N° ORDRE : 40132

Université de Sciences et Technologies de Lille 1,
Ecole Doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences de l'Université Lille 1

présentée par **Patrick LEMAIRE**

le 10 décembre 2009

Discipline : **Mathématiques Pures**

Formes quasi-modulaires
et développement de Taylor de formes modulaires de Siegel

Directeur de thèse : Valery Gritsenko

Membres du Jury

Examinateur	Valery Gritsenko	Professeur	Université de Lille 1
Examinateur	Vincent Maillot	Chargé de Recherche	Université de Paris 7
Rapporteur	Alexis Pantchichkine	Professeur	Université de Grenoble
Examinateur	Olivier Ramaré	Chargé de Recherche	Université de Lille 1
Président	Gregory Sankaran	Professeur	Université de Bath
Rapporteur	Niels-Peter Skoruppa	Professeur	Université de Siegen

Résumé

Le premier exemple de formes quasi-modulaires est la série d'Eisenstein G_2, qui est une forme quasi-modulaire pour $SL(2,\mathbb{Z})$ et qui joue un rôle fondamental dans la structure de ces formes. En particulier, ces formes apparaissent quand on étudie les développements de Taylor par rapport à la variable abélienne des formes modulaires de Jacobi.
Dans cette thèse, nous décrivons de nouvelles formes quasi-modulaires en plusieurs variables : les formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$ et les formes quasi-modulaires sur les groupes orthogonaux. Les premières sont associées aux développements de Taylor des formes modulaires de Siegel. Les secondes apparaissent lors de l'étude des coefficients de Taylor en certains points des formes modulaires pour un réseau quadratique de signature $(2,n)$.
Nous menons des calculs explicites dans le cas des formes modulaires de Siegel pour les groupes paramodulaires en donnant les premiers coefficients de Taylor en $z=0$ des formes modulaires fondamentales $\Delta_{1/2}$ (la série théta de Siegel de caractéristique 2), Δ_1, Δ_2, Δ_5 et Δ_{35}(les deux dernières sont les formes modulaires d'Igusa) et quelques autres formes reflexives introduites par V.Gritsenko et V.Nikulin dans la théorie des algèbres de Kac-Moody hyperboliques.
Les formes modulaires en question sont aussi importantes dans la géométrie algébrique (la théorie des espaces de modules des surfaces abéliennes et des surfaces de Kummer) et dans la physique (la théorie de cordes). Les développements de Taylor des formes modulaires sur les groupes orthogonaux $O(2,n)$ jouent par exemple un rôle important dans la théorie des espaces de modules des surfaces $K3$ polarisées.

Mots clés : développement en série de Taylor, formes modulaires de Jacobi, formes modulaires de Siegel, formes modulaires pour les groupes orthogonaux, formes quasi-modulaires.

Abstract

The first example of quasi modular forms is the G_2 Eisenstein series which is a quasi modular form for $SL(2,\mathbb{Z})$ and which is very important for quasi modular forms structure. In particular, these forms appear when we study Taylor expansions of Jacobi forms with respect to the abelian variable.

In this thesis, we describe new quasi modular forms : quasi modular forms for $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$, quasi modular forms for orthogonal groups. The first ones are associated to Taylor expansion of Siegel modular forms. The second ones appear when we study Taylor coefficients of modular forms for a lattice of signature $(2,n)$ around some points. We give some definite calculus in the case of Siegel modular forms by giving the first coefficients of Taylor expansion around $z = 0$ of fundamental modular forms $\Delta_{1/2}$(Siegel theta serie of characteristic 2) the Δ_1, Δ_2 functions, the Δ_5 and Δ_{35} functions (which are the Igusa modular forms) and some other reflective functions introduced by V.Gritsenko and V.Nikulin in the theory of hyperbolic Kac-Moody algebras. .

These modular forms are useful in algebric geometry(theory of moduli spaces of abelian surfaces and Kummer surfaces) and in physics (string theory). Taylor expansions of modular forms for the orthogonal groups $O(2,n)$ are very usefull in the theory of moduli spaces of polarized K3 surfaces for example.

Keywords : Taylor expansion, Jacobi modular forms, Siegel modular forms, modular forms for orthogonal groups, quasi modular forms

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier mon directeur de thèse, Valery Gritsenko, d'une part pour m'avoir fait découvrir le vaste sujet des formes modulaires et d'autre part pour la confiance et la disponibilité qu'il m'a accordées au cours de ces années de thèse. Ma culture mathématique s'est grandement enrichie à son contact et pendant les groupes de travail et les séminaires auxquels j'ai participé grâce à lui.

Je tiens aussi à remercier Alexis Pantchichkine et Niels-Peter Skoruppa d'avoir bien voulu accepter d'être rapporteurs de ma thèse.

Un grand merci également à Olivier Ramaré, mon directeur de thèse de M2, qui m'a aidé à prendre contact avec mon directeur de thèse et dans les démarches pour l'obtention d'une bourse de thèse.

Je remercie aussi les personnes avec lesquelles j'ai eu l'occasion de travailler dans le cadre des enseignements que j'ai effectués pour le monitorat : je pense en particulier à Isabelle Liousse et Rachid Ghalim. Merci aussi aux moniteurs avec lesquels j'ai participé à l'atelier validant mon stage pour le CIES.

Je tiens aussi à remercier le laboratoire Paul Painlevé, l'UFR de mathématiques et l'école doctorale de Lille 1 pour les excellentes conditions de travail qu'ils m'ont accordés.

Enfin, je remercie les thésards du laboratoire Paul Painlevé pour leur soutien, en particulier Benoît et Fabien, véritable puit de savoir en ce qui concerne les mathématiques, pour les nombreuses discutions que nous avons eu ensemble et qui m'ont toujours été profitables. Je remercie aussi mon entourage non-mathématique, en particulier ma soeur Lucie, mon frère Yann, alias l'homme zéro défaut dont la voix chaude et sucrée a toujours su me réconforter, mon frère Tony, future star internationale du métal et enseignant à ses heures perdues, ainsi que toute ma famille et mes amis.

Table des matières

Introduction

Dans leur article [KZ95] de 1995, M.Kaneko et D.Zagier mettent en place le concept de formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})$: ils en décrivent les propriétés et la structure, pour laquelle la série d'Eisenstein G_2 joue un rôle prépondérant. En 1985, les coefficients de Taylor des formes quasi-modulaires de Jacobi avait été étudié dans le livre de M.Eichler et D.Zagier [EZ85] mais d'une façon indirecte. En effet les auteurs utilisaient des combinaisons linéaires de dérivées des coefficients de Taylor et les polynômes de Gegenbauer pour former des formes modulaires : la structure des formes quasi-modulaires et les calculs explicites n'y étaient donc pas décrits. Le fait que les coefficients de Taylor en $z = 0$ des formes modulaires de Jacobi soient des formes quasi-modulaires apparaît naturellement par le biais de la correction automorphe dans l'article de V.Gritsenko [Gri99] publié en 1999. Parallèlement à l'étude des coefficients de Taylor des formes modulaires de Jacobi, il est naturel de s'intéresser aux coefficients de Taylor des formes modulaires de genre 2. De plus, les coefficients de Taylor des formes modulaires pour les groupes du type $O(2, n)$, dont les formes modulaires de Siegel sont un cas particulier, sont utiles pour le théorème de quasi pull-back dans [V. 07] et dans la théorie des espaces de modules des surfaces $K3$. Dans son article [Igu62] de 1962, Igusa établit une formule qui donne les coefficients de Taylor en $z = 0$ des fonctions théta de Siegel et en 2008 dans son article sur le Spezialschaar de Maass [B. 06], B.Heim reprend le processus mis en place dans [EZ85] pour les appliquer aux coefficients de Taylor des formes modulaires de genre 2. Toutefois, ni l'un ni l'autre ne décrivent la nature de ces coefficients ou ne donnent de moyens de calculer de façon explicite les coefficients de ces formes modulaires de Siegel.

Il existe plusieurs façons de construire des formes modulaires de genre 2 et des formes modulaires pour les groupes orthogonaux attachés à un réseau de la forme $2\mathcal{U} \bigoplus -L_0$ avec L_0 un réseau quadratique pair défini positif, notamment une technique appelée relèvement : il s'agit essentiellement de construire une forme modulaire de Siegel à partir d'une forme modulaire de Jacobi. Ces relèvements sont de deux types : arithmétiques (additifs) et exponentiels (le produit de Borcherds). Le relèvement arithmétique a été étudié par H.Maass en 1979 dans [Maa79a] et [Maa79b]. Il existe aussi une version dans le cas d'un caractère de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans [V. 96b] ainsi que dans [V. 08], article dans lequel V.Gritsenko et F.Cléry étudient le cas des sous-groupes de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$. Une généralisation des relèvements arithmétiques pour les groupes orthogonaux peut être trouvée dans [V. 96a] et pour les groupes paramodulaires dans [V. 96b]. Le relèvement exponentiel quant à lui a été mis à jour en 1995 par R.Borcherds dans l'article [Bor95], ce relèvement permet notamment d'écrire une forme modulaire comme un produit infini. Cette méthode a été largement reprise et en particulier dans [V. 96b] et [Des06] pour obtenir, par exemple, des formules du type du dénominateur. Dans tous les cas les expressions obtenues font apparaître les coefficients de Fourier de la forme de Jacobi relevée.

Dans le cas du relèvement exponentiel, une forme modulaire de Jacobi particulière intervient systématiquement : la fonction θ de Jacobi. Cette fonction est une forme modulaire de Jacobi de poids singulier $\frac{1}{2}$, d'indice $\frac{1}{2}$ et de système multiplicatif v_η^3 pour tout le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$. Cette fonction est aussi une solution non triviale de l'équation de la chaleur et elle possède un expression sous forme exponentielle qui fait intervenir toutes les séries d'Eisenstein ainsi que la fonction η de Dedekind. La fonction θ et la fonction η de Dedekind permettent de construire de nombreuses formes de Jacobi, de poids, d'indice et de systèmes multiplicatifs différents.

Dans cette thèse, nous déterminons la nature des coefficients de Taylor des formes modulaires de Siegel de genre 2 et dans les cas de relèvements arithmétiques et exponentiels, nous donnons l'expression de ces coefficients en fonction des coefficients de Taylor de la forme de Jacobi relevée. Dans ce but, nous nous attacherons à définir des opérateurs de Hecke pour les formes quasi-modulaires et nous étudierons l'action de ces opérateurs. Nous ferons aussi une étude spécifique de la fonction théta de Jacobi : les propriétés que nous avons énoncés à son propos nous permettent de déterminer son développement de Taylor en $z = 0$. Enfin, comme les formes modulaires de Siegel sont un cas particulier des formes modulaires pour les groupes orthogonaux attachés aux réseaux de signature $(2, n)$, nous étendrons nos résultats à ces formes.

Dans le premier chapitre, nous rappelons le concept de formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})$ et nous étendons la définition et l'action des opérateurs de Hecke $T(m)$ aux formes quasi-modulaires. Une partie de ces résultats avait été énoncée dans l'article de Movasati [H.M08]. Nous donnons une démonstrations des résultats énoncés, une autre preuve des propositions énoncées et nous précisons l'action des formes modulaires de Hecke $T(m)$ sur les série d'Eisenstein. De plus nous introduisons de nouvelles fonctions : les formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$ qui sont une généralisation à deux variables des fonctions précédentes. Nous analysons les propriétés de ces fonctions, leur structure et nous en donnons des générateurs.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons la définition et des propriétés des formes modulaires de Jacobi pour $SL(2,\mathbb{Z})$. En particulier, nous rappelons la structure de ces formes quand le poids est pair et l'indice égal à 1. Dans cette étude, nous utilisons la correction automorphe introduite par V.Gritsenko en 1999 dans l'article [Gri99] pour déterminer explicitement les premiers coefficients de Taylor en $z = 0$ des générateurs $E_{4,1}$ et $E_{6,1}$ de l'anneau des formes de Jacobi d'indice 1. Nous menons aussi un étude spécifique de la fonction θ de Jacobi en déterminant par exemple son développement de Taylor en $z = 0$ de deux manières différentes : d'une part grâce à sa forme exponentielle et d'autre part grâce au fait la fonction théta de Jacobi soit solution de l'équation de la chaleur.

Dans le troisième chapitre, nous établissons que les coefficients de Taylor en $z = 0$ des formes modulaires de Siegel de genre 2 sont des formes quasi-modulaires sur $SL(2, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z})$. De plus nous donnons l'expression de ces coefficients ou en tout cas des premiers coefficients en fonctions des coefficients de Taylor des fonctions relevés dans le cas des relèvements. Nous traitons en particulier les fonctions Δ_1, Δ_2 et Δ_5 qui peuvent se voir comme des généralisations à trois variables de la fonction η de Dedekind et que nous pouvons trouver dans [V. 96b]. Nous nous intéressons aussi aux coefficients de Taylor de la fonction χ_{35} d'Igusa que nous pouvons trouver dans [Igu62], cette fonction est la première forme modulaire de Siegel de genre 2 de poids impair. Pour calculer ses premiers coefficients de Taylor en $z = 0$, nous nous servons de la fonction Δ_{35}, que nous pouvons trouver dans [V. 96c] et qui diffère de χ_{35} par un coefficient multiplicatif, ainsi que du carré de χ_{35} qui est alors une forme modulaire de Siegel de poids pair.

Le quatrième chapitre consiste en des rappels des propriétés des formes modulaires de Jacobi définies relativement à un réseau quadratique pair positif, propriétés que nous pouvons trouver dans l'article suivant [V. 91]. Nous utilisons les méthodes mis en place à la partie 2 pour décrire des développements de Taylor. De plus nous introduisons les formes quasi-modulaires faibles de Jacobi, nous étudions leurs propriétés et nous montrons que leur comportement ressemblent sur de nombreux points au comportement de formes quasi-modulaires pour $SL(2, \mathbb{Z})$: ces formes apparaissent dans les développements de Taylor par rapport à un sous réseau de L_0. En particulier, nous montrons que les formes quasi-modulaires faibles de Jacobi ont un comportement similaire au formes quasi-modulaires : l'ensemble des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi constitue un module libre de rang 1 sur l'ensemble des formes modulaires faibles de Jacobi avec pour générateurs la série d'Eisenstein G_2. Dans cette partie, nous calculons explicitement les premiers coefficients de Taylor en $z = 0$ et par rapport à un sous réseau $\mathbb{A}_1$ de $\mathbb{A}_2$ de la forme de Jacobi de poids -3 et d'indice 1 $a_{-3,1}$, introduite dans l'article suivant [Des06].

Dans le dernier chapitre, nous faisons essentiellement deux choses : nous généralisons les études que nous avons menées sur les formes modulaires de Siegel aux formes modulaires pour les groupes orthogonaux et nous étudions la nature des coefficients de Taylor lorsque nous développons par rapport à un sous réseau de L_0. Dans ce dernier cas nous introduisons un nouveau type de formes quasi-modulaires et nous donnons des méthodes pour en construire. Comme dans le cas des formes modulaires de Siegel, nous étudions les cas des relèvements arithmétiques et exponentiels dont nous pouvons trouver la théorie dans [Gri94] et [Des06] par exemple. Nous faisons également le calcul explicite des premiers coefficients de Taylor en $z = 0$ de la fonction obtenue par le relèvement arithmétique de la forme modulaire de Jacobi $\Delta.a_{-3,1}$.

Dans cette thèse, nous avons déterminé la nature "modulaire" des différents développements de Taylor d'une forme modulaire pour les groupes orthogonaux attachés à un réseau de signature $(2, n)$. Nous avons également donné des expressions explicites des coefficients de Taylor dans le cas des relèvements arithmétiques et exponentiels en utilisant les expressions de l'action des opérateurs de Hecke sur les formes quasi-modulaires pour $SL(2, \mathbb{Z})$. Enfin nous avons montré le lien étroit entre les développements de Taylor et les formes quasi-modulaires.

Première partie

Formes quasi-modulaires classiques et extension

Chapitre 1

Formes quasi-modulaires

1.1 Formes quasi-modulaires et opérateur de Hecke

1.1.1 Définitions et actions des opérateurs de Hecke

Nous commençons par rappeler des propriétés sur les formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})$. Tout d'abord, nous rappelons la définition d'une forme quasi-modulaire.

Définition 1 *Soient k et s deux entiers positifs. Une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est une forme quasi-modulaire de poids k s'il existe $f_0, f_1, .., f_s$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$ vérifiant une condition de croissance tempérée :*

$$\forall 1 \leq i \leq s, \exists \alpha_i \geq 0, f_i(\tau) \ll (\frac{y}{1+|z|^2})^{-\alpha_i} \tag{1.1}$$

et telles que pour tout τ dans $\mathbb{H}$ et :

$$(c\tau+d)^{-k} f\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\big) = \sum_{i=0}^{s} f_i(\tau)\big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^i \tag{1.2}$$

pour tout τ dans $\mathbb{H}$ et toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$. Nous supposons de plus que f vérifie elle-même une condition de croissance tempérée. Si la fonction f_s est non identiquement nulle, nous dirons que f est de profondeur s.

Nous noterons $QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ l'ensemble des formes quasi-modulaires de poids k et de profondeur au plus s et nous noterons $QM_k(Sl_2(\mathbb{Z}))$ l'ensemble des formes quasi-modulaires de poids k. La profondeur et le poids sont reliés par l'inégalité suivante :

Lemme 1 *Soit f une forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur s alors nous avons :*

$$2s \leq k$$

De plus le poids k est forcement pair.
Une autre propriété immédiate des formes quasi-modulaires est leur stabilité par rapport à l'opérateur différentiel D défini par :

$$D = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}$$

Plus précisément, nous avons la propriété suivante :

Proposition 1 *L'opérateur D est une injection de $QM_k^{\leq s}(SL_2(\mathbb{Z}))$ dans $QM_{k+2}^{\leq s+1}(SL_2(\mathbb{Z}))$*

Le premier exemple de forme quasi-modulaire est la série d'Eisenstein G_2 définie par :

$$G_2(\tau) = -\frac{1}{24} + \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) q^n,$$

avec $\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}$. Elle possède la propriété de transformation suivante par rapport à $SL(2,\mathbb{Z})$:

$$G_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2 G_2(\tau) - \frac{1}{4i\pi} c(c\tau+d)$$

Cette fonction joue une rôle très important dans la structure des formes quasi-modulaires. En effet, nous avons :

Proposition 1 *Soit $f \in QM_k(Sl_2(\mathbb{Z}))$, nous pouvons écrire f sous la forme :*

$$f = \sum_{i=0}^{s} F_i G_2^i,$$

avec les F_i qui sont des formes modulaires de poids $k-2i$.

De cette proposition, nous pouvons déduire la proposition suivante :

Corollaire 1 *L'espace $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]$ est un espace vectoriel de dimension finie, nous noterons sa dimension n_k et nous avons :*

$$n_k = \begin{cases} 0, & si\ k\ est\ impair \\ \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} dim(M_{k-2i}(SL_2(\mathbb{Z})), & si\ k\ est\ pair \end{cases}$$

Finalement, nous pouvons résumer ce que nous venons de rappeler de la façon suivante :

Proposition 2 *Si nous appelons $QM[SL_2(\mathbb{Z})]$ l'ensemble des formes quasi-modulaires, alors :*

$$QM[SL_2(\mathbb{Z})] = M_*[G_2] = \mathbb{C}[G_2, G_4, G_6]$$

Ces rappels effectués, nous pouvons maintenant définir deux opérateurs qui agissent sur l'espace des formes quasi-modulaires. Le premier est la multiplication par la série d'Eisenstein G_2, que nous écrirons $G_2\bullet$, et le second est l'opérateur $D = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}$: ces deux opérateurs vivent clairement dans $M_*[G_2]$.
Nous allons regarder l'action de D sur G_2 et sur $G_2\bullet$:

Proposition 3

$$D(G_2) = -2G_2^2 + \frac{5}{6} G_4 \tag{1.3}$$

$$D(G_2\bullet) = -2G_2^2 \bullet + \frac{5}{6} G_4 \bullet + G_2 D(\bullet) \tag{1.4}$$

Preuve: Pour la première égalité, il suffit de considérer la fonction $D(G_2) + 2G_2^2$ et de montrer qu'elle est modulaire. Pour l'action des matrices de $SL(2, \mathbb{Z})$, il suffit d'écrire les formules pour les deux fonctions de la différence et la conclusion est immédiate. La condition à l'infini est directe sachant qu'elle est vraie pour $G_2(\tau)$ et par conséquent elle l'est pour sa dérivée et pour son carré. Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver la valeur à l'infini de la fonction $D(G_2) + 2G_2^2$: il reste alors de la comparer à celle de la fonction G_4 et comme l'espace des formes modulaires de poids 4 est de dimension 1, l'égalité s'en déduit directement.
La deuxième égalité est une conséquence directe de la première et de la formule de dérivation d'une produit. ■

Ces deux opérateurs ne laissent pas stable l'espace des formes modulaires, mais grâce à eux nous allons introduire des suites d'opérateurs qui laissent stable l'espace des formes modulaires :

Proposition 4 *Pour $k \geq 4$, nous définissons :*

$$D_k = D + 2kG_2 \bullet : M_k \longmapsto M_{k+2} \tag{1.5}$$

Preuve: La démonstration de cette preuve consiste simplement en une réécriture des propriétés de transformations modulaires des fonctions qui interviennent, par conséquent nous ne la détaillons pas. ■

Ces derniers opérateurs vont nous être très utiles dans les calculs explicites que nous serons amenés à faire par la suite.
Nous allons maintenant rappeler la notion d'opérateurs de Hecke sur les formes modulaires : ces opérateurs sont uniquement déterminés pour des formes modulaires mais nous allons voir que nous pouvons étendre leur définition aux formes quasi-modulaires.

Définition 2 *Soit m un entier plus grand que 1, l'opérateur $T(m)$ qui agit les formes modulaires f de poids k est défini de la façon suivante :*

$$T(m)(f)(\tau) = \sum_{\substack{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \backslash M_2(\mathbb{Z}) \\ ad-bc=m}} (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

Ces opérateurs envoient une forme modulaire de poids k sur une forme modulaire de poids k.

Le fait que ces opérateurs soient bien définis pour des formes modulaires découle des propriétés des formes modulaires tout comme pour le fait qu'ils envoient une forme modulaire sur une forme modulaire de même poids. Par contre, ces opérateurs ne sont pas définis pour des formes quasi-modulaires : nous allons utiliser une autre expression de ces opérateurs. Nous avons besoin du lemme suivant que nous pouvons trouver dans [Ser70] :

Lemme 2 *Soit S_m l'ensemble des matrices à entrées entière de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, avec $ad = m$, $a \geq 1$ et $0 \leq b < d$. Si $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est dans S_m, soit Γ_σ le sous-réseau du réseau Γ, de base (w_1, w_2), qui a pour base :*

$$\begin{aligned} w'_1 &= aw_1 + bw_2 \\ w'_2 &= dw_1, \end{aligned}$$

L'application qui à σ associe Γ_σ est une bijection de S_m dans l'ensemble $\Gamma(n)$ des sous-réseau d'indice m.

De ce lemme, nous déduisons une nouvelle expression des opérateurs $T(m)$:

Corollaire 2 *Soit f une forme modulaire de poids k et m un entier plus grand que 1, nous avons :*

$$T(m)(f)(\tau) = m^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1 \\ ad=m \\ b[d]}} d^{-k} f(\frac{a\tau + b}{d})$$

Cette nouvelle expression des opérateurs de Hecke va nous permettre d'étendre l'action des opérateurs de Hecke aux formes quasi-modulaires. En effet, les sommes que nous venons d'écrire sont bien définies du moment que la fonction f soit périodique de période 1 : ces sommes ont donc un sens si la fonction f est quasi-modulaire de poids k mais pour l'instant, nous ne savons pas quel est le comportement de la fonction $T(m)(f)$.

Définition 3 *Soit k et m deux entiers non nuls. Soit f une fonction de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]$, nous définissons sur cet espace des opérateurs, que nous continuerons à appeler opérateurs de Hecke, de la façon suivante :*

$$T(m)(f)(\tau) = m^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1 \\ ad=m \\ b[d]}} d^{-k} f(\frac{a\tau + b}{d})$$

Les fonctions $T(m)(f)$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$; si de plus f est une forme modulaire, ces fonctions sont des formes modulaires de poids k

Nous allons maintenant voir que ces fonctions $T(m)(f)$ sont en fait des formes quasi-modulaires de poids k, de plus si le poids de f est s le poids de $T(m)(f)$ sera aussi s. Par la même occasion, nous verrons que les propriétés des opérateurs de Hecke dans le cas des formes modulaires s'étendent au cas des formes quasi-modulaires.
Tout d'abord nous allons commencer par montrer que les images des formes quasi-modulaires par ces opérateurs possèdent un développement de Fourier et qu'elles sont holomorphes à l'infini.

Proposition 2 *Soit f une forme quasi modulaire de poids k dont le développement en série de Fourier est le suivant : $f(\tau)=\sum_{n\geq 0}c(n)q^n$. Nous avons :*

$$T(m)(f)(\tau)=\sum_{n\geq 0}\gamma(n)q^n \ \text{ où } \gamma(n)=\sum_{\substack{a\geq 1\\ a|(n,m)}}a^{k-1}c(\frac{nm}{a^2}) \tag{1.6}$$

$$T(r)T(q)=T(rq) \quad \text{où } (r,q)=1 \tag{1.7}$$

Preuve: Pour démontrer la première propriété, nous procédons exactement comme dans [Ser70] : le fait que f soit ou pas une forme modulaire n'intervient pas dans la démonstration, il suffit seulement que f soit périodique de période 1.
Soit r et q deux entiers non nuls premiers entre eux, nous avons pour f une forme quasi-modulaire de poids k :

$$\begin{aligned} T(r)\big(T(q)(f)\big) &= r^{k-1}\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=r\\ b[d]}}d^{-k}\Bigg(q^{k-1}\sum_{\substack{a'\geq 1\\ a'd'=q\\ b'[d']}}d'^{-k}f(\frac{a\frac{a'\tau+b'}{d'}+b}{d})\Bigg)\\ &= (rq)^{k-1}\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=r\\ b[d]}}\sum_{\substack{a'\geq 1\\ a'd'=q\\ b'[d']}}(dd')^{-k}f(\frac{aa'\tau+bd'+ab'}{dd'}) \end{aligned}$$

Comme r et q sont premiers entre eux, nous avons a et a' premiers entre eux ainsi que d et d' : ainsi la double somme sur $ad=r$ et $a'd'=q$ peut se ramener à une unique somme sur $a''d''=rq$. Il reste maintenant à voir que $bd'+ab'$ parcourt une seule fois la classe d'équivalence modulo dd' quand b et b' parcourent leur classe d'équivalence respective.
Supposons qu'ils existent b,b_1 modulo d et b',b'_1 modulo d' tels que :

$$bd'+ab'=b_1d'+ab'_1[dd']$$

Nous en déduisons que ab'_1 et ab' sont égaux modulo d' or, comme a et d' sont premiers entre eux, on en déduit que b et b' sont égaux modulo d. Par conséquent $bd'+ab'$ parcourt une seule fois la classe d'équivalence modulo dd' quand b et b' parcourent leur classe d'équivalence respective. Nous en déduisons que :

$$T(r)\big(T(q)(f)\big)=(rq)^{k-1}\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=rq\\ b[d]}}f(\frac{a\tau+b}{d})=T(rq)(f)$$

■

De cette propriété, nous pouvons déduire l'action des opérateurs $T(m)$ sur la forme quasi-modulaire $G_2(\tau)$:

Proposition 5 *Pour un entier m plus grand que 1, l'action des opérateurs $T(m)$ sur la forme quasi-modulaire $G_2(\tau)$ est la multiplication par $\sigma_1(m)$.*

Preuve: D'après les propriétés précédentes, il suffit de montrer ce fait sur les m de la forme p^l avec l plus grand que 1. Nous noterons $\gamma_{p^l}(n)$ le n-ième coefficient de Fourier de l'image par $T(m)$ de G_2 et d'après ce que nous avons vu son expression est la suivante :

$$\gamma_{p^l}(n) = \sum_{\substack{a \geq 1 \\ a|(n,p^l)}} ac(\frac{nm}{a^2})$$

Le cas où n vaut 0 est clair comme le cas ou n est premier à p. Nous supposons dorénavant que $n = kp^r$ où k est un entier strictement positif et r une entier plus grand que 1. Nous pouvons récrire l'expression des coefficients de Fourier dans ce cas précis :

$$\gamma_{p^l}(kp^r) = \sum_{i=0}^{min(l,r)} p^i\sigma_1(\frac{p^l kp^r}{p^{2i}}) = \sum_{i=0}^{min(l,r)} p^i\sigma_1(k)\sigma_1(p^{l+r-2i})$$

Nous avons deux cas à traiter suivant que $r \leq l$ ou $l \leq r$.
Supposons d'abord que $r \leq l$, la somme devient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{r} p^i\sigma_1(k)\sigma_1(p^{l+r-2i}) = \sigma_1(k)\sum_{i=0}^{r} p^i\sigma_1(p^{l+r-2i}) \\
&= \sigma_1(k)\sum_{i=0}^{r} p^i \sum_{j=0}^{l+r-2i} p^j \\
&= \sigma_1(k)\sum_{i=0}^{r} p^i\frac{1-p^{l+r-2i+1}}{1-p} \\
&= \sigma_1(k)\sum_{i=0}^{r} \frac{p^i}{1-p} - \frac{p^{l+r-i+1}}{1-p} \\
&= \sigma_1(k)\frac{1-p^{r+1}}{1-p}\frac{1-p^{l+1}}{1-p} \\
&= \sigma_1(k)\sigma_1(p^r)\sigma_1(p^l) = \sigma_1(p^l)\sigma_1(n)
\end{aligned}$$

Nous avons donc l'égalité désirée pour ce cas de figure. Il nous resterait à traiter le cas $l \leq r$ mais comme les calculs sont exactement les mêmes, nous ne le détaillons pas. Nous avons donc la proposition voulue.

■

Nous allons maintenant étudier le lien entre l'opérateur D qui laisse invariant l'espace des formes modulaires et les opérateurs de Hecke pour les formes quasi-modulaires.

Proposition 6 *Soit f une forme quasi-modulaire de poids $2k$, dont le développement de Fourier est $f(\tau) = \sum_{n\geq 0} c(n)q^n$, i et m deux entiers plus grands que 1. Nous avons :*

$$T(m)(D^i(f))(\tau) = m^i D^i(T(m)(f))(\tau)$$

Preuve: Pour montrer ce fait, il suffit de d'écrire les formules :

$$T(m)(f)(\tau) = \sum_{n\geq 0}\big(\sum_{\substack{a\geq 1\\ a|(n,m)}} a^{2k-1}c(\frac{nm}{a^2})\big)q^n$$

$$D^i(f)(\tau) = \sum_{n\geq 1} n^i c(n) q^n$$

$$D^i(T(m)(f))(\tau) = \sum_{n\geq 1}\left(n^i \sum_{\substack{a\geq 1\\ a|(n,m)}} a^{2k-1}c(\frac{nm}{a^2})\right)q^n$$

$$T(m)(D^i(f))(\tau) = \big(\sum_{\substack{a\geq 1\\ a|(n,m)}} a^{2k+2i-1}\big(\frac{nm}{a^2}\big)^i(\frac{nm}{a^2})\big)q^n = m^i D^i(f)(\tau)$$

■

Cette proposition nous permet de connaître exactement l'image par les $T(m)$ de certaines fonctions de l'espace des formes quasi-modulaires :

Corollaire 3 *Soit m et q deux entiers plus grands que 1. Les fonctions $D^k(G_{2q})$ sont des éléments de l'espace $QM_{2q+2k}^{\leq 2k}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ et elles sont des vecteurs propres de valeurs propres $m^k\sigma_{2k-1}(m)$ pour les opérateurs $T(m)$.*

Nous venons donc de montrer que l'opérateur $T(m)$ envoie la dérivée i-ème d'une série d'Eisenstein de poids $2k$ dans l'espace des formes quasi modulaire de poids $2k+2i$.
Le théorème suivant nous donne l'image par les opérateurs $T(m)$ des formes quasi-modulaires de poids k et de profondeur s.

Théorème 1 *Soit m, un entier plus grand que 1 et k, s deux entiers positifs , nous avons :*

$$T(m)(QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))) \subseteq QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$$

Preuve: Il est clair que la formule est vraie pour k nul. Nous allons maintenant montrer la formule suivante pour tout k et s entiers positifs ($k \neq 0$) et toute forme modulaire F_k de poids k :

$$D^s(F_k) = Q_s + (-1)^s 2^s \frac{(k+s-1)!}{(k-1)!} G_2^s F_k,$$

où Q_s est un élément de $QM_{k+2s}^{\leq s-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$. Pour montrer cette formule, nous procédons par récurrence sur s à k fixé. La propriété est vraie au rang $s=0$ et au rang $s=1$ et dans ce dernier cas il suffit de considérer l'opérateur D_k. Supposons que la propriété soit vraie pour un rang $s\geq 1$ et regardons si la propriété est vraie au rang $s+1$:

$$D^{s+1}(F_k) = D(D^s(F_k)) = D(Q_s) + (-1)^s 2^s \frac{(k+s-1)!}{(k-1)!} D(G_2^s F_k)$$

$$D(G_2^s F_k) = -2(k+s)G_2^{s+1}F_k + G_2^s F_{k+2} + \frac{5}{6} s G_2^{s-1} G_4 F_k,$$

où F_{k+2} est une forme modulaire de poids $k+2$. Nous posons :

$$Q_{s+1} = D(Q) + (-1)^s 2^s \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!} G_2^s F_{k+2} + (-1)^s 2^s \frac{(k+s-1)!}{(k-1)!} \frac{5}{6} s G_2^{s-1} G_4 F_k,$$

d'après ce que nous avons fait précédemment, il est clair que cet élément est dans -$QM_{k+2(s+1)}^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$: la formule s'en déduit directement. Nous pouvons maintenant nous occuper de l'inclusion qui nous intéresse. D'après la structure des formes quasi-modulaires, il suffit de montrer l'inclusion suivante pour tout F_k formes modulaires de poids $k \neq 0$:

$$T(m)(E_2^s F_k) \in QM_{k+2s}^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z})),$$

pour tout s entier plus grand que 1 ; nous avons pas besoin de montrer ce fait pour $k=0$, cela est une conséquence directe de la proposition 3.
Nous procédons par récurrence sur s avec k fixé. Le cas $s=0$ est clair, puisque nous sommes alors ramenés aux formes modulaires. Pour le cas $s=1$, nous utilisons la proposition qui nous dit que $D(F_k)$ est dans $QM_{k+2}^{\leq 1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ et l'égalité que nous avons démontrée précédemment nous permet de conclure. Supposons que pour $s \geq 1$ nous ayons $T(m)(E_2^s F_k) \in QM_{k+2s}^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ pour tout F_k formes modulaires de poids k : regardons ce qu'il se passe pour le rang suivant. Nous écrivons :

$$D^{s+1}(F_k) = Q_{s+1} + (-1)^{s+1} 2^{s+1} \frac{(k+s)!}{(k-1)!} G_2^{s+1} F_k.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le terme Q_{s+1} appartient à $QM_{k+2s}^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ et d'après la proposition 3 le terme $D^{s+1}(F_k)$ appartient à $QM_{k+2s+2}^{\leq s+1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ donc nous en déduisons que $G_2^{s+1} F_k$ est un élément de l'ensemble $QM_{k+2s+2}^{\leq s+1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$. La récurrence est établie et nous avons bien démontré l'inclusion désirée.

■

1.1.2 Exemples de calculs

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à plusieurs choses : tout d'abord, nous étudierons la stabilité de l'espace $\Delta QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ par rapport aux opérateurs $T(m)$, ensuite nous déterminerons les images des séries d'Eisenstein par les opérateurs D et enfin nous donnerons les images par les $T(m)$ des éléments de la formes $G_2^n G_{2k}$.
La première forme quasi-modulaire dont nous allons donner l'image par rapport aux opérateurs de Hecke est $G_2 \Delta$:

Proposition 7 *Pour tout m plus grand que 1 :*

$$T(m)(G_2\Delta) = m\tau(m) G_2 \Delta.$$

Preuve: D'après ce que nous avons vu précédemment, la fonction :

$$D(\Delta) + 24 G_2 \Delta$$

est une forme modulaire de poids 14 et en étudiant l'holomorphie en l'infini nous nous rendons compte que cette fonction est parabolique : par conséquent elle est nulle puisque la seule forme parabolique de poids 14 est la fonction identiquement nulle. Ainsi, nous avons :

$$D(\Delta) = -24G_2\Delta,$$

nous en déduisons les égalités suivantes :

$$T(m)(D(\Delta)) = m\tau(m)D(\Delta) = m\tau(m)(-24G_2\Delta) = -24T(m)(G_2\Delta).$$

L'égalité que nous avons énoncée s'en déduit immédiatement. ■

De cette égalité et de la valeur de $D(\Delta)$, nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 4 *Pour tout m plus grand que 1 :*

$$T(m)(\Delta QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))) \subset \Delta QM_{k+2}^{\leq s+1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$$

Preuve: Il suffit de montrer que pour tout n positif et tout élément F de $QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$, nous avons

$$T(m)(\Delta G_2^n F) \in \Delta QM_{k+2n}^{\leq s+n}(Sl_2(\mathbb{Z}))$$

La démonstration que nous avons avons donné dans la partie précédente nous assure l'appartenance de $T(m)(\Delta G_2^n F)$ à l'ensemble $QM_{k+12+2n}^{\leq s+n}(Sl_2(\mathbb{Z}))$, nous devons maintenant montrer qu'elle peut être factorisée par Δ. Pour cela, nous allons procéder par récurrence sur n, le rang 1 et 2 étant déja démontré. Supposons que pour le rang n, nous avons :

$$T(m)(\Delta G_2^n F) \in \Delta QM_{k+2n}^{\leq s+n}(Sl_2(\mathbb{Z}))$$

pour tout fonction F de $QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ et pour tout k. Nous avons pour n plus grand que 1 :

$$D(G_2^n\Delta F) = nG_2^{n-1}\big(-2G_2^2 + \frac{5}{6}G_4\big)\Delta F + G_2^n D(F)\Delta - 24G_2^{n+1}\Delta F$$
$$G_2^{n+1}\Delta F = \frac{1}{2n+24}\bigg(-D(G_2^n\Delta F) + \frac{5n}{3}G_4\Delta G_2^{n-1} + G_2^n\Delta D(F)\bigg).$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} T(m)(G_2^{n+1}\Delta F) =& \frac{1}{2n+24}\bigg(-mD(T(m)(G_2^n\Delta F)) + \frac{5n}{3}T(m)(G_4\Delta G_2^{n-1}) \\ &+ T(m)(G_2^n\Delta D(F))\bigg). \end{aligned}$$

Les deux derniers éléments de la parenthèse sont bien dans l'espace $\Delta QM_{k+2n+2}^{\leq s+n+1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$, il suffit de monter la même chose pour l'élément $mD(T(m)(G_2^n\Delta F))$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction H de l'espace $\Delta QM_{k+2n}^{\leq s+n}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ telle que :

$$T(m)(G_2^n\Delta F) = \Delta H,$$

de plus, D agit sur cette fonction de la façon suivante :

$$D(\Delta H) = -24G_2\Delta H + \Delta D(H)$$

Cette égalité établie, la récurrence s'en déduit rapidement. Par conséquent, nous avons bien montré l'inclusion du corollaire. ■

Cette démonstration donne les prémices des méthodes que nous allons utiliser pour calculer les images par les $T(m)$ des éléments $G_2^n F$ où F est une forme modulaire de poids k : elle montre l'importance que l'opérateur D jouera dans le calcul. Nous pouvons donner la proposition suivante :

Proposition 8 *Soit F une forme modulaire de poids $2k$ et n un entier plus grand que 1, nous avons :*

$$D^n(F) = (-2)^n \frac{(2k+n-1)!}{(2k-1)!} G_2^n F + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n} G_{2k+2n-2i} G_2^i + \Delta F_n,$$

avec F_n un élément de $QM_{2k+2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$. Pour m plus grand que 1, nous avons les identités suivantes :

$$T(m)(G_2^n F) = \frac{(-2)^{-n}(2k-1)!}{(2k+n-1)!} \left[m^n D(T(m)(F)) - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n} T(m)(G_{2k+2i} G_2^{n-i}) - T(m)(\Delta F_n) \right]$$

Preuve: Nous avons deux choses à justifier dans cette proposition : la décomposition de $D^n(F)$ et l'identité concernant les $T(m)$. La décomposition de $D^n(F)$ repose sur le fait suivant :

$$D(F) + 4kFG_2 \in M_{2k+2}(SL(2,\mathbb{Z}))$$

et le terme de $M_{2k+2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ peut s'écrire comme la combinaison linéaire de G_{2k+2} et d'un élément du type ΔF_1 où F_1 est dans $M_{2k+2-12}(SL(2,\mathbb{Z}))$. Ensuite pour obtenir la décomposition de la proposition, il suffit d'itérer le calcul.
Maintenant en ce qui concerne $T(m)(G_2^n F)$, il suffit d'utiliser le fait suivant :

$$T(m)(D^n(F)) = m^n D(T(m)(F))$$

et nous obtenons la formule désirée en sommant convenablement les termes.
■

Cette proposition montre que le calcul des éléments du type $T(m)(G_2^n F)$ avec F une forme modulaire de poids $2k$ est récursive : en effet elle nécessite de connaître les éléments du type $T(m)(G_2^i G_{2k+2n-2i})$ pour i entre 0 et $n-1$. Par conséquent, nous allons maintenant nous intéresser au calculs des images des $G_2^n G_{2k}$ par les $T(m)$ et pour cela nous allons étudier les dérivées n-ième des séries d'Eisenstein modulo un facteur de Δ pour k plus grand que 1.

Proposition 9 *Pour n et k plus grands que 1, nous avons l'égalité suivante :*

$$D^n(G_{2k}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-2)^n}{24^i} \binom{n}{i} \frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}} (2k+2i) \frac{(2k+n-1)!}{(2k)!} G_2^{n-i} G_{2k+2i} + \Delta F_n,$$

où F_n est un élément de $\Delta QM_{2k+2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$.

Preuve: Nous allons procéder par récurrence sur $n \geq 1$: le rang $n = 1$ nous est donné par la formule suivante vraie pour tout les k plus grand que 2 :

$$D(G_{2k}) + 4kG_{2k}G_2 \in M_{2k+2}(SL(2,\mathbb{Z}))$$

et en identifiant les coefficients de Fourier, nous trouvons :

$$D(G_{2k}) + 4kG_{2k}G_2 = -\frac{1}{6}(k+1)\frac{B_{2k}}{B_{2k+2}}G_{2k+2} + \Delta F_1,$$

où F_1 est un élément de $M_{2k+2-12}(Sl_2(\mathbb{Z}))$. Soit $n \geq 1$ et supposons maintenant la propriété vraie pour tout les i entre 1 et n et tout les k plus grand que 1. Considérons maintenant le rang $n+1$, pour cela nous exprimons la dérivée $n+1$-ième :

$$\begin{aligned}
&D^{n+1}(G_{2k}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-2)^n}{24^i}\binom{n}{i}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}}(2k+2i)\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!}D(G_2^{n-i}G_{2k+2i}) + D(\Delta F_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-2)^n}{24^i}\binom{n}{i}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}}(2k+2i)\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!}\Big[(n-i)(-2G_2^2 + \frac{5}{6}G_4)G_2^{n-i-1}G_{2k+2i} \\
&\quad + G_2^{n-i}\big(-\frac{1}{6}(k+1+i)\frac{B_{2k+2i}}{B_{2k+2i+2}}G_{2k+2i+2} + \Delta F_1 - 4(k+i)G_{2k}G_2\big)\Big] \\
&\quad + \Delta(-24G_2F_n + D(F_n))
\end{aligned}$$

Le terme $-24G_2F_n + D(F_n)$ sera noté F_{n+1} et c'est bien un élément de $QM^{\leq n}_{2k+2n+2-12}(Sl_2(\mathbb{Z}))$; nous devons maintenant expliciter la somme au dessus de ce terme en faisant plusieurs changements de variables, finalement nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&D^{n+1}(G_{2k}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-2)^n}{24^i}\binom{n}{i}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}}(2k+2i)\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!}(-4k-2i-2n)G_2^{n+1-i}G_{2k+2i}) \\
&-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-2)^n}{24^{i-1}}\binom{n}{i-1}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}}(2k+2i-2)\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!}(k+i)G_2^{n+1-i}G_{2k+2i} \\
&+\frac{2}{24^2}\sum_{i=2}^{n+1} \frac{(-2)^n}{24^{i-2}}\binom{n}{i-2}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}}(2k+2i)(n-i+2)\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!}G_2^{n+1-i}G_{2k+2i}
\end{aligned}$$

Nous n'allons pas traiter séparément les cas $i = 0, 1, n+1$ alors qu'en toute rigueur il devrait l'être cependant la méthode pour s'en occuper est contenue dans le cas $2 \leq i \leq n+1$ que nous allons traiter en détails. A la lumière de l'égalité précédente, nous pouvons affirmer que devant le terme $G_2^{n+1-i}G_{2k+2i}$ nous avons le coefficient suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{(-2)^n}{24^i}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}}\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!}\binom{n+1}{i}\frac{(2k+2i)}{n+1}\Big((n+1-i)(-4k-2i-2n) \\
&-2(2k+2i-2)i + 2i(i-1)\Big) \\
&= \frac{(-2)^n}{24^i}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}}\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!}\binom{n+1}{i}\frac{(2k+2i)}{n+1}(-2(n+1)(2k+n)),
\end{aligned}$$

ce terme est bien celui que nous désirions obtenir : la récurrence est donc établie.
■

L'expression que nous venons d'obtenir nous permet d'écrire la formule suivante :

Proposition 10 *Pour n plus grand que 1 et m plus grand que 1, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
&T(m)(G_2^n G_{2k}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{k+i}{k} \binom{n}{i} \frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}} \frac{1}{24^i} \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \sigma_{2k-1+2j}(m) m^{n-j} \right) G_{2k+2i} G_2^{n-i} + \Delta F_n,
\end{aligned}
$$

où F_n est un élément de $QM_{2k+2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$.

Preuve: Cette décomposition peut se déduire des deux propositions précédentes par itération mais ce n'est pas la manière plus directe : nous allons proposer une démonstration différente, nous allons utiliser les termes du type $D(G_2^i G_{2k})$. Nous procédons par récurrence sur n : pour $n = 1$ les deux propositions précédentes nous donnent immédiatement la formule. Supposons maintenant que la formule est vraie pour $1 \leq i \leq n$ et pour tout k plus grand que 2. Considérons alors le rang suivant en examinant le terme $D(G_2^n G_{2k})$:

$$
\begin{aligned}
D(G_2^n G_{2k}) = &-(4k+2n) G_2^{n+1} G_{2k} - \frac{1}{6}(k+1) \frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}} G_2^n G_{2k+2} \\
&+ \frac{2n}{24^2} G_2^{n-1} G_{2k+4} \frac{k+2}{k} \frac{B_{2k}}{B_{2k+4}} + \Delta F_n,
\end{aligned}
$$

avec F_n un élément de $QM_{2k+2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$. En utilisant l'égalité :

$$T(m)(D(G_2^2 G_{2k})) = mD(T(m)(G_2^n G_{2k})),$$

l'hypothèse de récurrence, une nouvelle sommation et la stabilité de $\Delta QM_{2k+2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ par les $T(m)$, nous obtenons à un élément de $\Delta QM_{2k+2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$ près :

$$
\begin{aligned}
&(4k+2n) T(m)(G_2^{n+1} G_{2k}) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{k+i}{k} \frac{B_{2k}}{B_{2k+2i}} \frac{1}{24^i} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j m^{n+1-j} \right) +,
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\alpha_j = &(4k+2i+2n) \binom{n}{i} \binom{i}{j} + 4(k+i-1) \binom{n-1}{i} \binom{i-1}{j} \\
&- 2(n-i+2) \binom{n}{i-2} \binom{i-2}{j} + 4k \binom{n}{i-1} \binom{i-1}{j-1} + 2n \binom{n-1}{i-2} \binom{i-2}{j-2}.
\end{aligned}
$$

En simplifiant, nous trouvons :

$$\alpha_j = (4k+2n) \binom{n+1}{i}$$

La récurrence est par conséquent établie. ■

Nous allons maintenant donner les images des éléments $G_2^n G_{2k}$ ainsi que les dérivées n-ième des séries d'Eisenstein G_{2k} pour k plus grand que 2 et $2k+2n \leq 14$. Commençons par les dérivées premières :

$$\boxed{D(G_4) = \frac{7}{10}G_6 - 8G_2G_4 \ ; \ D(G_6) = \frac{10}{21}G_8 - 12G_2G_6}$$

$$\boxed{D(G_8) = \frac{11}{30}G_{10} - 16G_2G_8 \ ; \ D(G_{10}) = \frac{2275}{7601}G_{12} - 20G_2G_{10} - \frac{144}{691}\Delta}$$

$$\boxed{D(G_{12}) = \frac{691}{2730}G_{14} - 24G_2G_{12}}$$

L'expression des $T(m)(G_2G_{2k})$:

$$\boxed{T(m)(G_2G_4) = m\sigma_3(m)G_2G_4 - \frac{7}{80}(m\sigma_3(m) - \sigma_5(m))G_6}$$

$$\boxed{T(m)(G_2G_6) = m\sigma_5(m)G_2G_6 - \frac{5}{126}(m\sigma_3(m) - \sigma_7(m))G_8}$$

$$\boxed{T(m)(G_2G_8) = m\sigma_7(m)G_2G_8 - \frac{11}{480}(m\sigma_7(m) - \sigma_9(m))G_8}$$

$$\boxed{T(m)(G_2G_{10}) = m\sigma_9(m)G_2G_{10} - \frac{455}{30404}(m\sigma_9(m) - \sigma_{11}(m))G_{12} + \frac{36}{3455}(m\sigma_9(m) - \tau(m))\Delta}$$

$$\boxed{T(m)(G_2G_{12}) = m\sigma_{11}(m)G_2G_{12} - \frac{691}{65520}(m\sigma_{11}(m) - \sigma_{13}(m))G_{14}}$$

Continuons avec les dérivées secondes :

$$\boxed{D^2(G_4) = 80G_2^2G_4 - 14G_2G_6 + \frac{5}{18}G_8}$$

$$\boxed{D^2(G_6) = 168G_2^2G_6 - \frac{40}{3}G_2G_8 + \frac{11}{72}G_{10}}$$

$$\boxed{D^2(G_8) = -\frac{514}{3455}\Delta + 288G_2^2G_8 - \frac{66}{5}G_2G_{10} + \frac{273}{2764}G_{12}}$$

$$\boxed{D^2(G_{10}) = \frac{6336}{691}G_2\Delta + 440G_2^2G_{10} - \frac{9100}{691}G_2G_{12} + \frac{245}{2592}G_{14}},$$

passons aux $T(m)(G_2^2G_{2k})$:

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^2G_4) = m^2\sigma_3(m)G_2^2G_4 - \frac{7}{40}(m^2\sigma_3(m) - m\sigma_5(m))G_2G_6\\&+\frac{1}{288}\big(m^3\sigma(m) - 2m\sigma_5(m) + \sigma_7(m)\big)G_8\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^2G_6) = m^2\sigma_5(m)G_2^2G_6 - \frac{5}{63}(m^2\sigma_5(m) - m\sigma_7(m))G_2G_8\\&+\frac{11}{12096}\big(m^2\sigma_5(m) - 2m\sigma_7(m) + \sigma_9(m)\big)G_{10}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^2G_8) = m^2\sigma_7(m)G_2^2G_8 - \frac{11}{240}(m^2\sigma_7(m) - m\sigma_9(m))G_2G_{10}\\&+\frac{91}{132672}\big(m^2\sigma_7(m) - 2m\sigma_9(m) + \sigma_{11}(m)\big)G_{12} - \frac{257}{497520}(m^2\sigma_7(m) - \tau(m))\Delta\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^2G_{10}) = m^2\sigma_9(m)G_2^2G_{10} - \frac{455}{15202}(m^2\sigma_9(m) - m\sigma_{11}(m))G_2G_{10}\\&+\frac{1}{3168}\big(m^2\sigma_9(m) - 2m\sigma_{11}(m) + \sigma_{13}(m)\big)G_{14} + \frac{72}{3455}(m^2\sigma_9(m) - m\tau(m))G_2\Delta\end{aligned}}$$

Explicitons maintenant les dérivées troisième :

$$\boxed{D^3(G_4) = -960G_2^3G_4 + 252G_2^2G_6 - 10G_2G_8 + \frac{11}{144}G_{10}}$$

$$\boxed{D^3(G_6) = -2688G_2^3G_6 + 320G_2^2G_8 - \frac{22}{3}G_2G_{10} + \frac{455}{12438}G_{12} - \frac{22}{691}\Delta}$$

$$\boxed{D^3(G_8) = \frac{6168}{691}G_2\Delta - 5760G_2^3G_8 + 396G_2^2G_{10} - \frac{4095}{691}G_2G_{12} + \frac{1}{48}G_{14}}$$

Maintenant au tour des $T(m)(G_2^3G_{2k})$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^3G_4) = m^3\sigma_3(m)G_2^3G_4 + \frac{21}{80}(m^3\sigma_3(m) - m^2\sigma_5(m))G_2^2G_6\\&-\frac{1}{96}\big(2m^2\sigma_5(m) - m^3\sigma_3(m) - m\sigma_7(m))G_2G_8 + \frac{11}{138240}\big(3m^2\sigma_5(m)\\&-3m\sigma_7(m) + \sigma_9(m) - m^3\sigma_3(m)\big)G_{10}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^3G_6) = m^3\sigma_5(m)G_2^3G_6 - \frac{5}{42}(m^3\sigma_5(m) - m^2\sigma_7(m))G_2^2G_8\\&-\frac{11}{4032}\big(2m^2\sigma_7(m) - m^3\sigma_5(m) - m\sigma_9(m))G_2G_{10} + \frac{65}{4776192}\big(3m^2\sigma_7(m)\\&-3m\sigma_9(m) + \sigma_{11}(m) - m^3\sigma_5(m)\big)G_{12} + \frac{11}{928704}(m^3\sigma_5(m) - \tau(m))\Delta\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^3G_8) = m^3\sigma_7(m)G_2^3G_8 - \frac{11}{160}(m^3\sigma_7(m) - m^2\sigma_9(m))G_2^2G_{10}\\&-\frac{91}{88448}\big(2m^2\sigma_9(m) - m^3\sigma_7(m) - m\sigma_{11}(m))G_2G_{12} + \frac{1}{276480}\big(3m^2\sigma_9(m)\\&-3m\sigma_{11}(m) + \sigma_{13}(m) - m^3\sigma_7(m)\big)G_{14} - \frac{257}{165840}(m^3\sigma_7(m) - m\tau(m))\Delta G_2\end{aligned}}$$

Nous continuons maintenant avec les dérivées quatrième :

$$\boxed{\begin{aligned}D^4(G_4) =&13440G_2^4G_4 - 4704G_2^3G_6 + 280G_2^2G_8 - \frac{77}{18}G_2G_{10} + \frac{3185}{199008}G_{12}\\&-\frac{11}{691}\Delta\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}D^4(G_6) =&64512G_2^4G_6 - 7680G_2^3G_8 + 264G_2^2G_{10} - \frac{1820}{691}G_2G_{12} + \frac{1}{144}G_{14}\\&+\frac{1584}{691}G_2\Delta,\end{aligned}}$$

L'expression des $T(m)(G_2^4G_{2k})$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^4G_4) = m^4\sigma_3(m)G_2^4G_4 - \frac{7}{20}(m^4\sigma_3(m) - m^3\sigma_5(m))G_2^3G_6\\&+\frac{1}{48}(m^4\sigma_3(m) + m^2\sigma_7(m) - 2m^3\sigma_3(m))G_2^2G_8 - \frac{1}{34560}(3m^2\sigma_7(m) - 3m^3\sigma_5(m)\\&+m^4\sigma_3(m) - m\sigma_9(m))G_2G_{10} + \frac{91}{76419072}\big(m^4\sigma_3(m) - 4m^3\sigma_5(m) + 6m^2\sigma_7(m)\\&-4m\sigma_9(m) + \sigma_{11}(m)\big)G_{12} + \frac{1}{2^8.3^3.5.7.691}\bigg(9.11.7(m^3\sigma_5(m) - \tau(m))\\&+1799(m^2\sigma_7(m) - \tau(m)) + 5.11.14(m\sigma_9(m) - \tau(m)) - 18.11(m^4\sigma_3(m) - \tau(m))\bigg)\Delta\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&T(m)(G_2^4G_6) = m^4\sigma_5(m)G_2^4G_4 - \frac{5}{42}(m^4\sigma_5(m) - m^3\sigma_7(m))G_2^3G_8\\&+\frac{11}{2680}(m^4\sigma_5(m) + m^2\sigma_{11}(m) - 2m^3\sigma_7(m))G_2^2G_{10} - \frac{65}{53688}(3m^2\sigma_9(m) - 3m^3\sigma_7(m)\\&+m^4\sigma_5(m) - m\sigma_{11}(m))G_2G_{12} + \frac{7}{35831808}\big(m^4\sigma_5(m) - 4m^3\sigma_7(m) + 6m^2\sigma_9(m)\\&-4m\sigma_{11}(m) + \sigma_{13}(m)\big)G_{12} + \frac{1}{2^10.3^2.7.5.691}\bigg(-5.8224(m^3\sigma_7(m) - m\tau(m))\\&-19008(m^2\sigma_9(m) - m\tau(m)) + 5.1584(m^4\sigma_5(m) - m\tau(m))\bigg)\Delta\end{aligned}}$$

Jusqu'à présent nous n'avions traité que le cas des séries d'Eisenstein de poids $2k$ avec k différent de 1, nous allons maintenant traiter ce cas de figure. Comme dans le cas précédent, nous allons avoir besoin des expressions des dérivées successives de G_2, nous avons la relation suivante :

Proposition 11 *Pour n plus grand que 1, nous avons :*

$$\begin{aligned}&D^n(G_2)\\&=(-2)^n n! G_2^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1}(-2)^n n(n+1)!\frac{1}{24^{i+1}}\binom{n-1}{i}\frac{B_2}{B_{4+2i}}G_{2i+4}G_2^{n-1-i} + \Delta F_n,\end{aligned}$$

avec F_n un élément $QM_{2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$

Preuve: La démonstration de cette formule s'effectue par récurrence et nous procédons comme dans le cas des autres séries d'Eisenstein : la clé de cette preuve est l'expression de la dérivée de G_2. ■

De cette proposition, nous déduisons une forme itérative des images par les $T(m)$ des puissances de G_2 :

Proposition 12 *Pour n plus grand que 2 et m plus grand que 1, nous avons :*

$$T(m)(G_2^n) = \frac{1}{(n-1)!(-2)^{n-1}}\Bigg(m^{n-1}\sigma_1(m)D^{n-1}(G_2) - \sum_{i=0}^{n-2}(-2)^{n-1}(n-1)(n)!$$
$$\times \frac{1}{24^{i+1}}\binom{n-2}{i}\frac{B_2}{B_{4+2i}}T(m)(G_{2i+4}G_2^{n-2-i}) - T(m)(\Delta F_{n-1})\Bigg),$$

les notations étant celles de la proposition précédente

De cette expression et de l'expression des $T(m)(G_2^n G_{2k})$, nous pouvons en déduire une expression des $T(m)(G_2^n)$:

Proposition 13 *Pour n plus grand que 1, nous avons :*

$$T(m)(G_2^n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i+1}{24^i}\frac{B_2}{B_{2i+2}}\binom{n}{i+1}\Bigg(\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\binom{i+1}{j+1}m^{n-1-j}\sigma_{2j+1}(m)$$
$$+ i\sigma_1(m)m^{n-1}\Bigg)G_{2+2i}G_2^{n-1-i} + m^{n-1}\sigma_1(m)G_2^n + \Delta H_n,$$

avec H_n un élément $QM_{2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$.

Preuve: Comme pour la proposition concernant les autres séries d'Eisenstein, nous procédons par récurrence et nous nous servons de l'expression de $D(G_2^n)$ modulo un élément de $\Delta QM_{2n-12}^{\leq n-1}(Sl_2(\mathbb{Z}))$:

$$D(G_2^n) = -2nG_2^{n+1} + \frac{5}{6}nG_2^{n-1}G_4.$$

La suite est la même que dans le cas des autres séries d'Eisenstein. ■

Nous allons maintenant donner l'expression des $D^n(G_2)$ et des $T(m)(G_2^n)$ pour $2n \leq 10$. Nous avons :

$$\boxed{D(G_2) = -2G_2^2 + \frac{5}{6}G_4}$$

$$\boxed{D^2(G_2) = 8G_2^3 - 10G_2^2G_4 + \frac{7}{12}G_6}$$

$$\boxed{D^3(G_2) = -48G_2^4 + 120G_2^2G_4 - 14G_2G_6 + \frac{5}{24}G_8}$$

$$\boxed{D^4(G_2) = 384G_2^5 - 1600G_2^3G_4 + 280G_2^2G_6 - \frac{25}{3}G_2G_8 + \frac{11}{216}G_{10}}$$

Concernant les images par les $T(m)$, nous avons :

$$\boxed{T(m)(G_2^2) = m\sigma_1(m)G_2^2 - \frac{5}{12}(m\sigma_1(m) - \sigma_3(m))G_4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T(m)(G_2^3) =& m^2\sigma_1(m)G_2^3 - \frac{5}{4}(m^2\sigma_1(m) - m\sigma_3)G_2G_4 + \frac{7}{192}(2m^2\sigma_1 \\ & - 3m\sigma_3(m) + \sigma_5(m)G_6 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & T(m)(G_2^4) = m^3\sigma_1(m)G_2^4 - \frac{5}{2}(m^3\sigma_1(m) - m^2\sigma_3(m))G_2^2G_4 + \frac{7}{48}(2m^3\sigma_1(m) \\ & - 3m^2\sigma_3(m) + m\sigma_5(m))G_2G_6 + \frac{5}{3456}(3m^3\sigma_1(m) - 6m^2\sigma_3(m) + 4m\sigma_5(m) - \sigma_7(m))G_8 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & T(m)(G_2^5) = m^4\sigma_1(m)G_2^5 - \frac{25}{6}(m^4\sigma_1(m) - m^3\sigma_3(m))G_2^3G_4 + \frac{35}{96}(2m^4\sigma_1(m) \\ & - 3m^3\sigma_3(m) + m^2\sigma_5(m))G_2G_6 - \frac{25}{3456}(3m^4\sigma_1(m) - 6m^3\sigma_3(m) + 4m^2\sigma_5(m) - m\sigma_7(m))G_2G_8 \\ & + \frac{11}{331776}(4m^4\sigma_1(m) - 10m^3\sigma_3(m) + 10m^2\sigma_5(m) - 5m\sigma_7(m) + \sigma_9(m))G_{10} \end{aligned}}$$

Dans les calculs que nous venons d'effectuer, nous nous sommes bornés à des poids plus petits que 14 : nous pouvons faire exactement les mêmes types de calculs pour des poids plus petits que 22 car dans ce cas l'espace des formes paraboliques, qui est stable par les $T(m)$, est de dimension au plus 1 : par conséquent les formes paraboliques sont des fonctions propres pour tout les opérateurs de Hecke et les calculs que nous venons de faire pour déterminer les $T(m)$ sont plus directs quand nous possédons des fonctions propres.

En effet dans une base de fonctions propres, le calcul de $T(m)(D(F))$ se déduit immédiatement de l'expression de $T(m)(F)$, par conséquent, quand la dimension de l'espace des formes modulaires sur $SL(2, \mathbb{Z})$ est de dimension plus grande que 2, il est nécessaire de déterminer une base de fonctions propres pour réutiliser les méthodes que nous venons d'employer. La détermination de cette base repose sur la théorie des opérateurs hermitiens et la réduction des endomorphismes : pour plus de détails, nous conseillons le livre de N.Koblitz [Kob84]. Nous allons maintenant passer au cas des formes quasi-modulaires pour un caractère non trivial de $SL(2, \mathbb{Z})$.

1.2 Formes quasi-modulaires dans le cas d'un système multiplicatif non trivial de $SL(2,\mathbb{Z})$ et opérateurs de Hecke

1.2.1 Définitions et propriétés

Tout d'abord, nous allons rappeler ce qu'est un système multiplicatif. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$ et τ un élément de $\mathbb{H}$, on définit le facteur d'holomorphie j de la façon suivante :

$$j(\gamma,\tau) = c\tau + d$$

Ce facteur vérifie les égalités :

$$\Im(\gamma < \tau >) = \frac{\Im(\tau)}{|j(\gamma,\tau)|^2}$$
$$j(\gamma_1\gamma_1,\tau) = j(\gamma_1,\gamma_2 < \tau >)j(\gamma_2,\tau)$$

et c'est une fonction qui est constante si $c = 0$ et qui a ses valeurs dans $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty;0]$ sinon. Nous prenons la détermination principale de la racine carré, posons maintenant pour M et N deux éléments de $SL(2,\mathbb{Z})$:

$$\omega r(M,N) = \left(\frac{\sqrt{j(MN,\tau)}}{\sqrt{j(m,N<\tau>)}\sqrt{j(N,\tau)}}\right)^r,$$

cet élément est indépendant de τ, en effet :

$$\omega r(M,N) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } arg(j(M,i)) + arg(j(N^{-1},-i) \in]-\pi;\pi[\\ (-1)^r \text{sinon} \end{cases}$$

Ces rappels effectués, nous pouvons maintenant donner la définition d'un système multiplicatif :

Définition 4 *Soit r un entier naturel strictement positif et Γ un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$. Un système multiplicatif de poids $r/2$ est une application v de Γ dans $\mathbb{C}^*$ telle que :*

$$\exists l \in \mathbb{N}^*, \forall M \in \Gamma, v(m)^l = 1$$
$$\forall M,N \in \Gamma, v(mn) = \omega_r(M,N)v(M)v(N)$$
$$si - I \in \Gamma, v(-I) = \exp(-\frac{\pi i r}{2})$$

Nous pouvons donner quelques propriétés des systèmes multiplicatifs :

Proposition 14 *Pour un système multiplicatif de poids $\frac{r}{2}$, nous avons :*

$$r \ pair \Rightarrow v \ caract\grave{e}re$$
$$v(I) = 1$$
$$v(M^{-1}) = \begin{cases} (-1)^r v(M)^{-1} s\text{'}il \ existe \ n \in \mathbb{Z} tel \ que \ M = -T^n \\ v(M)^{-1} sinon \end{cases}$$

Le premier exemple de système multiplicatif est v_η qui est le système multiplicatif associé à la fonction η de Dedekind :

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\leq 1}(1-q^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{12}{n}\right) q^{\frac{n^2}{24}},$$

où :

$$\left(\frac{12}{n}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv \pm 1[12] \\ -1 \text{ si } n \equiv \pm 5[12] \\ 0 \text{ si } (n,12) \neq 1 \end{cases}$$

Cette fonction vérifie pour toute matrice de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = v_\eta(M)(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau)$$

Définition 5 *Soit k un demi-entier positif, nous dirons que f est une forme modulaire de poids k pour $SL(2,\mathbb{Z})$ et le système multiplicatif v_η^r si elle est holomorphe sur $\mathbb{H}$, si elle vérifie :*

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = v_\eta^r(M)(c\tau+d)^k$$

et si elle possède un développement de Fourier de la forme :

$$f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Q}, n\geq 0} c(n)q^n$$

Proposition 15 *Soit f une forme modulaire de poids k pour $SL(2,\mathbb{Z})$ et pour le système multiplicatif v_η^r, non identiquement nulle. Posons $\tilde{r}$ le résidu de r modulo 24, alors $k - \frac{\tilde{r}}{2}$ est entier et la fonction $f/\eta^{\tilde{r}}$ est une forme modulaire de poids $k - \frac{\tilde{r}}{2}$.*

Preuve: La fonction $\frac{f}{\eta^{\tilde{r}}}$ est holomorphe sur $\mathbb{H}$ car la fonction η ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$. De plus, il est clair que cette fonction est une fonction modulaire pour $SL(2,\mathbb{Z})$. Soit n_0 le plus petit indice pour lequel $c(n)$, le coefficient devant q^n est non nul. La fonction $\frac{f}{\eta^{\tilde{r}}}$ est équivalente en $i\infty$ au terme :

$$a(n_0)q^{n_0 - \frac{\tilde{r}}{24}}$$

Or l'égalité

$$f(\tau+1) = e^{\frac{2\pi i\tilde{r}}{24}f(\tau)},$$

implique que dans le développement de Fourier de f la plus petite puissance de q est plus grande que $\frac{\tilde{r}}{24}$, par conséquent, nous en déduisons que le terme $n_0 - \frac{\tilde{r}}{24}$ est positif et par suite la fonction $\frac{f}{\eta^{\tilde{r}}}$ admet une limite finie en $i\infty$: ainsi cette fonction est une forme modulaire de poids $k - \frac{\tilde{r}}{2}$ pour $Sl(2,\mathbb{Z})$. Comme f est non identiquement nulle, nous venons de prouver que $k - \frac{\tilde{r}}{2}$ est entier. ■

Nous pouvons maintenant donner une définition des formes quasi-modulaires dans le cas d'un système multiplicatif non trivial associé au système multiplicatif v_η^r :

Définition 6 *Soient $r \in \{1,..,23\}$,s un entier positif et k un demi-entier. Une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est une forme quasi modulaire de poids k pour le système multiplicatif v_η^r s'il existe $f_0, f_1, .., f_s$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$ vérifiant une condition de croissance tempérée :*

$$\forall 1 \leq i \leq s, \exists \alpha_i \geq 0, f_i(\tau) \ll (\frac{y}{1+|z|^2})^{-\alpha_i} \tag{1.8}$$

et telles que pour tout τ dans $\mathbb{H}$ et :

$$v_\eta^{-r}(c\tau+d)^{-k} f\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\big) = \sum_{i=0}^{s} f_i(\tau)\big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^i \tag{1.9}$$

pour tout τ dans $\mathbb{H}$ et toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$, de plus nous supposons que f vérifie elle aussi une condition de croissance tempérées. Si la fonction f_s est non identiquement nulle, nous dirons que f est de profondeur s.

Nous noterons $QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$ l'ensemble des formes quasi-modulaires de poids k et de profondeur au plus s et nous noterons $QM_k(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$ l'ensemble des formes quasi modulaires de poids k et $QM(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$ l'ensemble des formes quasi-modulaires.

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement des propriétés des formes quasi-modulaires sans systèmes multiplicatifs et des propriétés des formes modulaires pour le système multiplicatif :

Proposition 16 *Les fonctions f_i de la définition précédente sont des éléments de l'ensemble $QM_{k-2i}^{\leq s-i}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$.*
Le poids et la profondeur sont liés par l'inégalité suivante : $2s \leq k$.
Les ensembles $QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$, $QM_k(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$ sont des espaces vectoriels de dimensions finies et $QM(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$ est un anneau bigradué par le poids et la profondeur.
Toute forme quasi-modulaire f de poids k et de profondeur s pour le système multiplicatif v_η^r peut s'écrire de façon unique :

$$f(\tau) = \eta^r \sum_{i=0}^{s} G_2^i f_{k-2i-\frac{r}{2}},$$

où les $f_{k-2i-\frac{r}{2}}$ sont des formes modulaires de poids $k-2i-\frac{r}{2}$ et $f_{k-s-\frac{r}{2}}$ est non identiquement nulle.
L'opérateur D est une application linéaire entre les espaces $QM_k^{\leq s}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$ et $QM_{k+2}^{\leq s+1}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$; il est injectif pour k non nul, de plus :

$$D(\eta^r) = -rG_2\eta^r$$

Preuve: Ces propriétés se déduisent directement de celles que nous avons données d'une part pour les formes quasi-modulaires sans système multiplicatif et d'autre part pour les formes modulaires avec systèmes multiplicatifs. Pour la dernière égalité, il suffit de remarquer que G_2 peut être défini de la façon suivante :

$$\frac{\eta^{'}}{\eta} = -(2\pi i)G_2\eta$$

■

Nous allons maintenant étudier l'action d'opérateurs de Hecke sur les formes quasi-modulaire pour un caractère du type v_η^{2r}, avec $r \leq 11$. Avant de commencer nous allons rappeler le lemme suivant que nous pouvons trouver dans [V. 96b] :

Lemme 3 *Soit D un entier pair. Nous posons $Q = \frac{24}{(24,D)}$, où $(24, D) = pgcd(24, D)$, v_η^D est un caractère de $SL(2, \mathbb{Z})$ et :*

$$Ker(v_\eta^D) = \left\{ M \in SL(2, \mathbb{Z}) | M \equiv E_2 \;\; mod \;\; Q \right\}$$

Nous rappelons maintenant la définition des opérateurs de Hecke agissant sur les formes modulaires pour le caractère v_η^D avec D pair :

Proposition-définition 1 *Soit D un entier pair,$Q = \frac{24}{(24,D)}$ et m un entier vérifiant $(m, Q) = 1$. L'opérateur $T(m)$ agit sur les formes modulaires pour le caractère v_η^D de la façon suivante :*

$$T(m)(f)(\tau) = m^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1 \\ ad = m \\ b[d]}} d^{-k-n} v_\eta^D(\sigma_a) f\left(\frac{a\tau + bQ}{d}\right),$$

avec :

$$\sigma_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} [Q]$$

De plus les $T(m)$ sont des opérateurs linéaires qui envoient $M_k(SL(2, \mathbb{Z}), v_\eta^D)$ dans $M_k(SL(2, \mathbb{Z}), \chi_m)$ où le caractère χ_m est défini pour tout α dans $SL(2, \mathbb{Z})$ par la relation suivante :

$$\chi_m(\alpha) = v_\eta^D(\alpha_m)$$
$$\alpha_m \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix} [Q]$$

Preuve: La preuve de cette proposition peut être trouvée dans [V. 96b] et elle repose sur le lemme 3. ■

Le caractère χ_m peut être déterminé dans certains cas :

Lemme 4 *Pour $m = 1[Q]$ et $m = -1[Q]$ nous avons respectivement :*

$$\chi_m = v_\eta^D$$
$$\chi_m = v_\eta^{\bar{D}}$$

Ces opérateurs peuvent s'étendre aux formes quasi-modulaires pour le caractère v_η^D et comme dans le cas sans caractères, il faut préciser dans quel espace atterrit cet opérateur. A priori, nous ne pouvons dire que la chose suivante :

Proposition 17 *Soit D et Q définis comme précédemment et m premier à Q, alors les opérateurs $T(m)$ sont bien définis sur $QM(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^r)$ et ils sont à valeurs dans l'espace des formes holomorphes périodiques de période 1. De plus pour f une forme modulaire de poids k et i un entier positif, nous avons :*

$$\eta^D f = \sum_{n\geq 0} c(n) e^{\frac{2\pi i D n}{24}}$$
$$T(m)(\eta^D f) = \sum_{n\geq 0} \gamma(n) e^{\frac{2\pi i D n}{24}}$$
$$\gamma(n) = \sum_{\substack{a\geq 1\\ a|(n,m)}} v_\eta^D(\sigma_a) a^{k+\frac{D}{2}-1} c\big(\frac{nm}{a^2}\big)$$
$$T(mq)(\eta^D f) = T(m)(T(q)(\eta^D f)), \quad (m,q) = 1$$
$$T(m)(D^i(\eta^D f) = m^i D^i(T(m)(\eta^D f))$$

De plus, si n n'est pas congru à m modulo Q alors $\gamma(n) = 0$

Preuve: Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas sans caractères. La seule chose à démontrer est la nullité de $\gamma(n) = 0$. quand n n'est pas congru à m modulo Q. Pour que $c(\frac{nm}{a^2})$ soit non nul, il est nécessaire que $\frac{nm}{a^2}$ soit congru à 1 modulo Q, puisque $c(l)$ est nul pour l non congru à 1 modulo $[Q]$. Autrement dit l'égalité suivante est nécessaire :

$$ml \equiv a^2[Q],$$

pour les Q avec lesquelles nous travaillons cette égalité peut se récrire de la façon suivante :

$$m \equiv l[Q]$$

Finalement pour que $\gamma(n)$ soit non nul il est nécessaire que $l \equiv m[Q]$.
■

La situation est la même que dans le cas sans caractères, il nous reste à montrer que $T(m)(\eta^D G_2)$ est un élément de $QM^{\leq 1}_{2+\frac{D}{2}}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^D)$. Contrairement au cas sans caractères, nous ne connaissons pas d'expressions générales des coefficients de Fourier des fonctions $\eta^D G_2$ et par conséquent nous ne pouvons pas appliquer la même méthode que dans le cas sans caractères. Cependant ce fait est toujours vrai et nous pourrons le démontrer plus tard grâce aux formes modulaires de Jacobi, pour l'instant nous le supposons vrai. Nous pouvons maintenant montrer la proposition suivante :

Proposition 18 *Soit k, s deux entiers et D un entier pair tels que $2s \leq k + \frac{D}{2}$.*

$$T(m)(QM^{\leq s}_{k+\frac{D}{2}}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^D)) \subset QM^{\leq s}_{k+\frac{D}{2}}(Sl_2(\mathbb{Z}), v_\eta^D)$$

Preuve: La structure de la preuve est la même que dans le cas sans caractères. Comme dans ce cas, nous allons montrer que pour toute forme modulaire F_k de poids k, nous avons :

$$D^s(\eta^D F_k) = \eta^D Q_s + (-1)^s 2^s \frac{(\frac{D}{2}+k+s-1)!}{(\frac{D}{2}+k-1)!} G_2^s F_k \eta^D,$$

où Q_s est un élément de $QM^{\leq s-1}_{k+2s}(Sl_2(\mathbb{Z}))$. Comme dans le cas précédent, nous allons procéder par récurrence sur s. Pour $s = 0$, c'est clair, montrons le pour $s = 1$, autrement dit montrons que :

$$D(\eta^D f) + 2(k + \frac{D}{2})\eta^D f G_2 \in \eta^D M_{k+\frac{D}{2}+2}(Sl(2, \mathbb{Z}))$$

■

Nous avons pour f une forme modulaire de poids k :

$$D(\eta^D f)(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = v_\eta^D(M)\Big[-D\eta^D(c\tau+d)^{k+\frac{D}{2}} f G_2 + \eta^D(c\tau+d)^{k+\frac{D}{2}} D(f)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}(k+\frac{D}{2})c(c\tau+d)^{k+\frac{D}{2}-1}\eta^D f\Big](c\tau+d)^2$$
$$(\eta^D f G_2)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = v_\eta^D\Big[(c\tau+d)^{k+\frac{D}{2}}\eta^D f G_2 (c\tau+d)^2 - \frac{1}{4\pi i}c(c\tau+d)^{k+\frac{D}{2}+1}\eta^D f\Big]$$

En sommant, nous obtenons la propriété demandée pour $s = 1$. Supposons maintenant que la relation soit vraie au rang $s \geq 1$, autrement dit que pour toute forme modulaire F_k de poids k nous avons :

$$D^s(\eta^D F_k) = \eta^D Q_s + (-1)^s 2^s \frac{(\frac{D}{2}+k+s-1)!}{(\frac{D}{2}+k-1)!} G_2^s F_k \eta^D$$

Considérons le rang suivant :

$$D^{s+1}(\eta^D F_k) = \eta^D Q_{s+1} + (-1)^{s+1} 2^{s+1} \frac{(\frac{D}{2}+k+s+1-1)!}{(\frac{D}{2}+k-1)!} G_2^{s+1} F_k \eta^D$$
$$Q_{s+1} = -DG_2 Q_s + D(Q_s) + (-1)^s 2^s \frac{(\frac{D}{2}+k+s-1)!}{(\frac{D}{2}+k-1)!}(\frac{5}{6} s G_2^{s-1} G_4 F_k + Q_1),$$

et la fonction Q_{s+1} est bien dans l'espace $QM^{\leq s}_{k+2s+2}(Sl_2(\mathbb{Z}))$: la récurrence est établie. D'après la structure des formes quasi-modulaires pour montrer l'inclusion qui nous intéresse, il nous suffit de montrer que pour tout s positif et toute forme modulaire F_k de poids k, nous avons :

$$T(m)(\eta^D G_2^s F_k) \in QM^{\leq s}_{k+2s+\frac{D}{2}}(Sl_2(\mathbb{Z}))$$

Nous allons de nouveau procéder par récurrence, une récurrence sur s en utilisant la formule que nous avons démontrée. Le rang 0 et le rang 1 sont établis, supposons que la propriété est vraie au rang $s \geq 1$, montrons là au rang $s+1$:

$$D^{s+1}(\eta^D F_k) = \eta^D Q_{s+1} + (-1)^{s+1} 2^{s+1} \frac{(\frac{D}{2}+k+s+1-1)!}{(\frac{D}{2}+k-1)!} G_2^{s+1} F_k \eta^D$$
$$T(m)(G_2^{s+1} F_k \eta^D) = \alpha(m^{s+1} D(T(m)(\eta^D F_k)) - T(m)(\eta^D Q_{s+1})),$$

nous savons que les termes de droite sont dans $QM^{\leq s+1}_{k+2s+\frac{D}{2}}(Sl_2(\mathbb{Z}))$, par conséquent nous avons établi la récurrence. L'égalité que nous désirions s'en déduit directement.

1.2.2 Exemples de calculs

Dans cette partie nous allons donner quelques images de formes quasi-modulaires par l'action des $T(m)$ pour $m = 1[Q]$, pour D un entier pair diviseur de 24. Nous ne donnerons pas les justifications des résultats, il viennent des raisonnements faits pour les formes quasi-modulaires sans caractères. Tout d'abord pour $1 \leq k \leq 5$, nous avons l'égalité suivante :

$$T(m)(\eta^D G_{2k}) = -\frac{4k}{B_k} \eta^D G_{2k} C_{D,k}(m)$$
$$\eta^D G_{2k} = \sum_{n \equiv 1[Q]} C_{D,k}(n) e^{\frac{2\pi i D n}{24}}$$

Ces égalités viennent de la dimension des espaces qui est égale à 1 et de l'hypothèse que nous avons fait sur $\eta^D G_2$: il suffit alors de d'identifier les coefficients de Fourier. Ensuite pour $2 \leq k \leq 4$, nous avons :

$$D(\eta^D G_{2k}) + 2(2k+12D)\eta^D G_2 G_{2k} = \frac{-1}{6}(k+1)\frac{B_{2k}}{B_{2k+2}} \eta^D G_{2k+2},$$

de cette égalité et reprenant les raisonnements faits dans le cas sans caractères, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} T(m)(\eta^D G_2 G_{2k}) = &- m\frac{4k}{B_{2k}} C_{D,k}(m) G_2 \eta^D G_{2k} - \frac{1}{6}\frac{k+1}{4k+24D}\frac{B_{2k}}{B_{2k+2}} \\ &\times \left(-\frac{4k+4}{B_{2k+2}} C_{D,k+1}(m) + m\frac{4k}{B_{2k}} C_{D,k}(m) \right) \eta^D G_{2k+2} \end{aligned}}$$

Nous pouvons aussi donner l'expression des dérivées secondes pour $2 \leq k \leq 3$:

$$\begin{aligned} &D^2(\eta^D G_{2k}) \\ &= 4(2k+\frac{D}{2})(2k+\frac{D}{2}+1)\eta^D G_2^2 G_{2k} + \frac{2}{3}(k+1)\frac{B_{2k}}{B_{2k+2}}(2k+\frac{D}{2}+1)\eta^D G_2 G_{2k+2} \\ &+ \frac{1}{144}\frac{k+2}{k}(4k(k+1)-(2k+\frac{D}{2}))\frac{B_{2k}}{B_{2k+4}}\eta^D G_{2k+4} \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes méthodes que celles utilisées dans le cas sans caractères, nous pouvons calculer toutes les images par les opérateurs de Hecke des formes quasi-modulaires de poids plus petits que 10, de même dans le cas où $m = -1[Q]$. Cependant pour les poids plus grands c'est plus délicat puisque les autres séries d'Eisenstein ne sont pas toujours des vecteurs propres. Par conséquent, nous sommes contraints de déterminer une base de vecteur dès le poids 12 alors que dans le cas du caractère trivial cela n'arrive qu'à partir du poids 22. Nous reviendrons plus loin sur cette remarque, au moment des calculs des coefficients de Taylor en $z = 0$ des formes modulaires de Siegel et des formes modulaires pour les groupes orthogonaux : cela nous permettra de comparer les relèvements arithmétiques et exponentiels.

1.3 Les formes quasi modulaires pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$

Dans cette partie, nous allons introduire le concept de formes quasi-modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ et en donner certaines propriétés. Nous allons d'abord commencer par rappeler la définition et certaines propriétés des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ puis nous étudierons les formes quasi-modulaires. Dans le cas des formes modulaires de Jacobi, le premier coefficient de Taylor en $z = 0$ qui était non identiquement nul était une forme modulaire pour $SL_2(\mathbb{Z})$, les autres coefficients n'étaient plus modulaires, mais quasi-modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$. Dans le cas des formes modulaires de Siegel, nous verrons plus tard qu'il se passe la même chose mais sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$.

1.3.1 Les formes modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$

Nous allons rappeler les propriétés des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ en nous basant sur le livre de E.Freitag [Fre83]. Commençons par rappeler la définition des ces fonctions :

Définition 7 *Une forme modulaire de poids k sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ est une fonction holomorphe à croissance tempérée de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :*

$$(c\tau + d)^{-k}(c'\tau + d')^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{a'\tau + b'}{c'\tau + d'}\right)$$

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. *Nous noterons $M(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z}))$ l'ensemble de ces fonctions sans précisions sur le poids, $M_k(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z}))$ l'ensemble de ces fonctions de poids k.*

Nous définissons aussi deux autres ensembles :

$$MS(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})) = \left\{ f \in M(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})) | f(\tau, \omega) = f(\omega, \tau) \right\}$$

$$MS_k(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})) = \left\{ f \in M_k(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})) | f(\tau, \omega) = f(\omega, \tau) \right\}$$

En reprenant les arguments de Freitag [Fre83], nous pouvons montrer que :

Théorème 2 *Pour k positif, nous avons :*

$$M_k(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})) \cong M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \bigotimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})$$

Tout élément de $MS(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z}))$ est un polynôme isobare en les fonctions :

$$G_4(\tau)G_4(\omega)\ ,\ G_6(\tau)G_6(\omega)\ ,\ G_4(\tau)^3G_6(\omega)^2 + G_4(\omega)^3G_6(\tau)^2$$

De ce théorème, nous pouvons en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 5 *Tout élément de $M(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z}))$ est un polynôme isobare en les fonctions :*

$$G_4(\tau)G_4(\omega)\ ,\ G_6(\tau)G_6(\omega)\ ,\ G_4(\tau)^3G_6(\omega)^2\ ,\ G_4(\omega)^3G_6(\tau)^2$$

De plus les fonctions antisymétriques, c'est à dire les fonctions vérifiant $f(\tau,\omega) = -f(\omega,\tau)$, sont engendrées par une combinaison linéaire de produits isobares de la fonction :

$$G_4(\tau)^3G_6(\omega)^2 - G_4(\omega)^3G_6(\tau)^2$$

Preuve: La première affirmation se déduit directement du théorème précédent puisque $M(SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par des combinaisons isobares de produits de G_4 et de G_6. La deuxième affirmation vient du fait que la fonction est bien antisymétrique et que tout fonction est somme d'une fonction symétrique et antisymétrique : en concaténant les générateurs des éléments symétriques et l'élément antisymétrique nous retrouvons les générateurs de $M(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z}))$ ■

1.3.2 Passage aux formes quasi-modulaires

Nous allons définir les formes quasi-modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ d'une façon équivalente à celles sur $SL_2(\mathbb{Z})$:

Définition 8 *Soit k un entier et $s := (s_1, s_2)$ un couple d'entiers. On appelle forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur s une fonction f holomorphe à croissance tempérée de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :*

$$(c\tau+d)^{-k}(c'\omega+d')^{-k}f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{a'\omega+b'}{c'\omega+d'}) = \sum_{\substack{0\leq n_1\leq s_1\\ 0\leq n_2\leq s_2}} f_{n_1,n_2}(\tau,\omega)\big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^{n_1}\big(\frac{c'}{c'\omega+d'}\big)^{n_2},$$

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ *: les fonctions f_{n_1,n_2} sont des fonctions holomorphes de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ à croissance tempérée en chaque variable.*

Nous appelerons $QM[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ l'ensemble de ces fonctions sans précisions sur le poids ou la profondeur et $QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ les formes quasi-modulaires de poids k sans précisions sur la profondeur. Nous allons maintenant regarder quelles propriétés des formes quasi-modulaires à une variable, nous pouvons exporter à cet ensemble. Nous noterons $QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$ les formes quasi-modulaires d'ordre k et de profondeur au plus s : c'est à dire de profondeur au plus s_1 par rapport à τ et au plus s_2 par rapport à ω.

Nous remarquons immédiatement que les formes quasi-modulaires de poids k sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ sont aussi des fonctions de l'ensemble de fonctions suivant :

$$Q\tilde{M}_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})] = \{f(\tau,\omega)|f : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{C}, f(\tau,.), f(.,\omega) \in QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]\},$$

où $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]$ désigne les formes quasi-modulaires de poids k sur $SL_2(\mathbb{Z})^2$. De cette remarque, nous pouvons définir de nouvelle formes quasi-modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})$: les formes quasi-modulaires symétriques de poids k sur $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ qui sont les fonctions qui vérifient :

$$QMS_k(SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})) = \{f \in QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]|f(\tau,\omega) = f(\omega,\tau)\}.$$

Tous les espaces que nous venons de définir ont des structures d'espaces vectoriels, nous avons aussi les propriétés suivantes :

Proposition 19 *Nous posons :*

$$QM[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})] = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$$
$$QM(S)[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})] = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} QM(S)_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})],$$

ces espace sont bien définis, ils ont une structure d'algèbre graduée.

Preuve: Cette propriété est héritée de la même propriété sur les formes quasi-modulaires en une variable. La seule chose que nous avons à montrer est que ces espaces sont en somme directe.
Soit $f_1,..,f_r$ des fonctions de $QM(S)[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ de poids respectif $k_1,..,f_r$. Supposons par l'absurde que nous avons :

$$\sum_{i=1}^{r} f_i(\tau,\omega) \equiv 0$$

Fixons un τ dans $\mathbb{H}$, nous somme ramenés aux cas des formes quasi-modulaires à une variable et nous en déduisons que :

$$f_i(\tau,\omega) = 0$$

pour tout les i et tout les éléments ω de $\mathbb{H}$. Cette affirmation est vraie pour tout les τ de $\mathbb{H}$, donc les fonctions f_i sont identiquement nulles pour tout les i : la somme est donc bien directe. La structure d'algèbre graduée est immédiate sachant que l'anneau des formes modulaires à une seule variable possède une structure d'algèbre graduée. Tout ce que nous venons de faire vaut aussi pour les formes symétriques.
$\blacksquare$

Nous allons maintenant étudier la structure d'une élément de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$. Nous pouvons montrer la proposition suivante :

Proposition 20 *Soit k un entier positif, nous avons :*

$$QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})] = QM_k[SL_2(\mathbb{Z})] \bigotimes QM_k[SL_2(\mathbb{Z})].$$
$$Q\tilde{M}_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})] = QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$$

Preuve: Soit $f(\tau,\omega) \in QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$. Nous savons que f est une forme quasi-modulaire par rapport à τ à ω fixé. Fixons $e_1(\tau), ..., e_{n_k}(\tau)$ une base de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]$, nous avons alors :

$$f(\tau,\omega) = \sum_{i=1}^{n_k} e_j(\tau)\alpha_j(\omega),$$

où les α_j sont des fonctions de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$. Nous voulons montrer que ces fonctions sont des formes quasi-modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$. Notons les développement de Fourier de la façon suivante :

$$e_j(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{j,n} q^n = \begin{bmatrix} e_{j,1} \\ e_{j,2} \\ . \\ . \\ e_{j,n} \\ . \\ . \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons écrire pour tout $i \in [|1; n_k|]$, tout a positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{ia}^{ia+1} f(\tau,\omega) \exp(-in\tau)\, \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{n_k} e_{j,n}\alpha_j(\omega),$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\int_{ia}^{ia+1} f(\tau,\omega)\exp(-in\tau)\,\mathrm{d}\tau = m_n(\omega)$ reste une forme quasi-modulaire de poids k pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ pour la variable ω. Nous pouvons récrire le problème de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{2,1} & . & . & e_{n_k,1} \\ e_{1,2} & e_{2,2} & . & . & e_{n_k,2} \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_i \\ . \\ \alpha_{n_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(\omega) \\ m_2(\omega) \\ . \\ . \\ m_i(\omega) \\ . \\ . \end{bmatrix}.$$

Pour isoler les $\alpha_j(\omega)$, il suffit de trouver une sous matrice carré d'ordre n_k inversible dans la matrice infinie de gauche. Nous pouvons trouver une telle sous matrice étant donné que la matrice infinie est de rang n_k : cela vient du fait que les $e_i(\tau)$ sont libres.
Ainsi nous avons montré que les $\alpha_j(\omega)$ sont des formes quasi-modulaires de poids k pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.
■

Nous pouvons donner le corollaire suivant :

Corollaire 6 *Les espaces vectoriels $QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ et $QMS_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ sont de dimensions finies et nous avons*

$$\dim(QM_k[SL_2(\mathbb{Z})^2]) = n_k^2$$
$$\dim(QMS_k[SL_2(\mathbb{Z})^2]) = \frac{n_k(n_k-1)}{2}$$

En particulier, ces espaces sont réduits à zéro quand k est impair.

Preuve: La première partie de ce corollaire est une conséquence directe de la proposition précédente. Pour démontrer la seconde, nous allons associer les éléments de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ et de $QMS_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ à des matrices carrés de taille n_k.
Nous commençons par choisir une base de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]$ et nous la notons $f_1, .., f_{n_k}$. D'après la proposition précédente, nous pouvons écrire tout élément f de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ de la façon suivante :

$$f(\tau, \omega) = \sum_{1 \leq i,j \leq n_k} \alpha_{i,j} f_i(\tau) f_j(\omega)$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$. Nous remarquons qu'une fois la base de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]$ fixée, la connaissance des $\alpha_{i,j}$ nous permet de déterminer la fonction f et vice-versa. Nous avons donc un isomorphisme entre les éléments de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})]$ et les matrices carrés d'ordre n_k sur $\mathbb{C}$. Les éléments de $QMS_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ sont donc en isomorphisme avec les matrices symétriques d'ordre n_k : nous en déduisons ainsi la dimension de $QMS_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$.
■

En remarquant que toute fonction f de $QM_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction symétrique et d'une fonction antisymétrique, nous pouvons écrire l'isomorphisme suivant :

$$QMS_k[SL_2(\mathbb{Z})^2] \cong QM_k[SL_2(\mathbb{Z})] \bigotimes QM_k[SL_2(\mathbb{Z})] / \sim,$$

où la relation d'équivalence est modulo les fonctions antisymétriques.
Les lemmes qui suivent sont des généralisations de certaines propriétés des formes quasi-modulaires à une seule variable.

Lemme 5 *Soit f un élément de $QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$: les f_{n_1,n_2} sont uniques ainsi que la profondeur. De plus, nous avons :*

$$k \geq 2s_1$$
$$k \geq 2s_2$$

Preuve: Il suffit de prendre $c = 0$, $c' = 1$ et de fixer τ dans $\mathbb{H}$, nous nous retrouvons alors dans le cas d'une forme quasi-modulaire d'une variable : nous en déduisons l'unicité de s_2. Pour s_1, nous prenons $c' = 0$, $c = 1$ et nous fixons ω. Le même type de raisonnement nous donne les deux inégalités désirées ainsi que l'unicité des f_{n_1,n_2}. ■

Lemme 6 *Soit L l'opérateur différentiel défini par $\frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\omega}$: L est une application linéaire de l'espace vectoriel $QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ dans l'espace vectoriel $QM_{k,s+(1,1)}[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$. Cette application est injective pour $k > 0$.*

Preuve: Par dérivation à gauche et à droite, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&(c\tau+d)^{-k-2}(c'\omega+d')^{-k-2}L(f)(M<\tau>, M'<\omega>)\\
&= \sum_{\substack{0\le n_1\le s_1\\ 0\le n_2\le s_2}} \Bigg(L(f_{n_1,n_2})(\tau,\omega)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^{n_1}\Big(\frac{c'}{c'\omega+d'}\Big)^{n_2}\\
&+ \frac{1}{(2\pi i)^2} f_{n_1,n_2}(\tau,\omega)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^{n_1+1}\Big(\frac{c'}{c'\tau+d'}\Big)^{n_2+1}(k-n_1)(k-n_2)\Bigg)\\
&= \sum_{\substack{0\le n_1\le s_1+1\\ 0\le n_2\le s_2+1}} g_{n_1,n_2}(\tau,\omega)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^{n_1}\Big(\frac{c'}{c'\tau+d'}\Big)^{n_2}
\end{aligned}$$

Les g_{n_1,n_2} sont des fonctions définies comme suit :

$$\begin{aligned}
g_{0,0} &= L(f_{0,0})\\
g_{0,1} &= L(f_{0,1})\\
g_{1,0} &= L(f_{1,0})\\
g_{n_1,n_2} &= L(f_{n_1,n_2})(\tau,\omega) + \frac{1}{(2\pi i)^2}(k-n_1-1)(k-n_2-1)f_{n_1-1,n_2-1}\\
g_{s_1+1,s_2} &= \frac{1}{(2\pi i)^2}(k-s_1)(k-s_2-1)f_{s_1,s_2-1}\\
g_{s_1,s_2+1} &= \frac{1}{(2\pi i)^2}(k-s_1-1)(k-s_2)f_{s_1-1,s_2}\\
g_{s_1+1,s_2+1} &= \frac{1}{(2\pi i)^2}(k-s_1)(k-s_2)f_{s_1,s_2}
\end{aligned}$$

pour $1 \le n_1 \le s_1$ et $1 \le n_2 \le s_2$.
Il ne nous reste plus qu'à montrer l'injectivité pour $k > 0$.
Supposons que $L(f) = 0$, nous pouvons montrer par récurrence que les f_{n_1,n_2} sont des constantes et comme k est non nul, ces constantes, qui doivent être des formes quasi modulaires, sont nulles. ■

Lemme 7 *L'ensemble $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{s\in\mathbb{N}} QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ est un espace vectoriel et il a une structure d'algèbre graduée.*

La preuve est directement issue de celle pour les formes quasi-modulaires d'une seule variable.
Par contre nous ne pouvons pas généraliser la structure des formes quasi-modulaires à une variable : en effet les f_{n_1,n_2} ne sont pas dans un ensemble de la forme $QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$, le poids n'est plus le même pour chaque variable. Nous allons introduire un nouveau type de forme quasi-modulaire pour $SL_2(\mathbb{Z})^2$.

Définition 9 *Soit $k' = (k_1, k_2)$ et $s := (s_1, s_2)$ deux couples d'entier. On appelle forme quasi-modulaire de poids k' et de profondeur s une fonction holomorphe f de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :*

$$(c\tau + d)^{-k_1}(c'\omega + d')^{-k_2} f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}) = \sum_{\substack{0 \leq n_1 \leq s_1 \\ 0 \leq n_2 \leq s_2}} f'_{n_1,n_2}(\tau, \omega)\Big(\frac{c}{c\tau + d}\Big)^{n_1}\Big(\frac{c'}{c'\omega + d'}\Big)^{n_2},$$

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$: les fonctions f'_{n_1,n_2} sont des fonctions holomorphes de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ à croissance tempérée en chaque variable. Nous noterons ces ensembles de la façon suivante : $QM_{(k_1,k_2),s}[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$

Comme nous l'avons remarqué précédemment, nous avons unicité des profondeurs, des f'_{n_1,n_2} et de plus nous avons les inégalités suivantes : $k_1 \geq 2s_1$ et $k_2 \geq 2s_2$.

Proposition 21 *Soit f une fonction de l'anneau $QMS_k[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$. En utilisant les mêmes notations que dans les définitions, nous pouvons montrer que les fonctions holomorphes f_{n_1,n_2} sont des éléments des espaces :*
$QM_{(k-2n_1,k-2n_2),(s_1-n_1,s_2-n_2)}[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$

Ces espaces ont des propriétés structurelles semblables aux espaces précédemment définis : les démonstrations sont identiques et nous ne nous attardons pas dessus.
Nous allons maintenant nous intéresser aux générateurs des algèbres : $QMS[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ et $QMS[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$. Dans le premier cas, nous allons montrer que l'algèbre possède 13 générateurs et dans l'autre cas 8 générateurs :

Proposition 22 *L'algèbre $QM[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ est engendrée par les 13 générateurs suivants :*

$$\begin{gathered} E_4(\tau)E_4(\omega); E_6(\tau)E_6(\omega); E_2(\tau)E_2(\omega); E_2(\tau)^2E_4(\omega); E_2(\omega)^2E_4(\tau) \\ E_2(\tau)^3E_6(\omega); E_2(\omega)^3E_6(\tau); E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega); E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau) \\ E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2; E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2; E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2; E_6(\omega)E_2(\omega)E_4(\tau)^2. \end{gathered}$$

L'algèbre $QMS[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ est engendrée par les 8 générateurs suivants :

$$\begin{aligned} & E_4(\tau)E_4(\omega); E_6(\tau)E_6(\omega); E_2(\tau)E_2(\omega) \\ & E_2(\tau)^2E_4(\omega) + E_2(\omega)^2E_4(\tau); E_2(\tau)^3E_6(\omega) + E_2(\omega)^3E_6(\tau) \\ & E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega) + E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau); E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2 + E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2 \\ & E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2 + E_6(\omega)E_2(\omega)E_4(\tau)^2 \end{aligned}$$

Ces deux systèmes de générateurs sont minimaux.

Preuve:

D'après ce que nous avons vu précédemment, il est clair que $QM[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ est engendrée par des éléments de la forme :

$$f(\tau, \omega) = E_4(\tau)^{a_1}E_6(\tau)^{b_1}E_2(\tau)^{c_1}E_4(\omega)^{a_2}E_6(\omega)^{b_2}E_2(\omega)^{c_2}$$

avec $4a_1 + 6b_1 + 2c_1 = 4a_2 + 6b_2 + 2c_2$; en effet, il suffit de voir que les formes quasi-modulaires de poids à une variable admettent comme base les éléments de la forme :

$$E_2(\tau)^\alpha E_4(\tau)^\beta E_6(\tau)^\nu,$$

Nous reprenons la fonction f et nous posons :

$$\begin{aligned} a &= \min(a_1, a_2) \\ b &= \min(b_1, b_2) \\ c &= \min(c_1, c_2) \end{aligned}$$

A partir de là, nous avons 8 cas à traiter.

1er cas : $a = a_1$, $b = b_1$ et $c = c_1$. A cause de l'égalité sur les poids on a aussi les égalités : $a = a_2$, $b = b_2$ et $c = c_2$, ce qui implique :

$$f(\tau, \omega) = (E_4(\tau)E_4(\omega))^a (E_6(\tau)E_6(\omega))^b (E_2(\tau)E_2(\omega))^c$$

Nous avons étudié deux cas de figure simultanément.

2^{ieme} cas : $a = a_2$, $b = b_2$ et $c = c_1$ Nous avons :

$$\begin{aligned} f(\tau, \omega) &= (E_4(\tau)E_4(\omega))^a (E_6(\tau)E_6(\omega))^b (E_2(\tau)E_2(\omega))^c g(\tau, \omega) \\ g(\tau, \omega) &= E_4(\tau)^{a'_1} E_6(\tau)^{b'_1} E_2(\omega)^{c'_1}, \end{aligned}$$

avec $4a'_1 + 6b'_1 = 2c'_1$: nous en déduisons une nouvelle expression de $g(\tau, \omega)$:

$$\begin{aligned} g(\tau, \omega) &= E_4(\tau)^{a'_1} E_6(\tau)^{b'_1} E_2(\omega)^{2a'_1 + 3b'_1} \\ &= (E_4(\tau)E_2(\omega)^2)^{a'_1} (E_6(\tau)E_2(\omega)^3)^{b'} \end{aligned}$$

3^{ieme} cas : $a = a_2$, $b = b_1$ et $c = c_1$

$$\begin{aligned} f(\tau, \omega) &= (E_4(\tau)E_4(\omega))^a (E_6(\tau)E_6(\omega))^b (E_2(\tau)E_2(\omega))^c g(\tau, \omega) \\ g(\tau, \omega) &= E_4(\tau)^{a'_1} E_6(\omega)^{b'_1} E_2(\omega)^{c'_1} \end{aligned}$$

avec $2a'_1 = 3b'_1 + c'_1$: nous en déduisons une nouvelle expression de $g(\tau, \omega)$.
Nous devons étudier cette somme suivant les parités de b'_1 et c'_1 : le fait qu'ils aient même parité se vérifie immédiatement.
Tout d'abord supposons que $b_1 = 2b$ et $c_1 = 2c$, nous avons :

$$\begin{aligned} g(\tau, \omega) &= E_4(\tau)^{3b+c} E_6(\omega)^{2b} E_2(\omega)^{2c} \\ &= ((E_4(\tau))^3 E_6(\omega)^2)^b (E_4(\tau)E_2(\omega)^2)^c \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $b_1 = 2b+1$ et $c_1 = 2c+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} g(\tau,\omega) &= E_4(\tau)^{3b+c+2}E_6(\omega)^{2b+1}E_2(\omega)^{2c+1} \\ &= (E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2)^b(E_4(\tau)E_2(\omega)^2)^c(E_4(\tau)^2E_6(\omega)E_2(\omega))^b \end{aligned}$$

<u>4^{ieme} cas :</u> $a = a_1$, $b = b_2$ et $c = c_1$

$$\begin{aligned} f(\tau,\omega) &= (E_4(\tau)E_4(\omega))^a(E_6(\tau)E_6(\omega))^b(E_2(\tau)E_2(\omega))^c g(\tau,\omega) \\ g(\tau,\omega) &= E_4(\omega)^{a_1'}E_6(\tau)^{b_1'}E_2(\omega)^{c_1'}, \end{aligned}$$

avec $3b_1' = 2a_1' + c_1'$: nous en déduisons une nouvelle expression de $g(\tau,\omega)$.
Nous devons travailler suivant les restes modulo 3 de c_1' et a_1' et il s'avèrent qu'ils sont égaux modulo 3.
Supposons que $c_1' = 3c$ et $a_1' = 3a$, nous avons :

$$\begin{aligned} g(\tau,\omega) &= E_4(\omega)^{3a}E_6(\tau)^{2a+c}E_2(\omega)^{3c} \\ &= (E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)^a(E_6(\tau)E_2(\omega)^3)^c \end{aligned}$$

Supposons que $c_1' = 3c+1$ et $a_1' = 3a+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} g(\tau,\omega) &= E_4(\omega)^{3a+1}E_6(\tau)^{2a+c+1}E_2(\omega)^{3c+1} \\ &= (E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)^a(E_6(\tau)E_2(\omega)^3)^cE_4(\omega)E_6(\tau)E_2(\omega) \end{aligned}$$

Supposons que $c_1' = 3c+2$ et $a_1' = 3a+2$, nous avons :

$$\begin{aligned} g(\tau,\omega) &= E_4(\omega)^{3a+2}E_6(\tau)^{2a+c+2}E_2(\omega)^{3c+2} \\ &= (E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)^a(E_6(\tau)E_2(\omega)^3)^cE_4(\omega)^2E_6(\tau)^2E_2(\omega)^2 \end{aligned}$$

<u>5^{ieme} cas :</u> $a = a_1$, $b = b_2$ et $c = c_2$ Ce cas est le symétrique du cas 3 : nous avons juste à échanger les rôles de τ et ω.

<u>6^{ieme} cas :</u> $a = a_2$, $b = b_2$ et $c = c_2$ Ce cas est le symétrique du cas 4 : nous avons juste à échanger les rôles de τ et ω.

<u>7^{ieme} cas :</u> $a = a_1$, $b = b_1$ et $c = c_2$ Ce cas est le symétrique du cas 2 : nous avons juste à échanger les rôles de τ et ω.

En résumé, nous remarquons que quelque soit le cas de figure les fonctions de $QM[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$ sont engendrées par les 13 fonctions que nous avons énoncées. Il nous reste maintenant à montrer l'affirmation concernant $QMS[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$. Notons $S(8)$ l'ensemble des fonctions engendrées par les 8 fonctions symétriques de l'énoncé de la proposition. A priori cet ensemble est juste inclus dans $QMS[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$. Nous allons introduire 5 fonctions antisymétriques : c'est à dire des fonctions de $QM[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$ qui vérifient $f(\tau,\omega) = -f(\tau,\omega)$. Ces fonctions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} &E_2(\tau)^2E_4(\omega) - E_2(\omega)^2E_4(\tau); E_2(\tau)^3E_6(\omega) - E_2(\omega)^3E_6(\tau) \\ &E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega) - E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau); E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2 - E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2 \\ &E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2 - E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2. \end{aligned}$$

Ces fonctions et les huit fonctions qui engendrent $S(8)$ engendrent l'algèbre $QM[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$: la vérification est immédiate. Ainsi nous en déduisons que toute fonction f de $QM[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ s'écrit comme somme de produits de puissances de fonctions de $S(8)$ et des cinq fonctions précédentes : nous avons donc une écriture de f comme somme d'éléments symétriques et antisymétriques. Cette fonction f est symétrique si et seulement elle ne contient que des fonctions symétriques dans cette écriture et c'est le cas si et seulement si elle s'écrit comme somme de produits de puissances de fonctions de $S(8)$ et de puissances paires des fonctions antisymétriques que nous avons introduites. Pour montrer que $S(8)$ est $QMS[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$ il suffit de montrer que toute puissance paire de nos 5 fonctions antisymétriques est dans $S(8)$ et pour cela il suffit de calculer le carré de chacune de ces fonctions ainsi que tout les produits de deux de ces fonctions et ensuite de montrer qu'ils sont dans $S(8)$. Nous avons donc 15 éléments à calculer :

$$\begin{aligned}(E_2(\tau)^2E_4(\omega) - E_2(\omega)^2E_4(\tau))^2 &= (E_2(\tau)^2E_4(\omega) + E_2(\omega)^2E_4(\tau))^2\\ &\quad - 4(E_2(\tau)E_2(\omega))^2E_4(\tau)E_4(\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_2(\tau)^3E_6(\omega) - E_2(\omega)^3E_6(\omega))^2 &= (E_2(\tau)^3E_6(\omega) + E_2(\omega)^3E_6(\omega))^2\\ &\quad - 4(E_2(\tau)E_2(\omega))^3(E_6(\tau)E_6(\omega))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega) - E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))^2 &= (E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega) + E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))^2\\ &\quad - 4(E_2(\tau)E_2(\omega))^2(E_6(\tau)E_6(\omega))^2(E_4(\tau)E_4(\omega))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2 - E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)^2 =&(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2 + E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)^2\\ &- 4(E_6(\tau)E_6(\omega))^2(E_4(\tau)E_4(\omega))^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(E_2(\tau)E_6(\tau)E_4(\omega)^2 - E_2(\omega)E_6(\omega)E_4(\tau)^2)^2\\ &= (E_2(\tau)E_6(\tau)E_4(\omega)^2 + E_2(\omega)E_6(\omega)E_4(\tau)^2)^2\\ &- 4E_2(\tau)E_2(\omega)(E_6(\tau)E_6(\omega))(E_4(\tau)E_4(\omega))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(E_2(\tau)^2E_4(\omega) - E_2(\omega)^2E_4(\tau))(E_2(\tau)^3E_6(\omega) - E_2(\omega)^3E_6(\omega))\\ &= (E_2(\tau)^2E_4(\omega) + E_2(\omega)^2E_4(\tau))(E_2(\tau)^3E_6(\omega) + E_2(\omega)^3E_6(\omega))\\ &- 2(E_2(\tau)E_2(\omega))^2(E_6(\tau)E_2(\omega)E_4(\omega) + E_6(\omega)E_2(\tau)E_4(\tau))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(E_2(\tau)^2E_4(\omega) - E_2(\omega)^2E_4(\tau))(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega) - E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))\\ &= E_4(\tau)E_4(\omega)(E_2(\tau)^3E_6(\omega) + E_2(\omega)^3E_6(\tau))\\ &- E_2(\tau)E_2(\omega)(E_4(\tau)E_2(\omega)E_6(\omega) + E_4(\omega)E_2(\tau)E_6(\tau))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(E_2(\tau)^2E_4(\omega) - E_2(\omega)^2E_4(\tau))(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2 - E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)\\ &= (E_4(\tau)E_4(\omega)(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega) + E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))\\ &- 2(E_2(\tau)E_2(\omega))^2(E_4(\tau)E_4(\omega))^3E_6(\tau)E_6(\omega))^2 - 2(E_2(\tau)E_2(\omega))(E_4(\tau)E_4(\omega))^2E_6(\tau)E_6(\omega))\\ &- (E_2(\omega)E_6(\omega)E_4(\tau)^2 + E_2(\tau)E_6(\tau)E_4(\omega))^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(E_2(\tau)^2E_4(\omega)-E_2(\omega)^2E_4(\tau))(E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2-E_6(\omega)E_2(\omega)E_4(\tau)^2\\
&=(E_2(\tau)E_6(\tau)E_4(\omega)^2+E_2(\omega)E_6(\omega)E_4(\tau)^2)(E_2(\tau)^2E_4(\omega)+E_2(\omega)^2E_4(\tau))\\
&-2(E_2(\tau)E_2(\omega))(E_4(\tau)E_4(\omega))(E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau)+E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_2(\tau)^3E_6(\omega)-E_2(\omega)^3E_6(\tau))(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)-E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))\\
&=(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)+E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))(E_2(\tau)^3E_6(\omega)+E_2(\omega)^3E_6(\tau))\\
&-2(E_2(\tau)E_2(\omega))(E_6(\tau)E_6(\omega))(E_2(\omega)^2E_4(\tau)+E_2(\tau)^2E_4(\omega))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_2(\tau)^3E_6(\omega)-E_2(\omega)^3E_6(\tau))(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2-E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)\\
&=(E_2(\tau)^3E_6(\omega)+E_2(\omega)^3E_6(\tau))(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2+E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)\\
&-2(E_6(\tau)E_6(\omega))((E_2(\omega)E_6(\omega)E_4(\tau)^2+E_2(\tau)E_6(\tau)E_4(\omega)^2)(E_2(\omega)^2E_4(\tau)+E_2(\tau)^2E_4(\omega))\\
&-E_2(\tau)E_2(\omega)E_4(\tau)E_4(\omega)(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)+E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_2(\tau)^3E_6(\omega)-E_2(\omega)^3E_6(\tau))(E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2-E_6(\omega)E_2(\omega)E_4(\tau)^2)\\
&=E_6(\tau)E_6(\omega)((E_2(\tau)^2E_4(\omega)+E_2(\omega)^2E_4(\tau))^2-(E_2(\omega)E_2(\tau))^2E_4(\tau)E_4(\omega))\\
&-E_2(\tau)E_2(\omega)((E_6(\tau)E_4(\omega)E_2(\omega)+E_6(\omega)E_4(\tau)E_2(\tau))^2\\
&-E_6(\tau)E_6(\omega)E_4(\tau)E_4(\omega)E_2(\tau)E_2(\omega))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)-E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^3-E_4(\omega)^3E_6(\tau)^3)\\
&=(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2+E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)(E_4(\tau)E_2(\tau)E_6(\omega)+E_4(\omega)E_2(\omega)E_6(\tau))\\
&-2(E_6(\tau)E_6(\omega))(E_4(\tau)E_4(\omega))(E_6(\tau)E_4(\omega)^2E_2(\tau)+E_6(\omega)E_4(\tau)^2E_2(\omega))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)-E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))(E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2-E_6(\omega)E_2(\omega)E_4(\tau)^2)\\
&=E_6(\tau)E_6(\omega)E_4(\tau)E_4(\omega)(E_2(\tau)^2E_4(\omega)+E_2(\omega)^2E_4(\tau))\\
&-E_2(\tau)E_2(\omega)(E_6(\tau)^2E_4(\omega)^3+E_6(\omega)^2E_4(\tau)^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2-E_6(\omega)E_2(\omega)E_4(\tau)^2)(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2-E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2)\\
&=(E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2+E_6(\omega)E_2(\omega)E_4(\tau)^2)(E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2+E_4(\omega)^3E_6(\tau)\\
&-2(E_6(\tau)E_6\omega))(E_4(\tau)E_4\omega))(E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)+E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau))
\end{aligned}
$$

■

Ces quinzes fonctions sont donc bien dans $S(8)$ et par conséquent les puissances paires et les produits pairs de nos cinqs fonctions antisymétriques sont dans $S(8)$: finalement nous avons montré que $S(8) = QMS[SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})]$.
Ces deux systèmes sont aussi minimaux : pour le voir, il suffit de faire des considérations sur le poids et la conclusion est immédiate.

Corollaire 7 *Les formes quasi-modulaires antisymétriques sur $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$, c'est à dire les formes quasi-modulaires qui vérifient $f(\tau,\omega)=-f(\omega,\tau)$ sont engendrées des combinaisons linéaires de produits impairs isobares de ces cinq éléments :*

$$E_2(\tau)^2E_4(\omega)-E_2(\omega)^2E_4(\tau); E_2(\tau)^3E_6(\omega)-E_2(\omega)^3E_6(\tau)$$
$$E_2(\tau)E_4(\tau)E_6(\omega)-E_2(\omega)E_4(\omega)E_6(\tau); E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2-E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2$$
$$E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2-E_6(\tau)E_2(\tau)E_4(\omega)^2.$$

Ce système de générateurs est minimal.

Preuve: Nous avons montré dans la démonstration précédente que l'algèbre $QM[SL_2(\mathbb{Z})\times SL_2(\mathbb{Z})]$ était engendré par ces cinq formes antisymétriques et les formes symétriques précédemment introduites . Le fait que les produits s'effectuent sur un nombre impair est justifié par la démonstration précédente, il reste donc à justifier que le système de générateurs est minimal mais une considération sur le poids nous donne immédiatement la conclusion. ■

1.4 Les formes quasi-modulaire sur $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$ pour le caractère v_η^r sur chaque variable

Les résultats donnés ici le seront sans démonstrations puisque celles-ci se déduisent immédiatement des démonstrations données dans le cas sans caractères. Commençons par donner une définition :

Définition 10 *Soit k un entier et $s:=(s_1,s_2)$ un couple d'entier. On appelle forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur s par rapport au système multiplicatif $v_\eta^{r_1}\times v_\eta^{r_2}$ une fonction holomorphe f de $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :*

$$v_\eta^{-r_1}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)v_\eta^{-r_2}\left(\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\right)(c\tau+d)^{-k}(c'\omega+d')^{-k}f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{a'\omega+b'}{c'\omega+d'})$$
$$=\sum_{\substack{0\le n_1\le s_1\\0\le n_2\le s_2}}f_{n_1,n_2}(\tau,\omega)\big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^{n_1}\big(\frac{c'}{c'\omega+d'}\big)^{n_2},$$

$\forall\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ *: les fonctions f_{n_1,n_2} sont des fonctions holomorphes de $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ à croissance tempérée en chaque variable.*

Nous appellerons $QM_k[SL_2(\mathbb{Z})^2,v_\eta^{r_1}\times v_\eta^{r_2}]$ l'ensemble de ces fonctions sans précisions sur la profondeur et $QM[SL_2(\mathbb{Z})^2,v_\eta^{r_1}\times v_\eta^{r_2}]$ celles ou nous ne précisons ni le poids et la profondeur. Nous allons maintenant regarder quelles propriétés de formes quasi-modulaires à une variable, nous pouvons exporter à cet ensemble. Nous noterons $QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z})^2,v_\eta^{r_1}\times v_\eta^{r_2}]$ les formes quasi-modulaires d'ordre k et de profondeur au plus s : c'est à dire de profondeur au plus s_1 par rapport à τ et au plus s_2 par rapport à ω.

Le résultat suivant est très important et nous permet d'étendre les propositions que nous avons données dans la partie précédentes à ces nouvelles formes quasi-modulaires :

Proposition 23 *Nous avons pour r, k des entiers positifs et s un couple d'entiers :*

$$\begin{aligned} QM[SL_2(\mathbb{Z})^2, v_\eta^{r_1} \times v_\eta^{r_2}] &= \eta^{r_1}(\tau)\eta^{r_2}(\omega)QM[SL_2(\mathbb{Z})^2] \\ QM_k[SL_2(\mathbb{Z})^2, v_\eta^{r_1} \times v_\eta^{r_2}] &= \eta^{r_1}(\tau)\eta^{r_2}(\omega)QM_k[SL_2(\mathbb{Z})^2] \\ QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z})^2, v_\eta^{r_1} \times v_\eta^{r_2}] &= \eta^{r_1}(\tau)\eta^{r_2}(\omega)QM_{k,s}[SL_2(\mathbb{Z})^2] \end{aligned}$$

Cette proposition se déduit immédiatement des démonstrations que nous avons données sur les formes quasi-modulaires sur $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$ et des démonstrations que nous avons données sur les formes modulaires sur $SL(2,\mathbb{Z})$ avec caractères. Les propriétés de structure des nouveaux ensembles se déduisent donc de celles des ensembles sans caractères.

1.5 Sous-groupes de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$

Dans tout ce que nous venons de faire, nous avons supposé que nous travaillions avec $SL(2,\mathbb{Z})$ tout entier, cependant nous pouvons donner des définitions similaires avec cette fois un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$: nous pouvons ainsi construire des formes quasi-modulaires pour $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Les ensembles précédemment définis seront notés de la même façon, il suffit de remplacer $SL(2,\mathbb{Z})$ par le sous-groupe de congruence voulu. Nous imposons alors les définitions suivantes :

Définition 11 *Soit k un entier positif et un couple d'entiers. Nous avons :*

$$\begin{aligned} &QM[\Gamma_1] = M_*(\Gamma_1)[G_2] \\ &QM[\Gamma_1 \times \Gamma_2] = QM[\Gamma_1] \bigotimes QM[\Gamma_2] \\ &\tilde{QM}[\Gamma_1 \times \Gamma_2] = QM[\Gamma_1 \times \Gamma_2] \\ &QM_k[\Gamma_1 \times \Gamma_2] = QM_k[\Gamma_1] \bigotimes QM_k[\Gamma_2] \\ &\tilde{QM}_k[\Gamma_1 \times \Gamma_2] = QM_k[\Gamma_1 \times \Gamma_2] \end{aligned}$$

De plus en ce qui concerne les formes quasi-modulaires symétriques, nous exigons que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Nous pouvons aussi introduire des caractères sur $SL(2,\mathbb{Z})$ ou des caractères de Dirichlet mais nous n'expliciterons pas les définitions. Les ensembles que nous venons de définir vont apparaître lorsque nous étudierons les développements en série de Taylor des formes modulaires de Siegel de genre 2 en un point différent de 0.
Les coefficients de Taylor des formes modulaires de Siegel de genre 2 réflectives, étudiées dans [Cle9] et [V. 08], sont des formes quasi-modulaires de ce type.

Chapitre 2

Formes modulaires de Jacobi classiques

Dans ce chapitre, nous allons rappeler ce qu'est une forme modulaire de Jacobi à la fois pour un caractère trivial et non trivial de $Sl(2,\mathbb{Z})$. Ensuite nous verrons quelles sont les propriétés des développements de Taylor en $z=\lambda\tau+\mu$ avec (λ,μ) dans $\mathbb{Q}^2$ et nous donnerons quelques exemples de ces développements. Enfin, nous établirons une égalité du type du dénominateur entre une série d'Eisenstein et une puissance d'une fonction θ.

2.1 Rappels

2.1.1 Séries D'Eisenstein et dimension des espaces

Nous allons rappeler quelques propriétés sur les formes de Jacobi, telles qu'elle sont définies dans le livre de M.Eichler et D.Zagier [EZ85] ; nous verrons plus tard le cas où il y a un caractère de $SL(2,\mathbb{Z})$ en plus dans la définition et dans une autre partie le cas où z est un élément d'un réseau.

Définition 12 *Une forme de Jacobi de poids k et de d'indice m (k et m entiers) pour un sous-groupe d'indice fini Γ de $SL(2,\mathbb{Z})$ est une fonction holomorphe ϕ de $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :*

$$\phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k e^{\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}}\phi(\tau,z)$$
$$\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu) = e^{-2\pi im(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\phi(\tau,z)$$

où les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ sont dans Γ et λ, μ sont des entiers. De plus pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$ nous devons avoir :

$$\phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d})(c\tau+d)^{-k}e^{\frac{-2\pi imcz^2}{c\tau+d}} = \sum_{4m\frac{n}{t}-r^2\geq 0} c(n,r)q^{\frac{n}{t}}\xi^r$$

Si dans la somme précédente, l'inégalité est stricte, nous parlerons de formes paraboliques de Jacobi.

Nous appellerons $J_{k,m}(\Gamma)$ l'espace vectoriel des formes de Jacobi sur Γ : ces espaces sont de dimensions finies. Nous pouvons donner une majoration de leur dimension :

Proposition 3

$$dim(J_{k,m}(\Gamma)) \leq dim(M_k(\Gamma)) + \sum_{\nu=1}^{2m} dim(S_{k+2\nu}(\Gamma))$$

Nous allons rappeler la définition des séries d'Eisenstein dans le cas des formes modulaires de Jacobi.

Définition 13 *Soit k un entier plus grand que 4 et m un entier plus grand que 1, des séries d'Eisenstein de Jacobi peuvent être définies de la façon suivante :*

$$E_{k,m}(\tau, z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (c\tau + d)^k e^{m(\lambda^2 \frac{a\tau+b}{c\tau+d} + 2\lambda \frac{z}{c\tau+d} - \frac{cz^2}{c\tau+d})}$$

Ces fonctions sont bien définies et convergent de même nous pouvons montrer que ces fonctions sont bien dans $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z}))$. Enfin, elles sont nulles quand k est impair. Dans le cas où m vaut 1 nous sommes en mesure de donner un développement de Fourier de ces fonctions :

Théorème 3 *Soit k un entier plus grand que 4, les séries $E_{k,1}$ convergent et définissent un élément non nul de $J_{k,1}(SL(2,\mathbb{Z})$ dont le développement de Fourier est donné par :*

$$E_{k,1}(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn-r^2\geq 0}} e_{k,1}(n, r) q^n \xi^r$$

où $e_{k,1}(n, r)$ vaut 1 pour $4mn = r^2$ si $r \equiv 0 (mod \ \ 2m)$, 0 sinon et pour $4mn > r^2$, nous avons :

$$e_{k,1}(n, r) = \frac{H(k-1, 4n - r^2)}{\zeta(3 - 2k)},$$

où $H(k-1, N)$ désignent les nombres de Cohen sur lesquels nous reviendrons plus tard. En particulier $e_{k,1}(m, r)$ est rationnel.

D'autres séries d'Eisenstein, différentes des précédentes, peuvent être définies dans certains cas : les cas où $m = ab^2$ avec l'entier b qui est plus grand que 2. Ces fonctions sont définies de la façon suivante :

$$E_{k,m,s}(\tau, z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (c\tau + d)^k e^{m((\lambda+\frac{s}{b})^2 \frac{a\tau+b}{c\tau+d} + 2(\lambda+\frac{s}{b}) \frac{z}{c\tau+d} - \frac{cz^2}{c\tau+d})}$$

Comme dans le cas des autres séries d'Eisenstein, la définition, la convergence et l'appartenance à $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z})$ se vérifient directement. Il est clair que ces fonctions dépendent uniquement de s modulo b et que si $b = 1$ elles correspondent aux fonctions précédentes ; de plus nous avons :

$$E_{k,m,-s}(\tau, z) = (-1)^k E_{k,m,s}(\tau, z)$$

Ces fonctions peuvent être utiles pour donner une base de l'espace de $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z})$ quand k et m sont petits.
L'espace $J_{k,1}(SL(2,\mathbb{Z})))$ est une espace dont nous aurons besoin par la suite et nous aurons besoin d'informations sur sa structure, c'est pourquoi nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 4 *L'espace des formes modulaires de Jacobi d'indice 1 sur $SL(2,\mathbb{Z})$ est un module libre de rang 2 sur l'espace des formes modulaires, de générateurs $E_{4,1}$ et $E_{6,1}$.*

Plus tard, nous serons amenés à calculer des coefficients de Fourier d'une forme modulaire de Jacobi, c'est pourquoi nous allons rappeler le théorème suivant :

Théorème 5 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice m, dont le développement de Fourier est le suivant :*

$$\phi(\tau,z)=\sum_{4nm-r^2} c(n,r)q^n\xi^r.$$

Le coefficient $c(n,r)$ dépend uniquement de $4nm-r^2$ et de $r[2m]$. Si k est pair et $m=1$ ou m est premier alors $c(n,r)$ dépend uniquement de $4mn-r^2$.

2.1.2 Les nombres de Cohen

Ces nombres apparaissent dans le calcul des coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein $E_{k,m}$: nous allons voir ici leurs propriétés et comment les calculer. Ces nombres sont étudiés dans [Coh75], dont nous allons suivre les notations.

Définition 14 *Pour r et N deux entiers positifs plus grands que 1, nous définissons les coefficients suivants :*

$$h(r,N)=\begin{cases}(-1)^{[r/2]}(r-1)!N^{r-1/2}2^{1-r}\pi^{-r}L(r,\chi_{(-1)^rN}) & si\ (-1)^rN\equiv 0ou\ 1[4]\\ 0 & si\ (-1)^rN\equiv 2ou\ 3[4]\end{cases},$$

avec la convention suivante : χ_D est le caractère $\chi_D(d)=\left(\frac{d}{D}\right)$.
Pour N dans $\mathbb{R}$ et r un entier positif, les nombres de Cohen $H(r,N)$ sont définis de la façon suivante :

$$H(r,N)=\begin{cases}\sum_{d^2|N} h(r,N/d^2) & si\ (-1)^rN\equiv 0ou\ 1[4],N>0\\ \zeta(1-2r) & si\ N=0\\ 0 & sinon\end{cases}$$

Quelques propriétés peuvent être déduites directement de cette définition. Tout d'abord ces nombres sont des nombres rationnels et pour r fixé, leur dénominateur est borné. Ensuite si $D=(-1)^rN$ est le discriminant d'un corps quadratique, alors $H(r,N)=$

$L(1-r,\chi_D)$. Plus généralement, si nous posons $(-1)^r N = Df^2$ avec D le discriminant d'un corps quadratique (nous permettons à $D=1$ d'être un discriminant avec $\mathbb{Q}(\sqrt(1)) = \mathbb{Q} \bigoplus \mathbb{Q}$), nous avons :

$$H(r,N) = L(1-r,\chi_D)\sum_{d|f}\mu(d)\chi_D(d)d^{r-1}\sigma_{2r-1}(f/d).$$

Enfin, ces nombres sont une généralisation du nombre $H(N)$ d'Hurwitz qui représente le nombre de classe d'équivalence de formes quadratiques de discriminant $-N$, chaque classe $\mathcal{C}$ étant comptée avec la multiplicité $1/Aut(\mathcal{C})$: en effet, nous avons $H(1,N) = H(N)$.
A partir de ces nombres, nous allons définir des fonctions développables en série de Fourier dont les coefficients de Fourier seront les nombres de Cohen. Les théorèmes suivants vont nous donner les propriétés modulaires de ces fonctions et par la même occasion le moyen de déterminer certains nombres de Cohen :

Théorème 6 *Soit r un entier plus grand que 1, nous définissons la fonction :*

$$H_r(\tau) = \sum_{N\geq 0} H(r,N)q^N$$

Cette fonction est bien définie et pour r plus grand que 2, H_r est une forme modulaire de poids $(2r+1)/2$ sur $\Gamma_0(4)$ au sens de Shimura.

Ce théorème permet de déterminer H_r au moyen de formes modulaires dont nous connaissons le développement de Fourier. En effet le théorème de Riemann-Roch nous donne la dimension de ces espaces, nous avons par exemple pour k positif :

$$Dim(M_k(\Gamma_0(4))) = 1 + [k/2],$$

de plus nous savons que l'espace des formes modulaires de poids demi-entier est engendré par deux formes modulaires respectivement de poids $1/2$ et 2 :

$$\theta(\tau) = \sum_{n\geq 0} q^{n^2}$$
$$F(\tau) = \sum_{\substack{n \text{impair} \\ n\geq 0}} \sigma_1(n)q^n.$$

Ainsi nous pouvons exprimer certains des H_r, en fonction de ces deux fonctions, par exemple nous avons :

$$H_2(\tau) = (1/120)(\theta^5 - 20\theta F_2)$$

Une autre approche faisant intervenir les polynômes de Gegenbauer nous permet de construire des formes modulaires à partir des nombres de Cohen, c'est ce que nous dit le théorème suivant, que nous pouvons trouver dans [Zag77] :

Théorème 7 *Soit $3 \leq r \leq k-1$, r impair, k pair et posons pour τ dans $\mathbb{H}$:*

$$C_{k,r}(\tau) = \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{t^2\leq 4m} p_{k,r}(t,m)H(r,4m-t^2)\right)q^m,$$

où $p_{k,r}(t,m)$ est le coefficient devant x^{k-r-1} dans le polynôme de Gegenbauer :

$$\frac{1}{(1-tx+mx^2)}$$

Alors $C_{k,r}$ est une forme modulaire de poids k sur $SL(2,\mathbb{Z})$ et si $r < k-1$, nous avons une forme parabolique.

Nous allons maintenant expliquer sur un exemple comment calculer ces nombres de Cohen. Pour connaître toutes les valeurs de $H(r,N)$ à r fixé, il suffit de connaître certains de ces nombres et ensuite grâce à ces valeurs d'exprimer la fonction H_r en fonction des puissances de θ et de F. Nous savons que les $H(r,N)$ sont nulles pour certaines congruence de N modulo 4, de plus nous savons aussi que pour certains N elles sont reliées aux valeurs des fonctions L de Dirichlet pour le caractère $\chi_{(-1)^rN}$. En effet quand $(-1)^rN$ est le discriminant d'un corps quadratique, nous avons :

$$H(r,N) = L(1-r,\chi_{(-1)^rN}).$$

Les fonctions L peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de fonctions ζ d'Hurwitz :

$$L(s,\chi) = \frac{1}{k^s}\sum_{n=1}^{k}\chi(n)\zeta(s,\frac{n}{k})$$
$$\zeta(s,q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q+n)^s}.$$

De plus, pour n entier positif, nous avons la relation suivante :

$$\zeta(-n,x) = -\frac{B_{n+1}(x)}{n+1},$$

où les B_{n+1} désignent les polynômes de Bernouilli. Par conséquent, nous pouvons calculer les $L(1-r,\chi)$ pour r strictement positif et ainsi les $H(r,N)$.
Nous allons utiliser ces relations pour calculer $E_{12,1}$ en fonction de $E_{4,1}$ et $E_{6,1}$, nous avons :

$$E_{12,1}(\tau,z) = aE_4^2(\tau)E_{4,1}(\tau,z)$$

et :

$$a+b=1,$$

en identifiant le premier coefficient de Fourier. En utilisant les relations précédemment décrites, nous pouvons calculer $H(11,3)$ et $H(11,4)$ grâce à B_{11} et ainsi nous trouvons :

$$E_{12,1}(\tau,z) = aE_4(\tau)^3 + bE_6(\tau)^2 = \frac{C_{12,11}(\tau)}{\zeta(-21)} = E_{12} + \frac{2^{10}.3^5.5^2.7^2}{131.593.691}\Delta$$

Par identification des coefficients de Fourier, nous trouvons :

$$a = \frac{3^2.7^2.113}{131.593}$$
$$b = \frac{2.5^2.557}{131.593}$$

2.2 Développement de Taylor autour de $z = 0$ des formes modulaires de Jacobi

2.2.1 Nature modulaire des coefficients

Nous allons commencer par justifier l'existence d'un tel développement. L'holomorphie de f nous garantit l'existence d'un développement de Laurent avec des termes z^n où n est positif : les coefficients de ce développement de Laurent sont holomorphes sur $\mathbb{H}$ car ils sont des dérivées pris en un point de f par rapport à z. Nous pouvons maintenant formuler une proposition qui nous donne une correction automorphe, donnée dans [Gri99]

Proposition 24 *Soit ϕ une forme de jacobi de poids k et d'indice m. La fonction suivante*

$$\psi(\tau,z) = \exp(-8\pi^2 m G_2(\tau)z^2)\phi(\tau,z)$$

vérifie l'équation suivante :

$$\psi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k\psi(\tau,z)$$

pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

La preuve de cette proposition est une conséquence directe des propriétés des formes modulaires de Jacobi et de la forme quasi-modulaire $G_2(\tau)$.
Une des conséquences de cette proposition est que les coefficients de Taylor autour de $z = 0$ des formes modulaires de Jacobi sont des formes quasi-modulaires : plus précisément, le n-ième coefficient de Taylor d'une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice m est une forme quasi-modulaire de poids $k+n$; cette proposition nous donne en fait les propriétés de transformation holomorphe, il reste à démontrer le fait que ces coefficients sont holomorphes à l'infini : nous ne l'explicitons pas ici, l'argument sera donné plus tard à l'occasion d'un autre théorème.
Nous pouvons aussi donner une autre démonstration du fait que les coefficients de Taylor autour de $z = 0$ sont des formes quasi-modulaires : cette démonstration aura l'avantage

de donner une estimation de la profondeur du n-ième coefficient de Taylor autour de $z = 0$; en effet, nous savons déjà, de part la théorie sur les formes quasi-modulaires, que la profondeur du n-ième coefficient d'une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice m est borné par $(n+k)/2$. La proposition suivante donnera une amélioration de ce résultat :

Proposition 25 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice m. Soit ϕ_n le n-ième coefficient de Taylor de ϕ autour de $z = 0$, nous avons l'égalité suivante :*

$$(c\tau+d)^{-n-k}\phi_n\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\big) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \phi_{n-2r}(\tau)\big(\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\big)^r \frac{1}{r!},$$

pour tout matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$. En particulier, la profondeur de ϕ_n est au plus $[n/2]$.

Preuve: Soit ϕ_n le n-ième coefficient de Taylor de ϕ autour de $z = 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\phi\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\big)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\big)\frac{z^n}{(c\tau+d)^n}\\
=&(c\tau+d)^k \exp\big(\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}\big)\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\tau)z^n\\
=&(c\tau+d)^k \left(\sum_{r=0}^{\infty}\big(\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\big)^r\frac{z^{2r}}{r!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\tau)z^n
\end{aligned}$$

En identifiant les termes devant les z^n, nous en déduisons l'égalité suivante :

$$(c\tau+d)^{-n-k}\phi_n\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\big) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \phi_{n-2r}(\tau)\big(\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\big)^r \frac{1}{r!}$$

■

La première information que nous pouvons déduire de cette dernière proposition est que le premier coefficient de Taylor non identiquement nul est une forme modulaire : appelons i cet indice. Tout les autres coefficients de Taylor de poids plus grand que cet dernier ne seront pas modulaires. Pour voir cela, il suffit d'appliquer l'égalité que nous avons démontré dans la proposition précédente aux n plus grand que i : dans la somme, il y aura le i-ème coefficient qui est non identiquement nul et cela empêchera le n-ième d'avoir des propriétés modulaires.

L'autre information est que cette égalité nous permet en théorie de calculer tous les ϕ_n une fois que nous avons calculé le premier terme non nul et si nous connaissons le développement de Fourier de ϕ. En effet supposons que nous connaissons les n premiers

coefficients de Taylor de la fonction ϕ, nous pouvons écrire l'égalité précédente pour le coefficient ϕ_{n+1}. De plus, nous supposons que parmi ces coefficients, il en existe un qui est non identiquement nul. Soit n_0 le plus grand indice plus petit que $\frac{n+1}{2}$ tel que la fonction ϕ_{n_0} soit non identiquement nulle.
Si $n_0 = 0$, la fonction ϕ_{n+1} est une forme modulaire, ce qui est absurde puisque il existe des coefficients non identiquement nuls avant cette fonction : par conséquent cette fonction ϕ_{n+1} ne devrait pas être modulaire.
Nous avons alors n_0 non nul et d'après la théorie sur les formes quasi-modulaires, la fonction $\phi_{n+1} - (\frac{i\pi}{6})^{n_0} E_2(\tau)^{n_0}\phi_{n_0}$ est une forme quasi-modulaire de poids $n+1+k$ de profondeur au plus $n_0 - 1$ qui peut s'écrire :

$$(c\tau + d)^{-n-1-k}(\phi_{n+1} - (\frac{i\pi}{6})^{n_0} E_2(\tau)^{n_0}) = \sum_{r=0}^{n_0-1} f_r\big(\frac{c}{c\tau + d}\big)^r$$

Nous connaissons les f_r : si $n_0 - 1$ est nul, $\phi_{n+1} - (\frac{i\pi}{6})^{n_0} E_2(\tau)^{n_0}$ est une forme modulaire que nous pouvons identifier grâce au développement de Fourier de $\phi_{n+1} - (\frac{i\pi}{6})^{n_0} E_2(\tau)^{n_0}$ que nous connaissons. Si $n_0 - 1$ est non nul, nous pouvons faire ce que nous avons fait précédemment avec $E_2(\tau)^{n_0-1}$ et ainsi de suite jusqu'à tomber sur une forme modulaire que nous pourrons identifier grâce à ses coefficients de Fourier.
Dans la pratique, il est plus aisé d'utiliser la correction holomorphe quand nous connaissons le développement de Fourier de la forme modulaire de Jacobi pour calculer les premiers coefficients de Taylor autour de $z = 0$.

2.2.2 Exemples

La correction holomorphe va nous permettre de donner une méthode pour déterminer explicitement tout les coefficients de Taylor des séries d'Eisenstein $E_{4,1}$ et $E_{6,1}$: connaissant les coefficients de ces deux fonctions, nous pourrons connaître tout les coefficients de Taylor autour de $z = 0$ de toutes les fonctions de $J_{k,1}(SL(2,\mathbb{Z}))$.
Nous allons calculer explicitement les premiers coefficients de Taylor autour de $z = 0$ de $E_{4,1}$ et $E_{6,1}$ et nous expliquerons la méthode pour calculer les autres coefficients.
D'après la proposition sur la correction automorphe pour les formes modulaires de Jacobi, nous pouvons donc écrire :

$$\phi_4(\tau, z) = \exp(-8\pi^2 G_2(\tau)z^2)E_{4,1}(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{4,2n}(\tau)(2\pi z)^{2n}$$
$$\phi_6(\tau, z) = \exp(-8\pi^2 G_2(\tau)z^2)E_{6,1}(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{6,2n}(\tau)(2\pi z)^{2n},$$

où les $f_{4,2n}$ sont des formes modulaires de poids $4 + 2n$ et les $f_{6,2n}$ sont des formes modulaires de poids $2n + 6$. Le fait que nous sommons uniquement sur des termes pairs peut se voir de deux façons différentes : soit pour une question de parité, soit par le fait que les espaces des formes modulaires de poids $n + 4$ et $n + 6$ sont réduits à 0 pour n impairs.

Proposition 26 *Pour tout i entier, nous pouvons écrire :*

$$\lim_{\tau\to i\infty} f_{4,2i}(\tau) = \left(\frac{1}{12}\right)^i \frac{1}{i!}$$
$$\lim_{\tau\to i\infty} f_{6,2i}(\tau) = \left(\frac{1}{12}\right)^i \frac{1}{i!}$$

Preuve: Pour trouver ce résultat, il suffit de voir que :

$$(2\pi)^{2i} f_{4,2i}(\tau) = \frac{1}{2i!}\frac{\partial^{2i}}{\partial z^{2i}}\phi_4(\tau,z)_{|z=0}$$
$$(2\pi)^{2i} f_{6,2i}(\tau) = \frac{1}{2i!}\frac{\partial^{2i}}{\partial z^{2i}}\phi_6(\tau,z)_{|z=0}$$

Ensuite, nous écrivons :

$$\frac{\partial^{2i}}{\partial \tau^{2i}}\phi_4(\tau,z)_{|z=0} = \sum_{k=0}^{2i}\binom{k}{2i}\frac{\partial^k}{\partial z^k}(\exp(-8\pi^2 G_2(\tau)z^2))_{|z=0}\frac{\partial^{2i-k}}{\partial z^{2i-k}}E_{4,1}(\tau,z)_{|z=0}$$
$$\frac{\partial^{2i}}{\partial \tau^{2i}}\phi_6(\tau,z)_{|z=0} = \sum_{k=0}^{2i}\binom{k}{2i}\frac{\partial^k}{\partial z^k}(\exp(-8\pi^2 G_2(\tau)z^2))_{|z=0}\frac{\partial^{2i-k}}{\partial z^{2i-k}}E_{6,1}(\tau,z)_{|z=0}$$

Cependant nous avons :

$$\lim_{\tau\to i\infty}\frac{\partial^{2i-k}}{\partial z^{2i-k}}E_{4,1}(\tau,z)_{|z=0} = \begin{cases} 0, & \text{si } 2i-k\neq 0 \\ 1, & \text{si } 2i-k=0\end{cases}$$
$$\lim_{\tau\to i\infty}\frac{\partial^{2i-k}}{\partial z^{2i-k}}E_{6,1}(\tau,z)_{|z=0} = \begin{cases} 0, & \text{si } 2i-k\neq 0 \\ 1, & \text{si } 2i-k=0\end{cases}$$
$$\frac{\partial^{2i}}{\partial z^{2i}}(\exp(-8\pi^2 G_2(\tau)z^2))_{|z=0} = \frac{(2i!)}{i!}(-8\pi^2 G_2(\tau))^i$$

et la conclusion est directe en rappelant que :

$$\lim_{\tau\to i\infty} G_2(\tau) = -\frac{1}{24}$$

■

Nous pouvons donc en déduire les premiers coefficients de Taylor de ces formes de Jacobi :

$$f_{4,0}(\tau) = E_4(\tau); f_{4,2}(\tau) = \frac{1}{3}E_6(\tau); f_{4,4}(\tau) = \frac{1}{18}E_8(\tau); f_{4,6}(\tau) = \frac{1}{162}E_{10}(\tau);$$
$$f_{4,8}(\tau) = \frac{1}{1944}E_{12}(\tau) + \alpha_1\Delta_{12}(\tau); f_{4,10}(\tau) = \frac{1}{29160}E_{14}(\tau).$$
$$f_{6,0}(\tau) = E_6(\tau); f_{6,2}(\tau) = \frac{1}{3}E_8(\tau); f_{6,4}(\tau) = \frac{1}{18}E_{10}(\tau);$$
$$f_{6,6}(\tau) = \frac{1}{162}E_{12}(\tau) + \beta_1\Delta_{12}(\tau); f_{6,8}(\tau) = \frac{1}{1944}E_{14}(\tau);$$
$$f_{6,10}(\tau) = \frac{1}{29160}E_{16}(\tau) + \beta_1 E_4(\tau)\Delta_{12}(\tau)$$

Les coefficients α_1, β_1 et β_2 seront déterminés grâce aux nombres de Cohen du développement en série de Fourier des séries d'Eisenstein Jacobi.
Nous notons maintenant $\tilde{f_{4,2n}}$ et $\tilde{f_{6,2n}}$ les coefficients de Taylor de $E_{4,1}(\tau, z)$ et $E_{6,1}(\tau, z)$ respectivement. Nous pouvons exprimer ces coefficients en fonction des coefficients que nous avons calculé et nous donnerons directement le résultat final. Nous commençons par les $\tilde{f_{4,2n}}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{f_{4,0}} = 240G_4(\tau).\\
&\tilde{f_{4,2}} = -42G_6(\tau) + 480G_2(\tau)G_4(\tau).\\
&\tilde{f_{4,4}} = \frac{5}{3}G_8(\tau) + 480G_2(\tau)^2G_4(\tau) - 84G_2(\tau)G_6(\tau).\\
&\tilde{f_{4,6}} = -\frac{2673}{4}G_{10}(\tau) + 3208G_2(\tau)^3G_4(\tau) - 84G_2(\tau)^2G_6(\tau) + \frac{10}{3}G_2(\tau)G_8(\tau).\\
&\tilde{f_{4,8}} = \frac{455}{2388096}G_{12}(\tau) + \alpha_1\Delta_{12}(\tau) + 160G_2(\tau)^4G_4(\tau) - 56G_2(\tau)^3G_6(\tau)\\
&+\frac{10}{3}G_2(\tau)^2G_8(\tau) - \frac{11}{216}G_2(\tau)G_{10}(\tau).\\
&\tilde{f_{4,10}} = -\frac{1}{2^{10}.3^5.5}G_{14}(\tau) + 64G_2(\tau)^5G_4(\tau) - 28G_2(\tau)^4G_6(\tau) + \frac{20}{9}G_2(\tau)^3G_8(\tau)\\
&-\frac{11}{216}G_2(\tau)^2G_{10}(\tau) + \frac{1}{128}G_2(\tau)\alpha_1\Delta_{12}(\tau) + \frac{455}{1194048}G_2(\tau)G_{12}(\tau)
\end{aligned}$$

Pour déterminer α_1 nous procédons par identification du coefficient devant q en utilisant la formule fournie grâce aux nombres de Cohen :

$$E_{4,1}(\tau, z) = 1 + (\xi^2 + 56\xi + 126 + 56\xi^{-1} + \xi^{-2})q + \ldots$$

Nous trouvons, après calculs : $\boxed{\alpha_1 = \frac{52816}{72555} = \frac{2^4.3301}{3.5.7.691}}$.
Nous pouvons continuer à calculer ces coefficients de Taylor en itérant la méthode : il suffit de connaître les nombres de Cohen et le développement en série de Fourier de bases des espaces $M_k(SL(2, \mathbb{Z}))$. Il suffit de prendre des bases de la forme E_{2k}, ΔE_{2k-12}, $\Delta^2 E_{2k-24}$... : nous pouvons calculer les coefficients de Fourier des éléments de ces bases.

Nous passons maintenant aux calculs des $\tilde{f_{6,2n}}$, nous allons donner directement les résultats :

$$\begin{aligned}
&\tilde{f_{6,0}}(\tau) = -504G_6(\tau)\\
&\tilde{f_{6,2}}(\tau) = 40G_8(\tau) - 1008G_2(\tau)G_6(\tau)\\
&\tilde{f_{6,4}}(\tau) = -\frac{11}{12}G_{10}(\tau) - 1008G_2(\tau)^2G_6(\tau) + 80G_2(\tau)G_8(\tau)\\
&\tilde{f_{6,6}}(\tau) = \frac{455}{49752}G_{12}(\tau) + \beta_1\Delta_{12}(\tau) - 672G_2(\tau)^3G_6(\tau)\\
&+ 80G_2(\tau)^2G_8(\tau) - \frac{11}{6}G_2(\tau)G_{10}(\tau)\\
&\tilde{f_{6,8}}(\tau) = \frac{1}{20736}G_{14}(\tau) - 336G_2(\tau)^4G_6(\tau) + 160G_2(\tau)^3G_8(\tau)\\
&- \frac{11}{6}G_2(\tau)^2G_{10}(\tau) + \frac{455}{24876}G_2(\tau)G_{12}(\tau) + \frac{1}{32}G_2(\tau)\beta_1\Delta_{12}\\
&\tilde{f_{6,10}}(\tau) = \frac{17}{2^7.3^5.3617}E_{16}(\tau) + 240\beta_2\Delta_{12}(\tau)G_4(\tau) - \frac{672}{5}G_2(\tau)^5G_6(\tau)\\
&+ \frac{80}{3}G_2(\tau)^4G_8(\tau) - \frac{11}{9}G_2(\tau)^3E_{10}(\tau) + \frac{455}{24876}G_2(\tau)^2G_{12}(\tau)\\
&+ \frac{1}{32}\beta_1G_2(\tau)^2\Delta_{12}(\tau) - \frac{1}{10368}G_2(\tau)G_{14}(\tau)
\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer les nombres β_1 et β_2 grâce aux nombres de Cohen et après identifications nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{45632}{3455} = \frac{2^6.23.31}{5.691}\\
\beta_2 &= -\frac{121984}{5696775} = -\frac{2^7.953}{3^2.5^2.7.3617}
\end{aligned}$$

Nous pourrions calculer d'autres coefficients de Taylor mais les termes deviennent difficiles à écrire bien que les calculs ne soient pas difficiles en eux-mêmes.
Comme nous l'avons rappelé précédemment, l'espace $J_{k,1}(SL(2,\mathbb{Z}))$ est un module libre de rang 2 de générateurs $E_{4,1}$ et $E_{6,1}$ sur l'espace des formes modulaires, donc nous pouvons en principe calculer les coefficients de Taylor autour de $z=0$ de toutes les fonctions de cet espace.
Nous allons donner un exemple de développement de Taylor d'une fonction de cet espace que nous rencontrerons plus tard la fonction $\phi_{12,1}$ définie par :

$$\phi_{12,1}(\tau,z) = \frac{1}{144}(E_4^2E_{4,1}(\tau,z) - E_6E_{6,1}(\tau,z)) = \sum_{n\geq 0}\phi_{12,1;2n}(\tau)(2i\pi z)^{2n}$$

Les calculs nous donnent :

$$\phi_{12,1;0}(\tau) = 12\Delta_{12}(\tau)$$
$$\phi_{12,1;2}(\tau) = 24G_2(\tau)\Delta_{12}(\tau)$$
$$\phi_{12,1;4}(\tau) = 10G_4(\tau)\Delta_{12}(\tau) + 24G_2(\tau)^2\Delta_{12}(\tau)$$
$$\phi_{12,1;6}(\tau) = 16G_2(\tau)^3\Delta_{12}(\tau) + 20G_2(\tau)G_4(\tau)\Delta_{12}(\tau) - \frac{14}{15}G_6(\tau)\Delta_{12}(\tau)$$
$$\phi_{12,1;8}(\tau) = 8\Delta_{12}(\tau)G_2(\tau)^4 + 20\Delta_{12}(\tau)G_2(\tau)^2G_4(\tau) - \frac{28}{15}G_2(\tau)\Delta_{12}(\tau)G_6(\tau)$$
$$+\frac{17}{1008}\Delta_{12}(\tau)G_8(\tau)$$
$$\phi_{12,1;10}(\tau) = \frac{16}{5}\Delta G_2(\tau)^5 + \frac{40}{3}\Delta G_2^3(\tau)G_4(\tau) - \frac{28}{15}G_2(\tau)^2G_6(\tau) + \frac{17}{504}\Delta G_2(\tau)G_8(\tau)$$
$$-\frac{11}{113400}\Delta G_{10}$$

2.2.3 Opérateurs de Hecke

Nous allons maintenant introduire deux opérateurs qui nous seront utiles plus tard, notamment pour obtenir des développements de Taylor ou de Fourier.

Définition 15 *Soit l un entier strictement positif. Nous définissons deux opérateurs sur $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z}))$:*

$$U_l(\phi)(\tau,z) = \phi(\tau,lz)$$
$$V_l(\phi)(\tau,z) = l^{k-1}\sum_{\substack{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\backslash M_2(\mathbb{Z})\\ ad-bc=m}} (c\tau+d)^{-k}e^{-\frac{mlcz^2}{c\tau+d}}\phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{lz}{c\tau+d})$$

Ces deux opérateurs sont clairement bien définis sur $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z}))$, ils restent à voir leur action sur $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z}))$.

Proposition 27 *Soit l un entier plus grand que 1. Les opérateurs U_l envoient $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z}))$ dans $J_{k,ml^2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ et les opérateurs V_l envoient $J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z}))$ dans $J_{k,ml}(SL(2,\mathbb{Z}))$.*

La démonstration de cette proposition est simplement une manipulation des propriétés des formes modulaires de Jacobi. Nous allons maintenant donner certaines des propriétés de ces opérateurs :

Proposition 4 *Soit $\phi\in J_{k,m}(SL(2,\mathbb{Z}))$ et supposons qu'elle se développe en série de Fourier de la façon suivante :*

$$\phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4nm-r^2\geq 0}} c(n,r)q^l\xi^r,$$

alors nous avons :

$$U_l(\phi)(\tau,z)=\sum_{n,r} c(n,\frac{r}{l})q^n\xi^r,$$

avec la convention $c(n,\frac{r}{l})=0$ *si* $l\nmid r$ *de plus :*

$$\begin{aligned}
U_l\circ U_{l'} &= U_{ll'}\\
U_l\circ V_{l'} &= V_{l'}\circ U_l\\
V_l\circ V_{l'} &= \sum_{d|(l,l')} d^{k-1}U_d\circ V_{ll'/d^2}
\end{aligned}$$

Ces formules permettent de suggérer une définition pour l'opérateur V_0 qui est la suivante :

$$V_0(\phi)(\tau,z)=c(0,0)(-\frac{2k}{B_{2k}}+\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n)$$

Nous utiliserons cette expression lorsque nous parlerons du "Spezialschaar".
Grâce à ces opérateurs, nous sommes capables de donner les coefficients de Fourier des fonctions $E_{k,m}$ à partir des coefficients de $E_{k,1}$.

Théorème 8 *Soit* k *un entier plus grand que* 4 *et* m *un entier plus grand que* 1. *Supposons que* m *est sans facteur carré, nous avons :*

$$V_m(E_{k,1})=\sigma_{k-1}(m)E_{k,m}$$

Supposons maintenant $m=ab^2$ *quelconque, nous avons :*

$$\begin{aligned}
E_{k,m}(\tau,z) &= m^{-k+1}\prod_{p|m}(1+p^{-k+1})^{-1}\sum_{d^2|m}\mu(d)U_d\circ V_{\frac{m}{d^2}}(E_{k,1})\\
U_b(E_{k,a})(\tau,z) &= \sum_{s(mod\ b)} E_{k,m,s}(\tau,z)
\end{aligned}$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que nous pouvons maintenant calculer les coefficients de Fourier de toute les séries d'Eisenstein $E_{k,m}$.

Nous allons maintenant examiner l'action des opérateurs de Hecke sur les coefficients de Taylor d'une forme modulaire de Jacobi. Nous allons énoncer deux propriétés qui vont nous servir plus tard :

Proposition 5 *Soit* ϕ *une forme modulaire de Jacobi de poids* k *et d'indice* m *et notons* $\phi_n(\tau)$ *avec* $n\geq 0$ *ses coefficients de Taylor autour de* $z=0$. *Soit* l *un entier plus grand que* 1, *fixons les notations : nous désignerons par* $u_{n,l}(\tau)$ *les coefficients de Taylor de* $U_l(\phi)$ *et par* $v_{n,l}(\tau)$ *les coefficients de Taylor de* $V_l(\phi)$. *Pour tout* l *plus grand que* 1 *et tout* n *positif, nous avons :*

$$\begin{aligned}
u_{n,l}(\tau) &= l^n\phi_n(\tau)\\
v_{n,l}(\tau) &= \sum_{n\geq 0} T(l)(\phi_n)(\tau)z^n
\end{aligned}$$

Preuve: La première propriété se déduit immédiatement de la définition de l'opérateur U_l.
Pour le deuxième opérateur, il suffit d'appliquer le lemme que nous avons vu lorsque nous avons parlé des opérateurs de Hecke et nous obtenons l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} V_l(\phi)(\tau,z) &= l^{k-1}\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=l\\ b[d]}} d^{-k}\phi\left(\frac{a\tau+b}{d},az\right) \\ &= l^{k-1}\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=l\\ b[d]}} d^{-k}\left(\sum_{n\geq 0}\phi_n\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)a^n z^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{a\geq 1\\ ad=l\\ b[d]}} l^{n+k-1}d^{-n-k}\phi_n\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right)z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} T(m)(\phi_n)(\tau)z^n \end{aligned}$$

■

Dans la formule précédente, les opérateurs de Hecke sont ceux que nous avons définis pour les formes quasi modulaires ; nous ne préciserons jamais dans les formules quel sera le poids sur lequel s'appliqueront ces opérateurs de Hecke mais il sera évident grâce aux contexte.

2.3 Développement de Taylor des formes modulaires de Jacobi en $z = \lambda\tau + \mu$

Si nous voulons voir ce qu'il se passe autour d'un autre nombre que 0, nous avons besoin de mettre en place d'autre outils et surtout de parler en terme d'actions de groupes sur les formes modulaires de Jacobi : nous reprenons les outils introduits dans [EZ85].
L'ensemble $\mathbb{Z}^2$ et le groupe $Sl(2,\mathbb{Z})$ agissent sur les formes modulaires de Jacobi de poids k et d'indice m, ces deux actions se présentent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi|_{[\lambda,\mu]} &= e^m[\lambda^2\tau + 2\lambda z + \lambda\mu]\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) \\ \phi|_M &= (c\tau+d)^{-k}e^m\left[-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right]\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right), \end{aligned}$$

où (λ,μ) est un couple de $\mathbb{Z}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. Le fait que ces ensembles définissent une action se vérifie rapidement. Nous pouvons étendre ces actions à $\mathbb{R}^2$ et $SL(2,\mathbb{R})$ mais nous ne pouvons pas le faire directement en remplaçant les éléments rationnels que nous manipulons par des réels. Nous nous donnons pas les détails, que nous pouvons trouver dans [EZ85], mais nous pouvons montrer le groupe défini par $SL(2,\mathbb{R})\ltimes(\mathbb{R}^2.S^1)$ agit sur les formes modulaires de Jacobi de poids k et d'indice m comme suit :

$$\phi_{\Big|\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\lambda,\mu);\xi\right]} = \xi^m (c\tau+d)^{-k} e^m\big[-\frac{c(z+\lambda\tau+\mu)^2}{c\tau+d} + \lambda^2\tau + 2\lambda z + \mu\lambda\big] \\ \times \phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}).$$

Ce groupe possède la loi de composition suivante :

$$[M,X,\xi]\times[M^{'},X^{'},\xi^{'}] = [MM^{'}, XM^{'}+X^{'}, \xi\xi^{'}e^m\big[det\begin{pmatrix} XM^{'} \\ X^{'} \end{pmatrix}]],$$

En particulier, nous avons :

$$\begin{aligned} &\big(\phi_{|[I_2,[\lambda,\mu],1]}\big)_{|[M,0,1]} \\ =&\big(\phi_{|[M,0,1]}\big)_{|[(\lambda,\mu)M,0,1]}, \end{aligned}$$

pour des matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$ et des couples (λ,μ) de $\mathbb{Q}^2$.
Ces outils mis en place, nous pouvons donner une version, plus adaptée aux développements de Taylor, d'un des théorèmes de [EZ85] :

Théorème 9 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k entier, d'indice m entier et soit $X = (\lambda,\mu)$ un couple de $\mathbb{Q}^2$. Nous définissons la fonction ϕ_X par la formule suivante :*

$$\phi_X(\tau,z) = \phi_{|X}(\tau,z)$$

La fonction ϕ_X se développe en série de Taylor autour de $z=0$ et ses coefficients sont des formes quasi-modulaires pour le groupe $\Gamma_{m,\lambda,\mu} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \big| (a-1)\lambda + c\mu \in \mathbb{Z}; b\lambda + (d-1)\mu \in \mathbb{Z}; m(c\mu^2 + (d-a)\lambda\mu - b\lambda^2 \in \mathbb{Z})\right\}$ *: ce groupe est un sous groupe d'indice fini de $SL(2,\mathbb{Z})$.*

Une des différences majeures avec le cas précédent est que nous ne sommes pas réduits à seulement deux cas de figure : des poids uniquement pairs ou uniquement impairs.

Preuve: Soit $X^{'} = (\lambda^{'},\mu^{'})$ un élément de $\mathbb{Z}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \phi_{X+X'}(\tau,z) &= e^m[(\lambda+\lambda^{'})^2\tau + 2(\lambda+\lambda^{'})z + (\mu+\mu^{'})(\lambda+\lambda^{'})]\phi(\tau, z+(\lambda+\lambda^{'})\tau+\mu+\mu^{'}) \\ &= e^m[(\lambda+\lambda^{'})^2\tau + 2(\lambda+\lambda^{'})z + (\mu+\mu^{'})(\lambda+\lambda^{'}) - \lambda^{'2}\tau - 2\lambda^{'}(z+\lambda\tau+\mu)] \\ &\times \phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) \\ &= e^m[\lambda\mu^{'} - \lambda^{'}\mu]\phi_X(\tau,z) \end{aligned}$$

Ainsi il apparaît que ϕ_X dépend uniquement de X modulo $\mathbb{Z}^2$ et plus précisément si $X = \frac{1}{N}(a,b)$ où a,b,N sont dans $\mathbb{Z}$, alors ϕ_X dépend de X modulo $N\mathbb{Z}^2$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}(c\tau+d)^{-k}e^{-\frac{2\pi icz^2}{c\tau+d}}\phi_X(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) &= \big((\phi_{|X})_{|M}\big)(\tau,z)\\ &= \big((\phi_{|[M,XM,1]})\big)(\tau,z)\\ &= \big((\phi_{|[M,0,1]|[1,XM,1]})\big)(\tau,z)\\ &= \phi_{[1,XM,1]}(\tau,z)\\ &= \phi_{|XM}(\tau,z)\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant regarder à quelles conditions ce dernier terme est égal à $\phi_{|X}(\tau,z)$, pour cela nous faisons agir sur lui l'élément $-X$:

$$\begin{aligned}&(\phi_{|XM})_{|-X}(\tau,z)\\ &= (\phi_{|[1,XM,1]})_{|[1,-X,1]}(\tau,z)\\ &= \phi_{|[1,XM-X,\det(-X,XM)]},\end{aligned}$$

nous avons égalité entre $\phi_{|X}(\tau,z)$ et $\phi_{[1,XM,1]}(\tau,z)$ si et seulement si $\phi_{|[1,XM-X,\det(-X,XM)]}$ est identiquement égal à ϕ. Par conséquent, nous pouvons conclure que la fonction ϕ_X respecte les règles de transformations modulaires pour le sous-groupe
$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \middle| XM \equiv X \mod \mathbb{Z}^2, m\det(X,XM) \in \mathbb{Z}\right\}$: c'est le groupe que nous avions énoncé. Le fait que ce groupe soit d'indice fini dans $SL(2,\mathbb{Z})$ s'explique par l'inclusion dans ce dernier du groupe $\Gamma\big(\frac{N^2}{(N,m)}\big)$ où N est le ppcm des dénominateurs du couple X. Finalement, si $M \in \Gamma_{m,\lambda,\mu}$, nous avons :

$$(\phi_X)_{|M}(\tau,z) = e^m[\lambda_1^2\tau + \lambda_1\mu_1](\phi_{|M})(\tau,\lambda_1\tau+\mu_1+z)$$

où $(\lambda_1,\mu_1) = XM$, et puisque $\phi_{|M}$ a un développement de Fourier contenant $q^n\xi^r$ pour $4mn \geq r^2$, $\phi_X(\tau,z)$ n'a que des termes positifs en puissance de q . En effet, nous avons :

$$\phi_{|M}(\tau,\lambda_1\tau+\mu_1+z) = \sum_{r^2\leq 4nm}\tilde{c}(n,r)e^{2\pi i}[n\lambda\tau + r(\lambda_1\tau+mu_1+z)],$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned}\phi_X(\tau,z) &= e^m[\lambda_1^2\tau+\lambda_1\mu_1](\phi_{|M})(\tau,\lambda_1\tau+\mu_1)\\ &= \sum_{r^2\leq 4nm}\tilde{c}(n,r)e^{2i\pi}[(m\lambda_1^2+n+r\lambda_1)\tau + m\lambda_1\mu_1 + r\mu_1].\end{aligned}$$

Il nous suffit de regarder le signe de $m\lambda_1^2+n+r\lambda_1$: son discriminant est r^2-4mn qui est négatif ou nul, donc le trinôme précédent est de signe constant (il peut s'annuler si le discriminant est nul) et nous constatons qu'il est positif en prenant une valeur particulière.Il nous reste à montrer que les développements de Fourier de $(\phi_{|X})_{|M}$ ne comportent que des termes positifs en puissances de q pour tout M dans $SL(2,\mathbb{Z})$. Pour cela, nous reprenons une égalité qui est vraie pour tout M dans $SL(2,\mathbb{Z})$:

$$(\phi_{|XM})_{|-X}(\tau, z)$$
$$\phi_{|XM}(\tau, z)$$

et un calcul similaire à celui que nous venons de faire précédemment nous donne l'holomorphie à l'infini de cette fonction.
Considérons maintenant le développement de Taylor de $\phi_{|X}(\tau, z)$ autour de $z = 0$, nous l'écrivons ainsi :

$$\phi_{|X}(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\tau) z^n,$$

le fait que ce développement existe et ne contient que des n positifs repose sur des arguments que nous avons donnés précédemment. D'après les propriétés de transformation de cette fonction par rapport au groupe $\Gamma_{m,\lambda,\mu}$, nous pouvons écrire pour toute matrice de $\Gamma_{m,\lambda,\mu}$:

$$\phi_{|X}(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k e^{\frac{2\pi icz^2}{c\tau+d}} \phi_{|X}(\tau, z).$$

Comme nous l'avons vu précédemment, ce type d'égalité nous permet de conclure que les coefficients ϕ_n ont des propriétés de transformations quasi-modulaires par rapport à $\Gamma_{m,\lambda,\mu}$, de plus nous avons montré que la fonction $\phi_{|X}$ n'avait que des puissances de q positives une fois nous avions fait agir une matrice de groupe, par conséquent les ϕ_n sont des formes quasi-modulaires pour ce groupe. ■

Les développements avec lesquels nous venons de travailler sont une nouvelle fois en $z = 0$, mais cette fois nous pouvons passer à des développement en des points de la formes $\lambda\tau + \mu$ via un changement de variables.

Corollaire 8 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k entier, d'indice m entier et soit $X = (\lambda, \mu)$ un couple de $\mathbb{Q}^2$. Les fonctions définies par :*

$$e^{2\pi im(-\lambda^2\tau+2\lambda z-\lambda\mu)}\phi(\tau, z)$$

se développent en série de Taylor autour de $z = \lambda\tau + \mu$ et leurs coefficients de Taylor sont des formes quasi-modulaires pour le groupe $\Gamma_{m,\lambda,\mu}$.

En particulier, si nous prenons $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, la fonction du corollaire précédent se ramène à ϕ et $\Gamma_{m,0,\frac{p}{q}}$ contient le groupe $\Gamma_0(q^2)$. Si par contre, nous prenons $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{1}{2}$, $\Gamma_{m,0,\frac{p}{q}}$ ne contient pas $\Gamma_0(4)$ mais le sous groupe $\Gamma(4)$
Nous pouvons maintenant écrire une formule de correction holomorphe :

Proposition 28 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k, d'indice m entier et soit $X = (\lambda, \mu)$ un couple de $\mathbb{Q}^2$. La fonction ϕ_X est la fonction définie précédemment, la fonction :*

$$\exp(-8\pi^2 m G_2(\tau) z^2)\phi_X$$

se développe en série de Taylor autour de $z = 0$ et ses coefficients de Taylor sont des formes modulaires pour $\Gamma_{m,\lambda,\mu}$.
En particulier, si $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{p}{q}$, nous sommes ramenés à la fonction :

$$\exp(-8\pi^2 m G_2(\tau) z^2)\phi(\tau, z + \frac{p}{q})$$

Un changement de variable nous permet de dire que la fonction :

$$\exp(-8\pi^2 m G_2(\tau)(z + \lambda\tau + \mu)^2) e^{2\pi i m(-\lambda^2\tau + 2\lambda z - \lambda\mu)}\phi(\tau, z)$$

se développe en série de Taylor autour de $z = \lambda\tau + \mu$ et que ses coefficients sont des formes modulaires pour $\Gamma_{m,\lambda,\mu}$.

Nous pouvons aussi donner une majoration de la profondeur de chaque coefficients de Taylor autour de $z = 0$ des ϕ_X, la preuve est la même que dans le cas ou $X = (0, 0)$:

Proposition 29 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k entier, d'indice m entier et soit $X = (\lambda, \mu)$ un couple de $\mathbb{Q}^2$. La profondeur du n-ième coefficient de Taylor autour de $z = 0$ de ϕ_X est au plus $[n/2]$*

Bien que nous puissions développer les formes modulaires de Jacobi de poids k et d'indice m en série de Taylor autour de $z = \lambda\tau + \mu$ et aussi trouver une correction automorphe dans ce cas, tout ne fonctionne pas comme dans le cas $z = 0$.
L'un des problèmes qui se posent est l'effet des opérateurs de Hecke sur ces coefficients : nous ne trouvons pas de formules qui lient les coefficients d'une forme modulaire de Jacobi ϕ aux coefficients des formes de Jacobi $U_l(\phi)$ et $V_l(\phi)$ comme dans le cas $z = 0$.
De plus, les groupes auxquels nous avons à faire sont des sous groupes de $SL(2, \mathbb{Z})$: ce qui complique le calcul explicite car nous ne connaissons pas toujours des bases pour les formes modulaires relativement à ces sous groupes.
Nous nous limitons au cas des rationnels non nuls pour deux raisons : tout d'abord le théorème adapté de n'est plus applicable dans le cas où nous avons des irrationnels, enfin et c'est la raison principale : il n'y a pas une bonne topologie des points à l'infini dans le cas des nombres irrationnels pour les développements de Fourier.

2.4 La fonction théta de Jacobi

Dans la section précédente, nous avons rappelé la définition des formes modulaires de Jacobi comme elle est énoncée dans [EZ85], cependant cette définition n'est pas vérifiée par une célèbre forme modulaire de Jacobi : la fonction θ de Jacobi.
Nous allons rappeler la définition de cette fonction, ses propriétés et nous verrons comment ses coefficients de Taylor se comportent.

2.4.1 Généralités

Nous allons rappeler une définition plus générale des formes de Jacobi sur $SL(2,\mathbb{Z})$, définition à laquelle satisfera la fonction θ de Jacobi.

Définition 16 *Soient k un demi entier et m un rationnel positif. Nous dirons qu'une fonction ϕ holomorphe de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ est une forme modulaire de Jacobi de poids k, d'indice m et de système multiplicatif v pour G^J si pour tout $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ et tout μ, λ dans $\mathbb{Z}$ elle vérifie :*

$$\begin{aligned}
\phi\big(A. < \tau >, \frac{z}{c\tau+d}\big) &= (c\tau+d)^k e^{2\pi i m}\big[\frac{cz^2}{c\tau+d}\big] v(A,[0,0;0])\phi(\tau,z) \\
\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu)e^{2\pi i m(\lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu+\kappa)} &= v(1,[\lambda,\mu;\kappa])\phi(\tau,z),
\end{aligned}$$

De plus nous demandons un développement de Fourier de la forme :

$$\phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Q}, r\in\mathbb{Q} \\ 4mn-r^2\geq 0}} c(n,r)q^n\xi^r$$

Le premier exemple d'une telle fonction est la fonction θ de Jacobi :

$$\theta(\tau,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{m}\right) q^{\frac{m^2}{8}} r^{\frac{m}{2}},$$

où le terme entre parenthèses est défini de la façon suivante :

$$\left(\frac{-4}{m}\right) = \begin{cases} \pm 1, & \text{si } m \equiv \pm 1[4] \\ 0 & \text{si } m \equiv 0[2] \end{cases}.$$

Cette fonction est une forme modulaire de Jacobi de poids et d'indice $\frac{1}{2}$ et pour le caractère $v = v_\eta^3 \times v_H$ où :

$$v_H([\lambda,\mu,\kappa]) = (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu+\kappa}$$

Ce caractère est l'unique caractère binaire de $H(\mathbb{Z})$, le groupe d'Heisenberg :

$$H(\mathbb{Z}) \cong \left\{ \lambda,\mu,\kappa \in \mathbb{Z} | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1 & \mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nous supposons maintenant que $v = v_\eta^r \times v_H^\epsilon$ où ϵ vaut 0 ou 1. En faisant une étude similaire à celle sur les formes de Jacobi de poids et d'indice entiers, nous pouvons donner des propriétés quasi-modulaire pour les coefficients de Taylor en $z = 0$ de telles formes de Jacobi.

Proposition 30 *Soit k un demi-entier positif et m un rationnel positif, ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice m pour $v = v_\eta^r \times v_H^\epsilon$ un système multiplicatif pour G^J. La fonction définie par :*

$$\varphi(\tau, z) = e^{-8\pi^2 m G_2(\tau) z^2} \phi(\tau, z)$$

se développe en série de Taylor autour de $z = 0$ et son n-ième coefficient de Taylor est une forme modulaire de poids $k + n$, pour $SL(2, \mathbb{Z})$ et pour le système multiplicatif v_η^r.

Preuve: La preuve est la même que dans le cas des formes de Jacobi classique. ■

Cette proposition nous permet de connaître les propriétés modulaires des coefficients de Taylor en $z = 0$ des formes modulaires de Jacobi pour un système multiplicatif $v = v_\eta^r \times v_H^\epsilon$: ces coefficients sont des formes quasi-modulaires pour le système multiplicatif v_η^r. Ainsi nous en déduisons par exemple que les coefficients de Taylor autour de $z = 0$ de la fonction θ de Jacobi sont des formes quasi-modulaires pour le système multiplicatif v_η^3. Comme dans le cas sans systèmes multiplicatifs, nous pouvons donner des relations entre les coefficients de Taylor :

Proposition 31 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice m pour $v = v_\eta^r \times v_H^\epsilon$. Soit ϕ_n le n-ième coefficient de Taylor de ϕ autour de $z = 0$, nous avons l'égalité suivante :*

$$v_\eta^{-r}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(c\tau + d)^{-n-k} \phi_n\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \phi_{n-2r}(\tau) \left(\frac{2\pi i m c}{c\tau + d}\right)^r \frac{1}{r!},$$

pour tout matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{Z})$. En particulier, la profondeur de ϕ_n est au plus $[n/2]$.

L'une des conséquences immédiate de cette proposition est que le premier coefficient de Taylor non identiquement nul est une forme modulaire, de plus tous les autres coefficients ne sont jamais des formes modulaires.

Comme dans le cas des formes modulaires de Jacobi de [EZ85], les coefficients de Taylor en $z = \lambda\tau + \mu$ d'une forme de Jacobi pour le système multiplicatif $v_\eta^r \times v_H^\epsilon$ ont des propriétés modulaires. Contrairement au cas que nous avons développé précédemment, nous ne pouvons pas utiliser des actions de groupe puisque nous ne pouvons pas donner des groupes agissant sur ces fonctions et qui contiennent $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, cependant la plupart des arguments peuvent être repris comme nous allons le voir :

Proposition 32 *Soit $X = (\lambda, \mu)$ un couple de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice m pour le système multiplicatif $v_\eta^r \times v_H^\epsilon$. Nous définissons la fonction ϕ_X :*

$$\phi_X(\tau, z) = e^{2\pi m i(\lambda^2\tau + 2\lambda z + \lambda\mu)} (-1)^{-2m(\lambda+\mu+\lambda\mu)} \phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu)$$

Cette fonction se développe en série de Taylor en $z = 0$ et ces coefficients de Taylor sont des formes quasi-modulaires pour le groupe $\Gamma_X = \left\{M \in SL(2, \mathbb{Z}) | MX - X \in 2\mathbb{Z}, m \det(XM, X) \in \mathbb{Z}\right\}$ et pour le caractère v_η^r.

Preuve: Même si nous n'avons plus forcement des actions de groupes, nous conserverons les notations utilisées dans la démonstration concernant les formes de Jacobi sans caractères, à savoir :

$$\begin{aligned}\phi_{|X}(\tau,z) &= e^{2\pi mi(\lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu)}(-1)^{-2m(\lambda+\mu+\lambda\mu)}\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu)\\ \phi_{|M}(\tau,z) &= v_\eta^{-r}(c\tau+d)^{-r/2}e^{-\frac{2\pi micz^2}{c\tau+d}}\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\end{aligned}$$

Nous pouvons montrer les égalités suivantes pour $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}&(\phi_X)_{|M}(\tau,z)\\ =&(-1)^{2m(a\lambda+c\mu+b\lambda+d\mu+(a\lambda+c\mu)(b\lambda+d\mu))}(-1)^{-2m(\lambda+\mu+\lambda\mu)}(\phi_{|M})_{|XM}(\tau,z)\\ =&(-1)^{2m(a\lambda+c\mu+b\lambda+d\mu+(a\lambda+c\mu)(b\lambda+d\mu))}(-1)^{-2m(\lambda+\mu+\lambda\mu)}(\phi_{XM})(\tau,z).\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant faire le lien entre $(\phi_{XM})(\tau,z)$ et $(\phi_X)(\tau,z)$ et pour cela nous supposons que $a\lambda+c\mu-\lambda$ et $b\lambda+d\mu-\mu$ sont dans $\mathbb{Z}$. par conséquent, nous pouvons écire :

$$\begin{aligned}&(\phi_{XM})(\tau,z)\\ =&e^{2\pi mi((a\lambda+c\mu)^2\tau+2(a\lambda+c\mu)z+(a\lambda+c\mu)(b\lambda+d\mu)}(-1)^{-2m(a\lambda+c\mu+b\lambda+d\mu+(a\lambda+c\mu)(b\lambda+d\mu))}\\ &\theta(\tau,z+\lambda(a\tau+b)+\mu(c\tau+d)),\end{aligned}$$

c'est dans le dernier terme que nous allons utiliser notre hypothèse :

$$\begin{aligned}&\theta(\tau,z+\lambda(a\tau+b)+\mu(c\tau+d))\\ =&e^{-2\pi mi\left((a\tau+b)^2\tau+\lambda^2\tau-2\lambda(a\lambda+c\mu)\tau+2(a\lambda+c\mu)\mu-\lambda^2\tau-2\lambda z-\lambda\mu\right)}\\ &(-1)^{2m(a\lambda+c\mu-\lambda+b\lambda+d\mu-\mu)}\theta(\tau,z+\lambda\tau+\mu)\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}&(\phi_X)_{|M}(\tau,z)\\ =&(-1)^{2m(a\lambda+c\mu-\lambda+b\lambda+d\mu-\mu)}e^{-2\pi mi\left(-ab\lambda^2-ad\lambda-ad\mu\lambda-\mu\lambda bc-dc\mu^2+2a\mu\lambda+2c\mu^2+\lambda\mu\right)}\phi_X(\tau,z)\\ =&(-1)^{2m(a\lambda+c\mu-\lambda+b\lambda+d\mu-\mu)}e^{-2\pi mi((a\lambda+c\mu-\lambda)(b\lambda+d\mu-\mu)+c\mu^2-b\lambda^2-a\mu\lambda-d\lambda\mu)}\phi_X(\tau,z)\end{aligned}$$

Finalement si M est dans le groupe que nous avons défini dans l'énoncé de la proposition, nous avons :

$$(\phi_X)_{|M}(\tau,z)=\phi_X(\tau,z),$$

ce qui nous assure que les coefficients de Taylor de cette fonction en $z=0$ sont des formes quasi-modulaires pour Γ_X et pour le caractère v_η. ■

De cette proposition, nous pouvons déduire le corollaire suivant :

Corollaire 9 *Soit $X = (\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2$ et soit la ϕ_X la fonction définie plus haut. Le n-ième coefficient de Taylor de ϕ_X en $z = 0$ est une forme quasi-modulaire de poids $n + k$ et de profondeur au plus $[n/2]$.*

Nous allons maintenant rappeler la définition d'opérateurs de Hecke pour des formes modulaires de Jacobi pour un caractère de la forme $v = v_\eta^D \times v_H^\epsilon$ et analyser leur comportement face au développement de Taylor en $z = 0$:

Définition 17 *Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice t pour le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ et pour le caractère $v = v_\eta^r \times v_H^\epsilon$, où ϵ est un entier qui vaut 0 ou 1 et r un entier entre 1 et 23. Soit m un entier plus grand que 1 et premier à Q et n un entier plus grand que 1, nous définissons deux opérateurs de l'espace des formes de Jacobi dans l'espace des fonctions holomorphes de la façon suivante :*

$$\phi_{|k} T_-^{(Q)}(m)(Z) = m^{2k-3} \sum_{\substack{ad=m \\ b[d]}} d^{-k} v_\eta^r(\sigma_a) \phi\left(\frac{a\tau + bQ}{d}, az\right)$$

$$\phi_{|k} \Lambda_n(Z) = n^k \phi(\tau, nz),$$

où $Q = 24/r$ est appelé conducteur de v_η^r.

Le lemme suivant, que nous pouvons trouver dans [V. 96b], nous décrit l'action de ces opérateurs sur les formes modulaires de Jacobi :

Lemme 8 *Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice t pour le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ et pour le caractère $v = v_\eta^r \times v_H^\epsilon$, où ϵ est un entier qui vaut 0 ou 1 et r un entier entre 1 et 23. Soit m un entier plus grand que 1 premier à Q et n un entier plus grand que 1.L'opérateur Λ_n envoie ϕ dans l'espace des formes modulaires de poids k et d'indice tn^2 pour le caractère $v = v_\eta^r \times v_H^{n\epsilon}$. Quant à l'opérateur $T_-^{(Q)}(m)$, il envoie ϕ dans l'espace des formes modulaires de poids k et d'indice mt pour le caractère $\chi_m \times v_H^\epsilon$ où χ_m est le caractère de $SL(2, \mathbb{Z})$ défini pour tout α de $SL(2, \mathbb{Z})$ par :*

$$\chi_m(\alpha) = v_{\eta^r}(\alpha_m)$$

$$\alpha_m \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix} mod[Q]$$

Comme dans le cas du caractère trivial, ces opérateurs agissent sur développement de Taylor en $z = 0$, la proposition suivante exprime ces actions :

Proposition 33 *Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice m pour le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ et pour le caractère $v = v_\eta^r \times v_H^\epsilon$, où ϵ un entier qui vaut 0 ou 1 et r un entier entre 1 et 23. Soit m un entier plus grand que 1 premier à Q et n un entier plus grand que 1. Considérons le développement de Taylor en $z = 0$:*

$$\phi(\tau, z) = \sum_{i \geq 0} \phi_i(\tau) z^i,$$

nous avons alors :

$$\phi_{|k}\Lambda_n(Z) = \sum_{i\geq 0} n^{k+i}\phi_i(\tau)z^i$$
$$\phi_{|k}T_{-}^{(Q)}(m)(Z) = \sum_{i\geq 0} T(m)(\phi_i)(\tau)z^i,$$

où $T(m)$ est l'opérateur que nous avons défini lorsque nous avons étudié les formes quasi-modulaires pour le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ et le caractère v_η^r.

Preuve: La preuve est la même que dans le cas des formes de Jacobi sans caractères. ■

Le lemme et la dernière proposition nous permettent de justifier ce que nous avions énoncé précédemment :

Proposition 34 *Soit r un entier pair compris entre 1 et 23, m un entier plus grand que 1 et premier à $Q = 24/r$. La fonction $T(m)(\eta^r G_2)$ est une forme quasi-modulaire de poids $\frac{r}{2}+2$ et de profondeur 1 pour le caractère χ_m et nous avons :*

$$T(m)(\eta^r G_2) = -24c(m)f$$
$$\eta^r G_2 = \sum_{n\geq 0} c(n)e^{\frac{2\pi i n r}{24}},$$

où f est la forme quasi-modulaire de poids $2+\frac{r}{2}$ et de profondeur 1 pour le caractère χ_m dont le premier coefficient de Fourier non nul vaut $-1/24$.

Preuve: Pour justifier cette proposition, il suffit d'appliquer le lemme et la proposition précédente au formes de Jacobi suivante :

$$\eta(\tau)^2\frac{\theta(\tau,2z)}{\theta(\tau,z)} \;\; ; \;\; \eta(\tau)\theta(\tau,z) \; ; \; \eta(\tau)^3\theta(\tau,z) \;\; ; \; \eta(\tau)^5\theta(\tau,z)$$
$$\eta(\tau)^7\theta(\tau,z) \;\; ; \; \eta(\tau)^9\theta(\tau,z) \; ; \; \eta(\tau)^{11}\theta(\tau,z) \;\; ; \; \eta(\tau)^{13}\theta(\tau,z)$$
$$\eta(\tau)^{15}\theta(\tau,z) \quad \eta(\tau)^{17}\theta(\tau,z) \; ; \; \eta(\tau)^{19}\theta(\tau,z)$$

En effet, nous allons voir tout de suite après que le deuxième coefficient de Taylor non identiquement nulle en $z=0$ de ces fonctions est de la forme $\eta^r G_2$. ■

2.4.2 Etude de la fonction théta de Jacobi

Nous allons maintenant étudier plus en détails le développement de Taylor en $z=0$ de la fonction θ de Jacobi.
Rappelons l'expression sous la forme de son développement de Fourier de la fonction θ de Jacobi :

$$\theta(\tau,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{m}\right) q^{\frac{m^2}{8}} r^{\frac{m}{2}},$$

Dans cette section, nous allons effectuer plusieurs choses : tout d'abord nous allons donner une formule pour θ qui nous permettra de donner son développement de Taylor en $z = 0$ ainsi que le développement de Taylor de quotients ou de produits de fonctions faisant intervenir θ. Ensuite, nous allons donner une formule générale qui nous donnera une expression de tous les coefficients de Taylor de θ en $z = 0$. Nous nous intéresserons après cela au développement de Taylor de θ ailleurs qu'en $z = 0$ et nous serons amenés à donner une formule de correction modulaire pour θ. Enfin, nous étudierons une égalité entre deux fonctions dont l'une fait intervenir une puissance de θ.

2.4.2.1 Expression de θ en fonction des séries d'Eisenstein

Nous pouvons trouver dans [HBJ92] la formule suivante :

$$\theta(\tau,\omega) = 2zi\pi\eta(\tau)^3 \exp(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k!} G_{2k}(\tau)(2i\pi z)^{2k}),$$

Grâce à un développement en série entière de l'exponentielle en $z = 0$, nous pouvons donner tous les coefficients de Taylor de θ en $z = 0$. De plus, nous obtenons sans calculs supplémentaires les coefficients de Taylor de puissances positives comme négatives de θ en $z = 0$. En guise d'exemple, nous allons donner le développement de Laurent autour de $z = 0$ de la fonction θ^{-1}. Comme la fonction θ ne s'annule qu'en $z = 0$ à τ fixé, nous en déduisons que la fonction θ^{-1} admet un pôle uniquement en $z = 0$ et par conséquent nous pouvons écrire :

$$\theta^{-1}(\tau, z) = \sum_{n\geq -1} \tilde{c_{2n+1}}(\tau) z^{2n+1}$$

Le fait que le développement ne comporte que des termes impairs vient de l'imparité de la fonction θ^{-1}. L'expression de θ sous sa forme exponentielle nous permet de déterminer directement le comportement modulaire des $\tilde{c_{2n+1}}(\tau)$: ces coefficients sont des fonctions quasi-modulaires de poids $2n - 1/2 + 1$ ou encore des formes quasi-modulaires de poids $2n + 2$ divisées par la fonction η^3. Nous pouvons donner les premiers coefficients :

$$\begin{aligned}
\tilde{c_{-1}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi i\eta(\tau)^3} \\
\tilde{c_1}(\tau) &= 2\pi i\frac{G_2(\tau)}{\eta(\tau)^3} \\
\tilde{c_3}(\tau) &= \frac{(2\pi i)^3}{\eta(\tau)^3}\big(\frac{1}{2}G_2(\tau)^2 + \frac{1}{12}G_4(\tau)\big).
\end{aligned}$$

2.4.2.2 Expression générale des coefficients de Taylor autour de $z = 0$

Nous revenons à l'expression de la fonction comme la somme de ses coefficients de Fourier, nous pourrons calculer ses coefficients de Taylor autour de $z = 0$: appelons les $c_n(\tau)$. Comme la fonction θ est impaire par rapport à la variable z, nous en déduisons que les c_n pairs sont nuls et ensuite nous avons :

$$\begin{aligned}
c_{2n+1}(\tau) &= \frac{1}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}\theta}{\partial z^{2n+1}}(\tau,z)_{|z=0} \\
&= \frac{1}{(2n+1)!}2(\pi i)^{2n+1}\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{-4}{m}\right)m^{2n+1}q^{\frac{m^2}{8}} \\
&= \frac{2^{2n}(\pi i)^{n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\left(2\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{-4}{m}\right)mq^{\frac{m^2}{8}}\right)
\end{aligned}$$

or d'après la formule démontrée précédemment, nous avons :

$$2\pi i\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{-4}{m}\right)mq^{\frac{m^2}{8}} = 2\pi i\eta(\tau)^3$$

et par conséquent nous avons :

$$c_{2n+1}(\tau) = \frac{2^{2n+1}(\pi i)^{n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}(\eta(\tau)^3).$$

Si nous écrivons :

$$\theta(\tau,z) = \sum_{n\geq 0}\theta_{2n+1}(\tau)\frac{(2\pi iz)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

alors :

$$\theta_{2n+1}(\tau) = 2^nD^n(\eta(\tau)^3)$$

Nous pouvons donner les premiers $\theta_{2n+1}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
&\theta_0(\tau) = \eta^3(\tau) \\
&\theta_3(\tau) = -6\eta^3(\tau)G_2(\tau) \\
&\theta_5(\tau) = 60\eta^3(\tau)G_2^2(\tau) - 10\eta^3(\tau)G_4(\tau) \\
&\theta_7(\tau) = -840\eta^3(\tau)G_2(\tau)^3 + 420\eta^3(\tau)G_2(\tau)G_4(\tau) - 14\eta^3(\tau)G_6(\tau) \\
&\theta_9(\tau) = 85680\eta^3(\tau)G_2^4 - 212520\eta^3G_2G_4 + 24528\eta^3G_2G_6 - \frac{1090}{3}\eta^3G_8
\end{aligned}$$

2.4.2.3 Coefficients de Taylor autour d'un rationnel non nul

Dans le cas de la fonction θ, nous connaissons un autre type de correction modulaire que nous pouvons utiliser pour déterminer les coefficients de Taylor de ϕ_X en les $z=0$:

Proposition 35 *Pour tout $\xi\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$ et $\tau\in\mathbb{H}$, nous avons l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned}
&\exp(-4\pi^2G_2(\tau)\xi^2 - \frac{\theta_z}{\theta}(\tau,z)\xi)\theta(\tau,z+\xi) \\
=&\theta(\tau,z)\exp\left(-\sum_{n\geq 2}\wp^{(n-2)}(\tau,z)\frac{\xi^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

avec $\wp^{(n)}(\tau,z) = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\wp(\tau,z)$

Grâce à cette correction automorphe, nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$\theta(\tau, z+\xi) = 2\pi z i\eta(\tau)^3\big(1+\frac{\xi}{z}\big)\exp\Bigg(-\sum_{k\geq 1}\frac{2}{2k!}G_{2k}(\tau)(2\pi i z)^{2k} + 4\pi^2 G_2(\tau)\xi^2 \\ -2\sum_{\substack{n\geq 1\\ k\geq 1\\ 2k\geq n}}(2\pi i)^{2k}G_{2k}(\tau)\frac{z^{2k-n}\xi^n}{2k-n!n!}\Bigg)$$

Pour montrer cette égalité, il suffit d'utiliser les propriétés de la fonction θ pour donner une expression de la fonction $\frac{\theta_z}{\theta}$ et ensuite il suffit de remarquer que :

$$\wp^{(n-2)}(\tau, z) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{z^n} + 2\sum_{\substack{k\geq 2\\ 2k\geq n}}(2\pi i)^{2k}G_{2k}(\tau)\frac{z^{2k-n}}{2k-n!}$$

Maintenant pour développer ϕ_X ou autour de ξ, il suffit de développer $\theta(\tau, z+\xi)$ autour de $z=0$ et cela est possible d'après l'égalité que nous avons écrite : il reste une certaine indétermination concernant la valeur en $z=\xi$ de la fonction ϕ_X, autrement dit le terme constant de ce développement de Taylor, mais nous savons à quelle espace de formes modulaires elle appartient et il suffit ensuite de l'identifier à des fonctions connues quand c'est possible. Tout les autres coefficients de Taylor seront exprimés en fonction de ce terme et des puissances de G_2.

2.4.3 Lien avec les dérivées $n$ième de G_2

Lorsque nous avions étudié les opérateurs de Hecke, nous avons déterminé une formule modulo un élément de $\Delta QM[SL(2,\mathbb{Z})]$ des dérivées n-ième de G_2 : les propriétés de la fonction θ nous donnent un autre moyen de déterminer les $D^n(G_2)$. Nous avons établi l'égalité suivante :

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n\geq 0}\theta_{2n+1}(\tau)\frac{(2\pi i z)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \theta_{2n+1}(\tau) = 2^n D^n(\eta^3)$$

De plus, nous avons :

$$D(\eta^3) = 3\eta^3.$$

Par conséquent, en utilisant la formule de Leibnitz, nous obtenons

$$D^{n+1}(\eta^3) = 3D^n(G_2\eta^3) = 3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(G_2)D^{n-k}(\eta^3)$$

Les termes peuvent de la forme $D^k(\eta^3)$ peuvent être calculés en utilisant un développement de la série entière de la fonction θ sous sa forme exponentielle. Ainsi la formule :

$$\boxed{\frac{1}{3}D^{n+1}(\eta^3) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(G_2)D^{n-k}(\eta^3)},$$

nous donne une méthode pour déterminer par itération les $D^n(G_2)$ grâce au développement en série entière de θ en $z=0$.

2.4.4 Développement de Taylor en $z = 0$ de fonctions construites à partir de θ

Dans cette section, nous allons donner les premiers termes du développement de Taylor en $z = 0$ de ces deux fonctions :

$$\phi_{0,3} = \left(\frac{\theta(\tau, 2z)}{\theta(\tau, z)}\right)^2$$
$$\phi_{0,2}(\tau, \omega) = \frac{\phi_{2,2}(\tau, \omega)}{\eta(\tau)^4},$$

avec :

$$\phi_{2,2}(\tau, \omega) = \frac{2}{2\pi i}\left(\frac{3}{2}\frac{\partial\theta((\tau, z)}{\partial z}\frac{\eta(\tau)\theta(\tau, 2z)}{\theta(\tau, z)} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\frac{\eta(\tau)\theta(\tau,2z)}{\theta(\tau,z)})}{\partial z}\theta(\tau, z)\right)$$

Nous allons commencer par la fonction $\phi_{0,3}$. Considérons son développement de Taylor en $z = 0$:

$$\phi_{0,3} = \sum_{n\geq 0} \phi_{0,3;n}(\tau) z^n$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned}\phi_{0,3} &= \left(\frac{\theta(\tau, 2z)}{\theta(\tau, z)}\right)^2 \\ &= \frac{(4\pi i z\eta(\tau)^3)^2 \exp\big(-4\sum_{n\geq 1}(2\pi i)^{2n}(2z)^{2n}\frac{G_{2n}(\tau)}{2n!}\big)}{(2\pi i z\eta(\tau)^3)^2 \exp\big(-4\sum_{n\geq 1}(2\pi i)^{2n}z^{2n}\frac{G_{2n}(\tau)}{2n!}\big)} \\ &= 4\exp\left(-4\sum_{n\geq 1}(2\pi i)^{2n}(2^{2n}-1)\frac{G_{2n}(\tau)}{2n!}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, nous trouvons :

$$\begin{aligned}&\phi_{0,3;0}(\tau) = 4 \\ &\phi_{0,3;2}(\tau) = -24(2\pi i)^2 G_2(\tau) \\ &\phi_{0,3;4}(\tau) = -10(2i\pi)^4 G_4(\tau) + 72(2i\pi)^4 G_2^2(\tau) \\ &\phi_{0,3;6}(\tau) = -\frac{7}{5}(2i\pi)^6 G_6(\tau) + 60(2i\pi)^6 G_4(\tau)G_2(\tau) - 144(2i\pi)^6 G_2(\tau)^3 \\ &\phi_{0,3;8}(\tau) = \frac{1}{336}(2\pi i)^8 G_8(\tau) + \frac{42}{5}(2\pi i)^8 G_6(\tau)G_2(\tau) - 180G_4(\tau)G_2(\tau)^2(2\pi i)^8 + 216(2\pi i)^8 G_2(\tau)^4\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant passer au développement de $\phi_{0,2}$. Considérons son développement de Taylor en $z = 0$:

$$\phi_{0,2} = \sum_{n\geq 0} \phi_{0,2;n}(\tau) z^n$$

En explicitant la formule donnée pour cette fonction, nous obtenons :

$$\phi_{2,2}(\tau,\omega) = \eta(\tau)^4 \exp\Bigg(-2\sum_{n\geq 1} \frac{G_{2n}(\tau)2^{2n}z^{2n}(2\pi i)^{2n}}{2n!}\Bigg) \\ \times \Bigg(6 + 16\sum_{n\geq 1}\frac{G_{2n}(\tau)(2^{2n-1}-1)z^{2n}(2\pi i)^{2n}}{(2n-1)!}\Bigg).$$

Finalement, en utilisant les développement en séries entières, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&\phi_{0,2;n}(\tau) = 6\\
&\phi_{0,2;2}(\tau) = -8(2i\pi)^2 G_2(\tau)\\
&\phi_{0,2;4}(\tau) = (2i\pi)^4(\frac{32}{3}G_4(\tau) - 16G_2(\tau)^2)\\
&\phi_{0,2;6}(\tau) = (2i\pi)^6\Bigg(\frac{46}{15}G_6(\tau) + 64G_2(\tau)^3 - 64G_2(\tau)G_4(\tau)\Bigg)
\end{aligned}$$

2.4.5 Une égalité entre un produit et une somme

Nous allons nous attacher à montrer ce type de relation entre deux formes de Jacobi dont l'une fait intervenir θ. L'égalité que nous allons démonter repose sur l'identité suivante :

$$\theta(\tau,z)^8 = E_{4,4,1}(\tau,z)$$

Pour cela, il suffit de voir que $\theta(\tau,z)^8$ est dans l'espace des formes de Jacobi de poids 4 et d'indice 4 qui est de dimension 2. Nous pouvons donc écrire :

$$\theta(\tau,z)^8 = \alpha E_{4,4}(\tau,z) + \beta E_{4,4,1}(\tau,z)$$

En prenant $z=0$, nous nous apercevons que $\alpha = 0$ puisque $E_{4,4,1}(\tau,0) = 0$, ensuite nous déduisons que $\beta = 1$, en comparant les coefficients de Fourier. Pour obtenir une égalité entre un produit et une somme, il suffit d'écrire $E_{4,4,1}(\tau,z)$ comme une série de Fourier et θ^8 comme un produit en utilisant respectivement les formules :

$$\begin{aligned}
&E_{4,4,1}(\tau,z) + E_{4,4}(\tau,z) = E_{4,1}(\tau,2z)\\
&\theta(\tau,z) = -q^{1/8}r^{-1/2}\prod_{n\geq 1}(1-q^{n-1}r)(1-q^n r^{-1})(1-q^n)
\end{aligned}$$

Finalement en explicitant le développement de Fourier de $E_{4,4,1}(\tau,z)$, nous avons :

$$qr^{-4}\prod_{n\geq 1}(1-q^{n-1}r)^8(1-q^nr^{-1})^8(1-q^n)^8$$
$$= \frac{1}{72\zeta(-5)}\sum_{\substack{n,r\\ 16nm-r^2\geq 0}}\Bigg(73H\Big(3,\frac{16n-r^2}{4}\Big) - \sum_{\substack{a\geq 0\\ a|(4,n,r)}} a^3 H\Big(3,\frac{16n-r^2}{a^2}\Big)\Bigg)q^n\xi^r$$

$16n - r^2$	$r \equiv 0[8]$	$r \equiv 1[8]$	$r \equiv 2[8]$	$r \equiv 3[8]$	$r \equiv 4[8]$	$r \equiv 5[8]$	$r \equiv 6[8]$	$r \equiv 7[8]$
0	0	×	×	×	72	×	×	×
3	×	-56	×	-56	×	-56	×	-56
4	×	×	-126	×	×	×	-126	×
7	×	-576	×	-576	×	-576	×	-576
8	-756	×	×	×	×	-756	×	×
11	×	-1512	×	-1512	×	-1512	×	-1512
12	2016	×	2016	×	2016	×	2016	×
15	×	-4032	×	-4032	×	-4032	×	-4032
16	5040	×	×	×	5040	×	×	×
19	×	-5544	×	-5544	×	-5544	×	-5544
20	-7560	×	-7560	×	-7560	×	-7560	×
23	×	-12096	×	-12096	×	-12096	×	-12096
24	-11592	×	×	×	-11592	×	×	×
27	×	-13664	×	-13664	×	-13664	×	-13664
28	25344	×	25344	×	25344	×	25344	×
31	×	-24192	×	-24192	×	-24192	×	-24192
32	24192	×	×	×	30240	×	×	×
35	×	-27216	×	-27216	×	-27216	×	-27216
36	-31878	×	-31878	×	-31878	×	-31878	×
39	×	-44352	×	-44352	×	-44352	×	-44352
40	-39816	×	×	×	-39816	×	×	×
43	×	-41832	×	-41832	×	-41832	×	-41832
44	54432	×	54432	×	54432	×	54432	×
47	×	-72576	×	-72576	×	-72576	×	-72576
48	84672	×	×	×	64512	×	×	×

FIGURE 2.1 – Quelques coefficients de Fourier de $72\theta^8$

De cette égalité, nous serons capables par la suite de déduire le même type d'égalité pour des formes modulaires de Siegel obtenues à partir de ces deux formes de Jacobi. Pour l'instant, nous allons donner les premières quelques coefficients de Fourier de θ^8. Posons :

$$72\theta^8(\tau, z) = \sum_{16n - r^2 \geq 0} \theta_8(n, r) q^n \xi^r,$$

nous savons que $\theta_8(n, r)$ ne dépend que de la valeur de $16n - r^2$ et de $r[8]$. Le tableaux suivant nous donne quelques valeurs de ces coefficients :

Deuxième partie

Formes modulaires de Siegel de genre 2

Chapitre 3

Formes modulaires de Siegel

3.1 Definitions et nature des coefficients de Taylor en $z = 0$

Tout d'abord commençons par rappeler la définition des formes modulaires de Siegel, pour cela nous avons besoin de rappeler la définition de certains ensembles.
Soit $n \geq 1$, le groupe symplectique d'ordre $2n$ sur $\mathbb{R}$ est le groupe défini par :

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in GL(2n, \mathbb{R}) | {}^t M J_n M = J_n \right\},$$

où la matrice J_n est définie par :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant définir le groupe paramodulaire Γ_t avec t entier :

$$\Gamma_t = \left\{ \begin{pmatrix} * & t* & * & * \\ * & * & * & *t^{-1} \\ * & t* & * & * \\ t* & t* & t* & * \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{Q}) | * \text{ entier} \right\},$$

ce groupe peut être étendu en le groupe suivant :

$$\Gamma_t^+ = \Gamma_t \cup \Gamma_t V_t,$$

avec :

$$V_t = \frac{1}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

A priori, cette définition ne nous donne pas un groupe mais avec un peu de travail nous pouvons le montrer ; nous pouvons remarquer que ce groupe correspond à $Sp_n(\mathbb{Z})$ quand $t = 1$. Il nous reste à définir un dernier ensemble, le demi plan supérieur de Siegel de genre n, qui est une généralisation du demi plan supérieur $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{H}_n = \left\{ Z = {}^t Z \in M_n(\mathbb{C}), Z = X + iY, Y > 0 \right\}$$

Nous pouvons désormais rappeler la définition des formes modulaires de Siegel de genre 2 :

Définition 18 *Soit k un entier ou un demi-entier et t un entier. Une forme modulaire de poids k de genre 2 pour Γ, qui contient un sous groupe principal de congruence de $Sp_n(\mathbb{R})$, avec un système de multiplicateur ou un caractère v de Γ est une forme holomorphe sur $\mathbb{H}_n$ qui satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$F(M. < Z >) = v(M)\det(CZ+D)^k F(Z)$$

pour tout les $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$ et tout les $Z \in \mathbb{H}_n$, avec :

$$M. < Z >= (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

Pour $n = 1$ nous sommes ramenés aux formes modulaires pour le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ et par conséquent nous devons rajouter des conditions pour les points paraboliques.

La remarque qui peut être faite est que nous n'avons pas montré que le terme $(CZ+D)$ est inversible : cela peut être montré mais nous ne le ferons pas, c'est un résultat classique.

Dans ce qui suit, nous supposerons que le groupe Γ contient le groupe Γ_t et l'élément V_t : nos formes modulaires seront invariantes ou anti-invariantes par rapport à cet élément. Nous allons maintenant énoncer une propriété sur les développements de Fourier de ces fonctions dans le cas du genre 2 : cette propriété sera fondamentale pour ce que nous ferons pas la suite. Dans le cas du genre 2, nous écrirons $Z = (\tau, z, \omega)$ pour désigner la matrice symétrique $\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}$ et nous supposerons que le caractère ou le système multiplicatif est de la forme $v = v_\eta^r \times v_H^i$ avec r un entier compris entre 0 et 23 sur la restriction au groupe de Jacobi.

Proposition 36 *Soit F une forme modulaire de Siegel de poids k et de genre 2 pour le groupe Γ_t^+, de caractère v que nous supposons de la forme précédente et de conducteur Q. Nous pouvons développer F en série de Fourier par rapport à τ et ω de la façon suivante :*

$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{n \geq 0} f_n(\tau, z) e^{2i\pi \frac{n}{Q}\omega},$$
$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{n \geq 0} g_n(\omega, z) e^{2i\pi \frac{n}{Q}\tau}$$

La fonction f_n est une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice n/Q et de caractère $v_\eta^r \times v_H^i$ pour tout le groupe de Jacobi.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition qui va nous préciser la nature modulaire des coefficients de Taylor d'une forme modulaire de Siegel de genre 2 :

Proposition 37 *Soit k, t deux entiers positifs et r un entier positif. Soit F une forme modulaire de Siegel de poids k et de genre 2 pour un groupe Γ qui contient Γ_t et l'élément*

V_t ayant pour système multiplicatif χ dont la restriction à $SL(2,\mathbb{Z})$ est v_η^r. La fonction F se développe en série de Taylor en $z = 0$ de la façon suivante :

$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{n\geq 0} F_n(\tau, \omega) z^n,$$

où les $F_n(\tau, \omega/t)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $n+k$ sur $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$ et pour le système multiplicatif v_η^r par rapport à chaque variable.
Si F est invariante par rapport à V_t, alors les $F_n(\tau, \omega/t)$ sont des formes quasi-modulaires symétriques.
Si F est anti-invariante par rapport à V_t, alors les $F_n(\tau, \omega/t)$ sont des formes quasi-modulaires anti-symétriques.
Dans le cas où V_t n'est pas dans l'ensemble de définition, les coefficients sont simplement des formes quasi-modulaires.

Preuve: Nous allons établir la démonstration dans le cas de l'invariance par rapport à l'élément V_t, l'autre situation se déduit de celle-ci directement. Tout d'abord, en ce qui concerne les développements de Fourier de F, nous reprenons les mêmes notations que dans la proposition précédente. Ensuite, par des propriétés d'holomorphie, nous pouvons développer F en série de Taylor autour de $z = 0$:

$$F(\tau, z, w) = \sum_{m\geq 0} F_m(\tau, w) z^m,$$

Nous connaissons l'expression des $F_m(\tau, \omega)$ pour m positif :

$$F_m(\tau, w) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m F}{\partial^m z}(\tau, 0, \omega)$$

nous en déduisons donc que les F_m sont holomorphes sur $\mathbb{H}^2$. Les propriétés de $\mathbb{H}_2$ font qu'à $z = 0$, les variables τ et ω varient dans $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Nous allons regarder quelles sont les autres propriétés de ces coefficients : pour cela nous allons utiliser le développement en série de Fourier des formes modulaires de Siegel puis le développement en série de Taylor des formes modulaires de Jacobi.
Par l'invariance par rapport à la matrice V_t et l'unicité du développement de Fourier, nous pouvons écrire :

$$F(\tau, z, \omega) = F(t\omega, z, \tau/t),$$

ce qui se traduit sur le développement de Fourier par rapport à ω et τ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&F(\tau, z, \omega)\\
&= \sum_{n\geq 0} f_{tn}(\tau, z) e^{2\pi i t \frac{n}{Q}\omega} = \sum_{n\geq 0} f_{tn}(t\omega, z) e^{2\pi i \frac{n}{Q}\tau}\\
&= \sum_{n\geq 0} g_n(\omega, z) e^{2\pi i \frac{n}{Q}\tau} = \sum_{n\geq 0} g_n(\tau/t, z) e^{2\pi i \frac{n}{Q} t\omega}\\
&f_{tn}(\tau, z) = g_n(\tau/t, z)\\
&f_{tn}(t\omega, z) = g_n(\omega, z)
\end{aligned}$$

ceci par unicité des coefficients de Fourier d'un développement donné. Considérons le développement de Taylor en $z = 0$ de $f_{tn}(\tau, z)$, nous avons :

$$f_{tn}(\tau, z) = \sum_{m \geq 0} f_{tn,m}(\tau) z^m,$$

où les $f_{tn,m}$ sont des formes quasi-modulaires de poids $m + k$ pour le système multiplicatif v_η^r. De cette écriture, nous déduisons les égalités suivantes :

$$F(Z) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} f_{tn,m}(\tau) \exp(2i\pi tw \frac{n}{Q}) \right) z^m$$
$$F(Z) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} f_{n,m}(t\omega) \exp(2i\pi \frac{n}{Q} \tau) \right) z^m$$

puis les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} F_m(\tau, \omega) &= \sum_{n \geq 0} f_{tn,m}(\tau) \exp(2i\pi tw \frac{n}{Q}) \\ &= \sum_{n \geq 0} f_{n,m}(t\omega) \exp(2i\pi \frac{n}{Q} \tau), \end{aligned}$$

ce qui montrent que les fonctions $F_m(\tau, \omega/t)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $m + k$ pour $SL(2, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z})$ et pour le système multiplicatif v_η^r par rapport à chaque variable. Pour la symétrie, on utilise la formule :

$$F(\tau, z, \omega) = F(tw, z, \tau/t).$$

Elle implique par unicité du développement de Taylor la formule suivante pour tous les m :

$$F_m(\tau, \omega) = F_m(t\omega, \tau/t).$$

Posons $G_m(\tau, \omega) = F_m(\tau, \omega/t)$, nous en déduisons que :

$$G_m(\tau, \omega) = F_m(\tau, \omega/t) = F_m(\omega, \tau/t) = G_m(\omega, \tau)$$

Nous avons alors la conclusion recherchée. ■

Nous allons maintenant donner des relations entre les coefficients de Taylor et qui montrent d'une autre manière que ces formes sont des formes quasi-modulaires :

Proposition 38 *Soit k, t deux entiers positifs et r un entier positif. Soit F une forme modulaire de poids k et de genre 2 pour un groupe Γ qui contient Γ_t et l'élément V_t ayant pour système multiplicatif χ dont la restriction à $SL(2, \mathbb{Z})$ est de conducteur v_η^r. Soit*

$F_n(\tau,\omega)$ son n-ième coefficient de Taylor par rapport à $z = 0$, nous avons les relations suivantes :

$$v_\eta^{-p}\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Big)(c\tau+d)^{-k-n}F_n(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},w) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{1}{r!}\frac{\partial^r F_{n-2r}}{\partial \omega^r}(\tau,\omega)\big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^r$$

$$v_\eta^{-p}\Big(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\Big)(c'\omega+d')^{-k-n}F_n(\tau,\frac{a'\omega/t+b'}{c'\omega/t+d'}) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{1}{r!}\frac{\partial^r F_{n-2r}}{\partial \tau^r}(\tau,\omega)\big(\frac{c'}{c'\omega/t+d'}\big)^r t^r,$$

pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$. De plus nous en déduisons également que $s = (s_1, s_2)$ la profondeur de F_n vérifie :

$$s_1 = s_2 \leq [n/2],$$

où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$.

Preuve: L'affirmation concernant la profondeur peut aussi être déduite immédiatement de l'écriture de F en somme de formes modulaires de Jacobi et des propriétés sur les formes quasi modulaires à deux variables.
Considérons le développement en série de Taylor d'une forme modulaire de Siegel de poids k pour notre groupe :

$$F(\tau,z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\tau,w)z^n$$

L'action de l'élément $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $Sp_2(\mathbb{Z})$ nous donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & F\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d},w-\frac{cz^2}{c\tau+d}\big) \\ =& v_\eta^{p}\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Big)(c\tau+d)^k F(\tau,z,\omega) \\ =& v_\eta^{p}\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Big)(c\tau+d)^k \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\tau,w)z^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},w-\frac{cz^2}{c\tau+d})z^n \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser le fait que les F_n sont holomorphes par rapport à chaque variable pour donner un développement de Taylor par rapport à la deuxième variable de F_n. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & F_n(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},w-\frac{cz^2}{c\tau+d}) \\ =& \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial \omega^r}F_n\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},w\big)\frac{(-c)^r}{(c\tau+d)^r}z^{2n}, \end{aligned}$$

En identifiant les expressions en z, nous obtenons l'égalité suivante :

$$v_\eta^p\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)F_n(\tau,\omega) = \sum_{2r+p=n} \frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial y^r}F_p(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},w)\frac{(-c)^r}{(c\tau+d)^{r+p+k}}$$
$$= \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial y^r}F_{n-2r}(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},w)\frac{(-c)^r}{(c\tau+d)^{r+n-2r+k}}$$

Pour avoir la formule désirée, nous remplaçons le terme τ par le terme $\frac{d\tau-b}{-c\tau+a}$ et nous obtenons la formule annoncée pour toute les inverses de matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$ et donc pour toute matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$.
L'autre égalité se déduit de celle-ci grâce aux rôles symétrique de τ et ω ; l'affirmation sur la profondeur est directe une fois que nous avons ces égalités. En effet nous avons déterminées les fonctions holomorphes F_i qui interviennent dans la définition des formes quasi-modulaires à une variable. ■

Dans les parties qui suivent les calculs explicites que nous allons faire nous poussent à définir des notations qui permettront une lecture plus claire des résultats. Pour $(\tau,\omega) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, nous posons :

$$\begin{aligned}
a_{1,0,0}(\tau,\omega) &= G_2(\tau)G_2(\omega)\\
a_{0,1,0}(\tau,\omega) &= G_4(\tau)G_4(\omega)\\
a_{0,0,1}(\tau,\omega) &= G_6(\tau)G_6(\omega)\\
a_{2,1,0}(\tau,\omega) &= G_4(\tau)G_2(\omega)^2 + G_4(\omega)G_2(\tau)^2\\
a_{3,0,1}(\tau,\omega) &= G_2(\tau)^3G_6(\omega) + G_2(\omega)^3G_6(\tau)\\
a_{1,1,1}(\tau,\omega) &= G_6(\omega)G_2(\tau)G_4(\omega) + G_6(\tau)G_2(\omega)G_4(\tau)
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous allons étudier les développements en série de Taylor en $z=0$ de formes modulaires de Siegel de genre 2 obtenues à partir d'un relèvement de formes modulaires de Jacobi. Grossièrement ces méthodes consistent à construire des formes modulaires de Siegel comme une série ou un produit infini dont les termes seront construits à partir d'une forme modulaire de Jacobi. Comme exemple introductif, nous allons étudier le relèvement dit trivial de deux formes de Jacobi de poids 1/2.

3.2 Premier exemple : le relèvement trivial

Dans cette section, nous allons traiter l'exemple de deux formes modulaires de Siegel qui sont solutions de l'équation de la chaleur à trois variables. Ces exemples constitueront une introduction avant d'expliciter le comportement du développement de Taylor en $z=0$ de ce que nous appelons relèvement arithmétique et relèvement exponentiel.

3.2.1 La fonction $\Delta_{1/2}$

Dans cette section, nous allons utiliser ce que nous avons déjà montré sur la fonction θ de Jacobi et en particulier sur ses coefficients de Taylor en $z=0$ pour déterminer les coefficients de Taylor en $z = 0$ de la fonction $\Delta_{1/2}$ dont la définition et la propriétés sont données par le théorème suivant que nous pouvons trouver dans [V. 96b] :

Théorème 10 *La fonction :*

$$\Delta_{1/2} = \frac{1}{2} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{n}\right)\left(\frac{-4}{m}\right) q^{n^2/8} r^{mn/2} s^{m^2/2}$$

est une forme modulaire de poids $1/2$ *pour le groupe* Γ_4^+ *et pour le système multiplicatif* $v_8 : \Gamma_4^+ \to < \sqrt[8]{1} >$ *induit par* $v_\eta^3 \times v_H$*. En d'autres termes :*

$$\begin{aligned} v_8|_{SL(2,\mathbb{Z})} &= v_\eta^3 \\ v_8|_{|H(\mathbb{Z})} &= v_H \\ v_8\big([0,0;\frac{\kappa}{4}]\big) &= \exp(\pi i \frac{\kappa}{4}) \\ \Delta_{1/2}(V_4(Z)) &= \Delta_{1/2}(Z) \end{aligned}$$

A partir de là, nous pouvons exprimer l'expression générale des coefficients de Taylor en $z = 0$ de la fonction $\Delta_{1/2}$:

Proposition 39 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, nous avons :*

$$g_{2n+1}(\tau, \omega) = \frac{2^{2n+1}}{2n+1!} \pi i \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \left(\eta(\tau)^3 \eta(4\omega)^3\right),$$

où g_{2n+1} *désigne de* $2n+1$*ième coefficient de Taylor de* $\Delta_{1/2}(Z)$ *en* $z = 0$*, les coefficients pairs étant nuls.*

Preuve: Nous allons maintenant écrire cette fonction sous la forme d'un relèvement additif :

$$\begin{aligned} \Delta_{1/2}(Z) &= \sum_{m>0} m^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{-4}{m}\right) \theta_{|\frac{1}{2}} \Lambda_m(Z) \exp(\pi i m^2 \omega) \\ &= \sum_{m>0} m^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{-4}{m}\right) m^{\frac{1}{2}} \theta(\tau, mz) \exp(\pi i m^2 \omega) \\ &= \sum_{m>0} \left(\frac{-4}{m}\right) \theta(\tau, mz) \exp(\pi i m^2 \omega). \end{aligned}$$

Nous pouvons développer $\theta(\tau, z)$ en série de Taylor de la façon suivante :

$$\theta(\tau, z) = \sum_{m>0} f_{2n+1}(\tau) z^{2n+1},$$

avec :

$$f_{2n+1}(\tau) = \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} (\eta(\tau)^3)(\pi i)^{n+1} 2^{2n+1}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\Delta_{1/2}(Z) &= \sum_{\substack{m>0\\ n\geq 0}} \left(\frac{-4}{m}\right)\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}(\eta(\tau)^3)(\pi i)^{n+1}2^{2n+1}\exp(\pi i m^2\omega)m^{2n+1}z^{2n+1}\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}(\eta(\tau)^3)(\pi i)^{n+1}2^{2n+1}\Big(\sum_{m>0}\left(\frac{-4}{m}\right)\exp(\pi i m^2\omega)m^{2n+1}\Big)z^{2n+1}\end{aligned}$$

Or nous pouvons écrire :

$$\sum_{m>0}\left(\frac{-4}{m}\right)\exp(\pi i m^2\omega)m^{2n+1} = \frac{1}{(\pi i)^n}\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}(\eta(4\omega)^3),$$

en suivant le même raisonnement que précédemment. La formule désirée s'en déduit immédiatement. ■

3.2.1.1 Le développement de Taylor autour de $z = 0$ du relèvement de $\theta(\tau, z)^8$

De ce calcul, nous pouvons déduire le développement en série de Taylor autour de $z = 0$ de la fonction $Lift(E_{4,4,1})$ grâce à l'égalité que nous allons démontrer :

$$Lift(E_{4,4,1}) = (\Delta_{1/2}(Z))^8.$$

Cette égalité provient de l'égalité entre deux formes modulaires de Jacobi que nous avons déjà démontrée :

$$E_{4,4,1}(\tau, z) = \theta(\tau, z)^8$$

Il nous faut maintenant expliciter la fonction $Lift(E_{4,4,1})$ et démontrer que c'est une forme modulaire de Siegel pour Γ_4^+. La fonction $Lift(E_{4,4,1})$ est définie de la façon suivante :

$$Lift(E_{4,4,1}) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(E_{4,4,1})\exp(8i\pi w),$$

où V_m est l'opérateur de Hecke précédemment introduit. En particulier cet opérateur transforme une forme de Jacobi de poids k et d'indice l en une forme de Jacobi de poids k et d'indice ml. Le fait que cette série converge provient d'un argument classique sur les formes modulaire de Jacobi, argument que nous n'expliciterons pas
Nous rappelons un lemme qui va nous être utile :

Lemme 9 *Le groupe Γ_t^+ est engendré par le sous groupe $\Gamma_{\infty,t}$ défini par :*

$$\left\{\begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & */t \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sp_4(\mathbb{Q}) \mid \textit{tous les * sont entiers}\right\}$$

et par la matrice : $V_t = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{t} \\ 0 & 0 & \sqrt{t} & 0 \end{pmatrix}$

Comme $V_m(E_{4,4,1})$ est une forme de Jacobi de poids 4 et d'indice $4m$, par construction des formes de Jacobi, $V_m(E_{4,4,1})\exp(8i\pi wm)$ est une forme modulaire de Siegel pour Γ_∞ : on en déduit que $Lift(E_{4,4,1})$ est une forme modulaire de Siegel pour Γ_∞. Pour montrer qu'elle est aussi une forme modulaire de Siegel pour $\Gamma_{\infty,4}$, il suffit d'établir que :

$$Lift(E_{4,4,1})(N_k \bullet < Z >) = Lift(E_{4,4,1})(Z),$$

avec $N_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour k variant de 1 à 3.
Regardons l'action de N_k sur un élément de $\mathbb{H}_2$:

$$N_k \bullet < Z >= \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & w + \frac{k}{4} \end{pmatrix},$$

on a donc :

$$Lift(E_{4,4,1})(N_k \bullet < Z >) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(E_{4,4,1})\exp(8i\pi w) = F(Z).$$

Ainsi, F est une forme modulaire de Siegel par rapport au groupe $\Gamma_{\infty,4}$. Il reste à montrer que $Lift(E_{4,4,1})$ est aussi modulaire par rapport à l'action de V_4, c'est à dire : $Lift(E_{4,4,1})(V_4 \bullet < Z >) = Lift(E_{4,4,1})(Z)$. Si on considère l'action de V_4, il nous reste à montrer que :

$$Lift(E_{4,4,1})(\tau, z, w) = Lift(E_{4,4,1})(4w, z, \frac{\tau}{4}),$$

pour cela on va utiliser les développements en série de Fourier.Nous savons que $E_{4,4,1}$ possède un développement en série de Fourier de la forme :

$$E_{4,4,1} = \sum_{\substack{n,r \\ 16n - r^2 \geq 0}} c(n,r) q^n \xi^r,$$

nous pouvons donner une expression du développement en série de Fourier de $Lift(E_{4,4,1})$:

$$\begin{aligned} Lift(E_{4,4,1})(\tau, z, w) &= \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{\substack{n,r \\ 16mn - r^2 \geq 0}} \left(\sum_{a|(n,r,m)} a^{k-1} c(\frac{nm}{a^2}, \frac{r}{a}) q^n \xi^r \right) \right) s^{4m} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{m,r \\ 16mn - r^2 \geq 0}} \left(\sum_{a|(n,r,m)} a^{k-1} c(\frac{nm}{a^2}, \frac{r}{a}) s^{4m} \xi^r \right) \right) q^n \\ &= Lift(E_{4,4,1})(4w, z, \frac{\tau}{4}) \end{aligned}$$

et c'est bien ce que l'on voulait démontrer. Donc $Lift(E_{4,4,1})$ est une forme modulaire de Siegel de poids 4 par rapport au groupe Γ_4^+. On peut maintenant prouver l'égalité :

$Lift(E_{4,4,1}) = (\Delta_{1/2}(Z))^8$.
On va introduire une nouvelle fonction G définie de la façon suivante :

$$G(Z) = \frac{Lift(E_{4,4,1})(Z)}{(\Delta_{1/2}(Z))^8}$$

La première chose à montrer est que la fonction est holomorphe sur $\mathbb{H}_2$. Le dénominateur est nul si et seulement si $z = 0$ et ce zéro est d'ordre 8 et le numérateur a aussi un zéro d'ordre 8 en $z = 0$. Pour justifier ces faits, il suffit de considérer les premiers termes du développement de Taylor en $z = 0$ du numérateur et du dénominateur, nous avons :

$$\begin{aligned}&\Delta_{1/2}(Z) = 2\pi i\eta(\tau)^3\eta(4\omega)^3 z + ..\\&Lift(E_{4,4,1})(\tau, z, w) = 2\pi i\eta(\tau)^3\eta(4\omega)^3 z + ..\end{aligned}$$

On a donc montré que G est holomorphe sur $\mathbb{H}_2$. De plus, il est clair que G est une forme de Siegel par rapport à Γ_4^+ de poids 0. Nous savons que nous pouvons écrire G sous la forme :

$$G(Z) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(\tau, z)\exp(2i\pi m w),$$

où $\phi_m(\tau, z)$ est une forme modulaire de Jacobi de poids 0 et d'indice m : la théorie sur les formes de Jacobi nous dit que pour $m \geq 1$, $\phi_m = 0$. Donc $G(Z) = \phi_0(\tau, z)$ et $\phi_0(\tau, z)$ ne dépend pas de z : donc $G(\tau, z, w) = \phi(\tau, 0)$, c'est une forme modulaire de poids 0, c'est à dire une constante. Nous venons de montrer que G est une constante, il ne reste plus qu'à trouver la constante. Cette constante est 1 et pour le comprendre, il suffit de regarder dans le développement en série de Fourier le coefficient devant $\exp(2i\pi w)$: dans un cas on a $\theta(\tau, z)^8$ et dans l'autre $E_{4,4,1}$, mais ces deux fonctions sont égales donc la constante vaut 1.
Cette égalité établie, nous pouvons en déduire une égalité entre un produit et une somme : pour cela il suffira d'expliciter le développement de Fourier de $Lift(E_{4,4,1})$ et aussi de remarquer que $\Delta_{1/2}$ peut s'écrire comme un produit infini. Pour commencer nous rappelons la formule suivante :

$$\begin{aligned}&E_{4,4,1}(\tau, z)\\&=\frac{1}{72\zeta(-5)} \sum_{\substack{n,r\\16nm-r^2\geq 0}} \left(73H\left(3, \frac{16n-r^2}{4}\right) - \sum_{\substack{a\geq 0\\a|(4,n,r)}} a^3 H\left(3, \frac{16n-r^2}{a^2}\right)\right) q^n\xi^r\end{aligned}$$

cette formule nous permet de déduire la formule suivante :

$$\begin{aligned}&Lift(E_{4,4,1})\\&= \frac{1}{72\zeta(-5)} \sum_{m\geq 1} \left(\sum_{\substack{n,r\\16nm-r^2\geq 0}} \left(\sum_{b|(n,r,m)} b^3 \left(73H\left(3, \frac{16mn-r^2}{4b^2}\right)\right.\right.\right.\\&\left.\left.\left.- \sum_{\substack{a\geq 0\\a|(4,\frac{nm}{b^2},\frac{r}{b})}} a^3 H\left(3, \frac{16nm-r^2}{(ab)^2}\right)\right)\right) q^n\xi^r\right) s^{4m}\end{aligned}$$

Ensuite, [V. 96b] nous permet de voir que la fonction $\Delta_{1/2}$ peut être obtenue comme un relèvement du type de Borcherds de la forme de Jacobi :

$$\frac{\theta(\tau,3z)}{\theta(\tau,z)} = \sum_{\substack{n\geq 0\\ l\in\mathbb{Z}}} f_4(n,l)q^n r^l$$

et par conséquent, nous avons l'égalité suivante :

$$\Delta_{1/2} = q^{1/8}r^{1/2}s^{1/2} \prod_{(n,l,m)>0} (1-q^n r^l s^{4m})^{f_4(mn,l)},$$

ainsi nous pouvons déduire de l'égalité $Lift(E_{4,4,1}) = \Delta_{1/2}^8$ une égalité entre une somme et un produit :

$$\begin{aligned}
&qr^4s^4 \prod_{(n,l,m)>0} (1-q^n r^l s^{4m})^{8f_4(mn,l)}\\
&= \frac{1}{72\zeta(-5)} \sum_{m\geq 1} \Bigg(\sum_{\substack{n,r\\ 16nm-r^2\geq 0}} \Bigg(\sum_{b|(n,r,m)} b^3 \Big(73H\Big(3,\frac{16mn-r^2}{4b^2}\Big)\\
&- \sum_{\substack{a\geq 0\\ a|(4,\frac{nm}{b^2},\frac{r}{b})}} a^3 H\Big(3,\frac{16nm-r^2}{(ab)^2}\Big)\Big)\Bigg)q^n\xi^r\Bigg)s^{4m}
\end{aligned}$$

3.2.2 La fonction $D_{1/2}$

Nous allons voir que cette fonction provient aussi d'une forme de Jacobi solution de l'équation de la chaleur et par conséquent, nous obtiendrons une formule générale pour les coefficients de Taylor en $z=0$. Commençons par rappeler la définition et les propriétés de cette fonction par l'intermédiaire du théorème suivant que nous pouvons trouver dans [V. 96b] :

Théorème 11 *La fonction $D_{1/2}$ définie par :*

$$D_{1/2}(Z) = \frac{1}{2}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \Big(\frac{12}{n}\Big)\Big(\frac{12}{m}\Big) q^{n^2/24} r^{mn/2} s^{3m^2/2}$$

est une forme modulaire de poids 1/2 pour l'extention normale $\Gamma_{36}^* = [\Gamma_{36}, V_4, V_9, V_{36}]$ d'ordre 4 de Γ_{36} pour le système multiplicatif $v_{24} : \Gamma_{36}^* \to < \sqrt[8]{1} >$ induit par $v_\eta \times v_H$. Autrement dit :

$$\begin{aligned}
&v_{24}|_{SL(2,\mathbb{Z})} = v_\eta\\
&v_8|_{|H(\mathbb{Z})} = v_H\\
&v_{24}\big([0,0;\frac{\kappa}{36}]\big) = \exp(\pi i\frac{\kappa}{12})\\
&D_{1/2}(V_{36}(Z)) = D_{1/2}(V_9(Z)) = D_{1/2}(V_4(Z)) = D_{1/2}(Z)
\end{aligned}$$

De la démonstration de ce théorème, nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 40 *Soit $d_n(\tau,\omega)$ le n-ième coefficient de Taylor de $D_{1/2}$ en $z=0$, nous avons :*

$$d_{2n}(\tau,\omega)=\frac{4^n}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}(\eta(\tau)\eta(36\omega)),$$

et les coefficients impairs sont nuls.

Preuve: De la démonstration du théorème précédent, nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}D_{1/2}(Z)=&\sum_{m>0}m^{-1/2}\left(\frac{12}{m}\right)(\theta_{3/2})_{|\frac{1}{2}}\Lambda_m(Z)\exp(3\pi i m^2\omega)\\=&\sum_{n\geq 0}d_n(\tau,\omega)z^n,\end{aligned}$$

où $\theta_{3/2}$ est la fonction définie par :

$$\theta_{3/2}(\tau,z)=\frac{\eta(\tau)\theta(\tau,2z)}{\theta(\tau,z)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{12}{n}\right)q^{n^2/24}r^{n/2}.$$

Nous allons commencer par développer cette dernière fonction en série de Taylor en $z=0$, nous avons :

$$\theta_{3/2}(\tau,z)=\sum_{n\geq 0}\tilde{d}_{2n}(\tau)z^{2n},$$

les coefficients impairs sont nuls pour des raisons de parité et les $\tilde{d}_{2n}$ sont définis par :

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{2n}(\tau)&=\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}(\theta_{3/2})(\tau,z)_{|z=0}\\&=\frac{1}{(2n)!}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{12}{m}\right)q^{m^2/24}(\pi i)^{2m}m^{2n}\\&=\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\theta_{3/2}(\tau,0)(12)^n(\pi i)^n\\&=\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}(2\eta(\tau))(6)^n(2\pi i)^n\end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons exprimer les $d_{2n}(\tau,\omega)$:

$$\begin{aligned}d_{2n}(\tau,\omega)=&2\sum_{m>0}\left(\frac{12}{m}\right)m^{2n}6^n(2\pi i)^n\exp(3\pi i m^2\omega)\frac{\partial^n\eta(\tau)}{\partial\tau^n}\\=&\frac{4^n}{(2n)!}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}(\eta(\tau)\eta(36\omega))\end{aligned}$$

■

3.3 Le Spezialschar

Dans cette partie, nous allons donner la définition du Spezialschar et nous allons voir que nous pouvons calculer tout les coefficients de Taylor autour de $z = 0$ des fonctions contenues dans cet espace.
Cette construction constituera encore un exemple des constructions que nous allons généraliser plus tard.
Nous allons commencer par rappeler une proposition concernant la construction de formes modulaires de Siegel à partir de formes modulaires de Jacobi :

Théorème 12 *Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice 1. Alors les fonctions $V_m(\phi)$ (≥ 0) sont les coefficients de Fourier-Jacobi d'une certaine forme modulaire de Siegel de poids k et de genre 2 définie par :*

$$V(\tau, z, \omega) = \sum_{m \geq 0} V_m(\phi)(\tau, z) e^{2\pi i m \omega}$$

Proposition-définition 2 *L'application V qui à un élément de $J_{k,1}$ associe la forme modulaire de Siegel définie comme dans le théorème précédent est injective. Le "Spezialschar" de poids k est défini comme l'image par V de $J_{k,1}$; de façon équivalente, c'est aussi l'ensemble des formes modulaires de Siegel dont les coefficients de Fourier vérifient l'égalité suivante :*

$$A(n, r, m) = \sum_{\substack{d \geq 0 \\ d | (n,r,m)}} d^{k-1} A(\frac{mn}{d^2}, \frac{r}{d}, 1)$$

pour toutes les valeurs de m, n, r. Le "Spezialschar" est défini comme étant la somme directe sur les entiers pairs k des "Spezialschar" de poids k. C'est un module libre sur $M_*(SL_2(\mathbb{Z}))$ ayant deux générateurs : un de poids 4 et un de poids 6.

Nous voyons donc qu'une fonction du "Spezialschar" peut non seulement se développer en série de Taylor autour de $z = 0$ mais surtout que nous sommes capables de calculer ses coefficients de Taylor : en effet il suffit de connaître le développement en série de Taylor autour de $z = 0$ des formes modulaires de Jacobi de poids k et d'indice 1, ce qui est possible d'après ce que nous avons fait précédemment.
La proposition suivante nous donne l'expression des coefficients de Taylor en $z = 0$ des fonction du "Spezialschar" :

Proposition 41 *Soit F une forme modulaire de poids k et de genre appartenant au "Spezialschar", nous supposons qu'elle est l'image de la forme modulaire de Jacobi ϕ de poids k et d'indice 1. Si nous notons :*

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n \geq 0, r \in \mathbb{Z} \\ 4mn - r^2}} c(n, r) q^n \xi^r \qquad \phi(\tau, z) = \sum_{n \geq 0} \phi_{2n}(\tau) z^{2n}$$

$$F(Z) = \sum_{n \geq 0} f_{2n}(\tau, \omega) z^{2n},$$

alors nous avons :

$$f_{2n}(\tau,\omega) = \sum_{m\geq 1} T(m)(\phi_{2n})e^{2\pi i m\omega}$$
$$f_0(\tau,\omega) = \sum_{m\geq 1} T(m)(\phi_0)e^{2\pi i m\omega} + c(0,0)G_k$$

Preuve: Pour démontrer cette proposition, il suffit de reprendre la construction de la fonction F, nous avons alors :

$$\begin{aligned} F(Z) &= \sum_{m\geq 1} V_m(\phi)e^{2\pi i m\omega} + G_k(\tau) \\ &= \sum_{m\geq 1}(\sum_{n\geq 0} T(m)(\phi_{2n})(\tau)z^{2n})e^{2\pi i m\omega} + G_k(\tau), \end{aligned}$$

en réordonnant les termes nous retrouvons les formules désirées. Le fait qu'il n'y ait que des coefficients pairs s'explique par l'appartenance de la fonction ϕ à l'espace des formes modulaire de Jacobi de poids k et d'indice 1. ■

Grâce au "Spezialschar" , nous allons avoir accès à trois formes modulaires de Siegel particulières : les séries d'Eisenstein E_4, E_6 et E_{12}. Ces séries génèrent avec la fonction ϕ_{10} l'espace des formes modulaires de Siegel de poids pairs et si nous rajoutons la fonction Δ_{35} d'Igusa à ces quatre fonctions, nous pouvons engendrer l'espace des formes modulaires de Siegel. Nous allons donner une théorème et un corollaire qui vont nous permettre d'accéder aux trois séries d'Eisenstein dont nous avons parlé précédemment :

Théorème 13 *Le plongement V qui envoie $J_{k,1}$ dans l'espace des formes modulaire de Siegel de poids k est Hecke équivariant par rapport à l'homomorphisme d'algèbres de Hecke $i : \mathbb{T}_S \to \mathbb{T}_J$ définie de la façon suivante sur les générateurs :*

$$i(T_S(p)) = T_J(p) + p^{k-1} + p^{k-2}$$
$$i(T_{S'}(p)) = (p^{k-1} + p^{k-2})T_J(p) + 2p^{2k-3} + p^{2k-4}$$

Les notations utilisées sont les suivantes : $\mathbb{T}_S$ désigne l'algèbre de Hecke des formes modulaires de Siegel et $\mathbb{T}_J$ désigne l'algèbre de Hecke des forme modulaires de Jacobi.

Corollaire 10 *Soit k un entier pair, la série d'Eisenstein de poids k pour les formes modulaires de genre 2 est définie par l'égalité suivante :*

$$E_k^{(2)}(Z) = \sum_{(C,D)} \det(CZ+D)^{-k},$$

où la somme est prise sur les paires de matrices C et D symétriques dans $M_2(\mathbb{Z})$ premières entre elles. Nous avons l'égalité suivante :

$$E_k^{(2)}(Z) = V\big(-\frac{2k}{B_k}E_{k,1}\big)(Z)$$

3.3.0.1 Exemple de $E_4^{(2)}$

D'après ce que nous venons de voir, cette série d'Eisenstein peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_4^{(2)}(Z) &= 240(V_0(E_{4,1}) + \sum_{n\geq 0}(\sum_{m\geq 1} T(m)(\phi_{2n})(\tau)e^{2\pi i m\omega})z^{2n})) \\ &= 240(G_4(\tau) + \sum_{n\geq 0}(\sum_{m\geq 1} T(m)(\phi_{2n})(\tau)e^{2\pi i m\omega})z^{2n})) \\ &= \sum_{n\geq 0} e_{4,2n}(\tau,\omega)z^{2n} \end{aligned}$$

où les ϕ_{2n} désigne les coefficients de Taylor de la série d'Eisenstein $E_{4,1}$. La première chose que nous remarquons est que la parité par rapport à z de la série d'Eisenstein $E_{4,1}$ implique la parité par rapport à z dans $Z = (\tau, z, \omega)$ dans $E_4^{(2)}$. Comme nous avons calculé précédemment les premiers ϕ_{2n}, nous pouvons donner les premiers $e_{4,2n}(\tau,\omega)$: nous nous arrêtons aux 3 premiers coefficients dans un soucis de lisibilité. Nous avons :

$$\begin{aligned} &e_{4,0}(\tau,\omega) = 240^2 a_{0,1,0}(\tau,\omega) \\ &e_{4,2}(\tau,\omega) = (2\pi)^2\big(-7056a_{0,0,1}(\tau,\omega) + 80640a_{1,1,1}(\tau,\omega) - 921600a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,1,0}(\tau,\omega)\big) \\ &e_{4,4}(\tau,\omega) = (2\pi)^4\Bigg(-1600000a_{0,1,0}(\tau,\omega)^2 + 9216000a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,1,0}(\tau,\omega) \\ &- 1612800a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{1,1,0}(\tau,\omega) + 3840000a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{2,1,0}(\tau,\omega) \\ &+ 282240a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,0,1}(\tau,\omega) - 672000a_{1,2,1}(\tau,\omega)\Bigg) \end{aligned}$$

3.3.0.2 Exemple de $E_6^{(2)}$

D'après ce que nous venons précédemment, cette série d'Eisenstein peut s'ecrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_6^{(2)}(Z) &= -504(V_0(E_{6,1}) + \sum_{n\geq 0}(\sum_{m\geq 1} T(m)(\varphi_{2n})(\tau)e^{2\pi i m\omega})z^{2n})) \\ &= -504(G_6(\tau) + \sum_{n\geq 0}(\sum_{m\geq 1} T(m)(\varphi_{2n})(\tau)e^{2\pi i m\omega})z^{2n})) \\ &= \sum_{n\geq 0} e_{6,2n}(\tau,\omega)z^{2n} \end{aligned}$$

où les φ_{2n} désignent les coefficients de Taylor de la série d'Eisenstein $E_{6,1}$. La première chose que nous remarquons est que la parité par rapport à z de la série d'Eisenstein $E_{6,1}$ implique la parité par rapport à z dans $Z = (\tau, z, \omega)$ dans $E_6^{(2)}$. Comme nous avons calculé précédemment les premiers φ_{2n}, nous pouvons donner les premiers $e_{6,2n}(\tau,\omega)$: nous nous arrêtons aux trois premiers coefficients dans un soucis de lisibilité. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&e_{6,0}(\tau,\omega) = (504)^2 a_6(\tau,\omega)\\
&e_{6,2}(\tau,\omega) = (2\pi)^2\Big(- 48660480 a_{0,1,0}(\tau,\omega)^2 + 29030400 a_{1,2,1}(\tau,\omega) - 6096384 a_{1,0,0}(\tau,\omega) a_{0,0,1}(\tau,\omega)\Big)\\
&e_{6,4}(\tau,\omega) = (2\pi)^4\Big(- 349517 a_{0,1,0}(\tau,\omega) a_{0,0,1}(\tau,\omega) + 85349376 a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2 a_{0,0,1}(\tau,\omega)\\
&- 812851200 a_{1,0,0}(\tau,\omega) a_{1,1,1}(\tau,\omega) + 35562240 a_{0,0,1}(\tau,\omega) a_{2,1,0}(\tau,\omega)\\
&+ 64512000 a_{1,0,0}(\tau,\omega) a_{0,1,0}(\tau,\omega)^2 - 338688000 a_{0,1,0}(\tau,\omega) a_{1,1,1}(\tau,\omega)\Big)
\end{aligned}$$

3.3.0.3 Exemple de $E_{12}^{(2)}$

D'après le théorème que nous venons de démontrer, pour avoir accès à la fonction $E_{12}^{(2)}$ nous avons besoin de la série d'Eisenstein $E_{12,1}(\tau,z)$. Nous avons démontré lorsque nous avons étudié les nombres de Cohen que :

$$\begin{aligned}
&E_{12,1}(\tau,z) = \alpha E_4(\tau)^2 E_{4,1}(\tau,z) + \beta E_6(\tau) E_{6,1}(\tau,z)\\
&\alpha = \frac{3^2.7^2.113}{131.593}\\
&\beta = \frac{2.5^2.557}{131.593}
\end{aligned}$$

Ces valeurs déterminées, nous pouvons faire deux remarques : tout d'abord en $z=0$, la série d'Eisenstein $E_{12,1}(\tau,z)$ n'est pas égale à la série d'Eisenstein $E_{12}(\tau)$ alors que c'était le cas pour les poids plus petits ; ensuite nous pouvons donner une expression de la somme de certaines séries de Poincaré de poids 12 :

$$\sum_{\lambda>0} \sum_{(c,d)=1|ad-bc=1} \exp\left(2\pi i(\lambda)^2 \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \frac{2^{10}.3^5.5^2.7^2}{131.593.691}\Delta_{12}(\tau)$$

Nous sommes maintenant capable de donner les deux premiers coefficients de Taylor autour de $z=0$ de $E_{12}^{(2)}$; nous nous limitons à deux pour des soucis de lisibilité et nous commençons par donner les deux premiers coefficients de Taylor en $z=0$ de la série d'Eisenstein $E_{12,1}(\tau,z)$ que nous notons $e_{12,2i}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
e_{12,0}(\tau) &= E_{12}(\tau) + \frac{304819200}{53678953}\Delta_{12}(\tau)\\
e_{12,2}(\tau) &= (2\pi)^2(-2G_{14}(\tau) + 2G_2(\tau))(E_{12}(\tau) + \frac{304819200}{53678953}\Delta_{12}(\tau))\\
&= \frac{\pi^2}{3}E_{14}(\tau) + 8\pi^2 G_2(\tau) E_{12}(\tau) + 8\pi^2 G_2(\tau)\frac{304819200}{53678953}\Delta_{12}(\tau)
\end{aligned}$$

Les deux premiers coefficients de la forme modulaire $E_{12}^{(2)}$, les $E_{12,2i}(\tau,\omega)$ s'en déduisent immédiatement :

$$E_{12,0}(\tau,\omega) = (\frac{65520}{691})^2 G_{12}(\tau)G_{12}(\omega) + \frac{19971753984000}{37092156523}\Delta_{12}(\tau)\Delta_{12}(\omega)$$
$$E_{12,2}(\tau,\omega) = (2\pi)^2\frac{65520}{691}(-\frac{691}{1365}G_{14}(\tau)G_{14}(\omega) + 48(G_{14}(\omega)G_{12}(\tau)G_2(\tau) + G_{14}(\tau)G_{12}(\omega)G_2(\omega))$$
$$-\frac{3144960}{691}a_{1,0,0}(\tau,\omega)G_{12}(\tau)G_{12}(\omega))$$

3.4 Le relèvement arithmétique

Le relèvement arithmétique est une généralisation de la construction précédente utilisée pour obtenir le Spezialschar : ce relèvement s'applique en particulier aux formes modulaires de Jacobi d'indice demi-entier et pour le caractère de $SL(2,\mathbb{Z})$ de la forme $v_{\eta^r} \times v_H$. Nous allons voir que nous pouvons encore déterminer les coefficients de Taylor en $z = 0$ des fonctions ainsi relevées.
Tout d'abord, nous allons donner le théorème qui nous donne les propriétés de relèvement, ce théorème peut être trouvé dans [V. 08] :

Théorème 14 *Soit k un entier, t un entier ou un demi-entier,D un entier pair divisant 24. Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice t pour le caractère $v_\eta^D \times v_H^\epsilon$, où ϵ vaut 0 ou 1. De plus $Q = 24/D$ désignera le conducteur du caractère v_η^D et nous fixerons un élément μ dans $(\mathbb{Z}/Q\mathbb{Z})^*$.*
Si ϕ est une forme parabolique, alors la fonction :

$$Lift_\mu(Z) = \sum_{\substack{m\equiv\mu[Q]\\ m>0}} m^{2-k}T_-^{(Q)}(m)(\phi)\exp(2\pi i m t\omega)$$

est une forme parabolique de poids k pour un groupe paramodulaire et un certain caractère $\tilde{\chi}$. Dans le cas où tQ est entier, le groupe paramodulaire est Γ_{Qt}^+ et tQ est demi-entier et non entier alors le groupe paramodulaire est $\Gamma'_{4Qt} = \delta_2\Gamma_{Qt}^+\delta_2^{-1}$ où $\delta_2 = diag(1,2,1,2^{-1})$. Le caractère $\tilde{\chi}$ dans chaque cas est induit par $v_{D,\epsilon,\mu} \times v_H^\epsilon$, où $v_{D,\epsilon,\mu}$ est un caractère de $SL(2,\mathbb{Z})$ μ-conjugué à v_η^D dans le sens du lemme précédent, et par les relations :

$$v_{D,\epsilon,\mu}(V_{Qt}) = (-1)^k, \quad v_{D,\epsilon,\mu}\left(\left[0,0;\frac{\kappa}{Qt}\right]\right) = \exp\left(2\pi i\frac{\mu\kappa}{Q}\right)$$

Si ϕ n'est plus supposée cuspidale et si le coefficient de Fourier de ϕ devant le terme constant est nul alors la fonction :

$$Lift_\mu(Z) = \sum_{\substack{m\equiv\mu[Q]\\ m>0}} m^{2-k}T_-^{(Q)}(m)(\phi)\exp(2\pi i m t\omega)$$

est une forme modulaire de poids k pour les groupes paramodulaires et les caractères définis précédemment.

Nous allons maintenant donner l'expression des coefficients de Taylor en $z = 0$ des fonctions relevées par l'intermédiaire du théorème précédent :

Proposition 42 *Soit une forme de Jacobi de poids k et d'indice t pour le caractère $v_\eta^D \times v_H$ avec D pair un entier pair diviseur de 24 : nous notons $Q = 24/D$ le conducteur de v_η^D. Notons $L_n(\tau,\omega)$ le nième coefficient de Taylor en $z = 0$ de la forme modulaire $Lift_\mu(\phi)$. Pour $n + k$ pair, nous avons :*

$$L_n(\tau,\omega) = \sum_{m\equiv\mu[Q]} T(m)(\phi_n)e^{2\pi imt\omega},$$

$$T(m)(\phi_n) = m^{k+n-1}\sum_{\substack{ad=m\\ b[d]}} d^{-k-n}v_\eta^D(\sigma_a)\phi_n\left(\frac{a\tau+bQ}{d}\right),$$

$$\phi(\tau,z) = \sum_{n\geq 0}\phi_n(\tau)z^n$$

si $n + k - D/2$ est impair les $L_n(\tau,\omega)$ sont identiquement nulles. Les $L_n(\tau,\omega/t)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $n + k$ pour $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$ et pour le caractère $(v_\eta^D)_m \times (v_\eta^D)_m$ où χ_m est le caractère que nous avons introduit lorsque nous avons étudié les formes quasi-modulaire avec caractères.

Nous allons maintenant donner deux exemples de calculs :

3.4.1 La fonction D_1

Cette fonction est obtenue par le relèvement arithmétique de la fonction $\eta(\tau)\theta_{3/2}$ avec $\mu = 1$: c'est donc une forme modulaire de Siegel de poids 1 pour le groupe Γ_{18}^+ et dont le caractère agit comme $v_\eta^2 \times v_H$ sur $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes H(\mathbb{Z})$. Considérons le développement de Taylor de D_1 en $z = 0$:

$$D_1(Z) = \sum_{n\geq 0} d_{1,2n}(\tau,\omega)z^{2n}$$

$$d_{1,2n}(\tau,\omega) = \sum_{m\equiv 1[12]} T(m)(\eta(\tau)\tilde{d_{2n}})(\tau)e^{3\pi im\omega},$$

où les $\tilde{d_{2n}}$ sont les coefficients de Taylor en $z = 0$ de la fonction $\eta(\tau)\theta_{3/2}$. Nous avons déjà donner l'expression générale de ces derniers et les trois premiers coeffcients sont les suivants :

$$\tilde{d_0}(\tau) = 2\eta(\tau)$$

$$\tilde{d_2}(\tau) = -144(2\pi i)^2 G_2(\tau)\eta(\tau)$$

$$\tilde{d_4}(\tau) = (2\pi i)^4\bigg(-1872G_2(\tau)^2\eta(\tau) + 60G_4(\tau)\eta(\tau)\bigg)$$

Par conséquent, nous en déduisons les trois premiers coefficients de Taylor en $z = 0$ de D_1 :

$$\begin{aligned}
&d_{1,0}(\tau,\omega) = 2\eta(\tau)\eta(18\omega)\\
&d_{1,2}(\tau,\omega) = 3456\eta(\tau)^2\eta(18\omega)^2 a_2(\tau,18\omega)\\
&d_{1,4}(\tau,\omega) = 22464000\eta(\tau)^2\eta(18\omega)^2(a_2(\tau,18\omega))^2 - 374400\eta(\tau)^2\eta(18\omega)^2 a_{2^2,4}(\tau,18\omega)\\
&-13488\eta(\tau)^2\eta(18\omega)^2 a_4(\tau,18\omega),
\end{aligned}$$

la dernière égalité vient du fait que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\equiv 1[12]} T(m)(G_2^2\eta(\tau)^2)e^{3\pi i m\omega}\\
&= \frac{1}{60}\eta(\tau)^2\eta(18\omega)^2 - \frac{1}{50}D(\eta^2G_2)(\tau)D(\eta^2G_2)(18\omega)
\end{aligned}$$

3.4.2 La fonction D_2

Cette fonction est obtenue par le relèvement arithmétique de la fonction $\eta(\tau)^3\theta_{3/2}$ avec $\mu = 1$: c'est donc une forme modulaire de Siegel de poids 2 pour le groupe Γ_9^+ et dont le caractère agit comme $v_\eta^4 \times v_H$ sur $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes H(\mathbb{Z})$. Considérons le développement de Taylor de D_2 en $z = 0$:

$$\begin{aligned}
D_2(Z) &= \sum_{n\geq 0} d_{2,2n}(\tau,\omega)z^{2n}\\
d_{2,2n}(\tau,\omega) &= \sum_{m\equiv 1[6]} T(m)(\eta(\tau)\tilde{d_{2n}})(\tau)e^{3\pi i m\omega},
\end{aligned}$$

En procédons comme ci-dessus, nous pouvons exprimer les trois premiers coefficients de Taylor en $z = 0$ de D_2 :

$$\begin{aligned}
&d_{2,0}(\tau,\omega) = 2\eta(\tau)^4\eta(9\omega)^4\\
&d_{2,2}(\tau,\omega) = 3456(2\pi i)^2\eta(\tau)^4\eta(9\omega)^4 a_2(\tau,9\omega)\\
&d_{2,4}(\tau,\omega) = 44029440\eta(\tau)^4\eta(9\omega)^4(a_2(\tau,9\omega)^2 - 374400\eta(\tau)^4\eta(9\omega)^4 a_{2^2,4}(\tau,9\omega)\\
&+\frac{479400}{49}\eta(\tau)^4\eta(9\omega)a_4(\tau,9\omega)
\end{aligned}$$

3.5 Le relèvement exponentiel

Dans cette partie, nous allons utiliser un relèvement du type de Borcherds développé dans [V. 96b]. L'un des intérêts de ce relèvement est que nous travaillons avec des formes modulaires de Jacobi de poids 0 ce sont ces fonctions qui sont relevés et par conséquent il n'y a pas de caractères ou de systèmes multiplicatifs qui viennent compliquer le calcul des $T(m)$. Ainsi il est possible de calculer plus facilement plus de coefficients de Taylor par le biais de ce relèvement. Ce relèvement s'exprime de la façon suivante :

Proposition 43 *Soit $\phi_{0,t}$ une forme de Jacobi faible de poids 0 et d'indice t dont on suppose que les coefficients de Fourier $f(n,l)$ sont des entiers.*
La fonction suivante :

$$ExpLift(\phi_{0,t})(Z) = \eta(\tau)^{f(0,0)} \prod_{l>0} \left(\frac{\theta(\tau, lz) e^{\pi i l^2 \omega}}{\eta(\tau)} \right)^{f(0,l)} \exp\left(-\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} \tilde{\phi}_{0,t} | T_-(m)(Z) \right)$$

définit une forme modulaire de Siegel méromorphe de poids $\frac{f(0,0)}{2}$ par rapport au groupe Γ_t^+ et pour le caractère (ou le système de multiplicateur si le poids est demi entier) induit par $v_\eta^{24A} \times v_H^{4C}$ avec $A = \frac{1}{24} \sum_l f(0,l)$ et $C = \frac{1}{4} \sum_l l^2 f(0,l)$. De plus, nous avons :

$$ExpLift(\phi_{0,t})(V_t. < Z >) = ExpLift(\phi_{0,t})(Z)$$

Dans cette formule nous pouvons développer presque directement le produit en série de Taylor autour de $z = 0$, il ne nous reste plus qu'à analyser le terme dans l'exponentielle et le développer en série de Taylor. Nous constatons que nous pouvons donc donner le développement en série de Taylor d'une telle fonction du moment que nous connaissons le développement en série de Taylor la fonction $\phi_{0,t}$. Ainsi nous avons :

Proposition 44 *Toute forme modulaire F obtenue par le relèvement exponentiel d'une forme de Jacobi de poids 0 et d'indice t dont le n-ième coefficient de Taylor en $z = 0$ est ϕ_{2n} s'écrit sous la forme :*

$$\boxed{F(Z) = (2\pi i z)^{\tilde{A}} \Big(\eta(\tau)\eta(t\omega) \Big)^{\tilde{B}} \sum_{q\geq 0} \left(-\sum_{n\geq 1} H_{2n}(\tau,\omega) z^{2n} \right)^q \frac{1}{q!}}$$

avec :

$$\begin{aligned}
H_{2n}(\tau,\omega) &= 2\left(\sum_{l>0} \frac{f(0,l)(2\pi i l)^{2n}}{(2n)!} G_{2n}(\tau) \right) + \sum_{m\geq 1} T(m)(\phi_{2n}) \exp(2\pi i m t \omega) \\
\tilde{A} &= \sum_{l>0} f(0,l) \\
\tilde{B} &= f(0,0) + 2\sum_{l>0} f(0,l) \\
\tilde{C} &= \sum_{l>0} l^2 f(0,l)
\end{aligned}$$

Preuve: Le fait que les coefficients de Taylor en $z = 0$ de la fonction ϕ sont nuls pour n impair est justifié par la fait que son poids est 0 donc pair. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \tilde{\phi}_{0,t} | T_-(m)(Z) \\
&= m^{-1} \sum_{\substack{a\geq 1 \\ ad=m \\ b[d]}} d^{-n} \phi\left(\frac{a\tau + b}{d}, az\right) \exp(2\pi i m t \omega) \\
&= m^{-1} \sum_{\substack{a\geq 1 \\ ad=m \\ b[d]}} d^{-n} \left(\sum_{n\geq 0} \phi_{2n}\left(\frac{a\tau + b}{d}, az\right) \right) \exp(2\pi i m t \omega),
\end{aligned}$$

où les ϕ_n désignent les coefficients de Taylor de la forme de Jacobi ϕ.
Finalement, en faisant intervenir les opérateurs de Hecke, nous pouvons écrire cette égalité de la façon suivante :

$$\sum_{n\geq 1} T(m)(\phi_{2n})z^{2n}$$

Par conséquent, nous pouvons écrire les fonctions F relevées sous la forme :

$$\eta(\tau)^{f(0,0)} \prod_{l>0} \left(\frac{\theta(\tau, lz)e^{\pi i l^2 \omega}}{\eta(\tau)} \right)^{f(0,l)} \exp\left(-\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 0} T(m)(\phi_{2n})z^{2n} \exp(2\pi i m t\omega) \right)$$

Nous allons expliciter la formule que nous avons déjà obtenue pour mettre en évidence certains coefficients qui reviendront dans toutes les fonctions relevées. Tout d'abord, nous avons :

$$\begin{aligned} &\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 0} T(m)(\phi_{2n})z^{2n} \exp(2\pi i m t\omega) \\ =&\sum_{m\geq 1} T(m)(\phi_0)\exp(2\pi i t m\omega) + \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} T(m)(\phi_{2n})z^{2n}\exp(2\pi i m t\omega) \end{aligned}$$

Or nous pouvons exprimer le premier terme de la façon suivante :

$$T(m)(\phi_0) = \phi_0 \frac{\sigma_1(m)}{m}$$

et le terme ϕ_0 est constant puisque c'est le coefficient de Taylor d'ordre 0 en $z = 0$ d'une forme de Jacobi de poids 0. Ensuite comme nous avons l'égalité suivante :

$$\theta(\tau, lz) = 2\pi i l z \eta(\tau)^3 \exp\left(-2\sum_{k\geq 1} \frac{G_{2k}(\tau)(2\pi i l z)^{2k}}{(2k)!} \right),$$

nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} F(Z) =&(2z\pi i)^{\tilde{A}}\eta(\tau)^{\tilde{B}} \exp\left(\pi i\omega\tilde{C}\right) \\ &\times \exp\left(-\phi_0 \sum_{m\geq 1} \frac{\sigma_1(m)}{m}\exp(2\pi i t m\omega)\right) \exp\left(-\sum_{n\geq 1} H_{2n}(\tau,\omega)z^{2n}\right), \end{aligned}$$

Le premier de coefficient de Fourier non nul est celui devant le terme $z^{\tilde{A}}$ et ce coefficient est le suivant :

$$(2\pi i)^{\tilde{A}}\eta(\tau)^{\tilde{B}} \exp\left(\pi i\omega\tilde{C}\right) \times \exp\left(-\phi_0 \sum_{m\geq 1} \frac{\sigma_1(m)}{m}\exp(2\pi i t m\omega)\right)$$

Nous savons que le dernier terme de cet égalité est périodique de période $1/t$ et se développe en série de Fourier dont le premier terme est 1 : nous trouvons ce terme en passant à la limite en $i\infty$ dans le dernier terme. De plus comme il y a une pseudo-symétrie entre τ et ω nous en déduisons que le premier coefficient de Taylor non nul en $z = 0$ est :

$$(2\pi i)^{\tilde{A}}\left(\eta(\tau)\eta(t\omega)\right)^{\tilde{B}}$$

Finalement, en conservant les notations déjà utilisées, nous obtenons la proposition.
■

Nous allons maintenant étudier quelques exemples et en particulier les fonctions modulaire de Siegel du type Δ_i pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = 5$.

3.5.1 La fonction Δ_1

Commençons par donner la définition et les propriétés de cette fonction. Dans [V. 96b], cette fonction est vue comme une généralisation à trois dimensions de la fonction η de Dedekind, elle est définie par :

$$\Delta_1(Z) = Lift_1(\eta(\tau)^3\theta(\tau, z))$$

Par conséquent, cette fonction est une forme modulaire de poids 1 pour le groupe paramodulaire Γ_3 et dont le caractère se réduit sur $SL(2, \mathbb{Z})$ et $H(\mathbb{Z})$ au caractère $v_\eta^4 \times v_H$. De plus elle peut être construite comme le relèvement exponentiel de la forme de Jacobi de poids 0 :

$$\phi_{0,3} = \left(\frac{\theta(\tau, 2z)}{\theta(\tau, z)}\right)^2$$

Le fait que ses coefficients de Fourier sont entiers se déduit de l'expression sous forme de produits infinis de la fonction θ et nous pouvons écrire ses premiers termes :

$$\phi_{0,3}(\tau, z) = (r + 2 + r^{-1}) + q(-2r^{\pm 3} - 2r^{\pm 2} + 2r^{\pm 1} + 4) + ..$$

Nous pouvons donc calculer les constantes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ de la proposition précédente :

$$\tilde{A} = 1$$
$$\tilde{B} = 4,$$

par conséquent si nous exprimons Δ_1 de la façon suivante :

$$\Delta_1(Z) = \sum_{n\geq 0} \Delta_{1,2n+1}(\tau, \omega) z^{2n+1},$$

nous avons :

$$\Delta_{1,1}(\tau, \omega) = (2\pi i)\eta(\tau)^4\eta(3\omega)^4$$

Le fait que les termes soit impairs vient d'un argument de parité, en effet il est immédiat que :

$$\Delta_1(\tau, -z, \omega) = -\Delta_1(\tau, z, \omega)$$

Pour connaître les premiers coefficient de Taylor en $z = 0$ de cette fonction, il nous faut exprimer les premiers H_{2n}. Nous avons :

$$
\begin{aligned}
H_2(\tau,\omega) &= (2\pi i)^2 G_2(\tau) + \sum_{m\geq 1} T(m)(f_2)(\tau)\exp(6\pi i m\omega)\\
&= (2\pi i)^2 G_2(\tau) + \sum_{m\geq 1} T(m)(-24(2\pi i)^2 G_2)(\tau)\exp(6\pi i m\omega)\\
&= (2\pi i)^2 \big(G_2(\tau) - 24\sum_{m\geq 1} T(m)(G_2)(\tau)\exp(6\pi i m\omega)\big)\\
&= (2\pi i)^2 \big(G_2(\tau) - 24 G_2(\tau)\sum_{m\geq 1} \sigma_1(m)\exp(6\pi i m\omega)\big)\\
&= (2\pi i)^2 \big(G_2(\tau) - 24 G_2(\tau)(G_2(3\omega) + \frac{1}{24})\big)\\
&= -24(2\pi i)^2 a_{1,0,0}(\tau,\omega).
\end{aligned}
$$

ensuite :

$$
\begin{aligned}
H_4(\tau,\omega) &= \frac{1}{12}(2\pi i)^4 G_4(\tau) + \sum_{m\geq 1} T(m)(f_4)(\tau)\exp(6\pi i m\omega)\\
&= (2\pi i)^4\big(\frac{1}{12}G_4(\tau) + \sum_{m\geq 1} T(m)(-10G_4(\tau) + 72G_2^2(\tau))\exp(6\pi i m\omega)\big)\\
&= (2\pi i)^4\big(\frac{1}{12}G_4(\tau) - \sum_{m\geq 1} 10\sigma_3(m)G_4(\tau)\exp(6\pi i m\omega)\\
&+ 72\sum_{m\geq 1}(-\frac{1}{2}m\sigma_1(m)D(G_2) + \frac{5}{12}\sigma_3(m)G_4)\exp(6\pi i m\omega)\big)\\
&= (2\pi i)^4\big(\frac{1}{12}G_4(\tau) - 10G_4(\tau)(G_4(3\omega) - \frac{1}{240}) - 36D(G_2)(\tau)D(G_2)(3\omega)\\
&+ 30G_4(\tau)(G_4(3\omega) - \frac{1}{240})\\
&= (2\pi i)^4\big(20G_4(\tau)G_4(3\omega) - 36(-2G_2^2(\tau) + \frac{5}{6}G_4(\tau))(-2G_2^2(3\omega) + \frac{5}{6}G_4(3\omega)\big)\\
&= (2\pi i)^4\big(-5a_{0,1,0}(\tau,3\omega) - 144a_{1,0,0}(\tau,3\omega)^2 + 60a_{2,1,0}(\tau,3\omega)\big).
\end{aligned}
$$

puis $H_6(\tau,\omega)$:

$$\begin{aligned}
H_6(\tau,\omega) &= \frac{(2\pi i)^6}{360}G_6(\tau) + \sum_{m\geq 1} T(m)(f_6)(\tau)\exp(6\pi i m\omega) \\
&= (2\pi i)^6\Big(\frac{1}{360}G_6(\tau) + \sum_{m\geq 1} T(m)(-\frac{7}{5}G_6(\tau) + 60G_4(\tau)G_2(\tau) \\
&- 144G_2(\tau)^3)\exp(6\pi i m\omega)\Big) \\
&= (2\pi i)^6\Bigg(- \frac{7}{40}a_{0,0,1}(\tau,3\omega) + 21a_{1,1,1}(\tau,3\omega) - 84a_{3,0,1}(\tau,3\omega) \\
&+ 1440a_{1,0,0}(\tau,3\omega)a_{2,1,0}(\tau,3\omega) - 840a_2(\tau,3\omega)a_4(\tau,3\omega) - 1152a_2(\tau,3\omega)\Bigg).
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer certains coefficients de Taylor de Δ_1 en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,3}(\tau,\omega)(\tau,\omega) &= -\Delta_{1,1}(\tau,\omega)(\tau,\omega)H_2(\tau,\omega) \\
\Delta_{1,5}(\tau,\omega)(\tau,\omega) &= \Delta_{1,1}(\tau,\omega)(\tau,\omega)\Bigg(- H_4(\tau,\omega) + \frac{1}{2}H_2(\tau,\omega)^2\Bigg) \\
\Delta_{1,7}(\tau,\omega)(\tau,\omega) &= \Delta_{1,1}(\tau,\omega)\Bigg(- H_6(\tau,\omega) + H_2(\tau,\omega)H_4(\tau,\omega) - \frac{1}{6}H_2(\tau,\omega)^3\Bigg)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne, une fois les calculs faits :

$$\boxed{\Delta_{1,3}(\tau,\omega)(\tau,\omega) = -24(2\pi i)^3\eta(\tau)^4\eta(3\omega)^4a_{1,0,0}(\tau,3\omega)}$$

$$\boxed{\Delta_{1,5}(\tau,\omega)(\tau,\omega) = (2\pi i)^5\eta(\tau)^4\eta(3\omega)^4\Bigg(5a_{0,1,0}(\tau,3\omega) + 144a_{1,0,0}(\tau,3\omega)^2 + 60a_{2,1,0}(\tau,3\omega)\Bigg)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\Delta_{1,7}(\tau,\omega)(\tau,\omega) &= (2\pi i)^7\eta(\tau)^4\eta(3\omega)^4\Bigg(- \frac{7}{40}a_{0,0,1}(\tau,3\omega) + 21a_{1,1,1}(\tau,3\omega) - 84a_{3,0,6} \\
&- 720a_{1,0,0}(\tau,3\omega)a_{0,1,0}(\tau,3\omega) + 4608a_{1,0,0}(\tau,3\omega)^2\Bigg)
\end{aligned}}$$

3.5.2 La fonction Δ_2

Commençons par donner la définition et les propriétés de cette fonction. Dans [V. 96b], cette fonction est aussi vue comme une généralisation à trois dimensions de la fonction η de Dedekind, elle est définie par :

$$\Delta_2(Z) = Lift_1(\eta(\tau)^3\theta(\tau,z))$$

Par conséquent, cette fonction est une forme modulaire de poids 2 pour le groupe paramodulaire Γ_2 et dont le caractère se réduit sur $SL(2,\mathbb{Z})$ et $H(\mathbb{Z})$ au caractère $v_\eta^4 \times v_H$. De plus elle peut être construite comme le relèvement exponentiel de la forme de Jacobi de poids 0 :

$$\begin{aligned}
\phi_{0,2} &= \frac{\phi_{2,2}(\tau,\omega)}{\eta(\tau)^4} \\
\phi_{2,2}(\tau,\omega) &= \frac{2}{2\pi i}\left(\frac{3}{2}\frac{\partial\theta((\tau,z)}{\partial z}\frac{\eta(\tau)\theta(\tau,2z)}{\theta(\tau,z)} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\frac{\eta(\tau)\theta(\tau,2z)}{\theta(\tau,z)})}{\partial z}\theta(\tau,z)\right)
\end{aligned}$$

Le fait que ses coefficients de Fourier sont entiers se déduit de l'expression sous forme de produits infinis de la fonction θ et de la fonction η et nous pouvons écrire ses premiers termes :

$$\phi_{0,2}(\tau,z) = (r+4+r^{-1}) + q(-2r^{\pm 3} - 8r^{\pm 2} - r^{\pm 1} + 16) + ..$$

Nous pouvons donc calculer les constantes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ de la proposition précédente :

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= 1 \\
\tilde{B} &= 6,
\end{aligned}$$

par conséquent si nous exprimons Δ_2 de la façon suivante :

$$\Delta_2(Z) = \sum_{n\geq 0}\Delta_{2,2n+1}(\tau,\omega)z^{2n+1},$$

nous avons :

$$\Delta_{2,1}(\tau,\omega) = (2\pi i)\eta(\tau)^6\eta(2\omega)^6$$

Le fait que les termes soit impairs vient de l'argument suivant :

$$\Delta_2(\tau,-z,\omega) = -\Delta_2(\tau,z,\omega)$$

Pour accéder aux premiers coefficients de Taylor en $z=0$ de Δ_2, il nous faut calculer les $H_{2n}(\tau,\omega)$. Nous avons en répétant les mêmes procédés de calculs que précédemment :

$$\begin{aligned}
&H_2(\tau,\omega) = -8(2\pi i)^2 a_{1,0,0}(\tau,2\omega) \\
&H_4(\tau,\omega) = (2\pi i)^4\left(\frac{85}{9}a_{0,1,0}(\tau,2\omega) - \frac{40}{3}a_{2,1,0}(\tau,2\omega) + 32a_{1,0,0}(\tau,2\omega)^2\right) \\
&H_6(\tau,\omega) = (2\pi i)^6\Bigg(512a_{1,0,0}(\tau,2\omega)^3 + \frac{112}{3}a_{3,0,1}(\tau,2\omega) - 640a_{1,0,0}(\tau,2\omega)a_{2,1,0}(\tau,2\omega) \\
&+ 672a_{1,0,0}(\tau,2\omega)a_{0,1,0}(\tau,2\omega) - \frac{532}{15}a_{1,1,1}(\tau,2\omega) + \frac{347}{225}a_{0,0,1}(\tau,2\omega)\Bigg)
\end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers coefficients de Taylor de Δ_2 en $z = 0$ ont donc les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta_{2,3}(\tau,\omega) &= -\Delta_{2,1}(\tau,\omega)H_2(\tau,\omega)\\
\Delta_{2,5}(\tau,\omega) &= -\Delta_{2,1}(\tau,\omega)\Big(-H_4(\tau,\omega)+\frac{1}{2}H_2(\tau,\omega)^2\Big)\\
\Delta_{2,7}(\tau,\omega) &= -\Delta_{2,1}(\tau,\omega)\Big(-H_6(\tau,\omega)+H_2(\tau,\omega)H_4(\tau,\omega)-\frac{1}{6}H_2(\tau,\omega)^3\Big)
\end{aligned}$$

Les calculs explicites nous donnent finalement :

$$\boxed{\Delta_{2,3}(\tau,\omega) = -8(2\pi i)^3\eta(2\omega)^6\eta(\tau)^6a_2(\tau,2\omega)}$$

$$\boxed{\Delta_{2,5}(\tau,\omega) = (2\pi i)^5\eta(\tau)^6\eta(2\omega)^6\Big(-\frac{85}{9}a_{0,1,0}(\tau,2\omega)+\frac{40}{3}a_{2,1,6}(\tau,2\omega)\Big)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_{2,7}(\tau,\omega) = (2\pi i)^7\eta(\tau)^6\eta(2\omega)^6\Big(&-\frac{2560}{3}a_{1,0,0}(\tau,2\omega)-\frac{112}{3}a_{3,0,1}(\tau,2\omega)+\frac{532}{15}a_{1,1,1}(\tau,2\omega)\\
&-\frac{347}{225}a_{0,0,1}(\tau,2\omega)^3+\frac{2240}{3}a_{2,1,0}(\tau,2\omega)a_{1,0,0}(\tau,2\omega)-\frac{6728}{9}a_{0,1,0}(\tau,2\omega)a_{1,0,0}(\tau,2\omega)\Big)\end{aligned}}$$

3.5.3 La fonction Δ_5

Commençons par donner la définition et les propriétés de cette fonction. Dans [V. 96b], cette fonction est aussi vue comme une généralisation à trois dimensions de la fonction η de Dedekind, elle est définie par :

$$\Delta_5(Z) = Lift_1(\eta(\tau)^9\theta(\tau,z))$$

Par conséquent, cette fonction est une forme modulaire de poids 5 pour le groupe $Sp_2(\mathbb{Z})$ et dont le caractère se réduit sur $SL(2,\mathbb{Z})$ et $H(\mathbb{Z})$ au caractère $v_\eta^{12}\times v_H$.
De plus elle peut être construite comme le relèvement exponentiel de la forme modulaire de Jacobi de poids 0 suivante :

$$\begin{aligned}
\phi_{0,1}(\tau,z) &= \frac{\phi_{12,1}(\tau,z)}{\eta(\tau)^{24}}\\
\phi_{12,1}(\tau,z) &= \frac{1}{144}\big(E_4(\tau)^2E_{4,1}(\tau,z)-E_6(\tau)E_{6,1}(\tau,z)\big)
\end{aligned}$$

Le fait que ses coefficients de Fourier sont entiers se déduit de l'expression sous forme de produits infinis de la fonction η et des propriétés de la fonction $\phi_{12,1}$ et nous pouvons écrire ses premiers termes :

$$\phi_{12,1}(\tau,z) = (r+10+r^{-1})+q(-10r^2-64r^{-1}+108-64r^1+10r^2)+..$$

Nous pouvons donc calculer les constantes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ de la proposition précédente :

$$\tilde{A} = 1$$
$$\tilde{B} = 12,$$

par conséquent si nous exprimons Δ_5 de la façon suivante :

$$\Delta_5(Z) = \sum_{n\geq 0} \Delta_{5,2n+1}(\tau,\omega)z^{2n+1},$$

nous avons :

$$\Delta_{5,1}(\tau,\omega) = (2\pi i)\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}$$

Le fait que les termes soit impairs vient d'un argument de parité, en effet il est immédiat que :

$$\Delta_5(\tau,-z,\omega) = -\Delta_5(\tau,z,\omega)$$

Nous allons maintenant calculer les premiers H_{2n}, ces derniers nous donnerons accès aux premiers $\Delta_{5,2n+1}$. Nous avons :

$$H_2(\tau,\omega) = 24(2\pi)^2 a_{1,0,0}(\tau,\omega)$$
$$H_4(\tau,\omega) = (2\pi)^4\big(\frac{5}{3}a_{0,1,0}(\tau,\omega) + 20a_{2,1,0}(\tau,\omega) - 48a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2\big)$$
$$H_6(\tau,\omega) = (2\pi)^6\big(+ 128a_{1,0,0}(\tau,\omega)^3 + \frac{28}{3}a_{3,0,1}(\tau,\omega)$$
$$+ \frac{49}{3}a_{1,1,1}(\tau,\omega) - 120a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,1,0}(\tau,\omega) - \frac{133}{360}a_{0,0,1}(\tau,\omega)\big)$$
$$H_8(\tau,\omega) = (2\pi)^8\Bigg(- 384a_{1,0,0}(\tau,\omega)^4 + 960a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2a_{2,1,0}(\tau,\omega) - 112a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{3,0,1}(\tau,\omega)$$
$$+ 200a_{2,1,0}(\tau,\omega)^2 + 400a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2 + \frac{2500}{3}a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{2,1,0}(\tau,\omega)$$
$$- 280a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{1,1,1}(\tau,\omega) + \frac{476}{15}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,0,1}(\tau,\omega) - 200a_{1,2,1}(\tau,\omega) + \frac{9625}{6}a_{0,1,0}(\tau,\omega)^2\Bigg)$$

Il nous reste maintenant à relier ces termes aux premiers coefficients de Taylor de Δ_5 en $z = 0$. D'après ce que nous avons fait précédemment, nous avons les relations suivantes :

$$\Delta_{5,3}(\tau,\omega) = -2\pi i\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}H_2(\tau,\omega)$$
$$\Delta_{5,5}(\tau,\omega) = 2\pi i\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}\big(- H_4(\tau,\omega) + \frac{1}{2}H_2(\tau,\omega)^2\big)$$
$$\Delta_{5,7}(\tau,\omega) = 2\pi i\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}\big(- H_6(\tau,\omega) + H_2(\tau,\omega)H_4(\tau,\omega) - \frac{1}{6}H_2(\tau,\omega)^3\big)$$
$$\Delta_{5,9}(\tau,\omega) = 2\pi i\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}\Bigg(- H_8(\tau,\omega) + H_6(\tau,\omega)H_2(\tau,\omega) + \frac{1}{2}H_4^2(\tau,\omega)$$
$$- \frac{1}{4}H_4(\tau,\omega)H_2(\tau,\omega)^2 + \frac{1}{24}H_2(\tau,\omega)^4\Bigg)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\boxed{\Delta_{5,3}(\tau,\omega) = -24(2i\pi)(2\pi)^2\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}a_{1,0,0}(\tau,\omega)}$$

$$\boxed{\Delta_{5,5}(\tau,\omega) = 2\pi i(2\pi)^4\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}\Big(-\frac{5}{3}a_{1,0,1}(\tau,\omega) - 20a_{2,1,0}(\tau,\omega) + 328a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2\Big)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_{5,7}(\tau,\omega) = (2\pi)(2\pi)^6\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}\Big(&2128a_{1,0,0}(\tau,\omega)^3 + \frac{365}{3}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,1,0}(\tau,\omega) + \frac{133}{360}a_{0,0,1}(\tau,\omega)\\ &- \frac{28}{3}a_{3,0,1}(\tau,\omega) - \frac{49}{3}a_{1,1,1}(\tau,\omega) + 20a_{2,1,0}(\tau,\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega)\Big)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_{5,9}(\tau,\omega) = (2\pi i)(2\pi)^8\eta(\tau)^{12}\eta(\omega)^{12}\Big(&15500a_{1,0,0}(\tau,\omega)^4 - 5a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2a_{2,1,0}(\tau,\omega)\\ &+ \frac{364}{3}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{3,0,1}(\tau,\omega) - \frac{7205}{12}a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2a_{0,1,0}(\tau,\omega) - 800a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{2,1,0}(\tau,\omega)\\ &+ \frac{889}{3}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{1,1,1}(\tau,\omega) - \frac{11557}{360}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,0,1}(\tau,\omega) + 200a_{1,2,1}(\tau,\omega) - \frac{14425}{9}a_{0,1,0}(\tau,\omega)^2\Big)\end{aligned}}$$

3.5.4 Calculs du développement de Taylor de l'inverse de certaines formes modulaires de Siegel

Le relèvement exponentiel a aussi l'avantage de permettre d'accéder presque sans calculs supplémentaires aux développements de Taylor en $z = 0$ des produits, des puissances et des inverses des fonctions que nous pouvons exprimer sous forme de relèvement exponentiel. Nous allons expliciter ces propriétés dans la proposition suivante :

Proposition 45 *Soit k un entier non nul, pour toute forme modulaire F obtenue par le relèvement exponentiel d'une forme de Jacobi de poids 0 et d'indice t dont le n-ième coefficient de Taylor en $z = 0$ est ϕ_n, nous pouvons écrire :*

$$\boxed{F(Z)^k = (2\pi iz)^{k\tilde{A}}\Big(\eta(\tau)\eta(t\omega)\Big)^{k\tilde{B}}\sum_{q\geq 0}\Big(-k\sum_{n\geq 1}H_{2n}(\tau,\omega)z^{2n}\Big)^q\frac{1}{q!}}$$

avec :

$$\begin{aligned}
H_{2n}(\tau,\omega) &= 2\Bigg(\sum_{l>0}\frac{f(0,l)(2\pi il)^{2n}}{(2n)!}G_{2n}(\tau)\Bigg)+\sum_{m\geq 1}T(m)(\phi_{2n})\exp(2\pi imt\omega)\\
\tilde{A} &= \sum_{l>0}f(0,l)\\
\tilde{B} &= f(0,0)+2\sum_{l>0}f(0,l)\\
\tilde{C} &= \sum_{l>0}l^2f(0,l)
\end{aligned}$$

Preuve:

En effet, si nous reprenons la formule suivante :

$$\begin{aligned}
&F(\tau,z,\omega)\\
=&\eta(\tau)^{f(0,0)}\prod_{l>0}\left(\frac{\theta(\tau,lz)e^{\pi il^2\omega}}{\eta(\tau)}\right)^{f(0,l)}\exp\Bigg(-\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\tilde{\phi}_{0,t}|T_-(m)(Z)\Bigg),
\end{aligned}$$

nous nous aperçevons que pour tout k dans $\mathbb{Z}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&F(\tau,z,\omega)^k\\
=&Lift(k\phi_{0,t})(\tau,z,\omega)\\
=&\eta(\tau)^{kf(0,0)}\prod_{l>0}\left(\frac{\theta(\tau,lz)e^{\pi il^2\omega}}{\eta(\tau)}\right)^{kf(0,l)}\exp\Bigg(-\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\tilde{k}\phi_{0,t}|T_-(m)(Z)\Bigg)\\
=&\eta(\tau)^{kf(0,0)}\prod_{l>0}\left(\frac{\theta(\tau,lz)e^{\pi il^2\omega}}{\eta(\tau)}\right)^{kf(0,l)}\exp\Bigg(-\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 0}T(m)(k\phi_n)z^n\exp(2\pi imt\omega)\Bigg)
\end{aligned}$$

Ensuite, il nous suffit de reprendre la démonstration dans le cas où $k=1$ pour obtenir la conclusion désirée.
■

En guise d'exemple, nous pouvons ainsi déterminer le développement en série de Laurent en $z=0$ de $\phi_{10}=\Delta_5^2$ directement à partir de celui de Δ_5 sans passer par des produits de séries absolument convergentes. Notons $\phi_{10,n}$ les coefficients de Taylor en $z=0$ de ϕ_{10}, les termes pour n impairs sont nuls et pour n pair les premiers coefficients sont :

$$\boxed{\phi_{10,0}(\tau,\omega) = (2\pi i)^2\Delta_{12}(\tau)\Delta_{12}(\omega)}$$

$$\boxed{\phi_{10,2}(\tau,\omega) = -48(2\pi i)^2(2\pi)^2\Delta_{12}(\tau)\Delta_{12}(\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega)}$$

$$\boxed{\phi_{10,4}(\tau,\omega) = (2\pi i)^2(2\pi)^4\Delta_{12}(\tau)\Delta_{12}(\omega)\Big(-\frac{10}{3}a_{0,1,0}(\tau,\omega) - 40a_{2,1,0}(\tau,\omega) + 1248a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2\Big)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\phi_{10,6}(\tau,\omega) = (2\pi i)^2(2\pi)^6\Delta_{12}(\tau)\Delta_{12}(\omega)\Big(-23296a_{1,0,0}(\tau,\omega)^3 - \frac{56}{3}a_{3,0,1}(\tau,\omega) - \frac{98}{3}a_{1,1,1}(\tau,\omega)\\&+\frac{133}{180}a_{0,0,1}(\tau,\omega) + 1920a_{2,1,0}(\tau,\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega) + 400a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,1,0}(\tau,\omega)\Big)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\phi_{10,8}(\tau,\omega) = (2\pi i)^2(2\pi)^8\Delta_{12}(\tau)\Delta_{12}(\omega)\Big(349440a_{1,0,0}(\tau,\omega)^4 - 51840a_{2,1,0}(\tau,\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2\\&+1120a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{3,0,1}(\tau,\omega) + 400a_{2,1,0}(\tau,\omega)^2 - 16480a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2\\&-\frac{4600}{3}a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{2,1,0}(\tau,\omega) + 2128a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{1,1,1}(\tau,\omega) - \frac{1484}{15}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,0,1}(\tau,\omega)\\&+400a_{1,2,1}(\tau,\omega) - \frac{28825}{9}a_{0,1,0}(\tau,\omega)^2\Big)\end{aligned}}$$

Une autre application de cette proposition peut consister en le calcul du développement de Laurent de Δ_5^{-1} en $z=0$. Notons ce développement de la façon suivante :

$$\Delta_5^{-1}(Z) = \sum_{n\geq -1}\Delta_{5,2n+1,-1}(\tau,\omega)z_{2n+1},$$

nous avons alors :

$$\boxed{\Delta_{5,-1,-1}(\tau,\omega) = (2\pi i)^{-1}\eta(\tau)^{-12}\eta(\omega)^{-12}}$$

$$\boxed{\Delta_{5,1,-1}(\tau,\omega)) = 24(2\pi i)^{-1}(2\pi)^2\eta(\tau)^{-12}\eta(\omega)^{-12}a_{1,0,0}(\tau,\omega)}$$

$$\boxed{\Delta_{5,3,-1}(\tau,\omega) = (2\pi i)^{-1}(2\pi)^4\eta(\tau)^{-12}\eta(\omega)^{-12}\big(240a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2 + \frac{5}{3}a_{0,1,0}(\tau,\omega) + 20a_{2,1,0}(\tau,\omega)\big)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta_{5,5,-1}(\tau,\omega) = (2\pi i)^{-1}(2\pi)^6\eta(\tau)^{-12}\eta(\omega)^{-12}\bigg(2384a_{1,0,0}(\tau,\omega)^3 + \frac{28}{3}a_{3,0,1}(\tau,\omega) + \frac{49}{3}a_{1,1,1}(\tau,\omega)\\ &- \frac{355}{3}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,1,0}(\tau,\omega) + 20a_{2,1,0}(\tau,\omega) - \frac{133}{360}a_{0,0,1}(\tau,\omega)\bigg)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta_{5,7,-1}(\tau,\omega) = (2\pi i)^{-1}(2\pi)^8\eta(\tau)^{-12}\eta(\omega)^{-12}\bigg(3840a_{1,0,0}(\tau,\omega)^4 + 5760a_{2,1,0}(\tau,\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2\\ &+ 112a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{3,0,1}(\tau,\omega) + 200a_{2,1,0}(\tau,\omega)^2 - 2080a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{1,0,0}(\tau,\omega)^2\\ &+ \frac{2600}{3}a_{0,1,0}(\tau,\omega)a_{2,1,0}(\tau,\omega) + 112a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{1,1,1}(\tau,\omega) + \frac{343}{15}a_{1,0,0}(\tau,\omega)a_{0,0,1}(\tau,\omega)\\ &- 200a_{1,2,1}(\tau,\omega) + \frac{14450}{9}a_{0,1,0}(\tau,\omega)^2\bigg)\end{aligned}}$$

3.6 Comparaison entre relèvement arithmétique et exponentiel

Nous venons d'étudier les coefficients de Taylor en $z = 0$ de formes modulaires de Siegel de genre 2 construites de deux façons différentes : d'une part par relèvement arithmétique et d'autre part par relèvement exponentiel. Certaines des fonctions que nous avons obtenues peuvent être construites par les deux méthodes ce qui nous permet de comparer les deux relèvements du point de vue du calcul des coefficients de Taylor.
Le relèvement arithmétique nous donne un moyen de calculer rapidement les six premiers coefficients de Taylor d'une forme modulaire de Siegel, cependant dès le poids 12 nous ne disposons plus d'une base triviale de fonctions propres par rapport aux opérateurs de Hecke, par conséquent les calculs se complexifie dès le poids 12.
Dans le cas du relèvement exponentiel, nous pouvons calculer relativement rapidement les douze premiers coefficients de Taylor d'une forme modulaire de Siegel puisque dans ce cas il n'y a jamais de caractères pour l'action des $T(m)$: ainsi jusqu'au poids 22, nous disposons d'une base triviale de fonctions propres pour les opérateur de Hecke. De plus ce relèvement nous permet de calculer très directement les coefficients de Taylor en $z = 0$ de l'inverse ou de tout autres puissances de la fonction relevée.
Pour le calcul de nombreux coefficients de Taylor en $z = 0$, le relèvement arithmétique sera au final plus efficace, surtout si on veut calculer les développements de Taylor de plusieurs fonctions, puisque une fois une base de fonctions propres trouvée, le calcul est

additif alors qu'il est multiplicatif dans le cas du relèvement exponentiel puisque des produits de développements en série entière interviennent.

3.7 La fonction χ_{35} d'Igusa

Dans cette section, nous allons calculer les premiers coefficients de Taylor en $z = 0$ de la fonction χ_{35} d'Igusa. Cependant nous n'allons pas pouvoir utiliser directement les méthodes que nous avons précédemment mis en place. En effet, nous ne pourrons pas faire appel à un relèvement arithmétique puisque cette fonction ne peut pas s'écrire sous cette forme, de plus l'expression de cette fonction sous forme de relèvement exponentiel ne sera pas suffisante pour déterminer les coefficients : nous expliquerons cette remarque sous peu. Pour déterminer les coefficients de Taylor de χ_{35} en $z = 0$, nous allons utiliser le fait que le carré de cette fonction est une forme modulaire de Siegel de poids pair et ainsi nous sommes capables de l'exprimer en fonction des générateurs de l'anneau des formes modulaires de poids pair. L'indétermination sur la valeur des coefficients que crée le passage au carré sera résolue grâce au relèvement exponentiel qui va nous permettre de connaître le premier coefficient de Fourier-Jacobi.
Commençons par expliquer à quel relèvement exponentiel χ_{35} est égale et expliquons pourquoi nous ne pouvons par directement conclure. D'après [V. 96b] nous savons que :

$$\chi_{35} = \frac{1}{4i} Explift(\tilde{\phi_{0,1}})(Z),$$

où la fonction $\tilde{\phi_{0,1}}$ est la forme modulaire de Jacobi presque holomorphe associée à la fonction $\phi_{0,1}$ de la façon suivante :

$$\tilde{\phi_{0,1}}(\tau, z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ l\in\mathbb{Z}}} f_1(n,l)^{(2)} q^n \zeta^l$$

$$f_1(N)^{(2)} = 8 f_1(N) + 2\Big(\big(-\frac{N}{2}\big) - 1\Big) f_1(N) + f_1\big(\frac{N}{4}\big)$$

$$\big(-\frac{N}{2}\big) = \begin{cases} 1 & -N \equiv \pm 1[8] \\ -1 & -N \equiv \pm 5[8] \\ 0 & -N \equiv 0[8] \end{cases},$$

Nous remarquons que $f_1(N)^{(2)}$ vaut 0 dès que $N < -4$ puisque $f_1(N)$ vaut 0 dès que $N < -1$, cette information nous est utile puisque elle nous permet de trouver quel entier n vérifie la condition de presque holomorphie de $\tilde{\phi_{0,1}}$:

$$\Delta(\tau)^n \tilde{\phi_{0,1}} = \phi \in J_{12n,1}(Sl(2,\mathbb{Z}))$$

et nous pouvons prendre $n = 1$. En étudiant les premiers coefficients de Fourier de la fonction $\tilde{\phi_{0,1}}(\tau, z)\Delta(\tau)$ nous sommes capable de déterminer l'égalité suivante :

$$\tilde{\phi_{0,1}}(\tau, z)\Delta(\tau) = \frac{11}{18} E_4(\tau)^2 E_{4,1}(\tau, z) + \frac{7}{18} E_6(\tau) E_{6,1}(\tau, z)$$

En reprenant ce que nous avons fait dans le cas d'une forme modulaire faible de Jacobi, nous pouvons écrire :

$$\chi_{35}(Z) = \frac{2}{4i}(2\pi iz)\eta(\tau)^{72}\exp\Bigg(-2\sum_{n\geq 1}\frac{(4\pi i)^{2n}}{(2n)!}G_{2n}(\tau)z^{2n}\Bigg)e^{4\pi i\omega}\times$$
$$\exp\Bigg(-\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{m\geq 1}T(m)\Big(\frac{11}{18}\frac{E_4(\tau)^2(2\pi)^{2n}\tilde{f}_{4,2n}}{\Delta(\tau)}+\frac{7}{18}\frac{E_6(\tau)(2\pi)^{2n}\tilde{f}_{6,2n}}{\Delta(\tau)}\Big)e^{2\pi im\omega}\Big)z^{2n}\Bigg)$$

La différence avec ce que nous avons fait précédemment est qu'ici nous sommes contraints de calculer l'action des opérateurs de Hecke sur des fonctions modulaires et des fonctions quasi-modulaires. Ces calculs sont totalement différents de ceux avec les formes modulaires puisque nous ne connaissons pas de formules générales qui nous donnent l'image d'une base de fonctions modulaires de poids k par l'action des opérateurs de Hecke. Par contre le fait d'avoir χ_{35} sous cette forme, nous permet de savoir que le premier coefficient de Taylor non identiquement nul va diviser tout les autres coefficients. Une autre information que l'écriture sous forme exponentielle nous apporte est que χ_{35} est anti-invariante : par conséquent les coefficients de Taylor de χ_{35} sont des formes quasi-modulaires anti-symétriques. En particulier si nous écrivons :

$$\chi_{35}(Z) = \sum_{n\geq 0}\chi_{35,2n+1}(\tau,\omega)z^{2n+1},$$

alors nous avons $E_4(\tau)^3E_6(\omega)^2 - E_4(\omega)^3E_6(\tau)^2$ qui divise $\chi_{35,1}$. Enfin la forme exponentielle nous permet de déterminer le premier coefficient de Fourier-Jacobi de χ_{35} :

$$\frac{1}{4i}\eta(\tau)^{69}\theta(\tau,2z)$$

Nous allons maintenant déterminer les coefficients de Taylor en $z=0$ de χ_{35}^2 pour accéder à ceux de χ_{35}. Tout d'abord nous devons rappeler un théorème :

Théorème 15 *L'anneau des formes modulaire de Siegel de genre deux et de poids pair est engendré par les quatre générateurs suivants :*

$$\chi_{10}\ ,\ \chi_{12}\ ,\ \psi_4\ ,\ \psi_6$$

Dans ce théorème les fonctions citées peuvent être écrites ainsi :

$$\begin{aligned}
\chi_{10}(Z) &= V\big(-\frac{1}{4}\phi_{10,1}\big)\\
\chi_{12}(Z) &= V\big(\frac{1}{12}\phi_{12,1}\big)\\
\psi_4(Z) &= E_4^{(2)}(Z) = V\big(240E_{4,1}\big)\\
\psi_6(Z) &= E_6^{(2)}(Z) = V\big(-504E_{6,1}\big)\\
\phi_{10,1}(\tau,z) &= \frac{1}{144}\big(E_6(\tau)E_{4,1}(\tau,z) - E_4(\tau)E_{6,1}(\tau,z)\big)
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc donner le début du développement de Taylor en $z = 0$ de ces fonctions :

$$\psi_4(Z) = (240)^2 G_4(\tau,)G_4(\omega) + (2\pi)^2(-7056 G_6(\tau)G_6(\omega)$$
$$+ 80640(G_2(\tau)G_4(\tau)G_6(\omega) + G_2(\omega)G_4(\omega)G_6(\tau)) + 921600 G_2(\tau,)G_2(\omega)G_4(\tau,)G_4(\omega))z^2..$$
$$\psi_6(Z) = (504)^2 G_6(\tau)G_6(\omega) + (2\pi)^2(-2^{16}.3^3.5^2.11 G_4(\tau)^2 G_4(\omega)^2$$
$$+ 2^{11}.3^4.5^2.7(G_2(\tau)G_6(\tau)G_4(\omega)^2 + G_2(\omega)G_6(\omega)G_4(\tau)^2) - 2^9.3^5.7^2 G_6(\tau)G_6(\omega)G_2(\tau)G_2(\omega))z^2..$$
$$\chi_{10}(Z) = \pi^2\Delta(\tau)\Delta(\omega)z^2..$$
$$\chi_{12}(Z) = \Delta(\tau)\Delta(\omega) - 48(2\pi)^2\Delta(\tau)\Delta(\omega)G_2(\tau)G_2(\omega)z^2..$$

Maintenant nous allons utiliser l'article d'Igusa [Igu67] qui donne une relation entre χ_{35}^2 et les fonctions que nous venons d'introduire :

$$\begin{aligned}
&\chi_{35}^2(Z)\\
&= \frac{1}{2^{12}.3^9}\chi_{10}(Z)\Big(2^{24}.3^{15}.\chi_{12}(Z)^5 - 2^{12}.3^9.\psi_4(Z)^3\chi_{12}(Z)^4 - 2^{13}.3^9.\psi_6(Z)^2\chi_{12}(Z)^4\\
&+ 3^3\psi_4(Z)^6\chi_{12}(Z)^3 - 2.3^3.\psi_4(Z)^3\psi_6(Z)^6\chi_{12}(Z)^3 - 2^{14}.3^8.\psi_4(Z)^2\psi_6(Z)\chi_{10}(Z)\chi_{12}(Z)^3\\
&- 2^{23}.3^{12}.5^2\psi_4(Z)\chi_{10}(Z)^2\chi_{12}(Z)^3 + 3^3\psi_6(Z)^4\chi_{12}(Z)^3 - 3^2\psi_4(Z)^7\chi_{10}(Z)^2\chi_{12}(Z)\\
&+ 2^{11}.3^6.37\psi_4(Z)^4\chi_{10}(Z)^2\chi_{12}(Z)^2 + 2^{11}.3^6.5.7\psi_4(Z)\psi_6(Z)^2\chi_{10}(Z)^2\chi_{12}(Z)^2\\
&- 2^{23}.3^9.5^3\psi_6(Z)\chi_{10}(Z)^3\chi_{12}(Z)^2 + 2.3^2\psi_4(Z)^4\psi_6(Z)^2\chi_{10}(Z)^2\chi_{12}(Z)\\
&+ 2^{11}.3^5.5.19\psi_4(Z)^3\psi_6\chi_{10}(Z)^3\chi_{12}(Z) + 2^{20}.3^8.5^3.11\psi_4(Z)^2\chi_{10}(Z)^4\chi_{12}(Z)\\
&- 3^2\psi_4\psi_6(Z)^4\chi_{10}(Z)^2\chi_{12}(Z) + 2^{11}.3^5.5^2\psi_6(Z)^3\chi_{10}(Z)^3\chi_{12}(Z)\\
&- 2\psi_4(Z)^6\psi_6(Z)\chi_{10}(Z)^3 - 2^{12}.3^4.\psi_4(Z)^5\chi_{10}(Z)^4 + 2^2\psi_4(Z)^3\psi_6(Z)^3\chi_{10}(Z)^3\\
&+ 2^{12}.3^4.5^2\psi_4(Z)^2\psi_6(Z)^2\chi_{10}(Z)^4 + 2^{21}.3^7.5^4\psi_4(Z)\psi_6(Z)\chi_{10}(Z)^5\\
&- 2\psi_6(Z)^5\chi_{10}(Z)^3 + 2^{32}.3^9.5^5\chi_{10}(Z)^6\Big)
\end{aligned}$$

En utilisant les développements de Taylor des fonctions que nous avons introduites, nous en déduisons le coefficient devant z^2 dans $\chi_{35}^2(Z)$:

$$\frac{\pi^2}{2^{12}.3^6}\Delta(\tau)^4\Delta(\omega)^4\Big(E_6(\tau)^2E_4(\omega)^3 - E_6(\omega)^2E_4(\tau)^3\Big)^2,$$

ainsi nous en déduisons $\chi_{35,1}(\tau,\omega)$ au signe près :

$$\chi_{35,1}(\tau,\omega) = \pm\frac{\pi}{2^6.3^3}\Delta(\tau)^2\Delta(\omega)^2\Big(E_6(\tau)^2E_4(\omega)^3 - E_6(\omega)^2E_4(\tau)^3\Big)$$

Pour lever l'indétermination sur le signe, nous allons utiliser le premier coefficient de Fourier-Jacobi non nul de χ_{35}, ce dernier nous apprend que devant le terme q^3s^2 le coefficient est π tandis que le coefficient devant le terme q^3s^2 dans l'expression

$$\frac{\pi}{2^6.3^3}\Delta(\tau)^2\Delta(\omega)^2\Big(E_6(\tau)^2E_4(\omega)^3 - E_6(\omega)^2E_4(\tau)^3\Big)$$

est $-\pi$. Finalement :

$$\chi_{35,1}(\tau,\omega) = -\frac{\pi}{2^6.3^3}\Delta(\tau)^2\Delta(\omega)^2\Bigg(E_6(\tau)^2E_4(\omega)^3 - E_6(\omega)^2E_4(\tau)^3\Bigg)$$

Le deuxième coefficient se déduit très rapidement du premier. En effet $\chi_{35,3}(\tau,\omega)$ doit être une forme quasi-modulaire de poids 38, antisymétrique et de profondeur 1 pour $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$, de plus il est divisible par $\chi_{35,1}(\tau,\omega)$, par conséquent il doit être de la forme :

$$\chi_{35,3}(\tau,\omega) = \alpha\chi_{35,1}(\tau,\omega)G_2(\tau)G_2(\omega).$$

Le coefficient α se calcule en utilisant la même technique que pour la détermination du signe de $\chi_{35,1}(\tau,\omega)$ et après identifications nous trouvons :

$$\alpha = (2\pi)^2$$
$$\chi_{35,3}(\tau,\omega) = -(2\pi)^2\frac{\pi}{2^6.3^3}\Delta(\tau)^2\Delta(\omega)^2\Bigg(E_6(\tau)^2E_4(\omega)^3 - E_6(\omega)^2E_4\Bigg)G_2(\tau)G_2(\omega).$$

Nous nous arrêtons à deux coefficients pour des raisons de lisibilité mais nous pourrions déterminer d'autres coefficients en continuant à procéder comme nous l'avons fait.

3.8 A propos du nombre de coefficients de Taylor en $z = 0$ qui caractérisent une forme modulaire de Siegel

Dans cette section nous allons nous intéresser au nombre de coefficients de Taylor qui sont nécessaires pour caractériser une forme modulaire de Siegel. Nous allons traiter deux cas : le cas où le poids est pair et le cas impair.
Commençons par traiter le cas des poids pair :

Proposition 46 *Soit F une forme modulaire de Siegel de poids $2k$ et de genre 2 avec k un entier strictement positif. Le nombre de coefficients de Taylor en $z = 0$ qui caractérisent F est $[k/5] + 1$.*

Preuve: Supposons que F_1 et F_2 soient deux formes modulaires de Siegel de poids $2k$ de genre 2 qui vérifient :

$$F_1(Z) = \sum_{n\geq 0} F_{1,2n}(\tau,\omega)z^{2n}$$
$$F_2(Z) = \sum_{n\geq 0} F_{2,2n}(\tau,\omega)z^{2n}$$
$$F_{1,2n}(\tau,\omega) = F_{2,2n}(\tau,\omega)\forall n \leq [k/5]$$

La fonction $F_1 - F_2$ est alors une forme modulaire de Siegel de poids $2k$ dont le développement de Taylor en $z = 0$ s'écrit :

$$F_1 - F_2 = \sum_{n\geq [k/5]+1} (F_{1,2n}(\tau,\omega) - F_{2,2n}(\tau,\omega))z^{2n},$$

de cette écriture nous déduisons que $F_1 - F_2$ est divisible par $\psi_{10}^{[k/5]+1}$ et notons G le quotient de $F_1 - F_2$ par $\psi_{10}^{[k/5]+1}$. Or le poids du quotient est $10 + 10[k/5] > 2k$, nous en déduisons donc que G est identiquement nulle et par suite nous avons $F_1 = F_2$. Nous venons donc de montrer que le nombre de coefficients de Taylor qui caractérisent un élément de $M_{2k}(Sp_2(\mathbb{Z}))$ est $[k/5] + 1$. ■

Nous allons illustrer cette proposition sur quelques exemples. Pour $k < 5$, le nombre de coefficients caractérisant une forme modulaire de Siegel est 1 : cela se comprend bien les espaces sont de dimension 1 et c'est la valeur du premier coefficient de Taylor en $z = 0$ qui nous permet de différencier les formes modulaire de Siegel. Pour $k = 5$, le nombre de coefficients nécessaires est 2, ce que l'on peut expliquer par la présence de formes modulaires nul dont le coefficient de Taylor devant z^0 est nulles sans que la fonction soit elle-même nulle. Dans les exemples précédents ce nombre correspondait à la dimension mais ce n'est pas toujours le cas : pour $k = 8$, ce nombre vaut toujours 2 bien que la dimension soit 8.
Passons maintenant au poids impairs :

Proposition 47 *Soit F un élément de $M_{2k+1}(Sp_2(\mathbb{Z}))$, le nombre de coefficients de Taylor en $z = 0$ caractérisant les formes modulaires de Siegel de ce poids est $[(k-17)/5] + 1$.*

Preuve: Par la théorie des formes modulaires de Siegel de genre 2, nous savons que $2k + 1 \geq 35$ et que χ_{35} divise F : pour cette dernière affirmation on peut le voir en considérant l'allure des développements de Taylor en $z = 0$. Une fois la division par χ_{35} faîte, on obtient une forme modulaire de Siegel de poids $2k + 1 - 35$ qui est paire et à laquelle on peut appliquer le théorème précédent. Autrement le nombre de coefficients caractérisant la forme modulaire de Siegel F/χ_{35} est $[(k - 17)/5] + 1$ mais il est clair que c'est aussi le nombre de coefficients caractérisant la fonction F : la proposition est démontrée. ■

3.9 Développement de Taylor en d'autres points

Nous allons maintenant étudier le comportement modulaire des coefficients de Taylor en $z = \lambda$ un rationnel d'une forme modulaire de Siegel de genre 2. Pour cela nous allons nous servir de ce que nous avons déja appris sur les formes modulaires de Jacobi.

Proposition 48 *Soit k, t, r trois entiers positifs et λ un nombre rationnel et soit F une forme modulaire de Siegel de poids k pour un sous-groupe de Γ de $Sp(2n, \mathbb{Z})$, contenant le groupe Γ_t et l'élément V_t, et pour le caractère dont la restriction à $SL(2, \mathbb{Z})$ est v_η^{2r}. La fonction F se développe en série de Taylor en $z = \lambda$ de la façon suivante :*

$$F(Z) = \sum_{n \geq 0} f_n(\tau, \omega)(z - \lambda)^n,$$

où les fonctions $f_n(\tau, \omega/t)$ sont des formes quasi-modulaires symétriques de poids $n + k$ pour le groupe $\Gamma_{(0,\lambda)} \times \Gamma_{(0,\lambda)}$ et pour le caractère v_η^{2r} par rapport à chaque variable.

On peut aussi s'intéresser aux cas $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[\epsilon]$, nous ne le ferons pas mais nous aurons à faire à des formes quasi-modulaires de Hilbert.

Chapitre 4

Passage aux cas de plusieurs variables

Dans cette partie, nous allons étendre l'étude que nous avons menée sur le développement de Taylor des formes modulaires de Jacobi classiques aux formes modulaires de Jacobi définies relativement à un réseau L_0 dont nous allons préciser les propriétés. Nous allons aussi voir que le fait de considérer des réseaux de dimensions plus grandes que 1 va nous permettre de considérer plusieurs types de développements de Taylor, le but sera alors de savoir quelles sont les propriétés modulaires des coefficients de Taylor obtenus. Dans ce cadre, nous serons amenés à étudier les formes quasi-modulaires relativement à un réseau L_0.
Avant de commencer, nous avons besoin de rappeler certaines définitions et propriétés à propos des réseaux et de préciser quels seront ceux que nous considérerons.

4.1 Rappels sur les réseaux

Définitions 1 *Soit n un entier positif. Un réseau de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble L de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une base $(e_1, .., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ grâce à laquelle nous pouvons écrire $L = \mathbb{Z}e_1 \bigoplus .. \bigoplus \mathbb{Z}e_n$.*
Un réseau quadratique est un couple (L, q) où L est un réseau de $\mathbb{R}^n$ et q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$ de signature (p, q) dont nous le produit scalaire associé est noté $<,>$ et la matrice associée S. Un tel réseau est dit entier si pour tout x, y dans L, nous avons $< x, y >\in \mathbb{Z}$ et il est dit pair s'il est entier et que pour tout $x \in L$, nous avons $< x, x >\in 2\mathbb{Z}$.
Le réseau dual de (L, q) noté L^* est par définition :

$$L^* = \{y \in L \times \mathbb{R} | \forall x \in L < y, x >\in \mathbb{Z}\}$$

Définitions 2 *Soit un réseau pair L muni d'une forme quadratique q. Nous pouvons définir un groupe orthogonal pour ce réseau et pour cette forme quadratique. Ce groupe sera noté $O(L)$ et il est défini de la façon suivante :*

$$O(L) = \{g : L \to L | \forall x, y \in L, (g(x), g(y)) = (x, y)\}$$

L'ensemble $SO(L)^+$ désignera le sous espace vectoriel composé des matrices de déterminant 1 de la composante connexe de $O(L)$ qui contient l'identité.

Lemme 10 *Soit un réseau pair L muni d'une forme quadratique q. Nous l'égalité suivante :*

$$O(L) = O(L^*)$$

Cette égalité est vrai de part la non dégénérescence de la forme quadratique q. Cette égalité établie, nous pouvons définir le groupe stable du réseau L

Définition 19 *Soit un réseau pair L muni d'une forme quadratique q. Nous définissons le groupe stable de L de la façon suivante :*

$$\tilde{O}(L) = \{g \in O(L) | \forall l^* \in L^* g(l^*) - l^* \in L\}$$

Comme dans le cas du groupe $O(L)$, nous pouvons définir $S\tilde{O}(L)^+$ comme le sous espace vectoriel de $\tilde{O}(L)$ dont les éléments sont de déterminant égal à 1 et dans la même composante connexe que l'identité.

Un exemple de réseau quadratique pair est le plan hyperbolique $\mathcal{U}$: c'est l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ muni de la forme quadratique $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous allons maintenant rappeler ce qu'est un réseau de racines et donner des exemples de tels réseaux.

Définition 20 *Soit (L, q) un réseau quadratique pair de rang n dont le produit scalaire associé à la norme est noté $<,>$. Soit R le sous ensemble de L défini par :*

$$R = \{x \in L | < x, x >= 2\},$$

cet ensemble constitue les racines de L.Le réseau L est appelé réseau de racines si l'ensemble R engendre L.

Il est possible de montrer que la somme directe de deux réseaux de racines est encore un réseau de racines dont les racines sont l'union des racines des deux réseaux. Un réseau de racines non vide qui ne pourra pas se mettre sous cette forme sera dit irréductible. Nous donnons des exemples de systèmes de racines irréductibles dont nous nous servirons par la suite :

Exemple: Les réseau $\mathbb{A}_n$ où n est plus grand que 1. Ces réseaux peuvent être définis ainsi :

$$\mathbb{A}_n = \{(x_1, .., x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} | \sum_{i=0}^{n+1} x_i = 0\}$$

Le réseau E_8 de rang 8 qui peut être défini de la sorte :

$$E_8 = \{(x_i)\mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 | \sum_{i=0}^{8} x_i \equiv 0[2]\}$$

■

Dans ce qui suit, L sera un réseau pair muni d'une forme quadratique négative q non dégénérée de signature $(2, n+2)$ avec n positif et le produit scalaire associé sera désigné par $<,>$. De plus, nous supposerons que L peut se mettre sous la forme $L = L_0(-1) \bigoplus 2\mathcal{U}$ où le réseau L_0 est réseau quadratique pair positif, c'est à dire associé à une forme quadratique positive. Cette décomposition n'est pas possible pour tout les réseaux L que nous avons définis et de plus si une telle décomposition existe elle n'est pas unique. Dans tout ce qui suivra L_0 désignera un réseau quadratique pair de rang n dont la matrice dans la "base canonique" sera S_0 et dont le produit scalaire associé sera noté $<,>_0$.

4.2 Formes modulaires et quasi-modulaires de Jacobi relativement à un réseau

Dans un premier temps, nous allons rappeler la définition d'une forme modulaire de Jacobi relativement à un réseau et la définition de certains opérateurs de Hecke. Ensuite, nous introduirons le concept de forme quasi-modulaire de Jacobi et nous analyserons l'action des opérateurs de Hecke sur ces fonctions. Dans ce qui suit, nous travaillerons avec un caractère trivial mais uniquement pour des facilités d'écriture, cependant la théorie est aussi vraie dans le cas d'un système multiplicatif de $SL(2,\mathbb{Z})$ et nous en résumerons les propriétés en fin de section.

4.2.1 Formes modulaires de Jacobi et opérateurs de Hecke

Définition 21 *Soit L_0 un réseau entier pair de dimension non nulle n muni d'une forme quadratique définie positive q_0 dont le produit scalaire associé est noté $<,>$. Soit $\phi(\tau, z)$ une fonction de $\mathbb{H} \times (L_0 \otimes \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, nous dirons que ϕ est une forme de Jacobi de poids k entier et d'indice m, avec m dans $\mathbb{N}$, pour le réseau L_0 si :*

$$\phi : \mathbb{H} \times L_0 \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C} \textit{est holomorphe} \tag{4.1}$$

$$\phi(\tau, z)_{|_k}[A] = (c\tau + d)^{-k} \exp\left(- \pi i \frac{mc < z, z >}{c\tau + d}\right) \phi(A < \tau >, \frac{z}{c\tau + d}) = \phi(\tau, z) \tag{4.2}$$

$$\phi(\tau, z)_{|_k}[x, y] = \exp\left(2\pi i m(< x, z > + \frac{1}{2} < x, x > \tau\right) \phi(\tau, z + x\tau + y) = \phi(\tau, z) \tag{4.3}$$

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, l \in L_0^* \\ 2mn - <l,l>_0 \geq 0}} f(n, l) \exp(2\pi i (n\tau + < z, l >)) \tag{4.4}$$

avec $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $x, y \in L_0^2$.
Si la condition dans le développement de Fourier se réduit à n positif et l dans L_0^*, nous dirons que ϕ est une forme de Jacobi faible. Nous noterons $J^f_{k,m}(L_0)$ l'espace des formes de Jacobi faibles de poids k et d'indice m et $J^f_{k,m}(L_0)$ l'espace des formes de Jacobi de poids k et d'indice m.

Nous remarquons qu'en prenant le réseau $\mathbb{A}_1$ nous retrouvons les formes modulaires de Jacobi telles qu'elles sont décrites dans [EZ85]. Nous ne nous attardons pas sur les propriétés d'anneau et d'espace vectoriel de ces ensembles : elles sont les mêmes que dans

le cas du réseau $\mathbb{A}_1$.
De manière similaire à ce qui est effectué dans [EZ85], nous allons définir deux opérateurs sur l'espace des formes modulaires de Jacobi de poids k et d'indice m relativement à un réseau L_0.

Définition 22 *Soit l un entier strictement positif. Nous définissons deux opérateurs sur $J^f_{k,m}(L_0)$:*

$$U_l(\tau, z) = \phi(\tau, lz)$$
$$V_l(\tau, z) = l^{k-1} \sum_{\substack{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \ M_2(\mathbb{Z}) \\ ad-bc=m}} (c\tau + d)^{-k} e^{-\frac{\pi imlc<z,z>}{c\tau+d}} \phi\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{lz}{c\tau + d}\Big)$$

Proposition 49 *Soit l un entier strictement positif, les opérateurs U_l et V_l envoient l'espace $J^f_{k,m}(L_0)$ respectivement dans l'espace $J^f_{k,ml^2}(L_0)$ et l'espace $J^f_{k,ml}(L_0)$.*

En appliquant les mêmes raisonnements que dans le cas des formes modulaires de Jacobi classiques, nous pouvons démontrer la proposition précédente et de la même façon, nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 50 *Soit ϕ un élément de $J^f_{k,m}(L_0)$ dont les coefficients de Fourier sont notés $c(n, r)$. Nous avons alors :*

$$U_l(\phi)(\tau, z) = \sum_{\substack{n\mathbb{N} \\ r \in L_0^*}} c(n, r/l) q^n e^{2\pi i<z,r>},$$

avec la convention $c(n, r/l)$ est nul si r/l n'est pas dans L_0^* et :

$$V_l(\phi)(\tau, z) = \sum_{\substack{n\mathbb{N} \\ r \in L_0^*}} \Bigg(\sum_{\substack{a|(n,m) \\ r/a \in L_0^*}} a^{k-1} c\big(\frac{nl}{a^2}, \frac{r}{l}\big) \Bigg) q^n e^{2\pi i<z,r>}.$$

De plus nous avons les égalités suivantes :

$$U_l \circ U_{l'} = U_{ll'},$$
$$U_l \circ V_{l'} = V_{l'} \circ U_l,$$
$$V_l \circ V_{l'} = \sum_{d|(l,l')} d^{k-1} U_d \circ V_{ll'/d^2}$$

Comme dans le cas des formes modulaires de Jacobi classiques, nous en déduisons une formule pour V_0 :

$$V_0(\phi)(\tau, z) = c(0, 0)\big(- \frac{2k}{B_k} + \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n \big)$$

Les coefficients de Fourier d'une forme modulaire de Jacobi relativement à un réseau se comporte comme dans le cas des formes de Jacobi classiques :

Proposition 51 *Soit ϕ un élément de $J^f_{k,m}(L_0)$ dont les coefficients de Fourier sont les $c(n,l)$. Alors la valeur de ces coefficients ne dépend que de la norme hyperbolique $2mn- <l,l>$ et de la valeur de l modulo mL_0.*

Nous allons maintenant introduire le concept de formes quasi-modulaires de Jacobi et étudier la structure de ces espaces. Ensuite, nous étudierons l'action des opérateurs de Hecke V_l sur ces formes quasi-modulaires de Jacobi : nous allons nous retrouver dans une situation très similaire à la situation des formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})$.

4.2.2 Formes quasi-modulaires de Jacobi

Le but de paragraphe sera de définir les formes quasi-modulaires de Jacobi ainsi que la structure des formes quasi-modulaires de Jacobi relativement à un réseau (L_0,q) pair dont la forme quadratique est positive. Tout d'abord, nous allons proposer une définition des formes quasi-modulaires de Jacobi :

Définition 23 *Soit (L_0,q) un réseau quadratique pair positif et f une fonction holomorphe de $\mathbb{H}\times(L_0\bigotimes\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Nous dirons que f est une forme quasi-modulaire de Jacobi faible de poids k et d'indice m relativement au réseau L_0 s'il existe un entier s supérieur ou égal à zéro tel que pour tout $x,y\in L_0$ et toute matrice $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$:*

$$f(\tau,z+x\tau+y)=\exp\left(-2\pi im\big(\frac{1}{2}<x,x>\tau+<x,z>\big)\right)f(\tau,z)$$
$$(c\tau+d)^{-k}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)=e^{\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}}\sum_{n=0}^{s}\big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^n f_n(\tau,z)$$

De plus nous supposons que pour tout $z\in\mathbb{C}$, tout $i\in\{1,n\}$, il existe $j_{z,i}$ et j_z des entiers positifs tels que pour ce z fixé :

$$\left(\frac{|y|}{1+|\tau|^2}\right)^{j_{z,i}}|f_i(\tau,z)|<<1$$
$$\left(\frac{|y|}{1+|\tau|^2}\right)^{j_z}|f(\tau,z)|<<1$$

Si f_s est non identiquement nulle, nous dirons f est de profondeur s.

Remarques : La profondeur et les fonctions f_n sont uniques.
Supposons que l'égalité de la définition est vraie pour un entier positif s et des fonctions f_n ainsi que pour un entier positif s' et de fonctions f'_n : f_s et $f_{s'}$ sont non identiquement nulles. Nous supposons de plus que $s>s'$ et pour $n>s'$ nous conviendrons que $f'_n\equiv 0$. Nous pouvons alors écrire l'égalité suivante :

$$\sum_{n=0}^{s}\left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^n(f_n(\tau,z)-f'_n(\tau,z))=0,$$

cette égalité est vraie pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, tout $z\mathbb{C}$ et tout c et d entiers premiers entre eux. Si nous multiplions l'égalité par $(c\tau+d)^s$, nous obtenons en posant $g_n(\tau,z) = f_n(\tau,z) - f'_n(\tau,z)$ l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{s} c^n (c\tau+d)^{s-n} g_n(\tau,z) = 0$$

Prenons maintenant $c = 1$, le polynôme :

$$\sum_{n=0}^{s} c^n (X+\tau)^{s-n} g_n(\tau,z)$$

s'annule donc sur tout les entiers, il a donc une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul. Par conséquent, nous avons $f_n(\tau,z) = f'_n(\tau,z)$ pour n compris entre 0 et s' et $f_n \equiv 0$ pour $n > s'$ cela pour tout τ et z : c'est absurde et nous aboutissons à la même conclusion quand $s' > s$. Par conséquent, nous avons $s = s'$ et par la même occasion l'unicité des fonctions f_n. ▪

Lorsque la condition à l'infini dans le développement de Fourier sera la suivante : $2nm - < l, l > \geq 0$, alors nous n'utiliserons plus le terme faible mais nous dirons simplement formes quasi-modulaires de Jacobi.
L'ensemble des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids k, d'indice m et de profondeur au plus s relativement au réseau L_0 sera noté $QMJ_{k,m,s}(L_0)^f$, l'ensemble des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids k et d'indice m relativement au réseau L_0 sera noté $QMJ_{k,m}(L_0)^f$ et l'ensemble des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi relativement au réseau L_0 sera noté $QMJ(L_0)^f$: nous utiliserons les mêmes notations sans le f pour les formes quasi-modulaires de Jacobi.
Comme dans le cas des formes modulaires de Jacobi classiques, la propriété suivante est vraie :

Proposition 52 *L'anneau $QMJ(L_0)^f$ est bigradué par le poids et l'indice.*

La preuve est la même que dans le cas des formes de Jacobi classiques.
Les formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids k, d'indice m et de profondeur au plus s relativement au réseau L_0 se comportent de façon semblable aux formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})$: en effet la fonction E_2 intervient de façon similaire et nous pouvons montrer que toute forme quasi-modulaire faible de Jacobi est construite à partir de E_2. Plus précisément, nous avons :

Proposition 53 *Soit f une forme quasi-modulaire faible de Jacobi de poids k entier, d'indice m et de profondeur au plus s relativement au réseau L_0.*
Les f_n de la définition appartiennent à $QMJ_{k-2n,m}(L_0)^f$. De plus nous pouvons écrire f sous la forme :

$$f(\tau,z) = \sum_{i=0}^{s} \tilde{f}_{k-2i}(\tau,z) E_2(\tau)^i,$$

où les $\tilde{f}_{k-2i}$ sont des formes modulaires faibles de Jacobi de poids k et d'indice m relativement à L_0.

Preuve: Soit M et N deux matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$ et nous écrivons :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \sigma \end{pmatrix}$$
$$MN = \begin{pmatrix} * & * \\ q & r \end{pmatrix}, q = c\alpha + d\gamma, r = c\beta + d\sigma$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
& f\left(MN < \tau >, \frac{z}{c\tau + d}\right) \\
=&(q\tau + r)^k \sum_{i=0}^{s} f_i(\tau, z)\left(\frac{q}{q\tau + r}\right)^i e^{\frac{2\pi i q m z^2}{q\tau + r}} \\
=&f\left(M(N < \tau >), \frac{\frac{z}{\gamma\tau+\sigma}}{cN < \tau > +d}\right) \\
=&(cN < \tau > +d)^k \sum_{i=0}^{s} f_i\left(N < \tau >, \frac{z}{c\tau + d}\right)\left(\frac{c}{cN < \tau > +d}\right)^i e^{\frac{2\pi i m z^2}{(cN<\tau>+d)(\gamma\tau+\sigma)^2}},
\end{aligned}$$

dans la dernière égalité, nous pouvons récrire certains quotients grâce à la relation :

$$\frac{c}{cN < \tau > +d} = (\gamma\tau + \sigma)^2\left(\frac{q}{q\tau + r} - \frac{\gamma}{\gamma\tau + \sigma}\right)$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& (q\tau + r)^k \sum_{i=0}^{s} f_i(\tau, z)\left(\frac{q}{q\tau + r}\right)^i \\
=&(cN < \tau > +d)^k \sum_{i=0}^{r} f_i\left(N < \tau >, \frac{z}{c\tau + d}\right)\left(\frac{c}{cN < \tau > +d}\right)^i e^{\frac{-2\pi i m \gamma z^2}{\gamma\tau+\sigma}},
\end{aligned}$$

de plus nous avons la relation suivante :

$$cN < \tau > +d = \frac{1}{\gamma\tau + \sigma}(q\tau + r),$$

par conséquent, nous avons les relations suivantes pour tout $i \in 0, s$:

$$f_i(\tau, z) = \sum_{n=i}^{s} \binom{n}{i}(-\gamma)^{n-i}(\gamma\tau + \sigma)^{i+n-k} f_n\left(N < \tau >, \frac{z}{\gamma\tau + \sigma}\right).$$

Nous pouvons déjà en déduire deux choses : tout d'abord les f_i sont périodiques de période 1 en τ, nous pouvons donc les développer en série de Fourier par rapport à τ, et ensuite le cas particulier de $n = s$, nous donne :

$$f_s\left(N < \tau >, \frac{z}{\gamma\tau + \sigma}\right) = (\gamma\tau + \sigma)^{k-2s} e^{\frac{2\pi i \gamma m z^2}{\gamma\tau+\sigma}} f_s(\tau, z).$$

Grâce à cette dernière égalité, nous allons pouvoir calquer ce que nous savons sur les formes quasi-modulaires sur $SL(2,\mathbb{Z})$ aux formes quasi-modulaires faibles de Jacobi. Nous allons faire intervenir la fonction E_2 dont nous rappelons les propriétés de transformations par rapport aux matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$:

$$E_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2E_2(\tau) + \frac{6c(c\tau+d)}{\pi i}$$

La fonction définie par $f - \frac{i\pi}{6}^s E_2^s f_s$ est donc holomorphe sur le même ensemble que f et elle vérifie la deuxième propriété de la définition des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi pour le poids k et pour une profondeur plus petite que $s-1$. Nous pouvons refaire les manipulations que nous venons de faire sur cette nouvelle fonction et par itération finie et nous en déduisons que f peut s'écrire de la façon suivante :

$$f(\tau,z) = \sum_{i=0}^{s} \tilde{f}_{k-2i}(\tau,z)E_2(\tau)^i,$$

avec les $\tilde{f}_{k-2i}$ qui sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H} \times L_0 \bigotimes \mathbb{C}$ et qui vérifient la deuxième propriété de la définition des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi pour le poids $k-2i$ et la profondeur égale au plus à $s-i$. De plus cette écriture est unique puisque les $\tilde{f}_{k-2i}$ sont uniquement déterminés par les f_i de la définition. Les fonctions $\tilde{f}_{k-2i}$ qui interviennent dans cette décomposition ont aussi des propriétés par rapport au réseau L_0, en effet nous pouvons écrire pour x et y deux éléments de L_0 :

$$\begin{aligned} f(\tau, z+x\tau+y) &= \sum_{i=0}^{s} \tilde{f}_{k-2i}(\tau, z+x\tau+y)E_2(\tau)^i \\ =& e^{-2\pi im(\frac{1}{2}<x,x>_0\tau+<x,z>_0)}f(\tau,z) \\ =& \sum_{i=0}^{s} e^{-2\pi im(\frac{1}{2}<x,x>_0\tau+<x,z>_0)}\tilde{f}_{k-2i}(\tau,z)E_2(\tau)^i \end{aligned}$$

et par unicité de la décomposition, nous en déduisons le fait suivant pour tout i :

$$\tilde{f}_{k-2i}(\tau, z+x\tau+y) = e^{-2\pi im(\frac{1}{2}<x,x>_0\tau+<x,z>_0)}\tilde{f}_{k-2i}(\tau,z).$$

Par conséquent, nous savons que pour tout i, les fonctions $\tilde{f}_{k-2i}$ ont un développement de Fourier de la forme :

$$\tilde{f}_{k-2i}(\tau,z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ l\in L_0^*}} c_i(n,l)q^n\zeta^{<l,z>_0},$$

de plus l'hypothèse sur la croissance tempérée en τ, nous permet de restreindre la somme aux n positifs. Par conséquent nous en déduisons que pour tout i les $\tilde{f}_{k-2i}$ sont des formes modulaires faibles de Jacobi de poids $k-2i$ et d'indice m relativement à L_0 ; de plus par la construction des $\tilde{f}_{k-2i}$, nous en déduisons que les f_i sont des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids $k-2i$, d'indice m et de profondeur au plus $s-i$ relativement à L_0.

■

Contrairement au cas des formes quasi-modulaires, nous remarquons que nous n'avons plus l'égalité $k \leq 2s$. En effet il suffit de considérer cette forme quasi-modulaire faible de Jacobi pour le réseau $\mathbb{A}_1$:

$$E_2(\tau)\frac{\phi_{10,1}(\tau,z)}{\Delta(\tau)},$$

elle est de poids nul et de profondeur 1. Dans le cas de ce réseau particulier, nous pouvons donner une majoration de la profondeur mais avant nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 11 *Les formes modulaires faibles de Jacobi constituent un module libre de rang 2 sur les formes modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})$, de générateurs :*

$$\phi_{0,1}(\tau,z) = \frac{\phi_{12,1}(\tau,z)}{\Delta(\tau)}$$
$$\phi_{-2,1}(\tau,z) = \frac{\phi_{10,1}(\tau,z)}{\Delta(\tau)}$$

Nous pouvons maintenant donner la majoration :

Lemme 12 *Dans le cas du réseau $\mathbb{A}_1$, la profondeur s d'une forme quasi-modulaire faible de Jacobi de poids k et d'indice m vérifie l'inégalité suivante :*

$$s \leq \frac{1}{2}\big(k+2m\big)$$

Preuve: Pour démontrer cette inégalité, il suffit de remarquer que toute forme quasi-modulaire de Jacobi de poids k pour ce réseau peut s'écrire comme combinaisons linéaires d'éléments du type :

$$E_2^s F_t \phi_{0,1}^r \phi_{-2,1}^{m-r},$$

avec $r \leq m$ et $t - 2(m-r) + 2s = k$. La conclusion est alors immédiate.
■

Pour finir cette partie, nous allons construire deux formes quasi-modulaires de Jacobi de poids 2 et d'indice 1 pour le réseau $\mathbb{A}_1$ qui ne sont pas faibles.
Pour commencer nous allons construire une forme quasi-modulaire de profondeur 1. Posons :

$$G_2(\tau,z) = \frac{1}{12}\bigg(\phi_{0,1}(\tau,z)E_2(\tau) - E_4(\tau)\phi_{-2,1}(\tau,z)\bigg)$$

Le fait que cette fonction soit une forme quasi-modulaire faible de Jacobi de poids 2, d'indice 1 et de profondeur 1 est immédiat. Pour vérifier que ses coefficients de Fourier sont nuls pour les $4n - r^2$ strictement négatifs, il suffit de vérifier que les coefficients de son développement sont nuls devant les termes $q^n\zeta^r$ avec $4n - r^2 = -1$: en effet les fonctions $\phi_{0,1}$ et $\phi_{-2,1}$ ont leurs coefficients de Fourier nuls dès que $4n - r^2 < -1$. Comme le poids est pair et l'indice vaut 1, les coefficients de Fourier ne dépendent vraiment que de la valeur de $4n - r^2$, ainsi il suffit de vérifier uniquement pour $n = 0$ et $r = 1$ et les autres entiers vérifiant $4n - r^2 = -1$ auront le même comportement. Supposons que les développements de Fourier s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \phi_{0,1}(\tau, z) &= \sum_{4n-r^2 \geq -1} g_0(n,l) q^n \zeta^r \\ \phi_{-2,1}(\tau, z) &= \sum_{4n-r^2 \geq -1} g_{-2}(n,l) q^n \zeta^r \\ G_2(\tau, z) &= \sum_{4n-r^2 \geq -1} g_2(n,l) q^n \zeta^r, \end{aligned}$$

nous pouvons alors écrire :

$$g_2(0,1) = g_0(0,1) - g_{-2}(0,1) = 1 - 1 = 0$$

Ainsi nous venons de prouver que cette fonction est une forme quasi-modulaire de Jacobi de poids 2, d'indice 1 et de profondeur 1, de plus nous déduisons directement grâce aux valeurs de g_{-2} et des g_0 que :

$$G_2(\tau, 0) = E_2(\tau).$$

Le deuxième exemple est une forme quasi-modulaire de Jacobi de poids 2, d'indice 1 et de profondeur 2, c'est la fonction que nous appelerons $\tilde{G}_2(\tau, z)$:

$$\tilde{G}_2(\tau, z) = \frac{1}{12}\Big(\phi_{0,1}(\tau, z)E_2(\tau) - E_2(\tau)^2 \phi_{-2,1}(\tau, z)\Big)$$

Le fait qu'elle soit de poids 2, d'indice 1 et de profondeur 2 est direct, pour la condition sur les coefficients de Fourier, nous procédons comme précédemment.

4.2.3 Formes quasi-modulaires de Jacobi et opérateurs de Hecke

Avant d'étudier l'action des opérateurs de Hecke, nous allons introduire un opérateur de dérivation sur $QMJ_{k,m}(L_0)^f$, cet opérateur L envoie $QMJ_{k,m}(L_0)^f$ dans l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H} \times (\mathbb{C} \bigotimes L_0)$ et est défini par :

$$L = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(4\pi i m \frac{\partial}{\partial \tau} - \sum_{1 \leq j, i \leq n} b_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\right)$$

Dans cette définition, les $b_{i,j}$ désignent les coefficients de la matrice S_0^{-1} et dans la base associée à S_0 nous avons $z = (z_1, ..., z_n)$ où n est le rang du réseau L_0. Nous allons préciser l'espace d'arrivée de cet opérateur :

Proposition 54 *Pour tout k entier, s et m entiers strictement positifs, nous avons :*

$$L(QMJ_{k,m,s}(L_0)^f) \subset QMJ_{k+2,m,s+1}(L_0)^f$$

Preuve: Soit ϕ un élément de $QMJ_{k,m}(L_0)^f$, écrivons ses propriétés de transformation :

$$\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{\frac{\pi imc<z,z>}{c\tau+d}} \sum_{i=0}^{s} f_i(\tau,z)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^i$$

$$\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = \exp\left(-2\pi im\Big(\frac{1}{2}<\lambda,\lambda>_0 + <\lambda,z>_0\Big)\right)\phi(\tau,z)$$

$$\phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ l\in L_0}} c(n,l)q^n e^{2\pi i<z,l>_0}$$

avec $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$ et λ, μ deux éléments de L_0. ■

Il suffit maintenant de montrer que nous avons les trois égalités similaires pour la fonction $L(\phi)$. Les coefficients de la matrice S_0 seront notés $a_{i,j}$, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c\tau+d}\frac{\partial\phi}{\partial z_i}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right)\\
=&(c\tau+d)^k e^{\frac{\pi imc<z,z>_0}{c\tau+d}}\left(\sum_{l=0}^{s}\frac{\partial f_l}{\partial z_i}(\tau,z)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^i + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}z_j\sum_{l=0}^{s} f_l(\tau,z)\right).\\
&\frac{1}{(c\tau+d)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial z_j}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right)\\
=&(c\tau+d)^k e^{\frac{\pi imc<z,z>_0}{c\tau+d}}\left(\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{p=1}^{n} a_{j,p}z_p\Big(\sum_{q=0}^{s}\frac{\partial f_q(\tau,z)}{\partial z_i} + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}z_l\sum_{q=0}^{s} f_q(\tau,z)\Big)\right.\\
&\left.+\sum_{l=0}^{s}\frac{\partial^2 f_l(\tau,z)}{\partial z_j\partial z_i} + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}z_l\sum_{q=0}^{s}\frac{\partial f_q(\tau,z)}{\partial z_j} + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}a_{i,j}f_q(\tau,z)\right).\\
&\frac{1}{(c\tau+d)^2}\frac{\partial\phi}{\partial \tau}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right)\\
=&(c\tau+d)^k e^{\frac{\pi imc<z,z>_0}{c\tau+d}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{c\tau+d}z_i\left(\sum_{l=0}^{s}\frac{\partial f_l(\tau,z)}{\partial z_i}\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^l\right.\right.\\
&\left.+\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}z_j\sum_{l=0}^{s} f_l(\tau,z)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^l\right) - \frac{\pi imc^2}{(c\tau+d)^2}<z,z>_0\sum_{i=0}^{s} f_i(\tau,z)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^i\\
&\left.+k\frac{c}{c\tau+d}\sum_{i=0}^{s} f_i(\tau,z)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^i + \sum_{i=0}^{s}\left(\frac{\partial f_i(\tau,z)}{\partial\tau}\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^i - if_i(\tau,z)\frac{c^{i+1}}{(c\tau+d)^{i+1}}\right)\right).
\end{aligned}$$

En sommant convenablement pour obtenir $L(\phi)$, nous en déduisons que $L(\phi)$ possède les propriétés quasi-modulaires d'une forme quasi-modulaire faible de Jacobi pour le poids $k+2$, la profondeur $s+1$ et l'indice m. Il nous reste à montrer que $L(\phi)$ possède le bon développement de Fourier et les propriétés de transformation par rapport à L_0 : nous allons vérifier les deux propriétés en même temps. Considérons le développement en série de Fourier de la fonction ϕ :

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ l\in L_0^*}} c(n,l)q^n e^{2\pi i<z,l>_0}$$

et étudions l'action de L sur les termes $c(n,l)q^n e^{2\pi i<z,l>_0}$, nous obtenons en notant $l = (l_1, ..., l_n)$:

$$\begin{aligned}
&\left(4\pi i m\frac{\partial}{\partial\tau} - \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\right)(q^n e^{2\pi i<z,l>_0})\\
&=\left(-8\pi^2 mn - (2\pi i)^2\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}\sum_{p=1}^{n} a_{j,p}l_p\sum_{k=1} a_{i,k}l_k\right)q^n e^{2\pi i<z,l>_0}\\
&=\left(2(2\pi i)^2 mn - (2\pi i)^2\sum_{1\leq p,k\leq n} l_p l_k\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}a_{j,p}a_{i,k}\right)q^n e^{2\pi i<z,l>_0}
\end{aligned}$$

Or, par définition des coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$, nous avons :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}a_{j,p}a_{i,k} = a_{p,k},$$

ainsi nous en déduisons que :

$$L(c(n,l)q^n e^{2\pi i<z,l>}) = c(n,l)(2mn- < l, l >)q^n e^{2\pi i<z,l>}.$$

Par conséquent, nous déduisons de cette égalité trois choses. Tout d'abord $L(\phi)$ se développe en série de Fourier et le coefficient devant le terme $q^n e^{2\pi i<z,l>_0}$ est $c(n,l)(2mn- < l, l >_0)$: l'interversion dérivée et somme est justifiée par l'holomorphie. Ensuite nous vérifions immédiatement à partir de cette décomposition en série de Fourier que les propriétés de transformation par rapport à L_0 sont vérifiées, en effet nous avons :

$$c(n+ < \lambda, l > +m\frac{< \lambda, \lambda >}{2}, l + m\lambda) = c(n, l),$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}
&L(\phi)(\tau, z + \lambda\tau + \mu)e^{2\pi i m(\frac{1}{2}<\lambda,\lambda>_0\tau+<\lambda,z>_0)}\\
=&\sum_{n,r} c(n,l)(2mn- < l, l >_0)q^n e^{2\pi i<z+\lambda\tau,l>}e^{2\pi i m(\frac{1}{2}<\lambda,\lambda>_0\tau+<\lambda,z>_0)}\\
=&\sum_{n,r} c(n+ < \lambda, l >_0 + \frac{m}{2} < \lambda, \lambda >, l + m\lambda)(2mn- < l, l >_0)q^{n+<\lambda,l>_0+\frac{m}{2}<\lambda,\lambda>_0}e^{2\pi<z,l+m\tau>_0}\\
=&L(\phi)(\tau, z),
\end{aligned}$$

puisque :

$$2m(n+ < \lambda, l >_0 + \frac{m}{2} < \lambda, \lambda >_0)- < l + m\lambda, l + m\lambda >_0 = 2mn- < l, l >_0 .$$

Enfin si ϕ est une forme modulaire de Jacobi avec la condition à l'infini $2mn- < l, l >\geq 0$, c'est aussi le cas pour $L(\phi)$. ■

En particulier, nous avons l'inclusion suivante :

$$L(J_{k,m}) \subset QMJ_{k+2,m,1}$$

Nous allons maintenant étendre la définition des opérateurs de Hecke pour les formes modulaires de Jacobi aux formes quasi-modulaires de Jacobi. Définissons un opérateur $\tilde{V}_l$ de $QMJ_{k,m,s}$ dans les fonctions holomorphes sur $\mathbb{H} \times (L_0 \bigotimes \mathbb{C})$:

$$\tilde{V}_l(\phi)(\tau, z) = l^{k-1} \sum_{\substack{ad=l \\ b[d]}} d^{-k} \phi\left(\frac{a\tau + b}{d}, az\right).$$

D'après les propriétés de V_l, V_l et $\tilde{V}_l$ sont égaux sur les formes modulaires de Jacobi et nous noterons maintenant les deux opérateurs de façon unique V_l. Comme dans le cas des formes quasi-modulaires, nous allons montrer que cet opérateur envoie $QMJ^f_{k,m,s}$ dans $QMJ^f_{k,ml,s}$ ainsi que $QMJ_{k,m,s}$ dans $QMJ_{k,ml,s}$ et nous allons procéder de la même manière, c'est à dire en faisant intervenir un opérateur de dérivation qui sera dans ce cas L. L'une des premières remarques que nous pouvons faire est que $V_l(\phi)$ est toujours périodique de période 1 par rapport à τ et aussi par rapport à z, commençons par donner des informations sur son développement de Fourier :

Proposition 55 *Soit ϕ un élément de $QMJ^f_{k,m,s}$ dont les coefficients de Fourier sont les $c(n, r)$, nous pouvons alors écrire :*

$$V_l(\phi)(\tau, z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ r\in L_0^*}} \tilde{c}(n, l) q^n e^{2\pi i <z,r>_0}$$

avec :

$$\tilde{c}(n, l) = \sum_{\substack{a|(n,l) \\ \frac{r}{a}\in L_0^*}} a^{k-1} c\left(\frac{nl}{a^2}, \frac{r}{a}\right)$$

La démonstration est la même que dans le cas des formes modulaires de Jacobi. Grâce à cette proposition, nous allons pouvoir montrer que les deux opérateurs V et L commutent :

Proposition 56 *Soit l un entier strictement positif, nous avons :*

$$L(V_l(\phi)) = V_l(L(\phi)),$$

pour toute fonction ϕ de $QMJ^f_{k,m,s}$.

Preuve: Supposons que ϕ s'écrit :

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ r\in L_0^*}} c(n, r) q^n e^{2\pi i <r,z>_0}.$$

Nous avons donc :

$$L(V_l(\phi)) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ r\in L_0}} \Bigg(\sum_{\substack{a|(n,l)\\ \frac{r}{l}\in L_0^*}} a^{k-1} c(\frac{nl}{a^2}, \frac{l}{a}) \Bigg) (2nml - < l, l >_0) q^n e^{2\pi i<r,z>}$$

$$= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ r\in L_0}} \Bigg(\sum_{\substack{a|(n,l)\\ \frac{r}{l}\in L_0^*}} a^{k+1} c(\frac{nl}{a^2}, \frac{l}{a}) (\frac{2nml}{a^2} - < \frac{l}{a}, \frac{l}{a} >_0) \Bigg) q^n e^{2\pi i<r,z>_0}$$

et :

$$V_l(L(\phi)) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ r\in L_0}} \Bigg(\sum_{\substack{a|(n,l)\\ \frac{r}{l}\in L_0^*}} a^{k+1} c(\frac{nl}{a^2}, \frac{l}{a}) (\frac{2nml}{a^2} - < \frac{l}{a}, \frac{l}{a} >_0) \Bigg) q^n e^{2\pi i<r,z>_0}$$

La conclusion est alors immédiate. ■

Une des conséquences importante de ce théorème est la suivante :

Corollaire 11 *Pour toute fonction ϕ de $J_{k,m}(L_0)^f$ et tout n positif, nous avons :*

$$V_l(L^n(\phi)) \in QMJ_{k+2,m,n}$$

La proposition suivante est l'analogue en terme de forme modulaire de Jacobi de la formule suivante :

$$D(F) + 2kG_2F \in M_{k+2}(SL(2,\mathbb{Z})),$$

pour toute forme modulaire F de poids k, elle s'énonce ainsi :

Proposition 57 *Pour toute fonction ϕ de $J^f_{k,m}(L_0)$, nous avons :*

$$L(\phi) + 2(2k-n)mG_2\phi \in J_{k+2,m}(L_0)^f$$

où n est le rang du réseau L_0. La même égalité est vraie pour $J_{k,m}(L_0)$.

Preuve: Nous allons reprendre les égalités que nous avons écrites lors de la démonstration concernant l'action de l'opérateur L. Nous avons donc :

$$\frac{1}{(c\tau+d)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial z_j}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right)$$
$$=(c\tau+d)^k e^{\frac{m\pi ic<z,z>}{c\tau+d}} \Bigg(\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{p=1}^{n} a_{i,j} z_p (\frac{\partial\phi}{\partial z_i} + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}z_l\phi)$$
$$+ \frac{\partial^2\phi}{\partial z_j\partial z_i} + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}z_l\frac{\partial\phi}{\partial z_j} + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}a_{i,j}\phi \Bigg)$$

et par conséquent nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial z_j}\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\\ =&(c\tau+d)^{k+2}e^{\frac{\pi imc<z,z>}{c\tau+d}}\left(\frac{4\pi imc}{c\tau+d}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial z_i}z_i+\frac{(2\pi i)^2m^2c^2}{(c\tau+d)^2}<z,z>\phi\right.\\ &\left.+\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial z_j}\phi(\tau,z)+\frac{2\pi imcn}{c\tau+d}\phi\right)\end{aligned}$$

de plus nous avons :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\\ &=(c\tau+d)^{k+2}e^{\frac{\pi icm<z,z>}{c\tau+d}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{cz_i}{c\tau+d}(\frac{\partial\phi}{\partial z_i}+\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\sum_{l=1}^{n}a_{i,l}z_l\phi)\right.\\ &\left.-\pi im<z,z>(\frac{c}{c\tau+d})^2\phi+k\frac{c}{c\tau+d}\phi+\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)\end{aligned}$$

Ces calculs effectués, il est immédiat que :

$$\begin{aligned}&L(\phi)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)\\ =&(c\tau+d)^{k+2}e^{\frac{\pi imc<z,z>}{c\tau+d}}\left(L(\phi)+\frac{mc(2k-n)}{2\pi i(c\tau+d)}\phi\right)\end{aligned}$$

En utilisant la formule suivante :

$$G_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^2G_2(\tau)-\frac{c(c\tau+d)}{4\pi i}$$

■

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer la proposition suivante :

Proposition 58 *Soit l un entier strictement positif, nous avons :*

$$V_l(QMJ_{k,m,s}(L_0))\subset QMJ_{k,ml,s}(L_0)^f.$$

Le même type d'inclusion est aussi vraie dans le cas non faible.

Preuve: D'après la structure de $QMJ^f_{k,m,s}(L_0)$, il suffit de montrer que :

$$V_l(E_sJ^f_{k,m}(L_0))\subset QMJ^f_{k+2s,ml,s}(L_0).$$

Pour cela, nous procédons par récurrence sur s. Le cas $s=0$ est direct tandis que pour le cas $s=1$ nous utilisons la proposition précédente. Pour montrer la propriété pour les

$s \geq 0$, nous allons d'abord démontrer l'égalité suivante vraie pour tout les r plus grands que 1 et tout les ϕ dans $J_{k,m}(L_0)$:

$$\begin{aligned} L^r(\phi) &= \alpha_r G_2^r \phi + F_r \\ \alpha_r &= (-2m)^r \prod_{i=0}^{r-1}(2k-n+4i) \\ F_r &\in QMJ_{k+2r,m,r-1} \end{aligned}$$

Cette formule peut se démontrer par récurrence sur r et le cas où r vaut 1 vient de la proposition précédente. Supposons donc la propriétés vraie pour tout les r plus grand que 1 et étudions le cas $r+1$:

$$\begin{aligned} &L^{r+1}(\phi) \\ =&L(\alpha_r G_2^r \phi + F_r) \\ =&\alpha_r L(G_2^r \phi) + L(F_r) \\ =&\alpha_r (G_2^r L(\phi) + 4mrD(G_2)G_2^{r-1}\phi) + L(F_r), \end{aligned}$$

en utilisant la proposition précédente, nous pouvons écrire l'égalité suivante pour la bonne fonction $\phi_{k+2,m}$ de $J_{k,m}^f(L_0)$:

$$\begin{aligned} &L^{r+1}(\phi) \\ =&\alpha_r (G_2^r(-2m(2k-n)G_2\phi + \phi_{k+2,m}) + 4mr(-2G_2^2 + \frac{5}{6}G_4)G_2^{r-1}\phi) + L(F_r) \\ =&\alpha_{r+1} G_2^{r+1}\phi + F_{r+1}, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1} &= -2m((2k-n)+4r)\alpha_r \\ F_{r+1} &= \alpha_r G_2^r \phi_{k+2,m} + \frac{20mr}{3} G_4 G_2^{r-1}\phi + L(F_r) \end{aligned}$$

et la récurrence est établie. Supposons maintenant que pour tout i entre 2 et s les inclusions suivantes sont vraies :

$$V_l(E_i J_{k,m}^f(L_0)) \subset QMJ_{k+2i,ml,i}^f(L_0),$$

analysons maintenant le cas $s+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} G_2^{s+1}\phi &= \frac{1}{\alpha_{r+1}}(L^{r+1}(\phi) - F_{r+1}) \\ V_l(G_2^{s+1}\phi) &= \frac{1}{\alpha_{r+1}} L^{r+1}(\phi) - \frac{1}{\alpha_{r+1}} V_l(F_{r+1}). \end{aligned}$$

D'après ce que nous avons établi précédemment et l'hypothèse de récurrence, nous en concluons que :

$$V_l(E_{s+1} J_{k,m}^f(L_0)) \subset QMJ_{k+2(s+1),ml,s+1}^f(L_0).$$

La récurrence est établie et par la même occasion notre proposition. ■

Dans ce qui précède, nous avons travaillé dans le cas du caractère trivial mais ce que nous avons fait fonctionne aussi dans le cas de caractères non triviaux. Dans ce qui suit nous allons nous contenter d'énoncer les propositions principales sans les démontrer : les démonstrations sont semblables à celle du caractère trivial.

Définition 24 *Soit (L_0, q) un réseau quadratique pair positif et f une fonction holomorphe de $\mathbb{H} \times (L_0 \bigotimes \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Nous dirons que f est une forme quasi-modulaire de Jacobi faible de poids k et d'indice m rationnel relativement au réseau L_0 pour le système multiplicatif v_η^r de conducteur Q s'il existe un entier s supérieur ou égal à zéro tel que pour tout $x, y \in L_0$ et toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:*

$$f(\tau, z + x\tau + y) = \exp\left(- 2\pi i m (\frac{1}{2} < x, x > \tau + < x, z >)\right) f(\tau, z)$$

$$v_\eta^{-r}(\frac{a\tau + b}{c\tau + d})(c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = e^{\frac{\pi i m c < z,z >}{2(c\tau+d)}} \sum_{n=0}^{s} \left(\frac{c}{c\tau + d}\right)^n f_n(\tau, z)$$

$$f(\tau, z) = \sum_{2nm/Q - < l,l >_0 \geq 0} c(n, l) e^{2\pi i \frac{n}{Q}\tau} e^{2\pi i < l,z >_0}$$

De plus nous supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $i \in \{1, n\}$, il existe $j_{z,i}$ et j_z des entiers positifs tels que pour ce z fixé :

$$\left(\frac{|y|}{1 + |\tau|^2}\right)^{j_{z,i}} |f_i(\tau, z)| << 1$$

$$\left(\frac{|y|}{1 + |\tau|^2}\right)^{j_z} |f(\tau, z)| << 1$$

Si f_s est non identiquement nulle, nous dirons f est de profondeur s.

Remarques : La profondeur et les fonctions f_n sont uniques comme dans le cas précédent. L'ensemble des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids k, d'indice m et de profondeur au plus s relativement au réseau L_0 et au système multiplicatif v_η^r sera notée $QMJ_{k,m,s}(L_0, v_\eta^r)$, l'ensemble des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids k et d'indice m relativement au réseau L_0 pour le système multiplicatif v_η^r sera noté $QMJ_{k,m}(L_0, v_\eta^r)^f$ et l'ensemble des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi relativement au réseau L_0 et au système multiplicatif v_η^r sera noté $QMJ(L_0, v_\eta^r)^f)$. Les formes modulaires de Jacobi correspondantes seront notées $J_{..}(L_0, v_\eta^r)^f$. ▪

Les propositions suivantes regrouperont l'essentiel des propriétés que nous pouvons énoncer pour ces fonctions :

Proposition 59

$$QMJ(L_0, v_\eta^r)^f) = J(L_0, v_\eta^r)^f[G_2]$$

$$L(QMJ_{k,m,s}(L_0, v_\eta^r)^f) \subset QMJ_{k+2,m,s+1}(L_0, v_\eta^r)^f,$$

où L est l'opérateur :

$$L = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(4\pi i m \frac{\partial}{\partial \tau} - \sum_{1 \leq j,i \leq n} b_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\right)$$

L'une des différences avec le cas sans caractère est l'expression de l'opérateur de Hecke que nous allons considérer :

Définition 25 *Soit l un entier strictement positif et r pair, nous définissons l'opérateur suivant entre $QMJ_{k,m,s}(L_0, v_\eta^r)^f$ et les fonctions holomophes sur $\mathbb{H} \times (L_0 \bigotimes \mathbb{C})$:*

$$V_l(\phi)(\tau, z) = l^{k-1} \sum_{\substack{ad=l \\ b[d]}} v_\eta^r(\sigma_a) d^{-k} \phi\left(\frac{a\tau + bQ}{d}, az\right)$$

Sur $J_{k,m,s}(L_0, v_\eta^r)^f$ il correspond à l'opérateur classique que nous connaissons.

Nous avons par contre un comportement similaire :

Proposition 60 *Soit l un entier strictement positif et r pair :*

$$V_l(QMJ_{k,m,s}(L_0, v_\eta^r)^f) \subset QMJ_{k,lm,s}(L_0, \chi_m)^f$$

Pour démontrer ce fait, nous utilisons en autres les égalités contenues dans la proposition suivante :

Proposition 61 *Pour l un entier strictement positif, r un entier positif pair et $\phi \in J_{k,m}(L_0, \chi_m)^f$:*

$$L(T(l)) = V_l(L))$$
$$L(\phi) + 2(2k - n)mG_2\phi \in J_{k+2,ml}(L_0, \chi_m)^f$$

Nous pouvons maintenant passer à l'étude des différents développements de Taylor des fonctions de $J_{k,m}(L_0, \chi_m)^f$.

4.3 Développement de Taylor

Nous pouvons maintenant considérer les différents développements en série de Taylor des éléments de $J_{k,m}(L_0)$. Commençons d'abord par le cas qui ressemble le plus à ce que nous avons déja fait, le développement par rapport à toutes les variables.

4.3.1 Développement par rapport à toutes les variables

Dans un premier temps nous allons étudier le développement en $z = 0$ et nous débutons par l'énoncé d'une formule de correction holomorphe.

Proposition 62 *Soit ϕ un élément de $J_{k,m}(L_0, v_\eta^r)$ avec r un entier positif. De plus nous supposons que L_0 s'écrit $\mathbb{Z}e_1 \oplus .. \oplus \mathbb{Z}e_n$ et que $z \in L_0 \otimes \mathbb{C}$ s'écrit dans la base $(e_i)_i$ de la façon suivante :*

$$z = \sum_{i=0}^{n} z_i e_i$$

La fonction définie par :

$$\tilde{\phi}(\tau, z_1, .., z_n) = \exp(-4\pi^2 m G_2(\tau) < z, z >_0)\phi(\tau, z_1, .., z_n)$$

se développe en série de Taylor de la façon suivante :

$$\sum_{p \geq 0} \sum_{\substack{r_1+..+r_n=m \\ r_i \geq 0}} \phi_{r_1,..,r_n}(\tau) z_1^{r_1} .. z_n^{r_n},$$

où les fonctions $\phi_{r_1,..,r_n}(\tau)$ sont des formes modulaires de poids $k+p$ pour $SL_2(\mathbb{Z})$ et pour le caractère v_η^r .

Preuve: Pour justifier cette correction , il suffit d'écrire :

$$< \frac{z}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d} >_0 = \frac{1}{(c\tau + d)^2} < z, z >_0,$$

$$G_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 G_2(\tau) - \frac{c(c\tau + d)}{4\pi i}$$

Une fois que nous avons écrit ces égalités, les propriétés de la correction s'en déduisent immédiatement. ■

Nous pouvons donner aussi une correction méromorphe en utilisant la fonction θ de Jacobi, comme dans le cas des formes de Jacobi classiques, mais cette fois la fonction corrigée sera méromorphe par rapport à z :

Proposition 63 *Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que la proposition précédente. La fonction définie par :*

$$\psi(\tau, z) = \exp\big(-4\pi^2 G_2(\tau)\big(\sum_{i=1}^{n} < e_i, e_i >_0 z_i^2\big)$$
$$- m \sum_{1 \leq i < j \leq n} < e_i, e_j >_0 z_i \frac{\theta_z}{\theta}(\tau, z_j)\big)\phi(\tau, z),$$

où θ_z désigne la dérivée de θ par rapport à z, est une fonction holomorphe en τ et méromorphe en z qui vérifie :

$$\psi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = v_\eta^r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(c\tau + d)^k \psi(\tau, z).$$

Preuve: Pour démontrer cette proposition, nous devons d'abord écrire l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\frac{\theta_z}{\theta}$:

$$\frac{\theta_z}{\theta}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)=2\pi iz+(c\tau+d)\frac{\theta_z}{\theta}(\tau,z)$$

De plus rappelons que dans la base choisie pour L_0, nous avons :

$$<z,z>=\sum_{i=0}^{n}<e_i,e_i>z_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}<e_i,e_j>z_iz_j$$

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\begin{aligned}\psi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) &= \exp\Bigg(-4\pi^2m\big((c\tau+d)^2G_2(\tau)-\frac{c}{4\pi i}(c\tau+d)\big)\big(\sum_{i=1}^{n}<e_i,e_i>\frac{z_i^2}{(c\tau+d)^2}) \\ &-m\sum_{1\leq i<j\leq n}<e_i,e_j>\frac{z_i}{c\tau+d}(2\pi iz_jc+(c\tau+d)\frac{\theta_z}{\theta}(\tau,z_j))\Bigg) \\ &\times\exp\Bigg(\frac{\pi imc}{(c\tau+d)}(\sum_{i=1}^{n}<e_i,e_i>z_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}<e_i,e_j>z_iz_j)\Bigg) \\ &\times(c\tau+d)^kv_\eta^r(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})\phi(\tau,z) \\ &=(c\tau+d)^k\exp\Bigg(-4\pi^2m\big(\sum_{i=1}^{n}<e_i,e_i>z_i^2G_2(\tau)\big)v_\eta^r(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}) \\ &-m\sum_{1\leq i<j\leq n}<e_i,e_j>z_i\frac{\theta_z}{\theta}(\tau,z_j)\Bigg)\phi(\tau,z) \\ &=(c\tau+d)^k\psi(\tau,z)v_\eta^r(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})\end{aligned}$$

■

Dans le cas des formes modulaires relativement à un réseau, il y a plusieurs coefficients de Taylor du même poids : en effet si le réseau est de rang n, le nombre de coefficients de Taylor de poids $k+l$ est $\binom{k+l+n-1}{n-1}$: nous voyons donc que la détermination des coefficients de Taylor en $z=0$ sera plus calculatoire.
Ces corrections fonctionnent pour n'importe quelles bases de $L_0\otimes\mathbb{C}$ choisies à l'avance. Cependant les développements de Taylor dans chaque base ne sont pas égaux : l'exemple que nous allons donner pour $\mathbb{A}_2$ illustrera les deux remarques que nous venons de faire.
Comme dans le cas des formes de Jacobi à une variable, nous pouvons borner la profondeur des coefficients de Taylor :

Proposition 64 *Soit ϕ une forme modulaire de Jacobi de poids k et d'indice m relativement au réseau L_0. Soit r un entier positif, la profondeur d'un coefficient de Taylor de poids $r+k$ est au plus $[r/2]$. En particulier ce résultat est vrai quelque soit la base choisie pour $L_0\bigotimes\mathbb{C}$.*

Preuve: Soit $(u_1, .., u_n)$ une $\mathbb{Z}$-base de L_0, tout élément z de $L_0 \bigotimes \mathbb{C}$ se décomposera de la façon suivante :

$$z = \sum_{i=0}^{n} z_i u_i.$$

Nous noterons $\phi_{l_1,..,l_n}$ un coefficient de Taylor de ϕ autour de $z = 0$ de poids $l_1 + l_2 + .. + l_n + k$. Nous avons :

$$< z, z >= \sum_{i=0}^{n} < u_i, u_i > z_i^2 + \sum_{1 \leq l,q \leq n} 2 < u_l, u_q > z_l z_q,$$

ce qui nous permet d'écire :

$$\exp\left(\frac{c\pi im < z, z >}{c\tau + d}\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{c\pi im < u_i, u_i > z_i^2}{c\tau + d}\right) \times \prod_{1 \leq l < q \leq n} \exp\left(\frac{c2\pi im < u_l, u_q > z_l z_q}{c\tau + d}\right).$$

Par conséquent, nous avons une expression de cette exponentielle en série de Taylor autour de $z = 0$:

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{c\pi im < z, z >}{c\tau + d}\right) &= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (\frac{c}{c\tau + d})^q (\pi im)^q < u_i, u_i >^q z_i^{2q}\right) \times \\ &\prod_{1 \leq l < q \leq n} \left(\sum_{p=0}^{\infty} (\frac{2c}{c\tau + d})^p (\pi im)^p < u_l, u_q >^p (z_l, z_q)^p\right) \\ &= \sum_{l_1,..,l_n \geq 0} f_{l_1,..,l_n}(\frac{c}{c\tau + d}) z_1^{l_1} .. z_n^{l_n}.\end{aligned}$$

Nous pouvons identifier la fonction $f_{l_1,..,l_n}(\frac{c}{c\tau+d})$, elle s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned}f_{l_1,..,l_n}(\frac{c}{c\tau + d}) = &\sum_{\substack{\forall i \in \{1,..,n\} \\ l_i = 2q_i + \sum_{j>i} p_{i,j} + \sum_{j<i} p_{j,i}}} \left(\frac{c\pi im}{c\tau + d}\right)^{\sum_{i=0}^{n} q_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{i,j}} \times \\ &\left(< u_i, u_i >^{q_i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} < u_i, u_j >^{p_{i,j}} 2^{\sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{i,j}}\right)\end{aligned}$$

Dans cette expression, nous allons majorer le terme $\sum_{i=0}^{n} q_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{i,j}$: cela nous donnera une majoration de la plus grande puissance de $\frac{c}{c\tau+d}$ dans cette expression, ce qui nous sera utile par la suite dans l'estimmation des profondeurs. Nous avons :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j>i} p_{i,j} + \sum_{j<i} p_{j,i}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{i,j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} p_{j,i} \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{i,j}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} q_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} p_{i,j} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l_i$$

Nous pouvons maintenant donner une égalité reliant les coefficients de Taylor entre eux :

$$(c\tau+d)^{-q_1-q_2-..-q_n-k}\phi_{q_1,..,q_n}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l_i+v_i=q_i} \phi_{v_1,..,v_n}(\tau) f_{l_1,..,l_n}\left(\frac{c}{c\tau+d}\right)$$

De cette écriture, nous déduisons que la plus grande puissance de $\frac{c}{c\tau+d}$ dans l'expression de droite est donnée par le terme $f_{q_1,..,q_n}$: la plus grande puissance de $\frac{c}{c\tau+d}$ dans ce terme est au plus $\frac{1}{2}(q_1+..+q_n)$, comme nous venons de le voir.
Nous venons donc de montrer que quelque soit la base de $L_0 \times \mathbb{C}$ dans laquelle nous développons ϕ en série de Taylor autour de $z=0$, la profondeur d'un coefficient de poids $n+k$ est au plus $[n/2]$.

■

Dans ce qui précède nous avons traité le cas du développement autour de $z=0$, nous allons maintenant voir ce qu'il se passe si nous regardons en un autre point : ce sera une généralisation ce que nous avons fait dans le cas des formes modulaires de Jacobi classiques.
Nous allons une nouvelle fois raisonner en terme d'action : le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit clairement sur l'ensemble des formes de Jacobi de poids k et d'indice m relativement à un réseau L_0 mais ce n'est pas le cas de L_0^2. Nous devons introduire un groupe contenant L_0^2, qui agit sur l'ensemble des formes de Jacobi de poids k et d'indice m relativement à un réseau L_0 et dont l'action restreinte à un élément de L_0^2 correspond à la condition (3.2) dans la définition de ces formes de Jacobi. Le groupe à introduire est le groupe d'Heisenberg pour $L_0 \otimes \mathbb{R}$ que nous pouvons définir comme un triplet $[x,y,\kappa]$ avec $x,y \in L_0$ et κ dans $\mathbb{R}$ muni de la loi de composition suivante :

$$[x,y;\kappa].[x',y';\kappa'] = [x+x',y+y';\kappa+\kappa'+<x,y'>-<x',y>],$$

où $<,>$ est le produit scalaire issu de la forme quadratique associée à L_0. Ce groupe agit sur les formes de Jacobi que nous étudions de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\phi_{|}[x,y;\kappa](\tau,z) = \exp&\left(2\pi i m(<x,z>+\frac{1}{2}<x,x>\tau+\frac{1}{2}<x,y>+\kappa)\right)\\ &\times \phi(\tau,z+x\tau+y),\end{aligned}$$

le fait qu'il s'agit effectivement d'une action se vérifie immédiatement. Nous sommes maintenant en mesure de donner la propostion suivante :

Proposition 65 *Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice m relativement à un réseau $(L_0,<,>)$ pair positif de rang n et $X=(x,y)$ un élément de $L_0\otimes\mathbb{Q}$. Nous* *définissons la fonction ϕ_X :*

$$\phi_X(\tau,z) = \phi_{|[x,y]}(\tau,z) = \exp\left(2\pi i m\big(< x,z > + \frac{1}{2} < x,x > \tau + \frac{1}{2} < x,y > \big)\right) \times \phi(\tau, z + x\tau + y)$$

Cette fonction vérifie :

$$(c\tau+d)^{-k} e^{\frac{-\pi i m < z,z >}{c\tau+d}} \phi_X\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\big) = \phi_X,$$

pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *du groupe :*

$$\Gamma_{x,y,m} = \big\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \big| x(1-a) - cy \in L_0, y(1-d) - bx \in L_0 \\ ,(- < x,x > b + < x,y > (a-d) + c < y,y >)m \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Preuve: Nous devons d'abord définir une action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $H(L_0 \otimes \mathbb{C})$. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, nous définissons l'action suivante sur $H(L_0 \otimes \mathbb{C})$:

$$[x, y; \kappa].M = [ax + cy, bx + dy; \kappa]$$

Le fait que ce soit une action est immédiat. Nous en déduisons l'égalité suivante :

$$(\phi_{|[x,y]})_{|M}(\tau,z) \\ = (\phi_{|M})_{|X.M}$$

Ainsi nous pouvons écrire pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} & (c\tau+d)^{-k} e^{\frac{-\pi i c m < z,z >}{c\tau+d}} \phi_X\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\big) \\ =& (\phi_{|[x,y]})_{|M}(\tau,z) \\ =& (\phi_M)_{|X.M}(\tau,z) \\ =& \phi_{|X.M}(\tau,z), \end{aligned}$$

cette dernière fonction est égale à ϕ_X si et seulement si nous avons $\phi_{X-X.M} = \phi$, c'est à dire si et seulement si :

$$x(1-a) - cy \in L_0 \quad ; \quad y(1-d) - bx \in L_0; \\ (- < x,x > b + < x,y > (a-d) + c < y,y >)m \in \mathbb{Z}$$

Le fait que $\Gamma_{x,y,m}$ soit un groupe vient des égalités suivantes pour M et M' dans $\Gamma_{x,y,m}$

$$\begin{aligned} (\phi_{|X.M})_{|M'} &= (\phi_{|M})_{|X.M.M'} = \phi_{|X.MM'} \\ (\phi_{|X.M})_{|M'} &= (\phi_{|X})_{|M'} = \phi_{|X} \\ (\phi_{|X.M})_{|M^{-1}} &= (\phi_{|M})_{|X.M.M^{-1}} = \phi_{|X} \\ (\phi_{|X.M})_{|M^{-1}} &= (\phi_{|X})_{|M^{-1}} \end{aligned}$$

Supposons que $L_0 = \mathbb{Z}e_1 \bigoplus .. \bigoplus \mathbb{Z}e_n$ et que pour tout $1 \leq i \leq n$, nous ayons une expression sous forme de fractions irréductibles de la i-ème composante de x et de y dans cette base de L_0 :

$$x_i = \frac{p_i}{q_i}$$
$$y_i = \frac{p'_i}{q'_i},$$

alors $\Gamma(\prod_{i=1}^n (q_i q'_i)^2) \subset \Gamma_{x,y,m}$: nous en concluons que $\Gamma_{x,y,m}$ est un sous groupe de congruence. Nous pouvons faire le même raisonnement pour n'importe quelle base de $L_0 \times \mathbb{C}$ choisie à l'avance.

■

De cette proposition, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 12 *Soit ϕ une forme de Jacobi de poids k et d'indice m relativement à un réseau $(L_0, <,>)$ pair positif de rang n et $X = (x, y)$ un élément de $L_0 \bigotimes \mathbb{Q}$. Fixons une $\mathbb{Z}$-base $(e_1, .., e_n)$ de L_0 et supposons que z s'écrit dans $L_0 \bigotimes \mathbb{C}$:*

$$z = \sum_{i=0}^{n} z_i e_i$$

Alors la fonction ϕ_X peut s'écrire :

$$\phi_X(\tau, z) = \sum_{k_1,..,k_n \geq 0} \phi_{X,k_1,..,k_n}(\tau) z_1^{k_1}..z_n^{k_n},$$

où les fonctions $\phi_{X,k_1,..,k_n}(\tau)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $k + k_1 + .. + k_n$ pour le groupe $\Gamma_{x,y,m}$, de profondeur au plus $[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n k_i]$. De plus, quand $x = 0$, le bon changement de variable quand $x = 0$ nous donne le développement de Taylor ϕ autour de $z = y$.

Preuve: Tout ce que nous allons montrer ici est l'holomorphie à l'infini des coefficients : les autres faits sont des conséquences directes ou alors leurs démonstrations sont identiques à d'autres déjà données. Pour montrer l'holomorphie des coefficients de Taylor, il suffit de montrer que le développement de Fourier de ϕ_X ne comporte que des puissances positives de q. Le développement de Fourier de ϕ_X est le suivant :

$$\phi_X(\tau, z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, l \in L_0^* \\ 2mn - <l,l> \geq 0}} f(n, l) \exp(2\pi i(n\tau + < z + x\tau + y, l > +m < x, z >$$
$$+ \frac{1}{2} < x, x > m\tau + \frac{1}{2} < x, y >))$$

Nous devons donc montrer que le terme $\frac{1}{2}m < x, x > +n+ < x, l >$ est positif pour tout $l \in L_0^*$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquuée à $< x, l >$ nous permet de montrer que :

$$\frac{1}{2}m < x, x > +n+ < x, l > \geq \frac{m < x, l >^2}{2 < l, l >} + n+ < x, l >,$$

le terme de droite est un polynôme de degré 2 en $< x, l >$ et son étude nous permet de montrer qu'il est de signe constant négatif.

■

Ces développements sont à compter parmi les développements possibles : en effet, nous avons développé par rapport à toutes les variables z_i, mais il est possible de développer par rapport à un nombre plus petit de z_i. Pour cela nous aurons besoin d'analyser les bases du réseau qui nous donnerons des développement dont les coefficients de Taylor auront des propriétés modulaires.
Nous allons faire intervenir un autre type de fonctions, les formes quasi-modulaires de Jacobi : ces formes vont intervenir lorsque nous allons développer par rapport au réseau L_0' ou L_0'' qui vérifient $L_0' \oplus L_0'' \subset L_0$ avec $\dim(L_0) = \dim(L_0') + \dim(L_0'')$

4.3.2 Utilisation de l'inclusion $L_1 \oplus L_2 \subset L_0$

Nous allons maintenant analyser les cas de développement de Taylor non plus pour tout les z_i coordonnées de z dans une base de L_0 fixée mais pour un certain nombre d'entre eux. Pour une base quelconque de L_0 rien de nous garantit que les coefficients de Taylor que nous obtiendrons dans ce cas auront des propriétés modulaires, mais sous certaines conditions ils en auront et ce sera le cas dans une base de L_0 qui fait apparaître une inclusion $L_1 \bigoplus L_2 \subset L_0$.
Nous supposons donc qu'il existe deux réseaux L_1 et L_2 tels que $L_1 \oplus L_2 \subset L_0$ et avec $rang(L_1) + rang(L_2) = rang(L_0)$; nous noterons n_1 le rang de L_1 et n_2 le rang de L_2. Supposons que $L_0 = \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} e_i$, l'inclusion précédente peut se traduire par le fait de pouvoir écrire $L_1 = \oplus_{i=1}^{n_1} \mathbb{Z} f_i$ et $L_2 = \oplus_{i=1}^{n_2} \mathbb{Z} g_i$ avec les g_i et les f_i engendrés sur $\mathbb{Z}$ par les e_i. La forme quadratique associée à $L_1 \bigoplus L_2$ s'écrira sous la forme :

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix},$$

où S_1 est la forme quadratique associée L_1 dans la base $\oplus_{i=1}^{n_1} \mathbb{Z} f_i$ et S_2 est la forme quadratique associée L_2 dans la base $\oplus_{i=1}^{n_2} \mathbb{Z} g_i$. Nous avons l'égalité suivante :

$$L_0 \otimes \mathbb{C} = (L_1 \oplus L_2) \otimes \mathbb{C},$$

de plus la forme quadratique sur L_0 est équivalente sur $\mathbb{R}$ à la forme quadratique S. Enfin, pour un élément z de $L_0 \otimes \mathbb{C}$, nous écrirons $z = (z_f, z_g)$ avec $z_f \in L_1 \otimes \mathbb{C}$ et $z_g \in L_2 \otimes \mathbb{C}$. De plus les produits scalaires associés à ces formes quadratiques sont $<,>_1$ et $<,>_2$.
Nous pouvons aussi voir ce que nous faisons de la façon suivante : on fixe un réseau L_1 dans L_0 et prendre son orthogonal dans $L_0 \otimes \mathbb{C}$ ce qui jouera le rôle de $L_2 \otimes \mathbb{C}$. Nous pouvons maintenant formuler la proposition suivante :

Proposition 66 *Soit ϕ une forme de Jacobi de poids de k et d'indice m relativement au réseau L_0 pour le système multiplicatif v_η^r. Nous supposons qu'il existe deux réseau L_1 et L_2 tels que $L_1 \bigoplus L_2 \subset L_0$. En réutilisant les notations précédentes, nous définissons deux fonctions :*

$$\psi_f(\tau, z) = \exp\big(-4\pi^2 m < z_f, z_f >_1 \big) \phi(\tau, z)$$
$$\psi_g(\tau, z) = \exp\big(-4\pi^2 m < z_g, z_g >_2 \big) \phi(\tau, z)$$

Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de* $SL(2,\mathbb{Z})$*, nous avons les égalités suivantes :*

$$\psi_f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = v_\eta^r(M)(c\tau+d)^k e^{-\frac{\pi icm<z_g,z_g>_2}{c\tau+d}}\psi_f(\tau,z)$$
$$\psi_g(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = v_\eta^r(M)(c\tau+d)^k e^{-\frac{\pi icm<z_f,z_f>_1}{c\tau+d}}\psi_g(\tau,z)$$

En particulier, si nous écrivons les développements suivants :

$$\psi_f(\tau,z) = \sum_{k_1,..,k_{n_1}\geq 0} f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau,z_g)z_{f_1}^{k_1}..z_{f_{n_1}}^{k_{n_1}}$$
$$\psi_g(\tau,z) = \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0} g_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,z_f)z_{g_1}^{k_1}..z_{g_{n_2}}^{k_{n_2}},$$

alors les fonctions $f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau,z_g)$ *sont des formes de Jacobi de poids* k *et d'indice* m *relativement au réseau* L_2 *pour le système multiplicatif* v_η^r *et les fonctions* $g_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,z_f)$ *sont des formes de Jacobi de poids* k *et d'indice* m *relativement au réseau* L_1 *pour le système multiplicatif* v_η^r*.*

Corollaire 13 *Soit* ϕ *une forme de Jacobi de poids de* k *et d'indice* m *relativement au réseau* L_0*. Nous supposons qu'il existe deux réseau* L_1 *et* L_2 *tels que* $L_1\bigoplus L_2\subset L_0$*. En réutilisant les notations précédentes, nous déduisons que les coefficients de Taylor de* f *autour de* $z_f=0$ *sont des formes quasi-modulaires de Jacobi relativement au réseau* L_2 *pour le système multiplicatif* v_η^r *et que les coefficients de Taylor de* f *autour de* $z_g=0$ *sont des formes quasi-modulaires de Jacobi relativement au réseau* L_1 *pour le système multiplicatif* v_η^r*. De plus les coefficients de poids* $n+k$ *sont de profondeur au plus* $[n/2]$*.*

Nous démontrons maintenant la proposition :

Preuve: Tout d'abord, nous pouvons constater que :

$$<z,z>_0=<z_f,z_f>_1+<z_g,z_g>_2,$$

une fois cette constatation faîte, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}&\psi_f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d})\\ =&\sum_{k_1,..,k_{n_1}\geq 0} f_{k_1,..,k_{n_1}}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z_g}{c\tau+d}\right)\left(\frac{1}{c\tau+d}\right)^{\sum_{i=0}^{n_1}k_i} z_{f_1}^{k_1}..z_{f_{n_1}}^{k_{n_1}}\\ =&v_\eta^r(M)(c\tau+d)^k e^{-\frac{\pi icmS_2[z_g]}{c\tau+d}}\sum_{k_1,..,k_{n_1}\geq 0} f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau,z_g)z_{f_1}^{k_1}..z_{f_{n_1}}^{k_{n_1}},\end{aligned}$$

par identification, nous avons l'égalité suivante :

$$f_{k_1,..,k_{n_1}}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z_g}{c\tau+d}\right) = v_\eta^r(M)(c\tau+d)^{k+\sum_{i=0}^{n_1}k_i} e^{-\frac{\pi icmS_2[z_g]}{c\tau+d}} f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau,z_g)$$

Nous avons donc établi les propriétés par rapport à l'action du groupe $SL(2,\mathbb{Z})$, nous allons établir celles concernant le réseau L_2.D'après l'inclusion $L_1 \bigoplus L_2 \subset L_0$, nous pouvons voir un élément x de L_2 comme un élément de L_0 en l'écrivant dans la concaténation des bases f_i et g_i et prenant ses coordonnées suivant les f_i nulles. Nous pouvons alors écrire pour x et y dans L_2 :

$$\begin{aligned}
&\psi_f(\tau, z_f, z_g + x\tau + y)\\
&= \exp\big(-4\pi^2 m S_1[z_f]\big)\phi(\tau, z + x\tau + y)\\
&= \exp\big(-4\pi^2 m S_1[z_f]\big)\exp\big(-2\pi i m(< x, z > + \frac{1}{2}S[x]\tau)\big)\phi(\tau, z_f, z_g)\\
&= \exp\big(-4\pi^2 m S_1[z_f]\big)\exp\big(-2\pi i m(< x, z >_2 + \frac{1}{2}S_2[x]\tau)\big)\phi(\tau, z_f, z_g)\\
&= \exp\big(-2\pi i m(< x, z >_2 + \frac{1}{2}S_2[x]\tau)\big)\psi_f(\tau, z),
\end{aligned}$$

où $<,>_2$ désigne le produit scalaire associé à la forme quadratique S_2. En identifiant les développements de Taylor autour de $z_f = 0$, nous en déduisons l'égalité suivante pour tout les x et y dans L_2 et tout $k_1, .., k_{n_1}$ positifs :

$$\begin{aligned}
&f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau, z_g + x\tau + y)\\
&= \exp\big(-2\pi i m(< x, z_g >_2 + \frac{1}{2}S_2[x]\tau)\big) f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau, z_g)
\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que le développement de Fourier de $f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau, z_g)$ vérifie la condition pour qu'elle soit une forme modulaire de Jacobi relativement au réseau L_2. Pour le voir, nous devons rappeler que $(L_1 \oplus L_2)\mathbb{Q} = L_0 \otimes \mathbb{Q}$, par conséquent tout élément l de L_0^* peut s'écrire $l = l_f + l_g$ avec l_f un élément de L_1^* et l_g un élément de L_2^* et de façon similaire, nous pouvons écrire tout élément z de $L_0 \otimes \mathbb{C}$ comme la somme d'un élément z_l de $L_1 \otimes \mathbb{C}$ et z_g de $L_2 \otimes \mathbb{C}$. Nous reprenons maintenant l'expression du développement en série de Fourier de ϕ :

$$\begin{aligned}
&\phi(\tau, z)\\
&= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}, l\in L_0^* \\ 2mn - <l,l>_0 \geq 0}} f(n, l)\exp(2\pi i(n\tau + < z, l >))\\
&= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ l_f\in L_1^*, l_g\in L_2^* \\ 2mn - <l_f,l_f>_1 - <l_g,l_g>_2 \geq 0}} f(n, l_f, l_g)\exp(2\pi i(n\tau + < z_f, l_f >_1 + < z_g, l_g >_2))
\end{aligned}$$

En développant le terme $\exp(2\pi i(n\tau + < z_f, l_f >_1))$ autour de $z_f = 0$, nous faisons apparaître les $z_{f_i}^{k_i}$ et par conséquent les coefficients de Taylor de ϕ autour de $z_f = 0$; plus particulièrement, nous faisons apparaître le développement de Fourier de ces coefficients et nous constatons qu'il ne contient que des termes $q^n e^{2\pi i <l_g,z_g>_2}$ avec $2nm- < l_g, z_g >_2 \geq 0$. De plus en développant le terme $\exp\big(-4\pi^2 m S_1[z_f]\big)$ autour de $z_f = 0$, nous constatons qu'il ne contient que des puissances de q positives : ainsi par passage aux produits et aux sommes, les fonctions $f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau, z_g)$ se développent en serie de Fourier en des termes de la forme $q^n e^{2\pi i <l_g,z_g>_2}$ avec $2nm- < l_g, z_g >_2 \geq 0$. Finalement les $f_{k_1,..,k_{n_1}}(\tau, z_g)$ sont des formes modulaires de Jacobi de poids k et d'indice m relativement au réseau L_2. ■

Sans plus de complexité, nous pouvons décrire le comportement des développements de Taylor des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi :

Proposition 67 *Nous nous plaçons dans les conditions des théorèmes précédents. Soit ϕ une forme quasi-modulaire faible de Jacobi de poids k, d'indice m, de profondeur s, pour le réseau L_0 et le système multiplicatif v_η^r. Nous avons :*

$$\begin{aligned}\phi(\tau, z) &= \sum_{k_1,..,k_n \geq 0} f_{k_1,..,f_{k_n}}(\tau) z_1^{k_1}..z_{k_n}^{k_n} \\ &= \sum_{k_1,..,k_{n_1} \geq 0} f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}(\tau, z_g) z_1^{k_1}..z_{k_n}^{k_{n_1}},\end{aligned}$$

où les fonctions $f_{k_1,..,f_{k_n}}(\tau)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $k + k_1 + .. + k_n$ et de profondeur au plus $s + \frac{1}{2}(k_1 + .. + k_n)$ pour le système multplicatif v_η^r et les fonctions $f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}(\tau, z_g)$ sont des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids $k+k_1+..+k_{n_1}$, de profondeur au plus $s + \frac{1}{2}(k_1 + .. + k_{n_1})$ et d'indice m pour le réseau L_2 et le système multiplicatif v_η^r.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de reprendre les arguments que nous avons déjà donnés dans le cas modulaire. Avant de passer aux exemples nous allons décrire l'action des opérateurs de Hecke sur les coefficients de Taylor :

Proposition 68 *Nous nous plaçons dans les conditions des théorèmes précédents. Soit ϕ une forme quasi-modulaire faible de Jacobi de poids k, d'indice m, de profondeur s, pour le réseau L_0 et le système multiplicatif v_η^r :*

$$\begin{aligned}V_l(\phi)(\tau, z) &= \sum_{k_1,..,k_n \geq 0} T_l(f_{k_1,..,f_{k_n}}(\tau)) z_1^{k_1}..z_{k_n}^{k_n} \\ V_l(\phi)(\tau, z) &= \sum_{k_1,..,k_{n_1} \geq 0} V_l(f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}(\tau, z_g)) z_1^{k_1}..z_{k_n}^{k_{n_1}}\end{aligned}$$

Preuve: La première partie de la preuve a déjà été traité dans le cas du réseau $\mathbb{A}_1$ et la démonstration est la même. Nous allons démontrer la seconde égalité :

$$\phi(\tau, z) = \sum_{k_1,..,k_{n_1} \geq 0} f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}(\tau, z_g) z_1^{k_1}..z_{k_n}^{k_{n_1}},$$

nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
V_l(\phi)(\tau,z) &= l^{k-1}\sum_{\substack{ad=l\\ b[d]}} v_\eta^r(\sigma_a)d^{-k}\phi\left(\frac{a\tau+bQ}{d},az\right)\\
&= l^{k-1}\sum_{\substack{ad=l\\ b[d]}} v_\eta^r(\sigma_a)d^{-k}\left(\sum_{k_1,..,k_{n_1}\geq 0} f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}\left(\frac{a\tau+bQ}{d},az_g\right)a^{k_1+..+k_{n_1}}z_1^{k_1}..z_{k_n}^{k_{n_1}}\right)\\
&= \sum_{k_1,..,k_{n_1}\geq 0}\left(l^{k-1}\sum_{\substack{ad=l\\ b[d]}} v_\eta^r(\sigma_a)d^{-k}f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}\left(\frac{a\tau+bQ}{d},az_g\right)a^{k_1+..+k_{n_1}}\right)z_1^{k_1}..z_{k_{n_1}}^{k_{n_1}}\\
&= \sum_{k_1,..,k_{n_1}\geq 0}\left(l^{k-1}\sum_{\substack{ad=l\\ b[d]}} v_\eta^r(\sigma_a)d^{-k}f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}\left(\frac{a\tau+bQ}{d},az_g\right)\left(\frac{l}{d}\right)^{k_1+..+k_{n_1}}\right)z_1^{k_1}..z_{k_{n_1}}^{k_{n_1}}\\
&= \sum_{k_1,..,k_{n_1}\geq 0} T(l)\left(f_{k_1,..,f_{k_{n_1}}}(\tau,z_g)\right)z_1^{k_1}..z_{k_{n_1}}^{k_{n_1}}
\end{aligned}$$

■

4.3.3 Exemple de calculs

La forme de Jacobi $a_{-3,1}$ est une forme de Jacobi faible de poids -3, d'indice 1 pour le réseau $\mathbb{A}_2$, comme nous pouvons le voir dans [Des06] nous pouvons la définir ainsi :

$$\begin{aligned}
&a_{-3,1}(\tau,z)\\
&= \frac{i}{\eta(\tau)^3}\theta(\tau,z_1')\theta(\tau,z_2')\theta(\tau,z_3'),
\end{aligned}$$

avec $z\in\mathbb{A}_2\otimes\mathbb{C}$, $z = z_1'\epsilon_1+z_2'\epsilon_2+z_3'\epsilon_3$ où $\epsilon_1=(1,0,0)$, $\epsilon_2=(0,1,0)$ et $\epsilon_3=(0,0,1)$. Il est possible de faire un changement de base en posant $\alpha_1=\epsilon_2-\epsilon_1$ et $\alpha_2=\epsilon_3-\epsilon_2$: dans cette base nous avons $z=z_1\alpha_1+z_2\alpha_2$ avec z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$. Nous pouvons relier les éléments de deux bases de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
z_1' &= z_1\\
z_2' &= z_2-z_1\\
z_3' &= -z_2
\end{aligned}$$

La fonction $a_{3,1}$ peut se récrire ainsi :

$$\frac{i}{\eta(\tau)^3}\theta(\tau,z_1)\theta(\tau,z_2-z_1)\theta(\tau,z_2)$$

Cette nouvelle expression va nous permettre de développer $a_{-3,1}$ en série de Taylor autour de $z=0$ dans la base (α_1,α_2), mais pour cela nous devons d'abord utiliser la correction automorphe concernant θ, dont nous avons déjà parlé. Nous avons :

$$\theta(\tau, z_2 - z_1) = (1 - \frac{z_1}{z_2})\theta(\tau, z_2)\exp\left(4\pi^2 G_2(\tau) z_1^2 - 2\sum_{\substack{n\geq 1\\ k\geq 1\\ 2k\geq n}} (2\pi i)^{2k} G_{2k}(\tau)\frac{(-z_1)^n z_2^{2k-n}}{(2k-n)!n!}\right)$$

Finalement nous obtenons l'expression qui va nous permettre de fournir les coefficients de Taylor en $z = 0$:

$$\begin{aligned}
&a_{3,1}(\tau, z)\\
=&\frac{i}{\eta(\tau)^3}\theta(\tau, z_1)\theta(\tau, z_2)^2(1 - \frac{z_1}{z_2})\times\\
&\exp\left(4\pi^2 G_2(\tau) z_1^2 - 2\sum_{\substack{n\geq 2\\ k\geq 2\\ 2k\geq n}} (2\pi i)^{2k} G_{2k}(\tau)\frac{(-z_1)^n z_2^{2k-n}}{(2k-n)!n!}\right)
\end{aligned}$$

Notons $a_{-3,1}(k_1, k_2)$ le coefficient de Taylor correspondant au terme $z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ et comme les $a_{-3,1}(k_1, k_2)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $k_1 + k_2 - 3$ nous en déduisons que pour $k_1 + k_2 < 3$ les coefficients de Taylor sont nuls. Ainsi nous pouvons maintenant écrire :

$$\begin{aligned}
&a_{3,1}(2, 1) = -i(2\pi i)^3, a_{3,1}(1, 2) = i(2\pi i)^3\\
&a_{3,1}(1, 4) = -2i(2\pi i)^5 G_2(\tau), a_{3,1}(4, 1) = 2i(2\pi i)^5 G_2(\tau)\\
&a_{3,1}(3, 2) = -3i(2\pi i)^5 G_2(\tau), a_{3,1}(2, 3) = -3i(2\pi i)^5 G_2(\tau)\\
&a_{3,1}(1, 6) = i(2\pi i)^7\big(2G_2(\tau)^2 - \frac{1}{6}G_4(\tau)\big)\\
&a_{3,1}(6, 1) = -i(2\pi i)^7\big(2G_2(\tau)^2 - \frac{1}{12}G_4(\tau)\big)\\
&a_{3,1}(2, 5) = i(2\pi i)^7\big(-2G_2(\tau)^2 + \frac{1}{6}G_4(\tau)\big)\\
&a_{3,1}(5, 2) = -i(2\pi i)^7\big(2G_2(\tau)^2 - \frac{1}{12}G_4(\tau)\big)\\
&a_{3,1}(3, 4) = i(2\pi i)^7\big(-\frac{1}{2}G_4(\tau) + 4G_2(\tau)^2\big)\\
&a_{3,1}(4, 3) = i(2\pi i)^7\big(\frac{1}{2}G_4(\tau) - 4G_2(\tau)^2\big)
\end{aligned}$$

Nous avons considéré un développement de Taylor à deux variables, mais nous pouvons considérer un développement de Taylor à une seule variable. Par contre, dans cette base rien ne nous garantit que les coefficients que nous obtiendrons seront des formes quasi-modulaires de Jacobi. Notons $a_{-3,1}(n)$ le n-ième coefficient de Taylor dans le développement de $a_{3,1}$ par rapport à la variable z_1, nous avons :

$$\begin{aligned}
a_{-3,1}(0) &= 0 \\
a_{-3,1}(1) &= -2\pi\left(\frac{\theta(\tau,z_2)}{\eta(\tau)^3}\right)^2 \\
a_{-3,1}(2) &= 2\pi\left(\frac{\theta(\tau,z_2)}{\eta(\tau)^3}\right)^2\left(\frac{\theta_z(\tau,z_2)}{\theta(\tau,z_2)}\right)
\end{aligned}$$

Les deux premiers coefficients sont bien des formes faibles de Jacobi , mais ce n'est pas le cas du troisième qui n'est pas non plus une forme quasi-modulaire de Jacobi. Pour obtenir un développement faisant intervenir des formes quasi-modulaires de Jacobi, nous devons utiliser des inclusions du type $L_1 \oplus L_2 \subset \mathbb{A}_2$, comme nous l'avons vu précédemment. Ici, nous allons utiliser l'inclusion naturelle suivante :$< u_1, u_1 >_0 \mathbb{A}_1 \oplus < u_2, u_2 >_0 \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2$; la $\mathbb{Z}$-base qui caractérise cette inclusion est la $\mathbb{Z}$-base (u_1, u_2) où les vecteurs de la base peuvent être définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_1 \\
u_2 &= \alpha_1 + 2\alpha_1
\end{aligned}$$

Dans cette base, un élément z est représenté par les deux composantes complexes (y_1, y_2) et nous pouvons les relier aux composantes z_1, z_2 dans la $\mathbb{Z}$-base (α_1, α_2) par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
z_1 &= y_1 + y_2 \\
z_2 &= 2y_2
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons donner une nouvelle expression de $a_{-3,1}$ par le biais des coefficients de z dans cette nouvelle base :

$$\begin{aligned}
&a_{-3,1}(\tau, y_1, y_2) \\
=&\frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_1+y_2)\theta(\tau, 2y_2)\theta(\tau, y_2-y_1) \\
=&\sum_{k\geq 0} a_k(\tau, y_2) y_1^k,
\end{aligned}$$

les a_k sont les coefficients de Taylor de $a_{-3,1}$ en $y_1 = 0$ et d'après ce ce que nous avons vu ces coefficients sont des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids $k-3$. Nous pouvons les calculer mais auparavant nous devons utiliser la formule de correction modulaire concernant la fonction θ de Jacobi pour obtenir cette nouvelle expression de $a_{-3,1}$:

$$\begin{aligned}
&a_{-3,1}(\tau, y_1, y_2) \\
=&\frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_2)^2\theta(\tau, 2y_2)\exp\left(8\pi^2 G_2(\tau)y_1^2 - 2\sum_{n\geq 1}\wp^{(2n-2)}(\tau, y_2)\frac{y_1^{2n}}{2n!}\right)
\end{aligned}$$

Cette expression va nous permettre de donner les coefficients de Taylor en $z_1 = 0$ de $a_{-3,1}$ et bien que des dérivées paires ainsi que des puissances de la fonction $\wp$ de Weierstrass vont apparaître, les coefficients que nous obtiendrons seront holomorphes sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$: en effet les pôles vont se compenser grâce à la présence à la fois des dérivées et des puissances de $\wp$. Les premiers coefficients sont :

$$
\begin{aligned}
&a_0(\tau, y_2) = \frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_2)^2\theta(\tau, 2y_2)\\
&a_2(\tau, y_2) = \frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_2)^2\theta(\tau, 2y_2)\Bigg(- 2(2\pi i)^2 G_2(\tau) - \wp(\tau, y_2)\Bigg)\\
&a_4(\tau, y_2) = \frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_2)^2\theta(\tau, 2y_2)\Bigg(2(2\pi i)^2 G_2(\tau)^2 + \frac{1}{2}\wp(\tau, y_2)^2 + 2(2\pi i)^2 G_2(\tau)\wp(\tau, y_2)\\
&- \frac{1}{12}\wp(\tau, y_2)^{(2n-2)}\Bigg)\\
&a_6(\tau, y_2) = \frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_2)^2\theta(\tau, 2y_2)\Bigg(- \frac{4}{3}((2\pi i)^2 G_2(\tau))^3 - \frac{1}{6!}\wp(\tau, y_2)^3\\
&G_2(\tau)(-\wp(\tau, y_2)^2 + \frac{1}{6}\wp(\tau, y_2)^{(2)}) - 2(2\pi i)^2 G_2(\tau)^2\wp(\tau, y_2) - \frac{2}{6!}\wp(\tau, y_2)^{(3)}\Bigg)\\
&a_8(\tau, y_2) = \frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_2)^2\theta(\tau, 2y_2)\Bigg(\frac{2}{3}((2\pi i)^2 G_2(\tau))^4 - \frac{2}{8!}\wp(\tau, y_2)^{(4)} + \frac{1}{24}\wp(\tau, y_2)^4\\
&- 2(2\pi i)^2 G_2(\tau)(-\frac{1}{180}\wp(\tau, y_2)^{(3)} - \frac{1}{6!}\wp(\tau, y_2)^3)\\
&+ 2(2\pi i)^2 G_2(\tau)^2(\frac{1}{2}\wp(\tau, y_2)^2 - \frac{1}{12}\wp(\tau, y_2)^{(2)}) + \frac{4}{3}G_2(\tau)^3\wp(\tau, y_2\Bigg)
\end{aligned}
$$

Ces coefficients sont des formes quasi-modulaires faibles de Jacobi de poids $-3 + k$ et d'indice 1 par rapport au réseau $\mathbb{A}_1$, de plus le vecteur qui engendre ce réseau dans notre cas est u_2 de norme 6 dans $\mathbb{A}_2$, par conséquent ces coefficients sont des formes quasi-modulaires de Jacobi faible de poids $k - 3$ et d'indice 6.

4.3.4 Une application : estimation de la dimension de l'espace des formes de Jacobi de poids k et d'indice m relativement à un réseau L_0

Comme dans le cas des formes de Jacobi classiques l'étude des coefficients de Taylor des formes modulaires de Jacobi relativement à un réseau va nous permettre de donner une estimation de la dimension des espaces des formes de Jacobi relativement à ce réseau. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 13 *Soit L_0 un réseau quadratique pair positif de rang n. L_0 contient n copies de $\mathbb{A}_1$, autrement dit il existe une $\mathbb{Z}$-base $(u_1, ..., u_n)$ de L_0 dans laquelle la matrice de la* *forme quadratique sur L_0 s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} <u_1,u_1> & 0 & ... & 0 \\ 0 & <u_2,u_2> & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & <u_n,u_n> \end{pmatrix}$$

Preuve: Définissons pour un sous-réseau L de L_0 son orthogonal dans L_0, il s'agit de l'ensemble :

$$L' = \left\{ x \in L_0 | \forall \ \ y \in L, <x,y>_0 = 0 \right\}$$

En réalité, c'est un sous-réseau de L_0 et nous avons : $rg(L) + rg(L') = rg(L_0)$. Le fait que ce soit un sous-réseau est clair et l'égalité des rangs se déduit en considérant les $\mathbb{Q}$ espaces vectoriels $L \otimes \mathbb{Q}$. Pour obtenir la décomposition voulue, on choisit un élément u_1 de norme pair, le réseau u_1' est un sous-réseau de L_0 de rang $n-1$ qui est quadratique pair : on peut donc y choisir un élément u_2 de norme pair et $<u_1,u_2>= 0$. On recommence la procédure avec le réseau orthogonal au réseau engendré par u_1 et u_2 et on itère jusqu'à obtenir la décomposition voulue. ■

Proposition 69 *Soit L_0 un réseau quadratique pair positif de rang n. Soit une base $(u_1,..u_n)$ décrite dans le lemme précédent et $(y_1,..,y_n)$ les coordonnées d'un élément z de $L_0 \bigotimes \mathbb{C}$ dans cette base. Soit N l'entier défini par :*

$$N = m \sum_{i=1}^{n} <u_i,u_i> m$$

et soit le développement de Taylor de la fonction ϕ de $J_{k,m}(L_0)$ dans la base $(u_1,..u_n)$ en $z = 0$:

$$\phi(\tau, y_1,..,y_n) = \sum_{k_1 \geq 0..k_n \geq 0} \phi_{k_1,..,k_n}(\tau) y_1^{k_1}...y_n^{k_n}.$$

Si pour $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq N$, nous avons :

$$\phi_{k_1,..,k_n}(\tau) \equiv 0,$$

alors la fonction ϕ est identiquement nulle.

Preuve: La fonction ϕ peut s'écrire :

$$\phi(\tau, y_1,..,y_n) = \sum_{k_2 \geq 0..k_n \geq 0} g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1) y_2^{k_1}...y_n^{k_n}$$
$$g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1) = \sum_{k_1 \geq 0} \phi_{k_1,..,k_n}(\tau) y_1^{k_1}$$

Supposons que $\sum_{i=2}^{n} k_i \leq N - m <u_1,u_1>$, alors :

$$g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1) = \sum_{k_1 \geq m<u_1,u_1>+1} \phi_{k_1,..,k_n}(\tau) y_1^{k_1}$$

Nous pouvons écrire l'égalité suivante pour λ_1 et μ_1 dans $\mathbb{Z}$:

$$g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1 + \lambda_1\tau + \mu_1) = e^{-m\pi i<u_1,u_1>(\lambda_1^2\tau+2\mu_1 z)}g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1)$$

Cette égalité nous permet de déduire qu'à τ fixé, la fonction $g_{k_2,..,k_n}$ a au plus $m < u_1, u_1 >$ zéro, par conséquent pour $\sum_{i=2}^n k_i \leq N - m < u_1, u_1 >$, la fonction $g_{k_2,..,k_n}$ est identiquement nulle. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\phi(\tau, y_1, .., y_n) &= \sum_{\substack{k_2,..,k_n \geq 0 \\ \sum_{i=2}^n \geq N-m<u_1,u_1>}} g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1)y_2^{k_2}...y_n^{k_n} \\ &= \sum_{k_3,..,k_n \geq 0} g_{k_3,..,k_n}(\tau, y_1, y_2)y_3^{k_3}...y_n^{k_n},\end{aligned}$$

avec :

$$g_{k_3,..,k_n}(\tau, y_1, y_2) = \sum_{\substack{k_2 \geq 0 \\ \sum_{i=2}^n k_i \geq N-m<u_1,u_1>}} g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1)y_2^{k_2}.$$

Supposons maintenant que $\sum_{i=3}^n k_i \leq N - m\sum_{i=1}^2 < u_i, u_i >$, nous avons alors :

$$g_{k_3,..,k_n}(\tau, y_1, y_2) = \sum_{k_2 \geq m<u_2,u_2>+1} g_{k_2,..,k_n}(\tau, y_1)y_2^{k_2}.$$

En fixant τ et y_1 et en appliquant la même méthode que pour $g_{k_2,..,k_n}$, nous en déduisons que dans ce cas $g_{k_3,..,k_n}$ est identiquement nulle. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\phi(\tau, y_1, .., y_n) = \sum_{\substack{k_3,..,k_n \geq 0 \\ \sum_{i=3}^n \geq N-\sum_{i=1}^2 m<u_i,u_i>}} g_{k_3,..,k_n}(\tau, y_1, y_2)y_3^{k_3}...y_n^{k_n}.$$

Nous pouvons itérer la méthode en définissant par récurrence pour j entre 1 et $n-1$:

$$g_{k_{j+1},..,k_n}(\tau, y_1, .., y_j) = \sum_{\substack{k_j \geq 0 \\ \sum_{i=j}^n k_i \geq N-m\sum_{i=1}^{j-1}<u_i,u_i>}} g_{k_j,..,k_n}(\tau, y_1, .., y_{j-1})y_j^{k_j},$$

les $g_{k_j,..,k_n}$ sont en fait des formes quasi-modulaires de Jacobi de poids k pour un réseau constitué de $j-1$ copies de $\mathbb{A}_1$: ce fait est direct par la définition de ces fonctions. Par itération nous arrivons à l'égalité suivante :

$$\phi(\tau, y_1, .., y_n) = \sum_{k_n \geq 0} g_{k_n}(\tau, y_1, .., y_{n-1})y_n^{k_n}$$

et par la définition des fonctions g, nous en déduisons que k_n est plus grand que $m < u_n, u_n >$ dans la dernière somme, ainsi nous avons :

$$\phi(\tau, y_1, .., y_n) = \sum_{k_n \geq m<u_n,u_n>} g_{k_n}(\tau, y_1, .., y_{n-1})y_n^{k_n}$$

En fixant toutes les variables sauf y_n et réutilisant les argument énoncés plus haut, nous en déduisons que les fonction g_{k_n} sont identiquement nulles pour k_n plus grand que $m < u_n, u_n >$. Finalement, nous avons montré que la fonction ϕ était identiquement nulle. ■

Cette proposition est en faite vraie quelque soit la base du réseau dans laquelle nous décomposons ϕ en série de Taylor en $z = 0$ par rapport à toutes les variables, en effet :

Corollaire 14 *Nous reprenons les mêmes notations que la proposition précédente, supposons maintenant que les coordonnées de z dans une autre base $(e_1, .., e_n)$ soit $z_1, .., z_n$ et que la fonction ϕ s'écrive :*

$$\phi(\tau, z_1, .., z_n) = \sum_{k_1,..,k_n \geq 0} \varphi_{k_1,..,k_n}(\tau) z_1^{k_1} .. z_n^{k_n}$$

Si les $\varphi_{k_1,..,k_n}(\tau)$ sont nulles pour $\sum_{i=1}^n k_i \leq N$ alors ϕ est identiquement nulle.

Preuve: Il nous faut écrire chaque z_i dans la base $u_1, .., u_n$, nous avons :

$$z_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} y_j$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$z_1^{k_1} .. z_n^{k_n} = \prod_{i=1}^n \sum_{(j_1,..,j_{k_i}) \in \{1,..,n\}} \prod_{l=0}^{k_i} \alpha_{i,j_l} y_{j_l}$$

$$\varphi_{k_1,..,k_n}(\tau) z_1^{k_1} .. z_n^{k_n} = \varphi_{k_1,..,k_n}(\tau) \prod_{i=1}^n \sum_{(j_1,..,j_{k_i}) \in \{1,..,n\}} \prod_{l=0}^{k_i} \alpha_{i,j_l} y_{j_l}$$

nous vérifions alors que ces expressions sont des combinaisons linéaires en les $y_{j_1}^{j_1} .. y_{j_n}^{j_n}$ avec $\sum_{p=1}^n j_p = \sum_{i=1}^n k_i$. De ces égalités et de l'hypothèse faîte sur les $\varphi_{k_1,..,k_n}$, nous en déduisons que les $\phi_{k_1,..,k_n}$ de la proposition précédente sont nuls pour $\sum_{i=1}^n k_i \leq N$ et ainsi la fonction ϕ est identiquement nulle. ■

Ces propositions nous permettent de déterminer une estimation de la dimension de l'espace $J_{k,m}(L_0)$:

Corollaire 15

$$Dim J_{k,m}(L_0) \leq \sum_{i=0}^N \binom{k+i+n-1}{n-1} Dim M_{k+i}(SL(2, \mathbb{Z}))$$

Nous allons calculer une des valeurs possible de N dans le cas du réseau E_8. Soit $(e_1, .., e_8)$ la base dans laquelle la forme quadratique se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le sous-réseau engendré par la base $(f_1, .., f_8)$ définie par :

$$\begin{aligned}
&f_1 = e_1, < f_1, f_1 >= 2\\
&f_2 = e_1 + 2e_3, < f_2, f_2 >= 6\\
&f_3 = e_1 + 2e_3 + 3e_4, < f_3, f_3 >= 12\\
&f_4 = e_1 + 2e_3 + 4e_2 + 3e_4, < f_4, f_4 >= 20\\
&f_5 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_5 + 6e_4, < f_5, f_5 >= 20\\
&f_6 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 6e_4 + 5e_5 + 4e_6, < f_6, f_6 >= 12\\
&f_7 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 6e_4 + 5e_5 + 4e_6 + 3e_7, < f_7, f_7 >= 6\\
&f_8 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 6e_4 + 5e_5 + 4e_6 + 3e_7 + 2e_8, < f_8, f_8 >= 2
\end{aligned}$$

est un sous-réseau composé de 8 copies de $\mathbb{A}_1$: nous pouvons choisir $N = 80m$.

Troisième partie

Formes modulaires pour des groupes orthogonaux

Chapitre 5

Groupes orthogonaux

5.1 Définitions et rappels sur le développement de Fourier

Dans cette partie, nous allons étendre ce que nous avons fait sur les formes modulaires de Siegel de genre 2 aux formes modulaires définies pour des groupes orthogonaux relativement à des réseaux de la forme $L = L_0(-1) \oplus 2\mathcal{U}$ avec L_0 un réseau pair quadratique positif de rang n muni d'une forme quadratique q et du produit scalaire $<,>_0$. D'ailleurs les formes modulaires de Siegel de genre 2 peuvent se voir comme un cas particulier de ces formes modulaires en considérant le cas $2\mathcal{U} \oplus \mathbb{A}_1(-1)$ pour $Sp_2(\mathbb{Z})$ et $2\mathcal{U} \oplus \mathbb{A}_1(-1)$ pour le groupe paramodulaire Γ_t, ceci est décrit plus précisément dans [V. 96b]. Nous commençons par définir deux ensembles :

$$\mathcal{D}_L^* = \left\{z \in Ł \bigotimes \mathbb{C} | (z,z) = 0, (z,\overline{z}) > 0\right\}^+$$
$$\mathcal{D}_L = \left\{[z] \in \mathbb{P}(Ł \bigotimes \mathbb{C}) | (z,z) = 0, (z,\overline{z}) > 0\right\}^+,$$

Le plus désigne une composante connexe de ces ensembles. Nous vérifions rapidement que le groupe orthogonal $O(L \bigotimes \mathbb{R})$ opère sur ces ensembles ; enfin nous désignerons par $O^+(L \bigotimes \mathbb{R})$ le sous-groupe d'indice 2 dans $O(L \bigotimes \mathbb{R})$ qui fixe les deux ensembles précédemment définis. Nous pouvons maintenant rappeler la définition d'une forme modulaire pour des groupes orthogonaux :

Définition 26 *Soit Γ un sous groupe d'indice fini de $O(L)$ avec L un réseau de la forme que nous avons défini plus haut et n plus grand que 1. Soit χ un caractère d'ordre fini sur Γ.*
Une forme modulaire de poids k dans $\mathbb{Z}$ et de caractère χ est une fonction holomorphe de $\mathcal{D}_L^*$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie :

$$f(t.z) = t^{-k} f(z) \quad \forall t \in \mathbb{C}^*, z \in \mathcal{D}_L^*$$
$$f(g(z)) = \chi(g) f(z) \quad \forall g \in \Gamma, z \in \mathcal{D}_L^*$$

Dans ce qui suit nous allons rappeler d'où provient le développement en série de Fourier de telles fonctions ainsi que leur lien avec les formes modulaires de Jacobi relativement à un réseau. Les détails ne seront pas explicités, pour plus d'explications nous renvoyons à [Gri94].
Le réseau $\mathcal{U} \oplus L_0(-1)$ sera appelé L_1, c'est un réseau de signature $(1, n+4)$, la $\mathbb{Z}$-base de L sera noté $< e_1, .., e_{n+4} >$ et nous prendrons $\mathcal{U} =< e_1, e_{n+1} >$ sur $\mathbb{Z}$. Dans cette base, la

forme quadratique associée à L est la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $z \in \mathcal{D}_L^*$, nous posons :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ Z \\ z_{n+4} \end{pmatrix},$$

où Z est un élément de $L_1 \otimes \mathbb{C}$. Nous avons $z_1 z_{n+4}$ qui est non nul et si nous écrivons $Z = X + iY$ avec $X, Y \in L_1 \otimes \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} (X, X) &= (Y, Y) > 0 \\ (X, Y) &= 0, \end{aligned}$$

où les parenthèses désignent le produit scalaire sur L_1. Nous pouvons maintenant définir une application i de $\mathcal{D}_L^*$ et $\mathcal{D}_L$ dans $L_1 \otimes \mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$i(z) = \frac{Z}{z_{n+4}} = X + iY$$

De plus comme nous pouvons montrer que $(Y, Y)_1$ est strictement positif, nous pouvons préciser l'espace d'arrivée de i, c'est ce que nous appellerons le domaine affine $\mathcal{D}_L^{aff}$:

$$\mathcal{D}_L^{aff} = \left\{ Z \in L_1 \otimes \mathbb{C} | (ImZ, ImZ)_1 > 0 \right\}^+.$$

Il existe un isomorphisme entre $\mathcal{D}_L^*$ et $\mathcal{D}_L^{aff}$ par le biais de l'application i et de l'application j de $\mathcal{D}_L^{aff}$ dans $\mathcal{D}_L$ définie par :

$$j(z) = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(Z, Z)_1 \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Le domaine affine peut se voir comme une généralisation du demi-plan supérieur, ce domaine est un cône en vertu de l'inégalité $(ImZ, ImZ)_1 > 0$.
Pour déterminer un type de développement de Fourier d'une forme modulaire pour Γ un sous-groupe de $O(L)^+$, nous allons regarder le sous groupe de $O^+(L \otimes \mathbb{R})$ qui laisse stable le vecteur e_1. Nous pouvons montrer que la forme matricielle G des éléments de ce groupe est la suivante :

$$\begin{pmatrix} b^{-1} & -b^{-1}\, {}^tY S_1 M & -\frac{1}{2} b^{-1} (Y, Y)_1 \\ 0 & M & Y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

avec $Y = L_1 \otimes \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $M \in O^+(L_1 \otimes \mathbb{R}) = O(L_1 \otimes \mathbb{R}) \cap O^+(L \otimes \mathbb{R})$. En particulier, ce groupe contient les éléments de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\,{}^tS_1 l & -\frac{1}{2}(l,l) \\ 0 & I & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce sont les éléments qui vont nous permettre d'obtenir un développement de Fourier. Regardons maintenant l'action d'un élément g de $O^+(L \bigotimes \mathbb{R})$ sur $\mathcal{D}_L^{aff}$, cela nous permettra de donner une définition de formes modulaires pour le domaine affine. Considérons l'écriture matricielle d'un élément g de $O^+(L \otimes \mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & ** & ** \\ G_1 & G' & G_{n+4} \\ g_{n+4,1} & g_{n+4} & g_{n+4,n+4} \end{pmatrix},$$

avec G_1, G_{n+4} des vecteurs colonnes de taille $n+2$ et g_{n+4} un vecteur ligne de taille $n+2$. L'action de g sur un élément Z du domaine affine est une généralisation de l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur le demi-plan supérieur :

$$g. < Z >= \frac{-\frac{1}{2}G_1(Z,Z)_1 + G'.Z + G_{n+4}}{-\frac{1}{2}g_{n+4,1}(Z,Z)_1 + g_{n+4}.Z + g_{n+4,n+4}},$$

le dénominateur de cette expression définit un facteur d'automorphie que nous notons $J(g,Z)$. La définition des formes modulaires sur le domaine affine s'en déduit alors directement :

Définition 27 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $O^+(L)$, χ un caractère fini de Γ et k un entier. Une fonction F définie sur le domaine affine est une forme modulaire pour Γ, si elle est holomorphe sur le domaine affine et si :*

$$\forall g \in \Gamma, \quad F(g. < Z >) = \chi(g) J(g,Z)^k F(Z)$$

Le lien avec les formes modulaires que nous avons précédemment définies est le suivant :

$$F(Z) = F(i(z))$$

Regardons maintenant un type développement de Fourier des formes modulaires définies sur le domaine affine. Ce que nous avons écrit sur le groupe $\mathbb{P}_{e_1}(\mathbb{R})$ laissant stable le vecteur e_1 peut avoir la traduction suivante :

$$O^+(L_1) \hookrightarrow O^+(L)$$

$$L_1 \cong T(L_1) = \left\{ T_l = \begin{pmatrix} 1 & -\,{}^t(S_1 l) & -\frac{(l,l)}{2} \\ 0 & I & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | l \in L_1 \right\}$$

$$\mathbb{P}_{e_1}(\mathbb{Z}) = O^+(L_1) \ltimes T(L_1)$$

Le fait d'avoir recherché un tel groupe, nous a permis d'isoler un groupe de période pour F une forme modulaire définie sur le domaine affine ; en effet, supposons que le caractère χ associé à F soit d'ordre n, nous avons alors :

$$\forall l \in L_1 : F(Z+nl) = F(Z),$$

et d'après la théorie sur les coefficients de Fourier, nous avons :

$$F(Z) = \sum_{u \in nL_1^*} a(u) \exp(2\pi i(u,Z))$$

En fait nous pouvons voir que certains éléments de cette somme sont toujours nuls et que nous pouvons nous ramener à la somme suivante :

$$F(Z) = \sum_{\substack{u \in L_1^* \\ (u,u) \geq 0}} a(u) \exp(2\pi i(u,Z))$$

De ce développement de Fourier, nous allons en déduire un autre qui fait intervenir des formes de Jacobi relativement à L_0 dans le cas particulier où notre réseau possède deux plans hyperboliques. En effet, nous avons : $L_1 = \mathcal{U} \otimes L_0(-1)$ et nous posons dans L : $2\mathcal{U} =< e_1, e_{n+4} > \oplus < e_2, e_{n+3} >$, par conséquent nous pouvons écrire les deux égalités suivantes :

$$S_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -S_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} w \\ z_0 \\ \tau \end{pmatrix}$$

avec $Z \in L_1 \otimes \mathbb{C}$, τ, ω dans $\mathbb{C}$, τ dans L_0 et $-S_0$ la matrice de la forme quadratique associée à L_0, elle est définie négative. Si nous supposons Z dans le domaine affine nous aboutissons à l'inégalité suivante :

$$Im(\tau)Im(\tau) > \frac{1}{2}S_0[Im(z)].$$

Finalement, en faisant le choix d'une bonne composante connexe, nous obtenons l'isomorphisme suivant :

$$D_L \cong \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z_0 \\ \tau \end{pmatrix} | z_0 \in L_0 \otimes \mathbb{C}, \omega, \tau \in \mathbb{H}^+, Im(\omega).Im(\tau) > \frac{1}{2}S_0[Im(z)] \right\}.$$

Pour obtenir un développement de Fourier faisant intervenir des formes de Jacobi relativement au réseau L_0, nous allons chercher le sous groupe de $O(L)^+$ qui laisse stable le plan (e_1, e_2). Ce sous-groupe est constitué par l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} A^* & J\, {}^t(A^{-1})\, {}^tZS_0 & T \\ 0 & M_0 & Z \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

avec $A \in SL(2,\mathbb{Z})$, $M_0 \in O(S_0)^+$, $A^* = J\ {}^t(A^{-1})J$, z_0 un élément de L_0 et T est une matrice à coefficients entiers telle que :

$$ {}^tBJT + {}^t({}^tBJT) = {}^tZS_0Z $$

Ce groupe contient le groupe $H(L_0) \ltimes SL(2,\mathbb{Z})$ qui est le groupe de Jacobi pour L_0 . Le groupe $H(L_0)$ est le groupe d'Heisenberg pour le réseau L_0, c'est à dire les éléments (X,r) :

$$ (X,r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^tyS_0 & (x,y)-r & \frac{1}{2}y^2 \\ 0 & 1 & {}^txS_0 & \frac{1}{2}x^2 & r \\ 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, $$

avec r dans $\mathbb{Z}$ et X dans L_0^2 et la partie $SL(2,\mathbb{Z})$ est représentée par les éléments de la forme :

$$ \{A\} = \begin{pmatrix} A^* & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} $$

Pour un élément $\{A\}$ et (X,r), nous avons pour $Z = {}^t(\omega, {}^tz_0, \tau)$ dans le domaine affine :

$$ \begin{aligned} &\{A\}. < Z >= {}^t(\omega - \frac{cS_0[z_0]}{2(c\tau+d)}, \frac{{}^tz_0}{c\tau+d}, A. < \tau >) \\ &J(A,Z) = c\tau + d \\ &(X,r). < Z >= {}^t(w + {}^txS_0z_0 + r + \frac{1}{2}(x,x)\tau, z + x\tau + y, \tau) \\ &J((X,r)) = 1 \end{aligned} $$

Analysons le développement de Fourier que nous avions obtenu précédemment et supposons maintenant que sur $SL(2,\mathbb{Z})$ χ est induit par v_η^D de conducteur Q, nous pouvons maintenant l'écrire :

$$ \begin{aligned} F(Z) &= \sum_{\substack{u={}^t(n,l,m) \\ u \in L_1^* \\ (u,u)\geq 0}} a(u) e^{2\pi i(n\tau/Q + (l,z_0) + m\omega/Q)} \\ &= \sum_{\substack{u={}^t(n,l,m) \\ l \in L_0^* \\ n,m \in \mathbb{N} \\ 2nm-(l,l)_{S_0}\geq 0}} a(u) e^{2\pi i(n\tau/Q + (l,z_0) + m\omega/Q)} \\ &= \sum_{n\geq 0} a({}^t(n,0,0)) e^{2\pi i n\tau/Q} + \sum_{m\geq 1} \left(\sum_{\substack{n\geq 0 \\ l\in L_0^* \\ 2nm-(l,l)_{S_0}}} a({}^t(n,l,m)) e^{2\pi i(n\tau/Q + (l,z_0))} \right) e^{2\pi i m\omega/Q} \\ &= f_0(\tau) + \sum_{m\geq 1} f_m(\tau, z_0) e^{2\pi i m\omega/Q}, \end{aligned} $$

où f est une forme modulaire de poids k et les f_m sont des formes modulaires de Jacobi de poids k et d'indice m relativement au réseau L_0 et pour le caractère χ^* : ce caractère est en fait la trace du caractère χ sur le groupe de Jacobi de L_0.
Le fait d'avoir obtenu cette décomposition va nous permettre de préciser les propriétés modulaires des développements de Taylor en $z_0 = 0$ des formes modulaires pour les groupes orthogonaux. Ces développements de Taylor peuvent être utiles en théorie des espaces de modules des surfaces K3 comme nous le constatons dans [V. 07].

5.2 Formes quasi-modulaires généralisées

A partir de maintenant le réseau que nous allons considérer sera de la forme $L = L_t = 2\mathcal{U} \bigoplus L_0(-t)$ avec t un entier naturel et L_0 un réseau quadratique pair positif de rang n, ainsi grâce à l'entier nous allons pouvoir nous retrouver dans des situations analogues à celles des groupes paramodulaires dans le cas de formes modulaires de Siegel de genre 2.
Pour considérer des développements de Taylor, l'espace le mieux adapté est l'espace H_n défini par :

$$H_n = \{Z = (\tau, z, \omega) \in \mathbb{H} \times (L_0 \otimes \mathbb{C}) \times \mathbb{C} | S_1[Im[Z]] > 0\}^+$$

où S_1 est la forme quadratique associée à $\mathbb{U} \oplus L_0(-t)$ qui admet la forme matricielle suivante :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -tS_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec S_0 la forme quadratique associée au réseau L_0 ; comme nous l'avons déjà vu cet espace est isomorphe à D_L. Néanmoins cet espace n'est plus adapté quand t est différent de 1 et dès lors nous sommes contraints d'introduire un nouvel espace noté H_n^t défini par :

$$H_n^t = \{Z = (\tau, z, t\omega) \in \mathbb{H} \times (L_0 \otimes \mathbb{C}) \times \mathbb{C} | S_1[Im[Z]] > 0\}^+.$$

Ce choix d'un nouvel espace s'explique par le fait que la transformation $(\tau, z, \omega) \to (t\omega, z, \tau/t)$ n'est pas un élément de $O^+(L_t)$, par contre la transformation $(\tau, z, t\omega) \to (t\omega, z, \tau)$ est bien un élément de $O^+(L_t)$ et ce sous-groupe du groupe orthogonal agit aussi sur H_n^t. Ce changement d'espace n'apporte pas de difficultés supplémentaires puisque les espaces H_n^t et H_n sont reliés par l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \phi_t : H_n &\to H_n^t \\ (\tau, z, \omega) &\mapsto (\tau, z, t\omega) \end{aligned}$$

La transformation $(\tau, z, t\omega) \to (t\omega, z, \tau)$ admet la représentation matricielle suivante dans $O^+(L_t)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nous appellerons ϵ cet élément et nous avons $\det(\epsilon) = -1$ et $J(\epsilon, Z) = 1$. Nous allons maintenant rappeler quels éléments engendrent le groupe stable. Dans ce but nous commençons par définir certains éléments de $SO^+(L_t)$:

$$\zeta = \{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} \in H(L_0) \ltimes SL(2, \mathbb{Z})$$

$$\theta = \zeta\epsilon\zeta\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant rappeler un lemme que nous pouvons trouver dans [Gri94]

Lemme 14 *Soit L un réseau de rang n, le groupe stable associé à L est engendré par les éléments de $H(L_0) \ltimes SL(2, \mathbb{Z})$ et par l'élément θ*

Définition 28 *Une fonction F définie sur H_n est une forme quasi-modulaire pour $\widetilde{SO}^+(L_t)$ de poids k, de profondeur au plus s et pour le système multiplicatif v_η^D de conducteur Q par rapport à $SL(2, \mathbb{Z})$ qui vérifie :*
-F est holomorphe sur H_n^t,
-F est à croissance tempérée par rapport à τ et ω et il existe des fonctions holomorphes sur H_n^t $F_0, .., F_s$ et $\tilde{F}_0, .., \tilde{F}_s$ à croissances tempérées respectivement par rapport à τ et ω telles que pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}, t\omega - t\frac{c < z, z >_0}{2(c\tau + d)}\right)$$
$$= v_\eta^D(M)(c\tau + d)^k \sum_{i=0}^{s} F_i(\tau, z, t\omega)\left(\frac{c}{c\tau + d}\right)^i$$
$$F\left(\tau - t\frac{c < z, z >_0}{2(ct\omega + d)}, \frac{z}{ct\omega + d}, \frac{at\omega + b}{ct\omega + d})\right)$$
$$= v_\eta^D(M)(ct\omega + d)^k \sum_{i=0}^{s} \tilde{F}_i(\tau, z, t\omega)\left(\frac{c}{ct\omega + d}\right)^i$$

-pour tout λ et μ de L_0 :

$$F\big(\tau, z + \lambda\tau + \mu, tw - t < \lambda, z >_0 + \frac{1}{2}t < \lambda, \lambda >_0 \tau\big) = F(\tau, z, tw)$$

-$F(\epsilon. < Z >) = \pm F(Z)$.
-un certain type de développement de Fourier :

$$F(\tau, z, t\omega) = \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ l \in L_0^* \\ 2tnm/Q^2 - t<l,l>_0 \geq 0}} a(n, l, m) q^{\frac{n}{Q}} s^{\frac{tm}{Q}} e^{2\pi t i <l,z>}$$

Si F_s est non identiquement nulle, alors F est de profondeur s.

La première remarque que nous pouvons faire est que certaines parties de cette définition sont redondantes, cependant elles sont nécessaires pour la compréhension du comportement de ces fonctions. L'autre remarque immédiate que nous pouvons faire est la suivante :

$$F_i(\tau, z, t\omega) = F_i(\tau, z, t\omega) \forall i \in \{0, s\} \quad \forall(\tau, z, t\omega) \in H_n^t.$$

De plus, comme dans les autres types de formes quasi-modulaires, il est possible de montrer que les F_n et s sont uniques . Ensuite, à $z = 0$, nous obtenons des formes quasi-modulaires symétriques ou antisymétriques de poids $k - 2i$ et de profondeur au plus $s - i$ pour $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$.
En ce qui concerne la profondeur nous n'avons pas non plus l'inégalité $2s \leq k$, comme nous le verrons dans les exemples. Enfin, les F_i vérifient les deux premières propriétés des formes quasi-modulaires de poids $k - 2i$ pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$.
Comme dans le cas des formes modulaires pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$ ou tout groupe de congruence le contenant, les coefficients de Fourier dans le développement de Fourier par rapport à $t\omega$ ou τ a des propriétés modulaires bien particulières :

Proposition 70 *Une forme quasi-modulaire pour $\tilde{SO}^+(L_t)$ de poids k, de profondeur au plus s pour le système multiplicatif induit par v_η^D sur $SL(2,\mathbb{Z})$ peut s'écrire de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} F(\tau, z, t\omega) &= \sum_{m\geq 0} f_m(\tau, z) e^{2\pi i \frac{m}{Q} t\omega} \\ &= \sum_{m\geq 0} g_m(t\omega, z) e^{2\pi i \frac{m}{Q} \tau}, \end{aligned}$$

où les f_m et les g_m sont des formes quasi-modulaires de Jacobi de poids k, d'indice tm et de profondeur au plus s pour le système multiplicatif induit par v_η^D sur $SL(2,\mathbb{Z})$ et pour le réseau L_0. De plus nous avons :

$$f_m(\omega, z) = \pm g_m(\tau, z).$$

Preuve: Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} &F\left(M. <\tau>, \frac{z}{c\tau+d}, tw - t\frac{c<z,z>}{c\tau+d}\right) \\ &= \sum_{m\geq 0} f_m\left(M. <\tau>, \frac{z}{c\tau+d}\right) e^{2\pi i \frac{m}{Q}(tw - t\frac{c<z,z>}{c\tau+d})} \\ &= v_\eta^D(M)(c\tau+d)^k \sum_{i=0}^{s} F_i(\tau, z, tw) \big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^i \\ &= v_\eta^D(M)(c\tau+d)^k \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{m\geq 0} F_{i,m}(\tau, z) e^{2\pi i \frac{m}{Q} tw}\right) \big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^i, \end{aligned}$$

cette dernière égalité vient du fait que les F_i vérifient les deux premières propriétés de la définition, de plus les $F_{i,m}$ sont à croissance tempérées en τ : cela vient de cette même propriété appliquée à F_i et de la 1 périodicité en τ des $F_{i,m}$. Ainsi nous en déduisons l'égalité suivante :

$$f_m\left(M.<\tau>, \frac{z}{c\tau+d}\right) = v_\eta^D(M)(c\tau+d)^k \sum_{i=0}^{s} F_{i,m}(\tau,z)\big(\frac{c}{c\tau+d}\big)^i.$$

Il nous reste à montrer la propriété de transformation par rapport à L_0, mais la vérification est immédiate, il en va de même pour la nature du développement en série de Fourier. ∎

Nous allons maintenant voir deux moyens d'obtenir de telles fonctions : tout d'abord nous utiliserons un opérateur de dérivation et ensuite nous nous servirons de relèvements arithmétiques.

Commençons par la méthode utilisant l'opérateur de dérivation et définissons cet opérateur de la façon suivante :

$$\tilde{D} = 2\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\omega} - \frac{1}{t}\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_i},$$

comme dans le cas des formes quasi-modulaires de Jacobi, les $b_{i,j}$ désignent les coefficients de la matrice inverse de la matrice du réseau L_0. A priori cet opérateur envoie une forme quasi-modulaire pour $\widetilde{SO}^+(L_t)$ dans les fonctions holomorphes sur H_n^t, mais il est possible d'être plus précis :

Proposition 71 *L'opérateur $\tilde{D}$ envoie l'espace des formes quasi-modulaires de poids k et de profondeur s pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$ dans l'espace l'espace des formes quasi-modulaires de poids $k+2$ et de profondeur $s+1$ pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$.*

Preuve: Les calculs qu'il est nécessaire d'effectuer pour montrer la quasi-modularité sont similaires à ceux du cas de l'opérateur différentiel introduit pour les formes quasi-modulaires de Jacobi, par conséquent nous n'allons pas les refaire. Par contre nous allons nous intéresser à la transformation par rapport à L_0 ainsi qu'au développement de Fourier. La justification du développement de Fourier vient de l'existence d'un développement de Fourier pour la fonction à laquelle on applique l'opérateur, il suffit de montrer qu'il vérifie l'inégalité $\frac{2nmt}{Q^2} - t < l,l >\geq 0$. A cette fin, nous considérons le développement de Fourier de la fonction F à laquelle nous appliquons l'opérateur :

$$F(\tau,z,\omega) = \sum_{\substack{n,m\geq 0\\ l\in L_0^*\\ \frac{2nmt}{Q^2}-t<l,l>\geq 0}} a(n,l,m)q^{n/Q}s^{tm/Q}e^{2\pi it<l,z>_0},$$

ensuite, nous analysons l'action de l'opérateur sur les termes $a(n,l,m)q^{n/Q}s^{tm/Q}e^{2\pi it<l,z>_0}$:

$$\begin{aligned}&\tilde{D}(a(n,l,m)q^{n/Q}s^{tm/Q}e^{2\pi i<l,z>})\\ &=(\frac{2nmt}{Q^2} - t<l,l>)a(n,l,m)q^{n/Q}s^{tm/Q}e^{2\pi it<l,z>_0}\end{aligned}$$

La valeur du coefficient devant $q^n s^{tm} e^{2\pi i<l,z>}$ dans $\tilde{D}(F)$ ne dépend donc que de la valeur de $\frac{2nmt}{Q^2} - t < l,l >\geq 0$, par conséquent nous en déduisons l'invariance par rapport à l'action de L_0 ∎

Cette proposition nous donne donc un moyen de construire une forme quasi-modulaire pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$ à partir d'une forme modulaire pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$ et il est aussi possible de montrer que cet opérateur est injectif pour $k > 0$.
Nous allons maintenant donner un autre moyen de construire des formes quasi-modulaires pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$, c'est une méthode que nous avons déjà vu, il s'agit de relever des formes quasi-modulaires de Jacobi. La proposition que nous allons donner se limitera au cas où le caractère est trivial, mais cette proposition peut se généraliser aux caractères non triviaux en ajoutant des conditions de convergence :

Proposition 72 *Soit L_0 un réseau pair de rang r muni d'une forme quadratique positive et soit ϕ une forme quasi-modulaire de poids k, d'indice 1 et de profondeur s pour le réseau L_0 dont les coefficients de Fourier sont les $c(n, l)$. La fonction définie par :*

$$\tilde{V}(\phi)(\tau, z, \omega) = \sum_{m \geq 1} V_m(\phi)(\tau, z)e^{2\pi i m\omega} + c(0,0)G_k(\tau)$$

est une forme quasi-modulaire pour le groupe $\tilde{SO}^+(2\mathcal{U} \oplus L_1)$.

Preuve: La première chose à démontrer est la convergence de la série : pour cela il suffit de faire comme dans le cas du relèvement de formes modulaires de Jacobi, la présence de E_2 ne modifie en rien les arguments déjà utilisés. Il nous reste alors à vérifier les équations fonctionnelles. Nous avons pour $m \geq 1$:

$$V_m(\phi)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i m\frac{c<z,z>}{2(c\tau+d)}} \sum_{i=0}^{s} V_{m,i}(\phi)(\tau, z)\left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^i,$$

par conséquent nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}(\phi)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}, \omega - \frac{c<z,z>}{2(c\tau+d)}\right)\\
&= (c\tau+d)^k\left(\sum_{m\geq 1}\left(\sum_{i=0}^{s} e^{2\pi i m\frac{c<z,z>}{2(c\tau+d)}} V_{m,i}(\phi)(\tau,z)\right)e^{2\pi i m(t\omega - \frac{c<z,z>}{2(c\tau+d)})} + c(0,0)G_k(\tau)\right)\\
&= (c\tau+d)^k \sum_{i=0}^{s}\phi_i(\tau, z, t\omega),
\end{aligned}$$

avec :

$$\phi_i(\tau, z, t\omega) = \sum_{m\geq 1} V_{m,i}(\phi)(\tau, z)e^{2\pi i m t\omega} + \frac{c(0,0)}{s+1}G_k(\tau),$$

ces dernières fonctions convergent de par la convergence du terme de gauche dans les premières égalités, de plus elles sont à croissance tempérée en τ et ω : la première équation fonctionnelle est vérifiée. L'équation fonctionnelle concernant l'action de L_0 se prouve directement, de même pour le comportement du développement de Fourier. Enfin nous avons l'invariance par l'élément ϵ, ce dernier fait peut se voir en considérant l'expression explicite des coefficients de Fourier :

$$\tilde{V}(\phi)(\tau,z,\omega) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ r\in L_0^*\\ 2nm-<l,l>_0\geq 0}} \sum_{\substack{a|(n,l)\\ \frac{r}{a}\in L_0^*}} a^{k-1}c\left(\frac{nl}{a^2},\frac{r}{a}\right)q^n e^{2\pi i<z,r>}s^m$$
$$+\, c(0,0)\sum_{n\geq 0}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

La proposition est alors démontrée. ■

Pour terminer cette section, nous allons donner deux exemples de fonctions obtenues par cette méthode.
Ces fonctions sont les suivantes :

$$G_2(\tau,z,w) = \tilde{V}(-\frac{1}{24}G_2(\tau,z))$$
$$\tilde{G_2}(\tau,z,\omega) = \tilde{V}(-\frac{1}{24}\tilde{G_2}(\tau,z))$$

En $z=0$ ces deux fonctions sont égales à $G_2(\tau)G_2(\omega)$, de plus en considérant les développements de Taylor à l'ordre suivant nous remarquons qu'elles ne sont pas égales. Par conséquent, la fonction $G_2(\tau,z,w)-\tilde{G_2}(\tau,z,\omega)$ est non identiquement nulle, quasi-modulaire et elle vaut 0 en $z=0$, pourtant elle n'est pas divisible par ϕ_{10}. Nous observons par la même occasion que l'inégalité $2s\leq k$ n'est plus vérifiée.

5.3 Développements en série de Taylor

Dans cette section, nous allons étudier deux types de développement de Taylor des formes modulaires pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$ en $z=0$ et à cette fin nous allons utiliser l'écriture de ces fonctions faisant intervenir leur coefficients de Fourier-Jacobi. Nous reprenons les notations que nous avons précédemment introduites et nous commençons par les développement de Taylor faisant intervenir toutes les variables.

5.3.1 Par rapport à toutes les variables

La proposition suivante va nous donner le comportement des coefficients de Taylor en $z=0$ d'une forme modulaire pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$:

Proposition 73 *Soit F une forme modulaire poids k pour le groupe $\widetilde{SO}(L_t)^+$ et pour le caractère induit sur $SL(2,\mathbb{Z})$ par v_η^D, D un entier positif,de conducteur Q. La fonction F se développe en série de Taylor en $z=0$ de la façon suivante :*

$$F(\tau,z,t\omega) = \sum_{k_1,..,k_n\geq 0} f_{k_1,..,k_n}(\tau,t\omega)z_1^{k_1}..z_n^{k_n},$$

où les $f_{k_1,..,k_n}(\tau,\omega/t)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $k+k_1+..+k_n$ et de profondeur au plus $\frac{1}{2}(k_1+..+k_n)$ pour $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$ et pour le caractère $v_\eta^D\times v_\eta^D$. De plus si F est invariante par rapport à ϵ alors les $f_{k_1,..,k_n}(\tau,\omega/t)$ sont symétriques et F est anti-invariante, alors les $f_{k_1,..,k_n}(\tau,\omega/t)$ sont antisymétriques.

Preuve: Nous avons vu que F peut s'écrire sous la forme :

$$F(\tau, z, t\omega) = \sum_{m\geq 0} f_{mt}(\tau, z)e^{2\pi imt\omega/Q}$$
$$F(\tau, z, t\omega) = \sum_{m\geq 0} g_m(t\omega, z)e^{2\pi im\tau/Q}$$

où les f_{mt} sont des formes modulaires de Jacobi pour le réseau L_0 de poids k et d'indice tm/Q pour le caractère v_η^D : pour cela, il suffit d'écrire les lois de transformations par rapport à $SL(2,\mathbb{Z})$. La transformation $(\tau, z, \omega) \to (\omega, z, \tau/t)$ nous fournit aussi l'égalité suivante :

$$f_{mt}(t\omega, z) = \pm g_m(t\omega, z)$$
$$f_{mt}(\tau, z) = \pm g_m(\tau, z)$$

Maintenant nous allons utiliser ce que nous connaissons sur le développement de Taylor en $z = 0$ et par rapport à toutes les variables d'une forme modulaire de Jacobi définie relativement à un réseau :

$$f_{mt}(\tau, z) = \sum_{k_1,..,k_n\geq 0} q_{m,k_1,..k_n}(\tau)z^{k_1}..z^{k_n},$$

où les $q_{m,k_1,..k_n}(\tau)$ sont des formes quasi-modulaires de poids $k+k_1+..+k_n$ et de profondeur au plus $\frac{1}{2}(k_1 + .. + k_n)$ pour le système multiplicatif v_η^D . Nous en déduisons l'écriture suivante :

$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{k_1,..,k_n\geq 0} (\sum_{m\geq 0} q_{m,k_1,..k_n}(\tau)e^{2\pi imt\omega/Q})z^{k_1}..z^{k_n}$$
$$F(\tau, z, \omega) = \sum_{k_1,..,k_n\geq 0} (\sum_{m\geq 0} q_{m,k_1,..k_n}(t\omega)e^{2\pi im\tau/Q})z^{k_1}..z^{k_n}.$$

Ces égalités nous amènent naturellement à la conclusion désirée en s'appuyant sur ce que nous avons déjà fait dans le cas des formes modulaires de Siegel de genre 2.
■

De la même façon, nous pouvons démontrer que les coefficients de Taylor en $z = 0$ d'une forme quasi-modulaire de poids k et de profondeur s pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$ sont des formes quasi-modulaires de poids $k + k_1 + .. + k_n$ et de profondeur au plus $s + \frac{1}{2}(k_1 + .. + k_n)$ pour $SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$.
Nous allons à présent retrouver les formules que nous connaissons pour $\mathbb{A}_1$ dans le cas des relèvements arithmétiques. Les démonstrations étant les mêmes que dans le cas du réseau $\mathbb{A}_1$, nous nous contenterons de donner les énoncés des propositions :

Proposition 74 *Soit k un entier et ϕ une forme modulaire de Jacobi pour L_0 dont les développements de Fourier et de Taylor sont respectivement :*

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}, l\in L_0^* \\ 2n-<l,l>\geq 0}} f(n, l)e^{2\pi in\tau}e^{2\pi(l,z)}$$
$$\phi(\tau, z) = \sum_{k_1,..,k_n\geq 0} \phi_{k_1,..,k_n}(\tau)z_1^{k_1}..z_n^{k_n}$$

Si $f(0,0)$ est non nul, nous supposons de plus que $k \geq 4$. Alors la fonction :

$$V(\phi) = f(0,0)G_k(\tau) + \sum_{m \geq 1} V_m(\phi)(\tau, z)e^{2\pi i\omega}$$

est bien définie sur H_n et c'est une forme modulaire de poids k pour $\widetilde{SO}(2\mathcal{U} \oplus L_1(-t))^+$. De plus nous connaissons l'expression de ces coefficients de Taylor en $z = 0$:

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \sum_{k_1,..,k_n \geq 0} f(\tau, \omega)z_1^{k_1}..z_n^{k_n} \\
f_{0,..,0}(\tau, \omega) &= f(0,0)G_k(\tau) + \sum_{m \geq 1} T(m)(\phi_{0,..,0}(\tau))e^{2\pi im\omega} \\
f_{k_1,..,k_n}(\tau, \omega) &= \sum_{m \geq 1} T(m)(\phi_{k_1,..,k_n}(\tau))e^{2\pi im\omega}, k_1 + .. + k_n > 0
\end{aligned}$$

Proposition 75 *Soit k un entier, D un entier positif divisant 24 et $Q = 24/D$. Soit ϕ une forme modulaire faible de Jacobi sur le réseau L_0 cuspidale de poids k, d'indice t et de système multiplicatif v_η^D de conducteur Q. Alors la fonction :*

$$Lift_1(\phi)(\tau, z, \omega) = \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 1[Q]}} m^{2-k}T_l(\phi)(\tau, z)e^{2\pi imt\omega}$$

est bien définie sur H_n, c'est une forme modulaire de poids k pour $\widetilde{SO}(L_{tQ})^+$ et pour le système multiplicatif induit sur $SL(2, \mathbb{Z})$ par v_η^D et elle est vérifie :

$$Lift_1(\phi)(V_{Qt}. < \tau, z, \omega >) = (-1)^k Lift_1(\phi)(\tau, z, \omega)$$

Autrement dit sur H_n^t, elle définit une forme modulaire pour $\widetilde{SO}(L_t)^+$. De plus nous avons les relations suivantes pour ses coefficients de Taylor en $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(\tau, z) &= \sum_{k_1,..,k_n \geq 0} \phi_{k_1,..,k_n}(\tau)z_1^{k_1}..z_n^{k_n} \\
Lift_1(\phi)(\tau, z, \omega) &= \sum_{k_1,..,k_n \geq 0} f_n(\tau)z_1^{k_1}..z_n^{k_n} \\
f_{k_1,..,k_n}(\tau, \omega) &= \sum_{m>0, m \equiv 1[Q]} T(m)(\phi_{k_1,..,k_n})(\tau)e^{2\pi imt\omega}
\end{aligned}$$

Comme dans le cas du réseau $\mathbb{A}_1$, nous pouvons écrire le même type de proposition pour en remplaçant $Lift_1$ par $Lift_\mu$ où μ est premier à Q. De plus en rajoutant des arguments de convergence nous pouvons nous passer de la condition de parabolicité. Mais dans tout les cas l'expression des coefficients est la même, sauf pour f_0 où elle est vraie à un facteur modulaire près.

Nous pourrions traiter le cas du relèvement exponentiel, sa forme nous permet de déterminer des développements de Taylor en $z = 0$ dans des cas particuliers mais une expression générale est plus délicate à établir. En effet, la difficulté vient de la présence du terme :

$$\theta(\tau, < l, z >) = \theta(\tau, \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} z_i l_j)$$
$$l = (l_1, .., l_n),$$

mais la forme de correction holomorphe dont nous avons parlé nous permet de faire les calculs dans les cas particuliers.

5.3.2 Utilisation de l'inclusion $L_1 \oplus L_2 \subset L_0$

Nous supposons que L_0 est de rang $n = n_1 + n_2$ et qu'il contient deux sous-réseaux L_1 et L_2 de rangs respectifs n_1 et n_2. Un élément z de $\mathbb{C} \otimes L_0$ sera noté (u, v) dans la concaténation des bases de $\mathbb{C} \otimes L_1$ et $\mathbb{C} \otimes L_2$, nous avons donc $u \in \mathbb{C} \otimes L_1$ et $v \in \mathbb{C} \otimes L_2$. Nous allons décrire la nature des coefficients de Taylor en $y = 0$ ou $x = 0$ d'une forme modulaire sur $\widetilde{SO}(L_t)^+$, puis nous donnerons leur expression dans le cas des relèvements arithmétiques.

Proposition 76 *Soit F une forme modulaire poids k pour le groupe $O(L_t)^+$ et pour le caractère induit sur $SL(2, \mathbb{Z})$ par v_η^D, D un entier positif, de conducteur Q. La fonction F se développe en série de Taylor en $z = 0$ de la façon suivante :*

$$F(\tau, x, y, \omega) = \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0} f_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau, x, \omega) y_1^{k_1} .. y_{n_2}^{k_{n_2}},$$

Les fonctions $f_{k_1,..,k_{n_2}}$ sont des formes quasi-modulaires de poids $k + k_1 + .. + k_{n_2}$ et de profondeur au plus $\frac{1}{2}(k_1 + .. + k_{n_2})$ pour $\tilde{SO}(2\mathcal{U} \oplus L_1(-t))$ et le système multiplicatif v_η^D sur la représentation $H_{n_1}^t$ de $2\mathcal{U} \oplus L_1(-t)$.

Preuve: Pour montrer cette décomposition, nous allons nous placer dans $H_{n_1}^t$ et d'après les équations fonctionnelles nous pouvons écrire :

$$F(\tau, z, t\omega) = \sum_{m\geq 0} f_{mt}(\tau, z) e^{2\pi imt\omega/Q}$$
$$F(\tau, z, t\omega) = \sum_{m\geq 0} g_m(t\omega, z) e^{2\pi im\tau/Q}$$
$$f_{mt}(t\omega, z) = \pm g_m(t\omega, z)$$
$$f_{mt}(\tau, z) = \pm g_m(\tau, z),$$

où les f_{mt} sont des formes modulaires de Jacobi pour le réseau L_0 de poids k et d'indice tm/Q pour le caractère v_η^D. Comme nous l'avons pécédemment les fonctions f_{mt} peuvent se décomposer de la façon suivante :

$$f_{mt}(\tau, z) = \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0} f_{mt,k_1,..,k_{n_2}}(\tau, x) y_1^{k_1} .. y_{n_2}^{k_{n_2}}.$$

Par conséquent, nous en déduisons deux écritures de F :

$$\begin{aligned} F(\tau,z,t\omega) &= \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0}\left(\sum_{m\geq 0} f_{mt,k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x)e^{2\pi imt\omega/Q}\right)y_1^{k_1}..y_{n_2}^{k_{n_2}} \\ &= \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0}\left(\sum_{m\geq 0} f_{mt,k_1,..,k_{n_2}}(t\omega,x)e^{2\pi im\tau/Q}\right)y_1^{k_1}..y_{n_2}^{k_{n_2}} \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure à partir de ces égalités : les $f_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x,\omega)$ ont pour coefficients de Fourier-Jacobi des formes quasi-modulaires de poids $k+k_1+..+k_{n_2}$ de profondeur s, autrement dit ces fonctions sont des formes quasi-modulaires de poids $k+k_1+..+k_{n_2}$ de profondeur s pour $\widetilde{SO}(2\mathcal{U}\oplus L_1(-t))$. ■

Dans le cas des relèvements arithmétiques, nous connaissons l'expression des coefficients de Taylor dans le développement par rapport aux termes de L_1 ou L_2 :

Proposition 77 *Nous nous plaçons dans le même contexte que la deuxième proposition de la partie précédente. Supposons que la fonction ϕ s'écrivent :*

$$\phi(\tau,x,y) = \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0}\varphi_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x)y_1^{k_1}..y_{n_2}^{k_{n_2}},$$

alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} V(\phi)(\tau,x,y,\omega) &= \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0} f_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x,\omega)y_1^{k_1}..y_{n_2}^{k_{n_2}} \\ f_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x,\omega) &= \sum_{m\geq 1} V_m(\varphi_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x))e^{2\pi im\omega}, k_1+..+k_{n_2}>0 \\ f_{0,..,0}(\tau,x,\omega) &= f(0,0)G_k(\tau)+\sum_{m\geq 1} V_m(\varphi_{0,..,0}(\tau,x))e^{2\pi im\omega} \end{aligned}$$

Proposition 78 *Nous nous plaçons dans le même contexte que la troisième proposition de la partie précédente. Supposons que la fonction ϕ s'écrivent :*

$$\phi(\tau,x,y) = \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0}\varphi_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x)y_1^{k_1}..y_{n_2}^{k_{n_2}},$$

alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} V(\phi)(\tau,x,y,\omega) &= \sum_{k_1,..,k_{n_2}\geq 0} f_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x,\omega)y_1^{k_1}..y_{n_2}^{k_{n_2}} \\ f_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x,\omega) &= \sum_{m\geq 1} V_m(\varphi_{k_1,..,k_{n_2}}(\tau,x))e^{2\pi im\omega}, k_1+..+k_{n_2}>0 \\ f_{0,..,0}(\tau,x,\omega) &= f(0,0)G_k(\tau)+\sum_{m\geq 1} V_m(\varphi_{0,..,0}(\tau,x))e^{2\pi im\omega} \end{aligned}$$

Nous ne donnons pas la démonstration, elle repose sur des arguments que nous avons déjà évoqués. Pour les autres relèvements artihmétiques, nous ne formulons pas la proposition mais les expressions des coefficients sont les mêmes que dans la proposition précédente, il suffit d'utiliser les opérateurs de Hecke qui conviennent au cas que l'on traîte.

5.3.3 Un exemple

Pour finir cette partie et ce chapitre, nous allons illustrer les paragraphes précédents par les calculs des coefficients de $F_{\Delta a_{-3,1}} = Lift_1(\Delta a_{-3,1})$: c'est une forme modulaire de poids 9 pour $\widetilde{SO}(2\mathcal{U} \oplus L_1(-t))^+$. Utilisons l'écriture suivante :

$$F_{\Delta a_{-3,1}}(\tau, z, \omega) = \sum_{n_1, n_2} f_{n_1,n_2}(\tau, \omega) z_1^{n_1} z_2^{n_2}.$$

En nous servant des calculs faits au chapitre précédent et les propositions du paragraphe précédent, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&f_{2,1}(\tau, \omega) = -(2\pi i)^3 \Delta(\tau)\Delta(\omega) \\
&f_{1,2}(\tau, \omega) = (2\pi i)^3 \Delta(\tau)\Delta(\omega) \\
&f_{1,4}(\tau, \omega) = -2i(2\pi i)^5(-24)G_2(\tau)G_2(\omega)\Delta(\tau)\Delta(\omega) \\
&f_{4,1}(\tau, \omega) = 2i(2\pi i)^5(-24)G_2(\tau)G_2(\omega)\Delta(\tau)\Delta(\omega) \\
&f_{3,2}(\tau, \omega) = -2i(2\pi i)^5(-24)G_2(\tau)G_2(\omega)\Delta(\tau)\Delta(\omega) \\
&f_{2,3}(\tau, \omega) = 2i(2\pi i)^5(-24)G_2(\tau)G_2(\omega)\Delta(\tau)\Delta(\omega) \\
&f_{1,6}(\tau, \omega) = i(2\pi i)^7 \Delta(\tau)\Delta(\omega)\Big(-\frac{70}{3}G_4(\tau)G_4(\omega) + 1248 G_2(\tau)^2 G_2(\omega)^2 \\
&- 40(G_2(\omega)^2 G_4(\tau) + G_2(\tau)^2 G_4(\omega))\Big) \\
&f_{2,5}(\tau, \omega) = -f_{1,6}(\tau, \omega) \\
&f_{6,1}(\tau, \omega) = -(2\pi i)^7 \Delta(\tau)\Delta(\omega)\Big(-\frac{10}{3}G_4(\tau)G_4(\omega) + 1248 G_2(\tau)^2 G_2(\omega)^2 \\
&- 40(G_2(\omega)^2 G_4(\tau) + G_2(\tau)^2 G_4(\omega))\Big) \\
&f_{5,2}(\tau, \omega) = -f_{6,1}(\tau, \omega) \\
&f_{3,4}(\tau, \omega) = i(2\pi i)^7 \Delta(\tau)\Delta(\omega)\Big(2496 G_2(\tau)^2 G_2(\omega)^2 - \frac{260}{3}G_4(\tau)G_4(\omega) \\
&- 80(G_2(\omega)^2 G_4(\tau) + G_2(\tau)^2 G_4(\omega))\Big) \\
&f_{4,3}(\tau, \omega) = -f_{3,4}(\tau, \omega)
\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi donner des informations sur le premier coefficient dans le développement par rapport à y_1 :

$$Lift_1(\Delta a_{-3,1}) = \sum_{n_1 \geq 0} a_{n_1}(\tau, y_2, \omega) y_1^n,$$

le terme a_{n_1} peut en fait s'écrire :

$$a_{n_1}(\tau, y_2, \omega) = Lift_1\Big(\frac{i}{\eta(\tau)^9}\theta(\tau, y_2)^2\theta(\tau, 2y_2)\Big)(\tau, z, \omega),$$

on obtient alors une forme modulaire de Siegel de poids 9 pour le groupe Γ_4^+.
En guise d'exemples, nous pouvons aussi faire le lien avec la thèse de Benoît Grandpierre [Gra9] : en utilisant les mêmes méthodes que plus haut, nous pouvons calculer les premiers coefficients de Taylor en $z = 0$ des formes modulaires réflexives que ce dernier construit dans sa thèse.

Bibliographie

[B. 06] B. Heim, *On the Spezialschar of Maass*, arXiv.org :0801.1804,preprint MPI-bonn(2006), 2006.

[Bor95] R. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products.*, Invent. Math. **120** (1995), 161–213.

[Bor98] Borcherds, R., *Automorphic forms with singularities on Grassmannians.*, Invent. Math. **132** (1998), no. 3, 491–562.

[Cle9] Clery,F. , *Relèvement arithmétique et multiplicatif de formes de Jacobi(thèse de doctorat de l'université de Lille 1)*, Université de Lille 1,174p, 2009 .

[Coh75] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters.*, Math. Ann. **217** (1975), 271–285.

[Des06] C. Desreumaux, *Construction de formes automorphes réflectives sur un espace de dimension 4*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux **18 :1** (2006), 89–111.

[EZ85] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms.*, Progress in Mathematics, Vol. 55. Boston-Basel-Stuttgart : Birkhäuser. V, 148 , 1985 (English).

[Fre83] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen.*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 254. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. , 1983.

[Gra9] Grandpierre,B., *Produits automorphes, classification des réseaux et théorie du codage(thèse de doctorat de l'université de Lille 1)* , Université de Lille 1,150p , 2009 .

[Gri94] Gritsenko,V., *Modular forms and moduli spaces of abelian and $K3$ surfaces.*, St. Petersbg. Math. J. **6** (1994), no. 6, 1179–1208.

[Gri99] ______, *Complex vector bundles and Jacobi forms*, Proceedings of RIMS Symposium **1103** (1999), 71–86.

[HBJ92] F. Hirzebruch, T. Berger, and R. Jung, *Manifolds and modular forms. transl. by peter s. landweber.*, Aspects of Mathematics. E 20. Wiesbaden : Friedr. Vieweg. xi, 211 p., 1992.

[H.M08] H.Movasati, *On differential modular forms and some analytic relations between eisenstein series*, Ramanujan Journal **17** (2008), 53–76.

[Igu62] Igusa,J., *On Siegel Modular Forms for Genus Two*, American Journal of Mathematics **84** (1962), 175–200.

[Igu67] ———, *Modular Forms and Projective Invariants*, American Journal of Mathematics **89** (1967), 817–855.

[Kob84] N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Springer-Verlag, 1984.

[KZ95] M. Kaneko and D. Zagier, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms.*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math. **129** (1995), 165–172.

[Maa79a] H. Maaß, *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades.*, Inventiones Mathematicae **52** (1979), 95–104.

[Maa79b] ———, *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades II.*, Inventiones Mathematicae **53** (1979), 249–253.

[MR05] F. Martin and E. Royer, *Formes modulaires et périodes*, Séminaires et congrès **12** (2005), 1–118.

[Ser70] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Presses Universitaires de France, 1970.

[V. 91] V. Gritsenko , *Fourier-Jacobi functions of n variables*, J.Soviet Math **53** (1991), 243–252.

[V. 94] ———, *Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces*, International Mathematics Research Notices (1994), no. 6, 235–243.

[V. 95] V. Gritsenko and V. Nikulin, *Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras*, Amer. Journal of Math **119** (1995), 181–224.

[V. 96a] ———, *Automorphic Forms and Lorentzian Kac–Moody Algebras. Part I*, International J.Math **9 :2** (1996), 153–199.

[V. 96b] ———, *Automorphic Forms and Lorentzian Kac-Moody Algebras. Part II*, International J. Math **9 :2** (1996), 201–275.

[V. 96c] ———, *The Igusa modular forms and "the simplest" Lorentzian Kac–Moody algebras*, Matem. Sbornik **187** (1996), 1601–1643.

[V. 07] V. Gritsenko and K. Hulek and G. K. Sankaran, *The Kodaira dimension of the moduli of K3 surfaces*, Inventiones Mathematicae **169** (2007), 215–241.

[V. 08] V. Gritsenko and F. Clery, *The Siegel modular forms of genus 2 with the simplest divisor*, arXiv.org :0812.3962, preprint MPI-Bonn 116(2008) 35p, 2008.

[Zag77] D. Zagier, *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields.*, Modular Funct. of one Var. VI, Proc. int. Conf., Bonn 1976, Lect. Notes Math. 627, 105-169, 1977.

[Zag91] Zagier,D., *Periods of modular forms and Jacobi theta functions.*, Invent. Math. **104** (1991), no. 3, 449–465.

Résumé

Le premier exemple de formes quasi-modulaires est la série d'Eisenstein G_2, qui est une forme quasi-modulaire pour $SL(2,\mathbb{Z})$ et qui joue un rôle fondamental dans la structure de ces formes. En particulier, ces formes apparaissent quand on étudie les développements de Taylor par rapport à la variable abélienne des formes modulaires de Jacobi.
Dans cette thèse, nous décrivons de nouvelles formes quasi-modulaires en plusieurs variables : les formes quasi-modulaires pour $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$ et les formes quasi-modulaires sur les groupes orthogonaux. Les premières sont associées aux développements de Taylor des formes modulaires de Siegel. Les secondes apparaissent lors de l'étude des coefficients de Taylor en certains points des formes modulaires pour un réseau quadratique de signature $(2,n)$.
Nous menons des calculs explicites dans le cas des formes modulaires de Siegel pour les groupes paramodulaires en donnant les premiers coefficients de Taylor en $z=0$ des formes modulaires fondamentales $\Delta_{1/2}$ (la série théta de Siegel de caractéristique 2), Δ_1, Δ_2, Δ_5 et Δ_{35}(les deux dernières sont les formes modulaires d'Igusa) et quelques autres formes reflexives introduites par V.Gritsenko et V.Nikulin dans la théorie des algèbres de Kac-Moody hyperboliques.
Les formes modulaires en question sont aussi importantes dans la géométrie algébrique (la théorie des espaces de modules des surfaces abéliennes et des surfaces de Kummer) et dans la physique (la théorie de cordes). Les développements de Taylor des formes modulaires sur les groupes orthogonaux $O(2,n)$ jouent par exemple un rôle important dans la théorie des espaces de modules des surfaces $K3$ polarisées.

Mots clés : développement en série de Taylor, formes modulaires de Jacobi, formes modulaires de Siegel, formes modulaires pour les groupes orthogonaux, formes quasi-modulaires.

