

N° d'ordre : 40102

THESE

Présentée à

**L'UNIVERSITE des SCIENCES et TECHNOLOGIE de LILLE
(LILLE 1)**

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR en ELECTRONIQUE

Par

Samuel LEMAN

(Ingénieur de l'école Polytech'Lille)

le 13 novembre 2009

**Contribution à la Résolution de Problèmes de
Compatibilité Electromagnétique par le Formalisme des
Circuits Electriques de *KRON***

Membres du jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Mr Alain REINEIX	Directeur de Recherche CNRS <i>Xlim, Limoges</i>
	Mr Jean-Marc DIENOT	Professeur <i>IUT de Tarbes</i>
<i>Examineurs :</i>	Mme Odile PICON	Professeur <i>ESYCOM, Marne la Vallée</i>
	Mr Philippe BESNIER	Chargé de Recherches HDR CNRS <i>INSA de Rennes</i>
	Mr Marco KLINGLER	Expert CEM <i>PSA-Peugeot Citroen, Vélizy</i>
<i>Directeur de Thèse :</i>	Mr Bernard DEMOULIN	Professeur émérite <i>USTL, IEMN/Telice, Villeuneuve d'Ascq</i>
<i>Invités :</i>	Mr Patrick HOFFMANN	Ingénieur <i>Centre d'Etudes de Gramat, Gramat</i>
	Mr Olivier MAURICE	Ingénieur <i>GERAC, Trappes</i>

A mes parents,

Mon frère,

Ma sœur,

Mélodie.

Remerciements

Ces travaux, financés par la Délégation Générale pour l'Armement (*DGA*), ont été réalisés au sein du groupe *TELICE* (Télécommunications, Interférences et Compatibilité Electromagnétique) du laboratoire *IEMN* (Institut d'électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie) de l'Université de Lille 1, et en collaboration et avec l'appui d'un nombre important de personnes que je tiens particulièrement à remercier.

Je commencerai naturellement par mon directeur de thèse Monsieur le Professeur émérite *Bernard DEMOULIN*, responsable *CEM* du groupe *TELICE*. Je le remercie pour sa grande disponibilité et pour la qualité de ses conseils scientifiques qui m'ont à chaque fois apportées la base et la motivation nécessaire à l'avancement de mes travaux de recherche. Je le remercie d'autant plus qu'il me fait l'immense honneur de diriger la dernière thèse de sa carrière si impressionnante.

Je remercie mon correspondant *DGA*, Monsieur *Patrick HOFFMANN*, ingénieur au centre d'étude de Gramat, pour la collaboration très enrichissante que nous avons établie grâce à ses compétences, son dynamisme et à son charisme.

Je tiens ensuite à exprimer ma grande reconnaissance à Monsieur *Olivier MAURICE*, ingénieur au *GERAC* qui, en plus de m'avoir apporté de précieux conseils scientifiques sur la méthode de *KRON*, a toujours montré une grande disponibilité (même le week-end) et un grand enthousiasme par rapport à l'avancée de mes travaux.

Je remercie très chaleureusement Monsieur *Alain REINEIX*, directeur de recherche *CNRS* au laboratoire *XLIM* de Limoges pour ses précieux conseils scientifiques, pour sa grande gentillesse et également pour avoir accepté le travail de rapporteur malgré son emploi du temps très chargé.

Mes remerciements s'adressent ensuite à Monsieur *Jean-Marc DIENOT*, professeur à l'IUT de Tarbes, pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail en qualité de rapporteur.

Je remercie Madame *Odile PICON*, professeur à l'Université de Marne la Vallée et Directrice du laboratoire *ESYCOM*, de présider le jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur *Marco KLINGLER*, expert en *CEM* chez *PSA-Peugeot Citroën* à Vélizy et Monsieur *Philippe BESNIER*, chargé de recherches HDR à l'*INSA* de Rennes qui ont tous deux acceptés d'évaluer cette thèse en qualité d'examineurs.

Ces trois années de thèse se sont principalement déroulées au sein du groupe *TELICE* de l'*IEMN*. J'en remercie donc sa nouvelle directrice, le Professeur *Martine LIENARD* ainsi que son ancien directeur, le Professeur *Pierre DEGAUQUE*. Je remercie ensuite tous les permanents de l'équipe qui ont su apporter bien plus que de nombreux moments de détente autour d'un café. D'abord, Monsieur *Lamine KONE* sans qui les mesures expérimentales n'auraient pas pu être aussi précises et pour ses nombreux conseils scientifiques, mais aussi Madame *Sylvie BARANOWSKI* pour la relecture de ma thèse, *Virginie DEGARDIN*, *Pierre LALY*, *Eric SIMON*, *Davy GAILLOT*, *Christian SEMET*, *Daniel DEGARDIN* et *Emmanuelle GILLMANN*.

Je remercie également les différents thésards et post-doc de l'équipe qui ont tous contribué à une ambiance de travail sympathique et motivante : *Youssef BOURI*, *Nedim BEN-SLIMEN*, *Hamid OUADDI*, *Abdou NASR*, *Tarrik HAMMI*, *Michael MORELLE* et pour finir mon entraîneur de sport particulier, *Paul STEFANUT*.

Je remercie ensuite les mécaniciens *Jean-Claude* et *Christophe* ainsi que *Jocelyne* qui a assuré la reprographie de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent maintenant aux nombreuses personnes qui se demandent encore ce que signifie l'abréviation *CEM*, mais qui ont largement contribué à la réussite de ce travail en m'encourageant tout au long de ces trois années de thèse et en me permettant notamment de surmonter certains moments difficiles.

Je commence par remercier ma maman pour m'avoir légué sa passion pour la musique et pour son courage de m'avoir supporté pendant ces 26 années d'étude! Merci également à François pour son courage extraordinaire.

Je remercie ensuite mon papa pour m'avoir légué sa passion pour les sciences, pour son aide précieuse et pour sa disponibilité permanente. J'adresse également un grand merci à Dominique pour sa gentillesse et son aide précieuse.

Puisqu'il lit dans mes pensées, je n'ai pas besoin d'utiliser de mots pour remercier *Adrien*, mon frère jumeau également thésard à France Telecom. Au même titre, je tiens finalement à remercier affectueusement ma petite sœur *Mathilde*.

Mes remerciements suivants s'adressent à tous mes amis que je ne pourrai citer sans en oublier une grande partie : *Manu*, *Julien*, *Clément*, *Arnaud*, *Gautier*, *Printz*, *Florine*, *Lootens*, *Delphine*, *Agathe*, *François*, *Gwen*, *Nora* et ma belle sœur *Amandine*. Je remercie particulièrement *Perrine* pour son soutien dans les moments les plus difficiles et forcément la mention spéciale à *Baron*, mon célèbre acolyte !

Mes derniers remerciements reviennent enfin à celle qui, en plus de m'avoir accompagné dans les hauts et les bas de ces travaux de recherche, m'a apporté d'innombrables instants de bonheur tout au long de cette thèse. Merci *Mérodie*.

Table des matières

Introduction générale.....	13
Chapitre I : Etat de l’art de l’analyse de problèmes de CEM appliqués aux grands systèmes.....	19
I.1 Problème à résoudre.....	21
I.2 Position des méthodes numériques applicables à un grand système	23
I.2.1 Outils basés sur la résolution numérique des équations de Maxwell :..	24
I.2.1.1 Outils basés sur la résolution exacte des équations.....	24
I.2.1.2 Outils basés sur des résolutions approchées des équations	26
I.2.2 Outil basé sur la théorie des circuits électriques équivalents.....	27
I.2.2.1 Concept d’éléments localisés :	30
I.2.2.2 Formalisme des lignes de transmission	36
I.2.3 Description topologique des couplages EM.....	43
I.2.3.1 Principe physique de l’assemblage topologique	43
I.2.3.2 Constitution du graphe topologique	44
I.2.3.3 Description topologique d’un réseau de câbles multiconducteurs arborescents	47
I.2.3.4 Ondes progressives et rétrogrades	47
I.2.3.5 Les tubes	48
I.2.3.6 Les jonctions	49
I.2.3.7 L’équation B.L.T	50
I.2.3.8 Exemple de modélisation par l’équation BLT.....	51
I.3 Limites de ces méthodes	52
I.4 Avantage de l’analyse tensorielle des réseaux de G.Kron appliquée à la CEM	53

Chapitre II	Principes fondamentaux de l'analyse tensorielle des réseaux électriques appliquée à la CEM des systèmes complexes.....	55
II.1	Analyse topologique des circuits électriques.....	58
II.2	Descriptif des grandeurs manipulées	60
II.2.1	Les objets et opérateurs.....	61
II.2.2	Notion d'algèbre tensorielle.....	66
II.2.2.1	Formes linéaires ou tenseur d'ordre un	66
II.2.2.2	Formes bilinéaires ou tenseurs d'ordre deux.....	68
II.2.2.3	Tenseurs d'ordre supérieur	70
II.2.2.4	Opérations sur les tenseurs	71
II.3	Changement de base et changement d'espace	72
II.3.1	Changement de base.....	73
II.3.1.1	Transformation d'une base des mailles vers une autre.....	73
II.3.1.2	De l'espace des mailles vers l'espace des moments.....	75
II.3.2	Changement d'espace (Méthode de Kron)	77
II.3.2.1	De l'espace des branches vers l'espace des mailles	77
II.3.2.2	De l'espace des branches vers l'espace des paires de nœuds.....	79
II.3.2.3	De l'espace des mailles vers l'espace des réseaux	81
II.4	Interactions entre les réseaux	83
II.4.1	Interconnexions ou couplages en mode conduit	83
II.4.2	Couplages multiphysiques entre réseaux	85
II.4.2.1	Le couplage en champ électrique	86
II.4.2.2	Le couplage en champ magnétique	88
II.4.2.3	Le couplage en champ lointain.....	91
II.4.2.4	Le couplage thermique	95
II.5	Résolution globale des super-tenseurs	105
II.6	Condition de validité de la méthode de Kron	106

Chapitre III : Quantification des interactions EM	107
III.1 Modélisation d'une ligne de transmission par la MKCE.....	109
III.1.1 Modélisation d'un élément de ligne.....	109
III.1.2 Connexion des éléments de ligne.....	113
III.1.3 Résultats expérimentaux et simulés de la réponse d'une ligne de transmission	115
III.2 Couplage par diaphonie entre deux lignes parallèles	117
III.2.1 Couplage électrique dans l'espace des branches.	120
III.2.2 Couplage magnétique dans l'espace des mailles	121
III.2.3 Simulation et mesure de la réponse d'un couplage par diaphonie... ..	123
III.3 Analyse d'un assemblage de câbles par la méthode de Kron.....	127
III.3.1 Etude de deux lignes couplées de dimensions différentes	127
III.3.2 Etude d'un réseau à trois lignes de transmission couplées	131
III.4 Analyse d'un réseau de câbles en mode différentiel	133
III.4.1 Une ligne de transmission en mode différentiel	133
III.4.2 Couplage par diaphonie en mode différentiel.....	135
III.5 Insertion de l'analyse modale dans la MKCE	137
III.5.1 Principes fondamentaux	138
III.5.2 Adaptation au formalisme tensoriel	139
III.5.3 Couplage par diaphonie simulé par la MKCE dans la base modale	140
III.6 Traitement des câbles blindés	143
III.6.1 Insertion des câbles blindés.....	144
III.6.2 Analyse d'un blindage à perte par la MKCE	146
III.7 Restitution du couplage exercé entre deux antennes	149
III.7.1 Couplage électrique entre deux monopoles	149
III.7.1.1 Couplage faible	152
III.7.1.2 Couplage fort.....	153
III.7.2 Interaction magnétique.....	155
III.7.2.1 Couplage faible	156
III.7.2.2 Couplage fort.....	156
III.8 Agression d'une ligne par un champ électromagnétique.....	157

Chapitre IV : Application de la MKCE à des systèmes complexes.....	159
IV.1 Simulation de deux antennes couplées via une cavité métallique	161
IV.1.1 Description géométrique du système couplé	161
IV.1.2 Agencement topologique du système	163
IV.1.3 Mise en place de la connexion des sous-réseaux	169
IV.1.4 Mise en place de l'interaction E.M. des volumes topologiques	171
IV.1.5 Confrontation de la simulation aux mesures.....	172
IV.1.6 Conclusion.....	175
IV.2 Application de la MKCE au couplage électrothermique.....	176
IV.2.1 Analyse de la propagation électrique	177
IV.2.2 Analyse temporelle de la diffusion thermique	179
IV.2.2.1 Mise en place de l'équation de la chaleur	179
IV.2.2.2 Recherche des solutions analytiques de référence	182
IV.2.2.3 Recherche d'une analogie électrique avec la diffusion thermique	186
IV.2.2.4 Analyse numérique de la diffusion thermique par la MKCE ...	188
IV.3 Formulation du couplage électrothermique par la MKCE	204
IV.3.1 Introduction du couplage par des fém sources équivalentes.....	207
IV.3.2 Présentation de trois configurations de simulation	210
IV.3.2.1 Réponse impulsionnelle	210
IV.3.2.2 Réponse à un échelon électrique	214
IV.3.2.3 Réponse de la troisième source	217
 Conclusion générale.....	 221
 Bibliographie.....	 227
 Annexes.....	 235

Introduction générale

Depuis un demi-siècle, l'évolution exponentielle des applications de l'électricité dans les domaines tant civils que militaires, multiplie les équipements électriques sources d'ondes électromagnétiques.

La cohabitation dans un même environnement de ces matériels électroniques travaillant avec des signaux de fortes ou de faibles amplitudes et à des fréquences d'utilisation de plus en plus élevées, peut générer de nouveaux types de dysfonctionnements et des phénomènes d'incompatibilité entre équipements.

Prenons l'exemple d'un aéronef exposé à des agressions de diverses natures physiques. Du point de vue électromagnétique, ce peut être l'illumination d'un équipement sensible par un radar militaire ou civil. Ce peut être également le foudroiement de l'appareil induisant des courants transitoires d'amplitudes élevées sur son fuselage. Ce peut être dans un contexte militaire, une menace micro-ondes provenant d'armes électromagnétiques.

Ces agressions extérieures s'introduisent par des mécanismes de conduction ou d'induction à travers les ouvertures spécifiques de l'aéronef : les câbles, les hublots, les joints de portes, et plus récemment, les nouveaux matériaux composites plus légers mais moins conducteurs, laissant pénétrer une partie du signal perturbateur.

S'ajoutent ensuite toutes les interférences internes à l'appareil comme les couplages entre lignes de transmission, entre les équipements électriques pollueurs, ou entre des appareils électroniques portables. Se superpose enfin l'influence de la caisse métallique assimilable à une cavité électromagnétique résonante, plus communément appelée une cage de Faraday.

Au delà de ces interférences électriques, peuvent se cumuler des perturbations de natures physiques différentes telles que des couplages électrothermiques. Le comportement d'un équipement étant sensible à une variation de température, certaines conditions climatiques peuvent avoir un impact significatif sur le contrôle ou la commande de l'appareil. L'usure prématurée de certains matériaux peut également être considérée comme un facteur de perturbations électriques supplémentaires.

Nous appellerons ce type de problème, l'analyse multiparamètre, multiéchelle et multiphysique de la Compatibilité ElectroMagnétique (*CEM*). Il se caractérise en effet par des interactions entre de nombreux paramètres, de dimensions variables comparées à la longueur d'onde, et faisant participer des phénomènes physiques de natures différentes. En d'autres termes, c'est la *CEM* des systèmes complexes.

Dans le domaine des transports, les industriels sont particulièrement confrontés à ces problèmes de *CEM* des systèmes complexes. La mission des ingénieurs spécialistes consiste à rechercher et développer des moyens expérimentaux et numériques toujours plus performants pour évaluer et maîtriser le comportement des ondes électromagnétiques dans un environnement de plus en plus complexe.

Afin de réduire les coûts de développement d'un tel produit, les ingénieurs utilisent en plus des maquettes radioélectriques, des logiciels de simulation numérique utilisés dès la phase de conception de l'appareil, permettant une analyse prédictive plus aisée des perturbations induites. Néanmoins, il est encore actuellement extrêmement difficile, avec les outils numériques disponibles sur le marché, de résoudre totalement un tel système complexe.

Gabriel KRON, ingénieur américain, développa dans les années 1930, une théorie permettant d'appliquer l'analyse tensorielle des réseaux à la résolution des circuits électriques. Comme nous le constatons dans d'autres domaines physiques dont le plus célèbre n'est autre que la relativité générale d'Einstein, le calcul tensoriel semble adapté aux situations de grande complexité. Cette méthode, principalement utilisée par *G.KRON* pour

modéliser des machines électriques était néanmoins limitée à cause des faibles ressources informatiques disponibles.

Olivier MAURICE, ingénieur *CEM* au *GERAC*, a récemment proposé d'utiliser cet outil mathématique tensoriel afin de résoudre ces problèmes de *CEM* des systèmes complexes. La contribution apportée par ce travail de thèse consiste à développer cette méthode originale pour montrer que l'analyse tensorielle des réseaux électriques s'adapte parfaitement, au sein d'un même outil, à l'association d'un nombre élevé d'interactions indépendamment maîtrisées par des modèles analytiques ou numériques préexistants ou par des données issues de mesures.

Le chapitre *I* présente les différentes catégories d'outils numériques dont disposent les ingénieurs en *CEM*. Ce peut être des formules analytiques, des méthodes numériques dites *3D* qui résolvent les équations de Maxwell, des méthodes basées sur la théorie des circuits ou encore la méthode de résolution topologique des couplages électromagnétiques. Nous discuterons des avantages et des limites d'utilisation de chacune de ces méthodes dans le cadre de l'analyse des problèmes de *CEM* des systèmes complexes. La conclusion de ce chapitre portera sur la proposition non pas d'une nouvelle méthode de résolution d'un couplage particulier, mais d'un outil global ayant la capacité de rassembler des méthodes adaptées à chacune des interactions préalablement isolées dans le grand système. Cet outil prendra comme désignation dans la suite du texte l'abréviation *MKCE* pour la Méthode de *KRON* appliquée à la Compatibilité Electromagnétique.

Le chapitre *II*, est une introduction à la théorie tensorielle des réseaux électriques développé par *G.KRON* que nous tentons de décrire sous le regard d'un ingénieur *CEM*. Dans cette partie seront alors présentées les différentes transformations de bases et d'espaces tensoriels attachées aux grandeurs d'un circuit électrique. Ces transformations permettront non seulement de réduire les systèmes d'équations, mais également d'observer les interactions de manière plus aisée en prenant pour référence l'espace tensoriel le mieux adapté à la situation. L'espace des branches permettra par exemple de décrire les couplages électriques, l'espace des mailles accueillera plus facilement les couplages magnétiques, quant à l'espace des réseaux, il prendra en compte les interactions en champ lointain. La conclusion de cette partie donne des exemples de transformations de bases et d'espaces appliquées à des couplages électromagnétiques typiquement rencontrés dans les systèmes complexes.

Le chapitre *III* applique la *MKCE* directement à des problèmes classiques de *CEM* pour se familiariser avec la méthode et pour disposer d'une base de données de problèmes *EM* fréquemment rencontrés en *CEM*.

La simulation d'une ligne de transmission, d'un couplage par diaphonie, d'un assemblage de câble en mode commun et différentiel, des câbles blindés et des couplages entre antennes, constituera la base fondamentale pour la résolution future des systèmes complexes. Chacun de ces couplages est transcrit par un schéma électrique équivalent, puis inséré dans le formalisme tensoriel pour résoudre les équations électriques. Les résultats de simulations par la *MKCE* seront comparés à des mesures et des simulations numériques présentées au chapitre *I*.

La conclusion du chapitre *III* utilise l'espace tensoriel des réseaux, particulièrement adapté à l'étude de la *CEM* des grands systèmes, pour étudier l'agression d'une ligne par un champ électromagnétique.

Enfin, le chapitre *IV* propose deux applications pour la *MKCE*.

Tout d'abord, nous décrivons le système composé de plusieurs antennes couplées via une cavité métallique. L'analyse des frontières topologiques permet d'isoler l'étude de chacune

des trois antennes de dimensions variables devant la longueur d'onde ainsi que la cavité métallique résonante.

Chacun des sous-systèmes est transcrit sous la forme de schémas électriques équivalents. Les interactions conduites ou induites entre les sous-circuits sont alors introduites dans l'espace tensoriel adapté à la physique du phénomène. A partir de chaque modèle choisi pour chacun des couplages du système, la *MKCE* permet de regrouper sous un même logiciel toutes ces interactions, réduisant ainsi le système complexe en un assemblage de simples sous-volumes interagissant dans un même espace tensoriel.

La précision des résultats de simulation par la *MKCE*, montrent que la méthode offre de nombreuses possibilités d'analyses multiparamètres et multiéchelles. Plusieurs configurations de couplages entre les antennes sont sélectionnées et la cavité prendra des dimensions variables.

La dernière partie de ce chapitre *IV*, oriente les travaux de recherche vers la simulation des systèmes multiphysiques. Nous considérons une expérience de pensée mettant en équation la transformation d'un couplage d'énergie électrique hautes fréquences en énergie thermique. Pour cela, nous choisissons une éprouvette coaxiale remplie d'eau, contenant un conducteur central cylindrique et un conducteur extérieur en cuivre.

Le circuit électrique équivalent à la propagation des paramètres électriques le long de l'éprouvette est dans un premier temps mis en place. Indépendamment de ces phénomènes électriques, un circuit électrique équivalent de la diffusion thermique dans l'éprouvette sera obtenu à partir des équations analytiques thermiques.

L'introduction des interactions électrothermiques entre les deux circuits équivalents électrique et thermique, s'adapte parfaitement au formalisme de la *MKCE*. En injectant un signal électrique d'amplitude convenable à l'extrémité du câble rempli d'eau, nous visualisons une évolution spatiotemporelle de la température le long de l'éprouvette.

Finalement, les résultats obtenus durant cette thèse offrent de nouvelles perspectives pour la résolution de problèmes de *CEM* sur des systèmes complexes. Un des grands avantages de *MKCE* consiste à laisser l'ingénieur, libre de choisir la méthode de simulation de chacun des sous-systèmes qui lui semble la plus appropriée au phénomène physique à décrire. La *MKCE* permet ensuite d'introduire facilement dans un espace privilégié, les interactions entre les sous-systèmes multiparamètres, multiéchelles et multiphysiques.

***Chapitre I : Etat de l'art de l'analyse de
problèmes de CEM appliqués aux grands
systèmes***

I.1 Problème à résoudre

La météorologie est un problème usuel de prévision du comportement de « grands systèmes ». Comme pour les phénomènes électromagnétiques (*EM*), l'étude de l'état de l'atmosphère à un temps ultérieur et dans un environnement physique complexe, est le résultat d'une longue analyse des interactions entre de nombreuses variables telles que la pression, la température ou la vélocité des vents.

Pour cela, les météorologues utilisent des techniques de prédiction comportementales alliant des études expérimentales et théoriques.

La visualisation des courants atmosphériques par les satellites permet de fixer les conditions initiales. Ensuite, une comparaison entre une analyse utilisant des théories de comportements thermodynamiques et une analyse de type interpolation mathématique sur l'évolution des masses d'air, permet d'atteindre des prévisions plus ou moins robustes. Malgré l'utilisation de « théories exactes » introduites grâce aux outils informatiques perfectionnés, la prédiction du temps qu'il fera dans un mois à un endroit donné comportera toujours de grandes incertitudes de par le nombre et la grande variabilité des grandeurs physiques mises en jeu.

A une autre échelle de phénomènes, les industries et organismes produisant ou utilisant des installations électriques complexes sont contraints de prédire les dysfonctionnements induits par des environnements électromagnétiques hostiles. Les avions, les automobiles modernes et les armes sophistiquées constituent sans nul doute les systèmes les plus exposés à ces menaces. Pour résumer simplement les choses, tout système comportant des lignes de transmission de signaux interconnectées avec des circuits, et qui forment une architecture complexe est soumis à des phénomènes d'inductions indésirables qu'il faut s'efforcer de comprendre et d'analyser.

Dans notre contexte d'étude, un système complexe est le support d'échanges multiples de données entre équipements ou composants électroniques. Ces échanges se réalisent par l'intermédiaire de supports physiques comme des lignes de télécommunication ou par rayonnement, par le biais d'antennes et émetteurs récepteurs embarqués.

Les sources extérieures d'agressions électromagnétiques peuvent être naturelles comme la foudre, les décharges électrostatiques ou industrielles comme les lignes à hautes tensions, les émetteurs de télécommunication, les radars d'aéroports, les caténaires des voies ferrées. A cela, s'ajoutent des sources plus ponctuelles à l'instar des alarmes électroniques, téléphones mobiles, assistants personnels ou émetteurs radio en tout genre.

A titre d'exemple, les systèmes électroniques embarqués dans une automobile doivent respecter des normes *EM* permettant le bon fonctionnement du véhicule. Les éléments électroniques sont classés par ordre d'importance selon leur utilité. Les systèmes dédiés à la sécurité comme le contrôle moteur, le freinage, l'airbag, le régulateur de vitesse seront soumis, par exemple à des tests de champ *EM* plus sévères que les systèmes destinés au confort comme la climatisation, les vitres électriques, l'horloge, le radar de recul ou l'ouverture des portes sans clef.

Le travail de l'ingénieur *CEM* consiste à prédire, et trouver des solutions réduisant fortement les probabilités des dysfonctionnements électriques dues à ces risques d'interactions.

En règle générale, nous pouvons dissocier trois types de problèmes associés à ces grands systèmes : l'analyse *multiphysique*, l'analyse *multiparamètre* et l'analyse *multiéchelle*. Ces trois concepts sont illustrés dans la Fig I.1.

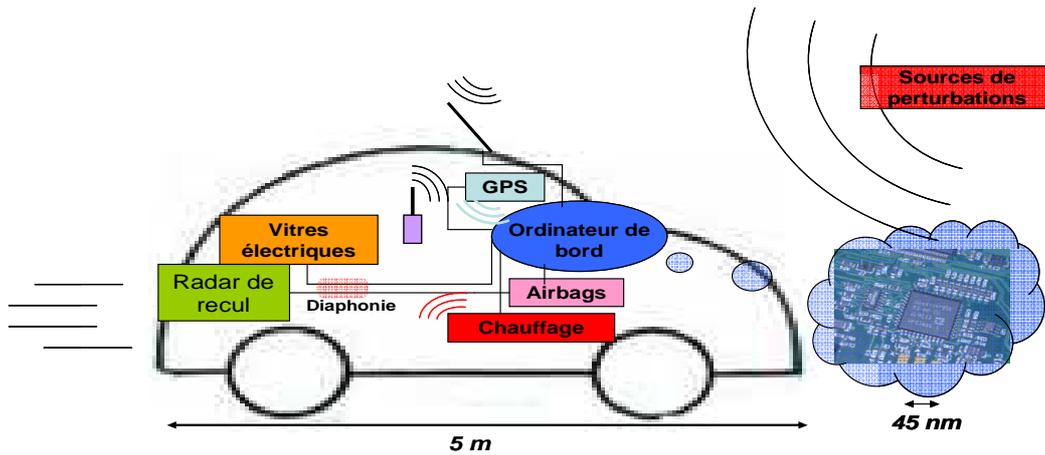


Fig I.1 : Machine CEM

L'analyse *multiphysique* fera intervenir des outils de prédiction tenant compte de l'évolution des paramètres exprimés par des unités ou dimensions physiques hétérogènes. Tel est le cas de la combinaison des circuits électriques avec l'induction produite par des ondes, auxquelles s'ajoutent des phénomènes d'origine thermique et mécanique. Cette approche est actuellement localisée aux phénomènes électriques.

Concrètement, dans l'exemple du véhicule terrestre, nous avons besoin de modéliser la caisse métallique de la voiture assimilable à une cavité électromagnétique avec des ouvertures, dans laquelle le téléphone et d'autres systèmes extérieurs sont des sources potentielles de perturbations. A ces phénomènes de type champ rayonné, s'ajoutent les perturbations de mode conduit sur les réseaux de câblage alimentant les vitres électriques et le déclencheur de l'airbag, le tout sous l'influence des grandes variations de température subi par un véhicule.

Dans ce cas de figure, trois types de physiques cohabitent : les champs *EM* dans la cavité, les tensions et courants dans les circuits ou lignes électriques, et l'influence des phénomènes thermiques et mécaniques pouvant dégrader l'efficacité de certains blindages ou composants actifs.

En plus du mélange des phénomènes physiques, les multiples interactions intervenant sur divers composants localisés aux frontières d'un système, exigent une analyse *multiparamètre*. Dans la phase de conception, l'ingénieur *CEM* a besoin d'une grande souplesse d'analyse paramétrique. Il pourra ainsi, par simulation, ajouter un filtre ou un blindage sur les zones critiques pour optimiser la protection du produit final. L'étude paramétrique par l'outil numérique permettra par exemple de rationaliser l'implantation des réseaux de câbles dans la caisse de la voiture en localisant les zones de champ *EM* de faible amplitude ou de couplages moindres. L'ajout d'un blindage en tresse sur un câble sensible ou sur un connecteur pourra être considéré dès la phase de conception du produit.

Cet exemple illustre bien le besoin de souplesse dans l'analyse des systèmes complexes.

Enfin, le troisième point remarquable de l'étude d'un grand système réside dans l'analyse *multiéchelle*.

Ce terme signifie que les interactions *EM* se caractérisent par le rapport liant la longueur d'onde des perturbations aux dimensions des éléments géométriques du système.

Ainsi, la longueur d'onde des champs perturbateurs parvenant sur un véhicule automobile peut être très inférieure aux dimensions du câblage, comparable aux dimensions de la caisse et supérieure aux dimensions des pistes constituant les circuits imprimés.

Dans un tel contexte, les mécanismes de résonance se manifestent différemment selon le rapport dimension / longueur d'onde. Le concept d'outil prédictif devra impérativement tenir compte de cette particularité physique.

L'usage intensif des outils informatiques et leurs prodigieux développements technologiques offrent aujourd'hui d'intéressantes opportunités pour construire des logiciels prédictifs fiables.

Reste cependant à résoudre la question du lien multiphysique dont nous avons signalé l'importance en préambule de ce texte. Différentes approches sont à ce jour envisageables suivant qu'on utilise des calculs numériques élaborés par des logiciels du commerce, des théories analytiques basées sur les formulations des lignes de transmission ou plus simplement encore l'association des théories des circuits électriques. Avant d'harmoniser ces sous ensembles dans la méthode de Kron qui forme le contenu principal de cette thèse, nous allons rappeler dans les paragraphes qui suivent les bases physiques, les notations et les champs d'applications usuels de toute cette méthodologie.

1.2 Position des méthodes numériques applicables à un grand système

On entend par outil numérique, un logiciel réalisant le calcul d'équations différentielles dépourvues de solutions analytiques simples. Tel est le cas des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques dans des environnements qui nécessitent l'application de conditions aux limites laborieuses.

Dans d'autres situations, les équations possèdent des solutions analytiques dont la mise en œuvre nécessite l'application de règles algébriques relativement lourdes. Tel est le cas des phénomènes d'inductions rencontrés sur des faisceaux de câbles positionnés à proximité de plans métalliques ou autres références de masse.

L'extrême variabilité des structures rencontrées en pratique va donc nécessiter la mise en œuvre d'interactions entre ces différents outils.

A cela, il faut ajouter que certains phénomènes échappent à la simulation théorique, et qu'il faut leur adjoindre des données expérimentales. Ce cas de figure offre alors un autre champ d'investigation où on doit mêler ces données expérimentales aux produits des outils précédemment spécifiés.

Les champs électromagnétiques évoluant dans un environnement pourront par exemple être représentés par un outil de type résolution des équations de Maxwell, présenté dans le paragraphe *1.2.1*.

Pour prédire les phénomènes liés à la propagation et aux couplages des signaux dans les lignes de transmissions, nous emploierons plutôt des outils basés sur la théorie des lignes de transmission présentée au paragraphe *1.2.2*. Pour cela, nous rappellerons au lecteur les lois et les notations des circuits les plus élémentaires qui seront utilisés tout le long de ce mémoire de thèse.

Finalement, la partie *1.2.4* nous donnera des informations sur la description d'un outil topologique adapté à l'étude des couplages sur câbles.

1.2.1 Outils basés sur la résolution numérique des équations de Maxwell :

L'approche théorique basée sur l'électromagnétisme peut être dissociée entre des formulations exactes ou approchées que nous présentons sommairement dans les paragraphes suivants [I.1]-[I.2]-[I.3].

1.2.1.1 Outils basés sur la résolution exacte des équations

Les logiciels de calcul résolvant les équations de Maxwell en maillant l'espace à considérer, permettent principalement de déterminer l'évolution du champ électromagnétique dans l'environnement et les courants induits sur la surface d'un objet. Ces outils sont généralement appelés méthodes tridimensionnelles ou *3D* ou sous le terme anglophone full wave software.

Deux types de méthode existent pour la résolution « exacte » des équations de Maxwell, résolues dans ce cas en respectant exactement les expressions des équations différentielles d'origine. La méthode dite « intégrale » est utilisée par la méthode des moments (*MoM*) car elle résout les équations de Maxwell sous leur forme intégrale. Elle ne nécessite généralement pas de mailler le volume de calcul total mais seulement les structures filaires et les surfaces. Les méthodes dites différentielles résolvent les équations aux dérivées partielles (*FDTD* et *FEM*). Ce sont des méthodes dites volumiques car elles travaillent généralement sur un volume englobant l'objet à traiter et fermés par des frontières absorbantes simulant l'espace libre.

1.2.1.1.1 La méthode des Moments MoM

La méthode des Moments *MoM* [I.1] et [I.2], est basée sur la résolution d'équations intégrales transformées en un système d'équations linéaires. La *MoM* est connue depuis longtemps dans d'autres disciplines de la physique. En 1915 déjà, Galerkin, un ingénieur mécanicien d'origine russe propose une procédure numérique pour résoudre des équations où l'inconnue est une fonction. Plus tard, les mathématiciens ont démontré que l'approche Galerkin peut être étendue à d'autres classes de problèmes portant le nom générique de méthode des moments. La *MoM* a été introduite pour la résolution des problèmes liés aux antennes et à la diffusion électromagnétique à travers des parois métalliques dans les années 1960 par Harrington.

En électromagnétisme, elle s'applique typiquement à la formulation intégrale du champ électrique (*Electric Field Integral Equation*) pour laquelle les inconnues sont la distribution de courant circulant sur les conducteurs ou, dans le cas de structures planaires multicouches, sur les rubans placés aux interfaces. Le fondement de la *MoM* consiste à proposer une solution sous la forme d'une somme de fonctions connues auxquelles sont associés des coefficients inconnus. Il s'agit ensuite d'appliquer une procédure de minimisation de l'erreur résiduelle pour générer un système matriciel et déterminer les coefficients inconnus.

En bref, cette méthode uniquement applicable au domaine des fréquences, présente un intérêt pour l'analyse des couplages intervenant en espace libre (pas de frontière absorbante requise).

Cette méthode harmonique a permis le développement de codes comme *NEC*[®], *IE3D*[®], *FEKO*[®] ou *WIPLD*[®].

1.2.1.1.2 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (*FEM* : *Finite Element Method*) a connu un grand développement depuis les années 1970 et offre un large champ d'application dans de nombreux domaines de la physique. Les avantages de cette méthode proviennent de sa capacité à s'adapter à des structures de formes géométriques relativement complexes. La méthode des éléments finis est une méthode rigoureuse, mais nécessite des temps de calcul importants ainsi qu'une grande ressource de mémoire du calculateur. Il existe de nombreux ouvrages traitant du sujet.

La décomposition en éléments simples de la géométrie du système fait appel à des procédés de maillage de l'espace et des objets pouvant, suivant le cas, prendre la forme de triangles pour les éléments surfaciques ou de tétraèdres pour les volumes. A l'intérieur de chaque élément, la fonction inconnue est approximée par un polynôme. Par un choix judicieux des coefficients, la *FEM* impose automatiquement les conditions de continuité de la fonction d'un élément à l'autre.

La *FEM* nécessite des conditions aux limites absorbantes pour limiter le domaine de calcul (maillage) en présence des structures ouvertes sur l'espace libre. De nombreuses solutions ont été proposées, mais celle retenue dans la plupart des logiciels est l'utilisation des couches parfaitement adaptées (*PML* : *Perfectly Matched Layer*) publiées par Bérenger. On donne à titre d'exemple un logiciel utilisant cette technique : *FEMLAB*[®].

1.2.1.1.3 La méthode des éléments finis de frontière

La méthode *BEM* (*Boundary Element Method*) est une adaptation des éléments finis dans le domaine des fréquences et repose sur la formulation intégrale des équations de Maxwell appliquée à des mailles caractérisant des éléments surfaciques (généralement en forme triangulaire).

Un des avantages de cette méthode est la prise en compte des problèmes de rayonnement de manière intrinsèque, c'est-à-dire sans condition approchée pour tronquer le domaine spatial d'étude autour de l'objet étudié. De plus, le champ peut être calculé partout à l'infini ou à proximité des surfaces de la structure.

Le maillage surfacique permet d'alléger les descriptions des systèmes complexes, mais la *BEM* demande des temps de calcul encore importants.

1.2.1.1.4 La méthode des différences finies dans le domaine temporel

La méthode des différences finies est basée sur la représentation des équations aux dérivées partielles sous la forme de différences finies. La résolution par inversion de matrice nous mène à une solution dans le domaine fréquentiel alors qu'un code itératif mènera à une solution dans le domaine temporel. Cette dernière est très utilisée pour obtenir des simulations sur des larges bandes de fréquences notamment en *CEM*. On passe alors du domaine temporel au domaine harmonique par application d'une Transformée de Fourier.

La méthode des différences finies dans le domaine temporel (*Finite Differences in Time Domain*) est utilisée entre autres par le logiciel *GORF*[®].

La géométrie de l'objet considéré est discrétisée par des techniques de maillages parallélépipédiques de dimensions proportionnelles à la longueur d'onde minimale d'étude. Une fréquence élevée d'étude imposera un maillage très fin de l'objet et demandera un long temps de calcul.

1.2.1.1.5 La méthode TLM

La méthode *TLM* (*Transmission-Line Modeling Method*) a été développée par Christos Christopoulos dans les années 1970 [I.4]. Cette méthode consiste en une discrétisation spatio-temporelle des équations de Maxwell. Une fois les équations électromagnétiques définies, la propagation des ondes dans l'environnement étudié s'effectue par le biais d'un réseau fictif de lignes de transmission orthogonales.

Cette méthode directement utilisable dans le domaine temporel, est basée sur l'analogie entre des grandeurs électriques et des grandeurs *EM*. L'accès à la réponse en fréquence large bande demande un temps de calcul élevé. Le maillage est non conforme et ses dimensions sont proportionnelles à la longueur d'onde minimale d'étude.

1.2.1.2 Outils basés sur des résolutions approchées des équations

Les méthodes asymptotiques sont basées sur des simplifications des équations de Maxwell à l'aide des hypothèses hautes fréquences. Cela permet de bonnes modélisations d'objets surdimensionnés devant la longueur d'onde.

D'autres formulations approchées proviennent d'une assimilation des résolutions à la théorie des lignes ou aux circuits électriques.

1.2.1.2.1 Méthode du Lancer de rayons

La méthode du lancer de rayon *RTA* (*Ray Tracing Approach*) appliquée à la *CEM* dans les années 1990, consiste à assimiler dans une source, un ensemble de rayons évoluant dans une cavité. L'interaction entre les rayons et l'objet suivra les lois de l'optique géométrique.

Les parois d'une cavité *EM* ont généralement une conductivité élevée et par conséquent un indice de réflexion proche de 1. Le nombre d'images pour atteindre la convergence est très important. Pour cela, soit le coefficient de réflexion doit être atténué, soit le nombre de réflexions sur les parois doit être arbitrairement limité, introduisant ainsi des « pertes numériques ».

Cette méthode asymptotique temporelle permet d'obtenir une étude en fréquences discrètes, et uniquement en hautes fréquences car l'avantage de cette théorie apparaît lorsque les conditions de l'optique géométrique sont satisfaites. Les temps de calcul restent encore une fois très lourds lorsque les systèmes sont complexes.

1.2.1.2.2 La méthode PEEC

La méthode *PEEC* (*Partial Element Equivalent Circuit*) est une technique qui transforme un objet tridimensionnel en un circuit électrique équivalent passif composé de résistances, inductances, capacités et mutuelles partielles, qui peut être complété avec des modèles des composants éventuellement connectés à la structure et être successivement analysé, soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine des fréquences, à travers un simulateur électrique de type Spice. Cette méthode a été introduite par Albert E. Ruehli au centre de recherches d'IBM T.J. Watson en 1970 et a surtout un intérêt de simulation locale

de grands systèmes, notamment pour tenir compte des impédances internes des conducteurs et de la géométrie transversale.

Ce bref inventaire montre qu'une méthode de résolution n'est pas universelle, ce qui signifie qu'il faut, pour chaque cas de figure, comparer les méthodes avec chacune leurs propres limites théoriques. Ainsi, la prédiction de la tension induite perturbant le composant actif sensible d'un circuit imprimé installé à bord d'une automobile, demande l'enchaînement de plusieurs méthodes de calcul. Dans un premier temps, une des techniques explorées précédemment permettra de calculer le champ en tout point de la structure interne du véhicule. S'agissant du couplage de ce champ avec le réseau de câbles ou avec le circuit imprimé, d'autres approches seraient envisageables. Nous pensons aux théories des circuits usuelles ou aux théories des lignes dont nous allons rapporter les bases phénoménologiques ainsi que les principaux protocoles de notation qui s'avéreront très utiles pour la poursuite de cette thèse.

1.2.2 Outil basé sur la théorie des circuits électriques équivalents

Pour situer les champs d'application *EM* des outils numériques basés sur la représentation en schéma électrique équivalent, nous prenons l'exemple de la contribution des composants électroniques non linéaires lors de l'évaluation de l'amplitude des tensions induites provoquées par un événement électromagnétique.

Une étude récente réalisée au laboratoire *Telice* par *S.Bazzoli* [I.5] a montré que des charges non linéaires dispersées aux extrémités d'un réseau de câbles, influent notablement sur l'amplitude des tensions induites. A ces problèmes non linéaires s'ajoutent de nombreuses perturbations causées par le boîtier du système ou encore par l'impédance équivalente des entrées/sorties. Ces phénomènes parasites apparaissent généralement à des fréquences élevées de l'ordre du *GHz*.

La *Fig I.2* présente une ligne de transmission connectée à un équipement électronique représenté à l'échelle microscopique par une puce de silicium protégée par des diodes intégrées à cette même puce.

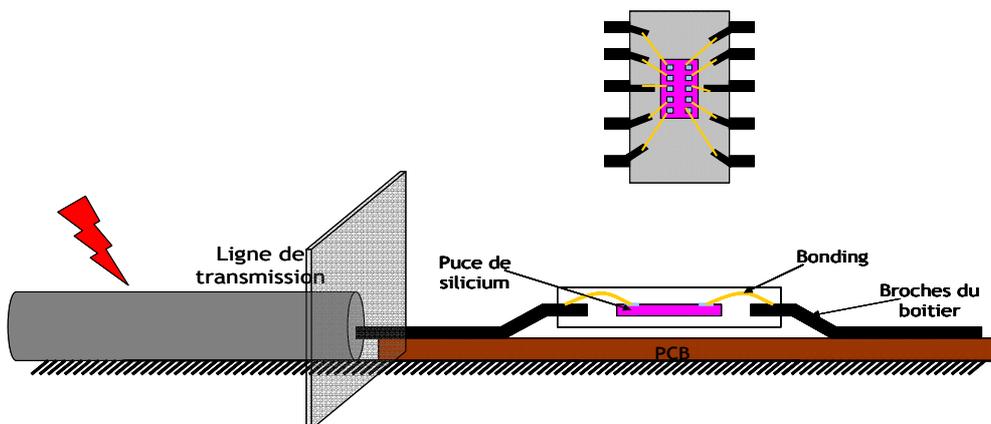


Fig I.2 : Schéma d'un boîtier électronique relié à une ligne de transmission et à un composant électronique.

La partie active du composant est la puce de silicium composée de pattes métalliques et de semi-conducteurs de dimensions inférieures au micron. Cette puce est installée sur un

substrat d'épaisseur de 350 à 500 μm et de surface de 1 à 500 mm^2 . Cette puce est reliée aux pistes du circuit imprimé par l'intermédiaire de broches métalliques et de bonding (fils en or). Le tout est installé dans une résine constituant le boîtier du composant.

Le circuit imprimé est relié à des lignes de transmission pour connecter les différents équipements électroniques constituant le grand système.

Cet exemple traduit typiquement les concepts multiéchelles, multiphysiques et multiparamètres :

Les dimensions des lignes de transmission peuvent atteindre des centaines de mètres alors que la taille du composant actif et du boîtier sont de l'ordre de quelques micromètres.

Deux types de physiques cohabitent dans ce système : les courants et tensions se propageant dans les lignes et puces et l'agression de type onde électromagnétique localisée au niveau des lignes de transmission.

L'aspect multiparamètre est caractérisé par la présence de nombreux éléments localisés dont la fonctionnalité est variée, comme la ligne de transmission, le boîtier et la puce de silicium.

a. Etude des lignes de transmission multiples

L'étude des lignes de transmission multiples par des outils basés sur la théorie des circuits permettra une modélisation simple et efficace des perturbations conduites vers les équipements électroniques.

Nous dissocions deux types d'analyse : la première est basée sur la théorie des lignes et la résolution se fait directement par calcul des tensions et courants sur des éléments de lignes (paragraphe I.2.2.2).

La deuxième est l'analyse topologique pour l'étude des couplages *EM*. Cette méthode présentée dans le paragraphe I.2.3 utilise les paramètres *S* pour résoudre l'équation *B.L.T.*

b. Etude du boîtier

Les constructeurs de ces composants proposent des modèles électriques équivalents pour représenter les comportements électriques du boîtier. Par exemple, les impédances parasites significatives directement liées aux dimensions des « bonding », des broches du boîtier ou des soudures permettront de définir le comportement d'une agression *EM* de haute fréquence sur ces différents petits éléments. Le schéma électrique équivalent du boîtier suivant donne un exemple de modèle élaboré par les constructeurs de circuits imprimés.

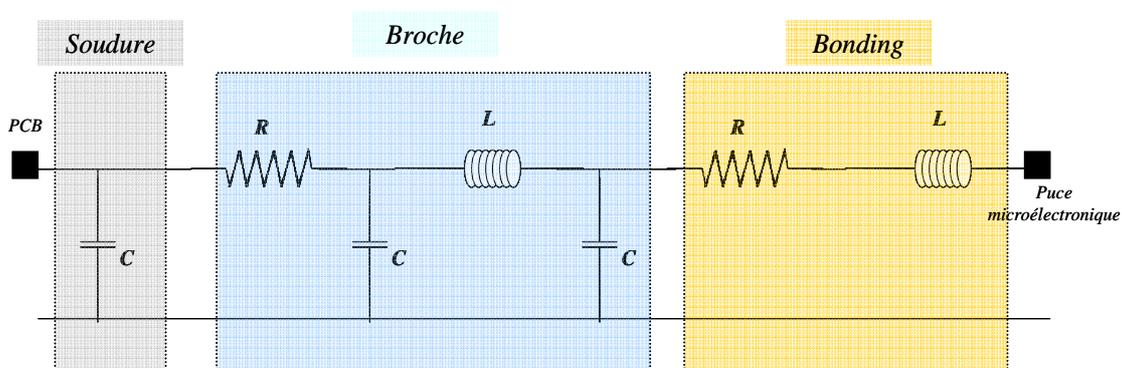


Fig I.3 : Schéma équivalent du boîtier

c. Les diodes de protection

Les protections contre les agressions *EM* sont nombreuses. Elles sont généralement constituées de plusieurs diodes connectées entre les lignes de données et la masse, ainsi qu'entre les lignes de données et l'alimentation et parfois entre l'alimentation et la masse.

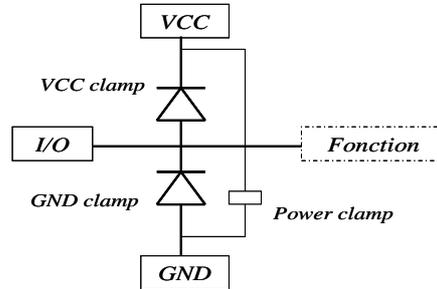


Fig I.4 : Schéma équivalent des diodes de protection

Si une agression *EM* atteint l'entrée/sortie et dépasse le niveau de tension *VCC*, la diode *VCC clamp* entre en conduction. Le signal perturbé dont les amplitudes dépassaient la tension *VCC* va être écrêté à cette valeur maximale *VCC*. De la même manière, la diode *GND clamp* entre en conduction lorsque la tension du signal perturbé sur le port entrée/sortie est inférieure à la référence *GND*. Les perturbations d'amplitude seront alors écrêtées à ce niveau bas. Enfin, une troisième protection est appliquée entre *VCC* et la référence *GND* pour limiter d'éventuelles perturbations conduites via l'alimentation ou le plan de référence.

Le signal utile ne sera pas modifié alors que les perturbations de trop fortes amplitudes dans la bande passante de fonctionnement des diodes seront écrêtées.

Notons l'importance des effets non-linéaires introduits par ces diodes de protection. En effet, dans le cas où une agression *EM* est susceptible de mettre en conduction les diodes, des phénomènes transitoires liés aux comportements des diodes suivent des lois non-linéaires dont la contribution a pour effet de modifier temporairement les charges vues aux extrémités des lignes de propagation. Ces phénomènes, négligés dans les outils numériques actuels, compliquent les prédictions des agressions *EM* induites.

d. Etude des composants actifs.

Enfin, les composants actifs assurant les fonctions électroniques, généralement constitués de matériaux semi-conducteurs, ont un comportement capacitif dans la majorité des cas. Les constructeurs de puces modélisent habituellement ces structures par une capacité équivalente de l'ordre de quelques *pF* mise en parallèle entre l'entrée/sortie et la référence.

On résume dans la figure suivante les différentes étapes d'étude d'une connexion entre ligne de transmission et composant. Ces sous blocs seront chacun modélisés par des outils basés sur la théorie de type circuit électrique.

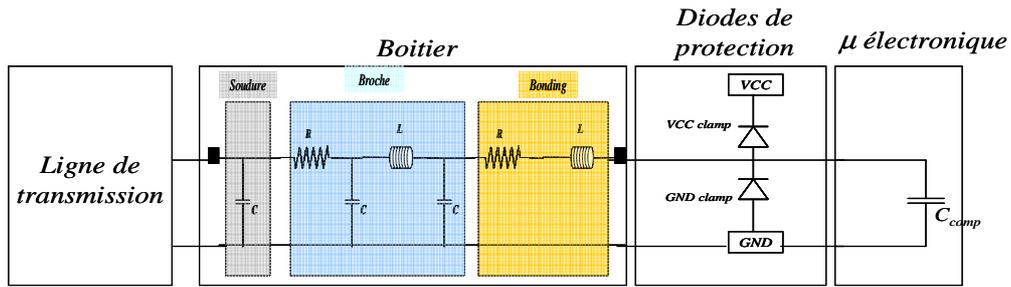


Fig I.5 : Schéma électrique équivalent du composant relié à une ligne de transmission

L'analyse de ces blocs va faire intervenir des concepts et des notations fondamentaux d'éléments localisés que nous rappelons dans la partie suivante I.2.2.1

Nous insisterons sur les modèles des composants non-linéaires, naturellement présents aux extrémités des réseaux de câbles.

I.2.2.1 Concept d'éléments localisés :

La théorie des circuits dont nous allons largement utiliser les propriétés dans la poursuite de la thèse, constitue un outil commode pour représenter les phénomènes de propagation intervenant sur les lignes de transmission.

Afin d'éviter tout risque de confusion, nous consacrerons les pages qui suivent à un descriptif des notations adoptées pour décrire les principaux éléments rencontrés dans les circuits.

Le comportement des composants électriques est régi par la relation liant le courant et la différence de potentiel aux bornes de ces éléments.

Le courant i exprimé en ampère circule dans un élément correspondant à la quantité de charge q (en coulomb) qui le traverse par unité de temps dt (en seconde).

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (I.1)$$

La tension aux bornes d'un élément est produite par le passage de charges à travers cet élément traduisant une différence de potentiel entre ses bornes. Les éléments de ce modèle sont essentiellement des dipôles ou des quadripôles. Nous traiterons ici le cas simple du dipôle.

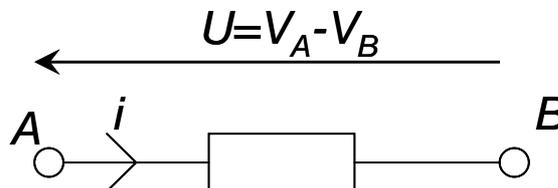


Fig I.6 : Caractéristique courant tension d'un dipôle

Un dipôle caractérise deux types de relation, soit une relation de proportionnalité entre les courants le traversant et la tension à laquelle il est soumis, ou une relation entre l'un de ces paramètres et la dérivée du second rapportée à la variable temps. Ces relations sont accessoirement projetées dans l'espace symbolique au moyen des propriétés bien connues de la transformée de Laplace.

Si on s'adresse à des signaux sinusoïdaux entretenus, et fonction de la variable temps, les relations précédentes feront intervenir les tensions, les courants et les impédances ou admittances représentés par des quantités complexes.

Dans le domaine symbolique, comme dans le domaine fréquentiel, les symboles des courants et tensions seront portés en lettres majuscules, alors que les paramètres exprimés en fonction de la variable temps seront donnés sous une syntaxe minuscule.

Les composants fondamentaux sont présentés ci-dessous.

1.2.2.1.1 La résistance ou conductance

Un dipôle élémentaire dont les caractéristiques courants-tensions sont reliées par l'équation (I.2) suivante, est une résistance de valeur R exprimée en ohm.

$$u(t) = R.i(t) \text{ ou } U(p) = R.I(p) \quad (I.2)$$

avec $p = \sigma + j\omega$, la variable complexe de Laplace

Les expressions sont données dans les domaines temporels et fréquentiels. De façon équivalente, la conductance $G = R^{-1}$ peut être définie par les relations suivantes :

$$i(t) = G.u(t) \quad \text{ou} \quad i(p) = G.u(p) \quad (I.3)$$

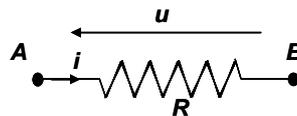


Fig I.7 : La résistance

Si R est constante au cours du temps, la résistance est linéaire et la courbe caractéristique tension-courant est donnée Fig I.8.a. La Fig I.8.b représente un exemple de caractéristique de résistance non-linéaire.



Fig I.8 : Caractéristique u et i d'une résistance linéaire (a) et non-linéaire (b)

1.2.2.1.2 La capacité

La charge $q(t)$ est définie par la relation suivante :

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(t).dt = q(0) + \int_0^t i(t).dt \quad (I.4)$$

Exprimée d'une autre manière, nous retrouvons l'équation (I.1)

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (I.5)$$

Un dipôle élémentaire défini par la relation suivante est une capacité C , exprimée en farad (F).

$$q(t) = Cu(t) \quad (I.6)$$

En général, C dépend du temps et de la charge q et de la tension u . Dans le cas particulier où C est constant, la capacité est dite linéaire.

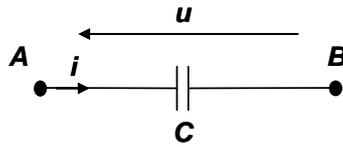


Fig I.9 : La capacité

Dans le cas général, en combinant les équations (I.5) et (I.6), nous obtenons pour une capacité linéaire :

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t di(t) \quad \text{ou} \quad U(p) = \frac{U(0)}{p} + \frac{1}{pC} I(p) \quad (I.7)$$

I.2.2.1.3 L'inductance

L'intégrale d'une force électromotrice $u(t)$ est appelée le flux $\Phi(t)$.

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t u(x) dx = \Phi(0) + \int_0^t u(x) dx \quad \text{et} \quad u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (I.8)$$

De la même manière que précédemment, un dipôle élémentaire défini par la relation (I.9) est une inductance L exprimée en henry (H).

$$\Phi(t) = L.i(t) \quad (I.9)$$

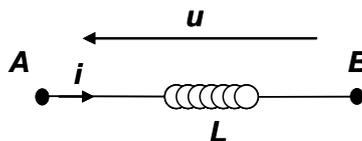


Fig I.10 : L'inductance

En général, L est une fonction dépendante de t et de Φ ou i du dipôle. Dans le cas où l'on considère L constante, cette inductance est alors linéaire.

En utilisant les équations précédentes, nous obtenons dans ce cas,

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad U(p) = pL.I(p) - pLI(0) \quad (I.10)$$

L'inductance est caractérisée par les grandeurs flux Φ et courant i :

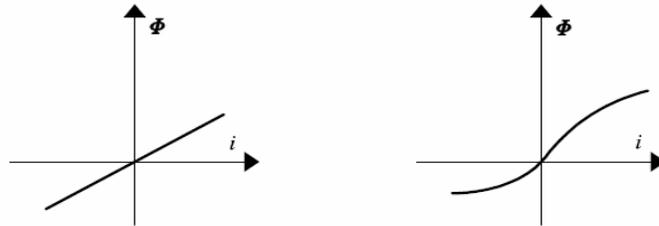


Fig I.11 : Caractéristique Φ et i d'une inductance linéaire (a) et non-linéaire (b)

La plupart des systèmes embarqués dans les grands systèmes ont naturellement des comportements électriques non-linéaires. Nous citons à titre d'exemple les composants actifs comme les transistors ou les circuits intégrés, ou certains composants passifs comme la diode.

Dans la prédiction des systèmes CEM complexes, la prise en compte « exacte » de ces éléments non-linéaires permettra de prendre en compte l'influence de ces composants sur la perturbation.

1.2.2.1.4 La diode

Les fonctions électroniques non-linéaires utilisées quotidiennement sont en majorité réalisées par des structures microélectroniques à base de silicium.

Le comportement de ces composants est directement lié au phénomène physique se produisant entre deux structures cristallines de silicium.

La première, dopée P (les trous) et la deuxième, dopée N (les électrons) forment une jonction PN constituant le composant classique qu'est la diode.

Une jonction PN formée de deux volumes de silicium P et N sont collés l'un à l'autre formant une jonction métallique. Les porteurs génèrent alors un déséquilibre de part et d'autre de la jonction métallique, ce qui entraîne une diffusion à travers cette interface. La différence de charge ainsi créée donne naissance à un champ électrique E de rétention. La diffusion cesse lorsque ce dernier est suffisant pour s'opposer au déplacement des porteurs. Ce volume dans lequel les impuretés ont été ionisées est appelé Zone de Charge d'Espace (ZCE). Le reste des substrats reste électriquement neutre.

Les porteurs libres se recombinent dans la ZCE. Cette zone ne possédant presque plus de porteurs libres en fait une zone très peu conductrice. En dehors de cette zone, les deux dopages P et N sont à leur état initial et possèdent une conductivité importante.

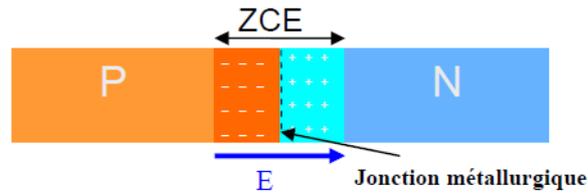


Fig I.12 : Schéma de la diode

La polarisation d'une jonction PN consiste à imposer une différence de potentiel entre les substrats N et P. La polarisation est directe lorsque le potentiel du côté P est supérieur au côté N. Lorsque suffisamment de porteurs N et P sont injectés respectivement dans les substrats dopés N et P, la ZCE diminue et à partir d'une tension de seuil, la diode est dite passante.

En polarisation inverse, le potentiel est plus faible du côté P que du côté N. Les porteurs injectés de chaque côté sont alors minoritaires. La ZCE augmente et la diode est dite bloquée.

La caractéristique non-linéaire courant tension de la diode peut être exprimée sous forme analytique par la relation liant la tension V_d aux bornes du dipôle et le courant I_d le traversant.

$$I_d = I_{ds} \left(e^{\frac{V_d}{V_t}} - 1 \right) \quad (I.11)$$

I_{ds} est le courant inverse idéal et V_t est donné par la relation suivante

$$V_t = \lambda \frac{kT}{q} \quad (I.12)$$

Avec K la constante de Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$),

T la température ($^\circ\text{K}$),

q la charge de l'électron ($1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$),

λ , un coefficient d'émission, fonction de la jonction.

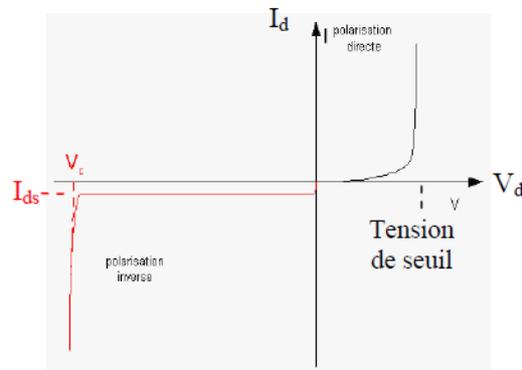


Fig I.13 : Caractéristiques U/I de la diode

I.2.2.1.5 Les sources

Les sources telles qu'elles sont définies ici sont des représentations de phénomènes physiques que nous avons adaptés par commodités. Nous présentons ci-dessous les différents types de sources que l'on pourra trouver dans la suite du mémoire.

Une source de tension indépendante est un dipôle délivrant à ses bornes une tension imposée quel que soit le courant qui lui est appliqué. D'une manière duale, une source de courant indépendante délivre un courant imposé, indépendant de la tension à ses bornes. Une source de tension et une source de courant continu délivrent des signaux constants en fonction du temps.

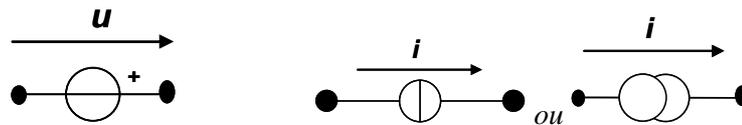


Fig I.14 : Source de tension

Source de courant

Les sources dépendantes de tension ou de courant, sont directement liées à une grandeur courant ou tension caractérisant un autre élément d'un réseau. Par exemple, la tension $u(t) = \alpha i_2(t)$ représente la source de tension dépendante du courant $i_2(t)$ traversant un autre dipôle du réseau. Si le coefficient α est linéaire, la source est linéaire.



Fig I.15 : Source de tension et de courant dépendantes

Les sources sinusoïdales englobent les sources délivrant des tensions ou courants complexes cosinusoïdales ou sinusoïdales, de valeur efficace X , de pulsation ω (ou de période $T=2\pi/\omega$), et de phase φ .

I.2.2.1.6 Les lois classiques des réseaux électriques

Les composants électroniques sont régis par les lois classiques des réseaux électriques. La loi d'Ohm exprime la relation entre tensions et courants. La tension U aux bornes d'un conducteur ohmique est égale au produit de sa résistance R par l'intensité I du courant qui le traverse.

$$U = R.I \quad (I.13)$$

La loi d'Ohm s'applique aux conducteurs ohmiques en courant continu, mais aussi en courants variables pour les dipôles ohmiques purement résistifs. Dans les autres cas de dipôles, l'équation (I.13) n'est plus valable. La résistance sera alors remplacée par l'impédance complexe.

Les lois de Kirchhoff expriment la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique (loi des nœuds et des mailles).

La loi des nœuds stipule que la somme algébrique des intensités des courants qui convergent vers un nœud est nulle. Autrement dit, la somme des courants rentrant dans un nœud est égale à la somme des courants sortants.

Cet axiome est subordonné au fait que toutes les tensions possèdent la même orientation, ce qui n'est manifestement pas le cas sur la Fig I.16. Il est alors important de préciser que le courant de maille est fixé dans le sens indiqué et que la somme algébrique dans la maille des forces électromotrices et des différences de potentiel aux bornes des résistances, est nulle. La Fig I.16 illustre ces deux lois de Kirchhoff.

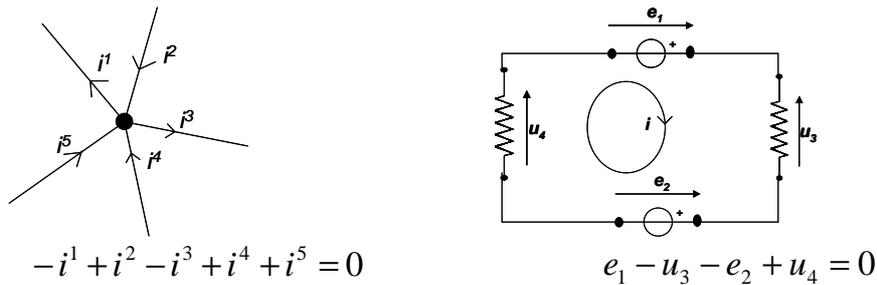


Fig I.16 : Loi des nœuds et loi des mailles

Les théorèmes de Thevenin, Norton, de superposition, de réciprocité, de Millman permettent d'optimiser la mise en équation d'un réseau électrique.

Le travail de thèse utilisera abondamment toutes les bases théoriques et notations des composants et des relations électriques définis précédemment.

Les logiciels comme *Pspice*[®], *SABER*[®] ou *PSIM*[®] sont par exemple adaptés pour l'étude des composants non-linéaires (diode) dans le domaine temporel. Ils exploitent les lois de Kirchhoff dans une méthode numérique dite nodale.

L'étude des lignes de transmission à pertes et des éléments dispersifs sera, quant à elle plutôt résolue dans le domaine des fréquences en utilisant par exemple le logiciel *Microwave Design System (HP)*[®].

I.2.2.2 Formalisme des lignes de transmission

Comme nous l'avons vu dans la problématique d'étude électromagnétique des grands systèmes, les réseaux de câbles présents dans les avions, les automobiles ou les armes jouent un rôle déterminant en CEM dans la détermination des niveaux de couplages.

Une ligne parcourant une référence de masse peut faire office d'antenne réceptrice, conduisant les agressions électromagnétiques vers les composants électroniques sensibles. Cette même ligne peut également être considérée comme une antenne émettrice de perturbations car les données transportées, qu'il s'agisse de signaux utiles ou parasites, sont susceptibles de rayonner un champ dans son environnement proche.

Pour cette raison, la prédiction des comportements des lignes de propagation prend une place fondamentale dans l'étude des couplages électromagnétiques d'un grand système.

Nous appelons ligne de transmission, un conducteur disposé parallèlement à une référence de potentiel qui peut être composée d'un plan métallique ou de tout autre

conducteur. Lorsque la ligne satisfait les conditions de la propagation transverse électromagnétique ou *TEM*, les calculs peuvent être menés analytiquement ou au moyen de la résolution des équations des télégraphistes. La propagation *TEM* signifie que l'énergie électromagnétique rayonnée transversalement à la ligne est de faible amplitude au regard de l'énergie transportée dans la direction longitudinale. On marque cette condition implicitement satisfaite dès que la longueur d'onde du signal transverse est supérieure à l'espacement h de la ligne rapportée au conducteur de référence. En pratique, on admet qu'un rapport supérieur à dix est amplement suffisant. Sous ces conditions, le calcul de l'induction d'une onde peut être réalisé moyennant les développements présentés dans la section suivante [I.6].

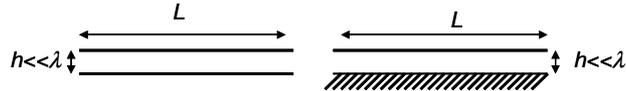


Fig I.17 : Hypothèse sur les lignes de transmission

I.2.2.2.1 Equation des télégraphistes d'une ligne monofilaire

Le schéma électrique d'un petit tronçon de ligne de longueur dz supposé inférieur à la longueur d'onde, est présenté sur la Fig I.18.

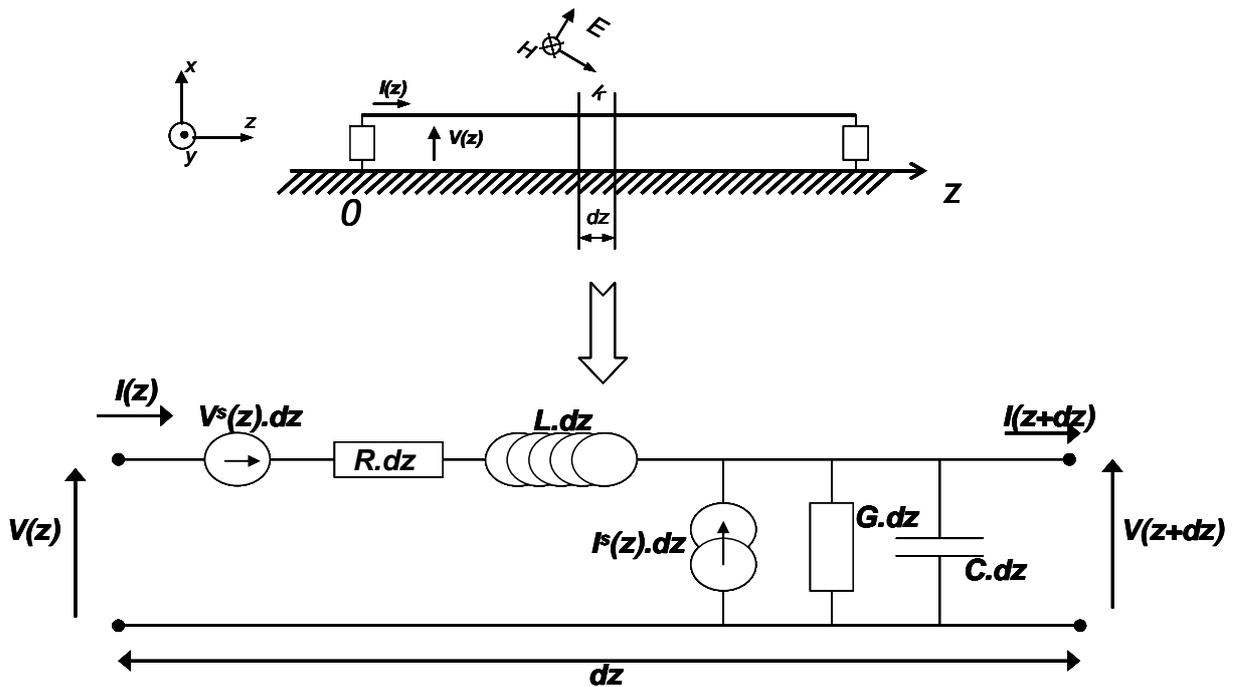


Fig I.18 : Schéma électrique équivalent d'un élément de ligne de transmission monofilaire

Rappelons que ce modèle est applicable pour un plan de référence infini, de façon à utiliser les propriétés de symétries. S'il s'agit d'un conducteur autre qu'un plan, le mécanisme est plus compliqué car il s'y superpose une induction de mode commun qu'on ne peut résoudre qu'à l'aide d'un calcul numérique.

En général, les phénomènes de propagation et de couplage sont caractérisés par les éléments linéaires répartis L et C , respectivement l'inductance linéaire et la capacité linéaire du tronçon de ligne. Les pertes statiques, les pertes par effet de peau et les pertes dans les diélectriques sont représentées par la résistance linéaire R et la conductance linéaire G . Sous les hypothèses d'une ligne sans perte, ces éléments peuvent être omis.

Les sources de tensions et de courants présentes sur un tronçon de câble peuvent illustrer une agression *EM* localisée ou distribuée sur une partie de la ligne comme c'est le cas de la *Fig I.18*. Les sources de tensions et de courants seront déterminées en effectuant une transformation basée sur les lois de l'induction entre les grandeurs physiques électromagnétiques (*E* et *H*) et électriques (V^s et I^s)

Les vecteurs *E* (en $V.m^{-1}$) et *H* (en $A.m^{-1}$) sont les champs électriques et magnétiques incidents au système conducteur plan de référence. Les grandeurs usuelles de la théorie des circuits électriques sont les tensions et courants sources V^s (Volt) et I^s (Ampère).

La source de courant représente le couplage électrique pur pour une onde parvenant sous incidence rasante par rapport au plan de masse, avec une direction de propagation perpendiculaire au conducteur et une polarisation telle que le vecteur champ électrique E_x soit normal au plan de référence. L'induction de charges positives et négatives créée sur les deux conducteurs, et sur un élément dz infinitésimal, est modélisée par la source de courant $I^s.dz$ que l'on obtient par la formule analytique suivante :

$$I^s = -j\omega C \int_0^h E_x .dx \quad (I.14)$$

La source de tension représente le couplage magnétique pur produit par l'onde incidente ayant une direction de propagation normale au plan de référence et une polarisation telle que le champ magnétique soit perpendiculaire à la ligne et le champ électrique parallèle. Le champ magnétique H_y génère un flux entre les deux conducteurs qui donne naissance à une force électromotrice modélisée par la source de tension $V^s.dz$ que l'on obtient par la formule analytique suivante :

$$V^s = j\omega\mu_0 \int_0^h H_y .dx \quad (I.15)$$

Généralement, les couplages électriques et magnétiques surviennent de manière simultanée. L'onde incidente peut alors provenir de la manière présentée sur la *Fig I.18* pour générer un couplage électromagnétique hybride. Dans ce cas, les deux couplages interviennent simultanément avec des valeurs de mêmes ordres de grandeurs.

Les lois de Kirchhoff appliquées au réseau de la *Fig I.18* permettent d'écrire les équations des télégraphistes des courants et tensions le long de la ligne.

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -Z.I(z) + V^s(z) \quad (I.16)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -Y.V(z) + I^s(z) \quad (I.17)$$

Z et *Y* sont respectivement les impédances et admittances linéiques de l'élément dz de la ligne et dépendent des éléments linéiques :

$$Z = R + jL\omega \quad (I.18)$$

$$Y = G + jC\omega \quad (I.19)$$

Les équations de propagation sont alors obtenues par différentiation des formules (I.16) et (I.17) et en les combinant.

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} - Z.Y.V(z) = \frac{\partial V^s(z)}{\partial z} - Z.I^s(z) \quad (I.20)$$

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} - Y.Z.I(z) = \frac{\partial I^s(z)}{\partial z} - Y.I^s(z) \quad (I.21)$$

On rappelle l'équation d'onde en courant suivante :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (I.22)$$

Les équations (I.20) et (I.21) ont pour solution les expressions suivantes avec V_i et V_r les ondes progressives et rétrogrades.

$$V(z) = V_i e^{-\gamma z} + V_r e^{\gamma z} \quad (I.23)$$

$$I(z) = I_i e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z} \quad (I.24)$$

La constante de propagation γ de la ligne qui apparaît dans ces dernières équations dépend des paramètres linéiques de la ligne :

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z.Y} = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} \quad (I.25)$$

α (népers/m) représente l'atténuation de la ligne. La partie imaginaire β (rad/m) est la constante de phase.

Enfin, l'impédance caractéristique Z_c de la ligne est définie par :

$$Z_c = \frac{V_i}{I_i} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} \quad (I.26)$$

I.2.2.2.2 Résolution modale des lignes multifilaires

La généralisation du schéma de la ligne monofilaire à un réseau de trois faisceaux multiconducteur en parallèle aboutit au schéma électrique de la Fig I.19 auquel est associé un système à trois équations de propagation. Pour simplifier les notations, nous utiliserons la forme matricielle qui permettra notamment une bonne représentation des divers couplages électromagnétiques fil à fil par l'intermédiaire de termes extra diagonaux apparaissant dans les matrices impédances et admittances linéiques.

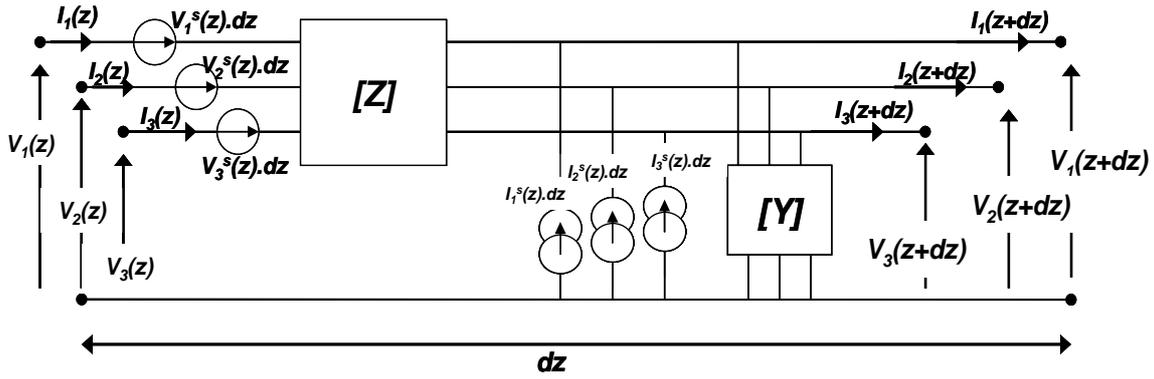


Fig I.19 : Schéma électrique équivalent d'un élément de ligne de transmission multiconducteur

L'équation (I.16) exprimant les tensions $V_i(z)$ présentes sur chacun des trois conducteurs surmontant un plan de référence (Fig I.19), est réécrite sous la forme matricielle.

$$\frac{\partial[V(z)]}{\partial z} = -[Z][I(z)] + [V^s(z)] \quad (I.27)$$

L'équation (I.17) exprimant les courants des trois conducteurs, prend la forme suivante :

$$\frac{\partial[I(z)]}{\partial z} = -[Y][V(z)] + [I^s(z)] \quad (I.28)$$

Les vecteurs tensions et courants et les matrices $[Z]$ et $[Y]$ sont donc en trois dimensions. En différenciant les équations précédentes, nous obtenons les équations d'onde du système :

$$\frac{\partial^2[V(z)]}{\partial z^2} - [Z][Y][V(z)] = \frac{\partial[V^s(z)]}{\partial z} - [Z][I^s(z)] \quad (I.29)$$

$$\frac{\partial^2[I(z)]}{\partial z^2} - [Y][Z][I(z)] = \frac{\partial[I^s(z)]}{\partial z} - [Y][I^s(z)] \quad (I.30)$$

Dans ces expressions figure le produit des matrices $[Z].[Y]$ dont les coefficients traduisent la propagation sur ces n conducteurs.

La résolution des équations (I.28) ou (I.29) nécessite de distinguer deux situations physiques suivant que les conducteurs soient contenus dans un milieu diélectrique homogène ou qu'ils soient revêtus de gaines diélectriques formant un espace hétérogène.

I.2.2.2.1 Conducteurs contenus dans un milieu homogène

Dans le premier cas, les courants et tensions déterminés sur chaque conducteur se propagent à des vitesses identiques. En conséquence, sur un groupe de n conducteurs de dimensions longitudinales infinies se propageront n ondes progressives rapportées à une vitesse identique v strictement égale à la vitesse de propagation des ondes dans le milieu homogène.

En conséquence, le produit des matrices inductance et capacité est représenté par une matrice diagonale dont les coefficients sont tous identiques et strictement égaux à l'inverse du carré de la vitesse de propagation, soit avec $[1]$, la matrice identité :

$$[C][L] = [L][C] = [1] \frac{1}{v_0^2} \quad (I.31)$$

On en déduit alors les matrices $[\gamma]$ des constantes de propagation et $[Z_c]$, des impédances caractéristiques par analogie directe avec la ligne monofilaire.

$$[\gamma] = \sqrt{[Z][Y]} = \sqrt{([R] + j[L]\omega)([G] + j[C]\omega)} \quad (I.32)$$

$$[Z_c] = \sqrt{[Z][Y]^{-1}} = [\gamma][Y]^{-1} = [\gamma]^{-1} \cdot [Z] \quad (I.33)$$

Dans le cas où les matrices caractérisant les pertes $[R]$ et $[G]$ ne sont pas diagonales, la résolution se fait par réduction des valeurs propres.

La résolution des équations de propagation nous donne finalement les équations suivantes

$$V_n(z) = V_{0n} e^{-\gamma z} \quad (I.34)$$

$$I_n(z) = I_{0n} e^{-\gamma z} \quad (I.35)$$

I.2.2.2.2 Conducteurs comprenant une gaine diélectrique

Dans le cas d'une ligne plongée dans un diélectrique hétérogène, le produit des matrices inductance et capacité n'est plus diagonal et ces matrices ne respectent plus la propriété de commutativité, soit :

$$[C][L] \neq [L][C] \neq [1] \frac{1}{v_0^2} \quad (I.36)$$

La résolution de l'équation d'onde nécessite alors le passage aux solutions propres désignées par la suite au moyen des vecteurs et matrices portés en lettres minuscules, l'équation d'onde dans la base propre s'exprime alors dans le cas où le courant source est nul :

$$\left(\frac{d^2 I}{dt^2} \right) - (\gamma^2)(I) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d^2 i}{dt^2} \right) - (\Gamma^2)(i) = 0 \quad (I.37)$$

Le passage dans la base propre donne une matrice (Γ^2) purement diagonale dont les coefficients découlent de la résolution de l'équation aux valeurs propres, soit:

$$[\gamma^2] - \lambda[1] = 0 \quad \rightarrow \quad (\Gamma^2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (I.38)$$

Ainsi pour une ligne de dimension infinie, les solutions constituées des courants et tensions exprimés dans la base propre forment un ensemble de n ondes progressives, dont les vecteurs courants et tensions possèdent pour éléments :

$$\text{Mode "n"} \rightarrow \begin{cases} i_n(z) = i_{0n} e^{-\Gamma_n z} \\ v_n(z) = v_{0n} e^{-\Gamma_n z} \end{cases} \quad (I.39)$$

Courants et tensions modaux sont alors reliés par l'impédance caractéristique modale z_{cn} .

$$v_{0n} = z_{cn} i_{0n} \quad (I.40)$$

La détermination des impédances caractéristiques modales s'obtient par la recherche des matrices (T_i) et (T_v) effectuant le passage des bases originales aux bases propres, les indices i et v se rapportent respectivement aux courants, puis, aux tensions.

$$\begin{aligned} (I) &= (T_i)(i) \\ (V) &= (T_v)(v) \end{aligned} \quad (I.41)$$

La seconde équation des télégraphistes exprimée dans la base propre prend pour forme:

$$-\left(\frac{dI}{dz}\right) = j\omega(C)(V) \quad \rightarrow \quad -\left(\frac{di}{dz}\right) = j\omega(c)(v) \quad (I.42)$$

De cette transformation, on montre aisément que la matrice capacité (c) exprimée dans la base propre devient purement diagonale, soit :

$$(c) = (T_i)^{-1}(C)(T_v) \quad (I.43)$$

L'impédance caractéristique attachée au mode n est donc le rapport liant la constante de propagation Γ_n du mode considéré et de l'admittance linéique c_n correspondante, soit :

$$z_{cn} = \frac{\Gamma_n}{jc_n \omega} \quad (I.44)$$

Plus généralement, on peut adjoindre au mode n la vitesse modale v_{0n} reliée à la constante de propagation par l'expression usuelle:

$$\Gamma_n = j \frac{\omega}{v_{0n}} \quad (I.45)$$

L'extension de ce raisonnement amène à définir des inductances modales (l) contenues dans l'expression duale de la relation, soit:

$$(l) = (T_v)^{-1}(L)(T_i) \quad (I.46)$$

Toutes ces propriétés se résument à une relation extrêmement simple entre le produit des matrices inductance et capacité modales et la matrice (Γ^2) :

$$(\Gamma^2) = -\omega^2 (c)(l) = -\omega^2 (T_i)^{-1}(C)(L)(T_i) \quad (I.47)$$

L'impédance caractéristique du mode n est donc donnée par la racine carrée du rapport de l'inductance et de la capacité linéiques appartenant à ce mode, soit :

$$z_{cn} = \sqrt{\frac{l_{mn}}{c_{mn}}} \quad (I.48)$$

Pour des lignes multifilaires comportant plus de deux conducteurs la recherche des valeurs et vecteurs propres peut s'effectuer à l'aide de méthodes numériques appropriées. Dans le cas particulier d'une ligne bifilaire située à proximité d'une référence de potentiel, la structure des modes propres se dissocie en un mode commun (ou mode homopolaire) et un mode différentiel.

La théorie des lignes de transmission est, à ce stade d'étude, relativement difficile à appliquer à des systèmes de câblage complexes.

Pour cette raison, dans les années 1990, *J.P Parmantier* [I.7] de l'Onera a repris les travaux sur la topologie instaurés 10 ans plus tôt par *Carl E. Baum* [I.8] de l'Air Force Research Laboratory, pour l'appliquer à l'étude des couplages électromagnétiques sur des réseaux de câblage complexes.

Nous introduisons dans la partie suivante l'analyse topologique des couplages électromagnétiques.

1.2.3 Description topologique des couplages EM

1.2.3.1 Principe physique de l'assemblage topologique

La démarche topologique est l'analyse des interactions *EM* rencontrées sur les divers niveaux de pénétration d'une perturbation électromagnétique. En effet, la présence de frontières plus ou moins perméables aux agressions électromagnétiques amène à considérer l'organisation d'un grand système comme un assemblage de volumes topologiques. Chaque volume est caractérisé par une frontière physique qui sera dans la plupart des cas, constituée

par un élément de protection, à savoir un blindage, un filtre ou tout autre artifice interposé dans la progression de la perturbation.

Pour concrétiser cette démarche, nous considérons l'illumination d'un véhicule automobile par un champ électromagnétique comme le montre la Fig I.20.

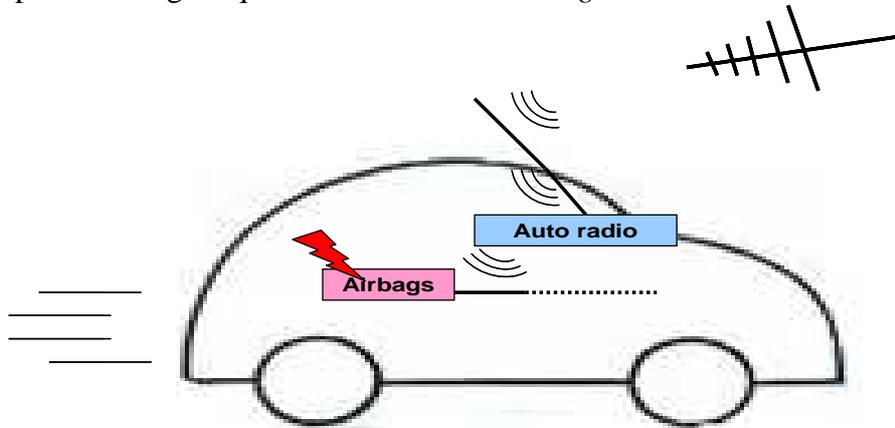


Fig I.20 : Exemple d'agression EM d'un système

On considère le cas simplifié d'une agression EM générée par une première antenne extérieure qui induit une perturbation sur une deuxième antenne qui peut être l'antenne radio de la voiture. A son tour, cette antenne va rayonner un champ EM à l'intérieur du véhicule qui sera à son tour capté par une troisième antenne constituée par exemple de la ligne de transmission du déclencheur de l'airbag. Dans le pire des cas, si l'agression est assez importante, si la caisse de la voiture se comporte comme une cavité résonante et si les lignes de transmission du déclencheur de l'airbag sont dans des zones de champ EM fort dont le couplage est rendu efficace par des conditions de transmission adéquates, l'airbag pourrait se déclencher inopinément.

A partir de ce raisonnement physique préliminaire, nous allons construire le diagramme topologique détaillé dans la prochaine section.

I.2.3.2 Constitution du graphe topologique

L'inventaire des différentes frontières ou protections qui atténuent le champ électromagnétique vont constituer des surfaces topologiques qui délimitent des volumes évoqués en préambule. Nous ferons l'hypothèse que ces volumes peuvent être tous indépendants, cela signifie que l'énergie qui a pénétré d'un volume vers un autre est suffisamment atténuée pour négliger l'influence de sa rétroaction. Il s'agit en terminologie anglophone de l'approche top down associée à des hypothèses de couplages faibles. L'étude des volumes et surfaces du système conduit à l'établissement du diagramme topologique du problème. La Fig I.21 propose un découpage topologique du système.

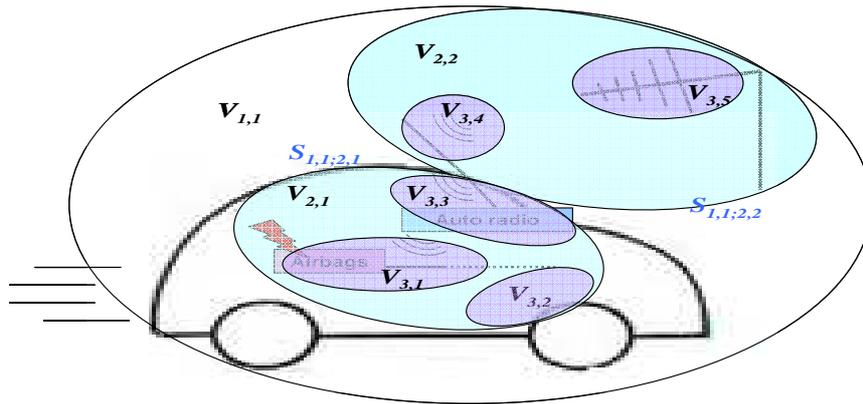


Fig I.21 : Découpage topologique

Les i sous volumes $V_{3,i}$ de niveaux topologiques les plus bas donnent pour chaque sous-système une représentation physique adaptée.

$V_{3,1}$ correspond au volume représentatif du câblage de la voiture, relié au circuit imprimé commandant le déclencheur de l'airbag. Pour modéliser $V_{3,1}$, nous choisirons par exemple la théorie des circuits pour représenter les composants actifs de l'airbag. La théorie des lignes multiples pourra quant à elle permettre de simuler une partie du réseau de câble.

Le volume $V_{3,2}$ est la structure métallique de la voiture. Les agressions électromagnétiques introduites dans ce volume, généreront des zones d'amplitude élevées directement liées aux dimensions et aux longueurs d'onde des perturbations. Pour cela nous pourrions par exemple choisir un outil de type full wave comme la *FDTD* qui présente l'avantage de bien caractériser des structures géométriques complexes.

$V_{3,3}$ représente le récepteur radio comprenant la partie du câblage présente dans la caisse de l'automobile reliant les circuits actifs de l'autoradio et l'antenne présente à l'extérieur du véhicule. Les phénomènes physiques associés sont du même ordre que le volume $V_{3,1}$.

$V_{3,4}$ et $V_{3,5}$ sont respectivement l'antenne radio extérieure de la voiture et l'antenne source des perturbations, toutes deux surdimensionnées devant la longueur d'onde.

Les couplages électromagnétiques en champ lointain entre ces deux antennes peuvent être caractérisés analytiquement dans le volume topologique $V_{2,2}$.

Les trois sous volumes présents à l'intérieur de la caisse du véhicule, $V_{3,1}$ à $V_{3,3}$ sont regroupés dans le volume $V_{2,1}$. Les interactions entre tous les volumes $V_{3,i}$ sont de type couplages *EM*.

Finalement, le volume $V_{1,1}$ connecte les deux sous volumes $V_{2,i}$ par l'intermédiaire du couplage par conduction entre les deux antennes intérieure et extérieure de la voiture.

De manière simplifiée, on représente ces volumes et surfaces à l'aide d'un diagramme topologique illustré Fig I.22.

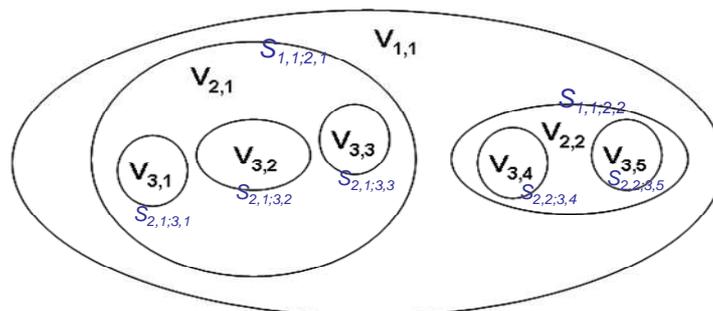


Fig I.22 : Diagramme topologique du système.

Le problème global est ainsi réduit à plusieurs problèmes partiels limités aux volumes topologiques notés dans la figure $V_{i,j}$. i représente le niveau de blindage du volume et j le numéro d'identification de ce volume parmi les autres volumes de même niveau de blindage. Les surfaces $S_{i,j;k,l}$ identifiées sur la Fig 1.22, caractérisent les frontières topologiques du système, c'est-à-dire que les niveaux des signaux transmis à travers cette paroi sont négligeables.

Les surfaces topologiques $S_{1,1;2,1}$ et $S_{1,1;2,2}$ décrivent la frontière topologique entre l'intérieur et l'extérieur de l'habitacle du véhicule. Le transfert d'énergie entre ces deux zones sera localisé et analysé selon la forme de l'interaction : Ce peut-être le couplage en mode conduit par l'antenne radio, ou les couplages électromagnétiques en mode rayonné s'infiltrant par les ouvertures de la caisse.

Entre les quatre antennes et la cavité, il existe des interactions *EM* représentées de manière plus avantageuse par un graphe topologique présenté dans la Fig 1.23 suivante :

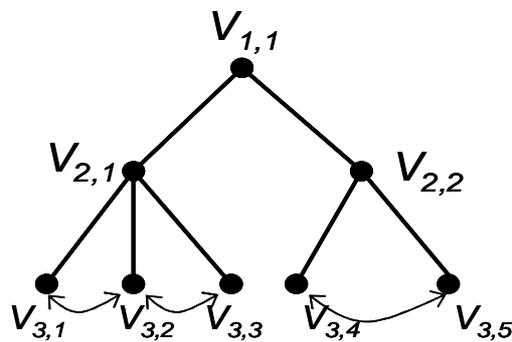


Fig 1.23 : Graphe topologique du système complexe.

Dans celui-ci, on simplifie le système complexe en privilégiant certains axes de pénétration de l'énergie *EM* afin de résoudre le problème dans son ensemble.

Le graphe topologique traduit les interactions *EM* entre les différents volumes topologiques. A chaque volume, on associe un nœud du graphe, à chaque surface délimitant deux volumes topologiques, on associe une arête reliant les deux nœuds correspondant aux volumes.

On a choisi de représenter les interactions entre la ligne connectée à l'airbag et la cavité vide ; la cavité et la partie intérieure de l'antenne connectée à la radio, et enfin le couplage existant entre les deux antennes présentes à l'extérieur du véhicule.

Cette représentation arborescente permet d'agencer plus facilement les interactions de la structure mais permet surtout de se prêter parfaitement à une description informatique, contrairement au diagramme.

A ce stade de l'étude, on peut faire appel à toutes les théories des graphes pour simplifier la représentation du système.

L'avantage de la méthode topologique est déjà clair à ce stade. Chaque sous-volume peut être représenté indépendamment de ses voisins.

Le volume $V_{3,1}$ pourrait à plus grande échelle, représenter le réseau de câblage entier du véhicule et être modélisé par un outil adapté.

Sachant que les réseaux de câbles jouent un rôle majeur dans la description topologique de tout grand système, *J.P.Parmantier* a mis en place dans les années quatre vingt dix un formalisme permettant l'étude de ces réseaux de câbles au moyen des paramètres S dont nous allons brièvement rappeler le contexte théorique.

I.2.3.3 Description topologique d'un réseau de câbles multiconducteurs arborescents

La description topologique d'un réseau de câbles multiconducteurs arborescents s'effectue en associant à chaque branche du réseau un « tube » et sur chaque bifurcation aussi élémentaire soit-elle, une « jonction », illustrés dans le réseau de la figure suivante. Ces deux nouveaux termes seront détaillés dans les paragraphes suivants.

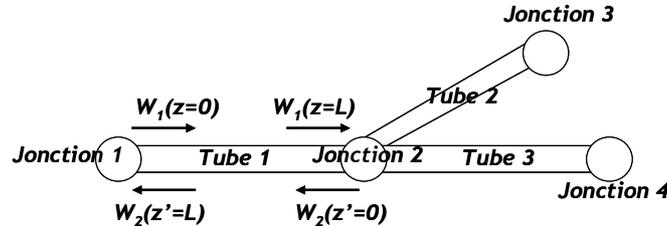


Fig I.24 : Description topologique d'un réseau comportant une bifurcation

Chaque tube comportera deux ondes W_i et W_j dont les directions de propagation seront opposées, les ondes seront reliées aux courants et tensions physiques définis sur chacun des conducteurs composant le tube.

La propagation d'une onde sur le tube sera associée à une matrice propagation (Γ) alors que le transfert des ondes au niveau des jonctions situées aux deux extrémités d'un tube demandera l'application des conditions aux limites imposées aux paramètres S également attachés aux propriétés de propagation des ondes.

Ondes, paramètres S et matrice de propagation (Γ) seront finalement fusionnés pour faire l'équation *B.L.T.* définie au paragraphe 1.2.3.7, dont la résolution fournira l'amplitude des courants et tensions présentes sur les jonctions du réseau.

I.2.3.4 Ondes progressives et rétrogrades

L'objectif est de calculer les tensions et courants localisés aux extrémités des lignes de propagation que l'on représentera par les vecteurs inconnus $[V(z)]$ et $[I(z)]$. L'adoption d'un formalisme spécifique est indispensable pour l'analyse d'un réseau de câblage par les paramètres S .

Pour cela, nous utiliserons un changement de variable pour manipuler des grandeurs de type « onde » se propageant en sens contraires que l'on nommera onde progressive W_i , ou $[V(z)]_+$ et rétrograde W_j , ou $[V(z)]_-$. On les définit par les expressions suivantes :

$$W_i = [V(z)]_+ = [V(z)] + [Z_c(z)].[I(z)] \quad (I.49)$$

$$W_j = [V(z)]_- = [V(z)] - [Z_c(z)].[I(z)] \quad (I.50)$$

A chaque jonction, sera attribuée une matrice des paramètres S renseignant le comportement des ondes réfléchies ou transmises pour chaque conducteur.

Les équations différentielles (I.27) et (I.28) sont reprises en effectuant les changements de variables. Nous obtenons les équations de Kirchhoff en ondes :

$$\frac{\partial[V(z)]_+}{\partial z} + [\gamma].[V(z)]_+ = [V^s(z)]_+ \quad (I.51)$$

$$\frac{\partial[V(z)]_-}{\partial z} - [\gamma].[V(z)]_- = [V^s(z)]_- \quad (I.52)$$

L'équation de Kirchhoff en ondes des courants s'obtient de la même manière et sera identique aux expressions précédentes.

Un deuxième changement de variable $z'=z-l$ permet pour l'onde rétrograde d'être considérée comme une deuxième onde progressive mais de direction de propagation opposée partant d'une extrémité de la ligne.

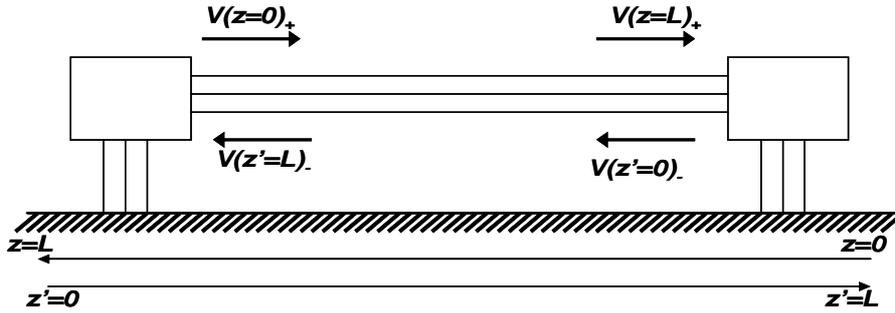


Fig I.25 : Ondes progressives et rétrogrades

En considérant seulement les ondes de tension progressives que l'on notera $W(z)$, nous obtenons les solutions des équations précédentes (I.51) et (I.52) :

$$[W(z=L)] = [V(z=L)]_+ = e^{-[\gamma]L} \cdot [V(z=0)]_+ + \int_0^L e^{-[\gamma] \cdot (L-z)} \cdot [V^s(z)]_+ \cdot dz \quad (I.53)$$

$$[W(z'=L)] = [V(z'=L)]_+ = e^{-[\gamma]L} \cdot [V(z'=0)]_+ + \int_0^L e^{-[\gamma] \cdot (L-z')} \cdot [V^s(z')]_+ \cdot dz' \quad (I.54)$$

Ces expressions contiennent un terme représentatif de la propagation des ondes sur les conducteurs et un deuxième terme caractérisant la propagation d'une onde source $[V^s(z)]_+$.

Ces changements de variables vont permettre une représentation conviviale en utilisant des « tubes » pour la propagation des signaux, et des « jonctions » pour les connexions entre lignes et pour définir les charges linéaires aux extrémités.

I.2.3.5 Les tubes

Nous posons la relation liant les ondes progressives et rétrogrades à un point d'abscisse z en fonction des tensions et courants présents sur les conducteurs du faisceau.

$$[W(z)] = [V(z)] + [Zc].[I(z)]' \quad (I.55)$$

La figure suivante illustre la notion de tube.

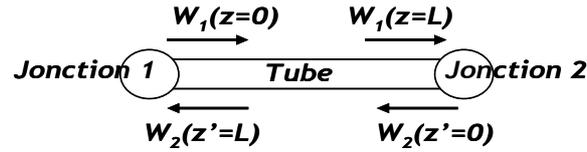


Fig I.26 : Ondes se propageant sur un tube

Les ondes progressives sont les ondes sortantes des jonctions. Ces ondes sont toujours repérées par une coordonnée (z ou z' ici) nulle. Nous noterons donc :

$$[W(0)] = \begin{bmatrix} [V(z=0)]_+ \\ [V(z'=0)]_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(z=0) \\ W_2(z'=0) \end{bmatrix} \quad (I.56)$$

La matrice gamma de propagation dans le tube sera définie de la manière suivante :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} e^{-[\gamma]L} & (0) \\ (0) & e^{-[\gamma]L} \end{bmatrix} \quad (I.57)$$

- Le lien avec les expressions des équations (I.53) et (I.54) permet de définir la matrice des ondes sources suivante :

$$[W^s] = \begin{bmatrix} \int_0^L e^{-[\gamma](L-z)} \cdot [V^s(z)]_+ \cdot dz \\ \int_0^L e^{-[\gamma](L-z')} \cdot [V^s(z')]_+ \cdot dz' \end{bmatrix} \quad (I.58)$$

En généralisant les équations (I.55) et (I.56), la propagation d'une onde sur un tube i s'écrit donc sous la forme suivante :

$$[W_i(L)] = [\Gamma_i] \cdot [W_i(0)] + [W_i^s] \quad (I.59)$$

Dans le cas où les lignes sont immergées dans un diélectrique hétérogène, une transformation dans la base modale permettra de diagonaliser la matrice de propagation \mathcal{Y} . Les ondes $W(z)$ seront alors déterminées dans la base modale. On retrouvera ensuite par retour dans la base réelle les valeurs des tensions et courants aux niveaux de chaque jonction.

I.2.3.6 Les jonctions

Dans un réseau topologique, on trouve classiquement deux types de jonctions. Les jonctions dites idéales, permettent de connecter des tubes entre eux pour caractériser par exemple des bifurcations ou des connexions entre câbles. La jonction 2 de la Fig I.24 est idéale.

Les jonctions terminales, 1,2 et 4 de la Fig I.24, permettront de définir les éléments linéaires présents aux extrémités des lignes. Nous insistons sur le fait que la caractérisation des jonctions par les paramètres S exige des hypothèses linéaires sur les éléments électroniques localisés aux extrémités. Ce peut être des résistances, des inductances ou des capacités reliant

les conducteurs du tube à la référence de masse (propagation en mode commun) ou à un conducteur de référence (propagation en mode différentiel).

Une jonction n est définissable par la relation liant les ondes entrantes et sortantes de cette jonction n directement liée par sa matrice $[S]_n$.

$$[W(0)]_n = [S]_n \cdot [W(L)]_n \quad (I.60)$$

Les termes de cette matrice S peuvent également être caractérisés à partir des matrices impédance $[Z_n]$ (ou admittance $[Y_n]$) d'une jonction n et de la matrice des impédances $[Z_c]$ (ou admittances $[Y_c]$) caractéristiques des conducteurs.

$$[S]_n = \frac{[W(0)]_n}{[W(L)]_n} = \frac{[V(z)] - [Z_c(z)] \cdot [I(z)]}{[V(z)] + [Z_c(z)] \cdot [I(z)]} = \frac{[Z_n] - [Z_c(z)]}{[Z_n] + [Z_c(z)]} \quad (I.61)$$

I.2.3.7 L'équation B.L.T

Les équations caractéristiques des tubes (éq (I.59)) et des jonctions (éq (I.60)), sont généralisées à l'ensemble du réseau. Pour cela, les vecteurs et matrices précédemment identifiés, deviendront les éléments constituant des « super-vecteurs » ou des « super-matrices ».

Finalement, la combinaison des deux équations obtenues conduit à l'équation *BLT*, où l'inconnue est le super-vecteur d'ondes sortantes $[W(0)]$.

$$([1] - [S][\Gamma])[W(0)] = [S][W_s] \quad (I.62)$$

Le terme *BLT* se réfère aux trois auteurs d'un article dans lequel cette équation apparaît : *C.E. Baum, T.K. Liu et F. Tesche*.

La partie gauche de l'équation est une caractéristique intrinsèque des couplages propres au réseau, tant sur les lignes que sur les jonctions. La partie droite caractérise les couplages externes sur l'ensemble du réseau.

Les « super-vecteurs » courants et tensions sont ensuite simplement exprimés en fonction de $W(0)$, $W(L)$ (ondes entrantes sur une jonction à la position $z=L$) et la matrice impédance caractéristique $[Z_c]$.

Cette méthode a permis la création du logiciel *CRYPTE*[®]. Basée sur les paramètres S , elle offre une bonne modélisation des modes commun et différentiel, prend en compte les pertes des lignes et donne une bonne réponse en fréquence. Son utilisation est relativement simple et demande un temps de calcul raisonnable. Il reste néanmoins le problème de la simulation d'impédance non linéaire.

L'outil suggère également de connaître les paramètres primaires R , L , C et G et les impédances de couplage entre les câbles parcourant un grand système. Soit les modèles de la théorie des lignes sont suffisants pour modéliser ces sous volumes, soit des mesures localisées sont nécessaires pour obtenir les paramètres S .

I.2.3.8 Exemple de modélisation par l'équation BLT

Dans sa thèse, *Marc Olivas Carrion* a développé l'analyse et la modélisation du canal de propagation d'un véhicule par l'équation *BLT* [I.9]. La cohabitation des systèmes électriques dans un véhicule moderne est illustrée *Fig I.27* :

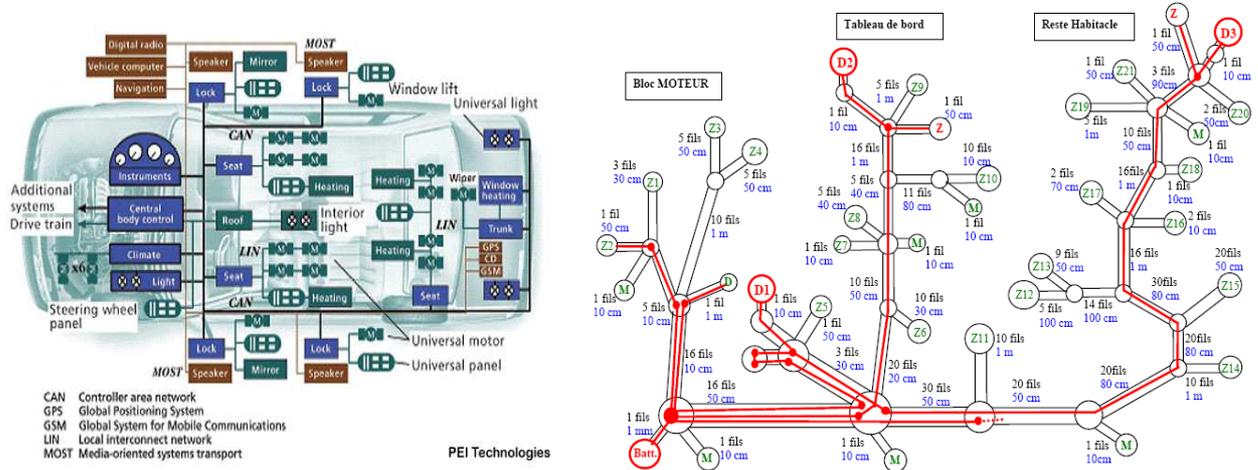


Fig I.27 : Réseau topologique du câblage d'une voiture

On distingue trois types de protocoles de télécommunication : CAN, LIN et MOST.

Le *CAN (Controller Area Network)* est un bus de communication peu coûteux développé dans les années 80 pour des applications d'électroniques embarquées dans les automobiles. Le débit maximal d'utilisation est de 1Mbit/s brut. Ce protocole permet de relier le calculateur central (*Central Body Controller*) et les autres calculateurs comme celui du coffre, des feux de croisement, de l'*ABS* ou de la direction assistée. Le support physique de transmission des données s'effectue par des paires différentielles torsadées.

Le *LIN (Local Interconnect Network)* est un standard plus récent développé en 1999 basé sur la communication multiplexée à bas coût pour l'automobile. Le débit du *LIN* ne dépasse pas 20 kbit/s. Il permet la transmission des ordres reçus par les calculateurs vers les différents actionneurs. Le support physique de transport des signaux est le fil simple référencé au plan de masse de la voiture.

Enfin, le *MOST (Media Oriented Systems Transport)*, n'a aucun intérêt dans le cadre de cette thèse car ce protocole est basé sur un bus en fibre optique. Il est utilisé pour les applications nécessitant des débits supérieurs à 10 Mbit/s.

Notons également dans le contexte de la *CEM*, la présence de protocole de communication sans fil comme le *Bluetooth*, utilisé pour le contrôle de la pression des pneus ou pour les péages automatiques.

Bien que cet outil apporte une aide importante à l'analyse et à la prédiction des couplages *EM* internes, la simulation d'un grand système tel un avion actuel n'est pas encore envisageable.

Finalement, que ce soit un outil numérique basé sur la résolution des équations de Maxwell de type full wave ou 3D, que ce soit des méthodes dérivées d'approximations des équations de Maxwell, que ce soit une méthode basée sur la théorie des lignes de transmission ou sur l'analyse par les paramètres *S*, chacune de ces méthodes numériques offre des avantages spécifiques à un phénomène physique particulier. Actuellement des méthodes

hybrides combinant les points forts de différentes méthodes numériques sont en cours de développement.

I.3 Limites de ces méthodes

Les avantages et inconvénients de toutes ces méthodes sont résumés dans le tableau ci-après.

Méthodes	FDTD	TLM	FEM	BEM	RTA	SOP	PEEC	BLT	Théories circuits
Gamme fréquentielle	BF	BF	BF	BF	HF	HF	BF	BF	BF
Réponse fréquentielle	Large bande	Large bande	Discrète	Discrète	Discrète	Discrète	Large bande	Large Bande	Large Bande
Géométrie complexe	+++	+	++	++	++	+	+	+	+
Temps de calcul	+	+	+	++	+	+++	++	++	+
Facilité d'utilisation	++	++	+	++	++	++	++	++	+++
Etudes des couplages dans cavités	++	+	++	++	+	+++	+	+	++
Etudes des couplages sur câbles	+	++	+	+	+	++	+++	+++	+++

Tableau 1 : Caractéristiques des méthodes de simulation

Finalement, chacune des méthodes répertoriées dans ce tableau, offre de bons résultats de prédiction *EM* pour l'étude d'un phénomène spécifique.

En reprenant l'exemple d'un grand système comme la voiture de la Fig I.1, nous pouvons dissocier l'analyse de ce grand système en utilisant les méthodes les mieux adaptées rappelées dans le tableau précédent.

Pour l'étude des composants non-linéaires connectés au réseau de câbles par l'intermédiaire d'un boîtier, nous pensons par exemple utiliser la *théorie des circuits*. Les équations des diodes de protection seront traitées également par la théorie des circuits dans le domaine temporel, puis avec l'aide d'une Transformée de Fourier, les solutions du système global seront données dans le domaine fréquentiel.

Les aspects multiparamètre et multiéchelle apparaissent bien dans cet exemple. En effet, on peut simplement ajouter l'effet d'un filtre ou d'une diode dans le schéma électrique équivalent et étudier l'effet des dimensions variant de quelques centimètres pour les connexions filaires à quelques micromètres pour les composants actifs.

Le réseau de câblage global de la voiture sera modélisé efficacement par la théorie des lignes de transmission multiples ou par l'analyse topologique des couplages *EM* par les paramètres *S*.

La distribution des champs *EM* dans une cavité possédant une géométrie relativement complexe comme la caisse du véhicule, sera modélisée par un outil de type full wave comme la *FDTD*, ou la *FEM*. Le maillage de l'environnement, permet d'obtenir de bonnes

prédictions du comportement des champs mais avec une mise en œuvre lourde et des temps de calcul parfois un peu long.

Enfin, les techniques numériques basées sur la simulation des processus au niveau élémentaire, ne peuvent prendre en compte l'existence de propriétés uniquement au niveau des grandes échelles. Ces comportements macroscopiques ne transparaissent qu'au travers de macromodèles.

Face à la problématique des grands systèmes, à savoir la prévision *EM* alliant les trois concepts multiparamètre, multiphysique et multiéchelle, nous proposons, non pas encore une nouvelle méthode permettant d'optimiser la modélisation d'un type de système en particulier, mais plutôt un outil général réutilisant les modèles performants préexistants et à même de permettre l'utilisation des modèles aux différentes échelles de descriptions.

Pour harmoniser ces outils, nous utiliserons une interface mathématique commune : l'analyse tensorielle des réseaux électriques instaurée dans les années 1930 par *G.Kron* [I.10].

I.4 Avantage de l'analyse tensorielle des réseaux de G.Kron appliquée à la CEM

De manière similaire à *J.P. Parmantier* [I.7] qui a utilisé la théorie de la topologie de *C.E. Baum* [I.8] pour l'analyse des couplages *EM*, *Olivier Maurice* [I.11] a récemment adapté la méthode de *G.Kron* pour l'étude innovante de la *CEM* des grands systèmes actuels.

Cette méthode est basée sur l'approche topologique des grands systèmes, dans laquelle les multiples couplages électromagnétiques se réduisent à l'interaction entre de nombreux circuits électriques équivalents composés de résistances, inductances et capacités liées à des fém représentatives du contexte d'interférence électromagnétique. L'avantage principal de cette méthode est la résolution de la théorie des circuits par l'outil tensoriel qui permettra la simplification des équations et une approche physique plus souple.

Concrètement, reprenons l'exemple précédent avec les systèmes électroniques que l'on peut trouver dans les véhicules modernes.

La première étape pour prédire le comportement des champs électromagnétiques dans ce système complexe est l'analyse topologique que l'on a présentée dans la partie I.2.3.1. Les diagrammes et graphes topologiques permettront une bonne visualisation du problème. L'ingénieur *CEM* doit se représenter les différents phénomènes physiques cohabitants dans l'environnement hostile. L'analyse topologique permettra donc d'isoler des sous-volumes représentables par des modèles électriques équivalents.

Pour n'importe quel outil numérique aussi performant soit-il, si la représentation physique est mal comprise ou mal modélisée, la prévision sera forcément fautive. Pour cela, nous insisterons sur la deuxième étape que sera l'analyse physique des phénomènes mis en jeu.

Chacun des sous volumes de la voiture sera représenté par un modèle électrique équivalent. Dans l'éventualité du développement d'un logiciel informatique, il pourrait exister une base de données regroupant différents sous systèmes couramment employés en *CEM*.

Dans le cas où la théorie devient trop compliquée à mettre en œuvre, l'ingénieur pourra avoir recours à une mesure localisée.

Ensuite, il faut représenter les différents types de couplages existants entre les sous volumes. Il peut s'agir d'un couplage par conduction ou d'un couplage en mode rayonné entre des circuits électriques représentatifs de phénomènes physiques variés.

Cela peut être l'interaction multiphysique entre un champ EM et une antenne dans laquelle traversent des courants et tensions, ou l'interaction entre un composant actif et un circuit électrique équivalent au comportement thermique du véhicule. L'utilisation d'espaces tensoriels différents choisis parmi les éléments constituant les circuits électriques (mailles, branches, moments), permettra une mise en équation souple des interactions multiphysiques entre les sous-réseaux.

Une fois les interactions représentées, la résolution du système d'équation tensorielle s'effectuera dans l'espace le mieux adapté, pour retrouver les courants perturbés aux niveaux des systèmes électroniques du véhicule.

Le travail de thèse propose finalement une méthode d'analyse originale permettant une approche mixte basée sur un outil mathématique convivial.

L'outil présenté cherche donc à exploiter tous les autres types de réalisations partielles provenant de divers outils numériques, particulièrement basées sur l'analyse topologique et la théorie des circuits, mais aussi utilisant tous les types de modèles disponibles (codes EM 3D « full wave », expérimentations, formules analytiques,...). A cela, l'analyse tensorielle des réseaux électriques permettra une mise en équation souple du système complexe.

Cette méthode permettra une vision plus proche de la physique et d'appréhender, plus clairement qu'une approche 3D, les interactions entre les divers éléments.

***Chapitre II : Principes fondamentaux de
l'analyse tensorielle des réseaux
électriques appliquée à la CEM des
systèmes complexes***

La problématique CEM des grands systèmes actuels, est finalement bien résumée à travers les trois concepts *multiparamètre*, *multiphysique* et *multiéchelle*. Dans ce contexte, l'intérêt de développer un outil général permettant l'utilisation souple de méthodes numériques existantes coordonnées par un formalisme mathématique convivial, permettra aux ingénieurs CEM, une plus grande souplesse pour la compréhension et pour la modélisation de ces grands systèmes. Pour atteindre cet objectif, un minimum d'hypothèses ou approximations sera considéré quant à la prise en compte des multiples phénomènes physiques (d'ordre électrique, thermique ou mécanique...).

Pour répondre à ce besoin, *Olivier Maurice* a appliqué l'analyse tensorielle des réseaux électriques instaurée par *G.Kron* en 1929 [II.1] à [II.5], à la CEM des systèmes complexes.

Ce chapitre est destiné à la présentation générale de cette méthode appelée *MKME* (*Modified Kron's Method for ElectroMagnetic Compatibility*).

La démarche utilisée pour la résolution d'un système complexe par la *MKCE* (*Méthode de Kron appliquée à la Compatibilité Electromagnétique*), est sommairement résumée ci-dessous. L'exemple utilisé est toujours le véhicule de la *Fig.II.1* du chapitre I.

1. La première étape consiste en l'analyse globale du système. L'ingénieur doit comprendre et analyser chacune des interactions possibles dans le grand système. Dans l'exemple de la voiture, nous dissocions l'analyse des réseaux de câbles, les systèmes électroniques présents aux extrémités des liaisons filaires, l'effet thermique sur les composants microélectroniques, le comportement des champs *EM* dans la caisse de la voiture. Selon les fonctions des différents systèmes, l'ingénieur définira des niveaux de risques et des précisions de calcul différents selon les normes CEM à respecter.

2. Une fois que les phénomènes liés au comportement *EM* du système sont localisés, le graphe topologique met en ordre les sous volumes et leurs connexions respectives. La forme arborescente du graphe facilitera le traitement informatique des données.

3. Les sous volumes topologiques sont ensuite représentés par des schémas électriques équivalents ignorant dans un premier temps les multiples interactions entre eux. Cette étape est déterminante pour la précision des résultats qui sont avant tout basés sur l'analyse physique de chaque sous volume à travers un réseau électrique.

4. Chacun de ces schémas électriques équivalents sera mis en équation par la théorie tensorielle des réseaux électriques, basée sur l'observation de ces systèmes dans un espace prédéfini adapté. Nous parlerons d'espaces tensoriels lorsque les grandeurs principales manipulées dans cet espace sont des tenseurs. L'objectif est finalement de permettre une meilleure représentation physique de chacun des sous-systèmes.

Nous obtiendrons finalement des familles de tenseurs covariants et contravariants rattachées à chacun des sous-réseaux dans des espaces tensoriels adaptés au contexte physique d'étude.

5. L'outil tensoriel permettra alors de mettre en jeu les interactions entre les sous-réseaux à travers des opérateurs impédances décrivant les multiples couplages. Ils seront ensuite introduits dans des « supers-tenseurs » caractérisant le système global. Le terme « super-tenseur » est symbolique et non mathématique.

6. L'analyse tensorielle permet d'établir l'équation tensorielle du problème mais ne dit pas comment la résoudre. La résolution du système d'équations permettra alors de prédire le comportement des composants électroniques face à une agression *EM*.

Nous présenterons dans ce chapitre les principes fondamentaux de la *MKCE* en insistant sur l'analyse tensorielle des réseaux qui constitue la base mathématique de cet outil. Les références [II.6] [II.7] [II.8] sont des ouvrages qui présentent mathématiquement l'outil tensoriel.

L'introduction de *M. DENIS-PAPIN* et *A.KAUFMANN* [II.6], résume clairement l'intérêt du formalisme de *Kron* appliqué à des réseaux complexes.

« Face à une multitude de méthodes particulières permettant chacune la mise en équation d'un système physique spécifique représentable par des réseaux électriques équivalents, le calcul tensoriel permet une systématisation qui, non seulement a la propriété de s'appliquer à n'importe quel système quel que soit sa complexité, mais offre également un examen méthodique des circuits, de les décomposer en éléments simples, de les superposer ou de les interconnecter. Finalement, l'analyse tensorielle se révèle être un moyen général de synthèse et d'analyse des réseaux. »

II.1 Analyse topologique des circuits électriques

De la même manière que l'approche topologique pour l'étude des couplages électromagnétiques de *J.P. Parmantier* (chapitre I), le grand système est représenté par un diagramme et un graphe topologique représentatifs du caractère géométrique et des perturbations électromagnétiques mis en jeu entre les différents éléments.

Selon la fonctionnalité, l'utilisation et l'environnement *EM* de celui-ci, le graphe comportera des couplages de différentes natures dont l'ingénieur prendra soin d'étudier la pertinence.

Ce graphe réunit toutes les interactions multiphysiques entre les éléments du système. Il permet pour l'ingénieur d'illustrer dans un même schéma, tous les problèmes liés à la *CEM* des grands systèmes. Il pourra par exemple choisir ou non d'omettre une perturbation pour évaluer son effet vis-à-vis du système global.

Ensuite, chaque sous volume sera représenté par un schéma électrique équivalent, traduit par les concepts de la théorie des graphes.

Nous dessinerons alors un nouveau graphe illustré *Fig.II.1*, dans lequel les niveaux d'interactions sont les nœuds physiques, les branches, les mailles, les réseaux, les cordes, les nœuds virtuels et les moments.

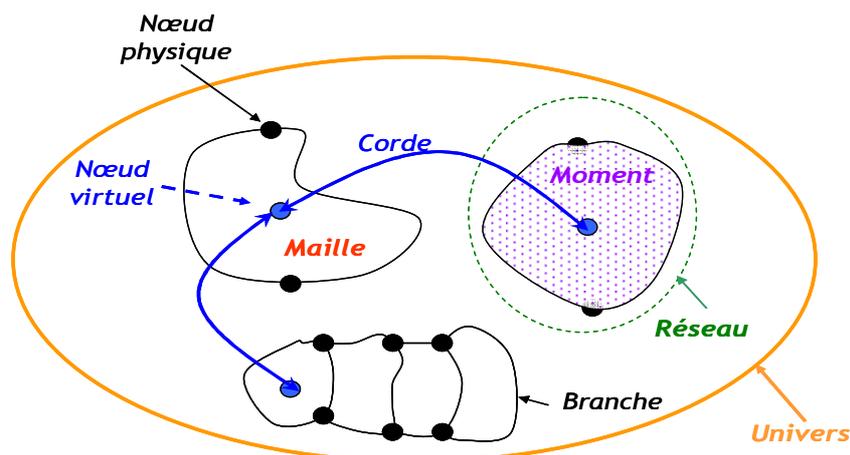


Fig.II.1 : Eléments de graphes d'interaction

Dans ce graphe cohabitent trois réseaux reliés par des cordes représentant des interactions multiphysiques. Nous détaillons les éléments constitutifs de ce graphe.

Une branche matérialise la connexion entre deux nœuds physiques associés avec une orientation spécifique et véhiculant l'information. Des exemples présentés dans la suite du texte montreront qu'une branche peut matérialiser des connexions de natures différentes comme des câbles ou des liaisons hertziennes. La base de la construction des tenseurs manipulés se situe dans l'espace qui contient toutes les branches du problème traité.

Comme dans la théorie des graphes classiques, un nœud physique est une extrémité de branche portant une charge ou un potentiel. De manière plus générale, on peut voir ce nœud physique comme une frontière entre des éléments de natures diverses. Dans ce cas les nœuds seront par exemple porteurs d'information de charge, de masse ou de température.

Une maille est un ensemble de branches formant une circulation fermée. Une maille est au minimum constituée de deux branches et de deux nœuds. La forme des mailles est quelconque et sera donc liée à sa surface. L'information véhiculée dans la maille est l'ensemble des signaux électriques présent sur ses branches.

Un réseau est un ensemble de branches connectées par des nœuds. Il est composé au minimum de deux nœuds physiques et de deux branches et il représente un élément de volume défini dans le graphe topologique.

Une corde est une liaison entre deux objets d'un graphe. Elle matérialise des couplages multiphysiques entre les différents réseaux. Ces cordes peuvent par exemple modéliser un couplage par champ électrique entre deux branches ou un couplage en champ magnétique rayonné entre deux mailles.

Les nœuds virtuels situent les points de connexion entre deux réseaux. Ce peut être dans le cas de deux mailles, deux nœuds disposés à l'intérieur des mailles. Dans le cas où le couplage intervient entre deux branches, le nœud est placé au centre des branches.

Le moment, est le produit d'un flux de courant de maille par la surface de cette maille. L'ensemble des réseaux peut alors se comporter comme un ensemble de moments vu à une certaine distance, et se comporter comme des sources ponctuelles d'ondes EM.

Pour mettre en équation un graphe comme celui-ci, chacun des réseaux sera étudié dans un espace adapté au contexte électromagnétique du système.

Tout d'abord, l'espace des branches noté B , peut être caractérisé soit par les différences de potentiel entre les extrémités de chacune des branches des réseaux, soit caractérisé par le flux de courant circulant dans chacune des branches des réseaux.

L'espace des nœuds est défini par l'ensemble des courants entrant et sortant des N nœuds d'un réseau.

L'espace des mailles noté M , prend cette fois comme référence les flux de circulation fermée d'un ensemble de branche.

L'espace des paires de nœuds noté P , est défini par les différences de potentiels existantes entre deux nœuds d'un réseau. Les paires de nœuds d'un réseau seront établies de manière à décrire chaque ddp de l'espace des branches.

Un flux circulant sur une maille de surface S , revient à manipuler un moment. L'ensemble des moments ainsi décrit forme alors l'espace des moments noté Mom .

A partir de cet espace, nous introduirons enfin l'espace des réseaux qui assimile l'interaction en champ lointain entre sous-réseaux, comme le couplage entre deux sources ponctuelles rayonnantes.

Dans ces différents niveaux d'espaces, siègent des interactions physiques précises. Par exemple dans l'espace des nœuds, nous pourrions reporter les actions des forces de Newton. Les champs électriques agiront plutôt dans l'espace des branches comme une différence de potentiel induite entre les deux nœuds aux extrémités de la branche. Le champ magnétique sera plutôt introduit dans l'espace des mailles entre les flux de courants de circulations fermés.

Enfin, l'ensemble des réseaux va constituer l'univers représentant le système global. Dans d'autres cas, ce super-réseau pourra s'introduire dans un hyper-réseau plus grand encore.

De manière générale, il existe une relation topologique liant les dimensions des espaces décrits précédemment, soit le nombre M de mailles, le nombre B de branches, le nombre N des nœuds et R le nombre de réseaux. De la même manière, il existe une relation liant le nombre P de paires de nœuds, le nombre N de nœuds et le nombre de réseaux R :

$$M = B - N + R \quad \text{et} \quad P = N - R \quad (II.1)$$

Cette approche topologique permettra de mettre en équation les phénomènes physiques caractéristiques des sous-systèmes. Nous allons maintenant introduire l'outil mathématique pour connecter ces sous-systèmes en manipulant les équations dans les divers espaces présentés dans cette partie.

Nous invitons le lecteur à prendre connaissance des bases théoriques et des notations couramment utilisées du calcul tensoriel, essentielles pour la bonne compréhension de la suite du mémoire en se référant à l'*annexe I*.

II.2 Descriptif des grandeurs manipulées

Pour mettre en équation un graphe d'interaction comme celui de la *Fig.II.1*, il faut lister les données dans des tableaux que l'on appellera aussi objets, organisés en matrice. Nous introduirons pour cela les deux types d'objets de nature différentes : les objets de type flux et de type effort.

Ces objets seront considérés comme des tenseurs lorsque nous introduirons les transformations de base de référence ou les transformations entre les espaces topologiques présentés dans le paragraphe précédent.

II.2.1 Les objets et opérateurs

Un objet peut être dans ce contexte, un tenseur, un vecteur, une matrice ou simplement un tableau de données selon ses propriétés de mise en forme. Il existe deux types d'objets se différenciant par la nature physique des éléments qu'ils représentent : l'objet de type effort et de type flux.

Prenons l'exemple du graphe de la Fig.II.2 :

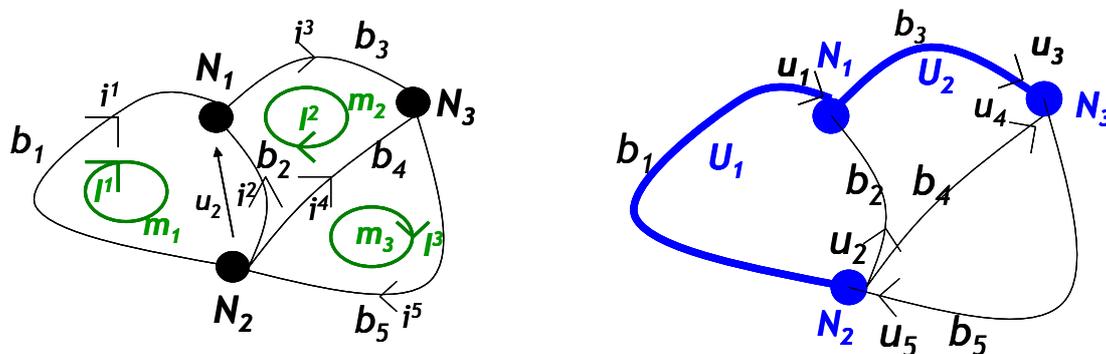


Fig.II.2 : Graphe d'interaction des courants et des ddp

Comme le présente la figure, le graphe d'interaction peut être caractérisé par les courants dans la figure à gauche ou par les ddp dans la figure à droite.

Dans le premier cas, le réseau est décrit dans les espaces des courants de branches et des courants de mailles.

Dans le second cas, il est caractérisé dans les espaces des ddp de branches et des paires de nœuds.

Les deux graphes identiques de la Fig.II.2 illustrent donc cinq espaces de dimensions différentes. L'espace des réseaux est de dimension $R=1$, l'espace des nœuds sera de $N=3$ dimensions et l'espace des courants de branche de dimension $B=5$. En utilisant l'équation (II.1), on obtient facilement la dimension de l'espace des courants de maille $M=B+R-N=3$ mailles et pour l'espace des paires de nœuds $P=N-R=2$.

Entre chaque nœud ou dans chaque branche, une force développera des travaux correspondant à des objets de type efforts. Ces objets efforts sont des ensembles de valeurs dépendant du temps et liés aux énergies potentielles.

Soit \vec{u} le vecteur correspondant à ces valeurs. Ce vecteur est représenté dans une base $\{b^i\}$ de l'espace \mathbf{B} . On note u_i les composantes du co-vecteur effort avec l'indice situé en bas dans l'espace des branches. Les composantes de ce co-vecteur sont appelées covariantes (voir annexe I et [II.8]).

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^B u_i \vec{b}^i \quad \text{ou avec la convention d'Einstein : } \vec{u} = u_i \vec{b}^i \quad (II.2)$$

Dans le contexte d'étude des réseaux électriques, les composantes de l'objet effort dans l'espace des branches sont les différences de potentiel présentes aux bornes de chacune des branches b^i du graphe. L'effort u_2 dans la Fig.II.2 représente la différence de potentiel entre les deux nœuds aux extrémités de la branche b_2 . On note que la position des indices dans la Fig.II.2 n'est pas liée à la convention choisie pour préciser la variance d'un « être mathématique ».

De manière duale, les objets flux sont liés aux énergies cinétiques. Dans chaque branche du réseau, est définie une composante contravariante (voir *annexe I*) de flux notée avec un indice placé en haut i^i , rattachée à un vecteur contravariant dans la base duale notée avec un indice inférieur $\{b_i\}$.

$$\vec{i} = \sum_{i=1}^B i^i \vec{b}_i \text{ ou avec la convention d'Einstein : } \vec{i} = i^i \vec{b}_i \quad (II.3)$$

Nous assimilerons ce flux au courant circulant dans une branche du graphe. Les flux sont donc supportés par les branches et ont une direction liée à l'orientation des vecteurs de base unitaire \vec{b} choisie préalablement par l'ingénieur.

Dans la *Fig.II.2*, sont représentés cinq flux dans l'espace des branches et trois flux dans l'espace des mailles. Le flux parcourant la branche b_l est par exemple identifié au courant i^l . Dans l'espace des mailles, le courant noté I^3 représente le flux de la maille 3. Notons pour la suite de la thèse que la convention de notation adoptée sur les tenseurs différencie l'espace des branches de l'espace des mailles par l'utilisation de lettres minuscules dans le premier cas et de lettres majuscules dans le second cas.

Dans le contexte électromagnétique l'objet noté 1-flux sera un vecteur d'indice colonne représentatif des B courants circulant dans l'espace des branches ou des M mailles du réseau dans l'espace des mailles. Le nombre de courants identifiés représentera la dimension de son espace.

A cet objet 1-flux sera associé l'objet 1-effort de même dimension. Prenons l'exemple du graphe de la *Fig.II.2*. L'espace topologique des branches $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4, \vec{b}_5)$ est de cinq dimensions. Dans cet espace, nous pouvons définir le vecteur des courants dont les composantes représentent les cinq courants de branche. L'indice des lignes l est situé en haut car l'objet est un flux et les composantes de ce vecteur sont contravariantes.

$$i^l = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \end{pmatrix} \quad (II.4)$$

De manière similaire, dans le même espace des branches, nous définissons le vecteur des différences de potentiel (*ddp*) dont les cinq composantes représentent les *ddp* attachées aux cinq branches correspondantes. L'indice des colonnes est cette fois situé en bas car les composantes de ce vecteur sont covariantes.

$$u_c = (u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5) \quad (II.5)$$

Finalement, nous introduisons un dernier objet de type effort, également appelé de type source. Ce vecteur est composé de cinq forces électromotrices (*fém*) e_k , présentes sur chacune des branches.

$$e_k = (e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5) \quad (II.6)$$

Finalement, les composantes covariantes et contravariantes rattachées à une branche ou à une paire de nœuds, développent un travail engendrant à chaque instant une puissance instantanée exprimée en watt reliée au symbole de *Kronecker* δ_k^k (annexe I). Dans tout réseau électrique, cette puissance doit être un invariant, c'est-à-dire que quelle que soit la base de référence dans laquelle le vecteur est défini, celui-ci restera inchangé.

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = u_i i^i e_i \cdot e^i = u_i i^i \cdot \delta_i^i \quad (II.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } \delta_{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j = \delta^{ij} = 1 & \quad \text{si } i=j \\ \delta_{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j = \delta^{ij} = 0 & \quad \text{si } i \neq j \end{aligned} \quad (II.8)$$

Ces efforts et ces flux sont reliés par un opérateur métrique fondamental, transformant un flux en un effort. Il est appelé opérateur impédance. Son inverse est l'opérateur admittance. L'équation (II.9) présente la relation entre flux et efforts dans l'espace *des courants de branches* dans le premier cas et dans l'espace *des ddp des branches* dans le second.

e_k sont les k forces électromotrices sources présentes sur les k branches et i^p sont les p courants sources circulant sur ces branches.

$$u_k = e_k - z_{kp} (i^p) \quad \text{et} \quad i^p = si^p - y^{kp} (u_k) \quad (II.9)$$

Flux, effort, opérateur impédance et admittance sur une branche du réseau de la Fig.II.2 sont illustrés en Fig.II.3 :

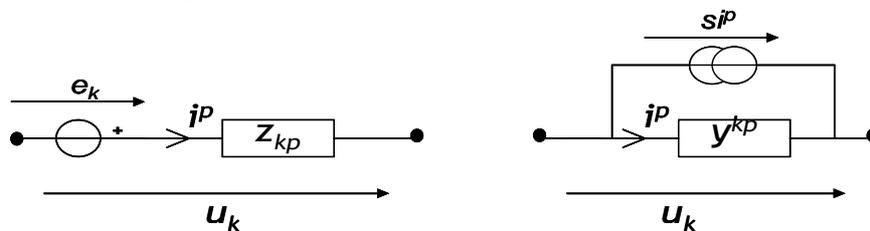


Fig.II.3 : Une branche d'un réseau

L'opérateur impédance z_{kp} est, comme le montre la position des indices, un tenseur deux fois covariant représenté par une matrice de dimension carrée liée au nombre de branches considérées dans le réseau de la Fig.II.2 ($B=5$).

De la même manière, l'opérateur admittance y^{kp} contient des composantes deux fois contravariante et sera de même dimension que l'opérateur impédance. Ces notions tensorielles seront plus largement décrites dans le paragraphe suivant. L'objectif ici est simplement d'introduire les objets avec la notation tensorielle ou matricielle que nous utiliserons tout le long de cette thèse.

$$z_{kp} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} \end{pmatrix} \quad y^{kp} = \begin{pmatrix} y^{11} & y^{12} & y^{13} & y^{14} & y^{15} \\ y^{21} & y^{22} & y^{23} & y^{24} & y^{25} \\ y^{31} & y^{32} & y^{33} & y^{34} & y^{35} \\ y^{41} & y^{42} & y^{43} & y^{44} & y^{45} \\ y^{51} & y^{52} & y^{53} & y^{54} & y^{55} \end{pmatrix} \quad (II.10)$$

Les éléments présents sur la diagonale de cette matrice représentent les impédances ou admittances propres de chaque branche. Les termes extra-diagonaux représentent les impédances ou admittances de couplages mutuels entre les branches du réseau. Par exemple, z_{14} est l'impédance mutuelle entre les branches b_4 vers b_1 .

Prenons le cas de l'espace des courants de branche, soit le premier schéma de la Fig.II.3. Nous exprimons les quatre grandeurs précédentes U_k , E_k , I^p et Z_{kp} , mais cette fois dans l'espace des courants de mailles en respectant donc la notation des lettres majuscules. Dans cet espace des mailles, nous appliquons la loi de Kirchhoff : la somme des ddp dans une maille est nulle. Finalement, quel que soit la maille, $U_k = 0$ ce qui réduit le nombre de grandeurs à manipuler.

En plus de cette propriété importante, remarquons que le nombre de branches est toujours supérieur au nombre de mailles (Equation (II.1)).

Pour ces deux raisons, la résolution des équations réduites dans l'espace des mailles permettra une résolution des systèmes d'équations plus efficace et plus rapide.

Avec l'exemple de la Fig.II.2, nous obtenons le vecteur de l'équation (II.11) qui est contravariant à trois dimensions dans l'espace des trois courants de mailles :

$$I^p = \begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \end{pmatrix} \quad (II.11)$$

Le vecteur des sources de l'espace des courants de branche e_k (avec $k=1,2,\dots,5$) est transposable dans l'espace des courants de maille à travers le vecteur des sources E_k (avec $k=1,2,3$) représentant les trois *fém* présentes dans les mailles m_1 , m_2 et m_3 :

$$E_k = (E_1 \quad E_2 \quad E_3) \quad (II.12)$$

Enfin, l'opérateur impédance Z_{kp} est la matrice à trois dimensions représentant les impédances dans l'espace des trois mailles. La matrice des admittances est formée de la même manière.

$$Z_{kp} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \quad (II.13)$$

Ces trois matrices sont finalement reliées par les expressions suivantes dans l'espace des mailles représentées sous la forme matricielle puis tensorielle :

$$(E) = (Z).(I) \quad (II.14)$$

$$E_k = Z_{kp} \cdot I^p \quad (II.15)$$

Prenons maintenant le schéma de droite de la Fig.II.2. Les cinq *ddp* de l'espace des branches peuvent être transformées dans l'espace des paires de nœuds : de manière duale au cas de l'espace des mailles, nous pouvons définir le réseau par les expressions suivantes. SI^p est le vecteur des sources de courants :

$$SI^p = \begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \end{pmatrix} \quad (II.16)$$

La matrice des admittances est notée Y^{kp} :

$$Y^{kp} = \begin{pmatrix} Y^{11} & Y^{12} \\ Y^{21} & Y^{22} \end{pmatrix} \quad (II.17)$$

Finalement, le vecteur inconnu des *ddp* dans l'espace des paires de nœuds s'écrit dans l'expression suivante :

$$U_k = (U_1 \quad U_2) \quad (II.18)$$

Ces grandeurs sont reliées par l'expression suivante :

$$SI^p = Y^{pk} U_k \quad (II.19)$$

Nous venons de présenter quatre espaces topologiques différents : l'espace des *ddp* de branches, l'espace des paires de nœuds, l'espace des courants de branches et l'espace des courants de mailles. Mis à part la préférence de l'ingénieur utilisant la méthode tensorielle des réseaux, l'espace le mieux adapté au système pour résoudre les équations sera le système de plus petite dimension.

On aura alors :

Si $M < P$, l'espace des mailles sera plus avantageux

Si $M > P$, l'espace des paires de nœuds sera plus avantageux.

Une fois ces objets et opérateurs décrits sous la forme générale de matrices et dans des espaces différents, nous assimilerons ces matrices à des tenseurs.

Avant de rappeler certaines notions de l'algèbre tensorielle appliqué à notre contexte d'étude, il est important de fixer les conventions de notation utilisées pour conserver les significations physiques des objets manipulés. Le lecteur trouvera dans l'annexe I des éléments de théorie de calcul tensoriel.

II.2.2 Notion d'algèbre tensorielle

L'objectif est maintenant d'utiliser l'algèbre tensorielle pour manipuler les vecteurs définis dans les différents espaces présentés dans les paragraphes précédents.

Les formes linéaires d'un vecteur permettront d'introduire les tenseurs contravariants et covariants d'ordre 1. Les formes bilinéaires introduiront les tenseurs d'ordre deux, et de manière générale, les formes multilinéaires appliquées à un couple de plusieurs vecteurs permettront de décrire des tenseurs d'ordre supérieur.

Parallèlement, nous verrons comment ces tenseurs s'adaptent à la physique des réseaux électriques.

II.2.2.1 Formes linéaires ou tenseur d'ordre un

II.2.2.1.1 Tenseur une fois contravariant

Reprenons l'exemple de l'espace vectoriel des branches \mathbf{B} de la Fig.II.2 de dimension $B=5$. Les courants sont représentés par le vecteur \vec{i} que l'on représente dans deux bases différentes appartenant à l'espace des branches que l'on note base $\{\vec{b}_i\}$ et la seconde, la base $\{\vec{b}'_i\}$.

La définition d'un tenseur prend naissance dans l'application de formes linéaires adjointes dans notre contexte, au vecteur \vec{i} . Nous noterons cette forme linéaire appliquée sur ce vecteur $f(\vec{i})$.

On parlera de tenseur \vec{i} d'ordre 1 lorsqu'on applique une forme linéaire à un vecteur \vec{i} et que cette forme est conservée lors d'un changement de base. Cette forme linéaire concernera chacun des vecteurs unitaires de l'ensemble de la base $\{\vec{b}_i\}$.

$$\vec{i} = \sum_{i=1}^B i^i \vec{b}_i \quad \rightarrow \quad f(\vec{i}) = \sum_i i^i f(\vec{b}_i) \quad (II.20)$$

Un nouveau vecteur \vec{i}' résultant de l'application $f(\vec{i})$ sera généré.

Rappelons qu'une forme linéaire définie sur un espace vectoriel \mathbf{B} a la structure d'un espace vectoriel \mathbf{B}^* , appelé espace dual de \mathbf{B} .

Au lieu de dire que nous travaillons sur un vecteur dans l'espace \mathbf{B} ou sur un vecteur dans l'espace \mathbf{B}^* , on dira plutôt que le vecteur est respectivement contravariant ou covariant.

Dans notre cas, l'application f sur le vecteur covariant \vec{b}_i associé aux composantes contravariantes i^i , donnera un vecteur de base contravariant \vec{b}'^i associé aux nouvelles composantes i'_i covariantes dans la base duale \mathbf{B}^* .

$$\vec{i}' = f(\vec{i}) = \sum_i i^i f(\vec{b}_i) = \sum_i i'_i \vec{b}'^i \quad (II.21)$$

Plus concrètement, la transformation du vecteur \vec{i} sera par convention vu dans l'espace vectoriel \mathbf{B} pour respecter les conventions de notations généralement utilisées dans l'analyse

tensorielle. Pour cela, nous introduisons le tenseur covariant a_i qui n'est rien d'autre que la représentation du vecteur unitaire \vec{b}_i dans la base duale :

$$a_i = f(\vec{b}_i) \quad (II.22)$$

On obtient finalement la transformation du tenseur abusivement appelé contravariant :

$$\vec{i} = f(\vec{i}) = \sum_i a_i i^i \text{ avec la convention d'Einstein : } \vec{i} = f(\vec{i}) = a_i i^i \quad (II.23)$$

L'opérateur linéaire forme un tenseur covariant de dimension un dont les coefficients a_i constituent les composantes qu'on appelle accessoirement tenseur du premier ordre. Par extension de langage, les composantes du vecteur contravariant \vec{i} figurant dans la relation (II.22) forment un tenseur intitulé improprement tenseur une fois contravariant.

II.2.2.1.2 Tenseur une fois covariant

Nous construisons de la même manière qu'au paragraphe précédent le tenseur une fois covariant.

Considérons le vecteur \vec{u} défini par ses composantes covariantes u_i dans une base de vecteurs contravariant $\{b^i\}$ appartenant à l'espace des branches B .

La forme linéaire appliquée à ce vecteur donnera l'expression (II.24) :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^B u_i \vec{b}^i \quad \rightarrow \quad f(\vec{u}) = \sum_i u_i f(\vec{b}^i) \quad (II.24)$$

Cette application linéaire donnera un nouveau vecteur \vec{u}' lié à la relation (II.25) dans l'espace dual B^* :

$$\vec{u}' = f(\vec{u}) = \sum_i u_i f(\vec{b}^i) = \sum_i u^i b_{*i} \quad (II.25)$$

En posant

$$a^i = f(\vec{b}^i) \quad (II.26)$$

Nous obtenons l'expression finale décrivant le tenseur covariant \vec{u} :

$$\vec{u}' = f(\vec{u}) = \sum_i a^i u_i \text{ avec la convention d'Einstein : } \vec{u}' = f(\vec{u}) = a^i u_i \quad (II.27)$$

II.2.2.2 Formes bilinéaires ou tenseurs d'ordre deux

Il existe quatre types de tenseurs d'ordre deux. Selon que l'on applique la forme bilinéaire à un couple de deux vecteurs une fois covariant ou une fois contravariant ou une association des deux.

Il existe donc pour les tenseurs d'ordre deux : le tenseur deux fois covariant, le tenseur deux fois contravariant puis les deux tenseurs mixtes, une fois covariant et une fois contravariant.

II.2.2.2.1 Tenseurs du second ordre deux fois covariants

Nous choisissons dans cette partie d'introduire la forme bilinéaire par le couple de deux tenseurs une fois contravariants. A cette forme bilinéaire, on donnera le nom de tenseur du second ordre deux fois covariant.

Soit deux vecteurs \vec{i} et \vec{I} qui, dans le contexte de l'étude des réseaux électriques, sont deux vecteurs une fois contravariants appartenant à deux espaces vectoriels que nous choisirons dans un premier temps identiques comme par exemple l'espace des branches B à cinq dimensions dans lesquels nous choisissons deux bases $\{\vec{b}_i\}$ et $\{\vec{b}'_j\}$.

On aura :

$$\vec{i} = \sum_{i=1}^B i^i \vec{b}_i \quad \text{et} \quad \vec{I} = \sum_{j=1}^B I^j \vec{b}'_j \quad (II.28)$$

L'application d'une forme bilinéaire dans $B \times B$ est désignée par l'opérateur f satisfaisant les propriétés de linéarités et de distributivités, soit :

$$\begin{aligned} f(\vec{i}^1 + \vec{i}^2, \vec{I}) &= f(\vec{i}^1, \vec{I}) + f(\vec{i}^2, \vec{I}) \\ f(m\vec{i}, \vec{I}) &= mf(\vec{i}, \vec{I}) \end{aligned} \quad (II.29)$$

Ces relations sont bien sûr applicables de la même manière pour le vecteur \vec{I} . On obtient finalement la forme bilinéaire suivante :

$$f(\vec{i}, \vec{I}) = \sum_{i,j} i^i I^j \cdot f(\vec{b}_i, \vec{b}'_j) \quad (II.30)$$

On obtient finalement en définissant le tenseur deux fois covariant a_{ij} :

$$a_{ij} = f(\vec{b}_i, \vec{b}'_j) \quad \rightarrow \quad f(\vec{i}, \vec{I}) = \sum_{i,j} a_{ij} i^i I^{j*} \quad (II.31)$$

Ce nouveau tenseur deux fois covariant a_{ij} comporte alors B^2 coefficients provenant des vecteurs \vec{i} et \vec{I} .

Dans le contexte de l'étude des réseaux électriques, ce tenseur deux fois covariant s'apparente finalement à l'opérateur impédance z_{ij} . Ainsi, physiquement, nous assimilons la puissance P

en *Watt* au scalaire défini par la forme bilinéaire. Nous utilisons la convention de notation d'Einstein :

$$\text{En posant } z_{ij} = a_{ij} \quad \rightarrow \quad P = \sum_{i,j} z_{ij} i^i I^{j*} \quad (II.32)$$

Imaginons maintenant que dans l'espace des branches \mathcal{B} , les vecteurs \vec{i} et \vec{I} sont définis dans deux nouvelles bases $\{b_{2i}\}$ et $\{b_{2j}\}$. Les composantes des tenseurs i^i et I^j se transformeront alors en composantes i'^i et I'^j et les composantes du tenseur d'ordre deux a_{ij} se transformeront en composantes a'_{ij} . Rappelons de nouveau que ces objets sont en fait identiques, mais exprimés dans deux bases différentes.

Dans un réseau électrique, la puissance doit être un invariant, c'est-à-dire doit conserver sa valeur si l'on change de repère on aura donc l'expression (II.33) :

$$P = z_{ij} i^i I^{j*} = z'_{ij} i'^i I'^{j*} \quad (II.33)$$

Cette équation servira à établir les formules de transformation de base ou d'espace des tenseurs. La puissance est l'invariant de l'espace de *Kron*.

II.2.2.2 Autres tenseurs du second ordre : deux fois contravariants et mixtes

De la même manière, nous appliquons la forme bilinéaire f à un couple de deux vecteurs cette fois covariants \vec{u} et \vec{U} dans l'espace dual des branches $\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*$ et dans deux bases $\{b^i\}$ et $\{b'^j\}$.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^B u_i \vec{b}^i \quad \text{et} \quad \vec{U} = \sum_{j=1}^B U_j \vec{b}'^j \quad (II.34)$$

La forme bilinéaire s'écrit :

$$f(\vec{u}, \vec{U}) = \sum_{i,j} u_i U_j \cdot f(\vec{b}^i, \vec{b}'^j) = \sum_{i,j} a^{ij} \cdot u_i U_{\bullet j} \quad (II.35)$$

Après avoir identifié, le tenseur a^{ij} deux fois contravariant à l'opérateur admittance y^{ij} , on retrouve finalement la puissance P .

$$\text{En posant } y^{ij} = a^{ij} \quad \rightarrow \quad P = y^{ij} u_i U_{\bullet j} \quad (II.36)$$

Sans rentrer dans les détails, les composantes du tenseur mixte sont définies par la forme bilinéaire d'un vecteur une fois covariant avec un vecteur une fois contravariant. Soit les tenseurs u_i dans l'espace \mathcal{B}^* et i^i dans l'espace \mathcal{B} , on obtient les relations suivantes :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^B u_i \vec{b}^i \quad \text{et} \quad \vec{i} = \sum_{j=1}^B i^j \vec{b}_j \quad (II.37)$$

La forme bilinéaire s'écrit :

$$f(\vec{u}, \vec{i}) = \sum_{i,j} u_i i^j \cdot f(\vec{b}^i, \vec{b}_j) = \sum_{i,j} a_j^i \cdot u_i i^j \quad (II.38)$$

Nous obtenons donc les composantes a_j^i du tenseur mixte d'ordre deux décrit dans l'expression (II.38).

La forme bilinéaire du second tenseur mixte s'écrit :

$$f(\vec{i}, \vec{u}) = \sum_{i,j} i^j u_i \cdot f(\vec{b}_j, \vec{b}^i) = \sum_{i,j} a_j^i \cdot i^j u_i \quad (II.39)$$

Nous obtenons donc les composantes a_j^i du second tenseur mixte d'ordre deux.

II.2.2.3 Tenseurs d'ordre supérieur

Les tenseurs d'ordre supérieur prennent naissance à partir de l'application de transformations multilinéaires de plusieurs vecteurs.

Nous choisissons une forme trilinéaire $f(\vec{i}, \vec{I}, \vec{\phi})$ associée à un nombre réel indépendant de la base choisie, à partir des trois vecteurs contravariants (ou appartenant à l'espace \mathbf{B}) suivants : \vec{i} , \vec{I} et $\vec{\phi}$. Cette forme trilinéaire sera construite par le produit tensoriel de la fonction bilinéaire h et de la fonction linéaire g .

En utilisant la convention d'Einstein,

$$\begin{aligned} \vec{i}, \vec{I} \text{ et } \vec{\phi} &\in B \\ \text{Soit } h(\vec{i}, \vec{I}) &= a_{ij} \cdot i^i I^j \quad \text{et} \quad g(\vec{\phi}) = b_k \cdot \phi^k \\ f(\vec{i}, \vec{I}, \vec{\phi}) &= h(\vec{i}, \vec{I}) \cdot g(\vec{\phi}) = a_{ij} b_k \cdot i^i I^j \phi^k = a_{ijk} \cdot i^i I^j \phi^k \end{aligned} \quad (II.40)$$

Nous obtenons alors un tenseur d'ordre trois, trois fois covariant. Les dimensions d'ordre supérieur à deux ne peuvent plus être représentées par une simple matrice. Dans notre exemple de tenseur à trois dimensions, a_{ijk} peut être représenté par une hyper matrice représentable par un volume cubique :

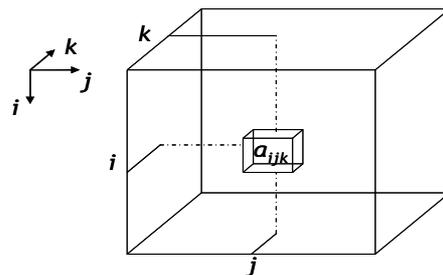


Fig.II.4 : Hypermatrice de dimension 3

Nous verrons comment utiliser un tenseur d'ordre supérieur comme le tenseur d'ordre trois a_{ijk} , pour résoudre un problème multiphysique de compatibilité Electromagnétique d'un système complexe.

Dans ce cas, le vecteur contravariant ϕ^j pourrait éventuellement représenter un flux de chaleur que l'on exprimera en *Watt*. Le tenseur d'ordre trois contiendrait alors les informations multiphysiques liées aux phénomènes électriques, électromagnétiques et thermiques.

On pourrait alors par extension, ajouter l'effet mécanique aux autres grandeurs physiques en utilisant une forme multilinéaire générant alors un tenseur d'ordre quatre.

Dans le contexte d'étude des réseaux électriques, nous utilisons, pour l'instant, des tenseurs d'ordres deux au maximum.

Pour résumer simplement, par abus de langage, le vecteur courant i^k sera donc assimilé à un tenseur une fois contravariant, le vecteur des *fém* e_k sera un tenseur une fois covariant, l'opérateur impédance z_{kp} sera un tenseur deux fois covariant et l'opérateur admittance y^{kp} , un tenseur deux fois contravariant.

II.2.2.4 Opérations sur les tenseurs

L'annexe I présente les principales opérations appliquées aux tenseurs.

Nous rappelons pour s'accorder au contexte de la thèse le concept du produit contracté entre deux tenseurs.

Prenons l'exemple du produit vectoriel du tenseur deux fois covariant des impédances z_{ij} défini dans l'expression (II.32) et du tenseur une fois contravariant I^k défini dans l'expression (II.23). Le produit tensoriel donnera le tenseur \vec{u} deux fois covariant et une fois contravariant dont les composantes sont exprimées avec la notation d'Einstein ci-dessous :

$$u_{ij}^k = z_{ij} \cdot I^k \quad (II.41)$$

Dans le cas où l'indice supérieur k est égal à l'indice inférieur j , nous obtenons le tenseur contracté de \vec{u} par rapport à j et k . Le tenseur du troisième ordre u_{ij}^k se contracte alors en tenseur une fois covariant comme le montre l'expression suivante :

$$Si \ k=j, \quad u_{ij}^k = u_{ij}^j = u_i \quad (II.42)$$

Nous retrouvons finalement les composantes d'un tenseur de type effort reliées aux tensions de branches dans le contexte de la thèse.

Remplaçons maintenant dans l'expression (II.43) le produit tensoriel du tenseur deux fois covariants (impédances) et du tenseur une fois contravariant (courants) par le tenseur contracté une fois covariant \vec{u} (tensions). Nous obtenons alors un nombre réel invariant représentant physiquement une puissance.

$$P = z_{ij} i^i I^j \rightarrow P = u_i i^i \quad (II.43)$$

Cette dernière relation permettra naturellement de présenter au paragraphe suivant, les changements de bases et d'espaces.

II.3 Changement de base et changement d'espace

L'utilisation originale des propriétés de l'analyse tensorielle pour décrire des réseaux électriques va permettre une mise en équation simplifiée des problèmes CEM survenant sur des systèmes complexes.

Nous verrons qu'au delà des changements de bases de référence, il est également possible d'effectuer des changements d'espaces traitant, dans notre cas, de problèmes multiphysiques, multiparamètres et multiéchelles.

Le premier paragraphe présente certains changements de bases dans un réseau électrique. On pourra ainsi modifier le mode de représentation en modifiant par exemple, le référentiel des courants de mailles vers un référentiel basé sur les moments. Le système sera alors vu comme un vecteur de moments décrivant le comportement des courants de mailles évoluant sur des surfaces S . Dans ce cas, cette base accueillera plus simplement certains phénomènes physiques. Nous améliorons alors la compréhension physique des interactions et simplifions les équations du système.

Ces changements de bases se caractérisent par une matrice de connexion carrée. Concrètement, il n'y a aucune modification concernant les dimensions de la base de référence. Nous étudierons deux changements de bases : le passage entre deux bases différentes appartenant à un même espace et le passage entre les mailles et les moments.

Le deuxième paragraphe présente les changements d'espaces qui permettront par exemple de transformer les paramètres électriques d'un réseau de l'espace des branches vers l'espace des mailles.

Les objets flux et efforts seront alors décrits dans un espace représentant un assemblage de plusieurs branches. Dans ce cas, les dimensions du nouvel espace des mailles seront modifiées. Dans l'exemple de la *Fig.II.2*, on passe d'un système à cinq dimensions à un système réduit à trois dimensions.

La matrice des relations linéaires entre ces deux espaces ne sera plus une matrice carrée, on l'appellera matrice de connectivité. De nouvelles propriétés propres à chaque espace pourront alors apparaître ou disparaître en fonction des lois et propriétés attachées à chaque espace. Tel est le cas lors de l'annulation des ddp attachées à chaque branche lorsque l'on passe d'un espace des branches à un espace des mailles.

Dans un second temps, nous présenterons la transformation de l'espace des branches vers l'espace des paires de nœuds.

II.3.1 Changement de base

Deux exemples de changements de bases sont donnés. Le premier paragraphe présente un exemple de transformation entre deux bases de mailles. On pourra étendre cette description à la transformation entre deux bases de branches ou deux bases des moments.

Le deuxième paragraphe permettra d'introduire l'intérêt de l'espace des moments en présentant le cas d'une transformation entre la base des mailles et la base des moments.

II.3.1.1 Transformation d'une base des mailles vers une autre

Illustrons le changement de base à l'aide d'un exemple dans l'espace des courants de mailles. On pourra bien évidemment définir ces changements de bases dans n'importe quel autre espace topologique.

Dans la Fig.II.5, nous avons choisi arbitrairement deux repères différents respectant l'hypothèse que les circulations fermées des courants passent au moins une fois par chacune des branches du réseau.

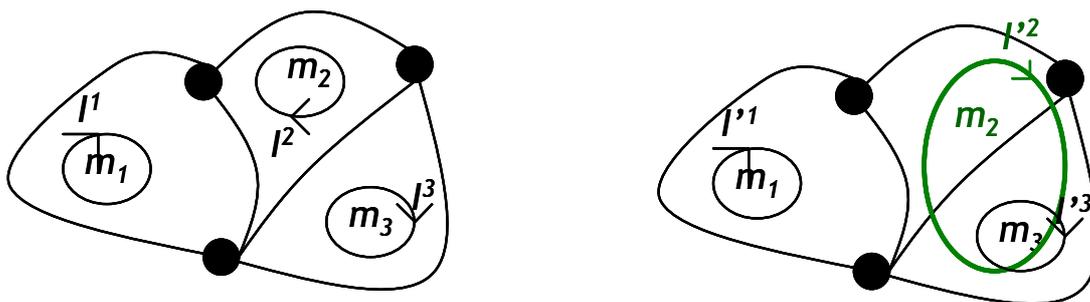


Fig.II.5 : Choix des courants de maille

Pour déterminer les équations de transformations tensorielles de changement de bases, nous exprimons simplement les courants de mailles I^k du premier réseau en fonction des courants I'^k du second.

$$\begin{aligned} I^1 &= I'^1 \\ I^2 &= I'^2 \\ I^3 &= I'^2 + I'^3 \end{aligned} \quad (II.44)$$

Ou écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'^1 \\ I'^2 \\ I'^3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} I'^1 \\ I'^2 \\ I'^3 \end{pmatrix} \quad (II.45)$$

C est la matrice carrée de changement de base. (Cette matrice n'est pas un tenseur).

La puissance instantanée du réseau est invariante donc on peut écrire que le produit contracté entre les composantes sources et les composantes de courants dans l'espace des deux mailles de la Fig.II.5 sont constantes.

$$E_j \cdot I^j = E'_s \cdot I'^s \quad j, s = 1, 2, \dots, M \quad (II.46)$$

L'équation (II.47) permet finalement d'obtenir systématiquement les tenseurs des *fém* E'_j dans la nouvelle base à partir de l'ancien vecteur E_s et de la matrice de changement de bases C que l'on a transcrit sous forme d'un tenseur mixte C_j^s de dimension carrée. De la même manière, les impédances Z'_{ij} dans la nouvelle base sont obtenues à partir de Z_{kl} et C_j^l et sa forme duale $C_{i\bullet}^k$, comme illustré dans l'équation (II.48) :

$$E'_{j\bullet} = C_{j\bullet}^{s\bullet} \cdot E_{s\bullet} \quad j, s = 1, 2, \dots, M \quad (II.47)$$

$$Z'_{ij} = (C_{i\bullet}^{k\bullet}) Z_{kl} (C_j^l) \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, M \quad (II.48)$$

Nous venons donc de donner les expressions permettant le changement de bases d'un réseau électrique. La représentation tensorielle présente l'avantage d'automatiser et de systématiser ces transformations.

Les points présents dans les deux expressions précédentes permettent de déplacer un indice et changer l'organisation de l'objet tout en gardant la nature de celui-ci. Dans ce cas, $E_{s\bullet}$ représente un tenseur de type effort organisé en ligne, identique à la transposée de E_s . $C_{i\bullet}^{k\bullet}$ est équivalent à la transposée du tenseur C_i^k .

Imaginons que les *fém* sources et les impédances attachées à la première base (m_1, m_2, m_3) sont les suivantes :

$$E_s = (E_1 \quad E_2 \quad E_3) \quad \text{et} \quad Z_{kl} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \quad (II.49)$$

En appliquant les expressions (II.47) et (II.48) aux deux tenseurs de l'équation (II.49), nous trouvons dans la nouvelle base (m'_1, m'_2, m'_3) :

$$E'_{j\bullet} = (C)^t (E)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 + E_3 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (II.50)$$

$$Z'_{ij} = (C)^t(Z)(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (II.51)$$

$$Z'_{ij} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} + Z_{13} & Z_{13} \\ Z_{21} + Z_{31} & Z_{22} + Z_{32} + Z_{23} + Z_{33} & Z_{23} + Z_{33} \\ Z_{31} & Z_{32} + Z_{33} & Z_{33} \end{pmatrix}$$

II.3.1.2 De l'espace des mailles vers l'espace des moments

Soit deux réseaux comportant chacun une seule maille, dans lesquels évoluent les courants de maille J^1 et J^2 sur les surfaces de maille S_1^1 et S_2^2 . Les deux moments m^1 et m^2 sont alors représentés dans la Fig.II.6 :

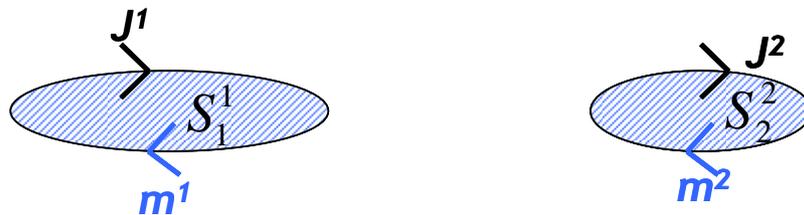


Fig.II.6 : Espace des mailles et espace des moments

L'espace des moments sera l'espace adapté pour représenter des interactions lointaines entre des sous-réseaux électriques.

Si l'on considère par exemple le couplage entre deux antennes boucles écartées d'une distance très grande, les antennes pourront chacune considérer l'autre système comme une source rayonnante.

On va alors transformer la fonction de propagation du champ en couplage par mutuelle induction dans l'espace des mailles.

Le champ magnétique B_w et le moment source m^q sont reliés par une fonction du type :

$$B_{\omega^*} = \alpha_{\omega^q} m^q \quad (II.52)$$

α_{ω^q} est une fonction comportant entre autres des potentiels retardés et des atténuations et est généralement exprimée dans le domaine des fréquences.

Le moment m^q est relié au flux de courant J^ω par l'expression (II.53) :

$$m^q = S_\omega^q J^\omega \quad (II.53)$$

La dérivée dans le domaine temporel du moment est marquée comme en mécanique par un point au dessus des lettres :

$$\dot{m}^q = S_\omega^q \dot{J}^\omega \quad (II.54)$$

Comme le représente l'indice placé en haut, le moment est un 1-flux. Il est de même type que les flux de mailles. Les composantes de la matrice de changement de base S_{ω}^q représentent les surfaces de chacune des mailles du réseau.

Il y a autant de moment que de flux, la matrice S est donc carrée et inversible, l'expression (II.54) représente donc bien un changement de base.

Un moment d'un réseau émetteur produit sur une maille du réseau récepteur éloigné, une $fém$ induite représentée dans l'expression suivante avec le champ rotationnel B_{ω} :

$$E_{p\bullet} = S_{p\bullet}^{\omega} \dot{B}_{\omega\bullet} \quad \text{avec} \quad \dot{B}_{\omega\bullet} = \alpha_{\omega q} \dot{m}^q \quad (II.55)$$

Faisons maintenant intervenir la définition de la mutuelle induction entre flux de maille source et $fém$ induite dans la maille réceptrice :

$$E_{t\bullet} = M_{tp} \dot{J}^p \quad (II.56)$$

En utilisant les équations (II.55) et (II.56), nous obtenons,

$$\begin{aligned} M_{tp} \dot{J}^p &= S_{t\bullet}^{\omega} \alpha_{\omega q} \dot{m}^q \\ M_{tp} \dot{J}^p &= S_{t\bullet}^{\omega} \alpha_{\omega q} S_p^q \dot{J}^p \\ M_{\omega q} &= S_{\omega\bullet}^{\omega} \alpha_{\omega q} S_q^q \quad \text{et} \quad M_{tp} = S_{t\bullet}^{\omega} \alpha_{\omega q} S_p^q \end{aligned} \quad (II.57)$$

Cette dernière équation représente donc le changement de base d'une fonction caractéristique de la propagation du champ vers une fonction prenant pour nature physique une impédance mutuelle de couplage entre deux mailles de deux réseaux éloignés.

D'autre part, nous avons montré dans le paragraphe II.2.1 que l'espace des mailles permet de réduire le système d'équations par rapport à l'espace des branches. L'exemple choisi montre que l'on passe d'un système à cinq dimensions dans l'espace des branches à un système à trois dimensions dans l'espace des mailles.

La caractérisation du système directement dans l'espace des mailles est relativement compliquée. Pour cela *G.Kron* dans les années 1930, a prouvé que les matrices de changements de bases précédemment décrites, s'appliquent d'une manière similaire dans le cas du passage systématique des tensions et courants de branches aux tensions et courants de mailles permettant ainsi une mise en équation plus facile.

C'est sur ce point que l'originalité de la méthode de *Kron* prend un intérêt dans le contexte de la thèse. Les changements d'espaces topologiques permettront une manipulation souple de l'ensemble des équations d'un système complexe caractérisé par les trois concepts multiphysique, multiparamètre et multiéchelle.

II.3.2 Changement d'espace (Méthode de Kron)

Pour introduire la méthode de *Kron*, le support mathématique principal pour l'étude des grands systèmes, nous commencerons par présenter les matrices de connectivités permettant le passage entre l'espace des branches et l'espace des mailles.

Les tenseurs *fém* et impédance d'un réseau seront décrits simplement dans l'espace des branches, puis en utilisant les matrices de connectivités, ces deux tenseurs seront directement transposés dans l'espace des courants de maille.

Ensuite, dans la deuxième partie, nous transposerons ce changement d'espaces au cas de l'espace des branches et de l'espace des paires de nœuds.

Les diverses interactions pourront alors être mises en jeu dans l'espace le mieux adapté. L'équation (II.64) permettra finalement de retrouver les courants de chaque maille du système.

II.3.2.1 De l'espace des branches vers l'espace des mailles

Toute l'ingéniosité de la méthode de *Kron* réside dans la manière de se transporter dans un espace topologique adapté à la représentation d'un phénomène physique par les réseaux électriques.

L'espace des branches permet de caractériser simplement n'importe quel réseau aussi compliqué soit-il. Nous préférons par contre résoudre les équations dans l'espace des mailles offrant ainsi des propriétés avantageuses pour le calcul.

Considérons le réseau électrique très simple suivant dont les caractères topologiques sont : $B=3$, $N=2$, $R=1$ et $M=B+R-N=2$ pour montrer comment s'emploie la méthode de *Kron*.

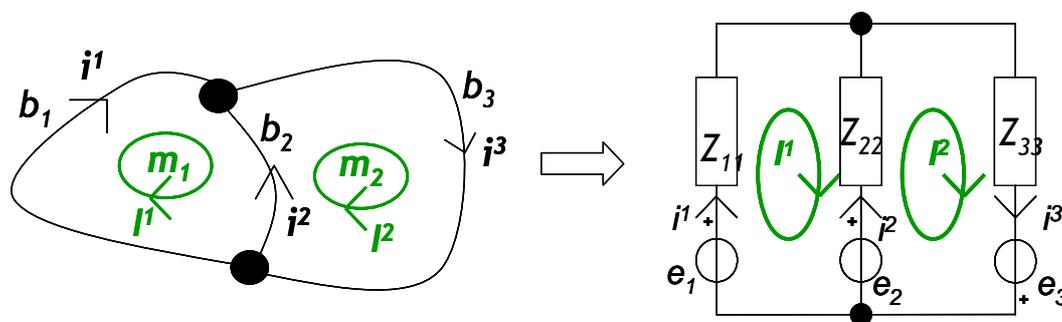


Fig.II.7 : Espace des branches et espace des mailles

Soit e_α , i^α et $z_{\alpha\beta}$ avec $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, B$, les *fém*, courants et impédances dans l'espace des branches et E_i , I^i et Z_{ij} avec $i, j = 1, 2, \dots, M$, les *fém*, courants et impédances dans l'espace des mailles.

G.Kron a démontré qu'il existe une matrice de connexion notée C permettant de mettre en relation les différents paramètres électriques dans les deux espaces des branches et des mailles :

Si $i^\alpha = C_i^\alpha I^\alpha$ avec $\alpha = 1, 2, \dots, B$ et $i = 1, 2, \dots, M$
Cela entraîne que

$$E_{i\bullet} = C_{i\bullet}^\alpha e_{\alpha\bullet} \text{ avec } \alpha = 1, 2, \dots, B \text{ et } i = 1, 2, \dots, M \quad (II.58)$$

et

$$Z_{ij} = C_{i\bullet}^\alpha z_{\alpha\beta} C_j^\beta \text{ avec } \alpha, \beta = 1, 2, \dots, B \text{ et } i, j = 1, 2, \dots, M$$

Ces mêmes équations peuvent être écrites sous la forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (i) &= (C)(I) \text{ entraîne :} \\ (E) &= (e)(C) \text{ ou } (C)^t(e)^t \\ (Z) &= (C)^t(z)(C) \end{aligned} \quad (II.59)$$

$(C)^t$ est la matrice transposée de (C)

Appliquons les expressions précédentes à l'exemple de la Fig.II.7 :

$$\begin{aligned} i^1 &= I^1 + 0I^2 \\ i^2 &= -I^1 + I^2 \\ i^3 &= 0I^1 + I^2 \end{aligned} \text{ soit } \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \end{pmatrix} \quad (II.60)$$

Nous identifions la matrice de connexion C de dimension deux colonnes et trois lignes. On trouve alors à partir de la matrice de connexion transposée C^t et le vecteur transposé des *fém* $(e_a)^t$ dans l'espace des branches, le vecteur *fém* transposé dans l'espace des mailles $(E_i)^t$.

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (II.61)$$

De la même manière, la matrice impédance est transformée dans l'espace des mailles :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_{11} + z_{22} - z_{12} - z_{21} & z_{12} + z_{23} - z_{22} - z_{23} \\ z_{21} + z_{31} - z_{22} - z_{32} & z_{22} + z_{33} + z_{23} + z_{32} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (II.62)$$

Les coefficients de la diagonale représentent les impédances propres d'une branche ou de la maille considérée. z_{11} est l'impédance propre de la branche 1. Z_{22} est l'impédance propre de la maille 2.

Les coefficients extra-diagonaux sont les impédances de couplage entre deux branches ou entre deux mailles. Par exemple z_{23} est l'impédance de couplage entre la branche 3 et la branche 2. Z_{21} est l'impédance de couplage entre les mailles 1 et 2.

La loi de Kirchhoff appliquée dans l'espace des branches donne la relation entre la matrice des impédances, les objets de type flux, de type effort et de type source, soit les courants de branche, les *ddp* et les *fém* de branches :

$$u_{k\bullet} = e_{k\bullet} - z_{kp} \cdot i^p \quad (II.63)$$

Dans l'espace des mailles, comme nous l'avons déjà précisé dans l'équation (II.15), la loi de Kirchhoff permet d'écrire l'équation du réseau :

$$E_{k\bullet} = Z_{kp} I^p \quad (II.64)$$

Grace aux expressions (II.60), (II.61) et (II.62), nous connaissons directement les paramètres de l'espace des mailles à partir des données récoltées dans l'espace des branches. L'équation (II.64) nous donne finalement l'évolution des courants de maille dans tout le réseau. Il suffit pour cela, d'inverser la matrice impédance de maille Z_{kp} par les méthodes usuelles du calcul matriciel, puis de la multiplier par la matrice E_k .

Comme il a été présenté dans le paragraphe II.2.1, il sera parfois préférable de résoudre les équations du système non pas dans l'espace des mailles mais dans l'espace des paires de nœuds.

Dans le paragraphe suivant, les matrices de connexions permettent de transformer des tenseurs admittances et sources de courants d'un espace des *ddp* de branches vers un tenseur des paires de nœuds.

II.3.2.2 De l'espace des branches vers l'espace des paires de nœuds

Nous choisissons le réseau électrique de la Fig.II.8 pour définir les transformations entre les espaces des branches et des paires de nœuds (illustré par des traits bleus épais).

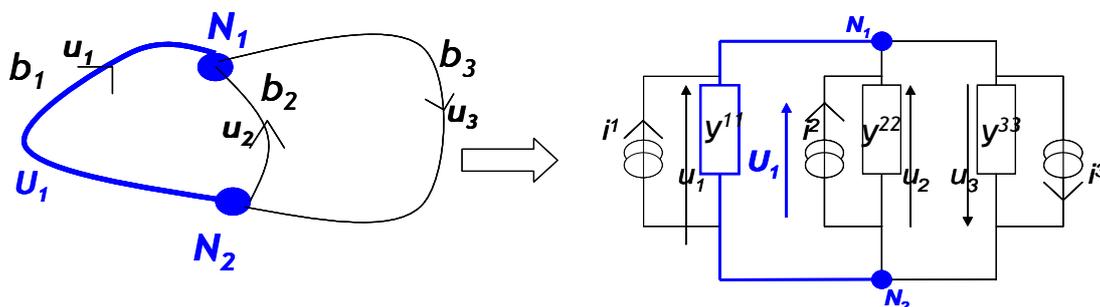


Fig.II.8 : Espace des branches et espace des paires de nœuds

Le caractère topologique du schéma est rappelé :

$$R=1 \quad B=3 \quad \text{et} \quad N=2$$

$$\text{Ce qui entraine : } P=N-R=2-1=1 \quad (II.65)$$

L'espace des paires de nœuds est choisi arbitrairement par l'ingénieur sur un réseau dans lequel le nombre de mailles est nul, c'est-à-dire ne possédant aucun circuit fermé.

Soit i^α le tenseur contravariant des sources de courants, u_β le tenseur covariant des ddp , $y^{\alpha\beta}$ le tenseur deux fois contravariant des admittances et j^α le tenseur contravariant des courants de branche. Ces tenseurs sont représentés dans l'espace des ddp de branches B avec $\alpha = \beta = 1, \dots, B$. $B=3$ dans l'exemple proposé dans la Fig.II.8. Ces grandeurs sont reliées par la relation suivante dans l'espace des ddp de branches :

$$j^\alpha = i^\alpha - y^{\alpha\beta} u_{\beta\bullet} \quad \text{avec } \alpha = \beta = 1, \dots, B. \quad (II.66)$$

Dans l'espace des paires de nœuds P illustré en bleu sur la Fig.II.8, $j^\alpha = 0$. On définit alors les tenseurs sources de courant, ddp et admittances entre chacune des paires de nœuds arbitrairement choisies suivantes reliés par la relation (II.67):

$$I^i = Y^{ij} \cdot U_{j\bullet} \quad \text{avec } i = j = 1, \dots, P. \quad (II.67)$$

On peut alors démontrer que :

$$u_{\beta\bullet} = C_{\beta\bullet}^{\bullet j} U_{j\bullet} \quad \text{avec } \beta = 1, \dots, B \quad \text{et } j = 1, \dots, P \quad (II.68)$$

Entraîne :

$$I^i = C_\alpha^i i^\alpha \quad \text{avec } \alpha = 1, \dots, B \quad \text{et } i = 1, \dots, P \quad (II.69)$$

et

$$Y^{ij} = C_\alpha^i y^{\alpha\beta} C_{\beta\bullet}^{\bullet j} \quad \text{avec } \alpha = \beta = 1, \dots, B \quad \text{et } i = j = 1, \dots, P \quad (II.70)$$

En exprimant u_β en fonction de U_j , nous obtenons la matrice de connexion C :

$$\begin{cases} u_1 = U_1 \\ u_2 = U_1 \\ u_3 = -U_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (II.71)$$

On calcule ensuite les courants sources I^i dans l'espace des paires de nœuds (espace à une seule dimension pour cet exemple) :

$$I^i = C_\alpha^i i^\alpha \rightarrow I^1 = i^1 + i^2 - i^3 \quad (II.72)$$

Et en appliquant l'expression (II.70) :

$$(y) = \begin{pmatrix} y^{11} & y^{12} & y^{13} \\ y^{21} & y^{22} & y^{23} \\ y^{31} & y^{32} & y^{33} \end{pmatrix} \quad (II.73)$$

Si $i=j$, les termes y^{ij} de la diagonale de la matrice sont les admittances propres à la branche i . Lorsque $i \neq j$, les termes extradiagonaux y^{ij} représentent les admittances mutuelles de couplages entre les branches, on obtient alors dans l'espace des paires de nœuds la matrice admittance de dimension un en appliquant simplement l'expression (II.70) :

$$Y^{ij} = C_{\alpha}^{*i} y^{\alpha\beta} C_{\beta}^j \text{ donne sous la notation matricielle } (Y) = (C)^t (y) (C) \quad (II.74)$$

$$Y^{11} = (y^{11} + y^{21} - y^{31}) + (y^{12} + y^{22} - y^{32}) + (y^{13} + y^{23} - y^{33})$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les inconnues U_i en fonction des courants sources et admittance dans l'espace des paires de nœuds :

$$U_j = \frac{1}{Y^{ij}} I^i \quad (II.75)$$

Dans l'exemple, le réseau se réduit alors à un vecteur à une seule dimension.

$$U_1 = \frac{(i^1 + i^2 - i^3)}{(y^{11} + y^{21} - y^{31}) + (y^{12} + y^{22} - y^{32}) + (y^{13} + y^{23} - y^{33})} \quad (II.76)$$

II.3.2.3 De l'espace des mailles vers l'espace des réseaux

L'espace des moments a été défini dans la partie changement de base au paragraphe II.3.1.2.

Dans l'hypothèse où plusieurs sous-réseaux interagissent en champ lointain, nous représenterons dans un espace appelé espace des réseaux, les interactions entre sous-réseaux comme des couplages entre des sources ponctuelles rayonnantes repérées dans un espace géométrique (x,y,z) .

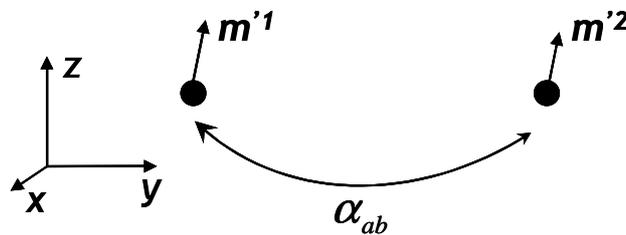


Fig.II.9 : Espace des réseaux

Nous rappelons que le moment est défini par la relation suivante :

$$m^a = S_{\omega}^a J^{\omega} \quad (II.77)$$

A chaque courant de maille correspond un moment dans l'espace des moments caractérisés par la matrice de connexion S des surfaces des mailles.

Chaque sous-réseau est maintenant défini par un seul vecteur moment dans l'espace des réseaux défini à partir des courants et des surfaces de maille.

Considérons ce vecteur moment appartenant à la base $\{u_i\}$ de l'espace des réseaux R . Nous obtenons avec la convention de notation d'Einstein :

$$\vec{m} = \vec{u}_i \eta_a^i \cdot m^a \quad (II.78)$$

\vec{u}_i est l'ensemble des vecteurs de base covariant appartenant à l'espace géométrique (x,y,z) .

η est la matrice non carrée de connexion de l'espace des moments à l'espace des réseaux.

Nous obtenons donc les composantes du vecteur moment une fois contravariant dans l'espace des réseaux m^i :

$$m^i = \eta_a^i \cdot m^a \quad (II.79)$$

Nous présenterons l'espace des réseaux plus en détail dans la partie couplages en champ lointain du paragraphe II.4.2.3.

Nous démontrerons alors comment passer de l'espace des réseaux à l'espace des mailles par l'intermédiaire de la matrice de connexion de changement d'espace η entre l'espace des réseaux et des moments, et de la matrice de changement de base S pour retourner enfin dans l'espace des courants de maille.

Nous obtiendrons alors la relation (II.80) dans laquelle la matrice α définit les couplages entre sous-réseaux dans l'espace des réseaux. La matrice M sera constituée des impédances mutuelles dans l'espace des courants de maille.

$$M_{ip} = S_{i\bullet}^{\bullet q} \eta_{q\bullet}^{\bullet b} \alpha_{ab} \eta_{\omega}^a S_p^\omega \quad (II.80)$$

Nous résumons dans le tableau suivant les différents espaces que nous venons d'introduire.

Espaces des	ddp de branche	paires de nœud	courants de branche	courants de maille	moments	réseaux
Schéma électrique						
Relation tensorielle	$j^\alpha = i^\alpha - y^{\alpha\beta} u_{\beta\bullet}$	$I^i = Y^{ij} U_{j\bullet}$	$u_{k\bullet} = e_{k\bullet} - z_{kj} i^j$	$E_{k\bullet} = Z_{kp} I^p$	$m^a = S_{\omega}^a J^\omega$	$m^i = \eta_a^i \cdot m^a$
Formule de transformation	$I^i = C_\alpha^i i^\alpha$ $Y^{ij} = C_\alpha^i y^{\alpha\beta} C_{\beta\bullet}^j$		$E_{i\bullet} = C_{i\bullet}^{\bullet\alpha} e_{\alpha\bullet}$ $Z_{ij} = C_{i\bullet}^{\bullet\alpha} z_{\alpha\beta} C_j^\beta$		$M_{ip} = S_{i\bullet}^{\bullet\omega} \alpha_{\omega\lambda} S_p^\lambda$	$M_{ip} = S_{i\bullet}^{\bullet q} \eta_{q\bullet}^{\bullet b} \alpha_{ab} \eta_{\omega}^a S_p^\omega$

Nous venons de montrer que les changements de bases permettent différentes possibilités pour observer, représenter ou étudier un réseau électrique. D'autre part, les changements d'espaces permettent dans certains cas de réduire considérablement les équations d'un système complexe.

En plus de ces avantages, nous montrerons dans le paragraphe suivant que la démarche d'analyse tensorielle constitue un atout majeur dans la représentation des interactions multiples et complexes entre sous-réseaux.

II.4 Interactions entre les réseaux

Nous montrerons dans le premier paragraphe comment réaliser simplement les couplages de mode conduit entre les sous-réseaux. Concrètement, nous connectons physiquement deux sous-réseaux grâce à une matrice d'interconnexion F .

Dans le second paragraphe, nous présenterons un autre type d'interaction, cette fois caractérisée par les tenseurs de types impédances mutuelles qui permettront de représenter des couplages en mode rayonné multiphysiques, multiéchelles et multiparamètres entre sous-réseaux. Nous choisissons d'étudier, différents phénomènes physiques intervenant typiquement dans les problèmes CEM des systèmes complexes, à savoir le couplage électrique, le couplage magnétique, le couplage thermique et le couplage mécanique. Chacun de ces couplages sera alors représenté par les composantes des tenseurs des impédances, et dans l'espace topologique le mieux adapté.

II.4.1 Interconnexions ou couplages en mode conduit

Les agressions électromagnétiques sont généralement conduites par des torons de câbles ou par des antennes. Pour cette raison, ce paragraphe est consacré à la modélisation des connexions physiques matérialisées par un contact ou par un court-circuit entre deux sous-réseaux topologiques comme l'illustre le véhicule de la Fig. I.1 traité au chapitre I.

Un exemple très simple permettra de comprendre comment connecter deux sous-réseaux entre eux avec l'outil tensoriel.

Pour cela considérons deux mailles indépendantes à connecter.

N sous-réseaux identiques sont disposés côte à côte et deux autres réseaux sont disposés aux extrémités comme illustrés Fig.II.10. Pour l'exemple, nous choisirons $N=2$.

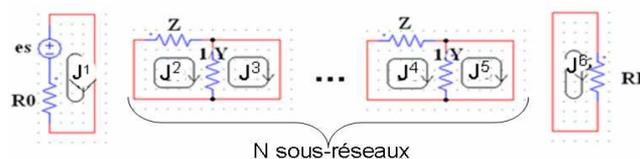


Fig.II.10: Circuit non connecté

Chacune des extrémités des réseaux est court-circuitée pour effectuer la connexion de type court-circuit.

Le principe est simple, les courants des mailles 1 et 2 seront égalés de sorte que les deux mailles comporteront des courants identiques J^1 et J^2 imposés par les mailles 1 et 2 et orientés dans le même sens. De ce fait, le réseau final se réduira à une maille J^1 dans laquelle on fusionne les courts-circuits adjacents pour matérialiser la connexion entre deux mailles voisines. Ce procédé est étendu à l'ensemble des N sous-réseaux comme l'illustre la Fig.II.11.

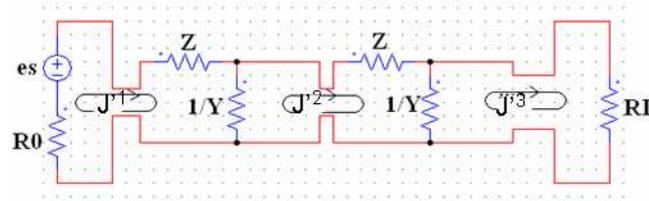


Fig.II.11: Circuit connecté

La transformation de la Fig.II.10 à la Fig.II.11 s'opère de manière systématique par le formalisme tensoriel. Les matrices impédances et *fém* du réseau non connecté sont données dans l'équation (II.81). $[Z_1]$ et $[Z_2]$ sont les matrices impédances dans l'espace des mailles des réseaux non connectés de la Fig.II.10.

$$Z = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Z_1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [Z_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_L \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} es \\ [0] \\ [0] \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matrices du système non connecté} \quad (II.81)$$

Nous cherchons à déterminer de manière systématique les tenseurs du nouveau système connecté Fig.II.11. Pour cela, nous définissons une matrice d'interconnexion (F) à partir des courants de maille du réseau non connecté de la Fig.II.10 noté J^i , que nous relierons aux courants de maille noté J^i du système connecté de la Fig.II.11. A titre d'exemple, on pose le système d'équation reliant les courants de ces deux systèmes :

$$\begin{aligned} J^1 &= 1.J^1 + 0.J^2 + 0.J^3 \\ J^2 &= 1.J^1 + 0.J^2 + 0.J^3 \\ J^3 &= 0.J^1 + 1.J^2 + 0.J^3 \\ J^4 &= 0.J^1 + 1.J^2 + 0.J^3 \\ J^5 &= 0.J^1 + 0.J^2 + 1.J^3 \\ J^6 &= 0.J^1 + 0.J^2 + 1.J^3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (J) = (F)(J') \quad (II.82)$$

Dans l'équation matricielle placée à droite de l'équation (II.82), (F) est appelée la matrice d'interconnexion. Pour le cas particulier du circuit de la Fig.II.11, elle comporte un assemblage de uns et de zéros illustrée dans l'équation (II.83).

$$(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (II.83)$$

Il a été démontré que les matrices impédance et *fém* de la Fig.II.11 du nouveau système connecté, peuvent être déterminées de manière systématique par les relations matricielles suivantes [II.6] :

$$(Z') = (F)'(Z)(F) \quad (E') = (F)'(E) \quad (II.84)$$

En appliquant ces formules, on obtient finalement les matrices impédance et $fém$ du système connecté :

$$Z' = \begin{bmatrix} R_0 + Z_1 + \frac{1}{Y_1} & -\frac{1}{Y_1} & 0 \\ -\frac{1}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} + Z_2 + \frac{1}{Y_2} & -\frac{1}{Y_2} \\ 0 & -\frac{1}{Y_2} & \frac{1}{Y_2} + R_L \end{bmatrix} E' = \begin{bmatrix} es \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Matrices du système connecté} \quad (II.85)$$

II.4.2 Couplages multiphysiques entre réseaux

De par les propriétés fondamentales respectivement liées à chaque espace d'un réseau (espaces des nœuds, des branches, des mailles ou des moments), les couplages seront de natures différentes. Nous différencions les propriétés des champs selon leurs directions longitudinales ou transversales.

Les champs de vecteurs longitudinaux, parce qu'ils sont parallèles à la direction de propagation, développent une force axiale, comme les forces électrostatiques de Coulomb (pour le couplage électrique) ou la force de la gravité. Ce peut être aussi un champ thermique provenant d'un flux traversant une résistance dans l'espace des branches, ce peut être un champ dérivant d'un gradient de potentiel dans le cas du stockage d'énergie dans une capacité ou de transport d'énergie avec une inductance de branche. Ces champs longitudinaux seront donc portés par l'espace des branches.

Les interactions en champs magnétiques seront quant-à elles représentées dans l'espace des mailles à travers des mutuelles.

Les interactions faisant intervenir des champs perpendiculaires à la direction de propagation, ne pourront pas être portées par les branches ou les mailles mais par des cordes. Le champ électrique lointain, modélisé par la dérivée temporelle du potentiel vecteur de la jauge de Coulomb, ou les interactions en champ magnétique lointain, dérivées du potentiel vecteur de la jauge de Lorentz seront portés par ces cordes.

Les interactions de type mécanique agiront directement sur les nœuds d'un réseau.

Les transformations d'espaces de *G.Kron* permettront d'utiliser l'espace topologique approprié au contexte des couplages.

Dans les paragraphes suivants, nous présenterons différents types de couplages dans le but de montrer quel sera l'espace topologique optimal pour représenter une interaction.

Le premier paragraphe décrit les couplages en champ électrique dans l'espace des courants de branches. Le couplage en champ magnétique sera quant à lui représenté dans l'espace des courants de mailles. Les couplages en champ lointain prendront place dans l'espace des moments et l'espace des réseaux, les couplages mécaniques dans l'espace des nœuds et les couplages thermiques dans l'espace des branches.

II.4.2.1 Le couplage en champ électrique

Nous présentons le cas du couplage en champ électrique qui illustre typiquement l'interaction de l'espace des branches.

Le couplage en champ électrique transverse s'obtient à partir de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div}(E) = \rho \cdot \epsilon_0^{-1} \quad (II.86)$$

La divergence du champ électrique s'exprime sous la forme intégrale en utilisant le théorème de *Green-Ostrogradski*. Le flux du vecteur champ électrique à travers une surface fermée est alors égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. D'autre part, la version intégrale du théorème de *Gauss* nous donne l'expression du flux ϕ :

$$\begin{aligned} \text{Théorème de Green-Ostrogradski. } \int \int_S E \cdot dS &= \int \int \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \\ \text{Théorème de Gauss : } \int \int_S E \cdot dS &= \frac{q}{\epsilon_0} = \Phi_e \end{aligned} \quad (II.87)$$

On suppose que la surface de flux du champ est assez petite pour que le champ y soit constant. En dérivant pour faire apparaître le courant, on obtient en fonction du flux Φ_e :

$$q = \Phi_e \cdot \epsilon_0 \quad \rightarrow \quad i = j\omega \epsilon_0 \Phi_e \quad (II.88)$$

Dans le cas du couplage électrique sur une ligne, on retrouve une source de courant qui rapporte finalement l'influence électrostatique du champ sur la ligne.

En insérant la source de courant précédemment obtenue en parallèle à un condensateur, on retrouve avec les propriétés de Thévenin et Norton, un générateur de tension en série avec la capacité :

$$V = \frac{1}{j\omega C} j\omega \epsilon_0 \Phi_e = \frac{h}{j\omega \epsilon_0 S} j\omega \epsilon_0 \Phi_e = hE \quad (II.89)$$

La différence de potentiel induite par la force de Coulomb est finalement obtenue par intégration du travail du champ sur la hauteur h de la ligne.

Dans le cas d'un couplage par diaphonie, la source de courant fait alors participer la capacité linéique de couplage C_{12} et la tension appliquée à la ligne émettrice du champ électrique ainsi que la dimension longitudinale L_0 . V_{10} est la tension source appliquée sur la source de la première ligne.

$$i = jC_{12} \omega V_{10} L_0 \quad (II.90)$$

Le couplage par diaphonie sera décrit en détail au chapitre III.

Prenons l'exemple d'une antenne de type monopole, d'impédance équivalente Z_{ant} , alimentée par une source e_0 d'impédance interne R_0 . Cette antenne génère un champ électrique dans son environnement proche qui est capté par un élément de ligne de longueur dz , illustré dans la Fig.II.12.

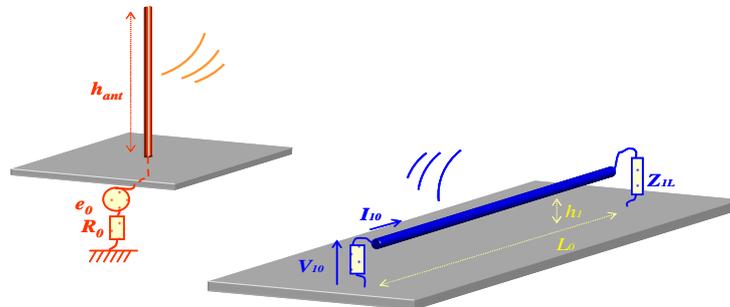


Fig.II.12 : Exemple de couplage électrique

La source de courant, engendrée par influence électrostatique sur l'élément de la ligne, est remplacée par une impédance mutuelle Z_{ce} réalisant ainsi, le couplage entre les deux sous-réseaux.

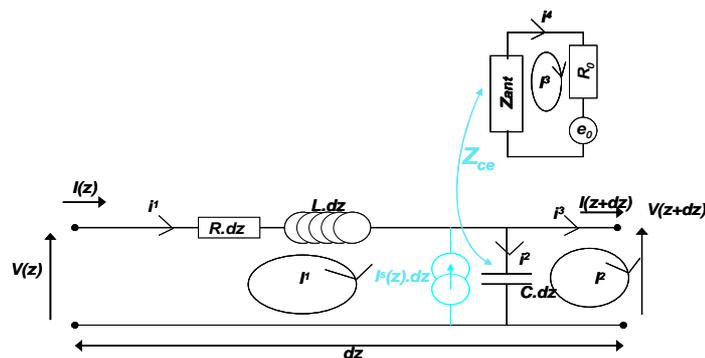


Fig.II.13 : Schéma équivalent d'un couplage électrique sur une ligne

Plutôt que de représenter la source de courant dans un tenseur source I^s , une impédance mutuelle caractérisant le couplage électrique est couplée à la capacité linéique $C.dz$. Cette capacité est en parallèle dans le circuit. C'est pour cette raison que le couplage électrique interviendra dans l'espace des branches et non pas dans l'espace des mailles. Ecrivons les tenseurs impédances dans les deux espaces des branches et des mailles :

La matrice de connexion C de Kron permet le passage de l'espace des branches vers l'espace des mailles :

$$\begin{aligned}
 i^1 &= I^1 + 0I^2 + 0I^3 \\
 i^2 &= I^1 - I^2 + 0I^3 \\
 i^3 &= 0I^1 + I^2 + 0I^3 \\
 i^4 &= 0I^1 + 0I^2 + I^3
 \end{aligned}
 \quad \text{soit} \quad
 C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \quad (II.91)$$

Ecrivons la matrice impédance z' dans l'espace des branches, dans un premier temps sans faire intervenir la matrice m_E des impédances de couplage électrique Z_{CE} .

$$z' = \begin{pmatrix} R + jL\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{jC\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_0 + Z_{ant} \end{pmatrix} \text{ et } m_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{CE} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{CE} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.92)$$

La matrice impédance dans l'espace des branches avec les couplages :

$$z = z' + m_E \quad (II.93)$$

Le couplage dans l'espace des branches apparaît entre les termes m_{24} , soit entre les branches 2 et 4.

Dans l'espace des mailles, en utilisant la matrice C et la matrice z , nous obtenons automatiquement la matrice impédance Z' dans l'espace des mailles en utilisant l'équation (II.16) $Z'_{ij} = (C_{i\bullet}^* \cdot)_{z_{kl}} \cdot (C_j^l)$ avec $(i, j, k, l = 1, 2, \dots, M)$:

$$Z' = \begin{pmatrix} R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{jC\omega} & Z_{CE} \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega} & -Z_{CE} \\ Z_{CE} & -Z_{CE} & R_0 + Z_{ant} \end{pmatrix} \quad (II.94)$$

Regardons les positions des impédances de couplages Z_{CE} dans cette matrice. Elles sont disposées de manière à coupler les mailles 1 et 3 mais aussi les mailles 2 et 3.

Cela vient du fait que la capacité est associée simultanément aux deux courants de mailles I^1 et I^2 .

Pour cette raison, le couplage électrique sera plus facile à représenter dans l'espace des branches.

II.4.2.2 Le couplage en champ magnétique

Pour illustrer le couplage en champ magnétique que l'on associera à l'espace topologique des mailles, nous choisissons l'interaction entre une boucle magnétique et un élément de ligne présentés ci-dessous :

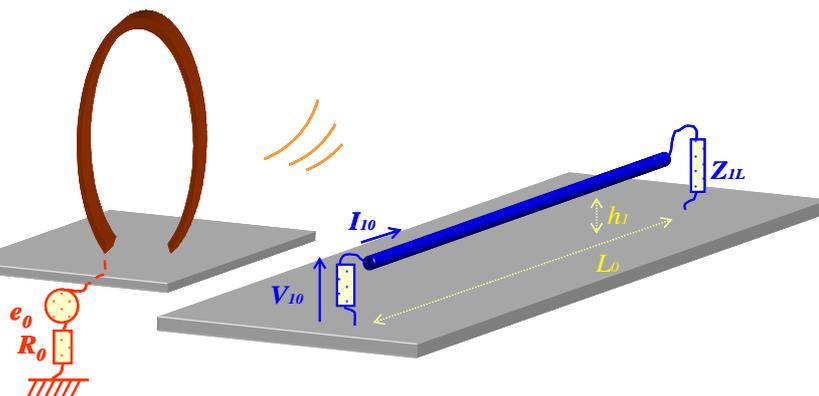


Fig.II.14 : Exemple de couplage magnétique

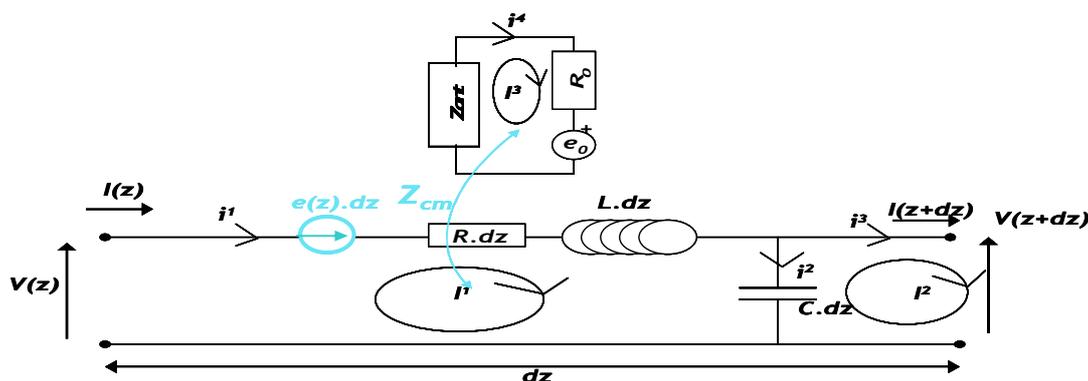


Fig.II.15 : Schéma équivalent d'un couplage magnétique sur une ligne

Les lignes de champ magnétique traversent la surface de l'élément de la ligne pour produire un flux de champ magnétique ϕ :

$$\phi = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (II.95)$$

En utilisant A , le potentiel vecteur du champ B , on trouve par le théorème de Stokes la relation (II.96) :

$$\phi = \int \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{dl} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (II.96)$$

Le potentiel vecteur A généré par un circuit linéique et parcouru par un courant I^l s'écrit :

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I^1 \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} \quad (II.97)$$

Le flux s'écrit donc en isolant le courant I^l par :

$$\phi_{12} = I^1 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = I^1 L_{12} \quad (II.98)$$

Dans cette expression (II.98) apparaît le terme inductance mutuelle L_{12} .

Soit un circuit électrique fermé, suivant la loi de Faraday, le couplage en champ magnétique induit une *fém* équivalente directement liée aux variations de flux ϕ de champ magnétique :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (II.99)$$

On obtient avec une transformée de Laplace, l'expression de la source de couplage équivalente e_0 dans le domaine fréquentiel :

$$e_0 = j\omega.S.\dot{B} \quad (II.100)$$

Dans le cas du couplage par diaphonie entre deux lignes de longueur L_0 , la *fém* équivalente s'écrit sous la forme suivante :

$$e_0 = j\omega L_{12} I^1 L_0 \quad (II.101)$$

Par définition, le champ magnétique génère une tension développée aux bornes de la self induction de la maille dans laquelle la *fém* est couplée. La tension totale est obtenue par sommation de la tension développée aux bornes de l'inductance sommée à la valeur de la *fém*. Les effets inductifs dus aux circulations fermées des courants, nous suggèrent donc de travailler dans l'espace des mailles.

Plutôt que de modéliser le couplage par une *fém* source, nous utilisons l'impédance mutuelle Z_{CM} .

La mutuelle sera donc portée sur une corde reliant les deux nœuds virtuels disposés au centre des mailles des deux sous-réseaux comme le montre la Fig.II.16. Le couplage intervient donc entre ces deux mailles et non pas entre des branches.

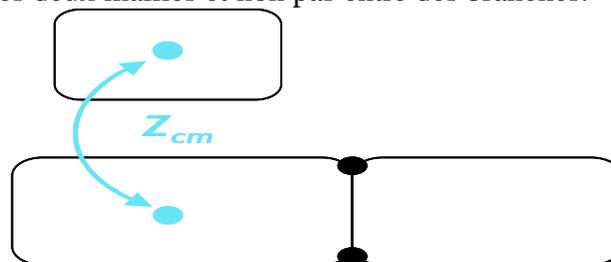


Fig.II.16 : Couplage entre mailles

Dans le cas de réseaux plus complexes, si l'on avait utilisé l'espace des branches pour représenter le couplage magnétique, plusieurs mailles auraient pu être excitées. Cette représentation permet donc un couplage exclusivement entre mailles.

De la même manière que pour le couplage électrique, nous écrivons les matrices impédances dans l'espace des branches puis dans l'espace des mailles pour faire intervenir les couplages entre mailles. La matrice de connexion est bien sûr la même que dans le paragraphe précédent.

$$z' = \begin{pmatrix} R + jL\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{jC\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_0 + Z_{ant} \end{pmatrix} \quad (II.102)$$

Dans l'espace des mailles nous obtenons donc la matrice suivante qui ne prend pas en compte l'effet du couplage magnétique Z_M présent dans la matrice des impédances mutuelles de couplages des mailles :

$$Z' = \begin{pmatrix} R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{jC\omega} & 0 \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega} & 0 \\ 0 & 0 & R_0 + Z_{ant} \end{pmatrix} \text{ et } M_{CM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Z_M \\ 0 & 0 & 0 \\ Z_M & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.103)$$

Finalement, la matrice impédance des deux réseaux reliés par un couplage magnétique s'écrit de la manière suivante :

$$Z = Z' + M_{CM} = \begin{pmatrix} R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} & -\frac{1}{jC\omega} & Z_M \\ -\frac{1}{jC\omega} & \frac{1}{jC\omega} & 0 \\ Z_M & 0 & R_0 + Z_{ant} \end{pmatrix} \quad (II.104)$$

On peut de cette manière, additionner à la matrice impédance du système, les matrices représentant les nombreuses interactions de nature physiques différentes du système complexe.

La matrice impédance finale obtenue dans l'espace des mailles sera alors représentative du système global.

II.4.2.3 Le couplage en champ lointain

Lorsque deux sous-réseaux sont suffisamment éloignés, on dit qu'ils sont en interaction en champ lointain. Dans ce cas, un réseau constitué de M mailles est vu par un autre sous-réseau comme une source ponctuelle émettrice unique.

Dans un premier temps, comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons utiliser une transformation de base, c'est-à-dire que le nombre de moments est égal au nombre de mailles, pour introduire l'analogie entre les équations de propagation de champ utilisées couramment par les antennistes, et le couplage par mutuelle induction dans l'espace des mailles.

A cette propriété intéressante, nous ajoutons une transformation supplémentaire de type changement d'espace. L'objectif est de réduire les interactions en champ lointain à un seul vecteur principal. Pour cela, nous travaillerons dans l'espace des réseaux.

Dans l'exemple présenté dans la Fig.II.17, les sous-réseaux sont choisis arbitrairement mais pourraient par exemple représenter des systèmes électroniques embarqués dans un véhicule interagissant entre eux par des couplages en champ lointain.

Le premier sous-volume V^1 comporte trois mailles, le deuxième V^2 deux, et le troisième V^3 une seule maille. Les couplages en champ lointain sont représentés par les termes α_{ij} traduisant la propagation de l'énergie entre les sous volumes.

Ces sous-réseaux sont localisés dans l'espace à trois dimensions x, y, z .

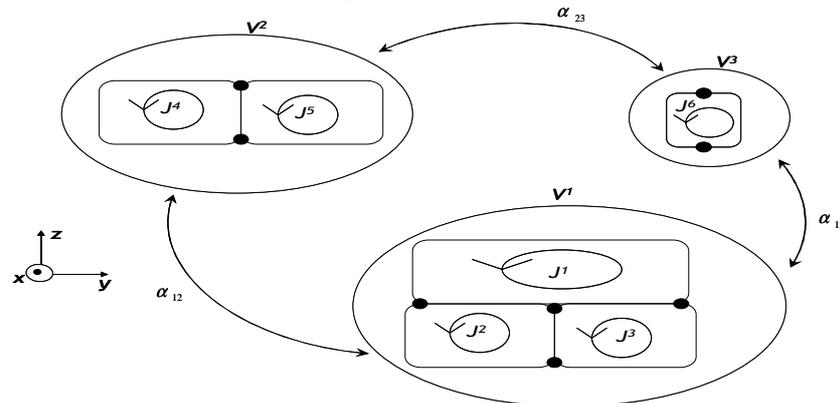


Fig.II.17: Interactions en champ lointain

Chacun des sous-réseaux topologiques sera représenté indépendamment par sa matrice des *fém* et impédance dans l'espace des mailles.

Comme nous l'avons vu précédemment, le moment est défini par l'expression liant les courants de mailles à leurs surfaces respectives contenues dans la matrice S .

$$m^a = S_\omega^a J^\omega \quad (II.105)$$

Les termes de S correspondent aux surfaces S_ω^p des mailles ω, p . Dans l'exemple, $\omega = 1, 2, \dots, 6$ et $p = 1, 2, \dots, 6$. Les matrices des surfaces de chaque réseau sont carrées. Le nombre de moments est égal au nombre de mailles du système.

Dans l'exemple de la Fig.II.17, les matrices S^a des a sous-réseaux s'écrivent de la manière suivante :

$$S^1 = \begin{bmatrix} S_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3^3 \end{bmatrix}, \quad S^2 = \begin{bmatrix} S_4^4 & 0 \\ 0 & S_5^5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S^3 = [S_6^6] \quad (II.106)$$

$$(S) = \begin{pmatrix} (S^1) & (0) & (0) \\ (0) & (S^2) & (0) \\ (0) & (0) & (S^3) \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous définissons un autre vecteur moment qui prendra pour référence l'espace des réseaux. Dans l'exemple de la Fig.II.17, ce moment sera un vecteur une fois contravariant à trois composantes.

Ces moments ne sont bien évidemment pas disposés suivant un même plan dans le repère x, y, z . Nous devons donc tenir compte de la géométrie du système lors de la contraction de l'espace des moments vers l'espace des réseaux.

Pour cela, une matrice dans laquelle apparaissent les angles formés entre un vecteur normal à une maille de référence, et les vecteurs normaux à leurs mailles respectives, complétera la matrice des surfaces.

L'influence de la position des mailles est prise en compte grâce au sinus de l'angle formé par le vecteur \vec{u}_ω normal à la maille ω et le vecteur champ magnétique \vec{B} comme le montre l'exemple de la Fig.II.18 :

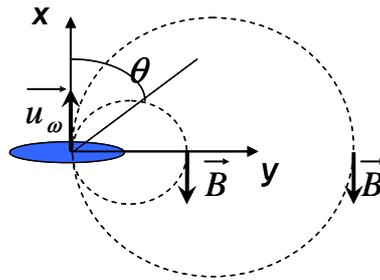


Fig.II.18 : Description du champ magnétique dans l'espace géométrique

La matrice de connexion contractant l'espace des moments vers l'espace des réseaux (η) prendra alors la forme suivante :

$$\eta_a^\omega = \sin(\theta_a^\omega) \quad (II.107)$$

\vec{u}_ω est le vecteur normal au moment ω généré par le courant de maille ω , comme illustré Fig.II.18.

Le vecteur des moments sera alors défini par l'expression (II.108) dans l'espace des réseaux :

$$\vec{m} = \vec{u}_\omega \cdot \eta_a^\omega \cdot m^a \quad (II.108)$$

Appliquée à l'exemple, la matrice de connexion non carrée de dimension 3×6 comportant les sinus des angles θ_a^ω ($\omega=1, \dots, 6$ moments dans l'espace des moments et $a=1, \dots, 3$ moments dans l'espace des réseaux), est de la forme suivante :

$$\eta_a^\omega = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1^1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_2^1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_3^1) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_4^2) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_5^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta_6^3) \end{bmatrix} \quad (II.109)$$

Vu de loin, un sous-réseau verra un autre sous-réseau comme une source ponctuelle ou comme une association de flux rassemblés en un seul moment dans l'espace des réseaux. Le couplage en champ lointain s'effectuera alors par une translation du moment.

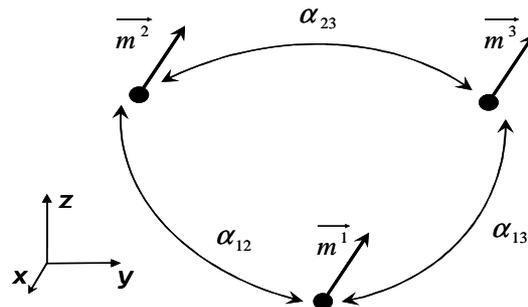


Fig.II.19 : Interactions dans l'espace des moments

Considérons dans l'exemple que les mailles des sous-réseaux se comportent comme des antennes boucles. Le champ magnétique est donc donné à une distance R de la boucle émettrice par l'expression suivante [II.9] :

$$\left| \vec{B} \right|_{\theta} = \mu \frac{\pi J S \sin(\theta)}{\lambda^2} \frac{e^{(-jkR)}}{R} = J.S.\sin(\theta) \cdot \left(\mu \frac{\pi}{\lambda^2} \frac{e^{(-jkR)}}{R} \right) = J.S.\sin(\theta).\alpha \quad (II.110)$$

Ou écrit sous la forme tensorielle avec ω ou p mailles et a ou b sous-volumes :

$$B_{b\bullet} = J^p . S_p^{\omega} . \sin(\theta_{\omega}^a) \alpha_{ba} = \alpha_{ba} . \eta_{\omega}^a . m^{\omega} \quad (II.111)$$

Au point géométrique où vient d'être défini le champ magnétique, se trouve une maille d'un autre réseau dans laquelle la variation de champ génère une *fém* donnée par la relation (II.112):

$$e_{s\bullet} = S_s^{*q} \eta_q^{*b} \partial_t B_{b\bullet} \quad \text{avec } s, q = 1, \dots, M \text{ et } b = 1, \dots, R \quad (II.112)$$

En remplaçant $B_{b\bullet}$ par son expression, on obtient :

$$e_{s\bullet} = S_s^{*q} \eta_q^{*b} \partial_t (\alpha_{ba} . (\eta_{\omega}^a) . m^{\omega}) = S_s^{*q} \eta_q^{*b} \alpha_{ba} \eta_{\omega}^a S_p^{\omega} \partial_t J^p \quad (II.113)$$

On veut injecter cette expression directement dans le formalisme de *Kron* par l'intermédiaire d'une mutuelle dans l'espace des mailles.

Dans les équations précédentes, le terme α_{ba} définit la propagation des a ou b champs magnétiques \vec{B} générés par p courants de maille J^p définis sur les surfaces des ω ou p mailles S_p^{ω} inclinées d'un angle θ_{ω}^a par rapport à la maille de référence.

Appliquée à notre cas, la propagation des champs magnétiques créés par chacun des trois sous-réseaux générera une matrice à trois dimensions α_{ba} traduisant les interactions entre les trois sous-volumes ($a=b=1,2,3$) :

$$\alpha_{ba} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (II.114)$$

Pour résoudre les équations du système, nous avons besoin de transposer ce couplage de l'espace des moments vers l'espace des mailles sous forme d'un couplage par mutuelle M_{sp} ($\omega = q = p = s = 1,2,\dots,6$ mailles). L'équation (II.80) rappelée ci-dessous permet d'obtenir systématiquement la matrice mutuelle dans l'espace des mailles avec (η) , la matrice de connexion totale de l'équation (II.109):

$$M_{sp} = S_s^{\bullet a} \eta_q^{\bullet b} \alpha_{ba} \eta_\omega^a S_p^\omega$$

Soit :

$$M_{sp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_4^4 \eta_4^2 \alpha_{21} \eta_1^1 S_1^1 & S_5^5 \eta_5^2 \alpha_{21} \eta_1^1 S_1^1 & S_6^6 \eta_6^3 \alpha_{31} \eta_1^1 S_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & S_4^4 \eta_4^2 \alpha_{21} \eta_2^2 S_2^2 & S_5^5 \eta_5^2 \alpha_{21} \eta_2^2 S_2^2 & S_6^6 \eta_6^3 \alpha_{31} \eta_2^2 S_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & S_4^4 \eta_4^2 \alpha_{21} \eta_3^3 S_3^3 & S_5^5 \eta_5^2 \alpha_{21} \eta_3^3 S_3^3 & S_6^6 \eta_6^3 \alpha_{31} \eta_3^3 S_3^3 \\ S_1^1 \eta_1^1 \alpha_{12} \eta_4^2 S_4^4 & S_2^2 \eta_2^1 \alpha_{12} \eta_4^2 S_4^4 & S_3^3 \eta_3^1 \alpha_{12} \eta_4^2 S_4^4 & 0 & 0 & S_6^6 \eta_6^3 \alpha_{32} \eta_4^2 S_4^4 \\ S_1^1 \eta_1^1 \alpha_{12} \eta_5^2 S_5^5 & S_2^2 \eta_2^1 \alpha_{12} \eta_5^2 S_5^5 & S_3^3 \eta_3^1 \alpha_{12} \eta_5^2 S_5^5 & 0 & 0 & S_6^6 \eta_6^3 \alpha_{32} \eta_5^2 S_5^5 \\ S_1^1 \eta_1^1 \alpha_{13} \eta_6^3 S_6^6 & S_2^2 \eta_2^1 \alpha_{13} \eta_6^3 S_6^6 & S_3^3 \eta_3^1 \alpha_{13} \eta_6^3 S_6^6 & S_4^4 \eta_4^2 \alpha_{23} \eta_6^3 S_6^6 & S_5^5 \eta_5^2 \alpha_{23} \eta_6^3 S_6^6 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.115)$$

La matrice S de changement de base et la matrice η de changement d'espace ne sont pas des tenseurs.

Remarquons que la matrice S_p^ω est de dimension $6*6$, η_ω^a de dimension $6*3$ et la matrice α_{ab} , de dimension $3*3$. Grâce à cette expression, nous réduisons le système d'un espace des courants de mailles à six dimensions à un espace des réseaux à trois dimensions pour définir les interactions en champ lointain entre ces trois sous-réseaux.

Cette matrice des couplages en champ lointain, est définie automatiquement dans l'espace des mailles, et sera additionnée à une super-matrice impédance Z_{sp} contenant la description des trois sous volumes indépendants dans l'espace des mailles :

$$Z_{couplé} = Z_{sp} + M_{sp} \quad (II.116)$$

Le couplage en champ lointain défini par les équations des antennistes est facilement introduit dans le formalisme de *Kron* et permet de réduire les équations du système.

II.4.2.4 Le couplage thermique

Tous les composants électroniques dégagent de la chaleur (effet Joule par exemple). Toute cette quantité de chaleur devra être conduite hors des câbles ou hors des jonctions des semi-conducteurs vers le milieu extérieur qu'est l'air ambiant.

Si les flux de chaleur sont mal évacués, les variations de températures seront importantes. Les isolants thermiques vieilliront alors de manière prématurée et dans le pire des cas, ces hautes températures détruiront les composants semi-conducteurs.

L'étude de la conduction thermique permettra alors de prévoir et de localiser les échanges thermiques qui peuvent parfois modifier de manière significative les impédances présentes aux extrémités des réseaux de câbles des grands systèmes. On pourra alors prévoir d'associer à certains composants électroniques sensibles, un radiateur de dimension adaptée.

Ce couplage de nature physique différente, montrera comment prédire par la méthode de *Kron*, des problèmes multiphysiques généralement rencontrés dans la CEM des grands systèmes.

II.4.2.4.1 Equation de diffusion de la chaleur

La puissance P_1 est injectée sous forme d'un flux de chaleur vers un matériau qui voit alors sa température augmenter. En d'autres termes, ce matériau consomme la puissance P . La puissance restante non consommée par le matériau est dégagée vers l'extérieur à travers la puissance P_2 :

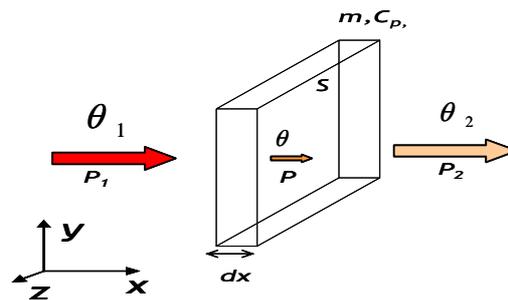


Fig.II.20 : Conduction thermique

La température θ d'un milieu exprimée en $^{\circ}K$, de masse m en kg et de chaleur massique C_p en $J.kg^{-1}.K^{-1}$, est fonction de l'espace spatio-temporel : $\theta(x, y, z, t)$.

On définit le vecteur champ thermique \vec{T} exprimé en fonction des dérivés des températures θ selon les directions de diffusion de la chaleur x, y ou z :

$$\vec{T} = -\overrightarrow{grad}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (II.117)$$

L'écart de température entre θ_1 et θ_2 caractérisant deux milieux est proportionnel au champ thermique circulant sur une ligne de longueur l :

$$\theta_1 - \theta_2 = \oint_l \vec{T} \cdot d\vec{l} \quad (II.118)$$

Pour obtenir les équations de conduction thermique, comme pour les équations de propagation des tensions et courants sur un circuit électrique, nous établissons le bilan de puissance.

La puissance transmise du matériau vers l'extérieur (milieu 2) est proportionnelle au champ thermique traversant la surface S . Le coefficient de proportionnalité λ appelé la conductivité thermique est exprimée en $W.^{\circ}K^{-1}.m$.

$$P_2 = \lambda \iint_S \vec{T} \cdot \vec{dS} \quad (II.119)$$

L'énergie W nécessaire pour élever la température d'un matériau est proportionnelle à sa masse m et à la chaleur massique C_p :

$$W = mC_p d\theta \quad (II.120)$$

De cette énergie, on retrouve la puissance que l'on assimilera par la suite au flux de chaleur présent dans le matériau, que l'on peut donc écrire sous la forme intégrale triple du volume du matériau de masse volumique μ :

$$P = \frac{dW}{dt} = mC_p \frac{d\theta}{dt} = \iiint_V \mu C_p \frac{d\theta}{dt} dV \quad (II.121)$$

Le bilan des puissances permet d'écrire :

$$P_1 = P + P_2 \quad (II.122)$$

ce qui entraîne, en remplaçant l'intégrale de surface par l'intégrale sur le volume :

$$\begin{aligned} P_1 &= \iiint_V \mu C_p \frac{d\theta}{dt} dV + \lambda \iint_S \vec{T} \cdot \vec{dS} \\ P_1 &= \iiint_V \mu C_p \frac{d\theta}{dt} dV - \lambda \iiint_V \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\theta)) dV \end{aligned} \quad (II.123)$$

Après intégration, nous obtenons suivant l'axe des x :

$$P_1 = \frac{1}{dt} \mu C_p S . dx (\theta_2(t) - \theta_1(t)) - \frac{\lambda S}{dx} (\theta_2(x) - \theta_1(x)) \quad (II.124)$$

$$P_1 = \mu C_p S . dx \frac{d\theta}{dt} - \frac{\lambda S}{dx} (\theta_2(x) - \theta_1(x)) \quad (II.125)$$

Cette équation liant la puissance et la variation de température ressemble fortement à l'équation de propagation électrique. Nous ferons alors une analogie avec les équations de propagation électrique liant les courants et les différences de potentiels.

II.4.2.4.2 Analogie entre équations de diffusion thermique et de propagation électrique

Soit la capacité thermique C_{th} exprimée en $J/^\circ K$ et la résistance thermique du milieu R_{th} en $^\circ K/W$:

$$C_{th} = \mu C_p S dx \quad \text{et} \quad R_{th} = \frac{dx}{\lambda S} \quad (II.126)$$

On obtient l'équation thermique directement identifiable à un réseau électrique.

$$P_1 = C_{th} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{R_{th}} (\theta_2(x) - \theta_1(x)) \quad (II.127)$$

La température θ joue le rôle de potentiel électrique et la puissance sera identifiée à la circulation de courant :

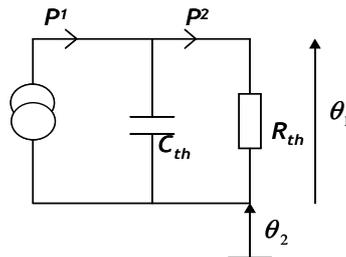


Fig.II.21 : Réseau thermique

Considérons le cas du régime permanent. Dans ce cas, $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Il ne reste plus que la résistance thermique dans le schéma électrique équivalent. Le bilan de puissance nous donne l'équation simplifiée suivante :

$$P_1 = -\frac{1}{R_{th}} (\theta_2(x) - \theta_1(x)) \quad (II.128)$$

II.4.2.4.3 Application de l'analyse tensorielle sur un réseau thermique simple

Examinons maintenant comment s'écrit un système thermique sous la forme d'un système d'équations tensorielles.

Les relations de diffusion thermique peuvent être définies dans l'espace géométrique cartésien à trois dimensions ou, dans le contexte de la thèse, dans les espaces reliés aux réseaux électriques présentés au chapitre I comme les espaces des nœuds, des branches, des mailles, des moments, des paires de nœuds ou des réseaux.

Nous verrons finalement qu'à partir de l'invariant qu'est l'énergie thermique du système, nous pouvons construire un tenseur d'ordre supérieur dans lequel interviendront les interactions multiphysiques entre grandeurs électriques et grandeurs thermiques.

Dans l'espace cartésien représenté dans la Fig.II.20, l'utilisation de l'analyse tensorielle appliquée aux effets thermiques permet généralement de traduire l'effet anisotrope d'un milieu conducteur de chaleur. Un matériau constitué de couches, ne conduira pas la chaleur de manière similaire dans toutes les directions de diffusion. Pour cela, on utilise la relation plus générale qui considère R_{th} comme un tenseur du second ordre.

Dans le cas où l'on considère les trois directions, la puissance peut être représentée par un tenseur une fois contravariant, la différence de température par un tenseur une fois covariant et la résistance thermique pourrait être finalement assimilée à un tenseur d'ordre deux de dimensions 3*3.

$$\Delta\theta = R_{th} \cdot P \text{ exprimé sous la forme tensorielle : } \Delta\theta_i = R_{ij} \cdot P^j \quad (II.129)$$

Avec dans l'espace cartésien et dans la base (e_x, e_y, e_z) :

$$\Delta\theta_i = \begin{pmatrix} \Delta\theta_x & \Delta\theta_y & \Delta\theta_z \end{pmatrix}$$

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} \quad (II.130)$$

$$P^j = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple de la Fig.II.20, nous avons choisi l'étude de la diffusion de la chaleur uniquement selon la direction Ox. Les dérivées partielles de la température selon y et z sont nulles. Dans ce cas, R_{th} , le coefficient de proportionnalité est un scalaire, nous ne traduirons pas l'effet anisotrope du milieu conducteur de chaleur.

Le réseau de la Fig.II.22 permet une mise en équation semblable à l'étude des réseaux électriques en prenant pour référence les espaces des nœuds, des branches, des mailles, des moments, des paires de nœuds ou des réseaux. Les tenseurs précédemment nommés prendront alors pour références ces espaces. La variance sera inchangée mais les dimensions varieront selon l'espace considéré.

Pour le réseau très simple de la Fig.II.22 en régime permanent, nous écrivons les équations dans l'espace des courants de maille.

Notons que ce réseau comporte autant de courants de branche p^l que de courants de maille P^l .

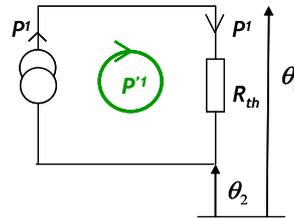


Fig.II.22 : Réseau thermique défini dans l'espace des courants de branche et courants de maille

Nous avons donc dans l'espace des mailles :

$$\Delta\theta_i = R_{ij} \cdot P^j \quad (II.131)$$

Avec :

$$\Delta\theta_i = (\Delta\theta_1) = \theta_2 - \theta_1 \quad (II.132)$$

$$R_{ij} = (R_{th})$$

$$P^j = (P^1)$$

Nous nous intéressons maintenant à un couplage multiphysique très simple composé d'un circuit électrique avec une *fém* source e_0 chargée sur sa résistance interne R_0 , alimentant une charge Z dépendante de la température. Entre le composant représenté par la charge Z et l'air ambiant, un matériau conducteur de la chaleur est caractérisé par sa résistance thermique R_{th} .

Pour représenter ces échanges thermiques, nous effectuerons un couplage multiphysique dans l'espace des branches. Sur la Fig.II.23, θ_2 représente la température de l'air ambiant et θ_1 est la température de la charge Z , par exemple au niveau de la jonction d'un composant semi-conducteur.

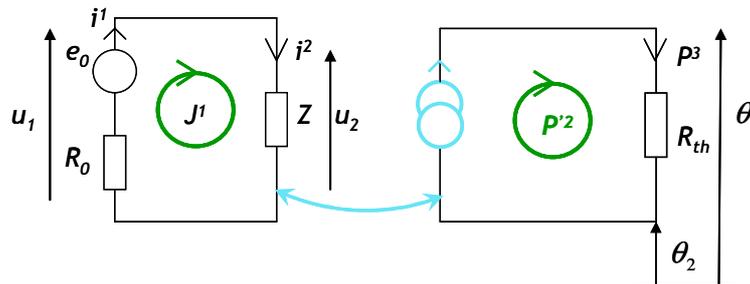


Fig.II.23 : Couplage entre deux sous-réseaux multiphysiques

La puissance électrique P_e délivrée par le composant électronique est liée au courant le traversant et à la *ddp* à ses bornes :

$$P_e = U_i \cdot I^j \quad (II.133)$$

L'impédance thermo-électrique convertissant l'énergie électrique en énergie thermique est généralement exprimée par la relation suivante :

$$Z = Z_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \quad (II.134)$$

On trouve dans cette relation le coefficient α de résistance de température exprimé en $^{\circ}K^{-1}$. L'expression (II.134) s'écrira donc :

$$P_e = Z_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)(I)^2 \quad (II.135)$$

De même on peut écrire que la puissance thermique présentée dans l'équation (II.129) s'écrit de la manière suivante :

$$P_{th} = \Delta\theta \cdot \frac{1}{R_{th}} \quad \text{avec} \quad R_{th} = R_{th0}(1 + \beta \cdot i) \quad (II.136)$$

Cette fois, la résistance thermique dépend du courant i traversant l'impédance et du coefficient β exprimé en (A^{-1}) que nous appellerons coefficient résistance de courant.

En considérant le principe de la conservation de l'énergie, la puissance électrique réelle et la puissance thermique sont égales :

$$P_e = P_{th} \quad (II.137)$$

Cette puissance P_{th} sera reliée au flux de chaleur qui prendra par exemple naissance entre la jonction d'une diode et le milieu ambiant via le boîtier de la diode.

Cette puissance est assimilée dans le sous-réseau de droite comme de type flux et prendra alors comme notation tensorielle dans l'espace des mailles :

$$\Delta\theta_i = R_{ij} \cdot P^j \quad (II.138)$$

Nous définissons donc les tenseurs multiphysiques des efforts e_i , des flux f^j et des impédances z_{ij} de la Fig.II.23 dans l'espace des branches :

$$(f) = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \quad (II.139)$$

Le tenseur des efforts sources :

$$(e) = (e_0 \quad 0 \quad \theta_2) \quad (II.140)$$

Et finalement le tenseur impédance :

$$(z) = \begin{pmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{th0} \end{pmatrix} \quad (II.141)$$

Les interactions multiphysiques entre ces deux sous-réseaux peuvent être caractérisées par l'ajout d'une source de puissance dans le deuxième sous-réseau si l'on cherche la température dégagée par la charge.

A l'inverse, si l'on connaît la température sur le composant, nous pouvons introduire dans le simulateur, l'effet du flux de chaleur sur l'impédance de la charge électrique du réseau électrique par l'intermédiaire d'une *fém* source introduite dans le sous-réseau électrique.

Ces éléments sources seront finalement supprimés pour être directement traduits dans la matrice des impédances multiphysiques par l'intermédiaire d'une matrice de couplage mutuelle multiphysique :

$$(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X \\ 0 & Y & 0 \end{pmatrix} \quad (II.142)$$

Comme le montre cette matrice, les coefficients extra diagonaux X et Y représentent le couplage thermoélectrique entre les deux sous-réseaux de nature physique différente.

Dans le premier cas, nous connaissons la température du composant électrique ainsi que la température de l'air ambiant. On cherche donc à prévoir le comportement de l'impédance soumise à ce flux de chaleur.

En prenant pour référence la deuxième branche de l'espace des courants de branche, nous écrivons l'expression suivante :

$$e_2 = u_2 - (0.i^1 + Z_0.i^2 + X.p^3) \quad (II.143)$$

Et

$$u_2 = (Z_0.i^2 + Z_0.\alpha.\Delta\theta.i^2) \quad (II.144)$$

e_2 est la *fém* de la branche 2 qui est égale à zéro dans la Fig.II.23, u_2 est la *ddp* aux bornes de cette deuxième branche. X est le terme de couplage multiphysique que l'on cherche.

En identifiant les équations (II.143) et (II.144), nous obtenons :

$$Z_0.\alpha.\Delta\theta.i^2 = X.p^3 \quad (II.145)$$

$$Z_0.\alpha.\Delta\theta.i^2 = X.u_2.i^2 \quad (II.146)$$

En exprimant u_2 en fonction de e_0 et R_0 et $Z = Z_0(1 + \alpha.\Delta\theta)$ on obtient finalement l'expression du terme de couplage multiphysique :

$$u_2 = \frac{e_0.Z_0.(1 + \alpha.\Delta\theta)}{R_0} \quad \text{entraîne} \quad X = \frac{R_0.\alpha.\Delta\theta}{(1 + \alpha.\Delta\theta)e_0} \quad (II.147)$$

Ce coefficient de couplage est exprimé en $[\Omega][V]^{-1}$ et permet dans l'équation (II.147) de conserver l'unité d'une *fém* lors du produit $X.p^3$: $([\Omega][V]^{-1}.[V][A] \equiv [V])$

Considérons maintenant le cas où la puissance dégagée est connue, et nous calculons la température produite par le composant sur un point du matériau.

En se positionnant sur la branche trois de l'espace des courants de branche, nous obtenons l'équation suivante liée au réseau thermique :

$$\theta_2 = \theta_1 - (0.i^1 + Y.i^2 + R_{th0}.p^3) \quad (II.148)$$

De la même manière, nous obtenons l'expression du terme de couplage Y :

$$\begin{aligned} Y.i_2 &= R_{th0}.\beta.i_2.p_3 \\ Y &= R_{th0}.\beta.p_3 \\ p_3 &= u_2.i_2 = Z_0(i_2)^2 = Z_0 \frac{(e_0)^2}{R_0^2} \end{aligned} \quad (II.149)$$

$$Y = \frac{Z_0 \cdot (e_0)^2 R_{th0} \cdot \beta}{R_0^2} \text{ exprimée en } [V]^2 \cdot [A]^{-1}$$

Ces relations n'utilisent pas les conventions d'indice utilisées par le calcul tensoriel.

La matrice des impédances des branches s'écrit finalement de la manière suivante :

$$z' = z + m \quad (z') = \begin{pmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & X \\ 0 & Y & R_{th0} \end{pmatrix} \quad (II.150)$$

La transformation dans l'espace des mailles est réalisée par la matrice de connexion obtenue en exprimant les flux de branche en fonction des flux de maille :

$$(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (II.151)$$

On obtient finalement dans l'espace des flux de maille en utilisant les expressions (II.139), (II.140), (II.150) et (II.151) les matrices suivantes :

$$(E) = \begin{pmatrix} e_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (Z) = \begin{pmatrix} R_0 + Z_0 & X \\ Y & R_{th0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (I) = \begin{pmatrix} J^1 \\ P^2 \end{pmatrix} \quad (II.152)$$

II.4.2.4.4 Tenseurs d'ordres supérieurs et problèmes multiphysiques

Nous proposons enfin une autre alternative quant à la représentation des interactions multiphysiques par le calcul tensoriel.

Pour cela, considérons l'invariant électrique p qui n'est rien d'autre que la puissance électrique que l'on exprime sous la forme suivante :

$$p = I^i z_{ij} I^j \quad (II.153)$$

Dans un second temps, considérons l'invariant thermique représenté par l'énergie :

$$w = m \cdot C_p d\theta \quad (II.154)$$

En exprimant $d\theta$ en fonction de la puissance qui n'est que la dérivée temporelle de l'énergie, nous obtenons :

$$d\theta = R_{th} \cdot p \quad (II.155)$$

A ce moment, $d\theta$ et R_{th} sont des scalaires.
 Pour considérer les différents couplages thermiques appliqués à chacune des branches d'un réseau électrique, nous considérons maintenant R_{th} comme un tenseur une fois covariant et $d\theta$ également comme un tenseur une fois covariant :

$$d\theta_k = R_k \cdot p \quad (II.156)$$

Ce qui entraîne en égalant les puissances électriques et thermiques :

$$\begin{aligned} d\theta_k &= R_k \cdot I^{\bullet i} \cdot z_{ij} \cdot I^j \\ \delta &= \frac{1}{d\theta_k} \cdot (R_k \cdot I^{\bullet i} \cdot z_{ij} \cdot I^j) \\ \text{Si } \Omega^k &= \frac{1}{d\theta_k} \text{ on a : } \delta = R_k (I^{\bullet i} \cdot z_{ij} \cdot I^j) \Omega^k \\ \delta &= (I^{\bullet i} \cdot z_{ij} \cdot I^j) \cdot R_k \cdot \Omega^k \\ \delta &= (I^{\bullet i} \cdot z_{ij} \cdot I^j) \cdot \Omega^{\bullet k} \cdot R_k \\ \delta &= (I^{\bullet i} \cdot z_{ij} \cdot R_k \cdot I^j) \cdot \Omega^k \\ \delta &= \Omega^{\bullet k} (I^{\bullet i} \cdot z_{ij} \cdot R_k \cdot I^j) \end{aligned} \quad (II.157)$$

δ est un invariant et représente un scalaire égal à un.

En effectuant le produit tensoriel des tenseurs z_{ij} et R_k , nous obtenons alors un tenseur d'ordre trois, trois fois covariant noté a_{ijk} :

$$\delta = \Omega^{\bullet k} I^{\bullet i} a_{ijk} I^j \quad (II.158)$$

Ou,

$$\delta = I^{\bullet i} a_{ijk} I^j \cdot \Omega^k \quad (II.159)$$

Dans un même tenseur d'ordre trois, seront alors confrontées les caractéristiques multiphysiques d'un système.

Nous démontrons le caractère tensoriel de a_{ijk} en partant de l'équation (II.160),

$$\delta = (I^{\bullet i} a_{ijk} I^j) \cdot \Omega^k \quad (II.160)$$

On obtient :

$$\Delta_i = a_{ijk} B^{jk} \quad \text{avec} \quad \Delta_i = \frac{1}{I^i} \quad \text{et} \quad B^{jk} = I^j \Omega^k \quad (II.161)$$

Supposons que a_{ijk} se transforme par changement de base en a'_{lmn} .
 Nous savons que I^i , I^j et Ω^k sont tous les trois des tenseurs une fois contravariants. Δ_i et B^{jk} sont donc des tenseurs respectivement une fois covariants et deux fois contravariants.

Puisque Δ_i est un tenseur, nous pouvons écrire par définition du changement de base d'un tenseur une fois covariant :

$$\Delta'_i = \Delta_i \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \quad (II.162)$$

De même, pour le tenseur B^{jk} :

$$B'^{mn} = B^{jk} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial y^n}{\partial x^k} \quad (II.163)$$

Ou inversement,

$$B^{jk} = B'^{mn} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^n} \quad (II.164)$$

On a ensuite en utilisant les équations précédentes :

$$\begin{aligned} \Delta'_i &= a'_{lmn} B'^{mn} = \Delta_i \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \\ &= a_{ijk} B^{jk} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \\ a'_{lmn} B'^{mn} &= a_{ijk} B'^{mn} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial x^k}{\partial y^n} \end{aligned} \quad (II.165)$$

En identifiant, on reconnaît finalement le caractère tensoriel de la grandeur a :

$$a'_{lmn} = a_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial x^k}{\partial y^n} \quad (II.166)$$

a_{ijk} est donc bien un tenseur trois fois covariant.

II.5 Résolution globale des super-tenseurs

Dans ce chapitre, nous venons de voir comment les grandeurs flux, efforts, sources et opérateurs impédances sont définies dans chacun des espaces tensoriels rappelés dans le *tableau 1* récapitulatif. Nous avons vu qu'il est relativement simple de passer d'un espace ou d'une base à un ou une autre.

L'analyse topologique d'un grand système a permis de dissocier des sous-réseaux plus simples à caractériser indépendamment. Une fois les interactions multiphysiques entre toutes ces entités déterminées, il faut résoudre les équations du système.

Avant cela, choisissons l'espace le mieux adapté pour résoudre les équations tensorielles comportant le moins d'équations possibles. Il suffit d'appliquer les relations topologiques, ou tout simplement d'utiliser l'espace dans lequel nous sommes le plus à l'aise avec la représentation physique du système.

Effort, source, flux et impédance (ou admittance) seront alors déterminés dans l'espace des courants de maille ou dans l'espace des paires de nœud.

L'inversion de la matrice impédance permettra de trouver tous les courants de maille du système. Dans l'autre cas, l'inversion de la matrice admittance nous donnera toutes les ddp entre paires de nœud :

$$I^j = \frac{1}{Z_{ij}} e_i \quad \text{ou} \quad u_i = \frac{1}{Y_{ij}} i^j \quad (II.167)$$

Si besoin, nous pouvons alors retrouver ces solutions dans d'autres espaces. En prenant l'exemple d'une résolution dans l'espace des mailles I^i et en appliquant la formule de changement d'espace, nous retrouvons les courants de l'espace des branches i^α .

$$i^\alpha = C_i^\alpha I^i \quad (II.168)$$

Avant de conclure ce chapitre II, nous nous attarderons sur les conditions de validités de la méthode de *Kron* telle qu'elle était définie à l'époque de *G.Kron* et telle qu'elle est utilisée actuellement.

II.6 Condition de validité de la méthode de Kron

D'un point de vue théorique, la principale restriction de la méthode de *G.Kron*, telle qu'elle était utilisée vers 1950, concerne la modélisation des phénomènes de propagation par des circuits localisés. En effet, les papiers publiés en 1944, 1948 et 1968 [II.1] à [II.5], montrent que l'auteur de cette méthode utilisait des éléments localisés pour représenter les mailles géométriques d'un système. Tel est le cas du papier '*equivalent Circuit of the Field Equations of Maxwell*' [II.4]. L'environnement en trois dimensions est découpé en petits éléments géométriques devant la longueur d'onde. Chacun de ces volumes est homogène. Les comportements des champs électriques E et magnétiques H sont alors identifiés à des grandeurs de tensions et courants se propageant à travers des circuits formant des 'sphères' dans lesquels figurent des éléments localisés de type résistance R , capacité C et inductance L , représentatifs du milieu de propagation. Cette méthode donnera par la suite la méthode *TLM* (*Transmission-Line Modeling Method*).

L'analyse tensorielle des réseaux permet alors de mettre simplement en équation ces grands circuits électriques incluant les phénomènes de propagation.

Cela pour dire que la principale condition d'utilisation de la méthode de *Kron* telle qu'elle était définie à l'époque, exigeait une représentation des phénomènes de propagation par des éléments électriques distribués.

Le disciple de *G.Kron*, *F. H. Branin*, a élargi les conditions de validité de cette méthode en considérant que les phénomènes de propagation peuvent être directement introduits dans un seul élément électrique. Tel est le cas dans le modèle électrique de *Branin* d'une ligne de propagation. Les effets de la propagation des champs électromagnétiques sont introduits dans des *fém* disposées aux extrémités de la ligne sous forme analytique.

Nous verrons plus en détail dans le chapitre suivant les différentes possibilités de représentation des phénomènes de propagation.

*Chapitre III : Quantification des
interactions EM*

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté comment, à partir d'un réseau électrique complexe, les équations de propagation des courants ou des tensions peuvent être résolues par le calcul tensoriel en utilisant la *MKCE* (*Méthode de Kron appliquée à la Compatibilité Electromagnétique*).

Nous avons observé qu'il existe différents volumes topologiques caractérisant pour chacun d'eux une interaction multiphysique spécifique. Cela peut être un couplage par conduction, un couplage inductif ou capacitif, un couplage en champ électromagnétique, mais également un couplage thermique agissant directement sur les impédances électriques du réseau.

Ce chapitre *III* fera le lien entre l'outil mathématique tensoriel des circuits électriques et le besoin exprimé par les ingénieurs *CEM* désirant prévoir les comportements électromagnétiques survenant sur des grands systèmes.

Nous suivrons dans l'organisation de cette partie, la démarche présentée au chapitre *I* de l'analyse topologique d'un grand système.

Nous commencerons ainsi par présenter l'étude relativement simple d'une ligne de transmission en mode commun. Une fois décrite, nous disposerons une seconde ligne parallèlement à la première pour décrire le couplage par diaphonie dans ce nouveau formalisme. De la même manière, nous définirons ensuite un couplage par diaphonie entre deux lignes en mode différentiel.

L'analyse modale s'adaptant parfaitement au formalisme de *G.Kron*, permettra de traduire plus rigoureusement les réseaux de câbles multifilaires enrobés de gaines diélectriques. On pourra alors prédire le comportement électromagnétique d'un réseau de câbles.

Nous nous attarderons ensuite sur la prévision de l'impédance de transfert caractérisant le blindage *EM* d'un câble.

Après l'étude des lignes de transmission vues comme des sources ou des récepteurs de perturbations, nous étudierons les systèmes couramment utilisés pour émettre et recevoir des signaux électromagnétiques. L'antenne monopole et l'antenne boucle sont les deux exemples choisis pour traduire sous le formalisme de *Kron* ces couplages en champ *EM* simples.

Dans le chapitre *IV*, ces émetteurs et récepteurs seront introduits dans une cavité électromagnétique surdimensionnée devant la longueur d'onde pour montrer l'efficacité de la méthode tensorielle sur des systèmes de plus en plus compliqués.

III.1 Modélisation d'une ligne de transmission par la MKCE

Contrairement au calcul traditionnel pratiqué par la théorie des lignes dont la résolution mène à des formules analytiques difficilement exploitables, la réduction à des circuits élémentaires comme cela est préconisé dans la méthode de *Kron*, nécessite le recours à un calcul par éléments finis. Cela peut apparaître dans un premier temps comme une complication mais présente par la suite l'avantage de pouvoir fusionner beaucoup plus facilement la ligne avec d'autres paramètres de l'environnement.

III.1.1 Modélisation d'un élément de ligne

Nous rappelons le schéma électrique représentant un élément de ligne soumis à un champ *EM* décrit au chapitre *I* :

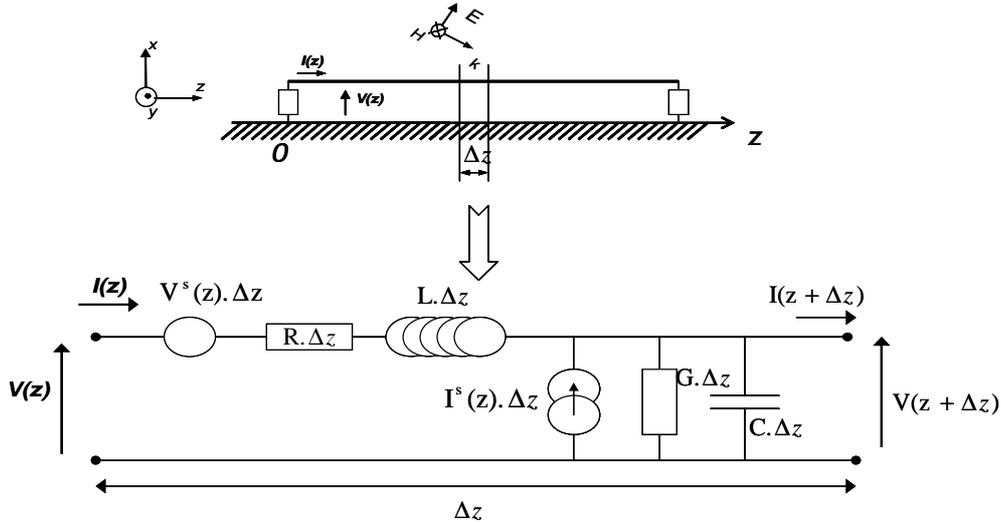


Fig.III.1 : Schéma électrique équivalent d'un élément de ligne de transmission monofilaire

Les phénomènes de propagation introduits sur cette ligne reconstituée ne sont fidèlement reproduits qu'à condition que la longueur d'onde demeure supérieure à la dimension de chaque sous-tronçon Δz .

La théorie des circuits suppose une transmission instantanée de l'entrée à la sortie de chaque quadripôle élémentaire. Cela signifie que la ligne de transmission ne peut être correctement reproduite par ce calcul qu'à condition que chaque élément de circuit corresponde à un élément de ligne sur lequel le temps de propagation est bien inférieur à la période de la source des signaux harmoniques. Autrement dit, la dimension de ce petit tronçon Δz de ligne doit demeurer inférieure à la longueur d'onde, soit :

$$\Delta z = \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4f_0} \quad (III.1)$$

La fréquence de résonance f_0 d'un signal supporté par un élément de ligne de transmission Δz , apparaît lorsque la condition donnée dans l'équation (III.1) est satisfaite. λ est la longueur d'onde du signal en mètre et v la célérité en $m.s^{-1}$.

Pour tenir compte des phénomènes de propagation des ondes jusqu'à la fréquence maximale d'étude f_{max} choisie, il faut donc respecter pour chaque élément de longueur l'inégalité suivante :

$$\Delta z < \frac{v}{4f_{max}} \quad (III.2)$$

La longueur totale de la ligne L est directement proportionnelle au nombre n_z des sous-éléments et de cet élément Δz .

$$L = n_z \cdot \Delta z \quad (III.3)$$

Nous obtenons donc un découpage minimal de la ligne en n_z sous-éléments :

$$n_z = \frac{4f_{\max} L}{v} \quad (III.4)$$

Autrement dit, le rapport sans dimension $\frac{\Delta z}{\lambda}$ doit être inférieur à $\frac{1}{4}$ pour représenter correctement ces phénomènes de propagation.

Il est important de fixer le nombre n_z d'éléments de ligne puisque les dimensions de toutes les matrices et tenseurs que nous allons générer par la suite dans le logiciel dépendront directement de cette grandeur n_z .

Introduisons maintenant un élément de ligne par le formalisme de *Kron*.

Nous court-circuitons les extrémités du réseau pour pouvoir représenter les courants de maille I^1 et I^2 .

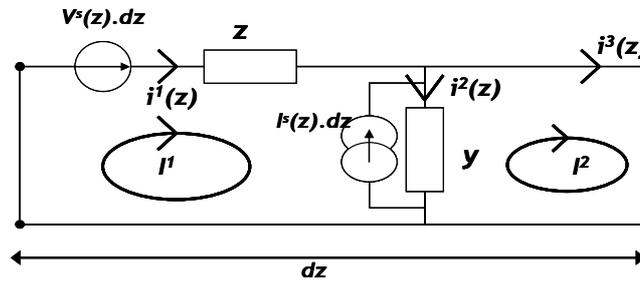


Fig.III.2 : Courant de branche et courant de maille

Les sources de tension et de courant V^s et I^s sont issues des couplages électromagnétiques engendrés sur la ligne. Dans ce paragraphe, faisons l'hypothèse que la ligne n'est soumise à aucun couplage en champ électromagnétique, ces sources sont donc nulles.

L'impédance linéique $Z=(R+jLw)$ traduit les effets des pertes ohmiques dans le conducteur avec la résistance linéique R en $\Omega.m^{-1}$ et l'inductance linéique propre de la ligne L en $H.m^{-1}$.

L'admittance linéique $Y=(G+jCw)$ correspond à la capacité linéique en $F.m^{-1}$ et G la conductance linéique de la ligne due aux pertes éventuelles engendrées dans le diélectrique en $\Omega^{-1}.m^{-1}$.

Nous définissons dans les deux espaces tensoriels des branches et des mailles les deux tenseurs contravariants d'ordre un i^i et \tilde{I}^i auxquels nous associons les tenseurs deux fois covariants impédances z_{ab} et Z_{ab} , respectivement dans les espaces des branches et des mailles. Le tenseur covariant d'ordre un représente les *fém* notées en minuscules e_a dans l'espace des branches et en majuscules E_μ dans l'espace des mailles.

Dans l'espace des branches, notons dans l'équation (III.5), la présence du tenseur v_a correspondant à la différence de potentiel entre deux nœuds de chaque branche. Dans l'espace des mailles, la somme des potentiels des branches constituant une maille est nulle, d'où la disparition de ce tenseur lors de la transformation d'espace.

Les *fém* et *ddp* sont exprimées en *Volt*, les impédances en *Ohm* et les courants en *Ampère*. L'écriture indicielle avec la convention d'Einstein sur les indices muets est utilisée pour écrire la relation tensorielle décrivant le système dans l'espace des branches :

$$e_a - v_a = z'_{ab} i^b \quad \text{avec} \quad (e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (z') = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i) = \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{bmatrix} \quad (III.5)$$

Dans la plupart des cas, la transformation de ces tenseurs vers l'espace des mailles n'est pas intuitive. Comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent, la matrice de connexion C de $G.Kron$ permet d'obtenir ces nouveaux tenseurs, et cela quelle que soit la complexité du circuit électrique. Rappelons que cette matrice de connexion s'obtient très facilement en exprimant les courants de branche en fonction des courants de maille :

$$\begin{aligned} i^1 &= I^1 + 0I^2 \\ i^2 &= I^1 - I^2 \\ i^3 &= 0I^1 + I^2 \end{aligned} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.6)$$

En utilisant les expressions définies au chapitre précédent, nous retrouvons les tenseurs *fém* et impédances dans l'espace des mailles :

$$\begin{aligned} i^b &= C_v^b I^v \quad b=1,2,\dots,B \text{ et } v=1,2,\dots,M \\ &\text{entraîne :} \\ E_\mu &= e_a C_\mu^a \quad a=1,2,\dots,B \text{ et } \mu=1,2,\dots,M \\ Z'_{\mu\nu} &= C_\mu^a z'_{ab} C_\nu^b \quad a,b=1,2,\dots,B \text{ et } \mu, \nu=1,2,\dots,M \end{aligned} \quad (III.7)$$

Ces mêmes équations peuvent être écrites sous la forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (i) &= (C)(I) \\ &\text{entraîne :} \\ (E) &= (e)(C) \quad \text{et} \quad (Z') = (C)'(Z)(C) \\ &(C)' \text{ est la matrice transposée de } (C) \end{aligned} \quad (III.8)$$

Nous obtenons alors les tenseurs dans l'espace des mailles suivants :

$$E_\mu = Z'_{\mu\nu} I^\nu \quad \text{avec} \quad (E) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (Z') = \begin{bmatrix} Z + \frac{1}{Y} & -\frac{1}{Y} \\ -\frac{1}{Y} & \frac{1}{Y} \end{bmatrix} \quad (III.9)$$

Le passage entre les deux espaces engendre une réduction des dimensions des matrices. L'espace des branches est représenté par des matrices à trois dimensions tandis que le même système est représenté par des matrices à deux dimensions dans l'espace des mailles. Nous avons contracté le système d'équations tout en gardant l'intégralité des données de ce petit élément de ligne.

En suivant la démarche adoptée par l'analyse topologique, nous allons maintenant utiliser le concept d'interconnexion entre sous-réseaux pour modéliser une ligne de transmission par éléments finis.

III.1.2 Connexion des éléments de ligne

Comme nous l'avons décrit au chapitre précédent, appliquons l'interconnexion des sous-réseaux par l'analyse tensorielle pour connecter les éléments de ligne que l'on vient de décrire dans la Fig.III.2.

n_z sous-réseaux identiques sont donc juxtaposés et deux nouveaux réseaux sont disposés aux extrémités comme illustré dans la Fig.III.3. Ces derniers représentent, à gauche le générateur comportant une *fém* source e_0 et sa résistance interne R_0 , et à droite, la charge R_L du système connectée à l'extrémité de la ligne. La mise en cascade des n_z circuits élémentaires de la Fig.III.3 permet de reconstituer une ligne de transmission.

Pour illustrer avec un exemple simple, nous choisirons $n_z=2$ sous-réseaux. Nous travaillons dans l'espace des courants de maille.

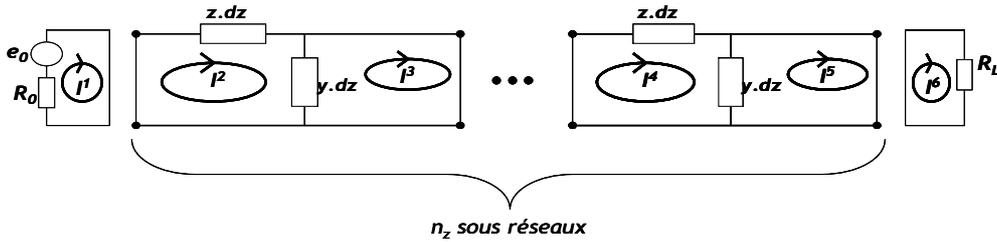


Fig.III.3 : Circuit non connecté

Chacune des extrémités des réseaux est court-circuitée pour pratiquer l'interconnexion entre les courants de maille.

La méthode est la suivante : les courants de maille I^1 et I^2 orientés dans le même sens et contigus, sont mutuellement fusionnés. De cette façon, on réduit le réseau à une seule maille I^1 . Ce procédé est étendu à l'ensemble des n_z sous-réseaux comme l'illustre la Fig.III.4.

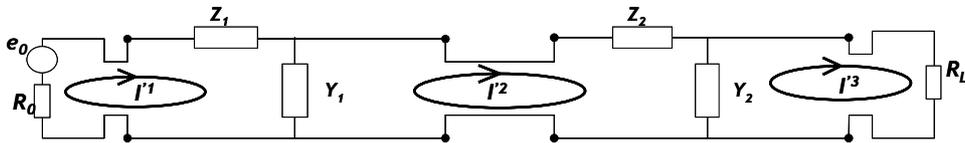


Fig.III.4 : Circuit connecté

La transformation de la Fig.III.3 vers la Fig.III.4 s'opère de manière systématique par la MKCE. Les matrices impédances et *fém* du réseau non connecté sont données dans l'équation (III.10).

Les $n_z=2$ sous-éléments finis de ligne introduits dans la Fig.III.2, seront représentés par les deux matrices impédances dans l'espace des mailles notées $[Z_1]$ et $[Z_2]$. Les composantes de ces matrices sont données dans l'équation (III.9) en section précédente.

En revenant sur le réseau non encore connecté de la Fig.III.3, la matrice impédance associée se réduit au remplissage réalisé dans l'équation (III.10). Dans cette matrice, on retrouve la résistance interne de la source R_0 et la résistance de charge R_L ainsi que les matrices $[Z_1]$ et $[Z_2]$ se rapportant aux deux éléments de ligne dessinés sur la Fig.III.3.

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Z_1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [Z_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_L \end{bmatrix} \quad [E]^t = \begin{bmatrix} es \\ [0] \\ [0] \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matrices du système non connecté} \quad (III.10)$$

Nous cherchons à déterminer de manière systématique les tenseurs du nouveau système connecté de la Fig.III.4. Pour cela, nous définissons une matrice d'interconnexion F à partir des courants de maille notés I^i du réseau non connecté de la Fig.III.3, que nous relient aux courants de maille notés I'^i du système connecté de la Fig.III.4. A titre d'exemple, on pose le système d'équations reliant les courants de ces deux systèmes :

$$\begin{aligned} I^1 &= 1.I'^1 + 0.I'^2 + 0.I'^3 \\ I^2 &= 1.I'^1 + 0.I'^2 + 0.I'^3 \\ I^3 &= 0.I'^1 + 1.I'^2 + 0.I'^3 \\ I^4 &= 0.I'^1 + 1.I'^2 + 0.I'^3 \\ I^5 &= 0.I'^1 + 0.I'^2 + 1.I'^3 \\ I^6 &= 0.I'^1 + 0.I'^2 + 1.I'^3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (I) = (F)(I') \quad (III.11)$$

Dans l'équation matricielle placée à droite de l'équation (III.11), (F) est appelée la matrice d'interconnexion. Pour le cas particulier du circuit de la Fig.III.4, elle comporte un assemblage de uns et de zéros illustré dans l'équation (III.12).

$$(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.12)$$

Il a été démontré que les tenseurs impédances et $fém$ de la Fig.III.4 du système connecté, peuvent être déterminés de manière systématique par les relations tensorielles suivantes :

$$\begin{aligned} E'_\mu &= e_a F_\mu^a \quad \text{et} \quad Z'_{\mu\nu} = F_\mu^a z'_{ab} F_\nu^b \\ \text{Ou} \quad (Z') &= (F)^t (Z) (F) \quad (E') = (F)^t (E) \end{aligned} \quad (III.13)$$

En appliquant ces formules, on obtient finalement les tenseurs impédance et $fém$ du système connecté :

$$Z' = \begin{bmatrix} R_0 + Z_1 + \frac{1}{Y_1} & -\frac{1}{Y_1} & 0 \\ -\frac{1}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} + Z_2 + \frac{1}{Y_2} & -\frac{1}{Y_2} \\ 0 & -\frac{1}{Y_2} & \frac{1}{Y_2} + R_L \end{bmatrix} \quad E'^t = \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Tenseurs du système connecté} \quad (III.14)$$

L'inversion du tenseur impédance de l'espace des mailles Z' multiplié au tenseur des $fém$ de l'espace des mailles E' donnera finalement l'ensemble des courants de maille du système :

$$I^i = \frac{1}{Z_{ij}} E_j \quad (III.15)$$

III.1.3 Résultats expérimentaux et simulés de la réponse d'une ligne de transmission

Considérons une ligne de transmission de longueur $L_0=44\text{cm}$, de $d=1\text{ mm}$ de diamètre, disposée à une hauteur du plan de masse $h=2.5\text{cm}$. Une source de tension comportant une résistance interne de 50 Ohm génère un signal que l'on récupère à l'extrémité de la ligne chargée sur $Z_{IL}=50\Omega$.

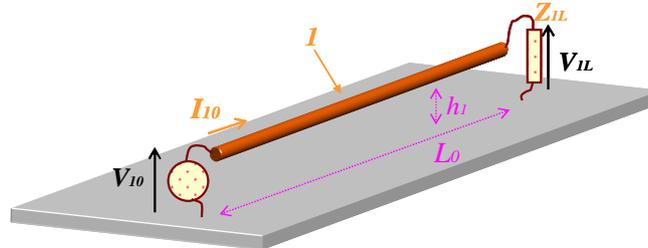


Fig.III.5 : Excitation d'une ligne de transmission

A l'aide du logiciel de calcul *Matlab*, nous réalisons une fonction notée $[Z,E]=\text{ligne}(f,N,L_0,e_0,h,a,R_0,R_1,R_2)$ figurant en annexe II, donnant en sortie, les tenseurs impédance Z et *fém* E de cette ligne dans l'espace des mailles en fonction des entrées que sont la bande passante f d'étude de ce système et les caractéristiques géométriques que l'on énumère :

- le nombre n_z d'éléments de ligne à juxtaposer,
- la longueur de la ligne L_0 ,
- la valeur de la *fém* source e_0 ,
- la hauteur de la ligne h par rapport au plan de masse,
- le diamètre du conducteur noté a ,
- la résistivité du cuivre R_0
- les valeurs des impédances des charges aux extrémités notées Z_{I0} et Z_{IL} dans l'annexe II.

Les tenseurs Z et E calculés par cette fonction dans l'espace des mailles, permettent de calculer directement les courants de maille I' sur tout le réseau en utilisant l'équation (III.15).

La fonction calcule dans un premier temps les impédances z et admittances y d'un élément de ligne dz à partir des paramètres primaires R, L, C , et G .

Les paramètres primaires peuvent toutefois être directement insérés en données dans la fonction.

La matrice de connexion C d'un sous-réseau de la Fig.III.2 à trois courants de branche et deux courants de maille permet de transporter le problème dans l'espace des mailles dès la phase de couplage par conduction.

La matrice d'interconnexion F sera alors générée dans l'espace des mailles. La dimension de cette matrice dépendra du nombre de sous-réseaux n_z choisis.

Ensuite, dans le cas où les sources sont indépendantes de la fréquence, nous définirons le tenseur covariant des *fém* sources d'un sous-réseau de la Fig.III.2 dans l'espace des branches. Par une simple multiplication des matrices e et C , nous obtiendrons la matrice E dans l'espace des mailles. Nous créons alors la super-matrice des *fém* fonction du nombre de sous-réseaux n_z choisi. Nous utiliserons les formules d'interconnexion pour obtenir alors la matrice des sources du système final.

Enfin, pour chaque fréquence désirée, nous générons la matrice des impédances dans l'espace des branches d'un sous-réseau de la Fig.III.2. La matrice de connexion C transportera la matrice des impédances dans l'espace des mailles de ce même petit sous-

réseau. n_z matrices impédance seront alors positionnées sur la diagonale de la super-matrice des impédances du système non connecté pour finalement obtenir par simple multiplication matricielle avec F , la super-matrice des impédances du système connecté dans l'espace des courants de maille.

Il suffit alors pour chaque fréquence d'inverser cette matrice et de la multiplier par la matrice des sources pour obtenir les courants de maille du circuit final.

La réponse fréquentielle de la ligne à une coordonnée est alors affichée.

Nous obtenons pour le système de la Fig.III.5, le rapport des tensions aux extrémités de la ligne présenté dans la Fig.III.6. En bleu, nous avons choisi $n_z=4$ sous-réseaux, en vert $n_z=9$, en rouge $n_z=20$ et enfin en jaune, $n_z=50$ sous-réseaux.

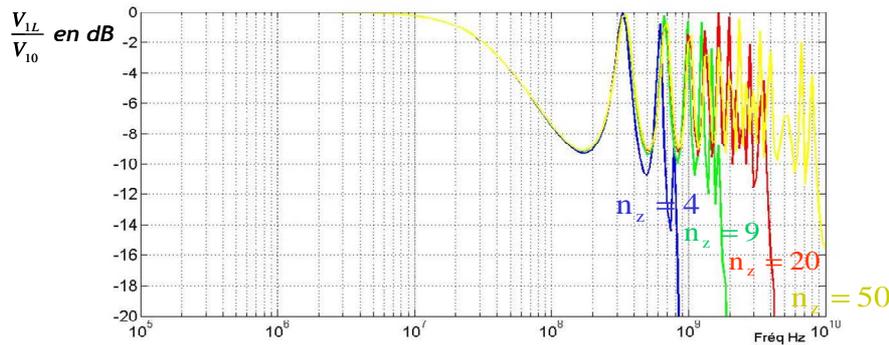


Fig.III.6 : Simulation par la méthode de Kron d'une ligne de transmission

En utilisant l'équation liant le nombre n_z de sous-éléments à la fréquence et la longueur de la ligne, nous retrouvons le domaine de validité fréquentielle de chaque courbe en fonction du nombre de sous-réseaux :

$$\frac{\Delta z}{\lambda} = \frac{L \cdot f_{\max}}{n_z \cdot v} \quad \text{ou} \quad f_{\max} = \frac{n_z \cdot v}{4 \cdot L} \quad (III.16)$$

n_z	$\frac{\Delta z}{\lambda}$ avec ($f_{\max}=1GHz$)	f_{\max}
4	0.36	0.68 GHz
9	0.16	1.5GHz
20	0.07	3.4GHz
50	0.03	8.5GHz

Pour une simulation correcte de la ligne, le rapport $\frac{\Delta z}{\lambda}$ doit être inférieur à 0,25.

Ce n'est pas le cas de la première ligne du tableau pour $n_z = 4$ cellules. La résolution est mauvaise lorsque les fréquences de l'ordre de 1 GHz sont atteintes (Fig.III.6).

La simulation de la phase du rapport $\frac{V_{1L}}{V_{10}}$ montre que le rapport $\frac{\Delta z}{\lambda}$ est aussi sensible sur la phase que sur le module.

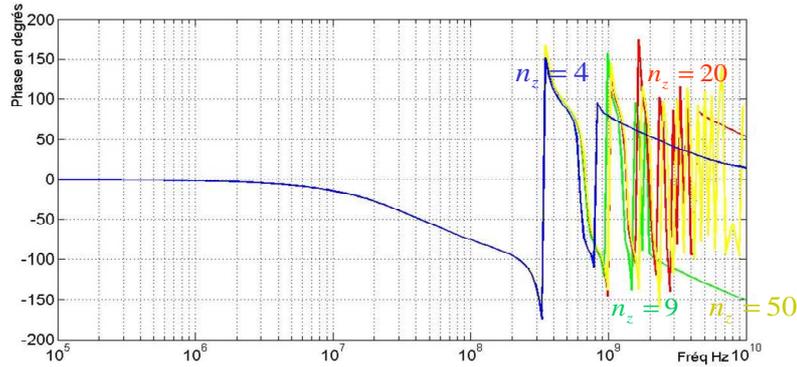


Fig.III.7 : Phase

Nous retrouvons une mauvaise résolution pour les fréquences de l'ordre de 1 GHz lorsque $n_z = 4$.

III.2 Couplage par diaphonie entre deux lignes parallèles

Disposons maintenant deux lignes de transmission parallèlement au dessus d'un plan de masse comme illustré dans la Fig.III.8.

Nous respectons l'hypothèse quasi statique $\lambda \gg L_0$. Un courant injecté dans la ligne émettrice notée 1 parcourt le conducteur pour retourner vers la source par le plan de masse. Ce courant provoque alors un champ magnétique qui engendre dans le conducteur 2, un flux magnétique.

Lorsque le courant est animé de variations harmoniques en fonction de la variable temps, les variations de flux engendrent sur le conducteur 2 une *fém* induite évoluant proportionnellement à la fréquence lorsque $\lambda \gg L_0$.

Si on applique une tension V_{10} sur la ligne émettrice, un champ électrique prend naissance. Ce champ, par influence électrostatique, provoque des charges induites sur le conducteur 2. Lorsque V_{10} subit des variations harmoniques, ces charges induites donnent lieu à un courant induit sur la ligne 2 devenant proportionnel à la fréquence.

L'affaiblissement de la diaphonie est le rapport des tensions mesurées aux bornes de ces deux lignes V_{20}/V_{10} .

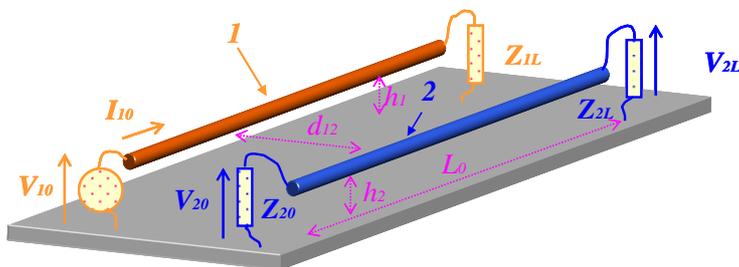


Fig.III.8 : Couplage par diaphonie.

Pour satisfaire les hypothèses de la théorie des lignes de transmission, nous respectons les conditions suivantes :

$$h_1, h_2, d_{12} \ll L_0 \tag{III.17}$$

$$\lambda \gg h_1, h_2, d_{12} \quad (\text{l'hypothèse quasi statique})$$

λ est la longueur d'onde en mètre et s'exprime en fonction de la vitesse v de propagation des signaux et de la fréquence : $\lambda = \frac{v}{f}$.

Sous ces hypothèses, les paramètres linéiques de couplage sont obtenus par les relations analytiques suivantes correspondant respectivement à l'inductance linéique des lignes 1 pour L_{11} et 2 pour L_{22} ; L_{12} et L_{21} , supposées identiques dans la suite de la thèse, sont les inductances linéiques caractérisant le couplage magnétique introduit entre les deux lignes.

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{4h_1}{d_1}\right) \text{ H/m} & L_{22} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{4h_2}{d_2}\right) \text{ H/m} \\ L_{12} = L_{21} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D_{12}}{d_{12}}\right) \text{ H/m} & \text{avec } D_{12} &= \sqrt{d_{12}^2 + 4h_1h_2} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$$(L) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \quad \text{matrice inductance}$$

Dans l'hypothèse de conducteurs contenus dans l'air, les coefficients de la matrice capacité se déduisent aisément par inversion de la matrice inductance. L'application de la théorie des lignes de transmission à des conducteurs immergés dans l'air nous donne la relation suivante :

$$(C) = \mu_0 \varepsilon_0 (L)^{-1} \quad (\text{III.19})$$

En admettant que le couplage n'est pas trop important, nous pouvons établir les conditions suivantes :

$$d_{12} > h_1, h_2 \quad L_{12}^2 \ll L_{11}L_{22} \quad (\text{III.20})$$

Alors, les coefficients C_{11} et C_{22} s'assimilent aux capacités propres des lignes 1 et 2. Les coefficients négatifs C_{12} et C_{21} supposées identiques dans la suite de la thèse, caractérisent le couplage électrique introduit entre les deux lignes.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{4h_1}{d_1}\right)} \text{ F/m} & C_{22} &= \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{4h_2}{d_2}\right)} \text{ F/m} \\ C_{12} = C_{21} &= -2\pi\varepsilon_0 \frac{\ln\left(\frac{4D_{12}}{d_{12}}\right)}{\ln\left(\frac{4h_1}{d_1}\right)\ln\left(\frac{4h_2}{d_2}\right)} \text{ F/m} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

d_1 et d_2 sont les diamètres des conducteurs 1 et 2 exprimés en mètre.

L'impédance caractéristique de la ligne Z_{c1} s'écrit de la manière suivante :

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{L_{11}}{C_{11}}} \quad (III.22)$$

Dans la logique de l'étude topologique d'un système, la modélisation du couplage par diaphonie avec la *MKCE*, utilisera tout simplement deux fois la sous-fonction simulant une ligne de transmission, à laquelle nous ajouterons les phénomènes de couplages électromagnétiques.

En entrée de la fonction *diaphonie_(ligne1 ligne2)*, nous trouverons deux sous-fonctions lignes donnant en sortie les tenseurs de l'espace des mailles impédance Z et *fém* E .

A ces données présentées dans le paragraphe précédent, sera ajoutée la distance séparant les deux conducteurs d_{12} permettant de calculer les impédances de couplage.

Les deux tenseurs représentatifs des deux lignes indépendantes notés sous la forme matricielle (Z_1') et (Z_2') , sont établis dans l'expression (III.14), dans l'espace des courants de maille. Nous les disposerons sur les éléments diagonaux d'un super-tenseur noté Z_0 dans l'espace des mailles :

$$(Z_0) = \begin{pmatrix} (Z_1') & (0) \\ (0) & (Z_2') \end{pmatrix} \quad (III.23)$$

Le tenseur des *fém* sources sera établi de manière similaire au tenseur des impédances dans l'espace des mailles de l'équation (III.14) :

$$(E_{diaphonie}) = \begin{pmatrix} (E_1') \\ (E_2') \end{pmatrix} \quad (III.24)$$

Dans notre exemple, les composantes du tenseur E'_2 sont toutes nulles car aucune source n'est présente sur la ligne 2.

Le tenseur des couplages électriques sera défini dans l'espace des courants de branche et sera noté en lettre minuscule z_{CE} . Ce tenseur devra ensuite être exprimé dans l'espace des mailles lors de la résolution globale du système. Pour cela nous utiliserons la matrice de connexion C de *G.Kron* pour trouver simplement le tenseur des impédances de couplage électrique de l'espace des mailles qui sera noté en lettre majuscule Z_{CE} . Ces deux tenseurs des couplages électriques respectivement dans l'espace des branches et des mailles seront définis précisément dans le paragraphe III.2.1.

$$(Z_{CE}) = (C)'(z_{CE})(C) \quad (III.25)$$

Le tenseur des couplages magnétiques noté en lettre majuscule Z_{CM} sera directement établi dans l'espace des courants de maille. Ce tenseur sera largement décrit dans le paragraphe III.2.2.

Finalement, le super-tenseur des impédances du système appelé $Z_{diaphonie}$, prendra la forme de l'équation (III.26) dans l'espace des mailles et sous l'écriture matricielle :

$$(Z_{diaphonie}) = (Z_0) + (Z_{CM}) + (Z_{CE}) \quad (III.26)$$

III.2.1 Couplage électrique dans l'espace des branches.

Dans le cas d'un couplage électrique, la ligne émettrice est ouverte en extrémité. Sous cette configuration, comme il l'a été démontré dans le paragraphe II.4.2.1 présentant les couplages électriques, le courant engendré dans la ligne émettrice est trop faible pour introduire un couplage magnétique significatif. Par contre, la tension V_{10} appliquée par la source à l'entrée de la ligne 1 crée une induction électrique rapportée par une source de courant dans le circuit équivalent de la ligne 2.

Cette source de courant équivalente I_0 est définie en fonction de la capacité linéique de couplage C_{12} , de la tension appliquée sur la ligne émettrice V_0 et de la longueur L_0 de la ligne.

$$I_0 = jC_{12}\omega V_0 L_0 \quad (III.27)$$

Il sera plus commode de faire intervenir ce couplage par une impédance mutuelle évoluant dans l'espace des branches en faisant intervenir la capacité linéique de couplage C_{12} à la place de la source de courant I_0 de l'expression (III.27). Un terme d'impédance de couplage électrique prendra donc naissance entre les capacités propres des lignes de transmission comme le montre la Fig.III.9 :

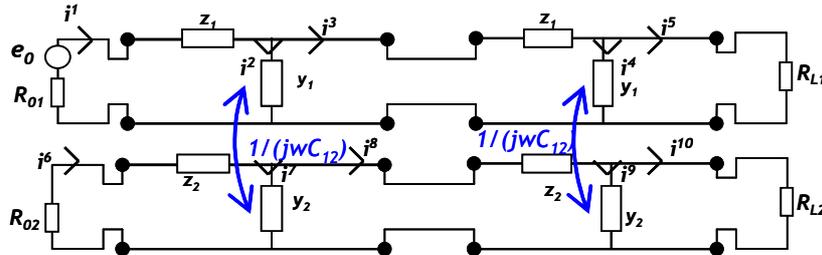


Fig.III.9 : Couplage électrique

Ce couplage électrique est représenté dans l'espace des branches grâce à un tenseur dont les composantes deux fois covariantes représentent les impédances capacitives reliant les deux sous-réseaux. Le tenseur de ces couplages électriques dans l'espace des branches est noté sous forme matricielle (z_{CE}). Celui-ci est décomposé en deux sous-matrices. La matrice (CE_1) caractérise les couplages en direction de la ligne 1 et (CE_2) modélise les couplages en direction de la ligne 2. Ces matrices prennent pour espace de référence les courants de branche annotés sur la Fig.III.9. Pour alléger l'illustration de la Fig.III.9, apparaît uniquement la capacité de couplage C_{12} égale à la capacité C_{21} .

$$(CE_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega C_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (CE_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega C_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (III.28)$$

$$(z_{CE}) = \begin{pmatrix} (0) & (CE_1) \\ (CE_2) & (0) \end{pmatrix}$$

L'élément de couplage électrique matérialisé par l'impédance $1/j\omega C_{21}$ est positionné sur la 2^{ème} colonne et la 7^{ème} ligne du tenseur z_{CE} . Cela correspond au couplage entre les deux branches traversées par les courants i^2 et i^7 .

Pour résoudre les équations du système, les différents tenseurs doivent être définis dans un espace unique. Le tenseur des couplages électriques est donc transformé dans l'espace des mailles de la manière présentée dans l'équation (III.26). Il est alors désigné par la lettre majuscule Z_{CE} comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce paragraphe.

(C_1) et (C_2) sont les matrices de transformation entre les espaces des branches et des mailles pour les lignes 1 et 2 respectivement, ces matrices ne sont pas des tenseurs. La supermatrice (C) de transformation du système global s'exprime en disposant ces deux matrices des deux sous-systèmes sur la diagonale. Les relations tensorielles définies par $G.Kron$ permettent alors d'obtenir simplement les nouvelles composantes du tenseur impédance de couplage électrique Z_{CE} dans l'espace des mailles. Dans l'expression suivante $Z_{b\beta}$ en lettre majuscule correspond aux composantes du tenseur couplage électrique dans l'espace des mailles et z_{ac} en lettre minuscule correspond aux composantes du tenseur dans l'espace des branches.

$$(C_1) = (C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (C) = \begin{pmatrix} (C_1) & (0) \\ (0) & (C_2) \end{pmatrix} \quad (III.29)$$

$$Z_{b\beta} = C_{b\bullet}^{a\bullet} z_{ac} C_{\beta}^c \quad (b, \beta = 1, 2, \dots, M) \text{ et } (a, c = 1, 2, \dots, B) \text{ en notation tensorielle}$$

ou

$$(Z_{CE}) = (C)^t (z_{CE}) (C) \text{ en notation matricielle.}$$

Le couplage électrique est représenté dans la $MKCE$ par le tenseur des impédances $Z_{b\beta}$ défini dans l'espace des courants de maille que l'on retrouve sous la forme matricielle (Z_{CE}) dans l'équation (III.29).

III.2.2 Couplage magnétique dans l'espace des mailles

Par le raisonnement dual à celui adopté précédemment, lorsque l'impédance connectée en sortie de la ligne émettrice présente un court-circuit, la disposition est propice à la génération d'un couplage magnétique.

L'impédance de faible valeur présentée par l'entrée de la ligne connectée sur la source produit un courant intense, grâce à la participation de l'impédance interne du générateur, la tension en entrée de ligne sera de faible amplitude.

En s'appuyant sur le raisonnement établi au chapitre précédent II.4.2.2 traitant des couplages magnétiques, nous introduisons le schéma équivalent de la ligne réceptrice avec la *fém* e_0 qui est reliée à l'inductance linéique de couplage L_{12} ainsi qu'au courant I_{10} injecté par la source sur la ligne émettrice.

$$e_0 = jL_{12}\omega I_0 L_0 \quad (III.30)$$

Pour simplifier la Fig.III.10, comme $L_{12}=L_{21}$, nous choisissons la première notation pour annoter les inductances linéiques de couplage et de rétro-couplages.

Il est plus commode de manipuler l'inductance linéique L_{12} plutôt que la *fém* e_0 de couplage présente dans la Fig.III.10 pour prédire les couplages magnétiques entre les deux lignes.

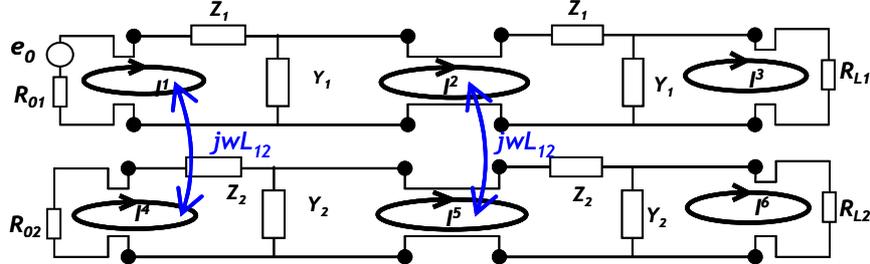


Fig.III.10 : Couplage magnétique.

Les inductances mutuelles définies dans l'espace des mailles sont introduites dans les deux tenseurs CM_1 et CM_2 , représentant, comme dans le paragraphe précédent, le couplage sur la première ligne, puis le couplage sur la deuxième ligne. A leur tour, ces tenseurs sont répartis dans le tenseur final noté Z_{CM} , toujours dans l'espace des mailles et pour l'ensemble du système « diaphonie ». Nous écrivons ces derniers tenseurs de couplage sous la forme matricielle dans l'équation (III.31).

$$(CM_1) = \begin{pmatrix} j\omega L_{12} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (CM_2) = \begin{pmatrix} j\omega L_{21} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (III.31)$$

$$(Z_{CM}) = \begin{pmatrix} (0) & (CM_1) \\ (CM_2) & (0) \end{pmatrix}$$

Finalement, nous calculons le tenseur final des impédances incluant les deux types de couplage électromagnétiques dans l'espace des mailles :

$$(Z_{diaphonie}) = (Z_0) + (Z_{CM}) + (Z_{CE})$$

Soit,

$$(Z_{diaphonie}) = \begin{pmatrix} (Z_1) & (0) \\ (0) & (Z_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0) & (CM_1) \\ (CM_2) & (0) \end{pmatrix} + (L)^t \begin{pmatrix} (0) & (CE_1) \\ (CE_2) & (0) \end{pmatrix} (L) \quad (III.32)$$

Les courants de maille sont finalement obtenus par l'équation écrite sous la forme matricielle (III.33) dans l'espace des courants de maille :

$$(I) = (Z_{diaphonie})^{-1} \cdot (E_{diaphonie}) \quad (III.33)$$

Dans cet exemple, le passage entre l'espace des branches et des mailles permet de réduire les dimensions du système d'équations de dix dimensions dans l'espace des branches à six dimensions dans l'espace des mailles.

III.2.3 Simulation et mesure de la réponse d'un couplage par diaphonie

Considérons le système illustré par la Fig.III.8 composé de deux lignes de $L_0=44$ cm de longueur, de $d=1$ mm de diamètre, distantes l'une de l'autre de $d_{12}=5$ cm, et du plan de masse de $h_1=h_2=2.5$ cm. Les deux lignes émettrice 1 et réceptrice 2 sont chargées sur 50 Ohm à leurs deux extrémités. Ces grandeurs géométriques permettent de calculer les impédances caractéristiques des lignes analytiquement à l'aide des équations (III.18) et (III.21) :

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{L_{11}}{C_{11}}} \quad \text{et} \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{L_{22}}{C_{22}}} \quad (III.34)$$

$$Z_{c1} = Z_{c2} = 276\Omega$$

Dans cette configuration de charges, les couplages électrique et magnétique interviennent à parts relativement égales. Il faut donc adopter un circuit équivalent dans lequel apparait l'effet du couplage électrique dans l'espace des branches avec la capacité mutuelle C_{12} , ainsi que le couplage magnétique dans l'espace des mailles avec l'inductance mutuelle L_{12} .

La mesure du paramètre S_{21} est réalisée grâce à un analyseur de réseau vectoriel qui nous donne accès à l'amplitude et la phase. En considérant les charges aux extrémités égales $R_{I0}=R_{IL}=50\Omega$, nous trouvons la relation entre S_{21} et le rapport de tension entre la sortie et l'entrée du système :

$$S_{21} = \frac{2V_{20}}{e_0} \quad (III.35)$$

Une tension V_{10} est appliquée à une des extrémités de la première ligne chargée sur 50Ω aux deux extrémités. On relève la tension V_{20} sur la ligne réceptrice.

Cette mesure sera alors confrontée à deux méthodes de simulation numériques : la simulation par le logiciel *CRYPTE* (Résolution de l'équation *BLT* introduite au chapitre I) et la méthode de *Kron*.

Comme nous l'avons présenté au chapitre I, paragraphe I.2.3, les matrices « ondes » exprimées en fonction des tensions et courants de jonctions seront calculées, à partir de la super-matrice de propagation (γ) dans les tubes et de la super-matrice des paramètres S (S) des jonctions en résolvant l'équation *B.L.T*.

La simulation par la méthode de *Kron* permet de faire varier souplement des paramètres géométriques ou électriques du système pour trouver la configuration géométrique ou la configuration de charge optimale pour transmettre correctement des données et diminuer les perturbations entre les lignes.

Les résultats de la Fig.III.11, montrent la confrontation entre la mesure et la simulation par l'équation *BLT* ou par la *MKCE*.

La valeur du rapport $\frac{\Delta z}{\lambda}$ est choisie à 0.16 . Pour une fréquence d'étude maximale de 1.5 GHz nous obtenons avec ces hypothèses $n_z=9$ sous-éléments.

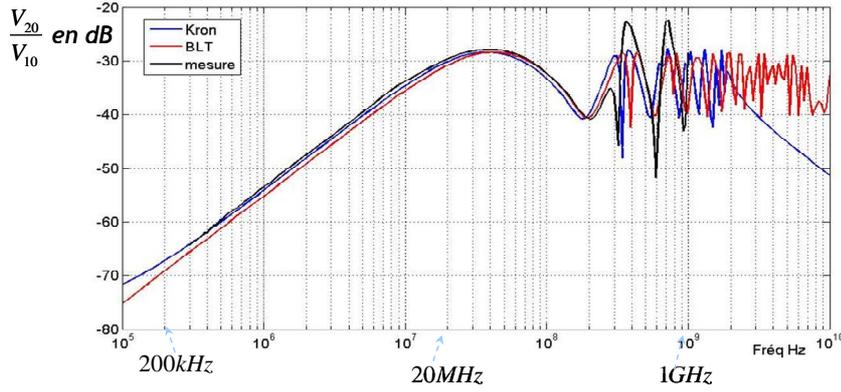


Fig.III.11 : Résultats comparatifs

Les temps de simulation sont de l'ordre de 2 secondes pour les deux méthodes de simulation.

Trois zones sont à distinguer dans ce couplage par diaphonie :

La première zone en basses fréquences (en dessous de 200 kHz) traduit l'effet résistif du plan de masse. En effet, à de faibles fréquences, l'impédance des lignes de transmission devient de même grandeur que la faible valeur de la résistance du plan de masse. On relève alors une tension constante proportionnelle à la résistance du plan de masse. La résolution par l'équation *B.L.T* ne tient pas compte de cet effet alors qu'avec la *MKCE* nous avons ajouté une résistance correspondante aux effets du plan de masse qui augmente le niveau d'amplitude de la courbe bleue de la *MKCE*.

La deuxième zone linéaire proportionnelle à la fréquence en 20 dB/dec (comprise entre 200 kHz et 20 MHz) correspond aux effets inductifs et capacitifs décrits précédemment. La troisième zone située au-delà de 20 MHz transcrit le double effet de la propagation dans les conducteurs et des résonances et antirésonances liées aux phénomènes de réflexions successives.

Les fréquences de résonance provoquées par la propagation apparaissent lorsque les dimensions des lignes sont proches de la longueur d'onde. La première fréquence d'antirésonance apparaît lorsque $\lambda = 2L_0$, c'est-à-dire pour une fréquence de 341 MHz. La désadaptation de la ligne génère des fréquences de résonance et d'antirésonance supplémentaires que l'on détaillera lors de la discussion sur l'efficacité de la *MKCE* au sujet des simulations de lignes ayant des conditions de charges critiques présentées dans cette même partie.

Dans le cas de la Fig.III.11, la première fréquence d'antirésonance générée par les réflexions successives, est telle que $F_1^n = \frac{v}{4L} = 170 \text{ MHz}$.

Nous retrouverons ce mélange de fréquences de résonance et d'antirésonance dans la Fig.III.12 représentant la phase du rapport V_{20}/V_{10} des tensions simulées sur la même bande fréquentielle par la *MKCE* avec le même nombre de cellule $n_z=9$.

Une première partie constante à -90° illustre l'effet capacitif de la ligne. Le passage par zéro de la phase nous indique les fréquences de résonance de la tension sur la charge R_{20} .

$$\varphi = \text{arctg} \left(\frac{\text{Re}(V_{20}/V_{10})}{\text{Im}(V_{20}/V_{10})} \right) \quad (\text{III.36})$$

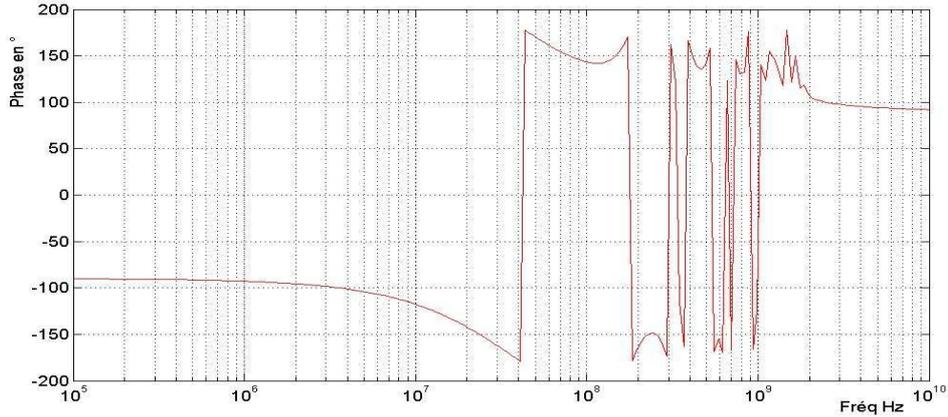


Fig.III.12 : Phase

L'exemple relativement simple que nous venons de présenter montre la possibilité d'utiliser la *MKCE* appliquée à des problèmes de *CEM*. En effet, grâce à cet outil, il sera facile de transposer cette analyse au cas d'un couplage plus complexe ou plus réaliste, comportant de nombreuses lignes couplées pouvant être non homogènes ou présentant des imperfections.

Les extrémités des conducteurs pourront par exemple être chargées de manière à étudier le comportement des charges non linéaires dans le domaine temporel.

Choisissons maintenant un cas particulier mettant à l'épreuve la *MKCE* lorsque les conditions de charges aux extrémités des lignes sont critiques.

Considérons le même couplage illustré dans la *Fig.III.8*. Les dimensions sont inchangées, par contre, les charges de la ligne réceptrice sont choisies de manière à exciter des fréquences de résonance particulières : $R_{O1}=50\Omega$, $R_{L1}=50\Omega$, $R_{O2}=0\Omega$ et $R_{L2}=1.10^8\Omega$. La ligne 2 est donc court-circuitée au niveau de la résistance R_{O2} et nous supposons que sur l'autre extrémité de la ligne, la grande valeur de la résistance R_{L2} simule un circuit ouvert.

Théoriquement, le courant relevé sur la charge R_{O2} de la deuxième ligne présentera des fréquences de résonance d'amplitude infinie car aucune charge aux extrémités de la ligne ne dissipe l'énergie. Par contre, la prise en compte du rétro-couplage entre les deux lignes permet d'atténuer ces résonances particulières.

La courbe de la *Fig.III.13* illustre les courants circulant dans la résistance R_{O2} sous ces deux conditions de charges pour le même système composé de $n_z=9$ cellules.

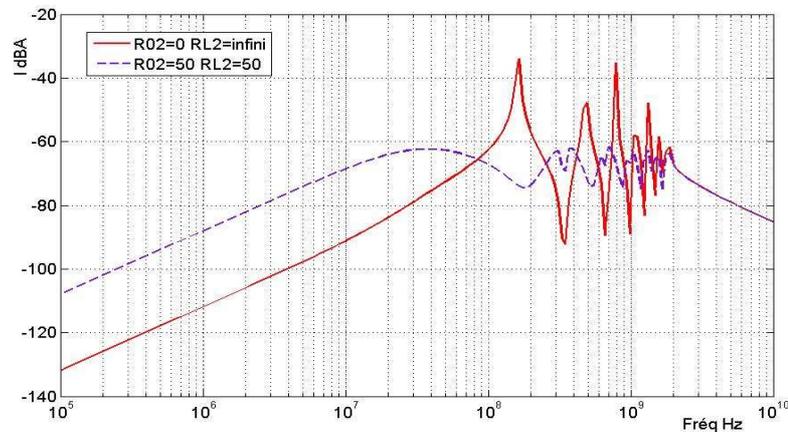


Fig.III.13 : Courant issu du couplage par diaphonie

L'amplitude de la courbe en trait plein rouge indique que les phénomènes de rétro-couplage sont effectivement pris en compte dans la MKCE. Au delà de cette vérification, l'écart important de 25 dB entre les amplitudes des courants en basses fréquences montre que la courbe en trait plein rouge représente bien la ligne en circuit ouvert.

Les fréquences de résonance dues aux réflexions successives sont données en fonction des coefficients de réflexion de la ligne et de l'impédance caractéristique Z_c .

$$\rho_{02} = \frac{R_{02} - Z_c}{R_{02} + Z_c} = -1 \quad \text{et} \quad \rho_{L2} = \frac{R_{L2} - Z_c}{R_{L2} + Z_c} = 1 \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = 276\Omega \quad (III.37)$$

Les fréquences de résonance se caractérisent par des valeurs singulières de la tension sur la ligne. On retrouvera l'étude détaillée de ces réflexions multiples dans l'ouvrage de Bernard Démoulin [III.1] ou dans la thèse de Sébastien Bazzoli [I.5] dans laquelle on retrouve p.30 l'expression analytique de la tension V_L écrite sous la forme d'une suite géométrique convergente avec $V_{incidente}$, la tension représentant l'onde incidente suivant Oz .

$$\overline{V}_L = \frac{V_{incidente}}{1 - (\overline{\rho}_0 \cdot \overline{\rho}_L e^{-2\gamma L})} (1 + \overline{\rho}_L) \quad (III.38)$$

Avec

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_0 &= \rho_0 \cdot e^{j\varphi_0} \quad \text{la forme complexe du coefficient de réflexion en } z=0 \\ \overline{\rho}_L &= \rho_L \cdot e^{j\varphi_L} \quad \text{la forme complexe du coefficient de réflexion en } z=L \end{aligned} \quad (III.39)$$

Les valeurs singulières s'obtiennent donc en imposant la condition suivante :

$$1 - (\overline{\rho}_0 \cdot \overline{\rho}_L e^{-2\gamma L}) = 0, \quad \text{ou encore} \quad \overline{\rho}_0 \cdot \overline{\rho}_L e^{-2\gamma L} = 1 \quad (III.40)$$

En considérant une ligne sans pertes, la constante de propagation γ se simplifie et permet d'obtenir les fréquences de résonance telles que :

$$\begin{aligned} \gamma &= j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{d'où} \\ F_1^n &= (2n+1)\frac{v}{4L} \quad \text{si} \quad \overline{\rho}_0 \cdot \overline{\rho}_L < 0 \\ \text{et} \quad F_2^n &= 2n\frac{v}{4L} \quad \text{si} \quad \overline{\rho}_0 \cdot \overline{\rho}_L > 0 \end{aligned} \quad (III.41)$$

Les pertes dans la ligne caractérisées par le coefficient α dans la constante de propagation, sont supposées avoir un effet uniquement sur l'amplitude des fréquences de résonance et non pas sur les valeurs des fréquences elles mêmes.

Les charges dissipatives aux extrémités étant de nature réelle, la condition d'annulation de l'équation (III.38) sera liée au signe du produit $\rho_0 \cdot \rho_L$. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	F_{res}	$F_{anti-res}$
$\rho_0 \cdot \rho_L < 0$	F_1^n	F_2^n
$\rho_{02} \cdot \rho_{L2} > 0$	F_2^n	F_1^n
$\rho_0 \cdot \rho_L = 0$	Aucune réflexion	Aucune réflexion

Nous retrouvons effectivement dans la *Fig.III.13* en trait plein rouge le cas $\rho_{02} \cdot \rho_{L2} < 0$, dont les fréquences d'antirésonance prennent pour valeur $F_2^n = 2n \frac{v}{4L} = 341 \text{MHz}$ si $n=1$. Lorsque $\rho_{02} \cdot \rho_{L2} > 0$, le courant illustré par la courbe violette en pointillé présente des fréquences d'antirésonances telles que $F_1^n = (2n+1) \frac{v}{4L}$, soit pour la première antirésonance $F_1^0 = 170 \text{MHz}$.

Ce dernier exemple montre que les phénomènes de propagation et de réflexion des ondes sont très bien modélisés par la *MKCE*.

L'intérêt majeur de la *MKCE* apparaît lorsque de nombreux sous-réseaux entrent en interactions. C'est le cas à une plus petite échelle lorsque nous avons réutilisé deux sous-fonctions « lignes » pour simuler un couplage par diaphonie.

Nous poursuivons l'étude des interactions sur deux exemples plus complexes intervenant sur des petits réseaux de lignes, en respectant encore l'ordre de l'analyse topologique établi au chapitre I.

III.3 Analyse d'un assemblage de câbles par la méthode de Kron

Rappelons que les principaux problèmes de *CEM* rencontrés dans des grands systèmes font intervenir des perturbations localisées sur des torons de câbles. Pour cela, nous montrons dans cette partie que le formalisme tensoriel peut être utilisé pour la simulation de perturbations entre des câbles comportant différentes configurations géométriques. Deux exemples permettront d'illustrer l'étude de ce « grand système » par la *MKCE*.

III.3.1 Etude de deux lignes couplées de dimensions différentes

Le paragraphe précédent nous donne les matrices impédance et *fém* dans l'espace des mailles de problèmes classiques comme la modélisation d'une ligne de transmission ou d'un couplage par diaphonie entre deux lignes de longueurs identiques.

L'objectif est de réutiliser ces sous-fonctions que l'on a préalablement stockées dans une base de données, pour simuler un système de câblage plus réaliste mettant par exemple en œuvre des lignes de transmission comportant des bifurcations ou des zones non homogènes.

Une super-matrice impédance accueillera les sous-matrices représentant les fonctions simples réutilisées.

L'exemple choisi montrera la souplesse d'assemblage des sous-systèmes avec la MKCE.

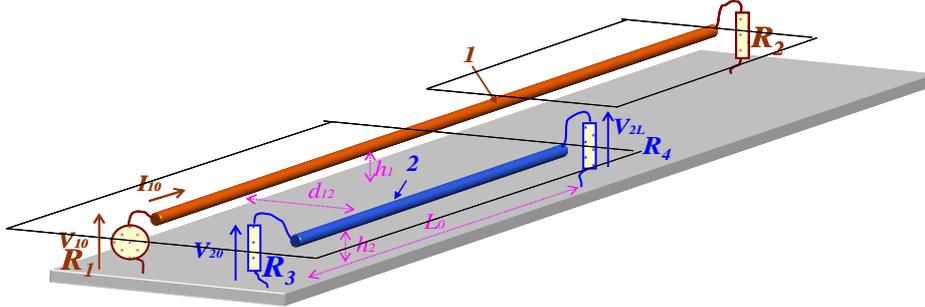


Fig.III.14 : Présentation du système

Une ligne perturbatrice 1 de longueur $L_1 = 2,5 \text{ m}$ surmonte un plan de masse à une hauteur $h_1 = 7,5 \text{ cm}$. Une seconde ligne 2, supposée passive, de longueur $L_2 = 1,5 \text{ m}$ est disposée parallèlement à la première ligne à une distance d_{12} de 6 cm et à une hauteur par rapport au plan de masse de $h_2 = 7,5 \text{ cm}$.

La ligne émettrice 1 sera chargée sur $R_1 = 50 \Omega$ au niveau de l'injection de la source de tension, et court-circuitée à son autre extrémité $R_2 = 0 \Omega$.

La ligne 2 sera en court-circuit en R_3 et en circuit ouvert à son autre extrémité en R_4 afin de générer des résonances de fortes amplitudes.

L'analyse topologique du système montre une décomposition en deux sous-volumes : Le premier sous-volume est le couplage par diaphonie entre deux lignes de longueurs identiques.

Le deuxième sous-volume correspond à une ligne de transmission au-dessus d'un plan de masse.

Ces deux sous-volumes seront connectés par une connexion électrique réalisant un contact parfait en utilisant le formalisme tensoriel des réseaux électriques.

Ces deux sous-volumes ont déjà été définis dans la partie précédente par les deux sous-fonctions « ligne 3 » et « diaphonie ». La fonction diaphonie rappelle elle-même deux sous-fonctions « ligne 1 » et « ligne 2 » comme l'illustre le graphe topologique du système :

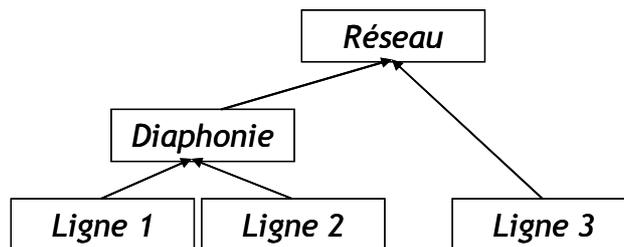


Fig.III.15 : Graphe topologique du système

Dans l'annexe II, nous avons déjà construit les sous-fonctions diaphonie et ligne. Nous réutilisons ces fonctions en changeant les paramètres primaires des trois lignes.

Il ne reste finalement plus qu'à réaliser le couplage par contact entre la sous-fonction diaphonie et la ligne 3. Dans le paragraphe suivant, nous décrirons comment générer la matrice d'interconnexion (F) permettant ce couplage par conduction.

Prenons pour illustrer $n_z = 2$ éléments de ligne pour les trois lignes indépendantes représentées sur la base de la Fig.III.16. Dessinons les circuits électriques équivalents des

sous-systèmes diaphonie et ligne 3 en précisant les courants de référence choisis directement dans l'espace des mailles :

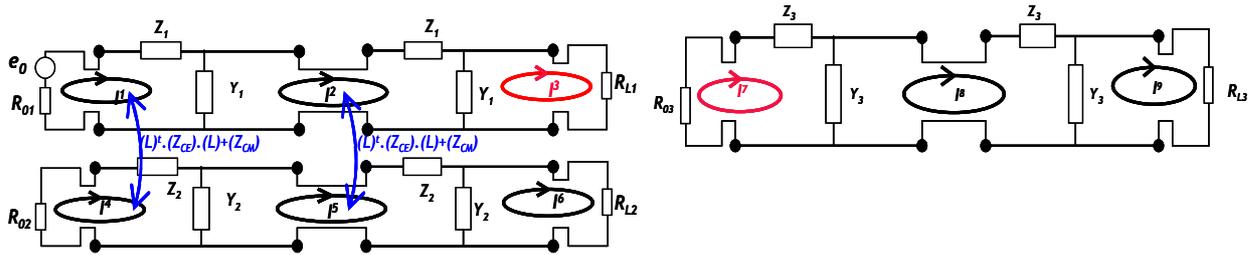


Fig.III.16 : Schéma équivalent des 2 lignes couplées

Les tenseurs des impédances donnés dans les équations (III.10) et (III.32) sont disposés sur les éléments diagonaux d'une super-matrice (Z). (Z_1) correspond à la matrice impédance du système diaphonie et (Z_2) correspond à la matrice décrivant le sous-système ligne de transmission. Le tenseur E des *fém* sera créé de manière similaire :

$$(Z) = \begin{pmatrix} (Z_1) & (0) \\ (0) & (Z_2) \end{pmatrix} \text{ et } (E) = ((E_1) \quad (E_2)) \quad (III.42)$$

Les extrémités des lignes à connecter sont chargées sur des courts-circuits pour effectuer le couplage par conduction. Les charges R_{L1} et R_{03} sont donc mises à zéro.

La matrice d'interconnexion (F) permettra de calculer les nouvelles matrices impédances et *fém* du système connecté de la Fig.III.14. Elle s'obtient en exprimant les courants de maille du réseau non connecté de la Fig.III.16 en fonction des courants de maille du nouveau système connecté. La structure de cette matrice sera rectangulaire. Dans le cas illustré Fig.III.16, nous obtenons une matrice 9 lignes et 8 colonnes (une seule connexion) :

$$(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (III.43)$$

Le couplage apparaît dans la matrice (F) sur la troisième colonne entre les lignes représentant les courants F^3 et F^7 .

Les expressions matricielles suivantes donnent les nouvelles matrices du système connecté dans l'espace des mailles :

$$(E_{2_{systems}}) = (F)^t (E) \quad (Z_{2_{systems}}) = (F)^t (Z) (F) \quad (III.44)$$

Remarquons que le tenseur *fém* une fois covariant E comporte k lignes et une colonne. Après la transformation d'espace, nous obtenons grâce à la matrice d'interconnexion (F), le tenseur $E_{2_{systems}}$ de dimension $(k-1)$ lignes et une colonne.

De même, pour le tenseur deux fois covariant Z de dimension $(k*k)$ qui se transforme en tenseur $Z_{2_{systems}}$ de dimensions $((k-1)*(k-1))$.

L'inversion de la matrice impédance nous donne enfin les $(k-1)$ courants de maille du système connecté :

$$(J) = (Z_{2_{systems}})^{-1} \cdot (E_{2_{systems}}) \quad (III.45)$$

Une sonde de courant permet de mesurer, à l'extrémité de la ligne émettrice 1, le courant I^1 qui sera comparé à la simulation par la MKCE :

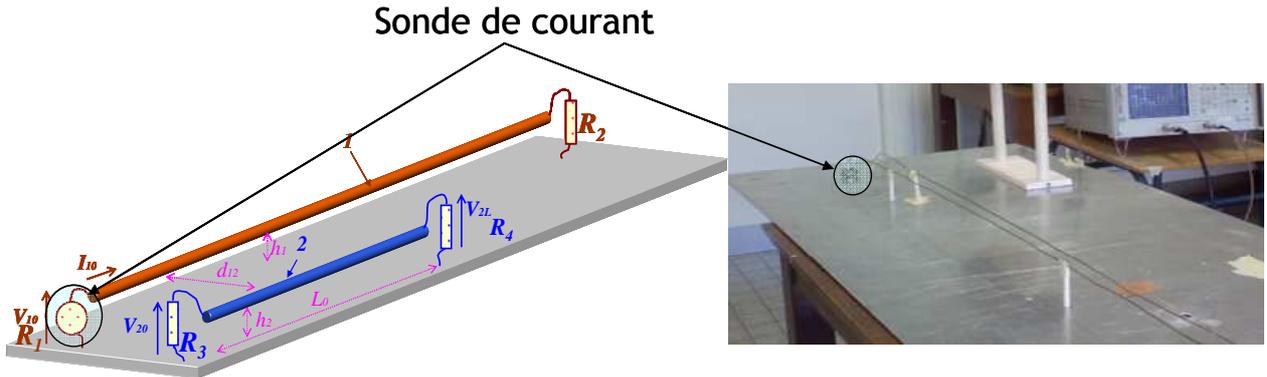


Fig.III.17 : Mesure du courant circulant dans la ligne émettrice

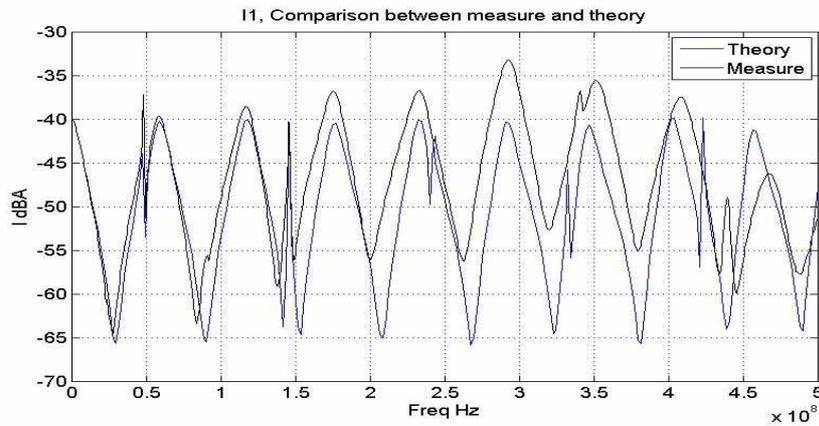


Fig.III.18 : Comparaison mesure / simulation du courant I_1

Les niveaux d'amplitude du courant sont relevés dans une bande de fréquences s'étalant de 10 à 500 MHz.

Les fréquences de résonance dues à la propagation dans le conducteur I sont illustrées sur la courbe Fig.III.18. On retrouve effectivement la fréquence d'antirésonance fondamentale

F_1^n avec $n=0$ (équation (III.41)) pour une longueur $L = \frac{\lambda}{4}$ d'une ligne en court-circuit de 2.5

m de longueur à $F_1^0 = 30MHz$. Les fréquences d'antirésonance et de résonance d'ordre

supérieur apparaissent respectivement à des fréquences telles que $F_1^n = (2n+1)\frac{v}{4L}$ et $F_2^n = 2n.\frac{v}{4L}$ avec n , un nombre entier.

Les lignes 1 et 2 sont couplées par diaphonie sur une longueur de $1.5 m$. La ligne émettrice 1 en court-circuit, est propice à la génération d'un fort courant qui produira un champ magnétique dans son environnement proche induisant un signal sur la deuxième ligne en circuit ouvert. Le rétro-couplage de type électrique sur la ligne 1 induira une perturbation sur le courant I_1 .

La courbe de la Fig.III.18 présente en effet à ces fréquences des pics parasites de résonance traduisant les effets de la ligne passive 2 fortement désadaptée.

La souplesse d'entrée des données à l'échelle du logiciel est telle que l'on peut faire varier facilement les grandeurs géométriques et électriques à savoir les longueurs des lignes, les distances les séparant, les connexions et bifurcations ou les charges aux extrémités. En plus de cette souplesse interne, la fonction s'adaptera facilement à un environnement électromagnétique plus complexe. De cette manière, tout en gardant la possibilité de faire varier un paramètre localisé comme une résistance de charge ou la hauteur d'un conducteur par rapport à son plan de masse, nous pouvons simuler des systèmes de plus en plus complexes en utilisant simplement ces sous-fonctions bien maîtrisées.

III.3.2 Etude d'un réseau à trois lignes de transmission couplées

L'objectif de ce paragraphe est de faire une comparaison entre la mesure, la simulation par l'équation BLT effectuée par J.P Parmentier dans sa thèse, et la méthode de Kron d'un nouveau réseau de câbles illustré dans la Fig.III.19 :

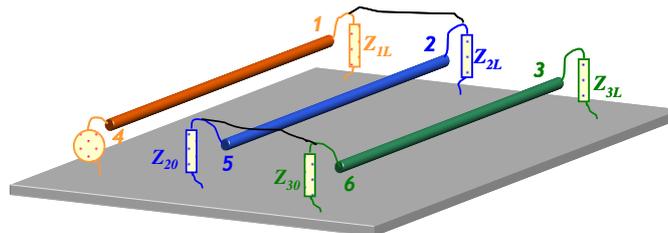


Fig.III.19 : Système de ligne multifilaire

Ce système est constitué d'une ligne multifilaire de $44 cm$ de longueur, composée de trois fils distants entre eux de $d_{12}=5cm$ et $d_{13}=10cm$. Les hauteurs h des trois conducteurs par rapport au plan de masse sont de $h=2,5 cm$. Les diamètres des conducteurs sont de $d=1 mm$. Les extrémités des fils sont chargées par des résistances de 50Ω reliées à la référence de masse. Les lignes 1 et 2 sont reliées par un court-circuit au niveau des ports 1 et 2 et les lignes 2 et 3 sont reliées par les ports 5 et 6 comme l'illustre la Fig.III.19. Une *fém* source est localisée sur le port 4. Nous mesurons et simulons le rapport des tensions présentes sur les ports 1, 4, 5 et 3 sur une gamme de fréquence de $100 kHz$ à $1GHz$.

A partir des paramètres primaires R, L, C et G , que le logiciel calcule directement grâce aux grandeurs géométriques et électriques qui lui ont été fournies, les trois lignes sont

construites de manière indépendante en utilisant trois sous-fonctions ligne. Les deux types de couplages électromagnétiques entre ces lignes sont introduits dans les espaces des branches et des mailles. Les sous-réseaux représentatifs des charges aux extrémités sont ajoutés dans les supers tenseurs $fém$ et impédances, puis à l'aide d'une matrice d'interconnexion (F), les courants illustrés en pointillés rouges sur la Fig.III.20 sont connectés en égalant les courants suivants : $I^4=I^{10}$; $I^{12}=I^7$; $I^3=I^{13}$ et $I^6=I^{15}$.

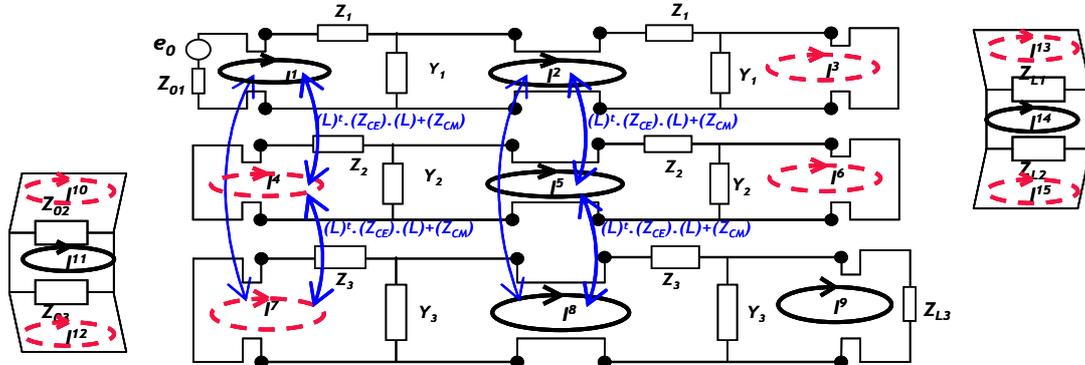


Fig.III.20 : Schéma équivalent d'un réseau multifilaire

Le code de la simulation « réseau de 3 lignes couplées » est fourni en annexe II. Il traduit ce schéma électrique équivalent sous forme d'un super-tenseur impédance et d'un super-tenseur des $fém$ sources.

La fréquence maximale atteinte dans les mesures est de 1GHz. Nous choisissons donc n_z le nombre de sous-réseaux utilisés pour représenter chaque ligne sous la méthode de Kron, tel que :

$$n_z \geq \frac{4 \cdot f_{max} \cdot L}{v} \tag{III.46}$$

Si $f_{max}=1GHz$, $n_z \geq 6$ ou $\frac{\Delta z}{\lambda} < 0.25$

Les figures suivantes donnent les mesures à gauche, et les prévisions à droite des rapports des tensions aux bornes des ports 4, 1, 5 et 3.

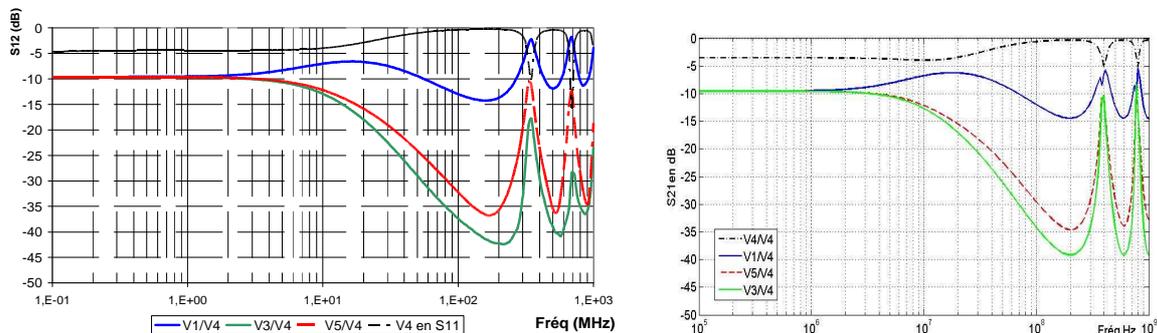


Fig.III.21 : Résultats comparatifs

La bonne adéquation entre la simulation par la méthode de Kron et la mesure montre que les paramètres primaires R , L , C et G ne sont pas entachés d'erreurs.

Dans certains cas, pour réduire les tensions et courants parasites survenant sur une ligne de transmission, les ingénieurs CEM utilisent des liaisons filaires sur lesquelles circulent des signaux en mode différentiel. Dans ce cas, le courant de retour s'effectue par un second conducteur alors que jusqu'ici, nous avons choisi des systèmes de ligne avec une référence commune de potentiel. La prochaine section se consacrera au cas où les signaux sont propagés sur deux conducteurs suivant ce mode différentiel. Comme précédemment, ces conducteurs seront installés au dessus d'un plan de masse.

III.4 Analyse d'un réseau de câbles en mode différentiel

Nous commencerons par modéliser une ligne de transmission en mode différentiel en nous appuyant sur la sous-fonction diaphonie en mode commun, à laquelle nous ajouterons une deuxième sous-fonction précisant les conditions aux limites du mode différentiel de la ligne.

Nous simulerons alors naturellement un couplage entre quatre fils représentant maintenant un couplage par diaphonie entre deux lignes de transmission en mode différentiel.

III.4.1 Une ligne de transmission en mode différentiel

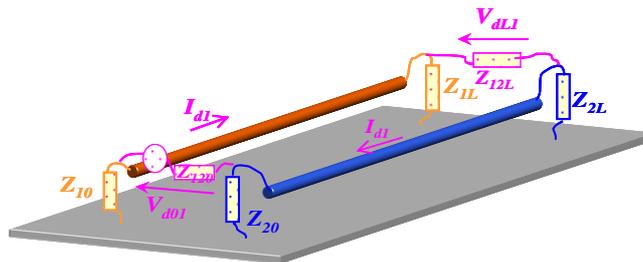


Fig.III.22 : Une ligne en mode différentiel

En imposant les charges reliées à la masse, à une grande valeur d'impédance (arbitrairement, nous choisissons $1.10^8 \Omega$), la source connectée à son impédance interne, génèrera entre les deux conducteurs un signal se propageant en mode différentiel. Les deux charges de mode différentiel Z_{120} et Z_{12L} sont fixées à 50Ω .

Les deux lignes sont à une distance du plan de masse de $2.5cm$, les longueurs des deux lignes sont de $44cm$ et la distance séparant les deux lignes est $d_{12}=5cm$. Le diamètre des conducteurs est toujours de $1mm$.

Expérimentalement, il n'est pas si simple de générer un signal de mode différentiel entre deux conducteurs. Il faut pour cela s'affranchir des problèmes liés au plan de masse des appareils de mesures, nous utiliserons des transformateurs couramment appelés Balun (BALanced (équilibré, balancé) et UNbalanced (déséquilibré, non balancé)).

En ce qui concerne la simulation de la fonction que nous appelons « ligne en mode différentiel », nous entrerons dans le logiciel les caractéristiques géométriques et électriques des deux lignes couplées. Nous imposons une haute impédance à chacune des charges reliées à la masse pour simuler le mode différentiel. Z_{120} et Z_{12L} sont fixées à 50Ω .

La fonction diaphonie en mode commun nous donnera alors les impédances et fém que l'on note ici $(Z_{diaphonie})$ et $(E_{diaphonie})$. Nous donnerons également en entrée de la fonction les

valeurs des impédances de charges (Z_{ext1}) et (Z_{ext2}) et les valeurs des fém sources (E_{ext1}) et (E_{ext2}) présentes aux extrémités de la ligne en mode différentiel.

Le schéma électrique équivalent de la Fig.III.23 présente la décomposition de ce système en ces trois circuits électriques qui sont, pour l'instant non connectés.

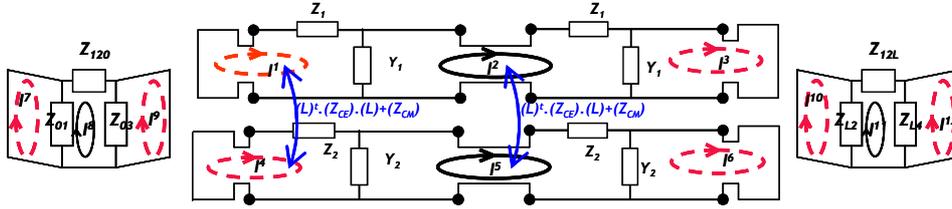


Fig.III.23 : Schéma équivalent du modèle d'une ligne en mode différentiel

Les deux matrices associées à ce schéma sont données dans l'équation (III.47) :

$$[Z] = \begin{bmatrix} [Z_{diaphonie}] & [0] & [0] \\ [0] & [Z_{ext1}] & [0] \\ [0] & [0] & [Z_{ext2}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [E] = \begin{bmatrix} [E_{diaphonie}] \\ [E_{ext1}] \\ [E_{ext2}] \end{bmatrix} \quad (III.47)$$

Les courants en pointillés rouge qu'on peut apercevoir dans la Fig.III.23 permettent de connecter par contacts électriques les trois circuits électriques. Pour cela, nous utiliserons la matrice d'interconnexion (F) afin d'égaliser les courants $I_1=I_7$, $I_9=I_4$; $I_3=I_{10}$ et $I_6=I_{12}$. Dans l'exemple de la Fig.III.23, $n_z=2$ éléments par lignes, la matrice (F) est alors donnée dans l'équation (III.48) :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (III.48)$$

On retrouve comme il est présenté au chapitre II équation (II.84), les tenseurs impédances et fém du nouveau système connecté :

$$(Z') = (F)'(Z)(F) \quad (E') = (F)'(E) \quad (III.49)$$

En inversant le tenseur Z' et en multipliant ce dernier au tenseur E' , nous retrouvons tous les courants de maille du réseau électrique.

La fonction « ligne en mode différentiel » est donnée dans l'annexe II.

Le rapport des tensions aux extrémités de la ligne en mode différentiel est donné dans la Fig.III.24 jusqu'à une fréquence de 1 GHz. Il faudra donc au minimum $n_z=6$ sous-éléments :

$$n_z \geq \frac{4 \cdot f_{\max} \cdot L}{v}$$

Si $f_{\max} = 1\text{GHz}$ $n_z \geq 6$ ou $\frac{\Delta z}{\lambda} < 0.25$ (III.50)

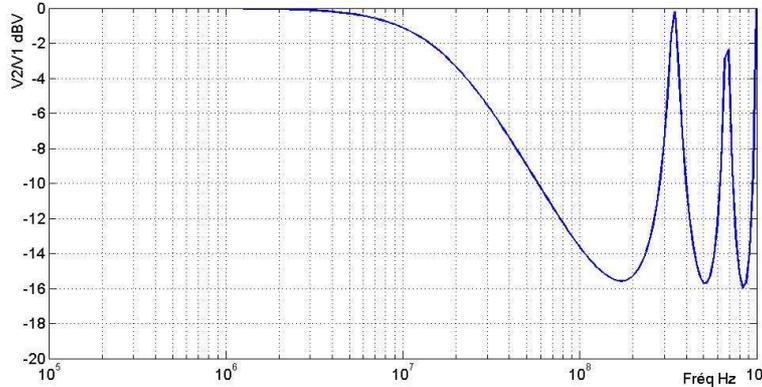


Fig.III.24 : Rapport d'amplitude de la ligne

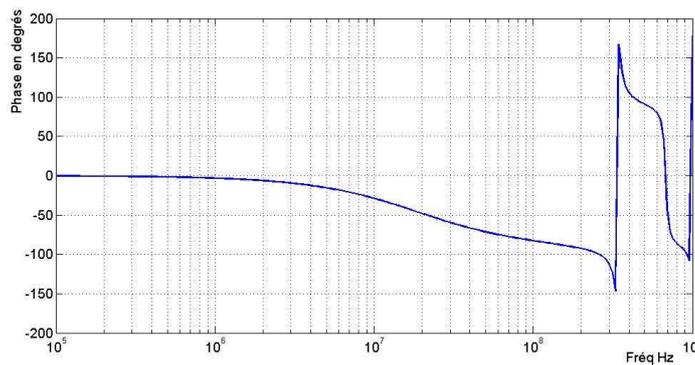


Fig.III.25 : Phase

Le couplage par diaphonie entre deux lignes de mode différentiel fera intervenir deux fois la sous-fonction de ce paragraphe.

III.4.2 Couplage par diaphonie en mode différentiel

Considérons maintenant le système de deux lignes de transmission disposées de la manière suivante :

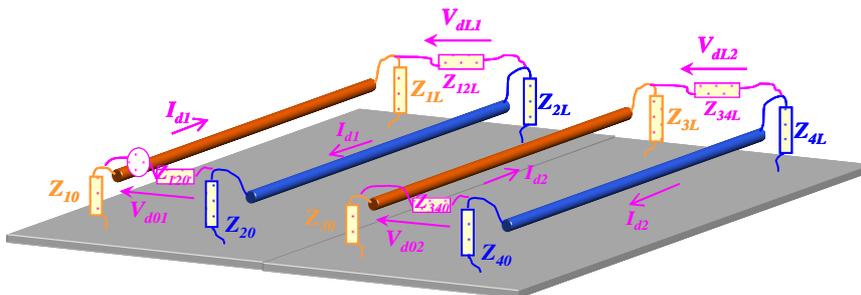


Fig.III.26 : Couplage par diaphonie en mode différentiel

Pour résoudre ce problème par la MKCE, nous utiliserons deux sous-fonctions « ligne en mode différentiel » qui, nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, sont équivalentes à la fonction diaphonie du mode commun :

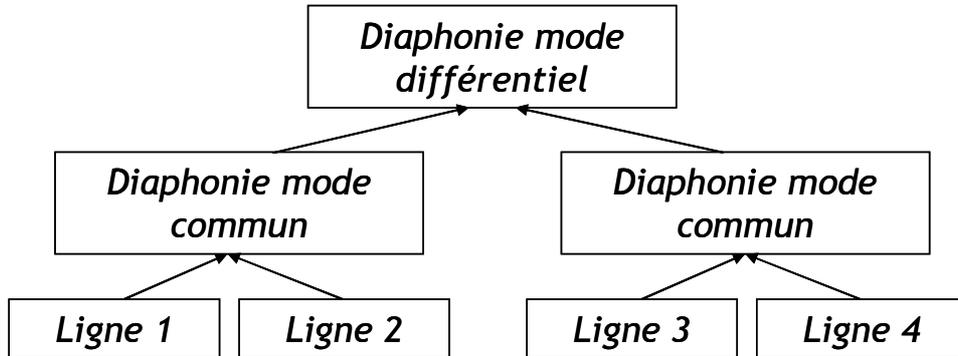


Fig.III.27 : Graphe topologique du système

Il ne restera plus qu'à ajouter les couplages inductifs et capacitifs dans les espaces des branches et des mailles entre les lignes 1 et 3 ; 1 et 4 ; 2 et 3 ; 2 et 4 pour obtenir la simulation du couplage par diaphonie entre ces deux lignes en mode différentiel.

Le schéma électrique équivalent est donné dans la Fig.III.28 :

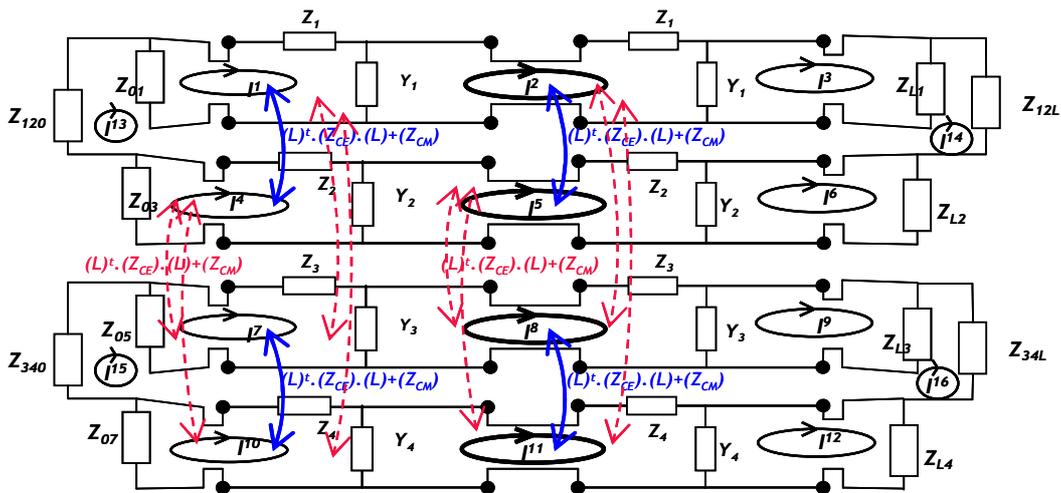


Fig.III.28 : Schéma équivalent du couplage par diaphonie en mode différentiel

La sous-fonction de prévision de la diaphonie entre ces lignes est décrite en annexe II.

Deux lignes en mode différentiel de 44 cm de longueur sont disposées à 2,5 cm de hauteur du plan de masse. Chacun des quatre conducteurs a un diamètre 1 mm. Les distances entre ces 4 fils sont : $d12=d23=d34=5$ cm. Les charges sont fixées de manière à générer le mode différentiel : $R_{01}=R_{L1}=R_{02}=R_{L2}=R_{03}=R_{04}=R_{L3}=R_{L4}=1.10^8 \Omega$ et $R_{120}=R_{12L}=R_{340}=R_{34L}=50 \Omega$. Nous excitions la première ligne en mode différentiel par une fém de 1V, comme illustré dans la Fig.III.26. Les tensions sur les quatre dernières charges sont alors simulées :

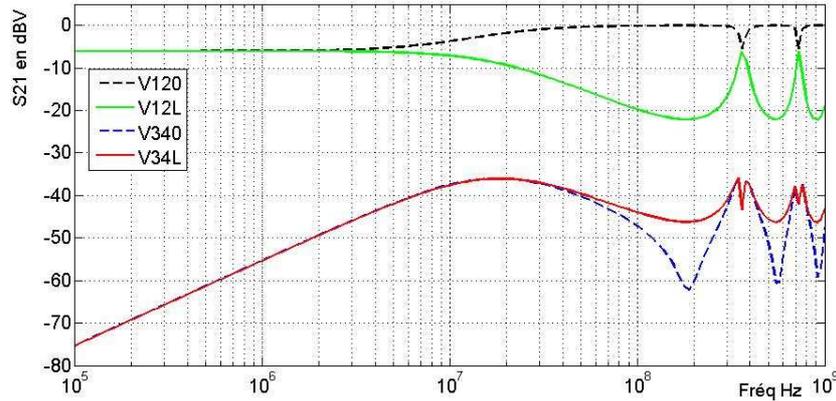


Fig.III.29 : Simulation des rapports des tensions de mode différentiel

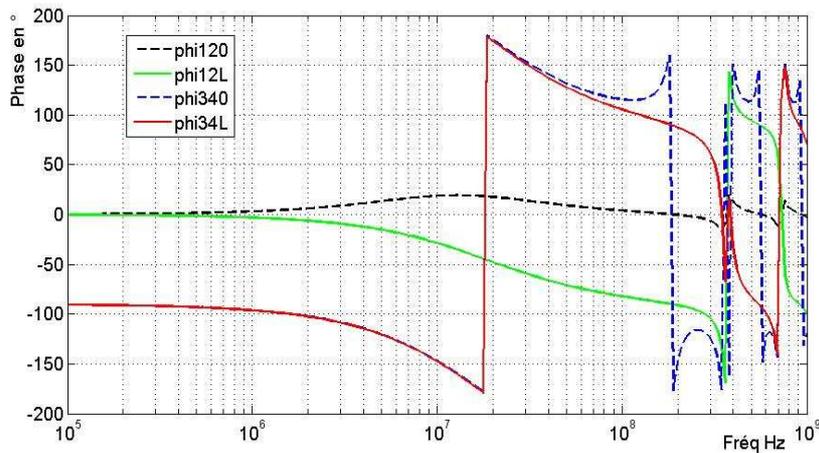


Fig.III.30 : Phase

Le passage par zéro des courbes de phase donne les fréquences de résonance et d'antirésonance de ce couplage par diaphonie entre deux lignes en mode différentiel.

Dans le paragraphe suivant, nous approfondissons l'analyse d'un couplage par diaphonie entre n lignes en adoptant la *MKCE* au cas de la propagation multimodale. En effet, nous observerons que l'analyse modale s'adapte parfaitement au formalisme tensoriel des réseaux et permettra une simplification des équations du système des lignes couplées et une meilleure représentation physique.

III.5 Insertion de l'analyse modale dans la *MKCE*

La plupart des câbles présents dans l'industrie, comportent des gaines diélectriques permettant d'isoler le câble des perturbations provoquées par contact, par corrosion ou par vieillissement. Dans ce cas, les ondes électromagnétiques ne se propagent plus de la même manière sur les câbles.

Pour simuler correctement des interactions électromagnétiques entre des lignes de transmission enrobées de gaine diélectrique, nous ne pouvons plus utiliser les lois habituelles. L'analyse modale permet de contourner ce problème.

La méthode consiste en une transformation de la base originale ou réelle formée par les courants circulant dans n conducteurs, vers la base modale constituée par les courants des n modes de propagation.

A partir de là, nous pourrons, dans le formalisme de *Kron*, créer une nouvelle base que l'on appellera base modale, dans laquelle nous calculerons plus rigoureusement les interactions électromagnétiques entre ces lignes comportant des gaines diélectriques. Ensuite, ces couplages électromagnétiques seront transformés automatiquement dans l'espace des courants de maille en vue d'une résolution globale d'un grand système.

Nous verrons en quoi l'analyse modale permet de traduire plus rigoureusement les phénomènes physiques et pourquoi la *MKCE* s'adapte si facilement à ce modèle.

III.5.1 Principes fondamentaux

Les principes fondamentaux de l'analyse modale ont été introduits dans le chapitre I paragraphe 1.2.2.2 *Résolution modale des lignes multifilaires*.

Nous rappelons simplement dans les équations suivantes, les relations permettant d'obtenir les matrices de changement de bases entre les bases réelles et modales puis, les formules de transformation entre les impédances et admittances de la base de référence originale vers la base modale. Le système de notation différencie la base modale par l'utilisation de lettres minuscules et la base réelle par des lettres majuscules.

L'équation du second ordre de propagation du courant, présentée dans le chapitre I, est réécrite ci-dessous :

$$\left(-\frac{d^2 I}{dt^2} \right) - (\gamma^2)(I) = 0 \quad (III.51)$$

Posons $(A_i) = (Y)(Z)$

(A_i) n'est pas diagonal. Soit (Γ^2) la matrice diagonale obtenue par la transformation linéaire produite par les matrices de passage (T_i) telle que :

$$(\Gamma^2) = (T_i)^{-1}(A_i)(T_i) \quad (III.52)$$

D'une manière duale, si nous exprimons l'équation différentielle (III.51) en gardant comme variable la tension, nous introduisons une matrice (A_v) définie par $(A_v) = (Z)(Y)$ non diagonale. La matrice diagonale (Γ^2) peut être exprimée en fonction des matrices de passage (T_v) telle que :

$$(\Gamma^2) = (T_v)^{-1}(A_v)(T_v) \quad (III.53)$$

De par les expressions (III.52) et (III.53), nous comprenons que les matrices de transformation T_i et T_v sont formées respectivement des vecteurs propres de (A_i) et de (A_v) .

Les matrices de transformation T_i et T_v sont alors fonctions des courants de la base originale et des courants de la base modale :

$$\begin{aligned} (I) &= (T_i)(i) \\ (V) &= (T_v)(v) \end{aligned} \quad (III.54)$$

Notons $(T) = (T_i)$ pour simplifier les notations :

$$(T_v)^{-1} = (T_i)^t = (T)^t \quad (III.55)$$

Les impédances et admittances dans la nouvelle base modale sont alors obtenues à partir des matrices de transformation suivantes :

$$(z) = (T)^t (Z) (T) \quad (III.56)$$

$$(y) = (T)^{-1} (Y) ((T)^t)^{-1} \quad (III.57)$$

Ces formules correspondent à des transformations linéaires permettant de passer d'une base à une autre.

On utilisera les conventions de notation du calcul tensoriel pour pratiquer des transformations linéaires, réduit ici à des matrices.

III.5.2 Adaptation au formalisme tensoriel

Comme il a été démontré dans le chapitre I, les vecteurs courants et tensions de l'expression (III.54) peuvent être assimilés à des tenseurs du premier ordre. Ainsi, le vecteur des courants de la base originale \vec{I} s'exprime sous une forme linéaire du vecteur \dot{i} que l'on écrit comme suit :

$$\vec{I} = f(\dot{i}) \quad (III.58)$$

On a alors l'expression de la transformation du tenseur abusivement appelé contravariant :

$$\vec{I} = f(\dot{i}) = \sum_i a_i i^i \text{ avec la convention d'Einstein : } \vec{I} = f(\dot{i}) = a_i i^i \quad (III.59)$$

L'opérateur linéaire forme un tenseur covariant de dimension un dont les coefficients a_i constituent les composantes d'un tenseur du premier ordre.

Considérons I^i et i^i , abusivement appelés les tenseurs une fois contravariant respectivement dans la base originale et dans la base modale. Ces deux tenseurs sont donc liés par la matrice de transformation définie dans l'expression (III.60) :

$$I^i = T_\alpha^i i^\alpha \quad (III.60)$$

Dans cette expression, il est important de comprendre que I^i et i^α sont deux tenseurs une fois contravariant et que T_α^i sont les composantes d'une matrice et non d'un tenseur.

L'usage du terme abusivement contravariant vient de la propriété exposée dans l'équation (III.59).

On peut écrire de la même manière la relation liant les deux tenseurs dans les bases originales et modales U_i et u_α , une fois covariant :

$$U_i = \frac{1}{T_{\alpha}^{\bullet i}} u_\alpha \quad (III.61)$$

Les matrices des impédances et admittances seront considérées comme des tenseurs provenant de formes bilinéaires, soit une fonction deux fois linéaires présentée au paragraphe II.2.2.2, permettant la transformation de la base originale vers la base modale :

$$z_{ij} = T_{i}^{\bullet \alpha} \cdot Z_{\alpha\beta} \cdot T_j^\beta \quad (III.62)$$

$$y^{ij} = \frac{1}{T_i^\alpha} \cdot Y^{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{T_j^{\bullet \beta}} \quad (III.63)$$

Un couplage par diaphonie illustrera l'utilisation de l'analyse modale avec la méthode de *Kron*.

III.5.3 Couplage par diaphonie simulé par la MKCE dans la base modale

Dans l'exemple suivant, nous présentons le cas particulier de deux conducteurs surmontant un plan de masse, ceci pour introduire simplement l'analyse modale dans le formalisme de *G.Kron*. On pourra généraliser cette étude à un toron à n conducteurs. Plutôt que de considérer les courants classiques I^1 et I^2 parcourant les lignes respectives 1 et 2 comme référence traditionnelle, nous choisirons de travailler dans une nouvelle base constituée des courants de mode commun i^c (courants passant par la masse) et de mode différentiel i^d (courants traversant un conducteur et revenant par le deuxième conducteur en parallèle).

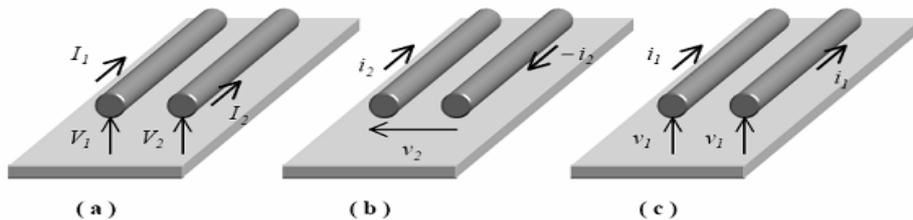


Fig.III.31 : Représentation modale de deux conducteurs surmontant un plan de masse.

La Fig.III.31 présente en (a) la structure courants et tensions dans la base originale, puis, en (b) la structure du premier mode propre appelé mode différentiel et (c) le second mode propre illustré par le mode commun.

Ci-dessous, est représentée une coupe transversale du circuit électrique équivalent d'un couplage entre deux conducteurs dans la base originale à gauche puis dans la base modale à droite :

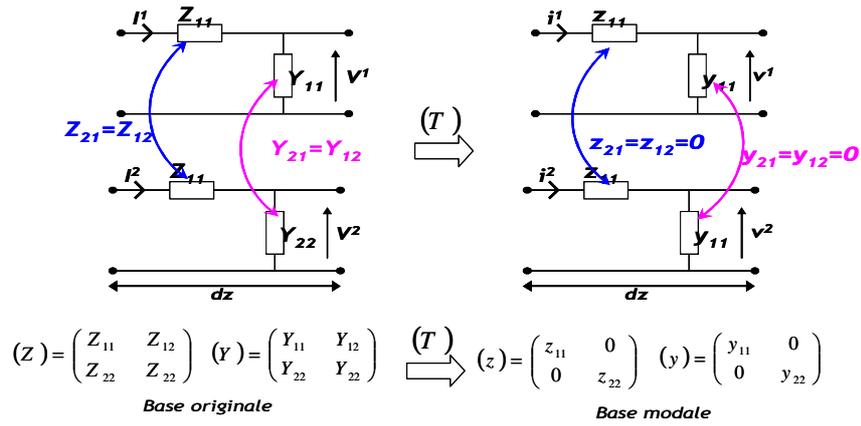


Fig.III.32 : Transformation de base

Dans la nouvelle base modale, les matrices (z) et (y) sont diagonales. Les couplages électriques et magnétiques sont alors pris en compte sur les éléments propres des deux modes commun et différentiel.

Dans un premier temps, la matrice de transformation T est obtenue en calculant les vecteurs propres de la matrice $(A_i) = (Y)(Z)$:

$$(T) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{221} \end{pmatrix} \quad (III.64)$$

En appliquant alors directement les formules (III.62) et (III.63) de transformation de bases, nous obtenons les matrices y et z dans la base modale.

Les matrices des charges aux extrémités (r_0) et (r_L) sont transformées dans la nouvelle base modale par les relations suivantes :

$$r_0 = (T)^t (R_0) (T) \quad \text{et} \quad r_L = (T)^t (R_L) (T)$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_{01} & 0 \\ 0 & R_{02} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_L = \begin{pmatrix} R_{L1} & 0 \\ 0 & R_{L2} \end{pmatrix} \quad (III.65)$$

De la même manière, les *fém* sont transformées dans la nouvelle base modale par les relations suivantes :

$$e_0 = (T)^t (e_{0L}) \quad e_0 = \begin{pmatrix} e_{0c} \\ e_{0d} \end{pmatrix} \quad (III.66)$$

A partir de ces paramètres, deux sous-fonctions lignes permettront d'obtenir les matrices impédances et *fém* dans l'espace des mailles et dans la base modale. Il n'y aura alors besoin d'aucun couplage entre ces deux lignes.

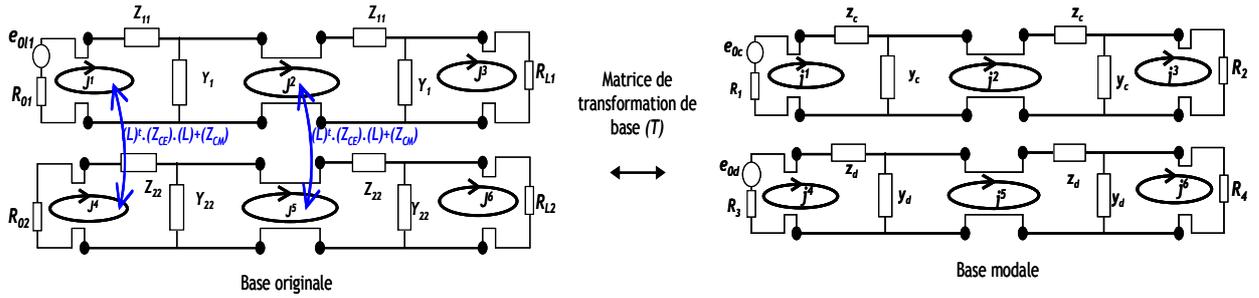


Fig.III.33 : Schéma électrique équivalent de deux lignes couplées par diaphonie

La base modale permet d'éliminer virtuellement les liaisons de type couplages électrique et magnétique entre les courants de branche et de maille. Dans la base modale, les couplages entre lignes apparaissent dans les paramètres linéiques. Les expressions sont alors simplifiées car l'étape de calcul dans la base des branches est évitée.

Les deux matrices Z_c (à ne pas confondre avec l'impédance caractéristique) pour la propagation du mode commun et Z_d pour le mode différentiel, ainsi obtenues, sont alors insérées dans une super-matrice impédance finale Z . Le super-vecteur des *fém* sera construit de la même manière :

$$(z) = \begin{pmatrix} (z_c) & (0) \\ (0) & (z_d) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (e) = ((e_c) \quad (e_d)) \quad (III.67)$$

Finalement, les courants de maille dans la base modale sont calculés en inversant la matrice impédance modale.

$$(j) = (z)^{-1} \cdot (e) \quad (III.68)$$

Pour revenir dans la base réelle, il faut connaître la super-matrice de transformation de bases dans l'espace des mailles. On donne comme exemple la super-matrice (ST) pour le réseau à 6 mailles de la Fig.III.33 avec λ_{ij} les composantes de la matrice des vecteurs propres.

$$(ST) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & 0 & 0 & \lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{21} & 0 & 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{21} & 0 & 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} \quad (III.69)$$

Attention, lors de la création de la matrice (ST) , les courants entre les bases originales et modales doivent correspondre. La première colonne de (ST) fait le lien entre le courant de maille j^1 avec le courant de maille j^4 dans la base modale pour revenir à la numérotation des courants de la Fig.III.33.

Les courants de maille (J) dans la base originale sont enfin obtenus à partir de la matrice (ST) et de la matrice des courants (j) de la base modale :

$$(J) = (ST)(j) \quad (III.70)$$

Reprenons à titre d'exemple, les configurations du couplage par diaphonie étudié précédemment et comparons les courbes avec les mêmes valeurs initiales des paramètres électriques (L) et (C) dans la base originale. Les résultats sont quasiment identiques. Notons de légères différences en hautes fréquences.

Par contre nous relevons des temps de simulations beaucoup plus faibles : 2,2s de simulation pour le calcul dans la base originale contre 0.9 s dans la base modale pour 200 points calculés dans la bande de fréquence 100 kHz à 1GHz.

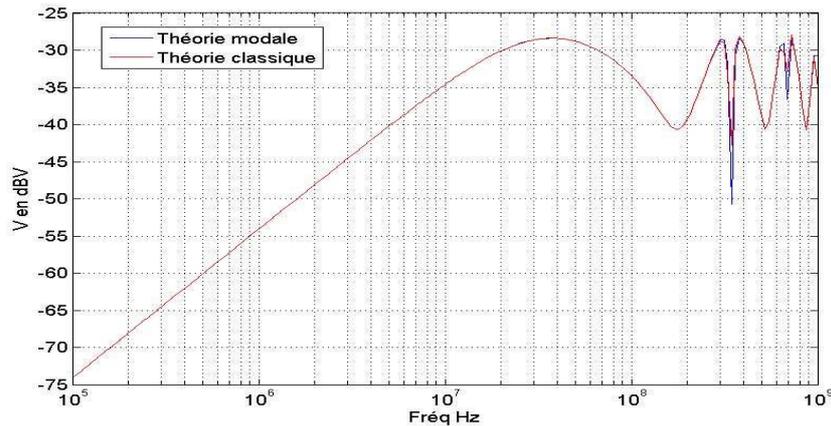


Fig.III.34 : Comparaison de la simulation d'un couplage par diaphonie dans la base originale et dans la base modale

Des résultats comparatifs entre résultats expérimentaux et simulés par l'analyse modale sous le formalisme de *Kron* seront présentés dans le cas d'un couplage à n_z conducteurs et dans un milieu diélectrique non homogène.

Nous avons analysé différentes approches pour modéliser des lignes de transmission couplées par la méthode de Kron.

Afin de protéger les systèmes électroniques embarqués, les industriels ont l'habitude d'utiliser des blindages électromagnétiques généralement disposés au niveau des réseaux de câbles.

Dans la partie suivante, nous analyserons différentes configurations de blindages EM de câbles par la méthode de *Kron*.

III.6 Traitement des câbles blindés

Une des techniques couramment utilisée pour réduire l'émissivité d'un système et améliorer sa susceptibilité électromagnétique est de l'isoler en le protégeant par des blindages métalliques.

L'imperfection des blindages EM ou leur mauvais usage génère des tensions parasites sur les équipements disposés aux extrémités des câbles. Trois mécanismes différents en sont responsables : les défauts d'étanchéité des enceintes métalliques, les contacts entre les blindages et la masse, et les imperfections des blindages. Nous proposons de nous focaliser sur l'étude des imperfections de deux types de blindage : homogènes et en tresses.

La Fig.III.35 présente l'exemple de deux équipements électroniques installés dans des boîtes métalliques, reliés par un conducteur installé dans un blindage.

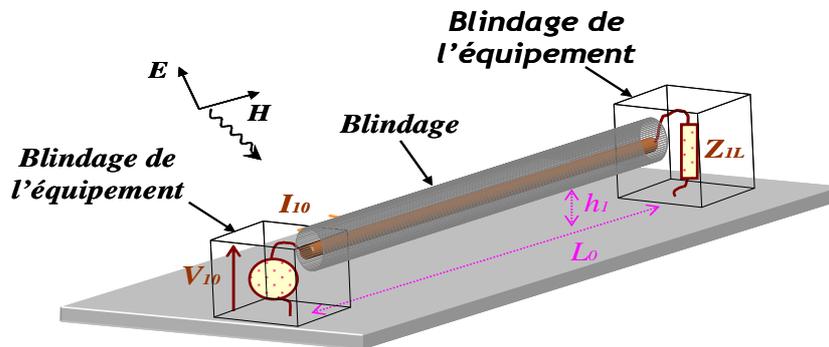


Fig.III.35 : Ligne dans un blindage

Nous identifierons dans un premier temps les phénomènes physiques liés aux caractéristiques géométriques des blindages et au matériau qui le compose. Nous étudierons ensuite les perturbations engendrées sur une ligne protégée par un blindage comportant naturellement des pertes.

III.6.1 Insertion des câbles blindés

Le champ électromagnétique va de la même manière que des lignes de transmission couplées, induire un courant sur le blindage et une différence de potentiel entre celui-ci et le plan de masse.

Si par hypothèse, nous considérons un blindage parfait sans perte, cela signifie que le champ ne pénètre pas à travers le blindage. Aucune tension parasite n'apparaîtra entre le conducteur et la masse de l'équipement.

En réalité, le courant parasite généré sur la surface extérieure du blindage produit un champ électrique à l'intérieur du blindage. L'intégrale de ce champ sur la longueur de la ligne produit alors une différence de potentiel parasite entre le conducteur central et le blindage. Pour représenter le couplage entre le blindage et le conducteur central, nous utiliserons, comme dans la théorie des lignes couplées, une impédance ou une admittance de couplage mutuel couramment appelée impédance ou admittance de transfert notée Z_t ou Y_t .

On présente sur la Fig.III.36 un schéma permettant de mesurer l'impédance ou l'admittance de transfert.

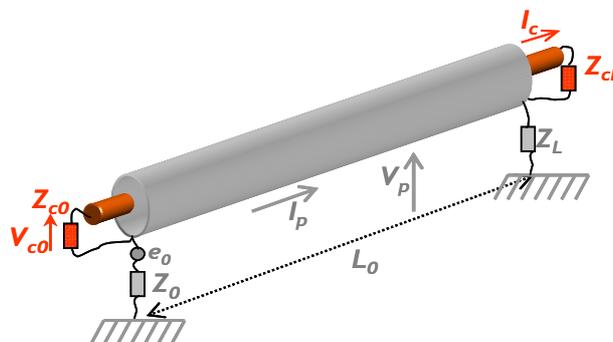


Fig.III.36 : Mesure de l'impédance de transfert

Un courant parasite est introduit sur le blindage du système de la Fig.III.36 par une fém e_0 équivalente accompagnée de son impédance interne Z_0 . Le blindage est donc relié à ses extrémités par cette source accompagnée de son impédance interne Z_0 , et par un court circuit à l'autre extrémité : $Z_L=0$. Le conducteur central est court-circuité sur le blindage : $Z_{cL}=0$. On contrôle alors le courant parasite I_p circulant dans le blindage et on mesure la tension V_{c0} entre le conducteur et le blindage.

Cette tension qui apparaît sur la charge Z_{c0} est due à l'imperfection du blindage parcouru par le courant I_p .

L'impédance de transfert Z_t en $\Omega.m^{-1}$ est alors liée à ces dernières grandeurs par la relation suivante :

$$\text{Si } Z_0=Z_{c0}=50\Omega \text{ et } Z_L=Z_{cL}=0\Omega \text{ alors } Z_t = \frac{V_{c0}}{I_p} \frac{1}{L_0} \quad (\text{III.71})$$

Si le blindage comporte une ouverture, l'admittance de transfert Y_t s'obtient par la configuration duale de la précédente : Si la charge Z_L reliant le blindage au plan de masse est assimilable à un circuit ouvert (charge importante fixée arbitrairement à $1.10^8\Omega$), alors le courant I_p sera très faible. Le couplage sera alors très majoritairement capacitif. En court-circuitant l'extrémité du conducteur central avec le blindage $Z_{cL}=0\Omega$, un courant I_c apparaîtra dans le conducteur. L'admittance de transfert sera alors exprimée comme ci-dessous :

$$\text{Si } Z_0=Z_{c0}=50\Omega \text{ et } Z_L=1.10^8\Omega \text{ et } Z_{cL}=0\Omega \text{ alors } Y_t = \frac{I_c}{V_p} \frac{1}{L_0} \quad (\text{III.72})$$

En basses fréquences et pour les matériaux non ferromagnétiques, Z_t n'est rien d'autre que la résistance linéique R_0 du blindage.

En hautes fréquences, des phénomènes de propagation et de couplages électromagnétiques s'ajoutent à la résistance linéique.

Les blindages composés de tubes métalliques dépourvus d'ouverture se prêtent bien à la simulation théorique à cause de leur caractère homogène. Ainsi, Shelkunoff [III.2] et [III.3] a établi l'expression analytique de l'impédance de transfert du tube homogène dont on retrouve plus loin l'expression (III.74).

Les blindages constitués de brins de cuivres homogènes tressés feront eux, en plus des phénomènes de diffusion, intervenir des phénomènes de diffraction et d'induction que l'on pourra approximer par les formules de Vance [III.4]- [III.5], Halme [III.6], Tyni [III.7], Kley [III.8], Kaden, Lanoz et Démoulin [III.1].

Le modèle de Tyni, propose l'approximation de l'impédance de transfert Z_T suivante :

$$Z_T = Z_R + j\omega L_T + (1 + j)\omega L_S \quad (\text{III.73})$$

L'impédance de transfert Z_R d'un tube plein d'épaisseur d est donnée par la formule de Shelkunoff traduisant le couplage par diffusion :

$$Z_R = R_{gs} \frac{d_R(1+j)/\delta}{sh[d_R(1+j)/\delta]} \quad (\text{III.74})$$

Avec l'épaisseur de peau δ donnée ci-dessous en mètre :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \cdot \mu \cdot \sigma}} \quad (III.75)$$

μ est la perméabilité magnétique en H/m et σ est la conductivité électrique du matériau conducteur en S/m .

La résistance en basses fréquences R_{gs} est définie en fonction de cinq paramètres primaires de la tresse m faisceaux, n brins de cuivre dans un faisceau, le diamètre d d'un brin, l'angle de tresse α et σ la conductivité du cuivre (si la tresse est en cuivre) :

$$R_{gs} = \frac{4}{\sigma m n d^2 \pi \cos \alpha} = \frac{1}{\sigma G_0 \cos \alpha} \frac{2}{\pi^2 D_m d} \quad (III.76)$$

Les ouvertures de la tresse vont introduire par diffraction un nouveau couplage magnétique représenté par la grandeur L_T . Cette inductance de couplage peut à son tour être décomposée en deux éléments : $L_T = Ml + Lg$

Ml : inductance de couplage magnétique à travers les trous, développée par Halme et Vance.

Lg : Inductance entre les deux moitiés de tresse entrelacées, développée par Tyni.

Nous obtenons finalement l'expression de l'inductance prédisant les diffractions des ondes électromagnétiques à travers les ouvertures de la tresse :

$$L_T \approx \frac{\mu_0}{m} \left[0.875 \frac{\pi}{6} ((2 - \cos \alpha)(1 - G)^3 e^{-\tau_H}) - \frac{0.11}{n} \cos(2k_1 \alpha) \right] \quad (III.77)$$

Finalement, *Kaden* introduit les effets de l'impédance de surface dans le modèle des blindages grâce à l'inductance de peau notée L_s . Ces effets de surface sont facilement repérables sur les graphiques car le terme wL_s est proportionnel à la racine de la fréquence faisant donc apparaître une pente en 10 dB/dec sur l'évolution de l'impédance de transfert.

$$wL_s \approx \frac{1}{\pi \sigma \delta} \frac{1}{D_m} \left[10\pi G_0^2 (\cos \alpha)(1 - G)e^{-\tau_H} - \frac{3.3}{2\pi G_0} \cos(2k_2 \alpha) \right] \quad (III.78)$$

Ces formules donnent une bonne approximation de l'impédance de transfert dans le cas où nous sommes en présence de brins en cuivre homogène.

Maintenant que les équations théoriques ont été décrites, nous allons introduire toutes ces impédances de couplage dans les termes des supers-tenseurs décrivant les circuits électriques équivalents de plusieurs lignes blindées.

III.6.2 Analyse d'un blindage à perte par la MKCE

L'impédance de transfert Z_t définie précédemment peut être assimilée à une impédance de couplage de type magnétique entre deux sous-réseaux électriques.

Nous proposons le schéma électrique équivalent suivant [III.9] :

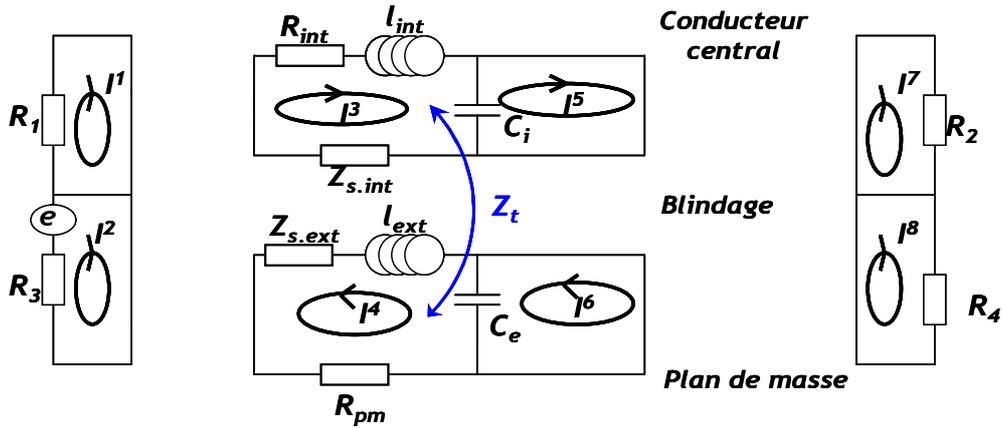


Fig.III.37 : Schéma équivalent de l'impédance de transfert

Les deux sous-réseaux aux extrémités représentent les impédances de charges et sources présentes aux extrémités du conducteur et du blindage.

Le sous-réseau central provient de la théorie des lignes couplées. Le conducteur central est modélisé par le circuit du haut avec la résistance interne R_{int} du conducteur, l'inductance propre L_{int} et la capacité propre C_i par rapport à la surface interne du blindage. La référence de potentiel est donc le blindage, apparaissant dans le circuit électrique à travers l'impédance de surface $Z_{s,int}$.

Le circuit du bas correspond à la modélisation du blindage par rapport au plan de masse.

On retrouve les paramètres électriques primaires classiques, soit L_{ext} l'inductance propre, C_e la capacité propre; $Z_{s,ext}$ est l'impédance de surface du blindage extérieur. R_{pm} caractérise la résistance du plan de masse.

Nous utilisons l'expression approchée (III.79) pour l'impédance de transfert d'un blindage non tressé :

$$Z_t = R_0 \frac{kd}{\sinh(kd)} + Z_s + jL_t w$$

Avec :

$$Z_s = R_0 \quad \text{si} \quad \delta \gg e \quad (III.79)$$

$$Z_s = (1+j)R_{HF} \quad \text{si} \quad \delta \ll e$$

$$l_{ext} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{4h}{D}\right) \quad l_{int} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D-e}{d}\right) \quad R_{HF} = \frac{\rho}{\pi D \delta} \quad R_0 = \frac{\rho}{\pi D e} \quad \text{et} \quad k = \frac{(1+j)}{\delta}$$

$n_z=1$ sous-réseau élémentaire a été choisi dans l'exemple de la Fig.III.37 pour l'implémentation de ce problème de protection EM par la MKCE.

Dans un premier temps, chacun des trois sous-réseaux est défini dans l'espace des mailles puis, ces sous-réseaux seront connectés comme le montre la Fig.III.38 grâce à la matrice d'interconnexion (F). Une fois connecté, nous retrouvons le schéma électrique dans l'espace des mailles :

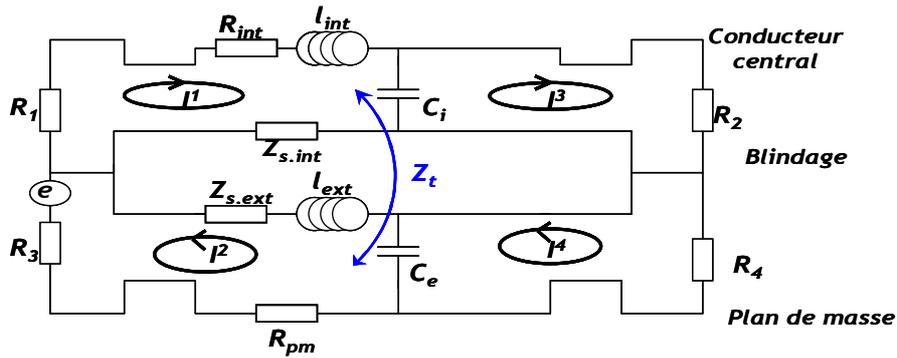


Fig.III.38 : Schéma électrique connecté dans l'espace des mailles

Les matrices impédance et f_{em} permettent finalement d'obtenir les courants de maille.

Pour illustrer, prenons l'exemple d'un blindage homogène avec pertes, placé au dessus d'un plan de masse, et protégeant un conducteur.

La longueur de la ligne de transmission est de 1 m , la hauteur du câble blindé par rapport au plan de masse est de $h=2.5\text{ cm}$, le diamètre du conducteur principal est de $d=1\text{ mm}$, le diamètre du blindage de $D=2\text{ cm}$ et l'épaisseur du blindage de $470\text{ }\mu\text{m}$. L'impédance de transfert est obtenue soit par mesure directe, soit par la MKCE dont le code figure en annexe II.

Nous représentons la tension V_{c0} sur $50\text{ }\Omega$ entre le conducteur central et le blindage à $z=0$, lorsqu'une source e_0 de 1 V est appliquée entre le blindage et la masse. Les impédances de charge aux extrémités sont : $R_1=50\text{ }\Omega$, $R_2=50\text{ }\Omega$, $R_3=50\text{ }\Omega$ et $R_4=50\text{ }\Omega$. Le nombre de sous-réseaux mis en cascade est de $n_z=15$ pour représenter correctement les phénomènes de propagation jusque 1 GHz :

$$n_z \geq \frac{4f_{\max} \cdot L}{v} \geq 14 \quad (\text{III.80})$$

Le temps de simulation pour 200 points est de $1,15\text{ secondes}$.

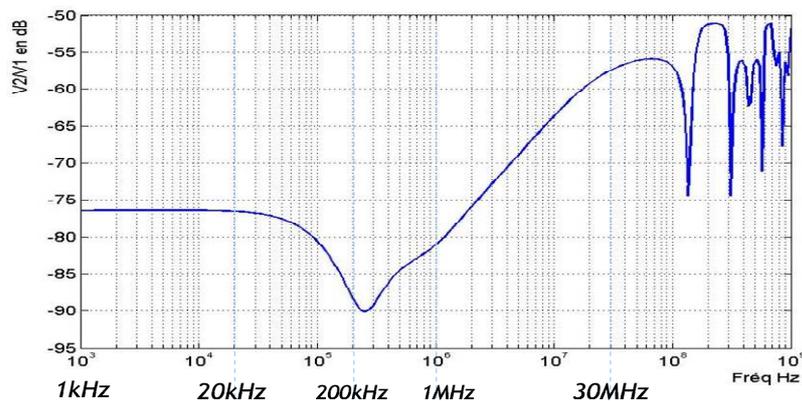


Fig.III.39 : Tension parasite simulée entre le conducteur central et le blindage

Cette courbe présente simultanément plusieurs phénomènes de blindage EM. Cinq zones distinguées sur la Fig.III.39, peuvent être analysées séparément :

De 1 kHz à 20 kHz la résistance R_{gs} du blindage prédomine.

De 20 kHz à 200 kHz les effets de peau du blindage (*Shelkunoff*) introduit par l'impédance Z_R , diminuent la tension parasite.

De 200 kHz à 1 MHz la pente en 10 dB/dec décrit les effets d'impédance de surface Z_s .

De 1 MHz à 30 MHz la pente en 20 dB/dec décrit l'effet de l'impédance de transfert $j\omega L_t$.

Enfin, les résonances traduisent les phénomènes de propagation et de couplage entre le conducteur et le blindage de 1 m. Les résonances apparaissent pour des longueurs d'onde et des longueurs de ligne de même ordre.

Après avoir traduit par la méthode de *Kron* les sous-fonctions permettant de décrire un réseau complexe de câbles, nous introduirons dans le paragraphe suivant des sous-fonctions décrivant le comportement électromagnétique de différentes antennes simples.

III.7 Restitution du couplage exercé entre deux antennes

Dans cette partie seront présentés par l'analyse tensorielle des réseaux, deux types de couplages électromagnétiques par des antennes. Nous distinguerons d'abord les interactions électriques entre deux antennes monopoles, et en deuxième partie les interactions magnétiques entre deux antennes boucles.

III.7.1 Couplage électrique entre deux monopoles

Une antenne monopole est constituée d'une tige cylindrique de hauteur h_{ant} sensible au champ électrique E_z orienté parallèlement au conducteur. Les monopoles seront sous-dimensionnés par rapport à la longueur d'onde. Cette hypothèse permet alors d'adapter le schéma électrique équivalent de la Fig.III.40 avec la fém E_0 induite sur le conducteur, la résistance de charge R_0 et la capacité C_0 interne du monopole.

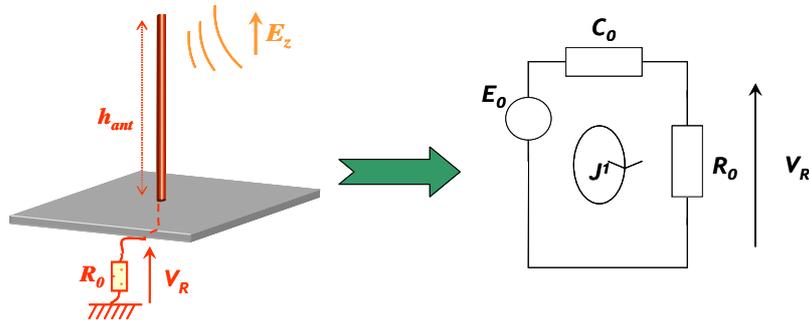


Fig.III.40 : Schéma équivalent d'une antenne monopole réceptrice

En estimant que la distribution du champ E_z est uniforme, la fém E_0 induite sur l'antenne s'exprime par :

$$\lambda \gg h \rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \cdot E_z \cdot h \quad (III.81)$$

La tension V_R obtenue sur la charge R_0 est donc directement proportionnelle au champ électrique E_z transmis vers cette antenne.

L'application de la théorie des images électriques et les développements proposés sur une antenne biconique permettent d'attribuer à C_0 l'expression analytique suivante dans laquelle a représente le rayon du conducteur [III.1] :

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2h}{a}\right)} h \quad (III.82)$$

La tension V_R sur la charge prend alors la forme suivante :

$$V_R = \frac{j\omega C_0 R_0}{1 + j\omega C_0 R_0} E_0 = \frac{j\omega C_0 R_0}{1 + j\omega C_0 R_0} \frac{E_z h}{2} \quad (III.83)$$

Une fois le modèle électrique équivalent du monopole défini, le système est résolu par la MKCE.

Dans le cas où l'antenne est grande devant la longueur d'onde, les phénomènes de propagation apparaissent. Si l'environnement de l'antenne est simple à définir, nous pourrions utiliser des formules analytiques pour obtenir l'impédance de ces monopoles. Sinon, la capacité C_0 peut être déduite de la mesure du coefficient S_{11} pratiqué à l'aide d'un analyseur de réseau.

Sur la Fig.III.40 est annoté le courant de maille J^l . Ce réseau très simple est caractérisé par les matrices impédance et $fém$ directement dans l'espace des mailles :

$$(Z_{antl}) = \left(R_0 + \frac{1}{j\omega C_0}\right) \quad (E_{antl}) = (E_0) \quad (III.84)$$

Le champ E_z généré par un monopole peut être caractérisé par les formules analytiques que l'on retrouve par la résolution des équations de Maxwell. Il faut pour cela respecter les hypothèses suivantes : Le diamètre du conducteur doit être bien inférieur à la longueur de l'antenne et la position de l'observateur doit être grande devant la dimension du conducteur, soit :

$$r \gg h_{ant} \quad (III.85)$$

Dans ce cas, un champ électromagnétique est généré par la circulation de courant dans le conducteur confondu avec un repère sphérique (r, θ, φ) . Les solutions aboutissent à deux composantes de champ électrique orthogonales, l'une que l'on note E_r car elle est orientée suivant l'axe radial r et l'autre E_θ car elle est dirigée vers la direction polaire θ . Une composante magnétique H_φ orthogonale aux composantes de champ électrique est orientée suivant la direction angulaire φ . Elles prennent pour expressions analytiques les équations rigoureuses suivantes :

$$E_r = \frac{I.h.2\cos\theta}{4\pi j\omega\epsilon_0 r^3} (1 + \gamma r) e^{-\gamma r} \quad (III.86)$$

$$E_\theta = \frac{I.h.\sin\theta}{4\pi j\omega\epsilon_0 r^3} [1 + \gamma r + (\gamma r)^2] e^{-\gamma r} \quad (III.87)$$

$$H_{\varphi} = \frac{I.h.\sin\theta}{4\pi r^2} (1 + \gamma) e^{-\gamma r} \quad (III.88)$$

La constante de propagation γ des ondes EM dans l'air est exprimée en fonction de la source sinusoïdale qui excite le conducteur avec une pulsation ω .

$$\gamma = jk = j\frac{\omega}{c} = j\frac{2\pi}{\lambda} \quad (III.89)$$

La composante de champ électrique suivant l'axe z , sera alors exprimée comme suit :

$$E_z = \sqrt{E_r^2 + E_{\theta}^2} \quad (III.90)$$

Selon que la distance r de l'observateur est très inférieure ou très supérieure à la longueur d'onde, nous simplifierons les expressions (III.86), (III.87) et (III.88) pour obtenir les champs de proximité ou les champs lointains du monopole.

Considérons maintenant deux antennes monopoles couplées illustrées Fig.III.41. Les tiges sont de longueurs différentes et espacées de $d_{12}=9\text{ cm}$.

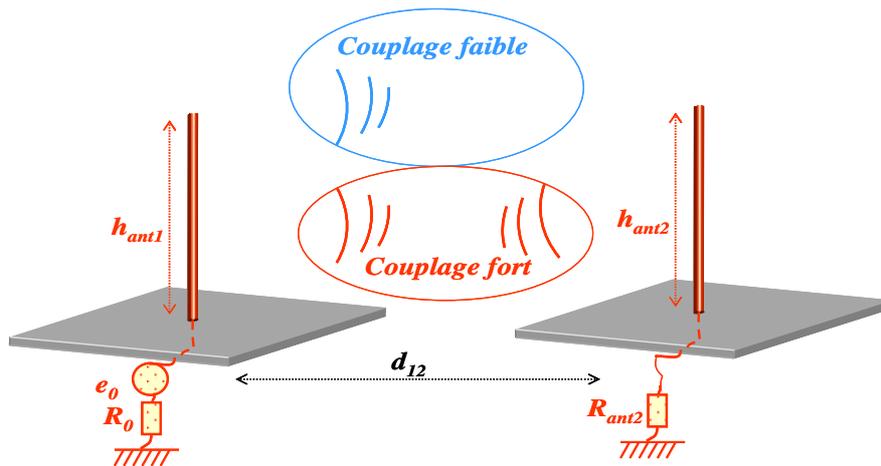


Fig.III.41 : Couplage faible et fort entre deux antennes monopoles

On distingue alors deux cas de figure selon que l'on considère un couplage faible ou un couplage fort.

Le couplage faible, fera intervenir une *fém* équivalente traduisant l'effet du premier monopole sur le second. Aucune perturbation du monopole 2 vers le monopole 1 ne sera prise en compte comme l'illustre le schéma électrique équivalent de la Fig.III.42.

Dans le cas du couplage fort, le rétro-couplage doit être pris en compte. L'interaction entre deux réseaux appelés « monopoles » sera alors matérialisée par une capacité de couplage dans le circuit électrique entre deux branches des deux monopoles distincts comme le montre la Fig.III.43.

III.7.1.1 Couplage faible

Nous retrouvons dans la Fig.III.42, le schéma électrique équivalent du couplage faible entre un monopole émetteur et un autre récepteur. La *fém* source e_0 accompagnée de la résistance interne R_1 du générateur excite le premier monopole caractérisé simplement par sa capacité équivalente C_{ant1} . Le second monopole récepteur est alors excité par la *fém* E_0 résultante du couplage électrique entre ces deux antennes. On retrouve ensuite la capacité équivalente de cette deuxième antenne C_{ant2} chargée sur une résistance R_2 . E_0 sera directement proportionnel au champ électrique E_z de l'équation (III.90) et à sa hauteur h exprimée dans l'équation (III.81).

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} \cdot h \quad (III.91)$$

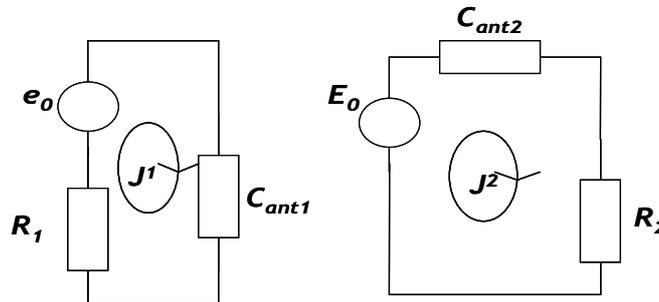


Fig.III.42 : Couplage faible

Nous donnons les tenseurs impédances et *fém* dans l'espace des mailles de ce couplage faible sous forme matricielle.

$$(Z) = \begin{pmatrix} R_1 + \frac{1}{j\omega C_{ant1}} & 0 \\ 0 & R_2 + \frac{1}{j\omega C_{ant2}} \end{pmatrix} \quad (E) = (e_0 \quad E_0) \quad (III.92)$$

Dans ce paragraphe, le couplage est caractérisé par le tenseur des sources E . Il est tout à fait similaire de représenter l'interaction électrique dans le tenseur des impédances. Nous remplaçons pour cela le terme source E_0 dans le tenseur E , par un terme d'impédance de couplage électrique noté $\frac{1}{j\omega C_{ME}}$ dans le tenseur Z de la manière présentée dans l'équation (III.93).

$$(Z) = \begin{pmatrix} R_1 + \frac{1}{j\omega C_{ant1}} & 0 \\ \frac{1}{j\omega C_{ME}} & R_2 + \frac{1}{j\omega C_{ant2}} \end{pmatrix} \quad (E) = (e_0 \quad 0) \quad (III.93)$$

Le tenseur des courants de mailles J^1 et J^2 est enfin obtenu par la relation suivante :

$$(J) = (Z)^{-1} \cdot (E) \quad (III.94)$$

III.7.1.2 Couplage fort

Le schéma équivalent du couplage fort reprend les deux circuits R,C correspondant aux antennes monopoles comme le montre la Fig.III.43 :

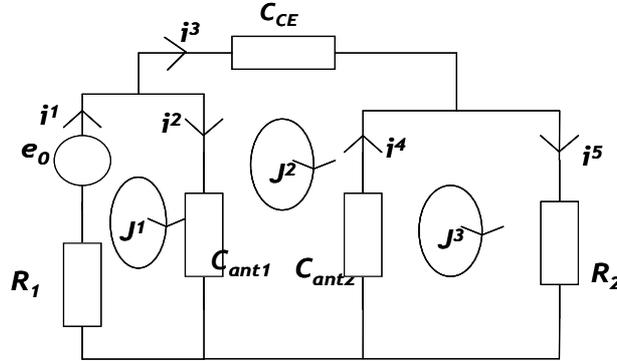


Fig.III.43 : Interaction électrique entre deux antennes monopoles

L'interaction électrique entre ces deux antennes est modélisée dans le réseau par une impédance $1/(j\omega C_{CE})$ de couplage électrique plutôt que deux $fém E_0$ traduisant l'échange d'énergie entre les deux antennes à travers le champ électrique E_Z . Ce choix permet de globaliser toutes les interactions sur la même super-matrice impédance tout en restant dans le domaine fréquentiel pour les calculs.

La capacité C_{CE} est ajoutée dans la branche parcourue par le courant i^3 . Les trois courants de mailles sont choisis comme le montre la Fig.III.43.

Notons qu'il est possible de faire intervenir cette capacité C_{CE} de couplage sur les coefficients extradiagonaux du tenseur des impédances de l'espace des courants de branche entre i^2 et i^4 . Le réseau électrique aurait alors une branche ou une maille de moins.

La capacité C_{CE} peut être évaluée pour les basses fréquences par l'expression (III.95) de l'impédance mutuelle entre deux monopoles [III.1].

$$C_{C.E} = \frac{h}{c.120.\ln\left(\frac{d_{12}}{a}\right)} \quad (III.95)$$

avec d_{12} , la distance entre les deux monopoles.

En hautes fréquences, nous proposons d'utiliser la formule analytique suivante consultable dans l'ouvrage de C A.Balanis [II.9]:

$$\begin{aligned} R_{21m} &= \frac{\eta}{8\pi} [2C_i(u_0) - C_i(u_1) - C_i(u_2)] \\ X_{21m} &= -\frac{\eta}{8\pi} [2S_i(u_0) - S_i(u_1) - S_i(u_2)] \end{aligned}$$

Avec $u_0=kd$, $u_1 = k(\sqrt{d^2 + l^2} + l)$ et $u_2 = k(\sqrt{d^2 + l^2} - l)$ (III.96)

$$Z_{21} = R_{21m} + X_{21m}$$

Avec $S_i(x)$ et $C_i(x)$ les fonctions sinus et cosinus intégrales. d est la distance entre deux monopoles et k le nombre d'onde.

L'impédance $1/(j\omega C_{CE})$ du circuit est alors remplacée par l'impédance Z_{21} de l'équation (III.96). Dans ce cas, apparaissent les fréquences de résonance liées à la propagation des ondes.

Dans d'autres cas où la configuration du monopole est complexe, nous pourrions faire une mesure localisée à l'aide d'un analyseur de réseau pour obtenir l'impédance équivalente de ce couplage.

La matrice impédance de branche du réseau électrique est donnée par rapport à la numérotation des courants de branche :

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/j\omega C_{ant1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/j\omega C_{CE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/j\omega C_{ant2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \quad (III.97)$$

La connectivité est simple à obtenir en exprimant les courants de maille en fonction des courants de branche.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (III.98)$$

Dans l'espace des mailles nous obtenons alors le tenseur Z :

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + \frac{1}{j\omega C_{ant1}} & -\frac{1}{j\omega C_{ant1}} & 0 \\ -\frac{1}{j\omega C_{ant1}} & \frac{1}{j\omega C_{ant1}} + \frac{1}{j\omega C_{CE}} + \frac{1}{j\omega C_{ant2}} & -\frac{1}{j\omega C_{ant2}} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega C_{ant2}} & R_2 + \frac{1}{j\omega C_{ant2}} \end{pmatrix} \quad (III.99)$$

Le tenseur des *fém* sources E_i peut directement être établi dans l'espace des mailles :

$$(E) = (e_0 \quad 0 \quad 0) \quad (III.100)$$

Les courants de mailles inconnus s'obtiennent alors simplement par l'équation (III.101).

$$(J) = (Z)^{-1} \cdot (E) \quad (III.101)$$

Le courant J^2 , circulant sur la deuxième maille, caractérise l'échange d'énergie entre les deux monopoles.

III.7.2 Interaction magnétique

Les antennes sensibles au champ magnétique utilisent les propriétés de l'induction sur les boucles.

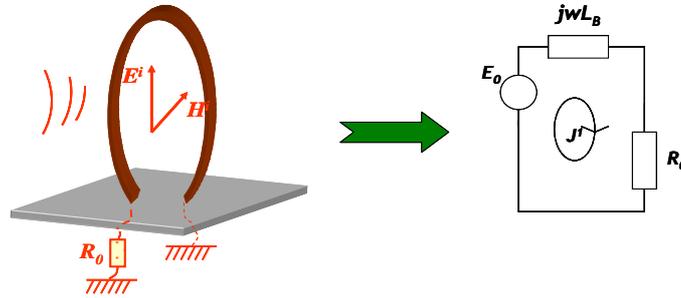


Fig.III.44 : Une antenne boucle et son schéma électrique équivalent

Une boucle de surface S , est soumise à une onde électromagnétique polarisée conformément aux indications portées sur la Fig.III.44. L'onde parvient sous incidence rasante, elle possède une composante magnétique H^i perpendiculaire au plan contenant la spire. La charge R_0 correspond à l'impédance d'entrée de l'antenne réceptrice. Lorsque le diamètre D de la spire est très supérieur à la longueur d'onde, nous adoptons le schéma électrique équivalent présenté sur la même Fig.III.44.

La source E_0 caractérise la *fém* induite par le flux engendré par la composante magnétique. L_B est l'inductance interne de l'antenne. Lorsque la distribution du champ magnétique est uniforme sur la surface S , la *fém* induite s'exprime :

$$D \gg \lambda \rightarrow E_0 \approx j\omega\mu_0.H_i.S \quad (III.102)$$

Nous cherchons maintenant à modéliser les couplages en champ magnétique entre deux antennes boucles.

Comme pour le couplage électrique, nous dissocions les couplages faibles des couplages forts présentés dans la Fig.III.45 :

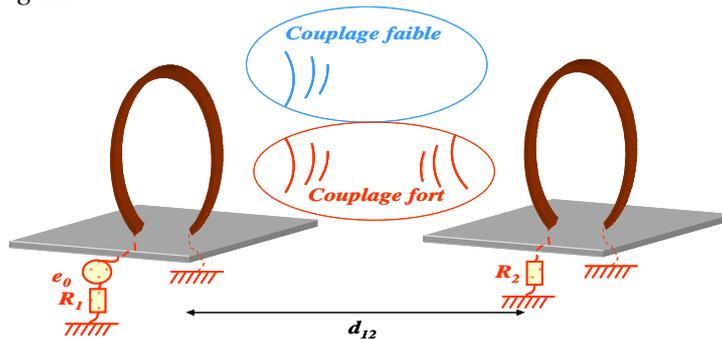


Fig.III.45 : Couplage faible et fort entre deux antennes boucles.

Dans le premier cas, nous retrouverons une *fém* traduisant le couplage magnétique direct de l'antenne 1 vers l'antenne 2. Dans le second cas, une impédance de couplage mutuelle sera introduite dans le super-tenseur des impédances.

III.7.2.1 Couplage faible

De la même manière que le couplage électrique faible, le champ magnétique génère une *fém* induite E_0 représentée sur le schéma équivalent Fig.III.46 :

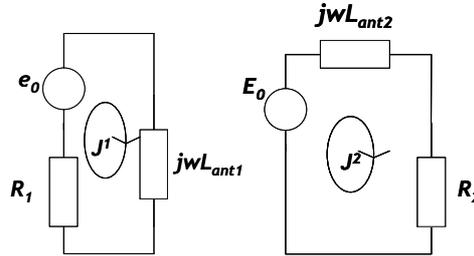


Fig.III.46 : Schéma équivalent d'un couplage magnétique faible

Les tenseurs impédances et *fém* sources prennent alors respectivement dans l'espace des mailles la forme de l'expression (III.103) ou l'expression de la forme (III.104).

$$(Z) = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_{ant1} & 0 \\ 0 & R_2 + j\omega L_{ant2} \end{pmatrix} \quad (E) = (e_0 \quad E_0) \quad (III.103)$$

$$(Z) = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_{ant1} & 0 \\ j\omega C_{MM} & R_2 + j\omega L_{ant2} \end{pmatrix} \quad (E) = (e_0 \quad 0) \quad (III.104)$$

Les courants s'obtiennent alors simplement

$$(J) = (Z)^{-1} \cdot (E) \quad (III.105)$$

III.7.2.2 Couplage fort

La circulation des courants dans chacune des deux mailles va générer un champ magnétique que l'on peut caractériser par des formules analytiques, des mesures ou d'autres outils de prédiction. La Fig.III.47 propose un schéma équivalent pour ce petit système dans lequel on trouve l'inductance mutuelle de couplage $M_{C,M}$ traduisant l'effet du couplage magnétique fort.

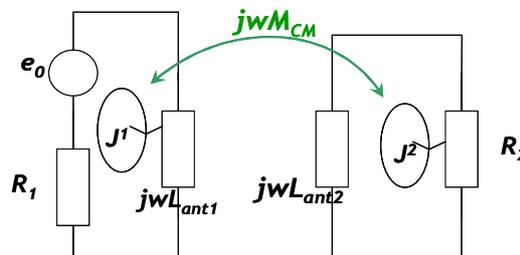


Fig.III.47 : Interaction magnétique entre deux antennes boucles

La matrice impédance est facile à caractériser directement dans l'espace des mailles :

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega \cdot L_{ant1} & j\omega \cdot M_{CM} \\ j\omega \cdot M_{CM} & R_2 + j\omega \cdot L_{ant2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (E) = (e_0 \quad 0) \quad (III.106)$$

La représentation par l'analyse tensorielle du système physique permet une modélisation souple grâce à la super-matrice impédance.

Avant d'aborder le chapitre IV, dans lequel nous présenterons deux systèmes caractéristiques de l'étude des grands systèmes, nous proposons brièvement dans ce dernier paragraphe une démarche possible pour l'étude de l'agression d'une ligne par une antenne par la MKCE.

III.8 Agression d'une ligne par un champ électromagnétique

Imaginons maintenant une ligne passive, agressée par un champ électromagnétique lointain, généré par exemple par une antenne.

Nous retiendrons deux possibilités pour la simulation de ce problème. Dans un premier temps, nous pourrions imaginer l'introduction de sources localisées directement dans le réseau représentatif des petits éléments de la ligne. Pour cela, il suffit de reprendre les équations présentées au paragraphe III.1 en considérant chacune des *fém* des sous-réseaux que l'on retrouvera dans le tenseur des *fém* du système.

La deuxième idée consiste à représenter indépendamment les deux sous-systèmes. L'antenne sera caractérisée par la sous-fonction du paragraphe III.7 et la ligne de transmission par la sous-fonction du paragraphe I. Le couplage entre ces deux sous-réseaux sera par hypothèse de type interaction en champ lointain. Nous utiliserons alors l'espace des réseaux pour représenter ce couplage.

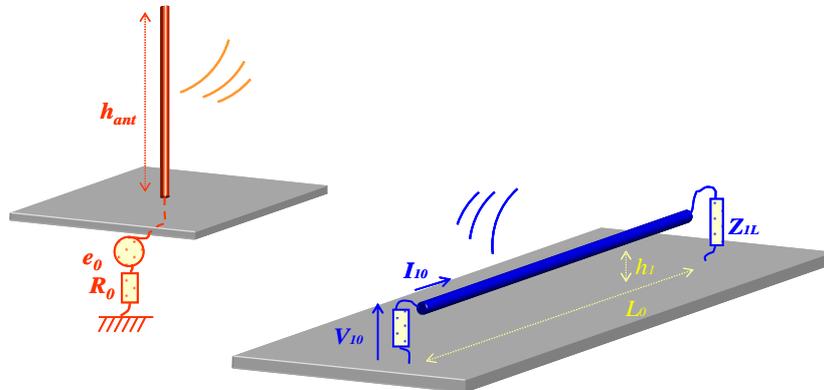


Fig.III.48 : Interaction en champ lointain

Les couplages entre les deux sous-réseaux interviennent dans une matrice notée (α) de couplage en champ lointain de dimension 2×2 .

On retrouve cette matrice de couplage dans le paragraphe II.4.2.3 liée à la matrice des couplages mutuels dans l'espace des mailles :

$$M_{ip} = S_i^* \eta_q^b \alpha_{ab} \eta_\omega^a S_p^\omega \quad (III.107)$$

Nous rappelons que le passage de la base des moments vers la base des mailles s'effectue par l'intermédiaire de la matrice de connexion des surfaces des mailles (S). Le passage entre l'espace des moments et l'espace des réseaux est pris en charge par la matrice

de connexion (η). On retrouve ces matrices de transformation de bases et d'espaces dans l'expression (III.107) qui donne l'impédance mutuelle M_{η} dans l'espace des mailles en fonction du tenseur des couplages α_{ab} dans l'espace des réseaux.

Le système se résume donc aux deux tenseurs des impédances et $fém$ dans l'espace des mailles de l'expression (III.108) :

$$Z = \begin{pmatrix} (Z_{ant}) & (M_{12}) \\ (M_{21}) & (Z_{ligne}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (E) = ((E_{ant}) \quad (E_{ligne})) \quad (III.108)$$

L'analyse de ces systèmes de plus en plus compliqués permet de conclure sur trois points importants illustrant l'intérêt de l'utilisation de la MKCE au profit de l'étude des grands systèmes :

- réduire l'étude d'un grand système à l'étude de phénomènes basiques par le concept de séparation topologique et d'interconnexion pour améliorer la compréhension des interactions survenant sur un grand système,
- réduire les temps de calcul et améliorer l'observation des interactions grâce au concept des tenseurs utilisés comme outil mathématique global,
- modéliser des phénomènes multiéchelles, multiparamètres ou multiphysiques par une analyse en schéma électrique équivalent.

C'est sur ce dernier point que le dernier chapitre IV portera en proposant l'étude de deux systèmes caractéristiques des trois aspects multiéchelles, multiparamètres et multiphysiques.

*Chapitre IV : Application de la MKCE à
des systèmes complexes*

Dans ce chapitre, nous proposons de mettre en application la *MKCE* à des situations concrètes illustrées par des couplages dans une cavité électromagnétique, et une simulation faisant intervenir des paramètres thermiques.

En effet, dans de nombreux problèmes de *CEM*, on se trouve confronté à des couplages réalisés entre une source et des éléments sensibles contenus dans une cavité métallique. Tel est le cas par exemple d'un aéronef soumis à l'agression d'un faisceau d'ondes dont la pénétration peut engendrer des tensions induites sur des câbles ou équipements installés dans l'appareil. Un scénario analogue se retrouve dans les automobiles où la caisse métallique s'apparente également à une cavité.

Le premier paragraphe de ce chapitre quatre sera donc consacré à la mise en place d'un calcul de couplages entre deux antennes communiquant via le couplage pratiqué dans une cavité résonante. Ce modèle relativement simplifié, se prête tout à fait bien à la réalisation de mesures que nous confronterons avec les modèles théoriques de la *MKCE*.

Le second paragraphe est tourné vers une application de cette théorie où interviendront des paramètres physiques hétérogènes. Nous prendrons en compte les effets combinés de la propagation des ondes électromagnétiques couplées à la diffusion de la chaleur dans un matériau. Dans un souci de simplification, l'analyse portera sur une structure unidimensionnelle composée d'un câble coaxial agencé d'un isolant dissipatif et responsable des phénomènes de propagation et de diffusion évoqués précédemment.

IV.1 Simulation de deux antennes couplées via une cavité métallique

IV.1.1 Description géométrique du système couplé

Le système décrit dans la *Fig.IV.1*, comporte une cavité métallique de forme parallélépipédique dont la hauteur c est très inférieure aux autres dimensions a et b . Cette disproportion dimensionnelle a été choisie de manière à produire des modes de résonance qui s'apparentent aux phénomènes rencontrés dans une cavité bidimensionnelle, c'est-à-dire un guide d'onde de section rectangulaire mais de dimension longitudinale infinie. Un petit monopole électrique appelé antenne 1 permet d'exciter la cavité via une source constituée par la voie d'émission d'un analyseur de réseau. Une seconde antenne de dimension bien plus grande que la précédente notée antenne 2 est disposée de telle manière qu'une petite fraction de ce monopole pénètre dans la cavité et que la partie la plus importante émerge de celle-ci. Un troisième monopole noté antenne 3 est distant de d_{12} de l'antenne 2. Ce monopole situé au-dessus d'un plan de masse métallique est connecté à la voie de réception de l'analyseur de réseau.

Ce dispositif illustre typiquement un mécanisme de couplage complexe puisque l'énergie électrique produite par l'antenne 1, engendre un couplage direct sur l'antenne 2 et un couplage indirect via le champ emmagasiné dans la cavité résonante. Le courant induit sur la partie extérieure de l'antenne 2 produit un rayonnement dont le couplage avec l'antenne 3 engendre une puissance induite sur le récepteur. Précisons que l'étude sur une bande suffisante de fréquences permet à ces différents constituants géométriques d'être de dimensions très inférieurs, comparables ou très supérieurs à la longueur d'onde.

Comme le montre la Fig.IV.1, les deux antennes 1 et 2 sont disposées perpendiculairement au plan Oxy suivant les coordonnées (x,y) dans la cavité.

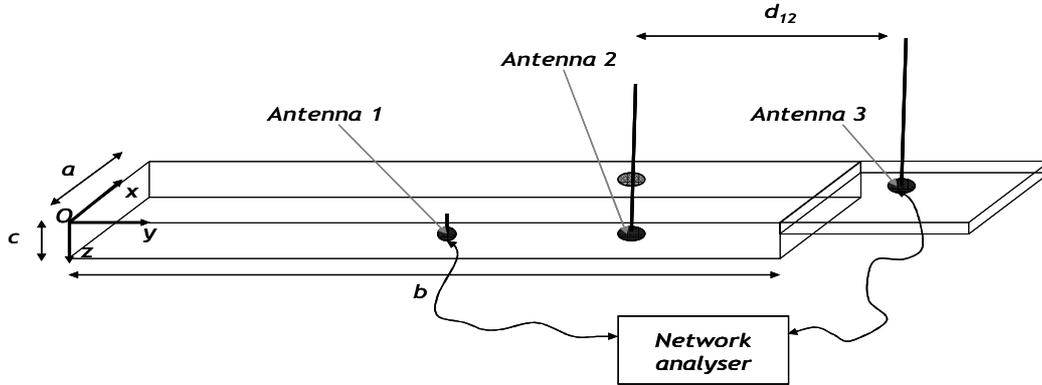


Fig.IV.1 : Présentation du système

Les dimensions de la cavité sont les suivantes : $a = 42 \text{ cm}$, $b = 28 \text{ cm}$ et $c = 3.8 \text{ cm}$ $\ll \lambda$. Les positions des monopoles sont respectivement telles que en cm : $(x_0, y_0) = (21; 14)$, $(x_1, y_1) = (21; 21)$ et $(x_2, y_2) = (21; 30)$ et $d_{12} = 9 \text{ cm}$. La gamme de fréquence considérée s'étendra de 100 MHz à 2 GHz , donnant ainsi une longueur d'onde minimale de 15 cm .

L'antenne 1 de 1 cm de longueur vérifie les hypothèses de petite dimension devant la longueur d'onde ($l \ll \lambda$). Par contre, les dimensions des conducteurs 2 et 3 sont choisies à 19 cm pour faire apparaître les phénomènes de propagation.

La cavité de forme parallélépipédique de dimensions a , b , c possède une profondeur très inférieure à la longueur d'onde. Ce choix particulier des dimensions facilitera l'analyse des couplages dans la cavité, en considérant invariant le champ électrique suivant la dimension c .

Le coefficient de transmission S_{21} simulé entre les monopoles 1 et 3 sera confronté aux mesures pratiquées à l'analyseur de réseau. Les fréquences de résonance considérées de la cavité sont données par la relation (IV.1), suivant les trois dimensions de la cavité a , b et c :

$$f_{mnp} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \quad (\text{IV.1})$$

auxquelles seront mélangées les fréquences de résonance générées par les monopoles de grandes tailles devant la longueur d'onde.

Les amplitudes mesurées seront liées aux coefficients de couplage entre les antennes et la cavité, et aux valeurs des impédances propres et $f_{ém}$ des trois monopoles.

La fréquence minimale d'excitation d'un mode de résonance dépendant de la dimension c , apparaît lorsque $m=n=0$ et $p=1$, soit :

$$f_{0,0,1} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{c}\right)^2} = 3.95 \text{ GHz} \quad (\text{IV.2})$$

Nous choisissons de simuler une fréquence maximale de 2 GHz , afin d'imposer le coefficient p à zéro.

IV.1.2 Agencement topologique du système

On procédera préalablement à l'analyse topologique des couplages *EM* contenus dans des zones volumiques indépendantes. On établit les frontières successives délimitées par des surfaces illustrées dans les graphes topologiques de la Fig.IV.2.

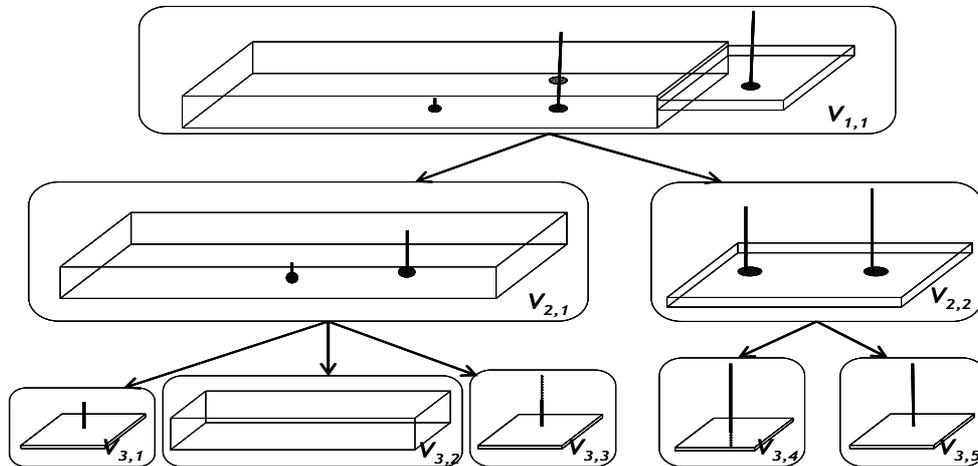


Fig.IV.2 : Graphe topologique du système complexe.

Compte tenu du descriptif énoncé en IV-1-1, le dispositif se subdivise en cinq sous-systèmes illustrés sur la base de la forme arborescente du graphe topologique : le monopole émetteur 1 décrit dans la Fig.IV.2 par le volume $V_{3,1}$, et la cavité électromagnétique vide par le volume $V_{3,2}$. Le monopole 2 est divisé en deux parties : un premier conducteur noté 21 contenu dans la cavité apparaît dans le volume $V_{3,3}$, puis en espace libre, un deuxième conducteur noté 22 figure dans le volume $V_{3,4}$. Enfin, le troisième monopole constitue le volume $V_{3,5}$.

Ce graphe doit donc être converti en un assemblage de circuits électriques équivalents compatibles avec les conventions de présentation de la MKCE.

Il faut dans un premier temps analyser le caractère géométrique des sous-systèmes pour déterminer si les dimensions des antennes ou des fentes dans la cavité, sont grandes devant la longueur d'onde d'étude. Dans ce cas, les hypothèses quasi-statiques ne sont plus vérifiées et nous devons prendre en compte les phénomènes de propagation dans le modèle.

Le point suivant porte sur les dimensions homogènes de l'ensemble des paramètres électriques lors des interactions entre sous-réseaux. Les interactions entre le sous-réseau de la cavité ($V_{3,2}$) et les volumes représentant les monopoles 1 et 21 ($V_{3,1}$ et $V_{3,3}$) illustreront l'aspect multiparamètres lors de la connexion des grandeurs de type circuits électriques avec des variables de type champs électromagnétiques.

Nous proposons le schéma équivalent des cinq sous-systèmes couplés dans la Fig.IV.3. Imaginons dans un premier temps l'absence des divers couplages représentés par les matrices des impédances mutuelles $Z_{C,E}$ de couplage entre les monopoles 22 et 3. Nous analysons alors les cinq sous-volumes classiques de manière indépendante. L'analyse tensorielle des réseaux électriques permettra la mise en équation du système.

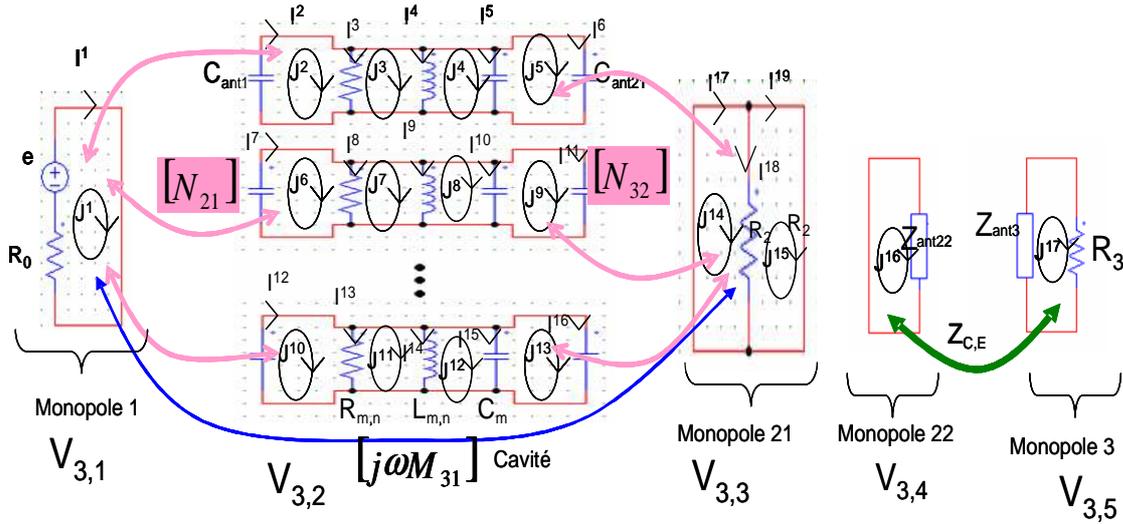


Fig.IV.3 : Schéma électrique équivalent du système global non connecté.

Sur ce schéma, on distingue cinq sous-volumes $V_{3,i}$. Le premier comporte une *fém* e et une résistance R_0 attachées à la source connectée au monopole émetteur. Le troisième volume $V_{3,3}$ isole la résistance R_2 appliquée à l'extrémité du second monopole à l'extérieur de la cavité (noté antenne 21).

Le second volume $V_{3,2}$ comporte N résonateurs simulant N modes de résonance de la cavité vide [IV.1], [IV.2] et [IV.3]. Pour tenir compte de la présence des monopoles dans la cavité, on porte en parallèle sur chaque résonateur les capacités C_{ant1} et C_{ant21} des antennes 1 et 21 dont les dimensions géométriques sont nécessairement très inférieures à la longueur d'onde.

Le quatrième volume $V_{3,4}$ correspond à la partie supérieure du monopole 2, situé à l'extérieur de la cavité (noté antenne 22). Le cinquième volume $V_{3,5}$ représente l'antenne réceptrice 3.

Pour ces deux derniers monopoles, les hypothèses quasi-statiques ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire que les dimensions des conducteurs peuvent être grandes devant la longueur d'onde. L'antenne 22 peut être modélisée par une mesure de l'impédance propre de ce monopole rapporté par l'impédance Z_{ant22} . De la même manière, l'antenne 3 peut être modélisée par l'impédance propre de ce conducteur par l'impédance Z_{ant3} dans la Fig.IV.3 et par la résistance R_3 de charge de l'antenne 3.

D'une manière générale, nous donnons les équations classiques d'un réseau électrique prenant pour référence les courants I de branche dans l'équation (IV.3).

$$(V_b) = (E_b) - (Z_b)(I_b) \quad (IV.3)$$

La matrice des tensions (V_b) représente les différences de potentiel entre deux nœuds ou aux bornes des branches du circuit électrique. La matrice des *fém* (E_b) contient les éléments sources présents sur chacune des branches. La matrice impédance (Z_b) caractérise les impédances de chaque branche et les interactions entre celles-ci dans l'espace des courants de branche défini par la matrice (I_b) .

Nous donnons l'équation d'un même réseau électrique mais cette fois, prenant pour référence les courants de maille introduits par la matrice (J_m) . Dans une maille, la somme des *ddp* est nulle, ce qui nous ramène à l'équation simplifiée suivante avec la matrice impédance dans l'espace des mailles (Z_m) et la matrice *fém* dans l'espace des mailles (E_m) :

$$(E_m) = (Z_m)(J_m) \quad (IV.4)$$

Dans le déroulement du raisonnement emprunté à la *MKCE*, les projections des courants sur l'espace des branches ou l'espace des mailles matérialisées par les équations (IV.3) et (IV.4) permettront de formuler globalement la topologie décrite Fig.IV.2 pour aboutir à la résolution d'un système d'équations dont les courants en différents points des circuits de la Fig.IV.3 forment la solution.

Tout d'abord, les matrices *fém* et impédance seront caractérisées dans l'espace des branches puis, les inconnues que sont les courants de maille J^m , seront obtenues par la résolution de l'équation (IV.4).

Pour cela, nous définissons les tenseurs des différents sous-systèmes de la Fig.IV.3. Les cinq sous-réseaux non connectés, sont représentés à travers cinq tenseurs impédances deux fois covariants, et cinq tenseurs *fém* covariants. Ils sont projetés dans l'espace des branches référencés aux vecteurs courants contravariants I^i , puis dans l'espace des mailles attachés aux vecteurs courants contravariants J^i . Ces courants seront préalablement définis d'une manière arbitraire, respectant généralement une logique liée à l'étude topologique du système. Les relations de connectivité mise en place dans la théorie développée par G. Kron permettent de définir les transformations de l'espace des branches vers l'espace des mailles.

Cette transformation s'effectue par le biais de la matrice de connexion L .

Finalement, les cinq matrices impédances projetées dans l'espace des mailles constitueront une super matrice impédance creuse décrivant le système global dépourvu de toutes interactions.

Le vecteur des *fém* sera constitué de quatre composantes nulles, la composante restante s'identifiant à la *fém* de la source.

$$E = \begin{bmatrix} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \\ (E_4) \\ (E_5) \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} (Z_1) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (Z_2) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (Z_3) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (Z_4) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (0) & (Z_5) \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} (J_1) \\ (J_2) \\ (J_3) \\ (J_4) \\ (J_5) \end{bmatrix} \quad (IV.5)$$

Les matrices (Z_1) , (Z_3) , (Z_4) et (Z_5) caractérisant l'impédance des monopoles dans l'espace des mailles sont simples à déterminer :

$$\begin{aligned} (Z_1) &= (R_0) & (Z_3) &= \begin{pmatrix} R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 \end{pmatrix} \\ (Z_4) &= (Z_{ant22}) & (Z_5) &= (R_3 + Z_{ant3}) \end{aligned} \quad (IV.6)$$

La matrice (Z_2) sera composée de coefficients relatant la structure de chaque résonateur.

La cavité *EM* sera représentée par une association de circuits électriques résonants basée sur les travaux de M. Cauterman [IV.1] et [IV.2], décrit succinctement dans le paragraphe suivant.

De par les dimensions de la cavité, l'onde *E.M.* injectée par l'antenne source 1 génère des ondes de mode Transverse Magnétique excitant uniquement les composantes non nulles de champ H_x , H_y et E_z .

Pour résoudre les problèmes liés aux conditions aux limites de la cavité, nous résolvons les équations de Maxwell en utilisant la fonction de *Green* présentée dans (IV.7) [IV.4] :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot})\vec{E} - k^2\vec{E} &= -j\omega\mu\vec{J} \quad (\text{équation de Helmholtz}) \\ \text{rot}(\text{rot})\vec{H} - k^2\vec{H} &= \text{rot}(\vec{J}) \end{aligned}$$

Fonction de Green

$$\text{rot}(\text{rot})\vec{G}_e - k^2\vec{G}_e = \vec{I}\delta(r - r')$$

$$\text{rot}(\text{rot})\vec{G}_m - k^2\vec{G}_m = \text{rot}\vec{I}\delta(r - r')$$

En respectant les deux conditions aux limites suivantes:

$$\vec{n} \wedge \vec{G}_e = 0 \quad \text{sur les parois}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{G}_m = 0 \\ \vec{n} \wedge \text{rot}(\vec{G}_m) = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur les parois}$$

(IV.7)

nous obtenons l'expression du champ électrique \vec{E} en un point (x, y, z) de la cavité en fonction du courant I_0 injecté sur le monopole source de hauteur h_{ant} orienté dans la direction de l'axe Oz . m , n et p représentent le mode de résonance excité dans la cavité. $k = \omega/c$ est le nombre d'onde [IV.5] et [IV.6].

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \frac{\epsilon_{0n} \cdot \epsilon_{0m} \cdot \epsilon_{0p} j\omega\mu_0 I_0 h_{ant}}{k^2 abc} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2 - (p\pi/c)^2} \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \sin(m\pi x_0/a) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y_0/b) \sin(n\pi y/b) \cos(p\pi z_0/c) \cos(p\pi z/c) \vec{z} \\ - \frac{n\pi}{b} \left(\frac{p\pi}{c} \right) \sin(m\pi x_0/a) \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y_0/b) \sin(n\pi y/b) \sin(p\pi z_0/c) \cos(p\pi z/c) \vec{y} \\ - \frac{m\pi}{a} \left(\frac{p\pi}{c} \right) \cos(m\pi x_0/a) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y_0/b) \sin(n\pi y/b) \sin(p\pi z_0/c) \cos(p\pi z/c) \vec{x} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Les coefficients $\epsilon_{0n} \cdot \epsilon_{0m} \cdot \epsilon_{0p}$ prendront respectivement pour valeur 1 lorsque n ou m ou $p=0$, et 2 lorsque n , m ou p est non nul.

Rappelons que la dimension c est très inférieure à la longueur d'onde correspondant à la fréquence maximale d'étude de 2 GHz. Cela permet la réduction de l'expression précédente en fixant $p=0$:

$$E_z = \frac{4j\omega\mu_0 I_0 h_{ant}}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x_0/a) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y_0/b) \sin(n\pi y/b)}{k^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2} \quad (IV.9)$$

Le champ E_z de l'équation (IV.9) tient compte des 3 dimensions a , b , c de la cavité tout en supposant que le champ électrique est invariant suivant l'axe Oz , d'où la réduction à une double somme suivant x et y .

Parallèlement, l'étude des circuits électriques équivalents de N résonateurs $L_{m,n}$, C_m donne l'équation de passage entre le courant source I_0 et la tension obtenue sur l'antenne

réceptrice. Cette tension sera identifiée au produit du champ E_Z sur la dimension effective de l'antenne réceptrice h_{ant2} . Pour établir l'équation (IV.10), nous respectons l'hypothèse concernant la conductivité parfaite des parois. La cavité est dans ce cas sans pertes.

$$\frac{E_z h_{ant2}}{I_0} = \sum_{m=1}^{m_{\max}} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{j\omega N_{m,n} N'_{m,n} L_{m,n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{m,n}^2}} \quad (IV.10)$$

avec $\omega_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{L_{m,n} C_m}}$

Les singularités apparaissant aux fréquences de résonance seront évitées grâce à l'introduction des pertes matérialisées par le coefficient de qualité de la cavité $Q_{m,n}$.

$$\frac{E_z h_{ant2}}{I_0} = \sum_{m=1}^{m_{\max}} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{j\omega N_{m,n} N'_{m,n} L_{m,n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{m,n}^2} \left(1 - \frac{j}{Q_{m,n}}\right)} \quad (IV.11)$$

avec $Q_{m,n} = \frac{\eta abc k_{mn0} (k_x^2 + k_y^2)}{2R_w [b(a+c)k_x^2 + a(b+c)k_y^2]}$

Les inductances et capacités $L_{m,n}$; C_m de chaque résonateur sont calculées par identification des équations (IV.9) et (IV.10). Nous déduisons les expressions des coefficients de couplage $N_{m,n}$ entre l'antenne 1 émettrice et les parois de la cavité à l'aide des coordonnées de l'antenne 1 (x_0, y_0). Les coefficients de couplage parois vers l'antenne 2 réceptrice $N'_{m,n}$ sont déterminés à l'aide des coordonnées (x_1, y_1) de l'antenne 2.

La résistance $R_{m,n}$ simulant les pertes dans la cavité sera liée au coefficient de qualité et à la capacité de la cavité par la relation usuelle de la théorie des circuits.

$$L_{mn} = \frac{4\mu_0 h_{ant1} h_{ant2}}{abc k_{mn}^2} (H) \quad C_m = \epsilon_0 \frac{abc}{4h_{ant1} h_{ant2}} (F) \quad R_{mn} = \frac{Q_{mn}}{C \omega_{mn}} (\Omega) \quad (IV.12)$$

$$N_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \quad N'_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_1}{b}\right)$$

avec :

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad k_{m,n,0} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad R_w = \frac{1}{\sigma\delta} \quad (IV.13)$$

Nous donnons à titre indicatif les valeurs de L_{11} , C_1 et R_{11} pour le résonateur décrivant le premier mode de résonance de la cavité soit pour la fréquence de $f_{1,1,0} = 646\text{MHz}$:

$$L_{11} = 0.93\text{nH} \quad C_m = 65.5\text{pF} \quad R_{11} = 47\text{k}\Omega \quad (IV.14)$$

$$N_{11} = 1 \quad N'_{11} = 0.705$$

La transposition de ces réseaux électriques par la MKCE permettra une grande souplesse d'analyse, tel est le cas de l'exemple de la Fig.IV.4 où le circuit équivalent d'un mode de résonance de la cavité est défini d'abord dans l'espace des branches, puis, une fois la matrice de connexion définie, les relations tensorielles permettent de transformer la matrice impédance dans le nouvel espace des mailles.

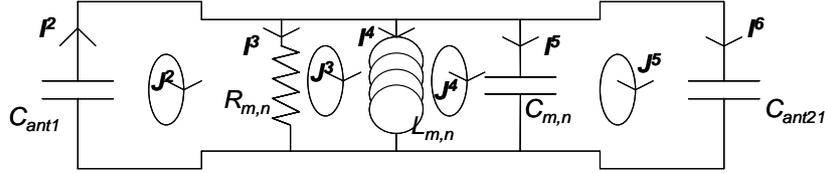


Fig.IV.4 : Courants de branche et courants de maille pour un mode de résonance de la cavité

L'équation (IV.15) exprime la matrice impédance dans l'espace des branches de la Fig.IV.4 :

$$Z_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C_{ant1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{mn} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega L_{mn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega C_{ant21}} \end{bmatrix} \quad (IV.15)$$

Les paramètres R_{mn} , L_{mn} , C_m de chaque résonateur sont extraits des formules analytiques établies par M. Caeterman [IV.2] de l'équation (IV.12).

Les capacités des monopoles vérifiant les hypothèses quasi-statiques, sont extraites des formules classiques liant les dimensions du monopole à sa capacité propre notée C_{ant} dans l'équation (IV.16).

La capacité de ces monopoles est décomposée en deux parties : la capacité parasite introduite par un connecteur de type « N » positionné à l'extérieur de la cavité, en parallèle avec la capacité du monopole de hauteur $h_1=1cm$ ou $h_2=2cm$ qui elle, est présente dans la cavité. Les capacités des tiges C_{ant1} et C_{ant21} seront introduites dans la matrice de l'expression (IV.15). Elles pourront, dans certains cas, modifier les fréquences de résonance des modes propres de la cavité.

$$C_{ant} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{4h}{d}\right)} h \quad C_{ant1} = 0.18 pF \quad C_{ant21} = 0.28 pF \quad (IV.16)$$

Avec $d = 1.5 mm$, le rayon du conducteur et h la hauteur du monopole.

La capacité parasite du connecteur N sera introduite dans l'impédance mutuelle de couplage entre les monopoles 1 et 21 et la cavité par l'impédance suivante :

$$\frac{1}{j\omega C_{CN}} \quad \text{avec la capacité propre du connecteur mesurée : } C_{CN} = 2.4 pF \quad (IV.17)$$

Avec la MKCE, nous définissons la matrice de connexion C permettant le passage de la matrice impédance Z_n de l'espace des branches vers la matrice Z'_n dans l'espace des mailles du réseau de la Fig.IV.4. En exprimant les courants de branche en fonction des courants de maille, nous retrouvons les coefficients formant la matrice de connexion illustrée dans l'équation (IV.18) :

$$\begin{aligned}
 I^1 &= J^1 + 0J^2 + 0J^3 + 0J^4 \\
 I^2 &= J^1 - J^2 + 0J^3 + 0J^4 \\
 I^3 &= 0J^1 + J^2 - J^3 + 0J^4 \\
 I^4 &= 0J^1 + 0J^2 + J^3 - J^4 \\
 I^5 &= 0J^1 + 0J^2 + 0J^3 + 1J^4
 \end{aligned}
 \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (IV.18)$$

Les tenseurs Z'_n dans l'espace des mailles s'expriment sous la convention de notation d'Einstein :

$$Z'_{n_{b\beta}} = L^a_b Z_{n_{ac}} L^c_\beta \quad a, b, c, \beta = 1, 2, \dots, r \quad (IV.19)$$

Le tenseur des impédances du circuit d'un mode de résonance de la Fig.IV.4, peut être représenté sous l'écriture matricielle de l'expression (IV.20) :

$$(Z') = \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega C_{ant1}} + R_{mn} & -R_{mn} & 0 & 0 \\ -R_{mn} & R + j\omega L_{mn} & -j\omega L_{mn} & 0 \\ 0 & -j\omega L_{mn} & j\omega L_{mn} + \frac{1}{j\omega C_m} & -\frac{1}{j\omega C_m} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{j\omega C_m} & \frac{1}{j\omega C_m} + \frac{1}{j\omega C_{ant21}} \end{pmatrix} \quad (IV.20)$$

La matrice (Z_2) représentant les N modes de résonance de la cavité dans l'espace des mailles est constituée de N matrices (Z') de l'équation (IV.20) disposées sur la diagonale.

$$Z_2 = \begin{bmatrix} (Z'_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Z'_2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (Z'_n) \end{bmatrix} \quad (IV.21)$$

L'un des intérêts du formalisme des mailles s'exprime particulièrement bien dans le mécanisme de construction de ces matrices.

Nous verrons dans la partie suivante comment la MKCE prend en charge les divers types d'interactions entre ces sous-volumes.

Nous présenterons dans le paragraphe IV.1.3, le couplage par conduction entre les deux monopoles 21 et 22 qui consistera à identifier les courants de mailles J^5 et J^6 de la Fig.IV.3.

Dans un second temps, les interactions EM seront décrites dans le formalisme tensoriel, dans le paragraphe IV.1.4.

IV.1.3 Mise en place de la connexion des sous-réseaux

L'analyse topologique indique que le transfert d'énergie entre les volumes $V_{2,1}$ et $V_{2,2}$ est caractérisé par un couplage par conduction au niveau des sous-volumes $V_{3,3}$ et $V_{3,4}$, c'est-à-dire par la connexion entre les deux monopoles 21 et 22 qui sont, en réalité, une même antenne traversant deux sous-volumes topologiques.

L'intérêt majeur de l'analyse tensorielle est de formuler facilement l'interconnexion matérialisée par la matrice (F) d'interconnexion entre deux sous-réseaux.

Dans l'exemple traité, cette matrice est définie à partir des courants de maille du réseau non connecté de la Fig.IV.5(a) en fonction des courants de maille du système connecté de la Fig.IV.5(b).

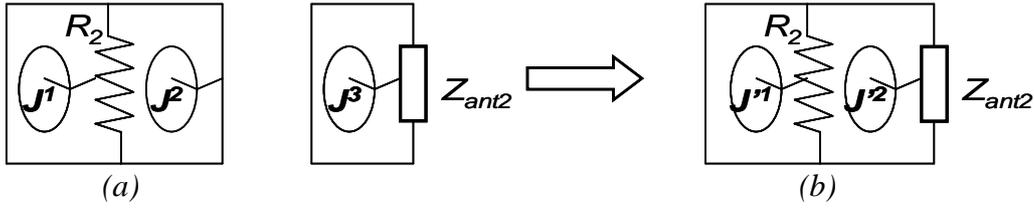


Fig.IV.5 : Schéma électrique équivalent des volumes $V_{3,3}$ et $V_{3,4}$ non connectés (a), puis connectés (b)

Nous reconnaissons dans les Fig.IV.5(a) et Fig.IV.5(b) le couplage par conduction entre les monopoles 21 et 22, soit les volumes $V_{3,3}$ et $V_{3,4}$ de la Fig.IV.3. La capacité C_{ant21} de la partie inférieure de l'antenne intervient toujours dans les N résonateurs du volume $V_{3,2}$.

A titre d'exemple, on pose le système d'équation reliant les courants J^i de la Fig.IV.5(a) aux courants décrivant un nouvel espace J^i de la Fig.IV.5(b).

$$\begin{aligned} J^1 &= 1.J'^1 + 0.J'^2 \\ J^2 &= 0.J'^1 + 1.J'^2 \\ J^3 &= 0.J'^1 + 1.J'^2 \end{aligned} \quad (IV.22)$$

On obtient la matrice d'interconnexion (F) dans laquelle apparaissent les coefficients des équations (IV.22). Les trois connexions sont matérialisées dans l'équation (IV.23), par la présence de deux « 1 » consécutifs sur une même colonne :

$$(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (IV.23)$$

Il a été démontré que les matrices impédance et *fém* de la Fig.IV.5(b) du nouveau système connecté, peuvent être déterminées de manière systématique par les relations matricielles de l'équation (IV.24) :

$$(Z') = (F)'(Z)(F) \quad (E') = (F)'(E) \quad (IV.24)$$

$(F)'$ est la matrice transposée de (F) .

En appliquant ces formules, on obtient finalement les matrices impédance et *fém* du système connecté :

$$(Z') = \begin{pmatrix} R_2 & -R_2 \\ -R_2 & Z_{ant2} \end{pmatrix} \quad (E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (IV.25)$$

Cette matrice remplacera les matrices (Z_3) et (Z_4) dans la super matrice de l'équation (IV.26).

$$[E] = \begin{bmatrix} (E_1) \\ (E_2) \\ (E) \\ (E_5) \end{bmatrix} \quad [Z] = \begin{bmatrix} (Z_1) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (Z_2) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (Z) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (Z_5) \end{bmatrix} \quad (IV.26)$$

IV.1.4 Mise en place de l'interaction E.M. des volumes topologiques

Nous allons montrer grâce à cet exemple simple mais tout de même évolué, que la présentation de l'équation (IV.26) peut être facilement étendue au cas général où il sera tenu compte des diverses interactions électromagnétiques.

Nous commençons par la description des couplages directs entre les monopoles en absence de tout élément métallique autre que leur plan de référence de masse.

Le couplage entre les deux courants de maille des monopoles 1 et 21 de petites dimensions devant la longueur d'onde, peut être représenté par une impédance du type $j\omega M_{31}$. Cette mutuelle sera mesurée en espace libre et en dessous de la première fréquence de résonance de la cavité :

$$M_{31} = 5 \text{ pH pour } c=3.8 \text{ cm} \quad \text{et} \quad M_{31} = 9 \text{ pH pour } c=7.8 \text{ cm} \quad (\text{IV.27})$$

Les sous-matrices concernées par ces phénomènes de couplages directs viennent s'insérer sur les éléments extra-diagonaux de la super-matrice impédance. Il s'agit des termes $(j\omega M_{31})$ et $(j\omega M_{13})$.

Le couplage électrique entre les antennes 22 et 3, surdimensionnées devant la longueur d'onde, est modélisé directement dans l'espace des mailles en ajoutant une impédance de couplage mutuel $Z_{C,E}$ comme le montre la Fig.IV.3.

Dans notre exemple, l'impédance $Z_{C,E}$ est obtenue par une mesure d'impédance de transmission avec un analyseur de réseau. Des formules analytiques présentées dans l'ouvrage « Antenna theory analysis and design » de Constantine A.Balanis peuvent remplacer les mesures afin d'obtenir des paramètres analytiques pour les impédances propres et les impédances mutuelles de couplage des monopoles sous les hypothèses quasi-statiques non vérifiées.

Aux couplages E.M. directs, se superposent les couplages entre les antennes et la cavité.

Les couplages des monopoles 1 et 21 avec la cavité seront réalisés par les matrices (N_{21}) pour le couplage direct, et (N_{12}) pour le rétro-couplage pour l'émetteur, et les matrices (N_{32}) et (N_{23}) pour l'antenne 21 réceptrice.

Dans ce schéma, chaque résonateur sera individualisé. L'implantation de ces sous-matrices dans $[Z]$ s'effectue par correspondance directe avec la topologie des mailles de la Fig.IV.3. Ces matrices contiennent les coefficients sans dimensions $N_{m,n}$ et $N'_{m,n}$ tirés de l'expression (IV.12).

A ces matrices sans dimensions, nous introduisons l'impédance parasite du connecteur N situé à l'extérieur de la cavité, introduite dans le paragraphe précédent dans l'expression (IV.17). La capacité notée C_N ainsi ajoutée n'aura aucune influence sur les fréquences de résonance de la cavité définies par les résonateurs $R_{m,n}$, $L_{m,n}$, C_m . Par contre, elle permettra de modéliser l'augmentation des niveaux d'amplitude des perturbations, générées par les connecteurs, présents sur les deux antennes 1 et 2.

La super-matrice impédance des mailles prendra alors la forme de l'équation (IV.28).

$$\begin{aligned}
 [E] &= \begin{bmatrix} (E_1) \\ (E_2) \\ (E) \\ (E_5) \end{bmatrix} \\
 [Z] &= \begin{bmatrix} (Z_1) & \left(\frac{N_{12}}{j\omega C_{CN}}\right) & (j\omega M_{13}) & (0) \\ \left(\frac{N_{21}}{j\omega C_{CN}}\right) & (Z_2) & \left(\frac{N_{23}}{j\omega C_{CN}}\right) & (0) \\ (j\omega M_{31}) & \left(\frac{N_{32}}{j\omega C_{CN}}\right) & (Z') & (Z_{C,E}) \\ (0) & (0) & (Z_{C,E}) & (Z_5) \end{bmatrix} \quad (IV.28)
 \end{aligned}$$

Les matrices figurant dans l'équation (IV.26) apparaissent sur la diagonale. Les matrices de couplage antennes parois apparaissent sur les éléments $Z_{(2,1)}$ et $Z_{(1,2)}$ reliant les volumes $V_{3,1}$ et $V_{3,2}$; $Z_{(3,2)}$ et $Z_{(2,3)}$ relient les volumes $V_{3,2}$ et $V_{3,3}$. Les matrices de couplage direct entre les volumes $V_{3,1}$ et $V_{3,3}$ concernent les coefficients $Z_{(1,3)}$ et $Z_{(3,1)}$. Enfin, le couplage entre les deux monopoles 22 et 3 à l'extérieur de la cavité est rapporté par l'impédance mutuelle $Z_{C,E}$ confondus avec les coefficients $Z_{(4,3)}$ et $Z_{(3,4)}$.

Les sous-matrices régissant les couplages réalisés entre les monopoles et la cavité sont tirées de l'expression (IV.12). Les sous-matrices composant le couplage direct proviennent de mesures pratiquées au-dessous de la résonance fondamentale de la cavité.

Finalement, les courants de mailles du système seront calculés par le produit à droite de l'inverse de $[Z]$ et du vecteur source $[E]$ dans l'équation (IV.29).

$$[J] = [Z]^{-1} \cdot [E] \quad (IV.29)$$

Nous trouverons en annexe III la fonction « couplage entre monopoles via une cavité » sous le langage utilisé par *Matlab*.

IV.1.5 Confrontation de la simulation aux mesures

Les paramètres S_{21} directement mesurés à l'analyseur de réseau connectés sur les antennes 1 et 2 (Fig.IV.6) ou sur les antennes 1 et 3 (Fig.IV.8) sont comparés aux simulations. Dans un premier temps, nous avons choisi une valeur de la troisième dimension $c=3.8$ cm (courbe en noir pointillé pour la mesure et rouge en trait plein pour la simulation). Ensuite, nous augmentons la valeur de c à 7.8 cm (courbe en vert pointillé pour la mesure et en trait plein bleu pour la simulation) pour visualiser l'effet de la troisième dimension.

Les paramètres S_{21} sont directement déduits de la tension simulée. En effet, les monopoles étant tous chargés sur 50Ω , l'expression liant la tension au paramètre S_{21} se réduit à l'équation suivante :

$$S_{21} = \frac{2V_c}{E_0} \quad (IV.30)$$

Avec V_c la tension sur la charge de l'antenne 2 ou de l'antenne 3 et E_0 , la *fém* appliquée sur le monopole 1.

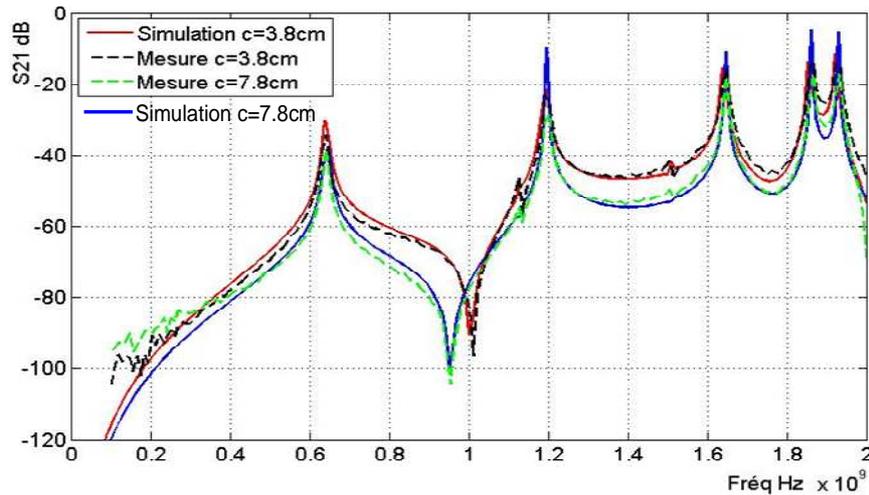


Fig.IV.6 : Comparaison mesure simulation du paramètre S_{21} entre les monopoles 1 et 21

Plage fréquentielle : 50 MHz-2GHz
 Temps de simulation : 2.5 s
 Nb de modes résonants : 25 modes
 Nb de points calculés : 201 points

L'antenne réceptrice collecte certains modes de résonance de la cavité excitée par l'antenne émettrice. Sur la Fig.IV.6, on reconnaît cinq modes. Le modèle nous indique les valeurs des fréquences de résonance et des coefficients de couplage des cinq premiers modes coïncidant avec les maximums des courbes de la Fig.IV.6 :

Mode (1,1) à 646 MHz	$N=1$ et $N'=0.705$
Mode (3,1) à 1.2 GHz	$N=-1$ et $N'=-0.705$
Mode (1,3) à 1.65 GHz	$N=-1$ et $N'=0.713$
Mode (5,1) à 1.869 GHz	$N=1$ et $N'=0.705$
Mode (3,3) à 1.94GHz	$N=1$ et $N'=-0.713$

D'autres résonances de la cavité localisées au dessous de 2 GHz, ne sont pas excitées de par la position des antennes 1 et 21. Cette propriété est à rattacher aux zéros des coefficients N et/ou N' .

L'accroissement de la troisième dimension a un impact partiel sur les résonateurs en modifiant sensiblement les inductances L_{mn} , capacité C_m et résistance R_{mn} . Les fréquences de résonance restent inchangées, par contre les niveaux d'amplitude diminuent. L'antirésonance observée à 1 GHz est légèrement transposée vers les basses fréquences à cause de l'augmentation de l'impédance mutuelle entre les monopoles 1 et 21 dans la cavité.

Sur la Fig.IV.7, des mesures et simulations ont été effectuées pour une valeur de $c=3.8$ cm mais sur une bande fréquentielle de 2 à 4 GHz.

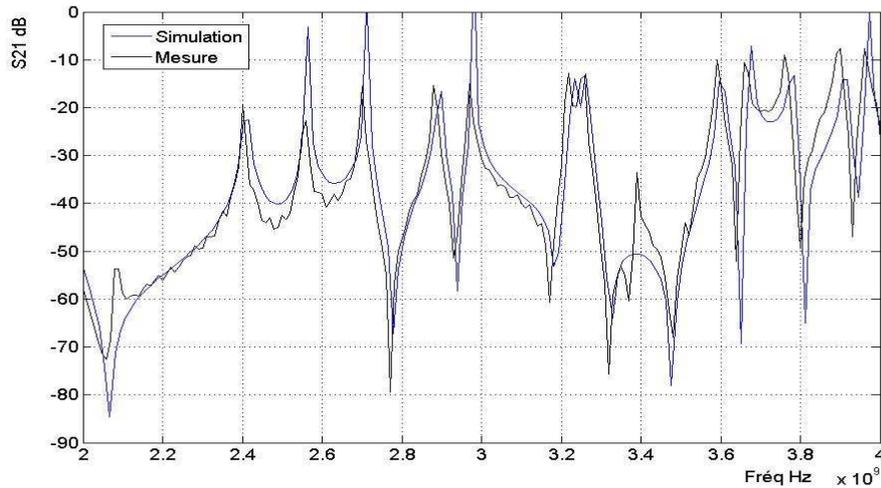


Fig.IV.7 : Résultat comparatif mesure/simulation du volume $V_{2,1}$ en HF

Plage fréquentielle	: 2 GHz-4GHz
Temps de simulation estimé par Matlab	: 138 s
Nb de modes résonants estimés	: 121 modes
Nb de points calculés	: 201 points

On retrouve comme précédemment une assez bonne concordance avec la simulation pratiquée par la MKCE. Toutefois, on observe à la fréquence de 3,4 GHz une importante discordance qu'on peut relier à l'accroissement de la dimension c choisie ici à 3,8 cm. En effet, on peut montrer grâce à l'expression (IV.9) établie au début, que la fréquence de 3,4 GHz correspond à la résonance fondamentale du volume parallélépipédique. L'approximation du modèle bidimensionnelle de la cavité adoptée dans notre résonnement est donc localement violée.

Nous ajoutons maintenant par l'intermédiaire des supers-matrices, l'influence de la partie supérieure de l'antenne 2 rayonnant vers le milieu extérieur dans lequel est installée la troisième antenne réceptrice.

La Fig.IV.8 compare donc la mesure et la simulation du système complet, comprenant la troisième antenne. Une $fém$ de IV est appliquée sur le sous-réseaux de l'antenne 1 et la tension aux bornes de l'antenne 3 est calculée. Le passage instantané au paramètre S_{21} permet la comparaison avec la mesure.

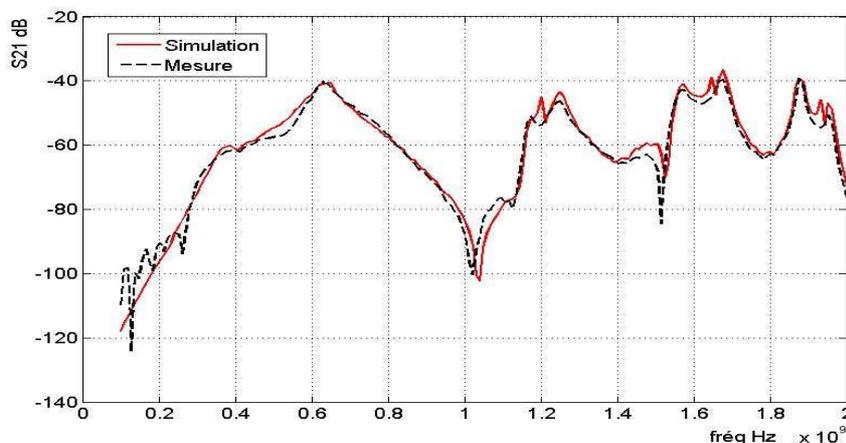


Fig.IV.8 : Comparaison mesure simulation du paramètre S_{21} entre les monopoles 1 et 3

Plage fréquentielle	: 50 MHz-2GHz
Temps de simulation	: 2.9 s
Nb de modes résonants	: 25 modes
Nb de points calculés	: 201 points

Le temps de calcul augmente légèrement de par l'introduction des volumes $V_{3,4}$ et $V_{3,5}$. Nous reconnaissons les fréquences de résonance de la cavité de la Fig.IV.6, mélangées avec les fréquences de résonance des monopoles 2 et 3.

La première fréquence de résonance des deux monopoles 2 et 3 de hauteur $h=h_2=h_3=19$ cm est aisément obtenue par l'expression suivante avec v la célérité dans le milieu.

$$f_0 = \frac{v}{4h} = 394\text{MHz} \quad (\text{IV.31})$$

Les fréquences de résonance d'ordre supérieur apparaissent classiquement à $2f_0$, $3f_0$ et $4f_0$ comme le montre la Fig.IV.8.

L'amplitude des résonances ne dépasse pas -40 dB. Avec une perturbation de $1V$ injectée à l'entrée du système, une tension maximum de 5 mV est récupérée en sortie.

Si la source de perturbation est produite par le monopole 3, l'antenne 1 dans la cavité reçoit alors le même signal illustré Fig.IV.8. Le système est réciproque.

IV.1.6 Conclusion

La représentation en circuits électriques équivalents de la cavité $E.M.$ permet une simulation précise de ce système couplé relativement complexe. L'utilisation d'une super matrice impédance permet de transcrire les différents phénomènes physiques décrits plus haut.

La simulation a permis de faire apparaître le glissement des fréquences de résonance en fonction des paramètres géométriques h_{ant} et c respectivement les hauteurs des antennes 2 et 3 et la troisième dimension de la cavité.

A partir d'exemples simples, nous avons montré comment la $MKCE$ peut s'adapter à la résolution de problèmes de CEM multiéchelles et multiparamètres. Si nous connaissons les circuits électriques équivalents de chacun des phénomènes physiques de manière indépendante, il est relativement simple de construire le circuit équivalent du système total en utilisant le formalisme de la $MKCE$.

Finalement, la principale difficulté réside dans la représentation réaliste de chacun des sous-volumes générés par l'analyse topologique.

C'est pour cela que nous préférons consacrer la dernière partie de la thèse à la présentation du troisième adjectif caractéristique de la simulation des grands systèmes : l'analyse multiphysique, plutôt que de résoudre un problème encore plus complexe.

IV.2 Application de la MKCE au couplage électrothermique

La propagation dans le cerveau des ondes électromagnétiques générées par les téléphones portables, donne lieu à de multiples études et simulations numériques visant notamment à estimer les effets thermiques des rayonnements des ondes *EM* sur le corps humain. Dans ce contexte actuel, nous trouvons intéressant de proposer l'étude d'un couplage électrothermique pour montrer que la *MKCE* constitue un formalisme qui se prête bien à la fusion de paramètres multiphysiques.

Pour cela, nous considérerons une expérience de pensée qui permettra la mise en équation du couplage d'énergie électrique hautes fréquences en énergie thermique.

Considérons l'éprouvette coaxiale illustrée dans la *Fig.IV.9* comprenant un conducteur central cylindrique et un conducteur extérieur relié d'une part à une source *HF* de fém e_0 et de résistance interne R_0 et d'autre part, à une impédance de charge que nous supposerons adaptée sur l'impédance caractéristique de cette ligne de propagation.

L'éprouvette contient de l'eau. Cependant, et pour éviter tout contact électrique et thermique avec les conducteurs, ces derniers seront revêtus d'un écran parfait, c'est-à-dire incapable de transmettre une puissance thermique ainsi qu'un courant de conduction.

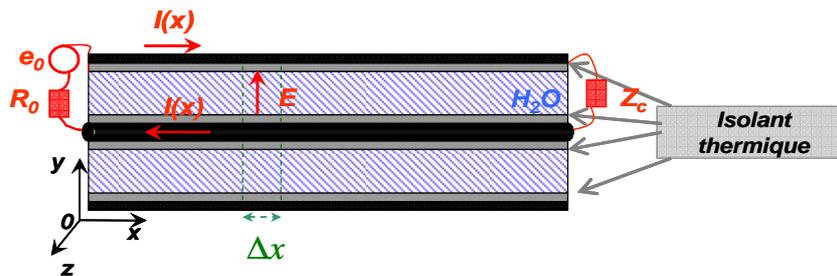


Fig.IV.9 : Analyse multiphysique sur un câble coaxial

Le processus de couplage électrothermique va donc entraîner la conjugaison de deux phénomènes physiques. La source *HF* produit dans l'éprouvette une tension électrique $V(x)$ fonction de la variable d'espace longitudinale x . La tension produit un champ électrique radial \vec{E} dans le liquide qui active des oscillations dipolaires entretenues des molécules d'eau. Il en résulte une dissipation d'énergie thermique entrainant une modification de la température de l'eau.

Sachant que la dissipation d'énergie électrique engendre une atténuation de la tension au cours de la propagation de l'onde *TEM* suivant la direction Ox , et qu'en même temps la production de chaleur de l'eau s'accompagne d'une diffusion thermique également parallèle à la direction Ox , nous sommes donc confrontés à la résolution d'un couplage entre l'équation de propagation des ondes *TEM* et l'équation de la chaleur. Nous proposons de mettre en œuvre cette résolution en adoptant le formalisme de la *MKCE*.

Auparavant, nous rappellerons les principaux paramètres physiques utiles à la mise en place des équations des télégraphistes et de l'équation de la chaleur.

On attachera à la ligne de propagation, l'inductance linéique L et la capacité linéique C . La résistance linéique R provient des dissipations thermiques dans les conducteurs dont on néglige par la suite la contribution. La conductance linéique G va simuler la source qui engendre la dissipation thermique évoquée plus haut.

Les paramètres thermiques utiles à la mise en place de l'équation de diffusion de la chaleur comprennent la chaleur massique de l'eau C_p , sa conductivité thermique λ ainsi que sa masse volumique ρ .

Dans le paragraphe IV.1.1, nous procéderons à l'analyse de la propagation du mode TEM entrete nu dans l'éprouvette par une source harmonique de pulsation ω . Dans le paragraphe IV.1.2, nous procéderons à la démonstration de l'équation de diffusion thermique puis nous en calculerons les solutions. Nous passerons ensuite à la recherche d'une analogie permettant de réduire la diffusion thermique à un assemblage de circuits électriques équivalents.

Pour conclure ce préambule, nous devons signaler que la mise en œuvre des phénomènes transitoires électriques est naturellement bien plus rapide que le transitoire thermique. Pour cette raison, nous ferons l'hypothèse que la propagation de l'onde TEM sur la ligne est considérée en régime permanent alors que les phénomènes thermiques seront exprimés par des équations aux dérivées partielles spatiotemporelles.

IV.2.1 Analyse de la propagation électrique

L'étude de la propagation des signaux électriques sur une ligne de transmission dans le domaine des fréquences a largement été présentée dans la thèse. Ainsi, un élément Δx de ce câble peut être modélisé par la théorie des lignes donnant le schéma électrique équivalent de la Fig.IV.10 :

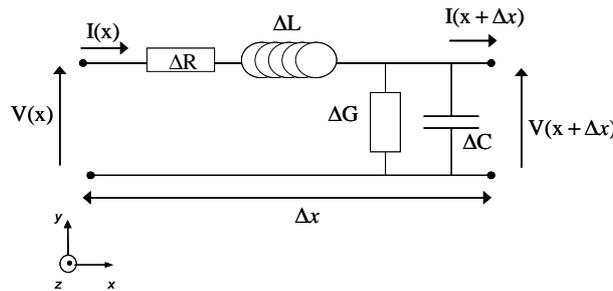


Fig.IV.10 : Élément de ligne

L'équation des télégraphistes de ce sous-réseau est obtenue en écrivant les relations de Kirchhoff en régime sinusoïdal :

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -(R + j\omega L)I(x) \quad (IV.32)$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -(G + j\omega C)V(x) \quad (IV.33)$$

En dérivant par rapport à ∂x les expressions (IV.32) et (IV.33), nous obtenons les équations des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -\gamma^2 V(x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -\gamma^2 I(x) \quad (IV.34)$$

Avec la constante de propagation γ

$$\gamma = \sqrt{Z.Y} \quad \text{avec} \quad Z = R + j\omega L \quad \text{et} \quad Y = G + j\omega C \quad (IV.35)$$

Les solutions de l'équation (IV.34) s'écrivent en considérant uniquement l'onde incidente car la ligne est adaptée :

$$V(x) = V(0)e^{-\gamma x} \quad (IV.36)$$

Avec

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (IV.37)$$

α est la constante d'atténuation de la ligne et β la constante de phase.

$$\gamma = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} = \sqrt{(R.G - L.C\omega^2) + j(R.C\omega + G.L\omega)} \quad (IV.38)$$

La figure suivante rappelle le schéma équivalent de la ligne électrique présenté dans le chapitre précédent (paragraphe III.1). Le nombre de cellules est fixé à $n_x=2$.

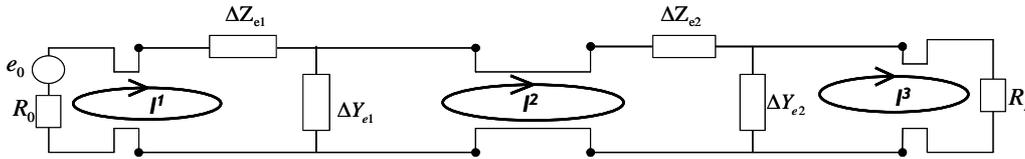


Fig.IV.11 : Schéma électrique équivalent d'une ligne de transmission électrique

Les expressions analytiques suivantes se rapportent aux paramètres électriques linéiques R, L, C , et G d'un câble coaxial classique [IV.7] et [IV.8] :

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2\pi\sigma_{Cu}\delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Omega/m \\ L &= \frac{\mu}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) H/m \\ C &= \frac{2\pi\epsilon}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} F/m \\ G &= \frac{2\pi\epsilon}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \omega \cdot \tan(\psi) S/m \end{aligned} \quad (IV.39)$$

$$\text{avec } \tan(\psi) = \frac{\sigma_{H_2O}}{\omega\epsilon} \text{ l'angle de perte de notre matériau}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_{Cu}}} : \text{l'épaisseur de peau en mètre}$$

a et b correspondent respectivement aux diamètres du conducteur et du blindage :

$$\begin{aligned} a &= 5mm \\ b &= 2cm \end{aligned} \quad (IV.40)$$

Les paramètres caractérisant respectivement le cuivre et l'eau salée sont donnés dans les équations (IV.41) et (IV.42) :

$$\sigma_{Cu} = 54.10^6 \text{ S/m} \quad (IV.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{H_2O} &= 56.10^{-3} \text{ S/m} \text{ ou } \sigma_{H_2O} = 5 \text{ S/m} \\ \mu &= \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \\ \varepsilon &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 &= (1/36\pi).10^{-9} \text{ et } \varepsilon_r = 78 \end{aligned} \quad (IV.42)$$

Les charges aux extrémités du câble sont choisies telles que :

$$R_0 = R_L = 100\Omega \quad (IV.43)$$

Le paragraphe suivant introduit l'étude des phénomènes thermiques évoluant dans le câble coaxial considéré comme un tube rempli d'eau salée.

IV.2.2 Analyse temporelle de la diffusion thermique

On examinera tout d'abord la diffusion de la chaleur engendrée dans le câble coaxial par une source de température installée à une extrémité. En supposant la puissance thermique uniformément distribuée sur la section droite du coaxial, cela équivaut à résoudre l'équation de la chaleur (IV.44) portée au-dessous [IV.9], [IV.10] et [II.8].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (IV.44)$$

Dans cette équation aux dérivées partielles, T représente l'évolution de la température en fonction de la variable longitudinale x , t est la variable temps, ρ est la masse volumique de l'eau introduite dans le tube, C_p est le coefficient de chaleur massique et λ est le coefficient de conductivité thermique de l'eau.

L'équation sera tout d'abord résolue analytiquement afin de disposer des solutions de références qui permettent de valider la résolution numérique établie sur l'usage d'une chaîne de circuits électriques équivalents.

Dans une seconde phase il sera tenu compte d'un apport d'énergie thermique produit par les phénomènes électriques. A ce stade, il sera donc indispensable de coupler les équations électromagnétiques à l'équation thermique. Le formalisme de *Kron* sera alors pleinement exploité pour résoudre ce problème élémentaire multiphysique.

IV.2.2.1 Mise en place de l'équation de la chaleur

Pour les besoins de la démonstration, on forme tout d'abord l'hypothèse que la source de chaleur est localisée à une extrémité du matériau cylindrique. C'est-à-dire au point de coordonnée $x=0$ de la Fig.IV.12. Cette extrémité sera portée à la température T_1 alors que l'extrémité opposée située en $x=L_0$ est maintenue à la température ambiante T_0 .

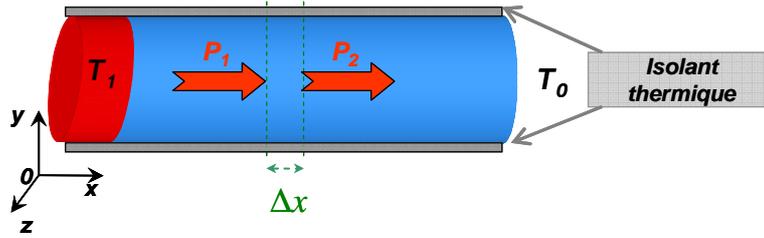


Fig.IV.12 : Propagation de la chaleur dans le tube

Considérons un élément de matériau de surface S et de dimension longitudinale Δx , comme indiqué en Fig.IV.12. La diffusion thermique engendre sur cet élément un gradient de température dont l'orientation déterminée par la seule direction $0x$ se caractérise par la différence ΔT de température enregistrée entre x et $x + \Delta x$.

Si $T(x,t)$ représente la température en fonction de la variable spatiale x et de la variable temporelle t , ΔT s'exprime de la manière suivante :

$$\Delta T = T(x,t) - T(x + \Delta x,t) \quad (IV.45)$$

L'usage du théorème des accroissements finis donne pour le second terme de l'équation (IV.45) :

$$T(x + \Delta x,t) \cong T(x,t) + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \quad (IV.46)$$

En conséquence ΔT prend pour forme approchée :

$$\Delta T \cong -\frac{\partial T}{\partial x} \Delta x \quad (IV.47)$$

Considérons la fonction $g(x,t)$ définie ci-dessous, représentative du gradient thermique

$$g(x,t) = -\frac{\partial T}{\partial x} \quad (IV.48)$$

Si la quantité de chaleur ΔQ pénètre dans l'élément de matériau durant l'intervalle de temps Δt , ΔQ sera proportionnelle à la surface du matériau S , ainsi qu'au produit du gradient thermique, de la conductivité thermique de la matière et de l'élément de temps Δt d'où :

$$\Delta Q = S.g(x,t).\lambda.\Delta t \quad (IV.49)$$

Si on forme le rapport $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, on obtient une grandeur physique homogène à une puissance qu'on désigne par le symbole P et qu'on appelle par la suite le flux thermique.

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda.S.g(x,t) \quad (IV.50)$$

L'énergie ΔQ sera accumulée dans l'élément Δx du matériau, on peut donc écrire que ΔQ se résume au produit de la masse Δm du matériau, de la chaleur massique C_p et de l'écart ΔT de température observé entre les deux faces de l'élément Δx , soit :

$$\Delta Q = \Delta m \cdot C_p \cdot \Delta T \quad (IV.51)$$

La masse élémentaire s'exprime alors

$$\Delta m = \rho \cdot S \cdot \Delta x \quad (IV.52)$$

Equation dans laquelle ρ représente la masse volumique du matériau.

Si on forme le rapport ΔQ sur l'intervalle de temps Δt et qu'on fusionne les relations (IV.51) et (IV.52), on retrouve le flux thermique qu'on note pour la circonstance ΔP :

$$\Delta P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \cdot S \cdot C_p \cdot \Delta x \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (IV.53)$$

Si on fait tendre Δt vers zéro, l'équation (IV.53) fait apparaître la dérivée partielle de la fonction $T(x,t)$ par rapport à la variable temps t .

$$\Delta P = \rho \cdot S \cdot C_p \cdot \Delta x \frac{\partial T}{\partial t} \quad (IV.54)$$

La quantité ΔP n'est autre que la différence entre le flux thermique entrant sur la face positionnée en x de l'élément et sortant de la face localisée en $x + \Delta x$. L'équation (IV.54) prend alors pour forme strictement équivalente :

$$\Delta P = P(x,t) - P(x + \Delta x, t) \quad (IV.55)$$

L'équation (IV.55) peut s'écrire autrement après insertion de la définition du flux thermique issu de l'expression (IV.50), soit :

$$\Delta P = \lambda \cdot S \cdot (g(x,t) - g(x + \Delta x, t)) \quad (IV.56)$$

Après usage du théorème des accroissements finis, cette équation devient :

$$\Delta P \cong -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x \quad (IV.57)$$

Après identification des équations (IV.54) et (IV.57), l'élément Δx est éliminé, ainsi que la surface S , d'où :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad (IV.58)$$

Un retour sur la définition du gradient thermique établie dans l'équation (IV.48), mène finalement à l'équation de la chaleur dont la fonction $T(x,t)$ est solution.

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (IV.59)$$

Si on divise les deux termes de cette équation par le paramètre λ , on parvient à la forme classique de l'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho \cdot C_p}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (IV.60)$$

IV.2.2.2 Recherche des solutions analytiques de référence

Par commodité, l'équation (IV.61) sera présentée sous la forme compactée dans laquelle le coefficient γ est caractéristique du milieu de diffusion thermique et englobe simultanément la contribution de la conductivité thermique λ , de la chaleur massique C_p et de la masse volumique ρ du matériau.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \gamma^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (IV.61)$$

$$\gamma^2 = \frac{\rho C_p}{\lambda} \quad (IV.62)$$

L'équation peut être résolue par la méthode de séparation des variables en posant :

$$T(x, t) = T_x(x) \cdot T_t(t) \quad (IV.63)$$

Le calcul des dérivées contenues dans l'équation (IV.61) mène alors aux expressions (IV.64) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} T_t \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_t}{\partial t} T_x \quad (IV.64)$$

Après insertion dans l'équation (IV.61), on parvient à une expression comportant les notations allégées des dérivées, soit :

$$T_x'' T_t = \gamma^2 T_t' T_x \quad (IV.65)$$

Après division par $T(x, t)$, on obtient une séparation en deux membres contenant respectivement $T_t(t)$ et $T_x(x)$.

$$\frac{T_x''}{T_x} = \gamma^2 \frac{T_t'}{T_t} \quad (IV.66)$$

Chaque membre de l'équation (IV.66) correspond à une constante inconnue que nous appelons ω^2 , soit :

$$\frac{T_x''}{T_x} = -\omega^2 \quad \text{et} \quad \gamma^2 \frac{T_t'}{T_t} = -\omega^2 \quad (IV.67)$$

On parvient alors à deux équations différentielles ordinaires transcrites sous leurs formes usuelles dans l'équation (IV.68) :

$$\frac{d^2 T_x}{dx^2} + \omega^2 T_x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT_t}{dt} + \frac{\omega^2}{\gamma^2} T_t = 0 \quad (IV.68)$$

La solution $T_x(x)$ est celle d'une équation différentielle incomplète du second ordre, soit :

$$T_x(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x) + B \cdot \sin(\omega \cdot x) \quad (IV.69)$$

La solution $T_t(t)$ est celle d'une équation différentielle du premier ordre donnant une fonction exponentielle décroissante :

$$T_t(t) = C \cdot e^{-\frac{\omega^2}{\gamma^2} t} \quad (IV.70)$$

La détermination des constantes inconnues A , B , C et du coefficient ω doit s'effectuer pour les conditions aux limites de températures appliquées aux extrémités du matériau, c'est-à-dire en $x=0$ et en $x=L_0$.

Pour déterminer ω , nous prenons les conditions aux limites imposées au matériau pour la température ambiante T_0 avant application de la source de chaleur, soit $T_x(0) = T_0$ et $T_x(L_0) = T_0$, ce qui mène au système de l'équation (IV.71).

$$\begin{cases} A = T_0 \\ A \cdot \cos(\omega L_0) + B \cdot \sin(\omega L_0) = T_0 \end{cases} \quad (IV.71)$$

Nous aboutissons à un système indéterminé, dont les solutions non nulles ne sont justifiées que si on annule le déterminant, soit :

$$\sin(\omega L_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega L_0 = n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (IV.72)$$

De l'équation (IV.72), on déduit que le coefficient ω_n appartient à un spectre de valeurs propres infiniment étendu :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L_0} \quad (IV.73)$$

Pour déterminer les constantes inconnues A et B , on doit rechercher l'expression analytique de $T(x,t)$ pour le régime établi, c'est-à-dire lorsque la variable t tend vers l'infini. Après avoir calculé la dérivée première de $T_t(t)$ par rapport à t , on se rend compte que celle-ci

s'annule pour t prenant une valeur infiniment grande. En conséquence, on parvient à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (IV.74)$$

Cette équation possède pour solutions triviales :

$$T_x(x) = c.x + d \quad (IV.75)$$

Sachant que les conditions aux limites imposées à la température aux deux extrémités du matériau lorsque $t \rightarrow \infty$ sont telles que :

$$T(0,t) = T_1 \quad \text{et} \quad T(L_0,t) = T_0 \quad (IV.76)$$

On trouve les valeurs des constantes c et d suivantes :

$$c = \frac{T_0 - T_1}{L_0} \quad \text{et} \quad d = T_1 \quad (IV.77)$$

Expressions desquelles on déduit aisément la solution du régime permanent désigné pour la circonstance par le symbole $T_p(x)$.

$$T_p(x) = (T_0 - T_1) \frac{x}{L_0} + T_1 \quad (IV.78)$$

En revenant à la forme générale des solutions $T_x(x)$ présentée dans l'équation (IV.69) et du fait que le coefficient ω_n forme un spectre infini de valeurs propres, une remarque importante est à formuler : Nous savons que ces conditions imposent aux constantes A et B une infinité de valeurs indexées sur l'ordre des valeurs propres. D'autre part, nous savons que les conditions initiales imposent à la température la valeur T_1 déterminée par la solution particulière $T_p(x)$ au point d'analyse $x=0$. En conséquence, la constante A qui pondère la fonction cosinus ne peut être que nulle. De ces considérations, on trouve que la solution complète se constitue de la superposition de $T_p(x)$ et d'une série comportant le produit des coefficients B_n et C_n comme indiqué dans l'équation (IV.79) :

$$T(x,t) = T_p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n C_n \sin(\omega_n x) e^{-\frac{\omega_n^2}{\gamma^2} t} \quad (IV.79)$$

Après fusion des constantes B_n et C_n , dans une seule constante D_n , on parvient à la solution définitive dans laquelle il faut extraire les valeurs de D_n :

$$T(x,t) = (T_0 - T_1) \frac{x}{L_0} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x) e^{-\frac{\omega_n^2}{\gamma^2} t} \quad (IV.80)$$

$$\text{avec } \omega_n = \frac{n\pi}{L_0}$$

En effet, l'équation (IV.80) s'apparente à une série de Fourier dont la présentation analytique sera allégée si nous l'exprimons à l'instant initial $t=0$, soit :

$$T(x,0) = T_0 \Rightarrow T_0 = (T_0 - T_1) \frac{x}{L_0} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x) \quad (IV.81)$$

Pour alléger l'écriture de cette fonction, nous assimilerons le membre de droite de l'équation (IV.82), à la notation simplifiée $f(x)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\omega_n x) = \frac{x}{L_0} (T_1 - T_0) + T_0 - T_1 = f(x) \quad (IV.82)$$

Le calcul des coefficients de Fourier D_n sera entrepris par le protocole usuel exposé par les intégrales de l'expression (IV.83) :

$$D_n = \frac{1}{L_0} \int_{-L_0}^{L_0} f(x) \cdot \sin(\omega_n x) \cdot dx = \frac{2}{L_0} \int_0^{L_0} f(x) \sin(\omega_n x) \cdot dx \quad (IV.83)$$

Après intégration par partie, nous trouvons :

$$D_n = 2 \cdot \left(\frac{(T_0 - T_1)}{n\pi} \right) \quad (IV.84)$$

En guise d'application, on donne les paramètres thermiques de l'eau [IV.9] :

$$\begin{aligned} C_p &= 4186 \text{ J.Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \lambda &= 0.6 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \rho &= 998 \text{ Kg.m}^{-3} \end{aligned} \quad (IV.85)$$

La constante de diffusion est alors $\frac{1}{\gamma^2} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \approx 1,4 \cdot 10^{-7}$. Les températures présentes aux extrémités sont arbitrairement choisies telles que $T_1=200^\circ\text{C}$ et $T_0=20^\circ\text{C}$.

Pour cinq valeurs de position du tube de 44 cm nous obtenons les courbes temporelles $T(t)$ décrivant respectivement de haut en bas l'évolution de la température à l'abscisse $x_1=0$, $x_2= L_0/4$, $x_3= 2.L_0/4$, $x_4= 3.L_0/4$ et $x_5= L_0$ m. La première courbe évolue à une amplitude constante de 200°C et la cinquième à l'amplitude constante correspondant à la température ambiante T_0 .

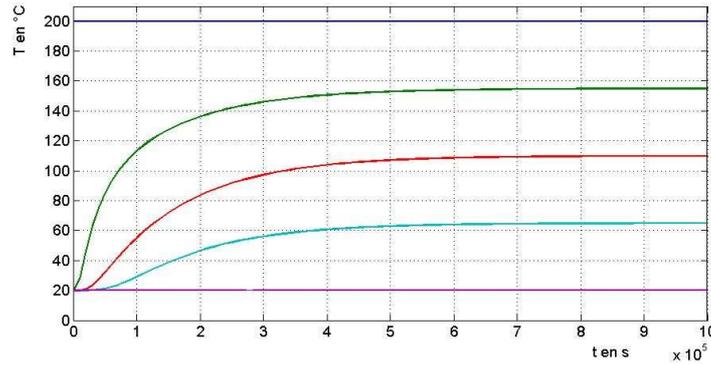


Fig.IV.13 : Diffusion temporelle de la température

Représentons maintenant la température $T(x)$ en fonction de la dimension longitudinale. Pour cinq valeurs de temps comprises entre 0 et $T_\omega = 278$ heures soit 10.10^5 secondes, nous obtenons respectivement de haut en bas les courbes pour $t_1=0$, $t_2=T_\omega/100$, $t_3=5.T_\omega/100$, $t_4=25.T_\omega/100$, $t_5=T_\omega$. Le choix de la fenêtre temporelle T_ω sera présenté dans le paragraphe II.1.2.4.3 dédié à cette étude.

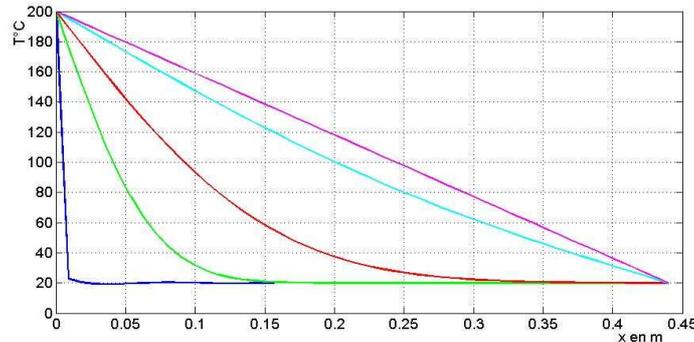


Fig.IV.14 : Diffusion longitudinale de la température dans le tube

Lorsque t s'approche de $T_\omega = 278$ heures, nous pouvons considérer que le régime permanent est atteint. La température est alors distribuée linéairement entre les deux températures fixées aux extrémités $T_1 = 200$ °C et $T_0 = 20$ °C sur les 44 cm du tube. Les deux courbes de diffusion obtenues ont été comparées et validées avec les résultats fournis en bibliographie [IV.9] pour des configurations géométriques et d'excitations différentes.

IV.2.2.3 Recherche d'une analogie électrique avec la diffusion thermique

Nous venons de montrer que la diffusion thermique était caractérisée par deux paramètres fondamentaux, la conductivité thermique λ et la chaleur massique C_p . La conductivité thermique caractérise l'aptitude du matériau à diffuser la chaleur alors que la chaleur massique matérialise son aptitude à l'accumulation de la chaleur.

Revenons sur l'équation (IV.50) reliant le flux thermique P au gradient thermique $g(x,t)$. Nous savons que la diffusion de la température ΔT entre les deux faces du matériau est reliée au gradient thermique par l'équation (IV.47) que nous formulons sous l'expression équivalente suivante :

$$\Delta T = T(x,t) - T(x + \Delta x,t) = -\frac{\partial T}{\partial x} \Delta x = g(x,t) \cdot \Delta x \quad (IV.86)$$

De l'équation (IV.50), on extrait $g(x,t)$, soit :

$$g(x,t) = \frac{1}{\lambda \cdot S} P(x,t) \quad (IV.87)$$

Après insertion dans l'équation (IV.86), on trouve :

$$\Delta T = T(x,t) - T(x + \Delta x,t) = \frac{\Delta x}{\lambda \cdot S} \cdot P(x,t) \quad (IV.88)$$

L'analogie avec les paramètres électriques est alors immédiate car on peut faire correspondre à l'équation (IV.88), l'expression électrique (IV.89) :

$$V(x,t) - V(x + \Delta x,t) = R \cdot \Delta x \cdot I(x,t) \quad (IV.89)$$

En conséquence, on déduit de (IV.88) et (IV.89) que $T(x,t)$ est l'analogue d'une tension électrique, que $P(x,t)$ est l'analogue d'un courant et que le rapport $\frac{1}{\lambda \cdot S}$ est l'analogue d'une résistance linéique.

$$\begin{aligned} T(x,t) &\Leftrightarrow V(x,t) \\ P(x,t) &\Leftrightarrow I(x,t) \\ \frac{1}{\lambda \cdot S} &\Leftrightarrow R \end{aligned} \quad (IV.90)$$

Pour cette raison, $\frac{1}{\lambda \cdot S}$ sera désignée résistance thermique linéique avec pour symbole R_{th} .

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda \cdot S} \quad (IV.91)$$

La seconde équation thermique établie en (IV.53), peut être convertie en analogue électrique en étendant les conventions (IV.90) adoptées :

$$\Delta P = \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial T}{\partial t} C_p \Rightarrow \Delta I = C \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \quad (IV.92)$$

En effet, ΔP est bien l'analogue d'une différence de courants puisque :

$$\Delta P = P(x,t) - P(x + \Delta x,t) \Rightarrow \Delta I = I(x,t) - I(x + \Delta x,t) \quad (IV.93)$$

L'élément C figurant dans l'équation (IV.92) est donc bien l'analogue d'une capacité linéique que nous pouvons assimiler à la capacité d'accumulation thermique linéique du matériau à laquelle on joint le symbole C_{th} .

$$C_{th} = \rho \cdot C_p \cdot S \quad (IV.94)$$

Des équations (IV.89) et (IV.92) on déduit le circuit électrique équivalent de l'élément Δx du matériau, soit :

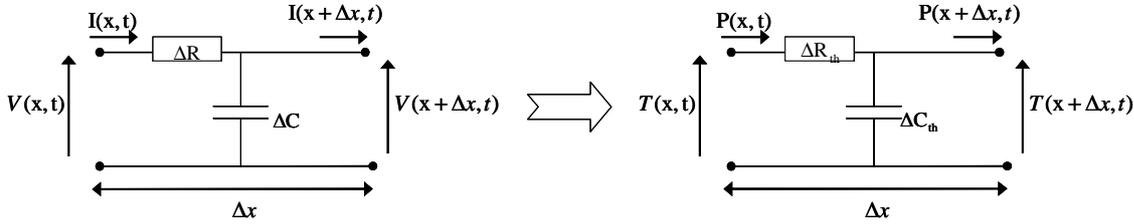


Fig.IV.15 : Schéma équivalent thermique

Avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \Delta R &= R \cdot \Delta x & \Delta R_{th} &= R_{th} \cdot \Delta x \\ \Delta C &= C \cdot \Delta x & \Delta C_{th} &= C_{th} \cdot \Delta x \end{aligned} \quad (IV.95)$$

IV.2.2.4 Analyse numérique de la diffusion thermique par la MKCE

IV.2.2.4.1 Choix de la méthode numérique appropriée à la résolution de notre problème

Contrairement à la résolution des équations aux lignes de transmission traitée dans les parties antérieures de notre thèse, le problème thermique demande la conversion des solutions numériques sur la base de deux variables hétérogènes : l'espace x et le temps t . Ces conditions signifient qu'il faut résoudre l'équation de la chaleur par une méthode de différences finies dans le domaine temporel (*FDTD*).

Un autre choix consiste à transporter l'équation dans le circuit électrique équivalent établi en section précédente et dont on trouve la constitution en Fig.IV.15.

Une alternative au calcul direct dans le domaine temporel peut toutefois s'effectuer en procédant à la projection des fonctions $P(x,t)$ et $T(x,t)$ dans le domaine des fréquences au moyen de l'application de la transformée de Fourier directe soit :

$$P(x, \omega) = TF[P(x, t)] = \int_0^{\infty} P(x, t) e^{-j\omega t} dt \quad (IV.96)$$

$$T(x, \omega) = TF[T(x, t)] = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-j\omega t} dt \quad (IV.97)$$

Les équations (IV.96) et (IV.97) supposent que $P(x,t)$ et $T(x,t)$ représentent des fonctions causales de la variable temps t .

D'autre part, et pour éviter les confusions de notation, la pulsation et la fréquence rattachées aux transformations (IV.96) et (IV.97) seront respectivement désignées par les symboles ω et ν .

$$\omega = 2\pi\nu \quad (IV.98)$$

Ces conditions signifient que la pulsation et la fréquence attachées au phénomène électromagnétique s'adresseront par la suite à des symboles différents de ceux adoptés dans l'équation (IV.98).

Nous proposons d'utiliser la notation ω_0 pour la pulsation, et de maintenir pour la fréquence, le symbole f , soit :

$$\omega_0 = 2\pi f \quad (IV.99)$$

Dans ce contexte, le circuit équivalent de l'élément de matériau Δx projeté dans le domaine spectral prend donc la nouvelle description de la Fig.IV.16 :

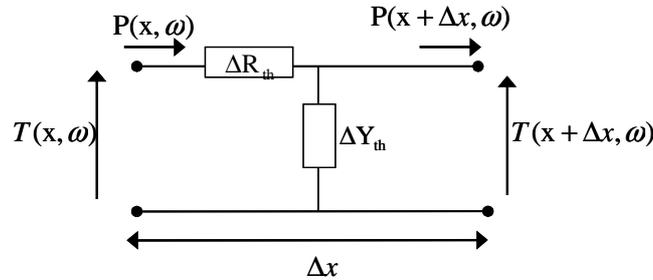


Fig.IV.16 : Schéma équivalent thermique dans le domaine spectral

L'admittance thermique ΔY_{th} figurant dans ce schéma est reliée à la capacité thermique ΔC_{th} de l'élément par l'équation (IV.100) :

$$\Delta Y_{th} = j\Delta C_{th}\omega \quad (IV.100)$$

Précisons que l'équation de la chaleur exprimée dans le domaine spectral prend dans ce cas la forme analytique portée ci-dessous :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - j\omega\gamma^2T = 0 \quad (IV.101)$$

En pratique la résolution va demander l'usage de la transformée de Fourier numérique dont la prochaine section rappellera les principales propriétés et règles d'emploi.

IV.2.2.4.2 Paramétrage du traitement numérique au moyen de la TFD

La transformée de Fourier discrète ou TFD, consiste à procéder à l'échantillonnage des fonctions sur la variable temps. Dans l'équation (IV.102) le symbole $\overline{T(t)}$ représente la

température échantillonnée que nous pouvons écrire sous l'expression analytique contenant pour base des fonctions mesure de Dirac.

$$\overline{T(t)} = \sum_{k=0}^{N-1} T(k.T_e) \delta(t - k.T_e) \quad (IV.102)$$

Le paramètre T_e représente la période d'échantillonnage, autrement dit T_e est l'intervalle de temps qui définit la résolution des fonctions qui seront traitées par la *TFD*.

Dans la configuration adoptée dans l'équation (IV.102), la fonction échantillon comporte N échantillons.

Cela signifie que ces N échantillons seront uniformément répartis sur une fenêtre temporelle T_w dont la durée n'est autre que le produit de N et T_e , soit :

$$T_w = N.T_e \quad (IV.103)$$

La transformée de Fourier discrète constitue l'analogie numérique du calcul de l'intégrale (IV.97). La *TFD* va donc donner naissance à un spectre échantillonné, dont un élément quelconque d'ordre n prend la forme analytique décrite par l'équation (IV.104).

$$T(nF_0) = \sum_{k=0}^{N-1} T(k.T_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (IV.104)$$

Le paramètre F_0 représente la fréquence fondamentale déterminée par l'inverse de la fenêtre T_w définie précédemment, d'où :

$$F_0 = \frac{1}{T_w} = \frac{1}{N.T_e} \quad (IV.105)$$

Contrairement aux définitions initiales (IV.96) et (IV.97), qui produisent un spectre continu, la *TFD* restitue un spectre de raies espacées de F_0 . Il peut être montré que le spectre calculé par la *TFD* (équation (IV.104)) représente une fonction périodique, dont la période de répétition f_e est déterminée par la fréquence d'échantillonnage, c'est-à-dire l'inverse de la période d'échantillonnage, soit :

$$f_e = \frac{1}{T_e} \quad (IV.106)$$

Sachant que le spectre de Fourier lie de manière indissociable fréquences positives et fréquences négatives, on trouve que cette propriété jointe à la condition de périodicité énoncée précédemment limite naturellement l'étendue du spectre numérique à l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$, connecté en indice d'échantillon et sur la base des N données

construites précédemment, cela veut dire que l'on couvre l'intervalle $\left[-\left(\frac{N}{2}+1\right) \frac{N}{2}\right]$.

Lors des applications envisagées par la suite, la température assignée à l'extérieur du matériau et située en $x=0$, sera définie par un échelon dont la Fig.IV.17 reproduit les principales caractéristiques.

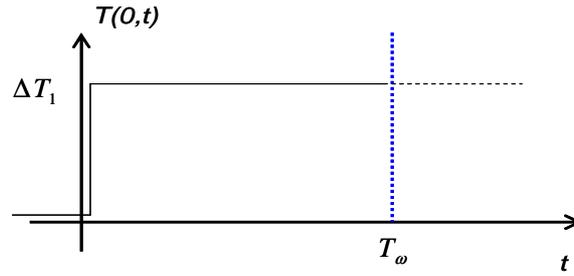


Fig.IV.17 : Échelon température

Cette fonction prend la description analytique présentée ci-dessous :

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad T(0,t) = 0 \\ t > 0 & \quad T(0,t) = \Delta T_1 \end{aligned} \quad (IV.107)$$

ΔT_1 représente l'écart positif de température rapporté à la température ambiante, soit pour reprendre les notations adoptées plus haut :

$$\Delta T_1 = T_1 - T_0 \quad (IV.108)$$

Le calcul de la *TFD* demande le respect de quelques règles. En effet, étant limité par la fenêtre T_ω , l'intervalle de temps prescrit par l'équation (IV.104) provoque une troncature génératrice d'artefacts qui affectent profondément le spectre. Le calcul engendre une erreur systématique. Pour compenser ce phénomène, on ajoute à la fonction échelon, une fonction rampe de Nicholson $N_\omega(t)$ illustrée par la Fig.IV.18, dont la description analytique est la suivante :

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad N_\omega(t) = 0 \\ 0 \leq t \leq T_\omega & \quad N_\omega(t) = -\frac{t}{T_\omega} \Delta T_1 \\ t > T_\omega & \quad N_\omega(t) = -\Delta T_1 \end{aligned} \quad (IV.109)$$

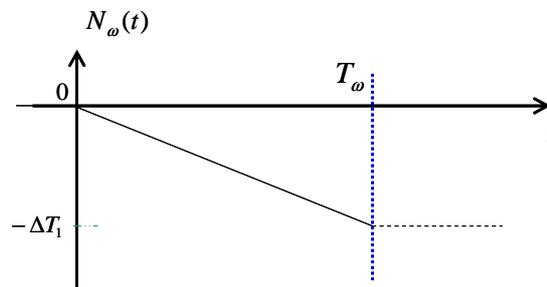


Fig.IV.18 : Rampe de Nicholson

La fonction réellement traitée par la *TFD* sera donc $T_N(0,t)$ exprimée par la somme algébrique de (IV.107) et (IV.109) soit :

$$T_N(0, t) = T(0, t) + N_\omega(t) \quad (IV.110)$$

Sous ces conditions, il peut être montré que le résultat du calcul du spectre n'est nullement altéré par la troncature puisque la fonction (IV.110) demeure nulle aux temps supérieurs à T_ω .

IV.2.2.4.3 Critère de choix des paramètres T_e et T_ω

En règle générale, la détermination de la période d'échantillonnage est fixée par la borne physique du spectre de la fonction concernée. S'agissant de l'échelon présenté Fig.IV.17, le calcul analytique de l'intégrale (IV.97) mène au résultat suivant :

$$T(x, \omega) = \Delta T_1 \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{\Delta T_1}{j\omega} \quad (IV.111)$$

Convertie sur une échelle verticale logarithmique, la fonction (IV.111) mène à un spectre caractérisé par une pente négative uniforme de -20 dB par décade. Autrement dit, il n'est pas possible d'attribuer une borne au spectre de l'échelon. Cette constatation est tout à fait logique puisque nous avons affaire à une fonction singulière dont le temps de montée est infiniment petit.

Devant l'impossibilité de définir T_e sur le critère spectral du signal exciteur, on doit se tourner vers la résolution qui sera pratiquée plus spécialement vers la constitution de la cellule élémentaire de dimension Δx . Le schéma de la Fig.IV.16 montre que nous avons affaire à l'assemblage d'une résistance et d'une admittance capacitive qui donne à ce circuit le comportement d'un filtre passe bas de constante de temps $\Delta^2 \tau$ telle que :

$$\Delta^2 \tau = \Delta R_{th} \cdot \Delta C_{th} \quad (IV.112)$$

Au circuit tel qu'il est présenté Fig.IV.16, peut donc s'adjoindre la fonction de transfert $H(v)$ définie comme suit :

$$H(v) = \frac{T(x + \Delta x, v)}{T(x, v)} = \frac{1}{1 + j \frac{v}{f_c}} \quad (IV.113)$$

Relation dans laquelle f_c s'apparente à la fréquence de coupure du filtre, soit :

$$f_c = \frac{1}{2\pi \Delta^2 \tau} \quad (IV.114)$$

Le spectre en sortie de cette cellule sera donc naturellement borné par f_c . Le bon sens physique incite donc à localiser la borne de la fonction échelonnée au-dessus de f_c soit :

$$\frac{f_e}{2} \gg f_c \quad (IV.115)$$

Rappelons que $\frac{f_e}{2}$ s'intitule accessoirement fréquence de Shannon qu'on désigne par le symbole f_s .

$$f_s = \frac{f_e}{2} \quad (IV.116)$$

Si on adopte la règle du dixième, cela signifie que f_s entre dans le critère énoncé ci-dessous :

$$f_s = 10.f_c \quad (IV.117)$$

Quant au critère de choix de la durée assignée à la fenêtre T_ω , le raisonnement est beaucoup plus subjectif que le précédent. En effet, il doit être tenu compte de la constante de temps déterminée par la connaissance préalable de la réponse thermique du matériau. La solution analytique de référence montre que cette constante de temps s'accroît avec l'éloignement par rapport à l'origine du repère Ox , point d'application de la source de chaleur. Sachant qu'en extrémité $x=L_0$, la solution est nulle car elle est imposée par la température ambiante T_0 .

On fixera l'analyse sur un point situé à proximité de l'extrémité où la réponse thermique donne une amplitude ΔT_L encore décelable menant au profil de la Fig.IV.19 :

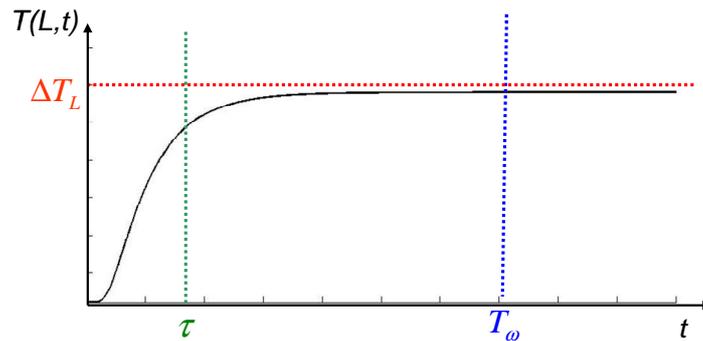


Fig.IV.19 : Réponse thermique

La durée T_ω de la fenêtre doit donc être choisie un peu supérieure à l'appréciation de la valeur de τ . Sous le respect de cette condition, le résultat formulé par le calcul de la TFD inverse de $T_\omega(L,\omega)$ peut être comparé à la rampe de Nicholson suivant le protocole de l'équation (IV.118) :

$$T(L,t) = T_\omega(L,t) - N_\omega(t) \quad (IV.118)$$

Equation dans laquelle

$$T_\omega(L,t) = TFD^{-1}[T_\omega(L,\omega)] \quad (IV.119)$$

$$\begin{cases} N_{\omega}(t) = 0 & t < 0 \\ N_{\omega}(t) = -\frac{t}{T_{\omega}} \Delta T_L & 0 \leq t \leq T_{\omega} \\ N_{\omega}(t) = -\Delta T_L & t > T_{\omega} \end{cases} \quad (IV.120)$$

La valeur numérique de ΔT_L peut être déduite par la pratique d'itération ou par la solution analytique formée pour le régime permanent.

Il est important de préciser que le calcul des *TFD* directe et inverse se réalise au moyen d'algorithmes disponibles dans des logiciels du commerce. En règle générale, le nombre d'échantillon N choisi est une puissance de deux, toutefois, l'usage des logiciels modernes pratiquent une interpolation qui n'exige pas le respect absolu de cette règle.

Les critères définissant les choix de T_e et T_{ω} étant maintenant fixés, il convient de définir le choix de l'élément Δx attaché aux cellules élémentaires reproduisant la chaîne thermique.

IV.2.2.4.4 Critère de choix du paramètre Δx

La période Δx imposée au découpage du matériau peut-être évaluée sur des critères de convergence que nous pouvons tirer des solutions de l'équation de la chaleur convertie dans le domaine spectral. Il s'agit de l'équation (IV.60) posée initialement, que nous décidons de présenter sous une forme mieux adaptée à la poursuite du calcul, soit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \Gamma^2 T = 0 \quad \text{avec} \quad \Gamma^2 = j\omega \frac{\rho C_p}{\lambda} = (1+j)^2 \omega \frac{\rho C_p}{2\lambda} \quad (IV.121)$$

Dans cette équation, le coefficient Γ représente un nombre complexe que nous présentons sous la convention (IV.122) :

$$\Gamma = \alpha + j\beta \quad \text{avec} \quad \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\rho C_p \omega}{2\lambda}} \quad (IV.122)$$

Cette équation différentielle possède pour solution :

$$T(x, \omega) = A e^{-\Gamma x} + B e^{\Gamma x} \quad (IV.123)$$

Si nous avons affaire à un matériau infiniment étendu dans la direction Ox , la constante B présente dans la solution (IV.123) serait identiquement nulle. On obtient dans ce cas une diffusion pure exprimée par la fonction portée ci-dessous :

$$T(x, \omega) = A e^{-\Gamma x} \quad (IV.124)$$

Après avoir entré les paramètres α et β , cette solution devient :

$$T(x, \omega) = A e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} \quad (IV.125)$$

En adoptant le langage des ondes, α équivaut à un coefficient d'atténuation linéique et β à un nombre d'onde. Un retour sur les expressions de α et β introduites dans l'équation (IV.122) montre que l'onde thermique entretenue obéit à une propagation dispersive puisque le nombre d'onde β dépend de la pulsation ω qui serait imposée à une source thermique à variation temporelle sinusoïdale.

Malgré cette restriction, nous utiliserons les propriétés traditionnelles de la propagation des ondes pour trouver les critères de choix de l'élément Δx . Dans ce but, nous allons introduire la longueur de diffusion D_{th} et la longueur d'onde thermique λ_{th} définies grâce aux relations d'équivalences suivantes :

$$D_{th} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_{th}} \quad (IV.126)$$

Paramètres auxquels on peut joindre les descriptions analytiques contenues dans (IV.127) :

$$D_{th} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho C_p \omega}} \quad \text{et} \quad \lambda_{th} = 2\pi D_{th} \quad (IV.127)$$

La solution (IV.125) prend alors pour dénomination en considérant α et β de (IV.126) :

$$T(x, \omega) = A e^{-\frac{x}{D_{th}}} e^{-j2\pi \frac{x}{\lambda_{th}}} \quad (IV.128)$$

Sachant qu'on peut également présenter (IV.128) sous la forme polaire avec les conventions d'écritures portées ci-dessous,

$$T(x, \omega) = |T(x, \omega)| e^{-j\varphi(x, \omega)} \quad (IV.129)$$

on attribue au module et à la phase de cette fonction les valeurs (IV.130) :

$$|T(x, \omega)| = A e^{-\frac{x}{D_{th}}} \quad \text{et} \quad \varphi(x, \omega) = 2\pi \frac{x}{\lambda_{th}} \quad (IV.130)$$

L'examen de ces deux relations montre tout de suite que le choix du critère Δx relève de considérations purement phénoménologiques. Nous voyons que faire coïncider Δx avec la longueur de diffusion mène pour le module et pour la phase aux valeurs numériques suivantes :

$$\text{Si } \Delta x = D_{th} \text{ alors } T(D_{th}, \omega) = 0.36.A \quad \text{et} \quad \varphi(D_{th}, \omega) = 1 \quad (IV.131)$$

Ce critère est inacceptable car la fonction $T(x, \omega)$ a beaucoup trop varié dans l'intervalle $[0 \ \Delta x]$ pour que le calcul basé sur l'itération des circuits devienne fiable. Si on choisit pour critère le dixième de la longueur de diffusion soit :

$$\Delta x = \frac{D_{th}}{10} \quad (IV.132)$$

Les données précédentes deviennent

$$T(D_{th}, \omega) = 0.90A \quad \text{et} \quad \varphi(D_{th}, \omega) = 0.1 \quad (IV.133)$$

Nous entrons alors dans les zones d'approximation du premier ordre des développements limités des fonctions exponentielles et des fonctions circulaires ce qui semble assez satisfaisant sur le plan formel.

Reste maintenant à déduire la valeur absolue de Δx : un retour sur l'équation (IV.127) montre que la longueur de diffusion est inversement proportionnelle à la racine carrée de la pulsation ω .

Nous avons montré en section précédente que le traitement par *TFD* amenait pour valeur maximale du spectre du transitoire thermique la fréquence de Shannon f_s . L'élément de longueur Δx prend donc pour valeur absolue (IV.134) :

$$\Delta x = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{\pi \rho C_p f_s}} \quad (IV.134)$$

Résumons, les conditions auxquelles nous venons d'aboutir :

$$\begin{aligned} T_\omega &= 10\tau \\ T_e &= \frac{\tau}{10 \cdot n_x^2} \\ n_x &= \frac{L_0}{\Delta x} \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{\pi \rho C_p f_s}} \end{aligned} \quad (IV.135)$$

La fréquence de Shannon s'exprime de la manière suivante :

$$f_s = \frac{f_e}{2} = \frac{1}{2 \cdot T_e} = \frac{10 \cdot n_x^2}{2\tau} \quad (IV.136)$$

La fréquence de Shannon est directement proportionnelle au nombre de cellules n_x . Nous imposerons alors soit T_e pour obtenir le nombre d'échantillon n_x ou inversement, nous imposerons n_x pour déterminer T_e selon l'application souhaitée.

Dans notre cas, nous imposerons n_x en fonction de l'endroit où l'on souhaite connaître la température. Si l'on veut la température au point $x=L_0/4$, nous choisirons $n_x=4$, si nous désirons connaître la température au point $x=L_0/100$, nous choisirons $n_x=100$.

Avant de conclure cette partie dédiée à l'analyse physique de la diffusion thermique, nous apportons quelques précisions sur les conditions imposées aux extrémités des n_x cellules juxtaposées.

Comme nous l'avons dit précédemment, la source de chaleur apportée au système sera caractérisée par la *fém* notée ΔT_1 porteuse de la signature spectrale de l'échelon température. La chaleur fournie n'aura pas d'autre possibilité que de diffuser dans le tube thermiquement isolé en direction de l'autre extrémité. En ce point $x=L_0$, nous avons supposé que la chaleur était parfaitement évacuée vers l'extérieur de l'éprouvette, ce qui signifie que la température à ce point de l'espace prendra la valeur de la température ambiante T_0 . Imposer T_0 à l'extrémité du tube, revient à dire que la différence de température est nulle entre l'extrémité du tube et le milieu extérieur. Le circuit équivalent analogue à ce phénomène implique l'application d'un court circuit entre la ligne et la référence imposant à la fois une différence de température nulle et une puissance thermique totalement transmise vers le milieu extérieur.

Le schéma équivalent thermique est présenté dans la Fig.IV.20 en considérant $n_x=2$ cellules.

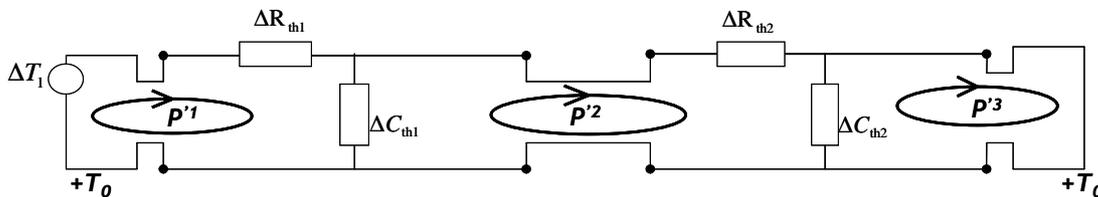


Fig.IV.20 : Circuit thermique équivalent

Imaginons maintenant que la dissipation de la chaleur par rayonnement n'est pas totale. C'est le cas par exemple d'un radiateur constitué de plaques métalliques utilisé pour l'évacuation de la chaleur par rayonnement. Dans ce cas, une résistance équivalente de rayonnement, proportionnelle aux dimensions et aux caractéristiques thermiques du matériau pourra remplacer le court-circuit de l'extrémité droite dans la Fig.IV.20.

Nous venons de présenter les principaux phénomènes physiques attachés au circuit thermique de la Fig.IV.20. La période d'échantillonnage T_e , la fenêtre d'étude T_ω et l'incrément spatial Δx respecteront les considérations physiques apportées dans les paragraphes précédents.

Avant d'implémenter le circuit équivalent de la Fig.IV.20 par la MKCE, nous souhaitons attirer l'attention du lecteur en notant l'importance de l'étude préliminaire des phénomènes physiques apportés dans cette partie qui est indispensable à la bonne réussite des simulations et cela, quelque soit le système aussi simple ou complexe soit-il.

IV.2.2.4.5 Implémentation du système sous la MKCE

De manière similaire à l'implémentation d'une ligne de propagation électrique sous la MKCE présentée dans le paragraphe IV.1.1, nous chercherons dans un premier temps pour chaque sous-réseau les tenseurs des efforts notés T_i une fois covariant ainsi que l'équivalent électrique du tenseur des impédances que l'on appellera tenseur des opérateurs noté ξ_{ij} . Ces tenseurs seront définis d'abord dans l'espace des puissances thermiques de branche, puis dans l'espace des flux thermiques de maille. L'interconnexion de toutes ces cellules se fera à l'aide

de la matrice d'interconnexion, que l'on a notée dans le chapitre précédent (F). L'inverse du tenseur des opérateurs multiplié par le tenseur des températures nous donnera finalement toutes les puissances thermiques de maille du circuit équivalent.

En exprimant les flux de branches notés p^1 à p^3 en lettre minuscule en fonction des flux de mailles notés en majuscule P^1 et P^2 dans la Fig.IV.21, nous obtenons la matrice maintenant bien connue de connexion de $G.Kron$ notée C dans l'équation (IV.137) :

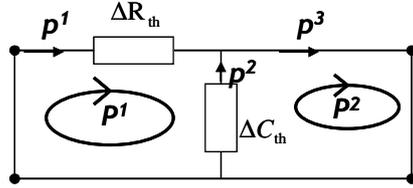


Fig.IV.21 : Une cellule $\Delta R_{th} \Delta C_{th}$

$$(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV.137)$$

On trouve directement dans l'espace des mailles le tenseur des efforts thermiques une fois covariants T_i , le tenseur opérateur deux fois covariants que l'on note ξ_{ij} et le tenseur une fois contravariant des flux P^j .

Il suffit maintenant de juxtaposer n_x cellules de la Fig.IV.21 auxquelles nous ajoutons deux sous-réseaux caractérisant les conditions imposées aux extrémités de la ligne thermique, à savoir la source de température notée ΔT_1 ajoutée à la température ambiante $+T_0$ et le court-circuit à l'extrémité opposée. Nous choisissons de numéroter les flux thermiques dans l'espace des mailles de la manière présentée dans la Fig.IV.22 :

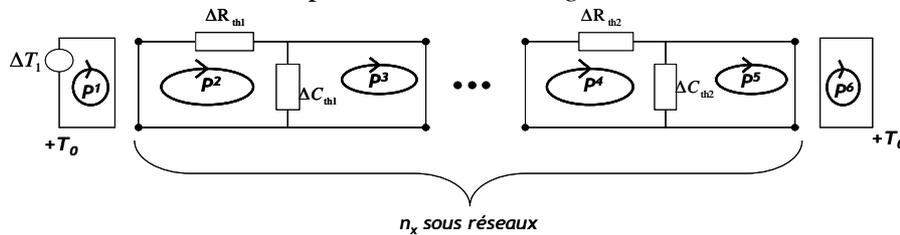


Fig.IV.22 : Circuit équivalent non connecté

Trois supers-tenseurs T_i , ξ_{ij} et P^j respectivement donnés dans les équations (IV.138), (IV.139) et (IV.140) sont chacun dissociés en quatre tenseurs caractérisant respectivement de gauche à droite dans la Fig.IV.22, la source de chaleur, la première cellule $\Delta R_{th1} \Delta C_{th1}$ suivie de la seconde cellule identique et enfin la cellule formée par un court-circuit.

$$T = ((T_{r1}) \quad (T_{r2}) \quad (T_{r3}) \quad (T_{r4}))$$

$$\text{Avec } (T_{r1}) = T_1 \text{ et } (T_{r4}) = T_0 \quad (IV.138)$$

$$(T_{r2}) = (T_{r3}) = (0 \quad 0)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} (\xi_{r1}) & (0) & (0) & (0) \\ (0) & (\xi_{r2}) & (0) & (0) \\ (0) & (0) & (\xi_{r3}) & (0) \\ (0) & (0) & (0) & (\xi_{r4}) \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\xi_{r2} = \xi_{r3} = \begin{pmatrix} R_{thi} \cdot \Delta x + \frac{1}{j\omega C_{thi} \cdot \Delta x} & -\frac{1}{j\omega C_{thi} \cdot \Delta x} \\ -\frac{1}{j\omega C_{thi} \cdot \Delta x} & \frac{1}{j\omega C_{thi} \cdot \Delta x} \end{pmatrix}$$

et

$$\xi_{r1} = \xi_{r4} = 0$$

(IV.139)

Le tenseur inconnu des flux contient les puissances thermiques de chaque maille de la Fig.IV.22 :

$$P = \begin{pmatrix} (P_{r1}) \\ (P_{r2}) \\ (P_{r3}) \\ (P_{r4}) \end{pmatrix} \quad (IV.140)$$

L'étape suivante consiste à connecter pour l'exemple de la Fig.IV.22 les quatre cellules directement dans l'espace des mailles afin de retrouver le schéma électrique de la Fig.IV.20. Pour cela, nous exprimons les flux P^j de mailles du circuit non connecté Fig.IV.22 en fonction des flux P^j de maille du circuit connecté de la Fig.IV.20. Ainsi, à partir des six flux de mailles du réseau non connecté, nous obtenons un système à trois flux de maille traduisant le comportement de la ligne. Cette transformation s'effectue par le biais de la matrice d'interconnexion (F) présentée au chapitre II dont les dimensions rappellent le nombre d'inconnu de chacun des deux réseaux.

$$(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV.141)$$

Les expressions (IV.142) donnent les formules de transformation entre les deux circuits non connecté et connecté d'abord dans la notation tensorielle puis dans la notation matricielle. Le nouveau circuit connecté est repéré par la présence du symbole prime.

$$T'_{\mu} = T_a F_{\mu}^a \quad \text{et} \quad \xi'_{\mu\nu} = F_{\mu}^{\bullet a} \xi_{ab} F_{\nu}^b$$

$$\text{Ou } (T') = (F)'(T) \quad \text{et} \quad (\xi') = (F)'(\xi)(F) \quad (IV.142)$$

Ces trois supers-tenseurs sont reliés par la relation exprimée sous la forme tensorielle dans l'équation (IV.143) dans l'espace des mailles :

$$T_i = \xi_{ij} \cdot P^j \quad (IV.143)$$

Les algorithmes de calcul sont largement détaillés dans l'annexe III.

IV.2.2.4.6 Résultats de la TFD du signal original

Avant de présenter les résultats, nous donnons les valeurs numériques choisies pour les simulations :

Tout d'abord nous fixons le nombre $n_x=4$ cellules afin de simuler convenablement quatre positions différentes le long du tube.

$\tau = R_{th} \cdot C_{th}$ est directement liée au paramètre thermique de l'eau choisi pour l'exemple.

$$\tau = R_{th} \cdot C_{th} = 1,35 \cdot 10^6 \text{ secondes (soit 375 heures)} \quad (IV.144)$$

La TFD appliquée à la somme algébrique des signaux échelon et rampe de Nicholson des Fig.IV.17 et Fig.IV.18, permettent d'obtenir le spectre de la source thermique ΔT_1 à introduire dans le circuit thermique de la Fig.IV.22. Le détail du code de la TFD numérique programmé sous *Matlab* est donné en annexe III. La Fig.IV.23 présente en échelle logarithmique horizontale et verticale, la partie positive du spectre de la température $\Delta T_1(0, \nu)$ pour trois périodes d'échantillonnage différentes T_e associées aux trois fenêtres T_w suivantes :

- $T_w = \tau$ et $T_e = \frac{\tau}{n_x^2}$ en rouge
- $T_w = 4\tau$ et $T_e = \frac{\tau}{4 \cdot n_x^2}$ en vert pointillé
- $T_w = 10\tau$ et $T_e = \frac{\tau}{10 \cdot n_x^2}$ en bleu

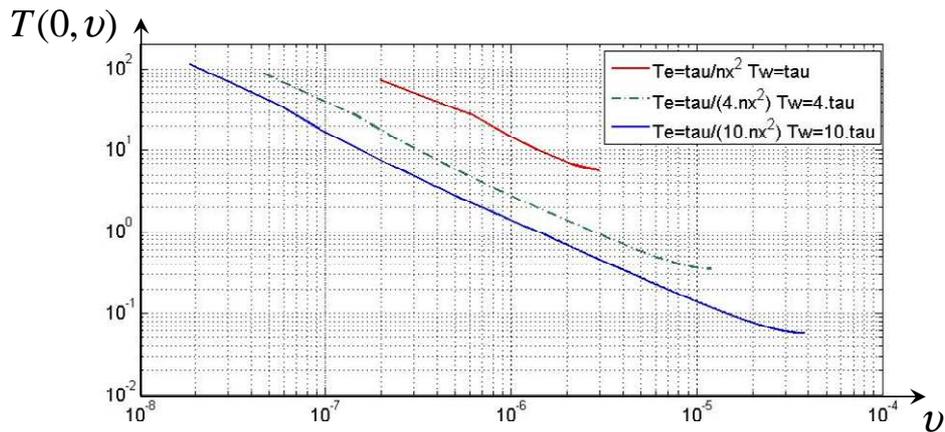


Fig.IV.23 : Spectre de la température

Le spectre correspondant aux fréquences négatives n'apparaît pas dans l'illustration en échelle logarithmique. Cependant, nous précisons que dans le logiciel, cette partie du signal est évidemment impliquée dans le circuit équivalent.

L'allure générale de ces trois spectres traduit bien la TFD d'un signal échelon (IV.111). Les pentes négatives uniformes de ces trois spectres sont de -20 dB/décade comme le rappelle l'équation (IV.145).

$$T(0, \omega) = \frac{\Delta T_1}{j\omega} \quad (\text{IV.145})$$

D'autre part, les trois courbes sont bornées par des intervalles différents directement liées aux paramètres de la fenêtre d'observation T_ω et de la période d'échantillonnage T_e . Ainsi, le paramètre T_ω limite les basses valeurs du spectre, alors que T_e limite les valeurs supérieures du spectre.

Pour le cas critique illustré par la courbe rouge Fig.IV.23 défini sur un faible intervalle, la valeur maximale du spectre est proportionnelle à la période d'échantillonnage, soit :

$$v_{\max} = f_s / 2 = \frac{1}{T_e} / 4 = 3.10^{-6} \quad (\text{IV.146})$$

Alors que la valeur minimale dépend de T_ω :

$$v_{\min} = \frac{1}{T_\omega} / 4 = 1.8.10^{-7} \quad (\text{IV.147})$$

Lorsque la fenêtre d'observation augmente $T_\omega = 10\tau$ et la période d'échantillonnage $T_e = \tau / 10.n_x$ diminue, les limites du spectre prennent pour valeurs :

$$v_{\max} = f_s / 2 = \frac{1}{T_e} / 4 = 3.10^{-5} \quad \text{et} \quad v_{\min} = \frac{1}{T_\omega} / 4 = 1.8.10^{-8} \quad (\text{IV.148})$$

Le paragraphe suivant présente la signature spectrale de la température à la sortie du circuit équivalent dans les deux cas illustrés en trait plein sur la Fig.IV.23 pour montrer l'influence des paramètres temporels sur la qualité des résultats.

Nous choisissons les mêmes caractéristiques thermiques du matériau présentées dans le paragraphe IV.1.2.2 décrivant la résolution analytique de la diffusion thermique dans un tube rempli d'eau :

$$\begin{aligned} C_p &= 4186 \text{ J.Kg}^{-1} . \text{K}^{-1} \\ \lambda &= 0.6 \text{ W.m}^{-1} . \text{K}^{-1} \\ \rho &= 998 \text{ Kg.m}^{-3} \end{aligned} \quad (\text{IV.149})$$

Les sources de températures aux extrémités du circuit de la Fig.IV.20 sont telles que ΔT_1 décrit un vecteur de N valeurs correspondant au spectre de la température pour les deux cas suivant :

$$T_{\omega} = \tau \quad \text{et} \quad T_e = \Delta^2 \tau \quad (IV.150)$$

et

$$T_{\omega} = 10\tau \quad \text{et} \quad T_e = \Delta^2 \tau / 10 \quad (IV.151)$$

Nous choisissons pour les deux cas $n_x=4$ de manière à obtenir quatre cellules pour représenter la température à la première position.

Dans les Fig.IV.24 et Fig.IV.25, sont représentées les spectres des signaux calculés en sortie du circuit équivalent pour les quatre positions spatiales suivantes $x = \frac{1}{4} \cdot L_0$, $x = \frac{2}{4} \cdot L_0$, $x = \frac{3}{4} \cdot L_0$, et $x=L_0$ ou autrement dit pour les 1, 2, 3 et 4^{ème} cellules $\Delta R.\Delta C$. La Fig.IV.24 correspond à la condition choisie pour les sources thermiques de l'équation (IV.150) tandis que la Fig.IV.25 utilise l'hypothèse de l'équation (IV.151).

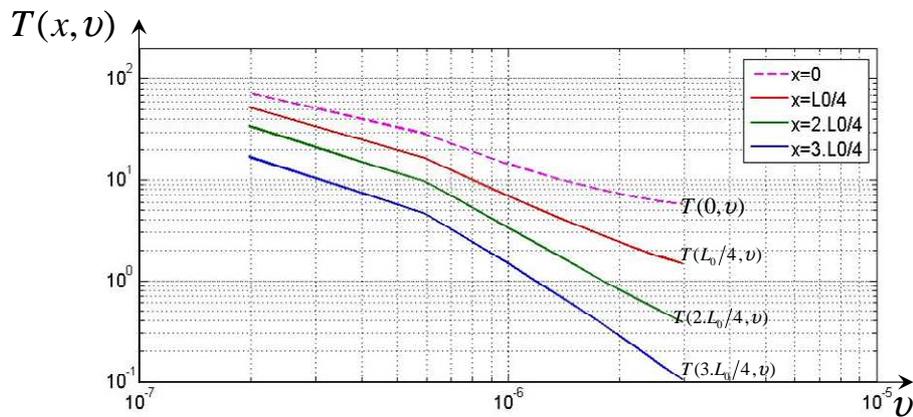


Fig.IV.24 : Spectre de mauvaise résolution de la température en sortie du système

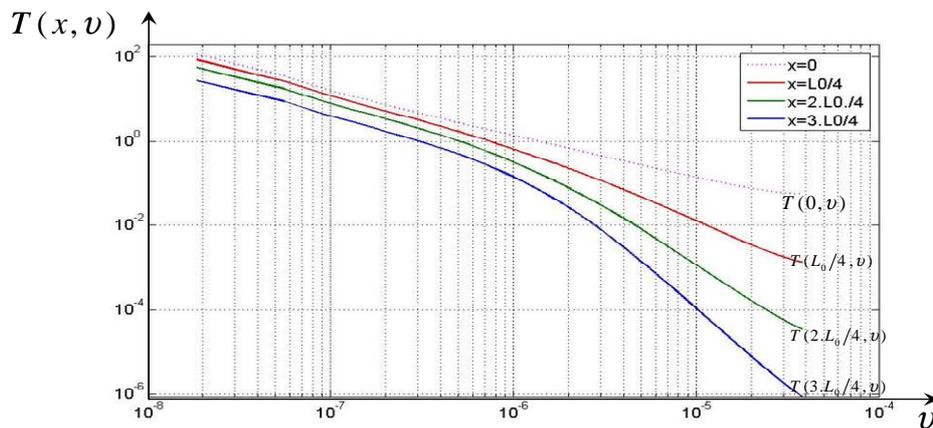


Fig.IV.25 : Spectre de bonne résolution de la température en sortie du système

Nous observons naturellement qu'au plus la température est calculée loin de la source, au plus la puissance (soit la surface générée par les courbes) diminue.

L'algorithme de la TFD inverse sur ces quatre derniers signaux permet de retrouver simplement l'évolution temporelle du signal.

Il ne restera alors qu'à soustraire à ces derniers signaux la rampe de Nicholson $Ni(t)$ pour obtenir l'évolution des températures dans le domaine temporel.

Les courbes des *Fig.IV.26* et *Fig.IV.27*, confrontent l'évolution temporelle de la température simulée par les expressions analytiques du paragraphe IV.2.2.2, et par la MKCE illustrée respectivement en trait pointillé et en trait plein pour les cinq positions spatiales respectivement de haut en bas suivantes :

$$x=0.L_0, \quad x=\frac{1}{4}.L_0, \quad x=\frac{2}{4}.L_0, \quad x=\frac{3}{4}.L_0, \quad \text{et} \quad x=L_0.$$

Fig.IV.26, les conditions imposées à la source thermique T_ω et T_e respectent les conditions de l'expression (IV.150), la *Fig.IV.27* tient compte des conditions de l'expression (IV.151).

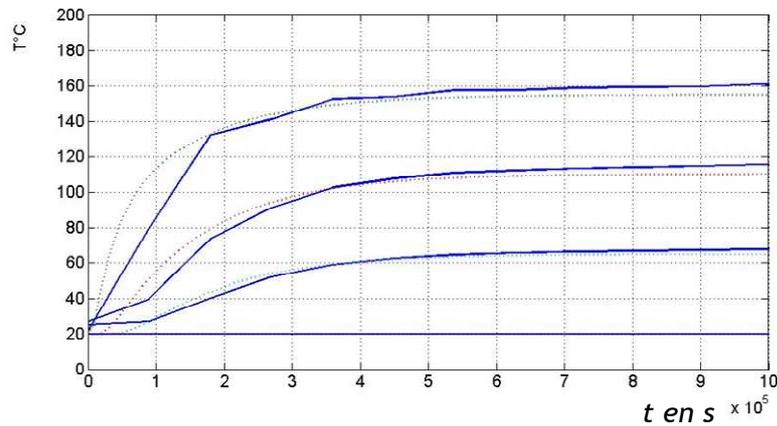


Fig.IV.26 : Réponse temporelle de mauvaise résolution de la température en sortie du système

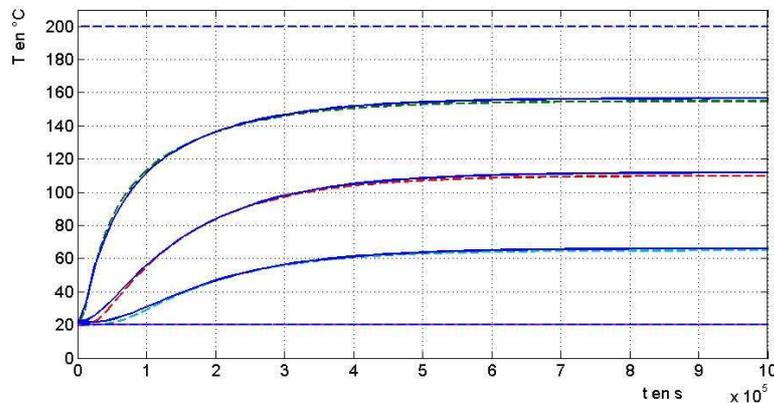


Fig.IV.27 : Réponse temporelle de bonne résolution de la température en sortie du système

Les deux courbes pour $x=0$ et $x=L_0$, sont indépendantes du temps. Elles respectent les conditions que nous avons imposées aux extrémités du système. La chaleur apportée au système sous forme d'une source de température de $T_1=180^\circ\text{C}$ est ajoutée à la température ambiante $T_0=20^\circ\text{C}$ pour donner la courbe du haut d'amplitude 200°C . A l'extrémité L_0 du tube l'amplitude de la courbe correspond à la température ambiante T_0 fixée à 20°C . Les trois courbes évoluant suivant une forme exponentielle tendent respectivement de haut en bas vers les températures suivantes :

- $\frac{3.T_1}{4} + T_0 = 155^\circ C$,
- $\frac{2.T_1}{4} + T_0 = 110^\circ C$
- $\frac{1.T_1}{4} + T_0 = 65^\circ C$

Les résultats présentés sur la première courbe *Fig.IV.26* révèlent une représentation grossière de la diffusion thermique causée par une mauvaise approximation de la fenêtre d'observation T_0 et de la période d'échantillonnage T_e de la source thermique.

En respectant les conditions établies dans l'équation (IV.151), nous obtenons dans la *Fig.IV.27*, une très bonne résolution.

Les deux paragraphes IV.1 et IV.2 traitaient respectivement de l'analyse indépendante des phénomènes électriques puis des phénomènes thermiques. Nous présentons dans le paragraphe IV.3, la formulation de l'interaction électrothermique entre ces deux sous-systèmes. Nous aurons alors montré l'intérêt d'utiliser la MKCE pour résoudre des systèmes multiphysiques.

IV.3 Formulation du couplage électrothermique par la MKCE

Nous considérons dans cette partie l'étude du système original rappelé dans la *Fig.IV.28*.

Par une expérience de pensée, nous admettons que les courants et tensions électriques dans le câble génèrent une onde TEM se propageant suivant Ox . Par hypothèse, la source de perturbations thermiques du système provient uniquement de la polarisation par le champ électrique des molécules d'eau, provoquant ainsi l'échauffement du matériau suivant la même direction Ox . Cela signifie que la température dissipée par effet joule dans le conducteur principal est négligée.

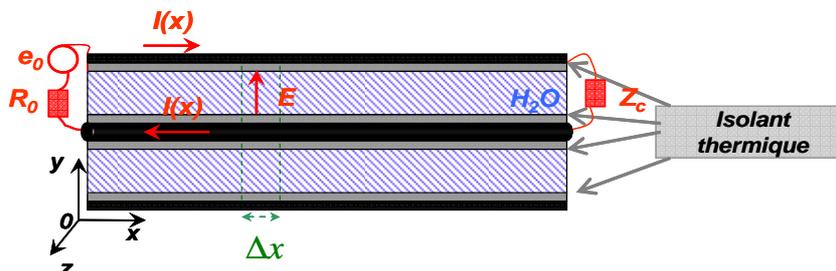


Fig.IV.28 : Analyse multiphysique sur un câble coaxial

La source de perturbation thermique est ici distribuée tout le long du câble, c'est-à-dire que pour chaque élément de longueur Δx , les pertes dans le diélectrique accumulées dans la conductance électrique équivalente engendrent une source de puissance thermique qui pourra être mise en parallèle à la capacité thermique équivalente dans le circuit thermique.

Dans ce cas précis, nous proposons d'utiliser la *MKCE* pour manipuler simplement ces grandeurs multiphysiques. Cet outil sera mis à l'épreuve en appliquant à la source e_0 située à $L=0$, différentes formes de signaux temporels fréquemment rencontrés.

Comme nous le conseillons au chapitre I, nous dissocions le système multiphysique de la *Fig.IV.28* en deux sous-volumes topologiques. Notons que le terme « découpage topologique » n'est alors plus vraiment approprié. En effet, la distinction entre les sous-volumes s'opère non plus sur la géométrie du système mais sur les deux phénomènes physiques évoluant en interactions dans ce même système.

Le premier sous-volume correspond donc à la propagation électrique suivant la direction Ox du câble coaxial, tandis que le second sous-volume caractérise la diffusion de la chaleur suivant la même direction Ox de ce même câble.

Ces deux phénomènes physiques ont été représentés dans les paragraphes précédents de manière indépendante par l'association d'éléments électriques équivalents R , L , C et G .

En incluant le couplage électrothermique à ces deux modèles, nous simulerons l'échange énergétique de la manière illustrée schématiquement dans la *Fig.IV.29* :

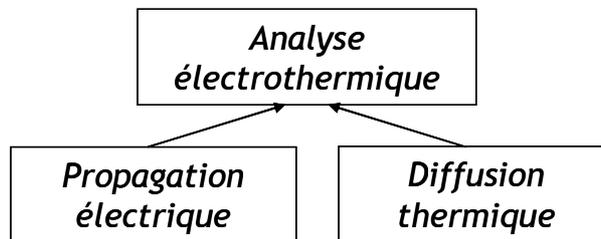


Fig.IV.29 : Découpage topologique du câble coaxial

Avant d'entrer dans les détails de l'algorithme, il est nécessaire de rappeler que les phénomènes électriques sont évidemment considérés en régime permanent devant les phénomènes thermiques qui sont beaucoup plus lents. Dans le modèle électrique équivalent du couplage électrothermique, l'élément Δt de temps critique pour une bonne résolution sera obtenu à partir des caractéristiques thermiques.

Les incréments Δt et Δx seront choisis en fonction de l'évolution temporelle, spatiale ou spatiotemporelle de la température que l'on veut simuler.

En effet, si l'on désire représenter uniquement la température $T(L_0, t)$ en fonction du temps à un point L_0 fixé, nous nous efforcerons de choisir Δt suffisamment petit pour obtenir une bonne résolution temporelle. Dans le cas où l'on désire représenter la température en fonction de la variable x à un temps t_1 donné $T(x, t_1)$, nous choisirons un incrément de temps Δt plus grand pour alléger les calculs mais nous choisirons Δx suffisamment petit pour représenter correctement la propagation et la diffusion spatiale.

Dans le dernier cas, l'objectif est de représenter sur un même graphique l'évolution spatio-temporelle de la température $T(x, t)$. Dans ce cas, il est alors nécessaire de choisir les deux incréments Δt et Δx suffisamment petits pour représenter correctement le signal final sur un graphe en *3D*. Evidemment, ce dernier cas de figure demande beaucoup plus de ressource de calcul.

Enfin, notons que la fonction de transfert que nous allons établir dans ce paragraphe, exige en entrée du système des grandeurs exprimées sous la forme spectrale. Pour cela, les paramètres électriques ou thermiques d'entrées exprimés dans le domaine temporel, seront transformés en utilisant les algorithmes de la *TFD*. En sortie, nous retrouverons l'allure des signaux dans le domaine temporel en appliquant la *TFD* inverse. Cela sera détaillé dans le paragraphe suivant.

Pour présenter l'implémentation du système sous la MKCE, nous avons choisi pour alléger les illustrations, un nombre $n_x=2$ cellules suivant la dimension $0x$. Nous réunissons alors dans la même figure les deux circuits électrique et thermique équivalents définis dans les paragraphes IV.1.1 et IV.1.2.

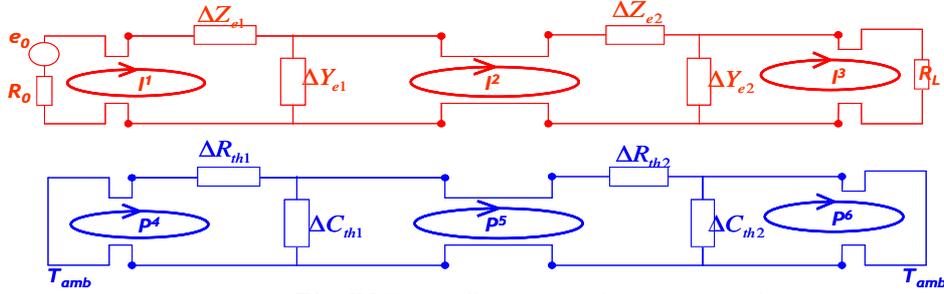


Fig.IV.30 : Couplage électrothermique

Comme il a été dit dans les paragraphes concernés, les deux modèles électrique et thermique choisis sont représentés indépendamment par les trois tenseurs courants, $fém$ et impédances pour la ligne électrique et puissances, différences de température et opérateurs pour la ligne thermique. Ces tenseurs définis dans l'espace des mailles sont représentés sous la forme de matrices que l'on rappelle dans les équations (IV.152) et (IV.153) :

$$(I) = \begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \end{pmatrix} \quad (e_e) = (e_0 \quad 0 \quad 0)$$

$$Z_e = \begin{bmatrix} R_0 + \Delta Z_{e1} + \frac{1}{\Delta Y_{e1}} & -\frac{1}{\Delta Y_{e1}} & 0 \\ -\frac{1}{\Delta Y_{e1}} & \frac{1}{\Delta Y_{e1}} + \Delta Z_{e2} + \frac{1}{\Delta Y_{e2}} & -\frac{1}{\Delta Y_{e2}} \\ 0 & -\frac{1}{\Delta Y_{e2}} & \frac{1}{\Delta Y_{e2}} + R_L \end{bmatrix} \quad (IV.152)$$

$$(P) = \begin{pmatrix} P^4 \\ P^5 \\ P^6 \end{pmatrix} \quad (e_{th}) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\zeta_{th} = \begin{bmatrix} \Delta R_{th1} + \frac{1}{j\omega\Delta C_{th1}} & -\frac{1}{j\omega\Delta C_{th1}} & 0 \\ -\frac{1}{j\omega\Delta C_{th1}} & \frac{1}{j\omega\Delta C_{th1}} + \Delta R_{th2} + \frac{1}{j\omega\Delta C_{th2}} & -\frac{1}{j\omega\Delta C_{th2}} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega\Delta C_{th2}} & \frac{1}{j\omega\Delta C_{th2}} \end{bmatrix} \quad (IV.153)$$

De la même manière que le couplage par diaphonie, ces six tenseurs sont regroupés en trois catégories dans trois supers-tenseurs nommés tenseur des flux f^j , tenseur des efforts e_i et tenseur des opérateurs ζ_{ij} illustrés dans les équations suivantes dans l'espace des mailles :

$$(f) = \begin{pmatrix} (I) \\ (P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \\ P^4 \\ P^5 \\ P^6 \end{pmatrix} \quad (IV.154)$$

Le tenseur des efforts sources :

$$(e) = ((e_e) \quad (e_{th})) = (e_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (IV.155)$$

Et finalement le tenseur des opérateurs :

$$(\xi) = \begin{pmatrix} (Z_e) & (0) \\ (0) & (\zeta_{th}) \end{pmatrix} \quad (IV.156)$$

Avant d'introduire l'interaction électrothermique proprement dite, discutons du type de modèle de couplage choisi pour une adaptation simple à la MKCE.

Comme nous l'avons observé au cours de ce manuscrit, la MKCE offre de nombreuses possibilités vis-à-vis de la représentation d'un couplage. En particulier, comme nous l'avons abordé, suivant la nature physique de l'interaction, la modélisation peut s'opérer à l'aide d'une impédance dans l'espace des branches (couplage électrique), dans l'espace des mailles (couplage magnétique) ou des réseaux (couplage en champ lointain).

De par la nature physique du couplage électrothermique, il sera aisé de trouver une source de courant équivalente traduisant le transfert d'énergie électrique en énergie thermique. C'est pour cela que nous décidons d'utiliser pour simuler l'interaction non plus le tenseur des opérateurs, mais le tenseur des *fém* sources dans l'espace tensoriel adapté. Ce modèle est attirant de par sa souplesse de mise en œuvre sous la MKCE.

La principale caractéristique de ce modèle suppose que le couplage est unilatéral, c'est-à-dire qu'il existe par exemple une influence entre la propagation électrique et la diffusion de la chaleur dans le câble mais qu'inversement, la diffusion thermique n'a aucune influence sur la propagation électrique.

IV.3.1 Introduction du couplage par des *fém* sources équivalentes

Le lien de proportionnalité direct entre les phénomènes électriques et thermiques concerne les grandeurs de types puissances. La source de perturbation thermique est directement identifiable à la puissance électrique active traversant la conductance.

$$P_{th} = P_e \quad (IV.157)$$

Pour cela, comme il est illustré dans la *Fig.IV.31* pour un élément Δx de la ligne, l'interaction électrothermique peut être matérialisée grâce à la source de puissance thermique P_{th} disposée en parallèle à la capacité thermique ΔC_{th} :

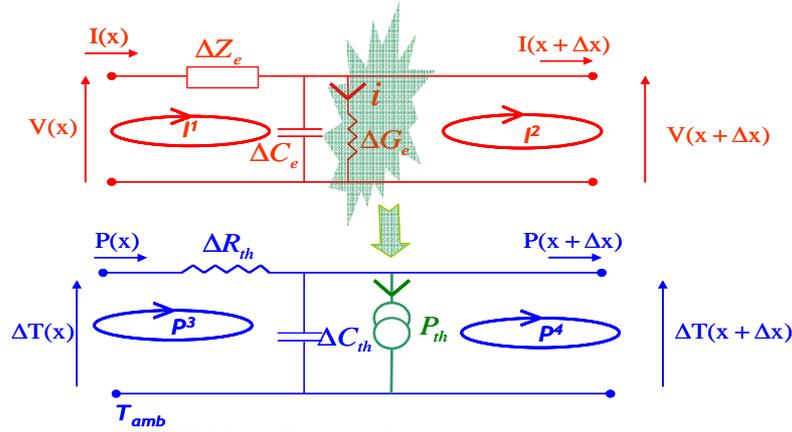


Fig.IV.31 : Source de puissance thermique équivalente

P_{th} s'exprime dans l'équation (IV.158) en fonction du courant de branche noté i dans la Fig.IV.31, circulant dans la conductance ΔG_e .

$$P_{th} = i^2 / \Delta G_e \quad (IV.158)$$

Pour adapter le modèle du circuit équivalent sous le formalisme de *G.Kron*, nous appliquons la transformation de *Norton-Thévenin* à cette source de puissance en parallèle avec la capacité thermique ΔC_{th} afin d'obtenir des sources de type *fém*. Dans ce cas, la source de type flux est équivalente à une source de type effort disposée en série avec la capacité thermique comme l'illustre la Fig.IV.32.

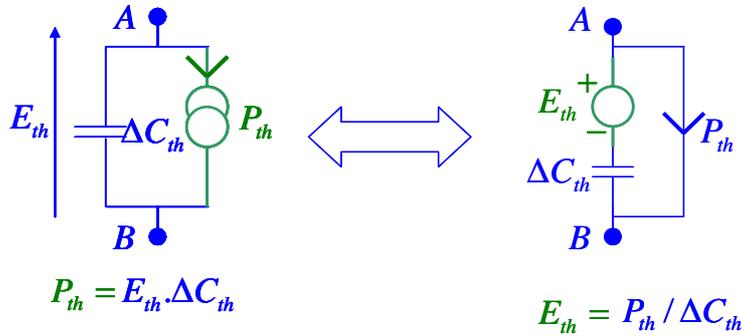


Fig.IV.32 : Conversion entre un circuit de Norton (à gauche) et de Thévenin (à droite)

L'effort thermique E_{th} équivalent s'exprime en fonction de la puissance thermique source P_{th} et de la capacité thermique ΔC_{th} que l'on retrouve dans l'expression de droite de la Fig.IV.32.

Ces sources thermiques sont alors distribuées sur les n_x cellules représentatives du câble coaxial comme le montre l'exemple à deux cellules ci-dessous :

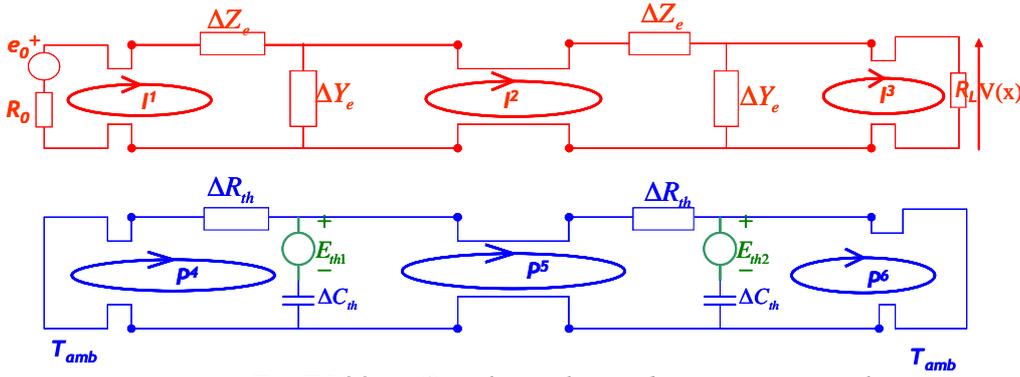


Fig.IV.33 : Couplage électrothermique équivalent

Les interactions électrothermiques sont alors simplement prises en charges dans la MKCE grâce au tenseur des efforts e_i dans lequel des termes possédant des dimensions assimilables à des variations de températures seront disposés sur chacune des branches concernées par le couplage.

A l'aide des matrices de connexion (C) et d'interconnexion (F) de la ligne thermique définies dans les équations (IV.137) et (IV.141) nous obtenons directement le tenseur des efforts donné dans l'expression (IV.159) dans l'espace des six courants de maille.

$$(e) = (e_0 \quad 0 \quad 0 \quad -E_{th1} \quad (E_{th1} - E_{th2}) \quad E_{th2}) \quad (IV.159)$$

Les autres tenseurs flux f^j et des opérateurs ζ_{ij} sont inchangés :

$$(f) = \begin{pmatrix} (I) \\ (P) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\xi) = \begin{pmatrix} (Z_e) & (0) \\ (0) & (\zeta_{th}) \end{pmatrix} \quad (IV.160)$$

Les valeurs spectrales des flux de maille s'obtiendront grâce à la multiplication à droite de la matrice inverse des opérateurs par le vecteur des efforts.

$$(f) = (\zeta)^{-1} \cdot (e) \quad (IV.161)$$

Un retour à l'espace des branches permet d'obtenir chacune des puissances des branches contenant ΔC_{th} de la Fig.IV.33.

En multipliant ces puissances thermiques de branches P_{thb} par l'opérateur thermique $j\omega\Delta C_{th}$, nous obtenons les variations de température distribuées le long du câble :

$$\Delta T = \frac{P_{thb}}{j\omega\Delta C_{th}} \quad (IV.162)$$

Nous pourrions également envisager l'étude inverse du comportement de la propagation de la tension électrique sur un câble coaxial perturbé par une augmentation de la température du milieu. Dans ce cas, des sources de perturbations thermoélectriques seraient distribuées le long de la ligne électrique sur les branches contenant les admittances électriques ΔY_e .

IV.3.2 Présentation de trois configurations de simulation

Afin de présenter la robustesse du modèle, nous choisissons trois configurations se différenciant par la nature des signaux électriques sources injectés dans le câble coaxial ou par les propriétés de propagation électrique du système.

Les trois signaux sources appelés $w(t)$ pour rappeler le terme anglophone window, correspondent aux signaux enveloppes d'une sinusoïde de fréquence f .

La première source électrique notée $w_1(t)$ est une impulsion temporelle de courte durée d'amplitude V_0 . La seconde source électrique notée $w_2(t)$ est un échelon temporel d'amplitude V_0 . La troisième source électrique sera identique à la première $w_3(t) = w_1(t)$. C'est la ligne électrique proprement dite qui sera légèrement modifiée par l'insertion de pertes électriques supplémentaires. De cette manière, le courant se propageant le long du conducteur central est atténué et modifiera la distribution des sources de chaleur.

Dans chacun de ces trois cas, les éléments de longueur Δx et de temps Δt seront examinés de manière à obtenir une résolution convenable.

IV.3.2.1 Réponse impulsionnelle

Nous présentons dans la Fig.IV.34, la fonction impulsion $w_1(t)$ d'amplitude V_0 , de durée T_{ech} simulé sous Matlab.

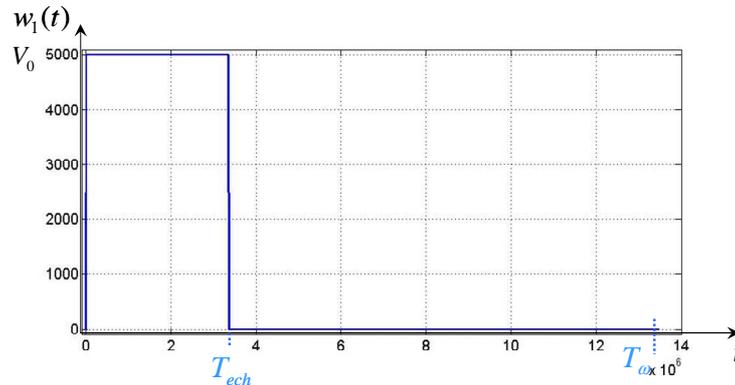


Fig.IV.34 : Impulsion source sous Matlab

$w_1(t)$ est générée dans la sous-fonction nommée 'sourceTFD' en annexe IV. Elle prend la description analytique détaillée dans l'expression (IV.163) :

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad w_1(0,t) = 0 \\ 0 < t < T_{ech} & \quad w_1(0,t) = V_0 \\ T_{ech} < t < \infty & \quad w_1(0,t) = 0 \end{aligned} \quad (IV.163)$$

Ce signal électrique temporel doit être préalablement transporté dans le domaine spectral pour être injecté dans la fonction de transfert caractérisée précédemment. La sous-fonction *sourceTDF* fournira en sortie le spectre de l'échelon de la Fig.IV.34.

$$TF[w_1(t)] = W_1(f) \quad (IV.164)$$

Comme nous l'avons analysé dans le paragraphe IV.1.2.4.2 dédié au paramétrage du traitement numérique au moyen de la TFD, nous choisissons la période d'échantillonnage T_e , la fenêtre temporelle T_ω du signal puis l'incrément Δx correspondant à la longueur d'un élément du câble coaxial.

Le critère de choix de T_e sera lié à la constante de temps du circuit équivalent thermique de manière à résoudre convenablement les phénomènes transitoires thermiques :

$$T_e = \frac{\tau}{10} \quad (IV.165)$$

Le critère de choix concernant T_ω , la fenêtre temporelle d'étude, devra correspondre à une valeur supérieure à la constante de temps du circuit thermique :

$$T_\omega = 10.\tau \quad (IV.166)$$

Nous choisissons la durée T_{ech} comme une fraction de T_ω .

$$T_{ech} = T_\omega / 4 \quad (IV.167)$$

La réponse que nous souhaitons obtenir est le comportement de la température à un point x du câble en fonction du temps. Dans le cas où nous désirons connaître cette température aux points d'abscisse $x = L_0/4$, $x = L_0/2$, $x = 3.L_0/4$ ou $x = L_0$, l'incrément spatial Δx sera simplement choisi de manière à connaître ces quatre températures sur chacune des quatre cellules ΔR_{th} ΔC_{th} :

$$\Delta x = \frac{L_0}{n_x} \quad \text{avec} \quad n_x = 4 \text{ cellules} \quad (IV.168)$$

Toutes les valeurs numériques des paramètres électriques et thermiques sont identiques aux études préliminaires réalisées indépendamment sur les deux systèmes, mis à part la *fém* source de la ligne électrique que nous avons choisie suffisamment grande pour produire une dissipation thermique suffisante.

$$V_0 = 5000V \quad (IV.169)$$

Dans la sous-fonction que nous appelons '*ligne1el*' dans l'annexe IV, les paramètres primaires électriques R , L , C et G de la ligne sont calculés analytiquement par l'équation (IV.39). Les paramètres thermiques sont donnés par les expressions (IV.85), (IV.91) et (IV.94).

Dans la fonction *sourceTFD* donnée en annexe IV, la TFD appliquée à l'impulsion $w_1(t)$, prend la forme d'un sinus cardinal représenté par la fonction $W_1(x=0, f)$ sur la courbe bleue de la Fig.IV.35.

Ce dernier signal est alors injecté en entrée de la sous-fonction *ligne1el*. Nous retrouvons la tension aux bornes de l'admittance électrique de la ligne à l'abscisse $x=L_0$ sur la courbe rose nommée $W_1(x=L_0, f)$.

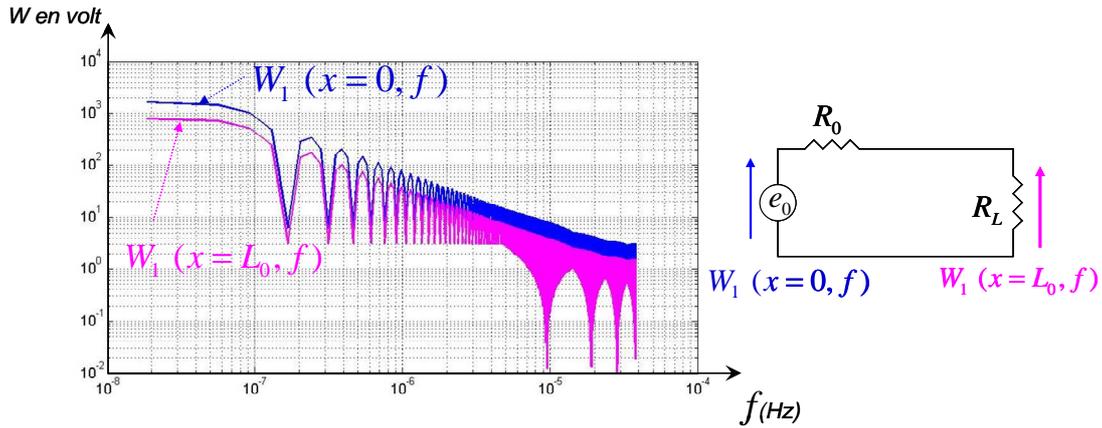


Fig.IV.35 : Spectre de l'échelon source

Les pertes électriques étant très faibles, nous retrouvons naturellement une atténuation d'un facteur d'amplitude de deux entre le spectre de la *fém* électrique source injectée à l'abscisse $x=0$ et le spectre de la tension simulée à l'abscisse $x=L_0$ du câble.

Les pics d'amplitudes observés apparaissent aux fréquences liées à la durée de l'impulsion telles que :

$$f_{res} = \frac{n}{2.T_{ech}} \quad \text{exemple : pour } n=2 : f_{res} = \frac{2}{2.(3,35.10^6)} = 3.10^{-7} \text{ Hz} \quad (IV.170)$$

La puissance électrique $P_e(f)$ dissipée par un élément de ligne, est exprimée en fonction de la conductance ΔG et de la tension $V(f)$ la traversant :

$$P_e(f) = V(f)^2 . \Delta G \quad (IV.171)$$

De cette manière, nous obtenons en sortie de la première sous-fonction *ligne-électrique*, les n_x spectres de la puissance électrique $P_e(n_x \Delta x, f)$ distribuée sur le câble.

Ces n_x sources de puissances électriques sont identifiées aux n_x sources de puissances thermiques $P_{th}(n_x \Delta x, f)$.

$$P_{th}(n_x \Delta x, f) = P_e(n_x \Delta x, f) \quad (IV.172)$$

Elles sont alors transformées grâce à la transformation Norton-Thévenin par n_x *fém* $E_{th}(n_x \Delta x, f)$ équivalentes disposées en séries par rapport aux capacités thermiques C_{th} distribuées tout le long de la ligne thermique comme illustré *Fig.IV.33*.

Reste alors à donner en entrée de la fonction calculant la réponse de la ligne thermique nommée en annexe IV *ligne-thermique*, les *fém* équivalentes $E_{th}(n_x \Delta x, f)$ qui occuperont les termes du tenseur des efforts sources.

En sortie de cette fonction, nous obtenons les deux tenseurs des mailles des efforts et des opérateurs dans le domaine spectral.

En inversant le tenseur opérateur que l'on multiplie au tenseur des efforts, nous trouvons le tenseur des flux de mailles sur les n_x cellules comme présenté dans l'équation (IV.161).

La *TFD* inverse permet finalement de retrouver le signal dans le domaine temporel. Les températures aux quatre points du câble coaxial sont données dans la *Fig.IV.36* :

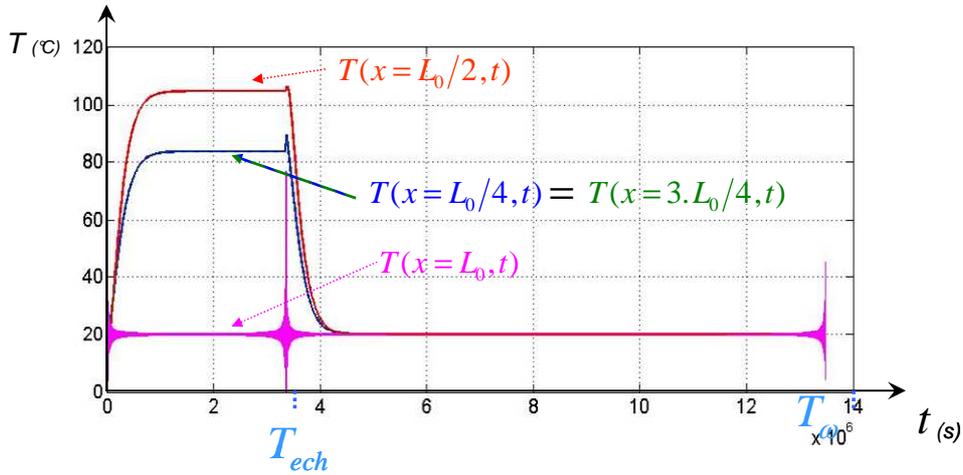


Fig.IV.36 : Réponse temporelle en température

Comme nous pouvons le constater, la température maximale atteinte est localisée au milieu du câble en $x = L_0/2$ illustrée par la courbe rouge nommée $T(x = L_0/2, t)$. Les deux variations de températures aux points $x = L_0/4$ et $x = 3.L_0/4$ tracées en bleu et en vert, sont identiques, ce qui est tout à fait naturel de par la symétrie des conditions imposées par la température ambiante aux deux extrémités du câble. En effet, pour une même fréquence, les sources distribuées le long de la ligne thermique ont des valeurs identiques et les deux courts-circuits annulant la variation de température aux deux extrémités du câble imposent une symétrie parfaite au système.

La variation de température au point $x = L_0$ est illustrée par la courbe rose nommée $T(x = L_0, t)$. Le court-circuit impose naturellement une variation de température ΔT nulle.

La période d'échantillonnage T_e et la durée du signal T_w choisies permettent effectivement une bonne représentation des phénomènes thermiques transitoires.

Les artefacts de calcul observés sur la courbe rose d'amplitude constante 20°C , résultent du repliement des spectres provoqués par les fronts montant et descendant supposés instantanés sur l'échelon de la Fig.IV.34.

Pour conclure, les amplitudes des variations de température montrent qu'en infligeant à ce câble des signaux électriques de puissances avoisinant les 250 KW pendant une durée de 280 heures , le système peut atteindre des températures de l'ordre de 100°C .

Pour un temps t_2 fixé en régime permanent ou en régime transitoire, l'étude de l'évolution de la température en fonction de x , exige de représenter un nombre de points spatial plus important.

Nous choisirons néanmoins un nombre raisonnable de cellules de manière à ne pas dépasser des temps de calcul de l'ordre de quelques minutes.

$$n_x = 12 \text{ cellules} \quad (IV.173)$$

Ensuite, il faut définir à quel instant t_2 on représente l'évolution spatiale de la température. En choisissant :

$$n_{t_2} = n_t / 4 \quad (IV.174)$$

le temps t_2 prendra comme valeur

$$t_2 = n_{t2} \cdot \Delta t = n_t / 4 \cdot \Delta t = T_\omega / 4 = T_{ech} \quad (IV.175)$$

De cette manière, comme le montre l'évolution temporelle de la température de Fig.IV.36, nous aurons atteint l'amplitude thermique du régime permanent à n'importe quel point du câble.

Après 2 à 3 minutes de simulation sous ces conditions, le logiciel *Matlab* renvoie la réponse temporelle de la température en fonction de la dimension spatiale x illustrée dans la Fig.IV.37 :

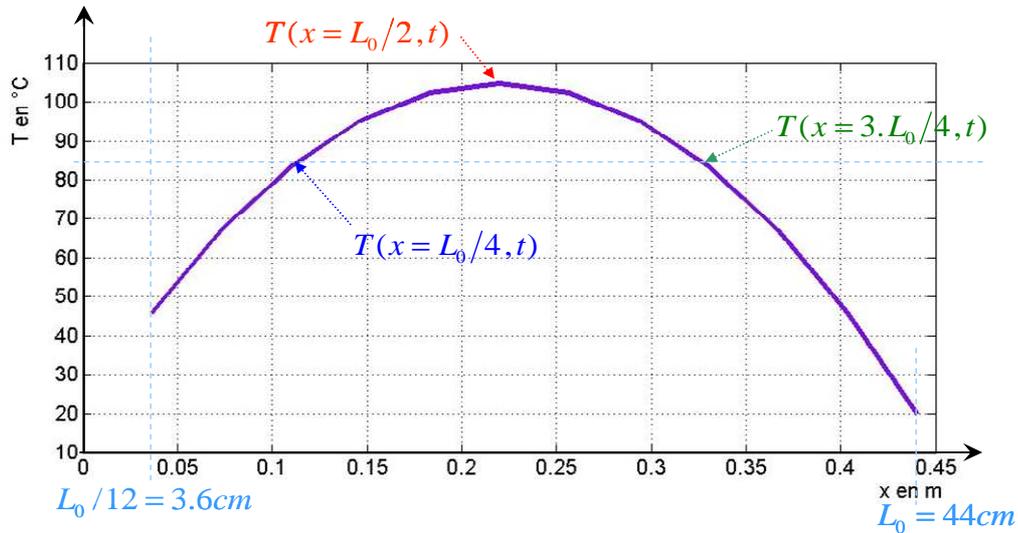


Fig.IV.37 : Température le long du câble coaxial

Nous retrouvons les amplitudes des températures en régime établi noté sur la Fig.IV.36 :

- $T(x = L_0 / 4) = 83^{\circ}\text{C}$
- $T(x = L_0 / 2) = 104^{\circ}\text{C}$
- $T(x = 3.L_0 / 4) = 83^{\circ}\text{C}$

La courbe tend vers la température ambiante de 20°C aux deux extrémités du tube. En s'appuyant sur le circuit équivalent de la Fig.IV.33, nous constatons que l'amplitude à l'extrémité gauche de 46°C correspond à la température au point $x=L_0/n_x$ soit $x=L_0/12$.

Dans le paragraphe suivant, le système multiphysique est maintenant soumis à un échelon électrique d'amplitude V_0 .

IV.3.2.2 Réponse à un échelon électrique

Au code de calcul de la partie précédente, nous modifions la sous-fonction *sourceTFD* pour obtenir la réponse d'un échelon électrique. Comme il est présenté dans le paragraphe IV.2.2.4.2 sur le paramétrage du traitement numérique au moyen de la *TFD*, nous utiliserons la rampe de Nicholson pour traiter numériquement le signal source.

La transformée de Fourier d'un signal non limité dans le temps est en effet problématique puisque elle fait intervenir une sommation jusqu'à l'infini.

Nous fixons donc une limite temporelle à l'échelon noté $w_2(t)$, indiquée par le temps T_ω que nous choisirons judicieusement.

La fonction $w_2(t)$ prend la description analytique présentée ci-dessous :

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad w_2(0,t) = 0 \\ t > 0 & \quad w_2(0,t) = V_0 \end{aligned} \quad (IV.176)$$

La fenêtre temporelle T_ω provoque une troncature génératrice d'artefacts qui affectent profondément le spectre. Pour compenser ce phénomène, on ajoute donc à la fonction échelon, la fonction rampe de Nicholson $N_\omega(t)$ illustrée par la Fig.IV.38, dont la description analytique est la suivante :

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad N_\omega(t) = 0 \\ 0 \leq t \leq T_\omega & \quad N_\omega(t) = -\frac{t}{T_\omega} V_0 \\ t > T_\omega & \quad N_\omega(t) = -V_0 \end{aligned} \quad (IV.177)$$

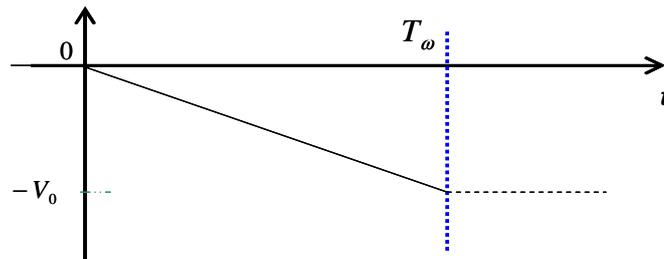


Fig.IV.38 : Rampe de Nicholson

La fonction réellement traitée par la TFD sera donc $w_{2N}(0,t)$ exprimée par la somme algébrique de (IV.107) et (IV.109), soit :

$$w_{2N}(0,t) = w_2(0,t) + N_\omega(t) \quad (IV.178)$$

Sous ces conditions, il peut être montré que le résultat du calcul du spectre n'est nullement altéré par la troncature puisque la fonction (IV.178) demeure nulle aux temps supérieurs à T_ω .

De la même manière que précédemment, les phénomènes transitoires thermiques détermineront le choix des paramètres T_ω et T_e . Le choix du nombre n_x de cellules est inchangé.

$$T_e = \frac{\tau}{10} \quad (IV.179)$$

et

$$T_\omega = 10.\tau \quad (IV.180)$$

et

$$\Delta x = n_x \cdot L_0 \quad \text{avec} \quad n_x = 4 \quad (IV.181)$$

La TFD de la source $w_{2N}(0,t)$ permet alors de présenter à l'extrémité du système multiphysique, la source sous sa forme spectrale notée $W_{2N}(0,f)$. C'est le rôle de la sous-fonction *sourceTFD* détaillée dans l'annexe IV.

Les Fig.IV.39 et Fig.IV.40 présentent respectivement l'échelon $w_2(0,t)$ puis le spectre $W_{2N}(0,f) = TF[w_{2N}(0,t)]$ simulé par le logiciel *Matlab*.

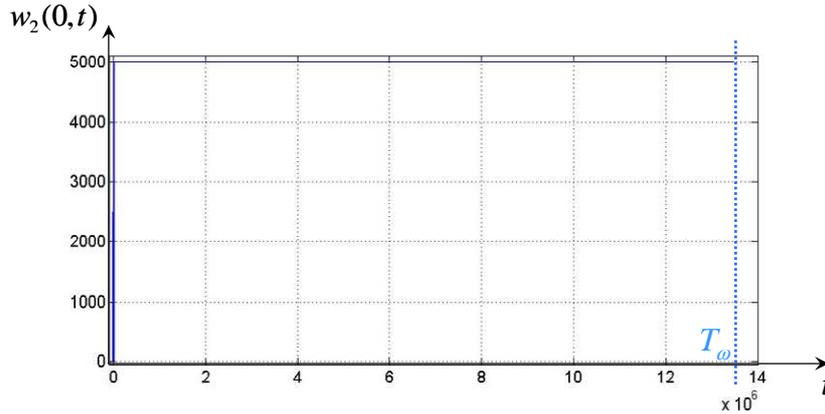


Fig.IV.39 : Echelon source

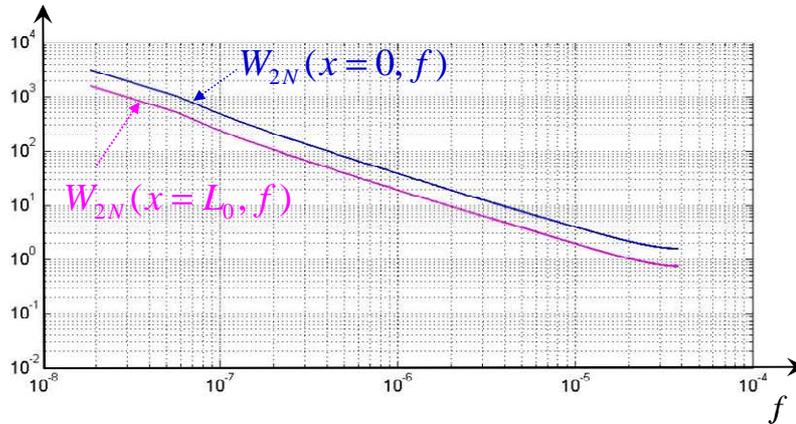


Fig.IV.40 : TFD de l'échelon additionné à la rampe de Nicholson

Pour chaque fréquence, la sous-fonction appelée *ligne-électrique* comportant en entrée le spectre source électrique $W_{2N}(0,f)$, renvoie en sortie les tenseurs impédances et *fém* permettant d'obtenir tous les courants de maille du circuit équivalent de la ligne électrique.

Les courants de branche i traversant les conductances électriques ΔG sont isolés dans un vecteur à n_x dimensions, afin de calculer par l'expression (IV.171) la puissance thermique délivrée par la puissance induite par le champ électrique local dans le matériau chauffé.

Les puissances thermique P_{th} sont alors considérées comme les paramètres d'entrées de la troisième sous-fonction que nous appelons *ligne-thermique*, dont le détail du code se trouve en annexe IV.

En sortie de cette dernière sous-fonction, nous retrouvons alors les tenseurs opérateurs et efforts permettant d'accéder, aux flux de mailles correspondant aux puissances thermiques diffusées dans le matériau.

Une *TFD* inverse permet de retrouver ce dernier signal dans le domaine temporel. Nous n'oublions pas d'y soustraire la rampe de Nicholson notée n_c en annexe IV pour retrouver le signal temporel réel.

Les variations de températures aux n_x points du câble coaxial sont alors affichées sur la Fig.IV.41 :

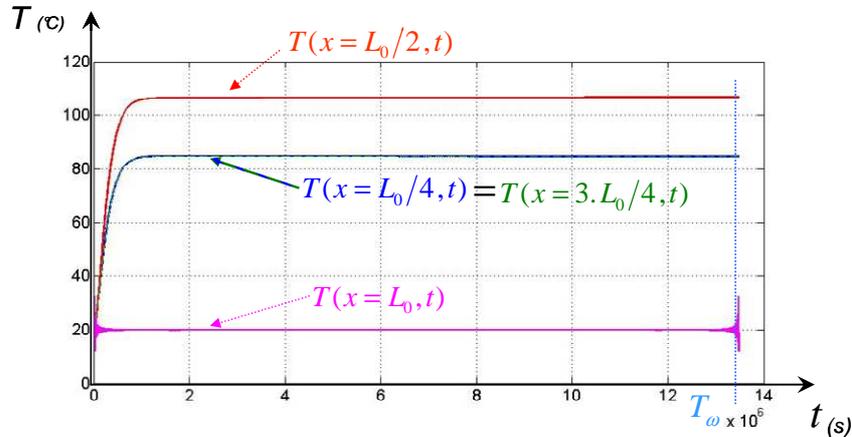


Fig.IV.41 : Réponse temporelle de la température à l'échelon électrique source

Les amplitudes atteintes en régime permanent par la température aux quatre points distincts du câble, sont identiques aux amplitudes obtenues par la source d'impulsion à ces mêmes points.

La rampe de Nicholson permet bien de supprimer les artefacts de calcul.

La réponse de la température en fonction de la variable spatiale x , à un instant t fixé de manière à ce que le système soit considéré en régime établi, prend la forme strictement identique du graphique illustré Fig.IV.37.

Le paragraphe suivant présente une troisième configuration d'interaction électrothermique qui obligera une étude spécifique de l'incrément spatial Δx .

IV.3.2.3 Réponse de la troisième source

La troisième source électrique est une impulsion identique à celle présentée dans la Fig.IV.34 du paragraphe précédent.

$$w_3(t) = w_1(t) \quad (IV.182)$$

Nous supposons dans ce dernier cas que la propagation des ondes *TEM* sur le système est fortement atténuée. L'allure de la tension en régime permanent, le long du conducteur central est notée en noire $\Psi(x)$ sur la Fig.IV.42 :

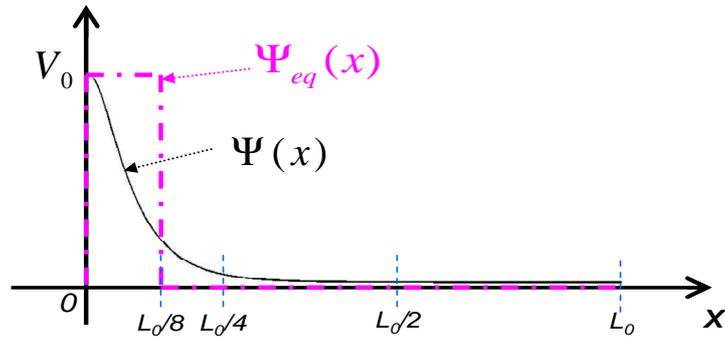


Fig.IV.42 : Evolution de la tension sur le câble coaxial

Dans ce cas, la tension évolue selon la dimension spatiale x . Il faudra, pour prendre en compte cette atténuation électrique, augmenter fortement le nombre n_x de cellules.

Pour simplifier les calculs, nous supposons que la propagation du signal électrique sur le câble se limite à la forme illustrée par la courbe rose pointillée notée $\Psi_{eq}(x)$ sur la Fig.IV.42.

Ainsi, en fixant un nombre de cellules $n_x=8$, seule la première cellule de la ligne thermique est excitée comme le montre le circuit multiphysique équivalent de la Fig.IV.43 dans lequel sont uniquement représentées deux cellules au lieu de huit pour alléger le dessin :

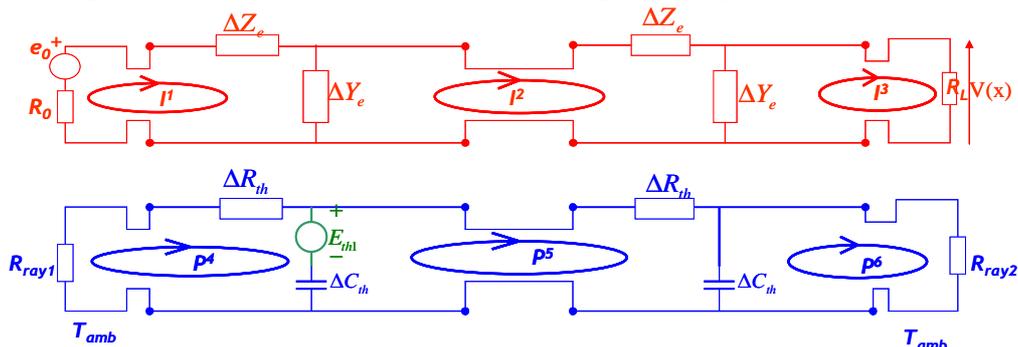


Fig.IV.43 : Circuit électrothermique équivalent

Le lecteur s'apercevra alors que le système ainsi obtenu est précisément l'exemple choisi dans le paragraphe IV.2.2. En effet, le système revient à simuler l'évolution thermique d'un tube chauffé à l'une de ses extrémités et dont la chaleur est uniquement dissipée à l'extrémité opposée du câble. Les résistances équivalentes de rayonnement thermique aux extrémités du câble nommées R_{ray1} et R_{ray2} sur la Fig.IV.43 modélisent ces pertes par rayonnement :

$$R_{Ray1} = \infty \text{ et } R_{Ray2} = 0 \quad (IV.183)$$

La charge infinie R_{ray1} imposera une puissance thermique nulle à l'extrémité gauche du câble alors que R_{ray2} imposera une variation de température nulle à l'extrémité droite. De cette manière, l'énergie thermique est parfaitement transmise au milieu extérieur et uniquement à l'extrémité droite du câble coaxial.

Nous présentons dans la courbe suivante l'évolution temporelle de la température pour quatre positions équidistantes le long du câble excité par l'impulsion électrique $w_3(t)$.

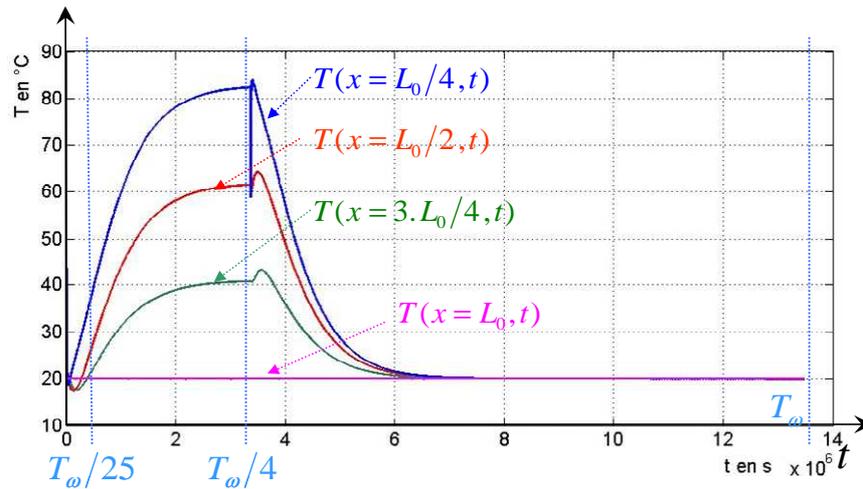


Fig.IV.44 : Réponse temporelle de la température

Comme nous le constatons sur la Fig.IV.44, le régime permanent est atteint à un temps $T_\omega/4$. Les températures sont alors réparties de manière uniforme comme le montre la courbe en pointillé bleu de la Fig.IV.45 qui illustre la distribution rectiligne de la température selon la dimension longitudinale x .

La température au temps $T_\omega/25$ correspond au régime transitoire thermique représenté selon l'évolution spatiale par la courbe violette en trait plein.

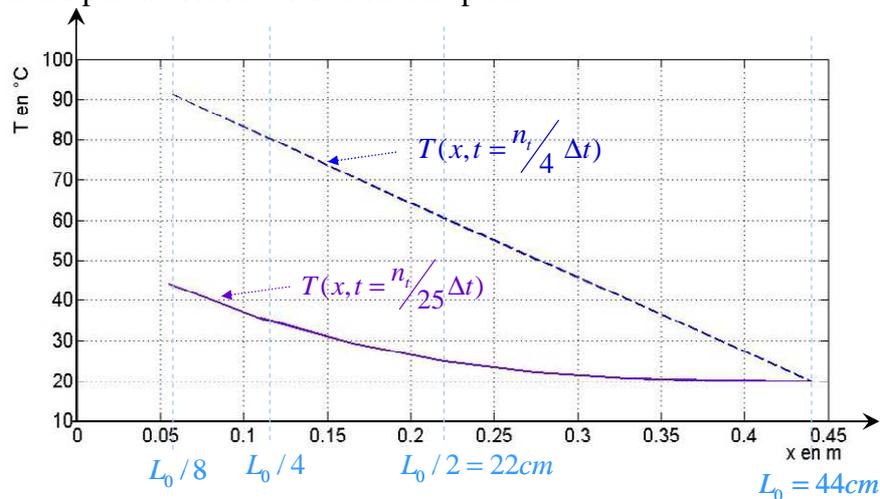


Fig.IV.45 : Réponse spatiale de la température

Nous retrouvons sur les deux courbes Fig.IV.44 et Fig.IV.45 pour le cas du régime établi de la courbe pointillée, les températures suivantes :

- $T=81.3^\circ\text{C}$ pour $x=L_0/4=11\text{cm}$,
- $T=60.6^\circ\text{C}$ pour $x=L_0/2=22\text{cm}$,
- $T=40.2^\circ\text{C}$ pour $x=3.L_0/4=33\text{cm}$.

Les températures obtenues pour le régime transitoire, sont naturellement plus faibles :

- 35.6°C pour $x=L_0/4=11\text{cm}$,
- 24.9°C pour $x=L_0/2=22\text{cm}$,
- 20.7°C pour $x=3.L_0/4=33\text{cm}$.

Une fois les modèles électrothermiques bien définis, il devient simple d'analyser le comportement d'une grandeur électrique, électromagnétique ou thermique tout en modifiant n'importe quel paramètre mis en jeu dans les différents couplages.

La *MKCE*, dont on veut montrer dans cette thèse l'efficacité face à l'étude de problèmes de *CEM* sur des systèmes complexes, semble bien adaptée non seulement pour la simulation des phénomènes multiéchelles et multiparamètres, mais également pour des problèmes multiphysiques.

Conclusion générale

Tant dans les domaines civils que militaires, la cohabitation des équipements électroniques au sein d'un système complexe, requiert le développement de nouveaux outils logiciels d'analyse du comportement des ondes électromagnétiques au sein d'un appareil. Les paramètres responsables de ces perturbations entre équipements électroniques sont de plus en plus nombreux, interviennent entre des matériels de différentes dimensions devant la longueur d'onde, et proviennent de phénomènes physiques de nature différentes.

La Méthode de Kron adaptée à la Compatibilité Electromagnétique (*MKCE*) que nous proposons dans cette thèse, n'a pas l'ambition de produire un logiciel universel mais plus modestement, d'unir plus facilement les simulations des phénomènes produits par différents outils. En effet, l'utilisation d'outils logiciels dans ce domaine fera toujours appel aux compétences de l'ingénieur. Seule l'expérience permet de choisir au mieux le simulateur numérique adapté aux besoins, de modéliser correctement le problème, d'interpréter les résultats numériques et finalement tirer les conclusions sur le domaine de validité de toutes tâches prédictives.

L'objectif de ces trois années de recherche a été de développer la *MKCE* pour essayer d'accompagner l'ingénieur *CEM* dans cette démarche difficile.

L'usage de la théorie tensorielle des circuits semblait tout à fait bien approprié à la résolution de ce type de problème. En effet, les circuits électriques utilisent un langage puissant tant dans leur représentation schématique que dans leur formulation algébrique. Cette facilité apparente n'efface toutefois pas une difficulté majeure rencontrée lors de la conversion d'un phénomène quel qu'il soit en un circuit équivalent. La progression de notre travail de thèse a donc consisté, par ordre croissant de difficultés, d'établir ce lien fondamental.

Dans le premier chapitre, nous avons analysé plusieurs méthodes numériques susceptibles de répondre aux exigences de l'analyse *CEM* des systèmes complexes. Nous retenons principalement que les codes *3D* basés sur la résolution numérique des équations de Maxwell, donnent d'excellents résultats pour l'analyse du comportement des champs électromagnétiques dans des cavités de géométrie complexe, mais utilisent des ressources de calcul très importantes. La description topologique des couplages *EM* par la résolution de l'équation *BLT* offre de larges possibilités pour les couplages entre réseaux de câbles, néanmoins, elle ne permet pas d'intégrer les composants non-linéaires.

L'intérêt majeur de la *MKCE* est d'exploiter conjointement les performances de ces méthodes numériques pour les assembler en vue de résoudre des problèmes complexes.

Le deuxième chapitre présente l'outil mathématique tensoriel abordé du point de vue de l'électricien. Les efforts, les flux et les opérateurs décrivent le modèle électrique équivalent. Ces termes prennent place dans des matrices de dimensions variant en fonction du nombre de branches du circuit. Les courants de branche forment alors la référence de l'espace tensoriel des courants de branche. De la même manière, les espaces tensoriels des mailles, des paires de nœuds, des moments et des réseaux, permettent de caractériser le même circuit électrique, mais sous une description algébrique différente. La transformation entre tous ces espaces est assurée grâce aux matrices de connexion *C*.

Une fois les circuits définis dans l'espace tensoriel approprié, les couplages sont introduits à l'aide de matrices ou tenseurs spécifiques. Ce peut-être la matrice d'interconnexion *F* s'il s'agit d'un couplage par conduction, mais ce peut être également un tenseur d'impédances de couplages mutuels s'il s'agit d'un couplage par rayonnement électromagnétique.

Une fois ces tenseurs déterminés dans l'espace tensoriel adapté aux couplages réels, il suffit de résoudre une simple équation tensorielle pour obtenir le tenseur inconnu.

En respectant la logique de l'analyse topologique d'un système électrique, l'outil tensoriel a été exploité dans le chapitre *III*, afin de montrer l'enchaînement de problèmes de difficultés croissantes.

Les perturbations électromagnétiques sont principalement conduites par les réseaux de câbles, une grande partie de ce chapitre en est donc consacrée.

L'application de l'outil tensoriel associé à la théorie des lignes, permet de modéliser une ligne de transmission puis un couplage par diaphonie. En reprenant ces deux modèles connus, la simulation d'un réseau de câble est aisée. Les systèmes ont été testés par la *MKCE* pour des configurations particulières telles que les couplages entre câbles en mode commun et en mode différentiel. La comparaison avec les résultats des mesures sur bancs d'essais, témoigne de la robustesse de la méthode. Pour disposer des modèles de couplages entre lignes de transmission disposées dans des milieux comprenant des gaines diélectriques, nous avons adapté l'analyse modale à l'outil tensoriel.

Le traitement des blindages électromagnétiques des câbles a nécessité la représentation à référence unique de masse suggérée par B. Démoulin et A.P.J. Van Deursen [III.9]. Les résultats montrent les différents phénomènes de diffusion, de diffraction et d'induction générés par les imperfections des blindages électromagnétiques.

En conclusion de ce chapitre, nous proposons la modélisation par la *MKCE* d'un couplage entre deux antennes électriques puis entre deux antennes magnétiques. Le dernier exemple d'interactions fait participer un couplage en champ lointain entre une antenne source et une ligne de transmission afin d'imager les possibilités multiples de ces champs d'application.

Les fonctions construites dans ce chapitre *III*, et développées en *annexe III*, constituent une bibliothèque des couplages électromagnétiques les plus typiques utiles à la résolution des systèmes de *CEM*.

Le chapitre *IV* présente les applications de la *MKCE* aux systèmes complexes. Le premier exemple est constitué d'un couplage entre des antennes monopoles via une cavité électromagnétique. L'analyse topologique dissocie l'analyse de ce système en cinq sous-volumes. Deux d'entre eux désignent les circuits électriques équivalents des monopoles de petites dimensions alors que deux autres sont surdimensionnés devant la longueur d'onde. Le dernier sous-volume correspondant à la cavité résonante est représenté par le modèle électrique original imaginé par M. Cauterman [IV.2]. Il s'agit de représenter chaque mode de résonance excité par les monopoles présents dans la cavité, par des circuits électriques résonants de type *R*, *L*, *C*. Ces paramètres électriques sont obtenus par identification des expressions analytiques du comportement du champ électrique dans une cavité, à la théorie des circuits résonants. La comparaison entre la *MKCE* et des mesures effectuées sur une boîte métallique pour différentes configurations, montre l'efficacité d'adaptation de la méthode aux problèmes de *CEM* multiparamètres et multiéchelles.

En plus de ces deux critères d'analyse, il est intéressant d'inclure dans un même logiciel des phénomènes de nature multiphysique. Les deux derniers paragraphes de cette thèse présentent donc un système composé d'une éprouvette assimilable, par expérience de pensée, à un câble coaxial dont le diélectrique possède les caractéristiques de l'eau. Dans ce cas de figure, le système est dissocié en l'étude indépendante de la propagation des signaux électriques et de la diffusion des signaux thermiques. Une fois les deux circuits équivalents établis, les couplages électrothermiques sont insérés entre les deux sous-systèmes dans l'espace tensoriel adapté. Les résultats de simulation montrent alors les variations spatiotemporelles de températures engendrées par la circulation d'un courant électrique dans l'éprouvette. De par la nature transitoire des phénomènes thermiques, nous avons montré que la *MKCE* s'adapte parfaitement aux simulations dans le domaine temporel, offrant ainsi de nouveaux horizons en terme d'analyse *CEM* des systèmes complexes.

Les perspectives d'évolution de la *MKCE* sont certainement prometteuses. Si son apparition est déjà effective dans l'industrie des transports, d'autres secteurs d'activités pourraient avantageusement tirer parti de ce formalisme. Cette approche ne pourra toutefois atteindre son niveau de maturité qu'après d'une analyse fondamentale liant le concept de tenseur au génie logiciel. De l'expérience acquise durant la préparation de cette thèse, nous avons le sentiment que la formulation tensorielle abordée par les mathématiciens donnerait à ce sujet un éclairage original ouvrant la voix à la réalisation de logiciels *CEM* de nouvelle génération.

Bibliographie

Chapitre I

- [I.1] **Pierre Degauque & Joël Hamelin,**
« *Compatibilité Electromagnétique bruits et perturbations radioélectriques* »,
DUNOD, 1990
- [I.2] **Pierre Degauque & Ahmed Zeddami,**
« *Compatibilité Electromagnétique, Tome 1 et 2, Des concepts de base aux applications* »,
Hermès, Lavoisier, 2007.
- [I.3] **Frédéric Hoëppe,**
« *Analyse du Comportement Electromagnétique des Chambres Réverbérantes à Brassage de Modes par l'Utilisation de Simulations Numérique* »,
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, décembre 2001.
- [I.4] **Christos Christopoulos,**
“*The Transmission-Line Modeling Method TLM*”,
IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory, 1995
- [I.5] **Sébastien Bazoli,**
« *Caractérisation et Simulation de la Susceptibilité des Circuits Intégrés face aux Risques d'Inductions engendrées par des Micro-ondes de Forte Puissance.* »,
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, octobre 2005.
- [I.6] **Clayton R. Paul**
“*Analysis of Multiconductor Transmission Lines*”,
Wiley, 1994.
- [I.7] **J.P. Parmantier,**
« *Approche topologique pour l'étude des couplages électromagnétiques* »,
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, décembre 1991.
- [I.8] **Carl E. Baum,**
“*Notes On EMP And Related Subjects*”,
Interaction Notes (EMP 3), Disc 1 of 2 - Notes 451-568, June 2001.
- [I.9] **Marc Olivas Carrion,**
« *Communications sur le réseau d'énergie électrique d'un véhicule : modélisation et analyse du canal de propagation* »,
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, juillet 2006.
- [I.10] **Gabriel Kron,**
“*Tensor Analysis of Networks*”,
New York : Wiley, 1939.
- [I.11] **O. Maurice,**
« *La compatibilité électromagnétique des systèmes complexes* »,
Lavoisier, 2007.

[I.12] **Bernhard Keiser, D.Sc.EE**
“*Principles of Electromagnetic Compatibility*”,
Artech ISBN: 0-89006-065-7, 1983.

[I.13] **Alain Charoy**
“*Compatibilité électromagnétique*”,
2^{ème} édition Dunod, 2004.

Chapitre II

[II.1] **Gabriel Kron,**
“*Four Abstract Reference Frames of an Electric Network*”,
IEEE Transactions on Power apparatus and Systems. VOL. PAS-87, No.3, March,
1968.

[II.2] **Gabriel Kron,**
“*A Method of Solving Very Large Physical Systems in Easy Stages*”,
Proceedings of the I-R-E, pp.680- April 1954.

[II.3] **Gabriel Kron,**
“*A set of principles to interconnect the solutions of physical systems,*”
Jour. Appl. Phys., vol. 24, pp. 965-980; August, 1953.

[II.4] **Gabriel Kron,**
“*Equivalent Circuit of the Field Equations of Maxwell-I*”,
Proceedings of the I-R-E, pp. 289-299, may 1944.

[II.5] **Gabriel Kron,**
“*Invisible Dual (n-1)-Networks Induced by Electric I-Networks*”,
IEEE Transactions on Circuit Theory, pp. 464-470, December 1965.

[II.6] **M. Denis-Papin & A. Kaufmann,**
« *Cours de calcul Tensoriel* »,
Albin Michel, 1966.

[II.7] **André Angot,**
« *Compléments de Mathématiques* »,
6^{ème} édition Masson&CIE, 1972.

[II.8] **J. Bass**
« *Cours de Mathématiques* »,
Tome I, 4^{ème} édition Masson&Cie, 1971.

[II.9] **Constantine A. Balanis**
“*Antenna Theory analysis and design*”,
Second edition Wiley, 1997.

[II.10] Yannick Poiré,

« *Étude de la C.E.M. des Alimentations à Découpage pour Systèmes Embarqués - Conception et Optimisation des Structures de Filtrés d'Entrée* »,
Thèse de Doctorat, INSA de Rennes, décembre 2007.

Chapitre III

[III.1] Bernard Démoulin

« *Initiation à la Compatibilité Electromagnétique* »,
Volume I & II, Edition septembre 2004.

[III.2] S.A. Schelkunoff

« *La théorie électromagnétique des lignes de transmission coaxiales et des écrans cylindriques* »,
Bell Syst. Tech, New-York, Octobre 1954.

[III.3] S.A Schelkunoff

« *The electromagnetic theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields* »
Oct 1934, Bell Syst. Tech vol.13.pp. 532-579

[III.4] E.F. Vance

« *Shielding Effectiveness of Braided Wire Shields* »,
IEEE Transactions on EMC, May 1975.

[III.5] E.F. Vance

« *Coupling to Shielded cables.* »
FL Krieger 1987

[III.6] L. Halme

« *Line transmission and Electromagnetic Screening.* »
Helsinki, Finland : 1980

[III.7] M. Tyni

« *The transfer impedance of coaxial cables with braided outer conductor* »
EMC Symp.. 1976.pp.410-419

[III.8] Thomas Kley

« *Optimized Single-Braided Cable Shields* »
IEEE, VOL. 35.No 1 FEBRUARY 1993

[III.9] B. Démoulin, A.P.J. Van Deursen

« *Deux approches pour établir le lien entre la notation usuelle d'Impédance de Transfert et le Formalisme des Lignes Couplées* »,
Proc. 10e Colloque International & Exposition sur la CEM (CEM2000). (pp. 98-103).
Clermont-Ferrand.

[III.10] Fred Gardiol, Jacques Neirynek

“ *Traité d’Electricité, Electromagnétisme*”,
Presses polytechniques et universitaires romandes, volume III, 2004.

[III.11] André Vander Vorst

“*Transmission, Propagation et rayonnement*”,
Third edition Mc Graw Hill, 2002.

[III.12] Fred E. Gardiol

“*Lossy Transmission Lines*”,
Artech House Boston.London ISBN: 0-89006-198-X, 1987.

[III.13] Guillaume Andrieu,

« *Elaboration et Application d’une Méthode de Faisceau Equivalent pour l’Etude des Couplages Electromagnétiques sur Réseaux de Câblages Automobiles*»,
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, décembre 2006.

[III.14] Laurent Paletta

« *Démarche Topologique pour l’Etude des Couplages EM sur des Systèmes de Câblages Industriels de Grande Dimension* »,
Thèse de Doctorat, Université Paris XI – ORSAY, septembre 1998.

[III.15] Cécile Poudroux

« *Etude de l’Incidence des Paramètres Primaires des Lignes Couplées sur la Précision de Prédiction de l’Amplitude des Parasites Induits sur des Torons Multifilaires.* »,
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, septembre 1992.

Chapitre IV

[IV.1] M. Cauterman,

« *Les chambres réverbérantes, une affaire de circuit* »,
Document interne, Juin 2005.

[IV.2] M. Cauterman,

« *Du fonctionnement des chambres réverbérantes* »,
Séminaire de Recherche DRE et TELICE, Lille, juillet 2005.

[IV.3] S. Bazzoli, S. Baranowski, M.Cauterman, B.Démoulin,

« *Simulation d’une cavité 2D par l’assemblage de résonateurs RLC* »,
144-145, 13e colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique (CEM 2006), St Malo, avril 2006.

[IV.4] Fred e. Gardiol,

«*Introduction to microwaves* »,
Artech house,1984.

- [IV.5] **Frederick M.Tesche, Michel V.Janoz, Tobjorn Karlsson**
“*EMC Analysis Methods and Computational models*”,
Editions John Wiley & sons, inc, p.145, 1997.
- [IV.6] **R.E. Collin**
“*Field Theory of Guided Waves*”,
IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory, 1991.
- [IV.7] **Sidney Frankel**
“*Multiconductor Transmission Line Analysis*”
Artech ISBN: 0-89006-054-1, 1977.
- [IV.8] **P.Grivet,**
« *Physique des lignes de haute fréquence et d’ultra-haute fréquence* »,
Tome I, éditions Masson & Cie, 1969.
- [IV.9] **Philippe Roux**
“ *Cours de thermique*”,
Source internet : <http://rouxphi3.perso.cegetel.net>, 2006
- [IV.10] **U.Hilger, L.Lei, S. Frei, M.Rudolph**
“ *Modeling of Electrical Igniters of Vehicle Occupant Restraint Systems for EMC Simulations*”,
Proc, 20th Int. Zurich Symposium on EMC, pp 169-172, Zurich 2009.
- [IV.11] **Mounir Rifi,**
« *Modélisation du Couplage Electromagnétique produit par des Champs Transitoires sur des Structures Filaires et des Pistes de Circuits Imprimés Connectées à des Composants Non-Linéaires* »,
Thèse de Doctorat, Université Mohammed V de Rabat, octobre 1996.
- [IV.12] **John D. Kraus & Ronald J.Marhefka,**
“*Antennas for all Applications*”,
Third edition Mc Graw Hill, 2002.
- [IV.13] **Warren L.Studzman & Gary A. Thiele**
“*Antenna theory and design*”,
Second edition Wiley, 1998.
- [IV.14] **D.A.Hill**
“*Electronic stirring for reverberation chambers*”,
IEEE Trans on EMC, Nov. 94.
- [IV.15] **Hubert H. Girault**
“ *Électrochimie physique et analytique*”,
Édition: 2, 2007.

Communications de l'auteur

Invitées :

S. LEMAN, M. EGOT, L. KONE, B. DEMOULIN,
" *Les CRBM : Principe physique et améliorations récentes* ",
Congrès Méditerranéen des Télécommunications, Tanger, Maroc, 12 au 14 mars 2008.

Colloques internationaux :

LEMAN S., KONE L., DENIAU V., BARANOWSKI S., DEMOULIN B.
" *Improvement of the reverberation chamber performances below the starting frequency* ",
Progress In Electromagnetics Research Symposium, PIERS 2007, Prague, Czech Republic,
august 27-30, 2007.

LEMAN S., DEMOULIN B., MAURICE O.,
" *Simple example for testing the tensorial analysis of electrical networks applied to EMC* ",
Symposium on Embedded EMC, 2emc, Rouen, France, october 18-19, paper 4C, 2007.

B. DEMOULIN, C. ALBU, S. LEMAN, L. KONE, S. BARANOWSKI,
« *Utilisation Conjointe du Brassage Mécanique et du Brassage Fréquentiel de Modes pour Localiser la « Starting Frequency » d'une Chambre Réverbérante* »,
TELECOM 2009 & 6ème JFMMA, Agadir, MAROC, March 11-13, 2009.

Colloques nationaux :

S. LEMAN, L. KONE, V. DENIAU, S. BARANOWSKI, et B. DEMOULIN,
« *Amélioration des performances d'une chambre réverbérante à brassage de modes en dessous de la fréquence minimale.* »
GDR Ondes, Bordeaux 21 au 23 novembre 2007.

S.LEMAN, B.DEMOULIN, O.MAURICE, M.CAUTERMAN, P.HOFFMANN,
" *Simulation d'une cavité EM par réduction de circuits électriques couplés formant une super matrice impédance.* "
(CEM-08), Paris, France, 20-23 Mai 2008. **Prix du meilleur papier scientifique.**

Physical Journal :

S.LEMAN, B.DEMOULIN, O.MAURICE, M.CAUTERMAN, P.HOFFMANN,
" *Use of the circuit approach to solve large EMC problems* "
Revue : Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Physique 10 (2009) pp.70–82
(doi:10.1016/j.crhy.2009.01.006).

Prix :

Prix du « *meilleur article doctorant* » décerné le 28 mai 2008 au Congrès **CEM08** à Paris pour les travaux de recherche sur la « *Simulation d'une cavité EM par réduction de circuits électriques couplés formant une super matrice impédance.* »

Annexe I :
Eléments de théorie de calcul
tensoriel

Le calcul tensoriel sait mieux la physique que le physicien lui-même. (P. LANGEVIN).

Le calcul tensoriel est vraiment le cadre psychologique de la pensée relativiste. C'est un instrument mathématique qui crée la science physique contemporaine comme le microscope crée la microbiologie. Pas de connaissances nouvelles sans la maîtrise de cet instrument mathématique nouveau. (G. BACHELARD)

L'invariance des lois de la physique par changement de référentiel est apparue comme un principe très général, qui s'applique à tous les domaines de la physique, de la mécanique à l'électromagnétisme.

De part la multitude de méthodes de modélisation de système physique représentable par des réseaux électriques, le calcul tensoriel permet une systématisation de résolutions des équations d'un système quel que soit leurs complexités, mais aussi permet une analyse topologique de sous systèmes pour une analyse méthodique. Les systèmes sont décomposés et analysés en éléments simples puis assemblés par diverses interactions.

Cette annexe est consacrée à la présentation de notions élémentaires sur l'algèbre tensorielle qui sera l'outil mathématique principal pour résoudre des problèmes de Compatibilité Electromagnétique de systèmes complexes.

Avant de se lancer dans les définitions et propriétés du calcul tensoriel, nous allons tout de suite introduire les notations indicielles, couramment utilisées dans ce domaine. Nous admettrons jusqu'à présent que cette représentation est la mieux adaptée.

A.I.1) Ecriture indicielle

Nous définissons dans cette partie la notation indicielle permettant de simplifier l'écriture des relations tensorielles.

Au lieu d'employer des variables ou des fonction, des lettres x,y,z,t,... nous utilisons une même lettre affectée d'un indice numérique placée en haut ou en bas soit x_1, x_2, x_3, x_4 ou x^1, x^2, x^3, x^4 . Cette écriture permettra de condenser considérablement ce genre d'expressions :

$$\begin{aligned}
 a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= \sum_{i=1}^{i=4} a_i x_i \\
 \frac{\partial u}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial u}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial u}{\partial x^4} dx^4 &= \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \\
 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} A^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} &= A^{11} \frac{\partial x^1}{\partial y^i} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} + A^{21} \frac{\partial x^2}{\partial y^i} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.I.1}$$

La convention d'Einstein.

Nous rencontrerons très souvent en calcul tensoriel des expressions mathématiques, où un même indice occupe à la fois une position supérieure et une position inférieure. C'est dans ce contexte qu'apparaît l'intérêt de la convention d'Einstein.

Cette notation consiste à supprimer le signe de sommation \sum . L'indice sur lequel se fait la sommation porte le nom d'indice muet. Nous donnons quelques exemples de cette notation :

$$\sum_{k=1}^n a_k^1 b_3^k \quad \text{devient} \quad a_k^1 b_3^k$$

$$Z_{\mu\nu} = \sum_{ab} L_\mu^a Z_{ab} L_\nu^b \quad \text{devient} \quad Z_{\mu\nu} = L_\mu^a Z_{ab} L_\nu^b$$
(A.I.2)

Cette convention s'applique de la manière suivante lorsqu'il s'agit de « dérivées partielles » :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \frac{\partial S}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^k} + \frac{\partial S}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^k} + \dots + \frac{\partial S}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial y^k} \quad \text{devient} \quad \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$$
(A.I.3)

Cette condensation d'écriture permet d'alléger considérablement les formules.

Nous introduisons maintenant *le symbole de Kronecker* :

$$\delta_{ij} = 1 \text{ pour } i=j$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j$$
(A.I.4)

Les indices peuvent s'écrire en haut, en bas ou d'une façon mixte, suivant les besoins sans que la signification soit modifiée :

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j$$
(A.I.5)

A.I.2) Définitions - Espace vectoriel affine - Espace métrique

Nous définissons rapidement le mot Espace :

On appelle « espace à n dimensions » l'ensemble des points tels que V, défini par ses r coordonnées V_1, V_2, \dots, V_r . L'idée d'espace est liée à celle du ou des systèmes de référence, par rapport auxquels les n coordonnées sont définies. Les généralisations mathématiques ont permis de passer du domaine usuel à 3 dimensions à un domaine « abstrait » à plus de 3 dimensions. Par exemple, en électricité, les réseaux dont les courants de maille (par exemple) sont pris comme coordonnées, nécessitent l'emploi d'un espace abstrait ayant autant de dimensions que le nombre de courants de maille indépendants.

Considérons un espace à r dimensions. Nous pouvons alors définir r vecteurs de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$, définissant chacun une unité de longueur propre à chacun des axes.

Soit le vecteur \vec{V} quelconque de coordonnées V_1, V_2, \dots, V_r . Le vecteur \vec{V} est alors caractérisé par la somme géométrique suivante :

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + \dots + V_r \vec{e}_r = \sum_k V_k \vec{e}_k$$
(A.I.6)

Dans le cas où il est impossible de comparer les longueurs $|e_1|, |e_2|, \dots, |e_r|$, nous dirons que l'espace à r dimensions considéré est un espace vectoriel affine. Dans le cas contraire, où l'on

peut trouver un étalon de longueur qui soit comparable à toutes les longueurs $|e_1|, |e_2|, \dots, |e_r|$, nous dirons qu'il s'agit d'un espace métrique.

En considérant l'espace affine, les vecteurs de base peuvent être choisis arbitrairement, ce qui nous laisse alors la possibilité d'une étude plus générale.

Lors de l'introduction de notion de distance, nous nous placerons dans l'espace métrique.

A titre d'exemple, un espace vectoriel affine à 3 dimensions peut être tracé pour représenter les surfaces des diagrammes thermodynamiques. Il n'y a évidemment aucun étalon de mesure commun entre la pression, le volume et la température absolue, et la distance entre deux points.

A.I.3) Changement de systèmes de coordonnées

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$ les vecteurs de base d'un premier système de référence et $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_r$ les vecteurs de base d'un nouveau système.

Si nous désignons par α_M^k la projection parallèlement à l'hyperplan défini par les autres axes, du vecteur de base \vec{E}_M (nouveau système) sur le vecteur de base \vec{e}_k (ancien système), nous avons les r équations :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_1 &= \alpha_1^1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_1^k \vec{e}_k + \dots + \alpha_1^r \vec{e}_r = \sum_k \alpha_1^k \vec{e}_k \\
 \dots & \\
 \vec{E}_M &= \alpha_M^1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_M^k \vec{e}_k + \dots + \alpha_M^r \vec{e}_r = \sum_k \alpha_M^k \vec{e}_k \\
 \dots & \\
 \vec{E}_r &= \alpha_r^1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_r^k \vec{e}_k + \dots + \alpha_r^r \vec{e}_r = \sum_k \alpha_r^k \vec{e}_k
 \end{aligned}
 \tag{A.I.7}$$

Ou écrit d'une manière simplifiée par la convention de Einstein :

$$\vec{E}_M = \alpha_M^k \vec{e}_k \quad (k, M=1, 2, \dots, r)$$

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^k & \dots & \alpha_1^r \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_M^1 & \dots & \alpha_M^k & \dots & \alpha_M^r \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_r^1 & \dots & \alpha_r^k & \dots & \alpha_r^r
 \end{bmatrix}
 \tag{A.I.8}$$

Le tableau des coefficients est la matrice α de la transformation linéaire.

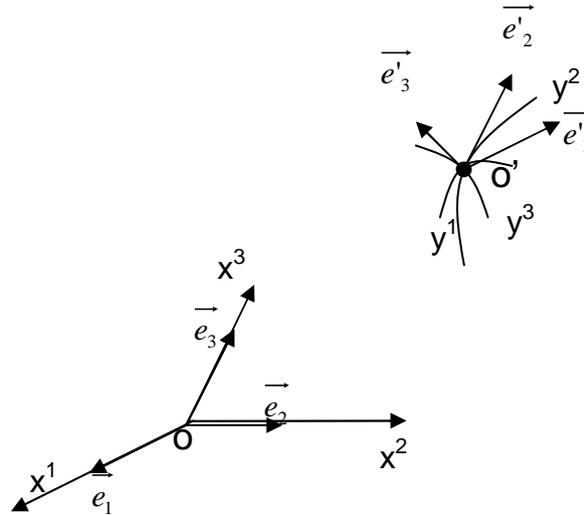


Fig.A.I.1 : Changement de systèmes de coordonnées

Le point O' du nouveau repère est fixé en donnant des valeurs particulières à y^1, y^2, y^3 . Par ce point passera alors une courbe curviligne d'axe $O'y^1$ tel que $y^2 = \text{cst}, y^3 = \text{cst}$ et y^1 sera alors la seule variable. Idem pour $O'y^2$ et $O'y^3$. Un déplacement infiniment petit dy^j disposé tangentiellement le long des axes curvilignes y^i permet de retrouver les relations d'un repère d'axes rectilignes. Ainsi, les nouveaux vecteurs de base \vec{E}_j des axes rectilignes peuvent être écrits :

$$\vec{e}_i = \beta_i^j \vec{E}_j \quad \text{ou} \quad \vec{E}_j = \alpha_j^i \vec{e}_i \quad i,j=1,2,3 \quad (A.I.13)$$

Et pour les composantes dy^j :

$$dx^i = \alpha_j^i dy^j \quad \text{ou} \quad dy^j = \beta_j^i dx^i \quad i,j=1,2,3 \quad (A.I.14)$$

Dans ce cas, les coefficients α et β ne sont plus des constantes mais des fonctions des coordonnées du point considéré. On écrira alors avec les différentielles totales, la fonction suivante et sa fonction réciproque :

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \quad \text{ou} \quad \text{réciproquement} \quad dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \quad (A.I.15)$$

$i,j=1,2,3$

Pour un axe de coordonnées curvilignes quelconque à trois dimensions, les coefficients de transformation seront alors donnés par les relations suivantes :

$$\alpha_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad \text{et} \quad \beta_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad i,j=1,2,3 \quad (A.I.16)$$

A.I.4) La variance (Vecteurs covariants, vecteurs contravariants)

Nous venons de définir les formules de transformations des vecteurs de base qui sont

$$\vec{e}_i = \beta_j^i \vec{E}_j \quad \text{ou} \quad \vec{E}_j = \alpha_j^i \vec{e}_i \quad i,j=1,2,3 \quad (A.I.17)$$

Ou dans un repère curviligne,

$$\vec{e}_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \vec{E}_j \quad \text{ou} \quad \vec{E}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \vec{e}_i \quad i,j=1,2,3 \quad (A.I.18)$$

Tout vecteur qui, quand on change de système de base, se transforme suivant les règles de transformation des vecteurs de base est dit vecteur covariant.

Pour caractériser cette propriété, l'indice des coordonnées est placé en bas.

Soit un vecteur dont les r composantes sont a_1, a_2, \dots, a_r dans l'ancien système de coordonnées et A_1, A_2, \dots, A_r dans le nouveau. Si ce vecteur est covariant, les formules de transformation sont :

$$A_L = \frac{\partial x^k}{\partial y^L} a_k, \quad a_k = \frac{\partial y^L}{\partial x^k} A_L \quad k,L=1,2,\dots,r \quad (A.I.19)$$

Nous introduisons maintenant une autre forme de variance, opposée à covariant :

Soit un vecteur dont les composantes sont x^1, x^2, \dots, x^r dans l'ancien système de coordonnées et X^1, X^2, \dots, X^r dans le nouveau. En utilisant les formules de transformation des vecteurs de base, nous avons :

$$x^k \vec{e}_k = x^k \frac{\partial y^L}{\partial x^k} \vec{E}_L = X^L \vec{E}_L \quad k,L=1,2,\dots,r \quad (A.I.20)$$

Donc, on obtient les composantes des vecteurs X^L ou réciproquement x^k définies comme contravariantes :

$$X^L = \frac{\partial y^L}{\partial x^k} x^k, \quad x^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^L} X^L \quad k,L=1,2,\dots,r \quad (A.I.21)$$

Ce sont les formules de transformation inverses de celles des vecteurs de base.

La contravariance s'indique par un indice supérieur, la covariance par un indice inférieur.

A.I.5) Les tenseurs

Une quantité scalaire est un tenseur d'ordre zéro et ne possède qu'une composante. Un vecteur est un tenseur du premier ordre et possède r composantes. Ce tenseur peut être soit covariant, ses composantes sont alors désignées par t_k , soit contravariant, ses composantes sont alors désignées par t^k .

Les éléments d'un tenseur du second ordre peuvent être disposés suivant un tableau carré. Plus loin, nous verrons les différences essentielles qui existent entre un tenseur et une matrice. Souvent, pour indiquer que les éléments contenus dans ce tableau carré sont ceux d'un tenseur, on place le tableau entre parenthèses :

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & \dots & t_1^k & \dots & t_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_i^1 & \dots & t_i^k & \dots & t_i^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_r^1 & \dots & t_r^k & \dots & t_r^r \end{pmatrix} \quad (A.I.22)$$

Ou plus simplement (t_i^k) .

Un tenseur du troisième ordre a r^3 composantes, qui peuvent se placer dans un cube. Il existe 4 types de tenseurs du troisième ordre :

$$t^{ikl}, t_l^{ik}, t_{kl}^i, t_{ikl} \quad (A.I.23)$$

Une composante quelconque du tenseur le plus général s'écrira

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{k_1 k_2 \dots k_m} \quad (A.I.24)$$

avec n indices covariants et m indices contravariants. La somme m+n est l'ordre du tenseur, qui aura r^p composantes.

La définition du tenseur va nous être donnée par les formules de transformation.

Soit $t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{k_1 k_2 \dots k_m}$ une composante quelconque d'un tenseur d'ordre p, m fois contravariant et n fois covariant, dans un système d'axes de coordonnées.

Soit $T_{J_1 J_2 \dots J_n}^{L_1 L_2 \dots L_m}$ la composante précédente dans un nouveau système d'axes.

La transformation de la composante t en composante T se fera par la formule suivante :

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{k_1 k_2 \dots k_m} = \sum_{J \dots L} \alpha_{L_1}^{k_1} \dots \alpha_{L_m}^{k_m} \beta_{i_1}^{J_1} \dots \beta_{i_n}^{J_n} T_{J_1 \dots J_n}^{L_1 \dots L_m}$$

ou dans un repère curviligne :

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n}^{k_1 k_2 \dots k_m} = \sum_{J \dots L} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{L_1}} \dots \frac{\partial x^{k_m}}{\partial y^{L_m}} \frac{\partial y^{J_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{J_n}}{\partial x^{i_n}} T_{J_1 \dots J_n}^{L_1 \dots L_m} \quad (A.I.25)$$

La présence de n indices covariants et m indices contravariants provoque l'intervention de n facteurs en β et m facteurs en α .

La transformation inverse sera :

$$T_{J_1 \dots J_n}^{L_1 \dots L_m} = \sum_{i \dots k} \frac{\partial y^{L_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{L_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{J_1}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{J_n}} t_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m} \quad (A.I.26)$$

Si le passage de t à T ne se fait pas par les formules ci-dessus, t n'est pas un tenseur.

A titre d'exemple, une force (en mécanique par exemple) ou un champ électrique (E_k) sont des tenseurs d'ordre 1 covariants.

Une grandeur physique de type flux comme un courant électrique (Γ^k) par exemple, est un tenseur d'ordre 1 contravariant.

En revanche, les grandeurs α_M^k ou $\frac{\partial x^k}{\partial y^M}$; et β_M^k ou $\frac{\partial y^k}{\partial x^M}$ ne sont pas des tenseurs. Ce sont simplement des éléments d'une matrice de transformation. Nous donnerons dans un paragraphe suivant une méthode pour déterminer si des matrices sont des tenseurs.

A.I.6) Formes matricielles des formules de changement de coordonnées

Pour simplifier la représentation des formules de transformation des tenseurs, nous introduisons la forme matricielle pour les tenseurs du premier et du deuxième ordre que nous allons rencontrer la plupart du temps dans nos applications de réseaux électriques.

Pour un vecteur covariant, nous avons la formule de transformation suivante :

$$T_L = \frac{\partial x^k}{\partial y^L} t_k \quad k, L=1, 2, \dots, r \quad (A.I.27)$$

L'indice k de sommation correspond à l'indice des colonnes pour $\frac{\partial x^k}{\partial y^L}$ et des lignes pour t. Le

produit du vecteur t par la matrice $\frac{\partial x^k}{\partial y^L}$ nous donne alors l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial x^r}{\partial y^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^r}{\partial y^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^r} & \frac{\partial x^2}{\partial y^r} & \dots & \frac{\partial x^r}{\partial y^r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_r \end{bmatrix} \quad (A.I.28)$$

Soit en écriture simplifiée avec la matrice transposée $\left[\frac{\partial x}{\partial y} \right]'$:

$$[T] = \left[\frac{\partial x}{\partial y} \right]' [t] \quad (\text{tenseur covariant}) \quad (A.I.29)$$

De la même manière nous définissons l'expression matricielle pour un vecteur contravariant de valence 1 dont on rappelle la formule de transformation :

$$T^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^L} t^L \quad k, L=1, 2, \dots, r \quad (A.I.30)$$

La forme matricielle de l'équation précédente prendra alors la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \dots \\ T^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^r} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^2}{\partial x^r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^r}{\partial x^1} & \frac{\partial y^r}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^r}{\partial x^r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \dots \\ t^r \end{bmatrix} \quad (A.I.31)$$

Soit en écriture simplifiée :

$$[T] = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] [t] \quad (\text{tenseur contravariant}) \quad (A.I.32)$$

Prenons maintenant les trois cas possibles d'un tenseur d'ordre 2.
Le tenseur deux fois covariants est défini par les transformations suivantes :

$$T_{LM} = \frac{\partial x^i}{\partial y^L} \frac{\partial x^k}{\partial y^M} t_{ik} \quad j,k,L,M=1,2,\dots,r \quad (A.I.33)$$

Nous obtenons facilement avec les définitions indicielles l'écriture matricielle suivante :

$$\left[\frac{\partial x^i}{\partial y^L} \right] [t_{ik}] = [A_{Lk}] \quad (A.I.34)$$

$$[T_{LM}] = [A_{Lk}] \left[\frac{\partial x^k}{\partial y^M} \right] \quad (A.I.35)$$

d'où la forme matricielle suivante :

$$[T] = \left[\frac{\partial x}{\partial y} \right] [t] \left[\frac{\partial x}{\partial y} \right] \quad (\text{tenseur deux fois covariant}) \quad (A.I.36)$$

De la même manière, pour un tenseur deux fois contravariant,

$$T^{LM} = \frac{\partial y^L}{\partial x^i} \frac{\partial y^M}{\partial x^k} t^{ik} \quad j,k,L,M=1,2,\dots,r \quad (A.I.37)$$

On trouve :

$$T = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] [t] \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] \quad (\text{tenseur deux fois contravariant}) \quad (A.I.38)$$

Enfin, pour le tenseur mixte,

$$T_M^L = \frac{\partial x^k}{\partial y^M} \frac{\partial y^L}{\partial x^i} t_k^i \quad j,k,L,M=1,2,\dots,r \quad (A.I.39)$$

nous obtenons :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \end{bmatrix}' [t] \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \end{bmatrix}' \quad (\text{tenseur mixte}) \quad (\text{A.I.40})$$

Cette partie nous permet de bien faire la distinction entre les deux mots « tenseur » et « matrice ». Ce sont deux notions différentes à ne pas confondre.

-Un tenseur est une fonction du point dont les composantes se transforment selon une règle bien définie. Un tenseur peut être représenté par une matrice.

-Une matrice est un tableau de grandeurs définissant un système linéaire.

Tous les tenseurs de valence inférieure ou égale à 2 peuvent s'écrire au moyen des matrices, mais toutes les matrices ne sont pas des tenseurs.

A.I.7) Symétrie et antisymétrie

Nous présentons rapidement les propriétés de deux types de tenseurs pour l'ordre 2 : tenseur deux fois contravariant t^{ik} , tenseur deux fois covariant t_{ik} .

Ils seront symétriques si $t^{ik} = t^{ki}$ ou $t_{ik} = t_{ki}$

Et antisymétriques si $t^{ik} = -t^{ki}$ ou $t_{ik} = -t_{ki}$

Ce caractère de symétrie ou d'antisymétrie est un caractère propre au tenseur, qui se conserve lors d'un changement d'axes. Il est simple de démontrer alors que cela est généralisable pour des tenseurs d'ordre plus élevé par rapport à deux indices (ou plus) obligatoirement de même variance.

A.I.8) Opération sur les tenseurs

a) Addition de deux tenseurs

L'addition entre deux tenseurs est possible lorsqu'ils sont de même variance. On obtient alors :

$$t_m^{ik} = r_m^{ik} + s_m^{ik} \quad (\text{A.I.41})$$

b) Contraction d'un tenseur

Comme son nom l'indique, la contraction d'un tenseur permet de former un nouveau tenseur d'ordre inférieur de 2 unités par rapport à un premier tenseur comportant des indices covariants et contravariants.

Cela est possible en égalant les deux indices covariant et contravariant pour imposer la condition que ces deux indices aient toujours la même valeur en effectuant la sommation sur la valeur commune de ces deux indices.

Dans l'exemple qui suit le tenseur t_m^{ik} est contracté en imposant la condition $m=i$ et en faisant la somme sur la valeur commune i on obtient c^k en adoptant la notation de la convention d'Einstein:

$$c^k = t_i^{ik} \quad (\text{A.I.42})$$

c^k est un élément d'un tenseur contravariant.

En effet, en écrivant la formule de transformation du tenseur t_i^{ik} :

$$T_N^{JL} = \frac{\partial y^J}{\partial x^i} \frac{\partial y^L}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial y^N} t_i^{ik} \quad i,k,m,J,L,M=1,2,\dots,r \quad (A.I.43)$$

On égal les deux coefficients J et N :

$$C^L = \sum_J T_J^{JL} = \sum_J \sum_{ikm} \frac{\partial y^J}{\partial x^i} \frac{\partial y^L}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial y^J} t_i^{ik} \quad (A.I.44)$$

$$\sum_J \frac{\partial x^m}{\partial y^J} \frac{\partial y^J}{\partial x^i} = \delta_i^m \quad (\text{symbole de Kronecker}) \quad (A.I.45)$$

Donc,

$$C^L = \sum_J T_J^{JL} = \sum_{ik} \frac{\partial y^L}{\partial x^k} t_i^{ik} = \sum_k \frac{\partial y^L}{\partial x^k} c^k \quad (A.I.46)$$

Cette démonstration se généralise immédiatement aux tenseurs d'ordre plus élevé.

c) Multiplication

Soient deux composantes de deux tenseurs quelconque, le tenseur produit sera de la forme suivante :

$$p_{mn}^{ikj} = r_m^{ik} s_n^j \quad (A.I.47)$$

d) Multiplication contractée

On applique les résultats définis précédemment en b) et c) :

$$p_{mn}^{ikj} = r_m^{ik} s_n^j \quad i,j,k,m,n=1,2,\dots,r \quad (A.I.48)$$

La contraction est réalisée sur les deux indices n et k

$$c_m^{ij} = p_{mk}^{ikj} \quad i,j,k,m=1,2,\dots,r \quad (A.I.49)$$

Une deuxième contraction sur les indices j et m nous donne les composantes d'un vecteur contravariant a^i :

$$a^i = c_m^{ij} \quad i,j,m=1,2,\dots,r \quad (A.I.50)$$

A.I.9) Reconnaissance du caractère tensoriel

Soit une grandeur $t(i, k, m)$ représentée par un ensemble de r^3 composantes dépendant de 3 indices i, k et m variant de 1 à r . Nous cherchons si l'ensemble des composantes est un tenseur et, si c'est le cas, quelle est sa variance.

Pour cela, on cherche à former des produits contractés entre cette grandeur et 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (car 3 indices). Si on trouve que le produit contracté est un invariant dans les changements d'axes, t est un tenseur. Dans l'exemple suivant, on suppose que le produit contracté suivant est un invariant.

$$\sum_{ikm} t(i, k, m) u^i v_k w^m \quad (A.I.51)$$

Le tenseur t est donc 2 fois covariant et 1 fois contravariant. t_{im}^k .

A.I.10) Introduction à l'espace de Riemann

Nous venons de rappeler les éléments généraux de calcul tensoriel dans le cas général. Pour appliquer l'analyse tensoriel à des cas physiques, nous nous placerons dans un espace vectoriel métrique, c'est-à-dire que nous fixons à tous les vecteurs de base une commune mesure. Le cas le plus simple est l'espace euclidien. En partant d'un repère orthogonal, dont les vecteurs de base ont tous un même module égal à une unité choisie arbitrairement, on peut construire une infinité d'autres repères rectilignes ou curvilignes, au moyen d'un changement de coordonnées, au cours duquel toute longueur doit rester invariante.

La plus importante des extensions données à la géométrie euclidienne est celle qui se rapporte aux « espaces de Riemann ». En effet, tous les phénomènes physiques qui se produisent dans les milieux où leur réciprocity est admise peuvent être placés dans un tel espace. Nous donnons dans cette annexe une définition très simpliste et encourageons le lecteur à se référer aux ouvrages classiques de calcul tensoriel.

Définition: Un "espace de Riemann" est une variété à laquelle nous avons attaché une métrique. Cela signifie que, dans chaque partie de la variété, représentée analytiquement au moyen d'un système de coordonnées u^i , nous nous sommes donnés une forme différentielle quadratique :

$$dS^2 = g_{ij} du^i du^j$$

qui constitue la métrique de l'espace.

Les coefficients g_{ij} ne sont pas entièrement arbitraires et doivent vérifier les conditions suivantes :

C1. Les composantes sont symétriques $g_{ij} = g_{ji}$.

C2. Le déterminant de la matrice $[g_{ij}]$ est différent de zéro.

C3. La forme différentielle de l'élément linéaire, et par conséquent le concept de distance défini par les g_{ij} , est invariante vis-à-vis de tout changement de coordonnées.

C4. Toutes les dérivées partielles d'ordre deux des g_{ij} existent et sont continues donc de classe C^2 .

Un espace de Riemann est donc un espace de points, chacun étant repéré par un système de n coordonnées u^i , doté d'une métrique quelconque telle que la forme différentielle de l'élément linéaire vérifiant les conditions précédentes. Cette métrique est dite dès lors "métrique riemannienne".

Annexes II, III et IV :
Contacteur S.LEMAN
leman.samuel@gmail.com

RESUME

L'analyse de la Compatibilité ElectroMagnétique (*CEM*) des systèmes complexes consiste à prévoir le comportement *EM* d'appareils électroniques immergés dans un environnement où interviennent des interactions de natures très variées.

Ce peut être des phénomènes *multiphysiques* où se combinent des couplages *EM* et thermiques; il peut aussi s'agir d'architectures *multitéchelles* comportant des composants de dimensions disproportionnées devant la longueur d'onde; ces interactions peuvent aussi concerner des configurations *multiparamètres* lorsque plusieurs éléments interviennent simultanément dans le calcul des perturbations *EM*.

La thèse a consisté en la mise en place d'une méthode qui semble bien adaptée à la résolution de ces problèmes de *CEM* complexes. L'outil développé s'appuie sur l'utilisation de l'analyse tensorielle des réseaux électriques instaurée par G. KRON et qu'on envisage étendre à la *CEM* des systèmes complexes. Le raisonnement consiste à fusionner différents outils numériques de simulations existants, au moyen d'une méthodologie basée sur l'assimilation d'un grand système à un assemblage de circuits électriques équivalents. Circuits auxquels nous pourrions associer la résolution d'une équation contenant un super-tenseur impédance ainsi que des tenseurs *fém* et courants dont il faut s'efforcer de déterminer les règles de construction.

A titre d'illustration, le couplage *EM* entre câbles, le blindage des lignes, les antennes et une cavité *EM* ont été simulés par le formalisme de KRON pour permettre la mise en forme d'une bibliothèque de sous-fonctions réutilisables pour l'étude de systèmes plus complexes. La comparaison entre la méthode de KRON et des mesures de couplages entre antennes effectuées sur une cavité métallique pour différentes configurations, montre l'efficacité d'adaptation de la méthode aux problèmes de *CEM multiparamètres* et *multitéchelles*. Enfin, la simulation d'un couplage électrothermique faisant interagir la propagation d'un signal électrique avec la diffusion de la chaleur sur une éprouvette coaxiale remplie d'un matériau conducteur électrique et thermique, semble ouvrir des perspectives de réalisation de logiciel de *CEM* de nouvelle génération.

TITLE : Contribution to Solving Electromagnetic Compatibility Problems with the Electrical Circuit Formalism of KRON.

ABSTRACT

Analysis of the Electromagnetic Compatibility (*EMC*) of so-called complex systems consists of predicting voltage induced on electronic circuits submitted to various *EM* couplings. Such phenomena may consist of couplings between *EM* and Thermal parameters, or they may concern couplings throughout systems of various sizes with respect to the wavelength and the behaviour of the system. These interactions may also depend on many parameters like dimension, physical data and so on.

This thesis is aimed at developing a method well-suited to resolving the problems posed by the EMC of complex systems. This method reduces these couplings to a circuit assembly with a combination of inductance, capacitance and resistance, voltage source and current source. The main advantage of the methodology will be to use the formalism of electrical networks developed by G. KRON, which consists of solving the circuit theory by means of the inversion of a large matrix size.

In the scope of this work, *EM* coupling between cables, shielded cables, antennas, and an *EM* cavity were simulated with KRON's formalism to establish a library of subroutines to use to solve complex *EMC* problems. The comparison between KRON's method and measurements of the coupling between antennas inside an *EM* cavity under various configurations shows the efficiency of the method for *EMC* problems concerning systems of variable sizes and large numbers of parameters.

Finally, we proposed to study the simulation of an electrothermal system which consists of both the electrical propagation and thermal diffusion inside a coaxial system filled with a thermally and electrically conducting material. This study seems to open new possibilities for the development of a new generation of *EMC* tool.

MOTS CLES :

Compatibilité ElectroMagnétique - Méthode de KRON appliquée à la *CEM (MKCE)* - Simulations numériques - Cavité *EM* - Grands Systèmes - multiparamètres - multitéchelles - multiphysiques - Analyse topologique - couplage électrothermique.