

Université des Sciences et Technologies de LILLE  
Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)  
Ecole Doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur Lille  
Nord-de-France

Année 2009 - N° d'ordre: 40157

# THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Discipline : Génie-Civil

*présentée par*

**Jian LIN**

**Modélisation numérique de l'endommagement des  
matériaux poreux ductiles et application aux  
géomatériaux**

*Soutenu le 8 Décembre 2009*

*devant le jury composé de*

MM.	A. GIRAUD	Professeur, Université de Metz	Rapporteur
	L. SIAD	Professeur, Université de Reims	Rapporteur
	G. PIJAUDIER-CABOT	Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour	Examineur
	V. MONCHIET	Maître de conférences, Université Paris-Est	Examineur
	T. KANIT	Maître de conférences, Université de Lille I	Encadrant de thèse
	J.F. SHAO	Professeur, Université de Lille I	Co-directeur
	D. KONDO	Professeur, Université de Lille I	Directeur de thèse

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML). Je souhaite tout d'abord remercier Djimédo Kondo, mon directeur de thèse, pour sa grande patience et le soutien qu'il m'a apporté tout au long de ces trois années. Ses remarquables connaissances et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener à bien les différents sujets abordés dans ce mémoire.

Je tiens également à exprimer ma sincère reconnaissance à Jian-fu Shao pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et pour avoir encadré cette thèse. Ses conseils et ses encouragements m'ont toujours accompagné lors de ce travail. Je remercie ensuite Toufik Kanit, co-encadrant de thèse, pour avoir accepté de suivre cette thèse.

Je souhaite remercier Monsieur Gilles Pijaudier-Cabot qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de soutenance de thèse ainsi que Messieurs Larbi Siad et Albert Giraud qui ont accepté de la tâche difficile de rapporter ce travail de thèse. Je tiens également à remercier Monsieur Vincent Monchiet qui a bien voulu examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi au Centre Nationale de la Recherche Scientifique qui a financé ce travail par l'intermédiaire d'une bourse BDI.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude à l'ensemble de l'équipe ER4 du LML. Je remercie particulièrement Shouyi Xie pour son aide concernant le loi de comportement des géomatériaux et Tao Jiang pour les simulations numériques mais également Liang, Thomas, Dawei et Wanqing pour leur aide et leur amitié.

Enfin, je remercie sincèrement mes parents et ma femme pour ses encouragements, et la patience dont ils ont fait preuve ses dernières années.



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>Chapitre 1 Eléments de bibliographie sur l'endommagement et la rupture des matériaux poreux ductiles</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Micromécanismes de la rupture ductile . . . . .	14
1.3 Approche globale de la rupture ductile . . . . .	16
1.4 Approche locale de la rupture ductile . . . . .	17
1.4.1 Formulation thermodynamique de l'endommagement ductile . . . . .	18
1.4.2 Approche micromécanique de l'endommagement ductile . . . . .	19
1.5 Modèles couplés d'endommagement pour matériaux poreux ductiles . . . . .	20
1.5.1 Critère de Gurson (1977) . . . . .	20
1.5.2 Critère de Ponte Castañeda (1991) . . . . .	22
1.5.3 Extensions du critère de Gurson . . . . .	23
1.6 Conclusion . . . . .	24
<b>Chapitre 2 Formulation, numérisation et applications d'un nouveau modèle isotrope d'endommagement ductile</b>	<b>25</b>
2.1 Critère macroscopique (MCK) basé sur l'utilisation d'un champ de vitesse de type Eshelby . . . . .	27
2.1.1 Modèle de sphère creuse et champ de vitesse considéré . . . . .	27
2.1.2 Nouveau critère macroscopique de plasticité et illustrations . . . . .	28
2.2 Formulation du modèle issu du critère MCK . . . . .	32
2.3 Intégration et implantation numérique du modèle . . . . .	34
2.4 Application numérique à l'étude de la striction d'une éprouvette lisse . . . . .	36
2.4.1 Données pour la simulation numérique . . . . .	37
2.4.2 Discussion des résultats de la simulation numérique . . . . .	38

2.5	Simulation numérique d'une éprouvette entaillée préfissurée . . . . .	40
2.5.1	Données et description de l'éprouvette entaillée . . . . .	41
2.5.2	Discussion des résultats . . . . .	42
2.6	Prise en compte d'une pression de fluide dans les cavités . . . . .	44
2.6.1	Contraintes effectives . . . . .	44
2.6.2	Application au cas d'une éprouvette axisymétrique entaillée en condi- tion drainée . . . . .	46
2.7	Conclusion . . . . .	48

**Chapitre 3 Modélisation micromécanique de l'endommagement ductile des roches poreuses** **49**

3.1	Critères de plasticité de matériaux poreux à matrice plastiquement compressible	50
3.1.1	Cas d'un matériau poreux à matrice de type Gurson . . . . .	50
3.1.2	Approche variationnelle du critère d'un matériau poreux à matrice de Drucker-Prager . . . . .	52
3.2	Critère de Guo et al. (2008) pour des matériaux à matrice de Drucker-Prager	53
3.2.1	Matrice dilatante sensible à la pression moyenne . . . . .	53
3.2.2	Borne supérieure du critère de plasticité . . . . .	55
3.2.3	Formulation analytique approchée et illustrations . . . . .	57
3.2.4	Application à certains géomatériaux . . . . .	59
3.3	Formulation du modèle complet issu du critère de Guo et al. (2008) . . . . .	60
3.4	Intégration et implantation numérique du modèle . . . . .	62
3.5	Application numérique aux essais sur la craie de Lixhe . . . . .	64
3.5.1	Caractéristiques générales de la craie de Lixhe . . . . .	64
3.5.2	Descriptions des essais . . . . .	66
3.5.3	Données pour la simulation numérique des essais . . . . .	67
3.5.4	Discussion des résultats . . . . .	69
3.6	Conclusion . . . . .	74

**Chapitre 4 Effets de forme de cavités et anisotropie de l'endommagement ductile : numérisation et applications** **75**

4.1	Critère de plasticité anisotrope, GLD, pour milieux poreux ductiles . . . . .	76
4.1.1	Description de la cellule élémentaire . . . . .	76
4.1.2	Critère de Gologanu et al. (1993-1994) . . . . .	77
4.1.3	Le critère GLD (Gologanu-Leblond-Devaux, 1997) . . . . .	78
4.1.4	Prise en compte des changements d'orientation des cavités . . . . .	78
4.1.5	Introduction du paramètre $q$ . . . . .	79
4.2	Critère de plasticité MCK anisotrope . . . . .	79

4.2.1	Expression générale du critère de plasticité pour une cavité sphéroïdale allongée ou aplatie . . . . .	79
4.2.2	Prise en compte des changements d'orientation des cavités . . . . .	81
4.2.3	Comparaison des critères de Gologanu et al. et MCK anisotrope . . . . .	82
4.3	Formulation du modèle complet issu du critère MCK anisotrope . . . . .	83
4.3.1	Loi d'écoulement . . . . .	84
4.3.2	Evolution de la porosité . . . . .	84
4.3.3	Evolution du paramètre de forme . . . . .	84
4.3.4	Modèle de la coalescence . . . . .	86
4.4	Intégration et implantation du modèle MCK anisotrope . . . . .	87
4.4.1	Correction plastique . . . . .	88
4.4.2	Opérateur tangent consistant . . . . .	91
4.5	Application numérique à la striction d'une éprouvette lisse . . . . .	93
4.5.1	Données pour la simulation . . . . .	93
4.5.2	Discussion des résultats . . . . .	94
4.6	Simulation d'une éprouvette axisymétrique entaillée . . . . .	99
4.6.1	Description des données pour la simulation . . . . .	100
4.6.2	Discussion des résultats . . . . .	101
4.7	Conclusion . . . . .	104
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>
	<b>Annexe A Annexe au chapitre 2</b>	<b>119</b>
A.1	Méthode des éléments finis non linéaires . . . . .	119
A.1.1	Généralités . . . . .	119
A.1.2	Schéma de résolution dans ABAQUS . . . . .	121
A.2	Expressions de $\dot{E}_{eq}^p$ et $\mathbf{B}$ pour l'opérateur tangent consistant du modèle MCK	122
	<b>Annexe B Annexe au chapitre 3</b>	<b>125</b>
B.1	Expression des quantités $C_1$ et $C_2$ intervenant dans le modèle de Vincent et al. (2009) . . . . .	125
B.2	Expressions de $\dot{E}_{eq}^p$ et $\mathbf{B}$ pour l'opérateur tangent consistant du modèle de Guo et al. (2008) . . . . .	125
	<b>Annexe C Annexe au chapitre 4</b>	<b>127</b>
C.1	Coefficients des critères de plasticité . . . . .	127
C.1.1	Critère de Gologanu et al. (1993-1994) . . . . .	127

C.1.2	Critère GLD (1997) . . . . .	128
C.1.3	Critère MCK anisotrope . . . . .	129
C.2	Expressions de $\dot{\lambda}$ et $\mathbf{B}$ dans le calcul de l'opérateur tangent consistant du modèle MCK anisotrope . . . . .	130



# Notations

## • Notations tensorielles

$a$  scalaire

$\cdot$  contraction simple

$\underline{a}$  vecteur

$:$  double contraction

$\mathbf{a}$  tenseur d'ordre deux

$\otimes$  produit tensoriel

$\mathbb{A}$  tenseur d'ordre quatre

$\overset{s}{\otimes}$  produit tensoriel symétrisé

$$(\mathbf{a} \overset{s}{\otimes} \mathbf{b})_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk})$$

$\mathbf{1}$  tenseur unité d'ordre deux

$\mathbb{I} = \mathbf{1} \overset{s}{\otimes} \mathbf{1}$  tenseur unité d'ordre quatre

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$$

$\mathbf{A}'$  déviateur du tenseur  $\mathbf{A}$

$A_h$  partie hydrostatique du tenseur  $\mathbf{A}$

## • Paramètres matériau

$\mathbb{C}$  tenseur d'élasticité de la matrice solide

$E$  module d'Young de la matrice solide

$\nu$  coefficient de Poisson de la matrice solide

$\lambda$  et  $\mu$  paramètres de Lamé de la matrice solide

$k$  module de compression de la matrice solide

• Notations communes à tous les chapitres

$\varepsilon$  tenseur des déformations microscopiques

$\sigma$  tenseur des contraintes microscopiques

$\mathbf{E}$  tenseur des déformations macroscopiques

$\Sigma$  tenseur des contraintes macroscopiques

$\mathbf{E}^e$  tenseur des déformations élastiques macroscopiques

$\mathbf{E}^p$  tenseur des déformations plastiques macroscopiques

$\underline{v}$  champ de vitesse

$f$  porosité

# Introduction générale

Dans le domaine de la modélisation d'endommagement des matériaux poreux ductiles, l'approche locale basée sur l'utilisation de lois constitutives fines est la mieux à adoptée pour rendre compte des mécanismes physiques de la rupture ductile. Il est généralement admis que celle-ci survient suivant trois étapes successives : la nucléation des cavités, la croissance des cavités et leur coalescence. Les modèles de McClintock [46], de Rice et Tracey [66], proposés à la fin des années 1960, sont les premiers travaux de référence dans ce cadre. Les lois d'évolution de l'endommagement établies dans ces modélisations ne sont pas couplées à la plasticité du matériau. Afin de remédier à cette limitation, des modèles dits "couplés" ont été développés. C'est le cas par exemple du modèle de Rousselier [68], établi sur la base des principes de thermodynamique des processus irréversibles. Dérivé dans un cadre micro-mécanique approprié, le critère de Gurson [35], s'appuyant sur l'analyse limite d'une sphère creuse, introduit un couplage fort entre la déformation plastique et endommagement. Il a été ensuite étudié et amélioré par de nombreux auteurs ([89], [19],[82], [59], [31],[41]). Plus récemment, au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML), Monchiet et al. [49] (cf. également [48]) ont formulé un nouveau critère de plasticité de type Gurson en suivant l'approche par analyse limite dans laquelle une classe de champs de vitesse de type Eshelby jusqu'alors inexplorée, est considérée. Ce nouveau critère semble apporter des améliorations significatives à celui de Gurson et ses extensions dans la littérature traitant de la rupture ductile des métaux.

La majorité des modèles micromécaniques dédiés au comportement de matériaux poreux ductiles supposent l'incompressibilité de la matrice solide. Ils ne sont donc pas adaptés à une large classe de matériaux tels que les polymères ou certains géomatériaux poreux dont la matrice est plastiquement compressible. En considérant une cellule élémentaire avec une matrice de type Drucker-Prager [21], Guo et al. [34] ont très récemment développé un nouveau critère macroscopique qui semble être de grand intérêt pour les géomatériaux.

L'objectif principal de ce travail de thèse est double : Il s'agit d'abord d'implanter numériquement et d'évaluer le modèle complet d'endommagement basé sur le critère proposé par Monchiet et al.(2007). La formulation et l'étude d'un modèle d'endommagement ductile adapté aux roches poreuses, constituent une autre priorité, compte tenu de l'absence de travaux dans ce domaine. Le mémoire est organisé en 4 chapitres dont nous précisons ici le contenu.

Le premier chapitre est à caractère bibliographique. Y sont synthétisées diverses études de la littérature portant aussi bien sur les mécanismes physiques de la rupture ductile que sur les critères régissant le couplage plasticité-endommagement ductile. Plus précisément nous décrivons d'abord les mécanismes physiques de la rupture ductile, puis nous rappelons l'approche globale et l'approche thermodynamique locale. Enfin, les modèles micromécaniques, et en particulier le critère de Gurson et quelques-unes de ses extensions sont détaillés.

Le second chapitre est consacré à la numérisation et l'évaluation des capacités prédictives du modèle complet d'endommagement ductile basé sur le critère isotrope proposé par Monchiet et al. [49] dans le cas de cavités sphériques. Nous rappelons d'abord la méthodologie conduisant à ce nouveau critère. Puis nous exposons la formulation et l'implantation numérique du modèle que nous en avons dérivé. Enfin, nous discutons des résultats numériques obtenus en les comparant à des données expérimentales et aux prédictions des modèles de Gurson et de Gurson-Tvergaard-Needleman [82].

Au troisième chapitre le modèle basé sur le critère proposé par Guo et al. [34] (dédié aux matériaux poreux ayant une matrice compressible) est implanté numériquement puis appliqué aux géomatériaux. Différentes approches permettant de formuler des critères macroscopiques des matériaux poreux à matrice plastiquement compressible sont d'abord présentées. Nous décrivons ensuite les éléments de l'implantation du modèle proposé. Des applications à l'étude du comportement d'une craie confirment l'intérêt des modèles développés, et fournissent l'occasion d'une première série de validation.

L'implantation numérique et l'analyse numérique de la version anisotrope du modèle

---

basé sur le critère de Monchiet et al. [49] font l'objet du chapitre 4. Les résultats numériques issus de cette implantation sont discutés en les comparant à des modèles anisotropes issus des critères de Gologanu et al. [30]

Le mémoire s'achève sur quelques conclusions et perspectives de l'étude réalisée.



# Chapitre 1

## Eléments de bibliographie sur l'endommagement et la rupture des matériaux poreux ductiles

### 1.1 Introduction

L'intégrité mécanique des structures peut être vérifiée à l'aide de diverses méthodes faisant appel à des concepts de mécanique de la rupture. Dans ce domaine, l'effort de recherche passe par la nécessité de prévoir et prévenir l'apparition et la propagation de défauts dans les structures. La mécanique de la rupture est généralement subdivisée en deux disciplines : la rupture fragile qui concerne les matériaux se déformant peu avant de se rompre et la rupture ductile qui survient dans les milieux se déformant beaucoup. De nombreux travaux de recherches ont été effectués dans le cadre de la rupture fragile depuis les années 1920, lorsque Griffith [33] a établi un critère de rupture en terme d'énergie dans le but de prédire la propagation des fissures dans les structures. Quant à l'étude de la rupture ductile, elle n'a véritablement débuté qu'à la fin des années 1960 avec les travaux de Rice et Tracey [65] [66] qui ont proposé un critère de rupture pour des matériaux élastoplastiques ductiles. S'agissant de la rupture fragile, la mécanique élastique linéaire suffit pour appréhender la croissance des défauts. Dans le cas de la rupture ductile, basée sur une analyse élastoplastique on distingue deux types d'approches : l'approche globale et l'approche locale. L'approche globale se base sur des grandeurs mesurables comme l'énergie nécessaire à l'amorçage des fissures,

tandis que l'approche locale s'appuie sur une analyse micromécanique des phénomènes de croissance de cavités.

L'approche globale de la rupture ductile présente un intérêt majeur pour évaluer la résistance à la propagation de la fissure d'un matériau. Cependant, des travaux ultérieurs ont montré que cette approche n'est pas suffisante pour décrire complètement la rupture ductile car elle ne prend pas en compte certaines zones critiques qui sont le siège de fortes contraintes [18]. De plus il s'est avéré qu'elle n'était pas en mesure de prédire certaines observations expérimentales (ex : rupture en tronc de cône d'une éprouvette en traction cf. [15])

Afin de remédier à cette limitation, l'approche locale de la rupture ductile a été développée. Cette approche consiste à modéliser finement les mécanismes d'endommagement ductile : la germination, la croissance et la coalescence des microcavités conduisant éventuellement à l'apparition d'une fissure macroscopique. Elle permet de plus d'évaluer les variables mécaniques (contraintes, déformations, paramètres d'endommagement) en chaque point de la structure.

Dans ce chapitre, à caractère essentiellement bibliographique, nous présentons d'abord les mécanismes physiques de la rupture ductile. Une brève présentation des approches globale et locale sera faite dans la suite à travers des modèles typiques de leurs catégories. En particulier, nous exposerons brièvement les théories de plasticité-endommagement non couplés, puis nous concentrerons notre attention sur les modèles couplés.

## 1.2 Micromécanismes de la rupture ductile

Il est aujourd'hui reconnu que la rupture ductile [26] survient suivant les trois étapes successives qui sont la nucléation (ou germination) des cavités, la croissance des cavités sous l'effet d'un chargement approprié et leur coalescence à un stade plus avancé de la déformation. Nous présentons dans cette section une description de ces trois étapes.

### – Nucléation des cavités

La nucléation des cavités constitue la première phase du processus d'endommagement ductile. Elle correspond à la création de vides généralement au niveau des inclusions par décohésion de l'interface inclusion-matrice, ou par rupture interne de l'inclusion.



Cette étape exprime le passage, à l'échelle micromécanique, d'un milieu continu à un milieu discontinu.

Les sites de nucléation sont essentiellement des zones de concentration de contraintes ou de déformations, qui entraînent l'apparition et la croissance de surfaces de discontinuités jusqu'à une taille critique. D'une manière générale, l'analyse quantitative et la modélisation de tels mécanismes est délicate car les résultats sont extrêmement dispersés en raison de la dépendance avec la répartition spatiale des inclusions, les caractéristiques du matériau et la qualité de la résistance de l'interface inclusion-matrice.

– **Croissance des cavités**

La phase de croissance des cavités correspond au grossissement de volume des cavités germées par nucléation. Elle se produit en liaison avec l'écoulement plastique de la matrice qui provoque un durcissement de celle-ci autour du vide. Les bords de la cavité deviennent alors solidaires de la matrice et évoluent avec elle suivant le chargement.

Dans le cas d'une décohésion de la matrice autour de l'inclusion, le bord libre de contrainte associée aux vides entraîne une concentration de contraintes et de déformations locales dans la matrice. L'augmentation de la déformation plastique dans la matrice induit ainsi une croissance de la porosité des cavités.

– **Coalescence des cavités**

Dans cette dernière phase, la rupture du matériau ductile apparaît par la coalescence entre microfissures ou entre cavités. Il est observé expérimentalement que les jonctions entre microfissures ou cavités apparaissent très rapidement au dessus d'une valeur seuil de la porosité, de la taille des cavités ou de la distance entre les défauts issus de la nucléation et de la croissance de ceux-ci. Cette jonction se produit par fissuration des ligaments de la matrice, souvent dans des zones écrouies autour des sites de nucléation. L'étude de la coalescence des cavités est un sujet peu abordé qui n'a connu un regain d'intérêt que très récemment (cf. [77], [78], [61] et [41]).

## 1.3 Approche globale de la rupture ductile

Le dimensionnement des structures fissurées s'appuie sur la mesure de la ténacité du matériau, c'est-à-dire de son aptitude à résister à la propagation d'une fissure. Depuis les années 1960, le développement de la mécanique de la rupture a permis d'établir des critères de propagation de défauts. Il s'agit d'une approche globale du problème qui présuppose la possibilité de caractériser la résistance à l'amorçage et à la propagation de fissures à l'aide d'un seul paramètre global  $K_{IC}$ . Lorsque la plasticité devient étendue en pointe de fissure, on utilise plutôt l'intégrale de contour  $\Gamma$  de Rice-Cherepanov [65] [25], dont la valeur critique est notée  $J_{IC}$ . Il convient de souligner que le  $K_{IC}$  est utilisé dans le contexte d'une rupture brutale par clivage, tandis que  $J_{IC}$  permet de mesurer la ténacité à l'amorçage en rupture ductile [64].

### – L'intégrale $J$ de Rice

L'intégrale de contour  $J$  de Rice-Cherepanov [65], [25], développée dans le cas d'un problème plan (voir la figure 1.1) pour un matériau à comportement élastique (linéaire ou non linéaire), est définie pour un contour  $\Gamma$  orienté, par :

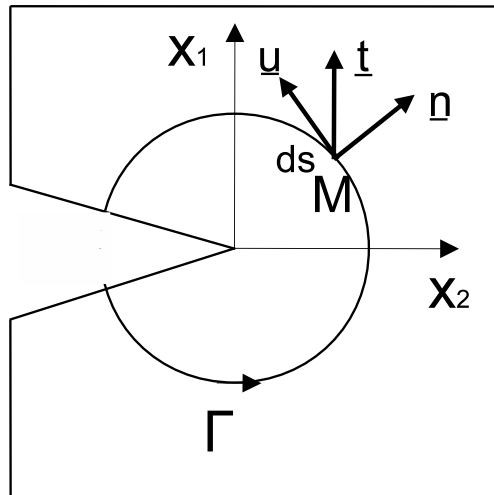


FIGURE 1.1: Définition de l'intégrale de contour  $J$

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W(\varepsilon) dx_2 - \underline{t} \frac{du_i}{dx_i} ds \right], \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les coordonnées du point } M \text{ du contour par rapport au} \\ \text{front de la fissure ;} \\ \Gamma \text{ est un contour passant dans la matrice solide et entourant le fond de fissure} \\ \text{en partant de la partie inférieure et finissant sur la partie supérieure ;} \\ W \text{ est la densité d'énergie de déformation définie par } W = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon ; \\ \underline{t} \text{ est le vecteur contrainte agissant sur } ds \text{ en point } M \end{array} \right.$$

L'intégrale  $J$  possède deux propriétés essentielles :

- Elle est indépendante du contour choisi dans le contexte de l'élasticité
- Si le comportement est élastique linéaire, l'intégrale  $J$  représente le taux de restitution  $G$ , défini par :

$$J = G = -\frac{dP}{da} = \frac{K_I^2}{\bar{E}} \quad (1.2)$$

où  $\bar{E} = E$  en contraintes planes,  $\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$  en déformations planes. Ici,  $E$  représente le module de Young ;  $\nu$  est le coefficient de poisson du milieu entourant la fissure ;  $K_I$  est le facteur d'intensité de contrainte en mode I (ouverture) ;  $P$  représente l'énergie potentielle du système.

## 1.4 Approche locale de la rupture ductile

Pour la modélisation locale de la rupture ductile deux types d'approche sont couramment utilisés : l'approche thermodynamique et l'approche micromécanique. Dans l'approche thermodynamique, l'endommagement du matériau peut être présenté par une variable scalaire (éventuellement la porosité) ou tensorielle, tandis que dans les approches micromécaniques, les caractéristiques géométriques des cavités définissent l'état d'endommagement.

### 1.4.1 Formulation thermodynamique de l'endommagement ductile

Elle est fondée sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Le modèle de Lemaitre (1985) [43] est un des premiers formulés dans ce cadre. Le modèle de Rousselier (1987) [68] très utilisé dans la pratique, est le modèle homologique couplé, probablement le plus proche de ceux étudiés ultérieurement en contexte d'endommagement isotrope. Nous privilégions donc ici son exposé.

Le modèle, proposé par Rousselier [68] dans le cadre d'une analyse thermodynamique de l'endommagement, est basé sur le choix d'un potentiel de la forme :

$$\varphi = \varphi_e(\varepsilon^e) + \varphi_p(p) + \varphi_\beta(D) \quad (1.3)$$

où  $p$ , déformation plastique cumulée, est la variable d'écrouissage et  $D$  une variable d'endommagement scalaire. La fonction de charge (potentiel plastique en raison de la règle de normalité) pour matériau plastique endommageable s'écrit :

$$\Phi(\tilde{\sigma}_m, \tilde{\sigma}_{eq}, P, Y) = \Phi_1(\tilde{\sigma}_{eq}, P) + \Phi_2(\tilde{\sigma}_m, Y) \quad (1.4)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma} = \sigma/\rho \text{ est le tenseur des contraintes effectives, } \rho \text{ étant la densité du matériau;} \\ P, \text{ est la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage } p; \\ Y, \text{ est la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement } D; \end{array} \right.$$

En choisissant la fonction d'endommagement  $Y(D) = \sigma_1 f$  où  $\sigma_1$  est relié à la contrainte d'écoulement du matériau par la relation  $\sigma_1 \cong 2\bar{\sigma}(p)/3$ , Rousselier a proposé la fonction de charge suivante :

$$\Phi(\tilde{\sigma}_m, \tilde{\sigma}_{eq}, P) = \frac{\Sigma_{eq}}{\rho} + C_R \sigma_1 f \exp\left(\frac{\Sigma_m}{\rho \sigma_1}\right) - \bar{\sigma}(p) \quad (1.5)$$

où  $f$  et  $\bar{\sigma}(p)$  représentent respectivement la porosité et la contrainte d'écoulement du matériau;  $C_R$  est un paramètre qui est déduit de tests expérimentaux. En pratique la valeur de  $C_R$  varie entre 1.5 et 2. Ses lois d'évolution sont déduites en utilisant le cadre thermodynamique usuel.

### 1.4.2 Approche micromécanique de l'endommagement ductile

L'approche micromécanique de l'endommagement ductile a été initiée par McClintock (1968) [46] et Rice-Tracey (1969) [66], qui ont proposé des modèles non couplés de croissance d'une cavité dans une matrice métallique infinie. A partir des années 1970, des modèles micromécaniques de l'endommagement fondés sur un couplage entre plasticité et endommagement ont vu le jour. C'est le cas notamment de celui proposé Gurson (1977). Plus tard, et de façon alternative, en utilisant un cadre variationnel en homogénéisation non linéaire, Ponte Castañeda (1991) a proposé un critère de plasticité elliptique permettant de remédier à certains défauts connus du critère de Gurson.

Nous présentons dans cette section les modèles non couplés de McClintock et de Rice-Tracey, les modèles couplés de Gurson et de Ponte Castañeda étant exposés en détail en section 1.5.

#### – Modèle de McClintock (1968) [46]

En considérant une cavité cylindrique dans une matrice plastique écrouissable (loi d'écrouissage de type  $\bar{\sigma} = K\varepsilon^n$ ), McClintock aboutit à une loi de croissance de cavités du type :

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh\left(\sqrt{3}(1-n)T\right) \dot{E}^p \quad (1.6)$$

où  $R$  est le rayon moyen de la cavité et  $T$  représente le taux de triaxialité des contraintes, défini par  $T = \Sigma_m/\Sigma_{eq}$ .

Pour une cavité sphérique contenue dans une matrice rigide parfaitement plastique, McClintock a également proposé une loi d'évolution du rayon de la cavité par :

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{E}_{33}} = \sqrt{3} \sinh\left(\sqrt{3}\frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{eq}}\right) \quad (1.7)$$

où  $\dot{E}_{33}$  est le taux de déformation suivant l'axe de chargement, et  $\Sigma_{11}$  est la contrainte suivant la direction perpendiculaire à l'axe de chargement.

#### – Modèle de Rice-Tracey (1969) [66]

Rice et Tracey ont développé une solution analytique pour décrire l'expansion d'une cavité sphérique dans une matrice rigide parfaitement plastique obéissant à un critère de von Mises par :

$$\frac{\dot{R}}{R} = 0.283 \exp\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) \dot{E}^p \quad (1.8)$$

Dans le cas d'une matrice écrouissable, la relation (1.8) se réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\dot{R}}{R} = 0.283 \exp\left(\frac{3}{2}T\right) \dot{E}^p \quad (1.9)$$

## 1.5 Modèles couplés d'endommagement pour matériaux poreux ductiles

La famille des modèles couplés est définie à l'aide de critères de plasticité incorporant l'endommagement. Deux types d'approches sont utilisées dans ce domaine. La première concerne le critère de Gurson [35] qui utilise une méthode d'analyse limite d'une sphère creuse. Le champ de vitesse considéré par Gurson est d'une précision reconnue pour des états de contraintes proches de hydrostatique, mais s'avère peu pertinent en cisaillement. La seconde approche, dont un exemple est le critère de Ponte Castañeda [63], utilise un cadre variationnel d'homogénéisation non linéaire, impliquant l'introduction d'un composite linéaire de comparaison. Le critère issu de cette démarche s'avère pertinent en cisaillement mais de moins bonne qualité en hydrostatique.

### 1.5.1 Critère de Gurson (1977)

Le critère de Gurson est obtenu à partir de l'analyse limite d'une sphère creuse soumise à des conditions de taux de déformation uniforme,  $\underline{v} = \mathbf{D}\underline{x}$ . Les étapes essentielles de l'approche de Gurson sont rappelées ici afin d'obtenir le critère macroscopique de plasticité. Comme montré sur la figure 1.2, la cellule élémentaire considérée (domaine  $\Omega$ ) est une sphère creuse de rayons interne et extérieur notés respectivement  $a$  et  $b$ . Comme déjà mentionné, des conditions de taux de déformation homogène au bord,  $\underline{v} = \mathbf{D}\underline{x}$ , sont appliquées au bord extérieur de la cellule élémentaire. La matrice (domaine  $\Omega - \omega$ ) est supposée rigide parfaitement plastique et obéissant au critère de von Mises (avec la contrainte d'écoulement en traction  $\sigma_0$ ). Le potentiel de dissipation locale dans la matrice s'écrit :

$$\pi(\mathbf{d}) = \sigma_0 d_{eq} \quad (1.10)$$

Le champ de vitesse dans la matrice, considéré par Gurson, se décompose en une partie correspondant à un changement de volume de la cavité sans changement de forme et une

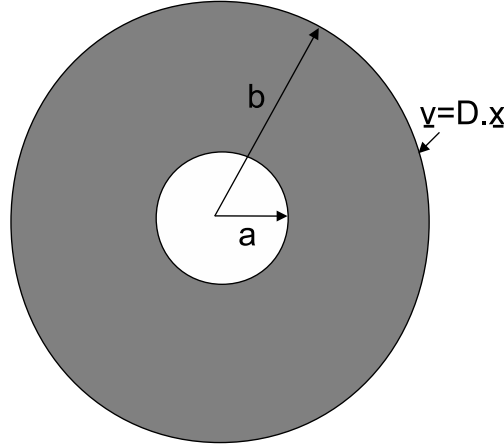


FIGURE 1.2: Modèle de la sphère creuse en conditions de taux de déformation homogène au bord

partie correspondant à un changement de forme de la cavité sans changement de volume ( $\mathbf{D}' \cdot \underline{x}$ ,  $\mathbf{D}'$  étant la partie déviatorique de  $\mathbf{D}$ ) :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \frac{b^3}{r^2} D_m \underline{e}_r + \mathbf{D}' \cdot \underline{x} \quad (1.11)$$

La considération de ce champ de vitesse conduit au potentiel de dissipation macroscopique :

$$\Pi(\mathbf{D}) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} \pi(\mathbf{d}) d\Omega = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=a}^{r=b} d_{eq} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.12)$$

avec  $d_{eq}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{d}' : \mathbf{d}'$ ,  $\mathbf{d}'$ ,  $\mathbf{d}$  étant le taux de déformation local déduit de (1.11).  $r$ ,  $\theta$ , et  $\phi$  sont les coordonnées sphériques. L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit alors :

$$\Pi(\mathbf{D}) \leq \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{r=a}^{r=b} S(r) \sqrt{\frac{1}{S(r)} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} d_{eq}^2 dS} dr \quad (1.13)$$

avec  $S(r) = 4\pi r^2$  et  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Le calcul de  $d_{eq}^2$  et l'introduction d'un changement de variable  $y = (r/b)^3$  conduisant à :

$$\Pi(\mathbf{D}) \leq \Pi^G(\mathbf{D}) = \sigma_0 \int_f^1 \sqrt{\frac{4D_m^2}{y^2} + D_{eq}^2} dy \quad (1.14)$$

avec la porosité  $f = (a/b)^3$ .

On démontre alors que les contraintes macroscopiques dérivant de  $\Pi^G(\mathbf{D})$  définissent la surface macroscopique de plasticité qui s'écrit :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (1.15)$$

Il s'agit d'un critère non elliptique en  $\Sigma_{eq}$  et  $\Sigma_m$ . Il dépend de la porosité  $f$  et de  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement en traction de la matrice saine.

Il est intéressant de noter que le critère de Gurson est une borne supérieure pour le problème de la sphère creuse. Il est aussi une borne supérieure pour un assemblage de Hashin [27] [59] [15]. Il convient également de souligner que la solution purement déviatorique donnée par le critère de Gurson correspond à la borne supérieure de type Voigt ( $\sigma_0(1 - f)$ , ce qui est rustique), tandis que le point purement hydrostatique donné par ce critère correspond à la solution exacte du problème de la sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique homogène au bord extérieur [41] [47].

### 1.5.2 Critère de Ponte Castañeda (1991)

Ce critère est issu d'un principe variationnel générique appliqué à un VER (Volume Elementaire Représentatif) d'un milieu poreux isotrope dont la matrice rigide parfaitement plastique obéit au critère de von Mises. Ce critère se présente sous la forme :

$$\Phi = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{9}{4}f \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} - (1 - f)^2 = 0 \quad (1.16)$$

A la différence du critère de Gurson (non elliptique), il s'agit d'un critère elliptique en  $\Sigma_{eq}$  et en  $\Sigma_m$ , dépendant de la porosité  $f$ . Comme auparavant,  $\sigma_0$  représente la contrainte d'écoulement en traction de la matrice saine.

Il a été par la suite démontré que le principe variationnel de Ponte Castañeda, mis en oeuvre pour aboutir à ce critère, est équivalent à la "éthode sécante modifiée" [76] dont un exposé détaillé peut être trouvé dans [12] ou dans [16].

Il est intéressant de remarquer que le critère de Ponte Castañeda (1.16) est une borne supérieure pour tout milieu poreux macroscopiquement isotrope avec une matrice rigide parfaitement plastique de type von Mises.

La solution purement déviatorique donnée par le critère de Ponte Castañeda vaut  $\sigma_0(1 - f)/\sqrt{1 + \frac{2}{3}f}$ , ce qui améliore la borne supérieure de type Voigt.

Le point purement hydrostatique donné par (1.16) majore de façon trop importante (notamment à faible porosité) la solution exacte de la sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique homogène au bord extérieur.



### 1.5.3 Extensions du critère de Gurson

#### 1.5.3.1 Critère GT

Afin de remédier aux insuffisances du critère de Gurson à faible triaxialités de contraintes (états quasi déviatoriques), différentes modifications ont été apportées dans la littérature au critère initial de Gurson [35] sur la base de résultats de simulation numérique sur cellule. La plus connue de ses modifications est celle proposée par Tvergaard [80] [81], et qui s'écrit :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (1.17)$$

Les paramètres heuristiques  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont introduits afin, d'une part, de donner un meilleur accord entre le critère de type Gurson et les différentes simulations numériques par éléments finis, et d'autre part, d'améliorer les prédictions dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes par le critère initial de Gurson.

Les auteurs suggèrent les valeurs  $q_2 = 1$ ,  $q_3 = q_1^2$ , sachant que les valeurs de  $q_1$  diffèrent selon les auteurs :

- $q_1 = 1$  dans le critère initial de Gurson,
- $q_1 = 1.5$  pour Tvergaard (1982) [81] (comparaison à des simulations numériques par éléments finis),
- $q_1 = 1.25$  pour Koplik et Needleman (1988) [40] (comparaison à des simulations numériques par éléments finis),
- $q_1 \approx 1.47$  pour Perrin et Leblond (1990) [60] (approche théorique : modèle autocohérent basé sur le problème de la sphère creuse placée dans un milieu infini lui même obéissant au critère GT et sous chargement hydrostatique).

La valeur de  $q_1$  conseillée par Chaboche et al. [17] est de 1.25. Cette valeur semble être en accord avec les simulations numériques par transformée de Fourier rapide (FFT) effectuées par Bilger [11] sur une cellule élémentaire contenant un grand nombre de cavités sphériques aléatoirement distribuées. Elle sera donc retenue par la suite.

#### 1.5.3.2 Prise en compte de la forme des cavités : critères pour des cavités sphéroïdales

Soulignons que la plupart des modèles couplés présents dans la littérature modélisent le comportement d'un matériau ductile poreux ayant des cavités sphériques. Toutefois, les

matériaux réels présentent souvent un caractère anisotrope initiale à cause de la forme non sphérique des cavités. Depuis une quinzaine d'années, la prise en compte des effets de forme de cavités a fait l'objet de nombreux travaux (cf. [27], [28], [31] et [32]) dont ceux réalisés au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML) [48] [49] qui seront ultérieurement exposés et considérés au quatrième chapitre.

## **1.6 Conclusion**

Nous avons présenté dans ce premier chapitre une description des principaux mécanismes physiques qui gouvernent la rupture ductile des matériaux élastoplastique endommageables. Différentes approches décrivant la plasticité macroscopique des milieux poreux ductiles ont été exposées. La présentation des approches micromécaniques couplés de "type Gurson", que nous avons choisie de privilégier dans la suite, en raison de leur relative bonne performance, a été détaillée. Il est bien connu que le critère original de Gurson ne fournit pas des résultats précis dans le domaine des faibles niveaux de taux de triaxialités des contraintes. C'est ce qui a motivé les travaux réalisés au LML dans le cadre de la thèse de V. Monchiet [48] (cf. également Monchiet et al. [49]). Comme nous le verrons dès le second chapitre, les nouveaux critères établis dans ces travaux apportent des améliorations aux critères de type Gurson existants. Pour être complète, la confirmation des performances de ces nouveaux critères doit être étudiée et analysée à travers des modèles d'endommagement ductile qui en découlent. Sur un plan tout à fait similaire, et dans la perspective d'applications aux géomatériaux, nous nous intéressons également à un critère récemment proposé dans la littérature, pour des matériaux poreux à matrice plastiquement compressible.

# Chapitre 2

## Formulation, numérisation et applications d'un nouveau modèle isotrope d'endommagement ductile

Pour l'étude des milieux poreux ductiles, Gurson [35] a développé une approche par analyse limite d'une sphère creuse dont la matrice solide est rigide-parfaitement plastique et obéit à un critère de von Mises. Le critère macroscopique approché auquel il aboutit se présente sous la forme :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left\{ \frac{3}{2} \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (2.1)$$

où  $\Sigma_h$  désigne la contrainte hydrostatique,  $\Sigma_{eq}$  la contrainte équivalente macroscopique de von Mises,  $\sigma_0$  la contrainte seuil de la matrice et  $f$  la porosité. Perrin [59] a montré que ce critère constitue une borne supérieure pour l'assemblage de sphères composites de Hashin et rappelle que le résultat exact pour un état de contrainte macroscopique hydrostatique est retrouvé.

Le défaut de précision du critère de Gurson dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes,  $T = \Sigma_h/\Sigma_{eq}$ , a motivé son extension heuristique proposée par Tvergaard [82] sur la base des résultats de simulations numériques sur cellule. Cette extension introduit en particulier 3 paramètres  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  et conduit au critère dénommé GT (en référence à Gurson et Tvergaard) :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 f \cosh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (2.2)$$

Ces auteurs puis d'autres par la suite suggèrent des valeurs de  $q_2 = 1$  et  $q_3 = q_1^2$ . On notera des propositions dans lesquelles  $q_1$  varie entre 1 et 1.5.

Par ailleurs, abordant l'étude des milieux poreux dans le cadre des méthodes d'homogénéisation non linéaire, Ponte-Castañeda [63] à l'aide d'une approche variationnelle a obtenu pour le milieu à cavités sphériques un critère macroscopique elliptique qui améliore rigoureusement le critère de Gurson dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes :

$$\left(1 + \frac{2}{3}f\right) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{9}{4}f \frac{\Sigma_h^2}{\sigma_0^2} - (1 - f)^2 = 0 \quad (2.3)$$

La formulation de ce critère, qui fait appel à des méthodes variationnelles dédiées aux milieux hétérogènes, a été étendue au cas des cavités cylindriques par Suquet [75]. Il a été par ailleurs montré que cette approche variationnelle est équivalente à une méthode de modules sécants modifiée [76]. Une observation importante est que le critère de Gurson viole la borne supérieure variationnelle dans le domaine des faibles triaxialités, tandis que cette borne variationnelle se révèle moins performante que le modèle de Gurson pour les forts niveaux de triaxialité.

Cette constatation a motivé les récents travaux de Monchiet et al. [48] qui ont développé un nouveau critère macroscopique approché pour l'étude de la plasticité et de l'endommagement des milieux poreux ductiles. Le recours à un champ de vitesse de type Eshelby a permis à ces auteurs d'améliorer, dans le cadre des méthodes d'analyse limite, le critère de Gurson pour les faibles triaxialités de contraintes, tout en préservant le résultat exact pour les états de contrainte hydrostatique. Pour des raisons de simplification de l'écriture, ce nouveau critère sera noté MCK (en référence à Monchiet, Charkaluk, Kondo [49]) dans la suite.

Le présent chapitre est dédié à la numérisation du modèle complet d'endommagement basé sur ce critère. Nous rappelons d'abord la méthodologie conduisant à l'expression du nouveau critère. Puis nous présentons la formulation complète et l'implantation numérique du modèle basé sur ce critère. Enfin nous discutons des résultats numériques obtenus en les comparant à des données expérimentales puis à des résultats du modèle de Gurson et du modèle GTN (critère GT associé avec le modèle de coalescence Tvergaard-Needalman [82]).

## 2.1 Critère macroscopique (MCK) basé sur l'utilisation d'un champ de vitesse de type Eshelby

### 2.1.1 Modèle de sphère creuse et champ de vitesse considéré

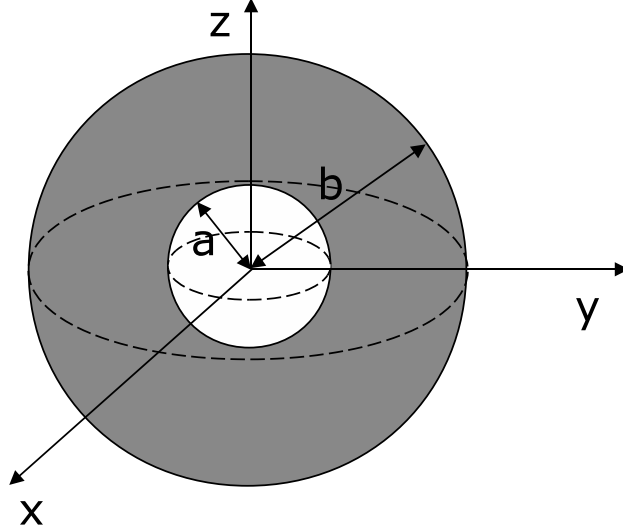


FIGURE 2.1: Modèle géométrique de la sphère creuse

Nous considérons maintenant une cellule sphérique de rayon  $b$  contenant une cavité sphérique de rayon  $a$  (voir figure 2.1). La cellule est caractérisée par le système de coordonnées sphérique  $(r, \varphi, \theta)$ .

Comme dans Gurson [35], le champ test dans la matrice,  $\underline{v}$ , nécessaire pour l'analyse limite de la sphère creuse, est composé d'un champ uniforme,  $\mathbf{A} \cdot \underline{x}$ , et d'un champ hétérogène,  $\underline{v}^E$  :

$$\underline{v} = \mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{v}^E \quad (2.4)$$

A la différence de Gurson [35] qui considère un champ de vitesse radial, Monchiet [49] adopte un champ de vitesse plus raffiné dans lequel  $\underline{v}^E$  est inspiré de la solution du problème de l'inclusion inhomogène d'Eshelby [24] [50]. Cette solution peut être écrite sous la forme :

$$\underline{v}^E = \sum_{r=1}^{r=6} \underline{v}^r d_r^* \quad (2.5)$$

où  $d_r^*$  est défini par :

$$\begin{aligned} d_1^* &= \frac{1}{3} (d_{11}^* + d_{22}^* + d_{33}^*) ; & d_2^* &= \frac{1}{3} \left( \frac{d_{11}^* + d_{22}^*}{2} - d_{33}^* \right) ; & d_3^* &= \frac{d_{22}^* - d_{11}^*}{2} ; \\ d_4^* &= d_{12}^* ; & d_5^* &= d_{13}^* ; & d_6^* &= d_{23}^* \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les composantes du champ de vitesse  $\underline{v}^r$  pour  $r = 1$  à 6 sont définies en coordonnées sphériques par :

$$\begin{aligned} \underline{v}^1 &= \frac{a^3}{r^2} \underline{e}^r; & \underline{v}^2 &= \frac{a^3}{r^2} (1 - \cos \varphi) \underline{e}^r; & \underline{v}^3 &= \frac{a^3}{r^2} \sin^2 \varphi \cos(2\theta) \underline{e}^r; \\ \underline{v}^4 &= \frac{a^3}{r^2} \sin^2 \varphi \sin(2\theta) \underline{e}^r; & \underline{v}^5 &= \frac{a^3}{r^2} \sin(2\varphi) \cos \theta \underline{e}^r; & \underline{v}^6 &= \frac{a^3}{r^2} \sin(2\varphi) \sin \theta \underline{e}^r \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le taux de déformation plastique microscopique correspondant est défini dans la matrice solide par :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} + \mathbf{d}^E = \mathbf{A} + \sum_{r=1}^{r=6} \mathbf{d}^r d_r^* \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{d}^r = \nabla_s \underline{v}^r$  est la partie symétrique du gradient de  $\underline{v}^r$ .

Puisque le champ de vitesse de type Eshelby introduit par (2.4) à (2.7) ne vérifie pas la condition de taux de déformation uniforme au bord de la cellule sphérique, seule la règle de moyenne  $\mathbf{D} = \langle \mathbf{d} \rangle_\Omega$  est imposée sur  $\underline{v}^E$  :

$$\mathbf{D} = \langle \mathbf{d} \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \mathbf{d} \, dV = \mathbf{A} + f \mathbb{S} : \mathbf{d}^* \quad (2.9)$$

où  $|\Omega| = 4\pi b^3/3$  représente le volume de la cellule étudiée (matrice + cavité) et  $\mathbb{S}$  est le tenseur d'Eshelby correspondant à la cavité sphérique intérieure.

A la différence du calcul de Gurson, la considération du champ de type Eshelby introduit cinq paramètres inconnus qui doivent être déterminés en utilisant une procédure de minimisation. Ces paramètres sont choisis comme  $d_r^*$  pour  $r = 2$  à 6. Il est intéressant de remarquer que le champ de vitesse de Gurson correspond à  $d_r^* = 0$  pour  $r = 2$  à 6.

### 2.1.2 Nouveau critère macroscopique de plasticité et illustrations

Suivant l'approche par l'analyse limite de Gurson [35], Monchiet [49] a établi l'expression suivante du critère de plasticité macroscopique :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left\{ \sqrt{\frac{9}{4} \frac{\Sigma_h^2}{\sigma_0^2} + \frac{2}{3} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (2.10)$$

Comme précédemment mentionné, ce nouveau critère sera dénommé MCK. Bien que ce critère soit non elliptique comme celui de Gurson, il convient de souligner que la présence de  $\Sigma_{eq}$  dans le terme en cosh constitue une différence majeure avec l'ensemble des critères de type Gurson précédemment évoqués.

On insistera sur l'importance de la prise en compte des effets de cisaillement dans le processus d'endommagement des matériaux ductiles poreux [51] [53]. Dans cette perspective, bien que de publication récente, le critère MCK a été récemment considéré et utilisé par Jackiewicz[39] avec des applications à la mise en forme des métaux.

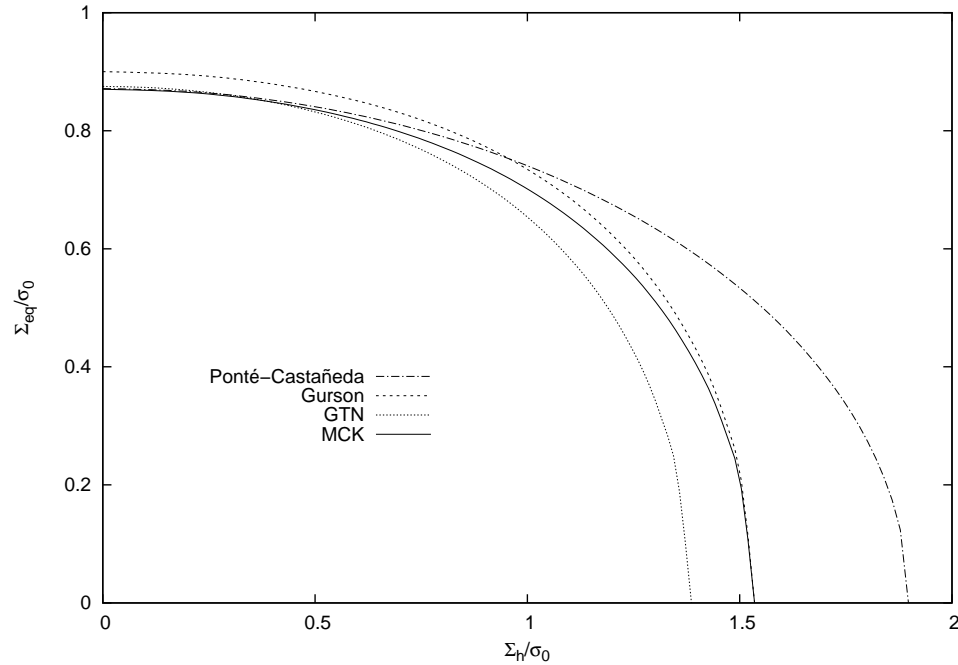


FIGURE 2.2: Comparaison des critères MCK, Gurson, GT et Ponte-Castañeda pour une porosité  $f = 10\%$

A titre d'illustration, le critère MCK est comparé sur la figure 2.2 au critère de Gurson (2.1),  $GT^1$ (2.2), et de Ponte-Castañeda(2.3), pour une porosité  $f = 10\%$ . On note que pour les faibles triaxialités de contraintes ( $T = \Sigma_h/\Sigma_{eq}$ ), critère MCK améliore celui de Gurson et retrouve en accord avec le critère GT et la borne variationnelle proposée par Ponte-Castañeda. De plus, dans le domaine des fortes triaxialités le critère MCK est en accord avec celui de Gurson dont la performance est reconnue. En résumé, le critère de plasticité MCK prédit des résultats meilleurs que ceux des autres critères analytiques existants. Ceci motive une formulation d'un nouveau modèle d'endommagement qui est implanté et évalué dans ce chapitre.

Il convient de noter que des améliorations ont été récemment apportées à la modélisation par homogénéisation non linéaire des milieux poreux, notamment par la mise en oeuvre de la méthode du second ordre [38]. On notera cependant que ces approches ne débouchent pas

1. La représentation est faite en prenant  $q_1 = 1.25$  (cf. section 1.5.3.1).

sur des résultats analytiques.

$\Sigma_m$	$\Sigma_{eqv}$	Déformation uniforme au bord	
		Borne inférieure	Borne supérieure
0	1.7087	1.7	1.7086
1.6	1.6870	1.6784	1.6894
3.2	1.5717	1.5435	1.5805
4	1.4067	1.3452	1.4271
4.4	1.2574	1.1568	1.2888
4.8	1.0150	0.845	1.067
5	0.8254	0.5467	0.9013
5.1	0.6962	0.3856	0.7966
5.2	0.5218	-	0.6698
5.3	0.2058	-	0.5084
$\Sigma_m^{\max}$	5.3195	5.1746	5.4388

TABLE 2.1: Valeurs de  $\Sigma_{eqv}$  pour critère MCK et l'approche numérique de Trillat et al. [79] en déformation uniforme au bord ( $f = 1\%$ )

$\Sigma_m$	$\Sigma_{eqv}$	Déformation uniforme au bord	
		Borne inférieure	Borne supérieure
0	1.5073	1.4805	1.5206
0.8	1.4564	1.4624	1.4774
1.6	1.2677	1.2669	1.2868
2	1.0757	1.0373	1.082
2.2	0.9316	0.8598	0.9269
2.4	0.7265	0.6315	0.7106
2.5	0.5799	0.4621	0.5601
$\Sigma_m^{\max}$	2.6588	2.565	2.6316

TABLE 2.2: Valeurs de  $\Sigma_{eqv}$  pour critère MCK et l'approche numérique de Trillat et al. [79] en déformation uniforme au bord ( $f = 10\%$ )

Des approches numériques basées sur l'analyse limite d'une sphère creuse ont été également proposées par [79]. Ces approches permettent d'établir des bornes inférieure et supérieures (statique et cinématique, respectivement) du critère macroscopique. En combinant des calculs éléments finis avec des méthodes d'optimisation, ces auteurs ont fourni une méthode précise de détermination des bornes du critère exact de la sphère creuse. Des conditions aux limites de taux de déformation uniforme au bord et contrainte uniforme au bord sont considérées dans les calculs. Tableaux 2.1 et 2.2 montrent des comparaisons entre les prédictions



du critère MCK et les résultats numérique en conditions de taux de déformation uniforme au bord. On note que le critère MCK constitue une très bonne approximation du problème considéré ici.

En raison des conditions (2.9) exposés pour l'établissement du critère MCK, une comparaison rigoureuse ne peut être effectuée qu'avec les résultats obtenus en condition de contrainte uniforme au bord. Cette comparaison entre les points du critère MCK et ceux de l'approche numérique est montrée sur les tableaux 2.3 et 2.4 pour  $f = 1\%$  et  $f = 10\%$  respectivement, avec  $\Sigma_{eqv} = \sqrt{3}\Sigma_{eq}$ .

$\Sigma_m$	$\Sigma_{eqv}$	Contrainte uniforme au bord	
		Borne inférieure	Borne supérieure
0	1.7087	1.6937	1.7048
1.6	1.6870	1.6732	1.6835
3.2	1.5717	1.5016	1.5511
4	1.4067	1.2745	1.3713
4.4	1.2574	1.0705	1.2214
4.8	1.0150	0.7698	1.0009
5	0.8254	0.5472	0.8467
5.1	0.6962	0.2001	0.7509
5.2	0.5218	-	0.6355
5.3	0.2058	-	0.4872
$\Sigma_m^{\max}$	5.3195	5.1791	5.4385

TABLE 2.3: Valeurs de  $\Sigma_{eqv}$  pour critère MCK et l'approche numérique de Trillat et al. [79] en contrainte uniforme au bord ( $f = 1\%$ )

$\Sigma_m$	$\Sigma_{eqv}$	Contrainte uniforme au bord	
		Borne inférieure	Borne supérieure
0	1.5073	1.3774	1.4150
0.8	1.4564	1.3430	1.3849
1.6	1.2677	1.1550	1.1872
2	1.0757	0.9436	0.9912
2.2	0.9316	0.7918	0.8511
2.4	0.7265	0.5973	0.6608
2.5	0.5799	0.4318	0.5305
$\Sigma_m^{\max}$	2.6588	2.6229	2.6704

TABLE 2.4: Valeurs de  $\Sigma_{eqv}$  pour critère MCK et l'approche numérique de Trillat et al. [79] en contrainte uniforme au bord ( $f = 10\%$ )

On note sur ces comparaisons que le critère MCK fournit une bonne approximation de la borne supérieure. Il faut noter que les bornes supérieures issues du calcul numérique ne semblent pas assez précises pour les fortes triaxialités des contraintes. En effet, il est noté par ces auteurs que, pour  $f = 1\%$ , les écarts entre les valeurs statiques et cinématiques sont plus grands du fait que le maillage n'est pas assez fin pour cette porosité basse. Cependant, ces résultats numériques ont été récemment améliorés par ces auteurs (cf. communication privée). Enfin, il convient de rappeler que le critère MCK donne la solution exacte en chargement hydrostatique pur ( $\Sigma_m^{\max}$ ). Pour une porosité de  $f = 10\%$ , le critère MCK constitue également une bonne approximation de la borne supérieure avec une erreur relative de moins de 6% à tous les niveaux de contraintes.

## 2.2 Formulation du modèle issu du critère MCK

On se propose maintenant de décrire la formulation complète du modèle constitutif basé sur le critère MCK.

### – Critère de plasticité

On commence par la fonction de charge macroscopique donnée par (2.10) dans laquelle est introduite à présent une variable d'écoulement correspondant à la limite d'élasticité de la matrice  $\bar{\sigma}$  :

$$\Phi(\Sigma, \bar{\sigma}, f) \equiv \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2f \cosh \left( \sqrt{\frac{9}{4} \frac{\Sigma_h^2}{\bar{\sigma}^2} + \frac{2}{3} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2}} \right) - 1 - f^2 \leq 0 \quad (2.11)$$

### – Loi d'écoulement

L'évolution de la déformation plastique macroscopique est obtenue à partir de la propriété de normalité qui se transpose à l'échelle macroscopique :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \quad (2.12)$$

$\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{si } \Phi(\Sigma, \bar{\sigma}, f) < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{si } \Phi(\Sigma, \bar{\sigma}, f) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

– **Evolution de porosité**

Quant à la loi d'évolution de la porosité, elle est déduite de l'incompressibilité de la déformation plastique de matrice solide :

$$\dot{f} = 3(1 - f) \dot{E}_m^p \quad (2.14)$$

où  $E_m^p \equiv \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{E}^p$  est la déformation plastique volumique macroscopique.

Pour la formulation du modèle, la dernière relation à considérer porte sur la loi d'évolution de la contrainte d'écoulement dans la matrice. Elle est classiquement donnée sous la forme (cf. [35]) :

$$(1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} = \Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p \quad (2.15)$$

où  $\bar{\epsilon}$  est la déformation moyenne dans la matrice.

– **Modèle de coalescence**

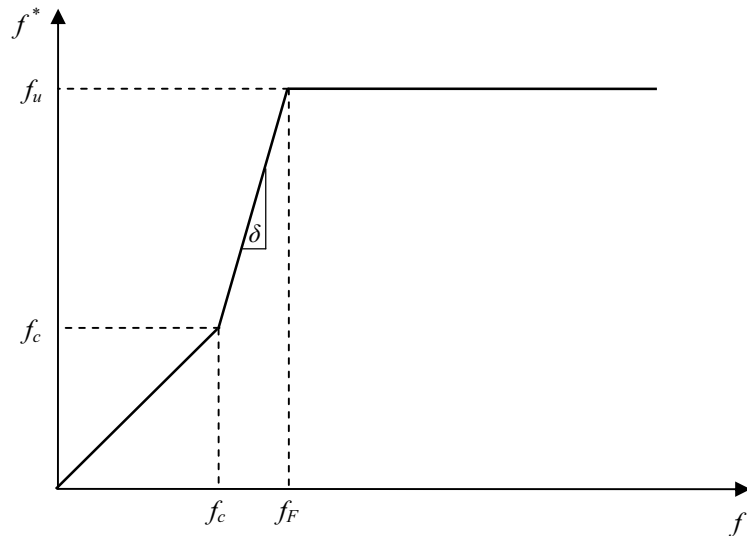


FIGURE 2.3: Modèle de coalescence de Tvergaard-Needleman [82] : porosité “effective”

Dans la perspective des calculs de structures, la formulation des modèles doit être complétée par la prise en compte de la coalescence des cavités. Afin de faciliter la comparaison du modèle MCK avec le modèle GTN, le modèle de coalescence proposé par Tvergaard et Needleman [82] a été adopté. La porosité  $f$  est alors remplacée par  $f^*$  définie par :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $f_c$  et  $f_F$  désignent respectivement les porosités de début de coalescence et à la rupture.  $f^*$  prend la valeur de  $f_u$  lorsque l'élément de volume ne peut plus supporter de contraintes. Le facteur  $\delta = (f_u - f_c)/(f_F - f_c)$  a été introduit pour représenter l'augmentation rapide de la porosité qui survient au début de la coalescence (voir figure 2.3).

## 2.3 Intégration et implantation numérique du modèle

Dans cette section nous présentons les étapes principales de l'intégration du modèle formulé sur la base du critère MCK, ceci en vue de l'implantation numérique dans le code ABAQUS. La résolution des problèmes de mécanique de structure par éléments finis, ainsi que le schéma de résolution de ABAQUS sont brièvement décrits en annexe A.1. Pour des raisons de comparaison, la numérisation a été aussi effectuée pour le modèle de Gurson et son extension GTN.

L'implantation numérique dans le code élément fini ABAQUS a été réalisée en tirant profit de la subroutine Umat (User defined MATerial). Un schéma d'intégration implicite est utilisé à cette fin. Nous présentons ici l'algorithme de prédiction-corrrection utilisé pour la mise en oeuvre du modèle MCK, le même algorithme ayant été employé pour les 2 autres modèles.

### – Prédiction élastique

$$\Sigma_{n+1} = \mathbb{C} : \mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p) = \Sigma^{pred} - \mathbb{C} : \Delta \mathbf{E}^p \quad (2.17)$$

où  $\mathbb{C}$  est la matrice des modules élastiques; les indices  $n$  et  $n + 1$  se rapportent au début et à la fin de l'incrément respectivement;  $\Sigma^{pred}$  est le prédicteur élastique qui s'exprime comme :

$$\Sigma^{pred} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_n^e + \Delta \mathbf{E}) \quad (2.18)$$

### – Correction plastique

En prenant l'équation (2.11) et en calculant  $\partial\Phi/\partial\Sigma^{pred}$ , on obtient pour la partie

déviatorique  $(\Delta \mathbf{E}^p)'$  et pour la partie hydrostatique  $\Delta E_m^p$  :

$$\begin{cases} (\Delta \mathbf{E}^p)' = \Delta \lambda \left( \frac{3}{\bar{\sigma}^2} + \frac{2f \sinh(R_0)}{\bar{\sigma}^2 R_0} \right) (\Sigma^{pred})' \\ \Delta E_m^p = \Delta \lambda \frac{3}{2} \frac{f \Sigma_m^{pred} \sinh(R_0)}{\bar{\sigma}^2 R_0} \end{cases} \quad (2.19)$$

où  $R_0 = \sqrt{\frac{9}{4} \frac{(\Sigma_m^{pred})^2}{\bar{\sigma}^2} + \frac{2}{3} \frac{(\Sigma_{eq}^{pred})^2}{\bar{\sigma}^2}}$ .

A partir de (2.19) et de la définition de  $\Delta E_{eq}^p \equiv (2/3 \Delta \mathbf{E}^p' : \Delta \mathbf{E}^p')^{1/2}$ , nous pouvons obtenir l'expression de  $\Delta \lambda$  en fonction de  $\Delta E_{eq}^p$  :

$$\Delta \lambda = \frac{\bar{\sigma}^2 \Delta E_{eq}^p}{\Sigma_{eq}^{pred}} \left/ \left( 2 + \frac{4f \sinh(R_0)}{3 R_0} \right) \right. \quad (2.20)$$

Le calcul de  $\Delta E_{eq}^p$  (qui intervient dans (2.20)), est basé sur la condition de consistance  $\dot{\Phi} = 0$  :

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi(\Sigma^{pred}, \bar{\sigma}, f)}{\partial (\Delta E_{eq}^p)} \Delta E_{eq}^p = 0 \quad (2.21)$$

L'expression détaillée de  $\Delta E_{eq}^p$  est donnée dans l'annexe A.2.

Calcule  $\Delta \lambda$  avec  $\Delta E_{eq}^p$ , et la correction plastique est :

$$\Delta \mathbf{E}^p = \Delta \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \quad (2.22)$$

### – Opérateur tangent consistant

Le calcul de l'opérateur tangent consistant  $\mathbb{K}_{cons}$  (défini par  $\Delta \Sigma = \mathbb{K}_{cons} : \Delta \mathbf{E}$ ) est nécessaire dans UMAT pour garantir une convergence globale. A partir de (2.17) et l'expression de la correction plastique  $\Delta \mathbf{E}^p$ , nous obtenons :

$$\Delta \Sigma = \mathbb{C} : (\Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^p) = \mathbb{C} : \left( \Delta \mathbf{E} - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \right) \quad (2.23)$$

En utilisant l'expression de  $\Delta \lambda$ ,  $\Delta \Sigma$  peut s'exprimer comme :

$$\Delta \Sigma = \mathbb{C} : \left( \Delta \mathbf{E} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2 + 4f \sinh(R_0)/R_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \frac{\Delta E_{eq}^p}{\Sigma_{eq}^{pred}} \right) \quad (2.24)$$

En introduisant  $\mathbf{B}$  tel que :  $\Delta E_{eq}^p = \mathbf{B} : \Delta \mathbf{E}$ , où  $\mathbf{B}$  peut être obtenu à partir de (2.21) (voir l'annexe A.2), l'expression de  $\Delta \Sigma$  en fonction de  $\Delta \mathbf{E}$  peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \Sigma = \left[ \mathbb{C} - \frac{\bar{\sigma}^2 / \Sigma_{eq}^{pred}}{2 + 4f \sinh(R_0)/R_0} (\mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}}) \otimes \mathbf{B} \right] : \Delta \mathbf{E} \quad (2.25)$$

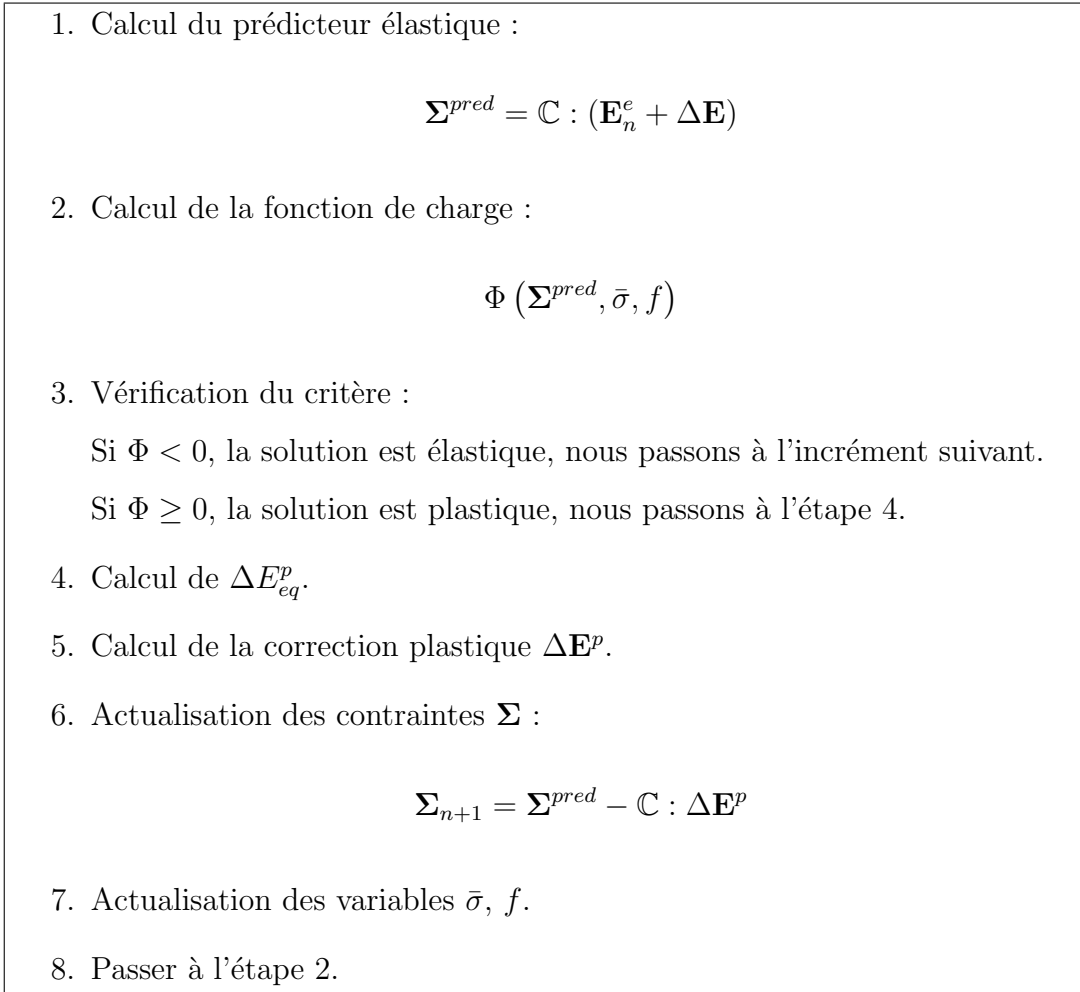


FIGURE 2.4: Algorithme d'implantation du modèle MCK

L'opérateur tangent consistant s'écrit donc :

$$\mathbb{K}_{cons} = \mathbb{C} - \frac{\bar{\sigma}^2 / \Sigma_{eq}^{pred}}{2 + 4f \sinh(R_0) / R_0} \left( \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \right) \otimes \mathbf{B} \quad (2.26)$$

Les étapes principales de l'algorithme de prédiction élastique-corrrection plastique sont résumées sur la figure 2.4.

## 2.4 Application numérique à l'étude de la striction d'une éprouvette lisse

Nous présentons d'abord les prédictions du modèle MCK pour l'analyse de la striction d'une éprouvette cylindrique lisse soumise à une traction uniaxiale. Cet exemple est choisi car il est étudié par de nombreux auteurs ([82],[1],[10]) sur la base du modèle de Gurson

et/ou de GTN. Nous comparons dans ce qui suit les résultats numériques prédits par les modèles MCK, GTN et de Gurson.

### 2.4.1 Données pour la simulation numérique

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier courant avec un rapport  $E/\sigma_0 = 500$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . L'écroissage isotrope de la matrice est modélisé en utilisant une loi puissance  $\bar{\sigma} = k(\bar{\varepsilon}^p)^n$  avec  $k = 760$ ,  $n = 0.1$ . Comme dans l'étude de Besson [10], la porosité initiale est prise égale à  $f_0 = 1.75 \times 10^{-4}$ , tandis que les paramètres de coalescence adoptés sont  $f_c = 8 \times 10^{-4}$  et  $f_F = 0.2672$ . Les principaux paramètres matériau sont donnés dans le tableau 2.5.

$f_0$	$f_c$	$f_F$	$E(MPa)$	$\nu$	$\sigma_0(MPa)$
$1.75 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-4}$	0.2672	$2 \times 10^5$	0.3	400

TABLE 2.5: Valeurs des principaux paramètres utilisés pour l'étude de la réponse de l'éprouvette lisse

Le rapport  $L_0/R_0$  est pris égal à 4 avec  $L_0$  et  $R_0$  représentant la demi-hauteur et le rayon de l'éprouvette respectivement (cf. figure 2.5). Comme montré sur figure 2.5, 330 éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR) sont utilisés pour le maillage du quart de l'éprouvette (prise en compte de la symétrie). Un déplacement uniforme verticale est imposé à la face supérieure, les noeuds situés au plan de symétrie sont bloqués axialement.

Considérant que cet exemple concerne un problème de grande déformation, l'option NLGEOM dans ABAQUS a été utilisée pendant le processus d'analyse. D'ailleurs, une extension aux grandes déformations du programme UMAT a été effectuée en ajoutant une routine utilisateur ROTSIG, ce qui permet de tourner les tenseurs déformations élastique  $\mathbf{E}^e$  et plastique  $\mathbf{E}^p$ .

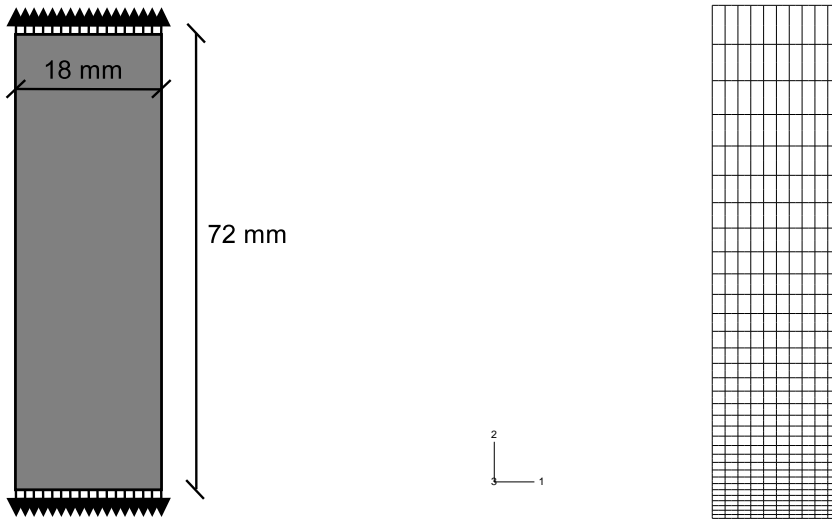


FIGURE 2.5: Profil géométrique et maillage de l'éprouvette axisymétrique lisse

## 2.4.2 Discussion des résultats de la simulation numérique

Les prédictions de la contrainte nominale ( $F/S_0$  où  $S_0$  est la surface initiale au centre de l'éprouvette) en fonction de la réduction de rayon ( $\Delta R/R_0$ ) des trois modèles sont comparées sur la figure 2.6.

Les courbes issus des résultats fournis par les trois modèles présentent les mêmes allures. La contrainte nominale  $F/S_0$  commence d'abord par augmenter jusqu'à atteindre un maximum qui correspond au début de striction [82] puis la courbe amorce une descente, conséquence de la diminution de la section au niveau du col de l'éprouvette. Cette chute s'accroît à la fin de l'essai en raison de la coalescence de certaines cavités.

Avant d'arriver à l'étape de coalescence, les trois modèles prédisent des résultats tout à fait similaires. Dans la phase de coalescence, les résultats obtenus par le modèle MCK recouvrent presque ceux prédits par le modèle GTN. La courbe issue des résultats du modèle de Gurson est différente par rapport aux deux autres courbes. En effet, il est bien connu (voir [10]) que les déformations sont importantes au centre de l'éprouvette où la triaxialité est faible (égal à 0.33 au début de la traction). Dans ce domaine, il a été noté que les critères GTN et MCK sont en accord.

La figure 2.7 montre les évolutions de la porosité au centre de l'éprouvette lisse, telles qu'elles sont prédites par les trois modèles. On note également ici une grande proximité entre la courbe du modèle MCK et celle du modèle GTN. A niveau de déplacement fixé, ces



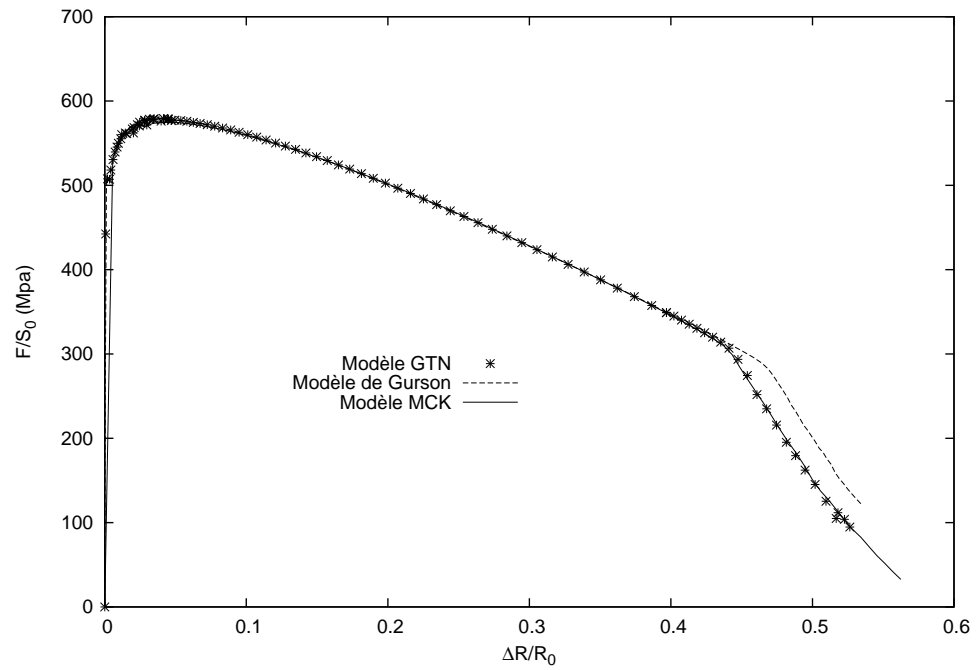


FIGURE 2.6: Comparaison des résultats numériques : courbes de comportement prédites par les modèles MCK, GTN et Gurson

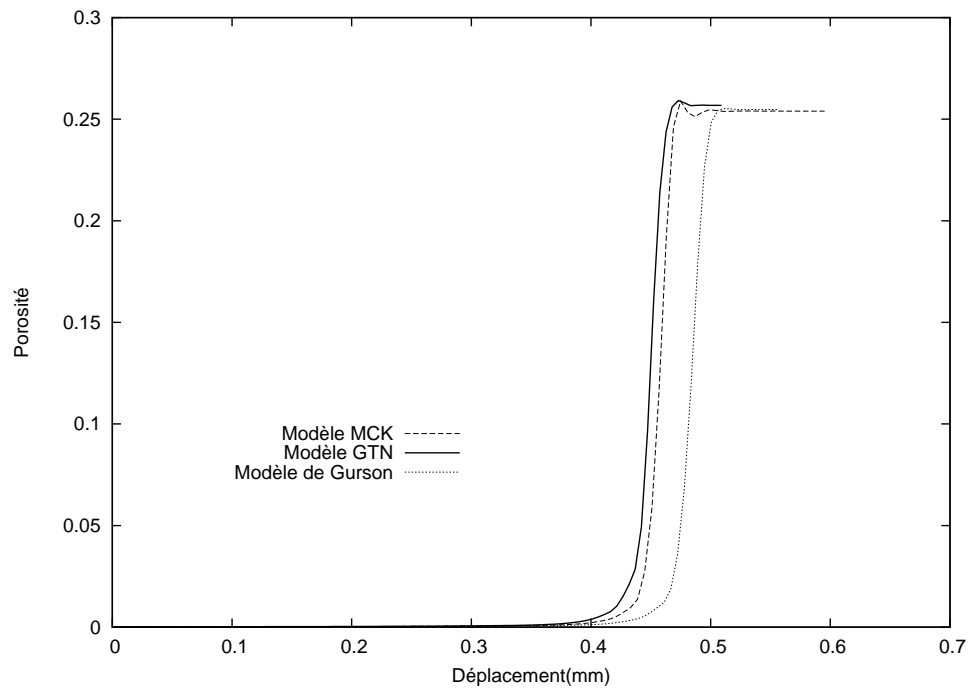


FIGURE 2.7: Evolution de porosité au centre de l'éprouvette

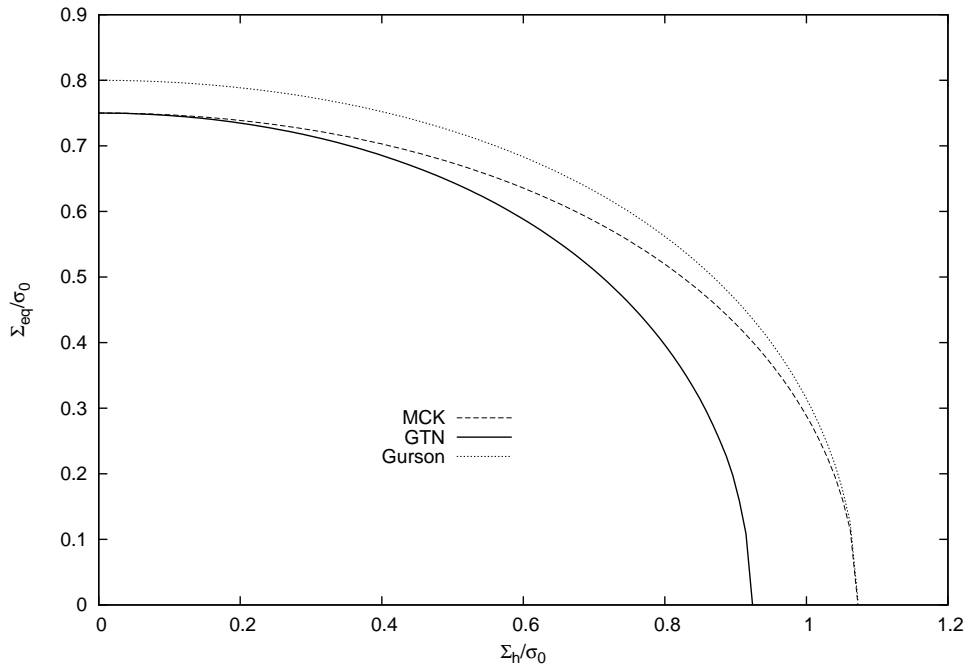


FIGURE 2.8: Comparaison des critères MCK, Gurson et GTN pour porosité  $f = 20\%$ , prédite par les trois modèles

deux modèles prédisent des niveaux de porosité plus élevés que celui fourni par le modèle de Gurson. En résumé, les modèles MCK et GTN prédisent des résultats similaires et une coalescence plus précoce par rapport au modèle de Gurson.

Comme la porosité au centre de l'éprouvette peut atteindre un niveau de 20% à la fin du chargement (voir figure 2.7), il s'avère intéressant de comparer les trois critères de plasticité macroscopiques (cf. figure 2.8 pour une porosité  $f = 20\%$ ). Il est confirmé que, pour ce niveau de porosité et pour des faibles triaxialités des contraintes, le critère MCK et celui de GTN sont en accord et présentent des différences avec le critère de Gurson.

## 2.5 Simulation numérique d'une éprouvette entaillée préfiissurée

En raison de la bonne performance du modèle MCK dans le domaine des faibles triaxialités des contraintes, une éprouvette entaillée axisymétrique préfiissurée a été ensuite considérée. Les données expérimentales correspondant à cet essai proviennent de Rousselier et Mudry [69]. Il convient de noter que cet essai a été récemment étudié par Enakoutsa et al. [23] [22] en considérant le modèle GTN et des régularisations non locales. Notre objectif

étant de comparer le nouveau modèle locale aux deux autres, nous nous contenterons ici de la formulation non régularisée en adoptant le même maillage que celui utilisé par ces auteurs.

### 2.5.1 Données et description de l'éprouvette entaillée

La demi-hauteur et le rayon de l'éprouvette sont respectivement de 45 mm et 15 mm (cf. figure 2.9). Le demi-angle d'ouverture vaut  $30^\circ$  ; la profondeur de l'entaille centrale en forme de V est de 5 mm. La longueur de la préfiissure est prise égale à 1.7 mm.

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier faiblement allié, référencé 16MND5 ou encore A508 CL.3. Le module d'Young de cet acier vaut  $E = 203000MPa$  , tandis que son coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ . La porosité initiale  $f_0 = 1.6 \times 10^{-4}$ . Comme précédemment, l'écroissage isotrope de la matrice est modélisé en utilisant une loi de puissance de la déformation plastique équivalente avec un exposant  $n = 0.1$ . Les principaux paramètres matériau sont donnés dans le tableau 2.6.

$f_0$	$f_c$	$f_F$	$E(MPa)$	$\nu$	$\sigma_0(MPa)$
$1.6 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	0.2433	$2.03 \times 10^5$	0.3	450

TABLE 2.6: Valeurs des principaux paramètres utilisés pour la modélisation de l'éprouvette entaillée préfiissurée

L'éprouvette est soumise à un chargement consistant en un déplacement uniforme vertical imposé à la face supérieure, les noeuds situés dans le plan de symétrie étant bloqués axialement. Pour la même raison que dans l'exemple précédent, une analyse de grande déformation a été retenue pour cette simulation.

La figure 2.9 présente le maillage du quart de l'éprouvette qui est composé de 192 éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite(CAXR ou CAXRT). Comme dans [23], une taille de maille fixe de  $800 \mu m$  est appliquée dans la zone où une localisation du champ de déformation est attendue.

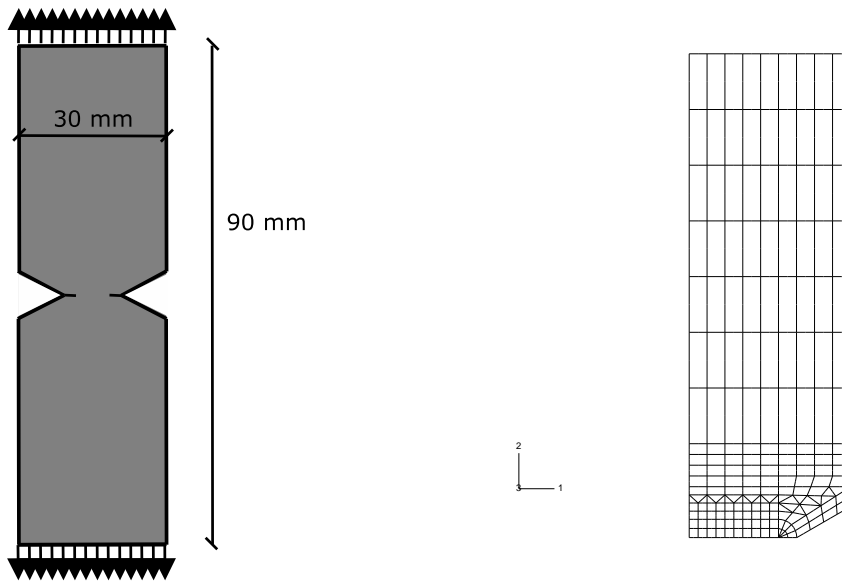


FIGURE 2.9: Profil géométrique et maillage de l'éprouvette axisymétrique préfissurée

## 2.5.2 Discussion des résultats

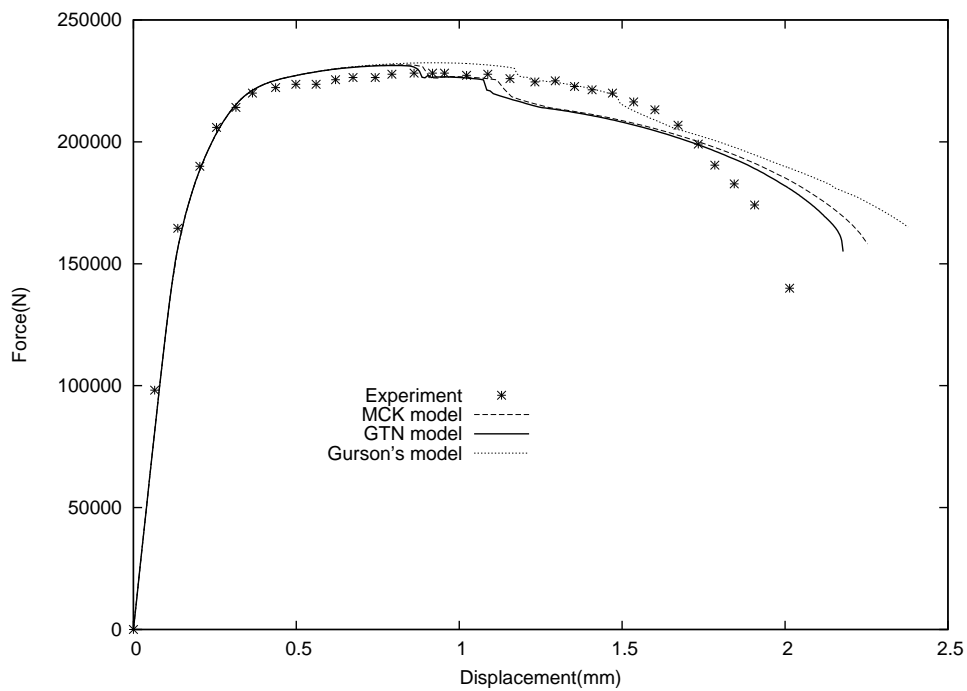


FIGURE 2.10: Comparaison des prédictions numériques avec les résultats expérimentaux [23] - Courbes de traction par les modèles MCK, GTN et Gurson

Sur la figure 2.10, est présentée une comparaison des prédictions numériques force-déplacement par les trois modèles aux données expérimentales. On note que les trois courbes issues du calcul numérique ont des allures semblables. La force de traction commence d'abord

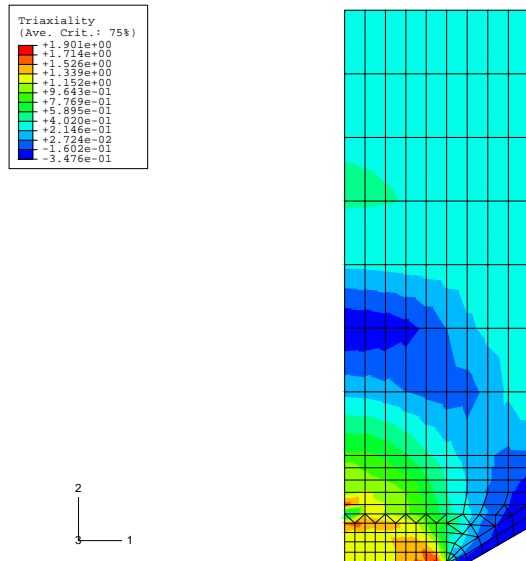


FIGURE 2.11: Distribution de triaxialité dans l'éprouvette préfissurée soumise à un déplacement vertical de 0.8mm

par augmenter jusqu'à arriver à un "plateau" puis amorce une descente due à la coalescence. Les résultats de simulation pour ces trois modèles apparaissent tout à fait comparables aux données issues de l'expérience. L'écart entre les courbes du modèle MCK et du modèle GTN est beaucoup plus faible que celui entre le modèle MCK et le modèle de Gurson. Ce résultat peut être interprété à partir de la distribution des triaxialités des contraintes dans l'éprouvette (cf. figure 2.11). En effet, on note que le fond de la fissure concentre une grande partie des déformations et se trouve dans une zone où la triaxialité des contraintes est relativement faible (de l'ordre de 0.5) par rapport à d'autres zones de l'éprouvette. Comme précédemment indiqué (cf. figure 2.8), pour ce niveau de triaxialité, le critère MCK est proche de celui de GTN et présente des différences avec le critère de Gurson.

L'analyse des évolutions de porosité en fond de la fissure permet de confirmer l'interprétation des différences entre les courbes de traction calculées à l'aide des trois modèles. La figure 2.12 indique que les valeurs de porosité prédites par le modèle GTN et par le modèle MCK sont proches et augmentent plus vite que celle du modèle de Gurson. De plus, les modèles GTN et MCK atteignent la porosité de rupture ( $f_F$ ) à des niveaux de déformation similaires.

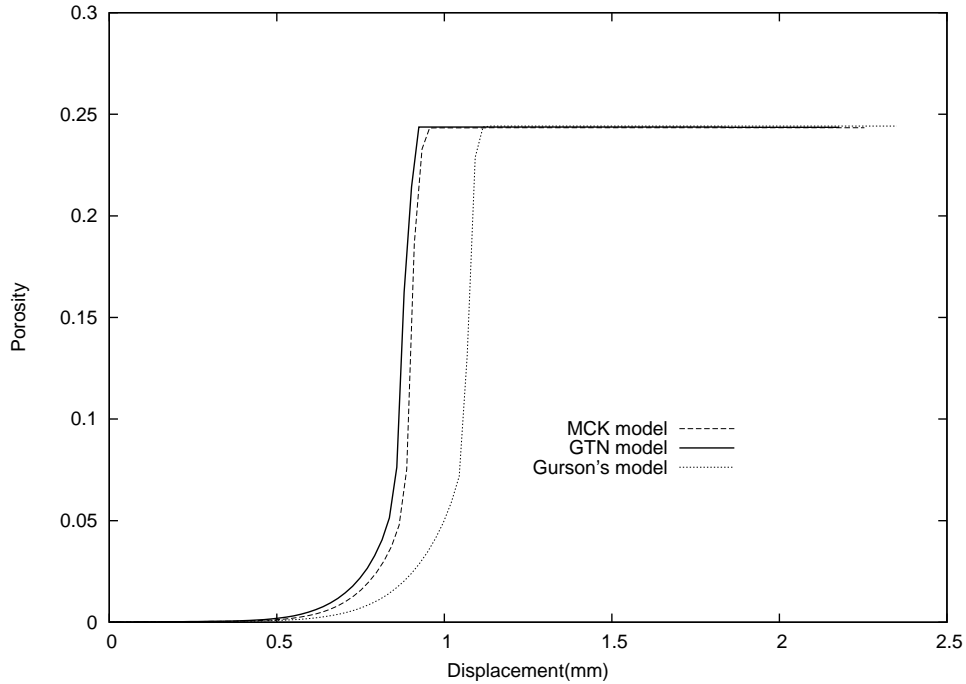


FIGURE 2.12: Evolution de porosité en fond de la fissure

## 2.6 Prise en compte d'une pression de fluide dans les cavités

Dans cette section nous nous intéressons à la situation où les cavités sont saturées par un fluide. Nous visons à étendre le modèle MCK au contexte de la poroplasticité. Le milieu étudié est composé comme précédemment d'une matrice rigide plastique parfaite (critère de von Mises), mais avec des cavités sphériques sous pression uniforme  $p$  (par exemple, pression due à un gaz). La cellule élémentaire étudiée est schématisée sur la figure 2.13.

### 2.6.1 Contraintes effectives

En raison de l'incompressibilité de la matrice, on peut démontrer la validité du concept de contrainte effective de Terzaghi :  $\Sigma = \Sigma + p\mathbf{1}$  ([14] [45] [83]). Ceci revient à remplacer le couple de paramètres  $(\Sigma, p)$  par  $\Sigma + p\mathbf{1}$ . Il s'ensuit donc la modification suivante pour le critère MCK lorsque la pression de fluide est considérée :

$$\Phi(\Sigma, \bar{\sigma}, f) \equiv \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2f \cosh \left( \sqrt{\frac{9}{4} \frac{(\Sigma_h + p)^2}{\bar{\sigma}^2} + \frac{2}{3} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2}} \right) - 1 - f^2 \leq 0 \quad (2.27)$$

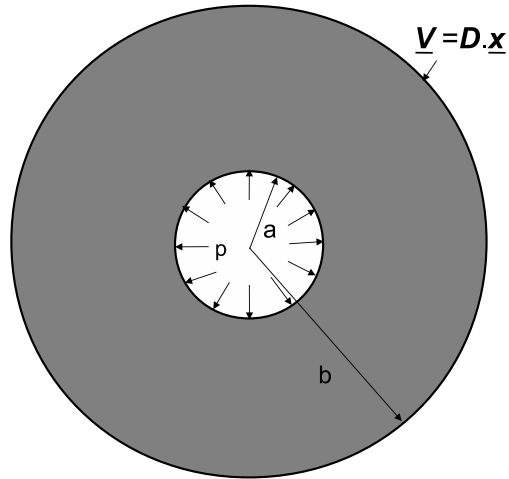


FIGURE 2.13: Cellule élémentaire prenant en compte la pression  $p$

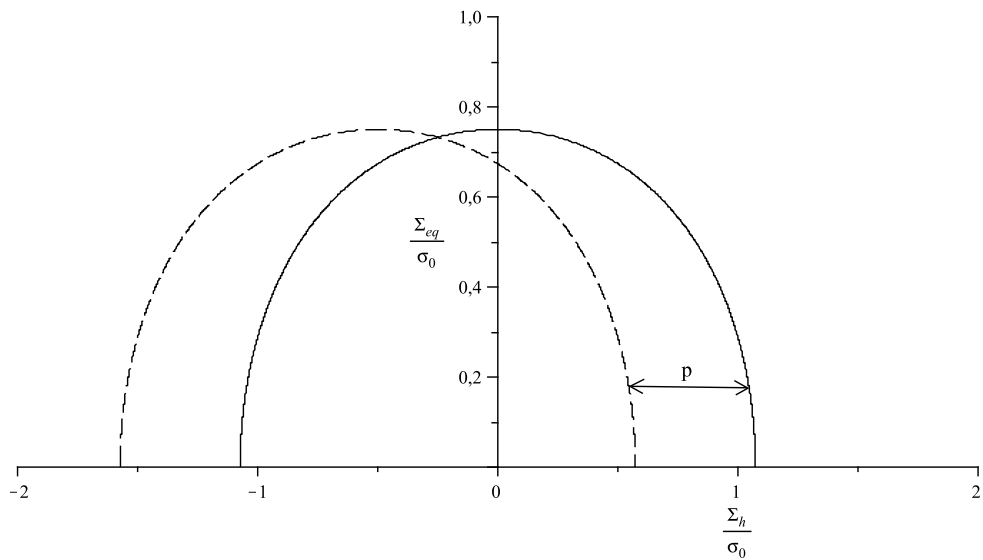


FIGURE 2.14: Comparaison entre le critère MCK dans le cas drainé (trait plein) et celui dans le cas saturé ( $p = 0.5\sigma_0$ , trait discontinu) avec une porosité  $f = 0.2$

A titre d'illustration, sur la figure 2.14 sont indiquées les courbes représentant critère MCK pour deux valeurs de la pression ( $p = 0$ , et  $p = 0.5\sigma_0$ ) et qui se déduisent l'une de l'autre par une translation d'amplitude  $p$  suivant l'axe de  $\Sigma_h$ .

## 2.6.2 Application au cas d'une éprouvette axisymétrique entaillée en condition drainée

Un essai de traction sur une éprouvette entaillée de type AE2 est choisi afin d'évaluer le modèle prenant en compte la pression d'un fluide. L'éprouvette a une longueur initiale de  $l_0 = 42mm$  et un rayon initial de  $R_0 = 9mm$ . Le rayon du col de l'éprouvette  $R_0$  est  $5mm$  et le rayon de l'entaille  $r$  est égal à  $2mm$ .

Le matériau constitutif de l'éprouvette a un module de Young  $E = 203GPa$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . L'érouissage isotrope de la matrice est considéré avec une loi de puissance de la déformation plastique équivalente avec un exposant  $n = 0.1$ . La porosité initiale du matériau vaut  $f_0 = 1.75 \times 10^{-4}$ , les paramètres de coalescence  $f_c$  et  $f_F$  sont pris égaux à  $8 \times 10^{-4}$  et  $0.3338$ , respectivement. Les principaux paramètres matériau sont donnés dans le tableau 2.7.

$f_0$	$f_c$	$f_F$	$E(MPa)$	$\nu$	$\sigma_0(MPa)$
$1.75 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-4}$	0.3338	$2 \times 10^5$	0.3	400

TABLE 2.7: Valeurs des principaux paramètres utilisés pour la modélisation de l'éprouvette entaillée AE2

Comme montré sur la figure 2.15, 600 éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite(CAXR) sont utilisés pour la modélisation du quart de l'éprouvette. L'analyse est menée en grande déformation.

La figure 2.16 compare les prédictions de la contrainte nominale ( $F/S_0$ ) en fonction du déplacement par le modèle MCK avec différentes valeurs de pression intérieure ( $p = 0$ ,  $p = 0.5\sigma_0$ ,  $p = \sigma_0$ ). Ces trois courbes ont la même tendance, tandis qu'un léger décalage entre elles est noté dans la phase de descente de la courbe.

Une analyse de porosité au centre de l'éprouvette est effectuée et présentée sur la figure 2.17. Elle confirme à même niveau de déplacement la porosité est plus importante lorsque la pression augmente.



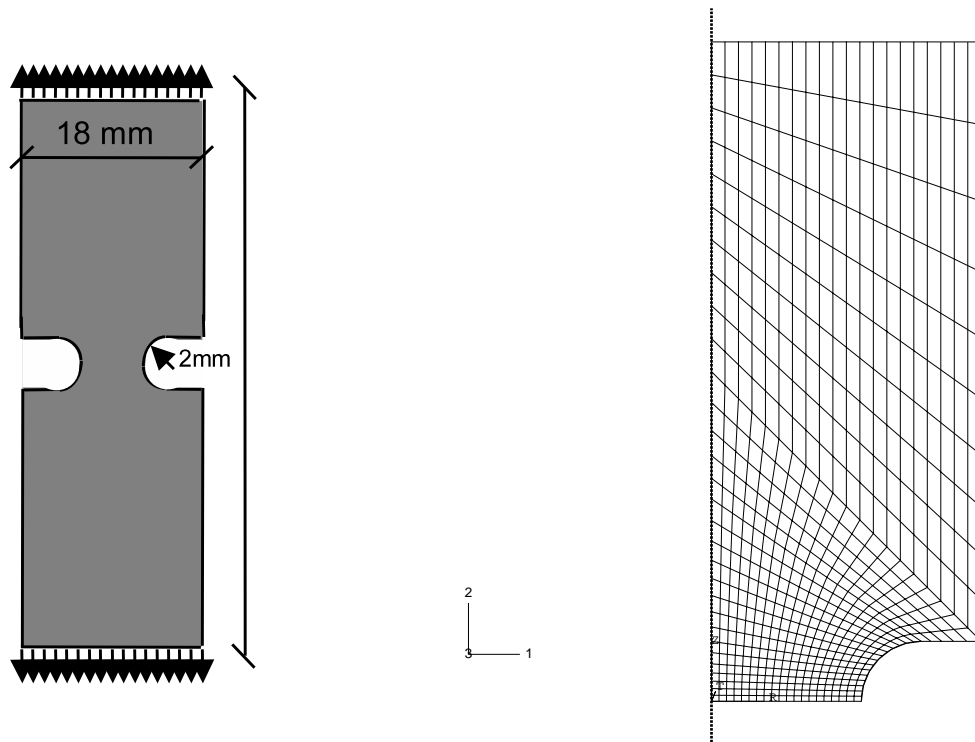


FIGURE 2.15: Profil géométrique et maillage de l'éprouvette entaillée AE2

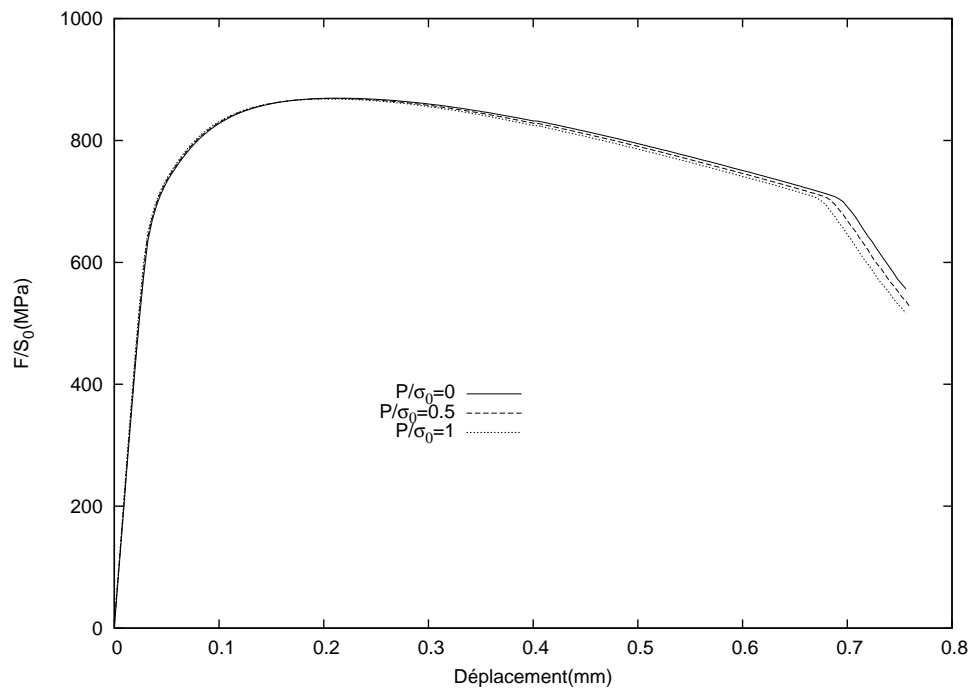


FIGURE 2.16: Comparaison des calculs numériques : modèle MCK dans le cas drainé ( $p/\sigma_0 = 0$ ) et les cas saturés ( $p/\sigma_0 = 0.5$ ,  $p/\sigma_0 = 0.5$ )

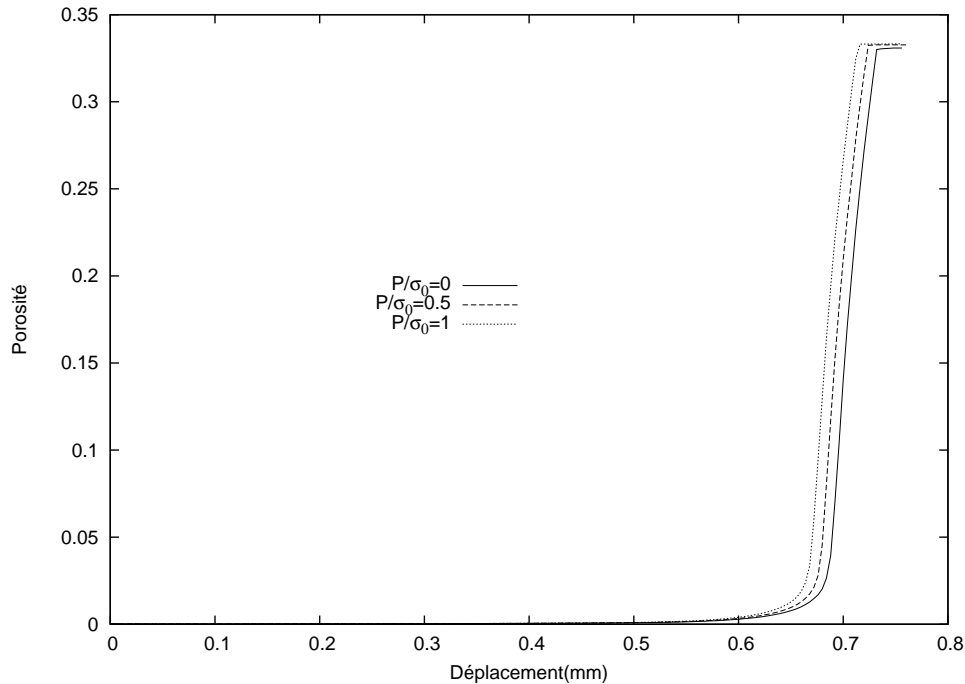


FIGURE 2.17: Evolution de porosité au centre de l'éprouvette

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la formulation, la mise en oeuvre numérique et l'application d'un nouveau modèle d'endommagement basé sur le critère de plasticité MCK isotrope. Les bonnes performances du modèle sont analysées à travers l'étude d'une éprouvette lisse puis une éprouvette entaillée. La cohérence observée entre les résultats numériques et les données expérimentales confirme l'intérêt du modèle proposé. La comparaison de ces modèles indique une meilleure performance du modèle MCK par rapport au modèle de Gurson, notamment pour les faibles triaxialités des contraintes. Cette performance est comparable à celle du modèle GTN qui a été formulé de façon heuristique pour corriger certains défauts du modèle de Gurson, notamment dans le domaine des faibles triaxialités des contraintes. L'influence de la pression d'un fluide présent dans la cavité a été également étudiée à l'aide d'une analyse numérique sur une éprouvette entaillée de type AE2. Le décalage entre les courbes issues du modèle saturé et du modèle drainé vérifie le principe des contraintes effectives pour les matériaux poreux à matrice incompressible.

# Chapitre 3

## Modélisation micromécanique de l'endommagement ductile des roches poreuses

Il est bien connu que le comportement mécanique des géomatériaux est très sensible à la pression. Le comportement de ces matériaux étant fortement sensible à la pression moyenne, leur modélisation est classiquement étudiée à l'aide de critères appropriés de plasticité tels que le critère de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager [21]. S'agissant du couplage plasticité-endommagement isotrope pour cette classe de matériaux, une extension naturelle du modèle de Gurson consiste à remplacer la matrice solide de von Mises par une matrice de type Drucker-Prager. L'étude de la plasticité de milieux poreux qui en découle à été récemment abordée dans la littérature. On mentionnera en particulier la mise en oeuvre d'approches variationnelles d'homogénéisation non linéaire dans [20], de méthodes numériques dans [58] et plus récemment d'approches par analyse limite de type Gurson (cf. [83], [34]).

En cohérence avec les approches par analyse limite mises en oeuvre dans toute la thèse, et en raison des bonnes performances attendues, l'objectif de ce chapitre est la formulation, l'implantation et application du modèle issu du critère de Guo et al. [34] pour les géomatériaux. Nous rappelons d'abord la méthodologie conduisant à l'expression de ce critère. Puis nous présentons la formulation complète et l'implantation numérique du modèle couplé correspondant. Une application numérique est ensuite réalisée à travers l'étude du comportement sous sollicitation de compression triaxiale d'une craie. Enfin, les résultats numériques seront discutés en les comparant aux données expérimentales [87] [88].

### 3.1 Critères de plasticité de matériaux poreux à matrice plastiquement compressible

Pour une large classe de matériaux comme les polymères, les géomatériaux, ou les métaux à double porosité, l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice solide faite dans l'analyse de Gurson s'avère inadaptée. Des critères de plasticité se sont développés ces dernières années pour ce type de matériaux poreux, en considérant une matrice plastiquement compressible. Nous analysons brièvement ici quelques travaux existants dans ce domaine.

#### 3.1.1 Cas d'un matériau poreux à matrice de type Gurson

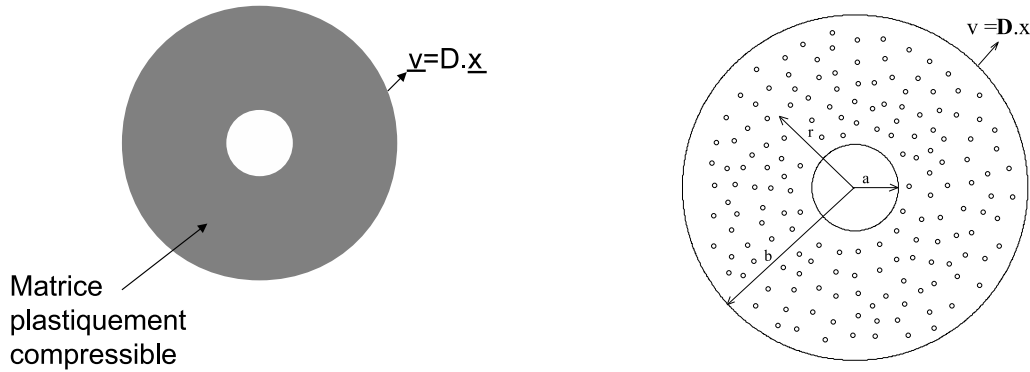


FIGURE 3.1: Sphère creuse avec matrice plastiquement compressible et exemple d'une matrice poreuse (double populations de cavités)

Vincent et al. [84] [85] ont proposé un critère de plasticité macroscopique pour des matériaux poreux dont la matrice obéit à un critère de Gurson modifié, donné par :

$$\Phi = q'_3 \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2q'_1 f \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - (q'_1 f)^2 = 0 \quad (3.1)$$

dont  $q'_1$  et  $q'_3$  sont des coefficients définis par :

$$\begin{cases} q'_1 = 1.25 \\ q'_3 = \left( 1 + \frac{2}{3} f \right) \frac{(1 - q'_1 f)^2}{(1 - f)^2} \end{cases}$$

Le domaine d'application visé est celui des matériaux à deux populations de cavités à deux échelles différentes, tels que les grains de combustibles nucléaires. La première population de cavités, qui correspond à la première échelle, est supposée sphérique et distribuée de façon isotrope. La deuxième population de cavités est supposé de même nature mais se trouve à

l'échelle supérieure. La schématisation de ce problème à l'aide de la sphère creuse avec une matrice poreuse est indiquée sur la figure 3.1.

La matrice poreuse obéissant au critère de Gurson, le champ de vitesse dans cette matrice est pris sous la forme suivante :

$$\underline{v} = A\underline{x} + \underline{v}^G \quad (3.2)$$

où  $A$  est un scalaire destiné à traduire la compressibilité plastique,  $\underline{v}^G$  est un champ de vitesse incompressible inspiré de l'analyse initiale de Gurson et vérifiant la condition de taux de déformation uniforme  $(\mathbf{D} - A\mathbf{1})$  au bord. Vincent [83] a démontré que la dissipation macroscopique est donnée par :

$$\Pi(\mathbf{D}) \leq \inf_A \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{4(D_m - A)^2}{q_3^2 z^2} + \frac{D_{eq}^2}{q_3^2}} dz dy \quad (3.3)$$

où  $f_b$  et  $f_e$  représentent respectivement la porosité à la première échelle et la porosité à l'échelle supérieure.

Afin de fournir un critère macroscopique analytique, deux approximations sont appliquées par Vincent et al. [83]

- $A1$  : La première approximation consiste à prendre  $A$  sous la forme :

$$\bar{A} = \frac{q_1 f_b}{f_e + q_1 f_b} D_m \quad (3.4)$$

En utilisant  $A = \bar{A}$ , la borne supérieure (3.3) est encore majorée par :

$$\Pi(\mathbf{D}) \leq \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \sqrt{\frac{4q_1^2 f_b^2}{(f_e + q_1 f_b)^2} \frac{D_m^2}{y^2} + \frac{4f_e^2}{q_3 (f_e + q_1 f_b)^2} \frac{D_m^2}{z^2} + \frac{D_{eq}^2}{q_3}} dz dy \quad (3.5)$$

Les points purement déviatorique et purement hydrostatique obtenus par (3.5) sont donnés par :

$$\Sigma_m = 0, \quad \Sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_0 \quad \text{avec :} \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 (1 - q_1 f_b) (1 - f_e) / \sqrt{q_3} \quad (3.6)$$

et

$$\Sigma_m = \tilde{p}, \quad \Sigma_{eq} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tilde{p} = \frac{1}{3} \sigma_0 \frac{2[C_1 + \ln(C_2)]}{\sqrt{q_3} (q_1 f_b + f_e)} \quad (3.7)$$

Les expressions de  $C_1$  et  $C_2$  sont données dans l'annexe B.1.

- $A2$  : La seconde approximation consiste à proposer un critère arbitraire de type Gurson et passant par les points purement hydrostatique  $\tilde{p}$  et purement déviatorique  $\tilde{\sigma}_0$  :

$$\frac{1}{\beta} \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 = 0, \quad \text{avec : } \alpha \equiv \cosh \left( \frac{3 \tilde{p}}{2 \sigma_0} \right) \quad \text{et} \quad \beta \equiv \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left( \frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0} \right)^2 \quad (3.8)$$

Le critère approché (3.8) est donnée sous une forme explicite et il est en accord avec des résultats éléments finis dans certains cas [83]. Cependant la pertinence de ces deux approximations utilisées dans la déduction nécessite une vérification plus complète.

### 3.1.2 Approche variationnelle du critère d'un matériau poreux à matrice de Drucker-Prager

On considère un VER de milieu poreux avec une matrice rigide parfaitement plastique obéissant au critère de Drucker-Prager [21] qui s'écrit :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \alpha' \left( \frac{I_1}{3} - h \right) + \sqrt{J_2} \leq 0, \quad \text{avec : } I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \quad (3.9)$$

où  $\alpha'$  est une constante;  $h$  représente la contrainte seuil en traction. La schématisation de ce critère, que l'on peut également exprimer sous la forme  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + 3\alpha\sigma_m - \sigma_0 \leq 0$  (avec  $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha'$  et  $\sigma_0 = \sqrt{3}\alpha'h$ ), est présenté sur la figure 3.2

En raison de la présence de la pression hydrostatique dans le critère de la matrice sous la forme (3.9), le critère (3.8) ne semble pas adapté à ce type de matériaux, notamment à cause de la dissymétrie entre le domaine des compressions ( $\sigma_m < 0$ ) et celui des tractions ( $\sigma_m > 0$ ).

Considérant une matrice obéissant au critère de Drucker-Prager, Dormieux et al. [20] [5] [4] sont les premiers qui ont établi un critère macroscopique en utilisant le principe variationnel introduit par Ponte Castañeda [63] (ce qui revient aussi à une méthode sécante modifiée [16]).

En notant  $\pi(\mathbf{d})$  la fonction d'appui, la propriété  $\boldsymbol{\sigma} = \partial\pi/\partial\mathbf{d}(\mathbf{d})$  conduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\pi}{\partial I'_1}(I'_1, J'_1)\mathbf{1} + \frac{\partial\pi}{\partial J'_1}(I'_1, J'_1)\mathbf{d}' = \mathbb{C}_{sct}(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \quad (3.10)$$

avec :  $I'_1 = \text{tr} \mathbf{d}$ ,  $J'_1 = \frac{1}{2} \mathbf{d}' : \mathbf{d}'$ .

Le module sécant  $\mathbb{C}_{sct}(\mathbf{d})$  peut s'exprimer en modules sécants de compressibilité  $k_{sct}(I'_1, J'_1)$  et de cisaillement  $\mu_{sct}(I'_1, J'_1)$  par :

$$\mathbb{C}_{sct}(\mathbf{d}) = 3k_{sct}(I'_1, J'_1)\mathbb{J} + 2\mu_{sct}(I'_1, J'_1)\mathbb{K} \quad (3.11)$$

avec :  $k_{sct}(I'_1, J'_1) = \frac{1}{I'_1} \frac{\partial \pi}{\partial I'_1}(I'_1, J'_1)$ ,  $\mu_{sct}(I'_1, J'_1) = \frac{1}{2} \frac{\partial \pi}{\partial J'_1}(I'_1, J'_1)$ .

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{3}I_1 = k_{sct}(I'_1, J'_1)I'_1; \quad \sqrt{J_2} = 2\mu_{sct}(I'_1, J'_1)\sqrt{J'_2} \quad (3.12)$$

En imposant la condition (3.9) aux grandes valeurs de déformations déviatoriques, les auteurs établissent :

$$\mu_{sct}(I'_1, J'_1) \approx \alpha' \frac{h - k_{sct}(I'_1, J'_1)I'_1}{2\sqrt{J'_2}} \quad (3.13)$$

L'expression finale de critère macroscopique qu'ils établissent est :

$$(\alpha')^2 h^2 (1-f)^2 = \Sigma_m^2 \left( \frac{1-f}{k^{hom}} - (\alpha')^2 \right) + 2(\alpha')^2 h (1-f) \Sigma_m + \Sigma_{eq}^2 \frac{1-f}{\mu^{hom}} \quad (3.14)$$

où  $k^{hom}$  et  $\mu^{hom}$  représentent les modules élastiques de compression et de cisaillement homogénéisé du milieu poreux.

Il s'agit d'un critère elliptique, tout comme celui de Ponte Castañeda pour les matériaux poreux à matrice plastiquement incompressible. Le critère apparaît pertinent en cisaillement mais trop majorant en hydrostatique. L'établissement d'un critère de type Gurson n'a été que récemment abordé par Guo et al. [34]. L'analyse de leurs travaux font l'objet du paragraphe qui suit.

## 3.2 Critère de Guo et al. (2008) pour des matériaux à matrice de Drucker-Prager

### 3.2.1 Matrice dilatante sensible à la pression moyenne

On rappelle le critère de Drucker-Prager [21], formulé pour des matériaux dont le comportement plastique est sensible à la pression moyenne. Ce critère s'exprime sous la forme suivante :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + 3\alpha\sigma_m - \sigma_0 \leq 0 \quad (3.15)$$

où  $\sigma_{eq}$  et  $\sigma_m$  représentent la contrainte équivalente et la contrainte moyenne respectivement.  $\sigma_0$  est la contrainte seuil du matériau sous cisaillement pur ( $\sigma_m = 0$ ), et  $\alpha$  est le facteur de sensibilité à la pression, lié à l'angle de frottement du matériau  $\psi_\alpha$  par :

$$\tan \psi_\alpha = 3\alpha \quad (3.16)$$

Comme montré sur la figure 3.2, l'angle  $\psi_\alpha$  représente la pente du critère de plasticité (3.15) dans l'espace des contraintes  $(\sigma_{eq} - \sigma_m)$ .

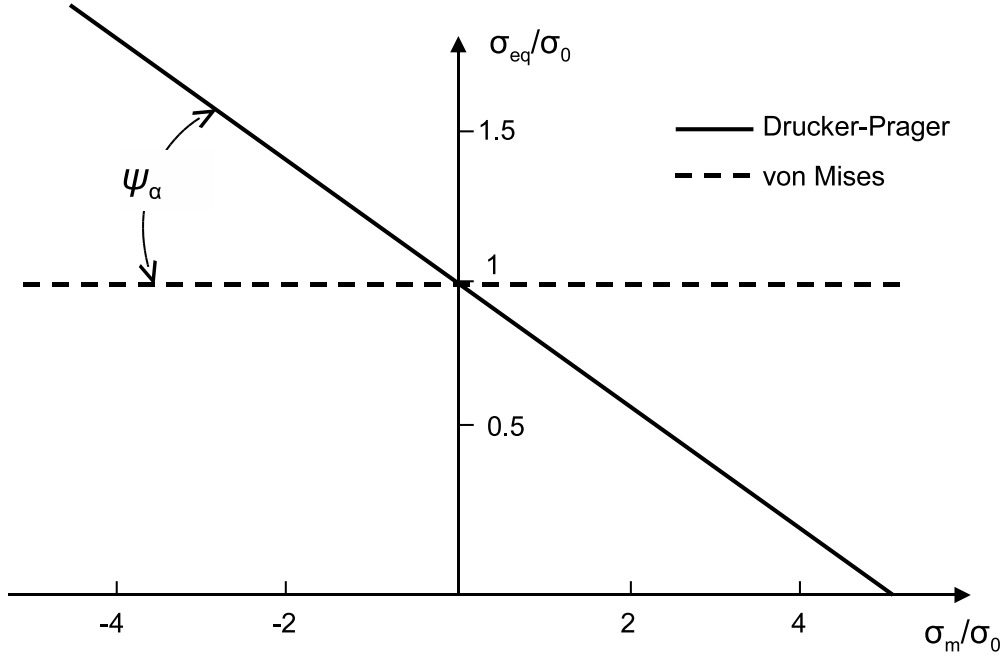


FIGURE 3.2: Comparaison des critères Drucker-Prager et von Mises

Guo et al. [34] ont fait l'hypothèse d'une loi d'écoulement associée au critère de plasticité (3.15). Avec le potentiel plastique  $\phi = \sigma_{eq} + 3\alpha\sigma_m$ , l'évolution de la déformation plastique est donnée par :

$$\mathbf{d}^p = d_{eq}^p \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d_{eq}^p \left( \frac{3\boldsymbol{\sigma}'}{2\sigma_{eq}} + \alpha \mathbf{1} \right) \quad (3.17)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de contrainte,  $\boldsymbol{\sigma}'$  est la contrainte déviatorique, et  $d_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}(\mathbf{d}^p)' : (\mathbf{d}^p)'}$  avec  $(\mathbf{d}^p)'$  qui représente la partie déviatorique du taux de déformation plastique  $\mathbf{d}^p$ . La dilatance (déformation volumique) plastique est donnée par :

$$\text{tr } \mathbf{d}^p = 3\alpha d_{eq}^p \quad (3.18)$$

La sensibilité à la pression et la dilatance plastique sont ainsi toutes deux dépendantes du paramètre matériau  $\alpha$ . Enfin, en utilisant (3.17), la dissipation locale s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p = (\sigma_{eq} + 3\alpha\sigma_m)d_{eq}^p = \sigma_0 d_{eq}^p \quad (3.19)$$



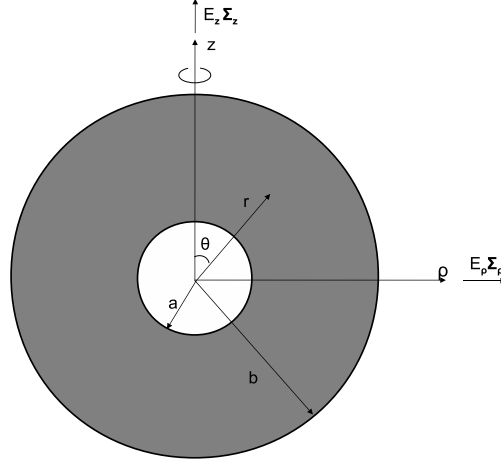


FIGURE 3.3: Cellule élémentaire considérée

### 3.2.2 Borne supérieure du critère de plasticité

La cellule élémentaire étudiée est une sphère creuse de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$  (cf. figure 3.3). Elle se plaçant en coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$ , le champ de vitesse considéré par Guo et al. [34] est composé de deux champs de base  $\underline{v}_s^\pm$  et  $\underline{v}_h^\pm$  :

$$\underline{v}_s^\pm = \left(\frac{b}{r}\right)^{3/(1\pm 2\alpha)} (\rho \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z); \quad \underline{v}_h^\pm = \rho \underline{e}_\rho + \frac{\alpha \mp 1}{\alpha \pm \frac{1}{2}} z \underline{e}_z \quad (3.20)$$

où  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  et le signe devant  $\alpha$  dépend du signe de la base. En raison de difficultés liées à la dilatance plastique, le champ de vitesse retenu par Guo et al. [34] est de la forme suivante :

$$\underline{v} = C_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3/s} (\rho \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z) + C_1 \rho \underline{e}_\rho + C_2 z \underline{e}_z \quad (3.21)$$

où  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont trois constantes,  $s$  est donné par :

$$\begin{cases} s = 1 + 2\alpha & \text{si } C_0 > 0 \\ s = 1 - 2\alpha & \text{si } C_0 < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

En suivant la démarche usuelle basée sur la détermination de la fonction dissipation macroscopique  $F$ , Guo et al. [34] aboutissent à un critère de plasticité sous la forme implicite, paramétrique suivante :

$$\Phi(\Sigma_{eq}(\omega), \Sigma_m(\omega)) = 0 \quad (3.23)$$

avec :

$$\begin{cases} \Sigma_{eq} = \frac{\sigma_0(f^\gamma - f)}{f^\gamma - f + \alpha \frac{\partial F}{\partial C_0}} \frac{\partial F}{\partial D_e} \\ \Sigma_m = \frac{\sigma_0(1-f)}{3(f^\gamma - f + \alpha \frac{\partial F}{\partial C_0})} \frac{\partial F}{\partial C_0} \end{cases} \quad (3.24)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial C_0} = \frac{2}{s} \omega \int_f^1 \frac{x^{-2/s} dx}{\sqrt{1 + \omega^2 x^{-2/s}}} \\ \frac{\partial F}{\partial D_e} = \int_f^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + \omega^2 x^{-2/s}}} \end{cases} \quad (3.25)$$

Les paramètres  $\omega$  et  $\gamma$  sont définis par :

$$\omega = \frac{2 C_0}{s D_e}; \quad \gamma = 1 - s^{-1} \quad (3.26)$$

Ce critère dont la représentation paramétrique est donnée par les relations (3.23)-(3.26) est dénommé ‘‘UBM’’(Upper Bound Model) par Guo et al. [34]; il constitue selon eux une borne supérieure. Il convient de noter que dans une étude du critère, Pastor et al. [58] ont évalué le critère UBM (3.23) en le comparant à des résultats numériques obtenus en conditions de taux de déformation uniforme au bord de la cellule élémentaire(voir les figures 3.4 et 3.5). Leurs résultats indiquent que le critère (3.23) se trouve souvent encadré entre l’approche cinématique et l’approche statique qui constituent pour le critère macroscopique

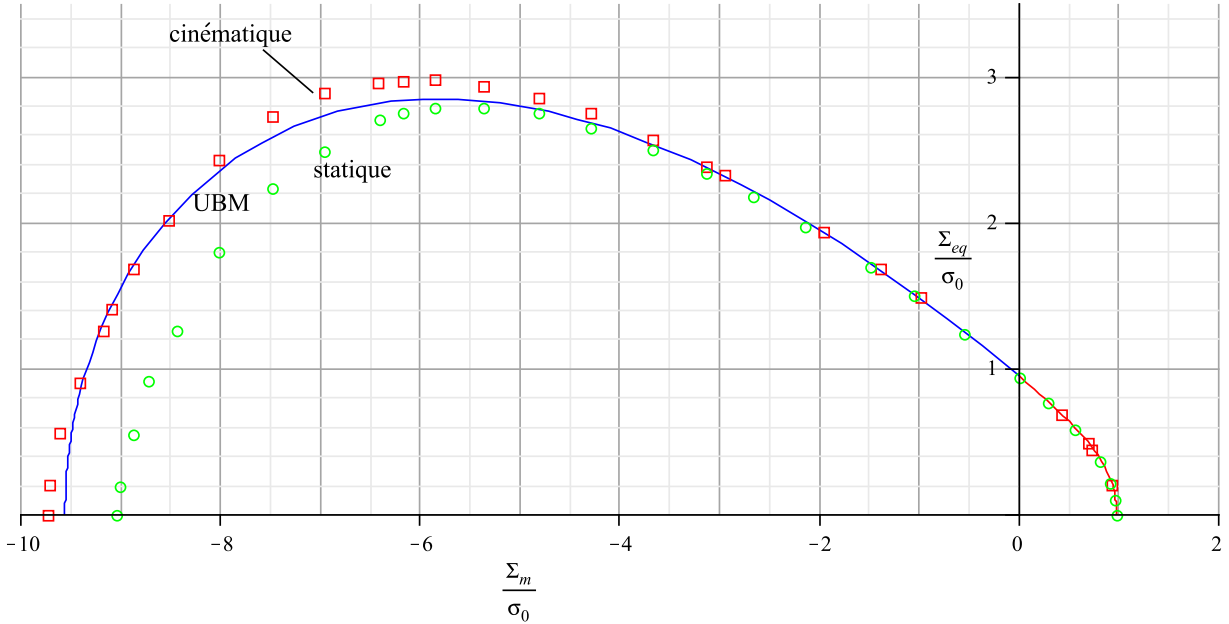


FIGURE 3.4: Comparaison entre le critère UBM et les résultats éléments finis obtenus par Pastor et al.[58] : cas pour  $f = 0.05$  et  $\Psi_\alpha = 30^\circ$

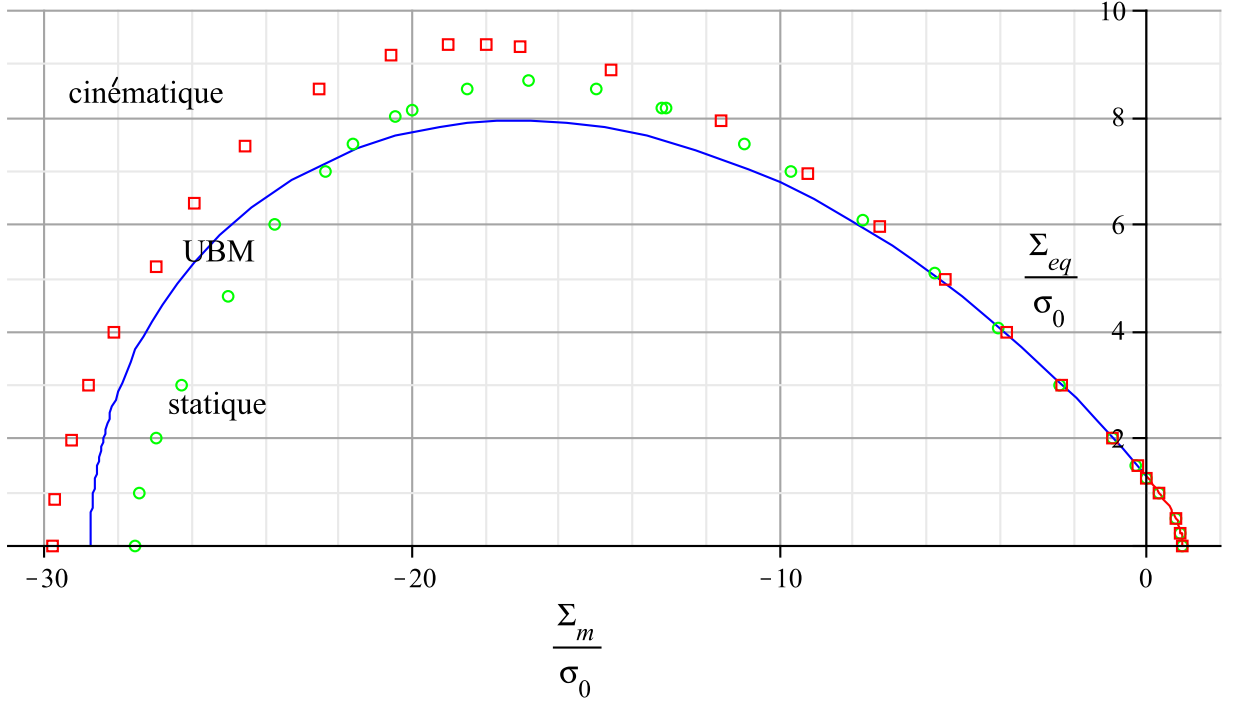


FIGURE 3.5: Comparaison entre le critère UBM et les résultats éléments finis obtenus par Pastor et al. [58] : cas pour  $f = 0.1$  et  $\Psi_\alpha = 40^\circ$

une borne supérieure et une borne inférieure, respectivement. Cependant, ils mettent en évidence des cas pour lesquels (cf. figure 3.5) l'UBM semblent violer la borne inférieure (statique), suggérant ainsi que (3.23) est plutôt une estimation du critère.

### 3.2.3 Formulation analytique approchée et illustrations

En raison des difficultés d'application du critère UBM, exprimé sous forme paramétrique, un critère approché a été proposé par Guo et al. [34] en s'appuyant sur quelques cas limites qui doivent être retrouvés. En se basant sur ces cas limites, Guo et al. [34] ont proposé le critère de plasticité du milieu poreux sous la forme suivante :

$$\Phi_A = \left[ \frac{\Sigma_{eq}/\sigma_0}{\Theta(\Sigma_m, \alpha, f)} \right]^2 + 2f \cosh[\gamma^{-1} \ln(1 - 3\alpha \frac{\Sigma_m}{\sigma_0})] - (1 + f^2) = 0 \quad (3.27)$$

Comme  $\Sigma_m$  prend le même signe que  $C_0$ , les auteurs ont suggéré :

$$\gamma = \frac{2\alpha}{2\alpha + \text{sgn}(\Sigma_m)}; \quad s = 1 + 2\alpha \text{sgn}(\Sigma_m) \quad (3.28)$$

Deux expressions de la fonction  $\Theta(\Sigma_m, \alpha, f)$  sont proposées :

$$\Theta_1 = 1 - \frac{3\alpha \Sigma_m}{\sigma_0(1-f)^{1-s/2}} \quad (3.29)$$

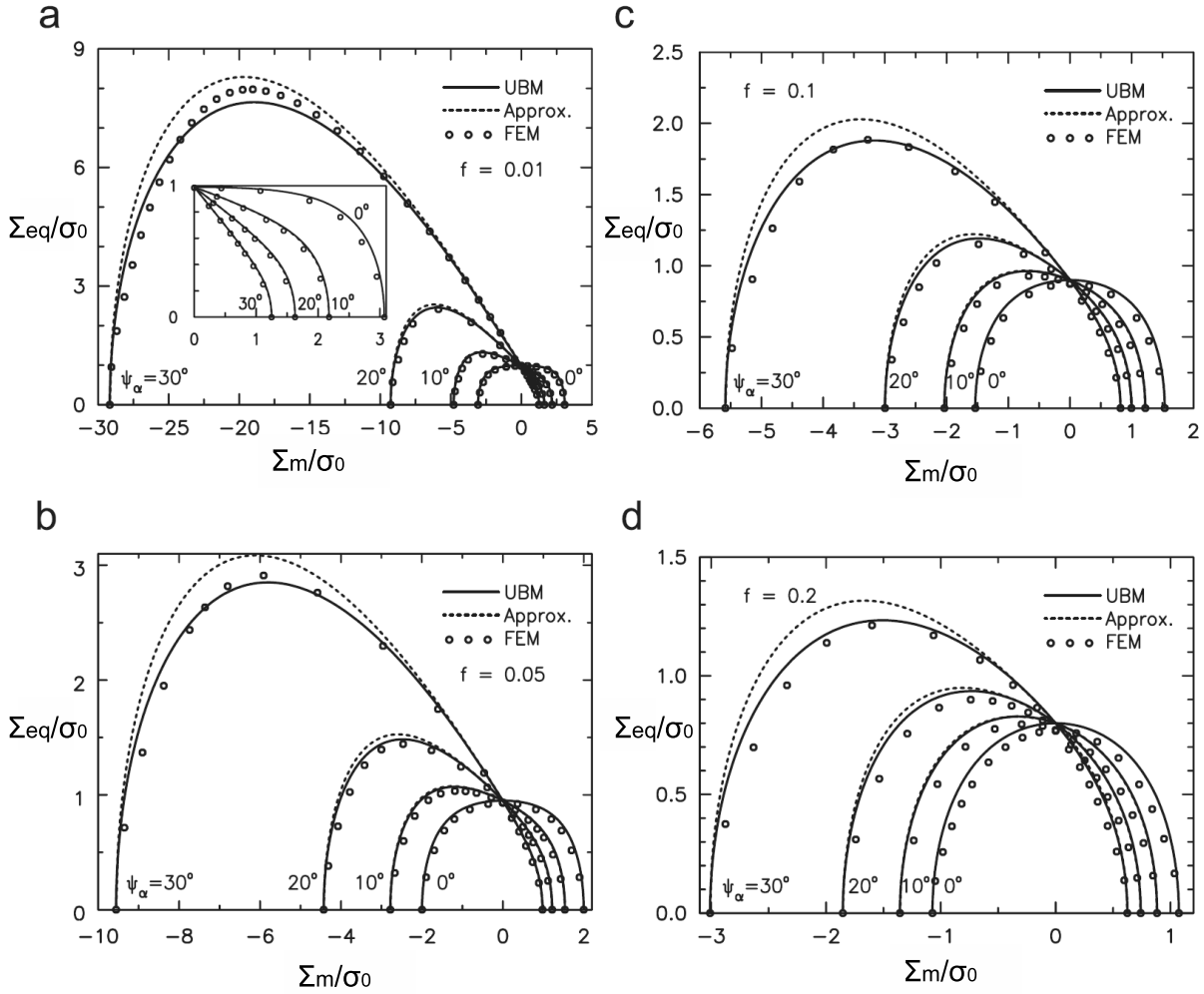


FIGURE 3.6: Comparaison du critère UBM, la forme approximative (3.27) et les résultats éléments finis de la cellule élémentaire : (a)  $f=0.01$ ; (b)  $f=0.05$ ; (c)  $f=0.1$ ; (d)  $f=0.2$ , avec  $\Psi_\alpha=0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  et  $30^\circ$  (d'après [34]).

et

$$\Theta_2 = 1 - \frac{3\alpha\Sigma_m}{\sigma_0(1 + \gamma \ln(1 + sf))} \quad (3.30)$$

En comparant avec le critère UBM (3.23), la première forme de la fonction  $\Theta(\Sigma_m, \alpha, f)$  semble plus précise dans le cas de traction ( $\Sigma_m > 0$ ) tandis que c'est la deuxième forme qui donne des résultats plus convenables en compression ( $\Sigma_m < 0$ ).

Sur la figure 3.6 sont comparés le critère UBM (3.23), le critère approché (3.27) et les résultats issus de calculs par éléments finis. Les deux critères proposés semblent tout à fait comparables avec les résultats de calcul par éléments finis. Le critère approché (3.27) est généralement voisin du critère UBM sauf pour des valeurs de  $\Psi_\alpha$  élevés (ex :  $\Psi_\alpha = 30^\circ$ ), où des différences perceptibles apparaissent entre ces trois surfaces de plasticité.

### 3.2.4 Application à certains géomatériaux

Comme les géomatériaux sont généralement sensibles à la pression moyenne correspondant ainsi aux matériaux décrits par le critère qui vient d'être présenté, nous nous proposons d'en faire des applications à quelques roches poreuses. Soulignant que le critère approché (3.27) associé à (3.30) est retenu en raison de sa bonne performance dans le domaine des compressions ( $\Sigma_m < 0$ ).

Les figures 3.7 et 3.8 montrent des comparaisons des prédictions ductiles de Guo et al. (3.27) avec les données concernant la résistance d'échantillons de plâtre, dont le rapport eau/plâtre est 50% et 70% respectivement (données tirées de [44] et [2]). Différentes porosités ont pu être considérées. Sur les figures,  $I_1 = \text{tr}(\Sigma)$  représente le premier invariant du tenseur des contraintes macroscopiques,  $J_2 = (1/2)\Sigma'$  :  $\Sigma'$  est le deuxième invariant du tenseur des contraintes. Des concordances sont notées entre les prédictions du critère (3.27) et les don-

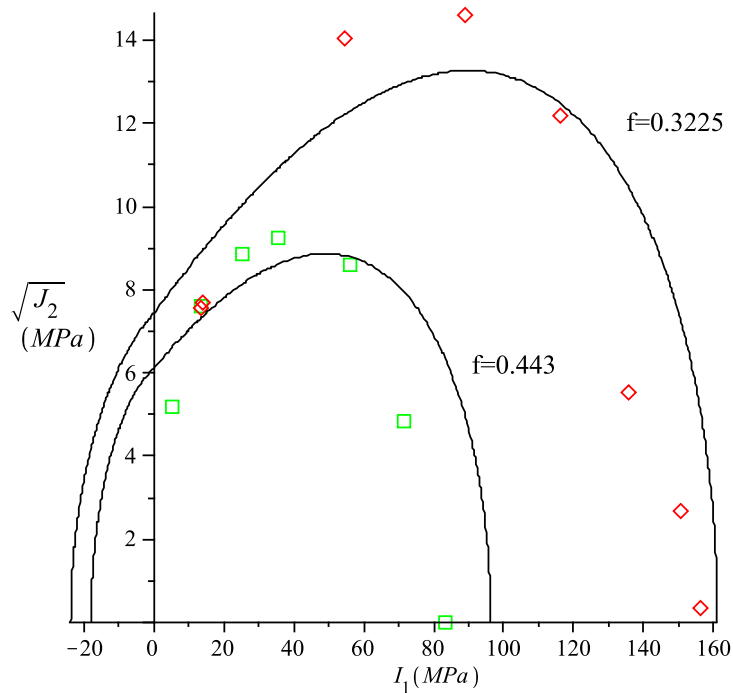


FIGURE 3.7: Résistance en compression triaxiale d'échantillons de plâtre (rapport eau/plâtre = 50%) : comparaison des prédictions du critère (3.27) avec des données expérimentales [44] [2] correspondant à 2 porosités. Les données "matériau" sont

$$\alpha = 0.251 \text{ et } \sigma_0 = 19 \text{ MPa}$$

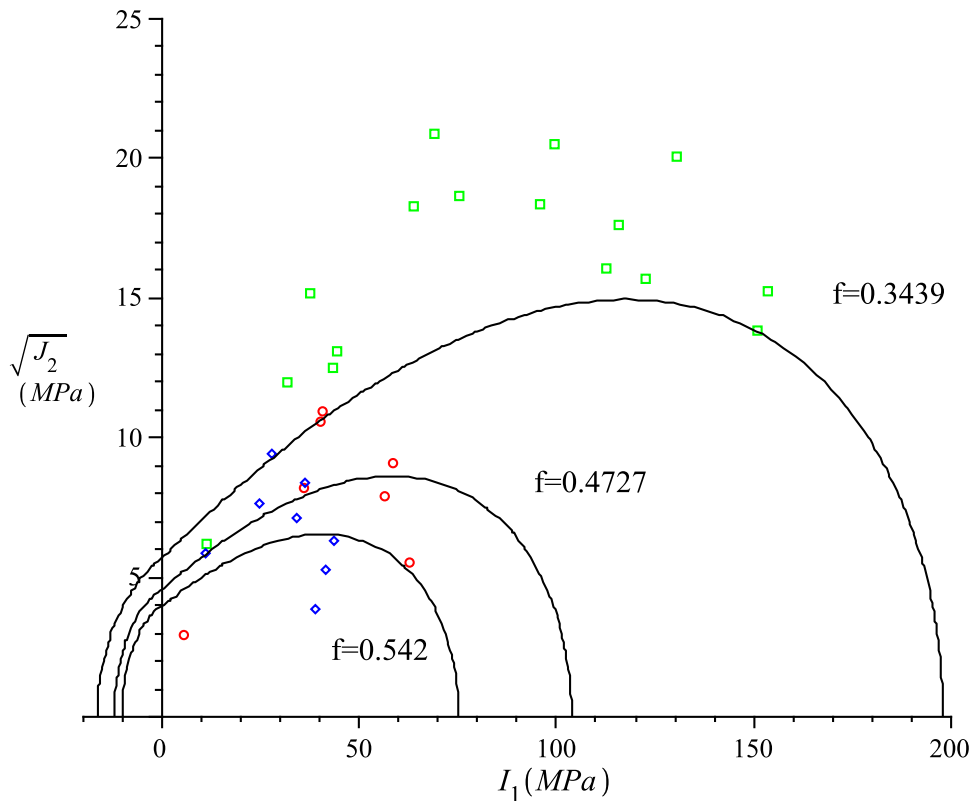


FIGURE 3.8: Résistance en compression triaxiale d'échantillons de plâtre (rapport eau/plâtre = 70%) : comparaison des prédictions du critère (3.27) avec des données expérimentales [44] [2] correspondant à 3 porosités. Les données "matériau" sont

$$\alpha = 0.3 \text{ et } \sigma_0 = 15MPa$$

nées expérimentales, ce qui prélude d'une bonne adéquation de ce critère pour l'étude du comportement plastique des géomatériaux poreux.

Compte tenu de ces bons résultats prédits par le critère de Guo et al. [34], nous avons entrepris de formuler un modèle d'endommagement basé sur ce critère.

### 3.3 Formulation du modèle complet issu du critère de Guo et al. (2008)

Dans cette section on s'intéresse à la formulation du modèle constitutif complet basé sur (3.27) proposé par Guo et al. [34]. Dans cette perspective,  $\sigma_0$  est remplacé par une variable

d'écoulement  $\bar{\sigma}$ , représentant la contrainte d'écoulement de la matrice :

$$\Phi(\Sigma, \bar{\sigma}, f) = \left[ \frac{\Sigma_{eq}/\bar{\sigma}}{\Theta(\Sigma_m, \alpha, f)} \right]^2 + 2f \cosh[\gamma^{-1} \ln(1 - 3\alpha \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}})] - (1 + f^2) = 0 \quad (3.31)$$

On rappelle que dans la perspective des applications réalisées dans la section 3.5 (essai de compression), la deuxième expression approchée de  $\Theta(\Sigma_m, \alpha, f)$  est considérée :

$$\Theta(\Sigma_m, \alpha, f) = 1 - \frac{3\alpha \Sigma_m}{\bar{\sigma}(1 + \gamma \ln(1 + sf))} \quad (3.32)$$

La loi d'évolution de la contrainte d'écoulement dans la matrice s'écrit, connu pour le modèle de Gurson, sous la forme (cf. [35]) :

$$(1 - f) \bar{\sigma} \dot{\varepsilon}^p = \Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p \quad (3.33)$$

où  $\varepsilon^p$  est la déformation moyenne dans la matrice.

L'écoulement plastique est régi par la règle de normalité :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}(\Sigma, \bar{\sigma}, f) \quad (3.34)$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{si } \Phi < 0 \text{ ou si } \Phi = 0 \text{ et } \dot{\Phi} \leq 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{si } \Phi = 0 \text{ et } \dot{\Phi} > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

La loi d'évolution de la porosité est dérivée de la relation microscopique  $\dot{J} = J \text{tr} \mathbf{d}^p$ , où  $J$  est le ratio d'un élément de volume actuel à l'élément de volume initial. Nous avons alors :

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr} \dot{\mathbf{E}}^p - V^{-1} \int_{V_m} \text{tr} \mathbf{d}^p dV \quad (3.36)$$

où  $V_m$  représente le volume de la matrice et  $V$  le volume total de la cellule.

En considérant (3.18) dans le deuxième terme de cette expression, il s'ensuit :

$$V^{-1} \int_{V_m} \text{tr} \mathbf{d}^p dV = V^{-1} \int_{V_m} 3\alpha \dot{\varepsilon}^p dV = 3(1 - f) \alpha \dot{\varepsilon}^p \quad (3.37)$$

Le report de cette expression dans (3.36) conduit à :

$$\dot{f} = (1 - f) (\text{tr} \dot{\mathbf{E}}^p - 3\alpha \dot{\varepsilon}^p) \quad (3.38)$$

### 3.4 Intégration et implantation numérique du modèle

Nous présentons dans cette section les étapes principales de l'intégration du modèle de Guo et al. afin de l'implanter dans le code de calcul éléments finis ABAQUS. La subroutine Umat a été utilisée pour cette implantation numérique en appliquant un schéma d'intégration implicite.

– **Prédicteur élastique**

$$\Sigma_{n+1} = \mathbb{C} : \mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p) = \Sigma^{pred} - \mathbb{C} : \Delta \mathbf{E}^p \quad (3.39)$$

où  $\mathbb{C}$  est la matrice des modules élastiques; les indices  $n$  et  $n + 1$  se rapportent au début et à la fin de l'incrément respectivement;  $\Sigma^{pred}$  est le prédicteur élastique qui s'exprime comme :

$$\Sigma^{pred} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_n^e + \Delta \mathbf{E}) \quad (3.40)$$

– **Correction plastique**

Le calcul de  $\partial \Phi / \partial \Sigma^{pred}$  à partir de (3.31), donne :

$$\begin{cases} (\Delta \mathbf{E}^p)' = 3\Delta\lambda / (\bar{\sigma}^2 \Theta^2) (\Sigma^{pred})' \\ \Delta E_m^p = \Delta\lambda \left\{ \frac{2\alpha \Sigma_{eq}^2}{\Theta^3 \bar{\sigma}^3 [1 + \gamma \ln(1 + sf)]} + \frac{2f\gamma^{-1} \sinh[\gamma^{-1} \ln(1 - 3\alpha \Sigma_m / \bar{\sigma})]}{3\Sigma_m - \bar{\sigma} / \alpha} \right\} \end{cases} \quad (3.41)$$

La considération du système d'équations (3.41), avec la définition de  $\Delta E_{eq}^p \equiv (2/3 \Delta \mathbf{E}^p : \Delta \mathbf{E}^p)^{1/2}$ , donne l'expression de  $\Delta\lambda$  sous la forme suivante :

$$\Delta\lambda = \bar{\sigma}^2 \Theta^2 \Delta E_{eq}^p / (2\Sigma_{eq}^{pred}) \quad (3.42)$$

Le calcul de  $\Delta E_{eq}^p$ , s'appuie sur la condition de consistance  $\dot{\Phi} = 0$  :

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi(\Sigma^{pred}, \bar{\sigma}, f)}{\partial (\Delta E_{eq}^p)} \Delta E_{eq}^p = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{eq}^p \quad (3.43)$$

On obtient alors l'expression détaillée de  $\Delta E_{eq}^p$ , donnée dans l'annexe B.2.

Le report de  $\Delta E_{eq}^p$  dans (3.42) permet d'obtenir la correction plastique :

$$\Delta \mathbf{E}^p = \Delta\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \quad (3.44)$$



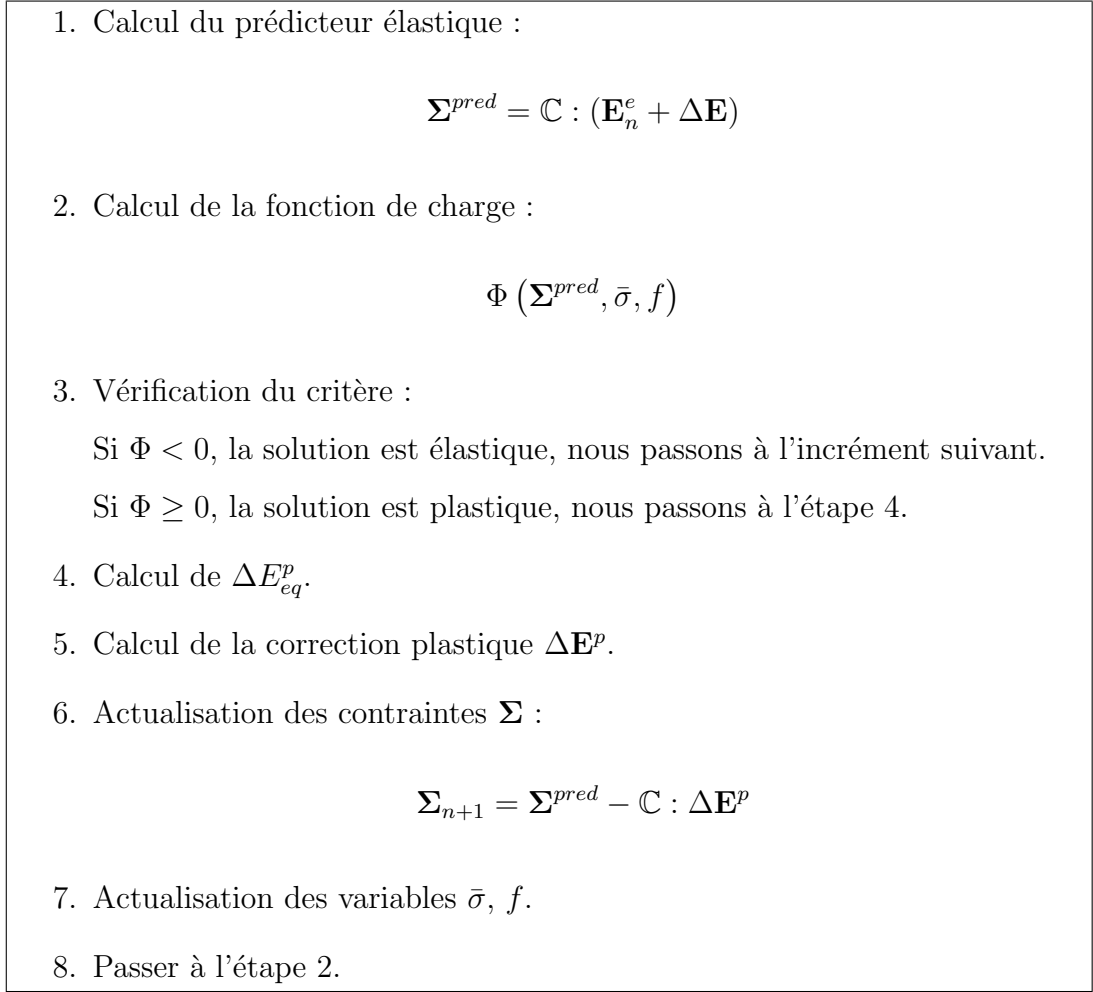


FIGURE 3.9: Algorithme d'implantation du modèle de Guo et al.

#### – Opérateur tangent consistant

Comme indiqué précédemment, l'implantation de modèles dans ABAQUS requiert le calcul de l'opérateur consistant  $\mathbb{K}_{cons}$ . Sa formulation générale est définie par :

$$\mathbb{K}_{cons} = \frac{\Delta \Sigma}{\Delta \mathbf{E}} \quad (3.45)$$

En combinant l'équation (3.39) avec l'expression de la correction plastique  $\Delta \mathbf{E}^p$  (3.43), on obtient :

$$\Delta \Sigma = \mathbb{C} : \left( \Delta \mathbf{E} - \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \right) \quad (3.46)$$

En tenant compte de l'expression de  $\dot{\lambda}$ ,  $\Delta \Sigma$  s'écrit :

$$\Delta \Sigma = \mathbb{C} : \left( \Delta \mathbf{E} - \frac{\bar{\sigma}^2 \Theta^2}{2 \Sigma_{eq}} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \Delta E_{eq}^p \right) \quad (3.47)$$

Introduisant à partir de (3.43),  $\mathbf{B}$  tel que  $\Delta E_{eq}^p = \mathbf{B} : \Delta \mathbf{E}$  et donné en annexe B.2, (3.47) peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta \Sigma = \left[ \mathbb{C} - \frac{\bar{\sigma}^2 \Theta^2}{2\Sigma_{eq}} \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \otimes \mathbf{B} \right] : \Delta \mathbf{E} \quad (3.48)$$

d'où d'après la définition (3.45) :

$$\mathbb{K}_{cons} = \mathbb{C} - \frac{\bar{\sigma}^2 \Theta^2}{2\Sigma_{eq}} \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \otimes \mathbf{B} \quad (3.49)$$

Les étapes principales de l'algorithme sont résumées sur la figure 3.9.

## 3.5 Application numérique aux essais sur la craie de Lixhe

Dans cette section, nous présentons l'application numérique du modèle de Guo et al. aux essais sur la craie de Lixhe. Ce matériau est choisi car il a été étudié par de nombreux auteurs ([74],[36],[37],[70],[71]) y compris au Laboratoire de Mécanique de Lille [87] [88]. Les derniers auteurs ont modélisé le comportement élastoplastique avec endommagement de la craie de Lixhe en utilisant une approche combinant deux mécanismes différents (l'effondrement de la structure poreuse et le mécanisme de déformation déviatorique). Plus précisément, le modèle GTN est considéré pour le mécanisme d'effondrement des pores tandis que le mécanisme déviatorique est pris en compte au travers d'un critère de type Coulomb.

L'intérêt majeur de l'étude réalisée ici réside dans l'utilisation d'une unique surface de charge en lieu et place des deux surfaces précitées. Nous présentons d'abord les caractéristiques générales de la craie de Lixhe. Les essais de compression hydrostatique et de compression triaxiale drainée seront ensuite décrits. Enfin, les résultats numériques utilisant le modèle de Guo et al. [34] seront discutés et comparés aux données expérimentales.

### 3.5.1 Caractéristiques générales de la craie de Lixhe

La majorité des craies se sont formées depuis la période Crétacée et leur formation se produit encore avec des dépôts sur des fonds marins. Quant à la craie de Lixhe, elle est apparue à la période de Campanien supérieure (soit environ 80 millions d'années). Cette

craie est définie comme une biomicrite, friable à bien cimentée, composée principalement de débris d'algues planctoniques ou nanoplanctons. Ces débris sont principalement formés de calcite à faible teneur en magnésium.

La craie de Lixhe provient de la carrière CBR proche de Liège (Belgique). Une série d'études expérimentales a été menée sur ce matériau, en raison du fait que son comportement mécanique est proche de celui de la craie des réservoirs pétroliers de la Mer du Nord [70] [71]. Il s'agit d'une craie "pure" qui contient 98% de  $CaCO_3$ , moins de 0.8% de  $SiO_2$  et 0.15% de  $Al_2O_3$ . La porosité de cette roche varie entre 42% et 44% avec une valeur moyenne de 43% environ. La perméabilité intrinsèque varie de  $1 \times 10^{-16} m^2$  jusqu'à  $1 \times 10^{-15} m^2$ . Le tableau 3.1 montre les caractéristiques principales de la craie de Lixhe.

Composition moyenne (%)						Porosité	Rayon des pores ( $\mu m$ )	Perméabilité (mD)
$CaCO_3$	$SiO_2$	$MgO$	$Fe_2O_3$	$P_2O_5$	$Al_2O_3$			
98.5	0.8	0.2	0.1	0.15	0.15	0.43	0.5	0.1 à 1

TABLE 3.1: Caractéristiques de la craie de Lixhe [70]

A l'échelle de l'échantillon, la craie de Lixhe est considérée comme une roche homogène et isotrope.

La photo 3.10 au MEB (Microscopique Electronique à Balayage) montre la microstructure de la craie de Lixhe. Cette microstructure est grossièrement représentée par un assemblage de grains solides et de pores avec différents types de surfaces de contact. Trois types de contacts peuvent être identifiés : des surfaces de contact solides cimentées, des points de contact solides régis par le frottement local, et des contacts liquides régis par les forces capillaires. Par souci de simplicité, il est supposé que les grains solides et les contacts forment une matrice équivalente dont le comportement mécanique dépend essentiellement des propriétés actuelles des contacts. Une schématisation de cette représentation équivalente est montrée sur la figure 3.11.

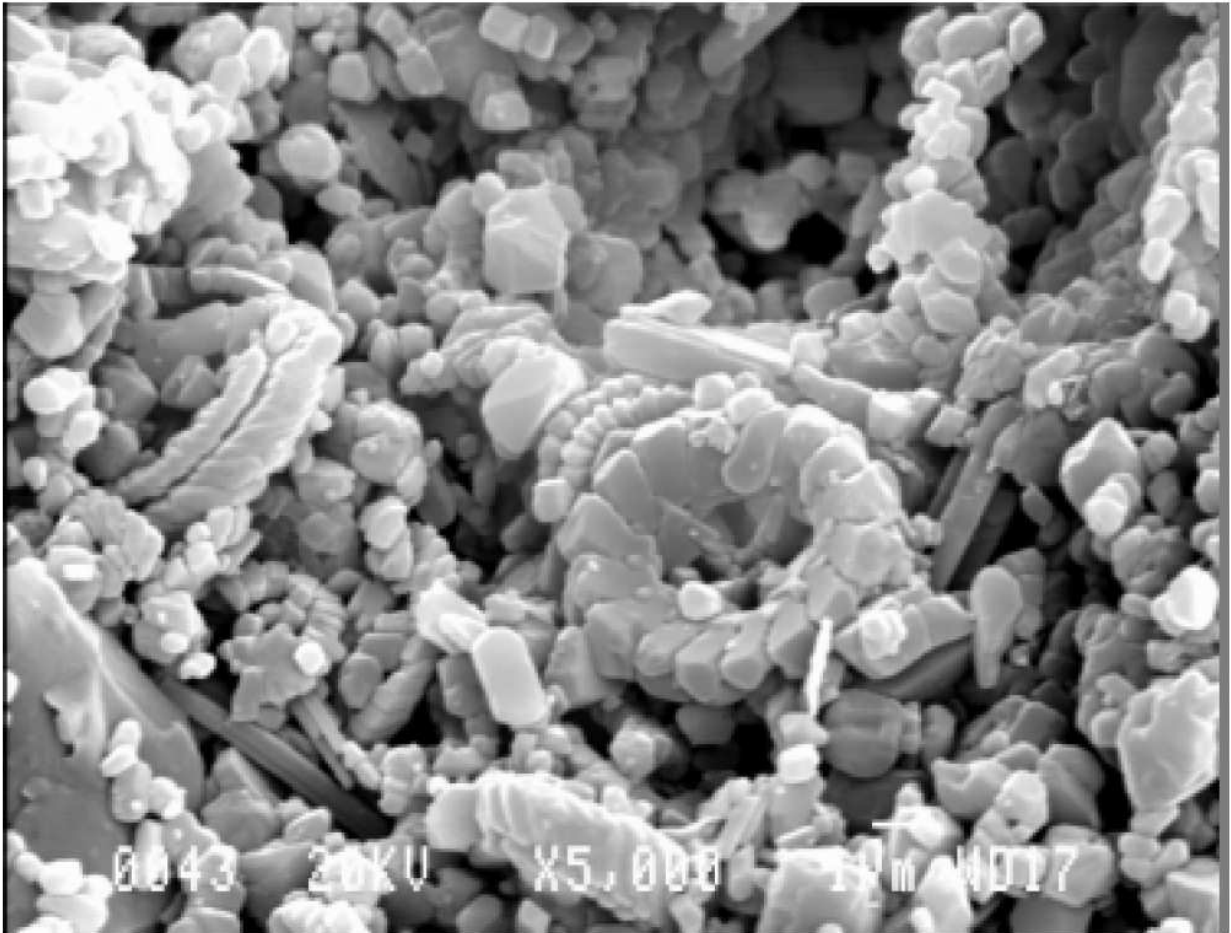


FIGURE 3.10: Microstructure de la craie de Lixhe au MEB [67]

### 3.5.2 Descriptions des essais

Deux types d'essais de compression sont considérés pour la simulation numérique : l'essai de compression hydrostatique et l'essai de compression triaxiale drainée. Comme la craie de Lixhe est une roche sédimentaire contenant presque exclusivement du calcaire  $CaCO_3$ , elle est très susceptible à l'eau, ce qui induit des gonflements très importants. Afin d'étudier le comportement mécanique intrinsèque de la craie de Lixhe, Xie et Shao [87] [88] ont utilisé comme fluide saturant une huile référencée Soltrol 170 dans leurs essais de compression.

La compression hydrostatique de l'échantillon a consisté à soumettre l'échantillon de craie à un champ de contrainte isotrope en condition drainée. En ce qui concerne les essais de compression triaxiale drainée, ils ont été réalisés en deux phases. Dans la première phase l'échantillon est soumis à un champ de contrainte hydrostatique donné qui est alors maintenu jusqu'à la stabilisation des déformations. La deuxième phase consiste à imposer une

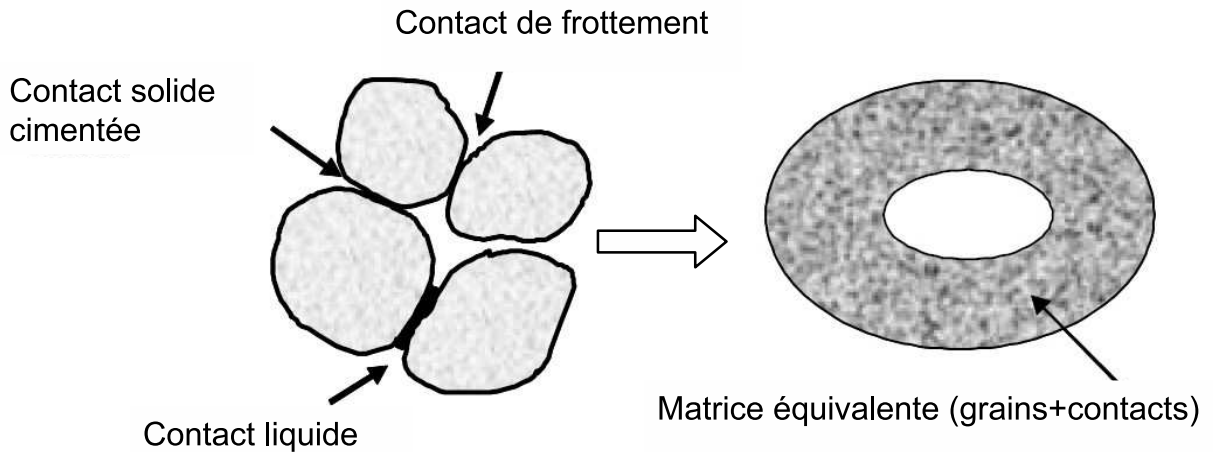


FIGURE 3.11: Représentation schématique de la craie de Lixhe comme un milieu poreux homogène

contrainte déviatorique en augmentant uniquement la contrainte axiale par l'application d'une force axiale. L'essai est mené jusqu'à rupture ou à grandes déformations. La mise en charge est suffisamment lente pour que le drainage simultané de l'échantillon soit assuré.

### 3.5.3 Données pour la simulation numérique des essais

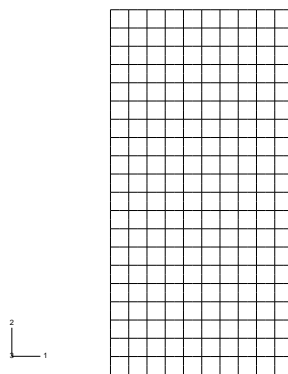


FIGURE 3.12: Maillage de l'échantillon de la craie de Lixhe

Conformément à la taille de l'échantillon, l'élançement, c'est-à-dire le rapport entre la demi-hauteur  $L_0$  et le rayon  $R_0$ , est égal à 2. Comme montré sur la figure 3.12, 200 éléments

quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR) sont utilisés pour le maillage du quart de l'échantillon. Les noeuds situés au plan de symétrie sont bloqués axialement. Les faces supérieure et droite sont soumises à une pression uniforme afin de simuler la pression de confinement. Un déplacement uniforme vertical est imposé sur la face supérieure dans la deuxième phase de l'essai triaxial.

Pour la craie de Lixhe, le module de Young et le coefficient de Poisson sont estimés à  $E = 4200MPa$  et  $\nu = 0.2$  [87] [88]. La porosité initiale est  $f_0 = 43\%$ .

Le coefficient  $\alpha$  du modèle de Guo et al. est pris égal à 0.2, ce qui correspond à un angle de frottement  $\Psi_\alpha$  (tel que :  $\tan \Psi_\alpha = 3\alpha$ ), et la contrainte seuil  $\sigma_0 = 10MPa$ . Ces deux valeurs sont déterminées à l'aide d'une comparaison entre le critère plasticité de Guo et al. [34] et les contraintes seuils de plasticité obtenus expérimentalement dans les essais de compression axiale (voir la figure 3.13).

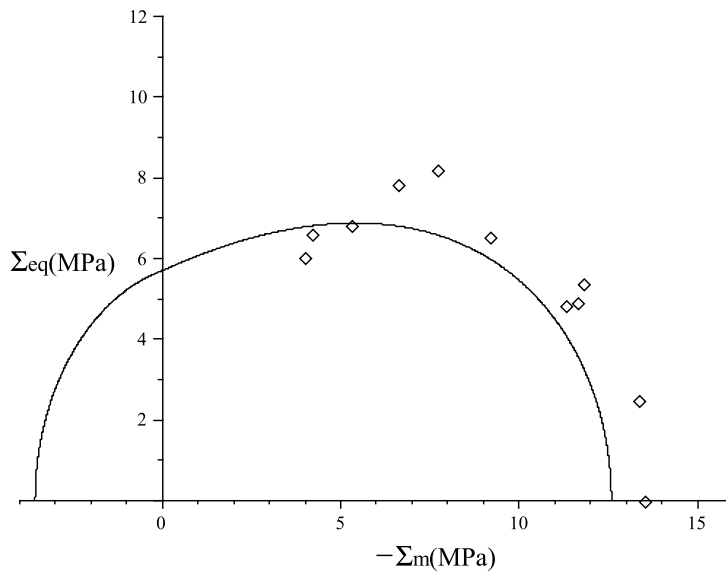


FIGURE 3.13: Comparaison entre la surface de charge plastique prédite par le critère de Guo et al. et les données expérimentales [87] de la résistance en compression triaxiale

Concernant l'écroutissement de la matrice, une fonction proposée par Xie et al. [87] [88] est utilisée :

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 [1 + a(\bar{\varepsilon}^p)^n e^{b\bar{\varepsilon}^p}] \quad (3.50)$$

Les valeur de  $a$ ,  $b$  et  $n$  sont déterminées à partir de la simulation de l'essai de compression

hydrostatique. Le résultat est montré sur la figure 3.14.

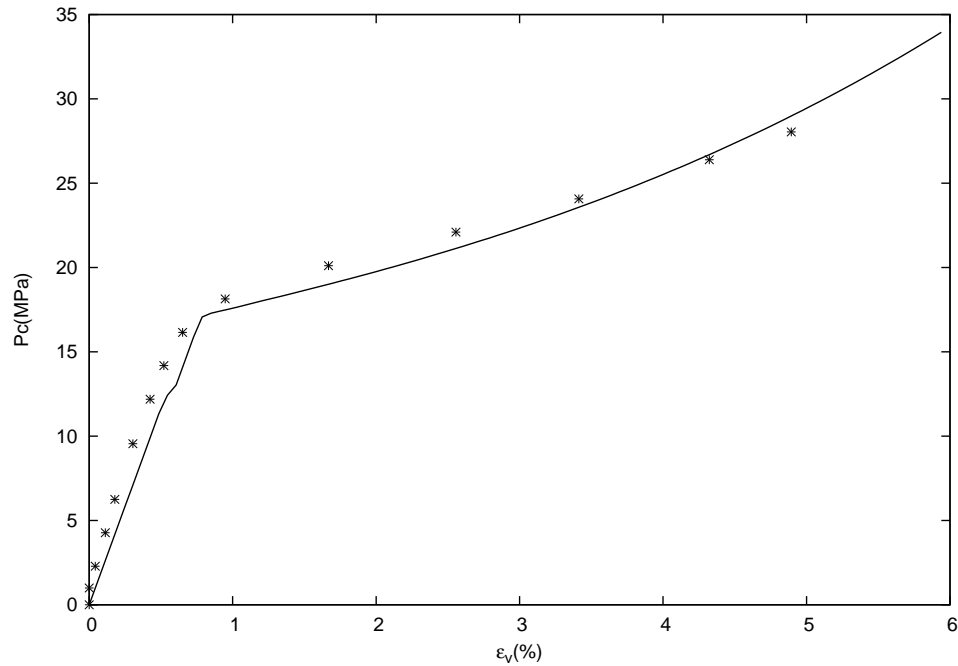


FIGURE 3.14: Simulation d'essai de compression hydrostatique de la craie de Lixhe

Les principaux paramètres du matériau sont donnés dans le tableau 3.2.

$E$ (MPa)	$\nu$	$f_0$	$\alpha$	$\sigma_0$ (MPa)	$a$	$b$	$n$
4200	0.2	0.43	0.2	10	0.4	10	0.02

TABLE 3.2: Valeurs des principaux paramètres utilisés pour la modélisation de la craie de Lixhe

### 3.5.4 Discussion des résultats

Les figures 3.15 - 3.21 comparent les prédictions des contraintes déviatoriques ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) en fonction des déformations axiale  $\varepsilon_1$  et latérale  $\varepsilon_3$  aux données obtenues pour les essais de compression triaxiale avec des pressions de confinement variant de  $3MPa$  à  $20MPa$ . De manière générale, les prédictions numériques du modèle de Guo et al. sont en très bon accord

avec les données expérimentales. Ce modèle décrit correctement la dépendance du comportement mécanique de la craie en fonction de la pression de confinement. Pour les essais avec des pressions de confinement élevées (supérieures à 14MPa), qui dépassent le seuil plastique, le modèle de Guo et al. prédit une déformation de compression pour la déformation latérale  $\varepsilon_3$  lors de la première phase compression axiale. Ceci est un comportement typique dû à l'effondrement plastique des pores. Dans les essais de compression triaxiale à faibles pressions de confinement (3MPa et 4MPa), où le mécanisme de déformation plastique est dominé par le cisaillement [87] [88], les déformations axiale et latérale sont aussi bien reproduites par le modèle. Toutefois, l'adoucissement observé dans l'essai avec un confinement de 3MPa ne peut être décrit par le modèle qui prédit un palier de contrainte. L'existence de ce palier doit être mise en relation avec l'effondrement de la structure poreuse.

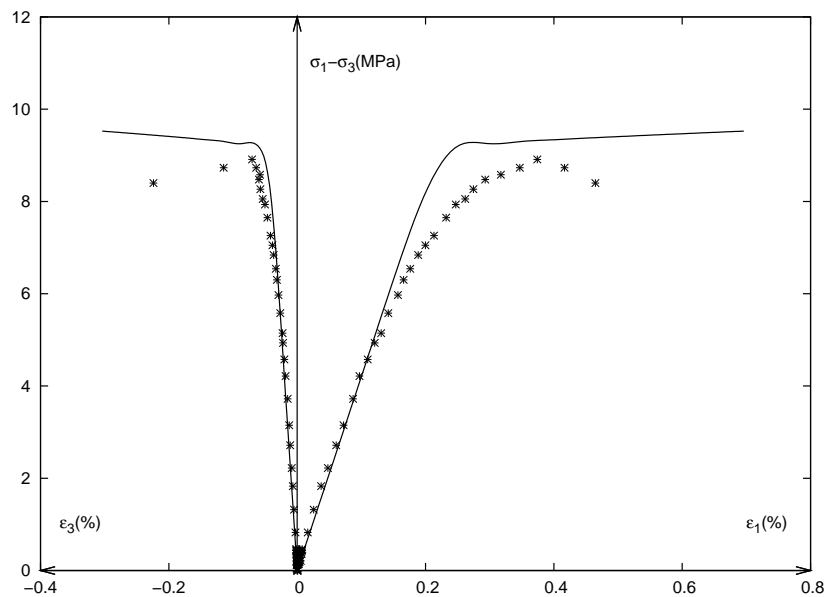


FIGURE 3.15: Simulation d'essai de compression triaxiale de la craie de Lixhe avec une pression de confinement  $P_c = 3MPa$

La figure 3.22 montre l'évolutions de la porosité  $f$  en fonction de la déformation axiale  $\varepsilon_1$  prédites par le modèle. La porosité diminue dans tous les essais. Des décroissances relativement importantes sont remarquées pour les essais à fortes pressions de confinement, tandis que les valeurs de porosité baissent très peu dans les essais à faibles pressions de confinement. Ceci confirme la prépondérance du mécanisme d'effondrement des pores pour la déformation plastique sous pressions de confinement élevées.



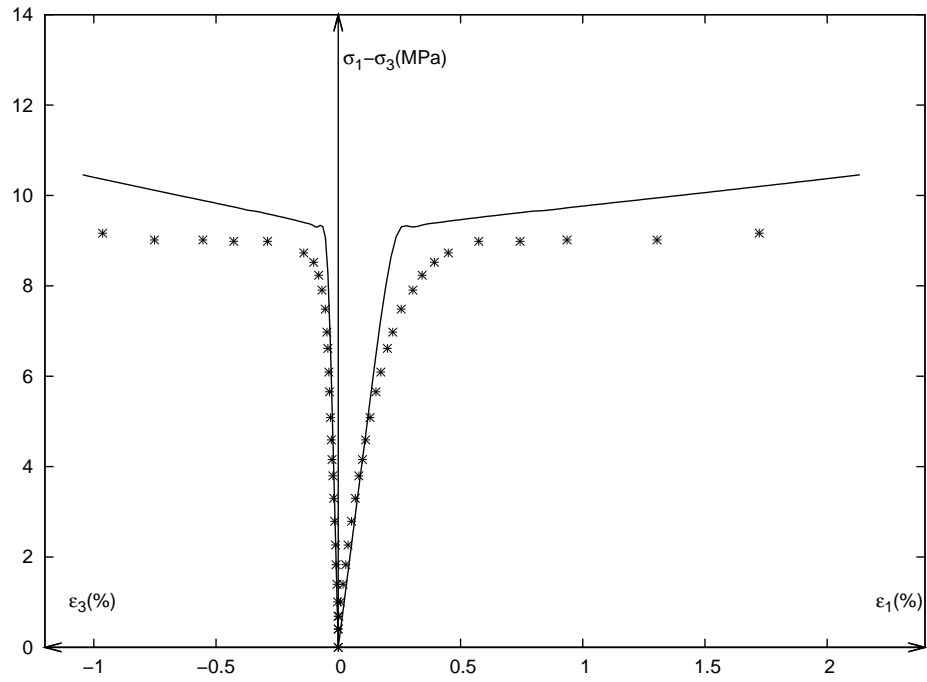


FIGURE 3.16: Simulation d'essai de compression triaxiale de la craie de Lixhe avec une pression de confinement  $P_c = 4 \text{ MPa}$

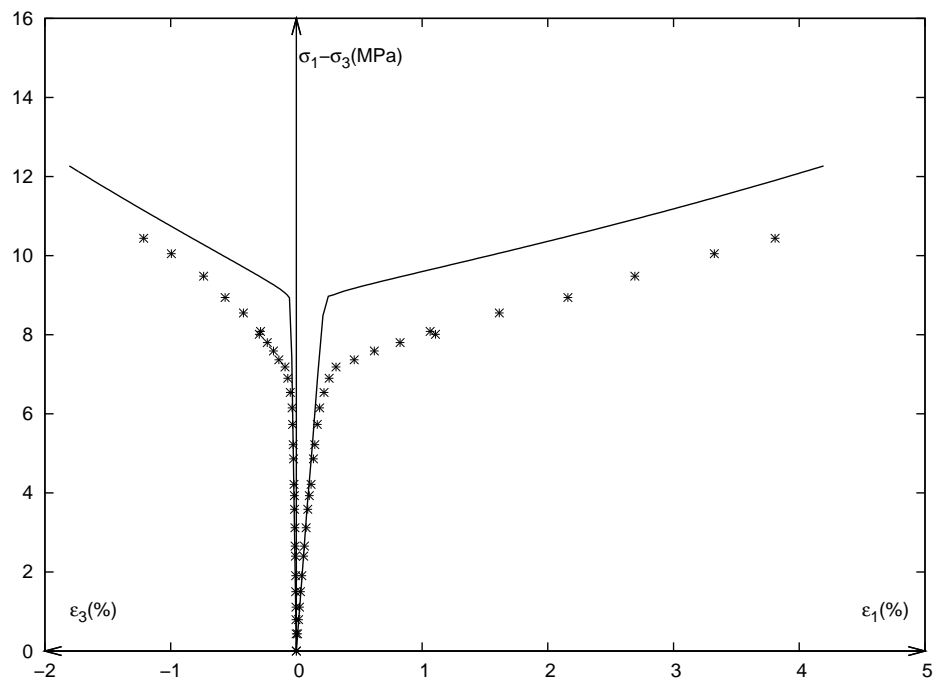


FIGURE 3.17: Simulation d'essai de compression triaxiale de la craie de Lixhe avec une pression de confinement  $P_c = 7 \text{ MPa}$

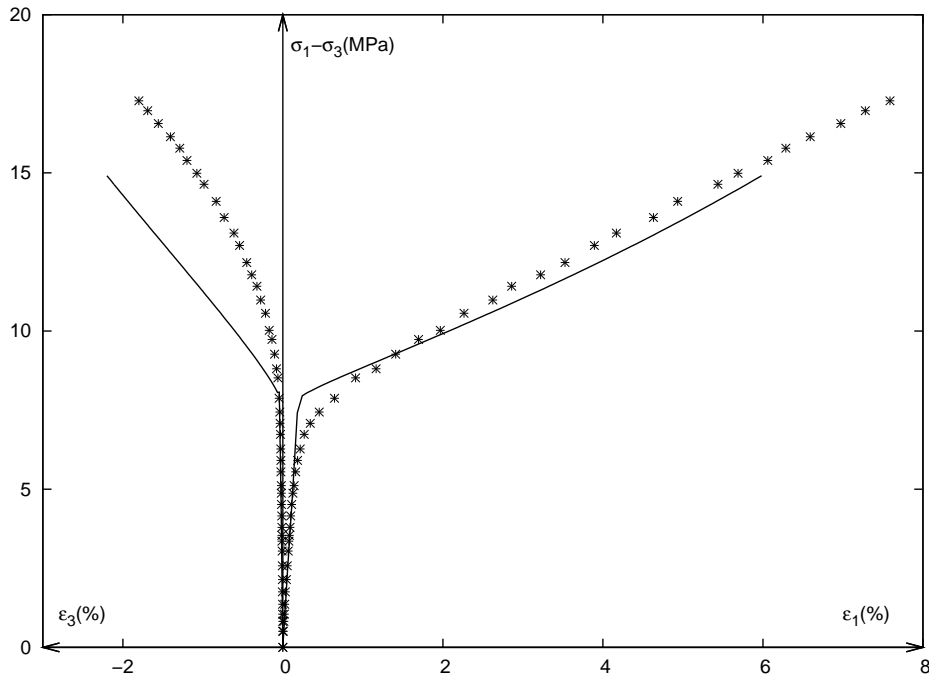


FIGURE 3.18: Simulation d'essai de compression triaxiale de la craie de Lixhe avec une pression de confinement  $P_c = 10\text{MPa}$

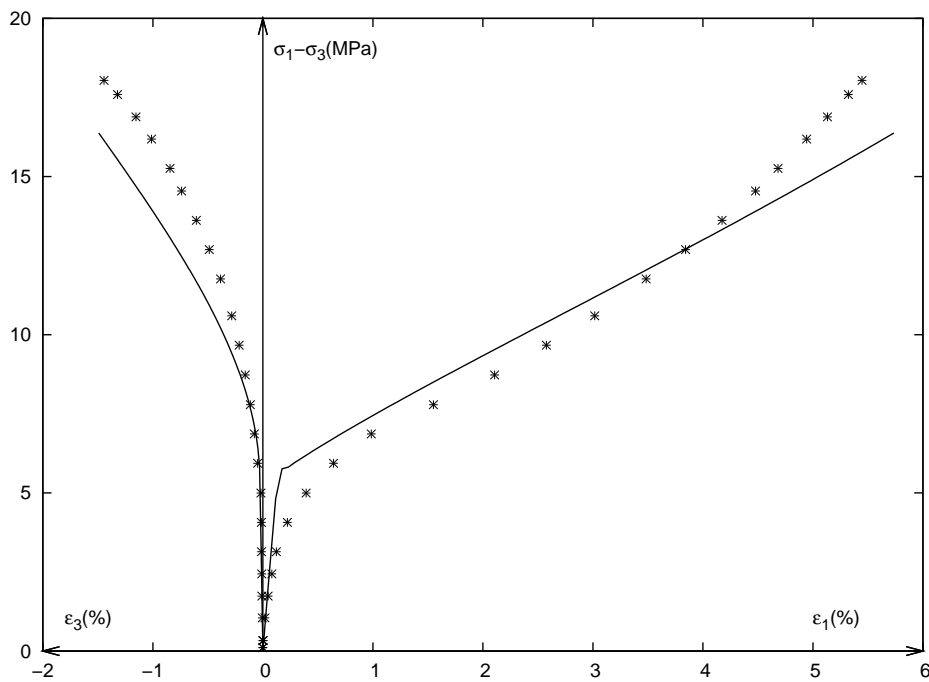


FIGURE 3.19: Simulation d'essai de compression triaxiale de la craie de Lixhe avec une pression de confinement  $P_c = 14\text{MPa}$

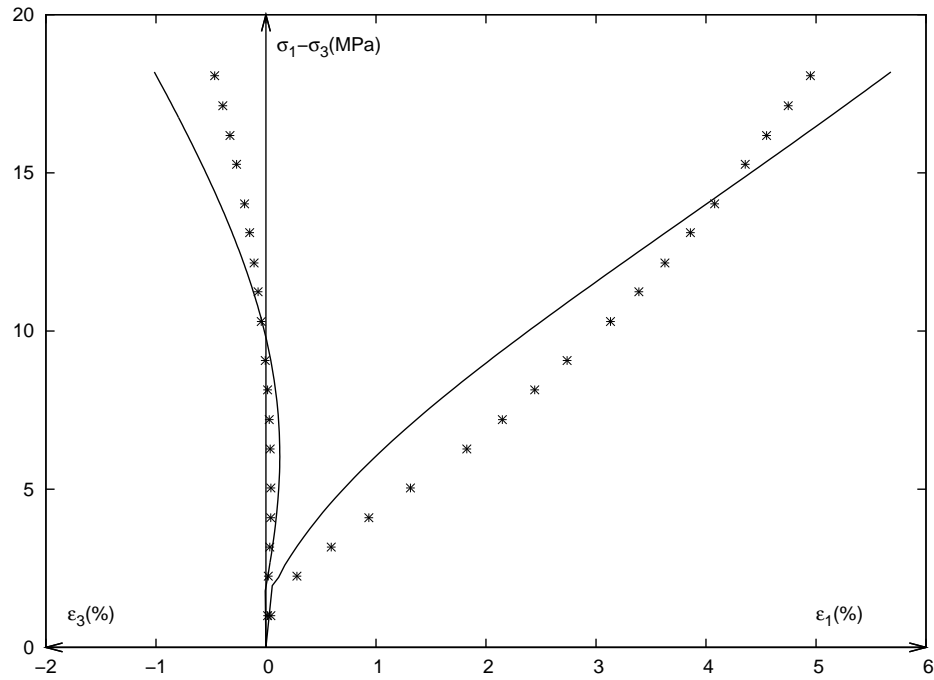


FIGURE 3.20: Simulation d'essai de compression triaxiale de la craie de Lixhe avec une pression de confinement  $P_c = 17\text{MPa}$

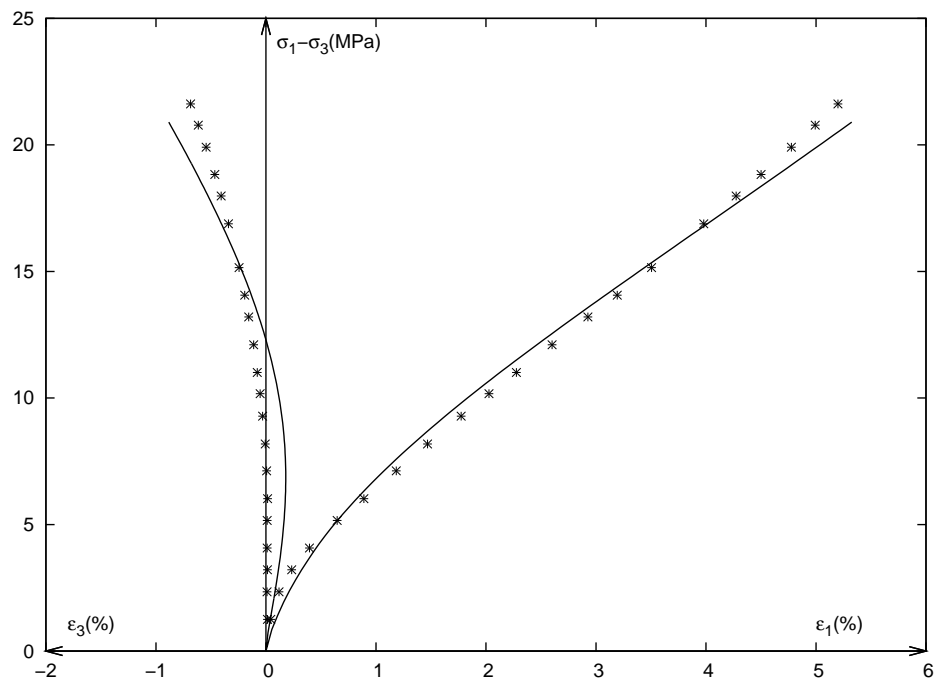


FIGURE 3.21: Simulation d'essai de compression triaxiale de la craie de Lixhe avec une pression de confinement  $P_c = 20\text{MPa}$

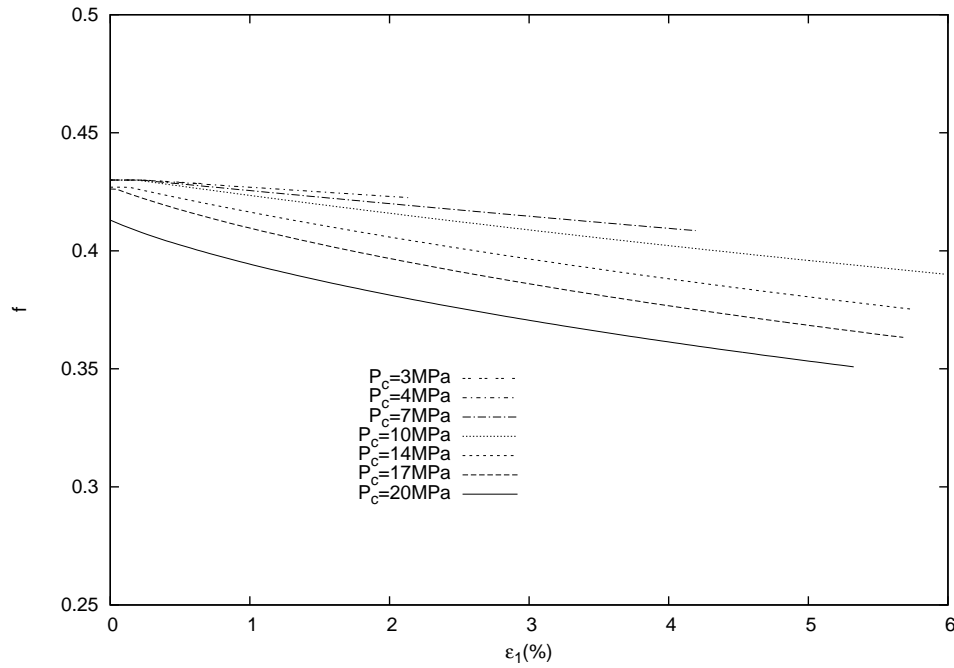


FIGURE 3.22: Evolution de la porosité

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la formulation, l'implantation numérique et l'application d'un modèle de plasticité-endommagement basé sur le critère de Guo et al. [34] bien adapté aux milieux poreux avec une matrice sensible à la pression. L'adéquation du critère est d'abord démontrée sur divers matériaux. Le modèle développé est ensuite appliqué à une roche très poreuse, la craie de Lixhe. La remarquable concordance entre les prédictions numériques et les données expérimentales pour cette craie confirme l'intérêt du modèle formulé.

# Chapitre 4

## Effets de forme de cavités et anisotropie de l'endommagement ductile : numérisation et applications

Afin de prendre en compte l'effet de la forme des cavités, des critères de plasticité ont été développés par nombreux auteurs dans le cadre de la micromécanique des milieux poreux. Les cavités considérées sont de forme ellipsoïdale de révolution (sphéroïde), allongée ou aplatie. En utilisant un champ de vitesse axisymétrique proposé par Lee et Mear [42], Gologanu et al. [31] [32] [30] ont formulé des critères de plasticité macroscopiques (critère GLD) pour décrire le comportement de matériaux contenant des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties pouvant changer de forme au cours du chargement. De la même manière que Gologanu et al., mais avec un champ de vitesse de type Eshelby [24], Monchiet et al. [49] ont récemment développé une extension du critère de plasticité<sup>2</sup> pour des matériaux poreux qui prend en compte de la forme des cavités.

A l'instar du modèle isotrope MCK, l'objectif de ce chapitre est la formulation, l'implantation numérique et l'évaluation du modèle MCK anisotrope correspondant à ce nouveau critère. Nous présentons d'abord le modèle GLD et le modèle MCK anisotrope, puis la formulation complète et l'implantation numérique du modèle basé sur le critère MCK anisotrope. Nous discutons enfin des résultats numériques obtenus en les comparant à ceux du modèle GLD. On notera que le travail réalisé dans ce chapitre est similaire à celui déjà effectué par Ould Ouali et al. [72] [54] pour le modèle GLD.

---

2. Ce critère sera à noté dans la suite critère "MCK anisotrope".

## 4.1 Critère de plasticité anisotrope, GLD, pour milieux poreux ductiles

### 4.1.1 Description de la cellule élémentaire

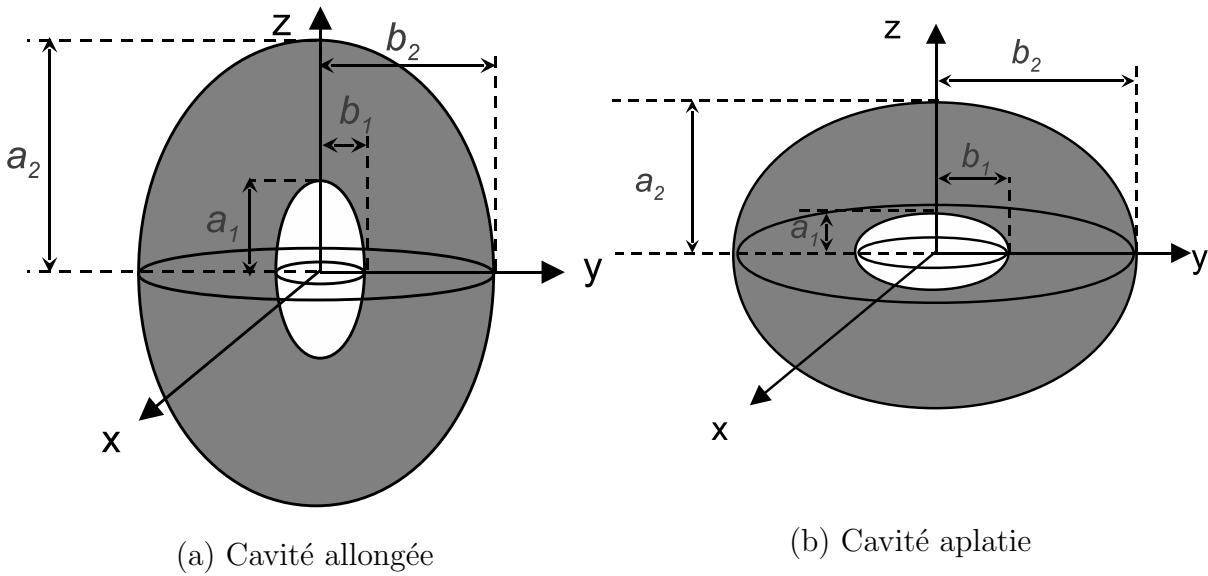


FIGURE 4.1: Cellule élémentaire dans le cas d'une cavité allongée et aplatie

La cellule élémentaire considérée est une cellule de forme sphéroïdale d'axe de révolution  $\underline{e}_z$ , contenant une cavité également sphéroïdale d'axe  $\underline{e}_z$  et confocale au bord extérieur (voir figure 4.1). Les sphéroïdes intérieur et extérieur sont respectivement définis par les demi-axes  $a_1$  et  $a_2$  (suivant  $\underline{e}_z$ ), et les demi-axes  $b_1$  et  $b_2$  (suivant  $\underline{e}_x$  et  $\underline{e}_y$ ).  $a_2 > b_2$  (ou  $a_1 > b_1$ ) correspond à une cavité allongée tandis que  $a_2 < b_2$  (ou  $a_1 < b_1$ ) est associé à une cavité aplatie. On note par  $c$  la distance focale et par  $e_1$ ,  $e_2$ , respectivement l'excentricité de la cavité intérieure et l'excentricité du bord extérieur, toutes définies par :

$$\begin{aligned}
 c &= \sqrt{|a_1^2 - b_1^2|} \\
 e_1 &= \frac{c}{a_1}; \quad e_2 = \frac{c}{a_2} \quad (\text{sphéroïdes allongés}) \\
 e_1 &= \frac{c}{b_1}; \quad e_2 = \frac{c}{b_2} \quad (\text{sphéroïdes aplatis})
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

La porosité  $f$  et le paramètre de forme  $S$  sont définis par :

$$f = \frac{a_1 b_1^2}{a_2 b_2^2}; \quad S = \ln\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \quad (4.2)$$

En particulier, dans le cas de cavités sphériques, c'est à dire pour  $e_1 = 0$ , la porosité est finie si  $e_2$  tend vers zero, ce qui correspond à un bord extérieur de forme sphérique. On retrouve alors le modèle de la sphère creuse de l'analyse de Gurson.

#### 4.1.2 Critère de Gologanu et al. (1993-1994)

Gologanu et al. [31] ont choisi un champ de vitesse composé de deux parties, la première  $\mathbf{v}^{(\mathbf{A})}$  dérivant de la famille proposée par Lee et Mear [42] et la deuxième correspondant à un taux de déformation déviatorique uniforme  $\mathbf{v}^{(\mathbf{B})}$  :

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v}^{(\mathbf{A})} + B\mathbf{v}^{(\mathbf{B})}, \quad A \text{ et } B \text{ étant deux constantes} \quad (4.3)$$

En considérant des conditions de taux de déformation uniforme au bord extérieur de la cellule élémentaire, et en effectuant un certain nombre d'approximations pour le calcul de la dissipation plastique, les auteurs aboutissent à un critère dont la forme générale est exprimée dans le repère de la sphéroïde :

$$\Phi(\Sigma, f, S) = \left(\frac{\Sigma_A}{\sigma_0}\right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (4.4)$$

avec :

$$\Sigma_A = \frac{1}{1-\zeta_G}(\Sigma_q + \eta_G \Sigma_p)^2 + 3\Sigma_s^2 + 3\Sigma_t^2; \quad \Sigma_B = \kappa_G \Sigma_p \quad (4.5)$$

où  $\Sigma_q$ ,  $\Sigma_p$ ,  $\Sigma_s$  et  $\Sigma_t$ , invariants isotropes transverses de la contrainte macroscopique, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2}(1 - \alpha_2) + \Sigma_{zz}\alpha_2; & \Sigma_q &= \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2} - \Sigma_{zz} \\ \Sigma_s &= \sqrt{\frac{1}{4}(\Sigma_{yy} - \Sigma_{xx})^2 + \Sigma_{xy}^2}; & \Sigma_t &= \sqrt{\Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{yz}^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le critère de plasticité (4.4) fait intervenir les paramètres  $g$ ,  $\kappa_G$ ,  $\eta_G$  et  $\zeta_G$  dont les expressions diffèrent selon que l'on considère une cavité allongée ou une cavité aplatie. Ces paramètres dépendent de la porosité  $f$  et du paramètre de forme  $S$ , leurs expressions sont donnés en annexe C.1.1.

On note pour les formes limites :

- Cavité sphérique,  $e_1 \rightarrow 0$  et  $e_2 \rightarrow 0$ , alors  $\eta_G = \zeta_G = g = 0$ ,  $\Sigma_p = \Sigma_h$ , et  $\kappa_G = 3/2$ . Le critère (4.4) coïncide dans ce cas avec celui de Gurson pour la sphère creuse (2.1).
- Cavité cylindrique,  $e_1 \rightarrow 1$  et  $e_2 \rightarrow 1$ , alors  $\Sigma_p = (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy})/2$  et  $\eta_G = \zeta_G = g = 0$ ,  $\kappa = \sqrt{3}$ . Le critère de Gurson pour une cavité cylindrique est également retrouvé :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{\sqrt{3} \Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.7)$$

- Pour une fissure en forme de pièce de monnaie (penny-shaped cracks),  $f = 0$  et  $e_1 \rightarrow 1$ .  $g$  est alors un terme proportionnel au paramètre densité de fissure,  $d = b_1^3/(a_2 b_2^2)$ , introduit par Budiansky et O'Connell [13].

### 4.1.3 Le critère GLD (Gologanu-Leblond-Devaux, 1997)

Le critère de plasticité (4.4) a été amélioré, en raison de son insuffisance dans certaines situations, notamment dans le cas des fissures. Dans [29], Gologanu a proposé par la suite une extension du critère précédent, en incorporant dans leur démarche de nouveaux champs de vitesse  $\mathbf{v}^{(C)}$ ,  $\mathbf{v}^{(D)}$  et  $\mathbf{v}^{(E)}$  qui correspondent à des taux de déformation déviatorique homogènes :

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v}^{(A)} + B\mathbf{v}^{(B)} + \Delta\mathbf{v}^{(C)} + D_{xz}\mathbf{v}^{(D)} + D_{yz}\mathbf{v}^{(E)} \quad (4.8)$$

Le critère final obtenu a la même forme que (4.4), les corrections apportées revenant à redéfinir les paramètres  $g$ ,  $\eta_G$ ,  $\zeta_G$  et  $\kappa_G$  ainsi que la quantité  $\Sigma_p$  (voir l'annexe C.1.2).

On notera que la nouvelle forme proposée conduit toujours aux critères de Gurson dans le cas d'une cavité sphérique et cylindrique. Les modifications apportées permettent au nouveau critère de mieux reproduire les tendances observées avec les résultats numériques en conditions axisymétriques, et particulièrement dans le cas des fissures (penny-shaped).

### 4.1.4 Prise en compte des changements d'orientation des cavités

Afin de bien décrire les éventuels changements d'orientation des cavités au cours du chargement un tenseur  $\mathbf{X}$ , dépendant des vecteurs unitaires des axes de la cavité ( $\underline{e}_x$ ,  $\underline{e}_y$ ,  $\underline{e}_z$ ), est introduit dans le critère de plasticité. L'expression du critère devient alors [30] :

$$\Phi(\Sigma, f, S) = \frac{C}{\sigma_0^2} \|\Sigma' + \eta \Sigma_h^G \mathbf{X}\|^2 + 2(g+1)(g+f) \cosh \left( \kappa \frac{\Sigma_h^G}{\sigma_0} \right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (4.9)$$

avec :

$$\mathbf{X} = \frac{1}{3}(-\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 2\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$$



où  $\|\cdot\|$  est la norme de Mises; les définitions des paramètres  $C$ ,  $\eta$  et  $\kappa$  sont données dans l'annexe C.1.2. La quantité notée  $\Sigma_h^G$  par [30], gouverne la croissance des cavités [7] par son apparition dans le terme cosinus hyperbolique; elle est définie par :

$$\Sigma_h^G = \alpha_2^G(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) + (1 - 2\alpha_2^G)\Sigma_{zz} \quad (4.10)$$

L'orientation de cavité est définie par le vecteur unitaire de l'axe  $\underline{e}_z$  dont l'évolution est gouvernée par la relation :

$$\dot{\underline{e}}_z = \underline{\Omega} \cdot \underline{e}_z \quad (4.11)$$

où  $\underline{\Omega}$  est le tenseur des taux de rotation macroscopique.

### 4.1.5 Introduction du paramètre $q$

A l'instar de la modification du modèle GTN pour le modèle de Gurson, certains auteurs tels que Pardoën et Hutchinson [56] [57], Ould Ouali et al.[55] [72] [54] ont proposé l'introduction du paramètre  $q$  dans le modèle GLD. L'introduction de ce paramètre  $q$  équivaut au paramètre  $q_1$  de Tvergaard [82] dans le modèle GTN conduit à :

$$\Phi(\underline{\Sigma}, f, S) = \frac{C}{\sigma_0^2} \|\underline{\Sigma}' + \eta \Sigma_h^G \underline{\mathbf{X}}\|^2 + 2q(g+1)(g+f) \cosh\left(\kappa \frac{\Sigma_h^G}{\sigma_0}\right) - (g+1)^2 - q^2(g+f)^2 = 0 \quad (4.12)$$

Ould Ouali [54] a proposé une définition du  $q$ , qui ne dépend que du paramètre de forme  $S$  et du paramètre  $q_0$ , donné par :

$$q = 1 + 2(q_0 - 1) \frac{e^S}{1 + e^{2S}} \quad (4.13)$$

où la valeur de  $q_0$  est entre 1 et 1.6.

## 4.2 Critère de plasticité MCK anisotrope

### 4.2.1 Expression générale du critère de plasticité pour une cavité sphéroïdale allongée ou aplatie

En reprenant l'analyse limite et l'homogénéisation de la cellule élémentaire sphéroïdale(cf. figure 4.1), Monchiet et al. [49] ont formulé un critère de plasticité qui prend en compte l'effet de la forme de cavité avec un champ de vitesse issu de la solution (extérieure

à la cavité) du problème de l'inclusion inhomogène d'Eshelby. Ce champ se met sous la forme :

$$\underline{v}^E = \sum_{r=1}^{r=6} \underline{v}^r d_r^* \quad (4.14)$$

où les  $d_r^*$  sont des quantités définis à partir de la déformation libre de la cavité.

L'expression générale du critère obtenu par Monchiet [48] peut s'écrire sous la même forme que celle du critère de Gologanu et Leblond (1993,1994) :

$$\Phi(\Sigma, f, S) = \left( \frac{\Sigma_A}{\sigma_0} \right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh \left( \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (4.15)$$

dans laquelle  $\Sigma_B$  a pour expression :

$$\Sigma_B^2 = \kappa_1 \Sigma_p^2 + \kappa_2 \Sigma_q^2 + \kappa_3 \Sigma_p \Sigma_q + \kappa_4 \Sigma_s^2 + \kappa_5 \Sigma_t^2 \quad (4.16)$$

avec  $\Sigma_p$ ,  $\Sigma_q$ ,  $\Sigma_s$  et  $\Sigma_t$  définis auparavant en (4.6) ; les coefficients  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$ ,  $\kappa_4$  et  $\kappa_5$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{9p_{22}}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; & \kappa_2 &= \frac{9p_{11}(1 - \alpha_2 - \beta_2)^2}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; & \kappa_3 &= \frac{18p_{12}(1 - \alpha_2 - \beta_2)}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; \\ \kappa_4 &= \frac{(3 - 3\alpha_2 - \beta_2)^2}{4p_{33}}; & \kappa_5 &= \frac{(2\beta_2 + 3\alpha_2 - 1)^2}{p_{55}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

où les  $p_{rs}$  sont donnés dans l'annexe C.1.3.

Quant à  $\Sigma_A$ , il s'écrit sous la forme :

$$\Sigma_A^2 = \tilde{\Sigma}_{eq}^2 - (1+g)(f+g)\Sigma_B^2 \quad (4.18)$$

où  $\tilde{\Sigma}_{eq}$  est défini par :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = (1 + \mu_1)\Sigma_q^2 + \mu_2\Sigma_h^2 + \mu_3\Sigma_h\Sigma_q + 3(1 + \mu_4)\Sigma_s^2 + 3(1 + \mu_5)\Sigma_t^2 \quad (4.19)$$

avec les coefficients  $\mu_i$ , donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{4f}{3\Upsilon} - f; & \mu_2 &= \frac{3f}{2\Upsilon}(3\tilde{\alpha} + 3\tilde{\beta} - 1); & \mu_3 &= \frac{2f}{\Upsilon}(1 - 3\tilde{\alpha}) \\ \mu_4 &= f \frac{3 - 3\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{1 + 3\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}; & \mu_5 &= f \frac{3\tilde{\alpha} + 2\tilde{\beta} - 1}{3 - 3\tilde{\alpha} - 2\tilde{\beta}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$\Upsilon$  est défini par  $\Upsilon = 2\tilde{\beta} + 4\tilde{\alpha} - 3\tilde{\alpha}^2 - 1$ . Les paramètres  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  sont données par :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - f\alpha_2}{1 - f}; \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta_1 - f\beta_2}{1 - f} \quad (4.21)$$

La surface de charge macroscopique (4.15) peut donc également s'exprimer sous la forme :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, f, S) = \frac{\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(g+f) \left[ \cosh\left(\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right) - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} \right] - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (4.22)$$

Il est important de noter que la présence des coefficients  $\kappa_4$ ,  $\kappa_5$ ,  $\mu_4$  et  $\mu_5$  accompagnant les coefficients  $\Sigma_s$  et  $\Sigma_t$  (dans  $\Sigma_B$  et  $\Sigma_A$ ) fait clairement apparaître un couplage entre l'endomagement et les termes de cisaillement  $\Sigma_s$  et  $\Sigma_t$ . Ce couplage n'existe pas dans les critères proposés par Gologanu et al. [31] [30].

Dans le cas particulier de la cavité sphérique, obtenu en posant  $e_1 = e_2 \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\Sigma}_{eq}$  s'écrit :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = \left(1 + \frac{2f}{3}\right) \Sigma_{eq}^2 + \frac{9f}{4} \Sigma_h^2 \quad (4.23)$$

tandis que  $\Sigma_B$  vaut :

$$\Sigma_B^2 = \frac{9}{4} \Sigma_h^2 + \frac{2}{3} \Sigma_{eq}^2 \quad (4.24)$$

Le critère isotrope de plasticité MCK (2.10), cas de la cavité sphérique, est ainsi retrouvé comme cas particulier du critère anisotrope (4.15).

## 4.2.2 Prise en compte des changements d'orientation des cavités

Afin de tenir compte les éventuels changements d'orientation des cavités, nous proposons d'exprimer  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  et  $\Sigma_B^2$  en utilisant la base de Walpole [86], particulièrement adaptée au contexte anisotrope. Les éléments de cette base sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}; & \mathbb{E}_2 &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}; & \mathbb{E}_3 &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \\ \mathbb{E}_4 &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}; & \mathbb{E}_5 &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}; & \mathbb{E}_6 &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.25)$$

où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont les deux tenseurs suivants :

$$\mathbf{a} = \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z; \quad \mathbf{b} = \mathbf{1} - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (4.26)$$

Les applications de cette base à la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$  donnent :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{E}_1 : \boldsymbol{\Sigma} &= \frac{1}{2} (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy})^2; & \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{E}_2 : \boldsymbol{\Sigma} &= \Sigma_{zz}^2 \\ \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{E}_3 : \boldsymbol{\Sigma} &= \frac{1}{2} (\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2 + 2\Sigma_{xy}^2; & \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{E}_4 : \boldsymbol{\Sigma} &= 2\Sigma_{xz}^2 + 2\Sigma_{yz}^2 \\ \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{E}_5 : \boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{E}_6 : \boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy})\Sigma_{zz} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  et  $\Sigma_B^2$  peuvent donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Sigma}_{eq}^2 &= \left[ \frac{1}{2} + \frac{\mu_1}{2} + \frac{2\mu_2}{9} + \frac{\mu_3}{3} \right] \Sigma : \mathbb{E}_1 : \Sigma + \left[ \frac{1}{2} + \frac{\mu_1}{2} + \frac{2\mu_2}{9} + \frac{\mu_3}{3} \right] \Sigma : \mathbb{E}_2 : \Sigma \\
 &+ \left[ \frac{3}{2}(1 + \mu_4) \right] \Sigma : \mathbb{E}_3 : \Sigma + \left[ \frac{3}{2}(1 + \mu_5) \right] \Sigma : \mathbb{E}_4 : \Sigma \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ -1 - \mu_1 + \frac{2\mu_2}{9} - \frac{\mu_3}{6} \right] \Sigma : (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) : \Sigma \\
 \Sigma_B^2 &= \left[ \frac{(1 - \alpha_2)^2}{2} \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{1 - \alpha_2}{2} \kappa_3 \right] \Sigma : \mathbb{E}_1 : \Sigma + [\kappa_1 \alpha_2^2 + \kappa_2 - \kappa_3 \alpha_2] \Sigma : \mathbb{E}_2 : \Sigma \\
 &+ \left[ \frac{\kappa_4}{2} \right] \Sigma : \mathbb{E}_3 : \Sigma + \left[ \frac{\kappa_5}{2} \right] \Sigma : \mathbb{E}_4 : \Sigma \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ \kappa_1 \alpha_2 (1 - \alpha_2) - \kappa_2 + \kappa_3 \frac{2\alpha_2 - 1}{2} \right] \Sigma : (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) : \Sigma
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

### 4.2.3 Comparaison des critères de Gologanu et al. et MCK anisotrope

A titre d'illustration, on se propose ici de comparer le critère de plasticité MCK anisotrope aux critères de Gologanu et Lebond (1993,1994) [31] [32] et à ces extensions, Gologanu et al. [30], dans le cas d'un chargement macroscopique axisymétrique :

$$\Sigma_p = \Sigma_{xx}(1 - \alpha_2) + \Sigma_{zz}\alpha_2; \quad \Sigma_q = \Sigma_{xx} - \Sigma_{zz}; \quad \Sigma_s = \Sigma_t = 0 \tag{4.29}$$

Ce type de comparaison a été réalisée par Monchiet lors de sa thèse [48].

#### – Cas de la cavité allongée

Sur la figure 4.2 est présentée une comparaison de ces trois critères pour diverses valeurs de la porosité et pour un rapport d'aspect  $W = a_1/b_1 = 5$ . On note que le critère MCK anisotrope fournit, pour de faibles valeurs de la porosité, une surface de seuil à l'intérieure de celle prédite par les deux autres. Dans le cas où la porosité  $f = 0.1$ , le critère prédit par le critère MCK est toujours à l'intérieur au critère GLD mais à l'extérieur de la surface prédite par le critère de Gologanu et al.(1993).

#### – Cas de la cavité aplatie

Sur la figure 4.3 est comparé ces trois critères dans le cas où  $W = a_1/b_1 = 1/5$ . On note que le critère MCK anisotrope prédit d'une surface de charge à l'intérieur des deux autres lorsque  $\Sigma_{33} - \Sigma_{11} > 0$ , tandis que le critère GLD donne une estimation légèrement plus à l'intérieure de celle prédite par le critère MCK.

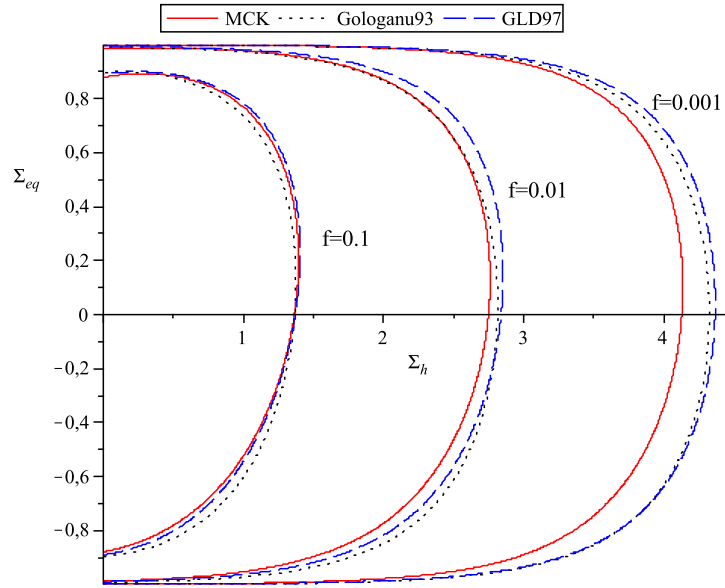


FIGURE 4.2: Comparaison du critère MCK avec les critères de Gologanu et al. [31] [30] pour  $W = 5$

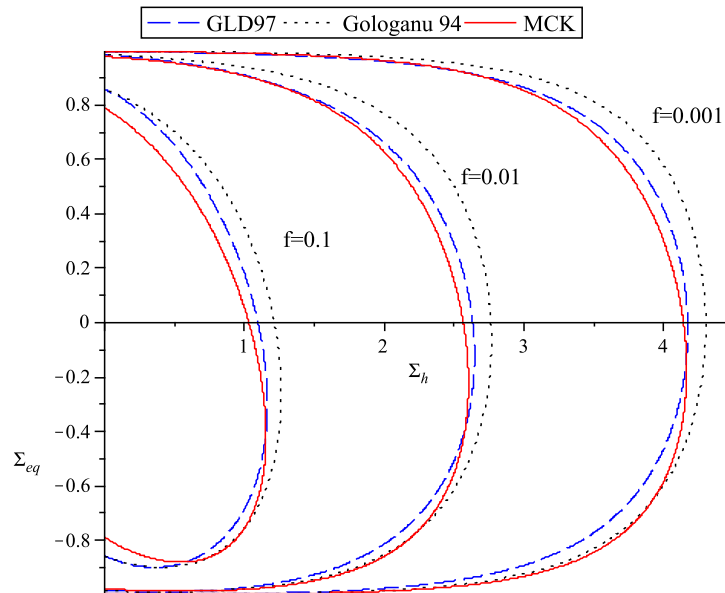


FIGURE 4.3: Comparaison du critère MCK avec les critères de Gologanu et al. [32] [30] pour  $W = 1/5$

### 4.3 Formulation du modèle complet issu du critère MCK anisotrope

On vise dans cette section à formuler un modèle constitutif complet basé sur le critère MCK anisotrope. On rappelle que le critère de plasticité macroscopique est donné par (4.22)

dans lequel une variable d'écoulement est introduite via la limite d'élasticité de la matrice  $\bar{\sigma}$  :

$$\Phi(\Sigma, \bar{\sigma}, f, S) = \frac{\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2(1+g)(g+f) \left[ \cosh\left(\frac{\Sigma_B}{\bar{\sigma}}\right) - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_B^2}{\bar{\sigma}^2} \right] - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (4.30)$$

### 4.3.1 Loi d'écoulement

L'écoulement plastique dans le matériau poreux est régi par la loi de normalité :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \quad (4.31)$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique.

Dans le cas des chargements axisymétriques, les composantes non nulles du tenseur des taux de déformation plastique sont :

$$\dot{E}_{xx}^p = \dot{E}_{yy}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{xx}}; \quad \dot{E}_{zz}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{zz}} \quad (4.32)$$

L'existence du facteur 1/2 dans l'expression de  $\dot{E}_{xx}^p$  est dû au fait qu'au cours de l'estimation de ces deux relations, la composante  $\Sigma_{xx}$  est remplacée par  $(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy})/2$  dans le critère (4.30), où  $\Sigma_{xx}$  et  $\Sigma_{yy}$  sont considérées distinctes. Après calcul, nous procédons à l'égalisation de ces deux quantités [30] [73].

### 4.3.2 Evolution de la porosité

Comme dans le cas du modèle MCK isotrope, on utilise la condition d'incompressibilité de la déformation plastique de la matrice ; on rappelle que ceci conduit à la loi d'évolution de la porosité, sous la forme suivante :

$$\dot{f} = 3(1-f) \dot{E}_m^p \quad (4.33)$$

où  $E_m^p \equiv \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{E}^p$  est la déformation plastique volumique.

### 4.3.3 Evolution du paramètre de forme

A la différence du cas isotrope, le processus d'endommagement inclut l'évolution du paramètre de forme  $S$ . Nous adoptons, pour le modèle MCK anisotrope, la loi d'évolution de  $S$  proposé par Gologanu et al. [30].

En effectuant une analyse à deux champs de vitesses de la cellule élémentaire sphéroïdale (voir figure 4.1) et soumise à un chargement axisymétrique, Gologanu et al.[30] ont proposé une expression de l'évolution du paramètre de forme  $S$  :

$$\dot{S} = \dot{E}_{zz}^p - \dot{E}_{xx}^2 + 3 \left( \frac{1 - 3\alpha_1^G}{f} + 3\alpha_2^G - 1 \right) \dot{E}_m^p \quad (4.34)$$

où  $\alpha_1^G$  et  $\alpha_2^G$  sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la cavité. Leurs définitions sont données dans l'annexe C.1.2. Comme cette évolution du paramètre de forme  $S$  (4.34) ne prédit pas correctement le changement de forme des cavités sphériques ou qui s'y rapproche (avec la valeur de  $e_1$  faible), Gologanu et al.[30] ont proposé de modifier la relation obtenue en multipliant le terme déviatorique ( $\dot{E}_{zz}^{p'} - \dot{E}_{xx}^{p'}$ ) par un paramètre  $h_1$  déduit de simulations numériques. La loi d'évolution corrigée s'écrit alors :

$$\dot{S} = h_1(\dot{E}_{zz}^{p'} - \dot{E}_{xx}^{p'}) + 3h_2\dot{E}_m^p \quad (4.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + h_f(f)h_T(T)h_S(S) \\ h_2 &= \frac{1 - 3\alpha_1^G}{f} + 3\alpha_2^G - 1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$h_f(f)$  et  $h_T(T)$  ont été incorporé d'une manière heuristique pour tenir compte des effets de la porosité  $f$  et de la triaxialité des contraintes  $T$ . Ces fonctions sont définies par :

$$h_f(f) = \left(1 - \sqrt{f}\right)^2 \quad (4.37)$$

$$h_T(T) = \begin{cases} 1 - \frac{T^2 + T^4}{9} & \text{si } (\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx})tr\Sigma > 0 \\ 1 - \frac{T^2 + T^4}{18} & \text{si } (\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx})tr\Sigma < 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Concernant le paramètre  $h_S(S)$ , il est introduit d'une manière théorique en se basant sur la solution du problème d'Eshelby. Son rôle est de prendre en compte l'effet de la forme de cavité, il est défini par :

$$h_S(S) = \frac{9\alpha_1^G - \alpha_1'}{2(1 - 3\alpha_1^G)} \quad (4.39)$$

où  $\alpha_1'$  est un coefficient géométrique et donnée en annexe C.1.2. L'équation (4.35) qui a été élaborée dans le cas d'un chargement axisymétrique, a été généralisée à un chargement quelconque en imposant à la nouvelle relation de respecter l'isotropie transverse du matériau. Le terme déviatorique a ainsi été modifié et calibré sur des calculs de cellules. La loi d'évolution généralisée correspondante s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{S} = \frac{3}{2}h_1\dot{E}_{zz}^{p'} + 3h_2\dot{E}_m^p \quad (4.40)$$

### 4.3.4 Modèle de la coalescence

Pour compléter les modèles constitutifs prenant en compte l'effet de la forme de cavité, on adopte un modèle de coalescence proposé par Benzerga et al. [8] basé sur le critère de Thomason [78].

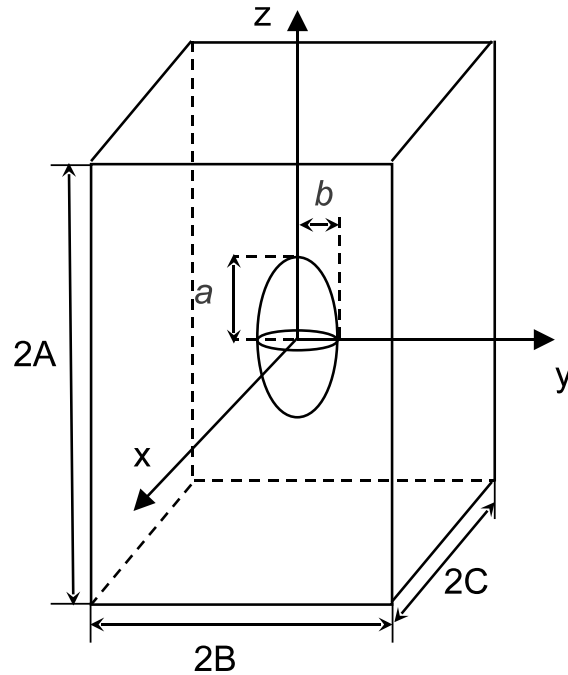


FIGURE 4.4: Cellule élémentaire correspondant au critère de Thomason

#### – Critère de Thomason

A la fin de l'étape de croissance des cavités, de fortes interactions apparaissent entre celles-ci, transformant la matière sous forme de ligaments. Thomason a proposé de modéliser ce phénomène en supposant que la striction du ligament survient quand celui-ci atteint sa charge plastique limite. En effectuant une analyse limite sur un cellule élémentaire de forme prismatique carré contenant une cavité sphéroïdale (voir figure 4.4), il a obtenu un critère sous la forme suivante :

$$\left[ \frac{0.1}{\left(\frac{a}{B-b}\right)^2} + \frac{1.2}{\sqrt{b/B}} \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4} f_0 \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{b}{R_0} \right) \exp(E_{zz}) \right] = \frac{\Sigma_{zz}}{\sigma_0} \quad (4.41)$$

où  $a$  et  $b$  sont les demis axes de la cavité suivant les directions axiale et radiale, respectivement.  $A$  et  $B$  représentent la hauteur et la largeur de la cellule élémentaire ;  $\sigma_0$  et  $\Sigma_{zz}$  représentent respectivement la limite élastique de la matrice et la contrainte



macroscopique suivant la direction  $\underline{e}_z$  et  $f_0$  la porosité initiale de la cellule élémentaire. En introduisant des variables  $\chi$ ,  $W$ ,  $\lambda$  qui représentent respectivement la taille du ligament, la forme de la cavité et l'espacement entre cavités [8][56], le critère (4.41) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\Sigma_{zz}}{\sigma_0} = (1 - \chi^2) \left[ 0.1 \left( \frac{1 - \chi}{\chi W} \right)^2 + 1.2 \sqrt{\frac{1}{\chi}} \right] \quad (4.42)$$

#### – Extension du modèle de Thomason

En se basant sur le critère de Thomason[78] un modèle complet de coalescence a été élaboré par Benzerga et al.[8]. La possibilité de passage de la cavité d'une forme sphéroïdale à conique est prise en compte en introduisant un facteur de forme  $\gamma$  :

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_c & \text{si } \chi < \chi_c \\ \gamma_c + \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} (\chi - \chi_c) & \text{si } \chi \geq \chi_c \end{cases} \quad (4.43)$$

où  $\gamma$  prend la valeur de  $\frac{1}{2}$  dans le cas de cavité sphéroïdale et la valeur de 1 dans le cas de cavité conique;  $\chi_c$  représente la taille du ligament au début de la coalescence. L'expression de la taille du ligament se réécrit sous la forme :

$$\chi = \frac{b}{B} = (3\gamma f \lambda e^{-S})^{1/3} \quad (4.44)$$

En remplaçant la porosité  $f$  par  $\chi$ , qui est plus appropriée pour décrire la striction du ligament, Benzerga et al.[8] ont réécrit le critère de Thomason(4.42) de la manière qui suit :

$$\Phi_{coal}(\Sigma, \chi, W) = \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} + \frac{3|\Sigma_m|}{2\sigma_0} - \frac{3}{2}(1 - \chi^2)C(\chi, W) \quad (4.45)$$

où  $C(\chi, W)$  est défini par :

$$C(\chi, W) = 0.1 \left( \frac{\chi^{-1} - 1}{W^2 + 0.1\chi^{-1} + 0.02\chi^{-2}} \right)^2 + 1.3 \sqrt{\frac{1}{\chi}} \quad (4.46)$$

## 4.4 Intégration et implantation du modèle MCK anisotrope

On présente dans cette section les étapes principales de l'intégration du modèle MCK anisotrope pour la numérisation dans le code de calcul éléments finis ABAQUS. Dans un

but de comparaison, l'algorithme qui sera décrit a été aussi utilisé pour l'implantation numérique du modèle GLD. L'implantation numérique dans le code ABAQUS a été effectuée à nouveau en utilisant la subroutine Umat. Un schéma d'intégration implicite est utilisé avec un prédicteur élastique et une correction plastique en vérifiant le signe du critère de plasticité. Comme deux critères de plasticité (le critère qui décrit la croissance des cavités (4.30) et celui de coalescence (4.45)) sont en jeu dans le modèle MCK anisotrope, une compétition apparaît entre les deux modes de déformation plastique au cours du chargement (voir figure 4.5). Une méthode de Newton-Raphson est appliquée pour le calcul de la correction plastique du modèle de croissance des cavités, tandis que le schéma proposé par Aravas [1] est utilisé pour le modèle de coalescence.

Pour la phase de prédiction élastique, on a :

$$\Sigma_{n+1} = \mathbb{C} : \mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p) = \Sigma^{pred} - \mathbb{C} : \Delta \mathbf{E}^p \quad (4.47)$$

où  $\mathbb{C}$  est la matrice des modules élastiques ; les indices  $n$  et  $n + 1$  se rapportent au début et à la fin de l'incrément respectivement ;  $\Sigma^{pred}$  est le prédicteur élastique qui s'exprime comme :

$$\Sigma^{pred} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_n^e + \Delta \mathbf{E}) \quad (4.48)$$

#### 4.4.1 Correction plastique

Après l'évaluation du prédicteur élastique, nous procédons à l'estimation des critères de plasticité. Comme seul le changement de mode de déformation plastique du critère de croissance des cavités au critère de coalescence est admis dans cette implantation numérique, la vérification du signe du critère de plasticité pour le modèle de coalescence est effectuée avant celle du modèle de croissance des cavités. Si le signe du critère de coalescence est négatif, la vérification du signe du critère de croissance des cavités est considérée. Si ce dernier est aussi négatif, la solution est le prédicteur élastique ; dans le cas contraire une correction plastique s'impose dans le modèle de croissance des cavités. Une fois le signe du critère de coalescence est positif, une correction plastique résolue du modèle de coalescence est considérée.

##### – correction plastique du modèle de croissance des cavités

Comme précédemment indiqué, la méthode de Newton-Raphson est appliquée à cette étape pour résoudre un système d'équations différentielles du type :

$$F'(x_n)(\Delta x) = F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -F(x_n) \quad (4.49)$$

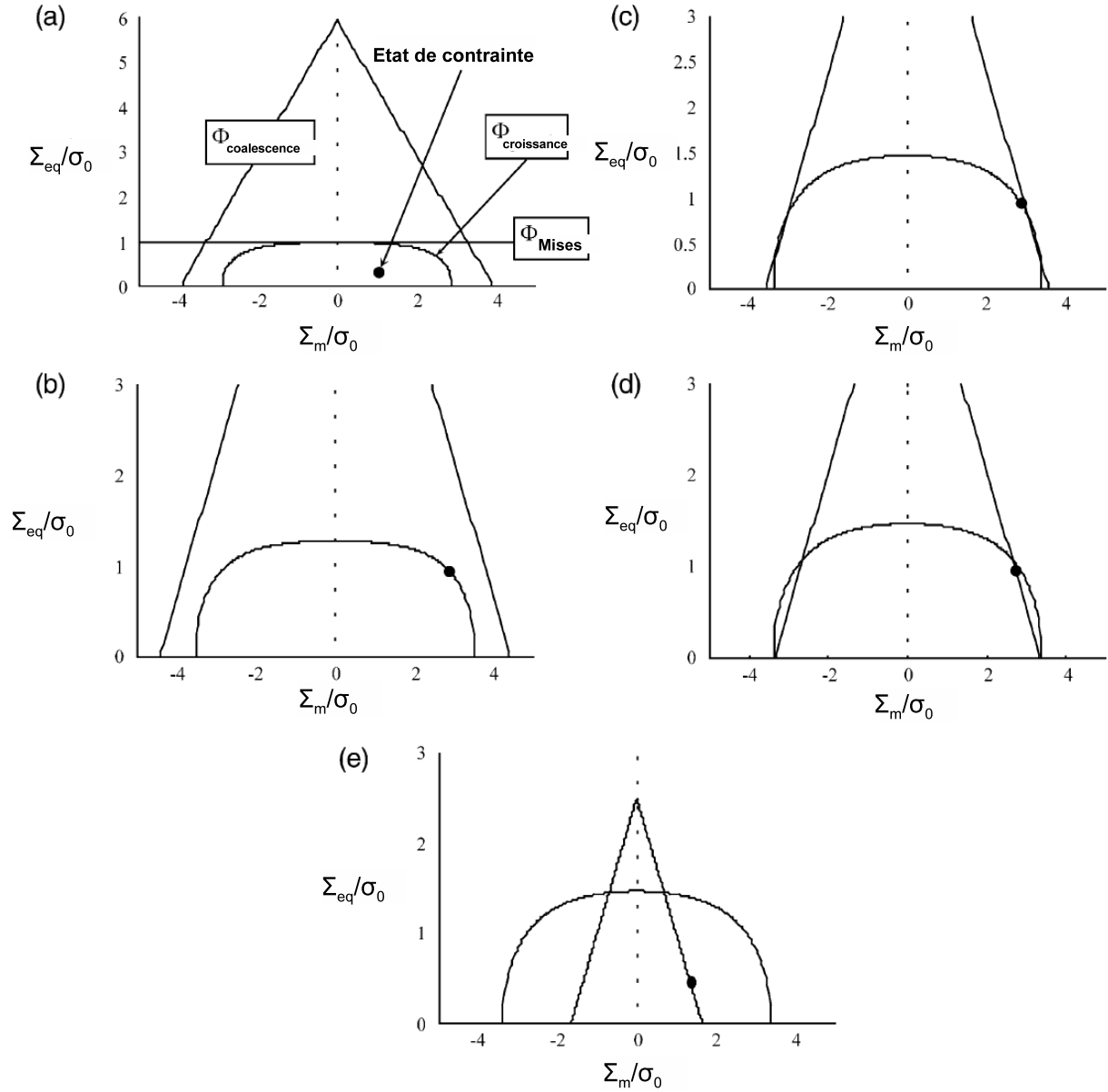


FIGURE 4.5: Transition de l'état élastique (a), à l'état plastique de croissance des cavités (b) et (c), à l'état plastique de coalescence des cavités (d) et (e) en termes de variations des critères et de l'état de contrainte (d'après [57]).

où  $F(x)$  consiste en dix équations définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x^1) = \Delta\Sigma_{11} - \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{11}^p) = \Delta\Sigma_{11} - \mathbb{C} : \left[ \mathbf{E}_{11} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{11} \right] \\ F(x^2) = \Delta\Sigma_{22} - \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{22} - \mathbf{E}_{22}^p) = \Delta\Sigma_{22} - \mathbb{C} : \left[ \mathbf{E}_{22} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{22} \right] \\ F(x^3) = \Delta\Sigma_{33} - \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{33} - \mathbf{E}_{33}^p) = \Delta\Sigma_{11} - \mathbb{C} : \left[ \mathbf{E}_{33} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{33} \right] \\ F(x^4) = \Delta\Sigma_{12} - \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{12} - \mathbf{E}_{12}^p) = \Delta\Sigma_{12} - \mathbb{C} : \left[ \mathbf{E}_{12} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{12} \right] \\ F(x^5) = \Delta\Sigma_{13} - \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{13} - \mathbf{E}_{13}^p) = \Delta\Sigma_{13} - \mathbb{C} : \left[ \mathbf{E}_{13} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{13} \right] \\ F(x^6) = \Delta\Sigma_{23} - \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{23} - \mathbf{E}_{23}^p) = \Delta\Sigma_{23} - \mathbb{C} : \left[ \mathbf{E}_{23} - \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{23} \right] \\ F(x^7) = \Delta f - (1 - f)\dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{ii} \\ F(x^8) = \Delta\bar{\sigma} - \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial E_{eq}^p} \Delta E_{eq}^p \\ F(x^9) = \Delta S - \frac{3}{2}h_1\dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)'_{zz} - h_2\dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \right)_{ii} \\ F(x^{10}) = \Phi(\dot{\lambda}) \end{array} \right. \quad (4.50)$$

La contrainte  $\Sigma$  et les variables d'état  $f$ ,  $\bar{\sigma}$ , et  $S$  seront actualisées, une fois ce système d'équations différentielles résolu.

#### – correction plastique du modèle de coalescence des cavités

Le schéma d'intégration d'Aravas [1] est considéré pour le calcul de la correction plastique du modèle de coalescence de Thomason. D'après ce schéma d'intégration, la contrainte et l'incrément de la déformation sont décomposés en leur partie sphérique et leur partie déviatorique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \Sigma_m \mathbf{1} + \frac{2}{3}\Sigma_{eq}\mathbf{N} \\ \Delta\mathbf{E}^p = \frac{1}{3}\Delta E_v^p \mathbf{1} + \Delta E_{eq}^p \mathbf{N} \end{array} \right. \quad (4.51)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta E_v^p = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_m} \right) \\ \Delta E_{eq}^p = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{eq}} \right) \end{array} \right. \quad (4.52)$$

où  $\mathbf{N}$  est un vecteur normal unitaire défini par  $\mathbf{N} = 3\Sigma'/(2\Sigma_{eq})$ . Une relation peut être obtenue à partir du système d'équations (4.52) en éliminant  $\dot{\lambda}$  :

$$\Delta E_v^p \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} - \Delta E_{eq}^p \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_m} = 0 \quad (4.53)$$

En projetant l'équation (4.47) sur  $\mathbf{1}$  et  $\mathbf{N}$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \Sigma_m = \Sigma_m^{pred} - K \Delta E_v^p \\ \Sigma_{eq} = \Sigma_{eq}^{pred} - 3G \Delta E_{eq}^p \end{cases} \quad (4.54)$$

Ce qui permet d'aboutir alors à un système d'équations sous la forme suivante :

$$\Phi(\Sigma_m, \Sigma_{eq}, \mathbf{H}) = 0 \quad (4.55)$$

$$\Delta E_v^p \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} - \Delta E_{eq}^p \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_m} = 0 \quad (4.56)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = F_{\mathbf{H}}(\Delta E_v^p, \Delta E_{eq}^p, \Sigma_m, \Sigma_{eq}, \mathbf{H}) \quad (4.57)$$

où  $\mathbf{H}$  est un vecteur contenant les variables d'état.

Nous résolvons d'abord le système d'équations constitué de (4.55) et (4.56) afin d'obtenir les valeurs de  $\Delta E_v^p$  et  $\Delta E_{eq}^p$ . Puis les incréments des variables d'état sont déterminés à partir de (4.57), qui peut s'écrire pour le modèle de Thomason comme :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} \dot{\chi} \\ \dot{\chi} = \frac{3}{4} \frac{\lambda}{W} \left( \frac{3\gamma}{\chi^2} - 1 \right) E_{eq}^p + \frac{\chi}{2\gamma} \dot{\gamma} \\ \dot{W} = \frac{9}{4} \frac{\lambda}{\chi} \left( 1 - \frac{\gamma}{\chi^2} \right) E_{eq}^p - \frac{W}{2\gamma} \dot{\gamma} \\ \dot{f} = (1 - f) \dot{E}_v^p \\ \dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \bar{\varepsilon}^p \end{cases} \quad (4.58)$$

#### 4.4.2 Opérateur tangent consistant

Concernant l'opérateur tangent consistant  $\mathbb{K}_{cons}$ , un même processus de calcul est considérée pour le modèle de croissance des cavités et celui de la coalescence. En écrivant la condition de consistance  $\dot{\Phi} = 0$ , on obtient l'expression du multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$  que l'on peut mettre sous la forme :

$$\Delta\lambda = \mathbf{B} : \Delta\mathbf{E} \quad (4.59)$$

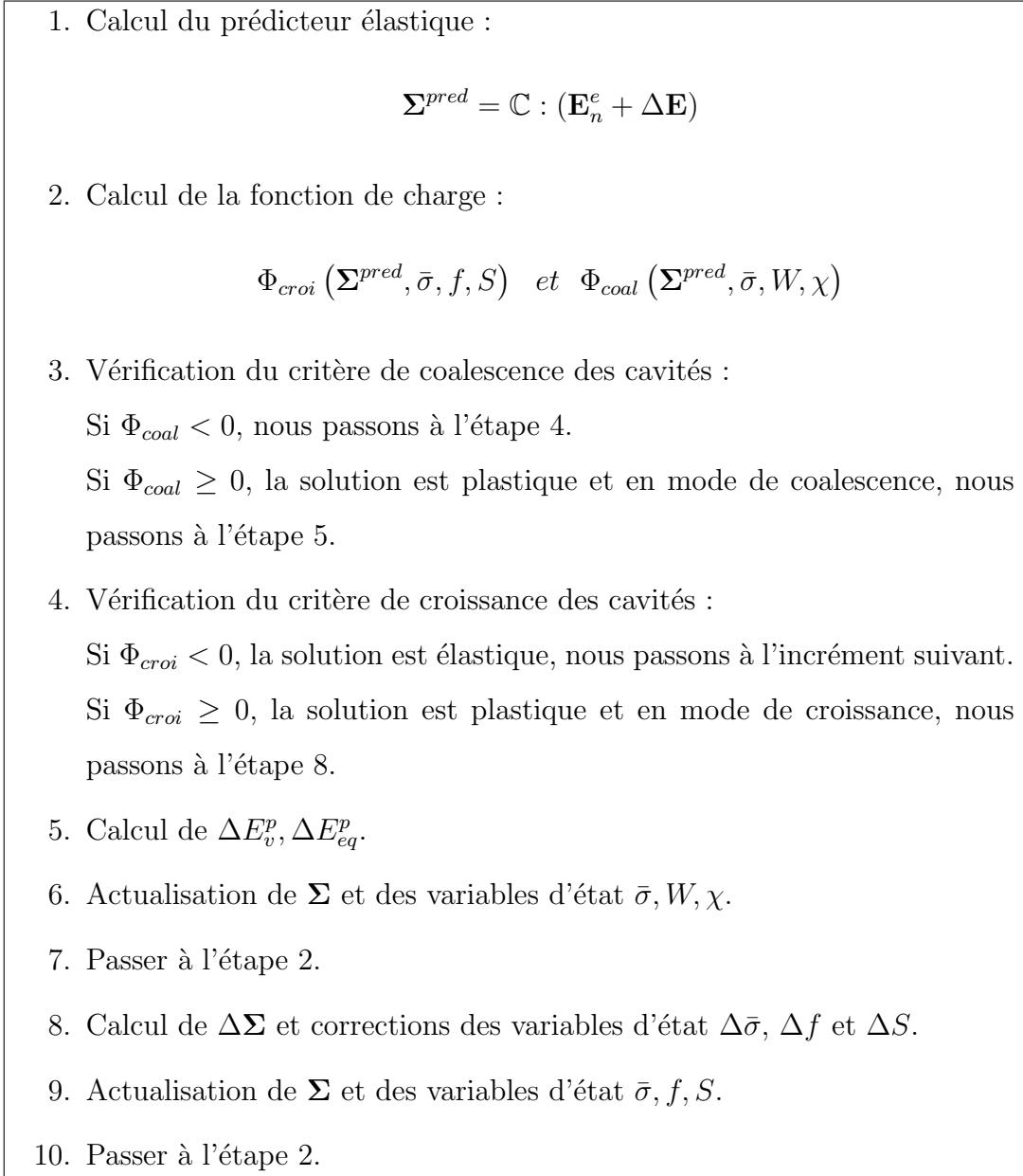


FIGURE 4.6: Algorithme d'implantation du modèle MCK anisotrope

Les expressions de  $\mathbf{B}$  pour le modèle de croissance des cavités et le modèle de coalescence sont données dans l'annexe C.2. En définitive,  $\Delta \Sigma$  peut s'exprimer en fonction de  $\Delta \mathbf{E}$  sous la forme :

$$\Delta \Sigma = \mathbb{C} : \left( \Delta \mathbf{E} - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \right) = \left[ \mathbb{C} - \left( \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \right) \otimes \mathbf{B} \right] : \Delta \mathbf{E} \quad (4.60)$$

Ce qui conduit à l'opérateur tangent consistant :

$$\mathbb{K}_{cons} = \mathbb{C} - \left( \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}} \right) \otimes \mathbf{B} \quad (4.61)$$

Les étapes principales de l'algorithme sont résumées sur la figure 4.6.

## 4.5 Application numérique à la striction d'une éprouvette lisse

Nous présentons ici l'étude du comportement et de la rupture de l'éprouvette cylindrique lisse (cf. chapitre 2) à l'aide du modèle MCK anisotrope. Comme la traction de l'éprouvette lisse est un essai avec une triaxialité des contraintes relativement faibles dans le centre de la section, les prédictions du modèle MCK anisotrope seront d'abord comparées à ceux prédits par le modèle GLD et son extension avec l'introduction du paramètre  $q$  (4.12). Par la suite, les différences entre les résultats prédits par cette classe de modèles prenant en compte l'effet de la forme de cavité et ceux fournis par les modèles isotropes (modèle MCK isotrope, modèle de Gurson). Précisons que pour l'ensemble de ces comparaisons les cavités seront prises initialement sphériques.

### 4.5.1 Données pour la simulation

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier ayant un module d'Young  $E = 203GPa$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . L'écroissage isotrope de la matrice est modélisé avec une loi de type puissance utilisée par Pardoën et Hutchinson [56] :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \left(1 + \frac{E\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_0}\right)^n \quad (4.62)$$

avec le coefficient d'écroissage  $n = 0.1$  et la limite d'élasticité du matériau  $\sigma_0 = 400MPa$ . La porosité initiale  $f_0$  est prise égale à 0.1%. Comme précédemment mentionné, la forme initiale des cavités est considérée sphérique ( $W_0 = 1$ ). Les principaux paramètres du matériau sont donnés dans le tableau 4.1. En raison de l'axisymétrie, un quart de l'éprouvette a été modélisé en utilisant 330 éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR). Le maillage adopté est montré sur le figure 4.7. Le rapport entre la demi-hauteur  $L_0$  et le rayon  $R_0$  est pris égal à 4. Un déplacement uniforme vertical est imposé sur la face supérieure, les noeuds situés au plan de symétrie étant bloqués axialement.

Cet exemple est analysé en grande déformation en utilisant l'option NLGEOM dans ABAQUS. Une extension en grande déformation du programme UMAT a été effectuée en ajoutant

$f_0$	$W_0$	$\lambda_0$	$E(Pa)$	$\nu$	$\sigma_0(Pa)$
0.001	1	1	$2.03 \times 10^{11}$	0.3	$4 \times 10^8$

TABLE 4.1: Valeurs des principaux paramètres utilisés pour la modélisation de l'éprouvette lisse

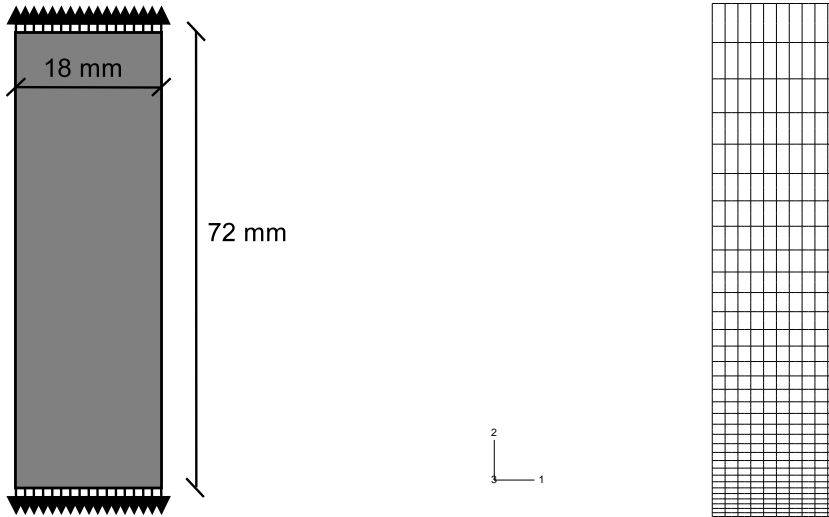


FIGURE 4.7: Profil géométrique et maillage de l'éprouvette axisymétrique lisse

une routine utilisateur ROTSIG pour la rotation des tenseurs déformations élastique  $E^e$  et plastique  $E^p$ .

### 4.5.2 Discussion des résultats

La figure 4.8 présente les prédictions de la réponse globale de l'éprouvette (contrainte nominale ( $F/S_0$ ) en fonction de la réduction de rayon ( $\Delta R/R_0$ )) par les modèles MCK anisotrope, GLD et son extension.

Pour cet exemple, comme pour les prédictions des modèles MCK isotrope et de Gurson (voir chapitre 2), les courbes obtenues par les trois modèles sont quasi identiques sur une grande partie. La valeur de la contrainte nominale  $F/S_0$  augmente et atteint un maximum puis descend dans la phase de striction produisant une diminution de la section du col d'éprouvette. Cette chute s'accroît à la fin de l'essai en raison de la coalescence de certaines



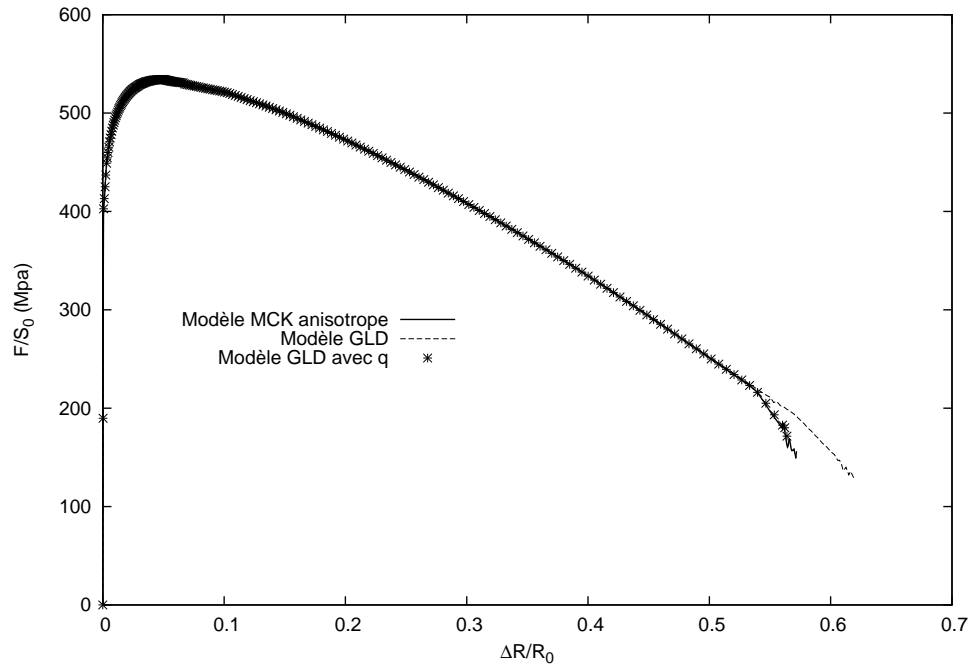


FIGURE 4.8: Comparaison calculs numériques - courbes du modèle MCK anisotrope, modèle GLD et le modèle GLD avec extension

cavités.

Avant d'arriver à l'étape de la coalescence des cavités les trois modèles prédisent les mêmes résultats. Des différences apparaissent entre les deux types de modèles à partir du début de la phase de coalescence. Les résultats prédits par le modèle MCK anisotrope recouvrent presque la prédiction de l'extension du modèle GLD, tandis que la courbe calculée par le modèle GLD standard présente une différence par rapport aux deux autres courbes. Le modèle MCK anisotrope et l'extension du modèle GLD prédisent une coalescence plus tôt que le modèle GLD.

Afin d'interpréter les différences entre ces trois modèles sur le comportement global de l'éprouvette, des analyses locales sont effectuées au centre de la section qui concentre une grande part de la déformation. Les évolutions de porosité  $f$  et du paramètre de forme  $W$  au centre de la section sont présentées sur la figure 4.9 et 4.10 respectivement.

Nous observons que les niveaux de porosité prédits par ces trois modèles sont relativement différents. Les évolutions de porosité des modèles MCK anisotrope et l'extension de GLD sont proches. Ces deux courbes croissent plus rapidement que celle du modèle GLD standard. Ceci conduit à une entrée dans la phase de coalescence plus tôt prédite par les modèles MCK

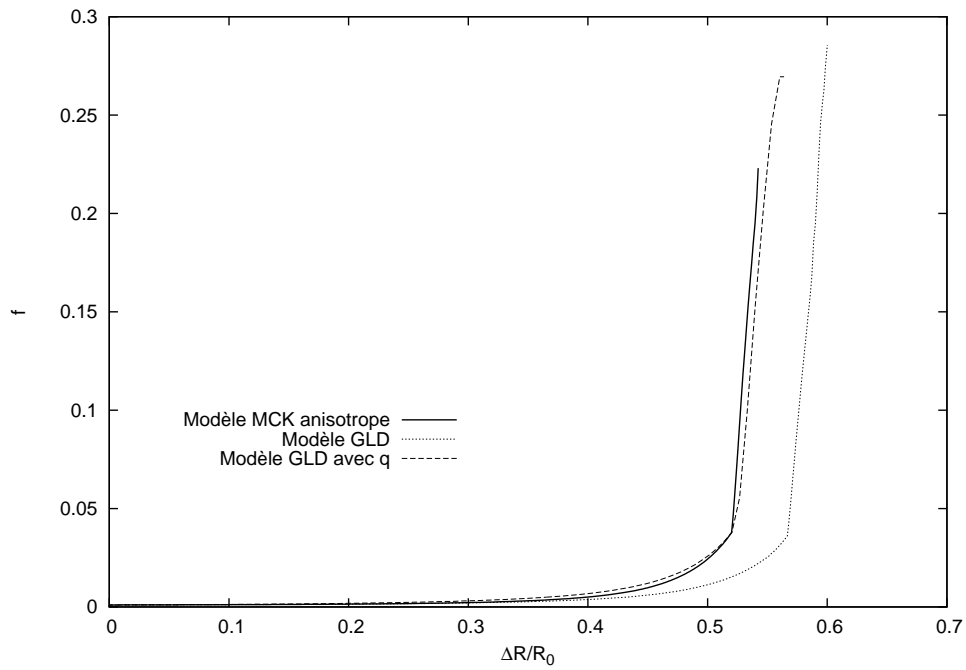


FIGURE 4.9: Evolution de porosité au centre de l'éprouvette

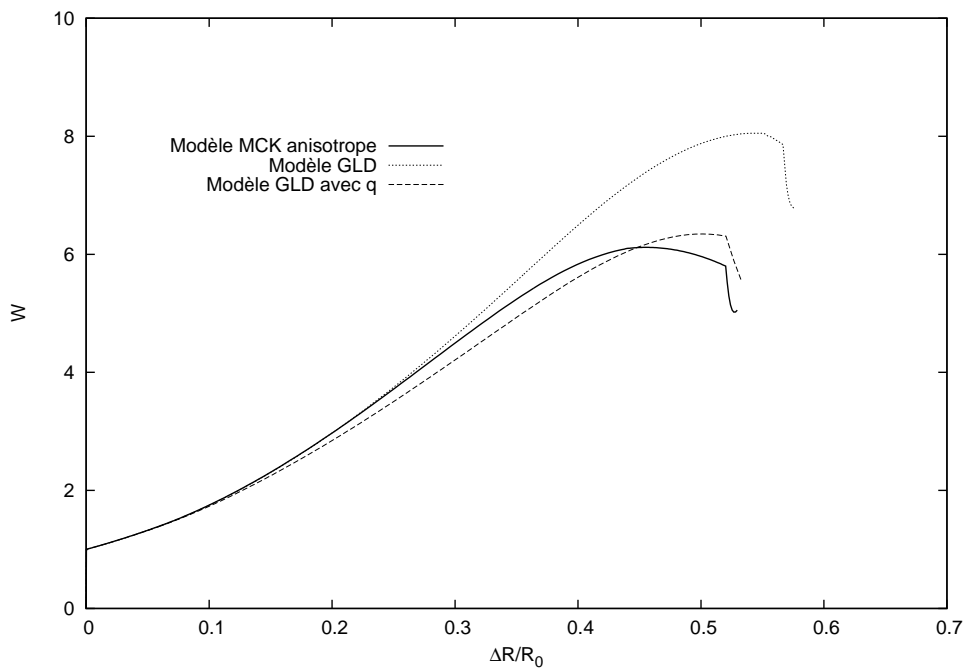


FIGURE 4.10: Evolution du paramètre de la forme de cavité  $W$  au centre de l'éprouvette

anisotrope et l'extension de GLD que celle incorporation de  $q$ .

Ces observations présentent des similitudes avec celles faites lors de la comparaison au chapitre 2 des modèles MCK isotrope, de Gurson et de GTN (Gurson modifié).

Concernant les évolutions du paramètre de forme  $W$ , nous observons que les valeurs de  $W$  prédites par ces trois modèles ont la même tendance :  $W$  augmente à partir de la valeur initiale 1 jusqu'à une valeur maximale. Puis la courbe commence à descendre et arrive à la fin avec une chute brutale qui correspond à la phase de la coalescence. Ceci indique clairement que les cavités initialement sphérique prennent une forme allongée au cours de la déformation de l'éprouvette. La tendance à s'allonger s'atténue à la fin de l'essai en raison de la coalescence des cavités. La courbe d'évolution de  $W$  prédite par le modèle MCK anisotrope se confond avec celle de l'extension du modèle GLD, tandis que le modèle GLD présente une certaine différence avec les deux autres modèles. L'évolution de  $W$  prédite par les modèles MCK anisotrope et l'extension de GLD conduit à des valeurs plus faibles que celle du modèle GLD, ceci même avant le début de la coalescence apparaissant d'ailleurs plus tôt pour les deux premiers modèles.

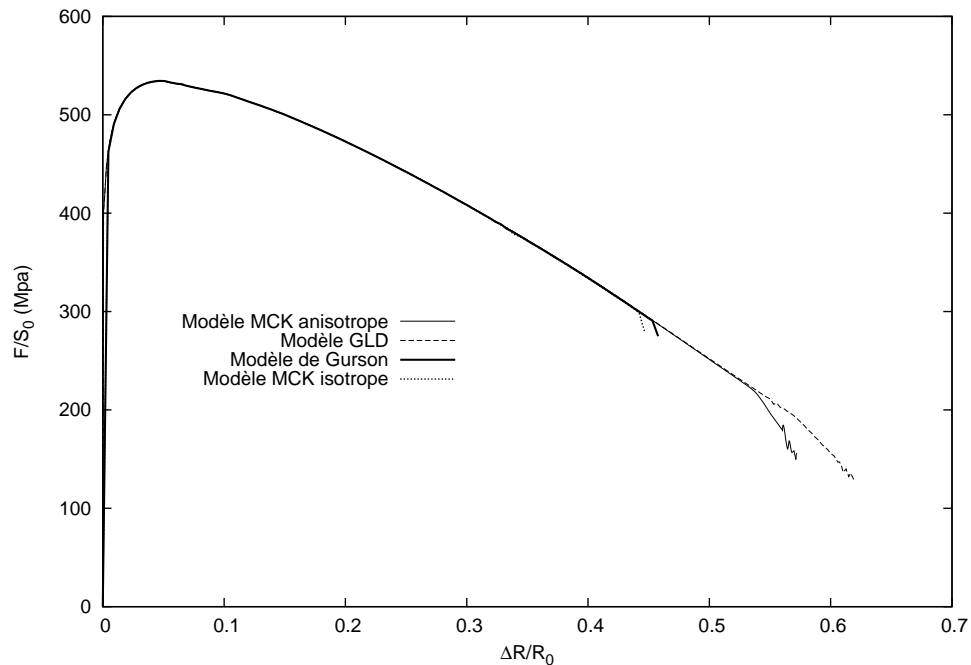


FIGURE 4.11: Comparaison calculs numériques - courbes du modèle MCK anisotrope, modèle GLD, modèle MCK isotrope et modèle de Gurson

En utilisant le modèle coalescence de Thomason pour des cavités sphériques (voir section 4.3.4), cet exemple a été aussi modélisé avec les modèles MCK isotrope et de Gurson, comme des cas particuliers des modèles MCK anisotrope et GLD pour la cavité sphérique respectivement si l'on impose qu'il n'y a pas d'évolution de forme des cavités. La figure 4.11 présente les évolutions de la contrainte nominale ( $F/S_0$ ) en fonction de la réduction de rayon ( $\Delta R/R_0$ ) prédites par les modèles MCK anisotrope et isotrope, les modèles GLD et Gurson.

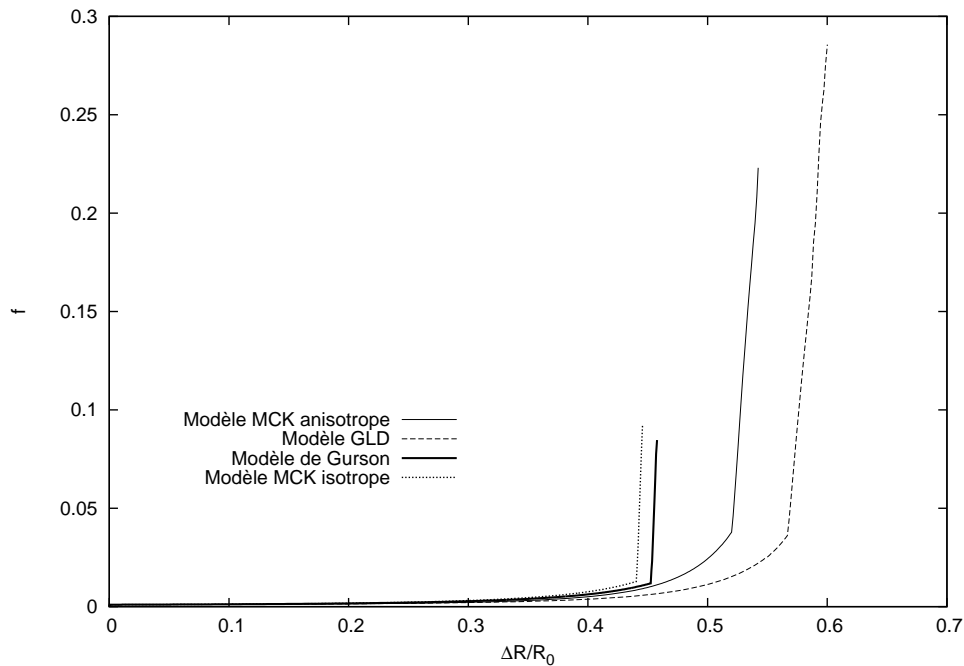


FIGURE 4.12: Evolution de porosité au centre de l'éprouvette

De façon un peu surprenante, ces quatre modèles prédisent des résultats similaires avant l'étape de la coalescence. On note toutefois un grand décalage de la prédiction de coalescence entre les modèles des cavités sphériques (le modèle MCK isotrope et le modèle de Gurson) et les modèles qui prennent en compte l'effet de la forme de cavité (le modèle MCK anisotrope et le modèle GLD). Le modèle MCK isotrope et le modèle de Gurson prédisent une coalescence beaucoup plus précoce par rapport à leurs extensions anisotropes qui prennent en compte l'effet de forme de cavités. Afin d'expliquer ces différences, nous avons à nouveau procédé à des analyses effectuées au centre de la section. La figure 4.12 montre que, au centre de la section, les valeurs au moment du début de coalescence sont aux alentours de 1% pour les

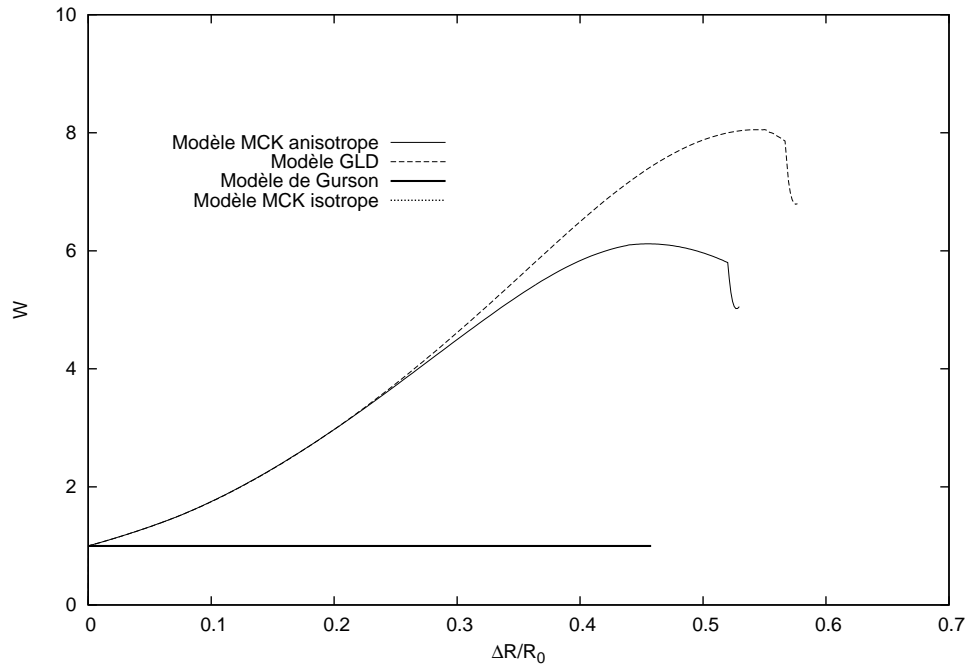


FIGURE 4.13: Evolution du paramètre de la forme de cavité  $W$  au centre de l'éprouvette

modèles isotropes, tandis que ces valeurs pour leurs extensions peuvent atteindre près de 4%. Ceci est dû aux prédictions des allongements des cavités par les modèles qui prennent en compte l'effet de forme de cavité (voir figure 4.13). A même niveau de porosité, les distances entre les cavités sphériques sont plus grandes par rapport à celles des cavités allongées. En conséquence, pour atteindre un même seuil de distance entre les cavités la valeur de la porosité pour les cavités sphériques doit être plus faible que celle pour les cavités allongées.

## 4.6 Simulation d'une éprouvette axisymétrique entaillée

Afin de poursuivre l'évaluation du modèle MCK anisotrope pour différentes formes de cavité, nous présentons dans cette section la modélisation d'une éprouvette axisymétrique entaillée de type AE4 avec différentes formes initiales de cavités (allongée, sphérique et aplatie). Cet exemple a été choisi en raison du fait que les éprouvettes axisymétriques entaillées sont couramment utilisées lors de l'étude expérimentale de la rupture ductile des métaux ([52], [10], [9]) dans le but de déterminer leurs caractéristiques à rupture. Dans ce qui suit, nous comparons les résultats prédits par les modèles MCK anisotrope et GLD.

### 4.6.1 Description des données pour la simulation

L'éprouvette a une longueur initiale de  $l_e = 36mm$  et un rayon initial de  $R_e = 9mm$ . Le rayon de l'entaille  $r$  est pris égal à  $4mm$  et celui du col de l'éprouvette  $R_0$  est donc égal à  $5mm$ .

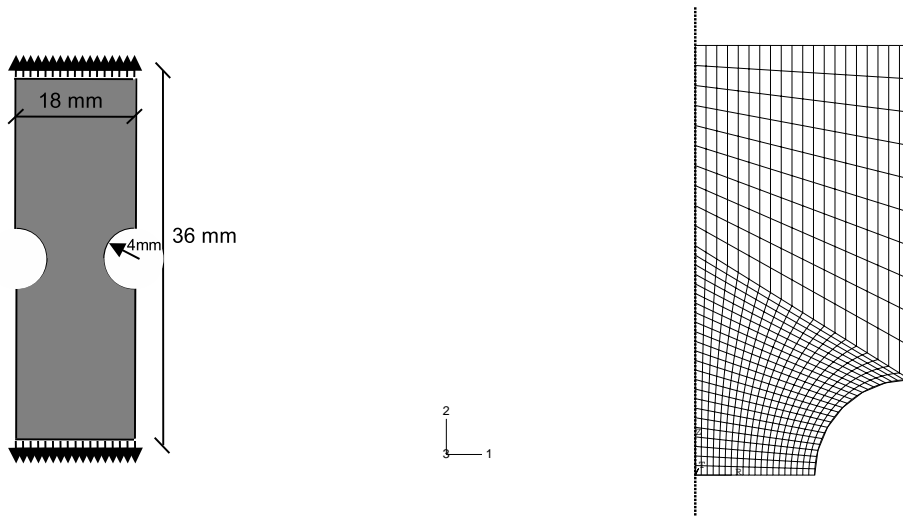


FIGURE 4.14: Profil géométrique et maillage de l'éprouvette entaillée AE4

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier de un module  $E = 203GPa$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . L'écroissage isotrope de la matrice est considéré avec la même loi de puissance utilisée pour l'éprouvette lisse (4.62). Trois valeurs initiales du paramètre de forme  $W$  (5, 1, 1/5) sont considérées. Les principaux paramètres matériau sont indiqués dans le tableau 4.2.

$f_0$	$W_0$	$\lambda_0$	$E(Pa)$	$\nu$	$\sigma_0(Pa)$
$1.75 \times 10^{-4}$	5, 1, 1/5	1	$2.03 \times 10^{11}$	0.3	$4 \times 10^8$

TABLE 4.2: Valeurs des principaux paramètres utilisés pour la modélisation de l'éprouvette entaillée AE4

L'éprouvette est soumise à un chargement consistant en un déplacement uniforme verti-

cal imposé sur la face supérieure, les noeuds situés dans le plan de symétrie étant bloqués axialement. Pour la même raison que dans l'exemple précédent, une analyse de grande déformation a été considérée pour cette simulation.

Le maillage adopté est présenté sur la figure 4.14. Il est composé de 680 éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR).

### 4.6.2 Discussion des résultats

Les prédictions de la contrainte nominale ( $F/S_0$ ) en fonction de la réduction de rayon ( $\Delta R/R_0$ ) par les modèles MCK anisotrope et GLD sont présentées sur les figures 4.15, 4.16 et 4.17 respectivement pour les valeurs initiales du paramètre de forme  $W_0 = 5$ , 1 et  $1/5$ . Comme pour l'éprouvette lisse, les différences des prédictions du modèle MCK anisotrope et du modèle GLD n'apparaissent qu'à partir du début de la coalescence des cavités. Le modèle MCK anisotrope prédit une coalescence précoce par rapport au modèle GLD pour  $W_0 = 5$  et 1, tandis qu'une grande proximité entre les deux courbes est notée dans le cas de la cavité initialement aplatie ( $W_0 = 1/5$ ). On note aussi que les différences entre les résultats prédits par ces deux modèles s'atténuent pour la cavité initialement aplatie.

Comme auparavant, des analyses locales au centre de la section sont effectuées sur les évolutions de la porosité  $f$  et du paramètre de forme de la cavité  $W$  (voir figures 4.18, 4.19 et 4.20).

Pour les évolutions de la porosité, on note que les différences entre les prédictions du modèle MCK anisotrope et du modèle GLD correspondent bien aux écarts notés pour le comportement global. Les écarts des courbes prédites par ces deux modèles diminuent pour la cavité initialement aplatie.

Concernant le paramètre de la forme de cavité  $W$ , nous observons que les courbes pour  $W_0 = 1$  et  $W_0 = 1/5$  ont tous tendance à augmenter jusqu'à une valeur maximale et descendre pendant la phase de la coalescence des cavités tandis que la valeur de  $W$  diminue depuis le début pour  $W_0 = 5$ . Ceci indique que les cavités initialement sphériques ou aplaties s'allongent au cours du chargement jusqu'à la coalescence, tandis que les cavités initialement allongées ont tendance à s'aplatir avec une accélération de cet aplatissement dans l'étape de croissance. On remarque surtout que, dans le cas de  $W_0 = 1/5$ , la valeur de  $W$  atteint 1.5 à la fin de l'essai, ce qui correspond à un changement de forme significatif.

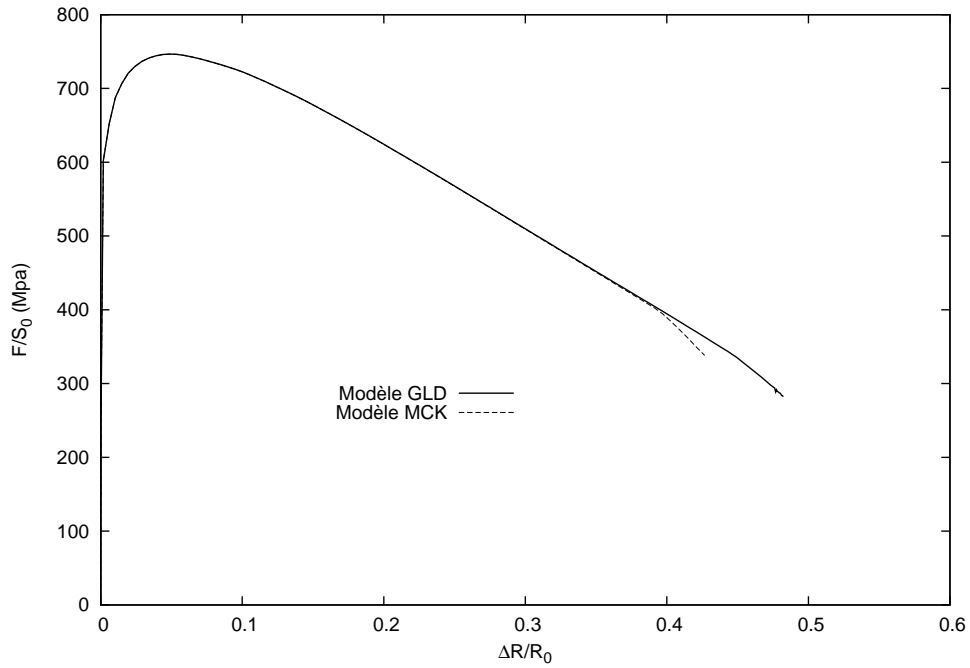


FIGURE 4.15: Comparaison calculs numériques - courbes du modèle MCK anisotrope et du modèle GLD avec  $W_0 = 5$

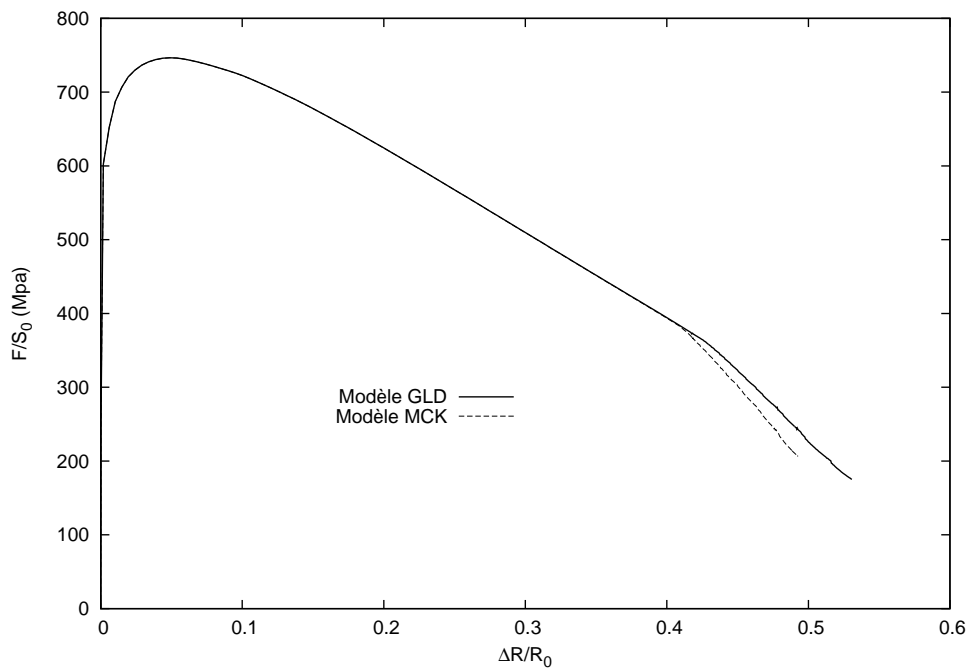


FIGURE 4.16: Comparaison calculs numériques - courbes du modèle MCK anisotrope et du modèle GLD avec  $W_0 = 1$



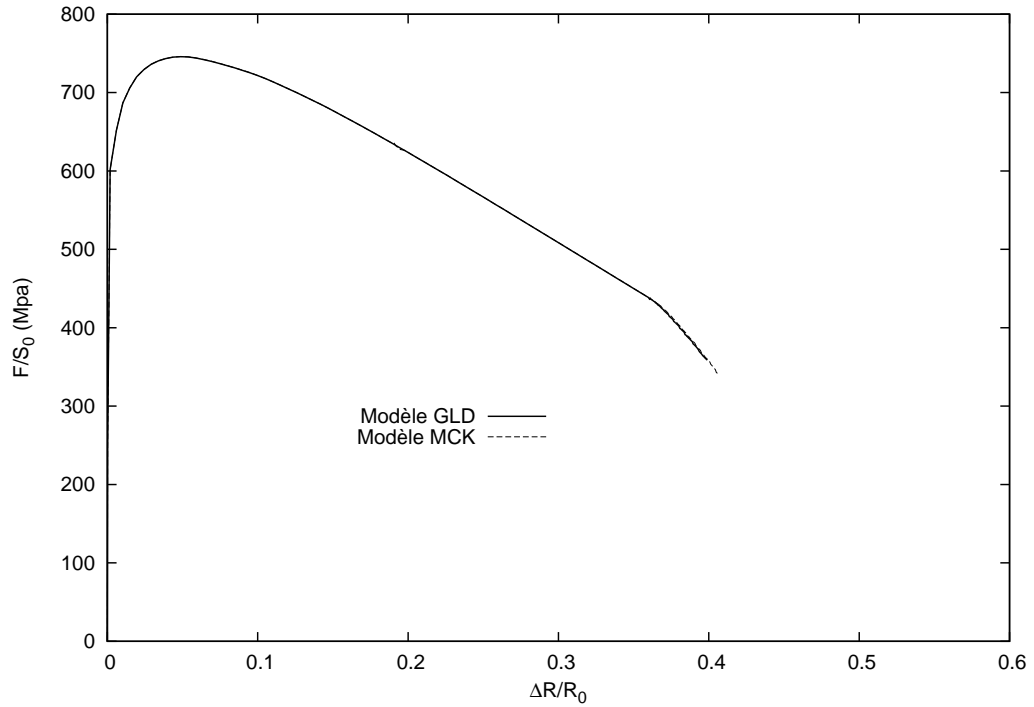


FIGURE 4.17: Comparaison calculs numériques - courbes du modèle MCK anisotrope et du modèle GLD avec  $W_0 = 1/5$

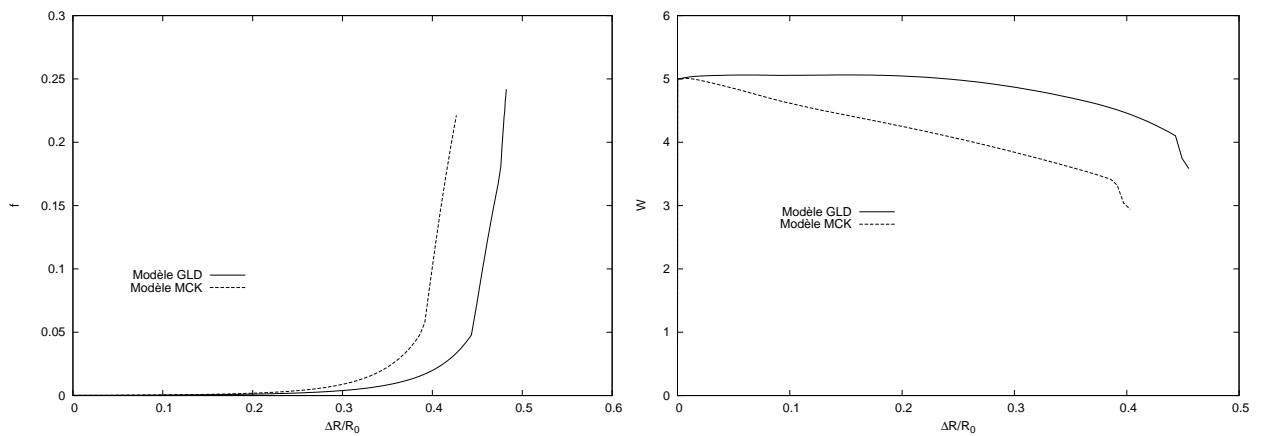


FIGURE 4.18: Evolution de porosité  $f$  et du paramètre de la forme de cavité  $W$  pour  $W_0 = 5$

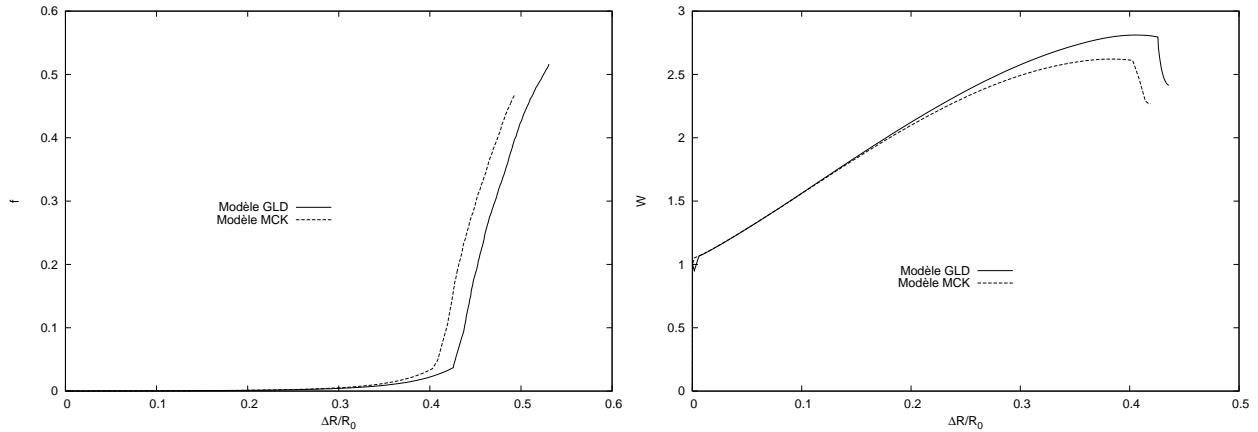


FIGURE 4.19: Evolution de porosité  $f$  et du paramètre de la forme de cavité  $W$  pour  $W_0 = 1$

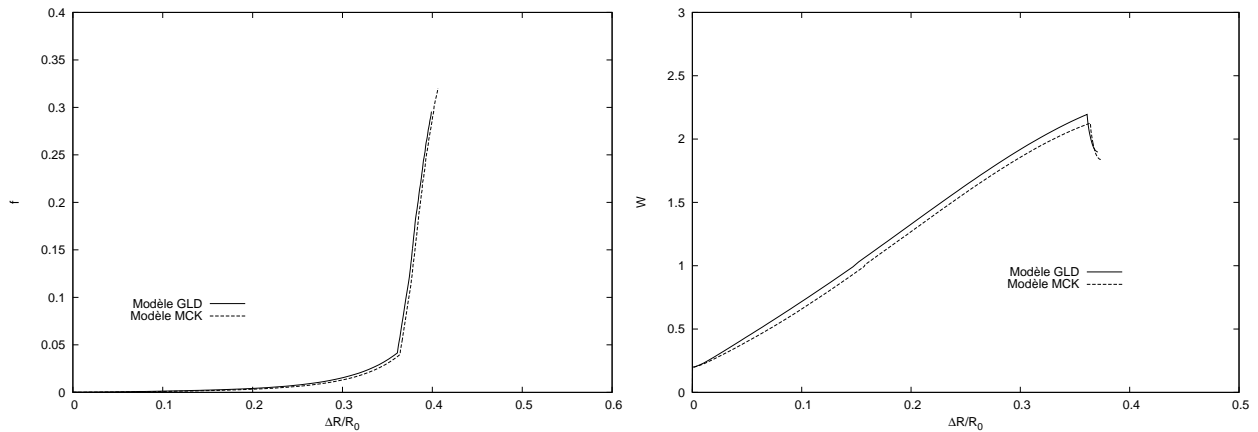


FIGURE 4.20: Evolution de porosité  $f$  et du paramètre de la forme de cavité  $W$  pour  $W_0 = 1/5$

## 4.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la formulation, l'implantation numérique et l'application d'un modèle d'endommagement basé sur le critère de plasticité MCK anisotrope permettant de prendre en compte l'effet de forme des cavités. Les bonnes performances du modèle sont analysées à travers de l'étude d'une éprouvette lisse (comparaison aux prédictions du modèle GLD et GLD modifié). Des comparaisons avec le modèle GLD pour différentes formes de cavités, ont été effectuées à l'étude numérique d'une éprouvette axisymétrique entaillée de type AE4. Pour de faibles triaxialités des contraintes, une meilleure performance du modèle MCK anisotrope est montrée par rapport au modèle GLD. Une proximité entre le modèle MCK anisotrope et le modèle GLD a été notée pour le cas de la cavité aplatie

étudiée ( $W = 1/5$ ). La confirmation de ces tendances pourra se faire en considérant d'autres sollicitations impliquant notamment du cisaillement.



# Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été consacré à la modélisation théorique et numérique des phénomènes d'endommagement qui surviennent dans les matériaux poreux ductiles incluant les géomatériaux.

Le premier objectif visé au départ était de formuler des modèles d'endommagement complets basés sur une classe de critères macroscopiques des milieux poreux ductiles récemment développés par Monchiet et al. [49], et de les évaluer numériquement après implantation dans un code de calcul par éléments finis. Cet objectif nous semble atteint, ce qui a permis de réaliser diverses modélisations de réponses d'éprouvettes (lisse ou entaillée) de métaux ductile. Nous disposons maintenant d'outils d'analyse numérique pour des métaux poreux ductiles. Cette étude a fourni l'occasion de considérer d'autres critères plus spécifiquement adaptés aux géomatériaux (exemple de la craie de Lixhe).

Pour mener à bien ce travail, nous avons d'abord effectué au premier chapitre une analyse bibliographique qui a permis de synthétiser des approches existantes en manière d'endommagement de milieux poreux ductiles. Les principaux mécanismes physiques qui gouvernent la rupture ductile des matériaux élastoplastique endommageables y ont été présentés. Différentes approches décrivant la loi de comportement de la rupture ductile y ont été également exposées. C'est le cas particulier des approches micromécaniques couplés de "type Gurson" [35] [82], que nous avons choisies de privilégier pour notre étude. Une attention particulière a été portée sur les travaux de Monchiet et al. [49] qui ont ensuite fait l'objet des second et quatrième chapitre.

S'agissant précisément de ces approches de type Gurson, le choix des critères de Monchiet et al. [49] est motivé par le fait que ce critère améliore celui de Gurson notamment

pour les faibles taux de triaxialités des contraintes tout en préservant la solution exacte du critère de Gurson dans le cas hydrostatique. Nous avons été amenés à effectuer avec succès l'implantation numérique du modèle issu de ce critère dans le code éléments finis ABAQUS. Les modélisations numériques de différentes éprouvettes (lisse ou entaillée) confirment une très bonne performance de ce nouveau modèle, tant au niveau globale que pour l'analyse des évolutions de porosités prédites. La conclusion majeure de ce premier volet numérique de notre travail est que cette performance est similaire à celle du modèle GTN sans introduction ici de façon heuristique de paramètres (tels que  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ).

Afin de modéliser numériquement les comportements des géomatériaux poreux (différents des métaux poreux par la compressibilité plastique de leur matrice), un nouveau modèle basé sur un critère de type Gurson récemment proposé par Guo et al. [34] (dans le cas d'une matrice de Drucker-Prager)<sup>3</sup> a été également implanté dans le code ABAQUS. La numérisation puis une application de ce modèle à une craie poreuse est effectuée. Les bonnes performances du modèle développé sur la base du critère de Guo et al. [34] ont été démontrés au travers des comparaisons aux données expérimentales. La concordance entre les prédictions numériques et les données est tout à fait remarquable et confirme l'intérêt de ce modèle pour des applications ultérieures.

Le dernier chapitre a été consacré à la formulation et l'étude d'un modèle d'endommagement ductile prenant en compte la forme éventuellement sphéroïdale des cavités. Ce modèle anisotrope porte également sur la version anisotrope du critère proposé par Monchiet et al.[49], c'est à dire à nouveau pour matériaux à matrice de von Mises. Nous avons réussi à implanter numériquement et évaluer ce nouveau modèle à travers l'étude des différents essais sur éprouvettes (lisse ou entaillée). Les résultats numériques sont discutés en les comparant aux ceux d'autres modèles existants. Leur bonne qualité a été démontrée.

De façon générale, les résultats obtenus dans le cadre de ce travail de thèse sont fort encourageants et incitent à la poursuite des travaux dans plusieurs directions dont les suivantes :

- la poursuite des applications des modèles d'endommagement ductile isotrope des géo-

---

3. *Nous avons proposé des validations de critère pour différents géomatériaux poreux*

---

matériaux et leur extension à la prise en compte des couplages poromécaniques (milieux saturés)

- l’extension non locale ou à gradient des modèles d’endommagement ductile étudiés. Ce point est de grande importance en raison du radoucissement induit par l’endommagement et dont les conséquences en terme de sensibilité aux maillages des résultats numériques sont bien connues (cf. par exemple Pijaudier-Cabot et Bazant [62] [6] et Enakoutsa et al. [23] ou Bargellini et al. [3] pour l’endommagement ductile). Cette extension peut être réalisée, par exemple en délocalisant les variables d’endommagement.
- à plus ou moins long terme, l’extension du modèle anisotrope aux milieux poreux/fissurés saturés, les fissures de type ”penny-shaped” étant alors traitées comme des cavités sphéroïdales dans très faibles rapports d’aspect.





# Bibliographie

- [1] N. Aravas. On the numerical integration of a class of pressure-dependant plasticity models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :1395–1416, 1987.
- [2] M. Aubertin, L. Li, R. Simon, and B. Bussière. Un critère général de plasticité et de rupture pour les matériaux à porosité variable. *Rapport interne de Université Polytechnique de Montréal*, 2003.
- [3] R. Bargellini and J. Besson. A non-local finite element based on volumetric strain gradient : Application to ductile fracture. *Computational Materials Science*, 45(3) :762–767, 2009.
- [4] J.F. Barthélémy. *Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux*. Thèse de doctorat, Ecole nationale des ponts et chaussées, France, 2005.
- [5] J.F. Barthélémy and L. Dormieux. Détermination du critère de rupture macroscopique d’un milieu poreux par homogénéisation non linéaire. *C. R. Mécanique*, 331 :271–276, 2002.
- [6] Z P. Bazant and G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of applied mechanics-transactions of the ASME*, 55(2) :287–293, 1988.
- [7] A.A. Benzerga. *Rupture ductile des tôles anisotropes : simulation de la propagation longitudinale dans un tube pressurisé*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 2000.
- [8] A.A. Benzerga. Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *Journal of the mechanics and physics of Solids*, 50(6) :1331–1362, 2002.
- [9] A.A. Benzerga, J. Besson, and A. Pineau. Anisotropic ductile fracture, Part I : experiments. *Acta. Materialia*, 52, 2004.

- [10] J. Besson. *Essais mécaniques et lois de comportement*, chapter Eprouvettes axisymétriques entaillées, pages 319–351. Hermes Science, 2001.
- [11] N. Bilger. *Etude micromécanique de l'effet de la présence d'amas d'inclusions sur la transition fragile-ductile d'aciers nucléaires*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, France, 2003.
- [12] M. Bornert and P. Suquet. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, chapter Propriétés non linéaires des composites : approches par les potentiels, pages 45–90. Hermès Science Publications, 2001.
- [13] B. Budiansky and R.J. O'connell. Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, 12(2) :81–97, 1976.
- [14] P. De Buhan and L. Dormieux. On the validity of the effective stress concept for assessing the strength of saturated porous materials : A homogenization approach. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(10) :1649–1667, 1996.
- [15] H.D. Bui, J.B. Leblond, and N. Stalin-Muller. *Handbook of Materials Behavior Models*, chapter Background on Fracture Mechanics, pages 549–557. North-Holland Publ., 2001.
- [16] P. Ponte Castaneda and P. Suquet. Nonlinear composites. *Advances in applied mechanics*, 34 :171–302, 1998.
- [17] J.L. Chaboche, P. Suquet, and J. Besson. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, chapter Endommagement et changement d'échelle, pages 113–141. Hermès Science Publications, 2001.
- [18] J. Chambert. *Analyse et modélisation de la rupture ductile par des modèles micromécaniques fondés sur l'approche locale*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand II, France, 2001.
- [19] C.C. Chu and A. Needleman. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J. Engng. Mater. Technol.*, 102 :249–256, 1980.
- [20] L. Dormieux, D. Kondo, and F.-J. Ulm. *Microporomechanics*. Wiley, 2006.
- [21] D.C. Drucker and W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Q. Appl. Math*, 10 :157–165, 1952.
- [22] K. Enakoutsa. *Modèles non locaux en rupture ductile des métaux*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, France, 2007.

- 
- [23] K. Enakoutsa, J.B. Leblond, and G. Perrin. Numerical implementation and assessment of a phenomenological nonlocal model of ductile rupture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1946–1957, 2007.
- [24] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem. *Proc. R. Soc. Lond., A* 241 :376–396, 1957.
- [25] J.R. Rice et al. Some further results on j integral analysis and estimates. *ASTM STP*, 536 :213–245, 1978.
- [26] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Elasticité et plasticité*. Hermes, 2001.
- [27] M. Garajeu. *Contribution à l'étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renfort*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, France, 1995.
- [28] M. Garajeu and P. Suquet. Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles. *J. Mech. Phys. Solids*, 45(6) :873–902, 1997.
- [29] M. Gologanu. *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, France, 1997.
- [30] M. Gologanu and J.-B. Leblond. Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. In P. Suquet, editor, *Continuum micromechanics*. Springer, 1997.
- [31] M. Gologanu and J.B. Leblond. Approximate models for ductiles metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(11) :1723–1754, 1993.
- [32] M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. Approximate models for ductiles metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *J. Energ. Mat. Tech*, 116 :290–297, 1994.
- [33] A.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, A,221 :163–197, 1920.
- [34] T.F. Guo, J. Faleskog, and C.F. Shih. Continuum modeling of a porous solid with pressure-sensitive dilatant matrix. *J. Mech. Phys. Solids*, 56 :2188–2212, 2008.
- [35] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I - Yield criterion and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mat. Technol.*, 99 :2–15, 1977.

- [36] S. Homand. *Comportement mécanique d'une craie très poreuse avec prise en compte de l'effet de l'eau : de l'expérience à la simulation*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, France, 2000.
- [37] S. Homand and J.F. Shao. Mechanical behavior of a porous chalk and water/chalk interaction, Part I : Experimental study. *Oil and Gas Science and Technology*, 55(6) :591–598, 2000.
- [38] MI. Idiart, K. Danas, and P. Ponte Castaneda. Second order theory for nonlinear composites and applications to isotropic constituents. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(10) :575–581, 2006.
- [39] J. Jackiewicz. Calibration and evaluation of a combined fracture model of microvoid growth that may compete with shear in the polycrystalline microstructure by means of evolutionary algorithms. *Computational Materials Science*, 45 :133–149, 2009.
- [40] J. Koplik and A. Needleman. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *Int. J. Solids Structures*, 24 :835–853, 1988.
- [41] J.B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès Science Publications, 2003.
- [42] B.I. Lee and M.E. Mear. Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :1805–1837, 1992.
- [43] J. Lemaitre. A continuum damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107 :83–89, 1985.
- [44] L. Li, M. Aubertin, R. Simon, and B. Boussière. Formulation and application of a general inelastic locus for geomaterials with variable porosity. *Can. Geotech. J.*, 42 :601–623, 2009.
- [45] D. Lydzba, S. Pietruszczak, and J.F. Shao. Intergranular pressure solution in chalk : a multiscale approach. *Computers and Geotechnics*, 34 :291–305, 2007.
- [46] F.A. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :363–, 1968.
- [47] J. Michel and P. Suquet. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :783–812, 1992.

- 
- [48] V. Monchiet. *Contributions à la modélisation micromécanique de l'endommagement et de la fatigue des métaux ductiles*. Thèse de doctorat, Université des sciences et Technologies de Lille, France, 2006.
- [49] V. Monchiet, E. Charkaluk, and D. Kondo. An improvement of Gurson-type models of porous materials by using Eshelby-like trial velocity fields. *C.R.Mecanique*, 335 :32–41, 2007.
- [50] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids, 2nd Edition*. Martinus Nijhoff Publ., 1987.
- [51] K. Nahshon and J.W. Hutchinson. Modification of the gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27 :1–17, 2008.
- [52] A. Needlaman and V. Tvergaard. *Considère Memorial Symposium*, chapter Material strain-rate sensitivity in round tensile bar, pages 251–262. Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1985.
- [53] K.L. Nielsen and V. Tvergaard. Effect of a shear modified gurson model on damage development in a fsw tensile specimen. *Int. J. Solids Structures*, 46 :587–601, 2009.
- [54] M. Ould Ouali. *Approche micromécanique de la rupture ductile dans les procédés de mise en forme des matériaux. Prise en compte de l'effet de forme des cavités*. Thèse de doctorat, Université de Reims, France, 2007.
- [55] M. Ould Ouali and L. Siad. *9th European Mechanics of Material Conference, Local approach to fracture*, chapter Numerical study of softening due to second population of cavities in metals, pages 453–458. Presse de l'Ecole des Mines de Paris, 2006.
- [56] T. Pardoen and J.W. Hutchinson. An extended model for void growth and coalescence. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :2467–2512, 2000.
- [57] T. Pardoen and J.W. Hutchinson. Micromechanical-based model for trends in toughness of ductile metals. *Acta Materialia*, 51 :133–148, 2003.
- [58] J. Pastor, Ph. Thoré, and F. Pastor. Limits analysis and numerical modeling of spherically porous solids with Coulomb and Drucker-Prager matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009.
- [59] G. Perrin. *Contribution à l'Etude Théorique et Numérique de la Rupture Ductile des Métaux*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Palaiseau, France, 1992.

- [60] G. Perrin and J. Leblond. Analytic study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension. application to some problems in ductile fracture of metals. *Int. J. Plast.*, 6 :677–699, 1990.
- [61] G. Perrin and J.B. Leblond. Rudnicki and rice’s analysis of strain localization revisited. *Journal of Applied Mechanics*, 60(4) :842–846, 1993.
- [62] G. Pijaudier-Cabot and Z P. Bazant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 113(10) :1512–1533, 1987.
- [63] P. Ponte-Castaneda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [64] S. Renevey. *Approche globale et locale de la rupture dans le domaine de transition fragile-ductile d’un acier faiblement allié*. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, France, 1997.
- [65] J.R. Rice. A path-independent integral and the approximation analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :379–386, 1968.
- [66] J.R. Rice and D.M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress field. *J. Mech. Phys. Solids*, 17 :201–217, 1969.
- [67] R. Risnes, H. Haghghi, R.I. Korsnes, and O. Nativik. Chalk-water interactions with glycol and brines. *Tectonophysics*, 370 :213–226, 2003.
- [68] G. Rousselier. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engng. and Design*, 105 :97–111, 1987.
- [69] G. Rousselier and F. Mudry. Etude de la rupture ductile de l’acier faiblement allié en Mn-Ni-Mo pour cuves de réacteurs à eau ordinaire sous pression, approvisionné sous la forme d’une débouchure de tubulure. *Résultats du programme expérimental, Internal Report, EdF, France*, 1980.
- [70] C. Schroeder. *Du coccolithe au réservoir pétrolier ; approche phénoménologique du comportement mécanique de la craie en vue de sa modélisation à différentes échelles*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 2003.
- [71] C. Schroeder. Mechanical behaviour of partially and multiphase saturated chalks and fluid-skeleton interaction : Main factor of chalk oil reservoirs compaction and related subsidence. *Final report of the EU project (PASACHALK2)*, 2003.

- 
- [72] L. Siad, M. Ould Ouali, and A. Benabbes. Comparison of explicit and implicit finite element simulations of void growth and coalescence in porous ductile materials. *Materials and Design*, 29 :319–329, 2008.
- [73] K. Siruguet and J.B. Leblond. Effect of void locking by inclusions upon the plastic behavior of porous ductile solids - Part I : theoretical modeling and numerical study of void growth. *International Journal of Plasticity*, 20 :225–254, 2004.
- [74] J.M. Siwak. *Comportement et modélisation de la craie*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, France, 1992.
- [75] P. Suquet. On bounds for the overall potential of power law materials containing voids with an arbitrary shape. *Mech. Res. Commun.*, 19 :51–58, 1992.
- [76] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with ponte castañeda’s nonlinear variational procedure. *C. R. Acad. Sci., Série II(320)* :563–571, 1995.
- [77] P.F. Thomason. A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids. *Acta Metallurgica*, 33(6) :1087–1095, 1985.
- [78] P.F. Thomason. *Ductile fracture of Metals*. Pergamon Press, 1990.
- [79] M. Trillat and J. Pastor. Limit analysis and Gurson’s model. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 24 :800–819, 2005.
- [80] V. Tvergaard. Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions. *Int. J. Fracture*, 17 :389–407, 1981.
- [81] V. Tvergaard. Material failure by void coalescence in localized shear bands. *Int. J. Solids Structures*, 18(8) :659–672, 1982.
- [82] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met*, 32 :157–169, 1984.
- [83] P.G. Vincent. *Modélisation micromécanique de la croissance et de la percolation de pores sous pression dans une matrice céramique à haute température*. Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille I, France, 2007.
- [84] P.G. Vincent, Y. Monerie, and P. Suquet. Porous materials with two populations of voids under internal pressure : I. instantaneous constitutive relations. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :480–506, 2009.

- [85] P.G. Vincent, Y. Monerie, and P. Suquet. Porous materials with two populations of voids under internal pressure : II. growth and coalescence of voids. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :507–526, 2009.
- [86] L.J. Walpole. Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Advances in Applied Mechanics*, 21 :169–242, 1981.
- [87] S.Y. Xie. *Contribution à l'étude du comportement mécanique d'une roche poreuse*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, France, 2006.
- [88] S.Y. Xie and J.F. Shao. Elastoplastic deformation of a porous rock and water interaction. *Int. J. Plast.*, 22 :2195–2225, 2006.
- [89] H. Yamamoto. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *International Journal of Fracture*, 14 :347–365, 1978.



# Annexe A

## Annexe au chapitre 2

### A.1 Méthode des éléments finis non linéaires

#### A.1.1 Généralités

Soit un corps en équilibre occupant à un instant  $t \in [0, T]$  un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Il est soumis à des forces volumiques  $\underline{f}$ , des efforts surfaciques  $\underline{F}$  sur la partie  $\partial\Omega_F$  et des déplacements imposés  $\underline{u}^d$  sur la partie  $\partial\Omega_u$  (cf. figure A.1).

La résolution du problème consiste à déterminer, à tout instant  $t$  et en tout point  $\underline{x}$ , le champ des contraintes  $\underline{\Sigma}(\underline{x}, t)$  et des déplacements  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  vérifiant :

- $\underline{\Sigma}$  est statiquement admissible (S.A.) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\underline{\Sigma} + \underline{f} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \underline{\Sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F} & \text{sur } \partial\Omega_F \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

- $\underline{u}$  est cinématiquement admissible (C.A.) :

$$\underline{u} = \underline{u}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad (\text{A.2})$$

- $\underline{\Sigma}$  et  $\underline{E}$  vérifient la loi de comportement.

L'application du théorème des travaux virtuels au système  $\Omega$  permet d'écrire, pour tout champ de déplacement virtuel  $\underline{u}^*$  :

$$\int_{\Omega} \underline{\Sigma} : \underline{E}^*(\underline{u}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \underline{F} \cdot \underline{u}^* d\mathcal{S} \quad (\text{A.3})$$

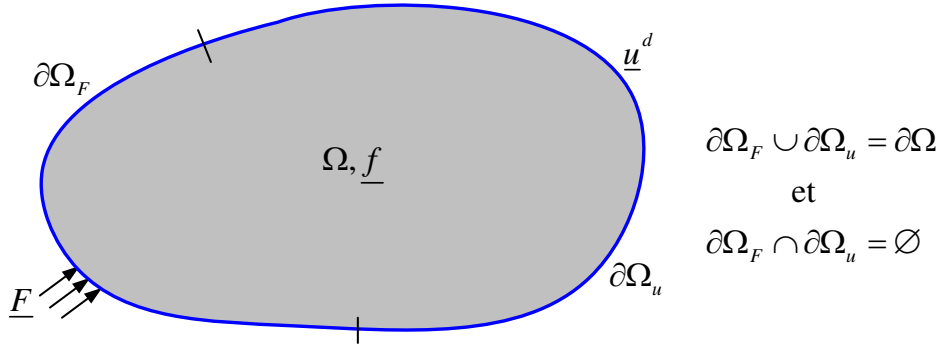


FIGURE A.1: Problème mécanique de référence

Pour le problème non linéaire, on le résout par discrétiser le temps :

$$t_0 = 0, \quad t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_N = T \quad (\text{A.4})$$

Supposons alors connue la solution à l'instant  $t_n$  ; on souhaite la déterminer sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . Une hypothèse classique consiste à considérer que l'histoire des déplacements est linéaire sur l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ , tel que :

$$\underline{u}(\tau) = \frac{t_{n+1} - \tau}{\Delta t} \underline{u}_n + \frac{\tau - t_n}{\Delta t} \underline{u}_{n+1}, \quad \tau \in [t_n, t_{n+1}] \quad (\text{A.5})$$

avec  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Le problème consiste alors à trouver les champs macroscopiques  $\underline{\Sigma}, \underline{u}$  et  $\underline{\mathbf{E}}$  vérifiant les équations (A.1) et (A.2) à l'instant  $t_{n+1}$ .

Pour résoudre par la méthode des éléments finis le problème incrémental ainsi posé, on subdivise classiquement le domaine  $\Omega$  en un nombre fini d'éléments. Sur chaque élément, le champ de déplacement est déterminé à partir du vecteur des déplacements nodaux  $\underline{U}$  (ou  $\underline{U}^*$ ) par :

$$\{u\} = [\mathbf{N}] \{U\}, \quad \{u^*\} = [\mathbf{N}] \{U^*\} \quad (\text{A.6})$$

Le champ de déformation  $\underline{\mathbf{E}}$ , et de déformation virtuelle  $\underline{\mathbf{E}}^*$ , déduits de (A.6), s'écrivent :

$$\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{B}] \{U\}, \quad \{\mathbf{E}^*\} = [\mathbf{B}] \{U^*\} \quad (\text{A.7})$$

$[\mathbf{B}]$  étant la matrice des déformations. En reportant les expressions (A.6) et (A.7) dans (A.3), le principe des travaux virtuels se réécrit sous la forme :

$$\int_{\Omega} \{U^*\}^T [\mathbf{B}]^T \{\Sigma\} d\Omega = \int_{\Omega} \{U^*\}^T [\mathbf{N}]^T \{f\} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \{U^*\}^T [\mathbf{N}]^T \{F\} dS \quad (\text{A.8})$$

L'équation précédente doit être satisfaite pour tout  $\underline{U}^*$  cinématiquement admissible. Il s'en suit que les champs doivent satisfaire à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}\} d\Omega = \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T \{f_{n+1}\} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} [\mathbf{N}]^T \{F_{n+1}\} d\mathcal{S} \quad (\text{A.9})$$

ce que l'on écrira dans la suite sous la forme synthétique :

$$\begin{aligned} \{R(U_{n+1})\} &= \{F_{int,n+1}\} - \{F_{ext,n+1}\} \\ &= \left( \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}\} d\Omega \right) - \left( \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T \{f_{n+1}\} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} [\mathbf{N}]^T \{F_{n+1}\} d\mathcal{S} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où les composantes de  $\{R(U_{n+1})\}$  représentent les forces "résiduelles".

### A.1.2 Schéma de résolution dans ABAQUS

Afin de résoudre le problème non linéaire étudié, une procédure itérative de type Newton-Raphson a été adoptée par le code de calcul ABAQUS.

Supposons qu'au début de l'itération  $i$  nous ayons une approximation  $U_{n+1}^i$  de la solution telle que les forces résiduelles ne soient pas nulles :

$$\{R(U_{n+1}^i)\} \neq 0 \quad (\text{A.11})$$

On cherche alors une correction  $\delta U^{i+1}$  des déplacements nodaux vérifiant :

$$\{R(U_{n+1}^i + \delta U^{i+1})\} = 0 \quad (\text{A.12})$$

A cet effet, on développe les forces résiduelles en série de Taylor au premier ordre :

$$\{R(U_{n+1}^i + \delta U^{i+1})\} = \{R(U_{n+1}^i)\} + [\mathbb{K}(U_{n+1}^i)] \{\delta U^{i+1}\} \quad (\text{A.13})$$

où  $[\mathbb{K}(U_{n+1}^i)]$  est la matrice de rigidité tangente, déterminée par :

$$[\mathbb{K}(U_{n+1}^i)] = \left[ \frac{\partial R(U_{n+1}^i)}{\partial U_{n+1}^i} \right] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T [\mathbb{L}_{n+1}^i] [\mathbf{B}] d\Omega \quad (\text{A.14})$$

$[\mathbb{L}_{n+1}^i]$  représente l'opérateur tangent de la loi de comportement locale et est donné par :

$$[\mathbb{L}_{n+1}^i] = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^i}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^i} \right] \quad (\text{A.15})$$

La résolution du système linéaire (A.13) permet ainsi de calculer  $\{\delta U^{i+1}\}$ ,

$$\{\delta U^{i+1}\} = - [\mathbb{K}(U_{n+1}^i)]^{-1} \{R(U_{n+1}^i)\} \quad (\text{A.16})$$

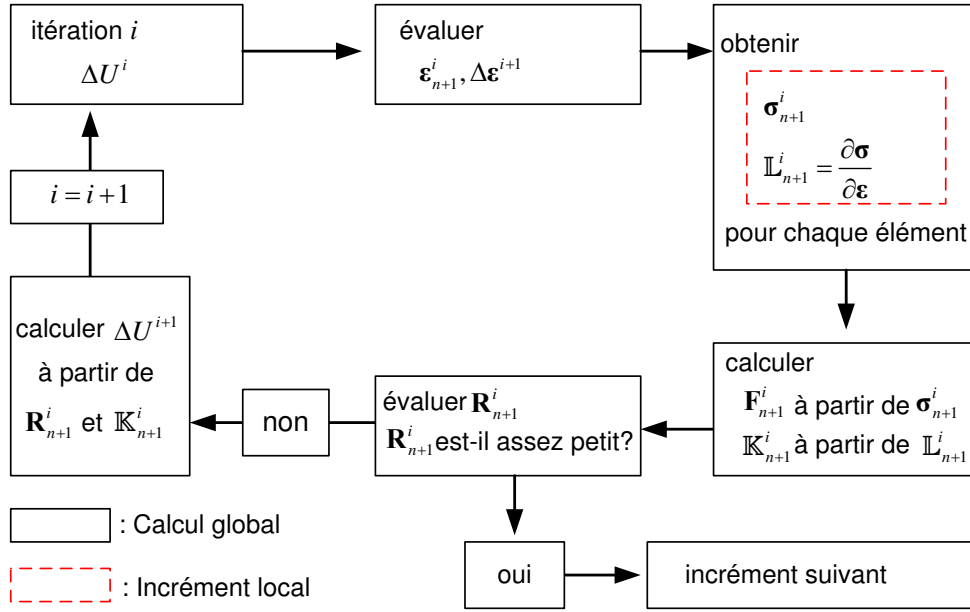


FIGURE A.2: Schéma itératif de calcul dans ABAQUS

Il s'en suit donc :

$$\{U_{n+1}^{i+1}\} = \{U_{n+1}^i\} + \{\delta U^{i+1}\} \quad (\text{A.17})$$

Les principales étapes de résolution sont présentées sur la figure A.2.

## A.2 Expressions de $\dot{E}_{eq}^p$ et $B$ pour l'opérateur tangent consistant du modèle MCK

La condition de la consistance  $\dot{\Phi} = 0$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} : \left[ \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbb{C} : \left( \frac{\bar{\sigma}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}}{2 + (4f \sinh R_0)/(3R_0)} \right) \frac{\dot{E}_{eq}^p}{\Sigma_{eq}} \right] + \\ (1-f) \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{9f \Sigma_m \sinh R_0}{4R_0 + \frac{8}{3}f \sinh R_0} \frac{\dot{E}_{eq}^p}{\Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_{eq}^p} \dot{E}_{eq}^p = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

On en déduit l'expression de  $\dot{E}_{eq}^p$  :

$$\begin{aligned} \dot{E}_{eq}^p = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} \right) / \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \left( \frac{\bar{\sigma}^2 / \Sigma_{eq}}{2 + (4f \sinh R_0)/(3R_0)} \right) - \right. \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{(1-f)}{\Sigma_{eq}} \frac{9f \Sigma_m \sinh R_0}{4R_0 + \frac{8}{3}f \sinh R_0} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_{eq}^p} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Pour simplifier l'écriture, on pose la notion  $\dot{E}_{eq}^p = \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}$ , où le tenseur  $\mathbf{B}$  est donné par :

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} \right) / \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \left( \frac{\bar{\sigma}^2 / \Sigma_{eq}}{2 + (4f \sinh R_0) / (3R_0)} \right) - \frac{\partial \Phi (1-f)}{\partial f} \frac{9f \Sigma_m \sinh R_0}{\Sigma_{eq} \left[ 4R_0 + \frac{8}{3} f \sinh R_0 \right]} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_{eq}^p} \right] \quad (\text{A.20})$$



# Annexe B

## Annexe au chapitre 3

### B.1 Expression des quantités $C_1$ et $C_2$ intervenant dans le modèle de Vincent et al. (2009)

On se propose dans cet annexe de préciser les expressions de  $C_1$  et  $C_2$  qui interviennent dans (3.7). Ces quantités sont données par :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 2(B_1 - B_2 - B_3 + B_4); \\
 C_2 &= f_{qb}^{f_{qb}(1-f_e)\sqrt{q_3}} f_e^{(1-f_{qb})f_e} \left( \frac{B_1 - f_e}{B_3 - f_e} \right)^{f_e} \left( \frac{B_4 - f_{qb}f_e}{B_2 - f_{qb}f_e} \right)^{f_{qb}f_e} \\
 &\quad \left( \frac{B_1 - f_{qb}\sqrt{3}}{B_2 - f_{qb}\sqrt{3}} \right)^{f_{qb}\sqrt{3}} \left( \frac{B_4 - f_{qb}f_e\sqrt{3}}{B_3 - f_{qb}f_e\sqrt{3}} \right)^{f_{qb}f_e\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

où  $f_{qb} = q_1 f_b$ , et :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \sqrt{f_e^2 + f_{qb}^2 q_3}; & B_2 &= f_{qb} \sqrt{f_e^2 + q_3}; \\
 B_3 &= f_e \sqrt{1 + f_{qb}^2 q_3}; & B_4 &= f_{qb} f_e \sqrt{1 + q_3}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

### B.2 Expressions de $\dot{E}_{eq}^p$ et $B$ pour l'opérateur tangent consistant du modèle de Guo et al. (2008)

La condition de la consistance  $\dot{\Phi} = 0$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} : \left[ \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbb{C} : \left( \frac{\bar{\sigma}^2 \Theta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}}{2 \Sigma_{eq}} \right) \dot{E}_{eq}^p \right] + \\
 &\quad \frac{\partial \Phi}{\partial f} \left\{ \left[ 3(1-f) - \frac{9\alpha \Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right] \frac{\bar{\sigma}^2 \Theta^2 B_0}{2 \Sigma_{eq}} - \frac{3\alpha \Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \right\} \dot{E}_{eq}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_{eq}^p} \dot{E}_{eq}^p = 0
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

où :

$$B_0 = \frac{2\alpha\Sigma_{eq}^2}{\Theta^3\bar{\sigma}^3 [1 + \gamma \ln(1 + sf)]} + \frac{2f\gamma^{-1} \sinh [\gamma^{-1} \ln(1 - 3\alpha\Sigma_m/\bar{\sigma})]}{3\Sigma_m - \bar{\sigma}/\alpha} \quad (\text{B.4})$$

L'expression de  $\dot{E}_{eq}^p$  s'écrit alors :

$$\dot{E}_{eq}^p = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} \right) / \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \left( \frac{\bar{\sigma}^2\Theta^2}{2\Sigma_{eq}} \right) - \frac{\partial\Phi}{\partial f} \left[ \left( 3 - 3f - \frac{9\alpha\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) \frac{\bar{\sigma}^2\Theta^2 B_0}{2\Sigma_{eq}} - \frac{3\alpha\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \right] - \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\sigma}} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon_{eq}^p} \right\} \quad (\text{B.5})$$

En notant  $\dot{E}_{eq}^p = \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}$ , le tenseur  $\mathbf{B}$  s'exprime :

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} : \mathbb{C} \right) / \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} \left( \frac{\bar{\sigma}^2\Theta^2}{2\Sigma_{eq}} \right) - \frac{\partial\Phi}{\partial f} \left[ \left( 3 - 3f - \frac{9\alpha\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) \frac{\bar{\sigma}^2\Theta^2 B_0}{2\Sigma_{eq}} - \frac{3\alpha\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \right] - \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\sigma}} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon_{eq}^p} \right\} \quad (\text{B.6})$$



# Annexe C

## Annexe au chapitre 4

### C.1 Coefficients des critères de plasticité

#### C.1.1 Critère de Gologanu et al. (1993-1994)

Dans le cas d'une cavité allongée,  $g = 0$ , les coefficients  $\eta_G$  et  $\zeta_G$  sont définis par :

$$\eta_G = \frac{\kappa_G(1-f)f \sinh(K)}{1+f^2+f[K \sinh(K) - 2 \cosh(K)]} \quad (\text{C.1})$$

$$\zeta_G = 1 - \eta_G \frac{(1-f)\kappa_G - \eta_G K}{f\kappa_G^2 \sinh(K)} \quad (\text{C.2})$$

$$\text{avec : } K = \kappa_G(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Deux valeurs approchées ont été proposées pour le coefficient  $\kappa_G$ , elles s'écrivent :

$$\kappa_G, \text{ 1st app} = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2) \frac{\ln(e_1/e_2)}{\ln(f)} \right]^{-1} \quad (\text{C.3})$$

$$\kappa_G, \text{ 2nd app} = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2) \frac{\ln(e_1/e_2)}{\ln(f)} - \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \frac{e_1^2 - e_2^2}{\ln(f)} \right]^{-1} \quad (\text{C.4})$$

Concernant le cas de cavité aplatie, le paramètre  $g$  est défini par :

$$g = \frac{1}{\chi} \frac{e_2^3}{\sqrt{1 - e_2^2}} \quad (\text{C.5})$$

où  $\chi$  est défini par :  $\chi = \frac{3}{4} \sqrt{\pi^2 + \frac{32}{3}}$ .

L'expression pour  $\kappa_G$  est :

$$\kappa_G = \left[ \frac{2}{3} + \frac{g(1-f)(g+2f+gf)}{3(g+1)^2(g+f)^2 \ln\left(\frac{g+1}{g+f}\right)} \right]^{-1} \quad (\text{C.6})$$

Les coefficients  $\eta_G$  et  $\zeta_G$  se réécrivent sous les formes suivantes :

$$\eta_G = \frac{\kappa_G(1-f)(g+1)(g+f)sh}{(g+1)^2 + (g+f)^2 + (g+1)(g+f)[Ksh - 2ch]} \quad (\text{C.7})$$

$$\zeta_G = 1 - \eta \frac{(1-f)\kappa_G - \eta_G K}{(1+g)(g+f)\kappa_G^2 \sinh(K)} \quad (\text{C.8})$$

$$\text{avec : } sh = \sinh(K) \quad \text{et} \quad ch = \cosh(K)$$

### C.1.2 Critère GLD (1997)

Le paramètre  $g$  est toujours conventionnellement pris égal à 0 dans le cas d'une cavité allongée et défini par  $g = e_2^3/\sqrt{1-e_2^2}$  dans le cas d'une cavité aplatie.

$\kappa_G$  est défini, dans le cas d'une cavité allongée, par :

$$\kappa_G = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\ln f} \left[ (\sqrt{3}-2) \ln\left(\frac{e_1}{e_2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{3+e_2^2+2\sqrt{3+e_2^4}}{3+e_1^2+2\sqrt{3+e_1^4}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+e_1^4}}{\sqrt{3}+\sqrt{3+e_2^4}}\right) \right] \right\}^{-1} \quad (\text{C.9})$$

et dans le cas d'une cavité aplatie, par :

$$\kappa_G = \frac{2}{3} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1+g}{g+f}\right)} \left\{ \frac{2}{3} \frac{g(1-f)}{(1+g)(g+f)} + \frac{2}{5} \left[ \left(\frac{g}{g+1}\right)^{5/2} - \left(\frac{g}{g+f}\right)^{5/2} \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{4}{3} - \left(\frac{g}{g+1}\right)^{5/2} - \left(\frac{g}{g+f}\right)^{5/2} \right] \right\}^{-1} \quad (\text{C.10})$$

$\eta_G$  et  $\zeta_G$  sont donnés par les relations (C.1) et (C.2) dans laquelle  $\kappa_G$  est donné par (C.9) et (C.10) et  $\alpha_2$  qui entre dans l'expression de  $K$  est remplacé par  $\alpha_2^*$  défini par :

$$\alpha_2^* = \frac{1-e_2^2}{3+e_2^4} \quad (\text{cavité allongée}) \quad (\text{C.11})$$

$$\alpha_2^* = \frac{1}{3-6e_2^2+4e_2^4} \quad (\text{cavité aplatie}) \quad (\text{C.12})$$

Dans la forme du critère qui prend en compte des changements d'orientation des cavités (4.9), le coefficient  $\kappa = \kappa_G$  est défini par (C.9) et (C.10). Les coefficients  $\eta$  et  $C$  sont donnés

par :

$$\eta = -\frac{\kappa Q(g+1)(g+f) \sinh(\kappa H)}{(g+1)^2 + (g+f)^2 + (g+1)(g+f)[\kappa H \sinh(\kappa H) - 2 \cosh(\kappa H)]} \quad (\text{C.13})$$

$$C = -\frac{\kappa(g+1)(g+f) \sinh(\kappa H)}{\eta(Q + \eta H)} \quad (\text{C.14})$$

où  $Q = 1 - f$  et  $H = 2(\alpha_1^G - \alpha_2^G)$ .

Le paramètre  $\alpha_1$  est défini par :

$$\alpha_1^G = \frac{1}{2e_1^2} - \frac{1 - e_1^2}{2e_1^3} \tanh^{-1}(e_1) \quad (\text{cavité allongée}) \quad (\text{C.15})$$

$$\alpha_1^G = -\frac{1 - e_1^2}{2e_1^2} + \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{2e_1^3} \sin^{-1}(e_1) \quad (\text{cavité aplatie}) \quad (\text{C.16})$$

et  $\alpha_2^G$  est donné par :

$$\alpha_2^G = \frac{1 + e_2^2}{3 + e_2^4} \quad (\text{cavité allongée}) \quad (\text{C.17})$$

$$\alpha_2^G = \frac{(1 - e_2^2)(1 - 2e_2^2)}{3 - 6e_2^2 + 4e_2^4} \quad (\text{cavité aplatie}) \quad (\text{C.18})$$

Le coefficient  $\alpha_1'$  qui intervient dans (4.39) est donné par :

$$\alpha_1' = \begin{cases} \frac{1}{3 - e_1^2} & (\text{cavité allongée}) \\ \frac{1 - e_1^2}{3 - 2e_1^2} & (\text{cavité aplatie}) \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

### C.1.3 Critère MCK anisotrope

Les coefficients  $p_{rs}$  sont définis par :

$$\begin{aligned} p_{11} &= 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1+3\alpha_1)(1-\alpha_1) - f(1+3\alpha_2)(1-\alpha_2)] \\ p_{12} &= p_{21} = 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1+3\alpha_1)(1-\alpha_1 - \beta_1) \\ &\quad - f(1+3\alpha_2)(1-\alpha_2)] \\ p_{22} &= 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(3\alpha_1 + 3\beta_1 - 1)(1-\alpha_1 - \beta_1) \\ &\quad - f(3\alpha_2 + 3\beta_2 - 1)(1-\alpha_2 - \beta_2)] \\ p_{33} &= p_{44} = \frac{1}{12} \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1+3\alpha_1 + \beta_1)(3 - 3\alpha_1 - \beta_1) \\ &\quad - f(1+3\alpha_2 + \beta_2)(3 - 3\alpha_2 - \beta_2)] \\ p_{55} &= p_{66} = \frac{1}{3} \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1 - 3\alpha_1 - 2\beta_1)(3\alpha_1 + 2\beta_1 - 3) \\ &\quad - f(1 - 3\alpha_2 - 2\beta_2)(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3)] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres dépendants de l'excentricité  $e$  ( $\alpha_1 \equiv \alpha(e_1)$ ,  $\alpha_2 \equiv \alpha(e_2)$ ,  $\beta_1 \equiv \beta(e_1)$  et  $\beta_2 \equiv \beta(e_2)$ ). Ils sont définis respectivement pour un sphéroïde allongé ou aplati :

$$\alpha(e) = \begin{cases} \frac{1-e^2}{e^3} \operatorname{arctanh}(e) - \frac{1-e^2}{e^2} \\ -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \operatorname{arctan}\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right) + \frac{1}{e^2} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

$$\beta(e) = \begin{cases} (1-3\alpha)\frac{1}{e^2} \\ -(1-3\alpha)\frac{1-e^2}{e^2} \end{cases}$$

## C.2 Expressions de $\dot{\lambda}$ et $\mathbf{B}$ dans le calcul de l'opérateur tangent consistant du modèle MCK anisotrope

### – $\dot{\lambda}$ et $\mathbf{B}$ du modèle de croissance des cavité

La condition de la consistance  $\dot{\Phi}_{croi} = 0$ , s'écrit :

$$\dot{\Phi}_{croi} = \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} : \left[ \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbb{C} : \left( \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} \right) \right] + \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p} \left( \Sigma : \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} \right) \dot{\lambda} + \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial f} (1-f) \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma_{ii}} \dot{\lambda} + \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial S} \left( \frac{3h_1}{2} \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma'_{zz}} + h_2 \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma_{ii}} \right) \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{C.22})$$

On en déduit le multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda} = \left( \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} \right) / \left[ \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} - \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p} \left( \Sigma : \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} \right) - \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial f} (1-f) \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma_{ii}} - \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial S} \left( \frac{3h_1}{2} \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma'_{zz}} + h_2 \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma_{ii}} \right) \right] \quad (\text{C.23})$$

On note  $\dot{\lambda} = \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}$ , d'où le tenseur  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} \right) / \left[ \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} - \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p} \left( \Sigma : \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma} \right) - \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial f} (1-f) \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma_{ii}} - \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial S} \left( \frac{3h_1}{2} \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma'_{zz}} + h_2 \frac{\partial \Phi_{croi}}{\partial \Sigma_{ii}} \right) \right] \quad (\text{C.24})$$

### – $\dot{\lambda}$ et $\mathbf{B}$ du modèle de coalescence des cavité

La condition de la consistance  $\dot{\Phi}_{coal} = 0$ , s'écrit :

$$\dot{\Phi}_{coal} = \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} : \left[ \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbb{C} : \left( \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} \right) \right] + \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \left( \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/3} \frac{\chi^2}{2f} \dot{\lambda} - \frac{\partial F(W, \chi)}{\partial \chi} \bar{\sigma} F_2 \dot{\lambda} - \frac{\partial F(W, \chi)}{\partial W} \bar{\sigma} F_1 \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{C.25})$$

où  $F(W, \chi) = \frac{3}{2}(1 - \chi^2)C(\chi, W)$  et  $F_1$  et  $F_2$  sont données par :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{W \left( 3\chi^2\gamma - \chi^3 \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} - 3\gamma^2 \right)}{2\gamma f \left( 2\gamma - \chi \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} \right)} \\ F_2 &= \frac{\chi(3\gamma - \chi^2)}{2f \left( 2\gamma - \chi \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} \right)} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

On en déduit l'expression de du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \left( \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} \right) / \left[ \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} - \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \left( \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/3} \frac{\chi^2}{2f} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial F(W, \chi)}{\partial \chi} \bar{\sigma} F_2 + \frac{\partial F(W, \chi)}{\partial W} \bar{\sigma} F_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

En notant  $\dot{\lambda} = \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}}$ , le tenseur  $\mathbf{B}$  s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left( \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} \right) / \left[ \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \Sigma} - \frac{\partial \Phi_{coal}}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \left( \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/3} \frac{\chi^2}{2f} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial F(W, \chi)}{\partial \chi} \bar{\sigma} F_2 + \frac{\partial F(W, \chi)}{\partial W} \bar{\sigma} F_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

## **Modélisation numérique de l'endommagement des milieux poreux ductiles et applications aux géomatériaux**

Cette étude est consacrée à la modélisation numérique de l'endommagement pour des matériaux poreux ductiles et à des applications aux géomatériaux. On rappelle et analyse d'abord au chapitre 1 différentes approches d'endommagement pour la classe de matériaux étudiés. L'implantation numérique du modèle basé sur un critère macroscopique de type Gurson, récemment proposé par Monchiet et al.(2007) est effectué au chapitre 2. La bonne performance de ce nouveau modèle est vérifiée en comparant ses prédictions numériques à celles d'autres modèles de type Gurson. Dans le chapitre 3, les modélisations numériques sont étendues aux géomatériaux en implantant dans un code éléments finis un nouveau modèle formulé sur la base du critère de Guo et al.(2008) qui prend en compte de la compressibilité de la matrice. L'adéquation du modèle développé aux géomatériaux est démontrée à travers l'étude du comportement d'une craie. L'implantation numérique et l'analyse du modèle basé sur une version anisotrope du critère proposé par Monchiet et al.(2007) sont présentées au chapitre 4. Les résultats numériques issus de cette implantation sont discutés en les comparant aux ceux des autres modèles existants. Ils apparaissent tout à fait satisfaisants

**Mots clés :** Micromécanique, milieux poreux, endommagement, modèle de type Gurson, modélisation numérique.

## **Numerical modeling of damage of ductile porous media and applications to geomaterials**

This study is devoted to the numerical modeling of damage for ductile porous materials and its applications to geomaterials. We first recall and analyze in chapter 1 different approaches of ductile damage. We then propose in chapter 2 a model based on the isotropic Gurson-type macroscopic criterion established by Monchiet et al.(2007). This model is implemented numerically in ABAQUS Finite Element software. The good performance of this new model is checked by comparing its numerical predictions with the ones provided by other Gurson-type models. In chapter 3, numerical modelings are performed for geomaterials by implementing an appropriate model (based on Guo et al.(2008) criterion) in ABAQUS. The adequacy of the considered model to geomaterials is demonstrated through the study of a chalk. The numerical implementation and analysis of an anisotropic model based on the anisotropic version of the criterion proposed by Monchiet et al.(2007) are presented in chapter 4. The numerical results derived from this implementation are discussed with the results of others existing models. They appear to be quite satisfactory.

**Key words :** Micromechanics, porous media, damage, Gurson-type model, numerical modeling.