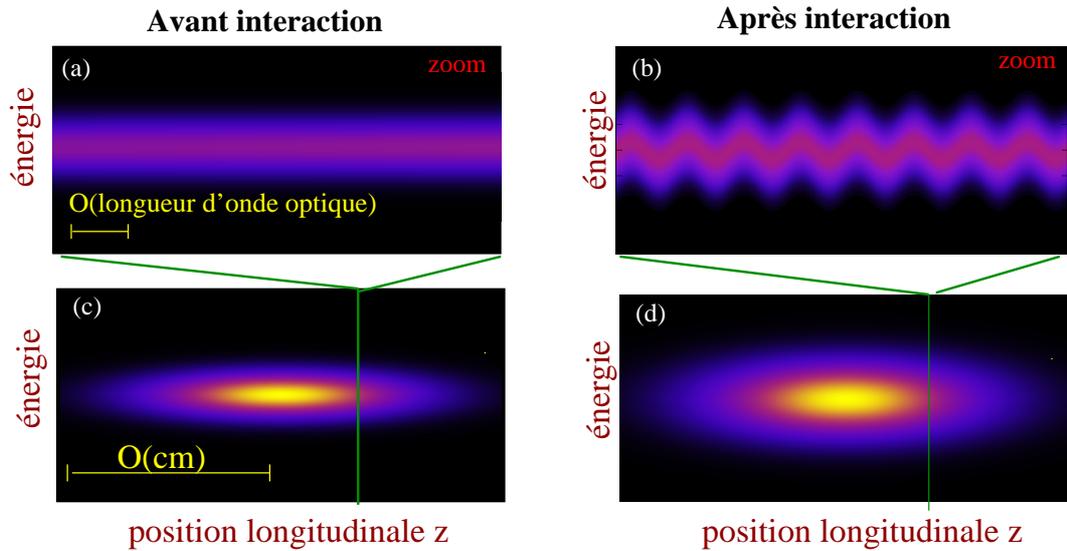


FIG. 4.3: Distribution de la densité de charge du paquet d'électrons dans l'espace des phases (z, w) avant (a,c) et après (c,d) l'interaction avec l'onde optique dans l'onduleur. Après l'interaction la densité du paquet est modulée en énergie à la fréquence de l'onde optique (b).

n'est quasiment pas modulée (Fig. 4.4 e).

Le passage dans les aimants de courbure va transformer la modulation d'énergie en modulation de densité longitudinale. La trajectoire des électrons dans les aimants de courbure dépend de leur énergie, des électrons ayant une plus grande énergie prendront un chemin plus long que des électrons ayant une plus basse énergie. Il en résulte un cisaillement dans l'espace des phases (Fig. 4.4 c) et la densité longitudinale des électrons $\rho(z)$ devient à son tour fortement modulée (Fig. 4.4 f) [19, 21]. Lorsque les électrons vont émettre un rayonnement, celui-ci aura à présent une composante cohérente à la période de modulation de l'enveloppe laser.

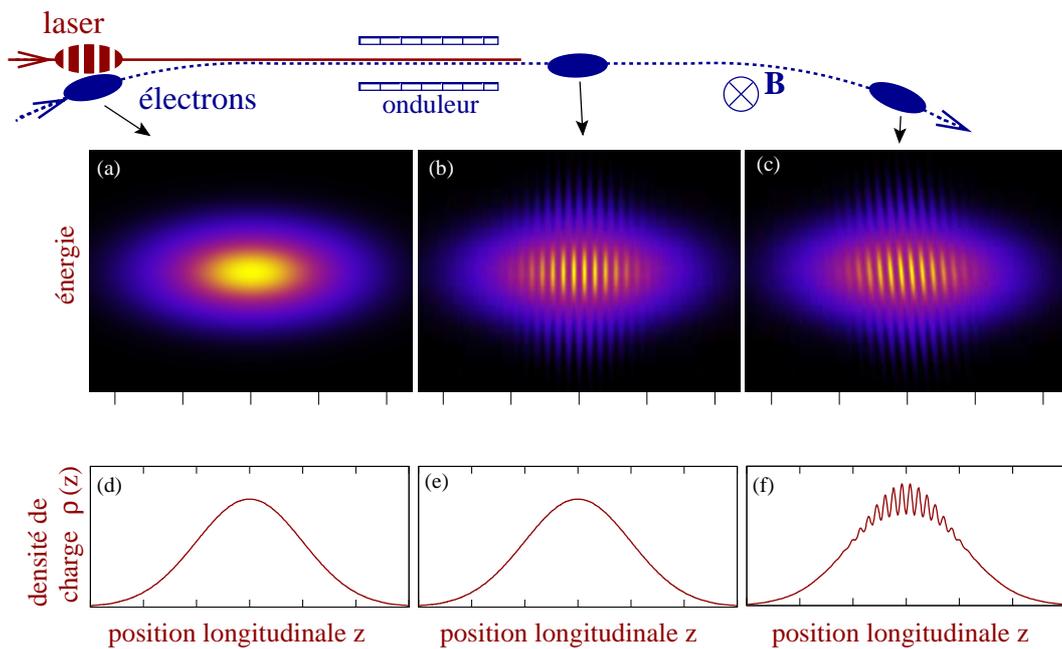


FIG. 4.4: Densité de charge (a,b,c) et densité longitudinale de charge $\rho(z)$ (d,e,f) avant le passage dans l'onduleur (a,d), juste après le passage dans l'onduleur (b,e) et après le passage dans les aimants de courbure (c,f). Avant le passage dans l'onduleur, le paquet d'électrons a une forme gaussienne selon z et w (a). Après le passage dans l'onduleur, son énergie est modulée à la fréquence de l'onde optique et à la fréquence de modulation de son enveloppe (b), mais ρ garde une forme gaussienne (e). Le passage dans les aimants de courbure a pour effet de cisailer l'espace des phases (c) et la densité longitudinale de charge ρ devient à son tour modulée à la fréquence de modulation de l'enveloppe de l'onde optique.

4.1.2 Modélisation de l'expérience

Nous allons utiliser les matrices de transfert, introduites au chapitre précédent, pour modéliser notre expérience. Cette étude nous permettra de prédire le domaine d'accordabilité en fréquence du processus, ainsi que la dépendance de la puissance du rayonnement THz en fonction du nombre d'électrons dans le paquet et de la puissance de l'impulsion laser. Seul les résultats théoriques directement liés à nos données expérimentales sont détaillés dans cette section. Les autres résultats, ainsi que les détails de la modélisation sont présentés en annexe H.

4.1.2.1 Formulation du problème

Dans ce type de problème, les coordonnées appropriées pour décrire la trajectoire d'un électron sont sa position longitudinale z , la coordonnée transverse x dans le plan horizontal, la vitesse transverse x' et la variation de l'énergie longitudinale w par rapport au centre de l'énergie du paquet [21, 19]. Avant l'interaction, la densité de charge du paquet d'électrons f est prise gaussienne :

$$f(x, x', z, w) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + x'^2 + z^2 + w^2)} \quad (4.1)$$

Les variables (x, x', z, w) sont normalisées par rapport à leurs valeurs rms respectives $\sigma_x, \sigma_{x'}, \sigma_z, \sigma_w$. La modélisation est simplifiée en considérant un processus en deux étapes : premièrement la modulation de l'énergie des électrons par le laser, et deuxièmement le transport des électrons à travers les aimants de courbure. L'interaction avec le laser mène principalement à une modulation rapide de l'énergie de la distribution de charge des électrons à la fréquence optique. Si on considère le cas simplifié d'une onde laser plane, modulant la distribution longitudinale d'énergie, la distribution dans l'espace des phases devient :

$$g(x, x', z, w) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + x'^2 + z^2)} e^{-\frac{1}{2}[w - a(z)\sin(z/\epsilon)]^2} \quad (4.2)$$

avec $a(z)$ l'enveloppe du champ du laser et $1/\epsilon$ la longueur d'onde du laser en unité de σ_z . Dans les unités utilisées, $|a(z)|$ est l'amplitude de la modulation d'énergie en unité de la dispersion en énergie (σ_w). Ensuite, le transport du faisceau à travers les champs magnétiques des aimants de courbure implique des trajets différents en fonction de l'énergie, de x et de x' . C'est le principal processus qui va transformer la modulation rapide de l'énergie en une modulation lente de la densité de charge à l'échelle THz. En faisant l'hypothèse de transformation linéaire des coordonnées (x, x', z, w) des électrons, la distribution de charge du paquet devient [19] :

$$h(x, x', z, w) = g(x, x', z + r_{51}x + r_{52}x' + r_{56}w, w), \quad (4.3)$$

où les paramètres r_{ij} sont les coefficients normalisés associés aux éléments de la matrice de transfert³ R_{ij} :

³Voir le chapitre 3.

$$r_{51} = R_{51} \frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \quad r_{52} = R_{52} \frac{\sigma'_x}{\sigma_z}, \quad r_{56} = R_{56} \frac{\sigma_\delta}{\sigma_z}. \quad (4.4)$$

Avec R_{ij} les éléments usuels non normalisés des matrices de transfert [19].

4.1.2.2 Puissance du CSR térahertz émis et approximation de l'enveloppe lentement variable

Ensuite, pour obtenir les informations sur la puissance THz rayonnée, il est important d'examiner la distribution longitudinale des électrons, qui joue le rôle de source dans le processus [21] :

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, x', z, \omega) dx dx' d\omega, \quad (4.5)$$

et en particulier sa transformée de Fourier :

$$\tilde{\rho}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \rho(z) dz \quad (4.6)$$

Après avoir remplacé les équations (4.3, 4.5) dans l'équation (4.6), l'intégration sur x , x' et ω peut être calculée en utilisant un changement de variables (les détails sont présentés dans l'annexe H) :

$$\tilde{\rho}(k) = e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2)k^2} \psi(k) \quad (4.7)$$

$$\text{avec } \psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikr_{56}a(z) \sin(z/\epsilon)} dz \quad (4.8)$$

L'expression de $\tilde{\rho}(k)$ permet d'avoir des informations sur la puissance térahertz cohérente émise, puisque celle-ci est directement proportionnelle à $\tilde{\rho}(k)$ [71].

Ces expressions, bien qu'importantes pour la modélisation, sont difficilement intégrables numériquement. En effet, l'intégrale dans l'équation (4.8) présente des variations à des échelles très différentes, puisqu'elle implique les oscillations à la fréquence optique à $1/\epsilon$ et à ses harmoniques, en même temps que des variations lentes à l'échelle de l'enveloppe laser. Comme cela se fait en optique non linéaire conventionnelle, nous pouvons tirer profit du fait que l'enveloppe de l'impulsion laser varie très lentement par rapport à la période optique. En appliquant l'approximation de l'enveloppe lentement variable, on obtient (les calculs sont détaillés dans l'annexe H) :

$$\tilde{\rho}(k) \simeq \tilde{\rho}_0(k) = e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2)k^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} J_0(kr_{56}a(z)) dz \quad (4.9)$$

Avec J_0 la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro. Cette expression doit être généralement calculée numériquement, néanmoins, elle est de loin beaucoup moins longue à intégrer que le problème original [Eq. (4.7,4.8)].

4.1.2.3 Puissance du CSR térahertz émis dans l'approximation de faible puissance laser

Dans le cas de faibles puissances laser, et de paquets et d'impulsions infiniment longs, il est possible d'obtenir une expression analytique approchée de la puissance du CSR térahertz émis (voir les détails en annexe H) :

$$P_{\text{THz}} \simeq C r_{56}^4 P^2 k^4 e^{-(r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2)k^2}. \quad (4.10)$$

Dans cette relation, k est la fréquence de modulation de l'enveloppe de l'impulsion laser, et P est la puissance laser. r_{51}, r_{52}, r_{56} sont les éléments normalisés de la matrice de transfert associée au transport des électrons de la zone d'interaction, jusque la région d'émission térahertz. C est un paramètre inconnu à cette étape de la modélisation.

Nous déduisons que la dépendance de la puissance térahertz est quadratique en fonction de la puissance laser incidente, comme pour le processus de rectification optique [86, 22]. La dépendance de P_{THz} en fonction de la fréquence est une courbe en forme de cloche, centrée en :

$$k_m = k_{\text{mopt}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}}. \quad (4.11)$$

En terme de variables dimensionnées, la fréquence associée (en Hertz) est :

$$\nu_{\text{mopt}} = \frac{c}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R_{51}^2 \sigma_x^2 + R_{52}^2 \sigma_{x'}^2 + R_{56}^2 \sigma_\delta^2}}, \quad (4.12)$$

$$\text{avec } c \quad \text{la vitesse de la lumière dans le vide.} \quad (4.13)$$

Cette valeur analytique peut être utilisée pour estimer le domaine d'efficacité maximale avec une bonne approximation lorsque l'impulsion laser est beaucoup plus grande que la période de modulation, et dans la limite d'une faible puissance laser. Nous verrons à la section 4.3 comment s'ajustent les données expérimentales sur les courbes obtenues à partir de ces expressions analytiques.

4.2 Dispositif expérimental

Les expériences ont été réalisées sur l’anneau de stockage UVSOR-II [85]. Des impulsions lasers à 800 nm, avec une modulation longitudinale de l’intensité, sont envoyées sur un paquet d’électrons dans l’anneau de stockage (Fig. 4.1 et Fig. 4.5). L’anneau fonctionne à 600 MeV, en mode mono-paquet (*single bunch*), dont la durée est typiquement 100 ps RMS. L’interaction se passe dans le premier onduleur du klystron optique du laser à électrons libres⁴, accordé à la fréquence du laser. L’analyse de l’émission THz est faite dans la ligne BL6B [87].

La figure 4.5 est une photo prise de haut de l’anneau de stockage de UVSOR-II.

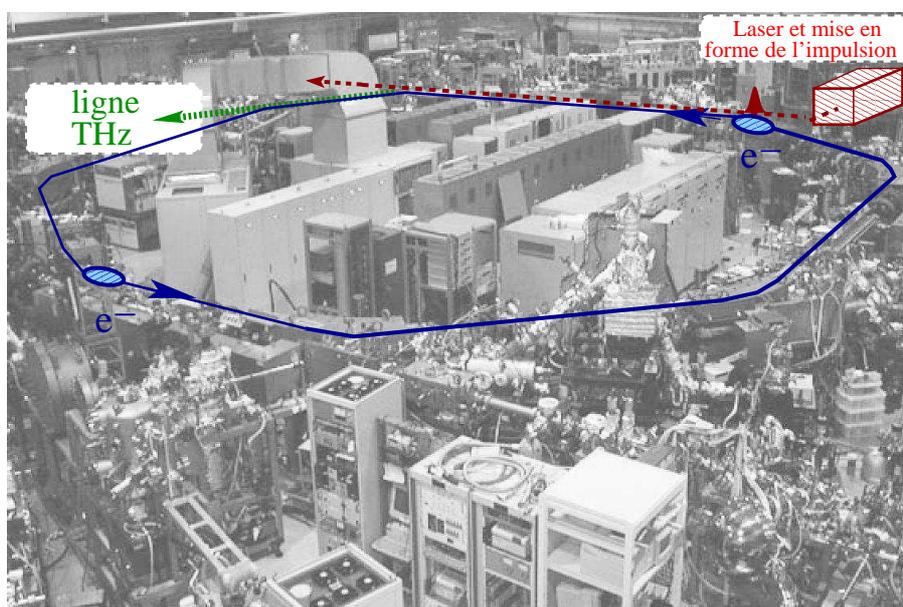


FIG. 4.5: Photo de l’anneau de stockage de UVSOR-II avec en superposition : le trajet des électrons dans l’anneau (ligne bleu), le dispositif du laser et le passage de l’impulsion dans l’anneau (en rouge) et la ligne térahertz (en vert).

⁴voir annexe A

4.2.1 Paramètres de l'anneau de stockage

Les paramètres de l'anneau de stockage de UVSOR-II utilisés lors des expériences sont résumés dans le tableau 4.1.

Paramètre (unité)	Symbole	Valeur
Énergie (MeV)	E	600
Circonférence de l'anneau (m)	C	53.2
Voltage de la cavité (kV)	V_{RF}	100
Fréquence RF (MHz)	f_{RF}	90.1
Nombre de paquets dans l'anneau	n_b	1
Période de révolution (ns)	T_0	178
Fréquence synchrotron (KHz)	f_S	19.4
Temps d'amortissement synchrotron (ms)	τ_s	20
Courant (mA)	I	0-40

TAB. 4.1: Paramètres de l'anneau de stockage de UVSOR-II utilisés lors des expériences.

4.2.2 Impulsion laser

4.2.2.1 Principe de la mise en forme des impulsions

L'objectif était d'obtenir en sortie du système une impulsion laser avec une largeur de l'ordre de la dizaine/centaine de picosecondes dont l'enveloppe est modulée sinusoïdalement à une période de l'ordre de la picoseconde. Dans ce but, nous avons utilisé une technique provenant d'un article de A. S. Weling et D. H. Auston [88], aussi utilisée par les sources THz solide [89, 90, 91]. Le principe de cette technique, illustré figure 4.6, consiste dans un premier temps à étirer une impulsion et obtenir en même temps un glissement de fréquences (*chirp*). Dans un second temps, l'impulsion est répliquée pour en obtenir deux copies qui sont ensuite recombinaées avec un délai τ . L'impulsion résultante est une impulsion dont l'enveloppe est modulée à une fréquence proportionnelle à τ [88].

Un calcul permettant d'obtenir une expression mathématique de l'enveloppe de l'impulsion est présenté ci-dessous. Après étirement, le champ électrique de l'impulsion peut être modélisé par :

$$E_1(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \pi \alpha t^2) \quad (4.14)$$

$A(t)$ est l'enveloppe de l'impulsion, typiquement une gaussienne ou une sécante hyperbolique. α est le coefficient de *chirp* linéaire. Il est égal au rapport entre la largeur en fréquence de l'impulsion $\delta\nu$ et la différence de largeur $\delta\sigma$ entre l'impulsion avant et après l'étirement : $\alpha = \frac{\delta\nu}{\delta\sigma} = -\frac{\delta\lambda c}{\lambda^2 \delta\sigma}$, avec c la vitesse de la lumière dans le vide, $\delta\lambda$ la largeur du spectre, λ la longueur d'onde centrale du spectre. Après la recombinaison des deux impulsions, l'intensité est égale à :

$$I(t) = \frac{1}{4} [E_1(t) + E_1(t - \tau)]^2 \quad (4.15)$$

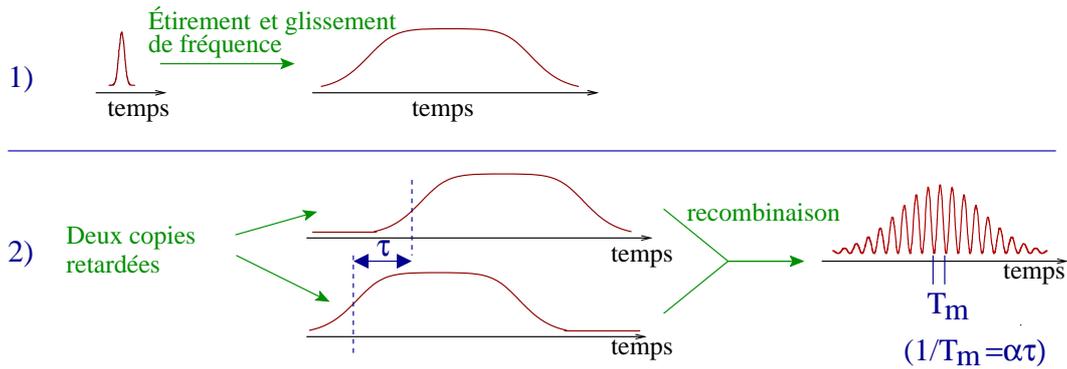


FIG. 4.6: Principe de la méthode pour obtenir une impulsion avec une enveloppe modulée [88]. 1) l'impulsion est étirée, ce qui lui donne un glissement de fréquence. 2) deux copies sont faites, et ensuite recombinaison avec un délai τ . L'impulsion finale a une enveloppe modulée à une fréquence proportionnelle à τ .

En ne gardant que l'enveloppe de l'impulsion, on obtient :

$$I_{\text{enveloppe}}(t) = \frac{1}{2}[A(t)^2 + A(t - \tau)^2 + 2A(t)A(t - \tau) \cos(2\pi\alpha\tau t - \phi)] \quad (4.16)$$

$$\text{avec : } \phi = \pi\alpha\tau^2 \quad (4.17)$$

Cette expression montre que l'enveloppe est modulée à une fréquence proportionnelle à τ et que l'amplitude de modulation est de 100%. La figure 4.7 présente deux exemples d'enveloppe d'impulsion pour deux valeurs de τ différentes et des paramètres similaires à ceux des expériences.

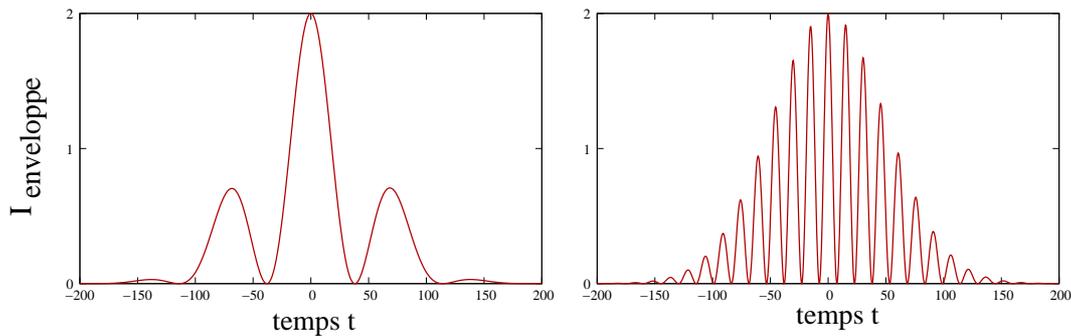


FIG. 4.7: $I_{\text{enveloppe}}$ [Eq. (4.16)] avec $A(t) = e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$, $\sigma = 100$ ps, $\Delta\lambda = 14$ nm, $\lambda = 800$ nm, gauche : $\tau = 0.2$ ps, droite : $\tau = 1$ ps

4.2.2.2 Dispositifs expérimentaux

Nous avons utilisé deux dispositifs expérimentaux pour mettre en forme l'impulsion. Le premier était destiné à une étude de faisabilité du processus. Les résultats ayant été concluants, l'année suivante, nous avons utilisé un deuxième dispositif permettant d'accéder à des fréquences de modulations plus basses.

4.2.2.2.1 Premier dispositif expérimental Un schéma du premier dispositif est présenté figure 4.8. Un laser et un amplificateur (Coherent Mira 900-F et Legend F-HE) délivrent des impulsions à 1 kHz de 2.5 mJ, compressées jusqu'à 130 fs, à la longueur d'onde de 800 nm et avec une largeur spectrale de 10 nm. L'impulsion est élargie grâce à un système, appelé étireur (*stretcher*), composé de deux réseaux de diffraction (5×5 cm, 1200 traits/mm, 70% et 80% d'efficacité) et d'un *roof-retroreflector*. En sortie de ce système, l'impulsion a une largeur comprise entre 10 ps et 60 ps, selon la distance entre les deux réseaux, avec un *chirp* linéaire en première approximation⁵. Cette impulsion est dupliquée puis recombinaée avec un délai dans un interféromètre de Michelson. Pour faire varier de manière continue la fréquence de modulation de l'enveloppe laser, il suffit juste de changer la valeur du délai τ , c'est à dire de modifier la position d'un miroir du Michelson.

L'erreur angulaire des rétro-réfecteurs est un paramètre critique de l'expérience, car il faut qu'à l'endroit de l'interaction (à peu près à 10 m de l'interféromètre) les deux impulsions se superposent encore. Nous avons donc utilisé des coins de cubes avec une déviation angulaire très faible (inférieure à 1 arcsec).

En sortie de ce système, nous avons obtenu des impulsions de 0.1 – 0.3 mJ, de largeur entre 10 et 100 ps, avec une période de modulation longitudinale entre 1 et 10 ps.

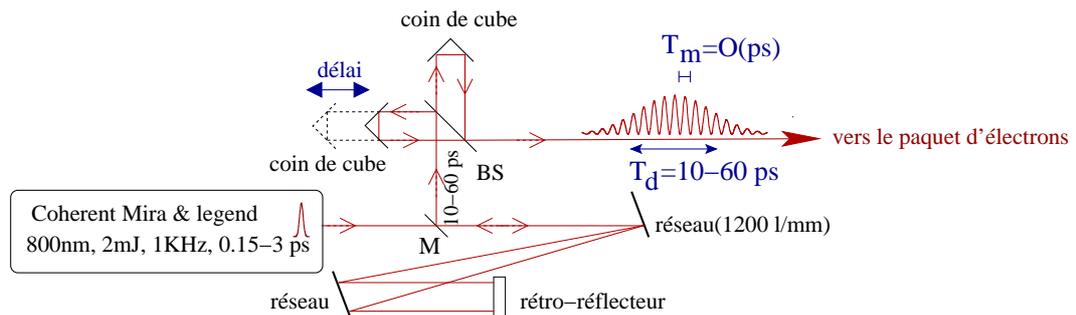


FIG. 4.8: Schéma du premier dispositif expérimental utilisé. En sortie d'un système laser et amplificateur, les impulsions lasers sont dirigées par un miroir M vers un étireur composé de deux réseaux et d'un rétro-réflecteur. Puis chaque impulsion est dupliquée puis recombinaée avec un délai dans un interféromètre de Michelson, composé d'un séparateur de faisceau (beam splitter BS) et de deux coins de cube.

La figure 4.9 présente une trace d'autocorrélation et un spectre typiques d'une impulsion laser en sortie de ce dispositif expérimental.

⁵Des détails de l'étireur sont présentés en annexe F.

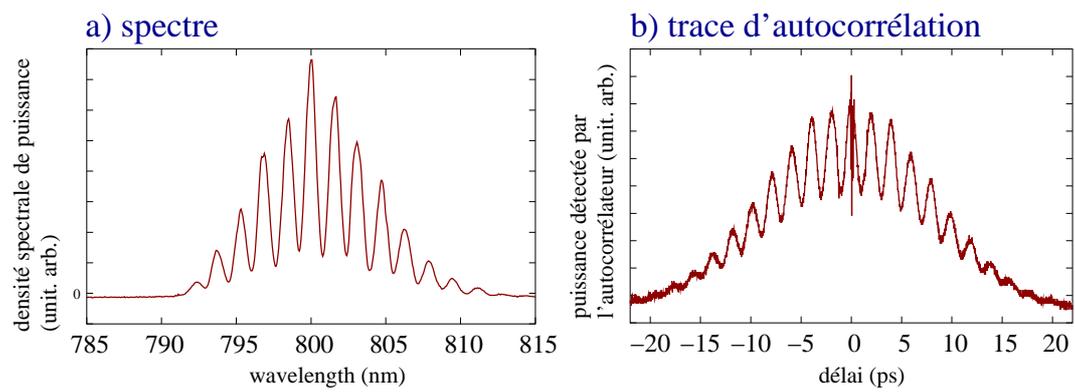


FIG. 4.9: Caractéristiques typiques de l'impulsion laser. a) intensité du spectre. b) trace d'autocorrélation.

4.2.2.2.2 Deuxième dispositif expérimental Dans ce dispositif expérimental (Fig. 4.10), nous avons modifié l'amplificateur régénératif Legend F-HE. Le principe de l'amplificateur peut être décomposé en trois parties. Dans un premier temps, une impulsion laser est étirée, grâce à un étireur très similaire à celui présenté dans le premier dispositif. Ensuite, l'impulsion est amplifiée par un amplificateur régénératif, et finalement recomprimée pour revenir à sa taille initiale (130 fs pour le Coherent Mira 900-F et Legend F-HE)⁶. Dans notre expérience, nous avons simplement empêché l'impulsion de passer par le compresseur, en plaçant un miroir sur le trajet optique et en utilisant une autre sortie. En sortie de ce dispositif, les impulsions ont une largeur proche de 300 ps avec un glissement de fréquences, une énergie supérieure à 2 mJ. L'avantage de ce dispositif par rapport au précédent est que les impulsions sont plus longues, il sera donc possible d'obtenir des fréquences de modulations plus basses. Le reste du dispositif est identique au précédent.

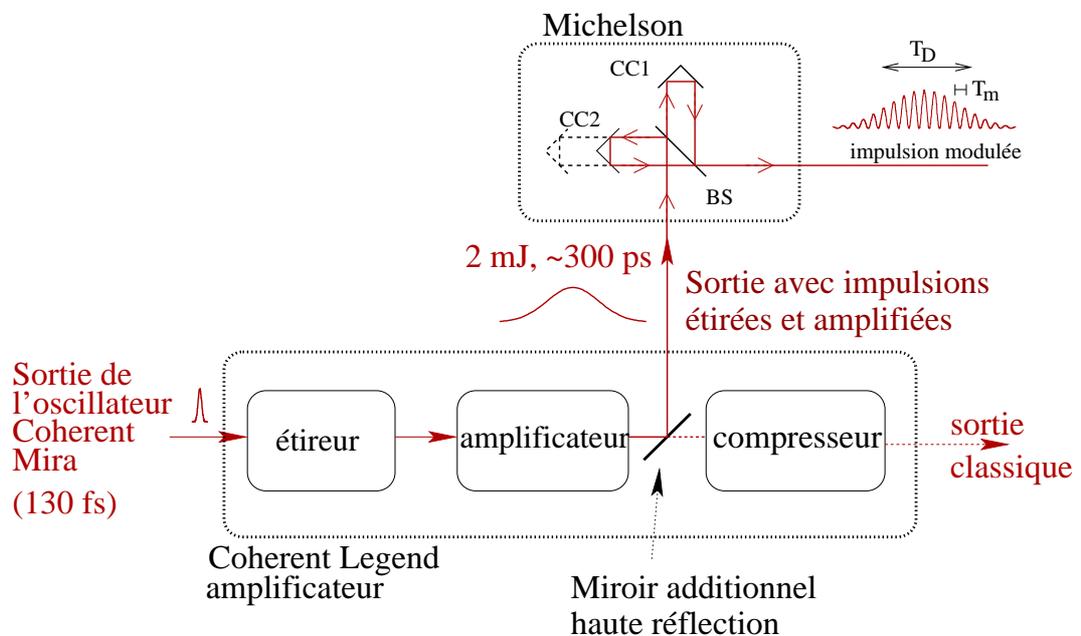


FIG. 4.10: Schéma du deuxième dispositif expérimental. L'amplificateur a été modifié pour que l'impulsion ne passe plus dans le compresseur. Ainsi en sortie, les impulsions ont une durée proche de 300 ps et une énergie de 2 mJ. L'interféromètre de Michelson est le même que celui utilisé dans le premier dispositif : un séparateur de faisceau (beam splitter BS) et deux coins de cube (CC1 et CC2).

La figure 4.11 montre l'enveloppe typique d'impulsions laser enregistrées par une caméra à balayage de fente (Hamamatsu C5680).

⁶Ce dispositif d'étirement et de compression permet d'amplifier les impulsions sans atteindre les seuils de dommage des éléments de l'amplificateur régénératif.

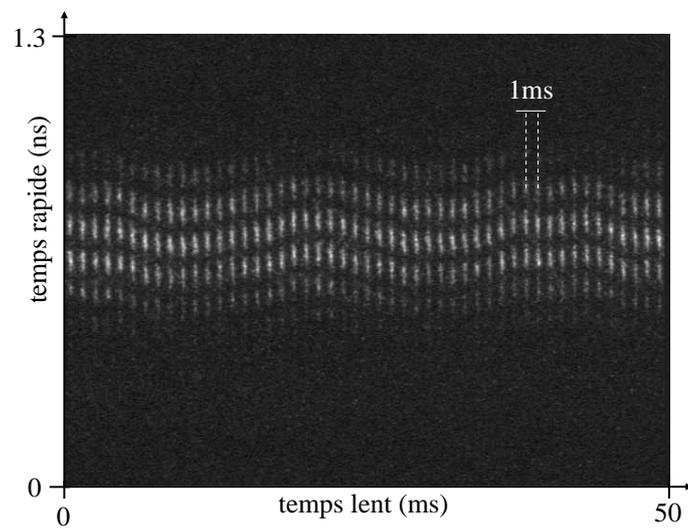


FIG. 4.11: Évolution typique d'enveloppes d'impulsions laser enregistrées par une caméra à balayage de fente (Hamamatsu C5680). La fréquence de répétition des impulsions est de 1 KHz. Les oscillations de la phase de la modulation proviennent des vibrations de l'interféromètre de Michelson.

4.2.3 Focalisation de l'impulsion laser sur le paquet d'électrons

Pour faire interagir l'impulsion laser et le paquet d'électrons au niveau de l'onduleur, nous avons utilisé le système de focalisation et d'imagerie présenté sur la figure 4.12. La focalisation est réalisée grâce à une lentille sphérique, placée à une distance de près de 7 m du point de focalisation. La position et l'alignement de l'impulsion sont réglés grâce à un système de "baïonnette", composé de deux miroirs plans à 45 degrés. Pour visualiser le recouvrement transverse, nous avons utilisé une lentille qui image le plan de focalisation. Une photodiode et une caméra à balayage de fente ont été utilisées pour visualiser le recouvrement longitudinal; la première permettant de faire un réglage grossier et la deuxième un réglage fin. Au niveau du système d'imagerie, la puissance laser était très supérieure à la puissance du rayonnement synchrotron. Afin d'observer ces deux rayonnements simultanément, nous avons atténué le rayonnement laser en utilisant un miroir plan traité à 800 nm. Dans cette configuration, le miroir a un effet de filtre, dont la fréquence de coupure est ajustable en modifiant l'angle d'incidence du faisceau.

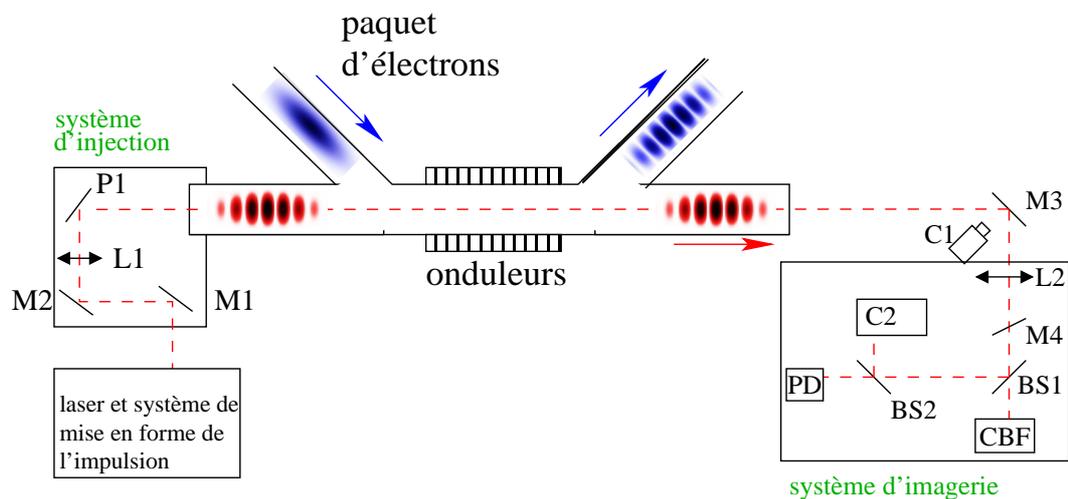


FIG. 4.12: Dispositif expérimental du système de focalisation de l'impulsion laser et du système d'imagerie. En sortie du dispositif de mise en forme, l'impulsion est amenée jusqu'à l'onduleur par les miroirs M1 et M2 et le périscope à colonne P1. Le périscope permet d'adapter la hauteur du faisceau. La lentille L1 focalise l'impulsion au niveau de l'onduleur. Le miroir M2 et le périscope P1 forment un système de "baïonnette" pour régler la position et l'alignement de l'impulsion laser. À noter que le périscope P1 change la direction de polarisation de l'impulsion, et que celle-ci doit être dans le plan de l'onduleur pour que l'interaction soit efficace. La caméra C1 permet de visualiser à distance si l'impulsion laser sort du "tube". En sortie du "tube", l'impulsion laser et le rayonnement synchrotron sont transportés jusqu'à une caméra à balayage de fente (CBF), une photodiode (PD) et une caméra CCD (C2). La séparation des faisceaux est réalisée grâce à un cube séparateur (beam splitter BS1), et une lame séparatrice (BS2). La lentille L2 permet de faire l'image du plan de focalisation au niveau de l'onduleur sur la caméra CCD, pour visualiser le recouvrement transverse. La photodiode (PD) et la caméra à balayage de fente (CBF) permettent de visualiser le recouvrement longitudinal des deux impulsions; la première permet de faire un réglage grossier, et la deuxième un réglage fin. La puissance du laser étant beaucoup plus grande que la puissance du rayonnement synchrotron, nous avons utilisé un miroir plan traité à 800 nm comme filtre de longueur d'onde de coupure ajustable.

4.2.4 Enregistrement des spectres térahertz

Les spectres ont été enregistrés sur la ligne BL6B, en utilisant un spectromètre infrarouge lointain à transformée de Fourier de type Martin-Puplett, permettant d'enregistrer avec une résolution de 0.5 cm^{-1} un rayonnement dont les fréquences sont comprises entre 2 et 55 cm^{-1} . Le rayonnement est détecté par un bolomètre InSb à électrons chauds (QMC, QFI/2). Le traitement de l'impulsion est réalisé en utilisant un *gated integrator* (EG&G SR250) pour réduire le signal provenant du rayonnement synchrotron classique. Le *gated integrator* est déclenché de manière synchrone avec l'oscillateur à 1 kHz du laser Ti :Sa, et la durée d'intégration a été choisie proche de $1 \mu\text{s}$, correspondant au temps de réponse du bolomètre InSb.

4.3 Résultats expérimentaux

4.3.1 Spectres du rayonnement synchrotron cohérent

4.3.1.1 Spectres obtenus avec le premier dispositif expérimental

La figure 4.13 présente des spectres typiques obtenus avec le premier dispositif expérimental. Le spectre est un pic relativement étroit, centré sur la fréquence de modulation de l'enveloppe laser.

L'accordabilité est réalisable simplement en ajustant la position d'un rétro-réflecteur de l'interféromètre de Michelson. Nous avons vérifié la cohérence entre la fréquence de modulation de l'impulsion laser et la fréquence du pic émis. La cohérence a été trouvée pour plusieurs durées d'impulsion et de valeurs du courant (Fig. 4.14). Un pic détectable a été mesuré pour des fréquences de modulation comprises entre 12 et 25 cm^{-1} . Ces résultats confirment que le processus impliqué dans l'émission de térahertz à spectre étroit correspond à du CSR produit par la modulation induite.

Comparé au CSR induit conventionnellement par *slicing*, il est important de noter que l'effet a été obtenu avec une puissance crête beaucoup plus petite, puisque une impulsion de longue durée a été utilisée (60 ps à la place de 50 fs à 2 ps typiquement, en CSR classique [19, 20, 83]) et que de l'énergie a été perdue en utilisant des réseaux de qualité "standard" dans l'étireur (d'efficacité 70% et 80%).

La figure 4.15 présente un spectre térahertz obtenu avec une impulsion laser plus courte (5 ps). Il apparaît clairement que le spectre s'élargit lorsque l'interaction a lieu sur une plus petite longueur du paquet d'électrons.

La figure 4.16 montre des spectres obtenus par le groupe de UVSOR, dans des conditions similaires mais en utilisant la technique de *slicing* (impulsion femtosecondes sans modulation) [83].

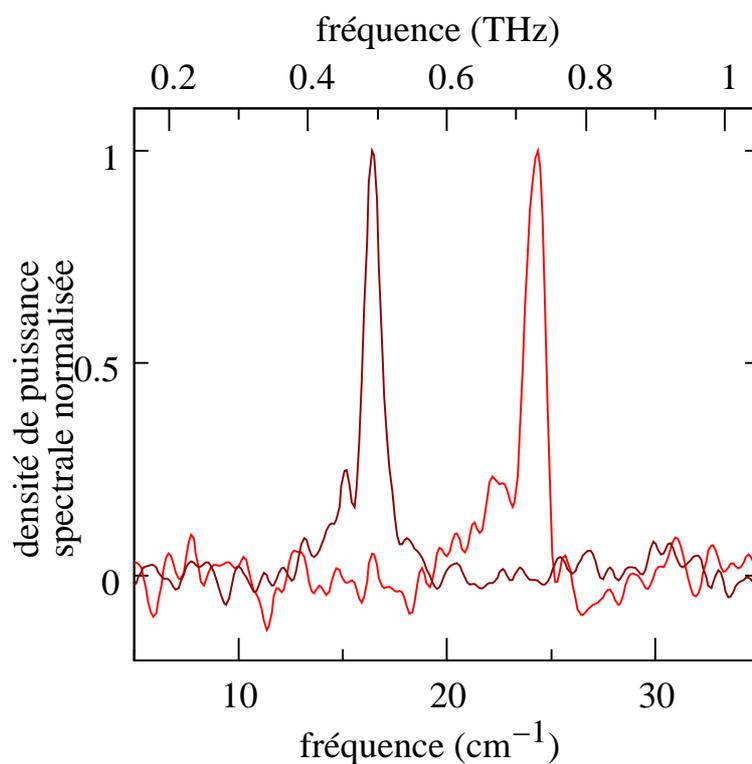


FIG. 4.13: Deux spectres térahertz typiques, obtenus avec une impulsion de largeur 60 ps et pour deux positions de l'interféromètre de Michelson correspondant à une modulation de l'enveloppe laser à des nombres d'onde de 16 cm⁻¹ et 24 cm⁻¹. L'énergie de l'impulsion dans l'onduleur est de l'ordre de 130 μ J.

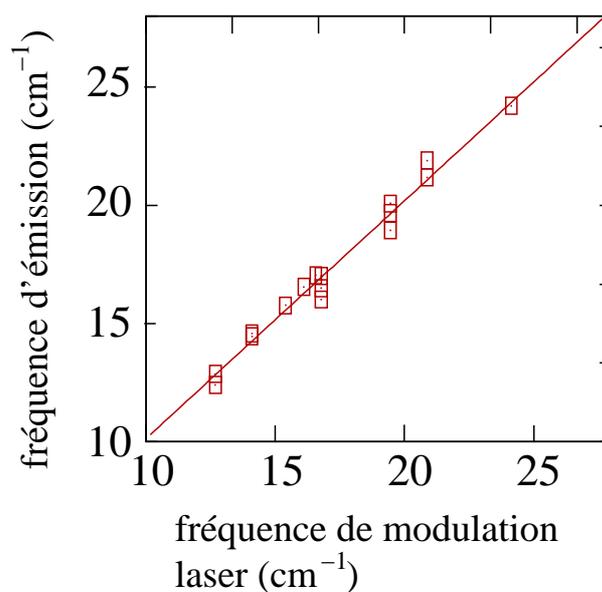


FIG. 4.14: Fréquences des pics d'émission en fonction de la fréquence de modulation de l'impulsion laser (obtenu avec des impulsions de 2 ps et 60 ps). La ligne en trait plein est la ligne à 45°

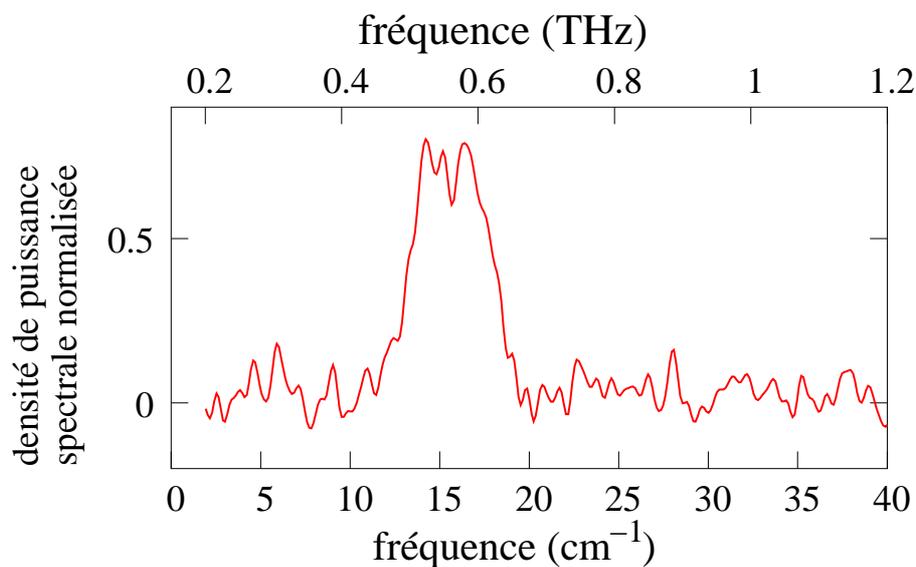


FIG. 4.15: Spectre térahertz typique obtenu avec une impulsion laser de 5 ps.

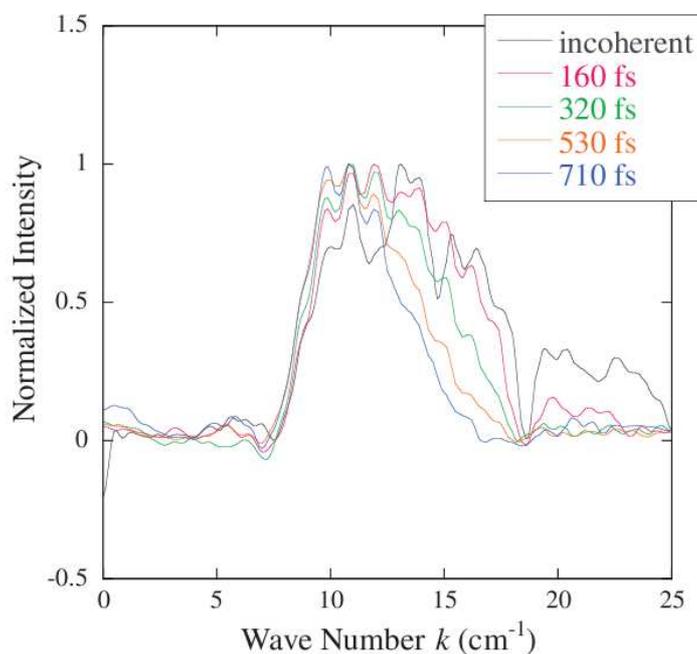


FIG. 4.16: Spectres de rayonnement synchrotron cohérent térahertz obtenus dans des conditions similaires, avec des expériences de slicing. Les durées d'impulsions sont : 160 fs (rouge), 320 fs (vert), 530 fs (orange) et 710 fs (bleue). Courbe noire : spectre du rayonnement synchrotron classique (incohérent). Les intensités des spectres ont été normalisées pour que les maximums coïncident. D'après [83].

4.3.1.2 Spectres obtenus avec le deuxième dispositif expérimental

Les impulsions laser obtenues avec le deuxième dispositif expérimental ont une durée proche de 300 ps, et comme précédemment la fréquence de modulation interne peut être changée en changeant la position d'un rétro-rélecteur de l'interféromètre de Michelson. Un spectre typique de l'émission térahertz cohérente est présentée figure 4.17.

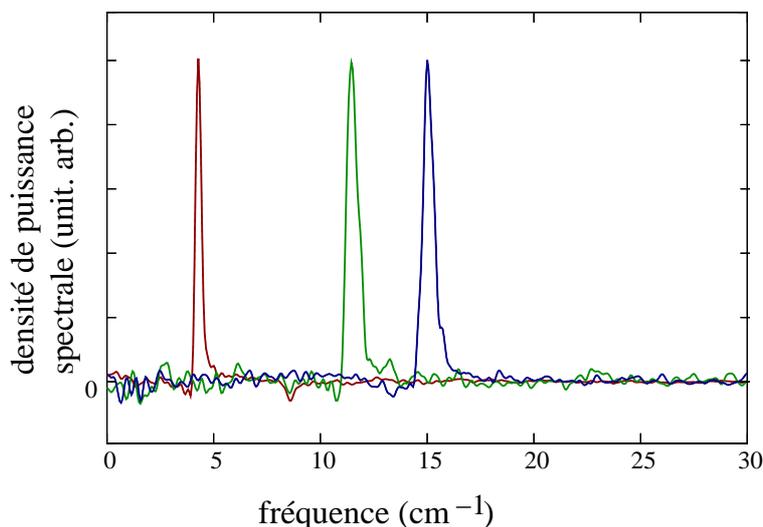


FIG. 4.17: Trois spectres térahertz typiques de rayonnement synchrotron induit par laser, pour trois différentes fréquences de modulation. Chaque spectre a été normalisé.

Comme précédemment, nous observons une dépendance linéaire de la fréquence du pic d'émission par rapport à la position d'un miroir de l'interféromètre de Michelson (Fig. 4.18). Une différence majeure par rapport à l'expérience du dispositif précédent concerne la zone d'accordabilité, qui est maintenant plus large. Un signal détectable a en effet été observé sur plus d'une décade. Cela doit être a priori attribué à la largeur de l'impulsion plus grande (300 ps contre 60 ps) qui permet d'exciter des modulations à des fréquences plus basses.

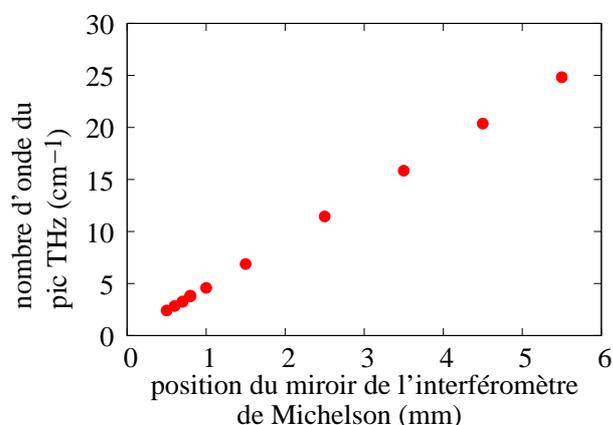


FIG. 4.18: Dépendance de la fréquence du pic d'émission térahertz en fonction de la position d'un miroir de l'interféromètre de Michelson.

4.3.2 Puissance térahertz en fonction du courant et de la puissance laser

Cette série d'expériences a consisté à enregistrer la dépendance de la puissance THz émise en fonction du courant et en fonction de la puissance laser. La dépendance en fonction du courant apparaît quadratique avec une bonne approximation (Fig. 5.1), comme prévu pour les processus de CSR en général [92, 93, 71].

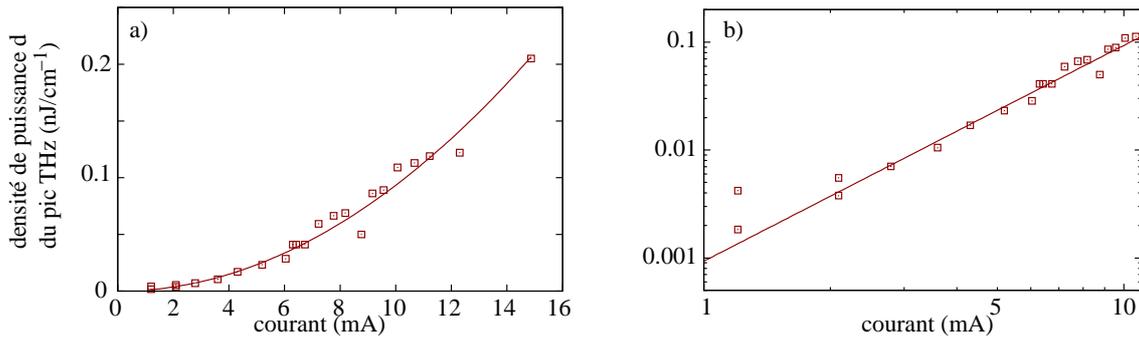


FIG. 4.19: Énergie térahertz par cm^{-1} en fonction du courant. Carrés : valeur expérimentales. Ligne en trait plein : ajustement d'une loi quadratique. (a) : échelle linéaire. (b) échelle logarithmique. Fréquence d'excitation : 15 cm^{-1} . Énergie de l'impulsion laser : $800 \mu\text{J}$.

Pour examiner la dépendance en fonction de la puissance laser, nous avons placé une lame demi-onde avec une faible déviation⁷, suivie d'un polariseur. En tournant la lame demi-onde, nous avons obtenu la dépendance de la puissance térahertz en fonction de la puissance laser (Fig. 4.20). Cette dépendance apparaît aussi quadratique avec une bonne approximation. Ces résultats concordent avec ceux de la partie théorique qui prédisent une dépendance quadratique dans la limite de faible puissance laser (Fig. H.2).

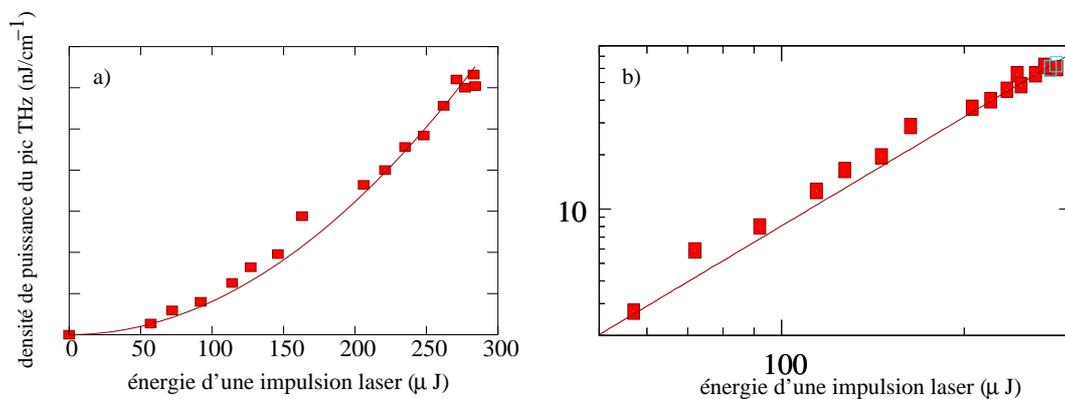


FIG. 4.20: Énergie térahertz par cm^{-1} en fonction de l'énergie d'une impulsion laser. Carrés : valeur expérimentales. Ligne : ajustement d'une loi quadratique. (a) : échelle linéaire. (b) échelle logarithmique. Fréquence d'excitation : 15 cm^{-1} . Courant : 4.8 mA .

⁷CVI QWPO-800-10-2-R15, avec une erreur de parallélisme inférieure à 0.5 arcsec .

En comparant les données expérimentales avec les résultats analytiques (section 4.1.2.3), nous pouvons conclure que nous travaillons avec des puissances de laser faibles ; d'une part parce que les données expérimentales montrent une dépendance quadratique du rayonnement THz en fonction de la puissance laser, et d'autre part parce que les spectres ne présentent pas de déformations notables. Nous allons utiliser dans la section suivante les résultats analytiques obtenus dans l'hypothèse de faible puissance laser.

4.3.3 Puissance térahertz en fonction de la fréquence d'excitation

Pour étudier en détail la dépendance de l'efficacité en fonction de la fréquence, nous avons réalisé des expériences où nous avons enregistré le signal détecté par le bolomètre en fonction de la fréquence d'excitation (Fig. 4.21).

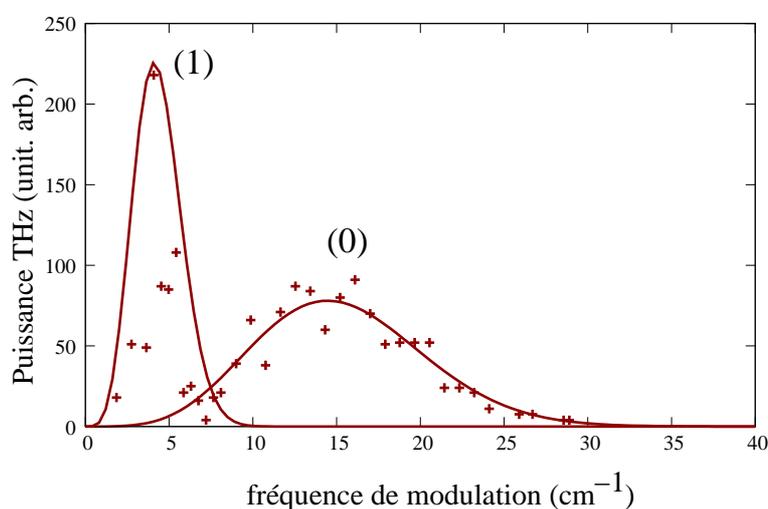


FIG. 4.21: Puissance térahertz en fonction de la fréquence d'excitation. Croix : données expérimentales. Lignes : résultats théoriques d'après l'équation (H.22). La courbe (1) est obtenue en utilisant les paramètres associés à un tour complet dans l'anneau de stockage. La courbe (0) correspond à un transport direct entre l'onduleur et la région d'émission THz.

Comme nous l'avons vu dans la partie théorique, si on prend en compte l'histoire du paquet d'électrons depuis l'onduleur jusqu'à la région d'émission THz, l'efficacité prédite est une courbe en forme de cloche, avec un seul et large pic (à la fréquence de 15 cm⁻¹ pour notre dispositif). Néanmoins, un second pic est systématiquement observé à une fréquence autour de 5 cm⁻¹ (Fig. 4.21). La présence de ce second pic peut être interprétée comme provenant de l'émission après un tour complet dans l'anneau de stockage. En effet, une fois que la modulation a été imprimée au paquet d'électrons, l'émission peut a priori se produire dans le premier passage dans les aimants de courbure considérés, aussi bien qu'après un tour complet ou plus, d'anneau de stockage [21]. Les calculs théoriques précédents s'appliquent aussi à ce cas, juste en considérant la matrice de transfert associée à plusieurs tours d'anneau de stockage.

Dans le cas de l'expérience effectuée à UVSOR-II, les paramètres du paquet d'électrons

sont :

$$\sigma_x = 4.17 \times 10^{-4} \text{ m}, \sigma_{x'} = 4.2 \times 10^{-5}, \quad (4.18)$$

$$\sigma_z = 3.1 \times 10^{-2} \text{ m}, \sigma_\delta = 3.4 \times 10^{-4}. \quad (4.19)$$

Pour un transport direct entre l'onduleur et la ligne térahertz, les paramètres de la matrice de transfert sont :

$$R_{51} = -0.0396, r_{51} = -0.00053, \quad (4.20)$$

$$R_{52} = 1.53 \text{ m}, r_{52} = 0.0021, \quad (4.21)$$

$$R_{56} = -0.268 \text{ m}, r_{56} = -0.0029 \quad (4.22)$$

Et pour un transport impliquant un tour complet :

$$R_{51} = 0.089, r_{51} = 0.0012, \quad (4.23)$$

$$R_{52} = 0.62 \text{ m}, r_{52} = 0.00084, \quad (4.24)$$

$$R_{56} = -1.61 \text{ m}, r_{56} = -0.018, \quad (4.25)$$

Où les paramètres r_{ij} sont définis équation (4.4).

Dans le cas d'une émission après un transport direct, de l'onduleur jusqu'à l'aimant, la fréquence associée au maximum d'émission est $\nu_{mopt} = 20 \text{ cm}^{-1}$, en accord semi-quantitatif avec la position du pic noté (0) sur la figure 4.21 (15 cm^{-1}). Si on prend les paramètres associés à l'émission après un tour complet de l'équation (4.10), on obtient $\nu_{opt} = 4.1 \text{ cm}^{-1}$, en accord quantitatif avec le pic (1). Dans cette série d'expérience, nous n'avons pas essayé de résoudre plus précisément la structure des pics suivants. Cela nécessitera des études complémentaires pour vérifier la possibilité d'émissions après deux tours d'anneau ou plus.

La comparaison de la théorie avec les expériences est résumée sur la figure 4.21. Le pic (0) est ajusté en utilisant l'équation (4.10), plus précisément $f_0(x) = a_0^4 x^4 \exp[-(x/b_0)^2]$, avec a_0 et b_0 des paramètres libres. Pour le pic (1), nous avons tracé $f_1(x) = a_1^4 x^4 \exp[-(x/b_1)^2]$ avec $b_1 = 4.1/\sqrt{2}$ (calculé à partir des valeurs des R_{ij} sans ajustement). Le paramètre a_1 été ajusté manuellement. À noter que ce paramètre ne peut pas être aisément utilisé pour tester l'accord théorie/expérience, puisqu'il implique des détails techniques comme la réponse en fréquence du détecteur.

4.3.4 Étude comparative du CSR et de la puissance térahertz du rayonnement synchrotron classique incohérent

Sur la bande spectrale considérée, l'énergie par impulsion délivrée par le processus de CSR est plus grande que celle délivrée par le rayonnement synchrotron "classique" spontané. Pour évaluer le ratio entre les efficacités des deux processus, nous avons fait des mesures avec le laser allumé (CSR) et le laser éteint (rayonnement synchrotron classique), dans les mêmes conditions.

À la longueur d'onde considérée, c'est à dire à la position du pic de CSR, nous avons calculé le ratio $\eta_{CSR/SR}$ entre la densité de puissance spectrale du CSR et la densité de

puissance spectrale du rayonnement synchrotron spontané. Le résultat, tracé figure 4.22, montre que l'énergie de l'impulsion du CSR dans la bande spectrale considérée était plus grande d'un facteur 10^3 - 10^4 comparé au rayonnement synchrotron classique.

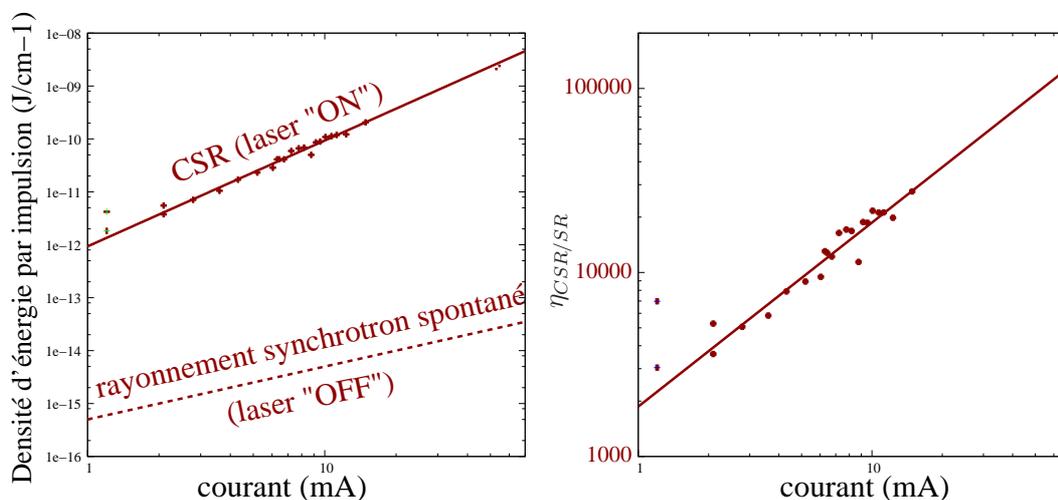


FIG. 4.22: Rapport entre l'énergie du CSR et l'énergie du rayonnement synchrotron classique (incohérent), par impulsion et par cm^{-1} . Carrés : données expérimentales. Ligne : ajustement avec une loi linéaire. Énergie de l'impulsion laser : $800 \mu\text{J}$. Le nombre d'onde de la modulation est 15 cm^{-1} .

Ces mesures sont données comme point de référence, et elles devraient évoluer par de grands facteurs lorsque d'autres conditions seront considérées. Par exemple, si on ne tient compte que du laser, l'utilisation d'une plus grande énergie (par exemple 100 mJ à la place de 2 mJ ici) et des impulsions plus courtes (par exemple 30 ps à la place de 300 ps ici) devraient permettre d'augmenter l'énergie térahertz d'un facteur de l'ordre de 25000 (si on fait l'hypothèse d'une dépendance quadratique de la puissance térahertz en fonction de la puissance laser).

Conclusion

Ces études de faisabilités ont montré la possibilité de produire un rayonnement synchrotron cohérent, étroit, spectralement et accordable. Le processus comprend une modulation d'énergie des électrons par une interaction avec une impulsion laser modulée dans un onduleur, puis un transfert de la modulation d'énergie en modulation de densité longitudinale de charge lorsque le paquet traverse les éléments de l'anneau de stockage, et enfin une émission synchrotron au niveau des aimants de courbure, à la fréquence de modulation de l'impulsion laser. La zone d'accordabilité de la fréquence d'émission se situe dans le domaine térahertz et fait de ce processus un candidat potentiel pour une source de rayonnement térahertz intense. Pour le moment, les expériences menées ici, qui étaient destinées à des études de faisabilités et non optimisées pour la génération de fortes puissances, ont fourni une brillance comparable à celles de sources commerciales comme le Teraview (dans le domaine du nJ/cm^{-1}) à des courants de l'ordre de 20 mA. Toutefois, des améliorations directes devraient augmenter la puissance émise et la brillance. Des augmentations de plusieurs ordres de grandeurs devraient être obtenues par simple optimisation du recouvrement de la puissance incidente et de la densité de courant, en particulier grâce à la dépendance quadratique de la puissance térahertz en fonction de l'intensité laser et de la densité de charge du paquet.

D'un point de vue théorique, l'accordabilité du CSR peut être estimée théoriquement en utilisant une approche simple. Plus précisément, dans l'approximation d'une onde plane, la transformée de Fourier de la distribution de la densité longitudinale de charge peut être calculée numériquement en utilisant une simple quadrature, pour n'importe quelle forme longitudinale du paquet. De plus, la fréquence d'émission maximale peut être estimée en utilisant une expression analytique. Il est aussi important de noter que cette approche peut aussi être utilisée dans des contextes légèrement différents. En particulier, elle peut être appliquée aux études de *slicing* conventionnel.

À basse fréquence d'excitation (vers 5 cm^{-1}), un rayonnement synchrotron cohérent est encore détectable après un tour complet du paquet dans l'anneau (Fig. 4.21); ces informations mettent en évidence un processus de relaxation plus lent aux courtes longueurs d'ondes. Nous allons voir dans la partie suivante que ces expériences d'interaction peuvent être utiles pour sonder la dynamique non linéaire du faisceau d'électrons et des instabilités CSR.

Rayonnement Synchrotron Cohérent
induit par laser en zone d'instabilité
CSR et à son voisinage

Chapitre 5

Introduction aux instabilités CSR

Sommaire

5.1 Observations expérimentales	110
5.1.1 Rayonnement synchrotron térahertz en fonction du courant . . .	110
5.1.2 Évolution temporelle du signal térahertz en zone instable . . .	111
5.1.3 Détails des bouffées de CSR	111
5.1.4 Évolution temporelle de la longueur du paquet d'électrons en zone instable	112
5.1.5 Liste des anneaux de stockage sur lesquels ont été observés des instabilités CSR	112
5.2 Descriptions des instabilités	113
5.2.1 Explications qualitatives	113
5.2.2 Équation de Vlasov-Fokker-Planck	113
5.2.3 Analyse de stabilité	116
5.2.4 Résultats numériques	117

Lorsque la densité de charge dans le paquet d'électrons dépasse une valeur critique, le rayonnement synchrotron devient à la fois beaucoup plus intense et instable, signature expérimentale d'une dynamique complexe des électrons. Ce chapitre a pour but à la fois d'introduire ces instabilités, appelées instabilités CSR (*Coherent Synchrotron Radiation*), ou *microwave instabilities* ou *microbunching instabilities* [94], et de situer nos études par rapport aux travaux actuels. Dans un premier temps, nous présenterons des résultats expérimentaux obtenus par le groupe de UVSOR sur le rayonnement synchrotron émis lorsque le système est instable. Dans un deuxième temps, nous présenterons l'explication principale donnée dans la littérature, qui est axée autour de la modélisation du paquet d'électrons par l'équation de Vlasov-Fokker-Planck.

5.1 Observations expérimentales

Cette section est basée sur des résultats obtenus par le groupe de UVSOR, publiés dans les articles [95, 96].

5.1.1 Rayonnement synchrotron térahertz en fonction du courant

Pour commencer, observons le signal térahertz émis par un paquet d'électrons sur l'anneau de stockage UVSOR II, en fonction du courant (Fig. 5.1) [95].

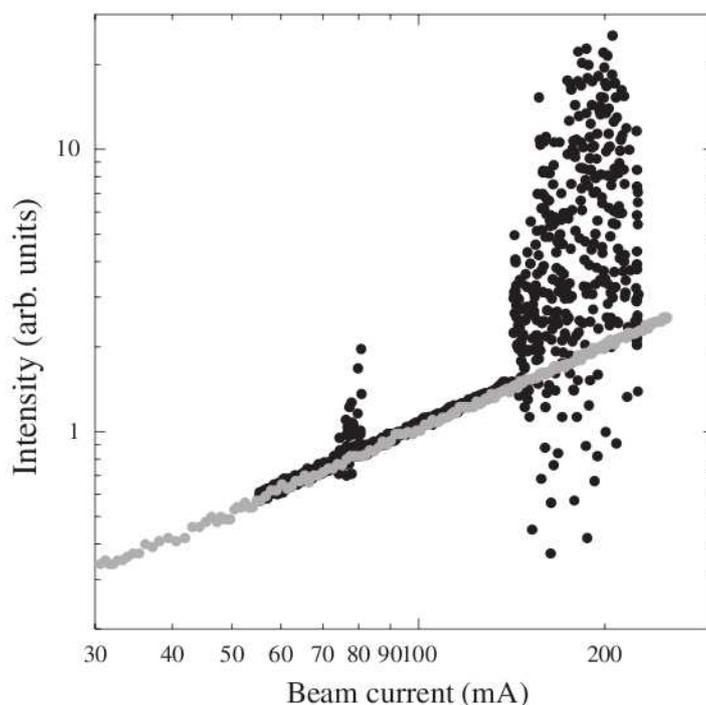


FIG. 5.1: Intensité moyenne du rayonnement térahertz dans le mode *single bunch* (un seul paquet circule dans l'anneau) (points noirs) et dans le mode *multi-bunch* (dans cette expérience, 12 paquets circulent dans l'anneau) (points gris) en fonction du courant. D'après [95].

En mode *multi-bunch*, lorsque les électrons sont répartis dans plusieurs paquets (12 dans l'expérience de la figure 5.1), le signal est stable et la puissance de sortie dépend linéairement du courant, ce qui est caractéristique d'un rayonnement synchrotron "classique" incohérent. En mode *single bunch*, lorsque tous les électrons sont dans un seul paquet, les signaux expérimentaux montrent qu'à des courants importants l'intensité fluctue très fortement et atteint des valeurs d'intensités beaucoup importantes qu'en mode *multi-bunch* (d'un facteur 10000) [95]. Ces rayonnements intenses proviennent d'un rayonnement synchrotron cohérent (CSR).

5.1.2 Évolution temporelle du signal térahertz en zone instable

La figure suivante (Fig. 5.2) présente l'évolution du signal térahertz en fonction du temps pour deux valeurs de courant : proche de 80 mA et proche de 200 mA, deux valeurs de courant pour lesquelles le système est instable [95].

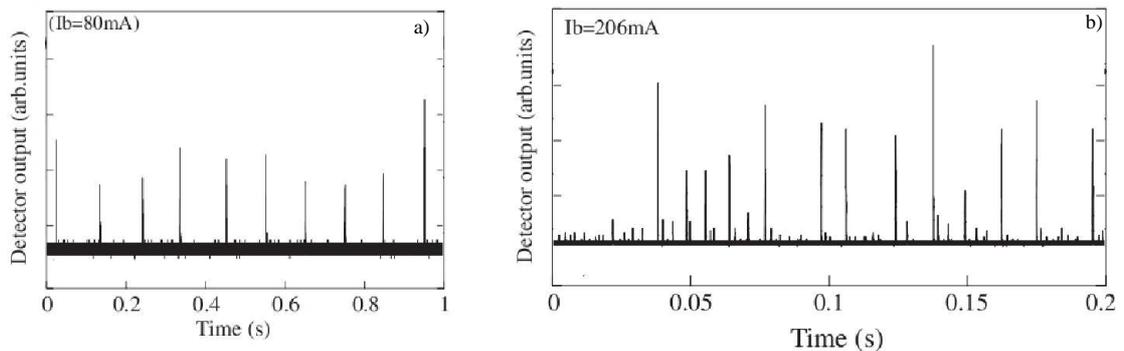


FIG. 5.2: Structures temporelles du rayonnement térahertz mesuré par un bolomètre InSb à un courant de faisceau de 80 mA (a) et 201 mA (b). D'après [95].

Nous voyons apparaître des bouffées (*bursts*) de signal térahertz intense, des bouffées de CSR. Ces bouffées apparaissent généralement de manière erratique, avec toutefois un caractère parfois approximativement périodique (Fig. 5.2 a), dont la forme dépend de la valeur du courant. La puissance du rayonnement synchrotron “classique” (incohérent) est quasiment au niveau du bruit de fond.

5.1.3 Détails des bouffées de CSR

Les détails temporels des bouffées de CSR montrent une structure interne, similaire à une modulation, qui dépend aussi du courant (Fig. 5.3)

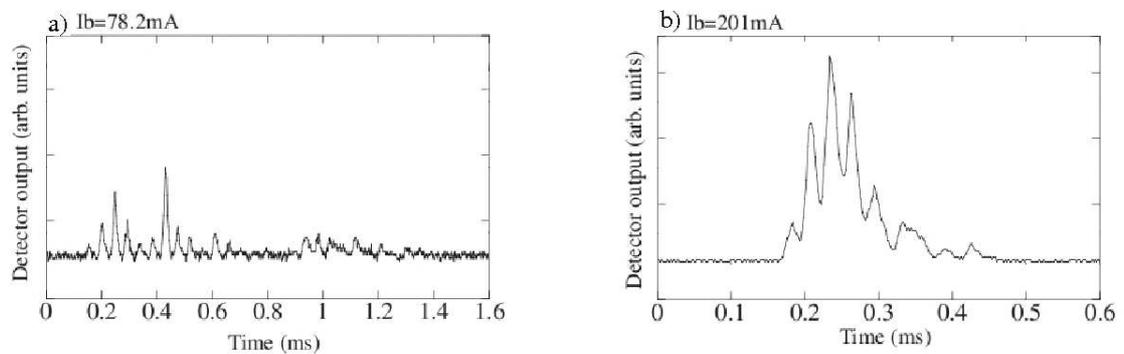


FIG. 5.3: Structures temporelles du rayonnement térahertz mesuré par un bolomètre InSb à un courant de faisceau de 78.2 mA (a) et 201 mA (b). D'après [95].

5.1.4 Évolution temporelle de la longueur du paquet d'électrons en zone instable

Finale­ment, une autre information sur la dynamique du paquet d'électrons peut être obtenue en regardant l'évolution de la longueur du paquet d'électrons en fonction du temps, et en la comparant avec l'apparition des bouffées de rayonnement térahertz (Fig. 5.4) [96]. Nous voyons clairement que l'apparition des bouffées est synchronisée avec une augmentation brutale de la longueur du paquet d'électrons.

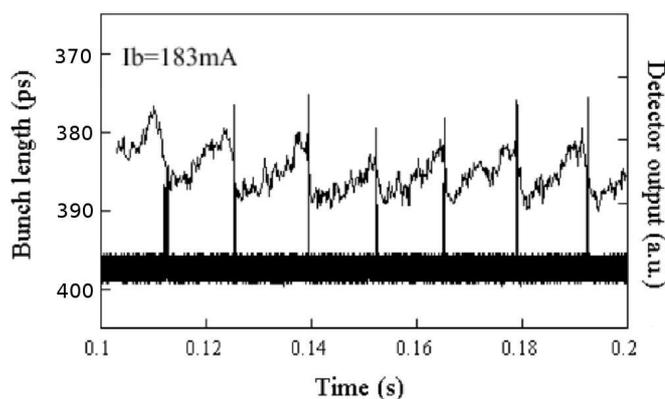


FIG. 5.4: Structures typique du signal térahertz et de la longueur du paquet d'électrons pour un courant de 183 mA. D'après [96].

5.1.5 Liste des anneaux de stockage sur lesquels ont été observés des instabilités CSR

Des instabilités CSR ont été observées sur les anneaux de stockage cités dans le tableau 5.1 (liste non exhaustive).

accélérateurs	année d'observation
NLS (national Synchrotron Light Source)	2001 [97]
SURF III (Synchrotron Ultraviolet Radiation Facility)	2001 [3]
Bessy II (Berliner Elektronenspeicherring-Gesellschaft für Synchrotronstrahlung)	2002 [98]
ALS (Advanced Light Source)	2002 [4]
SLAC (Stanford Linear Accelerator Center)	2003 [94]
UVSOR-II (Ultraviolet Synchrotron Orbital Radiation)	2005 [95]
ELETTRA	2005 [99, 100]

TAB. 5.1: Liste des anneaux de stockage sur lesquels ont été observés des instabilités CSR.

À noter que la première manifestation de rayonnement cohérent a été détectée sur un accélérateur linéaire, le *Tohoku Linac* au Japon, en 1989 [101] dans le domaine de l'infrarouge lointain. L'observation sur les anneaux de stockage est plus récente car la longueur des paquets d'électrons fait que le rayonnement cohérent est en général supprimé par un

effet des parois (*shielding effect*) (voir la section suivante).

En résumé, lorsque le courant augmente, des instabilités apparaissent et peuvent limiter le fonctionnement des anneaux de stockage [72]. Ces instabilités sont liées à la dynamique des électrons, toutefois une observation directe des électrons n'est pas accessible expérimentalement. Les informations accessibles sont le rayonnement synchrotron émis ou la dynamique de la longueur du paquet. Ce rayonnement synchrotron présente un caractère aléatoire, il est composé de bouffées (*bursts*) de rayonnements térahertz intenses, qui sont des bouffées de rayonnement synchrotron cohérent (CSR). Et l'apparition des bouffées sont en synchronisation avec la dynamique de la longueur du paquet, ce qui indique que la dynamique longitudinale du paquet d'électrons va jouer un rôle important dans la description de ces instabilités.

5.2 Descriptions des instabilités

5.2.1 Explications qualitatives

Un paquet d'électrons en rotation dans un anneau de stockage émet un rayonnement cohérent lorsque la longueur d'onde est typiquement supérieure à la largeur du paquet¹. Néanmoins, dans les accélérateurs, ce rayonnement cohérent est souvent supprimé par un effet des parois de la chambre vide de l'anneau, appelé en anglais le *shielding effect* (effet de protection littéralement) [102, 92, 103]. Aux longueurs d'onde plus courtes le *shielding effect* est moins efficace, néanmoins à ces longueurs d'onde le rayonnement cohérent a une contribution négligeable. Cependant, une petite fluctuation de la densité longitudinale, avec une longueur d'onde inférieure à la taille du paquet va émettre de manière cohérente [104, 105, 106, 107]. Si une partie du rayonnement émis interagit à nouveau avec le paquet, il peut en résulter une augmentation de la fluctuation initiale, ce qui peut mener à un phénomène d'auto-amplification, dont la conséquence est un rayonnement cohérent à des longueurs d'onde plus courtes que la largeur du paquet [105, 108, 109, 107]. Ce phénomène est limité en durée par la dynamique intrinsèque des électrons (voir section 5.2.4), qui a aussi pour effet une augmentation de la longueur du paquet [106, 110]. L'effet de relaxation et de diffusion dues aux fluctuations quantiques ramène le paquet à un état proche de l'état initial, permettant ainsi l'apparition d'une nouvelle bouffée de CSR [106, 110].

5.2.2 Équation de Vlasov-Fokker-Planck

Pour décrire ces phénomènes d'instabilités, un modèle adapté est celui décrivant la dynamique longitudinale de la densité de charge f du paquet d'électrons dans un espace des phases à deux dimensions, selon la coordonnée longitudinale q et l'énergie associée p [106, 105, 108]. L'évolution temporelle de densité de charge f est donnée par l'équation de Vlasov-Fokker-Planck [106, 105, 108] :

¹voir chapitre 3.

$$\overbrace{\frac{\partial f}{\partial \tau} + p \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p} [q + I_c F(q, f, \tau)]}^{\text{équation de Vlasov}} = \overbrace{2\epsilon \left(f + p \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right)}^{\text{Termes de Fokker-Planck}} \quad (5.1)$$

Avec :

- $\tau = t\omega_s$. t le temps en seconde, ω_s la pulsation synchrotron ($\omega_s = 2\pi f_s$, avec f_s la fréquence synchrotron).
- $q = \frac{z}{\sigma_z}$, avec z la distance de la particule considérée par rapport à la particule synchrone et σ_z la longueur RMS du paquet d'électrons.
- $p = -\frac{E-E_0}{\sigma_w}$ avec E l'énergie de la particule considérée par rapport à l'énergie du centre du paquet (énergie nominale E_0) et σ_w la dispersion en énergie (*energie spread*).
- $\epsilon = \frac{1}{\omega_s t_d}$ avec t_d le temps d'amortissement. $\epsilon \ll 1$.
- $F(q, p, \tau)$, la force collective, c'est à dire le rayonnement des électrons sur eux-mêmes.
- I_c le courant normalisé. $I_c = \frac{e^2 N}{\omega_s T_0 \sigma_w}$ avec e la charge d'un électron, N le nombre d'électrons dans le paquet et T_0 la période de révolution.

Nous allons détailler les différents termes de cette équation (section 5.2.2.1 et section 5.2.2.2), puis nous illustrerons son comportement avec des résultats numériques et des analyses de stabilité (section 5.2.3 et section 5.2.4). En plus de nous permettre de comprendre la dynamique des électrons à fort courant, ce qui nous sera utile pour comprendre notre expérience, cette équation nous permettra aussi de modéliser notre expérience dans le cas simplifié où les forces collectives sont négligées.

5.2.2.1 Équation de Vlasov

L'équation de Vlasov est obtenue en posant $\epsilon = 0$. Elle décrit l'évolution de la densité de charge f sur une échelle de temps petite devant le temps d'amortissement synchrotron ($O(10 \text{ ms})$). En particulier, elle permet de décrire l'évolution de la densité de charge sur une durée de l'ordre de la fréquence synchrotron ($O(10 \mu\text{s})$). Sans l'effet de la force collective ($F(q, f, \tau) = 0$), l'équation de Vlasov décrit simplement une rotation dans l'espace des phases à la fréquence synchrotron f_s .

Le terme de force collective F décrit l'interaction du paquet d'électrons sur lui-même, via son rayonnement. Cet effet est très important puisque qu'il est à l'origine des instabilités. Il est proportionnel à la valeur du courant I , qui est un paramètre variable expérimentalement². La figure 5.5 présente deux exemples où les électrons agissent sur eux-mêmes par l'intermédiaire du rayonnement émis, a) dans les courbures et b) réfléchi par une paroi.

La force collective F peut être exprimée de deux manières : dans l'espace direct q et l'espace réciproque k . Dans l'espace direct, $F(q, f, \tau)$ est le produit de convolution du *wakefield* $W(q)$ (champ de sillage d'un électron) par la densité longitudinale de charge $\rho(q, \tau)$ [Eq. (5.3)]. Le *wakefield* $W(q)$ décrit l'effet du rayonnement émis par une particule

²Au cours d'une expérience, un faisceau d'électrons est injecté dans l'anneau. Cela fixe le courant maximum, qui diminue ensuite lentement au cours du temps (en zone non instable, le taux d'amortissement est de l'ordre de la dizaine de minutes).

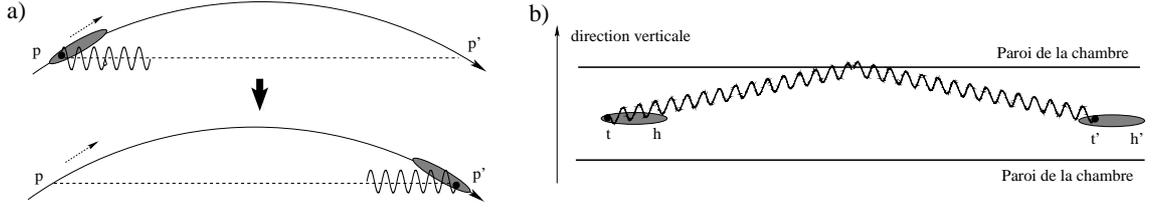


FIG. 5.5: Rayonnement du paquet d'électrons sur lui-même (a) dans une courbure et (b) par réflexion sur une paroi dans une section droite. Dans la courbure les électrons de la fin du paquet agissent sur ceux du début. Par réflexion, c'est l'inverse, les électrons du début du paquet agissent sur ceux placés à la fin. D'après [72].

chargée sur une autre particule chargée située à une distance q . Le terme $F(q)$ représente la somme des effets de l'ensemble des électrons du paquet sur les électrons placés en q .

$$F(q, f, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(q - q') \rho(q, \tau) dq \quad (5.2)$$

$$\rho(q, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q, p, \tau) dp \quad (5.3)$$

Dans l'espace réciproque, la force collective est exprimée comme le produit de la transformée de Fourier de la densité longitudinale de charge $\tilde{\rho}(k, \tau)$ par l'impédance de l'anneau de stockage $Z(k)$ [Eq. (5.6)]. L'impédance $Z(k)$ est la transformée de Fourier du *wakefield* : $Z(k) = \int W(z) e^{-ikz} dz$.

$$F(q, f, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(k) \tilde{\rho}(k, \tau) e^{ikq} dk \quad (5.4)$$

$$\tilde{\rho}(k, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q, \tau) e^{-ikq} dq \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

Actuellement, la principale difficulté dans la modélisation provient de la complexité à connaître précisément la forme de l'impédance (ou du *wakefield*), que ce soit de manière expérimentale, analytique ou numérique. En général, il est plus facile de travailler en fonction de la fréquence, c'est à dire avec l'impédance $Z(k)$

Analytiquement, seuls des cas très simplifiés permettent d'obtenir une expression de l'impédance analytique. C'est le cas pour un électron circulant sur une orbite circulaire dans le vide [111, 112] ou pour un électron en rotation dans le vide entre deux plaques parallèles [71, 113]. Les deux plaques parallèles rendent le système plus réaliste puisqu'elles induisent un *shielding effect*, c'est à dire que les grandes longueurs d'onde sont atténuées. Les expressions analytiques permettent d'étudier théoriquement l'équation, par exemple de trouver la forme des solutions stationnaires ou obtenir des seuils d'instabilités (voir

section 5.2.3).

Numériquement, il est possible d'obtenir des informations sur l'impédance en intégrant les équations de Maxwell par une méthode d'éléments finis, prenant en compte des géométries plus compliquées et des effets de régime transitoire (du à la taille finie des éléments) [72]. Néanmoins, ces techniques ont des limites puisque l'impédance peut être fortement modifiée par des effets de couplages entre les éléments, des composants parasites ou encore des facteurs environnementaux, qui peuvent être difficiles à inclure dans les simulations numériques [114].

Expérimentalement, des informations sur l'impédance longitudinale peuvent être obtenues en utilisant des bancs de mesures pour chaque composant de l'accélérateur (*bench measurement*) [115], ou à partir de mesures faites sur le faisceau (*beam-based measurement*) [116, 117, 118]. Toutefois, ces techniques ne permettent pas de résoudre les hautes fréquences, nécessaires pour prédire les seuils d'instabilités collectives [114]. Au chapitre suivant, nous verrons que nos expériences permettent d'avoir des informations liées à l'impédance proche du seuil d'instabilité.

5.2.2.2 Termes de Fokker-Planck

Les termes de Fokker-Planck de l'équation (5.1) décrivent l'amortissement et la diffusion due aux fluctuations quantiques provenant de la composante incohérente du rayonnement synchrotron [108]. Sans effet du rayonnement des électrons sur eux-mêmes, ces termes ramènent la distribution de charge vers un état stable, une distribution gaussienne de largeurs RMS σ_z et σ_w .

5.2.3 Analyse de stabilité

Dans les cas simplifiés où une expression analytique de l'impédance $Z(k)$ est calculable, il est possible d'étudier analytiquement le système. Dans ces études de stabilités, seule l'équation de Vlasov est utilisée, les termes de Fokker-Planck jouant un rôle sur une durée plus longue que les taux de croissance des perturbations [108, 113, 107].

Dans les deux cas cités précédemment des électrons en rotation dans le vide avec et sans plaques parallèles, une analyse de stabilité montre que le système devient instable lorsque le courant dépasse une valeur de courant seuil [108, 113, 107]. Ces études montrent aussi qu'il existe une fréquence privilégiée pour laquelle la solution stationnaire se déstabilise. Autrement dit, il existe une fréquence de modulation de la densité longitudinale de charge qui est plus amplifiée que les autres fréquences. En particulier au seuil de l'instabilité seule cette fréquence sera amplifiée. Au chapitre suivant, nous donnerons plus de détails sur ces phénomènes et nous les observerons expérimentalement.

5.2.4 Résultats numériques

Nous allons maintenant présenter des résultats d'intégration numérique dans le cas simplifié d'électrons en rotation dans le vide entre deux plaques parallèles. Ces résultats ont été obtenus par M. Venturini *et. al.* [107] (Fig. 5.6) et M. Venturini et R. Warnock [113] (Fig. 5.7).

Dans un premier temps, nous allons observer l'évolution d'une perturbation sur quelques périodes synchrotron, et dans ce cas seuls les termes de l'équation de Vlasov sont nécessaires. Sur cette figure sont présentées la distribution de charge $f(q, p, \tau)$ du paquet d'électrons dans l'espace des phases (q, p) (Fig. 5.6 a,b,c) et la distribution longitudinale de charge $\rho(q, \tau)$ (Fig. 5.6 d,e,f). À $\tau = 0$, la solution stationnaire a été perturbée par une modulation d'énergie de faible amplitude à la fréquence la plus instable (obtenue par une analyse de stabilité, ici $\lambda = 2.2$ mm). L'instabilité provient du centre du paquet où la densité de charge est la plus grande. Une structure de "micro-paquets" (*micro-bunch structure*) émerge sous la forme d'une modulation de la densité longitudinale de charge (Fig. 5.6 d). La perturbation résultante dans la distribution du paquet apparaît d'abord à la tête du paquet, puis est transportée vers l'arrière et ensuite tout autour par la rotation dans l'espace des phases. Après près de deux périodes synchrotron la distribution du paquet dans l'espace des phases semble se figer (Fig. 5.6 c) car la longueur du paquet ayant augmenté, la densité de charge devient moins importante et déplace le paquet loin de la condition d'instabilité [107].

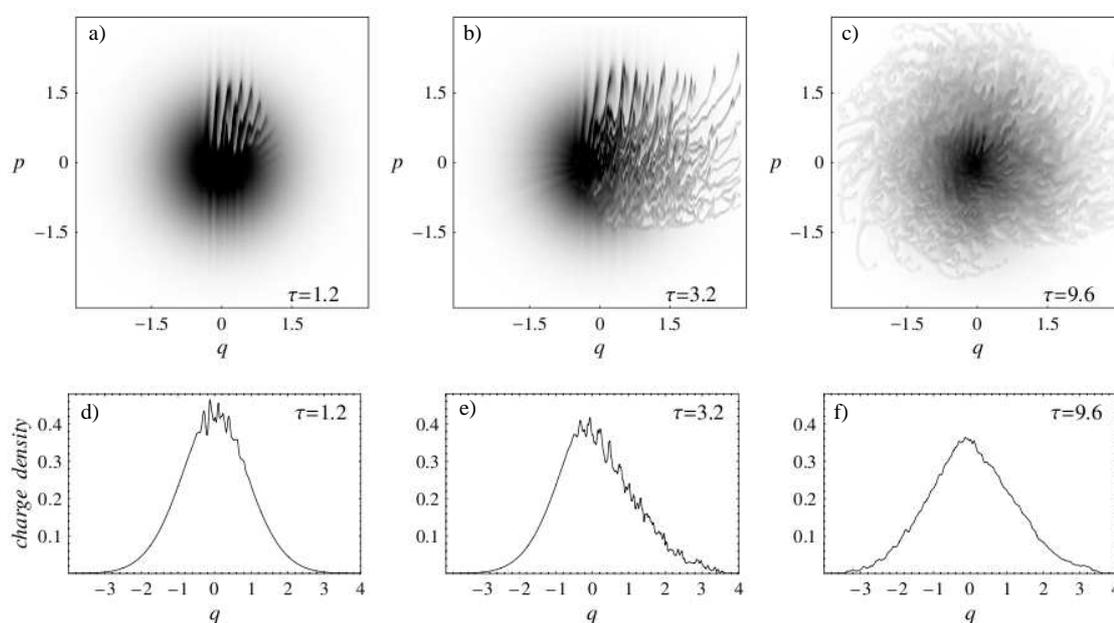


FIG. 5.6: Évolution temporelle du paquet d'électrons sous l'effet du CSR (dans le cas des électrons en rotation dans le vide entre deux plaques parallèles). D'après [107]. a,b,c : distribution de charge $f(q, p, \tau)$ dans l'espace des phases. e,f,g : distribution longitudinale de charge $\rho(q, \tau)$. Les images ont été prises à $\tau = 1.2, 3.2, 9.6$. L'instabilité a été déclenchée par une faible perturbation (de longueur d'onde $\lambda = 2.2$ mm). Une unité de q correspond à 1 cm.

Une fois la densité longitudinale de charge “lissée” (Fig. 5.6 f), la distribution de charge reste quasiment dans le même état, car seule l’équation de Vlasov a été intégrée. Si les termes de Fokker-Planck sont rajoutés, la diffusion et l’amortissement vont ramener le paquet d’électrons à un état proche de l’état initial. C’est à dire un état avec une densité de charge plus importante, puisque le paquet se comprime, où une perturbation, due aux fluctuations de densité électronique, va pouvoir s’amplifier de nouveau. Ce phénomène répété indéfiniment formera des bouffées de rayonnement synchrotron cohérent, similaires à celles observées expérimentalement (Fig. 5.2). Un exemple de résultat numérique obtenu avec l’équation de Vlasov-Fokker-Planck est présenté figure 5.7 [113].

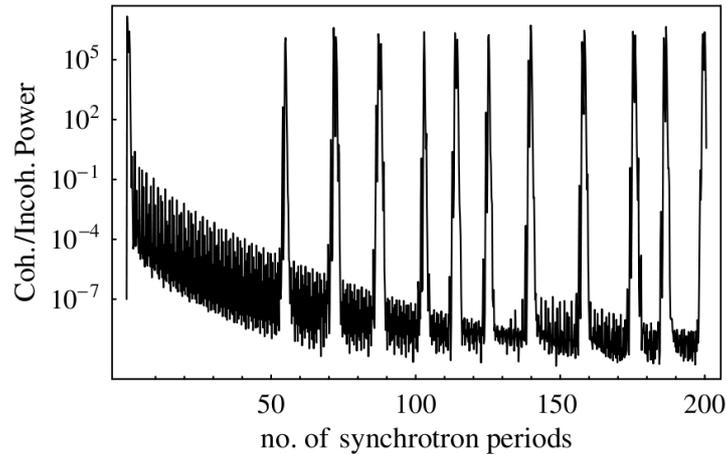


FIG. 5.7: Rapport de la puissance du rayonnement cohérent sur la puissance du rayonnement incohérent. D’après [113].

Conclusion

Les instabilités spatio-temporelles CSR (*Coherent Synchrotron Radiation*) apparaissent naturellement lorsque le courant dépasse un courant seuil, et peuvent être un effet limitatif dans l’utilisation des anneaux de stockage [72]. Il n’est pas possible d’observer directement les électrons dans l’anneau, ainsi les informations sur l’instabilité proviennent de données indirectes, comme le rayonnement synchrotron émis par les électrons. La modélisation du paquet d’électrons par l’équation de Vlasov-Fokker-Planck permet de retrouver des comportements similaires aux expériences et permet d’établir un scénario de l’instabilité. Ces études théoriques prédisent l’apparition d’instabilités par la croissance de modes instables. Néanmoins, des tests expérimentaux de ces théories présentaient toujours un défi, parce que l’espace des phases du paquet n’est observable directement et aussi parce que des méthodes pour perturber sélectivement des courtes longueurs d’ondes manquaient jusqu’à présent. Nous allons voir que le type d’expérience présentée au chapitre précédent, où un motif périodique est imprimé dans l’espace des phases du paquet d’électrons, permet de donner une preuve expérimentale à ces théories.

Chapitre 6

Interaction laser/électrons en zone d'instabilité CSR et à son voisinage

Sommaire

6.1	Modélisation de l'expérience sans force collective	121
6.1.1	Distribution de la densité de charge avant et juste après l'interaction	121
6.1.2	Distribution de la densité de charge et puissance térahertz émise après l'interaction	122
6.2	Expérience sur l'anneau de stockage UVSOR-II	125
6.2.1	Dispositif expérimental	125
6.2.2	Résultats expérimentaux	128

Dans les systèmes spatio-temporels, des mécanismes d'instabilités peuvent faire apparaître spontanément des structures. Ces phénomènes sont appelés *pattern formation* (formation de motifs), et sont étudiés en physique [119], en chimie [119], en biologie [120], en informatique [121], ou en sciences humaines [122]. Lorsque c'est possible, une manière d'étudier ces motifs est d'observer la réaction de ces systèmes à une perturbation, au delà ou en deçà du seuil d'apparition des structures. Dans les systèmes spatio-temporels étendus, une perturbation de la forme d'une modulation spatiale est souvent bien adaptée pour tester la dynamique. Plusieurs comportements sont alors discernables en fonction de l'état du système (Fig. 6.1). Si le système se trouve loin au dessus du seuil d'instabilité, il y a en général beaucoup de perturbations avec des nombres d'onde différents qui possèdent un taux de croissance positif (Fig. 6.1 a), et la dynamique est habituellement complexe. En revanche, au seuil d'instabilité, seuls quelques nombres d'onde (en général un, K_c) sont associés à un taux de croissance qui est nul. Au voisinage du seuil, l'étude de la dynamique des ondes, dont les nombres d'onde sont proches de K_c , est suffisante pour décrire le système. Les perturbations avec des nombres d'onde très différents finissent par s'atténuer car elles ont un taux de croissance négatif (Fig. 6.1 b). Expérimentalement, il peut être difficile de se placer exactement au seuil d'instabilité ; néanmoins la dynamique juste en dessous seuil (Fig. 6.1 c) apporte déjà certaines informations sur la structure attendue au dessus du seuil. Le taux de décroissance de la perturbation liée à la fréquence la plus instable étant proche de zéro, une perturbation à cette fréquence mettra un temps très long

à s'amortir et sera donc plus facilement observable expérimentalement. Les structures que l'on observe proches du seuil d'instabilité sont appelées des précurseurs [123, 124].

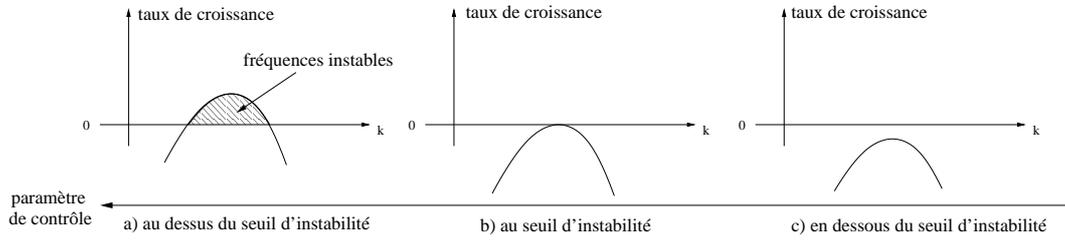


FIG. 6.1: Taux de croissance des perturbations en fonction de leur fréquence. a) Le système est au dessus du seuil d'instabilité. b) Le système est au seuil d'instabilité. c) Le système est en dessous du seuil d'instabilité.

Les études théoriques présentées au chapitre précédent [108, 113], basées sur l'équation de Vlasov-Fokker-Planck, montrent que les instabilités CSR apparaissent pour des fréquences de modulation particulières, liées à la forme de l'impédance de l'anneau de stockage. Néanmoins, des tests expérimentaux de ces théories présentaient toujours un défi. Nous allons voir dans ce chapitre que les expériences d'interaction d'un paquet d'électrons avec une impulsion laser, produisant un rayonnement synchrotron cohérent permettent de tester la dynamique du paquet. Nous étudierons le système loin du seuil de l'instabilité CSR et au voisinage du seuil. La situation où le système est stable et loin du seuil d'instabilité a été étudiée au quatrième chapitre.

Récemment, des expériences de *slicing*¹ en régime instable ont permis d'obtenir des informations sur les instabilités CSR. En 2005, J. M. Byrd *et. al.* ont montré que les bouffées (*bursts*) de CSR térahertz peuvent être déclenchées par une interaction avec une impulsion laser [125]. Autrement dit, les bouffées de CSR peuvent être synchronisées avec les impulsions laser.

Ce chapitre est composé de deux sections. La première est une étude analytique et numérique de modélisation de notre expérience dans le cas simplifié où le rayonnement émis par le paquet d'électrons n'agit pas sur lui-même. Cela permettra d'avoir une situation de référence où nous savons qu'il n'y a pas d'instabilité. La deuxième section présente des résultats expérimentaux de l'interaction entre une impulsion laser modulée et un paquet d'électrons lorsque le système est proche ou dans la zone d'instabilité. Les expériences ont été menées sur l'anneau de stockage UVSOR-II.

¹interaction d'une impulsion laser femtoseconde avec le paquet d'électrons

6.1 Modélisation de l'expérience sans force collective

L'objectif de cette section est d'étudier analytiquement la réaction d'un paquet d'électrons à une modulation de son espace des phases dans le cas simplifié où le rayonnement des électrons sur eux-mêmes est négligé. Cela permettra d'avoir un cas de référence où le processus à l'origine de l'instabilité n'intervient pas. Ainsi, lors des expériences, tout écart avec les comportements trouvés dans cette partie théorique pourra être attribué à un effet des forces collectives. Ce modèle est donc valable à faible courant, et nous retrouverons d'ailleurs des résultats comparables à ceux obtenus avec le formalisme des matrices de transfert².

Nous travaillons avec l'équation de Vlasov-Fokker-Planck présentée au chapitre précédent, où le terme de force collective a été enlevé ($I = 0$) :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + p \frac{\partial f}{\partial q} - q \frac{\partial f}{\partial p} = 2\epsilon \left(f + p \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right) \quad (6.1)$$

6.1.1 Distribution de la densité de charge avant et juste après l'interaction

Avant l'interaction avec l'impulsion laser, la forme du paquet est une gaussienne de largeurs adimensionnées selon q et p :

$$f(q, p) = e^{-\frac{q^2 + p^2}{2}} \quad (6.2)$$

L'interaction avec le laser mène à une modulation rapide de l'énergie à la fréquence optique de la distribution de charge des électrons, et à la fréquence térahertz de l'enveloppe de l'impulsion laser. La diffusion, apparaissant dans le terme de Fokker-Planck (membre de droite de l'équation (6.1)), fait disparaître rapidement la modulation à la fréquence optique. Dans cette étude, nous ferons l'approximation qu'il ne reste seulement que la modulation à la fréquence térahertz, due à l'enveloppe lentement variable de l'impulsion laser. De ce fait, nous prendrons une densité de charge après l'interaction qui est une gaussienne dont l'énergie est modulée à une fréquence térahertz ($\nu = \frac{ck_0}{2\pi\sigma_z}$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide)[Eq. 6.3].

$$f(q, p, \tau = 0) = \frac{1}{1 + A \cos(k_0 q)} e^{-\frac{q^2}{2}} e^{-\frac{p^2}{2[1 + A \cos(k_0 q)]^2}} \quad (6.3)$$

A est l'amplitude de la modulation, en unité de la dispersion d'énergie. L'instant de l'interaction a été pris comme origine des temps ($\tau = 0$). Cette distribution a été choisie de manière à ce que d'une part son énergie soit modulée, et que d'autre part sa densité longitudinale de charge reste inchangée : $\rho(q, \tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q, p, \tau = 0) dp = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{q^2}{2}}$.

²qui ne tient pas non plus compte de l'action du rayonnement des électrons sur le paquet

Afin de continuer ces études analytiques, nous allons nous placer dans le cas de faible puissance laser, et poser que A est petit devant 1. Dans ce cas, l'équation (6.3) devient :

$$f(q, p, \tau = 0) \simeq e^{-\frac{q^2+p^2}{2}} [1 - A \cos(k_0 q)(1 - p^2)] \quad (6.4)$$

6.1.2 Distribution de la densité de charge et puissance térahertz émise après l'interaction

Une fois que l'interaction a eu lieu, le paquet continue de circuler dans l'anneau et nous allons étudier son évolution en utilisant l'équation de Vlasov-Fokker-Planck [Eq. (6.1)]. Cette étude se fait en deux étapes. La première consiste à obtenir l'évolution de la distribution de charge $f(q, p, \tau)$. Pour cela, on se place dans le repère (x, y) tournant à la période synchrotron, et en faisant un développement asymptotique³ nous pouvons montrer que seule l'amplitude de la modulation varie dans le temps⁴ :

$$f(x, y, \tau) \simeq e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left[1 - A e^{-\epsilon k_0^2 (\tau - \frac{\sin(2\tau)}{2})} \cos(k_0 x)(1 - y^2) \right], \quad (6.5)$$

$$\text{avec } x = q \cos \tau - p \sin \tau, \quad (6.6)$$

$$\text{et } y = q \sin \tau + p \cos \tau \quad (6.7)$$

Cette expression, et en particulier le terme $e^{-\epsilon k_0^2 (\tau - \frac{\sin(2\tau)}{2})}$, montrent que la modulation appliquée au paquet d'électrons diminue de manière continue au cours du temps, et que plus la fréquence de modulation est élevée, plus la décroissance est rapide, effet qui est lié à la diffusion.

La deuxième étape consiste à calculer la densité longitudinale de charge $\rho(q, \tau)$ qui agit comme un terme source dans le processus d'émission synchrotron cohérente, puisque la puissance térahertz s'écrit comme le module du spectre de la densité longitudinale de charge⁵, intégré sur toute la bande spectrale du détecteur térahertz, de largeur $2d$ centrée sur k_0 [71, 19] :

$$P_{THz}(\tau) = C \int_{k-d}^{k+d} |\tilde{\rho}(k, \tau)|^2 dk \quad (6.8)$$

$$\text{avec } \tilde{\rho}(k, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q, \tau) e^{-ikq} dq \quad (6.9)$$

C étant un coefficient de proportionnalité prenant en compte l'intensité émise par un seul électron [71]. Finalement, en remplaçant l'équation (6.5) dans les équations (6.9) et (6.8), on obtient (détails en annexe) :

$$P_{THz}(\tau) \simeq \frac{\pi C}{2} A^2 [k_0 \sin(\tau)]^4 e^{-(k_0 \sin \tau)^2} \times e^{-\epsilon k_0^2 [2\tau - \sin(2\tau)]} \quad (6.10)$$

³Nous avons supposé que la période de modulation était courte devant la longueur du paquet

⁴Les détails sont présentés en annexe

⁵voir chapitre 3.

À noter que l'équation (6.10) présente des similarités avec l'expression de puissance térahertz obtenue au quatrième chapitre avec le formalisme des matrices de transfert⁶ [Eq. (4.10)], lorsque seule la dynamique longitudinale est considérée ($r_{51} = r_{52} = 0$, $r_{56} \neq 0$) et que le temps reste petit par rapport à la période synchrotron.

La figure 6.2 présente l'évolution de la puissance térahertz émise sur une demi-période synchrotron après l'interaction avec une impulsion laser (résultats numériques et analytiques), et l'évolution dans l'espace des phases de la distribution de charge associée (résultats numériques).

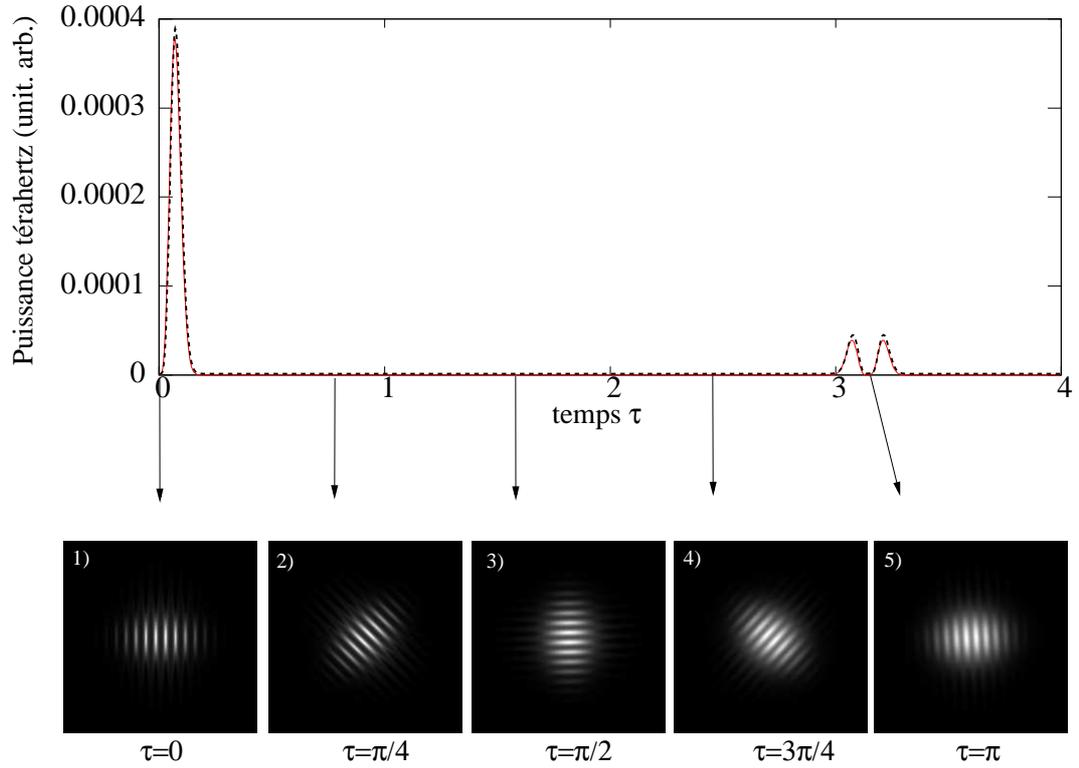


FIG. 6.2: Haut : puissance térahertz émise par un paquet d'électrons dont l'énergie a été initialement modulée. Courbe rouge obtenue avec l'équation (6.10). La courbe en pointillés noirs a été obtenue par intégration numérique de l'équation (6.1) avec la condition initiale donnée par l'équation (6.3). Bas : distribution de charge du paquet d'électrons $f(q, p, \tau)$ à a) $\tau = 0$, b) $\tau = \frac{\pi}{4}$, c) $\tau = \frac{\pi}{2}$, d) $\tau = \frac{3\pi}{4}$, e) $\tau = \pi$. Paramètres : $A = 0.1$, $\nu_0 = 3 \text{ cm}^{-1}$, $f_s = 9.06 \text{ KHz}$, $t_d = 20.5 \text{ ms}$, $\sigma_z = 1.09 \text{ cm}$, $\epsilon = \frac{1}{\omega_s t_d}$ (intégration de l'équation (6.1)).

Le premier pic sur la figure 6.2 correspond à l'émission térahertz juste après l'interaction, celle qui a été enregistré lors des expériences présentées au quatrième chapitre. La durée du pic est limitée par la rotation à la fréquence synchrotron du paquet dans l'espace des phases, qui lisse la modulation de densité longitudinale de charge. Après près d'une demi-période synchrotron ($\tau = \pi$), la modulation se retrouve quasiment perpendiculaire à l'axe de la coordonnée longitudinale (Fig. 6.2 e), et une nouvelle série de deux pics est émise.

⁶dans le cas d'une impulsion laser et d'un paquet d'électrons de longueur infinie.

Entre le premier pic et la deuxième série de pics, le signal térahertz a été atténué, principalement à cause de la diffusion. Le rapport entre la puissance émise par la deuxième série de pics et la puissance émise au premier pic est égal à :

$$\frac{P_{THz}(2^{\text{ème}} \text{ série de pics})}{P_{THz}(1^{\text{ier}} \text{ pic})} = e^{-2\epsilon k_0^2 \pi} \quad (6.11)$$

La figure 6.3 représente le rapport $\frac{P_{THz}(2^{\text{ème}} \text{ série de pics})}{P_{THz}(1^{\text{ier}} \text{ pic})}$ en fonction du nombre d'onde ν_0 de la modulation. Expérimentalement, nous avons vu au quatrième chapitre qu'un signal térahertz cohérent a été détecté entre 2 et 28 cm^{-1} . Dans cette gamme de fréquences, le rapport de puissance entre les deux séries de pics passe de 0.36 à 5×10^{-87} pour $\nu_0 = 2 \text{cm}^{-1}$ et $\nu_0 = 28 \text{cm}^{-1}$ respectivement.

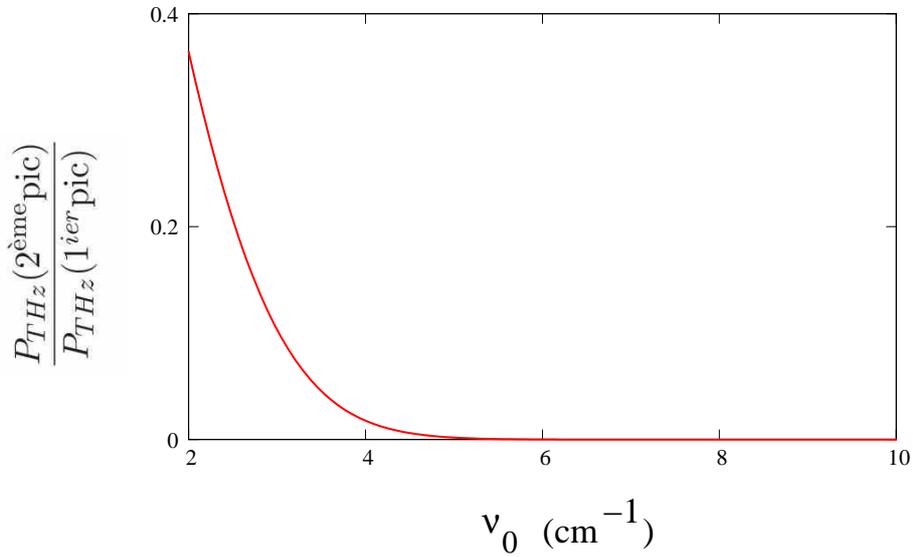


FIG. 6.3: Rapport entre la puissance émise après une demi-période synchrotron et la puissance émise juste après l'interaction en fonction du nombre d'onde de la modulation initiale ν_0 (en cm^{-1}). Courbe obtenue à partir de l'équation (6.11). Paramètres : $f_s = 9.06 \text{ KHz}$, $t_d = 20.5 \text{ ms}$, $\sigma_z = 1.09 \text{ cm}$.

En résumé, lorsque l'action du rayonnement des électrons sur eux-mêmes peut être négligée, la dynamique du paquet d'électrons est toujours stable. Le rayonnement térahertz cohérent émis par le paquet d'électrons est composée d'un pic juste après l'interaction avec le laser et une série de deux pics d'amplitude plus faible après une demi-période synchrotron. Plus la fréquence de modulation de l'enveloppe de l'impulsion laser est élevée, plus le signal térahertz émis après une demi-période synchrotron est faible. Lors des expériences au voisinage ou au dessus du seuil d'instabilité, nous nous attendons à observer une différence avec cette dynamique. Cette étude théorique met en évidence que les termes qui s'opposent aux instabilités sont d'une part l'oscillation synchrotron qui lisse la modulation de la densité longitudinale de charge, et d'autre part la diffusion qui atténue les fluctuations d'autant plus fortement que les fluctuations varient rapidement spatialement.

6.2 Expérience sur l'anneau de stockage UVSOR-II

Nous allons maintenant étudier expérimentalement l'interaction d'un paquet d'électrons avec une impulsion laser modulée, dans le cas où l'effet du rayonnement des électrons sur eux-mêmes n'est pas négligeable, c'est à dire en zone d'instabilité CSR, ou à son voisinage.

L'expérience que nous avons réalisée est similaire à celle présentée au quatrième chapitre, avec toutefois deux différences. La première différence est que l'interaction entre l'impulsion laser et le paquet d'électrons s'est déroulée en zone d'instabilité CSR ou à son voisinage. Le courant est maximum juste après l'injection du faisceau dans l'anneau de stockage, puis diminue au cours du temps. De ce fait, en début d'expérience le système est d'abord instable, puis devient stable lorsque le courant passe sous le courant seuil. En zone instable le courant diminue beaucoup plus rapidement, et de ce fait raccourcit considérablement le temps pour faire les expériences dans cette configuration. Nous avons donc eu besoin de faire les expériences et d'enregistrer les données rapidement. Ainsi, la deuxième différence avec les expériences précédentes est que nous avons automatisé, pour rendre plus rapide, le balayage des fréquences de modulation de l'impulsion laser et l'enregistrement du signal térahertz.

6.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est présenté figure 6.4. La mise en forme de l'impulsion laser est basée sur le deuxième dispositif expérimental décrit au quatrième chapitre, où l'impulsion laser ne passe pas dans le compresseur de l'amplificateur. Un bras de l'interféromètre de Michelson a été placé sur une platine de translation motorisée commandée par une interface Labview. La platine de translation effectuait en permanence des allers-retours, balayant ainsi la fréquence de modulation de l'enveloppe de l'impulsion laser sur une plage couvrant tout la zone où du signal CSR térahertz était détectable (de 2 à 28 cm^{-1}). La position de la platine de translation était mesurée par un capteur LVDT.

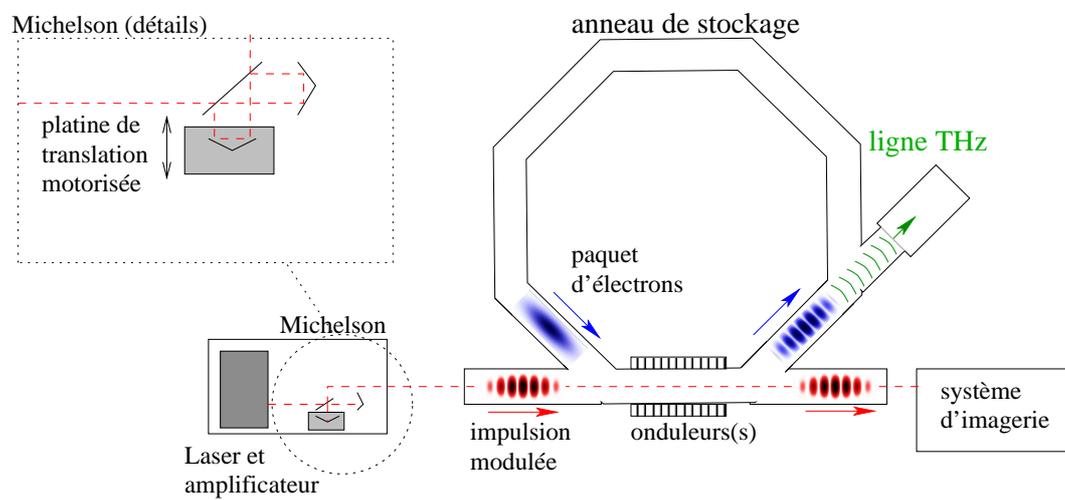


FIG. 6.4: Le dispositif expérimental est similaire à celui présenté chapitre 4 avec en plus un balayage automatique de la position d'un bras de l'interféromètre de Michelson, permettant de balayer de manière continue et en quelques secondes la fréquence de modulation de l'enveloppe laser. Le système d'enregistrement du signal térahertz provenant du bolomètre a aussi été automatisé (Fig. 6.5).

L'enregistrement du signal térahertz provenant du bolomètre (Fig. 6.5 a) a aussi été automatisé pour être synchronisé à la fois à la position de la platine de translation de l'interféromètre de Michelson (Fig. 6.5 b) et aussi au signal de synchronisation à 1 KHz de la chaîne laser (Fig. 6.5 c).

Comme la capacité d'enregistrement d'un oscilloscope est limitée, les signaux de synchronisation ainsi que la configuration de l'oscilloscope (Lecroy WaveRunner 104MXi) ont été choisis de manière à pouvoir enregistrer des petites séries de signal térahertz (d'une durée de l'ordre de la milliseconde) entre des plages sans enregistrement plus longues (de l'ordre de la dizaine de millisecondes)(Fig. 6.5 c). Ce dispositif est nécessaire pour pouvoir balayer la platine de translation de l'interféromètre de Michelson suffisamment lentement pour tracer un diagramme de bifurcation.

Finalement, ces enregistrements sont présentés comme sur la figure 6.5 d), où le temps rapide (de l'ordre de la milliseconde) varie sur l'axe horizontal et le temps lent (de l'ordre de la seconde), associé aux fréquences de modulations de l'enveloppe laser, varie sur l'axe vertical.

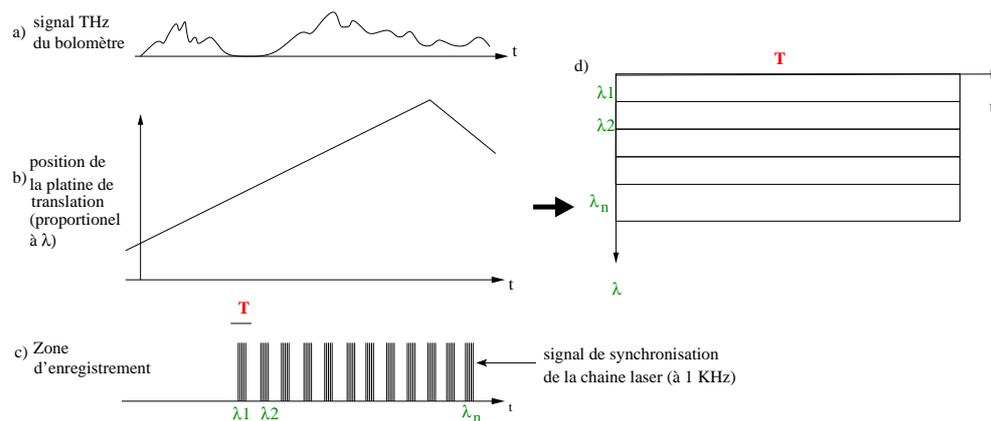


FIG. 6.5: Enregistrement du signal térahertz provenant du bolomètre. Le début de l'enregistrement est synchronisé sur la position de la platine de translation de l'interféromètre de Michelson. Ensuite, le signal térahertz est enregistré par série de 5 ms, synchronisé sur le signal à 1 KHz de la chaîne laser. Ces enregistrements sont finalement présentés comme en d) où le temps rapide varie selon l'axe horizontal et la longueur d'onde selon l'axe vertical.

Durant les expériences de décembre 2008, nous avons rencontré un problème provenant de la chaîne laser : en configuration "classique", deux impulsions femtosecondes au lieu d'une étaient émises. L'écart entre les deux impulsions était de l'ordre de la dizaine de pico-secondes, et donc en sortie de l'amplificateur, ces deux impulsions se recouvraient (puisque la largeur d'une impulsion est de l'ordre de 300 ps). De ce fait, l'impulsion était déjà modulée avant de passer dans l'interféromètre de Michelson. En sortie de l'interféromètre de Michelson, le spectre de l'impulsion laser avait plusieurs composantes à des fréquences térahertz au lieu de une seule souhaitée. Les résultats obtenus dans ces conditions doivent être considérés comme une étude de faisabilité de l'approche. Les expériences seront reproduites en 2009, après la réparation du laser par la société Coherent.

6.2.2 Résultats expérimentaux

Cette section présente les résultats expérimentaux obtenus avec le dispositif expérimental, et la méthode de présentation des données décrits précédemment.

Lorsque le système est loin au dessus du seuil d'instabilité (Fig. 6.6 a, $I = 21.8$ mA), l'émission térahertz apparaît sous forme de bouffées irrégulières. L'interaction avec l'impulsion laser n'a pas d'effet notable.

Lorsque le courant diminue, le système passe dans un état où l'interaction avec le laser a un effet notable (Fig. 6.6 b, $I = 14.8$ mA), toutefois la longueur d'onde de la modulation de l'impulsion laser ne semble pas avoir d'incidence. Une interprétation est que le système est sensible à l'augmentation de la dispersion en énergie induite par l'impulsion laser. Autrement dit, l'impulsion laser aurait un effet en augmentant la largeur de la distribution en énergie du paquet.

Le précurseur recherché est visible sur la figure 6.6. Le système se trouve dans une situation stable (Fig. 6.6 c, $I = 11.8$ mA), toutefois il est suffisamment proche du seuil d'instabilité pour que des informations sur cette instabilité soient observables : du signal térahertz intense apparaît encore relativement longtemps après l'interaction (après $\simeq 0.1$ ms, c'est à dire après plus de 500 tours d'anneau)(Fig. 6.6 d). La figure (Fig. 6.6 e) montre en détail ce processus : le signal émis après quelques centièmes de milliseconde est plus intense que le signal émis juste après l'interaction. Ces images mettent clairement en évidence que les instabilités CSR apparaissent pour des fréquences particulières. À noter que le deuxième pic apparaît au bout d'un temps proche d'une demi-période synchrotron ; la durée entre les deux pics de la figure 6.6 est proche de 0.0497 ms, et la demi-période synchrotron est proche de 0.047 ms ⁷.

⁷La fréquence synchrotron est de 10.52 KHz.

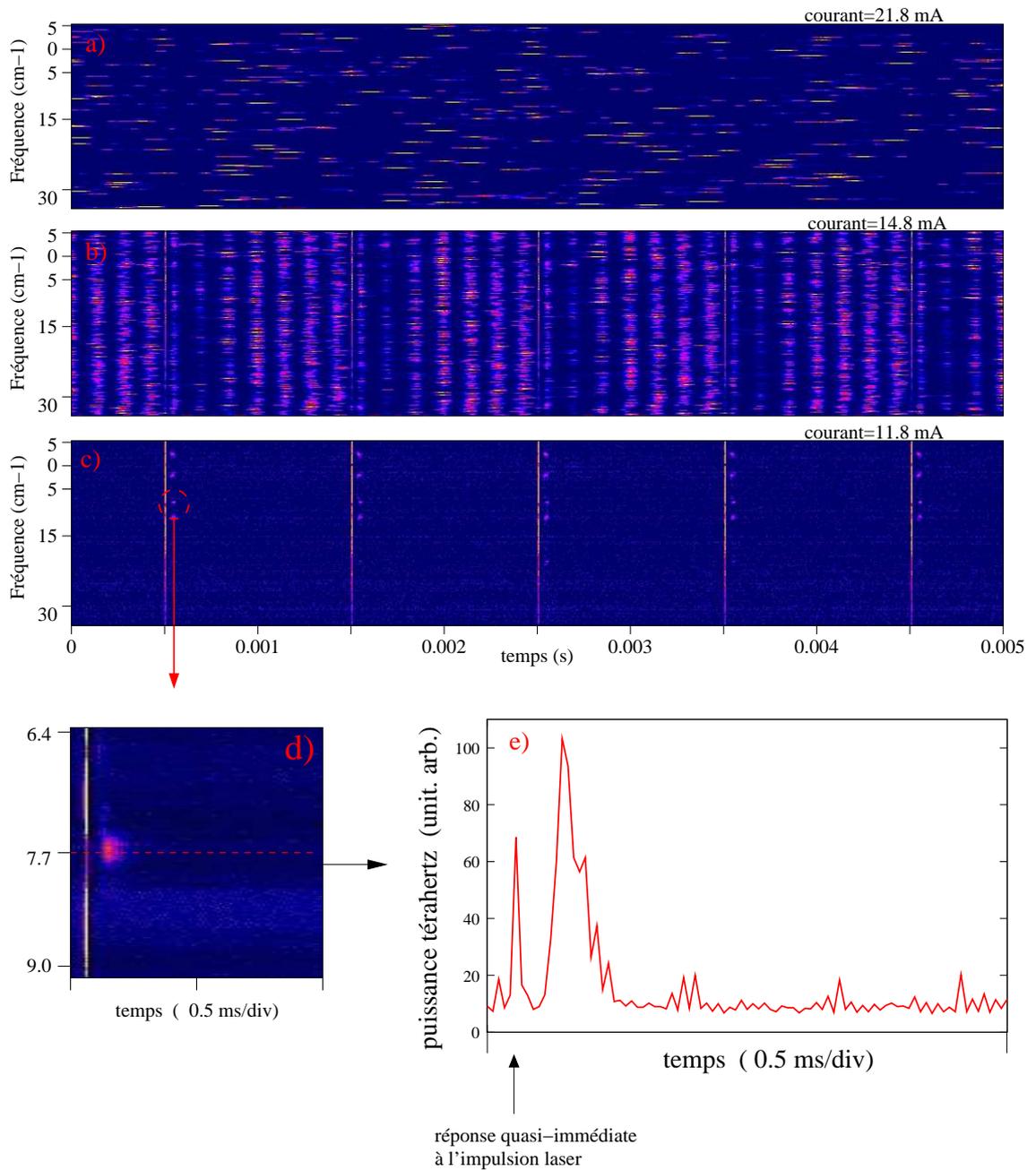


FIG. 6.6: Puissance térahertz émise par le paquet d'électrons, en fonction du temps et de la fréquence de modulation de l'impulsion laser, pour un courant de a) 21.8 mA, b) 14.8 mA, c,d,e) 11.8 mA. L'image e) est une coupe de l'image d).

Conclusion

L'excitation à une fréquence précise d'un paquet d'électrons circulant dans un anneau de stockage, par une interaction avec une impulsion laser permet de tester l'instabilité CSR. Nos travaux ont permis de mettre en évidence expérimentalement que l'instabilité CSR se forme à partir de l'amplification de certaines fréquences, comme cela avait été prédit théoriquement. Ainsi, la dernière figure (Fig. 6.6 c) montre les précurseurs de l'instabilité CSR : le système est sous le seuil d'instabilité, toutefois certains taux de décroissances des perturbations sont suffisamment faibles pour qu'on puisse observer quelles sont les fréquences qui sont les plus instables. Cette étude est pour l'instant qualitative, mais cette expérience permettra certainement d'obtenir des informations quantitatives sur l'impédance des anneaux de stockage, élément déterminant pour la compréhension des instabilités CSR, et le fonctionnement des anneaux de stockage à fort courant. Pour mettre en évidence le caractère général de cette méthode, nous allons présenter un résultat analogue en hydrodynamique, sur le système de Rayleigh-Bénard où un fluide est soumis à une différence de température entre ses deux surfaces horizontales (la température étant plus haute sur la couche inférieure). Il est connu qu'à partir d'une différence de température seuil, ce système change de comportement et forme des rouleaux de convections (Fig. 6.7 c) [126]. Aussi, avant que les rouleaux n'apparaissent, des précurseurs ici induits par du bruit sont visibles (Fig. 6.7 b), et contiennent des informations sur la structure qui va s'établir une fois le seuil dépassé (Fig. 6.7 c,d). Dans cette expérience, le système est directement observable, et il n'y a pas besoin de venir perturber le système, le bruit suffit pour observer les précurseurs. Dans nos expériences, la situation est plus délicate puisque l'espace des phases n'est pas directement observable. Pour observer les précurseurs de l'instabilité, nous avons dû exciter le système par le biais de l'interaction avec une impulsion laser. Finalement, ces travaux pourront être complétés par d'autres expériences, notamment pour avoir d'autres informations sur les précurseurs, comme par exemple leur spectre.

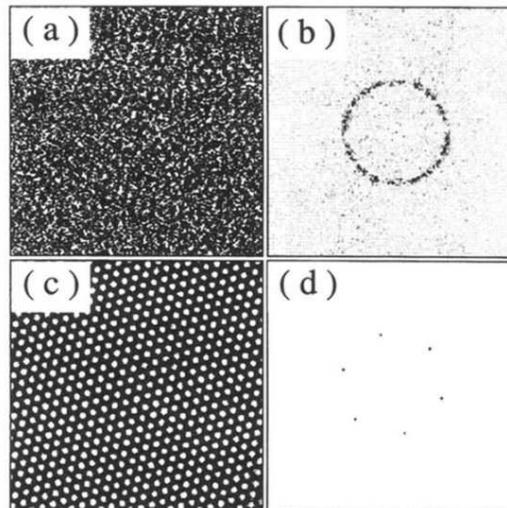


FIG. 6.7: Images en échelle de gris de la surface d'un fluide dans le système de Rayleigh-Bénard. (a) Image obtenue par shadowgraph montrant les fluctuations des rouleaux en dessous du seuil. (b) Carré du module de la transformée de Fourier de l'image (a). (c) Image obtenue par shadowgraph d'un motif hexagonal, au dessus du seuil. (d) Carré du module de la transformée de Fourier de l'image (c). D'après [126].

Conclusion

Durant cette thèse, nous nous sommes intéressé à deux problématiques liées à la dynamique d'électrons relativistes et au rayonnement synchrotron qu'ils émettent. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressé au contrôle de structures "turbulentes" qui apparaissent sur des impulsions d'un laser à électrons libres, et plus généralement dans les systèmes spatio-temporels soumis à une dérive. Ensuite, nous avons étudié la réaction, à une impulsion laser externe, d'un paquet d'électrons relativistes circulant dans un anneau de stockage, dans le but d'étudier les instabilités CSR (*Coherent Synchrotron Radiation instabilities*) apparaissant lorsque la densité de charge du paquet devient importante.

Sur un laser à électrons libres de type oscillateur, lorsque le taux de répétition des impulsions est différent de la fréquence du passage des électrons, les impulsions sont décalées par rapport au paquet d'électrons d'un tour sur l'autre de cavité, processus à l'origine de comportements "turbulents" [48, 1]. Ce type de dynamique n'est pas propre au LEL, mais se retrouve sur tout un ensemble de systèmes spatio-temporels, dont le point commun est qu'ils sont soumis à une dérive [6]. On rencontre par exemple ce type de systèmes en hydrodynamique [14, 15, 16, 17], en physique des plasmas [18], ou en optique [12, 10, 13]. Tous ces systèmes présentent le même comportement général : à forte dérive des fluctuations des grandes amplitudes apparaissent et rendent les régimes turbulent. Dans ces systèmes, la problématique du contrôle n'est pas qu'une solution stationnaire stable existe, mais que la solution stationnaire stable soit dans une large mesure insensible au bruit.

Nous avons montré qu'une simple rétroaction avec un décalage spatial permet de supprimer quasiment totalement les fluctuations. Le processus implique la création d'une nouvelle solution stationnaire dans le système déterministe associé. Les études théoriques ont en grande partie été effectués sur une équation de Ginzburg-Landau, équation que l'on retrouve fréquemment au seuil d'une bifurcation d'un système spatio-temporel [57], et qui dans notre cas a un comportement similaire au LEL au voisinage du seuil d'instabilité [6]. Une étude du critère convectif/absolu, critère classique des systèmes soumis à une dérive [61], nous a permis de montrer que le gain de la rétroaction nécessaire pour contrôler le système est très faible ; en pratique, on s'attend à ce qu'un gain plus grand que le niveau de bruit soit suffisant pour rendre le système régulier. Les études ont été faites avec un couplage global, comme celui du LEL, et un couplage local, caractéristique par exemple des systèmes hydrodynamiques [57]. Dans le cas d'un couplage local, l'apparition de la solution suffit à rendre le système régulier et le critère convectif/absolu permet de prévoir quand le régime sera contrôlé. Dans le cas d'un couplage global, la situation est plus compliquée car le seuil de création d'une solution stable et la baisse de la sensibilité au bruit apparaissent pour des valeurs de paramètres différents ; l'expression d'un seuil analytique dans le cas d'un couplage global reste une question ouverte. Enfin,

lorsque la solution possède une modulation interne, comme dans le LEL, il faut prendre en compte le déphasage pouvant intervenir entre la solution dans le système et la solution réinjectée. Nous avons mis en évidence que dans le cas d'un couplage local le déphasage a pour conséquence de décaler la longueur d'onde du spectre des impulsions ; alors que dans le cas d'un couplage global, le déphasage peut aussi avoir pour conséquence de moduler l'enveloppe de la solution.

Nous avons appliqué expérimentalement la méthode de contrôle à un laser à électrons libres (LEL) de type oscillateur, celui de UVSOR à Okazaki au Japon, pour la première fois à notre connaissance. Expérimentalement, rajouter une rétroaction avec un décalage spatial revient à placer un miroir à l'extérieur de la cavité laser. La sensibilité du LEL à une petite rétroaction a pu être vérifiée, et nous avons mis en évidence qu'une stabilisation intervenait "naturellement", provenant de la réflexion à l'interface verre/air d'une face non traitée d'un miroir de la cavité.

Notre deuxième sujet d'étude concerne la dynamique d'un paquet d'électrons relativistes dans un anneau de stockage, et en particulier leur comportement instable survenant lorsque la densité de charge du paquet dépasse une valeur critique. Cette instabilité, appelé instabilité CSR, apparaît sous la forme de bouffées de rayonnement synchrotron cohérent térahertz intense, signature d'une dynamique instable et complexe des électrons. La difficulté dans l'étude de ce phénomène est que la distribution des électrons dans l'espace des phases n'est pas directement observable. Notre stratégie a été de perturber le paquet d'électrons avec un motif périodique dont nous pouvions changer la période, et d'observer ensuite le rayonnement synchrotron émis. La perturbation a été réalisé grâce à une interaction avec une impulsion laser externe dont la longueur était proche de la longueur du paquet d'électrons, et dont l'enveloppe a été modulée à une fréquence dans le domaine térahertz. Nos études sur ce sujet se sont déroulées en deux étapes, d'abord dans un situation où le système n'était pas en régime instable, puis dans une situation où il était dans la zone instable ou à son voisinage.

Dans un premier temps, nous avons travaillé dans le régime stable du système. Ces études de faisabilités sur l'anneau de stockage UVSOR-II ont montré la possibilité d'obtenir au niveau d'aimants de courbure un rayonnement synchrotron cohérent, étroit spectralement et accordable dans le domaine térahertz ; en opposition avec le rayonnement synchrotron "classique" qui est large bande et incohérent à ces longueurs d'ondes. L'interaction avec l'impulsion laser a pour effet de structurer le paquet à la fréquence térahertz ; ce qui permet aux électrons d'émettre un rayonnement en phase, c'est à dire cohérent, à cette fréquence. Les études analytiques permettent de connaître l'efficacité du processus en fonction des paramètres, et d'estimer la zone d'accordabilité.

Nous pouvons faire un rapprochement avec les études d'optique non linéaire dans des milieux "classiques", car cette expérience est analogue à la rectification optique, expérience où le rayonnement laser est transformé en tension à la surface d'un cristal non linéaire. Dans nos expériences, le milieu non linéaire est un paquet d'électrons relativistes, et le rayonnement laser est transformé en rayonnement synchrotron.

Pour le moment, les expériences menées ici, qui était destinées à des études de faisabilités et non optimisées pour la générations de fortes puissances, ont fournit une intensité crête à la fréquence d'émission dix mille fois supérieure à celle du rayonnement synchrotron

émis par un paquet “non préparé”. La brillance du rayonnement obtenu est comparable à celles de sources commerciales comme le Teraview (dans le domaine du nJ/cm^{-1}) à des courants de l'ordre de 20 mA. Toutefois, des améliorations directes devraient augmenter la puissance émise et la brillance. Des augmentations de plusieurs ordres de grandeurs devraient être obtenues par simple optimisation du recouvrement de la puissance incidente et de la densité de courant, en particulier grâce à la dépendance quadratique de la puissance térahertz en fonction de l'intensité laser et de la densité de charge du paquet.

Dans un deuxième temps, nous avons fait interagir les électrons avec l'impulsion laser modulée lorsque le système était soit instable, soit au voisinage de l'instabilité CSR. Ces travaux ont permis de mettre en évidence expérimentalement que l'instabilité CSR se forme à partir de l'amplification de certaines fréquences spatiales, comme cela avait été prédit théoriquement [113]. En particulier nous avons observé les précurseurs de l'instabilité CSR ; les précurseurs sont des structures apparaissant sous le seuil d'instabilité, mais qui possèdent toutefois des informations sur les structures qui se manifestent au dessus du seuil. Ces expériences ont permis d'observer à quelles fréquences de modulation spatiale l'instabilité apparaissait. Cette étude est pour l'instant qualitative, mais ce type d'expériences permettra certainement d'obtenir des informations quantitatives sur l'impédance des anneaux de stockage, élément déterminant pour la compréhension des instabilités CSR, et le fonctionnement des anneaux de stockage à fort courant.

Bibliographie

- [1] De Ninno, G. & Fanelli, D. Controlled hopf bifurcation of a storage-ring free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 094801 (2004).
- [2] Couprie, M. E. *et al.* Temporal dynamics of storage ring free electron lasers. *Phys. Rev. E* **53**, 1871–1889 (1996).
- [3] Arp, U. *et al.* Spontaneous coherent microwave emission and the sawtooth instability in a compact storage ring. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **4**, 054401 (2001).
- [4] Byrd, J. M. *et al.* Observation of broadband self-amplified spontaneous coherent terahertz synchrotron radiation in a storage ring. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 224801 (2002).
- [5] Orlandi, G. L. *et al.* Free electron laser and microwave instability interplay in a storage ring. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **7**, 060701 (2004).
- [6] Bielawski, S. *et al.* Advection-induced spectrottemporal defects in a free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 034801 (2005).
- [7] Bartolini, R. *et al.* Suppression of the sawtooth instability in a storage ring by free-electron laser : An example of nonlinear stabilization by noise. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 134801 (2001).
- [8] Dattoli, G. *et al.* Storage-ring free-electron-laser dynamics and head-tail instability. *Phys. Rev. E* **58**, 6570–6574 (1998).
- [9] Bielawski, S., Bruni, C., Orlandi, G. L., Garzella, D. & Couprie, M. E. Suppression of the pulsed regimes appearing in free-electron lasers using feedback control of an unstable stationary state. *Phys. Rev. E* **69**, 045502 (2004).
- [10] Morgner, U. & Mitschke, F. Drift instabilities in the pulses from cw mode-locked lasers. *Phys. Rev. E* **58**, 187–192 (1998).
- [11] Kärtner, F. X., Zumbühl, D. M. & Matuschek, N. Turbulence in mode-locked lasers. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4428–4431 (1999).
- [12] Santagiustina, M., Colet, P., San Miguel, M. & Walgraef, D. Noise-sustained convective structures in nonlinear optics. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3633–3636 (1997).
- [13] Louvergneaux, E., Szwaj, C., Agez, G., Glorieux, P. & Taki, M. Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 043901 (2004).
- [14] Tsameret, A. & Steinberg, V. Noise-modulated propagating pattern in a convectively unstable system. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3392–3395 (1991).
- [15] Babcock, K. L., Ahlers, G. & Cannell, D. S. Noise-sustained structure in taylor-couette flow with through flow. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3388–3391 (1991).

- [16] Brand, H. R., Deissler, R. J. & Ahlers, G. Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold. *Phys. Rev. A* **43**, 4262–4268 (1991).
- [17] Tsameret, A. & Steinberg, V. Absolute and convective instabilities and noise-sustained structures in the Couette-Taylor system with an axial flow. *Phys. Rev. E* **49**, 1291–1308 (1994).
- [18] Hall, L. S. & Heckrotte, W. Instabilities : Convective versus absolute. *Phys. Rev.* **166**, 120–128 (1968).
- [19] Holldack, K., Kachel, T., Khan, S., Mitzner, R. & Quast, T. Characterization of laser-electron interaction at the Bessy II femtoslicing source. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **8**, 040704 (2005).
- [20] Khan, S., Holldack, K., Kachel, T., Mitzner, R. & Quast, T. Femtosecond undulator radiation from sliced electron bunches. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 074801 (2006).
- [21] Byrd, J. M. *et al.* Tailored terahertz pulses from a laser-modulated electron beam. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 164801 (2006).
- [22] Bass, M., Franken, P. A., Ward, J. F. & Weinreich, G. Optical rectification. *Phys. Rev. Lett.* **9**, 446–448 (1962).
- [23] Proctor, M., Tobias, S. & Knobloch, E. Noise-sustained structures due to convective instability in finite domains. *Physica D* **145**, 191 (2000).
- [24] Deissler, R. J. noise-sustained structure, intermittency, and the Ginzburg-Landau equation. *J. Stat. Phys.* **40**, 371 (1985).
- [25] Sturrock, P. A. Kinematics of growing waves. *Phys. Rev.* **112**, 1488–1503 (1958).
- [26] Quentin, G. & Rehberg, I. Direct measurement of hydrodynamic fluctuations in a binary mixture. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1578–1581 (1995).
- [27] Couairon, A. & Chomaz, J. M. Pattern selection in the presence of a cross flow. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2666–2669 (1997).
- [28] Gondret, P., Ern, P., Meignin, L. & Rabaud, M. Experimental evidence of a nonlinear transition from convective to absolute instability. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1442–1445 (1999).
- [29] Gondret, P. & Rabaud, M. Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids* **9**, 3267 (1997).
- [30] Blackburn, H. M., Sherwin, S. J. & Barkley, D. Convective instability and transient growth in steady and pulsatile stenotic flows. *J. Fluid Mech.* **607**, 267 (2008).
- [31] Geddes, J. B., Firth, W. J. & Black, K. Pulse dynamics in an actively mode-locked laser. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **2**, 647 (2003).
- [32] Mitarai, N. & Nakanishi, H. Convective instability and structure formation in traffic flow. *J. Phys. Soc. Japan* **69**, 3752 (2000).
- [33] Brand, H. R. & Deissler, R. J. Noise-sustained structures in the Kuramoto-Sivashinsky equation. *Phys. Rev. A* **39**, 462–465 (1989).
- [34] Neufeld, M., Walgraef, D. & Miguel, M. S. Noise-sustained structures in coupled complex Ginzburg-Landau equations for a convectively unstable system. *Phys. Rev. E* **54**, 6344–6355 (1996).

- [35] Colet, P., Walgraef, D. & Miguel, M. S. Convective and absolute instabilities in the subcritical ginzburg-landau equation. *Eur. Phys. J. B* **11**, 517 (1999).
- [36] Chomaz, J. M., Huerre, P. & Redekopp, L. G. Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 25–28 (1988).
- [37] Huerre, P. & Monkewitz, P. A. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **22**, 473 (1990).
- [38] Papoff, F. & Zambrini, R. Convective instability induced by nonlocality in nonlinear diffusive systems. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 243903 (2005).
- [39] Lücke, M. & Szprynger, A. Noise sustained pattern growth : Bulk versus boundary effects. *Phys. Rev. E* **55**, 5509–5521 (1997).
- [40] Tobias, S., Proctor, M. & Knobloch, E. Convective and absolute instabilities of fluid flows in finite geometry. *Physica D* **113**, 43 (1997).
- [41] Ginzburg, S. L. & Pustovoi, M. A. Noise-induced hypersensitivity to small time-dependent signals. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4840–4842 (1998).
- [42] Trefethen, L. N., Trefethen, A. E., Reddy, C. S. & Driscoll, A. T. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science* **261**, 578 (1993).
- [43] Cossu, C. & Chomaz, J. M. Global measures of local convective instabilities. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4387–4390 (1997).
- [44] Madey, J. M. J. Stimulated emission of bremsstrahlung in a periodic magnetic field. *Jour. Appl. Phys.* **42**, 1906 (1971).
- [45] Deacon, D. A. G. *et al.* First operation of a free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.* **38**, 892–894 (1977).
- [46] Dattoli, G., Renieri, A. & Torre, A. *Lectures on the Free Electron Laser and Related Topics* (World Scientific, Singapore, 1993).
- [47] Katoh, M. *et al.* Status of uvsor-ll and light source developments. *Proceeding of EPAC08 WEPC*, 028 (2008).
- [48] Koda, S., Hohasa, M., Yamazaki, J., Katoh, M. & Hama, H. Development of longitudinal feedback system for a storage ring free electron laser. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **475**, 211 (2001).
- [49] Billardon, M., Garzella, D. & Couprie, M. E. Saturation mechanism for a storage-ring free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2368–2371 (1992).
- [50] Evain, C. *et al.* Shifted feedback suppression of turbulent behavior in advection-diffusion systems. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 134501 (2009).
- [51] Elleaume, P. Microtemporal and spectral structure of storage ring free-electron lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **21**, 1012 (1985).
- [52] Dattoli, G., Hermsen, T., Renieri, A., Torre, A. & Gallardo, J. C. Lethargy of laser oscillations and supermodes in free-electron lasers. i. *Phys. Rev. A* **37**, 4326–4333 (1988).
- [53] Haus, H. A theory of forced mode locking. *IEEE J. Quantum Electron.* **11**, 323 (1975).
- [54] Joly, N. & Bielawski, S. Suppression of q-switch instabilities by feedback control in passively mode-locked laser. *Opt. Lett.* **26**, 692 (2001).

- [55] Ninno, G. D., Nutarelli, D., Bruni, C. & Couprie, M.-E. Chaotic dynamics a storage ring free electron laser. *Eur. Phys. J. D* **22**, 269 (2003).
- [56] Honeycutt, R. L. Stochastic runge-kutta algorithms. I white noise. *Phys. Rev. A* **45**, 600–603 (1992).
- [57] Aranson, I. S. & Kramer, L. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 99 (2002).
- [58] Ginzburg, V. L. & Landau, L. D. *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **20**, 1064 (1950).
- [59] Newell, A. & Whitehead, J. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 279 (1969).
- [60] Stewartson, K. & Stuart, J. T. A nonlinear instability theory for a wave system in plane poiseuille flow. *J. Fluid Mech* **48**, 529 (1971).
- [61] Chomaz, J. M. Absolute and convective instabilities in nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1931–1934 (1992).
- [62] Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196–1199 (1990).
- [63] Just, W., Bernard, T., Ostheimer, M., Reibold, E. & Benner, H. Mechanism of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 203–206 (1997).
- [64] Erdélyi, A. *Asymptotic expansions* (Dover publications, 1956).
- [65] Morse, P. M. & Feshbach, H. *Methods of theoretical physics I.* (McGraw Hill New York, 1953).
- [66] Beaud, P., Bi, J., Hodel, W. & Weber, H. Experimental observation of the self-stabilization of a synchronously pumped dye laser. *Opt. Commun.* **90**, 31 (1990).
- [67] New, G. Self-stabilization of synchronously mode-locked lasers. *Opt. Lett.* **15**, 1306 (1990).
- [68] Langlois, P., Gay, D., McCarthy, N. & Piché, M. Noise reduction in a mode-locked semiconductor laser by coherent photon seeding. *Opt. Lett.* **23**, 114 (1998).
- [69] Scroggie, A., Oppo, G.-L. & D'alessandro, G. Sensitivity to noise in synchronously pumped optical parametric oscillators. *J. Opt. Soc. Am. B* **17**, 84 (2000).
- [70] Wiedemann, H. *Particule Accelerator Physics* (Springer-Verlag, 1993).
- [71] Nodvick, J. S. & Saxon, D. S. Suppression of coherent radiation by electrons in a synchrotron. *Phys. Rev.* **96**, 180–184 (1954).
- [72] Agoh, T. *Dynamics of Coherrent SYNchrotron Radiation by Paraxial Approximation.* Ph.D. thesis, Department of Physics, University of Tokyo (2004).
- [73] Chao, A. W. *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy accelerators* (John Wiley & Sons, inc, 1993).
- [74] Siegman, A. E. *Lasers* (University Science Books, 1986).
- [75] Reimann, K. Table-top sources of ultrashort thz pulses. *Rep. Prog. Phys.* **70**, 1597 (2007).
- [76] Williams, G. Filling the thz gap- high power sources and applications. *Rep. Prog. Phys.* **69**, 301 (2006).

- [77] Tonouchi, M. Cutting-edge terahertz technology. *Nature Photonics* **1**, 97 (2007).
- [78] Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W. & Weinreich, G. Generation of optical harmonics. *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118–119 (1961).
- [79] Colson, W. The nonlinear wave equation for higher harmonics in free-electron lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **17**, 1417 (1981).
- [80] Prazeres, R. *et al.* Coherent harmonic generation in the vacuum ultraviolet spectral range on the storage ring aco. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **272**, 68 (1988).
- [81] Zholents, A. A. & Zolotarev, M. S. Femtosecond x-ray pulses of synchrotron radiation. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 912–915 (1996).
- [82] Schoenlein. generation of femtosecond pulses of synchrotron radiation. *science* (2000).
- [83] Shimada, M. *et al.* Intense terahertz synchrotron radiation by laser bunch slicing at uvsor-2 electron storage ring. *Japan. J. Appl. Phys.* **46**, 7939 (2007).
- [84] Takashima, K., Katoh, M., Hosaka, M. & Mochihashi, A. Feasibility study of generation of far infrared coherent synchrotron radiation using ultrashort laser pulses at uvsor. *UVSOR activity report 2002 UVSOR-30*, 56 (2003).
- [85] Bielawski, S. *et al.* Tunable narrowband terahertz emission from mastered laser electron beam interaction. *Nature Physics* **4**, 390 (2008).
- [86] Shen, Y. *The principles of nonlinear optics* (Wiley, 1984).
- [87] Kimura, S. *et al.* Infrared and terahertz spectromicroscopy beam line bl6b(ir) at uvsor-ii. *Infrared Phys. Technol.* **49**, 147 (2006).
- [88] Weling, A. S. & Auston, D. H. Novel sources and detectors for coherent tunable narrow-band terahertz radiation in free space. *Journal of the Optical Society of America B* **13**, 2783 (1996).
- [89] Kao, T.-F. *et al.* Frequency tunability of terahertz photonic transmitters. *Appl. Phys. Lett.* **88**, 093501 (2006).
- [90] Lu, J.-Y. *et al.* Terahertz microchip for illicit drug detection. *IEEE Photon. Technol. Lett.* **18**, 2254 (2006).
- [91] Chen, L.-J., Kao, T.-F., Lu, J.-Y. & Sun, C.-K. A simple terahertz spectrometer based on a low-reflectivity fabry-perot interferometer using fourier transform spectroscopy. *Opt. Express* **14**, 3840–3846 (2006).
- [92] Schiff, L. Production of particle energies beyond 200 mev. *Rev. Sci Instrum.* **17**, 6 (1946).
- [93] Schwinger, J. On the classical radiation of accelerated electrons. *Phys. Rev.* **75**, 1912–1925 (1949).
- [94] Stupakov, G. Theory and observations of microbunching instability in electron machines. *Proceeding of the 2003 Particule Accelerator Conference* 102 (2003).
- [95] Takashima, Y. *et al.* Observation of intense bursts of terahertz synchrotron radiation at uvsor-2. *Japan. J. Appl. Phys.* **44**, 1131 (2005).

- [96] Mochihashi, A., Hosaka, M., Katoh, M., Shimada, M. & Kimura, S. Observation of thz synchrotron radiation burst in uvsor-ii electron storage ring. *Proceeding of EPAC 2006 THPLS042*, 3380 (2006).
- [97] Carr, G. L., Kramer, S. L., Murphy, J. B., Lobo, R. P. S. M. & Tanner, D. B. Observation of coherent synchrotron radiation from the nsls vuv ring. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **463**, 387 (2001).
- [98] Abo-Bakr, M., Feikes, J., Holldack, K., Wüstefeld, G. & Hübers, H.-W. Steady-state far-infrared coherent synchrotron radiation detected at bessy 2. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 254801 (2002).
- [99] Karantzoulis, E., Penco, G., Perucchi, A., Lupi, S. & Ortolani, M. Thz coherent synchrotron radiation at elettra. *Elettra Highlights 2005-2006*, 111 (2005).
- [100] Karantzoulis, E., Penco, G., Perucchi, A. & Lupi, S. Coherent thz radiation at elettra. *Proceeding of EPAC 2008 WEPC027*, 2043 (2008).
- [101] Nakazato, T. *et al.* Observation of coherent synchrotron radiation. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1245–1248 (1989).
- [102] Schwinger, I. On radiation by electrons in a betatron. *Lawence Berkley Laboratory Report* **39088** (1945).
- [103] Warnock, R. L. & Morton, P. Field excited by a beam in smooth toroidal chamber. *Part. Accel.* **25**, 113 (1990).
- [104] Boussard, D. Observation of microwave longitudinal instabilities in the cps. *CERN/LABII/RF* **75**, 2 (1975).
- [105] Wang, J.-M. Microwave instability as a coherent light source. *Phys. Rev. E* **58**, 984–991 (1998).
- [106] Stupakov, G. V., Breizman, B. N. & Pekker, M. S. Nonlinear dynamics of microwave instability in accelerators. *Phys. Rev. E* **55**, 5976–5984 (1997).
- [107] Venturini, M., Warnock, R., Ruth, R. & Ellison, J. A. Coherent synchrotron radiation and bunch stability in a compact storage ring. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **8**, 014202 (2005).
- [108] Stupakov, G. & Heifets, S. Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **5**, 054402 (2002).
- [109] Heifets, S. & Stupakov, G. Single-mode coherent synchrotron radiation instability. *Proceeding of the 2003 Particule Accelerator Conference* 3132 (2003).
- [110] Venturini, M. Stability analysis of longitudinal beam dynamics using noncanonical hamiltonian methods and energy principles. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **5**, 054403 (2002).
- [111] Murphy, J. B., Krinsky, S. & Gluckstern, R. L. Longitudinal wakefield for an electron moving on a circular. orbit. *Part. Accel.* **57**, 9 (1997).
- [112] Derbenev, S., Rossbach, J., Saldin, E. & Shiltsev, V. Microbunch radiative tail-head interaction. *Report No. TESLA-FEL* **95**, 05 (1995).
- [113] Venturini, M. & Warnock, R. Bursts of coherent synchrotron radiation in electron storage rings : A dynamical model. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 224802 (2002).

- [114] Teytelman, D., Fox, J., Prabhakar, S. & Byrd, J. M. Characterization of longitudinal impedances in storage rings via multibunch effects. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **4**, 112801 (2001).
- [115] Palumbo, L. & Vaccaro, V. G. in *Frontiers of Particle Beams : Observation, Diagnosis and Correction* (Springer- Verlag, Berlin, 1989).
- [116] Allen, M. A., Paterson, J. M., Rees, J. R. & Wilson, P. B. Beam energy loss to parasitic modes in spear 2. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **22**, 1838 (1975).
- [117] Podobedov, B. & Siemann, R. New apparatus for precise synchronous phase shift measurements in storage rings. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **1**, 072801 (1998).
- [118] Zotter, B. W. & Kheifets, S. A. *Impedances and Wakes in High-Energy Particle Accelerators* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [119] Cross, M. C. & Hohenberg, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [120] Murray, J. *Mathematical biology* (Springer- Verlag, New York, 1989).
- [121] Gardner, M. Mathematical games : The fantastic combinations of john conway's new solitaire game "life". *Scientific American* **223**, 120 (1970).
- [122] Haken, H. *Pattern Formation by Dynamic Systems and Pattern Recognition* (Springer Series in Synergetics, Vol. 5, 1979).
- [123] Rehberg, I. *et al.* Thermally induced hydrodynamic fluctuations below the onset of electroconvection. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 596–599 (1991).
- [124] Agez, G. *Effets du bruit et d'un flot transverse sur les instabilités spatio-temporelles dans un système optique à cristaux liquides*. Ph.D. thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille (2005).
- [125] Byrd, J. M. *et al.* Laser seeding of the storage-ring microbunching instability for high-power coherent terahertz radiation. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 074802 (2006).
- [126] Wu, M., Ahlers, G. & Cannell, D. S. Thermally induced fluctuations below the onset of rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1743–1746 (1995).
- [127] Onuki, H. & Elleaume, P. *Undulators, wigglers and their applications* (Taylor and Francis, 2003).
- [128] *FFTW documentation (2.1.5)*.
- [129] Stupakov, G. & Heifets, S. Model of the csr induced bursts in slicing experiments. *Proceeding of EPAC THPLS097*, 3502 (2006).

Annexes

Annexe A

Gain du laser à électrons libres : détails de l'interaction entre le paquet d'électrons et l'impulsion laser

Le gain du laser à électrons libres (LEL) provient d'une interaction entre l'impulsion laser dans la cavité et un paquet d'électrons dans l'anneau de stockage. Cette interaction se déroule dans un klystron optique formé de deux onduleurs (le modulateur et le radiateur), et d'une zone dispersive (Fig. A.2). Un onduleur est constitué d'une alternance d'aimant Nord/Sud, créant une zone de champ magnétique période permanent. En traversant cette zone, les électrons suivront une trajectoire sinusoïdale (Fig. A.1) ou hélicoïdale.

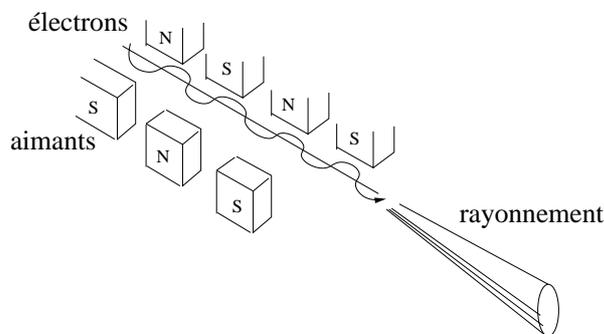


FIG. A.1: Exemple de trajectoire et du rayonnement d'un électron dans un onduleur.

Dans le modulateur, l'interaction de l'impulsion laser avec les électrons oscillants transversalement induit une modulation d'énergie des électrons (voir aussi la section 4.4). La zone dispersive transforme la modulation d'énergie en modulation de densité, à la longueur d'onde de la lumière laser. Le paquet est dit micro-structuré. Dans le radiateur, le paquet d'électrons micro-structuré émet un rayonnement en phase avec la lumière incidente. En sortie de l'onduleur, l'impulsion laser a été amplifiée.

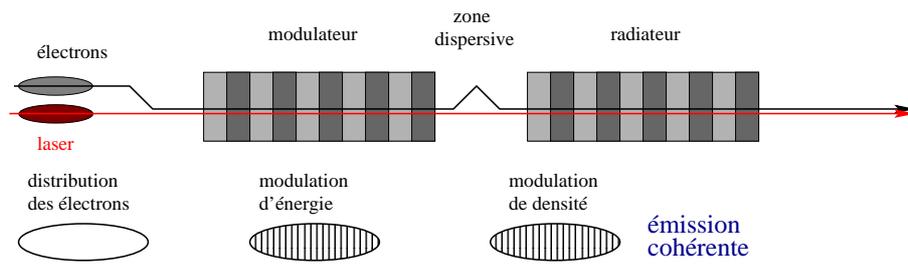


FIG. A.2: Schéma d'un klystron optique et des caractéristiques du paquet d'électrons dans celui-ci.

Les électrons émettent principalement à la longueur d'onde de résonance λ_R :

$$\lambda_R = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} (1 + K^2/2) \quad (\text{A.1})$$

avec γ le facteur de Lorentz, λ_0 la période de la trajectoire des électrons dans l'onduleur, et K le paramètre de déflexion, dépendant en outre de la valeur du champ magnétique [127].

Annexe B

Méthodes de calcul numérique des dérivées spatiales

Cette annexe présente les deux méthodes que nous avons utilisées pour calculer numériquement les dérivées spatiales dans l'intégration des équations aux dérivées partielles. Nous présentons ici comment calculer les dérivées premières.

Méthode pseudo-spectrale

La méthode pseudo-spectrale consiste à passer dans l'espace réciproque, puis à multiplier le résultat par ik et enfin à revenir dans l'espace direct (équation B.1 et figure B.1).

$$y'(x) = TF^{-1} (TF[y(x) \times ik]) \tag{B.1}$$

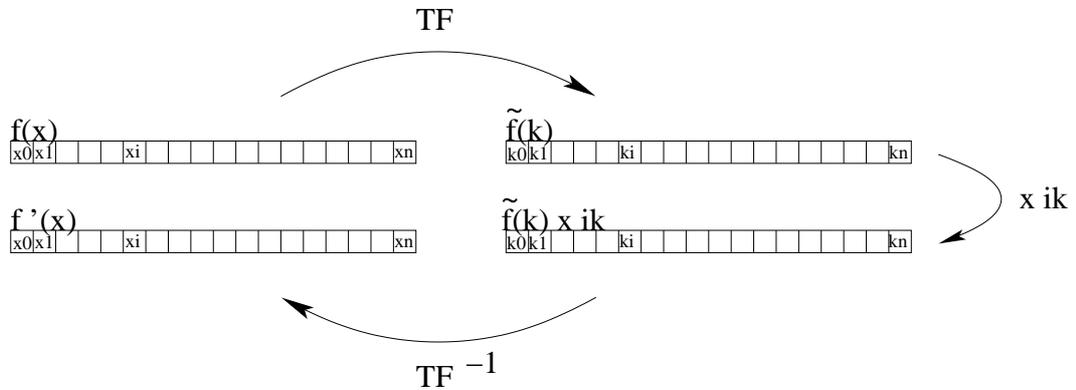


FIG. B.1: Étapes d'une dérivée numérique par la méthode pseudo-spectrale.

Méthode des différences finies

La méthode des différences finies utilise la définition habituelle de la dérivée d'une fonction discrète (équation B.2 et figure B.2).

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2\Delta x} \quad (\text{B.2})$$

Avec x_i la valeur de $y(x)$ à la "case" i . L'intervalle entre deux "cases" est Δx .

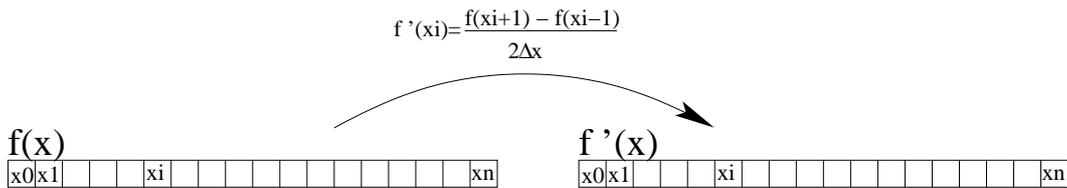


FIG. B.2: Étapes d'une dérivée numérique par la méthode des différences finies.

La valeur de la dérivée aux extrémités est obtenue en utilisant les conditions limites périodiques.

Bruit introduit - approche qualitative

Dans les systèmes que nous étudions, la méthode des différences finies permet d'introduire moins de bruit lors du calcul des dérivées. Avec la méthode des différences finies, le résultat de la dérivée d'un signal d'amplitude localement très faible est aussi très faible puisqu'il est la soustraction de deux valeurs très faibles. Avec la méthode pseudo-spectrale, la valeur de la dérivée est en général beaucoup plus grande, puisque pour obtenir cette valeur, il faut prendre en compte tout le signal entier [Eq. (B.3)] [128].

$$\tilde{Y}_i = \sum_{j=0}^{j=n-1} X_j e^{-2\pi i j \sqrt{-1}/n} \quad (\text{B.3})$$

Annexe C

Dispositif expérimental d'enregistrement des diagrammes spatio-temporels et spectro-temporels des impulsions lasers en sortie du LEL

Sur les images de la figure 2.19, l'intensité des impulsions lasers est enregistrée en temps réel grâce à une caméra à balayage de fente (*streak camera*) et leur spectre en temps réel est obtenu en combinant un Perot-Fabry et une caméra CCD linéaire (Fig. C.1). En sortie du laser, le signal est séparée en deux. Une partie va directement sur la caméra à balayage de fente qui enregistre les diagrammes spatio-temporels de l'intensité avec une résolution du temps rapide de 2 ps. L'autre partie du rayonnement incident est utilisée pour enregistrer l'intensité du spectre en fonction du temps. La lentille cylindrique permet de focaliser le faisceau incident dans une direction tout en laissant l'autre direction parallèle à l'axe optique. Cela permet de limiter l'inclinaison des angles du faisceau à une seule direction, et d'obtenir en sortie du Pérot-Fabry un spectre complet sur une largeur étroite. Ce spectre sera ensuite enregistré par la caméra CCD linéaire placée dans le plan focal de la lentille sphérique.

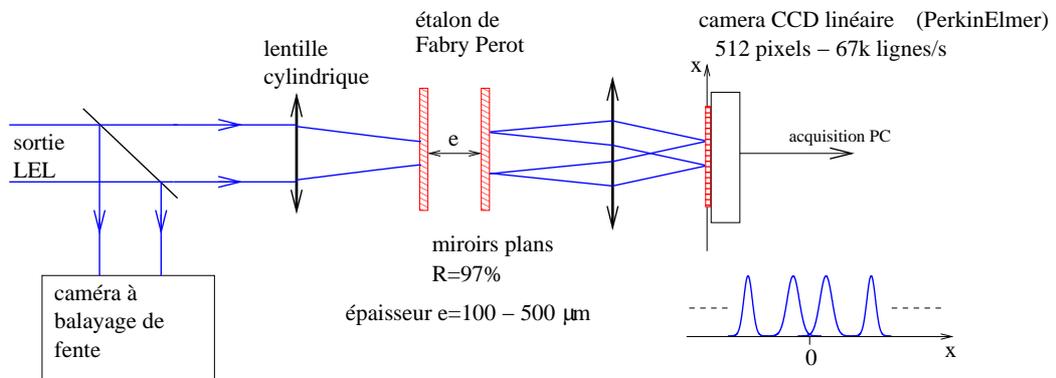


FIG. C.1: Dispositif expérimental d'enregistrement des diagrammes spatio-temporels et spectro-temporels.

Annexe D

Recouvrement transverse entre le faisceau optique de la rétroaction et le mode du laser à électrons libres

Paramètres q pour la cavité du LEL

À l'intérieur de la cavité, juste avant la réflexion sur le miroir de sortie, le rayon de courbure complexe est (Fig. D.1) :

$$q^+ = (5.59 + 1.51 i) \text{ m} \quad (\text{D.1})$$

Nous allons évaluer le recouvrement juste après la réflexion sur le miroir de sortie. À cet endroit, le rayon de courbure complexe est :

$$q^+ = (-5.59 + 1.51 i) \text{ m} \quad (\text{D.2})$$

Si on suppose que $\lambda = 420 \text{ nm}$, on obtient un rayon de ceinture (*beam waist*) et un rayon de courbure réel égal à :

$$\omega^- = 0.00172 \text{ m} \quad (\text{D.3})$$

$$R^- = -6 \text{ m} \quad (\text{D.4})$$

Paramètres q pour le faisceau de rétroaction

Rétroaction d'un miroir placé à une distance d

Nous allons maintenant évaluer le rayon de courbure complexe du faisceau de rétroaction juste au point où q^- a été calculé (juste après que le faisceau de rétroaction entre dans la cavité). Nous devons calculer la transformation de q^+ à travers :

- la lentille formée par le miroir de sortie, avec une distance focale $f = -R_2/(n - 1)$. En prenant un indice de réfraction $n = 1.5$ et $R_2 = 6\text{m}$, on obtient $f = -12\text{m}$.
- une propagation sur une distance de $2d$.
- De nouveau la lentille.

$$q_f^- = (8.61 + 0.055i)\text{m} \quad (\text{D.5})$$

Si on suppose que $\lambda = 420\text{nm}$, on obtient un rayon de ceinture (*beam waist*) et un rayon de courbure réel égal à :

$$\omega^- = 0.0133\text{m} \quad (\text{D.6})$$

$$R^- = +8.61\text{m} \quad (\text{D.7})$$

Rétroaction de la face arrière du miroir de sortie

Nous devons calculer la transformation de q^+ à travers :

- la lentille formée par le miroir de sortie, avec une distance focale $f = -R_2/(n-1)$. En prenant un indice de réfraction $n = 1.5$ et $R_2 = 6\text{m}$, on obtient $f = -12\text{m}$.
- une propagation sur une distance de $2 \times 9\text{mm}$ dans du verre (9mm est l'épaisseur du miroir).
- De nouveau la lentille.

$$q_f^- = (2.946598390 + 0.3966775726i)\text{m} \quad (\text{D.8})$$

Intégrales de recouvrement

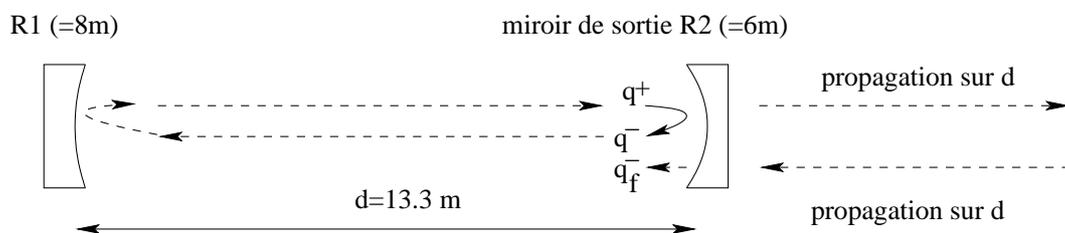


FIG. D.1: L'intégrale de recouvrement est calculée à l'intérieur de la cavité, près du miroir de sortie (rayon de courbure complexe q^- pour le mode de cavité, et q_f^- pour le faisceau de rétroaction).

La fraction de puissance réinjectée dans le mode de cavité est :

$$\alpha^2 = T_{OC}^2 R_{FM} |\eta|^2 (q^-, q_f^-), \quad (\text{D.9})$$

η étant définie par :

$$|\eta|^2 (q_1, q_2) = \frac{\left| \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \phi_{q_1}^*(x, y) \phi_{q_2}(x, y) dx dy \right|^2}{\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} |\phi_{q_1}(x, y)|^2 dx dy \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} |\phi_{q_2}(x, y)|^2 dx dy}, \quad (\text{D.10})$$

Avec : T_{OC} le coefficient de transmission du miroir de sortie, R le coefficient de réflexion du miroir de rétroaction, et ϕ_{q^-} et ϕ_{q^+} les profils gaussiens transverses définis par :

$$\phi_q(x, y) = e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q}}. \quad (\text{D.11})$$

Le calcul de l'intégrale de recouvrement donne :

$$\alpha^2 = T_{OC}^2 R_{FM} |\eta|^2 \quad (\text{D.12})$$

$$|\eta|^2 = 4 \frac{z_{R1} z_{R2}}{(z_1 - z_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}, \quad (\text{D.13})$$

avec $q_i = z_i + iz_{Ri}$

Valeurs numériques pour le coefficient de la rétroaction

Rétroaction d'un miroir externe placé à une distance d

En utilisant les valeurs numériques de q^- et q_f^- obtenues dans la section précédente [Eq. (D.5)], on obtient :

$$|\eta|^2 = 0.00164 \quad (\text{D.14})$$

En prenant $T_{OC} = 0.002$ comme coefficient de transmission du miroir de sortie, et $R_{FM} = 1$, on obtient :

$$\alpha^2 = T_{OC}^2 R_{FM} |\eta|^2 = 0.565 \times 10^{-8} \quad (\text{D.15})$$

Rétroaction de la réflexion de la face arrière du miroir de sortie

Pour considérer la réflexion de la face non traitée, la face arrière du miroir de sortie, on utilise la valeur donnée par l'équation (D.8). On obtient :

$$|\eta|^2 = 0.031 \quad (\text{D.16})$$

En prenant $T_{OC} = 0.002$ et $R_{FM} = 0.04$,

$$\alpha^2 = T_{OC}^2 R_{FM} |\eta|^2 = 0.496 \times 10^{-8} \quad (\text{D.17})$$

Annexe E

Estimation de la largeur du spectre du rayonnement synchrotron incohérent

Il est possible d'obtenir un ordre de grandeur de la largeur du spectre (ω_c Fig. 3.4) en calculant la largeur de la transformée de Fourier associée à l'impulsion émise par un seul électron [70]. D'après la figure E.1, un ordre de grandeur de la durée de l'impulsion émise par un électron est :

$$\Delta t = \frac{1}{c}(c\delta t - \Delta x) \simeq \Delta x \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) \simeq \frac{\rho}{c\gamma^3} \quad (\text{E.1})$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{E_0}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \text{ le facteur de Lorentz,} \quad (\text{E.2})$$

$$m \quad \text{la masse d'un lectron} \quad (\text{E.3})$$

$$\text{et } c \quad \text{la vitesse de la lumire dans le vide } (mc^2 = 0.511\text{MeV}) \quad (\text{E.4})$$

En faisant l'hypothèse que la largeur $\Delta t/2$ est la largeur à e^{-1} , la largeur de la transformée de Fourier de cette impulsion est :

$$\Delta\omega = 4 \frac{c\gamma^3}{\rho} \quad (\text{E.5})$$

La définition usuelle est [70] :

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c\gamma^3}{\rho} \quad (\text{E.6})$$

La distribution spectrale du rayonnement émis par des électrons distribués au hasard dans le paquet est identique à la distribution spectrale d'un seul électron [70].

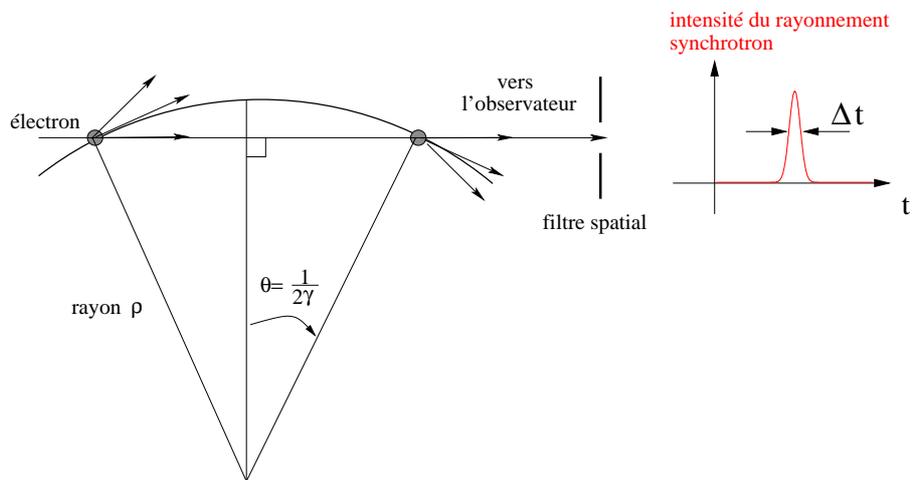


FIG. E.1: Durée d'une impulsion émise par un électron d'énergie γmc^2 parcourant une trajectoire circulaire de rayon ρ .

Annexe F

Modèle de l'anneau circulaire, oscillations synchrotron et bêtatron

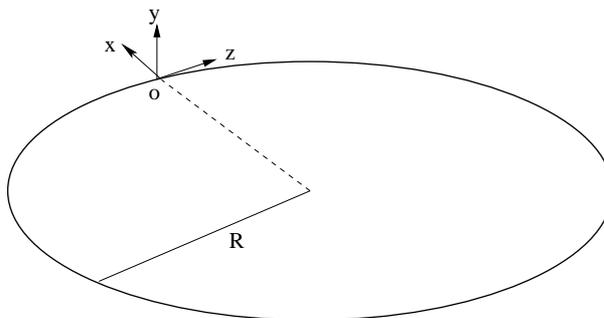


FIG. F.1: Modèle de l'anneau circulaire. Les quantités x, y, z sont les coordonnées horizontale, verticale et longitudinale d'une particule par rapport à une particule de référence O , qui circule sur une trajectoire circulaire de rayon R à la vitesse $v^2 = (1 - \frac{1}{\gamma^2})c^2$. D'après [73].

Dans des cas simplifiés, il est possible d'avoir une description de la trajectoire des électrons en terme d'équations différentielles [70, 73]. Ces équations sont obtenues en calculant les coordonnées d'un électron d'un tour d'anneau sur l'autre, et en faisant tendre le temps discret en un temps continu [70]¹. Dans le modèle simplifié de l'anneau circulaire de rayon R (Fig. F.1), la trajectoire d'un électron obéit à trois équations différentielles, décrivant une oscillation harmonique selon la direction longitudinale (oscillation synchrotron) et dans le plan transverse (oscillations bêtatron) [70, 73]. Ce modèle met aussi en évidence l'existence d'une particule appelée *particule synchrone* ayant une énergie "idéale" nommée énergie nominale E_0 , permettant à la particule synchrone de circuler sur une trajectoire idéale : une trajectoire circulaire de rayon R [73]. La particule synchrone est prise comme origine du système de coordonnées, et le mouvement des autres électrons est défini par rapport à cette particule fictive. De même que pour le formalisme des matrices de transfert, la description d'un électron nécessite six coordonnées : trois coordonnées de l'espace x, y, z et trois coordonnées d'impulsion x', y', w associées respectivement à x, y, z . $w = \frac{\Delta P}{P}$, avec ΔP la différence entre l'impulsion longitudinale P de la particule étudiée et celle de la

¹Cette méthode est identique à celle utilisée pour obtenir la *master equation* du laser à électrons libres (voir chapitre 1).

particule synchrone.

Oscillation synchrotron

La trajectoire d'un électron selon les coordonnées longitudinales z et w , est une oscillation, appelée oscillation synchrotron [Eq. (F.1)]. Cette dynamique est due à la fois à la forme parabolique du champ RF et à la dépendance en énergie du temps de parcours d'un électron (un électron qui a une énergie supérieure à l'énergie nominale E_0 parcourra un chemin plus long dans l'anneau et vice versa). Le coefficient η entre l'impulsion P et la coordonnée z est modifiable expérimentalement via le facteur de compression des moments α (*momentum compression factor*).

$$w' + \left(\frac{\nu_{z0}}{R}\right)^2 z = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$z' = -\eta w \quad (\text{F.2})$$

$$\eta = \alpha - \frac{1}{\gamma^2} \quad (\text{F.3})$$

Avec $\gamma = \frac{E_0}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. Le symbole prime représente la dérivée de la variable par rapport à un temps normalisé [73]. ν_{z0} est directement lié à la fréquence synchrotron [73].

Oscillations bêtatron

Dans le plan transverse à la direction de propagation, la trajectoire des électrons est aussi une oscillation, due aux aimants de focalisation quadripôles et sextupôles.

$$x'' + \left(\frac{\nu_{x0}}{R}\right)^2 x = 0 \quad (\text{F.4})$$

$$y'' + \left(\frac{\nu_{y0}}{R}\right)^2 y = 0 \quad (\text{F.5})$$

$$(\text{F.6})$$

Le symbole prime représente la dérivée de la variable par rapport à un temps normalisé [73]. ν_{x0} et ν_{y0} sont directement liés aux fréquences bêtatron [73]. En général $\nu_{x0} \gg 1$, $\nu_{y0} \gg 1$, $\nu_{z0} \ll 1$.

Annexe G

Détails de l'étireur du système de mise en forme de l'impulsion laser

La formule donnant l'angle de diffraction θ_1 en fonction de l'angle d'incidence θ_0 , de la longueur d'onde λ_1 et le nombre de lignes par millimètre du réseau N (Fig.G.1) est :

$$N\lambda_1 = \sin(\theta_0) + \sin(\theta_1) \quad (\text{G.1})$$

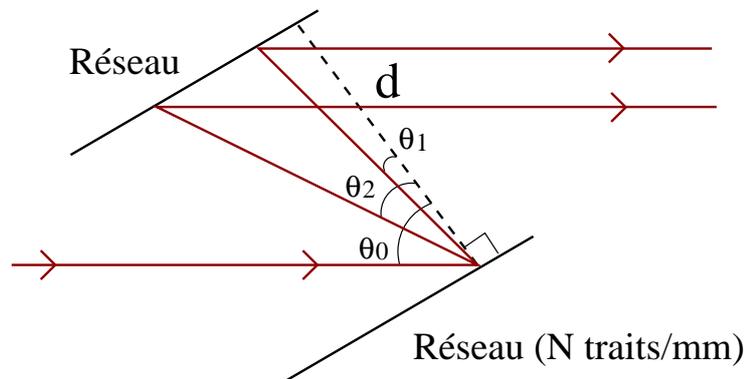


FIG. G.1: Un faisceau incident est réfléchi sur le réseau avec des angles différents selon la longueur d'onde. θ_0 est l'angle incident, θ_1 est l'angle de réflexion de la longueur d'onde la plus basse, θ_2 est l'angle de réflexion de la longueur d'onde la plus haute. d est la distance entre les deux réseaux.

En utilisant cette formule, nous pouvons calculer la largeur de l'impulsion en fonction des paramètres :

$$\sigma = \frac{2d}{c} \left[\frac{1}{\cos(\theta_2)} - \frac{1}{\cos(\theta_1)} + \sin(\theta_0)(\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)) \right] \quad (\text{G.2})$$

θ_0 est l'angle d'incidence sur le réseau, θ_1 est l'angle de réflexion associée à la longueur d'onde la plus basse de l'impulsion, θ_2 est l'angle de réflexion associée à la longueur d'onde la plus haute de l'impulsion. d est la distance entre les deux réseaux. c est la vitesse de la lumière dans le vide.

En prenant des paramètres similaires à l'expériences ($N = 1200$ traits/mm, $\lambda_1 = 795$ nm, $\lambda_2 = 805$ nm, $\theta_0 = 0.6$ rad¹), et en faisant varier d entre 10 cm² et 1 m³, on calcule à partir de l'équation (G.2) une largeur d'impulsion comprise entre 10 ps et 100 ps. À noter que la largeur de l'impulsion n'a pas été définie de manière précise.

¹c'est à dire à 0.1 rad de l'angle de Littrow, avec les paramètres utilisés.

²Pour des raisons d'encombrements, il est difficile de diminuer cette distance

³La limite provient de la taille des réseaux : plus la distance entre les réseaux augmente, plus le faisceau laser a une grande dimension transverse.

Annexe H

Détails de la modélisation des expériences d'interaction laser/électrons

Expression du spectre valide pour une puissance et une forme d'impulsion laser arbitraire

Formulation du problème.

Les coordonnées appropriées d'un électron sont sa position longitudinale z , la coordonnée transverse x dans le plan horizontal, la vitesse transverse x' et la variation de l'énergie longitudinale w par rapport au centre de l'énergie du paquet (énergie nominale de la particule synchrone). Avant l'interaction, la densité de charge du paquet d'électrons f est prise gaussienne :

$$f(x, x', z, w) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + x'^2 + z^2 + w^2)} \quad (\text{H.1})$$

Les variables (x, x', z, w) sont exprimées en unité de leur largeur RMS $\sigma_x, \sigma_{x'}, \sigma_z, \sigma_w$. La modélisation du processus est simplifiée en considérant deux étapes. Premièrement la modulation de l'énergie des électrons par le laser, et deuxièmement le transport des électrons à travers les aimants de courbures. L'interaction avec le laser mène principalement à une modulation rapide de l'énergie à la fréquence optique de la distribution de charge des électrons. Si on considère le cas simplifié d'une onde plane laser, modulant la distribution longitudinale d'énergie, la distribution dans l'espace des phases devient :

$$g(x, x', z, w) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + x'^2 + z^2)} e^{-\frac{1}{2}[w - a(z)\sin(z/\epsilon)]^2} \quad (\text{H.2})$$

avec $a(z)$ l'enveloppe du champ du laser et $1/\epsilon$ la longueur d'onde du laser en dimension réduite. Dans les unités utilisées, $|a(z)|$ est l'amplitude de la modulation d'énergie en unité d'*energie spread*. Ensuite, le transport du faisceau à travers les champs magnétiques implique des trajets différents en fonction de l'énergie, ainsi que de x et x' . C'est le processus principal qui va transformer la modulation rapide de l'énergie en une modulation

lente de la densité de charge à l'échelle THz. Nous faisons l'hypothèse que cela mène à une transformation linéaire des coordonnées $(x, x', z, w) = \mathbf{x}$ de chaque électron :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}\mathbf{x} \quad (\text{H.3})$$

Avec \mathbf{r} la matrice de transfert normalisée [21] du processus. Nous supposons qu'elle a la structure suivante :

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & 0 & r_{26} \\ r_{51} & r_{52} & 1 & r_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{H.4})$$

Les coefficients r_{ij} sont normalisés de la manière suivante (seuls les termes utiles sont explicités) :

$$r_{51} = R_{51} \frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \quad r_{52} = R_{52} \frac{\sigma'_x}{\sigma_z}, \quad r_{56} = R_{56} \frac{\sigma_\delta}{\sigma_z} \quad (\text{H.5})$$

Avec R_{ij} les éléments usuels non normalisés des matrices de transfert [19]. Nous avons une propriété supplémentaire, $|\mathbf{r}| = 1$. Cependant, nous allons effectuer un calcul plus général, valide dans le cas où $|\mathbf{r}| \neq 1$. La distribution d'électrons est transformée en [21, 19] :

$$h(\mathbf{x}) = |\mathbf{r}|^{-1} g(\mathbf{r}^{-1}\mathbf{x}), \quad (\text{H.6})$$

Ensuite, pour obtenir les informations sur la puissance THz rayonnée, il est important d'examiner la distribution longitudinale d'électrons, qui joue le rôle de source dans le processus [21] :

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, x', z, w) dx dx' dw, \quad (\text{H.7})$$

et en particulier sa transformée de Fourier :

$$\tilde{\rho}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \rho(z) dz \quad (\text{H.8})$$

Après avoir remplacé les équations (H.6, H.7) dans l'équation (H.8), l'intégration sur x, x' et w peut être aisément calculée en utilisant un changement de variable (voir le paragraphe suivant) :

$$\tilde{\rho}(k) = e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2)k^2} \psi(k) \quad (\text{H.9})$$

$$\text{avec } \psi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikr_{56}a(z) \sin(z/\epsilon)} dz \quad (\text{H.10})$$

Ces expressions, bien qu'importantes pour la modélisation, sont difficilement intégrables numériquement. En effet, l'intégrale dans l'équation H.10 présente des variations à des échelles très différentes, puisqu'elle implique les oscillations à la fréquence optique à $1/\epsilon$ et à ses harmoniques, en même temps que des variations lentes à l'échelle de l'enveloppe laser.

Détails du changement de variables utilisé pour l'intégration

Pour obtenir l'équation (H.10), nous avons utilisé un changement de variables. En remplaçant l'équation (H.7) dans l'équation (H.8), nous obtenons :

$$\tilde{\rho}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dx' dz dw \times e^{-ikz} h(x, x', z, w). \quad (\text{H.11})$$

En utilisant la relation (H.6) :

$$\tilde{\rho}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dx' dz dw \times e^{-ikz} |\mathbf{r}|^{-1} g(\mathbf{r}^{-1}(x, x', z, w)). \quad (\text{H.12})$$

Ensuite, nous faisons le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \mathbf{r}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{H.13})$$

Comme nous avons $dx dx' dz dw = |\mathbf{r}| dx_1 dx'_1 dz_1 dw_1$, nous obtenons :

$$\tilde{\rho}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx'_1 dz_1 dw_1 \times e^{-ik(r_{51}x_1 + r_{52}x'_1 + z_1 + r_{56}w_1)} g(x_1, x'_1, z_1, w_1) \quad (\text{H.14})$$

Ensuite, après avoir calculé les quadratures sur x_1 , x'_1 et w_1 , l'équation (H.10) est facilement obtenue. À noter que ce résultat ne dépend que des éléments des matrices r_{5i} et de l'état du paquet juste après l'interaction avec le laser.

Simplification du problème en utilisant l'approximation de l'enveloppe lentement variable.

Comme cela se fait en optique non linéaire conventionnelle, nous pouvons tirer profit de la présence d'échelles de temps très différentes. Comme l'amplitude de l'enveloppe $a(z)$ est supposée varier lentement pendant une période optique, $\rho(\tilde{k})$ est composé de pics étroits à la longueur d'onde laser $1/\epsilon$, et à ses harmoniques $p \times 1/\epsilon$. Dans ce travail, nous sommes intéressés par la réponse à basses fréquences (harmonique $p = 0$). Pour $\epsilon \ll 1$, nous pouvons appliquer l'approximation de l'enveloppe lentement variable, comme dans le travail de Stupakov et de Heifets [129], pour trouver une approximation de l'intégrale :

$$\psi(k) \simeq \psi_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikr_{56}a(z)\sin(Z)} dZ \right] dz, \quad (\text{H.15})$$

qui est valide quand l'enveloppe de l'impulsion laser varie lentement sur une période optique.

Cela donne l'approximation suivante pour le spectre de la distribution longitudinale de charge, valide dans le domaine THz :

$$\tilde{\rho}(k) \simeq \tilde{\rho}_0(k) = e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2+r_{52}^2+r_{56}^2)k^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} J_0(kr_{56}a(z)) dz \quad (\text{H.16})$$

Avec J_0 la fonction de Bessel d'ordre zéro. Cette expression doit en général être calculée numériquement, mais elle est de loin beaucoup moins longue à intégrer que le problème original [Eqns.(H.7, H.9)]. L'équation H.16 nous servira de relation de référence dans les sections qui suivent.

Calcul numérique de spectres typiques en fonction de la puissance laser.

Numériquement, nous avons examiné le cas de la réponse à une impulsion laser gaussienne multipliée par une modulation sinusoïdale :

$$a(z) = w_0 e^{-\frac{z^2}{4\sigma_L^2}} \times \cos\left(\frac{k_m}{2}z + \phi\right), \quad (\text{H.17})$$

avec σ_L la largeur RMS de la gaussienne en unité de la largeur de paquet σ_z , et k_m le nombre d'onde de la modulation d'intensité en unité de σ_z^{-1} . w_0 représente la modulation d'énergie maximale des électrons induite par laser (dans le cas $\phi = 0$), en unité de la valeur de la diffusion relative d'énergie σ_δ . La limite de l'acceptation en énergie (*energie acceptance*) de la machine donne une limite forte à la valeur possible de w_0 (et joue le rôle de seuil de dommage en optique non linéaire conventionnelle). Par exemple, pour UVSOR-II, l'acceptation en énergie δ_a est de l'ordre de 1%, c'est à dire 170 fois la valeur de diffusion en énergie. Ainsi, nous pouvons estimer que le domaine approprié des valeurs à considérer est $w_0 \ll 170$.

Comme nous l'attendions intuitivement, l'intégration numérique révèle qu'à faible puissance laser (typiquement lorsque le maximum de modulation est tel que $w_0 \ll 1/|k_m r_{56}|$), la réponse est principalement un seul pic à k_m (Fig. H.1 a,b). À plus forte puissance, des déformations du spectre sont prévues (Fig. H.1 c,d).

La dépendance de la puissance térahertz en fonction de la puissance laser peut être étudiée, en examinant $|\rho_0(k)|^2$ (proportionnel à la puissance du spectre de l'impulsion térahertz) en fonction de w_0^2 (puisque w_0^2 est proportionnel au pic de puissance laser). Le résultat est présenté Fig. H.2. Une dépendance quadratique est observée pour des puissances de laser faibles, une saturation apparaît à des puissances plus élevées.

Finalement, il est intéressant de remarquer que l'approximation de l'enveloppe lentement variable ($\epsilon \ll 1$) n'est pas très sévère. En fait, l'équation (H.16) fonctionne avec la plupart des formes des impulsions lasers, c'est à dire quand l'amplitude varie lentement à l'échelle d'une longueur d'onde optique (typiquement lorsque la durée de l'impulsion est beaucoup plus longue que la période optique). En particulier, l'équation (H.16) n'est pas seulement utile pour le problème considéré, mais peut aussi être utilisée dans le cas du

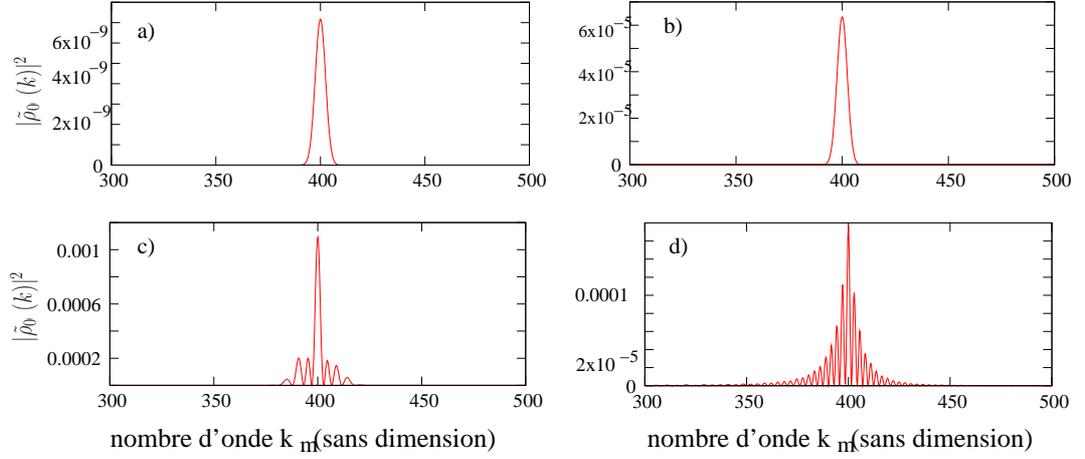


FIG. H.1: Module du spectre térahertz $|\rho_0(k)|^2$ en fonction de la puissance laser (a) : $w_0 = 0.1$, (b) : $w_0 = 1$, (c) : $w_0 = 10$, (d) : $w_0 = 100$. Calcul numérique d'après l'équation (H.16). Des déformations du spectres sont prévues à forte puissance laser. Autres paramètres : $k_m = 400$, $\sigma_L = 0.3$, $r_{51} = -0.00053$, $r_{52} = 0.0021$, $r_{56} = -0.0029$.

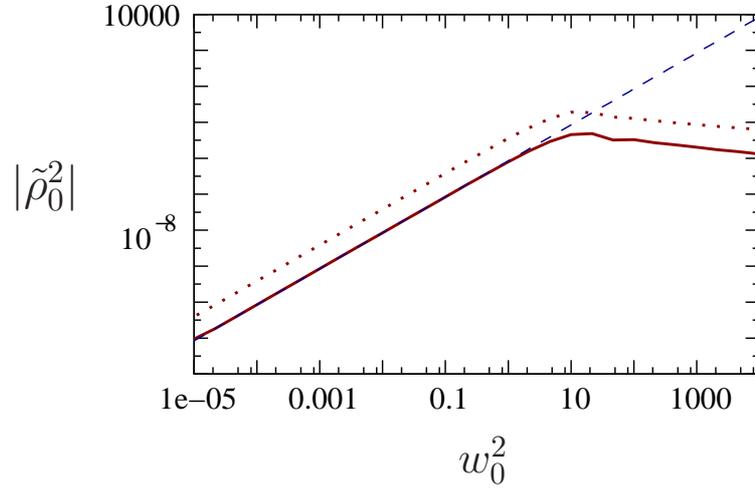


FIG. H.2: Dépendance de la puissance térahertz émise en fonction de la puissance laser de l'impulsion [calcul numérique d'après Eq. (H.16), résultats analytiques d'après Eq. (H.38)]. Les lignes en traits pleins et en traits alternés sont le maximum de $|\rho_0(k)|^2$ calculé numériquement, et analytiquement respectivement (les deux courbes ne sont en pratique pas distinguables pour $w_0 < 1$). Ligne en pointillées : aire du pic principal $[\int |\rho_0(k)|^2 dk]$ calculé numériquement. Paramètres : $k_m = 400$, $\sigma_L = 0.09$, $r_{51} = -0.00053$, $r_{52} = 0.0021$, $r_{56} = -0.0029$.

slicing “conventionnel” (c’est à dire pour des impulsions picosecondes ou femtosecondes sans modulation) [21, 20, 19, 83].

Expression analytique du spectre dans la limite de faible puissance laser

L’équation (H.16) requiert un calcul numérique de l’intégrale. Cependant, une expression analytique peut être obtenue dans la limite de faible puissance laser.

Développement asymptotique valide pour des intensités laser faibles et des formes d’impulsions laser arbitraires

Nous examinons le cas $a(z)$ petit. Dans le domaine où $|a(z)| \ll 1/|kr_{56}|$, nous pouvons faire un développement limité de l’équation (H.16) au second ordre :

$$\tilde{\rho}_0(k) \simeq \tilde{\rho}_{00}(k) = e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2+r_{52}^2+r_{56}^2)k^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{k^2 r_{56}^2}{4} a^2(z) \right] dz \quad (\text{H.18})$$

Cela amène à :

$$\tilde{\rho}_{00}(k) = e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2+r_{52}^2+r_{56}^2)k^2} \times \left(e^{-\frac{k^2}{2}} - \frac{k^2 r_{56}^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} a^2(z) dz \right). \quad (\text{H.19})$$

Ce développement limité est valide pour toute forme d’impulsion, et peut être utilisé pour obtenir des expressions analytiques dans des cas particuliers. Dans le paragraphe suivant, nous présentons le cas d’une impulsion laser et d’un paquet d’électrons infiniment long. Ensuite, nous dériverons aussi le cas d’une impulsion laser gaussienne multipliée par une modulation sinusoïdale.

Expression analytique dans la limite d’une impulsion laser et d’un paquet d’électrons infiniment longs.

À faible puissance laser, nous pouvons faire un développement limité, qui mène à une expression analytique simple. Dans la limite d’un paquet d’électrons et d’une impulsion laser infiniment longs, nous remplaçons $\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ par 1, et prendre $a(z) = \sqrt{P} \cos(k_m z/2)$, $\tilde{\rho}_{00}(k)$ devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{00}(k) &= e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2+r_{52}^2+r_{56}^2)k^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \left[1 - \frac{k^2 r_{56}^2}{4} P \cos^2\left(\frac{k_m}{2} z\right) \right] dz \quad (\text{H.20}) \\ &= 2\pi\delta(k) - e^{-\frac{1}{2}(r_{51}^2+r_{52}^2+r_{56}^2)k^2} \left(\frac{k^2 r_{56}^2 P \pi}{8} \right) \times [\delta(-k + k_m) + \delta(k + k_m)] \quad (\text{H.21}) \end{aligned}$$

Le premier terme est la contribution que nous aurions si l'impulsion n'était pas modulée. Le deuxième terme est la contribution due à la modulation laser. Ainsi, nous nous attendons à ce qu'en première approximation, la puissance térahertz dépende de la fréquence d'excitation k_m selon la loi suivante :

$$P_{THz} \simeq C r_{56}^4 P^2 k^4 e^{-(r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2)k^2}, \quad (\text{H.22})$$

avec C un paramètre inconnu à cette étape de modélisation. Cette courbe a un maximum localisé à :

$$k_m = k_{mopt} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}}. \quad (\text{H.23})$$

En terme de variables avec dimensions, la fréquence associée (en Hertz) est :

$$\nu_{mopt} = \frac{c}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R_{51}^2 \sigma_x^2 + R_{52}^2 \sigma_{x'}^2 + R_{56}^2 \sigma_\delta^2}}. \quad (\text{H.24})$$

Cette valeur analytique peut être utilisée pour estimer le domaine d'efficacité maximale avec une bonne approximation lorsque l'impulsion laser est beaucoup plus grande que la période de modulation, et dans la limite d'une faible puissance laser. L'ajustement de l'équation (H.22) avec les données expérimentales est présenté sur la figure 4.21. Sur cette figure, les deux courbes correspondent à l'émission après un transport direct de l'onduleur à l'aimant de la ligne de lumière [courbe(0)], et à l'émission après un tour complet dans l'anneau de stockage [courbe(1)] (voir la section 4.3.3 pour les détails).

Expressions analytiques dans le cas d'enveloppe lentement variable et de faible intensité laser

Des calculs similaires au cas limite des impulsions infiniment longues peuvent être menés pour obtenir des approximations asymptotiques en considérant des formes d'impulsions laser plus réalistes et un paquet d'électrons gaussien. Pour exemple, des expressions analytiques dans le cas de paquet d'électrons gaussien et d'impulsion laser gaussienne [définie par l'équation (H.17)] seront dérivées dans l'annexe suivante. Toutefois, il est intéressant de considérer d'abord une forme plus générale d'impulsion laser :

$$a(z) = A(z) \times \sqrt{2} \cos\left(\frac{k_m}{2}z + \phi\right), \quad (\text{H.25})$$

dans la limite $k_m \gg 1$, et avec $A(z)$ variant lentement par rapport à la modulation sinusoïdale. Plus précisément, la transformée de Fourier de A a des valeurs notables seulement pour $|k| \ll k_m$. Cela inclue le cas de l'impulsion laser définie par l'équation (H.17), pour laquelle $A(z) = w_0 e^{-\frac{z^2}{4\sigma_L^2}} / \sqrt{2}$.

Nous obtenons facilement :

$$\psi_{01}(k) = -\frac{k^2 r_{56}^2}{4} \left(F(k) - \frac{1}{2} F(k - k_m) - \frac{1}{2} F(k + k_m) \right) \quad (\text{H.26})$$

$$\text{avec } F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} A^2(z) \right] dz, \quad (\text{H.27})$$

et :

$$\tilde{\rho}_0(k) \simeq \tilde{\rho}_{00}(k) \quad (\text{H.28})$$

$$\simeq e^{-\frac{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}{2} k^2} \quad (\text{H.29})$$

$$\times \left[e^{-\frac{k^2}{2}} - \frac{k^2 r_{56}^2}{4} F(k) - \frac{1}{2} \frac{k^2 r_{56}^2}{4} F(k - k_m) - \frac{1}{2} \frac{k^2 r_{56}^2}{4} F(k + k_m) \right] \quad (\text{H.30})$$

Les quatre termes correspondent à un effet physique bien précis :

- a) $e^{-\frac{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}{2} k^2} \times e^{-\frac{k^2}{2}}$ est la contribution du paquet d'électrons sans interaction laser.
- b) $e^{-\frac{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}{2} k^2} \times \left[-\frac{k^2 r_{56}^2}{4} F(k) \right]$ est la contribution qu'aurait eu une impulsion laser avec la même énergie, mais sans modulation ("traditionnel" *slicing*).
- c) $e^{-\frac{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}{2} k^2} \times \left[-\frac{1}{2} \frac{k^2 r_{56}^2}{4} F(k \pm k_m) \right]$ sont les termes dus à la modulation, et sont les composantes étudiées dans nos travaux. Elles sont très piquées pour k près de $\pm k_m$. Dans ces régions, les autres termes sont négligeables.

Dans la limite de faible puissance, nous avons [voir Eq. (H.18)] :

$$\tilde{\rho}_0(k) \simeq \tilde{\rho}_{00}(k) = e^{-\frac{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}{2} k^2} (\psi_{00}(k) + \psi_{01}(k)) \quad (\text{H.31})$$

$$\text{avec} \quad (\text{H.32})$$

$$\psi_{00}(k) = e^{-\frac{k^2}{2}} \quad (\text{H.33})$$

$$\psi_{01}(k) = -\frac{k^2 r_{56}^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} a^2(z) dz \quad (\text{H.34})$$

Le premier terme qui est juste l'émission térahertz du paquet d'électrons non perturbé sera négligé par la suite. Techniquement, nous avons juste à évaluer $\psi_{01}(k)$.

$$\psi_{01}(k) = -\frac{k^2 r_{56}^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} \times \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} A^2(z) \right] \times [1 + \cos(k_m z + \phi)] dz \quad (\text{H.35})$$

Cas particulier d'une modulation sinusoïdale avec une enveloppe gaussienne, et d'une faible puissance laser

L'étude faite précédemment peut être utilisée pour obtenir des approximations asymptotiques dans des cas variés. Si nous considérons une impulsion laser avec une modulation sinusoïdale et une forme gaussienne :

$$a(z) = w_0 e^{-\frac{z^2}{4\sigma_L^2}} \times \cos\left(\frac{k_m}{2}z + \phi\right), \quad (\text{H.36})$$

c'est à dire $A(z) = w_0 e^{-\frac{z^2}{4\sigma_L^2}} / \sqrt{2}$, nous avons :

$$-\frac{1}{2} \frac{r_{56}^2 k^2}{4} F(k) = -\frac{w_0^2 k_m^2 r_{56}^2 \sigma_L}{32 \sqrt{\sigma_L^2 + 1}} e^{-\frac{\sigma_L^2 (k-k_m)^2}{2(\sigma_L^2 + 1)}}. \quad (\text{H.37})$$

En négligeant les contributions a) et b), et le recouvrement entre les deux fonctions piquées dans c), nous obtenons l'approximation suivante pour le spectre de puissance :

$$\tilde{\rho}_0(k) \simeq e^{-\frac{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}{2} k^2} \times \frac{w_0^4 k_m^4 r_{56}^4 \sigma_L^2}{256 \sigma_L^2 + 1} e^{-\frac{\sigma_L^2 (k-k_m)^2}{\sigma_L^2 + 1}} \quad (\text{H.38})$$

Deux vérifications de cette approximation avec des calculs numériques sont présentées Fig. H.2 et Fig. H.3. Plus généralement, les tests numériques confirment le fait que l'équation (H.38) est valide lorsque les conditions $\sigma_L \gg 1/k_m$ et $|a(z)| \ll 1/k_m r_{56}$.

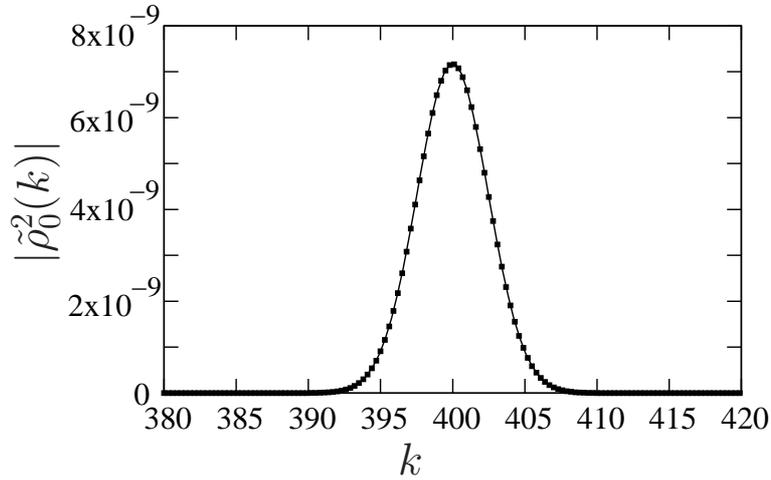


FIG. H.3: Spectre térahertz dans le cas d'une impulsion laser gaussienne avec une modulation interne : calcul numérique d'après l'équation (H.16) (points) et approximation d'après l'équation (H.38) (ligne). $k_m = 400$, $\sigma_L = 0.3$, $w_0 = 0.1$, $r_{51} = -0.00053$, $r_{52} = 0.0021$, $r_{56} = -0.0029$.

Si nous négligeons la contribution du terme $e^{-\frac{r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}{2} k^2}$, la valeur RMS de la largeur du pic est :

$$\Delta k_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma_L^2}} \quad (\text{H.39})$$

En terme de variables physiques, la valeur RMS de la largeur du pic s'écrit (en Hertz) :

$$\Delta\nu_{RMS} = \frac{c\Delta k_{RMS}}{2\pi\sigma_z} \quad (\text{H.40})$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\Delta T_{LRMS}^2} + \frac{1}{\Delta T_{zRMS}^2}} \quad (\text{H.41})$$

où ΔT_{LRMS} et ΔT_{zRMS} sont les valeurs des durées RMS de l'impulsion laser et du paquet d'électrons respectivement.

Néanmoins, il est important de noter que nous avons considéré ici le cas idéal d'une modulation sinusoïdale sans glissement de fréquence (*chirp*) dans la fréquence de modulation. Pour les expériences présentées dans ce chapitre, section 4.3.1.2 (deuxième dispositif expérimental), les paramètres sont : $\Delta T_{LRMS} = 130$ ps et $\Delta T_{zRMS} = 100$ ps. D'où, sans glissement de fréquence, nous avons théoriquement : $\Delta\nu_{RMS} = 0.07$ cm⁻¹. Les largeurs mesurées expérimentalement sont plus larges : $\simeq 0.14$ cm⁻¹ et $\simeq 0.38$ cm⁻¹ pour le pic (0) et (1) respectivement. Contrairement à ce qui est prédit par l'équation (H.41), ces valeurs dépendent de la fréquence considérée. Cela peut être attribué à l'existence du glissement de fréquence (*chirp*) dans la modulation interne de l'impulsion laser, un effet qui est bien connu dans le cadre d'étude d'émission térahertz dans les semi-conducteurs [88]. Le calcul de cet effet est laissé pour d'autres études. Ce calcul nécessitera de connaître les détails de l'impulsion étirée à la sortie de l'amplificateur (ou de manière équivalente, la dispersion au troisième ordre à la sortie des réseaux), mais le calcul des spectres en utilisant ces données est en principe similaire aux exemples présentés ici. Par ailleurs, nous pensons aussi que réduire le glissement de fréquence non linéaire à la sortie de l'amplificateur aura un effet drastique sur la largeur spectrale.

Effet d'une dispersion dans la distribution initiale du paquet d'électrons

Les calculs présentés peuvent être étendus en incluant une description plus fine de la distribution initiale du paquet d'électrons. Nous considérons une distribution initiale du paquet du type :

$$f(x, x', z, w) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{1}{2}[(x-\eta w)^2 + x'^2 + z^2 + w^2]}, \quad (\text{H.42})$$

où η caractérise la dispersion transverse d'énergie. Après l'interaction avec le laser :

$$g(x, x', z, w) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{1}{2}[(x-\eta w)^2 + x'^2 + z^2 + [w - a(z)\sin(z/\epsilon)]^2]} \quad (\text{H.43})$$

En utilisant l'équation (H.14), nous obtenons :

$$\tilde{\rho}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dx' dz dw \times e^{-ik(r_{51}x_1 + r_{52}x'_1 + z + r_{56}w_1)} \quad (\text{H.44})$$

$$\times \frac{1}{4\pi^2} e^{-\frac{1}{2}[(x-\eta w)^2 + x'^2 + z^2 + [w - a(z)\sin(z/\epsilon)]^2]} \quad (\text{H.45})$$

Les intégrations sur x, x', w et l'approximation de l'enveloppe lentement variable peuvent être appliquées, de la même manière que dans les sections précédentes. Le spectre de la distribution longitudinale [Eq. H.16] est transformé en :

$$\tilde{\rho}(k) \simeq \tilde{\rho}_0(k) = e^{-\frac{1}{2}[(r_{51}+\eta)^2+r_{52}^2+r_{56}^2]k^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} J_0(kr_{56}a(z)) dz. \quad (\text{H.46})$$

Dans l'approximation des faibles puissances laser, la fréquence correspondant au maximum d'émission devient :

$$k_m = k_{mopt} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(r_{51} + \eta)^2 + r_{52}^2 + r_{56}^2}}, \quad (\text{H.47})$$

et plus généralement, chaque résultat des sections précédentes peut être étendu au cas $\eta \neq 0$, juste en remplaçant r_{51} par $r_{51} + \eta$.

Annexe I

Expression analytique de la puissance térahertz émise après une interaction avec une impulsion laser modulée, sans force collective

Évolution de la distribution de charge dans le repère tournant à la fréquence synchrotron

Re-formulation du problème dans le repère tournant à la fréquence synchrotron

Nous travaillons avec l'équation de Vlasov-Fokker-Planck sans *wakefield* :

$$f_{\tau} + pf_q - qf_p = 2\epsilon(f + pf + f_{pp}) \quad (\text{I.1})$$

avec $f = f(q, p, \tau)$.

Posons :

$$f(q, p, \tau) = g(x, y, \tau), \quad (\text{I.2})$$

avec :

$$x = q \cos \tau - p \sin \tau \quad (\text{I.3})$$

$$y = q \sin \tau + p \cos \tau. \quad (\text{I.4})$$

Nous avons :

$$q = x \cos \tau + y \sin \tau \quad (\text{I.5})$$

$$p = -x \sin \tau + y \cos \tau, \quad (\text{I.6})$$

et :

$$f_\tau + pf_q - qf_p = g_\tau \quad (\text{I.7})$$

$$f_q = g_x \cos \tau + g_y \sin \tau \quad (\text{I.8})$$

$$f_p = -g_x \sin \tau + g_y \cos \tau \quad (\text{I.9})$$

$$f_{pp} = g_{xx} \sin^2 \tau - 2g_{xy} \sin \tau \cos \tau + g_{yy} \cos^2 \tau \quad (\text{I.10})$$

$$(\text{I.11})$$

Remplacer ces expressions dans l'Eq.(I.12) mène à :

$$g_\tau = 2\epsilon \left[g + (-x \sin \tau + y \cos \tau)g + g_{xx} \sin^2 \tau - 2g_{xy} \sin \tau \cos \tau + g_{yy} \cos^2 \tau \right] \quad (\text{I.12})$$

Dans ces équations, il n'y a plus de terme de rotation à proprement parler. La contrepartie est la présence de terme dépendant du temps. Certains termes oscillent à la fréquence synchrotron (de période 2π). Le terme de second ordre (correspondant à la diffusion) a des coefficients qui oscillent au double de la fréquence synchrotron.

Approximation dans la limite $k_0 \gg 1$

En faisant l'hypothèse que $k_0 \gg 1$, nous posons :

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sigma_0, \quad (\text{I.13})$$

avec $\sigma_0 = O(1)$, et introduisons des coordonnées spatiales rapides et lentes :

$$g(x, y, \tau) = G(x, X, y, Y, \tau) \quad (\text{I.14})$$

avec

$$X = x/\sqrt{\epsilon} \quad (\text{I.15})$$

$$Y = y/\sqrt{\epsilon} \quad (\text{I.16})$$

$$(\text{I.17})$$

X et Y sont les variable spatiales rapides et x et y sont les variables spatiales lentes.

$$g_x = G_x + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} G_X \quad (\text{I.18})$$

$$g_{xx} = G_{xx} + \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} G_{xX} + \frac{1}{\epsilon} G_{XX} \quad (\text{I.19})$$

$$g_{xy} = G_{xy} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (G_{Xy} + G_{xY}) + \frac{1}{\epsilon} G_{XY} \quad (\text{I.20})$$

$$G = G_0 + \sqrt{\epsilon}G_1 + 0(\epsilon) \quad (\text{I.21})$$

Remplacer ces expression dans Eq. (I.12) permet d'obtenir l'équation à l'ordre le plus bas en ϵ :

$$G_{0\tau} = 2 [G_{0XX} \sin^2 \tau + G_{0YY} \cos^2 \tau - 2G_{0XY} \sin \tau \cos \tau] \quad (\text{I.22})$$

Nous prenons la transformée de Fourier en X et Y :

$$\tilde{G}_{0\tau} = 2 [-k_X^2 \sin^2 \tau - k_Y^2 \cos^2 \tau + 2k_X k_Y \sin \tau \cos \tau] \tilde{G}_0 \quad (\text{I.23})$$

$$\tilde{G}_{0\tau} = [-k_X^2(1 - \cos 2\tau) - k_Y^2(1 + \cos 2\tau) + 2k_X k_Y \sin 2\tau] \tilde{G}_0. \quad (\text{I.24})$$

Puis, nous faisons le changement de variables suivant :

$$\tilde{G}_0 = \pm \exp u \quad (\text{I.25})$$

qui mène à :

$$u_\tau = -k_X^2(1 - \cos 2\tau) - k_Y^2(1 + \cos 2\tau) + 2k_X k_Y \sin 2\tau \quad (\text{I.26})$$

$$\implies u = -(k_X^2 + k_Y^2)\tau + \frac{(k_X^2 - k_Y^2)}{2} \sin 2\tau - k_X k_Y \cos 2\tau + C, \quad (\text{I.27})$$

avec C une constante dépendance des conditions initiales. Finalement :

$$\tilde{G}(x, k_X, y, k_Y, \tau) = \tilde{G}(x, k_X, y, k_Y, 0) e^{-k_X^2(\tau - \frac{\sin 2\tau}{2})} e^{-k_Y^2(\tau + \frac{\sin 2\tau}{2})} e^{-k_X k_Y (\cos 2\tau - 1)}. \quad (\text{I.28})$$

À noter que les fonctions du paquet correspondent juste à une rotation dans l'espace des phases. Plus précisément, si la composante de Fourier a une "angle" ϕ à $t = 0$:

$$K_X = K \cos \phi \quad (\text{I.29})$$

$$K_Y = K \sin \phi, \quad (\text{I.30})$$

avec $K \geq 0$, Eq. (I.31) peut être réécrite :

$$\tilde{G}_0(x, k_X, y, k_Y, \tau) = \tilde{G}(x, k_X, y, k_Y, 0) e^{-k^2 \left[\tau - \frac{\sin 2(\tau - \phi) + \sin 2\phi}{2} \right]}. \quad (\text{I.31})$$

Cas particulier d'une modulation initiale d'énergie

Nous prenons la condition initiale suivante (voir section 6.1.1) :

$$g(x, y, \tau = 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} [1 + A \cos(k_0 x)(1 - y^2)] \quad (\text{I.32})$$

Que l'on met sous la forme :

$$G(x, X, y, Y, \tau = 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} [1 + A \cos(\sigma_0 X)(1 - y^2)] \quad (\text{I.33})$$

Nous prenons la transformée de Fourier en X et Y :

$$\tilde{G}(x, k_X, y, k_Y, 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left[\frac{\delta(K_X)\delta(K_Y)}{4\pi^2} + A \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(k_X - \sigma_0) + \delta(k_X + \sigma_0)}{2} \frac{\delta(K_Y)}{2\pi} (1 - y^2) \right] \quad (\text{I.34})$$

En utilisant les résultats de la section précédente, nous obtenons :

$$\tilde{G}(x, k_X, y, k_Y, \tau) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left[\frac{\delta(K_X)\delta(K_Y)}{4\pi^2} + A e^{-k_X^2(\tau - \frac{\sin 2\tau}{2})} \right] \quad (\text{I.35})$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(k_X - \sigma_0) + \delta(k_X + \sigma_0)}{2} \frac{\delta(K_Y)}{2\pi} (1 - y^2) \quad (\text{I.36})$$

On revient dans l'espace direct :

$$G(x, X, y, Y, \tau) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left[1 + A e^{-\sigma_0^2(\tau - \frac{\sin 2\tau}{2})} \cos(\sigma_0 X)(1 - y^2) \right] + O(\sqrt{\epsilon}) \quad (\text{I.37})$$

Avec les coordonnées d'origine dans le repère tournant :

$$g(x, y, \tau) \simeq e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \left[1 + A e^{-\epsilon k_0^2(\tau - \frac{\sin 2\tau}{2})} \cos(k_0 x)(1 - y^2) \right] \quad (\text{I.38})$$

Et finalement, dans le repère statique :

$$f(q, p, \tau) \simeq e^{-\frac{q^2+p^2}{2}} \left[1 + A e^{-\epsilon k_0^2(\tau - \frac{\sin 2\tau}{2})} \cos(k_0(q \cos \tau - p \sin \tau))(1 - (q \sin \tau + p \cos \tau)^2) \right] \quad (\text{I.39})$$

Densité longitudinale de charge et puissance térahertz

La deuxième étape consiste à calculer la densité longitudinale de charge $\rho(q, \tau)$ qui agit comme un terme source dans le processus d'émission synchrotron cohérente.

$$\rho(q, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q, p, \tau) dp \quad (\text{I.40})$$

En remplaçant l'équation (I.39) dans l'équation (I.40), on obtient :

$$\rho(q, \tau) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{q^2}{2}} [1 - A e^{-\epsilon k_0^2 (\tau - \frac{\sin 2\tau}{2})} e^{-\frac{(k_0 \sin \tau)^2}{2}}] \quad (\text{I.41})$$

$$(\quad + \cos(k_0 q \cos \tau) \quad (\text{I.42})$$

$$- \cos^2 \tau \cos(k_0 q \cos \tau) \quad (\text{I.43})$$

$$+ q^2 \sin^2 \tau \cos(k_0 q \cos \tau) \quad (\text{I.44})$$

$$+ k_0^2 \sin^2 \tau \cos(k_0 q \cos \tau) \cos^2 \tau \quad (\text{I.45})$$

$$+ 2q \cos \tau \sin^2 \tau k_0 \sin(k_0 q \cos \tau)) \quad (\text{I.46})$$

On va chercher une approximation valable pour des temps proche de $n\pi$ (avec n un entier positif), c'est à dire pour des temps proches d'un multiple de la demi-période synchrotron. On pose $\tau_n = n\pi + T$, et $T = \sqrt{\epsilon}\tau$, un temps petit devant la période synchrotron. Ainsi, on obtient une série d'équations $\rho_n(q, T)$ décrivant $\rho(q, \tau)$ au voisinage de chaque demi-période synchrotron ($\tau = 0, \tau = \pi$, etc)¹ :

$$\rho_n(q, T) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{q^2}{2}} [1 - A e^{-\epsilon k_0^2 (n\pi)} e^{-\frac{(k_0(T-n\pi))^2}{2}} \times (k_0^2 (T-n\pi)^2 \cos(k_0 q) + O(\sqrt{\epsilon}))] \quad (\text{I.47})$$

Comme k_0 est de l'ordre de $1/\sqrt{\epsilon}$, le terme $e^{-\frac{(k_0 \sin \tau)^2}{2}}$ de l'équation (I.41) fait que l'amplitude de la modulation est quasiment nulle tout le temps, sauf en $|\tau| \simeq \sqrt{\epsilon}$ (modulo π), domaine où est valable la série d'équations (I.47). De ce fait, nous pouvons faire l'approximation que la série d'équations $\rho_n(q, T)$ peut s'écrire sous la forme d'une seule équation, en remettant les informations de périodicité sur les termes de l'équation (I.47) qui restent :

$$\rho(q, \tau) \simeq \sqrt{2\pi} e^{-\frac{q^2}{2}} [1 - A e^{-\epsilon k_0^2 (\tau - \frac{\sin 2\tau}{2})} e^{-\frac{(k_0 \sin \tau)^2}{2}} k_0^2 \sin^2 \tau \cos(k_0 q)] \quad (\text{I.48})$$

La puissance térahertz s'écrit [71] :

$$P_{THz}(\tau) = C \int_{k-d}^{k+d} |\tilde{\rho}(k, \tau)|^2 dk \quad (\text{I.49})$$

$$\text{avec } \tilde{\rho}(k, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q, \tau) e^{-ikq} dq \quad (\text{I.50})$$

¹toujours dans l'hypothèse où k_0 de l'ordre de $1/\sqrt{\epsilon}$.

C étant un coefficient de proportionnalité prenant en compte l'intensité émise par un seul électron [71], et $2d$ symbolise la largeur de la bande spectrale du détecteur, centrée sur k_0 . En remplaçant Eq. (I.48) dans Eq. (I.50), on obtient finalement :

$$P_{THz}(\tau) = \frac{C\pi}{2} A^2 (k_0 \sin \tau)^4 e^{-(k_0 \sin \tau)^2} e^{-\epsilon k_0^2 (2\tau - \sin 2\tau)} \quad (\text{I.51})$$