



École Nationale d'ingénieurs de Tunis  
Université des sciences et technologie de Lille



## Thèse de Doctorat

présentée par **Houcine MEFTAHI**

le 14 Decembre 2009

Discipline : **MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

# ETUDES THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES DE QUELQUES PROBLÈMES INVERSES

Directeurs de thèse : Slim CHAABANE & Franck WIELONSKY

### Membres du Jury

Directeur	Franck WIELONSKY	Maître de conférence	Université de Lille1
Rapporteur	Housseem HADDAR	Directeur de recherche	INRIA Saclay-Île-de-France
Examineur	Maatoug HASSINE	Chercheur habilité	ENIT de Tunis
Président	Mohamed JAOUA	Professeur	Université de Nice
Rapporteur	Juliette LEBLOND	Directeur de recherche	INRIA Sophia-Antipolis
Examineur	Mohamed MASMOUDI	Professeur	Université de Toulouse III
Rapporteur	Mohamed MKAOUAR	Professeur	Université de Sfax
Co-directeur	Slim CHAABANE	Maître de conférence	Université de Sfax



# Remerciements

---

Je voudrais remercier en premier, mes co-directeurs de thèse Slim Chaabane et Franck Wielonsky pour la disponibilité et l'aide inconditionnelle qu'ils m'ont apportée aussi bien scientifiquement qu'humainement. Je n'aurais certainement pas effectué cette thèse sans avoir rencontré Franck Wielonsky durant ma première année de DEA à l'université de Lille 1. Il m'a mis en contact avec Slim Chaabane. Tous deux m'ont permis d'acquérir un bagage mathématiques bien utile pour mener à bien ma thèse.

J'exprime ma gratitude aux rapporteurs Housseem Haddar, Juliette Leblond et Mohamed Mkaouar d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je les remercie chaleureusement pour l'intérêt et le temps consacré à ces travaux.

Je suis très honoré de la participation de Mohamed Jaoua, Mohamed Masmoudi et Maatoug Hassine dans le jury.

Je tiens à remercier particulièrement Mohamed Masmoudi pour son accueil au laboratoire MIP de Toulouse. Ses idées m'ont permis d'enrichir considérablement ma vision scientifique. Je saisis l'opportunité de remercier très sincèrement Jean-Paul Zolésio pour son aide. Sa gentillesse et ses idées m'ont beaucoup aidé durant mon séjour à l'INRIA Sophia-Antipolis.

Je tiens à remercier les membres du laboratoire Paul Painlevé et ceux du Lamsin. Je remercie les doctorants et post-doctorants pour leurs soutiens. Je remercie également les personnes administratives, qui m'ont toujours rendu service.

Enfin, je remercie toute ma famille et mes amies.



---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 Objectifs de l'étude . . . . .	7
0.2 Organisation de la thèse . . . . .	10
<b>I UTILISATION DE MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE PLAN COMPLEXE</b>	<b>15</b>
<b>1 Quelques Rappels d'analyse complexe</b>	<b>17</b>
1.1 Espaces de Hardy du disque et de la couronne . . . . .	17
1.1.1 Espace de Hardy du disque . . . . .	17
1.1.2 Espaces de Hardy et de Hardy-Sobolev de la couronne . . . . .	19
1.2 Fonctions harmoniques, fonctions conjuguées . . . . .	21
1.3 Intégrales singulières . . . . .	23
1.4 Théorie du potentiel . . . . .	23
1.5 Géométrie dans le disque . . . . .	24
1.5.1 La métrique chordale . . . . .	25
1.5.2 Transformation de Moebius . . . . .	25
1.5.3 Applications conformes . . . . .	26
<b>2 Problème de détection de fissures</b>	<b>27</b>
2.1 Problème direct . . . . .	27
2.2 Problème inverse . . . . .	28
2.2.1 Résultats d'identifiabilité . . . . .	29
2.2.2 Résultats de stabilité . . . . .	29
2.2.3 Résultats d'identification . . . . .	30
<b>3 Approximations rationnelle et méromorphe</b>	<b>35</b>
3.1 Approximation rationnelle dans $L^2(\mathbb{T})$ . . . . .	35
3.1.1 Approximation rationnelle dans $L^2(\mathbb{T})$ de la fonction $F$ . . . . .	37
3.2 Approximation méromorphe dans $L^\infty(\mathbb{T})$ . . . . .	39
3.2.1 Approximation méromorphe dans $L^\infty(\mathbb{T})$ de la fonction $F$ . . . . .	41

3.3	Comportement asymptotique des pôles . . . . .	42
3.3.1	Cas d'une fissure porté par un diamètre du disque $\mathbb{D}$ . . . . .	42
3.3.2	Cas d'une fissure quelconque . . . . .	43
3.4	Utilisation de l'approximation méromorphe pour la localisation d'autres défauts de géométrie . . . . .	44
3.5	Vers l'identification complète de la fissure . . . . .	47
3.5.1	Reconstruction pratique de $\varphi$ . . . . .	48
3.5.2	Choix de la borne $M$ . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Approximation rationnelle avec contraintes</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	53
4.2	Approximation avec contrainte de la fonction $F$ . . . . .	54
4.2.1	Existence d'un minimum . . . . .	55
4.2.2	Approximation avec des résidus réels . . . . .	57
4.2.3	Approximation avec des résidus complexes . . . . .	59
4.2.4	Calcul des résidus de l'approximant à pôles fixés . . . . .	60
4.2.5	Calcul du gradient . . . . .	61
4.2.6	Calcul du critère . . . . .	62
4.3	Résultats numériques . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Majoration de l'aire d'une cavité</b>	<b>67</b>
5.1	Introduction . . . . .	67
5.2	Estimations de croissance dans l'espace de Hardy-Sobolev de la couronne . . . . .	68
5.3	Estimation de l'aire d'une cavité . . . . .	69
5.3.1	Existence et régularité de la solution du problème de Neumann . . . . .	71
5.3.2	Résultats préliminaires . . . . .	73
5.3.3	Enoncé du théorème . . . . .	75
5.3.4	Preuve du Théorème 5.3.8 . . . . .	76
5.3.5	Classe de couronnes excentriques . . . . .	84
5.4	Convergence d'un schéma d'interpolation dans $H^{1,2}(G_s)$ . . . . .	87

## II MINIMISATION DE FONCTIONNELLES PAR DIFFÉRENTS GRADIENTS 89

<b>6</b>	<b>Identification des paramètres de Lamé en élasticité linéaire</b>	<b>91</b>
6.1	Introduction . . . . .	91
6.2	Existence et unicité de la solution du problème direct . . . . .	92
6.3	Régularité de l'opérateur $\zeta$ . . . . .	94
6.3.1	Dérivée d'ordre supérieur de $\zeta$ . . . . .	96
6.4	Étude du problème inverse d'identification des paramètres de Lamé . . . . .	98
6.4.1	Identifiabilité . . . . .	98
6.4.2	Stabilité . . . . .	100
6.4.3	Stabilité Lipschitzienne directionnelle . . . . .	100
6.4.4	Identification . . . . .	102
6.4.5	Dérivée de la fonctionnelle $J$ par rapport aux paramètres . . . . .	102

6.5	Résultats numériques . . . . .	104
6.5.1	Formulation discrète . . . . .	104
6.5.2	Exemples numériques . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Dérivées de quelques problèmes de Forme</b>	<b>113</b>
7.1	Transformation des domaines . . . . .	113
7.1.1	Méthode des champs de vitesse . . . . .	114
7.1.2	Dérivée matérielle et dérivée de forme de l'état . . . . .	114
7.2	Rappels de géométrie différentielle . . . . .	115
7.2.1	Extension de la normale à un domaine variable . . . . .	116
7.3	Intégrale sur un domaine variable . . . . .	116
7.3.1	Formule de dérivation . . . . .	117
7.4	Dérivée de quelques problèmes de forme . . . . .	119
7.4.1	Problème de transmission dans le cas scalaire . . . . .	119
7.4.2	Dérivées des fonctions d'état par rapport à la forme . . . . .	119
7.4.3	Problème de transmission dans le cas de l'élasticité . . . . .	120
7.4.4	Formulation du problème de Neumann et de Dirichlet . . . . .	121
7.5	Problème inverse et optimisation de forme . . . . .	122
7.5.1	Transformation du problème inverse en un problème d'optimisation de forme . . . . .	123
7.5.2	Dérivée formelle par rapport au domaine $\omega$ . . . . .	123
<b>8</b>	<b>Identification des inclusions</b>	<b>129</b>
8.1	Introduction . . . . .	129
8.2	Calcul du gradient topologique . . . . .	131
8.2.1	La méthode de l'état adjoint . . . . .	131
8.2.2	Formulation du problème . . . . .	132
8.3	Localisation avec le gradient topologique . . . . .	134
8.3.1	La fonction coût et le gradient topologique . . . . .	135
8.3.2	Résultats numériques . . . . .	137
8.4	Identification avec la méthode du gradient de forme . . . . .	141
8.4.1	Propriétés de la fonctionnelle d'énergie $J_N$ . . . . .	143
8.4.2	Implémentation numérique . . . . .	147
8.4.3	Exemples numériques . . . . .	147
8.4.4	Complément sur la résolution numérique des fonctions d'états $u_N$ et $u_D$ . . . . .	151
<b>9</b>	<b>Identification of inclusion in linear elasticity</b>	<b>153</b>
9.1	Introduction . . . . .	153
9.2	Minmax formulation . . . . .	155
9.2.1	Saddle point formulation . . . . .	156
9.3	Function space parametrization . . . . .	158
9.3.1	Formal calculations . . . . .	164
9.3.2	Justified calculations . . . . .	165
9.4	Function space embedding . . . . .	167

9.5	Numerical implementation . . . . .	169
9.5.1	Numerical examples . . . . .	171



---

# Table des figures

---

1	Le domaine $\Omega \setminus \bar{\omega}$ et $\omega$ . . . . .	9
2.1	Le domaine $\Omega$ . . . . .	27
3.1	Approximant AAK de degré 12 . . . . .	44
3.2	Rapport des valeurs singulières . . . . .	44
3.3	Approximant AAK de degré 8 . . . . .	45
3.4	Rapport des valeurs singulières . . . . .	45
3.5	Approximant AAK de degré 5 . . . . .	46
3.6	Approximant AAK de degré 5 . . . . .	46
3.7	Approximant AAK de degré 4 . . . . .	46
3.8	Approximant AAK de degré 7 . . . . .	47
3.9	Rapport des valeurs singulières . . . . .	47
3.10	Transformation du domaine par des applications conformes . . . . .	48
4.1	Approximation de degré 2 avec des résidus réels . . . . .	63
4.2	Approximation de degré 3 avec des résidus réels . . . . .	63
4.3	Approximation de degré 2 avec des résidus complexes . . . . .	63
4.4	Approximation de degré 3 avec des résidus complexes . . . . .	63
4.5	Approximation de degré 4 avec des résidus complexes . . . . .	64
4.6	Approximation de degré 3 avec des résidus complexes . . . . .	64
4.7	Pôles correspondants à une fraction à résidus réels de degré 2 optimale, suivant une discrétisation du disque . . . . .	65
4.8	Pôles pour une fraction de degré 3 optimale, suivant une discrétisation localisée du disque . . . . .	65
4.9	Pôles correspondants à une fraction à résidus réels de degré 4, optimale, dans une bande discrétisée . . . . .	66
5.1	Transformations des domaines par des applications conformes. . . . .	75
6.1	Représentation du maillage dans le cas où $\Omega$ est homogène . . . . .	108
6.2	Représentation du maillage dans le cas où $\Omega$ est hétérogène . . . . .	108

6.3	Convergence de l'algorithme au cours des itérations : $\lambda, \mu$ des constantes	109
6.4	Convergence de l'algorithme au cours des itérations : $\lambda, \mu$ constants par morceaux	111
8.1	Rotation de l'ellipse	134
8.2	Le gradient topologique par rapport aux flux $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et $\varphi_4$ .	137
8.3	Discrétisation du domaine	137
8.4	Le gradient topologique par rapport aux flux $\varphi_1, \varphi_2$ et $\varphi_3$ .	138
8.5	Le gradient topologique par rapport au flux $\varphi_4$	139
8.6	Le gradient topologique par rapport aux flux $\varphi_1$ et $\varphi_2$ .	139
8.7	Le gradient topologique par rapport aux flux $\varphi_1, \varphi_2$ et $\varphi_3$ .	139
8.8	Le gradient topologique par rapport aux flux $\varphi_1$ et $\varphi_2$	139
8.9	Les valeurs du gradient topologique	140
8.10	Le gradient topologique par rapport aux flux $\varphi_1, \varphi_2$ et $\varphi_3$ .	140
8.11	Les valeurs du gradient topologique	140
8.12	Le gradient topologique par rapport aux flux $\varphi_1$ et $\varphi_2$ .	140
8.13	Monotonie et convexité de l'énergie $J_N$ par rapport à $\alpha$	146
8.14	Reconstruction de la conductivité par la méthode de Newton.	146
8.15	Monotonie de l'énergie Neumann $J_N$ par rapport au rayon.	146
8.16	Reconstruction du rayon par la méthode de Newton.	148
8.17	Reconstruction avec des données non bruitées.	148
8.18	Reconstruction avec 1% de bruit.	148
8.19	Reconstruction avec 5% de bruit.	149
8.20	Reconstruction avec 7% de bruit.	149
8.21	Reconstruction avec 10% de bruit.	149
8.22	Reconstruction avec des données non bruitées.	150
8.23	Reconstruction avec 5% de bruit.	150
8.24	Reconstruction avec 10% de bruit.	150
8.25	Reconstruction avec 15% de bruit.	150
9.1	Regularization by boundary layer.	166
9.2	Reconstruction of the radius by Newton method	171
9.3	Reconstruction without noise	172
9.4	Reconstruction with noise level 3%	172
9.5	Reconstruction without noise level 5%	172
9.6	Reconstruction with noise level 10%	172
9.7	Reconstruction of the semi-minor and the semi-major axis by Newton method	173
9.8	Reconstruction without noise	173
9.9	Reconstruction with noise level 5%	173
9.10	Reconstruction with noise level 7%	173
9.11	Reconstruction with noise level 10%	173

# RÉSUMÉ

Ce travail concerne l'étude de quelques problèmes inverses par différentes approches mathématiques.

Dans la première partie, nous considérons le problème inverse géométrique consistant à retrouver une fissure inconnue à partir de mesures sur le bord d'un domaine plan. Nous traitons ce problème par des techniques d'approximations rationnelle et méromorphe dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ . L'étude consiste à construire à partir des données mesurées sur le bord, une fonction  $f$  dont les singularités correspondent à la fissure recherchée puis à approcher cette fonction par des approximants rationnels ou méromorphes au sens de différentes normes. Nous rappelons ces techniques d'approximation et leurs applications à la localisation de fissures. Nous appliquons l'approximation méromorphe à des cas de défauts plus généraux, tels que les cavités et les petites inclusions. D'autre part, nous proposons un algorithme théorique, basé sur les transformations conformes et la résolution d'un problème extrémal borné dans une couronne, pour identifier complètement la fissure. Ensuite, dans le but de mieux localiser la fissure, nous traitons le cas des approximants rationnels avec contraintes sur les résidus.

Toujours dans le contexte de l'analyse complexe, nous étudions un autre problème inverse consistant à estimer l'aire d'une cavité à partir des mesures au bord. Nous donnons une majoration explicite de l'aire d'une cavité à partir de la différence de potentiel dans le cas d'un domaine sain et dans le cas du domaine avec cavité. Cette majoration est basée sur une estimation de croissance de fonctions dans l'espace de Hardy-Sobolev de la couronne  $H^{1,2}(G_s)$ . Nous appliquons également cette estimation pour donner la vitesse de convergence d'un interpolant d'une fonction de  $H^{1,2}(G_s)$  à partir d'un nombre fini de ses valeurs sur le bord extérieur de la couronne  $G_s$ .

Dans la deuxième partie, nous considérons d'abord le problème inverse d'identification des paramètres de Lamé en élasticité linéaire à partir de mesures sur le bord du domaine. Nous traduisons ce problème inverse en un problème de minimisation d'une fonctionnelle de type Kohn-Vogelius et nous exhibons quelques résultats numériques.

Nous considérons également le problème inverse d'identification d'une inclusion correspondant à une discontinuité de la conductivité. Nous utilisons la méthode du gradient topologique pour avoir une première approximation de la ou les inclusions inconnues et ensuite la méthode du gradient classique pour identifier plus précisément celles-ci.

Enfin, dans le contexte de l'optimisation de forme, nous étudions le problème inverse d'identification d'une inclusion en élasticité linéaire. Nous calculons le gradient de forme d'une fonctionnelle de type Kohn-Vogelius, minmax d'un lagrangien, par rapport au paramètre de déformation. Nous utilisons ce gradient pour retrouver numériquement des inclusions elliptiques.

**Mots clés :** Problèmes inverses, Identifiabilité, Stabilité, Identification, Espaces de Hardy, Espaces de Hardy-Sobolev, Approximations rationnelle et méromorphe, Problème extrémal borné, Elasticité linéaire, Coefficients de Lamé, Fonctionnelles de moindres carrés et de Kohn-Vogelius, Gradient topologique, Gradient de forme.



# ABSTRACT

This work concerns the study of some inverse problems by different mathematical approaches.

In the first part, we consider the geometrical inverse problem, related to the identification of an unknown crack by boundary measurements. We treat this problem by technique of rational and meromorphic approximation in the complex plane  $\mathbb{C}$ . The study consists in building a function  $f$  from the datas on the boundary, which is singular exactly on the unknown crack. We then approximate this function  $f$  by a rational or meromorphic approximant according to different norms. We first recall this approximation technique and its application to the location of cracks. We then apply the meromorphic approximation to the case of more general defects of geometry than the cracks, such as cavities or small inclusions. On the other hand, we propose a theoretical algorithm, based on conformal transformations and the resolution of a boundary extremal problem, to completely identify the crack. Then, with the goal of a better localization of the crack, we consider rational approximants with constraints on their residues.

Still in the context of complex analysis, we study another inverse problem, namely estimating the area of a cavity in a bounded planar domain from boundary measurements. We give an explicit estimate on the growth of functions in the Hardy-Sobolev space  $H^{k,2}(G_s)$  of an annulus  $G_s$ . We apply this result for the study of the previous geometric inverse problem, deriving an explicit upper bound on the area of the cavity from the difference of two electrostatic potentials measured on the boundary, when the cavity is present and when it is not. We also apply this estimation, to find an upper bound on the rate of convergence of a recovery interpolation scheme in  $H^{1,2}(G_s)$  with points located on the outer boundary of  $G_s$ .

In the second part, we first consider the inverse problem of recovering the Lamé parameters in linear elasticity from boundary measurements. We transform this inverse problem into a problem of minimization of a functional of Kohn-Vogelius type and we perform numerical experiments.

We also consider the inverse problem of identification of an inclusion corresponding to a discontinuity of the conductivity. We use the method of the topological gradient to obtain a first estimate on the location of one or several inclusions and then, we use the method of the classical gradient to identify more precisely these.

Finally, in the context of shape optimization, we study the inverse problem of identification of an inclusion in linear elasticity. We calculate the shape gradient of a functional of Kohn-Vogelius type, minmax of a lagrangian with respect to the parameter of deformation. We use this gradient to numerically find elliptic inclusions.

**Key words :** Inverse problems, Identifiability, Stability, Identification, Hardy and Hardy-Sobolev spaces, Rational and meromorphic approximations, Boundary extremal problems, Linear elasticity, Lamé parameters, Least square and Kohn-Vogelius functional, Topological gradient, Shape gradient.



---

# Introduction

---

## 0.1 OBJECTIFS DE L'ÉTUDE

L'objectif de cette thèse, est l'étude de quelques problèmes inverses. Par problèmes inverses, on entend généralement inverses des problèmes dits directs, à savoir ceux qui consistent à trouver une solution à une équation aux dérivées partielles, connaissant tous les paramètres du problème ainsi que les conditions initiales ou conditions aux limites. L'étude des problèmes inverses est difficile à cause de leur caractère mal posé (pas toujours unicité de la solution, ou non continuité de celle-ci par rapport aux données).

Cependant, l'étude des problèmes inverses a connu un développement très important au cours des dernières années. Cela est dû à leurs nombreuses applications, par exemple, en imagerie médicale, contrôle non destructif, industrie pétrolière, géophysique, détection des mines, physique des radars, traitement des images, . . . De plus, l'accroissement de la puissance de calcul, a aussi permis le développement de méthodes dont la mise en oeuvre était inaccessible auparavant.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des problèmes inverses suivants : l'identification de fissures et d'inclusions d'une part, et l'identification des paramètres de Lamé en élasticité linéaire, d'autre part. Dans les deux cas, on exploite des mesures effectuées sur le bord des domaines plans concernés.

Le problème géométrique de la détection de fissures dans un domaine plan a fait l'objet de nombreuses travaux, utilisant différentes approches mathématiques, citons en particulier [12, 15, 16, 19, 21, 35, 22, 39, 77, 68, 95, 36]. Dans la première partie de ce travail, nous avons abordé l'étude de ce problème inverse à partir des techniques d'approximation rationnelle, notamment avec contraintes, dans le plan complexe, appliquées à des solutions de l'équation de Laplace. Le modèle physique est décrit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = \Phi \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^\pm}{\partial n_\gamma} = 0 \text{ sur } \gamma^0 = \gamma \setminus \{\gamma_0, \gamma_1\} \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à bord  $\Gamma$ , et  $\gamma_0, \gamma_1$  sont les extrémités d'un arc  $\gamma$  dont la position est inconnue. Le problème inverse que nous étudions consiste à déterminer l'arc  $\gamma$  qui modélise une fissure isolante (puisque le flux est supposé nul sur  $\gamma$  d'après la troisième équation de (1)) à partir de la connaissance du couple de mesures  $(u|_\Gamma, \Phi)$ , constituées d'une température ou un potentiel  $u|_\Gamma$  et d'un flux  $\Phi$ , supposées connues sur la frontière extérieure  $\Gamma$ . Avec ces données, on peut construire une fonction  $f$  dont les singularités sont localisées sur la fissure  $\gamma$  (voir [27]) :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma(t)}{t-z} dt + g(z), \quad z \in \Omega \setminus \gamma \text{ et } g \in H^\infty(\Omega), \quad (2)$$

où  $\sigma(t)$  est le saut de la température à travers  $\gamma$  et  $g$  une fonction analytique bornée sur  $\Omega$ . De plus  $f$  est connue, à une constante près, sur le bord extérieur  $\Gamma$  :

$$F(z) = f(z)|_\Gamma = u(z)|_\Gamma + i \int_a^z \Phi(\xi) d\xi, \quad z \in \Gamma, \quad a \in \Gamma. \quad (3)$$

Cette approche peut se réécrire sous la forme suivante :

*Connaissant la fonction  $F$  sur  $\Gamma$ , trouver  $\gamma \subset \Omega$  telle que  $F$  soit la trace sur  $\Gamma$  d'une fonction  $f$  analytique bornée dans  $\Omega \setminus \gamma$ .*

Afin d'utiliser des schémas d'approximations classiques, on suppose que le domaine  $\Omega$  est le disque unité  $\mathbb{D}$ .

Comme la fissure  $\gamma$  est supposée isolante, la partie imaginaire de  $f$  est constante lorsqu'on s'approche de  $\gamma$ . Cela nous amène à considérer des approximants de  $f$  vérifiant une propriété analogue, à savoir des approximants de la forme

$$\sum_{j=1}^m \sum_{l_j=1}^{k_j} \frac{a_{j,l_j}}{(z-z_j)^{l_j}}, \quad z_j \in \mathbb{D}, \quad a_{j,l_j} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j=1}^m k_j \leq n, \quad (4)$$

vérifiant les conditions

$$\text{Im} \left( \sum_{j \neq i}^m \sum_{l_j=1}^{k_j} \frac{a_{j,l_j}}{(z_i - z_j)^{l_j}} + g(z_i) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Nous présentons également une approche théorique, permettant de déterminer la fissure de manière exacte. Néanmoins, celle-ci étant basée sur l'utilisation d'un certain nombre d'applications conformes, sa mise en oeuvre pratique ne semble pas a priori évidente.

Concernant l'étude du problème inverse d'identification des inclusions, on peut citer les références [7, 8, 11, 14, 3, 64, 33, 72, 37]. Nous estimons la taille d'une cavité, toujours à partir de mesures sur le bord extérieur du domaine. Nous donnons une majoration explicite de la taille de cette cavité en fonction de la différence de potentiels électriques mesurés sur le bord du domaine, lorsque le domaine contient la cavité et lorsque le domaine est sain.



Dans la deuxième partie de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'identification des inclusions dans le cadre d'une conductivité variable. Les équations qui modélisent le problème sont les suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\alpha \nabla u) = 0, & \text{in } \Omega, \\ \alpha_e \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi, & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (6)$$

où  $\alpha$  est une fonction constante par morçeau définie par

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_e & \text{si } x \in \Omega \setminus \bar{\omega} \\ \alpha_i & \text{si } x \in \omega, \quad \omega \subset \Omega. \end{cases}$$

$\omega$  désignant l'inclusion à identifier. Les expérimentations numériques que nous avons me-

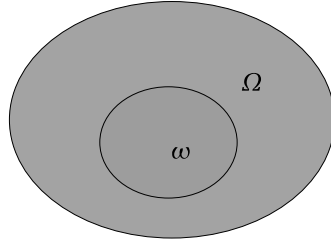


FIGURE 1 – Le domaine  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  et  $\omega$

nées à bien sont basées sur la technique du gradient topologique pour obtenir une première localisation des inclusions et sur celle du gradient de forme pour l'identification complète de ces dernières.

Un autre problème inverse auquel nous nous sommes intéressés est celui de l'identification des paramètres de Lamé qui caractérisent les matériaux élastiques linéaires et isotropes. On se donne un matériau élastique isotrope occupant un domaine plan  $\Omega$ . La procédure d'identification consiste à imposer un chargement  $g$  sur une partie  $\Gamma_1$  du bord et à mesurer le déplacement  $u=f$  sur  $\Gamma_1$ . Sur l'autre partie du bord  $\Gamma_2$ , on suppose le déplacement nul  $u = 0$ . Le déplacement  $u$  vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (7)$$

avec  $\sigma(u)$ , le tenseur des contraintes,

$$\sigma(u) = C : \varepsilon(u) = \sum_{i,j,k,l=1}^2 C_{i,j,k,l} \partial_l u_k, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T), \quad (8)$$

où  $\varepsilon(u)$  désigne le tenseur des déformations et  $C$  le tenseur d'élasticité,

$$C_{i,j,k,l} = \lambda \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \mu (\delta_{i,k} + \delta_{j,l}), \quad (9)$$

$\delta_{i,j}$  désignant le symbole de Kronecker. Nous supposons que nous avons accès aux données  $(g, f)$  sur la frontière  $\Gamma_1$  du domaine  $\Omega$ . Le problème inverse consiste à déterminer les paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  à partir de la connaissance du couple de mesures  $(f, g)$ . Ce problème a été étudié théoriquement, voir par exemple [69]. Récemment, plusieurs applications, par exemple en élastographie, ont suscité un nouvel intérêt pour ce problème (voir [69, 80, 84]). Dans [60], un algorithme itératif de point fixe a été proposé pour l'identification numérique de ces paramètres.

Dans ce travail, les cas des paramètres constants et constants par morceaux ont été étudiés. Nous avons obtenu de nouveaux résultats d'identifiabilité et de stabilité et effectué des essais numériques en utilisant une fonctionnelle de type Kohn-Vogelius et un algorithme itératif de type quasi-Newton (BFGS), intégré dans la toolbox d'optimisation de Matlab.

Dans ce même contexte, nous nous sommes aussi intéressés au problème inverse d'identification d'une inclusion  $\omega$  dans le cas où les paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont connus. Nous considérons encore une fonction coût de type Kohn-Vogelius pour l'identification numérique de l'inclusion.

## 0.2 ORGANISATION DE LA THÈSE

La thèse se décompose principalement en deux parties. La première concerne les Chapitres 1 à 5 qui sont basés sur des techniques d'approximation dans le plan complexe, et la seconde concerne les Chapitres 6 à 9 qui sont basés sur des techniques de minimisation de fonctionnelles utilisant le calcul de différents gradients.

Dans le **Chapitre 1**, nous rappelons quelques résultats d'analyse complexe dont nous aurons besoin par la suite.

Dans le **Chapitre 2**, nous présentons en détail le problème de la détection de fissure. Nous passons en revue différents travaux qui ont été menés sur ce sujet au cours des dernières années.

Le **Chapitre 3** est consacré à l'étude de l'approximation rationnelle et méromorphe et de leurs applications à la détection de fissures. Nous rappelons des résultats mettant en relation la position des pôles des approximants et la position de la fissure recherchée. Dans ce registre, nous vérifions sur différents exemples numériques que l'approche "approximation méromorphe" peut être étendue à des défauts de géométrie un peu plus généraux que ceux considérés précédemment, cf. [77], notamment des cavités ou des petites inclusions. Nous présentons également une méthode théorique d'identification complète de la fissure basée sur des transformations conformes et la résolution d'un problème extrémal borné dans la couronne.

L'approximation rationnelle ou méromorphe sans contrainte n'identifie qu'une déformation de la fissure, à savoir l'arc de capacité minimale qui joint ses extrémités. Dans le **Chapitre 4**, nous proposons un schéma d'approximation plus fin dans le but d'identifier exactement la fissure. Pour la localisation de la fissure nous minimisons le critère

$$\|f - r\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad \text{tel que } r \text{ vérifie la propriété (4) et (5).}$$

Nous avons envisagé le cas des approximants avec des résidus réels et le cas où les résidus sont des nombres complexes. Nous effectuons le calcul du gradient du critère par rapport

aux pôles de la fraction  $r$ , ce qui nous permet d'implémenter un programme de calcul de meilleurs approximaux locaux. On exhibe quelques exemples numériques.

Dans le **Chapitre 5**, nous nous intéressons au cas des cavités. Nous estimons l'aire d'une cavité dans un domaine plan borné à partir de potentiels électriques mesurés sur le bord, lorsque le domaine contient la cavité et lorsqu'il est sain. Pour cela, nous établissons un résultat explicite de croissance de fonctions dans l'espace de Hardy-Sobolev  $H^{m,2}(G_s)$  de la couronne. Nous appliquons aussi ce résultat pour l'estimation du taux de convergence d'un certain schéma d'interpolation dans l'espace  $H^{1,2}(G_s)$ .

Le **Chapitre 6** est consacré à l'identification des paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  d'un milieu linéaire isotrope, à partir des mesures sur le bord du domaine. Nous rappelons la preuve de l'existence d'une solution du problème direct, nous démontrons un résultat de régularité de l'opérateur  $(\lambda, \mu) \rightarrow u_{\lambda, \mu}$  où  $u_{\lambda, \mu}$  désigne le déplacement, solution du problème direct. Nous prouvons ensuite un résultat d'identifiabilité et un résultat de stabilité lipschitzienne directionnelle. Pour l'identification, nous transformons le problème inverse en un problème de minimisation d'une fonctionnelle de type Kohn-Vogelius

$$J(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n - u_d)^2 + 2\mu \varepsilon(u_n - u_d)^2,$$

où  $u_n$  est la solution du problème de Neumann  $\sigma(u)n = g$  et  $u_d$  est la solution du problème de Dirichlet  $u_d|_{\Gamma_1} = f$ . L'une des particularités de cette fonctionnelle est que son gradient par rapport aux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  ne dépend que des états  $u_n$  et  $u_d$  et pas des états adjoints, ce qui facilite le calcul numérique du gradient. On a effectué des tests numériques dans les cas des paramètres constants et constants par morceaux, en utilisant une méthode de type quasi-Newton (BFGS) de la toolbox optimisation de matlab.

Dans le **Chapitre 7**, nous présentons quelques définitions et rappels d'optimisation de forme. Nous donnons la dérivée par rapport à la forme pour les fonctions définies par des intégrales de volume et de surface. Nous rappelons ensuite les équations vérifiées par la dérivée des fonctions d'états relatives à un problème de transmission dans le cas scalaire. Dans le cas d'un problème en élasticité, nous obtenons formellement ces équations. Afin de reconstruire une inclusion  $\omega$ , nous considérons une fonctionnelle de type Kohn-Vogelius dont nous calculons, sans justification, la dérivée de forme relativement à l'inclusion  $\omega$ . En utilisant une méthode différente, un calcul rigoureux de la dérivée de forme est effectué dans le dernier chapitre.

Dans le **Chapitre 8**, nous utilisons le gradient topologique pour la localisation d'inclusions en minimisant la fonction coût

$$J(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_N - u_D|^2, \quad (10)$$

où  $u_N$  est la solution d'un problème de Neumann, cf. (8.24) et  $u_D$  est la solution d'un problème de Dirichlet, cf. (8.25). Nous avons alors deux états adjoints  $v_N$  et  $v_D$  et le gradient topologique

$$g(x) = \nabla u_N(x)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_N(x) + \nabla u_D(x)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_D(x), \quad (11)$$

où  $r = \alpha_i/\alpha_e$  désigne le rapport des conductivités et  $\mathcal{P}_{D,r}$  est la matrice de polarisation qui peut être définie explicitement dans le cas d'une inclusion  $D$  elliptique.

Si nous considérons le cas limite où  $r$  tend vers zéro et l'ellipse devient très aplatie, le gradient topologique devient

$$g(x, n) = n^T M(x) n,$$

où  $n = (n_1, n_2)$  est un vecteur unitaire porté par le petit axe de l'ellipse et  $M$  est une matrice symétrique définie par

$$M(x) = -sym(\nabla u_N \oplus \nabla v_N + \nabla u_D \oplus \nabla v_D),$$

où  $sym(A) = (A + A^T)/2$  et  $U \oplus V = UV^T$ .

Ce gradient est minimal au point  $x$  lorsque  $n$  est orienté suivant le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre  $\lambda_1(x)$  de  $M(x)$ .

Pour la localisation partielle de la ou les inclusions  $\omega$ , nous considérons le gradient topologique

$$g(x, n) = \lambda_1(x).$$

Une fois cette localisation partielle obtenue, nous identifions complètement l'inclusion circulaire  $\omega$  en minimisant la fonctionnelle de Kohn-Vogelius suivante,

$$J_{KV}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla(u_N - u_D)|^2,$$

pour déterminer le centre de l'inclusion et la résolution de l'équation non linéaire

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u_N|^2 - \int_{\Gamma} \varphi f = 0,$$

par la méthode de Newton, pour trouver le rayon.

Enfin, le **Chapitre 9** est dédié à l'analyse de sensibilité par rapport à la forme d'un problème de transmission en élasticité linéaire isotrope. Nous cherchons à minimiser la fonctionnelle de forme

$$J(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C : \varepsilon(u_n - u_d) : \varepsilon(u_n - u_d), \quad (12)$$

où  $C$  est le tenseur de l'élasticité, dont les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont constants par morceaux :

$$(\lambda(x), \mu(x)) = \begin{cases} (\lambda_e, \mu_e) & \text{si } x \in \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ (\lambda_i, \mu_i) & \text{si } x \in \omega. \end{cases}$$

Dans le calcul de la dérivée de  $J$  par rapport au domaine  $\omega$ , le recours aux dérivées des états  $u_n$  et  $u_d$  peut être évité par l'introduction d'une formulation lagrangienne du problème où l'équation d'état est considérée comme une contrainte. Dans ce cadre, la fonction coût est égale à un Minmax du Lagrangien par rapport à des espaces fonctionnels. Le calcul du gradient se réduit alors à la dérivée d'un Minmax par rapport à un paramètre qui joue le rôle de "temps virtuel". La justification mathématique provient d'un théorème de dérivabilité d'un Minmax par rapport à un paramètre. Il y a deux types de théorèmes qui sont directement applicables aux problèmes de forme. L'un suppose l'existence de point selle (cf. Correa et Seeger [49]) tandis que l'autre type ne le suppose pas (cf. Delfour et Zolesio [53]).

---

Cette approche permet une justification rigoureuse des méthodes utilisées dans la plupart des problèmes classiques, où l'état est l'élément minimisant d'une fonctionnelle d'énergie quadratique et la fonction coût est dérivable par rapport à la variable d'état. Elle s'étend aussi à certaines classes de fonctions coûts non différentiables et à des situations où l'état est soumis à des contraintes d'égalité.

Nous présentons un algorithme numérique permettant d'identifier l'inclusion  $\omega$  lorsque celle-ci est circulaire ou elliptique.



## Première partie

# UTILISATION DE MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE PLAN COMPLEXE





# Quelques Rappels d'analyse complexe

Nous rappelons dans ce chapitre quelques concepts de l'analyse complexe qui sont en lien étroit avec la théorie de l'approximation dans le plan complexe, tels que les espaces de Hardy du disque et de la couronne, les espaces de Hardy-Sobolev, les fonctions harmoniques et les fonctions conjuguées, l'intégrale singulière et quelques définitions et propriétés relatives à la théorie du potentiel.

## 1.1 ESPACES DE HARDY DU DISQUE ET DE LA COURONNE

Les espaces de Hardy jouent un rôle très important dans l'étude de l'approximation des fonctions et des problèmes extrémaux, en particulier les problèmes extrémaux bornés (BEP) dans le disque et dans la couronne. Pour plus de détails sur les espaces de Hardy, le lecteur peut consulter [54, 45]

### 1.1.1 Espace de Hardy du disque

Posons quelques notations préliminaires. Soient  $\mathbb{C}$  le plan complexe et

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ le disque unité .}$$

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \text{ le cercle unité .}$$

Pour  $r > 0$ , on désigne par  $r\mathbb{D}$  le disque ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$  de centre 0 et de rayon  $r$  et  $r\mathbb{T} = r\partial\mathbb{D}$ . On définit  $L^p(r\mathbb{T})$  comme étant l'espace des fonctions mesurables  $f : r\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$\|f\|_{L^p(r\mathbb{T})} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \right)^{1/p} < +\infty \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{L^\infty(r\mathbb{T})} = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \text{ess}|f(re^{i\theta})| < +\infty \text{ si } p = +\infty.$$

Lorsque  $r = 1$ , on écrira simplement  $L^p(\mathbb{T})$  et  $\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ . On rappelle que pour  $p = 2$ ,  $L^2(\mathbb{T})$  est l'espace de Hilbert des fonctions  $f(z)$  Lebesgue mesurables à valeurs complexes sur  $\mathbb{T}$  telles que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} < \infty$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta$$

De même pour  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\mathbb{T})$  l'espace de Banach des fonctions  $f(z)$  à valeurs complexes essentiellement bornées sur  $\mathbb{T}$  muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{|z|=1} |f(z)|.$$

**Définition 1.1.1** Pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , l'espace de Hardy du disque d'ordre  $p$  noté  $H^p = H^p(\mathbb{D})$  est l'ensemble des fonctions analytiques sur  $\mathbb{D}$  telles que

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \sup \left\{ \|f\|_{L^p(r\mathbb{T})} : 0 \leq r < 1 \right\} < +\infty.$$

Une telle fonction de  $H^p(\mathbb{D})$  admet une limite non tangentielle  $f^*$  dans  $L^p(\mathbb{T})$ , et en outre  $\|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}$ . Ainsi on peut écrire  $H^p(\mathbb{D})$  comme l'ensemble des fonctions de  $L^p(\mathbb{T})$  dont les coefficients de Fourier d'indices négatifs sont nuls. On notera indifféremment la fonction sur le disque et sa limite non tangentielle au bord. La fonction  $f$  est aussi l'intégrale de Poisson de  $f^*$ , ainsi que son intégrale de Cauchy. Dans le cas  $1 < p < +\infty$ ,  $f^*$  est la limite dans  $L^p(\mathbb{T})$  de  $f(re^{i\theta})$  quand  $r$  tend vers 1. On définit également l'espace  $\overline{H^p}(\mathbb{D})$  des fonctions de  $L^p(\mathbb{T})$  antianalytiques, c'est à dire dont les coefficients de Fourier d'indices positifs s'annulent.

Dans le cas  $p = 2$ , On note par  $P_-, P_+$  les opérateurs de projections analytiques et antianalytiques :

$$\begin{aligned} P_- & : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2(\mathbb{D}) \\ P_+ & : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D}) \end{aligned}$$

tels que :

$$P_- \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n, \quad P_+ \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On a clairement  $\overline{H^2}(\mathbb{D}) = P_-(L^2(\mathbb{T}))$ .

Une fonction analytique sur  $\mathbb{D}$  est dite intérieure si elle est de module inférieure à 1 sur  $\mathbb{D}$  et de module 1 presque partout sur  $\mathbb{T}$ . Elle est dite extérieure si elle est de la forme

$$E_g(z) = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} g(e^{i\theta}) d\theta \right),$$

où  $g \in L^1(\mathbb{T})$  est à valeurs réelles. Notons que si  $E_g$  est extérieure et dans  $H^p(\mathbb{D})$ , alors  $g = \log |E_g|$  presque partout sur  $\mathbb{T}$ . Une fonction est dite singulière si elle s'écrit :

$$S_{\mu(z)} = \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} g(e^{i\theta}) d\mu(\theta) \right),$$

où  $\mu$  est une mesure positive sur  $[0, 2\pi]$ , singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. En fait toute fonction intérieure, sans zéro et positive en 0 s'écrit d'une manière unique comme une fonction singulière.

Ces classes de fonctions permettent de décrire entièrement l'espace  $H^p(\mathbb{D})$ , grâce au théorème suivant :

**Théorème 1.1.2** *Si  $f \in H^p(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ , alors il existe une unique décomposition  $f = cBES$ , où  $c \in \mathbb{T}$ ,  $B$  est le produit de Blaschke normalisé constitués des zéros de  $f$ ,  $E$  est une fonction extérieure et  $S$  est une fonction singulière.*

*Plus précisément  $E = E_{\log |f|} \in H^p(\mathbb{D})$ .*

La convergence du produit de Blaschke

$$B(z) = z^k \prod_{\substack{z_j \neq 0 \\ f(z_j)=0}} \frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z_j}$$

où  $k$  est la multiplicité de 0 et où  $z_j$  est répété autant de fois que sa multiplicité, est assurée par la condition

$$\sum_j (1 - |z_j|) < \infty$$

qui a lieu dès que  $f \in H^p(\mathbb{D})$ . Cette factorisation montre en particulier qu'une fonction de  $H^p(\mathbb{D})$  ne peut valoir 0 sur un sous ensemble de mesure strictement positive de  $\mathbb{T}$  à moins d'être nulle. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [54, 103].

Enfin, pour  $p = 2$  ou  $\infty$  on désignera par  $H_N^p(\mathbb{D})$  l'espace  $H^p(\mathbb{D}) + R_N$  où  $R_N$  est l'ensemble des fractions rationnelles de degré au plus  $N$  et ayant tous leurs pôles dans  $\mathbb{D}$  et s'annulant à l'infini. En particulier,  $R_N \subset \overline{H^2}(\mathbb{D})$ .

### 1.1.2 Espaces de Hardy et de Hardy-Sobolev de la couronne

Nous commençons par rappeler quelques notations. Soit  $s$  un réel tel que  $0 < s < 1$ . On note par

$$s\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq s\} \text{ le disque de rayon } s.$$

$$s\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = s\} \text{ le cercle de rayon } s.$$

$$G_s = \{z \in \mathbb{C} : s < |z| < 1\} = \mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}}).$$

$$\partial G_s = s\mathbb{T} \cup \mathbb{T} \text{ le bord de } G_s.$$

L'espace de Hardy de la couronne  $H^2(G_s)$  a été défini par Rudin [91] comme étant l'espace des fonctions analytiques  $f$  tel que  $|f(z)|^2 \leq u(z)$ , où  $u$  est une fonction harmonique réelle dans  $G_s$ . En se référant à [45], nous avons la définition équivalente

$$H^2(G_s) = H^2(\mathbb{D}) \oplus H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}}) \quad (1.1)$$

où  $H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$  est l'espace des fonctions  $f$  analytiques dans le complémentaire de  $s\overline{\mathbb{D}}$  qui s'annulent à l'infini et qui ont une trace  $f^* = \lim_{r \rightarrow s} f(re^{i\theta})$  appartenant à  $L^2(s\mathbb{T})$ .

Notons qu'une fonction  $f \in H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$  admet un développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n z^n \text{ avec } \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n s^{2n} < \infty. \quad (1.2)$$

L'espace de Hardy  $H^2(\partial G_s)$  du bord de la couronne  $\partial G_s$  est défini comme la fermeture dans  $L^2(\partial G_s)$  de l'ensemble  $R_{G_s}$  des fonctions rationnelles, dont les pôles sont dans le complémentaire de  $\overline{G_s}$ .

Notons (voir [45]) que  $H^2(\partial G_s)$  est un sous-espace Hilbertien de  $L^2(\partial G_s)$  qui admet

$$e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{1 + s^{2n}}}$$

comme base orthonormée par rapport au produit scalaire de  $L^2(\partial G_s)$

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\partial G_s)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \langle f, g \rangle_{L^2(s\mathbb{T})}.$$

Comme les fonctions de l'espace  $H^2(\mathbb{D})$ , respectivement  $H_0^2(\mathbb{C} \setminus s\overline{\mathbb{D}})$ , admettent des limites non tangentielles p.p. sur  $\mathbb{T}$ , respectivement sur  $s\mathbb{T}$ , alors d'après la décomposition (1.1) les fonctions de  $H^2(G_s)$  admettent des limites non tangentielles p.p. sur  $\partial G_s$  et qui appartiennent à  $L^2(\partial G_s)$ . Cela permet d'identifier  $H^2(\partial G_s)$  à  $H^2(G_s)$ .

Une fonction  $f \in H^2(G_s)$ , admet le développement suivant :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n, \text{ avec } z \in G_s, \text{ sa norme est définie par } \|f\|_{H^2(G_s)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + s^{2n}) |f_n|^2.$$

Pour  $m \geq 1$ , on introduit aussi l'espace de Hardy-Sobolev  $H^{m,2}(G_s)$  d'ordre  $m$  comme le sous espace de  $H^2(G_s)$  tel que les dérivées  $f^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq m$ , soient également dans  $H^2(G_s)$ . L'espace  $H^{m,2}(G_s)$  est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^{m,2}(G_s)} = \sum_{l=0}^m \langle f^{(l)}, g^{(l)} \rangle_{L^2(\partial G_s)},$$

par conséquent, la norme dans  $H^{m,2}(G_s)$ , peut s'écrire

$$\|g\|_{H^{m,2}(G_s)}^2 = \|g\|_{W^{m,2}(\mathbb{T})}^2 + \|g\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})}^2$$

où les normes des espaces de Sobolev  $W^{m,2}(\mathbb{T})$  sur  $\mathbb{T}$  et  $W^{m,2}(s\mathbb{T})$  sur  $s\mathbb{T}$  sont données par

$$\|g\|_{W^{m,2}(\mathbb{T})}^2 = \sum_{l=0}^m \|g^{(l)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^m \int_0^{2\pi} |g^{(l)}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_{m,n} |g_n|^2, \quad (1.3)$$

$$\|g\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})}^2 = \sum_{l=0}^m \|g^{(l)}\|_{L^2(s\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^m \int_0^{2\pi} |g^{(l)}(se^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_{m,n} s^{2n} |g_n|^2, \quad (1.4)$$

avec

$$w_{m,n} = 1 + n^2 + n^2(n-1)^2 + \dots + n^2(n-1)^2 \dots (n-m+1)^2, \quad (1.5)$$

$$\mu_{m,n} = 1 + n^2 s^{-2} + \dots + n^2(n-1)^2 \dots (n-m+1)^2 s^{-2m}. \quad (1.6)$$

Notons que  $H^{m,2}(G_s)$  admet

$$(e_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \left( \frac{z^n}{\sqrt{l_{m,n}}} \right), \quad l_{m,n} = w_{m,n} + \mu_{m,n} s^{2n}$$

comme un ensemble orthonormal dense, et par conséquent admet le noyau reproduisant suivant :

$$K_m(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x^k \bar{y}^k}{l_{m,n}}. \quad (1.7)$$

## 1.2 FONCTIONS HARMONIQUES, FONCTIONS CONJUGUÉES

Nous rappelons dans cette section les propriétés des fonctions harmoniques et des fonctions conjuguées. (voir, [34]).

**Définition 1.2.1** Une fonction  $u(z)$  ou  $u(x, y)$  monovaluée à valeurs réelles dans un ouvert  $\Omega$  du plan complexe est dite harmonique dans  $\Omega$  ou fonction potentielle si elle est continue ainsi que ses dérivées partielles premières et secondes et vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**Définition 1.2.2** Soit  $u \in L^2(\mathbb{T})$  une fonction à valeurs réelles. On appelle fonction conjuguée de  $u$  dans le disque  $\mathbb{D}$ , l'unique fonction réelle  $\tilde{u}$  de  $L^2(\mathbb{T})$  telle que

$$\begin{cases} u + i\tilde{u} \in H^2(\mathbb{D}) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\theta}) d\theta = 0. \end{cases}$$

Si  $u(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ , alors  $\tilde{u}(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}$ , avec

$$b_n = -ia_n \text{ si } n > 0, \quad b_n = ia_n \text{ si } n < 0 \text{ et } b_0 = 0.$$

Si  $u$  est complexe on définit  $\tilde{u}$  par linéarité :  $\widetilde{Re(u)} + i\widetilde{Im(u)}$ .

Si  $u$  est définie sur  $\mathbb{D}$  ou sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  et admet une limite non tangentielle  $u^*$  sur  $\mathbb{T}$ , on définit  $\tilde{u}$  comme  $\tilde{u}^*$

Si  $u$  est harmonique dans  $\Omega$ , alors

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

est analytique car ses parties réelles et imaginaires vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

En utilisant l'égalité  $dz = dx + idy$  et l'expression de  $f$  on aura l'égalité suivante :

$$fdz = \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left( - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

On remarque que la partie réelle de  $fdz$  est égale à la différentielle de  $u$ ,

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right).$$

Si  $u$  admet une conjuguée harmonique  $\tilde{u}$ , alors sa différentielle est égale à la partie imaginaire de  $fdz$

$$d\tilde{u} = \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} dy \right) = \left( - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

En général la fonction conjuguée d'une fonction harmonique n'est pas monovaluée (cas des fonctions harmonique définie sur un ouvert multiplement connexes). Pour éviter toute ambiguïté on utilise la notation

$$d^*u = \left( - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

et on appelle  $d^*u$  la conjuguée différentielle de  $du$ . Nous avons donc

$$fdz = du + id^*u.$$

Par le théorème de Cauchy l'intégrale de  $fdz$  s'annule le long de tout cycle  $\gamma$  homologue à zéro dans  $\Omega$ . Comme l'intégrale de la différentielle exacte  $du$  s'annule le long de  $\gamma$ , nous avons donc

$$\int_{\gamma} d^*u = \int_{\gamma} - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0.$$

Si  $\gamma$  a pour équation  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  et si la dérivée  $z'(t)$  existe et est non nulle (on dit que  $\gamma$  est régulier) alors la tangente existe en tout points  $z(t)$  de  $\gamma$  et sa direction est déterminée par l'angle  $\alpha = \arg(z'(t))$ . On peut donc écrire  $dx = |dz| \cos \alpha$ ,  $dy = |dz| \sin \alpha$ . On définit également la normale au point  $z(t)$  par sa direction  $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ . La dérivée normale au point  $z(t)$  est définie par

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \beta.$$

En remplaçant  $\beta$  par  $\alpha - \frac{\pi}{2}$ , on obtient  $d^*u = \frac{\partial u}{\partial n}|dz|$ , ce qui nous permet d'écrire

$$\int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n}|dz| = 0.$$

Dans un ouvert simplement connexe l'intégrale de  $d^*u$  s'annule le long de tout cycle, et la fonction harmonique  $u$  admet une fonction conjuguée monovaluée. Dans le cas multiplement connexe la fonction conjuguée admet des périodes

$$\int_{\gamma_i} d^*u = \int_{\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n}|dz|.$$

### 1.3 INTÉGRALES SINGULIÈRES

Soit  $\gamma$  un arc lisse orienté du plan complexe  $\mathbb{C}$ , et  $f$  une fonction définie sur  $\gamma$ . L'intégrale de Cauchy

$$\varphi : t \rightarrow \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-t} dz$$

est singulière sur l'arc  $\gamma$ . Néanmoins, sous certaines conditions, on peut définir des limites lorsque la variable tend vers un point  $t_0$  de  $\gamma$  différente d'une extrémité. Dénotons par  $+$  la région située à gauche de la direction positive de  $\gamma$  et par  $-$  celle située à droite. On dénote par  $\varphi^+(t_0)$  la limite éventuelle de  $\varphi(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $t_0$  le long d'une courbe incluse dans la région  $+$ . On définit  $\varphi^-(t_0)$  de manière analogue.

Ces limites peuvent s'exprimer en utilisant la notion d'intégrale singulière.

**Définition 1.3.1** [34] *Si  $f$  est une fonction définie sur un arc lisse  $\gamma$  orienté du plan complexe, et  $t_0 \in \gamma$ , on appelle intégrale singulière ou valeur principale de l'intégrale de Cauchy de  $f$  sur  $\gamma$  en  $t_0$  :*

$$vp \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-t_0} dz := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma \setminus \gamma_{\epsilon}} \frac{f(z)}{z-t_0} dz$$

où  $\gamma_{\epsilon} = B(t_0, \epsilon) \cap \gamma$ .

On peut alors énoncer les formules dites de Plemelj-Sokhotzki :

**Théorème 1.3.2** [34, Thm 3,p7] *Avec les mêmes notations que ci-dessus, si  $f$  est hölderienne sur  $\gamma$ , alors*

$$\varphi^{\pm}(t_0) = \pm \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2i\pi} vp \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-t_0} dz. \quad (1.8)$$

### 1.4 THÉORIE DU POTENTIEL

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques notions relatives à la théorie du potentiel. Dans les définitions suivantes,  $K$  désigne un compact du plan complexe  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{P}(K)$  est l'ensemble des mesures de probabilité sur  $K$ . On se réfère à Ransford [90], on a les définitions suivantes.

**Définition 1.4.1 ( Potentiel)** On définit le potentiel logarithmique d'une mesure  $\mu \in \mathcal{P}(K)$  par :

$$\begin{aligned} P_\mu : \mathbb{C} &\longrightarrow (-\infty, +\infty] \\ z &\longmapsto \int_K \log \frac{1}{|z-w|} d\mu(w) \end{aligned}$$

**Définition 1.4.2 (Énergie)** On définit l'énergie logarithmique d'une mesure  $\mu \in \mathcal{P}(K)$  par

$$I(\mu) = \int P_\mu(z) d\mu(z) = \iint \log \frac{1}{|z-w|} d\mu(z) d\mu(w). \quad (1.9)$$

**Définition 1.4.3 (Capacité)** la capacité de  $K$  noté  $\text{cap}(K)$  est définie par :

$$\text{cap}(K) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(K)} e^{-I(\mu)}. \quad (1.10)$$

**Définition 1.4.4 (Mesure d'équilibre)** Si

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I(\mu) = I(\nu), \quad \nu \in \mathcal{P}(K), \quad (1.11)$$

on dit que  $\nu$  est une mesure d'équilibre de  $K$ .

On montre que  $\nu$  existe et est unique si  $K$  est non polaire (i-e de capacité strictement positive).

**Définition 1.4.5 (Condensateur)** Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux ensembles compacts disjoints, chacun de capacité strictement positive et  $\mu_1, \mu_2$  deux mesures de probabilités respectivement sur  $E_1$  et  $E_2$ . On définit l'énergie entre  $E_1$  et  $E_2$  par :

$$V = \min_{\mu_1 \in \mathcal{P}(E_1), \mu_2 \in \mathcal{P}(E_2)} \iint \log \frac{1}{|z-t|} d\mu^*(t) d\mu^*(z), \quad \text{avec } \mu^* = \mu_1 - \mu_2. \quad (1.12)$$

La capacité du condensateur formé de  $E_1$  et  $E_2$  est définie par

$$\text{Cap}(E_1, E_2) = \frac{1}{V}. \quad (1.13)$$

Le potentiel associé est donné par :

$$P_{\mu^*}(z) = \int \log \frac{1}{|z-t|} d\mu^*(t). \quad (1.14)$$

## 1.5 GÉOMÉTRIE DANS LE DISQUE

**Définition 1.5.1** [82] Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes du disque unité  $\mathbb{D}$ , la géodésique hyperbolique qui joint  $z_1$  et  $z_2$  c'est l'arc de longueur minimale entre  $z_1$  et  $z_2$  pour la distance hyperbolique :

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|} \right). \quad (1.15)$$



### 1.5.1 La métrique chordale

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère la sphere ( dite de Riemann )  $S$  avec centre  $(0, 0, 1/2)$  et de rayon  $1/2$ . Une bijection  $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow S \setminus (0, 0, 1)$  est construite comme suit : pour  $z \in \mathbb{C}$ , soit  $\sigma$  le point d'intersection entre  $S$  et la droite qui passe par  $(0, 0, 1)$  et  $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), 0)$ . Soit  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$  le plan complexe étendu. En posant  $\sigma(\infty) = (1, 0, 0)$ , on trouve une extension  $\sigma : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S$  bijective et on définit

$$\chi(z_1, z_2) = |\sigma(z_1) - \sigma(z_2)|, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}} \quad (1.16)$$

( $|\cdot|$  étant la distance euclidienne). L'interprétation géométrique nous permet de vérifier que  $\chi(\cdot)$  est une métrique sur  $\overline{\mathbb{C}}$  dite métrique chordale.

#### Proposition 1.5.2

$$\begin{aligned} \chi(z, \infty) &= \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \quad z \in \mathbb{C}, \\ \chi(z_1, z_2) &= \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \chi(z_1, z_2) &\leq 1 \text{ et } \chi(z_1, z_2) = 1 \text{ ssi } \frac{1}{z_1} = -\overline{z_2}, \\ \chi(z_1, z_2) &= \chi(\overline{z_1}, \overline{z_2}) = \chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right), \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

### 1.5.2 Transformation de Moebius

**Définition 1.5.3** Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $ad - bc \neq 0$ . On définit une transformation de Moebius ou transformation fractionnaire linéaire ou homographie par la formule

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (1.17)$$

**Proposition 1.5.4** a) Une transformation de Moebius  $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  est bijective, et continue par rapport à la métrique chordale.

b) Si  $T$  et  $S$  sont deux transformations de Moebius, alors  $T^{-1}$  et  $T \circ S$  sont des transformations de Moebius.

c) L'image d'un cercle (resp. disque) dans  $\overline{\mathbb{C}}$  par une transformation de Moebius est aussi un cercle (resp. disque).

Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4$  des points de  $\mathbb{C}$  avec  $\operatorname{card}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \geq 3$ . Le bi-rapport de ces quantités est défini par

$$\mathcal{B}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}. \quad (1.18)$$

d) La fonction  $S(z) = \mathcal{B}(z, z_2, z_3, z_4)$  est l'unique transformation de Moebius telle que  $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0$  et  $S(z_4) = \infty$ .

e) Si  $T$  est une transformation de Moebius, alors

$$\mathcal{B}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathcal{B}(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)),$$

et

$$|\mathcal{B}(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \frac{\chi(z_3, z_1) \chi(z_4, z_2)}{\chi(z_4, z_1) \chi(z_3, z_2)}.$$

### 1.5.3 Applications conformes

On se réfère à Pommerenke [88] pour les résultats suivants.

**Définition 1.5.5** *On dit qu'une application  $f$  transforme conformément un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C} \cup \infty$  en un ouvert  $\Omega' \subset \mathbb{C} \cup \infty$  si*

- (i)  $f$  est méromorphe dans  $\Omega$ ;
- (ii)  $f$  est injective.
- (iii)  $f(\Omega) = \Omega'$

**Proposition 1.5.6** *Toute transformation de Moebius est conforme.*

**Définition 1.5.7** *Une courbe de Jordan  $C$  (une courbe fermée sans point double) est dite de classe  $C^{m,\alpha}$ , avec  $m$  entier positif et  $0 < \alpha < 1$ , si elle admet une paramétrisation  $C : w(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 2\pi$ , telle que  $w$  est  $m$  fois continûment différentiable,  $w'(\tau) \neq 0$  et il existe une constante  $M_1 > 0$  telle que*

$$|w^{(m)}(\tau_1) - w^{(m)}(\tau_2)| \leq M_1 |\tau_1 - \tau_2|^\alpha.$$

**Théorème 1.5.8 (Théorème de représentation de Riemann)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  distinct de  $\mathbb{C}$  et simplement connexe. Alors il existe une application conforme de  $\Omega$  sur  $\mathbb{D}$ .*

**Théorème 1.5.9 (Carathéodory)** *Soit  $g$  une transformation conforme du disque unité  $\mathbb{D}$  vers un domaine  $G \subset \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ . Alors  $g$  s'étend en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{D}}$  vers  $\overline{G}$  si et seulement si  $\partial G$  est une courbe de Jordan.*

**Théorème 1.5.10 (Warschawski)** *Soit  $g$  une application conforme du disque unité  $\mathbb{D}$  vers l'intérieur d'une courbe de Jordan  $C$  de classe  $C^{m,\alpha}$ , avec  $m = 1, 2, \dots$  et  $0 < \alpha < 1$ . Alors  $g^{(m)}$  admet une extension continue sur  $\overline{\mathbb{D}}$  et*

$$|g^{(m)}(z_1) - g^{(m)}(z_2)| \leq M_2 |z_1 - z_2|^\alpha, \quad z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}},$$

autrement dit  $g \in C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{D}})$ . De plus

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{g(z) - g(\xi)}{z - \xi} \neq 0, \quad z, \xi \in \overline{\mathbb{D}}.$$

# Problème de détection de fissures

Nous considérons le problème inverse géométrique de la détection de fissures dans un domaine plan à partir des mesures sur le bord du domaine. Ce problème s'inscrit dans le cadre du contrôle non destructif des matériaux. Le principe de ces méthodes est d'imposer une condition sur le bord extérieur du domaine que l'on veut examiné (par exemple on impose un flux de chaleur  $\Phi$ ) et on mesure la réponse  $u$  du matériau (la température dans ce cas). Nous rappelons dans ce chapitre les principaux résultats relatifs à l'étude de ce problème.

## 2.1 PROBLÈME DIRECT

On considère une fissure intérieure modélisée par une courbe  $\gamma$  orientée de classe  $C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  inclus dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , simplement connexe à bord  $\Gamma$  de même régularité que  $\gamma$ . On se donne un flux de chaleur de densité  $\Phi \in L^2(\Gamma)$  non identiquement nul le

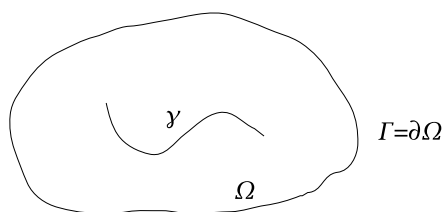


FIGURE 2.1 – Le domaine  $\Omega$

long de  $\Gamma$  et satisfaisant la condition de normalisation, à savoir :

$$\int_{\Gamma} \Phi(z) ds(z) = 0. \quad (2.1)$$

Le problème direct est le suivant :

Étant donnés  $\Omega, \gamma \subset \Omega$  et  $\Phi$ , trouver une solution  $u$  au problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \setminus \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} &= \Phi \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^\pm}{\partial n_\gamma} &= 0 \text{ sur } \gamma^0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\gamma^0 = \gamma \setminus \{\gamma_0, \gamma_1\}$  et  $(\gamma_0, \gamma_1)$  sont les extrémités de la fissure  $\gamma$ . On note par  $\sigma = u^+ - u^-$  le saut de la température à travers la fissure. Le signe  $+$  désigne la région située à gauche de la direction positive de  $\gamma$  et le signe  $-$  désigne la région située à droite. Il est connu que le problème (2.2) admet une solution unique  $u \in H^{3/2}(\Omega)$  dès que l'on ajoute la condition de normalisation suivante (voir [47, Thm 6.7.1, p253])

$$\int_\Gamma u(z) ds(z) = 0. \quad (2.3)$$

Le théorème d'injection, voir [47, Thm 2.1.3, p30] assure l'appartenance de la solution  $u$  à la classe de Hölder  $C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$  et puisque  $u$  est harmonique au sens faible, à savoir

$$\int_{\Omega \setminus \gamma} \Delta u \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{l'espace des fonctions continues à support compact dans } \Omega,$$

$u$  est donc harmonique au sens classique dans  $\Omega \setminus \gamma$ , (voir [50]).

## 2.2 PROBLÈME INVERSE

Le problème que nous souhaitons résoudre est le problème inverse associé au problème (2.2), lorsque l'on ne connaît pas la fissure  $\gamma$  et qu'on dispose pour l'identifier des mesures surdéterminées sous la forme de flux  $\Phi$  et de température  $u$ .

Pour déterminer sous quelles conditions ce problème inverse est bien posé et proposer une méthode d'identification, il nous faut étudier les points suivants.

- **Identifiabilité :**

Les questions posées pour l'étude de l'identifiabilité sont : Peut-on identifier une géométrie inconnue (fissure) par des mesures de température ? si oui, combien de mesures sont nécessaires pour l'identification ?

- **Stabilité :**

Comme les mesures relevées au bord sont censées être prises expérimentalement, il est important de montrer que deux mesures proches ne peuvent correspondre qu'à deux géométries proches. Ce qui signifie qu'une faible erreur sur les mesures ne conduit pas à une grande erreur sur la géométrie.

- **Identification :**

lorsque les conditions de l'identifiabilité et de stabilité sont remplies, le problème inverse est bien posé au sens de Hadamard et on peut aborder la question de l'identification. Il s'agit de définir un procédé d'inversion afin de retrouver la localisation et la forme de la fissure

### 2.2.1 Résultats d'identifiabilité

Le problème de l'identifiabilité consiste à prouver que l'opérateur  $\eta_\Phi : \gamma \rightarrow u|_\Gamma$  est injectif. Cette question a été initialement introduite par A.Friedman et M.Vogelius [58]. Ils ont prouvé un résultat d'identifiabilité dans le cas d'une fissure intérieure de classe  $C^2$ . Il y est établi que le choix de deux flux particuliers sur le bord du domaine suffit pour déterminer d'une manière unique la présence d'une fissure de classe  $C^2$ , et que ce nombre de flux est minimal.

Ce résultat a connu plusieurs généralisations pour le cas non plus d'une seule fissure, mais de collection de fissures dans le domaine  $\Omega$ . Dans l'article de K Bryan et M.Vogelius [39], on trouve une preuve de l'identifiabilité de  $n$  fissures par  $n + 1$  flux, ce résultat est renforcé par G.Alessandrini et A.D.Valenzuela [16] ainsi que par H.Kim et J.K.Seo [68] qui démontrent des résultats d'identifiabilité seulement avec deux flux (résultat minimal). Les techniques de preuve employées dans ces travaux reposent sur une étude des courbes de niveau de la solution.

Ainsi, sous des hypothèses de régularité convenable, on voit que le choix de deux flux particuliers permet d'obtenir l'unicité des mesures de bord par rapport aux fissures dans de nombreux cas.

On notera par ailleurs les résultats de l'identifiabilité obtenus dans le cas où l'on ne dispose que de mesures sur une partie du bord et que l'on cherche à identifier une fissure atteignant la frontière extérieure du domaine (on parle d'une fissure débouchante). On trouve dans un article de S. Andrieux et al [19] un résultat d'unicité à partir d'un unique flux particulier.

### 2.2.2 Résultats de stabilité

Le premier résultat de stabilité à été fourni par les mêmes auteurs M.Vogelius et A.Friedmann [58]. C'est un résultat de stabilité lipschitzienne portant sur l'angle entre deux fissures rectilignes. Pour une estimation plus complète avec ce même type de défauts, on citera les résultats énoncés par G.Alessandrini, E.Beretta et S.Vessella [15]. Le cas d'une fissure intérieure non rectiligne a été étudié par Alessandrini et Rondi [12]. Ils ont obtenu le résultat de stabilité logarithmique suivant : si

$$\max_{i=1,2} \|u_i - u'_i\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \varepsilon, \quad (2.4)$$

alors les fissures correspondantes  $\gamma$  et  $\gamma'$  vérifient

$$d_H(\gamma, \gamma') \leq w(\varepsilon) \quad (2.5)$$

avec  $w : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  vérifiant

$$w(\varepsilon) \leq K (\log |\log(\varepsilon)|)^{-\beta}, \text{ pour tout } 0 < \varepsilon < 1/e, \quad (2.6)$$

où  $K, \beta > 0$  dépendent à priori des données seulement et  $d_H$  est la distance de Hausdorff définie par

$$d_H(\gamma, \gamma') = \max \left\{ \sup_{x \in \gamma'} \text{dist}(x, \gamma), \sup_{x \in \gamma} \text{dist}(x, \gamma') \right\}. \quad (2.7)$$

Pour le cas de fissures débouchantes plusieurs résultats de stabilité ont été démontrés. On citera le travail de S.Andrieux, A.Ben Abda et M.Jaoua [22] dans lequel ils ont prouvé un résultat de stabilité faible par rapport à la géométrie du défaut, et un résultat de stabilité locale lipschitzienne lorsque la fissure est rectiligne.

### 2.2.3 Résultats d'identification

Pour l'identification, on utilise en général des méthodes itératives qui sont basées sur la minimisation d'une fonctionnelle moindres carrées. Ces méthodes nécessitent à chaque itération, le calcul de la solution du problème direct. F. Santosa et M. Vogelius [95] ont construit un algorithme itératif d'identification de fissure intérieure rectiligne parfaitement conductrice par des mesures électrostatiques sur le bord  $\Gamma$ . L'algorithme est basé sur la formulation faible du problème direct ramené sur le bord du domaine grâce à la surdétermination des conditions aux limites et au choix des fonctions tests. Les mesures sont obtenues à partir de flux correspondants au choix de deux points de la frontière où sont placées les deux électrodes. L'algorithme comporte à chaque étape une phase d'optimisation pour le choix du flux.

On citera aussi les méthodes semi-explicite, qui donnent lieu à des techniques d'inversion ne nécessitant pas le calcul de la solution du problème direct. S. Andrieux et al [21] ont introduit une méthode qui consiste à comparer la réponse de la pièce fissurée avec celle d'une pièce saine de même caractéristique. Cette méthode repose sur la fonctionnelle d'écart à la réciprocité (RG=Reciprocity Gap)

$$RG_{[\Phi, f]}(v) = \int_{\Gamma} \left( \Phi v - \frac{\partial v}{\partial n_{\Omega}} f \right) ds, \quad (2.8)$$

avec  $f = u|_{\Gamma_1}$  ( $u$  est la solution du problème (2.2)) et  $v$  une fonction harmonique dans  $\Omega$ . La deuxième formule de Green relie cette intégrale à la géométrie  $\gamma$  inconnue, puisque

$$RG_{[\Phi, f]}(v) = \int_{\gamma} [u] \frac{\partial v}{\partial n_{\gamma}} ds, \text{ avec } [u] = u^+ - u^-. \quad (2.9)$$

Si la fissure est plane dans un domaine  $3D$  ou rectiligne dans un domaine  $2D$ , la normale  $n_{\gamma}$  est indépendante du point  $x$  de  $\gamma$ . On peut alors la déterminer de la manière suivante : pour déterminer le plan ( $\Pi$ ) de la fissure, on considère un repère orthonormal direct  $(O, e_1, e_2, e_3)$  et on note l'équation du plan comme étant  $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + C = 0$  où  $(x_1, x_2, x_3)$  sont les coordonnées cartésiennes et  $N = (n_1, n_2, n_3)$  est un vecteur unitaire normal au plan.

**Proposition 2.2.1** *On note par  $\chi_k$  l'application  $x \mapsto x_k$  et  $L_k = RG_{[\Phi, f]}(\chi_k)$  pour  $k = 1, 2, 3$ . Si le flux  $\Phi$  est choisi tel que  $\int_{\gamma} [u]_{\gamma} ds \neq 0$ , alors les composantes du vecteur unitaire normal du plan  $\Pi$  de la fissure sont données par*

$$n_k = \frac{L_k}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}}, \text{ pour } k = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

de plus

$$\left| \int_{\gamma} [u]_{\gamma} ds \right| = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}. \quad (2.11)$$

Une fois la normale  $N$  déterminée, on considère un nouveau repère orthonormal  $(O, T, V, N)$  et on associe les coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  à ce nouveau repère. L'équation du plan  $(\Pi)$  par rapport à ce nouveau repère est donnée par  $X_3 - C = 0$ .

Avec la même condition  $\int_{\gamma} [u]_{\gamma} ds \neq 0$ , la proposition suivante complète la localisation du plan  $(\Pi)$  par la détermination de la constante  $C$ .

**Proposition 2.2.2** *La constante  $C$  déterminant le plan  $(\Pi)$  est donnée par*

$$C = \frac{RG_{[\Phi, f]}(p)}{\left| \int_{\gamma} [u]_{\gamma} ds \right|} \quad (2.12)$$

où

$$p(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_3^2 - X_2^2}{2}. \quad (2.13)$$

Une fois le plan de la fissure déterminé, il reste à déterminer la fissure elle-même dans le plan. Dans ce but, les auteurs décrivent une méthode constructive d'identification. Celle-ci considère le prolongement  $\widetilde{[u]_{\gamma}}$  de  $[u]_{\gamma}$  dans  $\Sigma$  avec  $\Sigma \supset \Pi \cap \Omega$ , et cherche à déterminer son support. La fonction  $\widetilde{[u]_{\gamma}}$  peut s'interpréter comme une forme linéaire dans  $L^2(\Sigma)$ . Pour cela, nous nous plaçons dans un repère  $(O', T, V, N)$ ,  $O'$  étant une nouvelle origine choisit dans le plan  $(\Pi)$ , on construit une base Hilbertienne  $v_n(X_1, X_2)$  de  $L^2(\Sigma)$  correspondant aux fonctions propres du problème de valeurs propres suivant (voir [38])

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \lambda_n v_n & \text{Dans } \Sigma \\ v_n = 0 & \text{dans } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (2.14)$$

On note par  $h_n$  la fonction définie par  $h_n(X_3) = 1/\sqrt{\lambda_n} sh(\sqrt{\lambda_n} X_3)$ . La fonction

$$g_n(X_1, X_2, X_3) = h_n(X_3) v_n(X_1, X_2) \quad (2.15)$$

vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta g_n = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial g_n}{\partial N} = v_n & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.16)$$

Nous avons le lemme suivant

**Lemme 2.2.3** *Nous avons la décomposition*

$$RG_{[\Phi, f]}(g_n) = \int_{\Sigma} \widetilde{[u]_{\gamma}} v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Le lemme 2.2.3 détermine la décomposition de  $\widetilde{[u]_{\gamma}}$  suivant la base  $v_n$  de  $L^2(\Sigma)$  ce qui permet d'identifier  $\widetilde{[u]_{\gamma}}$  et en particulier son support.

Les auteurs présentent finalement le résultat d'identifiabilité suivant :

**Théorème 2.2.4** *Si le domaine ouvert  $\Omega$  contient une fissure plane  $\gamma$  (non nécessairement connexe) et si le flux  $\Phi$  est choisi tel que  $\int_{\gamma}[u]\gamma ds \neq 0$ , alors  $\gamma$  est déterminé de manière unique.*

Cette approche par la fonctionnelle d'écart à la réciprocité, présente plusieurs avantages. Il s'agit d'une méthode semi explicite, ce qui permet d'obtenir des informations sur la fissure recherchée en un temps moindre que celui pris par les algorithmes itératifs. De plus, cette approche ne suppose pas que la fissure soit nécessairement connexe et reste robuste par rapport au bruit sur les mesures au bord.

Notons que l'approche que nous avons considérée ici, peut être reformulée dans le contexte de l'analyse complexe. En effet, grâce à la condition (2.1) imposée sur le flux  $\Phi$ , la solution  $u$  du système (2.2) admet une conjuguée harmonique  $\tilde{u}$  monovaluée et peut être vue comme étant la partie réelle d'une fonction analytique  $f$  dans  $\Omega \setminus \gamma = \Omega_{\gamma}$  et définie comme

$$f(z) = u(z) + i\tilde{u}(z). \quad (2.18)$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann sur le bord extérieur du domaine, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}. \quad (2.19)$$

On peut donc étendre  $f$  sur le bord extérieur de  $\Omega$  de la manière suivante :

$$F(z) = f|_{\Gamma}(z) = u(z) + i \int_a^z \Phi(z) ds(z), \quad z \in \Gamma, \quad (2.20)$$

avec  $a \in \Gamma$  choisi tel que  $\tilde{u}(a) = 0$ .

Nous rappelons maintenant une représentation intégrale de  $f$ .

**Théorème 2.2.5** [27] *Soit  $u$  la solution de (2.2). Alors  $\sigma = [u] = u^+ - u^-$  est une fonction Hölder continue d'exposant  $1/2$  sur  $\gamma$ .*

**Théorème 2.2.6** [27] *Soit  $u$  la solution du problème (2.2) . Alors  $u = \text{Re}(f)$  dans  $\Omega_{\gamma}$ , avec*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)}{t-z} dt + g(z), \quad z \in \Omega_{\gamma}, \quad (2.21)$$

$g \in H^{\infty}(\Omega)$  (i.e. analytique bornée dans  $\Omega$ ) et  $\sigma = u^+ - u^-$ , le saut de la température à travers  $\gamma$ .

Le problème inverse de détection de fissures peut alors s'exprimer de la manière suivante :

*Connaissant  $F$  sur  $\Gamma$  trouver un arc de Jordan  $\gamma$  inclus dans  $\Omega$  tel que  $F$  soit la trace d'une fonction  $f$  analytique et bornée dans  $\Omega_{\gamma}$ .*

Nous pouvons remarquer que la fonction  $F$  dans  $L^p(p = 2, \infty)$  est la trace d'une fonction  $f \in H^p, (p = 2, \infty)$  sans singularité si et seulement si la fissure  $\gamma$  est vide ou confondue



avec une ligne de niveau de la température  $u = \Re(f)$ , cf. (2.18).

Une fois qu'un flux identifiant est choisi (par exemple, selon la méthode proposée dans [58]) nous transformons le problème d'identification en un problème d'approximation de la fonction  $F$  sur le bord extérieur  $\Gamma$ .

Nous nous intéressons plus particulièrement aux approximations rationnelles ou méromorphes de la fonction  $F$  sur le bord extérieur  $\Gamma$  et comment les pôles de ces approximations fournissent des informations sur la localisation de  $\gamma$ .

Nous présentons dans les deux chapitres qui suivent les différentes méthodes d'approximation et leurs applications à l'identification de la fissure  $\gamma$ .



# Approximations rationnelle et méromorphe

Nous passons en revue dans ce chapitre les approches basées sur des méthodes d'approximation rationnelle ou méromorphe et leurs applications à la détection de fissures.

Comme les données accessibles sont sur le bord du domaine, une courbe du plan complexe, on est amené de manière naturelle à considérer des schémas d'approximation par rapport à ces courbes. Pour se ramener à des schémas classiques, et en particulier mener des expérimentations numériques, on se restreint en général au cas d'un domaine circulaire, et par suite, à des approximations sur le cercle unité  $\mathbb{T}$ , au sens de la norme quadratique ou de la norme du sup.

Nous rappelons les liens entre la fissure recherchée et les pôles des approximants, en particulier le fait que ces derniers permettent de localiser les extrémités de la fissure. Nous vérifions par des expérimentations numériques que l'approximation méromorphe s'applique dans le cadre de défauts de géométrie un peu plus généraux tels que des cavités ou des petites inclusions.

Finalement, nous envisageons une méthode d'identification complète, basée sur des transformations conformes et la résolution d'un problème extrémal borné dans la couronne.

## 3.1 APPROXIMATION RATIONNELLE DANS $L^2(\mathbb{T})$

On formule le problème de la manière suivante :

Étant donné une fonction  $f \in \overline{H^2}(\mathbb{D})$ , trouver un couple de polynôme  $(p, q)$ ,  $p$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ ,  $q$  monique de degré  $n$ , tels que  $q$  ait ses zéros dans  $\mathbb{D}$  et tel que la quantité

$$\left\| f - \frac{p}{q} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) - \frac{p}{q}(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta \quad (3.1)$$

soit minimale.

D'un point de vue numérique, un algorithme de recherche de minima locaux par intégration du gradient a été implémenté par le projet MIAOU dans le logiciel *Hyperion* à

l'INRIA Sophia-Antipolis (voir [61]). Nous présentons dans la suite quelques résultats sur lesquels s'appuie cette méthode.

D'un point de vue numérique, comme on connaît q'un nombre fini de valeurs de  $f$  sur  $\mathbb{T}$ , on estime en fait un nombre fini de ses coefficients de Fourier. Autrement dit, on considère  $f$  comme un polynôme trigonométrique de degré  $m$ .

Nous introduisons la fonction  $g$  comme

$$g(z) = \check{f}(z) = \frac{1}{z} \overline{f}(1/z), \quad \text{avec } \overline{f}(z) = \sum_{j=0}^m \overline{f_j} z^j, \quad (3.2)$$

et le polynôme réciproque de  $q$

$$\tilde{q}(z) = z^n \overline{q}(1/z), \quad (3.3)$$

qui est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  dont les racines sont les inverses des racines conjuguées de  $q$ .

Considérons la division euclidienne de  $g\tilde{q}$  par  $q$

$$g\tilde{q} = Vq + R, \quad (3.4)$$

avec  $R$  un polynôme de degré inférieur à  $n$  et  $V$  un élément de  $H^2(\mathbb{D})$ . En posant  $p = \tilde{R} = z^{n-1} \overline{R}(1/z)$ , on trouve que

$$f - \frac{p}{q} = \tilde{V} \frac{\tilde{q}}{q}, \quad \text{avec } \tilde{V}(z) = \frac{1}{z} \overline{V}(1/z). \quad (3.5)$$

Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** *Pour un polynôme  $q$  fixé, le polynôme  $p$  tel que  $\|f - p/q\|_{L^2(\mathbb{T})}$  soit minimal est unique et on a  $p = \tilde{R}$ . De plus*

$$\|f - p/q\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|V\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \langle f, p/q \rangle. \quad (3.6)$$

La démonstration de ce théorème est immédiate car on vérifie sans peine que  $f - p/q$  est orthogonal à  $z^k/q$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ , donc  $p/q$  est la projection orthogonale de  $f$  sur le sous espace  $\langle z^k/q \rangle_{0 \leq k \leq n-1}$  de  $\overline{H^2}(\mathbb{D})$ .

L'algorithme utilisé consiste à minimiser le critère  $\phi(q) = \|V\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$  par rapport aux coefficients du polynôme  $q$ . Pour plus de détails sur les points critiques de  $\phi$  et la convergence de l'algorithme, le lecteur peut consulter [25, 28].

Si l'existence d'un meilleur approximant est assurée (on pourra par exemple se référer à [24] pour la preuve de cette propriété dans un cadre général), en revanche l'unicité n'a pas lieu en général. Parmi les résultats obtenus, on citera le travail de L. Baratchart, E. B. Saff et F. Wielonsky [28] dans lequel est prouvé que le critère  $\|f - p/q\|_{L^2(\mathbb{T})}$  admet un seul point critique à l'ordre  $n$  (donc un minimum) par rapport aux coefficients de  $q$  si pour chaque point critique  $p/q$ , il existe des polyômes  $B$  et  $A$  de degré respectivement  $n-2$  et  $n-1$  tels que  $A/B$  interpôle  $f$  en  $2n-2$  points de  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  et tels que

$$\left| \frac{f - B/A}{f - p/q} - 1 \right| > 2 \quad \text{sur } \mathbb{T}. \quad (3.7)$$

Notons que les auteurs de [30] utilisent ce critère pour prouver l'unicité asymptotique d'un point critique dans le cas d'une fonction de Markov de support  $(-1, 1)$  satisfaisant la condition de Szegő; rappelons qu'une fonction de Markov est la transformée de Cauchy d'une mesure positive à support compact sur l'axe réel, en d'autre terme elle s'écrit

$$f(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t}, \quad \text{supp}\mu \subset \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Rappelons aussi qu'une mesure  $\mu$  à support dans  $(-1, 1)$  satisfait la condition de Szegő si  $\mu(x) = w(x)dx$  avec  $w(x) > 0$  et

$$\int_{-1}^1 \frac{\log(w(x))}{\sqrt{1-x^2}} > -\infty.$$

### 3.1.1 Approximation rationnelle dans $L^2(\mathbb{T})$ de la fonction $F$

Soit  $f$  la fonction définie en (2.18) et  $F$  la trace de  $f$  sur  $\Gamma$ . Comme nous l'avons vue précédemment, nous avons

$$f(z) = S(z) + g(z),$$

avec  $g \in H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$  et

$$S(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma(t)}{t-z} dt \in \overline{H^2}(\mathbb{D}). \quad (3.9)$$

Pour obtenir des informations sur la fissure  $\gamma$ , nous cherchons une meilleure approximation rationnelle  $p/q$  telle que

$$\left\| S - \frac{p}{q} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} = \min_{p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}, q_n \in \mathcal{P}_n} \left\| S - \frac{p_{n-1}}{q_n} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad (3.10)$$

Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 3.1.2** *Si  $S$  n'est pas une fraction rationnelle de degré strictement inférieur à  $n$ , alors les polynômes  $p$  et  $q$  correspondant à un minimum sont premiers entre eux et  $\deg q = n$ .*

D'après la proposition 3.1.2, si  $S$  n'est pas dans  $R_{n-1}$  alors  $\deg q = n$ . Comme  $q$  est monique, on peut écrire

$$q(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j z^j, \quad p(z) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j z^j. \quad (3.11)$$

En dérivant la norme par rapport au  $p_j$  et  $q_j$ , on obtient pour un point critique

$$\left\langle S - \frac{p}{q}, \frac{z^j}{q} \right\rangle = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (3.12)$$

$$\left\langle S - \frac{p}{q}, \frac{z^j p}{q^2} \right\rangle = 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (3.13)$$

Les termes  $z^j p$  et  $z^j q$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  forment une base de  $\mathcal{P}_{2n-1}$  qui est un espace vectoriel de dimension  $2n$  sur le corps de ces coefficients. En effet, étant donné qu'il y a  $2n$  termes, il suffit de vérifier qu'ils sont indépendants. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire non nulle qui les annule. Ceci se traduit aussi en écrivant qu'il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  de degré au plus  $n-1$  dont l'un au moins est non nul tels que

$$pQ + qR = 0. \quad (3.14)$$

Ce qui donne que  $q$  divise  $pQ$ . Or d'après la proposition 3.1.2  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, donc  $q$  divise  $Q$  ce qui est impossible puisque degré de  $q$  est strictement supérieure à celui de  $Q$ .

Les  $z^j p$  et  $z^j q$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  forment donc une base de  $\mathcal{P}_{2n-1}$ , ce qui nous permet de réécrire la relation (3.12) sous la forme suivante :

$$\left\langle S - \frac{p}{q}, \frac{T_{2n-1}}{q^2} \right\rangle = 0, \quad T_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}. \quad (3.15)$$

La fonction  $S - \frac{p}{q}$  est orthogonale à  $\mathcal{P}_{2n-1}/q^2$ . Cet espace peut être décomposé en une somme orthogonale :

$$\frac{\mathcal{P}_{2n-1}}{q^2} = \frac{\mathcal{P}_{n-1}}{q} \oplus \frac{\tilde{q}\mathcal{P}_{n-1}}{q^2}. \quad (3.16)$$

Chaque terme de la décomposition est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{P}_{2n-1}/q^2$  de dimension  $n$ , il reste à prouver l'orthogonalité à savoir que

$$\left\langle \frac{z^j \tilde{q}}{q^2}, \frac{z^k}{q} \right\rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^j \tilde{q}(z) \bar{z}^k}{q^2(z) \overline{q(z)}} \frac{dz}{z} = 0, \quad j, k = 0, \dots, n-1. \quad (3.17)$$

Comme on intègre sur le cercle unité  $\mathbb{T}$ , on a que  $\bar{z} = 1/z$  et par suite  $\tilde{q}(z) = z^n \bar{q}(1/z) = z^n \bar{q}(\bar{z}) = z^n \overline{q(z)}$ , ce qui simplifie l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^j \tilde{q}(z) \bar{z}^k}{q^2(z) \overline{q(z)}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{n+j-k-1}}{q^2(z)} dz. \quad (3.18)$$

La fonction  $\frac{z^{n+j-k-1}}{q^2(z)}$  est analytique pour  $|z| > 1$ . On peut donc agrandir le contour d'intégration en un cercle de centre l'origine et de rayon  $R$  pour tout  $R > 1$ . D'autre part, le polynôme  $q^2$  est de degré  $2n$ , donc pour  $R$  assez grand il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\frac{1}{|q^2(Re^{i\theta})|} \leq \frac{c}{R^{2n}}. \quad (3.19)$$

Par conséquent, on peut borner l'intégrale par  $c/R$  pour tout  $R > 1$ , ce qui entraîne que pour  $R$  assez grand

$$\left\langle \frac{z^j \tilde{q}}{q^2}, \frac{z^k}{q} \right\rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^j \tilde{q}(z) \bar{z}^k}{q^2(z) \overline{q(z)}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{z^{n+j-k-1}}{q^2(z)} dz = 0. \quad (3.20)$$

Cela nous permet de reformuler la relation d'orthogonalité (3.15) de la manière suivante

$$\left\langle S - \frac{p}{q}, \frac{T_{n-1}}{q} + \frac{\tilde{q}Z_{n-1}}{q^2} \right\rangle = 0, \quad T_{n-1}, Z_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}. \quad (3.21)$$

Cependant, la relation (3.17) nous donne que

$$\left\langle \frac{p}{q}, \frac{\tilde{q}Z_{n-1}}{q^2} \right\rangle = 0, \quad Z_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}. \quad (3.22)$$

En choisissant  $T_{n-1} = 0$  dans l'équation (3.21), nous obtenons

$$\left\langle S, \frac{\tilde{q}Z_{n-1}}{q^2} \right\rangle = 0, \quad Z_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}, \quad (3.23)$$

que l'on peut réécrire en utilisant que  $\bar{z} = 1/z$  sur  $\mathbb{T}$  et que

$$\overline{\tilde{q}(z)} = q(z)z^{-n}, \quad \overline{q^2(z)} = \tilde{q}^2(z)z^{-2n},$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} S(z) \frac{\overline{\tilde{q}(z)z^k}}{q^2(z)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} S(z) \frac{q(z)z^{n-1-k}}{\tilde{q}^2(z)} dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.24)$$

Nous remplaçons  $S$  par son expression, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)}{t-z} dt \frac{q(z)z^k}{\tilde{q}^2(z)} dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.25)$$

D'après le théorème de Fubini, ceci devient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left[ \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{q(z)z^k}{\tilde{q}^2(z)} \frac{dz}{t-z} \right] \sigma(t) dt = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.26)$$

Comme les zéros du polynôme  $q$  sont dans le disque  $\mathbb{D}$ ,  $\tilde{q}$  ne s'annule pas dans  $\mathbb{D}$ . Donc la fonction  $z \mapsto q(z)z^k/\tilde{q}^2(z)$  est analytique dans  $\mathbb{D}$  et l'on peut alors appliquer la formule de Cauchy pour obtenir finalement

$$\int_{\gamma} \frac{q(t)}{\tilde{q}^2(t)} t^k \sigma(t) dt = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.27)$$

Cette équation est dite équation aux points critiques.

Nous exploiterons cette équation aux points critiques pour obtenir des informations sur la position des pôles de notre approximant par rapport à la fissure  $\gamma$ .

## 3.2 APPROXIMATION MÉROMORPHE DANS $L^\infty(\mathbb{T})$

Nous rappelons dans cette section des résultats relatifs à l'approximation méromorphe dans  $L^\infty(\mathbb{T})$ . Nous nous intéressons d'abord au problème de Nehari d'approximation analytique :

pour  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , trouver  $g \in H^\infty(\mathbb{D})$  telle que

$$\min_{h \in H^\infty(\mathbb{D})} \|f - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|f - g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \quad (3.28)$$

L'outil principal pour résoudre ce problème, est l'opérateur de Hankel. Nous commençons par donner sa définition, ainsi que la définition des valeurs et vecteurs singuliers associés. L'opérateur de Hankel de symbole  $\varphi$  est défini par :

$$\begin{aligned} H_\varphi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow \overline{H^2}(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto H_\varphi f = P_- M_\varphi(f) = P_-(\varphi f) \end{aligned}$$

où  $M_\varphi$  est l'opérateur de multiplication par  $\varphi$ .

Soient  $H$  et  $K$  deux espaces de Hilbert, et  $T \in \mathcal{L}(H, K)$ , l'espace des opérateurs bornés de  $H$  dans  $K$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on définit le nombre

$$s_k(T) = \inf_{\substack{R \in \mathcal{L}(H, K) \\ \text{rang } R \leq k}} \|T - R\|. \quad (3.29)$$

Les nombres

$$s_0(T) \geq s_1(T) \geq \dots \geq 0 \text{ s'appellent les valeurs singulières de } T.$$

Si  $s$  est une valeur singulière de  $T$  alors  $s^2$  est une valeur propre de  $T^*T$ .

- Un vecteur singulier associé à la  $n$ -ième valeur singulière  $s$  ( $s = s_{n-1}(T)$ ) de l'opérateur  $T$  est par définition un vecteur propre de  $T^*T$  associé à la valeur propre  $s^2$ .
- Soit  $T \in \mathcal{L}(H, K)$  et  $s$  valeur singulière de  $T$ , une paire de Schmidt correspondant à  $s$ , c'est une paire  $(x, y)$  de vecteurs,  $x \in H$  et  $y \in K$  telle que  $Tx = sy$  et  $T^*y = sx$ .
- Soit  $v \in H \setminus \{0\}$ , on dit que  $v$  est un vecteur maximisant de  $T$  si  $\|Tv\| = \|T\|\|v\|$ .

**Théorème 3.2.1 (Nehari)** *Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , alors la norme de l'opérateur de Hankel associé à  $f$  est donnée par*

$$\|H_f\| = \text{dist}_{L^\infty(\mathbb{T})}(f, H^\infty(\mathbb{D})).$$

En outre, il existe  $h \in L^\infty(\mathbb{T})$  telle que

$$H_f = H_h \text{ et } \|H_f\| = \|h\|_\infty.$$

Le théorème suivant nous donne la solution du problème de Nehari



**Théorème 3.2.2 (Solution du problème de Nehari)** *Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , si l'opérateur de Hankel  $H_f$  admet un vecteur maximisant  $v$ , alors il existe un unique meilleur approximant  $g \in H^\infty(\mathbb{D})$  de  $f$  au sens de la norme  $L^\infty(\mathbb{D})$ , donné par*

$$g = f - \frac{H_f v}{v}. \quad (3.30)$$

**Remarque 3.2.3** *Si  $H_f$  est un opérateur compact, alors il admet un vecteur maximisant. On sait d'après le théorème de Hartman que  $H_f$  est compact si  $f \in H^\infty(\mathbb{D}) + C(\mathbb{T})$ , où  $C(\mathbb{T})$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{T}$ .*

On regarde maintenant le problème plus général d'approximation méromorphe, connu sous le nom de problème de Adamjan, Arov et Krein (AAK) :

Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , trouver une fonction  $g$  méromorphe dans  $H_n^\infty(\mathbb{D})$ , i.e. avec au plus  $n$  pôles dans  $\mathbb{D}$  et qui soit la plus proche possible de  $f$  sur  $\mathbb{T}$  au sens de la norme  $L^\infty$ .

**Théorème 3.2.4 (AAK)** *Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors*

$$\text{dist}_{L^\infty(\mathbb{T})}(f, H_n^\infty(\mathbb{D})) = s_n(H_f) \quad (3.31)$$

la  $(n+1)$ -ième valeur singulière de  $H_f$ . De plus il existe un unique meilleur approximant  $g_n$  donné par

$$g_n = f - \frac{H_f v_n}{v_n} \quad (3.32)$$

où  $v_n$  est un vecteur singulier associé à la valeur singulière  $s_n(H_f)$ .

### 3.2.1 Approximation méromorphe dans $L^\infty(\mathbb{T})$ de la fonction $F$

Nous considérons  $g_N$  l'approximation AAK de degré  $N$  pour la fonction  $f$  que nous avons définie en (2.18). Puisque  $g$  (la partie non singulière de  $f$ ) est dans  $H^\infty(\mathbb{D})$ , on remarque que l'opérateur de Hankel  $H_f$  associé à la fonction  $f$  est l'opérateur de Hankel  $H_S$ , avec  $S$  la partie singulière de  $f$ . Les pôles de l'approximant  $g_N$  dépendent uniquement de  $S$ , et par suite, nous pouvons nous restreindre à l'approximation de  $S$ . Nous rappelons que l'approximant AAK est donné par la formule suivante

$$g_N = S - \frac{H_S(v_N)}{v_N}, \quad (3.33)$$

pour tout vecteur singulier  $v_N$  associé à la valeur singulière  $s_N$  de  $H_S$ .

On considère l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : L^2(\mathbb{T}) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f(z) &\mapsto \frac{1}{z} \overline{f(1/z)}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

L'opérateur  $\varphi$  est un opérateur involutif :  $\varphi \circ \varphi = I_d(L^2(\mathbb{T}))$ . On pose  $\hat{H}_S = \varphi \circ H_S$ . On vérifie aisément que  $(\hat{H}_S)^* \hat{H}_S = (H_S)^* H_S$ . Cela implique que  $\hat{H}_S$  et  $H_S$  ont les mêmes valeurs et vecteurs singulières. Nous pouvons donc écrire

$$\hat{H}_S v_N(z) = (\varphi \circ H_S) v_N(z) = 1/z \overline{H_S v_N(1/z)} = \pm s_N v_N(z), \quad (3.35)$$

ce qui donne

$$zH_S v_N(z) = \pm s_N \overline{v_N}(1/z) \quad (3.36)$$

En écrivant cette équation sous forme intégrale, on obtient

$$\pm s_N \overline{v_N}(1/z) = \frac{z}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{S(t)v_N(t)}{t-z} dt. \quad (3.37)$$

En remplaçant  $S$  par son expression sous forme d'intégrale de Cauchy (voir 2.18), cette relation devient

$$\pm s_N \overline{v_N}(1/z) = z \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma(\xi)v_N(t)}{(\xi-t)(t-z)} d\xi dt \quad (3.38)$$

En appliquant le théorème de Fubini puis la formule de Cauchy et en remplaçant  $z$  par  $1/z$ , on obtient

$$\pm s_N \overline{v_N}(z) = \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)v_N(t)}{zt-1} dt, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.39)$$

La formule (3.39) montre que la fonction  $v_N$  s'étend analytiquement à travers le cercle  $\mathbb{T}$ . Notons par  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,N_0}$ ,  $N_0 \leq N$ , les pôles de  $g_N$ . Ce sont exactement les zéros de  $v_N$ . On note  $q$  le polynôme unitaire  $q(z) = \prod_{j=1}^{N_0} (z - \alpha_j)$ . Dans (3.39) l'évaluation de l'intégrale de droite en  $\overline{\alpha_j}$  donne 0, et par combinaison linéaire on obtient

$$\int_{\gamma} \frac{\sigma(t)v_N(t)P_{N_0-1}(t)}{\tilde{q}(t)} dt = 0, \quad (3.40)$$

pour tout polynôme  $P_{N_0-1}$  de degré inférieur ou égal à  $N_0 - 1$  à coefficients complexes. Il reste à décomposer le vecteur singulier  $v_N$  en facteur intérieur et extérieur  $v_N(z) = (q(z)/\tilde{q}(z))w_N(z)$  pour obtenir finalement une relation d'orthogonalité analogue à (3.27) :

$$\int_{\gamma} \frac{q(t)}{\tilde{q}^2(t)} t^k w_N(t) \sigma(t) dt, \quad k = 0, \dots, N_0 - 1. \quad (3.41)$$

On remarque que  $\sigma$  dans l'équation (3.27) est remplacé ici par  $w_N \sigma$  et fait intervenir le facteur supplémentaire  $w_N$ . Cela complique légèrement l'approche AAK par rapport à celle de  $L^2$ .

### 3.3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PÔLES

Dans cette section nous allons montrer comment les équations aux points critiques peuvent être interprétées comme une relation d'orthogonalité non hermitienne et comment par le biais de ces équations, la répartition des pôles se trouve étroitement liée à la fissure  $\gamma$ .

#### 3.3.1 Cas d'une fissure porté par un diamètre du disque $\mathbb{D}$

Les auteurs de [27] ont présentés un premier résultat sous l'hypothèse particulière que la fissure  $\gamma$  est un segment  $[\gamma_0, \gamma_1]$  porté par un diamètre du disque  $\mathbb{D}$ . On peut toujours

supposer moyennant une rotation que  $[\gamma_0, \gamma_1] \subset (-1, 1)$ .

Nous rappelons dans ce cas que  $f$  la fonction définie en (2.18) est donnée par

$$f(z) = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{\sigma(t)}{t-z} dt + g(z), \quad g \in H^\infty(\mathbb{D}). \quad (3.42)$$

et que les approximants méromorphe et rationnel  $L^2$  sont ceux de la partie singulière  $S$  de  $f$ .

Nous avons le résultat suivant

**Théorème 3.3.1** [27] *Soit  $f$  la fonction définie par (3.42). Si la fonction à valeurs réelles  $\sigma$  change de signe exactement  $k$  fois sur  $[\gamma_0, \gamma_1]$ , alors au plus  $k$  pôles de l'approximant AAK  $g_N$  d'ordre  $N$  peuvent se trouver hors du segment  $[\gamma_0, \gamma_1]$ .*

**Preuve :** On utilise la relation d'orthogonalité non hermitienne (3.41) qui s'écrit dans ce cas

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{q(t)}{\tilde{q}^2(t)} t^k w_N(t) \sigma(t) dt, \quad k = 0, \dots, N_0 - 1, \quad (3.43)$$

avec  $N_0$  le nombre de zéros de  $v_N$  dans  $\mathbb{D}$ . Si  $q$  a moins de  $N_0 - k$  zéros sur  $[\gamma_0, \gamma_1]$ , alors  $qw_N/\tilde{q}^2$  est réelle et s'annule au plus  $N_0 - 1$  fois sur  $[\gamma_0, \gamma_1]$ . Si c'est le cas, on peut construire  $P_{N_0-1}$  de telle sorte que  $qw_N P_{N_0-1}/\tilde{q}^2 \geq 0$  sur  $[\gamma_0, \gamma_1]$ . D'après la relation d'orthogonalité (3.43), ce ci implique que  $\sigma = 0$ , ce qui en contradiction, dès que l'on choisit un flux identifiant.  $\square$

**Théorème 3.3.2** *Soit  $f$  la fonction définie par (3.42). Si la fonction à valeurs réelles  $\sigma$  change de signe exactement  $k$  fois sur  $[\gamma_0, \gamma_1]$ , alors au plus  $k$  pôles d'un meilleur approximant rationnel d'ordre  $N$  pour la norme  $L^2(\mathbb{T})$ , avec des coefficients de Fourier réels peuvent se trouver hors du segment  $[\gamma_0, \gamma_1]$ .*

**Preuve** La preuve est analogue au cas de l'approximation méromorphe, le facteur extérieur  $w_N$  étant remplacé par 1.  $\square$

### 3.3.2 Cas d'une fissure quelconque

Nous commençons par rappeler le théorème suivant :

**Théorème 3.3.3 (Parfenov)** [86] *Soit  $f$  une fonction analytique dans  $V \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ , et soit  $K = \mathbb{C} \setminus V$ , alors pour toute suite de meilleurs approximants méromorphes  $r_n = r_n(f)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , nous avons*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{\text{deg } r_n \leq n} \|f - r_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^{1/n} \leq \exp \left[ \frac{-1}{\text{cap}(\mathbb{T}, K)} \right], \quad (3.44)$$

où  $\text{cap}(\mathbb{T}, K)$  désigne la capacité du condensateur formé de  $\mathbb{T}$  et de  $K$ , cf. la définition 1.4.5.

Le Théorème (3.3.3) exprime le fait que plus la capacité est petite, plus le taux de convergence est bon.

Sous certaines hypothèses concernant le prolongement du saut de température  $\sigma$  à travers la fissure  $\gamma$ , on peut montrer que les pôles des approximants s'accumulent sur la géodésique  $\mathcal{G}$ , au sens de la distance hyperbolique du disque, reliant les extrémités de la fissure. Plus précisément, on a le résultat suivant.

**Théorème 3.3.4** [29] *Sous certaines conditions sur le saut de température (cf. [29]) et en supposant que  $\gamma$  n'est pas sur une ligne de niveau de la température, solution du problème de Neumann (2.2) dans  $\mathbb{D}$  pour un flux  $\Phi$ , on a le résultat de convergence des pôles suivant. Si  $\mu_{2,n}$  (respectivement  $\mu_{\infty,n}$ ) est la mesure de comptage des pôles du meilleur approximant dans  $H_n^2(\mathbb{D})$  (respectivement dans  $H_n^\infty(\mathbb{D})$ ) de la fonction  $f$  définie dans (2.2.6), alors la mesure  $\mu_{2,n}$  (respectivement  $\mu_{\infty,n}$ ) converge faiblement-\* quand  $n \rightarrow \infty$  vers la mesure d'équilibre du condensateur formé par  $\mathbb{T}$  et  $\mathcal{G}$ .*

La Figure 3.1 montre que les pôles de l'approximant AAK s'accumule sur l'arc géodésique qui relie les extrémités de la fissure recherché. La Figure 3.2 donne les quotients des valeurs singulières successives et montre qu'à partir du degré 12, ces rapports sont proches de 1. Ceci est en contradiction avec le théorème de Parfenov, selon lequel la décroissance des valeurs singulières est géométrique. On constate avec la Figure 3.2 que la précision numérique ne permet pas dans le cas présent de localiser correctement plus de 12 pôles.

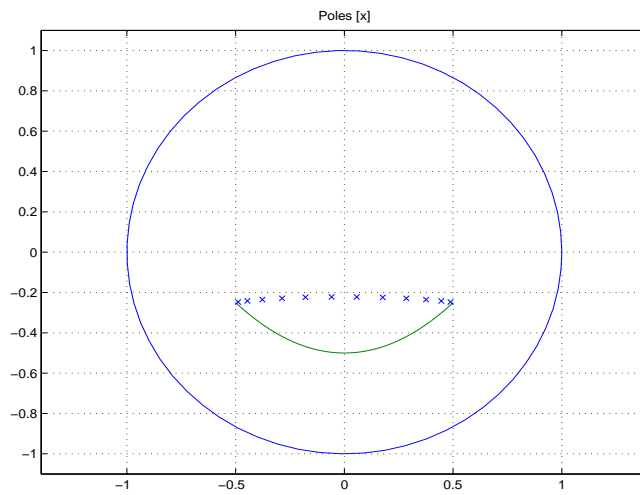


FIGURE 3.1 – Approximant AAK de degré 12

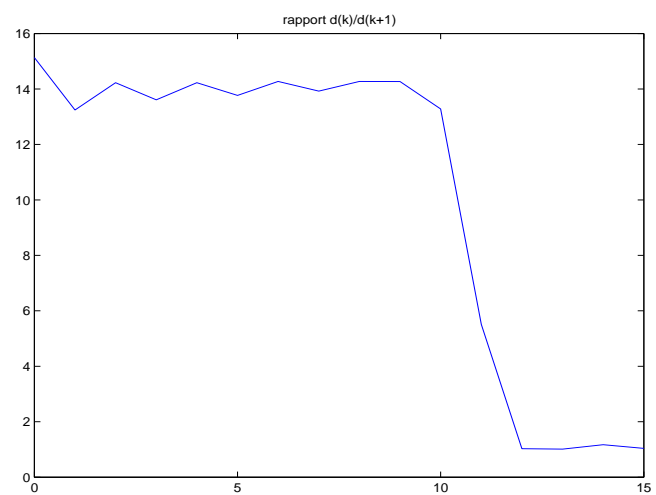


FIGURE 3.2 – Rapport des valeurs singulières

### 3.4 UTILISATION DE L'APPROXIMATION MÉROMORPHE POUR LA LOCALISATION D'AUTRES DÉFAUTS DE GÉOMÉTRIE

Dans cette section, nous avons appliqué l'approximation méromorphe (AAK) à des défauts géométriques plus généraux, en particulier des cavités ou des petites inclusions.

Pour les résultats numériques présentés ci-dessous nous avons utilisés le logiciel Free-Fem++ pour résoudre le problème direct et obtenir la température  $u$  sur le bord du domaine Numériquement, on choisit le flux  $\Phi(e^{i\theta})$  comme la dérivée normale de la partie réelle d'un polynôme trigonométrique

$$P(z) = (a_1 + ib_1)z + \dots + (a_n + ib_n)z^n.$$

Alors,  $\tilde{u}$  est égale à la partie imaginaire de  $P$ , et l'on peut vérifier que

$$i\text{Im}P(z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [(-a_j + ib_j)e^{-ij\theta} + (a_j + ib_j)e^{ij\theta}],$$

ce qui donne les coefficients de Fourier de  $\tilde{u}$ . Pratiquement, on a choisit des flux issus des polynômes les plus simples, comme par exemple  $P(z) = iz$  et  $P(z) = z$  qui donnent respectivement les flux  $-\sin \theta$  et  $\cos \theta$ .

Nous avons ensuite utilisé un programme d'approximation méromorphe pour calculer les pôles des approximants et localiser les défauts de géométrie.

Sur la première Figure 3.3, on considère le cas d'une cavité carrée incluse dans le disque  $\mathbb{D}$ . Numériquement, on constate qu'avec un approximant de degré 8, on obtient 6 pôles à l'intérieur de la cavité. Les 2 autres sont situés sur le cercle unité et ne sont pas pertinents pour la localisation. Sur les Figures 3.5 et 3.6, on considère les cas d'une ou deux cavités circulaires. Ici, le bord des cavités est sans singularités et maintenant les approximants ne placent plus qu'un pole dans ces cavités, exactement aux centres de celles-ci, tous les autres pôles se trouvant sur le bord du cercle. Dans les Figures 3.7 et 3.8,

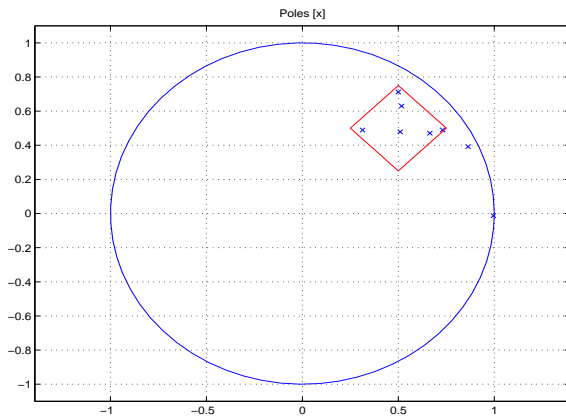


FIGURE 3.3 – Approximant AAK de degré 8

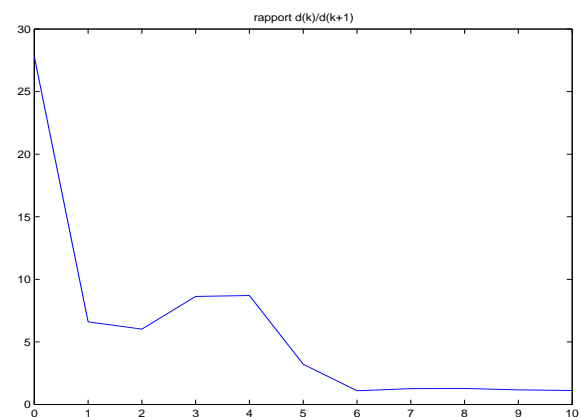


FIGURE 3.4 – Rapport des valeurs singulières

on considère le cas d'une et de quatre petites inclusions. On constate dans le premier cas qu'un approximant de degré 4 place un pole sur l'inclusion et dans le deuxième cas, qu'un approximant de degré 7 place exactement un pole sur chacune des quatre inclusions, les pôles restant étant placés sur le bord  $\mathbb{T}$  du domaine.

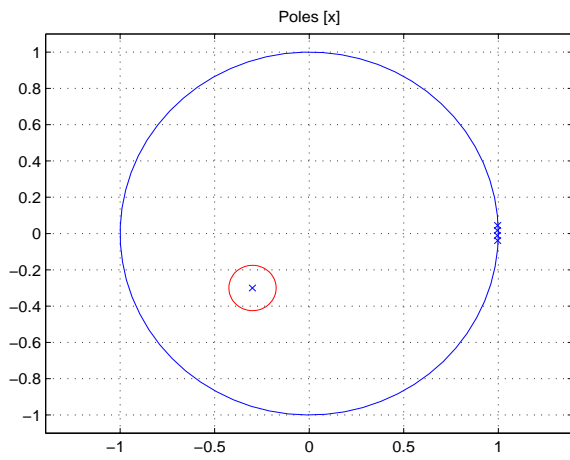


FIGURE 3.5 – Approximant AAK de degré 5

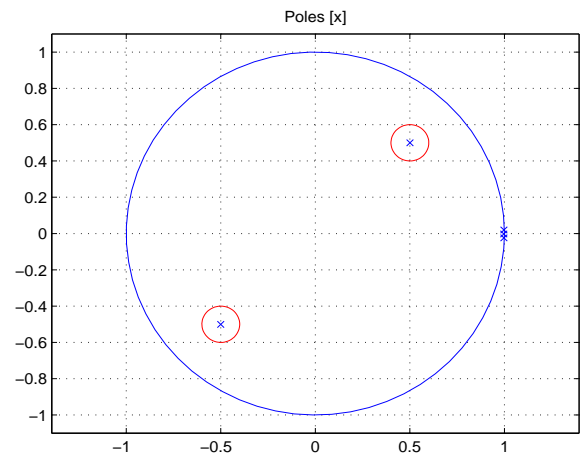


FIGURE 3.6 – Approximant AAK de degré 5

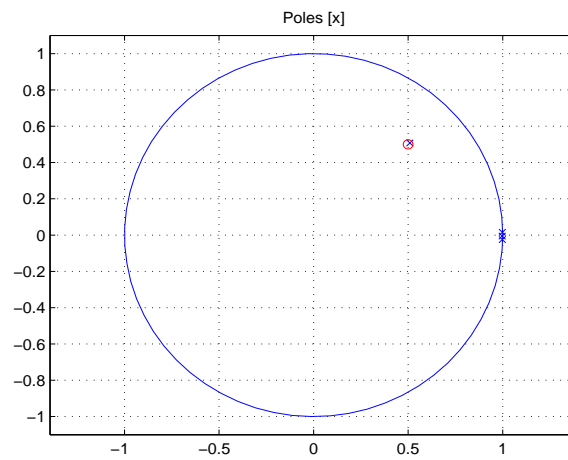


FIGURE 3.7 – Approximant AAK de degré 4

### 3.5 VERS L'IDENTIFICATION COMPLÈTE DE LA FISSURE

Dans cette section, nous présentons un algorithme d'identification complète de la fissure basée sur les transformations conformes et la résolution d'un problème extrémal borné dans la couronne. La mise en oeuvre numérique de cet algorithme pose quelques problèmes de précision, en particulier en ce qui concerne le calcul des transformations conformes, et n'a pas été poursuivie plus avant.

Nous désignons par  $\psi(z) = u(z) + i\tilde{u}(z)$ , où  $u$  est la solution du problème direct (2.2) et  $\tilde{u}$  sa conjuguée harmonique. En utilisant des propriétés des fonctions harmoniques, on peut prouver la proposition suivante :

**Proposition 3.5.1** [10] *La fonction analytique  $\psi$  est une application conforme de  $\Omega$  dans  $\Omega' = \psi(\Omega)$  dès que l'on choisit un flux  $\Phi$  qui change de signe en deux points distincts du bord  $\partial\Omega = \Gamma$ .*

Comme la fissure  $\gamma$  est isolante, d'après les équations de Cauchy-Riemann, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = 0 \text{ sur } \gamma,$$

donc l'image  $\psi(\gamma)$  est un segment inclus dans  $\Omega'$ , parallèle à l'axe réel.

Les frontières  $\gamma$  et  $\Gamma$  sont de classes  $C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , donc les frontières  $\gamma' = \psi(\gamma)$  et  $\Gamma' = \psi(\Gamma)$  sont aussi de classes  $C^{1,\alpha}$ . Pour déterminer  $\gamma'$ , on transforme le domaine  $\Omega'$  dans le disque unité  $\mathbb{D}$  (cf. Figure 3.10) par une transformation conforme  $D$  (numériquement, on peut par exemple utiliser le package de Driscoll pour déterminer la transformation conforme  $D$ ). On peut alors appliquer la procédure AAK pour déterminer les extrémités de  $\gamma'' = D(\gamma')$ . Une fois les extrémités de  $\gamma''$  connues, on peut revenir par l'application conforme  $D^{-1}$  pour déterminer les extrémités de  $\gamma'$  et donc toute la fissure  $\gamma'$ .

L'étape suivante, consiste à transformer le domaine  $\Omega' \setminus \gamma'$  en la couronne  $G$  par une transformation conforme  $F$ . On sait qu'il existe une telle application conforme  $F$  de  $\Omega'$  dans la couronne  $G$ , définie pour  $s < 1$  par

$$G = \{z \in \mathbb{C} : s \leq |z| \leq 1\},$$

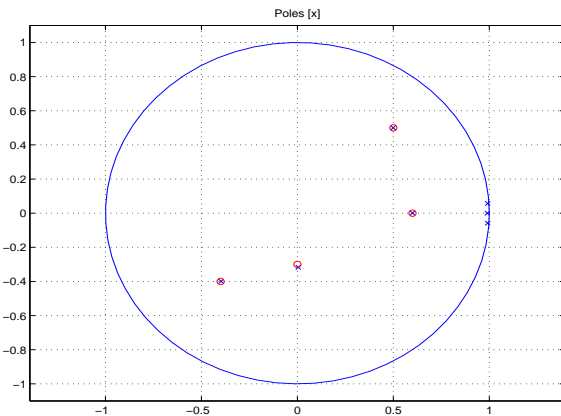


FIGURE 3.8 – Approximant AAK de degré 7

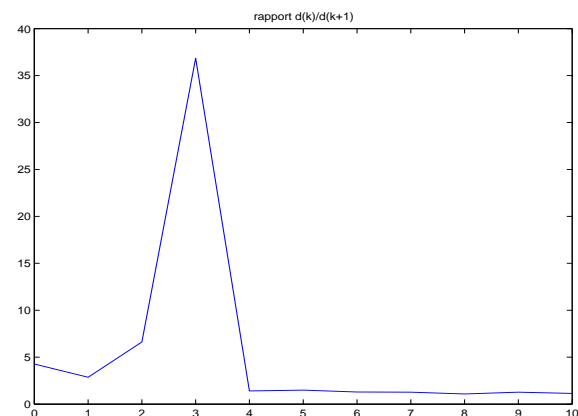


FIGURE 3.9 – Rapport des valeurs singulières

dès que  $s$  vaut la capacité du condensateur  $(\gamma', \Gamma')$  formé par les deux parties disjointes de la frontière du domaine  $\Omega'$  (voir [94, Thm 6.1]).

L'application  $\varphi := (F \circ \psi)^{-1}$  est analytique dans la couronne  $G$  et connue sur le bord extérieur  $\mathbb{T}$ . L'identification complète de la fissure sera obtenue si on connaît les valeurs de la fonction  $\varphi$  sur le cercle interne  $s\mathbb{T}$ .

Nous expliquons dans la suite comment on peut reconstruire l'image de  $s\mathbb{T}$  par l'application  $\varphi$ .

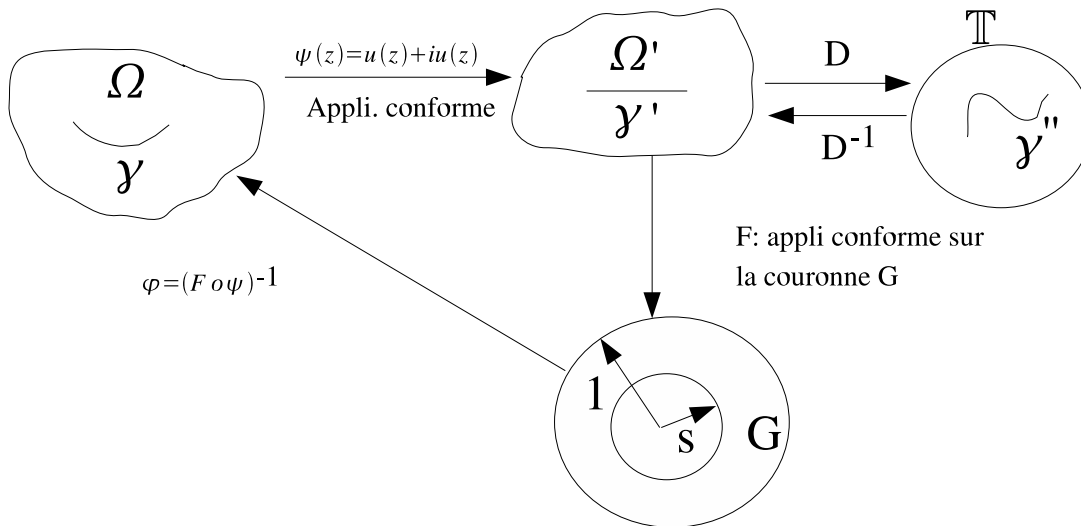


FIGURE 3.10 – Transformation du domaine par des applications conformes

### 3.5.1 Reconstruction pratique de $\varphi$ à l'aide d'un problème extrémal borné

La détermination pratique de la trace de  $\varphi$  sur le bord interne  $s\mathbb{T}$ , utilise un problème d'approximation analytique de données frontières incomplète dans l'espace de Hardy de la couronne. Il consiste à approcher une fonction connue sur une partie du bord par une fonction dans un espace de Hardy dont la norme ne dépasse pas une certaine valeur sur le bord inaccessible aux mesures. L'étude de cette méthode a été menée à bien principalement dans la thèse [76]. On termine cette section en rappelant les principaux résultats de cette étude.

#### 3.5.1.1 Formulation du problème

Étant donnée une fonction  $\varphi$ , continue sur  $\mathbb{T}$ , nous cherchons une fonction  $g$  de  $H^2(G)$  qui soit la plus proche possible de  $\varphi$  sur le cercle  $\mathbb{T}$ . Il s'agit de résoudre le problème suivant :



Trouver  $g \in H^2(G)$  telle que

$$\|\varphi - g\|_{L^2(\mathbb{T})} = \inf_{f \in H^2(G)} \|\varphi - f\|_{L^2(\mathbb{T})}. \quad (3.45)$$

Si  $\varphi$  est la restriction d'une fonction de  $H^2(G)$ , alors le problème (3.45) admet une solution unique qui est l'extension de  $\varphi$  dans  $H^2(G)$  et le minimum vaut 0. En effet, soient  $g_1, g_2$  deux solutions du problème (3.45). On pose  $h = g_1 - g_2$ . La fonction  $h \in H^2(G)$  et nulle sur  $\mathbb{T}$  elle est donc nulle partout dans  $G$ , (voir [54]) et par conséquent  $g_1 = g_2$ .

Comme, dans la pratique, la fonction  $\varphi$  est construite à partir de mesures expérimentales, il est raisonnable de supposer que cette fonction n'est pas la trace sur  $\mathbb{T}$ , d'une fonction de  $H^2(G)$ . Dans ce cas  $\varphi \in L^2(\mathbb{T}) \setminus H^2(G)|_{\mathbb{T}}$ . Si  $\varphi_n$  est une suite de  $H^2(G)$  qui converge vers  $\varphi$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ ,  $\varphi$  n'étant pas la trace d'une fonction de  $H^2(G)$ , on peut montrer que  $\|\varphi_n\|_{L^2(s\mathbb{T})} \rightarrow \infty$ .

C'est pourquoi on modifie le problème (3.45) en le problème extrémal borné (BEP) suivant :

Soit  $\varphi_1 \in L^2(s\mathbb{T})$ , trouver  $g \in H^2(G)$ , satisfaisant la contrainte  $\|g - \varphi_1\|_{L^2(s\mathbb{T})} \leq M$ , telle que

$$\|\varphi - g\|_{L^2(\mathbb{T})} = \inf_{\substack{f \in H^2(G) \\ \|\varphi_1 - f\|_{L^2(s\mathbb{T})} \leq M}} \|\varphi - f\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad (3.46)$$

où  $M$  est une constante strictement positive.

L'idée de considérer un tel problème extrémal borné a été initialement proposé par L. Baratchart et al. dans [32].

**Théorème 3.5.2** [45, 71] *Le problème (3.46) admet une solution unique  $g$ , saturant la contrainte, i.e. vérifiant*

$$\|\varphi_1 - g\|_{L^2(s\mathbb{T})} = M. \quad (3.47)$$

*De plus,  $g$  est donnée par la formule spectrale suivante :*

$$(1 + \lambda T)g = P_{H^2(G)} \left( \chi_{\mathbb{T}}\varphi \vee (1 + \lambda)\chi_{s\mathbb{T}}\varphi_1 \right), \quad (3.48)$$

où  $T : H^2(G) \rightarrow H^2(G)$  est l'opérateur de Toeplitz de symbole  $\chi_{s\mathbb{T}}$  défini par

$$Tg = P_{H^2(G)}(\chi_{s\mathbb{T}}g) = P_{H^2(G)}P_{L^2(s\mathbb{T})}g, \quad (3.49)$$

et  $\lambda > -1$  est l'unique constante telle que  $\|\varphi_1 - g\|_{L^2(s\mathbb{T})} = M$ .

**Remarque 3.5.3** *La formule (3.48) est implicite, car la contrainte  $M$  n'intervient pas explicitement, mais le paramètre  $\lambda$  qui joue le rôle de multiplicateur de Lagrange doit être ajusté de sorte que  $\|\varphi_1 - g\|_{L^2(s\mathbb{T})} = M$ .*

*On prouve par généralisation des résultats établis dans [31] que  $M$  est une fonction strictement décroissante de  $\lambda$  de sorte que l'ajustement de  $\lambda$  peut se faire par dichotomie, et si on pose*

$$e(\lambda) := \|\chi_{\mathbb{T}}\varphi - g(\lambda)\|_{L^2(\mathbb{T})} \text{ et } M(\lambda) := \|\chi_{s\mathbb{T}}\varphi_1 - g(\lambda)\|_{L^2(s\mathbb{T})},$$

alors

$$\lim_{M(\lambda) \rightarrow +\infty} e(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -1} M(\lambda) = +\infty \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M(\lambda) = 0.$$

De plus, on a

$$\frac{de^2}{d\lambda} = -(1 + \lambda) \frac{dM^2}{d\lambda}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -1} e^2(\lambda) = 0, \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow -1} (1 + \lambda)M^2(\lambda) = 0.$$

Pour le calcul numérique de la solution, on discrétise la formule (3.48) en considérant le sous espace  $\langle e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{1+s^{2n}}} \rangle$ ,  $-N \leq n \leq N$  de  $H^2(G)$ .

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , soient  $a_n$  et  $b_n$ , les coefficients de Fourier de  $\psi = \chi_{\mathbb{T}}\varphi \vee (1 + \lambda)\chi_{s\mathbb{T}} \in L^2(\partial G)$  respectivement sur  $\mathbb{T}$  et  $s\mathbb{T}$ , définis par

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (3.50)$$

$$b_n s^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(se^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1 + \lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(se^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \quad (3.51)$$

**Lemme 3.5.4** [97] Soit  $f \in L^2(\partial G)$ , on note son développement de Fourier respectivement sur  $\mathbb{T}$  et  $s\mathbb{T}$  par :

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}, \text{ et } f(se^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n s^{2n} e^{in\theta}.$$

Alors, pour  $z \in G$ , nous avons

$$P_{H^2(G)} f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n + s^{2n} b_n}{1 + s^{2n}} z^n. \quad (3.52)$$

**Lemme 3.5.5** [97] Soit  $g \in H^2(G)$  donnée par

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n, \quad z \in G,$$

alors,  $\forall z \in G$

$$Tg(z) = P_{H^2(G)} P_{L^2(s\mathbb{T})} g = P_{H^2(G)} (\chi_{s\mathbb{T}} g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{s^{2n} g_n}{1 + s^{2n}} z^n. \quad (3.53)$$

**Théorème 3.5.6** [46, 97] La solution  $g$  du problème (BEP) est donnée par

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n + (1 + \lambda) s^{2n} b_n}{1 + (1 + \lambda) s^{2n}} z^n, \quad z \in G \quad (3.54)$$

où  $\lambda > -1$  est l'unique constante telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|a_n - b_n|^2 s^{2n}}{(1 + (1 + \lambda) s^{2n})^2} = M^2. \quad (3.55)$$

Puisque nous n'avons aucune information sur les données sur le bord interne  $s\mathbb{T}$ , ce qui pose une difficulté pour le calcul de l'approximant  $g$ , nous choisissons à priori  $\varphi_1 = 0$  et  $b_n = 0$ .

**Théorème 3.5.7 (Continuité de la solution par rapport au données)** [65] *Soit  $g$  l'application définie par*

$$\begin{aligned} g : L^2(\mathbb{T}) \times \mathbb{R}_+^* &\rightarrow H^2(G) \\ (\varphi, M) &\mapsto g(\varphi, M), \end{aligned} \quad (3.56)$$

où  $g(\varphi, M)$  est la solution du problème (BEP) associé au données  $(\varphi, M)$ . Soit

$$\mathcal{D} = \{(f, M) \in H^2(G)|_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}_+^* : \|f\|_{L^2(s\mathbb{T})} < M\}.$$

Alors l'application  $g$  est continue sur  $(L^2(\mathbb{T}) \times \mathbb{R}_+^*) \setminus \mathcal{D}$ , mais non sur tout l'ensemble  $(L^2(\mathbb{T}) \times \mathbb{R}_+^*)$ . Cependant, si

$$(\varphi_n, M_n) \rightarrow (\varphi, M) \text{ fortement dans } (L^2(\mathbb{T}) \times \mathbb{R}_+^*)$$

alors

$$g(\varphi_n, M_n) \rightharpoonup g(\varphi, M) \text{ faiblement dans } H^2(G),$$

tandis que

$$g(\varphi_n, M_n) \rightarrow g(\varphi, M) \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{T}).$$

Donc sur  $s\mathbb{T}$  on a seulement la convergence faible.

Afin d'améliorer le résultat de convergence faible, les auteurs de [65] ont proposé de résoudre le problème extrémal borné (BEP) dans l'espace de Hardy-Sobolev, ce qui permet d'assurer un résultat de convergence forte.

### 3.5.2 Choix de la borne $M$

Dans le cas du disque, S.Chaabane et al [44] ont proposé une méthode de validation croisée pour trouver une bonne contrainte  $M$ . Cette méthode consiste à diviser la surface de mesures accessible en deux parties, une partie où on résoud le (BEP) et on profite de l'autre partie pour déterminer une valeur acceptable de  $M$ . Dans le cas de la couronne, la résolution du (BEP) est très sensible aux données disponibles à cause de la géométrie doublement connexe, et la méthode précédente ne marche plus.

Jaoua et al [65] ont proposé une méthode de minimisation qui tient compte de la totalité des données pour déterminer une bonne constante  $M$ . Les auteurs supposent que les coefficients de Fourier  $b_n$  sont nuls. La méthode s'explique comme suit :

Soit  $\varphi_\varepsilon = \varphi + \varepsilon$  les données bruitées avec  $\varphi \in H^2(G)|_{\mathbb{T}}$ ,  $\varepsilon \in L^2(\mathbb{T})$ , mais  $\varepsilon \notin H^2(G)|_{\mathbb{T}}$  et  $M_0 = \|\varphi\|_{L^2(s\mathbb{T})}$  la borne inconnue.

Étant donné un nombre réel positif  $M$  avec  $g(\varphi, M)$  la solution du (BEP) associée aux données  $\varphi$  et  $M$  et considérons  $g_\varepsilon := g(\varphi_\varepsilon, M)$  la solution du (BEP) pour la donnée  $\varphi_\varepsilon$  et la même contrainte  $M$ . Nous avons d'après ce qui précède que  $g_\varepsilon(\varphi, M)$  est proche

de  $\varphi = g(\varphi, M_0)$  si la contrainte  $M$  est proche de  $M_0$  et  $\varphi_\varepsilon$  est proche de  $\varphi$ . Dans ce cas, la fonction  $\varphi_\varepsilon - g_\varepsilon$  peut être vue comme une approximation de  $\varphi - g_\varepsilon$  sur  $\mathbb{T}$  dans lequel l'erreur  $e_{\varphi_\varepsilon}(M) := \|\varphi_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T})}$  est négligeable. Nous considérons  $h_\varepsilon$  la solution du (BEP) associée à la donnée  $\varphi_\varepsilon - g_\varepsilon$  et la contrainte  $e_{\varphi_\varepsilon}(M)$

$$h_\varepsilon := g(\varphi_\varepsilon - g_\varepsilon, e_{\varphi_\varepsilon}(M)). \quad (3.57)$$

Donc,  $g_\varepsilon + h_\varepsilon$  est un approximant de  $\varphi$  meilleur que  $g_\varepsilon$ . Nous définissons alors l'application suivante

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ M &\mapsto \left| \|g_\varepsilon\|_{L^2(s\mathbb{T})} - \|g_\varepsilon + h_\varepsilon\|_{L^2(s\mathbb{T})} \right|. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Tant que  $M$  est proche de  $M_0$ , l'approximant est bon. Cela conduit à chercher le zéro de  $\tau_\varepsilon$ . Finalement, minimiser la fonction  $\tau_\varepsilon$  semble une manière raisonnable pour trouver une bonne valeur approchée de  $M_0$ .

---

# Approximation rationnelle avec contraintes et application à la détection de fissures

---

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème d'approximation rationnelle avec contraintes en vue de la détermination de fissures dans un domaine plan. Nous donnons quelques propriétés concernant l'approximation avec contraintes. Nous donnons ensuite les formules du gradient associé au problème et nous illustrons l'étude par quelques exemples numériques relatifs à la détection de fissure.

## 4.1 INTRODUCTION

Le problème de détection des fissures suggère des variantes non classiques de l'approximation rationnelle et méromorphe où les résidus des approximants doivent satisfaire certaines contraintes pour tenir compte des conditions aux limites, normales ou tangentielles, le long de la fissure. En effet l'approximation rationnelle ou méromorphe sans contrainte identifie une déformation de la fissure, en fait l'arc de capacité minimal qui joint ses extrémités, plutôt que la fissure elle-même.

Les procédures d'identification de fissures vues précédemment consistent à déterminer d'une part le meilleur approximant dans  $R_N$  : l'espace des fractions rationnelles de degré au plus  $N$  et ayant tous leurs pôles dans  $\mathbb{D}$ , au sens de la norme  $L^2(\mathbb{T})$ , de la fonction  $F$  reconstruite dans le Chapitre 2 et d'autre part le meilleur approximant dans  $H_N^\infty$  au sens de la norme  $L^\infty(\mathbb{T})$ . Dans la pratique, ce dernier peut-être calculé de manière efficace en utilisant les résultats de la théorie d'Adamjan, Arov et Krein (AAK). Même si ces méthodes ne permettent pas de localiser la fissure exactement, elles peuvent néanmoins être intéressantes pour initialiser des algorithmes plus élaborés (et plus lourds).

On peut se demander s'il est possible de raffiner les méthodes d'approximation vues dans le chapitre précédent afin d'identifier la fissure toute entière. Pour cela, nous considérons maintenant des approximants qui satisfont certaines contraintes supplémentaires. La fonction reconstruite à partir des mesures est donnée par

$$u(z) + i\tilde{u}(z) = f(z) + g(z), \quad z \in \mathbb{D} \setminus \gamma, \quad (4.1)$$

avec

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)}{t-z} dt \in \overline{H^2}(\mathbb{D}), \quad (4.2)$$

$\sigma = u^+ - u^-$ , le saut de la température à travers  $\gamma$ , et  $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ , i.e. analytique bornée dans  $\mathbb{D}$ . L'idée est d'utiliser le fait que  $u(z) + i\tilde{u}(z)$  admet une partie imaginaire constante sur la fissure  $\gamma$ , puisque celle-ci est supposée isolante. D'après la formule de Plemelj-Sokhotzki donnée dans le Théorème 1.3.2, nous avons

$$(u + i\tilde{u})_{\pm}(t_0) = (f + g)_{\pm}(t_0) = \pm \frac{\sigma(t_0)}{2} + \frac{1}{2i\pi} \text{vp} \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)}{t_0 - t} dt + g(t_0). \quad (4.3)$$

et comme le saut de température  $\sigma(t)$  est réel sur la fissure, on en déduit que

$$\text{Im} \left\{ \frac{1}{2i\pi} \text{vp} \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)}{t_0 - t} dt + g(t_0) \right\} \quad (4.4)$$

est constante pour  $t_0$  sur la fissure  $\gamma$ . En terme d'approximation rationnelle, nous interprétons la relation précédente en nous restreignant à l'ensemble que nous noterons  $\mathcal{A}_{n,g}$  des fractions rationnelles de degré  $n$ ,

$$\frac{p}{q}(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{l_j=1}^{k_j} \frac{a_{j,l_j}}{(z - z_j)^{l_j}}, \quad z_j \in \mathbb{D}, \quad a_{j,l_j} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j=1}^m k_j \leq n,$$

qui vérifient les égalités suivantes

$$\text{Im} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^m \sum_{l_j=1}^{k_j} \frac{a_{j,l_j}}{(z_i - z_j)^{l_j}} + g(z_i) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

Ces dernières relations peuvent se voir comme des contraintes sur les résidus des approximations considérés.

## 4.2 APPROXIMATION RATIONNELLE $L^2(\mathbb{T})$ DE LA FONCTION $f$ AVEC CONTRAINTES SUR LES RÉSIDUS

On s'intéresse ici au meilleur approximant rationnel avec contrainte pour la norme  $L^2(\mathbb{T})$ . Le problème se formule de la manière suivante :

Pour une fonction  $f \in \overline{H^2}(\mathbb{D})$ , trouver un couple de polynômes  $(p, q)$  avec  $p/q \in \mathcal{A}_{n,g}$ , qui soit un minimum de l'application

$$\begin{aligned} \psi_f : \mathcal{A}_{n,g} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ p/q &\longmapsto \left\| f - \frac{p}{q} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

L'existence du minimum n'est pas évidente a priori car l'espace  $\mathbb{D}$  dans lequel évoluent les pôles n'est pas fermé et l'espace  $\mathbb{C}$  dans lequel se trouvent les résidus n'est pas borné. Dans le paragraphe suivant, on prouve néanmoins l'existence d'un minimum.

Dans la suite, pour simplifier, on suppose que la fonction  $g \in H^\infty(\mathbb{D})$  admet une limite continue sur  $\mathbb{D}$ .

### 4.2.1 Existence d'un minimum

On commence par agrandir l'ensemble  $\mathcal{A}_{n,g}$  en considérant les fractions dont les pôles peuvent éventuellement être sur le cercle  $\mathbb{T}$ . Si on paramétrise par rapport aux pôles et au résidus de la fraction  $p/q$ , on peut représenter cette extension de  $\mathcal{A}_{n,g}$ , par l'ensemble  $\mathcal{F}_{n,g}$  des  $2n$ -uplets suivant :

$$\mathcal{F}_{n,g} = \left\{ \left( (a_{1,l_1}, \dots, a_{m,l_m}), (z_1, \dots, z_1, \dots, z_m, \dots, z_m) \right) \in \mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{D}}^n, \right. \\ \left. \operatorname{Im} \left( \sum_{j \neq i}^m \sum_{l_j=1}^{k_j} \frac{a_{j,l_j}}{(z_i - z_j)^{l_j}} + g(z_i) \right) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \right\},$$

où chaque pôle  $z_j$  est répété autant de fois que sa multiplicité. Notons que l'ensemble  $\mathcal{F}_{n,g}$  est un fermé de l'espace  $\mathbb{C}^{2n}$  muni de la topologie euclidienne.

On considère l'application suivante que nous notons encore par  $\psi_f$  :

$$\psi_f : \mathcal{F}_{n,g} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ ((a_{j,l_j}), (z_j)) \longmapsto \begin{cases} \|f - \frac{p}{q}\|_2 & \text{si tous les } z_j \notin \mathbb{T} \\ +\infty & \text{si un } z_j \in \mathbb{T} \text{ et un } a_{j,l_j} \neq 0 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui nous intéresse.

**Théorème 4.2.1** *L'application  $\psi_f$  atteint son minimum sur l'ensemble  $\mathcal{F}_{n,g}$ .*

Pour la preuve, nous avons besoin de deux lemmes préliminaires.

**Lemme 4.2.2** *L'application  $\psi_f$  est semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{F}_{n,g}$ .*

**Preuve** Soit  $\omega = ((a_{j,l_j}), (z_j)) \in \mathcal{F}$ , correspondant à une fraction  $p/q$  et soit  $\omega_N = ((a_{j,l_j}^N), (z_j^N))$  une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$ , correspondant aux fractions  $p_N/q_N$ , qui converge vers  $\omega$  au sens de la topologie euclidienne, c'est à dire la topologie induite par la norme

$$\|\omega\|_e = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{l_j=1}^{k_j} |a_{j,l_j}|^2 + \sum_{j=1}^m k_j |z_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.6)$$

Soit  $\rho \in \mathbb{R}$  tel que

$$\rho < \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \left( f - \frac{p}{q} \right) (e^{i\theta}) \right|^2 d\theta. \quad (4.7)$$

On note par  $z_1, \dots, z_n$  les pôles de  $q$  non nécessairement distincts. On pose  $B_i^\epsilon = B(z_i, \epsilon)$  et  $\mathbb{T}_\epsilon = \mathbb{T} \setminus \cup_{i=1}^n B_i^\epsilon$ . D'après le théorème de convergence monotone, nous avons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}_\epsilon} \left| \left( f - \frac{p}{q} \right) (e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \left( f - \frac{p}{q} \right) (e^{i\theta}) \right|^2 d\theta. \quad (4.8)$$

Donc on peut choisir  $\epsilon$  suffisamment petit tel que

$$\rho < \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}_\epsilon} \left| \left( f - \frac{p}{q} \right) (e^{i\theta}) \right|^2 d\theta. \quad (4.9)$$

Comme  $\omega_N$  tend vers  $\omega$ , pour  $N$  assez grand, les zéros de  $q$  sont dans  $\cup_{i=1}^n B_i^{\epsilon/2}$ , donc  $p_N/q_N$  est uniformément bornée sur  $\mathbb{T}_\epsilon$ . On conclut par le théorème de convergence dominé que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}_\epsilon} \left| \left( f - \frac{p_N}{q_N} \right) (e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}_\epsilon} \left| \left( f - \frac{p}{q} \right) (e^{i\theta}) \right|^2 d\theta. \quad (4.10)$$

Ainsi pour  $N$  assez grand  $\rho < \psi_f(\omega_N)$ . Par conséquent  $\rho < \psi_f(\omega) \Rightarrow \rho < \psi_f(\omega_N)$ , ce qui prouve bien que

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \psi_f(\omega_N) \geq \psi_f(\omega),$$

et donc  $\psi_f$  est semi continue inférieurement.  $\square$

**Lemme 4.2.3** *Nous avons*

$$\psi_f(\omega) \rightarrow +\infty \text{ quand } \|\omega\|_e \rightarrow +\infty. \quad (4.11)$$

**Preuve** Si  $\|\omega\|_e \rightarrow +\infty$  alors  $\|(a_{j,l_j})\|_e \rightarrow +\infty$  car la suite des pôles  $(z_j)$  reste bornée.

Pour  $f = 0$ , la fonction  $\psi_0$  est semi-continue inférieurement sur le compact  $\mathcal{F}_{n,g} \cup (S \times \overline{\mathbb{D}}^n)$  où  $S$  désigne la sphère unité de  $\mathbb{C}^n$ . Par conséquent, elle atteint son minimum  $\mu > 0$ , et on a

$$\psi_0 \left( \frac{(a_{j,l_j})}{\|(a_{j,l_j})\|_e}, (z_j) \right) = \left\| \frac{p}{\|(a_{j,l_j})\|_e q} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \mu.$$

Donc

$$\psi_f((a_{j,l_j}), (z_j)) = \|f - \frac{p}{q}\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \frac{p}{q} \|1\|_{L^2(\mathbb{T})} - \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \mu \|(a_{j,l_j})\|_e - \|f\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

qui tend vers l'infini quand  $\|\omega\|_e$  tend vers l'infini.  $\square$

**Preuve du Théorème 4.2.1** D'après le lemme 4.2.3, nous avons

$$\lim_{\|\omega\|_e \rightarrow +\infty} \psi_f(\omega) = +\infty.$$

Donc, pour prouver l'existence du minimum, on peut se restreindre à l'ensemble  $\mathcal{F}_{n,g} \cap B_r$  où  $B_r$  est la boule fermée centrée en l'origine et de rayon  $r$  suffisamment grand. Nous avons que  $\psi_f$  est semi-continue inférieurement sur le compact  $\mathcal{F}_{n,g} \cap B_r$  et donc elle y atteint son minimum. Il reste à montrer que celui-ci se trouve dans  $\mathcal{A}_{n,g}$ . Si les pôles  $(z_j)$  sont tous dans  $\mathbb{D}$  la preuve est achevée, sinon il existe des pôles  $(z_k)$  sur le cercle  $\mathbb{T}$ . Nécessairement les résidus  $(a_{k,l_k})$  correspondants sont nuls et le minimum est encore dans l'espace des approximants  $\mathcal{A}_{n,g}$ .  $\square$

Dans la suite, on décrit les formules nécessaires pour implémenter un algorithme permettant le calcul des approximants évoqués précédemment. Pour simplifier l'analyse, on suppose que toutes les fractions rationnelles considérées sont à pôles simples. Numériquement, on peut toujours faire cette hypothèse.



### 4.2.2 Approximation avec des résidus réels

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une version simplifiée du problème dans laquelle les fissures ont une géométrie plus simple, à savoir elles sont portées par des segments horizontaux. Dans ce cas, on va utiliser une idée un peu différente de celle mentionnée dans l'introduction. En effet, ici, l'élément différentiel  $dt$  dans l'intégrale (4.3) est réel, et par suite la quantité  $\sigma(t)dt/2\pi$  est réelle. La fonction

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)}{t-z} dt, \quad (4.12)$$

(dont les premiers coefficients du développement de Fourier dans  $\overline{H^2}(\mathbb{D})$  peuvent être retrouvés à partir des mesures) peut se voir comme une version continue d'une fraction rationnelle à résidus réels. Par analogie, on se restreint donc dans cette partie aux approximations de la fonction (4.12) de la forme

$$\frac{p}{q}(z) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{z-z_j}, \quad |z_j| < 1,$$

avec des résidus  $a_j$  réels. On sait, d'après le Théorème 3.1.1, que pour un polynôme fixé de degré  $n$ ,

$$q(z) = \prod_{k=0}^n (z - z_k),$$

la quantité

$$\left\| f - \frac{p}{q} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \quad (4.13)$$

est minimale lorsque  $p/q =: L(q)/q$ , la projection orthogonale de  $f$  sur le sous espace vectoriel  $V_q$  de  $\overline{H^2}(\mathbb{D})$  engendré par les éléments

$$\frac{z^k}{q}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4.14)$$

Donc pour avoir des approximations à résidus réels, on rajoute une fraction  $\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z-z_k}$  à  $L(q)/q$  et on impose la condition

$$\operatorname{Im}(b_k) = -\operatorname{Im} \left( \operatorname{res}_{z_k} \frac{L(q)}{q} \right). \quad (4.15)$$

Le problème se formule donc de la manière suivante :  
trouver

$$\min \left\{ \left\| f - \left( \frac{L(q)}{q} + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z-z_k} \right) \right\|_2^2 : q \in P_n^1, \quad \operatorname{Im}(b_k) = -\operatorname{Im} \left( \operatorname{res}_{z_k} \frac{L(q)}{q} \right) \right\}.$$

D'après l'équation (4.15), la partie imaginaire  $b_k^i$  de  $b_k = b_k^r + ib_k^i$ , est connue. Il reste donc à déterminer la partie réelle  $b_k^r$ . Pour cela, nous utilisons la relation d'orthogonalité

$$\left\langle f - \frac{L(q)}{q}, \frac{p}{q} \right\rangle = 0, \quad \text{pour } \frac{p}{q} \in V_q,$$

d'où nous déduisons :

$$\left\| f - \left( \frac{L(q)}{q} + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \left\| f - \frac{L(q)}{q} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

Il reste donc à minimiser le terme

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad (4.16)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \left\langle \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k}, \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k} \right\rangle \\ &= \sum_{k,j=0}^n b_k \bar{b}_j \frac{1}{1 - z_k \bar{z}_j} \end{aligned}$$

donc

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - z_1 \bar{z}_1} & \cdots & \frac{1}{1 - z_1 \bar{z}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1 - z_n \bar{z}_1} & \cdots & \frac{1}{1 - z_n \bar{z}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$$

On pose

$$A = \left( \frac{1}{1 - z_i \bar{z}_j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}, \quad B = (b_1, \dots, b_n)^T.$$

On obtient, en prenant le conjugué de l'expression précédente,

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z - z_k} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \bar{B}^T \bar{A} B.$$

On considère la forme quadratique suivante

$$Q(X) = \bar{X}^T \bar{A} X, \quad (4.17)$$

et on souhaite donc minimiser  $Q(B)$ . Pour cela, il suffit de minimiser  $Q$  sur la variété affine  $V$  dont les éléments s'écrivent

$$(b_1^r, b_1^i, \dots, b_n^i)^T. \quad (4.18)$$

Comme les  $b_j^i$  sont fixés, les éléments de l'espace tangent associé à la variété  $V$  sont donnés par :

$$(b_1^r, 0, \dots, b_n^r, 0)^T. \quad (4.19)$$

Pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  nous avons

$$DQ(X)u = \bar{u}^T \bar{A}X + \bar{X}^T \bar{A}u = \bar{u}^T \bar{A}X + u^T A\bar{X} = 2\text{Re}(\bar{u}^T \bar{A}X).$$

Soit  $M = (m_1^r, m_1^i, \dots, m_n^r, m_n^i)^T \in V$ , alors la forme quadratique  $Q$  atteint son minimum au point  $M$ , si  $\forall u \in \mathbb{R}^n \text{Re}(\bar{u}^T \bar{A}M) = 0$ , ce qui implique que  $\bar{A}M$  est imaginaire pur. Sous forme matricielle, on peut écrire

$$\text{Re}(A) \begin{pmatrix} m_1^r \\ \vdots \\ m_n^r \end{pmatrix} = -\text{Im}(A) \begin{pmatrix} m_1^i \\ \vdots \\ m_n^i \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$\text{Re}(A) \begin{pmatrix} b_1^r \\ \vdots \\ b_n^r \end{pmatrix} = -\text{Im}(A) \begin{pmatrix} b_1^i \\ \vdots \\ b_n^i \end{pmatrix},$$

on obtient finalement

$$\begin{pmatrix} b_1^r \\ \vdots \\ b_n^r \end{pmatrix} = -\text{Re}(A)^{-1} \text{Im}(A) \begin{pmatrix} b_1^i \\ \vdots \\ b_n^i \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Si on fixe les pôles  $z_k$  dans l'expression de la matrice  $A$ , on peut donc déterminer les  $b_k^r$  à partir des  $b_k^i$ , ceux-ci étant déterminés par (4.5).

Il est également possible de calculer le gradient du critère par rapport aux pôles de la fraction. On ne détaille pas les formules obtenues.

### 4.2.3 Approximation avec des résidus complexes

A présent, nous ne faisons plus d'hypothèses particulières sur la géométrie de la fissure, et nous considérons les approximants vérifiant les conditions (4.5) données dans l'introduction. Le problème d'approximation avec contraintes est donc le suivant :

Trouver

$$p/q(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} : \quad \gamma_j \in \mathbb{C}, \quad z_j \in \mathbb{D} \text{ et } \text{Im} \left( \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_j}{z_i - z_j} + g(z_i) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

tel que la norme  $\left\| f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$  soit minimale.

Nous avons

$$\text{Im} \left( \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_j}{z_i - z_j} \right) = -\text{Im}(g(z_i)), \quad i = 1, \dots, n,$$

donc

$$\sum_{j \neq i} \operatorname{Im}(\gamma_j) \operatorname{Re} \left( \frac{1}{z_i - z_j} \right) + \operatorname{Re}(\gamma_j) \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z_i - z_j} \right) = -\operatorname{Im}(g(z_i)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

On définit la matrice  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  antisymétrique telle que

$$b_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{z_i - z_j} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

et soit  $\gamma = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_n^i, \gamma_1^r, \dots, \gamma_n^r)$ . L'équation (4.21) est équivalente à

$$[\operatorname{Re}(B), \operatorname{Im}(B)] \gamma^T = -\operatorname{Im}(g(z_i)). \quad (4.22)$$

On considère l'application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  associée à la matrice  $[\operatorname{Re}(B), \operatorname{Im}(B)]$ . Pour des pôles fixés, on peut voir les approximants correspondants dans l'espace  $\mathcal{A}_{n,g}$  comme l'image réciproque par l'application linéaire  $\varphi$  du vecteur à droite de (4.22). C'est une variété affine qui peut s'écrire  $\gamma_0 + \ker \varphi$ , où  $\gamma_0$  est une solution particulière de (4.22). Le noyau est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à  $n$ . Dans la suite, on fait l'hypothèse générique que la dimension égale  $n$  et nous aurons besoin d'une base de cet espace. On notera

$$\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^{(j)}}{z - z_k}, \quad j = 1 \dots n, \quad \text{où } \gamma_k^{(j)} = \gamma_k^{j,r} + i\gamma_k^{j,i},$$

ses éléments. Pour l'algorithme, on a fait un choix particulier d'une base que l'on ne précise pas ici.

#### 4.2.4 Calcul des résidus de l'approximant à pôles fixés

En fonction des éléments de la base, les relations d'orthogonalité qui traduisent l'optimalité de la fraction  $\sum \gamma_i / (z - z_i)$ , s'écrivent

$$\operatorname{Re} \left\langle f - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{z - z_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{(j)}}{z - z_i} \right\rangle = 0, \quad \text{pour tout } j = 1 \dots n. \quad (4.23)$$

Les produits scalaires se réécrivent

$$\overline{\left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{(j)}}{z - z_i}, f \right\rangle} - \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{z - z_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^{(j)}}{z - z_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\gamma_i^{(j)} \tilde{f}(z_i)} - \sum_{i,k} \frac{\gamma_i \overline{\gamma_k^{(j)}}}{1 - z_i \overline{z_k}}, \quad (4.24)$$

soit sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \overline{\gamma_1^{(j)}} & \dots & \overline{\gamma_n^{(j)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tilde{f}(z_1)} \\ \vdots \\ \overline{\tilde{f}(z_n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\gamma_1^{(j)}} & \dots & \overline{\gamma_n^{(j)}} \end{pmatrix} \overline{A} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

avec

$$A = \left( \frac{1}{1 - z_i \bar{z}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(z) = \frac{1}{z} \overline{f(z)}.$$

Soit

$$D = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} & \dots & \gamma_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_n^{(1)} & \gamma_n^{(2)} & \dots & \gamma_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

En considérant tous les indices  $j$ , les expressions (4.25) se réécrivent

$$\overline{D}^T \begin{pmatrix} \overline{\tilde{f}(z_1)} \\ \vdots \\ \overline{\tilde{f}(z_n)} \end{pmatrix} - \overline{D}^T \overline{A} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

et les équations (4.23) deviennent

$$\operatorname{Re}(D^T A) \begin{pmatrix} \gamma_1^r \\ \vdots \\ \gamma_n^r \end{pmatrix} + \operatorname{Im}(D^T A) \begin{pmatrix} \gamma_1^i \\ \vdots \\ \gamma_n^i \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left[ D^T \begin{pmatrix} \tilde{f}(z_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}(z_n) \end{pmatrix} \right]. \quad (4.26)$$

D'autre part, nous avons d'après (4.21),

$$\operatorname{Re}(B) \begin{pmatrix} \gamma_1^i \\ \vdots \\ \gamma_n^i \end{pmatrix} + \operatorname{Im}(B) \begin{pmatrix} \gamma_1^r \\ \vdots \\ \gamma_n^r \end{pmatrix} = -\operatorname{Im} \begin{pmatrix} g(z_1) \\ \vdots \\ g(z_n) \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(D^T A) & \operatorname{Im}(D^T A) \\ \operatorname{Im}(B) & \operatorname{Re}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^r \\ \vdots \\ \gamma_n^r \\ \gamma_1^i \\ \vdots \\ \gamma_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left[ D^T \begin{pmatrix} \tilde{f}(z_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}(z_n) \end{pmatrix} \right] \\ -\operatorname{Im} \begin{pmatrix} g(z_1) \\ \vdots \\ g(z_n) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ce qui permet le calcul des résidus  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de l'approximant.

### 4.2.5 Calcul du gradient

Cela nécessite le calcul des dérivées partielles des résidus  $\gamma_j$  par rapport aux parties réelles et imaginaires des pôles  $z_k = x_k + iy_k$ , qui elles mêmes demandent le calcul des dérivées des résidus de la base. On ne détaille pas ici les équations qui permettent ces calculs, et on considère dans la suite ces dérivées comme étant connues. Le gradient est la dérivée du critère

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \quad (4.27)$$

par rapport aux composantes des pôles  $z_k = x_k + iy_k$  pour  $k = 1 \dots n$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\| f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j}, f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right\rangle \\ &= 2\operatorname{Re} \left\langle - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j / \partial x_k}{z - z_j} - \frac{\gamma_k}{(z - z_k)^2}, f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right\rangle \\ &= -2\operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_k} \tilde{f}(z_j) + \gamma_k \tilde{f}'(z_k) - \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_k} \quad \dots \quad \frac{\partial \gamma_n}{\partial x_k} \right) A \begin{pmatrix} \overline{\gamma_1} \\ \vdots \\ \overline{\gamma_n} \end{pmatrix} - \gamma_k \sum_j \frac{\overline{\gamma_j z_j}}{(1 - \overline{z_j} z_k)^2} \right]. \end{aligned}$$

On dérive de la même manière par rapport à  $y_k$ , la partie imaginaire du pôle  $z_k$ , et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_k} \left\| f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= -2\operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j}{\partial y_k} \tilde{f}(z_j) + i\gamma_k \tilde{f}'(z_k) - \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial y_k} \quad \dots \quad \frac{\partial \gamma_n}{\partial y_k} \right) A \begin{pmatrix} \overline{\gamma_1} \\ \vdots \\ \overline{\gamma_n} \end{pmatrix} - i\gamma_k \sum_j \frac{\overline{\gamma_j z_j}}{(1 - \overline{z_j} z_k)^2} \right]. \end{aligned}$$

#### 4.2.6 Calcul du critère

Pour le critère, nous avons

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - 2\operatorname{Re} \left( \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_n \right) \begin{pmatrix} \tilde{f}(z_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}(z_n) \end{pmatrix} + \left( \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_n \right) A \begin{pmatrix} \overline{\gamma_1} \\ \vdots \\ \overline{\gamma_n} \end{pmatrix}.$$

### 4.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Le programme que nous avons développé sous Matlab contient les modules principaux suivants :

- Un module qui calcule un certain nombre de coefficients de Fourier positifs et négatifs de  $u + i\tilde{u}$  sur  $\mathbb{T}$ . Dans le cas général des résidus complexes, on utilise les mesures sur le cercle et la donnée du flux pour calculer ces coefficients. Cependant, dans le cas des résidus réels, on a besoin uniquement de la partie anti-analytique de  $u + i\tilde{u}$ . Comme, de plus, on ne considère que des fissures horizontales, on peut calculer directement le développement de Fourier de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma(t)}{t - z} dt = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma} \sigma(t) t^n dt \right) z^{-n-1}.$$

Dans les expérimentations numériques, on a choisi pour  $\gamma$  un segment d'extrémités  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , paramétré par  $t = \gamma_0 + u(\gamma_1 - \gamma_0)$  avec  $u \in [0, 1]$ . On a choisi  $\sigma(t) = u(1 - u)$  pour saut de température au point  $t$  du segment correspondant à l'abscisse  $u$ , de sorte que le saut est de signe constant sur la fissure et s'annule sur les extrémités.

- Un module qui calcule le critère et son gradient, soit dans le cas des résidus réels, soit dans le cas général des résidus complexes.

- Un module qui intègre le gradient pour déterminer les pôles d'une fraction rationnelle minimisant le critère. Celui-ci appelle un intégrateur prédéfini dans Matlab.

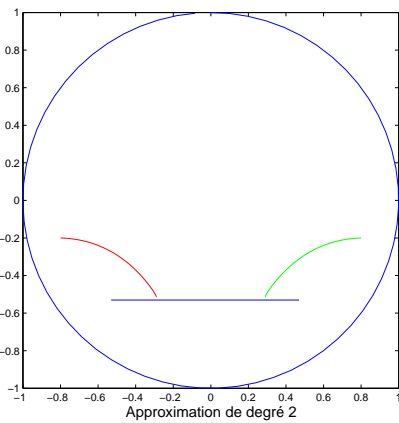


FIGURE 4.1 – Approximation de degré 2 avec des résidus réels

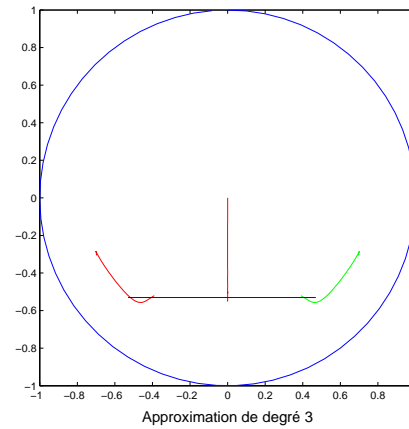


FIGURE 4.2 – Approximation de degré 3 avec des résidus réels

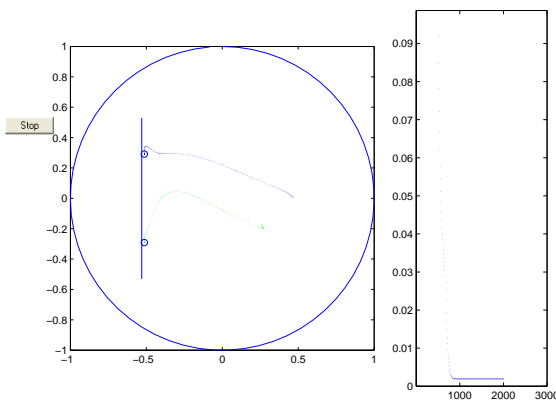


FIGURE 4.3 – Approximation de degré 2 avec des résidus complexes

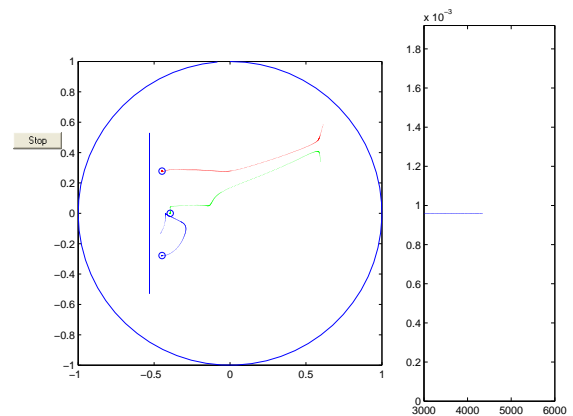


FIGURE 4.4 – Approximation de degré 3 avec des résidus complexes

Sur les Figures 4.1 et 4.2, on cherche à localiser par l'algorithme du gradient une fissure horizontale avec des fractions à résidus réels. Avec le choix des positions initiales des pôles comme sur les figures, on obtient une convergence des pôles vers la fissure. Sur les Figures 4.3, 4.4 et 4.5, on a considéré une fissure verticale approchée par les pôles

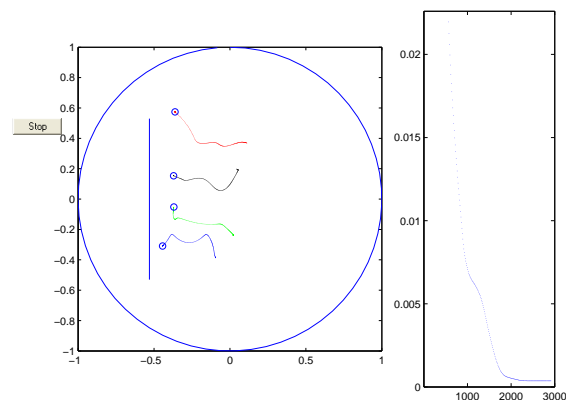


FIGURE 4.5 – Approximation de degré 4 avec des résidus complexes

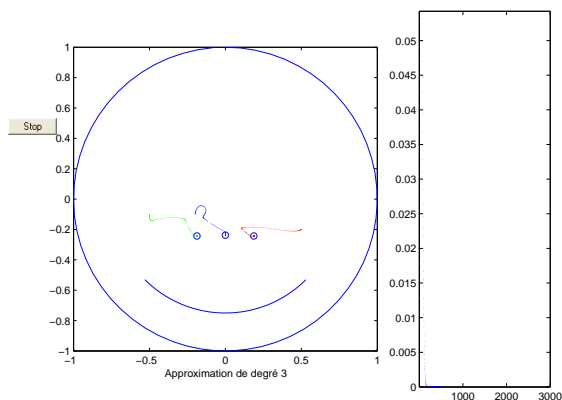


FIGURE 4.6 – Approximation de degré 3 avec des résidus complexes

d'une fraction à résidus complexes, toujours à l'aide d'un algorithme de gradient. Avec les conditions initiales pour les positions des pôles comme sur les dessins, on observe à nouveau une convergence plus ou moins marquée. Par contre, dans la Figure 4.6, avec une fissure circulaire, les trois pôles considérés restent loin de cette dernière.

Au vu des résultats numériques obtenus par les algorithmes de gradient, on peut dire que cette approche n'a pas été totalement satisfaisante. En effet, pour un grand nombre de positions initiales des pôles, ceux-ci n'ont pas convergé vers la fissure considérée. Cela semble dû à l'existence de nombreux minima locaux qui empêchent la convergence des pôles vers la fissure. C'est pourquoi nous présentons maintenant une approche un peu moins ambitieuse, simplement basée sur une discrétisation du disque, en les points de laquelle on place les pôles des fractions rationnelles. Pour un degré fixé, on sélectionne la configuration de pôles qui correspond à la valeur minimale du critère, parmi tous les sous-ensembles possibles de pôles choisis parmi les points de la discrétisation. Pour des raisons de temps de calcul, on s'est limité à des fractions de degré 2 ou 3.

Sur la Figure 4.7, on considère une fissure horizontale que l'on essaie de localiser à l'aide de fractions à résidus réels. On a utilisé une discrétisation avec 181 points disposés régulièrement dans le disque. On remarque que les 2 pôles obtenus se trouvent en deux points de la discrétisation très proche de la fissure. La valeur correspondante du critère est  $2,4083 \cdot 10^{-3}$ . Une fois ces deux premiers pôles déterminés, on peut refaire une recherche avec trois pôles dans une région restreinte du disque contenant les deux pôles. Sur la Figure 4.8, on a donc considéré uniquement le deuxième quart du disque avec un maillage un peu plus raffiné que le précédent. Là encore, les 3 pôles obtenus sont très près de la fissure, avec une valeur du critère de  $4,102 \cdot 10^{-4}$ . En raffinant encore la zone de recherche, cette fois dans une bande discrétisée autour des trois pôles que l'on vient de trouver, on observe que les pôles d'un approximant de degré 4 optimal sont exactement sur la fissure (notons que sur cet exemple, certains points de la discrétisation sont sur la fissure), cf. Figure 4.9. La valeur du critère est alors  $2,113 \cdot 10^{-5}$ .

Contrairement à la méthode du gradient, cette approche par discrétisation a donnée de très bons résultats quelque soit la fissure horizontale choisie.



Par contre, dans le cas de l'approximation avec résidus complexes, la méthode de discrétisation est basée sur une discrétisation localisée du disque

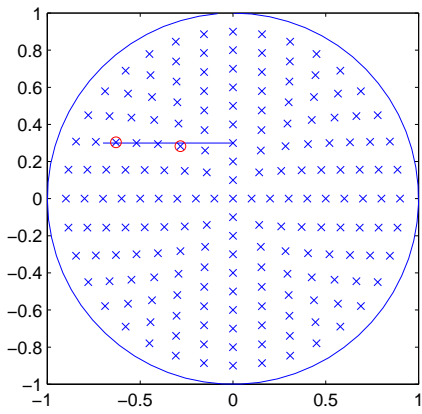


FIGURE 4.7 – Pôles correspondant à une fraction à résidus réels de degré 2 optimale, suivant une discrétisation du disque

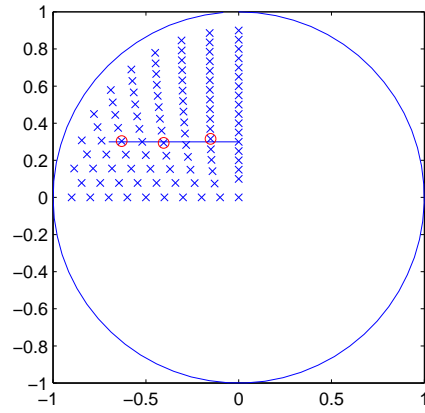


FIGURE 4.8 – Pôles pour une fraction de degré 3 optimale, suivant une discrétisation localisée du disque

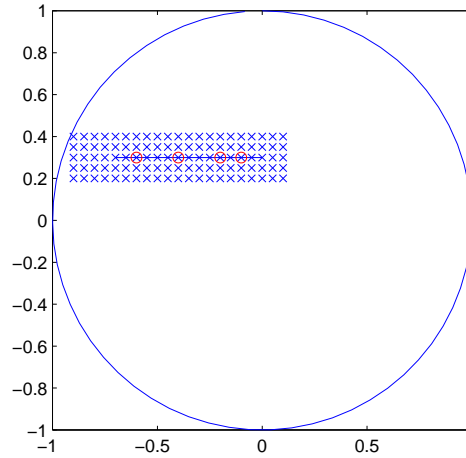


FIGURE 4.9 – Pôles correspondants à une fraction à résidus réels de degré 4, optimale, dans une bande discrétisée

Pour terminer, on peut encore mentionner une voie différente, qui n'a pas été explorée, et qui serait de considérer des approximants de la fonction  $f$  obtenus en discrétisant par morceaux le saut de la température le long de la fissure. Plus précisément, en supposant que les extrémités de la fissure sont connues (on peut par exemple utiliser l'approche méromorphe pour déterminer les extrémités), on pourrait considérer des approximants de la forme

$$\sum_{j=1}^N \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{c_j}{z-t} dt = \sum_{j=1}^N c_j \frac{\log(z - z_{j+1})}{\log(z - z_j)},$$

où les  $c_j$  et les  $z_j$  seraient les paramètres à optimiser.

# Majoration de l'aire d'une cavité à l'aide d'estimées de croissance dans l'espace de Hardy-Sobolev de la couronne

Nous présentons dans ce chapitre un résultat de croissance de fonctions dans l'espace de Hardy-Sobolev  $H^{m,2}(G_s)$  de la couronne. Nous appliquons ce résultat pour l'étude du problème inverse de l'estimation de l'aire d'une cavité dans un domaine plan borné à partir de la différence de potentiels électriques mesurés sur le bord du domaine, dans le cas où le domaine contient une cavité et dans le cas où le domaine est sain. Dans un registre différent, nous appliquons également ce résultat pour l'estimation du taux de convergence d'un schéma d'interpolation particulier dans  $H^{1,2}(G_s)$ .

*Ce chapitre fait l'objet de l'article [81], paru dans Journal of Mathematical Analysis and Applications.*

## 5.1 INTRODUCTION

Soient  $0 \leq k < m$  deux entiers et  $g$  une fonction de l'espace de Hardy-Sobolev  $H^{m,2}(G_s)$ . Il est prouvé dans [73] que la norme de Sobolev de degré  $k$  de  $g$  sur le cercle intérieur  $s\mathbb{T}$  de la couronne  $G_s$  est contrôlée par la norme correspondante prise sur la frontière extérieure  $\mathbb{T}$ . Une telle estimation a été utilisée dans [42, 73] pour obtenir un résultat de stabilité d'un problème inverse relié à l'identification du coefficient de Robin dans la couronne.

Nous donnons ici une version de cette relation, où nous faisons explicite la dépendance par rapport au rayon  $s$  de la couronne.

**Théorème 5.1.1** *Soient  $0 \leq k < m$  deux entiers. On suppose que  $g$  est une fonction de l'espace de Hardy-Sobolev  $H^{m,2}(G_s)$ , et  $\|g\|_{W^{k,2}(\mathbb{T})} \leq 1$ . Alors, nous avons*

$$\|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})} \leq \left( \frac{2}{e \log(1/\|g\|_{W^{k,2}(\mathbb{T})})} \right)^{(m-k)} [(es|\log s|)^{m-k} \|g\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})} + (m-k)^{m-k}]. \quad (5.1)$$

De l'inégalité précédente suit l'inégalité suivante qui est indépendante de  $s$

$$\|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})} \leq \left( \frac{2}{e \log(1/\|g\|_{W^{k,2}(\mathbb{T})})} \right)^{(m-k)} [\|g\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})} + (m-k)^{m-k}]. \quad (5.2)$$

En fait, les auteurs de [73] dérivent leurs résultats dans le cas général des espaces de Hardy pondérés, voir [73, Proposition 7]. Notons aussi que ce type de résultat est une extension au cas doublement connexe de l'estimation établie dans [26] pour un sous ensemble du bord du disque  $\mathbb{D}$ .

Dans le paragraphe 5.2, nous donnons la preuve du Théorème 5.1.1.

Nous étudions dans le paragraphe 5.3, le problème inverse de l'estimation de l'aire d'une cavité à partir des mesures électrostatiques sur le bord d'un domaine plan. Plus précisément, nous prouvons une majoration de l'aire sous certaines hypothèses a-priori de régularité concernant la transformation conforme qui envoie le domaine étudié sur la couronne, voir Théorème 5.3.8. La preuve est basée sur l'utilisation des applications conformes et l'estimation de croissance dans l'espace de Hardy-Sobolev de la couronne, établie précédemment.

Dans le Paragraphe 5.4, nous considérons une suite d'interpolation minimale  $(f_n)_{n \geq 0}$  de fonctions dans  $H^{1,2}(G_s)$  d'une fonction donnée  $f$ . Nous montrons que le schéma d'interpolation est convergent avec un taux de convergence inversement proportionnel au logarithme de la distance maximale entre les points de  $\mathbb{T}$  et les points du schéma d'interpolation, voir Théorème 5.4.3.

## 5.2 ESTIMATIONS DE CROISSANCE DANS L'ESPACE DE HARDY-SOBOLEV DE LA COURONNE

Dans ce paragraphe, nous donnons la preuve du Théorème 5.1.1 .

**Preuve :** Nous suivons le schéma de preuve de [73, Proposition 7]. Nous voulons estimer

$$\|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})}^2 = \sum_{n < -N} \mu_{k,n} s^{2n} |g_n|^2 + \sum_{n = -N+1} \mu_{k,n} s^{2n} |g_n|^2 = \sigma_1 + \sigma_2.$$

D'une part, nous avons

$$\sigma_1 \leq \sup_{n \leq -N} \left( \frac{\mu_{k,n}}{\mu_{m,n}} \right) \|g\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})}^2,$$

et au vu de la Définition 1.6 de  $\mu_{m,n}$  donnée dans le chapitre de rappels :

$$\frac{\mu_{k,n}}{\mu_{m,n}} \leq \frac{s^{2(m-k)}}{(n-k)^2 \dots (n-m+1)^2} \leq \frac{s^{2(m-k)}}{(N+k)^{2(m-k)}},$$

où la dernière inégalité est vraie dès que  $0 < N+k$ . Ainsi

$$\sigma_1 \leq \frac{s^{2(m-k)}}{(N+k)^{2(m-k)}} \|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})}^2. \quad (5.3)$$

D'autre part, d'après la Définition 1.6, nous voyons immédiatement que  $\mu_{k,n} \leq s^{-2k} w_{k,n}$ . Ainsi

$$\sigma_2 \leq \sum_{n=-N+1}^{\infty} s^{-2(N+k-1)} w_{k,n} |g_n|^2 \leq s^{-2(N+k-1)} \epsilon^2. \quad (5.4)$$

Nous choisissons  $N + k = 1 + \lfloor \log \epsilon / 2 \log s \rfloor > 0$ . Alors, de (5.3), (5.4), et des inégalités

$$\frac{\log \epsilon}{2 \log s} \leq N + k \leq 1 + \frac{\log \epsilon}{2 \log s}.$$

découle l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})}^2 \\ & \leq \frac{1}{(\log \|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})})^{2(m-k)}} \left[ (2s \log s)^{2(m-k)} \|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})}^2 + \|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})} (\log \|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})})^{2(m-k)} \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

En utilisant le fait que  $x \log |x|^n \leq (n/e)^n$ , pour  $x \in [0, 1]$ , nous déduisons que

$$\|g\|_{W^{k,2}(s\mathbb{T})}^2 \leq \frac{1}{(\log \epsilon)^{2(m-k)}} \left[ \left(\frac{2}{e}\right)^{2(m-k)} \|g\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})}^2 + \left(\frac{2(m-k)}{e}\right)^{2(m-k)} \right].$$

et l'inégalité (5.1) s'obtient en prenant la racine carrée. Finalement, en utilisant le fait que  $s |\log s| < 1$ , pour  $s \in [0, 1]$ , nous obtenons (5.2).  $\square$

### 5.3 ESTIMATION DE L'AIRES D'UNE CAVITÉ À PARTIR DE MESURES AU BORD

Nous considérons un ouvert simplement connexe borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , de bord  $\Gamma$ , contenant une cavité qui occupe un domaine  $D$  simplement connexe à bord  $\gamma \subset \Omega$ . Du point de vue physique, on suppose que  $\Omega$  est un conducteur électrique, de conductivité constante égale à 1 et  $D$  est parfaitement isolante (de conductivité 0). Notre but est de donner une estimation de la taille de la cavité  $D$  à partir de la comparaison des mesures sur le bord, dans le cas sain (sans cavité) et dans le cas où la cavité est présente. La procédure consiste à imposer un même flux de courant de densité  $\varphi$  sur le bord  $\Gamma$  dans les deux cas et de mesurer les potentiels  $\tilde{u}$  (cas sain) et  $u$  (cas avec cavité) correspondantes. Les situations sont modélisées par les problèmes de Neumann suivants

$$\mathcal{P}_N \begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \setminus D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \varphi \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \gamma. \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\mathcal{P}_{N,S} \begin{cases} \Delta \tilde{u} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= \varphi \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $n$  est la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . On suppose que les bords  $\Gamma$ , et  $\gamma$  sont de classe  $C^{m+1,\alpha}$ , avec  $m \geq 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ , et le flux  $\varphi$  est de classe  $C^{m,\alpha}$  sur  $\Gamma$ . Pour que les solutions des problèmes (5.6) et (5.7) existent, on suppose que le flux  $\varphi$  vérifie la condition de compatibilité

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) ds(z) = 0. \quad (5.8)$$

Dans ce cas les solutions existent à une constante additive près. Pour avoir l'unicité, nous imposons les conditions de normalisation

$$\int_{\Gamma} u(z) ds(z) = 0, \quad \int_{\Gamma} \tilde{u}(z) ds(z) = 0.$$

Des résultats classiques montrent que les solutions  $u$  et  $\tilde{u}$  sont de classes  $C^{m+1,\alpha}$  dans  $\overline{\Omega} \setminus D$ , voir [4].

Considérons maintenant le problème inverse géométrique de la détection la cavité. Concernant l'identifiabilité, sous certaines hypothèses de régularité du bord  $\gamma$ , une seule mesure  $u|_{\Gamma}$  suffit pour déterminer la cavité  $D$  voir [11, 6, 48]. Notons que dans le cas des fissures, une seule mesure ne suffit pas, il faut au moins deux mesures, voir [58]. Pour la stabilité, il y a seulement un résultat de stabilité logarithmique, voir [11].

Nous nous intéressons à donner des informations sur la taille de la cavité. Plusieurs études ont déjà été consacrées à cette question. Dans les travaux de Alessandrini, Morassi et Rosset [7], nous trouvons une majoration et minoration de la taille de la cavité en terme de "normalised power gap". Dans [14] les mêmes types d'estimations ont été obtenu dans le cas où l'inclusion  $D$  est de conductivité  $k$  non nulle. Dans le cas de l'élasticité, l'estimation de la taille d'une cavité à été aussi étudiée, cf. [8, 64]. Pour plus de détail sur ces estimations, le lecteur peut consulter [9].

Une estimation de la norme, analogue à celle que nous allons utiliser, a déjà été utilisée dans [42, 73] pour obtenir un résultat de stabilité du problème inverse d'identification de coefficient de Robin dans la couronne.

Pour utiliser nos estimées de normes, nous avons besoin de l'application conforme  $\psi$  de la couronne  $G_s = \mathbb{D} \setminus s\overline{\mathbb{D}}$ ,  $0 < s < 1$  vers le domaine  $\Omega \setminus \overline{D}$ . Le nombre  $s$  est déterminé d'une manière unique par  $\Omega \setminus \overline{D}$ . C'est l'inverse du rayon conforme de  $\Omega \setminus \overline{D}$ .

Un résultat de Warschawski [88, Théorèmes 3.5 et 3.6], affirme que l'application conforme de  $\mathbb{D}$  sur un domaine à bord une courbe de Jordan de classe  $C^{m+1,\alpha}$ ,  $m \geq 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ , admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $m + 1$  avec des extensions continues sur  $\overline{\mathbb{D}}$ . La dérivée première de cette transformation conforme ne s'annule pas sur le cercle  $\mathbb{T}$ . En raisonnant comme dans la preuve de [29, Proposition 4.2], on peut étendre le résultat de Warschawski au cas de la couronne  $G_s$ . Cela implique en particulier que le module de la dérivée de l'application conforme  $\psi$  est borné supérieurement et inférieurement sur  $\overline{G_s}$ .

Dans cette étude, nous nous limitons au cas de domaines où les modules des dérivées de l'application conforme sont bornés par des constantes absolues. Par conséquent, pour  $m \geq 0$  et  $0 < \lambda < \Lambda$ , nous introduisons la classe des domaines admissible  $\Omega \setminus D$  qui vérifient les propriétés suivantes :

**H(m, λ, Λ) :** toute transformation conforme  $\psi$  de la couronne  $G_s$  vers  $\Omega \setminus D$ , où  $1/s > 1$  est le rayon conforme de  $\Omega \setminus D$ , transformant le bord extérieur  $\mathbb{T}$  de  $G_s$  vers le

bord extérieur  $\Gamma$  de  $\Omega \setminus D$ , vérifie

$$\lambda \leq |\psi'(z)| \leq \Lambda, \quad z \in \overline{G_s}. \quad (5.9)$$

De plus, si  $m \geq 1$ , l'application  $\psi$  vérifie aussi

$$|\psi^{(l)}(z)| \leq \Lambda, \quad z \in \overline{G_s}, \quad 2 \leq l \leq m+1. \quad (5.10)$$

Notons que si les conditions (5.9), (5.10) sont vérifiées pour une telle application conforme, alors elles seront vérifiées pour toute application conforme de  $G_s$  vers  $\Omega \setminus D$  qui préserve les bords extérieurs. C'est une conséquence du fait que les automorphismes de  $G_s$  qui préservent le cercle unité  $\mathbb{T}$  sont les rotations.

La propriété  $\mathbf{H}(\mathbf{m}, \lambda, \Lambda)$  signifie que la distorsion de l'application conforme  $\psi$  est contrôlée par les deux constantes  $\lambda$  et  $\Lambda$ . Nous ne connaissons pas de caractérisation géométrique de cette propriété. La seule référence [100] que nous connaissons, et qui ne donne qu'un résultat très partiel dans le cas simplement connexe, est que les quantités  $|f'(z) - 1|$ ,  $|f''(z)|$ ,  $|f^{(p)}(z)|$ ,  $p > 1$ , sont bornées, moyennant des hypothèses de régularité convenable sur  $\rho(\phi)$  de l'application conforme  $f$  qui transforme le disque unité vers un domaine circulaire légèrement perturbé : c'est à dire l'intérieur d'une courbe de Jordan  $C$  d'équation  $\rho = \rho(\phi)$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) avec  $1 \leq \rho(\phi) \leq 1 + \varepsilon$ . Il serait donc intéressant d'avoir un résultat similaire dans le cas doublement connexe.

Dans tout ce qui suit, on suppose que le flux est généré par deux électrodes, appliquées sur deux parties du bord  $\Gamma$ . Nous considérons donc deux fonctions positives  $\eta_1$  et  $\eta_2$  de classes  $C^{m,\alpha}(\Gamma)$  à supports disjoints  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de  $\Gamma$ , avec

$$\int_{\Gamma_j} \eta_j = 1, \quad \text{pour } j = 1, 2. \quad (5.11)$$

La densité du flux  $\varphi$  sur  $\Gamma$  est donnée par

$$\varphi = \eta_1 - \eta_2, \quad (5.12)$$

en particulier, le flux total à travers  $\Gamma$  est nul.

### 5.3.1 Existence et régularité de la solution du problème de Neumann

En se référant au livre de G. Chen et J. Zhou [47], nous avons les théorèmes suivants :

**Théorème 5.3.1** [47, Thm 6.7.1 p 253] *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , à bord  $C^\infty$ , alors le problème de Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = f \in H^r(\Omega), r \geq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \in H^s(\partial\Omega), s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une solution faible  $u \in H^\alpha(\Omega)$ , avec  $\alpha = \min(r + 2, s + \frac{3}{2})$ , si et seulement si

$$\int_{\partial\Omega} g \, ds = \int_{\Omega} f \, dx.$$

**Remarque 5.3.2** Le Théorème 5.3.1 assure l'existence d'une solution faible du problème  $\mathcal{P}_N$  pour  $f = 0$ ,  $s = 0$  et  $\alpha = \frac{3}{2}$ , c'est à dire il existe  $u \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega \setminus K)$  tel que

$$\int_{\Omega \setminus K} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} \Phi v \, ds(x) \text{ pour tout } v \in \mathcal{D}(\Omega \setminus K).$$

**Théorème 5.3.3** [47, Thm 2.1.3 p 30] Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  à bord  $C^\infty$ . Si  $s = \frac{n}{2} + k + \alpha$  avec  $k \in \mathbb{Z}^+$  et  $0 < \alpha < 1$ , alors l'injection

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ est continue.}$$

En particulier si  $n = 2$ ,  $k = 0$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ , l'injection

$$H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \text{ avec } 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \text{ est continue.}$$

On en conclut donc que la solution du problème de Neumann appartient à  $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$  avec  $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ . Nous allons démontrer que les solutions  $u$  et  $\tilde{u}$  sont en fait harmoniques.

En se référant à [50], nous avons la proposition et le corollaire suivants :

**Proposition 5.3.4** [50, Proposition 10, p 294] Soient  $B = B(x_0, r_0)$  et  $u_k$  une suite de fonctions harmoniques sur  $B$  et continues sur  $\overline{B}$ . Supposons que  $u_k$  converge uniformément sur  $\partial B$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Alors  $u_k$  converge uniformément sur  $\overline{B}$ , ses dérivées convergent uniformément sur tout compact de  $B$  et sa limite est harmonique.

**Corollaire 5.3.5** [50, Corollaire 7, p 294] Toute fonction continue solution au sens des distributions de l'équation de Laplace sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , est harmonique sur cet ouvert.

**preuve :** Soit  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace de fonctions de classes  $C^\infty$  à supports compacts et  $u \in C(\Omega)$ . On a  $u$  est une solution faible de l'équation de laplace,

$$\text{donc } \int_{\Omega} \Delta u \xi \, dx = 0 = \int_{\Omega} u \Delta \xi \, dx \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il suffit de montrer que  $u$  est harmonique sur tout ouvert borné  $\Omega'$  avec  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ . Fixons un tel ouvert  $\Omega'$  et considérons  $0 < r_0 < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ . Nous régularisons  $u$  par convolution, c'est à dire que nous nous donnons

$$\rho \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \rho \geq 0, \int_{\Omega'} \rho \, dx = 1 \text{ et } \text{supp}(\rho) \subset B(0, r_0).$$



On pose pour tout  $k \geq 1$ ,  $\rho_k = k^n \rho(kx)$  de telle sorte que  $\rho_k \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\rho_k \geq 0, \quad \int_{\Omega'} \rho_k dx = 1 \text{ et } \text{supp}(\rho_k) \subset B(0, \frac{r_0}{k})$$

on pose alors  $u_k = u * \rho_k$ , c'est à dire :

$$u_k(x) = \int_{\Omega'} u(y) \rho_k(x-y) dy = \int_{\Omega'} u(x-y) \rho_k(y) dy$$

qui est bien défini pour tout  $x \in \Omega'$ . On a  $u_k \in C^2(\Omega')$ , et par hypothèse nous avons

$$\Delta u_k(x) = \int_{\Omega'} u(y) \Delta \rho_k(x-y) dy = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Donc la suite  $u_k$  est harmonique sur  $\Omega'$ . D'autre part,

$$|u_k(x) - u(x)| = \left| \int_{\Omega'} (u(x-y) - u(x)) \rho_k(y) dy \right| \leq \max_{|y| \leq \frac{r_0}{k}} |u(x-y) - u(x)|,$$

ce qui prouve que  $u_k$  converge uniformément vers  $u$  sur  $\Omega'$ . D'après la proposition 5.3.4, on en déduit que  $u$  est harmonique dans  $\Omega \setminus D$ . On montre de la même manière que  $\tilde{u}$  est harmonique dans  $\Omega$ .  $\square$

D'après les conditions imposées sur le flux, la solution  $u$ , respectivement  $\tilde{u}$ , admet une conjuguée harmonique  $v$  (respectivement  $\tilde{v}$ ) monovaluée dans le même domaine. Si on note par

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad \tilde{f}(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z), \quad (5.13)$$

alors  $f$  ( respectivement  $\tilde{f}$ ) est analytique sur  $\Omega \setminus \overline{D}$  (respectivement sur  $\Omega$ .)

D'après les conditions de régularité sur le bord  $\Gamma$  et le flux  $\varphi$ , on sait que  $\tilde{u} \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ . Donc  $\partial \tilde{v} / \partial s = \partial \tilde{u} / \partial n = \varphi \in C^{0,\alpha}$ . Ainsi  $\tilde{v} \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ , ce qui montre en particulier que  $\tilde{f}(\Gamma)$  est de classe  $C^{1,\alpha}$ .

### 5.3.2 Résultats préliminaires

Nous rappelons dans ce paragraphe, quelques résultats qui seront utiles pour la suite.

**Théorème 5.3.6 (Rado, 1930)** *Si  $h$  est une fonction harmonique dans  $\mathbb{D}$ , continue sur  $\overline{\mathbb{D}}$  et si  $z_0$  est un point critique de  $h$  dans  $\mathbb{D}$ , alors  $h$  admet au moins quatre zéros distincts sur le cercle  $\mathbb{T}$ .*

**Preuve** Si  $h \equiv 0$ , le théorème est vrai. Supposons que  $h$  est non identiquement nulle. On pose  $g(z) = h(z) - h(z_0) + i\tilde{h}(z)$ , avec  $\tilde{h}$  le conjugué harmonique de  $h$ . La fonction  $g$  est analytique, et comme  $h$  est non identiquement nulle, alors il existe  $n \geq 2$ , tel que

$$g(z) = C_n(z - z_0)^n + C_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots, \quad \text{avec } C_n \neq 0.$$

Donc au voisinage de  $z_0$  nous avons

$$g(z) = C_n(z - z_0)^n + o(|z - z_0|^n).$$

On pose  $z - z_0 = re^{i\theta}$ , donc

$$g(z) = C_n r^n e^{in\theta} + o(r^n).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} h(z) - h(z_0) = \Re(g(z)) &= C_n^r r^n \cos(n\theta) - C_n^i r^n \sin(n\theta) + o(r^n), \quad \text{avec } C_n = C_n^r + iC_n^i \\ &= \sqrt{(C_n^r)^2 + (C_n^i)^2} r^n \sin(n\theta + \theta') + o(r^n). \end{aligned}$$

Lorsque  $\theta$  parcourt  $[0, 2\pi]$ ,  $h(z) - h(z_0)$  s'annule de  $2n$  fois. Les  $n$  arcs divisent le voisinage de  $z_0$  en  $2n$  secteurs  $C_1^+, C_1^-, \dots, C_n^+, C_n^-$ . La notation indique que  $h$  est alternativement positive et négative dans ces secteurs. Considérons l'ensemble

$$A = \left\{ z \in \mathbb{D} : h(z) > h(z_0) \right\},$$

$A$  est formé de  $n$  composante connexe  $G_1^+, \dots, G_n^+$ , dans lesquelles se trouvent respectivement les secteurs  $C_1^+, \dots, C_n^+$ . Considérons pour l'instant la composante connexe  $G_1^+$ . Pour tout point du bord de  $G_1^+$  intérieur au cercle unité,  $h \equiv 0$ . Puisque  $h$  est strictement positif à l'intérieur de  $G_1^+$ , nécessairement le bord de  $G_1^+$  touche le cercle  $\mathbb{T}$ . On applique le même raisonnement à  $G_1^-, \dots, G_n^+, G_n^-$ , nous nous trouvons des points  $P_1^+, P_1^-, \dots, P_n^+, P_n^-$ , vérifions les propriétés suivantes :

- a)  $P_1^+, P_1^-, \dots, P_n^+, P_n^-$ , sont respectivement des points au bord de  $G_1^+, G_1^-, \dots, G_n^+, G_n^-$ ,
- b)  $P_1^+, P_1^-, \dots, P_n^+, P_n^-$ , sont sur le cercle  $\mathbb{T}$ ,
- c)  $h(P_i^+) > 0$  et  $h(P_i^-) < 0$  pour tout  $i = 1 \dots n$ .

Donc nous voyons que  $h$  change de signes au moins  $2n \geq 4$  fois sur  $\mathbb{T}$ .  $\square$

**Proposition 5.3.7** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe borné à bord une courbe de Jordan de classe  $C^{m,\alpha}$ ,  $m \geq 1$ , et  $0 < \alpha < 1$  et soit  $D \subset \overline{\Omega}$  un ouvert connexe de même régularité que  $\Omega$ . Soit  $f$  la transformation conforme de  $\Omega \setminus \overline{D}$  vers la couronne  $\mathcal{A} = \{z; 1 < |z| < R\}$ . Alors  $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega} \setminus D)$ , de plus  $f$  est un homéomorphisme de  $\overline{\Omega} \setminus D$  dans  $\overline{\mathcal{A}}$ .*

**Preuve :** On désigne par  $\psi_1$  la transformation conforme de  $\Omega$  vers le disque unité. D'après le Théorème 1.5.10,  $\psi_1 \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$  et par le Théorème 1.5.9, on en déduit que  $\psi_1$  est un homéomorphisme de  $\overline{\Omega}$  dans  $\overline{\mathbb{D}}$ . Nous notons par  $D' := \psi_1(D)$ . Considérons l'application conforme  $\psi_2$  de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D'}$  vers  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , avec  $\psi_2(\infty) = \infty$ . D'après le Théorème 1.5.9,  $\psi_2^{-1}$  est un homéomorphisme de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ , dans  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D'$ . En utilisant le Théorème 1.5.10, nous déduisons que  $\psi_2^{-1} \in C^{m,\alpha}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$ . L'application  $\psi_3 = \psi_2 \circ \psi_1$  transforme conformément  $\Omega \setminus D$  vers l'anneau  $\mathcal{A}'$ , de bord externe  $C = \psi_2(\mathbb{T})$  et de bord interne  $\mathbb{T}$ . Comme  $\psi_1 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$  est homéomorphisme, et  $\psi_2 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus D' \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$  est aussi un homéomorphisme, donc  $\psi_3 : \Omega \setminus D \rightarrow \overline{\mathcal{A}'}$  est un homéomorphisme, de plus d'après les régularités de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , l'application  $\psi_3$  est de classe  $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega} \setminus D)$ . Finalement, soit  $\psi_4$ , l'application conforme de  $\mathcal{A}'$  vers la couronne  $\mathcal{A} = \{z; 1 < |z| < R\}$ ; l'existence d'une telle application est bien connue voir [94]. En se référant à [29],  $\psi_4$  s'étend en un homéomorphisme de  $\overline{\mathcal{A}'} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ , via la transformation

$$\psi_4(z) = \frac{1}{\psi_4\left(\frac{1}{z}\right)},$$

l'application  $\psi_4$  s'étend analytiquement et injectivement à travers le cercle  $\mathbb{T}$ . De la même manière  $\psi_5(z) = \psi_4 \circ \psi_2$  (cf. Figure 5.1) s'étend analytiquement et injectivement à travers le cercle  $\mathbb{T}$ , via

$$\psi_5 = \frac{R^2}{\psi_5\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

donc  $\psi_5$  est de classe  $C^{m,\alpha}(\overline{\mathbb{D}} \setminus D')$ . D'après le Théorème 1.5.10,  $\tilde{f}'$  admet une extension

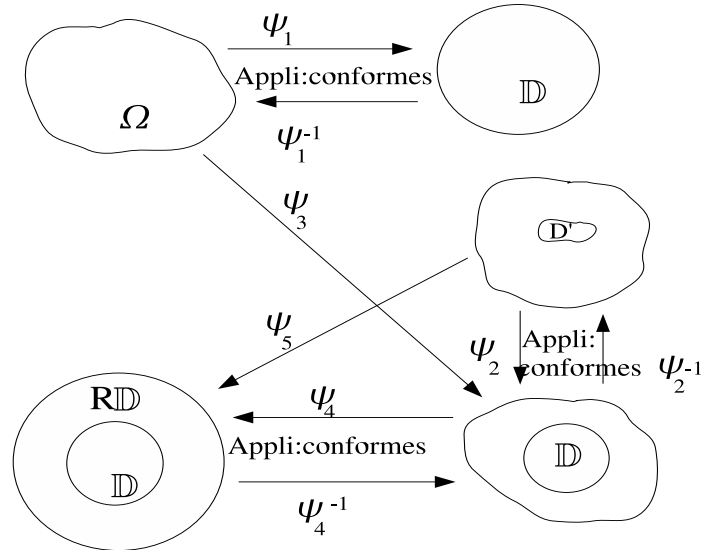


FIGURE 5.1 – Transformations des domaines par des applications conformes.

continue non nulle sur  $\overline{\Omega}$ . □

### 5.3.3 Enoncé du théorème

Soit  $\tilde{f}$  la fonction définie en (5.13). On pose

$$m_{\tilde{f}'} = \inf_{z \in \overline{\Omega}} |\tilde{f}'(z)|, \quad M_{\tilde{f}'} = \sup_{z \in \overline{\Omega}} |\tilde{f}'(z)|, \tag{5.14}$$

nous avons donc  $0 < m_{\tilde{f}'} < M_{\tilde{f}'}$ . Notons que les deux paramètres  $m_{\tilde{f}'}$  et  $M_{\tilde{f}'}$  ne dépendent que du domaine sain et peuvent être déterminés à partir des données au bord du domaine, car le Théorème 1.5.10 affirme que

$$\tilde{f}'(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(\zeta)}{z - \zeta} \quad \text{lorsque } \zeta \rightarrow z, \quad z, \zeta \in \Gamma, \tag{5.15}$$

et  $\tilde{f}$  est connue sur  $\Gamma$ . En particulier, du point de vue numérique la formule (5.15) peut être utilisée pour estimer numériquement  $m_{\tilde{f}'}$  et  $M_{\tilde{f}'}$ . Dans la suite nous notons par  $|A|$  la mesure de Lebesgue d'un sous ensemble mesurable du plan. Il est raisonnable d'un point de vue pratique de supposer que l'aire de la cavité  $D$  n'est pas très grande par rapport à l'aire de  $\Omega$ . On admet donc qu'il existe une constante  $\rho < 1$  telle que  $|D|/|\Omega| \leq \rho$ .

**Théorème 5.3.8** *Considérons le domaine admissible  $\Omega \setminus D$  vérifiant la propriété  $\mathbf{H}(\mathbf{m}, \lambda, \Lambda)$ . On suppose que la différence de potentiels  $u$  et  $\tilde{u}$  vérifie*

$$\sigma := \|u - \tilde{u}\|_{2,\Gamma} / \sqrt{\lambda} < 1.$$

Alors, si  $m = 1$ , on a

$$|D| \leq \frac{C_1}{|\log \sigma|}, \quad (5.16)$$

et si  $m > 1$ , on a

$$|D| \leq \sup_{0 < \delta < 1} \min \left( \frac{C_m}{\delta^{m-1} |\log \sigma|^m}, \delta^2 |\Omega| \right). \quad (5.17)$$

Dans (5.16)-(5.17), la constante  $C_m$ ,  $m \geq 1$ , est donnée explicitement par

$$C_m = \sqrt{\frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \frac{M_{\tilde{f}'}'}{m_{\tilde{f}'}^2}} \left( \frac{2}{e} \right)^m \left( \frac{2m\pi\lambda^2(1+\Lambda)^{m-\frac{1}{2}}}{|\Omega|(1-\rho)} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2m} C'_m \|\varphi\|_{W^{m-1,2}(\Gamma)} + m^m \right),$$

où  $C'_m$  est une constante qui dépend seulement de  $m$  (e.g.  $C'_1 = 1$ ,  $C'_2 = \sqrt{5}/2$ ).

### 5.3.4 Preuve du Théorème 5.3.8

**Étape 1 : Construction d'une application conforme et utilisation de la formule de Green**

Nous considérons la fonction harmonique  $\tilde{u}$  dans  $\Omega$  qui représente le potentiel électrique associé au flux de courant  $\varphi$  dans  $\Gamma$ . Elle admet une conjuguée harmonique  $\tilde{v}$  définie à une constante additive près, qui est obtenue, en intégrant le flux sur le bord  $\Gamma$ .

**Lemme 5.3.9** *Avec le flux donné par (5.11) et (5.12), la fonction holomorphe  $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z)$  définit une application conforme de  $\Omega$  dans  $\Omega_0 := \tilde{f}(\Omega)$ .*

Un tel lemme est déjà apparu dans plusieurs travaux sur les problèmes inverses et a été étendu à des situations plus générales. Le lecteur peut consulter par exemple [10].

**Preuve** Le théorème de Rado affirme que si  $h$  est une fonction harmonique dans le disque  $\mathbb{D}$ , continue sur le bord  $\mathbb{T}$  et s'il admet un point critique  $z_0$  dans  $\mathbb{D}$ , alors  $h$  atteint la valeur  $h(z_0)$  au moins quatre fois sur le bord du disque  $\mathbb{D}$ . Puisque  $\tilde{v}$  n'est pas constante, d'après le principe du maximum

$$\inf_{\bar{\Omega}} \tilde{v}(z) < \tilde{v}(z) < \sup_{\bar{\Omega}} \tilde{v}(z).$$

Comme les valeurs de  $\tilde{v}$  dans  $\Omega$  sont prises exactement deux fois sur le bord  $\Gamma$ , on déduit du théorème de Rado appliqué à  $\tilde{v}$  (ce qui est possible en considérant l'application conforme de Riemann du disque  $\mathbb{D}$  au domaine simplement connexe  $\Omega$ ) que  $\tilde{v}$  n'a pas de point critique dans  $\Omega$ . Donc pour un point  $z_0$  dans  $\Omega$ , il passe une seule ligne de niveau, qui touche le bord en deux points distincts. Sur la ligne de niveau, la dérivée  $\partial\tilde{u}/\partial s = \partial\tilde{v}/\partial n$ , ne s'annule pas, donc est de signe constant. Par conséquent,  $\tilde{u}$  est injective sur la ligne

de niveau. D'autre part, deux lignes de niveau de  $\tilde{v}$  ne peuvent correspondre qu'à des valeurs différentes de  $\tilde{v}$ , sinon  $\tilde{v}$  serait constante sur le domaine limité par les deux lignes, donc constante aussi dans  $\Omega$ . On en déduit que  $\tilde{f}$  est injective et constitue une application conforme de  $\Omega$  sur  $\Omega_0$ .  $\square$

Nous considérons maintenant l'image  $D_0$  de la cavité  $D$  par  $\tilde{f}$ . L'aire de  $D$ , vérifie l'inégalité suivante

$$|D| = \int_D dx dy = \int_{D_0} |(\tilde{f}^{-1})'(z)|^2 dx dy \leq \frac{1}{\min_{z \in \overline{D}} |\tilde{f}'(z)|^2} \int_{D_0} dx dy \leq \frac{1}{m_{\tilde{f}}^2} \int_{D_0} dx dy.$$

Considérons la fonction harmonique  $\tilde{v}_0$  dans  $D_0$  telle que  $\tilde{v}_0 = \tilde{v} \circ \tilde{f}^{-1}$ . D'après la définition de  $\tilde{f}$ , nous avons  $\tilde{v}_0(z) = y$ , où  $z = x + iy$ . Par application de la formule de Green sur  $D_0$ , nous obtenons

$$\int_{D_0} dx dy = \int_{\partial D_0} \tilde{v}_0(z) \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial n}(z) ds.$$

Soit  $v_0 = v \circ \tilde{f}^{-1}$ , avec  $v$  le conjugué harmonique de  $u$  dans  $\Omega \setminus \overline{D}$ . Puisque la cavité  $D$  est isolante,  $v$  est constante sur  $\partial D$ , et nous pouvons choisir cette constante. Nous supposons que  $v = 0$  sur  $\partial D$ , c'est équivalent à  $v_0 = 0$  sur  $\partial D_0$ . Ainsi la dernière intégrale se réécrit

$$\int_{\partial D_0} (\tilde{v}_0 - v_0)(z) \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial n}(z) ds \leq \int_{\partial D_0} |(\tilde{v}_0 - v_0)(z)| ds \leq M_{\tilde{f}} \int_{\gamma} |(\tilde{v} - v)(z)| ds.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\int_{\gamma} |(\tilde{v} - v)(z)| ds \leq \text{length}(\gamma)^{1/2} \|\tilde{v} - v\|_{L^2(\gamma)} \leq \text{length}(\gamma)^{1/2} \|\tilde{f} - f\|_{L^2(\gamma)},$$

où  $f = u + iv$  dans  $\Omega \setminus \overline{D}$ . Nous obtenons finalement l'inégalité suivante,

$$|D| \leq \text{length}(\gamma)^{1/2} \frac{M_{\tilde{f}}}{m_{\tilde{f}}^2} \|\tilde{f} - f\|_{L^2(\gamma)} \leq \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2} \frac{M_{\tilde{f}}}{m_{\tilde{f}}} \|\tilde{f} - f\|_{L^2(\gamma)}, \quad (5.18)$$

où la dernière inégalité provient du fait que

$$\int_{\gamma} ds = \int_{s\mathbb{T}} |(\psi^{-1})'(s)| ds \leq \frac{2\pi s}{\lambda} \leq \frac{2\pi}{\lambda}.$$

### Étape 2 : Utilisation de l'inégalité de la norme dans l'espace de Hardy-Sobolev $H^{m,2}(G_s)$ de la couronne

Comme expliqué dans l'introduction, pour utiliser le résultat du Paragraphe 5.2, nous avons besoin de transformer le problème original dans la couronne  $G_s$ , où  $s$  est le rayon conforme du domaine  $\Omega \setminus D$ . Nous définissons dans  $G_s$  les fonctions suivantes

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u} \circ \psi, \quad \tilde{f}_1 = \tilde{f} \circ \psi, \quad u_1 = u \circ \psi, \quad f_1 = f \circ \psi,$$

qui sont obtenues à partir des fonctions  $u, \tilde{u}, f$  et  $\tilde{f}$  composées avec la transformation  $\psi^{-1}$ . Puisque  $\tilde{u}$  est solution du problème (5.7), la fonction  $\tilde{u}_1$  satisfait

$$\Delta \tilde{u}_1(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial n}(\zeta) = \varphi_1(\zeta) := (\varphi \circ \psi)(\zeta) |\psi'(\zeta)|, \quad \zeta \in \mathbb{T}. \quad (5.19)$$

De même, puisque  $u$  est solution de (5.6), la fonction  $u_1$  est solution dans  $G_s$  du problème,

$$\begin{cases} \Delta u_1(\zeta) = 0, & \zeta \in G_s, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n}(\zeta) = \varphi_1(\zeta), & \zeta \in \mathbb{T}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n}(\zeta) = 0, & \zeta \in s\mathbb{T}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Soit

$$\varphi_1(e^{i\theta}) = \sum_{k \neq 0} \alpha_k e^{ik\theta} \in W^{m-1,2}(\mathbb{T}),$$

la série de Fourier de  $\varphi_1$  sur  $\mathbb{T}$ . Dans le disque  $\mathbb{D}$  ou la couronne  $G_s$ , on peut donner des formules explicites pour les solutions de (5.19) et (5.20). Pour se faire, on se place en coordonnées polaires, c'est à dire  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $s \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et on cherche le potentiel sous la forme  $u_1(r, \theta) = u_r(r)u_\theta(\theta)$ .

Dans  $G_s$  le potentiel vérifie  $\Delta u_1(\zeta) = 0$ ,  $\zeta \in G_s$ , soit en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5.21)$$

L'équation de Laplace s'écrit donc

$$\frac{1}{ru_r(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_r(r)}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 u_\theta(\theta)} \left( \frac{d^2 u_\theta(\theta)}{d\theta^2} \right) = 0,$$

ou encore

$$\frac{r}{u_r(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_r(r)}{dr} \right) = -\frac{1}{u_\theta(\theta)} \left( \frac{d^2 u_\theta(\theta)}{d\theta^2} \right). \quad (5.22)$$

On pose

$$u_\theta(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\theta}.$$

Chaque terme  $u_r(r)\gamma_k e^{ik\theta}$ , vérifie l'équation (5.21), ce qui donne d'après (5.22)

$$\frac{r}{u_r(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_r(r)}{dr} \right) = k^2. \quad (5.23)$$

On cherche une solution de la forme  $r^n$ , si on remplace dans (5.23), on trouve  $n^2 = k^2$ .

**Premier cas,  $k \neq 0$  :** Une solution de (5.23) est de la forme

$$a_k r^k + b_k r^{-k}$$

**Deuxième cas,  $k = 0$  :** Nous avons d'après (5.22),  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{du_r(r)}{dr} \right) = 0$ , ce qui donne que

$$\frac{du_r(r)}{dr} = \frac{b_0}{r}.$$

On a donc comme solution  $a_0 + b_0 \log r$ , et la solution générale est de la forme

$$u_1(r, \theta) = a_0 + b_0 \log r + \sum_{k \neq 0} \left( a_k r^k + b_k r^{-k} \right) e^{ik\theta}.$$

On refait la même chose pour  $\tilde{u}_1$  dans le disque  $\mathbb{D}$ . Pour que  $\tilde{u}_1$  se prolonge par continuité en zéros il faut que  $b_0 = 0, \{a_k = 0, k < 0\}$  et  $\{b_k = 0, k > 0\}$ . La solution formelle est de la forme

$$\tilde{u}_1(r, \theta) = a_0 + \sum_{k>0} a_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k<0} b_k r^{-k} e^{ik\theta}$$

**Prise en compte des conditions aux limites :** D'après les conditions imposées sur  $\varphi_1$ , nous avons

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(1, \theta)}{\partial r} = \sum_{k>0} k a_k e^{ik\theta} - \sum_{k<0} k b_k e^{ik\theta} = \sum_{k \neq 0} \alpha_k e^{ik\theta}.$$

En tenant compte de la condition de normalisation, nous obtenons

$$\tilde{u}_1(r, \theta) = \sum_{k \neq 0} \text{sign}(k) \frac{\alpha_k}{k} r^{|k|} e^{ik\theta}. \quad (5.24)$$

Nous avons aussi, pour le cas de la couronne,

$$\frac{\partial u_1(1, \theta)}{\partial r} = \sum_{k \neq 0} k(a_k - b_k) e^{ik\theta} = \sum_{k \neq 0} \alpha_k e^{ik\theta}$$

et

$$\frac{\partial u_1(s, \theta)}{\partial r} = \sum_{k \neq 0} k(a_k s^{k-1} - b_k s^{-k-1}) e^{ik\theta} = 0.$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} a_k - b_k = \frac{\alpha_k}{k} \\ a_k s^k + b_k s^{-k} = 0 \end{cases}$$

On déduit de ce qui précède que

$$u_1(r, \theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k}{k(1 - s^{2k})} \left( r^k + \frac{s^{2k}}{r^k} \right) e^{ik\theta}. \quad (5.25)$$

**Déterminations des Conjuguées harmoniques :** D'après la condition imposée sur le flux les conjuguées harmoniques  $v_1, \tilde{v}_1$  des fonctions harmoniques  $u_1$  et  $\tilde{u}_1$  existent, et nous avons

$$\tilde{u}_1(r, \theta) = - \sum_{k<0} \frac{\alpha_k}{k} r^{-k} (\cos(-k\theta) - i \sin(-k\theta)) + \sum_{k>0} \frac{\alpha_k}{k} r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta),$$

donc sa conjugué harmonique est donnée par

$$\tilde{v}_1(r, \theta) = - \sum_{k<0} \frac{\alpha_k}{k} r^{-k} (\sin(-k\theta) + i \cos(-k\theta)) + \sum_{k>0} \frac{\alpha_k}{k} r^k (\sin k\theta - i \cos k\theta).$$

De même pour

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k}{k(1 - s^{2k})} r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) + \sum_{k>0} \frac{\alpha_k s^{2k}}{k(1 - s^{2k})} r^{-k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) \\ &+ \sum_{k<0} \frac{\alpha_k s^{2k}}{k(1 - s^{2k})} r^{-k} (\cos(-k\theta) - i \sin(-k\theta)) \end{aligned}$$

sa conjugué est donnée par

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k}{k(1-s^{2k})} r^k (\sin k\theta - i \cos k\theta) + \sum_{k > 0} \frac{\alpha_k s^{2k}}{k(1-s^{2k})} r^{-k} (-\sin(k\theta) + i \cos(k\theta)) \\ &+ \sum_{k < 0} \frac{\alpha_k s^{2k}}{k(1-s^{2k})} r^{-k} (\sin(-k\theta) + i \cos(-k\theta)). \end{aligned}$$

D'après les expressions précédentes, nous avons finalement

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(z) &= \tilde{u}_1(z) + i\tilde{v}_1(z) = 2 \sum_{k > 0} \frac{\alpha_k}{k} z^k, \\ f_1(z) &= u_1(z) + iv_1(z) = 2 \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k}{k(1-s^{2k})} z^k, \quad \text{avec } z = r e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Nous déduisons donc, la série de  $f_1 - \tilde{f}_1$

$$(f_1 - \tilde{f}_1)(z) = 2 \sum_{k < 0} \frac{\alpha_k}{k(1-s^{2k})} z^k + 2 \sum_{k > 0} \frac{\alpha_k s^{2k}}{k(1-s^{2k})} z^k = 2 \sum_{k > 0} \frac{\alpha_k s^{2k}}{k(1-s^{2k})} \left( \alpha_k z^k + \frac{\bar{\alpha}_k}{z^k} \right).$$

Donc la norme  $L^2(s\mathbb{T})$  de  $f_1 - \tilde{f}_1$  vérifie l'inégalité suivante

$$\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(s\mathbb{T})}^2 \leq \frac{4s^2}{(1-s^2)^2} \|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad (5.26)$$

Pour les dérivées d'ordre supérieur, nous avons

$$(f_1 - \tilde{f}_1)^{(l+1)}(z) = 2 \sum_{k < 0} k(k-1) \dots (k-l) \frac{\alpha_k}{k(1-s^{2k})} z^{k-l-1} + 2 \sum_{k \geq l+1} k(k-1) \dots (k-l) \frac{\alpha_k s^{2k}}{k(1-s^{2k})} z^{k-l-1},$$

d'où l'on peut vérifier que :

$$\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(s\mathbb{T})}^{(l+1)} \leq \frac{4}{s^{2l}(1-s^2)^2} (l+1)^2 \|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{T})}^{(l)}, \quad l \geq 0.$$

D'après (5.26) et l'inégalité précédente, pour  $l = 0, \dots, m-1$ , nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{W^{m,2}(s\mathbb{T})}^2 \leq \frac{4m^2}{s^{2m-2}(1-s^2)^2} \|\varphi_1\|_{W^{m-1,2}(\mathbb{T})}^2. \quad (5.27)$$

Notons que cette inégalité dans la couronne est un exemple explicite de résultats de régularité vérifiés par les équations linéaires elliptiques dans des domaines plus généraux, voir [59, chapitre 8] ou [101, Chapitre 5].

Maintenant nous estimons  $\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(s\mathbb{T})}$ , par rapport à  $\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(\mathbb{T})}$  en appliquant la Proposition 5.2 dans l'espace de Hardy-Sobolev  $H^{m,2}(G_s)$ . On choisit  $k = 0$ , et on suppose que

$$\epsilon_1 := \|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 1, \quad (5.28)$$



nous obtenons d'après (5.2),(5.27) et le fait que  $es|\log s| < 1$ ,  $s \in [0, 1]$  que

$$\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(s\mathbb{T})} \leq \left(\frac{2}{e|\log \epsilon_1|}\right)^m \left(\frac{2m}{s^{m-1}(1-s^2)}\|\varphi_1\|_{W^{m-1,2}(\mathbb{T})} + m^m\right). \quad (5.29)$$

Comme  $\Omega \setminus D$  est supposé un domaine admissible satisfaisant les hypothèses  $\mathbf{H}(\mathbf{m}, \lambda, \mathbf{\Lambda})$ , nous obtenons donc

$$\epsilon_1^2 = \|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \left(\sup_{s \in \Gamma} |(\psi^{-1})'(s)|\right) \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \lambda^{-1} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (5.30)$$

Dans la dernière inégalité, nous avons supposé que  $v - \tilde{v} = 0$  sur  $\Gamma$ . En effet, puisque le même flux  $\varphi$  est appliqué sur le bord externe de  $\Omega$  et de  $\Omega \setminus D$ ,  $v - \tilde{v}$  est constante ; or  $\tilde{v}$  est déterminée à une constante additive, et nous avons la liberté de choisir cette constante, ce qui nous permet d'avoir cette différence égale à zéro. D'après l'inégalité (5.30) nous observons que l'hypothèse (5.28) est vérifiée dès que

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \lambda. \quad (5.31)$$

### Etape 3 : Estimation de l'aire de la cavité dans le domaine originel

Dans cette étape finale nous donnons une borne supérieure de l'aire de la cavité en utilisant les deux inégalités (5.26) et (5.27). Pour cela nous avons besoin de deux résultats préliminaires. D'abord, nous montrons que la norme  $\|\varphi_1\|_{W^{m-1,2}(\mathbb{T})}$  peut être dominée par  $\|\varphi\|_{W^{m-1,2}(\mathbb{T})}$ , à une constante multiplicative qui dépend de la transformation conforme  $\varphi$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ . Si  $m = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \int_{\mathbb{T}} |\varphi_1(z)|^2 ds(z) = \int_{\mathbb{T}} |(\varphi \circ \psi)(z)|^2 |\psi'(z)|^2 ds(z) \\ &= \int_{\Gamma} |\varphi(z)|^2 |\psi'(z)|^2 \frac{ds(z)}{|\psi'(z)|} \\ &\leq \max_{z \in \Gamma} |\psi'(z)| \int_{\Gamma} |\varphi(z)|^2 ds(z), \end{aligned}$$

donc

$$\|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \Lambda^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}. \quad (5.32)$$

Si  $m \geq 2$ , la norme de Sobolev d'ordre  $m - 1$  fait intervenir les dérivées  $\partial \varphi_1 / \partial s^n$ ,  $0 \leq n \leq m - 1$ . Puisque

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\partial u_1}{\partial n}(\zeta) = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \circ \psi\right)(\zeta) |\psi'(\zeta)|,$$

la formule de Faa' Di Bruno pour la dérivée  $n$ -ème de la composée des fonctions, nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \varphi_1}{\partial s^n}(\zeta) &= \sum \frac{(n+1)!}{k_1! \dots k_{n+1}!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \circ \psi(\zeta) (|\psi'(\zeta)|)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n |\psi'|}{\partial s^n}(\zeta)\right)^{k_{n+1}} \\ &= \sum \frac{(n+1)!}{k_1! \dots k_{n+1}!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial s^k}(\psi(\zeta)) (|\psi'(\zeta)|)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n |\psi'|}{\partial s^n}(\zeta)\right)^{k_{n+1}} \end{aligned}$$

où  $k + 1 = k_1 + \dots + k_{n+1}$ , et la somme est prise sur les entiers non nuls  $k_1, \dots, k_{n+1}$  tels que

$$k_1 + 2k_2 + \dots + (n + 1)k_{n+1} = n + 1.$$

Pour estimer la  $l$ -ème dérivée de  $|\psi'|$ ,  $0 \leq l \leq n$ , nous écrivons

$$\frac{\partial^l |\psi'|}{\partial s^l} = \frac{\partial^l}{\partial s^l} ((\psi' \overline{\psi'})^{1/2}),$$

nous utilisons de nouveau la formule de Faa' Di Bruno

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l} ((\psi' \overline{\psi'})^{1/2}) = \sum \frac{C_1 l!}{k_1! \dots k_l!} |\psi'|^{1-2k} \left( \frac{\partial}{\partial s} (\psi' \overline{\psi'}) \right)^{k_1} \dots \frac{1}{l!} \left( \frac{\partial^l}{\partial s^l} (\psi' \overline{\psi'}) \right)^{k_l},$$

avec  $k_1 + \dots + k_l = k$  et  $k_1 + 2k_2 + \dots + lk_l = l$ . Nous utilisons la formule de Leibniz pour la dérivée du produit des fonctions,

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l} (\psi' \overline{\psi'}) = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{\partial^j \psi'}{\partial s^j} \frac{\partial^{l-j} \overline{\psi'}}{\partial s^{l-j}},$$

dont le module peut être borné par le module des dérivées  $\partial^j \psi' / \partial s^j$ ,  $0 \leq j \leq l \leq m - 1$ . Puisque  $\psi'$  est analytique dans  $G_s$  et sa dérivée admet une extension continue sur  $\mathbb{T}$ , nous avons

$$\frac{\partial \psi'}{\partial s} e^{i\theta} = iz\psi''(z), \quad z = e^{i\theta},$$

voir [54, Thm, 3.11], pour une version de cette formule dans l'espace de Hardy  $H^1(\mathbb{D})$ . De la même manière pour les dérivées d'ordre  $n$ ,  $1 \leq n \leq m - 1$ , nous obtenons

$$\frac{\partial^n \psi'}{\partial s^n} (e^{i\theta}) = P^n(\psi')(z), \quad z = e^{i\theta},$$

où  $P$  est l'opérateur différentiel  $P(f)(z) = izf'(z)$ . Cela montre que le module des dérivées  $\partial^n \psi' / \partial s^n$ ,  $0 \leq n \leq l \leq m - 1$ , peut être borné par le module des dérivées  $\psi^{(n)}$ ,  $1 \leq n \leq m$  et par conséquent par une expression qui dépend seulement de la constante  $\Lambda$ . D'après ce qui précède,

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial s^l} (\psi' \overline{\psi'}) \right| = \left| \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{\partial^j \psi'}{\partial s^j} \frac{\partial^{l-j} \overline{\psi'}}{\partial s^{l-j}} \right| \leq C_2 \Lambda^2.$$

et

$$\frac{\partial^l}{\partial s^l} ((\psi' \overline{\psi'})^{1/2}) \leq C_3 |\psi'| \frac{\Lambda^{2(k_1 + \dots + k_l)}}{\lambda^{2k}} = C_3 |\psi'| \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2k}.$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^n \varphi_1}{\partial s^n} \right| &\leq C_4 \max_{0 \leq j \leq n} \left( \left| \frac{\partial^j \varphi}{\partial s^j} \right| \right) |\psi'|^{k_1 + \dots + k_{n+1}} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2(k_2 + 2k_3 + \dots + nk_{n+1})} \\
&= C_4 \max_{0 \leq j \leq n} \left( \left| \frac{\partial^j \varphi}{\partial s^j} \right| \right) |\psi'|^{k+1} \left( \frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2(k+1)} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2(n+1)} \\
&= C_4 \max_{0 \leq j \leq n} \left( \left| \frac{\partial^j \varphi}{\partial s^j} \right| \right) |\psi'|^{k+1} \left( \frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2k} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2n} \\
&\leq C_4 \max_{0 \leq j \leq n} \left( \left| \frac{\partial^j \varphi}{\partial s^j} \right| \right) |\psi'| \Lambda^k \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2n} \\
&\leq C_4 \max_{0 \leq j \leq n} \left( \left| \frac{\partial^j \varphi}{\partial s^j} \right| \right) |\psi'| (1 + \Lambda)^n \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2n}.
\end{aligned}$$

Nous sommes donc prêt à donner une estimation de la norme de Sobolev d'ordre  $m - 1$  de  $\varphi_1$  en fonction de la norme de Sobolev d'ordre  $m - 1$  de  $\varphi$ . En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\partial^n \varphi_1}{\partial s^n}(z) \right|^2 ds(z) &= \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^n \varphi_1}{\partial s^n}(\psi(\xi)) \right|^2 \frac{ds(\xi)}{|\psi'(\xi)|} \\
&\leq C_4^2 (1 + \Lambda)^{2n+1} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{4n} \max_{0 \leq j \leq n} \left( \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^j \varphi}{\partial s^j}(\xi) \right|^2 ds(\xi) \right) \\
&\leq C_4^2 (1 + \Lambda)^{2n+1} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{4n} \|\varphi\|_{W^{n,2}(\Gamma)}^2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m-1} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\partial^n \varphi_1}{\partial s^n}(z) \right|^2 ds(z) &\leq C_4^2 \sum_{n=0}^{m-1} (1 + \Lambda)^{2n} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{4n} \|\varphi\|_{W^{n,2}(\Gamma)}^2 \\
&\leq m C_4^2 (1 + \Lambda)^{2m-1} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{4m-4} \|\varphi\|_{W^{m-1,2}(\Gamma)}^2.
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\|\varphi_1\|_{W^{m-1,2}(\mathbb{T})} \leq \sqrt{m} C_4 (1 + \Lambda)^{m-1/2} \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{2m-2} \|\varphi\|_{W^{m-1,2}(\Gamma)}. \quad (5.33)$$

Dans la seconde étape, nous avons besoin de vérifier que le rayon  $s$  de la couronne  $G_s$  n'est pas trop proche de 1. La vérification est une simple conséquence de l'hypothèse  $|D|/|\Omega| \leq \rho < 1$ . En effet

$$|\Omega| - |D| = \int_{G_s} |\psi'(\zeta)|^2 dx dy \leq \Lambda^2 \pi (1 - s^2), \quad (5.34)$$

donc

$$\frac{|\Omega|(1 - \rho)}{\pi \Lambda^2} \leq (1 - s^2). \quad (5.35)$$

D'après (5.18), (5.29), (5.30) avec (5.33), (5.34), (5.35) et l'inégalité

$$\|f - \tilde{f}\|_{L^2(\gamma)}^2 \leq \Lambda \|f_1 - \tilde{f}_1\|_{L^2(s\mathbb{T})}^2,$$

nous avons

$$\begin{aligned} |D| &\leq \sqrt{\frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \frac{M_{\tilde{f}}}{m_{\tilde{f}}^2}} \left(\frac{2}{e}\right)^m \left( \frac{2m\pi\Lambda^2(1+\Lambda)^{m-\frac{1}{2}}}{s^{m-1}|\Omega|(1-\rho)} \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{2m-2} C'_m \|\varphi\|_{W^{m-1,2}(\Gamma)} + m^m \right) \frac{1}{|\log \sigma|^m} \\ &\leq \sqrt{\frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \frac{M_{\tilde{f}}}{m_{\tilde{f}}^2}} \left(\frac{2}{e}\right)^m \left( \frac{2m\pi\Lambda^2(1+\Lambda)^{m-\frac{1}{2}}}{|\Omega|(1-\rho)} \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{2m} C'_m \|\varphi\|_{W^{m-1,2}(\Gamma)} + m^m \right) \frac{1}{s^{m-1}|\log \sigma|^m}, \end{aligned}$$

où  $C'_m$  est une constante qui dépend de  $m$ . On pose

$$C_m = \sqrt{\frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \frac{M_{\tilde{f}}}{m_{\tilde{f}}^2}} \left(\frac{2}{e}\right)^m \left( \frac{2m\pi\Lambda^2(1+\Lambda)^{m-\frac{1}{2}}}{|\Omega|(1-\rho)} \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{2m} C'_m \|\varphi\|_{W^{m-1,2}(\Gamma)} + m^m \right),$$

d'où

$$|D| \leq \frac{C_m}{s^{m-1}|\log \sigma|^m}, \quad (5.36)$$

et si  $m = 1$ ,

$$|D| \leq \frac{C_1}{|\log \sigma|}.$$

Si  $m > 1$ , la majoration de  $|D|$  tend vers l'infini si  $s$  tend vers zéro. En effet, cela provient du facteur  $s^{m-1}$  dans le dénominateur de (5.36). De toute façon, si  $s$  est petit,  $|D|$  est aussi petit, car d'après l'inégalité de Carleman, voir [62, p.503], on a  $|D|/|\Omega| \leq s^2$ . Cela nous permet de donner une majoration de  $|D|$ , en prenant le minimum des deux estimations. En considérant toutes les valeurs possibles de  $s$  dans  $(0, 1)$ , on obtient la majoration

$$|D| \leq \sup_{0 < \delta < 1} \min \left( \frac{C_m}{\delta^{m-1}|\log \sigma|^m}, \delta^2|\Omega| \right).$$

□

### 5.3.5 Exemple : la classe des couronnes excentrées

Dans ce paragraphe, nous illustrons notre résultat en considérant une classe spécifique de domaines admissibles notée par  $\mathcal{D}_d$ . Les éléments de  $\mathcal{D}_d$ , sont des couronnes excentrées  $\mathcal{G}_{a,r}$  de bord interne le cercle  $|z - a| = r$ , et de bord externe le cercle unité  $\mathbb{T}$ . Sans perte de généralité on suppose que le centre  $a$  du cercle interne est un nombre positif. Plus précisément, on suppose que  $0 < a + r < 1 - d < 1$ , avec  $d$  un nombre réel positif inférieur à 1, par exemple  $0 < d < 1/2$ . Ainsi il existe une séparation minimale entre les deux cercles  $|z - a| = r$ , et  $|z| = 1$ , en d'autres termes, la cavité  $D$  n'est pas trop près du bord de  $\Omega$ .

**Proposition 5.3.10** *La classe  $\mathcal{D}_d$ , forme un ensemble de domaines admissibles. Ces éléments vérifient pour tout  $m \geq 1$ , la propriété  $H(m, \lambda, \Lambda_m)$  avec*

$$\lambda = \frac{d}{2-d}, \quad \Lambda_m = \frac{m!(2-d)(1-d)^{m-1}}{d^m}.$$

**Preuve** Soit  $\mathcal{G}_{a,r}$  un élément de  $\mathcal{D}_d$ . Nous commençons par décrire la transformation conforme  $\psi$ , ou plutôt son inverse  $\psi^{-1}$  de  $\mathcal{G}_{a,r}$  vers la couronne  $G_s$ , pour une valeur appropriée de  $s$ . La transformation bilinéaire (ou transformation de Möbius)  $\psi^{-1}$ , peut être déterminée en suivant [1, Exemple 5.7.8]. Pour cela, nous considérons deux nombres réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$ , qui sont inverses par rapport aux deux cercles  $|z| = 1$  et  $|z - a| = r$ , c'est à dire

$$\alpha\beta = 1 \text{ et } (\alpha - a)(\beta - a) = r^2.$$

Nous considérons  $\alpha$  et  $\beta$ , tels que  $\alpha$  est à l'intérieur et  $\beta$  est à l'extérieur des deux cercles. Nous choisissons donc la transformation bilinéaire  $\psi^{-1}$  qui transforme  $\alpha$  et  $\beta$  en 0 et  $\infty$  respectivement,

$$\psi^{-1}(z) = k \frac{z - \alpha}{\alpha z - 1}.$$

Avec ce choix, les cercles  $|z| = 1$  et  $|z - a| = r$  sont transformés en des cercles centrés en l'origine. La constante  $k = -1$  est choisie de telle sorte que le cercle  $|z| = 1$  est transformé en lui même. Ainsi

$$\psi^{-1}(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z} \text{ et } \psi(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \alpha z} \quad (5.37)$$

Le cercle intérieur de  $G_s$  est transformé par  $\psi$  en le cercle  $|z - a| = r$ . Nous allons maintenant déterminer son rayon  $s$ . Il est facile de vérifier que l'ensemble des  $z$  tels que  $|z - \alpha|/|z - \beta| = k$  est un cercle de centre  $(\alpha - k^2\beta)/(1 - k^2)$  par rapport auquel  $\alpha$  et  $\beta$  sont inverses. Ainsi, nous choisissons  $k$  tel que  $(\alpha - k^2\beta)/(1 - k^2) = a$ , ou de manière équivalente à  $k^2 = (a - \alpha)/(a - \beta)$ . Pour ce choix, le cercle  $|z - \alpha|/|z - \beta| = k$  coïncide avec le cercle  $|z - a| = r$ , et il est clair à partir de (5.37) que son image par  $\psi^{-1}$  est le cercle de centre

$$s = \frac{k}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha - a}{\beta - a}} = \frac{\beta(\alpha - a)}{r} = \frac{r^2 + a(\alpha - a)}{r}.$$

Notons que de la dernière expression de  $s$ , nous obtenons que

$$r \leq s \leq 1 - \rho < 1, \quad (5.38)$$

où  $0 < d < 1$  a été défini au début du paragraphe. Les dérivées d'ordre  $n$ ,  $n \geq 1$  de  $\psi$ , sont données par

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \frac{n!(1 - \alpha^2)\alpha^{n-1}}{(1 + \alpha z)^{n+1}}.$$

Ainsi,

$$\inf_{z \in G_s} |\psi'(z)| = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \geq \frac{d}{2 - d}, \quad (5.39)$$

et pour  $n \geq 1$

$$\sup_{z \in \overline{G}_s} |\psi^{(n)}| = |\psi^{(n)}|(-1) = n! \alpha^{n-1} \frac{1 + \alpha}{(1 - \alpha)^n} \leq n! \frac{(2-d)(1-d)^{n-1}}{d^n}. \quad (5.40)$$

Comme par l'hypothèse  $0 < d < 1/2$ , nous déduisons que

$$\sup_{z \in \overline{G}_s} |\psi^{(n)}| \leq m! \frac{(2-d)(1-d)^{m-1}}{d^m}, \quad 1 \leq n \leq m, \quad (5.41)$$

ce qui montre la proposition.  $\square$

Comme résultat final, nous donnons une version du Théorème 5.3.8 pour une couronne de la classe  $\mathcal{D}_d$ , quand  $m = 1$ .

**Théorème 5.3.11** *Considérons un domaine  $\mathcal{G}$  de la classe  $\mathcal{D}_d$ , et supposons que*

$$\sigma := \sqrt{\frac{2-d}{d}} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{T})} < 1.$$

Alors, l'aire de la cavité inconnue  $D$  de  $\mathcal{G}$ , vérifie

$$|D| \leq \frac{C}{|\log(\sigma)|}$$

où  $C$  est une constante donnée explicitement par

$$C = 2M_{\tilde{f}'} \sqrt{2\pi(1-d)} (2\|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} + 1) / (ed^2 m_{\tilde{f}'}^2).$$

**Preuve :** Pour  $m = 1$ , d'après (5.18) et (5.29), l'aire de la cavité  $D$  vérifie l'inégalité suivante

$$|D| \leq \text{length}(\gamma)^{1/2} \frac{M_{\tilde{f}'} 2}{m_{\tilde{f}'}^2 e} \left( \frac{2}{1-s^2} \|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{T})} + 1 \right) \frac{1}{\log(\sigma)}, \quad (5.42)$$

En utilisant le fait que

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \sqrt{\frac{2-d}{d}} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)},$$

et que  $\text{length}(\gamma)^{1/2} \leq \sqrt{2\pi s/\lambda}$ , avec  $\lambda = d/(2-d)$ , nous obtenons la majoration suivante

$$|D| \leq \sqrt{\frac{2\pi s}{\lambda}} \frac{M_{\tilde{f}'} 2}{m_{\tilde{f}'}^2 e} \left( \frac{2}{1-s^2} \sqrt{\frac{2-d}{d}} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} + 1 \right) \frac{1}{\log(\sigma)}. \quad (5.43)$$

D'autre part, nous avons  $a + r \leq 1 - d$  et  $s \leq a + r$  donc  $s \leq 1 - d$  ce qui donne que

$$\frac{1}{1-s^2} \leq \frac{1}{d(2-d)}.$$

Finalement, en utilisant les majorations précédentes, nous obtenons

$$|D| \leq \sqrt{2\pi(1-d)} \frac{M_{\tilde{f}'} 2}{m_{\tilde{f}'}^2 ed^2} (2\|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} + 1) \frac{1}{\log(\sigma)}. \quad (5.44)$$

$\square$

## 5.4 UNE AUTRE APPLICATION : CONVERGENCE D'UN SCHÉMA D'INTERPOLATION DANS $H^{1,2}(G_s)$

Dans ce paragraphe, nous étudions un schéma d'interpolation d'une fonction de  $H^{1,2}(G_s)$  à partir de valeurs sur le bord extérieur de la couronne  $G_s$ . Un schéma similaire a déjà été étudié dans le cas du disque, voir [26].

Soit  $S_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble de  $n$  points distincts de  $\mathbb{T}$ . On dit que  $f_n \in H^{1,2}(G_s)$  interpole  $f \in H^{1,2}(G_s)$  dans  $S_n$ , si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f_n(x_i) = f(x_i). \quad (5.45)$$

Nous considérons, maintenant une suite de sous ensemble

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots$$

et nous notons  $S = \cup_n S_n$ . On suppose que  $\overline{S} = \mathbb{T}$ .

**Définition 5.4.1** *On dit qu'un ensemble  $\{z_1, \dots, z_n\}$  est un ensemble d'unicité pour une fonction  $f \in H^{1,2}(G_s)$ , si pour toute fonction  $g \in H^{1,2}(G_s)$  telle que  $f(z_i) = g(z_i)$ , on a  $f = g$ .*

**Lemme 5.4.2** [54] *Si  $f$  est fonction de l'espace de Hardy de la couronne  $H^{1,2}(G_s)$  qui s'annule sur une partie du bord de mesure de Lebesgue positive, alors elle est identiquement nulle.*

Comme conséquence du Lemme 5.4.2,  $S$  est un ensemble d'unicité pour  $f \in H^{1,2}(G_s)$ .

La condition (5.45) n'est pas suffisante pour déterminer  $f_n$  d'une manière unique. Parmi les fonctions de  $H^{1,2}(G_s)$  qui satisfont (5.45), nous choisissons celle de norme minimale. Pour se faire, nous décomposons l'espace  $H^{1,2}(G_s)$  comme  $H^{1,2}(G_s) = Z_n \oplus U_n$ , où  $Z_n$  est le sous espace fermé des fonctions qui s'annule sur  $S_n$  et  $U_n$  est son complémentaire orthogonal. Alors nous définissons  $f_{S_n} = \Pi_n(f)$ , où  $\Pi_n$  est la projection orthogonale sur  $U_n$ . Nous obtenons ainsi la suite d'interpolation minimale  $f_{S_n}$  de  $f$  par rapport aux points du schéma de  $(S_n)_{n \geq 1}$ .

D'après des résultats généraux sur les espaces de Hilbert, il est connu que  $f_{S_n}$  converge vers  $f$  dans  $H^{1,2}(G_s)$ , donc uniformément dans  $G_s$ , pour plus de détails voir [26, section 2]. D'un point de vue pratique, il est aussi important de noter que  $f_{S_n}$  peut être déterminé à partir des valeurs  $f(x_i), i = 1, \dots, n$ , en résolvant un système d'équations linéaires. La fonction  $f_{S_n}$  admet l'expression suivante

$$f_{S_n}(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n} K_1(x, x_i),$$

où le vecteur  $\lambda_n = (\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n})^T$  est une solution du système linéaire  $A_n \lambda_n = B_n$ , avec  $B_n$  le vecteur de valeurs  $(f(x_i))_{i=1, \dots, n}$  et  $A_n$  est la matrice de Gram des fonctions  $K_1(x, x_i)$ , où  $K_1(x, y)$  est le noyau reproduisant de  $H^{1,2}(G_s)$ , voir (1.7). Nous sommes donc prêt à donner notre résultat qui estime le taux de convergence de la suite d'interpolation  $f_{S_n}$  vers sa limite  $f$

**Théorème 5.4.3** *On considère une fonction  $f \in H^{1,2}(G_s)$  avec  $\|f\|_{H^{1,2}(G_s)} \leq 1$ . On suppose que  $(S_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'ensembles d'interpolation avec  $\overline{S} = \mathbb{T}$  et  $h_n = \sup_{x \in \mathbb{T}} d(x, S_n)$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N$  suffisamment grand tel que pour tout  $n \geq N$ , on a*

$$\|f - f_{S_n}\|_{H^2(G_s)} \leq \frac{4 + \epsilon}{e \log(1/h_n)}.$$

**Remarque 5.4.4** *Notons que le taux de convergence d'un schéma d'approximation dans l'espace de Hardy-Sobolev du disque avec une contrainte sur un sous ensemble de  $\mathbb{T}$  a été obtenu dans [31], voir en particulier [31, Theorem 5.2].*

**Preuve du Théorème 5.4.3** On pose  $g_n = f - f_{S_n}$ . Nous écrivons les points  $x_k$  de  $S_n$  comme  $x_k = e^{i\theta_k}$  et nous considérons un recouvrement de  $\mathbb{T}$  avec  $n$  intervalles  $I_k = [\theta_k^-, \theta_k^+]$  admettant au plus un point commun, et chaque  $I_k$  contient  $\theta_k$ . On suppose que les distances  $d(\theta_k^-, \theta_k)$  et  $d(\theta_k^+, \theta_k)$  sont inférieures ou égales à  $h_n$ . Nous avons

$$\int_{\mathbb{T}} |g_n|^2 d\theta = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} |g_n|^2 d\theta.$$

De plus, pour  $e^{i\gamma} \in I_k$ , on a

$$|g_n(e^{i\gamma})|^2 \leq \left( \int_{\theta_k}^{\gamma} |g'_n(e^{it})| dt \right)^2 \leq h_n \int_{\theta_k}^{\gamma} |g'_n(e^{it})|^2 dt,$$

ainsi

$$\int_{\theta_k}^{\theta_k^+} |g_n|^2 d\theta \leq h_n \int_{\theta_k}^{\theta_k^+} |g'_n|^2 d\theta \int_{\theta_k}^{\theta_k^+} d\theta \leq h_n^2 \int_{\theta_k}^{\theta_k^+} |g'_n|^2 d\theta.$$

On retrouve aussi la même inégalité pour l'intégrale entre  $\theta_k^-$  et  $\theta_k$ , et donc nous avons la majoration

$$\int_{I_k} |g_n|^2 d\theta \leq h_n^2 \int_{I_k} |g'_n|^2 d\theta,$$

et par conséquent,

$$\|g_n\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq h_n^2 \|g_n\|_{H^{1,2}(G_s)}^2 \leq h_n^2, \quad (5.46)$$

où la dernière inégalité provient du fait que  $g_n$  est une projection de  $f$  qui est supposée de norme inférieure ou égale à 1 dans  $H^{1,2}(G_s)$ . En utilisant l'inégalité (5.2) avec  $k = 0$  et  $m = 1$ , l'inégalité précédente avec le fait que  $\|g_n\|_{H^{1,2}(G_s)} \leq 1$ , nous obtenons

$$\|g_n\|_{L^2(s\mathbb{T})} \leq \frac{2}{e \log 1/\|g_n\|_{L^2(\mathbb{T})}} (\|g_n\|_{H^{1,2}(s\mathbb{T})} + 1) \leq \frac{4}{e \log 1/h_n}.$$

En utilisant (5.46), on obtient

$$\|g_n\|_{H^{1,2}(G_s)}^2 \leq \left( \frac{4}{e \log 1/h_n} \right)^2 + h_n^2,$$

ce qui prouve le théorème. □



## Deuxième partie

# MINIMISATION DE FONCTIONNELLES PAR DIFFÉRENTS GRADIENTS



# Identification des paramètres de Lamé en élasticité linéaire

Nous nous intéressons, au problème inverse non linéaire d'identification des paramètres de Lamé inconnus  $\lambda$  et  $\mu$ , d'un matériau élastique linéaire et isotrope, à partir des mesures sur le bord du domaine. Nous montrons un résultat d'identifiabilité et un résultat de stabilité lipshitzienne directionnelle, dans le cas où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes. Nous transformons ensuite le problème inverse en un problème d'optimisation par le biais d'une fonction du type Kohn-Vogelius dont nous montrons que le seul minimum est le couple de paramètres  $(\lambda, \mu)$  recherché. Nous calculons enfin son gradient et nous illustrons l'étude par quelques exemples numériques.

## 6.1 INTRODUCTION

Soit  $\Omega$  un domaine de référence borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  de classe  $C^1$  ( $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux ouverts non vides disjoints de  $\partial\Omega$ ), occupé par un matériau élastique, linéaire et isotrope. La procédure d'identification consiste à imposer un chargement surfacique  $g : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  sur la partie  $\Gamma_1$  du bord et à mesurer le déplacement correspondant  $u = f : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  sur  $\Gamma_1$ . Nous supposons que  $u=0$  sur l'autre partie du bord  $\Gamma_2$ .

La théorie de l'élasticité linéaire suppose que le tenseur de déformation  $\varepsilon(u)$  qui est une fonction à valeurs dans l'ensemble de matrices symétriques

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq d},$$

et le tenseur de contrainte  $\sigma(u)$ , une autre fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques, sont linéairement liées. Si le matériau est considéré comme isotrope, des raisons de symétrie font que seuls 2 coefficients décrivent le comportement du matériau par l'intermédiaire de la loi de Hooke :

$$\sigma(u) = C : \varepsilon(u) = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) I_d + 2\mu \varepsilon(u), \quad (6.1)$$

où  $C$  est le tenseur de l'élasticité défini par

$$C_{i,j,k,l} = \lambda \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \mu (\delta_{i,k} + \delta_{j,l}), \quad i, j, k, l = 1, \dots, d,$$

$I_d$ , représente la matrice identité de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé :  $\mu$  représente la rigidité du matériau et  $\lambda$  mesure son incompressibilité (un matériau incompressible à théoriquement un  $\lambda$  infini). Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont reliés avec le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  par les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.2)$$

Le déplacement  $u$  résout le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u)) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq d} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma(u)n = g \text{ sur } \Gamma_1 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

où  $n$  désigne la normale sortante en  $\Gamma_1$ . Le problème inverse que nous étudions dans ce travail, consiste à chercher les paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  à partir des mesures effectuées sur la partie  $\Gamma_1$  du bord. Ce dernier peut être formulé de la façon suivante : étant donné  $f$  sur  $\Gamma_1$ ,

$$\{ \text{Trouver } (\lambda, \mu) \text{ tels que } u_{\lambda, \mu} \text{ la solution de (6.3), vérifie } u|_{\Gamma_1} = f. \quad (6.4)$$

Dans la suite on suppose que le déplacement  $f$  est connue sur  $\Gamma_1$ . On désignera par  $u_n$  la solution du problème de Neumann (6.3) et par  $u_d$  la solution du problème de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u)) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = f \text{ sur } \Gamma_1 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

La fonctionnelle de Kohn-Vogelius associée à ce problème inverse est définie par :

$$J(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n - u_d)^2 + 2\mu \varepsilon(u_n - u_d)^2. \quad (6.6)$$

## 6.2 EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DIRECT

Nous commençons cette partie par fixer quelques notations qui nous seront utiles dans la suite. On désignera par  $A : B$  le produit de deux tenseurs (ou produit scalaire des matrices symétriques  $A$  et  $B$ ) défini par :

$$A : B = \sum_{i,j=1}^d A_{ij} B_{ij} \in \mathbb{R}.$$

La norme  $L^2$  du tenseur  $A$  est donnée par :

$$\|A\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} A : A = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d A_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} A_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^d \|A_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De plus la norme  $L^2$  et la norme  $H^1$  d'un champ de vecteur  $u \in H^1(\Omega)^d$  sont définies respectivement par

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^d \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ et } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

La formulation variationnelle du problème (6.3) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{V} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) = \int_{\Gamma_1} g \cdot v \quad \forall v \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (6.7)$$

où

$$\mathcal{V} := \{v \in H^1(\Omega)^d : v|_{\Gamma_2=0}\},$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) \operatorname{tr}(\varepsilon(v)) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v).$$

**Théorème 6.2.1** *Soient  $c_1, c_2$  deux constantes telles que  $c_1 > c_2 > 0$ . On définit l'ensemble des paramètres admissibles par :*

$$\mathcal{P}_{ad} = \{p = (\lambda, \mu) \in L^\infty(\Omega)^2 : c_1 \leq \min(2\mu, 2\mu + d\lambda), \max(\lambda, \mu) \leq c_2\}.$$

Alors, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathcal{P}_{ad}$ , le problème (6.7) admet une solution unique  $u \in \mathcal{V}$ .

**Preuve :** On pose

$$B_{\lambda,\mu}(u, v) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) \operatorname{tr}(\varepsilon(v)) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v), \quad l(v) = \int_{\Gamma_1} g \cdot v$$

Il est clair que  $B_{\lambda,\mu}$  est une forme bilinéaire et  $l$  est une forme linéaire continue. Nous allons montrer par la suite que  $B_{\lambda,\mu}$  est continue coercive. Pour montrer la coercivité de la forme bilinéaire  $B_{\lambda,\mu}$  nous avons besoin des résultats suivants :

**Proposition 6.2.2 (Inégalité de Korn)** [55] *On suppose que  $\operatorname{mes}(\Gamma_2) > 0$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in \mathcal{V}. \quad (6.8)$$

**Proposition 6.2.3** *Toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  se décompose de la manière suivante :*

$$M = M^r + M^s, \quad M^r = M - \frac{1}{d} \operatorname{tr}(M) I_d \text{ et } M^s = \frac{1}{d} \operatorname{tr}(M) I_d,$$

avec

$$M^r : M^s = 0 \text{ et } |M|^2 = M : M = |M^r|^2 + |M^s|^2.$$

D'après la proposition précédente, nous avons :

$$2\mu|M|^2 + \lambda \operatorname{tr}(M)^2 = 2\mu|M^r|^2 + (2\mu + d\lambda)|M^s|^2 \geq \min(2\mu, (2\mu + d\lambda))|M|^2.$$

Prenons  $M = \varepsilon(u)$ , nous déduisons l'inégalité suivante :

$$\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u))^2 + 2\mu|\varepsilon(u)|^2 \geq \min(2\mu, (2\mu + d\lambda))|\varepsilon(u)|^2. \quad (6.9)$$

En utilisant (6.8) et (6.9), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u))^2 + 2\mu|\varepsilon(u)|^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ pour tout } u \in \mathcal{V}, \quad (6.10)$$

où  $\alpha = C^2 \min(2\mu, (2\mu + d\lambda))$ . Cela prouve que la forme bilinéaire  $B_{\lambda,\mu}$  est  $\mathcal{V}$  elliptique. La continuité de  $B_{\lambda,\mu}$  découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|B_{\lambda,\mu}(u, v)| \leq 2(\|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)})\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (6.7), admet une solution unique  $u \in \mathcal{V}$ .  $\square$

On désigne par  $T$  la forme trilinéaire définie par :

$$T(p, u, v) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) \operatorname{tr}(\varepsilon(v)) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v), \quad l(v) = \int_{\Gamma_1} g.v. \quad (6.11)$$

Il est évident qu'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$T(p, u, v) \leq \beta \|p\|_{L^\infty(\Omega)^2} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \text{ pour tout } u, v \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{P}_{ad}, \quad (6.12)$$

de plus, d'après ce qui précède nous avons :

$$T(p, u, u) \geq \alpha \|u\|_{\mathcal{V}}^2 \text{ pour tout } u \in \mathcal{V}, p \in \mathcal{P}_{ad}, \quad (6.13)$$

Pour  $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)^d$  et  $p \in \mathcal{P}_{ad}$ , le problème (6.7) admet une solution unique  $u = u_p \in \mathcal{V}$ .

Nous définissons par la suite l'opérateur :

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{P}_{ad} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ p &\longmapsto u_p, \end{aligned}$$

où  $\zeta(p) = u_p$  est solution du problème variationnelle (6.7).

### 6.3 RÉGULARITÉ DE L'OPÉRATEUR $\zeta$

Nous commençons cette partie par démontrer la continuité de l'opérateur  $\zeta$ , puis nous étudions ensuite sa différentiabilité.

**Théorème 6.3.1** *L'opérateur  $\zeta$  est continu, de plus pour tout  $p, q \in \mathcal{P}_{ad}$  on a :*

$$\|\zeta(p) - \zeta(q)\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{\alpha} \min \{ \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}}, \|\zeta(q)\|_{\mathcal{V}} \} \|p - q\| \quad (6.14)$$

**Preuve :** Si  $u_p = \zeta(p)$  et  $u_q = \zeta(q)$  alors  $T(p, u_p, v) = T(q, u_q, v) = l(v)$  pour tout  $v \in \mathcal{V}$ .  
Donc pour  $v = u_p - u_q$  nous avons

$$T(p, u_p - u_q, u_p - u_q) = T(p - q, u_q, u_p - u_q).$$

D'après les conditions (6.12) et (6.13), nous avons

$$\|u_p - u_q\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|u_q\|_{\mathcal{V}} \|p - q\| = \frac{\beta}{\alpha} \|\zeta(q)\|_{\mathcal{V}} \|p - q\|.$$

L'autre terme s'obtient en changeant les rôles de  $p$  et  $q$ . □

Pour  $p$  dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$  et  $\delta p$  suffisamment petit,  $p + \delta p$  reste dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$  et  $\zeta(p + \delta p) - \zeta(p)$  est bien définie. Par définition si  $u_p = \zeta(p)$ , alors

$$\begin{aligned} T(p, u_p, v) &= l(v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}, \\ T(p + \delta p, u_{p+\delta p}, v) &= l(v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}, \end{aligned}$$

ce qui donne après simplification que

$$T(p + \delta p, u_{p+\delta p} - u_p, v) = -T(\delta p, u_p, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \quad (6.15)$$

Cela suggère la forme de  $D\zeta(p)$ .

**Théorème 6.3.2** *Pour  $p$  dans l'intérieur de  $\mathcal{P}$ , l'opérateur  $\zeta$  est différentiable en  $p$  et  $D\zeta(p)\delta p$  est l'unique solution de l'équation variationnelle suivante :*

$$T(p, D\zeta(p)\delta p, v) = -T(\delta p, u_p, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \quad (6.16)$$

De plus,

$$\|D\zeta(p)\| \leq \frac{\beta}{\alpha} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{\alpha^2} \|l\|_{\mathcal{V}^*}.$$

**Preuve :** L'équation variationnelle (6.16) admet une solution unique, puisque d'après (6.12)  $-T(\delta p, u_p, \cdot)$  définie une fonctionnelle linéaire bornée sur  $\mathcal{V}$ . Soustrayons (6.16) de (6.15), nous obtenons après simplification

$$T(p, u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p, v) = -T(\delta p, u_{p+\delta p} - u_p, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

Choisissons  $v = u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p$ , nous obtenons

$$T(p, u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p, u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p) = -T(\delta p, u_{p+\delta p} - u_p, u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p).$$

Ce qui nous donne avec les équations (6.12) et (6.13) l'inégalité suivante :

$$\alpha \|u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \beta \|\delta p\| \|u_{p+\delta p} - u_p\|_{\mathcal{V}} \|u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p\|_{\mathcal{V}}$$

et donc

$$\|u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|u_{p+\delta p} - u_p\|_{\mathcal{V}}.$$

Le Théorème 6.3.1 implique que

$$\|u_{p+\delta p} - u_p - Du_p \delta p\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \|\delta p\|^2.$$

D'autre part, pour tout  $v \in \mathcal{V}$  on a :

$$T(p, Du_p \delta p, v) = -T(\delta p, u_p, v),$$

donc

$$T(p, Du_p \delta p, Du_p \delta p) = -T(\delta p, u_p, Du_p \delta p),$$

ce qui implique

$$\alpha \|Du_p \delta p\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \beta \|\delta p\| \|u_p\|_{\mathcal{V}} \|Du_p \delta p\|_{\mathcal{V}},$$

il en résulte donc

$$\|Du_p \delta p\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|\delta p\| \|u_p\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{\alpha^2} \|\delta p\| \|l\|_{\mathcal{V}^*}.$$

Ce qui implique que  $\zeta$  est différentiable au point  $p$ . □

### 6.3.1 Dérivée d'ordre supérieur de $\zeta$

Pour estimer la dérivée seconde de  $\zeta$ , on procède de la même manière. Pour  $p$  dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$  et  $\delta p_1, \delta p_2$  suffisamment petit,  $p + \delta p_1$  et  $p + \delta p_2$  restent dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$ . Nous avons par définition

$$T(p + \delta p_1, D\zeta(p + \delta p_1)\delta p_2, v) = -T(\delta p_2, \zeta(p + \delta p_1), v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V},$$

donc

$$T(p + \delta p_1, D\zeta(p + \delta p_1)\delta p_2 - D\zeta(p)\delta p_2, v) = -T(\delta p_2, \zeta(p + \delta p_1), v) - T(p + \delta p_1, D\zeta(p)\delta p_2, v)$$

pour tout  $v \in \mathcal{V}$ . Ce qui nous donne après quelques manipulations

$$\begin{aligned} T(p + \delta p_1, D\zeta(p + \delta p_1)\delta p_2 - D\zeta(p)\delta p_2, v) &= -T(\delta p_2, D\zeta(p)\delta p_1, v) - T(\delta p_1, D\zeta(p)\delta p_2, v) \\ &\quad - T(\delta p_2, \zeta(p + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1, v). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Ce qui suggère le résultat suivant :

**Théorème 6.3.3** *Pour  $p$  dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$ ,  $\zeta$  est deux fois différentiable au point  $p$  et on a*

$$D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2) = D^2 \zeta(p)(\delta p_1, \delta p_2)$$

*est l'unique solution de l'équation variationnelle*

$$T(p, D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2), v) = -T(\delta p_2, D\zeta(p)\delta p_1, v) - T(\delta p_1, D\zeta(p)\delta p_2, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \tag{6.18}$$

De plus

$$\|D^2 \zeta(p)\| \leq \frac{2\beta^2}{\alpha^2} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{2\beta^2}{\alpha^3} \|l\|_{\mathcal{V}^*}.$$



**Preuve :** D'après l'équation (6.18), la quantité  $D^2\zeta(p)(\delta p_1, \delta p_2)$  est bien définie et par soustraction entre (6.18) et (6.17), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & T(p + \delta p_1, D\zeta(p + \delta p_1)\delta p_2 - D\zeta(p)\delta p_2, v) - T(p, D^2\zeta(p)(\delta p_1, \delta p_2), v) \\ &= -T(\delta p_2, \zeta(P + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1, v) \text{ Pour tout } v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} & T(p, D\zeta(p + \delta p_1)\delta p_2 - D\zeta(p)\delta p_2 - D^2\zeta(p)(\delta p_1, \delta p_2), v) = \\ & -T(\delta p_2, \zeta(P + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1, v) - T(\delta p_1, D\zeta(p + \delta p_1)\delta p_2 - D\zeta(p)\delta p_2, v) \forall v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

On pose  $\delta^2 u_p = D\zeta(p + \delta p_1)\delta p_2 - D\zeta(p)\delta p_2$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} & T(p, \delta^2 u_p - D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2), \delta^2 u_p - D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2)) = \\ & -T(\delta p_2, \zeta(p + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1, \delta^2 u_p - D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2)) - T(\delta p_1, \delta^2 u_p, \delta^2 u_p - D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2)) \end{aligned}$$

et par les conditions (6.12) et (6.13), nous obtenons :

$$\|\delta^2 u_p - D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2)\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{\alpha} (\|\delta p_2\| \|\zeta(p + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1\|_{\mathcal{V}} + \|\delta p_1\| \|\delta^2 u_p\|_{\mathcal{V}})$$

$\|\zeta(p + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1\|_{\mathcal{V}}$  est borné, il reste donc à majorer  $\|\delta^2 u_p\|_{\mathcal{V}}$ . En utilisant l'équation (6.17), nous obtenons :

$$\begin{aligned} T(p + \delta p_1, \delta^2 u_p, \delta^2 u_p) &= T(\delta p_2, D\zeta(p)\delta p_2, \delta^2 u_p) - T(\delta p_1, D\zeta(p)\delta p_2, \delta^2 u_p) \\ &\quad - T(\delta p_2, \zeta(p + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1, \delta^2 u_p). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \alpha \|\delta^2 u_p\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq \beta \left( \|\delta p_2\| \|D\zeta(p)\delta p_1\|_{\mathcal{V}} + \|\delta p_1\| \|D\zeta(p)\delta p_2\|_{\mathcal{V}} + \right. \\ &\quad \left. \|\delta p_2\| \|\zeta(p + \delta p_1) - \zeta(p) - D\zeta(p)\delta p_1\|_{\mathcal{V}} \right) \|\delta^2 u_p\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \beta \left( \frac{2\beta}{\alpha} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \|\delta p_1\| \|\delta p_2\| + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \|\delta p_1\| \right) \|\delta^2 u_p\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\delta^2 u_p\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \left( 2\|\delta p_1\| \|\delta p_2\| + \frac{\beta}{\alpha} \|\delta p_1\|^2 \right).$$

Finalement

$$\begin{aligned} \|\delta^2 u_p - D^2 u_p(\delta p_1, \delta p_2)\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \|\delta p_1\|^2 \|\delta p_2\| \right. \\ &\quad \left. + \|\delta p_1\| \frac{\beta^2}{\alpha^2} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \left( 2\|\delta p_1\| \|\delta p_2\| + \frac{\beta}{\alpha} \|\delta p_1\|^2 \right) \right) \\ &= \frac{\beta^3}{\alpha^3} \|\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \left( 3\|\delta p_1\|^2 \|\delta p_2\| + \frac{\beta}{\alpha} \|\delta p_1\|^3 \right) \\ &= o(\|\delta p_1\| \|\delta p_2\|). \end{aligned}$$

Par le même raisonnement nous avons

$$T(p, D^2u_p(\delta p_1, \delta p_2), v) = -T(\delta p_2, D\zeta(p)\delta p_1, v) - T(\delta p_1, D\zeta(p)\delta p_2, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}$$

ce qui donne

$$\|D^2u_p(\delta p_1, \delta p_2)\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{2\beta}{\alpha} \|D\zeta(p)\|_{\mathcal{V}} \|\delta p_1\| \|\delta p_2\|.$$

En appliquant le Théorème 6.3.2, pour majorer  $\|D\zeta(p)\|_{\mathcal{V}}$ , on montre que  $\zeta$  est deux fois différentiable au point  $p$ .  $\square$

## 6.4 ÉTUDE DU PROBLÈME INVERSE D'IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DE LAMÉ

On s'intéresse dans cette partie, à l'étude du problème inverse d'identification des paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , à partir de la connaissance du déplacement  $f$  et du chargement  $g$ , sur le bord du domaine.

Pour déterminer sous quelles conditions ce problème inverse est bien posé et proposer une méthode de résolution, on examine les trois points suivants :

**Identifiabilité** : Il s'agit de vérifier si la mesure  $f$  est suffisante ou non à la détermination de ces paramètres, cela se traduit mathématiquement par l'étude de l'injectivité de l'opérateur

$$\eta : \mathcal{P}_{ad} \ni (\lambda, \mu) \mapsto f = u_{\lambda, \mu}|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1),$$

où  $u_{\lambda, \mu}$  désigne la solution du problème direct (6.3) associé aux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Stabilité** : Une fois que la première condition est remplie, il convient de s'assurer de la stabilité de la solution par rapport aux données. Pour cela il est nécessaire d'étudier la continuité de l'opérateur

$$\eta^{-1} : \eta(\mathcal{P}_{ad}) \rightarrow \mathcal{P}_{ad}$$

pour une topologie préalablement choisie.

**Identification** : Lorsque les conditions précédentes sont remplies, ce problème inverse est bien posé au sens de Hadamard. L'identification consiste à donner une méthode numérique permettant de résoudre ce problème inverse.

### 6.4.1 Identifiabilité

Dans le cas où les paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont des fonctions analytiques réelles, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 6.4.1** [57, Thm 1] *On note par  $\Lambda_{\lambda, \mu} : u \rightarrow \sigma(u)n$ , l'opérateur Dirichlet-Neumann. Soient  $\lambda_j, \mu_j$  et  $\mu_j^{-1}, j = 1, 2$  des éléments d'un sous ensemble borné  $B$  de  $C^k(\Omega)$  pour  $k$  suffisamment grand. On suppose qu'il existe  $\varepsilon(B)$  telle que  $\|\nabla \mu_j\|_{C^{k-1}(\Omega)} < \varepsilon(B), j = 1, 2$  et  $\Lambda_{\lambda_1, \mu_1} = \Lambda_{\lambda_2, \mu_2}$ . Alors  $(\lambda_1, \mu_1) = (\lambda_2, \mu_2)$ .*

Ce théorème, permet d'avoir un résultat d'unicité mais demande la connaissance de l'opérateur Dirichlet to Neumann, c'est à dire une infinité de mesures.

Le résultat suivant est basé sur le lemme d'Almansi qui est analogue au théorème de Holmgren dans le cas du Laplacien .

**Lemme 6.4.2 (Almansi)** [83] *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose qu'il existe un ouvert connexe non vide  $S$  de  $\partial\Omega$  tel que :*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(u)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(u)n = 0 & \text{sur } S, \\ u = 0 & \text{sur } S. \end{cases} \quad (6.19)$$

Alors  $u = 0$  et  $\sigma = 0$  dans  $\Omega$ .

Nous prouvons le résultat d'unicité suivant, avec une seule mesure :

**Théorème 6.4.3** *On suppose que le chargement  $g$  est non identiquement nul et l'ensemble des paramètres admissibles  $\mathcal{P}_{ad}$ , est formé seulement par des paramètres constants. Soient  $p_1 = (\lambda_1, \mu_1)$  et  $p_2 = (\lambda_2, \mu_2)$  deux éléments de  $\mathcal{P}_{ad}$ , et  $(u_i)_{i=1,2}$  les solutions du problème (6.3) relatives aux paramètres  $(p_i)_{i=1,2}$ . Supposons que  $u_1|_{\Gamma_1} = u_2|_{\Gamma_1}$ . Alors on a  $p_1 = p_2$ .*

**Preuve :** On pose  $\xi = u_1 - u_2$ , et

$$\tau = \sigma_1(u_1) - \sigma_2(u_2) = \lambda_1 \operatorname{div}(u_1)I_d + 2\mu_1 \varepsilon(u_1) - \lambda_2 \operatorname{div}(u_2)I_d - 2\mu_2 \varepsilon(u_2).$$

Nous avons donc

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\tau) & = 0 \text{ dans } \Omega \\ \tau.n & = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \xi & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

D'après le lemme d'Almansi, nous obtenons

$$\sigma_1 = \sigma_2 \text{ et } u_1 = u_2 = u \text{ dans } \Omega.$$

On peut donc écrire :

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{div}(u)I_d + 2(\mu_1 - \mu_2) \varepsilon(u) = 0. \quad (6.20)$$

En prenant la trace de l'équation (6.20) et en utilisant le fait que  $\operatorname{div}(u) \neq 0$  (puisque en travaille dans un cadre des domaines compressibles), nous obtenons

$$d(\lambda_1 - \lambda_2) + 2(\mu_1 - \mu_2) = 0. \quad (6.21)$$

Donc si  $\lambda_1 = \lambda_2$  nous trouvons  $\mu_1 = \mu_2$ . De même si on considère que  $\mu_1 = \mu_2$ , l'équation (6.21) nous donne que  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , d'après (6.20) et (6.21), nous avons  $\operatorname{div}(u)I_d = d\varepsilon(u)$ . On pose  $u = (v_1, v_2)$ . Dans le cas  $d = 2$ , nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x}. \end{cases} \quad (6.22)$$

D'après le système (6.22), nous avons

$$\sigma(u) = 2\lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} I_2 + 2\mu_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que  $\operatorname{div}(\sigma(u)) = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial^2 x} = 0, \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

D'après (6.22) et (6.23), il existe  $a \in \mathbb{R}$  et une fonction  $g$  qui dépend seulement de  $y$  telle que  $v_1(x, y) = ax + g(y)$ . Comme  $\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x}$ , nous obtenons  $v_2(x, y) = ay + h(x)$  avec  $h$  une fonction qui dépend seulement de  $x$ . En utilisant encore l'équation (6.22), nous trouvons  $g'(y) + h'(x) = 0$ . Il existe donc  $b \in \mathbb{R}$  telle que  $g'(y) = b$  et  $h'(x) = -b$ . On obtient finalement

$$\begin{cases} v_1(x, y) = ax + by + c, \\ v_2(x, y) = -bx + ay + d, \end{cases} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (6.24)$$

En utilisant la condition aux limites  $(v_1, v_2) = 0$  sur  $\Gamma_2$ , on montre que  $u = (v_1, v_2) = 0$  dans  $\Omega$ . Cela contredit le fait que le chargement est non nul. Le cas de dimension 3 se traite de la même manière.  $\square$

### 6.4.2 Stabilité

Dans la mesure où les données expérimentales auxquelles on accède sont censées être bruitées, il est important de démontrer qu'une faible erreur sur les mesures ne conduit pas à une grande erreur sur les paramètres qu'on souhaite déterminer. Mathématiquement ceci revient à démontrer la continuité de l'application  $\eta^{-1}$ .

### 6.4.3 Stabilité Lipschitzienne directionnelle

Soit  $\varphi, \psi \in L^\infty(\Omega)$  et  $h$  un nombre réel suffisamment petit. Nous désignons par  $u^{h\lambda}, u^{h\mu}$  les solutions respectives du problème (6.3) pour  $(\lambda + h\varphi, \mu)$  et  $(\lambda, \mu + h\psi)$ . On a la proposition suivante :

**Proposition 6.4.4** *Il existe  $u^{1\lambda}, u^{1\mu}$  et  $\epsilon(h), \epsilon(k)$  dans  $(H^1(\Omega))^d$  tels que*

$$u^{h\lambda} = u^0 + hu^{1\lambda} + h\epsilon(h) \quad (6.25)$$

$$u^{k\mu} = u^0 + ku^{1\mu} + k\epsilon(k) \quad (6.26)$$

où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\epsilon(h)\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow 0} \|\epsilon(k)\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

$u^0$  est la solution du problème (6.3) et  $u^{1\lambda}, u^{1\mu}$  sont respectivement les solutions des problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^{1\lambda} \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \lambda \text{tr}(\varepsilon(u^{1\lambda})) \text{tr}(\varepsilon(v)) + \text{tr}(\varepsilon(u^0)) \text{tr}(\varepsilon(v)) \varphi + 2\mu \varepsilon(u^{1\lambda}) : \varepsilon(v) dx = 0, \forall v \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (6.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^{1\mu} \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \lambda \text{tr}(\varepsilon(u^{1\mu})) \text{tr}(\varepsilon(v)) + 2\mu \varepsilon(u^{1\mu}) : \varepsilon(v) + 2\varepsilon(u^0) : \varepsilon(v) \psi dx = 0, \forall v \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (6.28)$$

**Preuve :** La formulation variationnelle du problème direct (6.3) est la suivante :

$$\int_{\Omega} \lambda \text{tr}(\varepsilon(u^0)) \text{tr}(\varepsilon(v)) + 2\mu \varepsilon(u^0) : \varepsilon(v) dx = \int_{\Gamma_1} gv \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \quad (6.29)$$

Les équations (6.25), (6.26) découlent du Théorème 6.3.2. En incorporant ces équations dans l'équation variationnelle (6.29), nous obtenons après regroupement des termes et passage à la limite, les équations (6.27) et (6.28).  $\square$

**Théorème 6.4.5 (Stabilité locale lipschitzienne)** *On suppose que  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes strictement positives et que la chargement  $g$  est non identiquement nul. Alors on a :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\|u_{|\Gamma_1}^{h\lambda} - u_{|\Gamma_1}^0\|_{L^2(\Gamma_1)}}{h} + \frac{\|u_{|\Gamma_1}^{h\mu} - u_{|\Gamma_1}^0\|_{L^2(\Gamma_1)}}{h} \right) > 0 \quad (6.30)$$

**Remarque 6.4.6** *L'inégalité (6.30) signifie qu'il existe une constante  $c$  strictement positive telle que pour  $h$  suffisamment petit on a :*

$$h \leq c \left( \|u_{|\Gamma_1}^{h\lambda} - u_{|\Gamma_1}^0\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|u_{|\Gamma_1}^{h\mu} - u_{|\Gamma_1}^0\|_{L^2(\Gamma_1)} \right).$$

**Preuve du Théorème 6.4.5 :** D'après la continuité de l'application trace , et la Proposition 6.4.4, il suffit de montrer que

$$\|u^{1\lambda}\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|u^{1\mu}\|_{L^2(\Gamma_1)} > 0. \quad (6.31)$$

Supposons que  $u^{1\lambda} = u^{1\mu} = 0$  p.p sur  $\Gamma_1$ . Les fonctions  $u^{1\lambda}$  et  $u^{1\mu}$  vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \lambda \text{div}(u^{1\lambda}) \text{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u^{1\lambda}) : \varepsilon(v) dx + \text{div}(u^0) \text{div}(v) = 0 \\ \int_{\Omega} \lambda \text{div}(u^{1\mu}) \text{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u^{1\mu}) : \varepsilon(v) dx + 2\varepsilon(u^0) : \varepsilon(v) = 0 \end{array} \right. \quad (6.32)$$

Multiplions la première équation par  $\lambda$  et la seconde équation par  $\mu$  et sommons , nous obtenons

$$\int_{\Omega} \lambda \text{div}(\lambda u^{1\lambda} + \mu u^{1\mu}) \text{div}(v) + 2\mu \varepsilon(\lambda u^{1\lambda} + \mu u^{1\mu}) : \varepsilon(v) + \int_{\Omega} \lambda \text{div}(u^0) \text{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u^0) : \varepsilon(v) = 0.$$

On note par  $z = \lambda u^{1\lambda} + \mu u^{1\mu}$ , donc

$$\int_{\Omega} \lambda \text{div}(z) \text{div}(v) + 2\mu \varepsilon(z) : \varepsilon(v) = \int_{\Omega} \lambda \text{div}(u^0) \text{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u^0) : \varepsilon(v) = - \int_{\Gamma_1} gv.$$

Après une intégration par partie , nous obtenons :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(z))v + \int_{\partial\Omega} \sigma(z)n v = - \int_{\Gamma_1} g v,$$

donc  $z$  vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(z)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma(z)n = -g & \text{sur } \Gamma_1 \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (6.33)$$

Ce problème admet une solution unique  $z = -u^0$ . Comme  $z = 0$  sur  $\Gamma_1$ , donc  $u^0 = 0$  sur  $\partial\Omega$ , ce qui donne  $u^0 = 0$  dans  $\Omega$ , et par conséquent  $g \equiv 0$ .  $\square$

#### 6.4.4 Identification

Les paramètres à identifier sont ceux pour lesquels les solutions  $u_n$  et  $u_d$  coïncident. Le problème inverse (6.4) se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\lambda_0, \mu_0) \in \mathcal{P}_{ad} \text{ telle que} \\ J(\lambda_0, \mu_0) \leq J(\lambda, \mu), \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathcal{P}_{ad}, \end{cases} \quad (6.34)$$

où  $J$  est la fonctionnelle définie par :

$$J(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n - u_d)^2 + 2\mu \varepsilon(u_n - u_d)^2.$$

La proposition suivante, montre l'équivalence entre le problème inverse et le problème de minimisation.

**Proposition 6.4.7** *Soient  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  vérifient les hypothèses du Théorème 6.4.3. Si  $(\lambda_0, \mu_0)$  est solution du problème inverse (6.4) alors  $(\lambda_0, \mu_0)$  est l'unique minimum de  $J$ .*

**Preuve :** Si  $(\lambda_0, \mu_0)$  est solution du problème inverse alors  $u_n(\lambda_0, \mu_0) = u_d(\lambda_0, \mu_0)$ , donc  $(\lambda_0, \mu_0)$  est un minimum de  $J$  avec  $J(\lambda_0, \mu_0) = 0$ . Supposons que  $J$  admet un autre minimum  $(\lambda_1, \mu_1)$  donc  $J(\lambda_1, \mu_1) = 0$  et par suite  $u_n(\lambda_1, \mu_1) = u_d(\lambda_1, \mu_1)$ . Pour le couple  $(\lambda_1, \mu_1)$  l'état  $u_n(\lambda_1, \mu_1)$  vérifie le problème (6.3) avec  $u_n(\lambda_1, \mu_1)|_{\Gamma_1} = f$ . Le résultat de l'identifiabilité 6.4.3 nous donne que  $\lambda_1 = \lambda_0$  et  $\mu_1 = \mu_0$ . Il est clair que si  $(\lambda_0, \mu_0)$  est solution du problème (6.34), alors les solutions correspondants  $u_n$  et  $u_d$  coïncident et donc  $(\lambda_0, \mu_0)$  est aussi solution du problème inverse.  $\square$

#### 6.4.5 Dérivée de la fonctionnelle $J$ par rapport aux paramètres

Dans cette partie, nous calculons la dérivée de la fonctionnelle  $J$  par rapport aux paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Pour  $h$  un nombre réel suffisamment petit,  $(\lambda, \mu) \in \mathcal{P}_{ad}$  et  $\varphi, \psi \in L^\infty(\Omega)$ , on désigne par  $u_n^{h\lambda}, u_n^{h\mu}$  respectivement les solutions du problème (6.3) pour les paramètres  $(\lambda + h\varphi, \mu), (\lambda, \mu + h\psi)$ . De même on désigne par  $u_d^{h\lambda}, u_d^{h\mu}$  respectivement les solutions du problème (6.5) pour les paramètres  $(\lambda + h\varphi, \mu), (\lambda, \mu + h\psi)$ . On note par  $u_n^{1\lambda}, u_d^{1\lambda}$  et  $u_n^{1\mu}, u_d^{1\mu}$  respectivement les dérivées lagrangiennes des fonctions  $u_n^{h\lambda}, u_d^{h\lambda}$  et  $u_n^{h\mu}, u_d^{h\mu}$  par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Théorème 6.4.8** *La fonctionnelle  $J$  est dérivable par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  et ses dérivées partielles directionnelles sont données par :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\lambda + h\varphi, \mu) - J(\lambda, \mu)}{h} = \int_{\Omega} [\operatorname{div}(u_d)^2 - \operatorname{div}(u_n)^2] \varphi \quad (6.35)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\lambda, \mu + h\psi) - J(\lambda, \mu)}{h} = 2 \int_{\Omega} [\varepsilon(u_d)^2 - \varepsilon(u_n)^2] \psi. \quad (6.36)$$

**Preuve :** Nous avons par définition

$$\begin{aligned} J(\lambda, \mu) &= \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n - u_d)^2 + 2\mu \varepsilon(u_n - u_d)^2 \\ &= \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n)^2 + 2\mu \varepsilon(u_n)^2 dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_d)^2 + 2\mu \varepsilon(u_d)^2 \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_n) \operatorname{div}(u_d) dx + 4\mu \varepsilon(u_n) : \varepsilon(u_d) \right] \\ &= \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n)^2 + 2\mu \varepsilon(u_n)^2 + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_d)^2 + 2\mu \varepsilon(u_d)^2 - 2 \int_{\Gamma_1} g f ds. \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 6.4.4, on en déduit que

$$\begin{aligned} DJ(\lambda, \mu; \varphi) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_n)^2 \varphi + \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_n) \operatorname{div}(u_n^{1\lambda}) + 4\mu \varepsilon(u_n^{1\lambda}) : \varepsilon(u_n) \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_d)^2 \varphi + \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_d) \operatorname{div}(u_d^{1\lambda}) + 4\mu \varepsilon(u_d^{1\lambda}) : \varepsilon(u_d), \end{aligned}$$

avec  $u_n^{1\lambda}$  vérifie l'équation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n^{1\lambda}) \operatorname{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u_n^{1\lambda}) : \varepsilon(v) dx + \operatorname{div}(u_n) \operatorname{div}(v) \varphi = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (6.37)$$

Notons que la dernière équation n'est autre que la dérivée par rapport à  $\lambda$  de l'équation variationnelle vérifiée par  $u_n$ .

Prenons  $v = u_n$  dans (6.37), nous déduisons

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n) \operatorname{div}(u_n^{1\lambda}) + 2\mu \varepsilon(u_n^{1\lambda}) : \varepsilon(u_n) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_n)^2 \varphi.$$

D'après la formule de Green, nous avons :

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_d) \operatorname{div}(u_d^{1\lambda}) + 2\mu \varepsilon(u_d^{1\lambda}) : \varepsilon(u_d) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u_d)) u_d^{1\lambda} + \int_{\Gamma_1} \sigma(u_d) n u_d^{1\lambda} = 0.$$

Donc

$$DJ(\lambda, \mu; \varphi) = \int_{\Omega} [\operatorname{div}(u_d)^2 - \operatorname{div}(u_n)^2] \varphi. \quad (6.38)$$

Calculons maintenant la dérivée par rapport à  $\mu$ . En utilisant encore la Proposition 6.4.4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} DJ(\lambda, \mu; \psi) &= \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_n) \operatorname{div}(u_n^{1\mu}) + 4\mu \varepsilon(u_n) : \varepsilon(u_n^{1\mu}) + 2\varepsilon(u_n)^2 \psi \\ &+ \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_d) \operatorname{div}(u_d^{1\mu}) + 4\mu \varepsilon(u_d) : \varepsilon(u_d^{1\mu}) + 2\varepsilon(u_d)^2 \psi. \end{aligned}$$

avec  $u_n^{1\mu}$  vérifie l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n^{1\mu}) \operatorname{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u_n^{1\mu}) : \varepsilon(v) + 2\varepsilon(u_n) : \varepsilon(v) \psi = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (6.39)$$

Prenons  $v = u_n$  dans (6.39) nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_n) \operatorname{div}(u_n^{1\mu}) + 2\mu \varepsilon(u_n) : \varepsilon(u_n^{1\mu}) = -2 \int_{\Omega} \varepsilon(u_n)^2,$$

d'autre part, en utilisant la formule de Green, nous trouvonsc

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_d) \operatorname{div}(u_d^{1\mu}) + 2\mu \varepsilon(u_d) : \varepsilon(u_d^{1\mu}) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u_d)) u_d^{1\mu} + \int_{\Gamma_1} \sigma(u_d) n u_d^{1\mu} = 0,$$

ce qui nous donne

$$DJ(\lambda, \mu; \psi) = 2 \int_{\Omega} [\varepsilon(u_d)^2 - \varepsilon(u_n)^2] \psi.$$

□

## 6.5 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Le gradient de la fonction coût  $J$  que nous avons calculé, nous permet d'envisager un algorithme du gradient pour la résolution numérique du problème inverse.

### 6.5.1 Formulation discrète

Pour calculer le gradient de la fonction coût  $J$ , nous avons besoin de connaître les fonctions  $u_n$  et  $u_d$  solutions respectives des deux problèmes (6.3) et (6.5). Pour cela nous allons utiliser la méthode d'élément finis  $\mathbb{P}_1$ . Commençons par le problème (6.3), sa formulation variationnelle s'écrit

$$\int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(v) dx = \int_{\Gamma_1} g \cdot v ds(x) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \quad (6.40)$$

On discrétise le problème (6.40) par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  de Lagrange : c'est à dire, on remplace l'espace  $H^1(\Omega)$  par un sous espace  $V_h$  de dimension finie et l'espace  $\mathcal{V}$  par  $\mathcal{V}_h$  :

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}$$



$$\mathcal{V}_h = \{v_h \in V_h : v_h|_{\Gamma_2} = 0\},$$

où  $\mathcal{T}_h$  est une triangulation de  $\Omega$ ,  $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} \{\max_{x,y \in K_i} \|x - y\|\}$ .

Le problème variationnel discrétisé est le suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_n^h \in \mathcal{V}_h \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \sigma(u_n^h) : \varepsilon(v_h) = \int_{\Gamma_1} g \cdot v_h, \text{ pour tout } v_h \in \mathcal{V}_h. \end{cases} \quad (6.41)$$

Soit  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{dN}) = (\varphi_1 e_1, \dots, \varphi_1 e_d, \dots, \varphi_N e_1, \dots, \varphi_N e_d)$  une base de  $V_h$  où  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ ,  $N$  est le nombre des noeuds du maillage et  $d$  est la dimension de  $\Omega$ .

Les fonctions  $\varphi_i$  vérifie en chaque noeud  $P_j$

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On désigne par  $N_p$  l'ensemble des indices de tous les noeuds  $P_i$  du maillage et  $N_{\Gamma_2}$  l'ensemble des indices des noeuds sur  $\Gamma_2$ , alors on a :

$$\int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(\phi_i) dx = \int_{\Gamma_1} g \cdot \phi_i ds(x) \text{ pour tout } i \in N_p \setminus N_{\Gamma_2}. \quad (6.42)$$

En développant  $u_n^h$  (la projection de  $u_n$  sur  $\mathcal{V}_h$ ) dans cette base, nous obtenons :

$$u_n^h(x) = \sum_{j \in N_p \setminus N_{\Gamma_2}} U_j \phi_j(x).$$

D'après l'équation (6.42) on a le système d'équations suivant :

$$\sum_{j \in N_p \setminus N_{\Gamma_2}} \left( \int_{\Omega} \sigma(\phi_j) : \varepsilon(\phi_i) dx \right) U_j = \int_{\Gamma_1} g \cdot \phi_i ds(x) \text{ pour tout } i \in N_p \setminus N_{\Gamma_2}.$$

En posant les notations suivantes :

$$K_{i,j} = \int_{\Omega} \sigma(\phi_j) : \varepsilon(\phi_i) dx$$

$$F_i = \int_{\Gamma_1} g \cdot \phi_i ds(x).$$

On obtient le système suivant :

$$KU = F. \quad (6.43)$$

$K$  est une matrice creuse, symétrique, de dimension  $d(N - n) \times d(N - n)$  et  $F$  est un vecteur colonne de dimension  $d(N - n)$  avec  $n$  est le nombre des noeuds sur la partie du bord  $\Gamma_2$ . La solution numérique finale est obtenue en résolvant le système linéaire (6.43) puis en complétant les autres valeurs par la condition aux limites  $u_n = 0$  sur  $\Gamma_2$ .

Concernant le problème de Dirichlet, nous développons  $u_d^h$  (la projection de  $u_d$  sur  $V_h$ ) dans la base de  $V_h$ , nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} AV = 0, \\ u_d = f \text{ sur } \Gamma_1, \\ u_d = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (6.44)$$

avec

$$u_d^h = \sum_{j=1}^{dN} V_j \phi_j, \quad A_{i,j} = \sum_{j=1}^{dN} \int_{\Omega} \sigma(\phi_j) : \varepsilon(\phi_i), \quad i, j, = 1, \dots, dN, \quad V = (V_1, \dots, V_{dN}).$$

Pour tenir compte des conditions aux limites dans le système (6.44), la méthode la plus classique consiste à modifier le système linéaire  $AV = 0$  en un noeud  $k$  du bord  $\partial\Omega$

$$A_{k,1}V_1 + \dots + A_{k,k}V_k + \dots + A_{k,n}V_n = 0$$

par

$$V_k = h(k) \text{ avec } h = f \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } h = 0 \text{ sur } \Gamma_2,$$

ce qui impose de modifier toutes les coefficients de la  $k$  ème ligne. Plus simplement, on peut ne modifier que le coefficient diagonale  $A_{k,k}$  et le second membre, de façon à obtenir une valeur approché de la valeur imposée : on remplace

$$A_{k,1}V_1 + \dots + A_{k,k}V_k + \dots + A_{k,n}V_n = 0$$

par

$$A_{k,1}V_1 + \dots + (A_{k,k} + C)V_k + \dots + A_{k,n}V_n = Ch(k)$$

où  $C$  est un grand nombre.

Cette façon de procéder est plus facile et plus rapide à mettre en oeuvre mais fournit une valeur plus au moins approché suivant la valeur de  $C$ . Typiquement il faut prendre  $C \gg \max(A_{i,j})$ .

### 6.5.2 Exemples numériques

La fonction coût que nous avons définie, et le calcul de son gradient, permettent la mise en oeuvre d'un algorithme du type gradient pour la résolution numérique du problème inverse d'identification des paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

Le calcul des solutions  $u_n$  et  $u_d$  est effectué avec la pde toolbox de Matlab.

Pour l'identification des paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , nous avons utilisé l'algorithme de quasi-Newton BFGS de l'optimisation toolbox de Matlab. Nous rappelons que l'algorithme BFGS est le suivant :

**Algorithme quasi-Newton : BFGS**(C.G. Broyden, R. Fletcher, D. Goldfarb et D.F. Shanno)

**Objectif**

Trouver une approximation d'un minimum local du problème

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{ad}} J(p), \quad p = (\lambda, \mu). \quad (6.45)$$

### Input

- La fonction  $J : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable ;
- Le gradient de la fonction  $\nabla J : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  (cf. (6.35)-(6.36))
- une première approximation de la solution  $p_0 \in \mathbb{R}^d$  ;
- Une première approximation de l'inverse du Hessian  $H_0^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  symétrique définie positive. Par défaut  $H_0^{-1} = I$ .
- La précision demandée  $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ .

### output

Une approximation de la solution  $p^* \in \mathbb{R}^d$ .

### Initialisation

$$k = 0$$

### Itérations

- Calculer  $d_k = -H_k^{-1} \nabla f(p_k)$  : la direction de descente.
- Déterminer  $\alpha_k$  en appliquant la recherche linéaire avec  $\alpha_0 = 1$ .
- $p_{k+1} = p_k + \alpha_k d_k$
- Mettre à jour  $H_k^{-1}$

$$H_k^{-1} = \left( I - \frac{(p_k - p_{k-1})(\nabla J(p_k) - \nabla J(p_{k-1})^T)}{(p_k - p_{k-1})^T (\nabla J(p_k) - \nabla J(p_{k-1}))} \right) H_{k-1}^{-1} \left( I - \frac{(p_k - p_{k-1})(\nabla J(x_k) - \nabla J(p_{k-1})^T)}{(p_k - p_{k-1})^T (\nabla J(p_k) - \nabla J(p_{k-1}))} \right) + \frac{(p_k - p_{k-1})(\nabla J(p_k) - \nabla J(p_{k-1})^T)}{(p_k - p_{k-1})^T (\nabla J(p_k) - \nabla J(x_{k-1}))}$$

- $k = k + 1$

### Critère d'arrêt

Si  $\|\nabla J(p_k)\|_2 \leq \varepsilon$  alors  $p^* = p_k$ .

Dans les exemples suivants, nous supposons que le domaine  $\Omega$  est le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ . On applique un chargement  $g = (0.1, 0.1)$  sur le bord  $\Gamma_1$ . Le déplacement  $f$  est obtenu synthétiquement par la formule  $u|_{\Gamma_1} = f$  où  $u$  est la solution du problème (6.3) relativement aux paramètres  $(\lambda, \mu)$ . Une fois  $f$  est construit, on suppose ces paramètres sont inconnus et on essaye de les retrouver à partir  $f$  en partant d'une initialisation quelconque. Le bord  $\partial\Omega$  est divisé selon Matlab en 4 arcs numérotés de 1 à 4. Dans ces exemples  $\Gamma_1$  est la réunion des arcs 1, 2, et 3,  $\Gamma_2$  est l'arc numéro 4.

Dans le premier exemple, nous supposons que les paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes sur le domaine  $\Omega$  et dans le second exemple, nous traitons le cas des paramètres constants par morceaux. Plus précisément, nous considérons des paramètres de la forme

$$\lambda = \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\chi_\omega, \quad \mu = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\chi_\omega,$$

où  $\omega$  est un sous domaine de  $\Omega$ .

Le Tableau 6.1 donne le nombre d'itérations nécessaire pour approcher le minimum  $(\lambda^*, \mu^*) = (5, 7)$  de la fonctionnelle  $J$  à partir de l'initialisation  $(\lambda_0, \mu_0) = (4, 9)$ , en

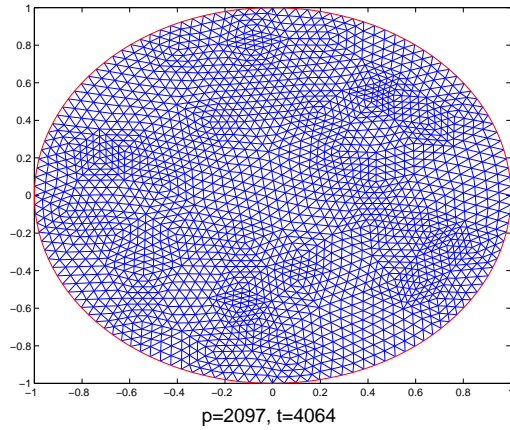


FIGURE 6.1 – Représentation du maillage dans le cas où  $\Omega$  est homogène

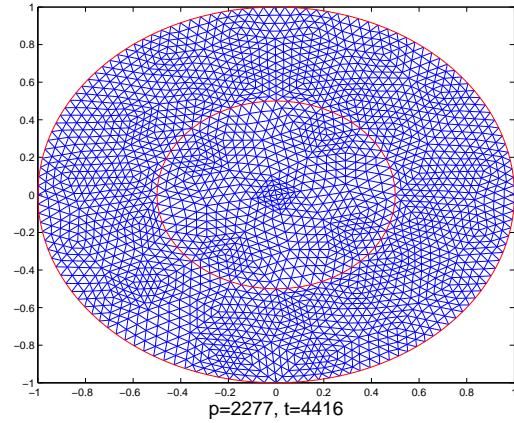


FIGURE 6.2 – Représentation du maillage dans le cas où  $\Omega$  est hétérogène

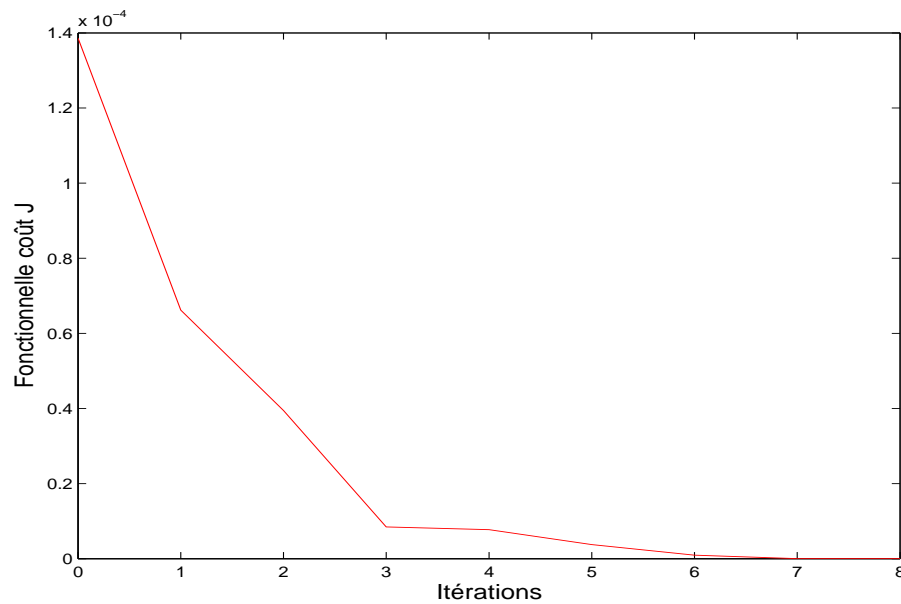
fonction du pas  $\alpha_k$  renvoyé par Matlab. Le maillage utilisé pour les calculs numériques est représenté dans la Figure 6.1.

Itérations	Fontionnelle J	pas	$\ \nabla J\ _\infty$
0	0.000138593		0.000647
1	6.62033e-05	820	0.000487
2	3.94773e-05	1	0.000218
3	8.46521e-06	1	4.95e-05
4	7.72748e-06	1	3.23e-05
5	3.76459e-06	1	3.31e-05
6	9.45419e-07	1	2.96e-05
7	1.8213e-08	1	7e-06
8	6.91713e-11	1	5.47e-07

TABLE 6.1 – Tableau de convergence : cas des paramètres constants.

$\lambda$ exact	$\mu$ exact
5	7
$\lambda$ initial	$\mu$ initial
4	9
$\lambda$ calculé	$\mu$ calculé
5.002282001574062	6.998468235543814
$\nabla_{\lambda} J(\lambda, \mu)$	$\nabla_{\mu} J(\lambda, \mu)$
-0.02127618*1.0e-06	-0.54690309*1.0e-06

TABLE 6.2 – Les valeurs approchées : cas des paramètres constants.

FIGURE 6.3 – Convergence de l'algorithme au cours des itérations :  $\lambda, \mu$  des constantes

Dans le second exemple, nous supposons que  $\omega$  est le disque de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $r = 0.5$ . Le maillage utilisé pour le calculs numériques est représenté dans la Figure 6.2.

Le minimum à approcher est  $(\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\mu}_2) = (1, 2, 3, 4)$  pour une initialisation  $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = (2, 3, 4, 5)$ . D'après le Tableau 6.3 on a une bonne convergence à partir de la 7 ème itérations.

Itérations	Fontionnelle J	pas	$\ \nabla J\ _\infty$
0	0.00120487		0.00205
1	0.000408575	820	0.00111
2	0.000154929	0.5	0.000214
3	0.000103855	1	0.000119
4	2.62543e-05	0.687408	0.000143
5	1.99585e-05	1	5.88e-05
6	4.55187e-06	1	7.37e-05
7	7.7631e-07	1	4.59e-0.5
8	5.21305e-07	1	1.39e-05
9	5.16017e-07	1	3.37e-06
10	5.13956e-07	1	3.42e-06
11	4.73269e-07	1	1.22e-05
12	3.64063e-07	1	2.05e-05
13	1.41161e-07	1	2.52e-05
14	2.39669e-08	1	1.55e-05
15	1.72468e-09	1	1.57e-06
16	1.5771e-10	1	1.92e-07

TABLE 6.3 – Tableau de convergence : cas des paramètres constants par morceaux.

$\lambda_1$ exact	$\mu_1$ exact	$\lambda_2$ exact	$\mu_2$ exact
1	2	3	4
$\lambda_1$ initial	$\mu_1$ initial	$\lambda_2$ initial	$\mu_2$ initial
2	3	4	5
$\lambda_1$ calculé	$\mu_1$ calculé	$\lambda_2$ calculé	$\mu_2$ calculé
0.994475054330128	2.000074071550961	3.007221899123879	3.999091923391642
$\nabla_{\lambda_1} J(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2)$	$\nabla_{\mu_1} J(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2)$	$\nabla_{\lambda_2} J(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2)$	$\nabla_{\mu_2} J(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2)$
0.0771315*1.0e-06	-0.0071844*1.0e-06	0.1918581*1.0e-06	0.0487657*1.0e-06

TABLE 6.4 – Les valeurs approchées : cas des paramètres constants par morceaux.

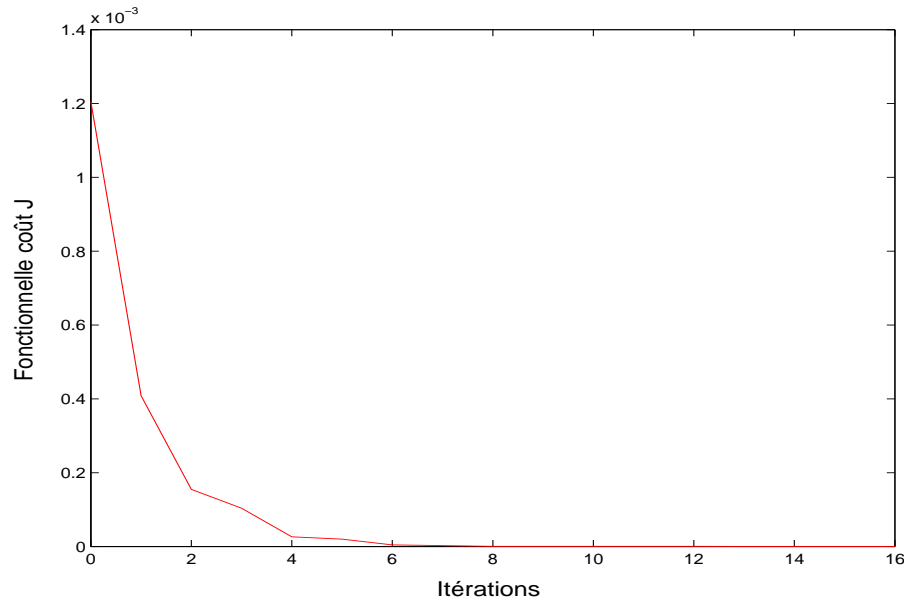


FIGURE 6.4 – Convergence de l’algorithme au cours des itérations :  $\lambda, \mu$  constants par morceaux

Au cours de ce chapitre, nous avons démontré un résultat d’identifiabilité et un résultat de stabilité Lipschitzienne directionnelle. Les résultats numériques obtenus sont satisfaisants. Comme perspective, on pourrait établir un résultat d’unicité dans le cas où les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des fonctions de  $L^\infty(\Omega)$ . On pourrait également établir un résultat de stabilité globale, généralisant le résultat de stabilité localement lipschitzienne qui a été établi dans la section 6.4 et étendre la méthode numérique au cas plus général.





# Dérivées de quelques problèmes de Forme

L'optimisation de forme consiste à rechercher la géométrie d'un objet qui soit optimale vis à vis de certains critères. C'est un sujet en plein développement car les applications industrielles sont nombreuses et les outils informatiques actuels permettent l'étude de configuration de plus en plus complexes. De manière assez générale, les problèmes d'optimisation de forme rencontrés dans les sciences de l'ingénieur peuvent être modélisés de la façon suivante :

$$\min_{\Omega \in \Lambda_{ad}} J(\Omega, u_{\Omega}) \quad (7.1)$$

où  $\Lambda_{ad}$  est l'ensemble des domaines admissibles et  $u_{\Omega}$  est solution d'une certaine EDP posée dans  $\Omega$ . Pour appliquer une méthode de descente afin de minimiser la fonctionnelle  $J$ , nous avons besoin de sa dérivée de forme par rapport à une perturbation du domaine  $\Omega$ . Il existe de nombreuse contribution autour de la dérivation par rapport au domaine. Il serait très difficile d'en faire un compte-rendu complet. Nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [51, 52, 53, 99, 104, 105].

Nous rappelons dans ce chapitre les concepts de base de la dérivée géométrique de forme. Nous rappelons ensuite la dérivée de forme du problème de transmission dans le cas scalaire et dans le cas de l'élasticité linéaire.

## 7.1 TRANSFORMATION DES DOMAINES

Pour étudier l'analyse de sensibilité de la fonctionnelle de forme  $J(\Omega, u_{\Omega})$ , nous introduisons une famille de perturbation  $\{\Omega_t\}_{0 \leq t < \epsilon}$  d'un domaine fixé  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\Omega_0 = \Omega$  et  $\Omega_t, 0 < t < \epsilon$  ont les mêmes propriétés topologiques et les mêmes régularités i.e  $\Omega$  et  $\Omega_t$  pour  $t \in ]0, \epsilon[$  sont des domaines simplement connexes de classes  $C^k, k \geq 1$ . On peut construire une famille de transformations  $T_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  bijective telle que  $T_t(\Omega) = \Omega_t$ . On suppose que cette famille de transformation  $T_t$  vérifie les conditions suivantes :

(A<sub>1</sub>) pour tout  $t \in [0, \epsilon[$ , les applications  $x \mapsto T_t(x)$  et  $x \mapsto T_t^{-1}(x)$  sont de classe  $C^k, k \geq 1$  sur  $\mathbb{R}^d$ ,

(A<sub>2</sub>) pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , les applications  $t \rightarrow T_t(x)$  et  $t \rightarrow T_t^{-1}(x)$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, \epsilon[$ .

Il est évident que pour une famille  $\Omega_t$  de domaines donnée, la famille de transformations  $T_t$  n'est pas déterminée d'une manière unique.

Puisque seulement des petites déformations (perturbations) de  $\Omega$  sont considérées, on peut considérer des transformations définies comme perturbation de l'identité  $I_d$  de  $\mathbb{R}^d$ . Un exemple d'une telles transformations est le suivant :

$$T_t(x) = x + t\theta(x), \quad \theta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ où } \theta \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

Cette perturbation a été étudiée par Murat et al (1976) et Pironneau (1984).

Pour le cas où le domaine  $\Omega$  est à bord  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$  Hadamard (1908) a proposé une paramétrisation suivant la normale  $n$  de  $\Gamma$  du bord  $\Gamma_t$  de  $\Omega_t$  supposé de classe  $C^\infty$

$$\Gamma_t = \Gamma + tgn = \{y : y = x + tg(x)n(x) : \text{pour } x \in \Gamma, \quad |t| < \varepsilon\},$$

avec  $g \in C^\infty(\Gamma)$ . On note par  $\tilde{n} \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , l'extension de la normale  $n \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^d)$ , on peut définir la transformation

$$T_t(x) = x + t\tilde{g}(x)\tilde{n}(x)$$

où  $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  est une extension de  $g \in C^\infty(\Gamma)$ .

### 7.1.1 Méthode des champs de vitesse

Cette méthode consiste à définir au voisinage du domaine  $\Omega$  et même sur tout  $\mathbb{R}^d$  un champ de vecteurs  $V$  et de supposer que le domaine  $\Omega$  est formé de particules qui évoluent dans ce champ de vecteurs pour un "temps virtuel  $t \geq 0$ ". C'est cette même notion que l'on rencontre en géométrie différentielle lorsque l'on veut définir une dérivée sur une variété.

Soit donc  $t \geq 0$  le temps virtuel et  $V(t, x), x \in \mathbb{R}^d$  un champ de vitesse de déformation. Sous l'action de  $V$  chaque point  $X$  de  $\mathbb{R}^d$  se déplace en  $x(t) \in \mathbb{R}^d$  selon la loi d'évolution

$$\frac{d}{dt}x(t) = V(t, x(t)), \quad x(0) = X. \quad (7.2)$$

A l'aide de cette équation, on définit la transformation

$$T_t = T_t(V) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad T_t(X) = x(t), t \geq 0. \quad (7.3)$$

Lorsque  $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , la transformation  $T_t$  est un difféomorphisme (cf. J.P Zolésio[104]). Sous l'action du champ de vitesse  $V$ , le domaine  $\Omega$  se déforme ou se transforme en un nouveau domaine

$$\Omega_t = T_t(\Omega) = \{x : x = T_t(X), X \in \Omega\}.$$

### 7.1.2 Dérivée matérielle et dérivée de forme de l'état

Les méthodes habituelles font appel à une notion de la dérivée de l'état : soit la dérivée matérielle (ou Lagrangienne) soit la dérivée de forme (ou Eulerienne).

**Définition 7.1.1 (derivée matérielle (ou Lagrangienne))** Soit  $\Omega$  un domaine fixe. On désigne par  $\Omega_t = T_t(\Omega)$  et  $u_t \in H^1(\Omega_t)$  avec  $u_0 = u$ . La fonction  $u_t \circ T_t$  est définie dans le domaine fixe  $\Omega$ . La dérivée matérielle est donnée par :

$$\dot{u}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_t \circ T_t(x) - u(x)}{t}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (7.4)$$

**Définition 7.1.2 (Dérivée de forme (ou dérivée Eulerienne))** La dérivée de forme est donnée par

$$u' = \dot{u} - \nabla u \cdot V. \quad (7.5)$$

## 7.2 RAPPELS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , à bord  $\Gamma$  de classe  $C^1$ . On dit qu'une fonction  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  sur  $\Gamma$  si son extension (cf. [20, p,183]) est de classe  $C^1$ .

**Définition 7.2.1 (Gradient tangentiel)** Soit  $g$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\Gamma$ . On définit son gradient tangentiel par

$$\nabla_\tau = \nabla \tilde{g} - (\nabla \tilde{g} \cdot n)n \text{ sur } \Gamma \quad (7.6)$$

où  $\tilde{g}$  est un prolongement de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^d$  de la fonction  $g$ .

**Définition 7.2.2 (Divergence tangentielle)** Soit  $W \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^d)$ . On définit sa divergence tangentielle par

$$\text{div}_\tau(W) = \text{div}(\tilde{W}) - (D\tilde{W}'n) \cdot n \quad (7.7)$$

où  $\tilde{W} \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  est un prolongement de  $W$ .

Cette définition ne dépend pas de l'extension de  $W$  choisie. En effet, on vérifie que

$$\text{div}(\tilde{W}) - (D\tilde{W}'n) \cdot n = \text{trace}(D_\tau W)$$

où  $D_\tau W$  désigne la matrice dont la  $i$ ème ligne est donnée par :

$$\nabla \tilde{W}_i - (\nabla \tilde{W}_i \cdot n)n = \nabla_\tau W_i.$$

Notons les formules

$$\forall f, g \in C^1(\Gamma), \quad \nabla_\tau(fg) = g\nabla_\tau(f) + f\nabla_\tau(g) \quad (7.8)$$

$$\forall f \in C^1(\Gamma), \quad \forall W \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^2), \quad \text{div}_\tau(fW) = f\text{div}_\tau(W) + W \cdot \nabla_\tau(f). \quad (7.9)$$

**Définition 7.2.3 (Courbure moyenne)** On suppose que  $\Omega$  est de classe  $C^2$ . On définit la courbure moyenne de  $\Gamma$  par  $\kappa = \text{div}_\tau(n)$ .

**Proposition 7.2.4** Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $N \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , une extension de la normale unitaire  $n$  à  $\Gamma$ . Alors on a :

$$\text{div}(N) = \kappa \text{ sur } \Gamma.$$

Décomposition de la divergence tangentielle : Pour tout champ de vecteur  $W$  défini sur  $\Gamma$ , on appelle composante tangentielle de  $W$ , qu'on note  $W_\tau$ , la projection orthogonale de  $W$  sur le plan tangent :

$$W_\tau := W - (W.n)n.$$

**Proposition 7.2.5** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f \in W^{1,1}(\Gamma)$  et  $W \in W^{1,1}(\Gamma, \mathbb{R}^d)$ . Alors on a :*

$$\operatorname{div}_\tau(fn) = \kappa f, \quad \operatorname{div}_\tau(W) = \operatorname{div}_\tau(W_\tau) + \kappa n.W. \quad (7.10)$$

$$\int_\Gamma \operatorname{div}_\tau(W) = \int_\Gamma \kappa n.W, \quad \int_\Gamma W.\nabla_\tau(f) = \int_\Gamma -f \operatorname{div}_\tau(W) + \kappa f W.n. \quad (7.11)$$

**Définition 7.2.6 (Opérateur de Laplace-Beltrami)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^2$ . L'opérateur de Laplace-Beltrami, noté  $\Delta_\tau u$  est défini par*

$$\forall u \in W^{2,1}(\Gamma), \quad \Delta_\tau(u) = \operatorname{div}_\tau[\nabla_\tau(u)] \quad (7.12)$$

### 7.2.1 Extension de la normale à un domaine variable

Nous énonçons un résultat technique très utile dans les calculs de dérivation sur le bord. On note  $C^{1,\infty} = C^1 \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , muni de la norme de  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

On suppose que pour  $t \in [0, T], T > 0$ , l'application  $t \rightarrow T_t$  est de classe  $C^{1,\infty}$ , dérivable en 0 avec  $T_0 = I_d$  et  $T'_0 = V$ . On note par  $\Omega_t = T_t(\Omega)$ ,  $\partial\Omega_t = T_t(\Gamma)$ . On a la proposition suivante :

**Proposition 7.2.7** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $n \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , une extension de la normale à  $\partial\Omega$ . alors*

$$t \mapsto n_t = \frac{w_t}{\|w_t\|} \text{ avec } w_t = (DT_t^{-1}n)^* \circ T_t^{-1}, \quad (7.13)$$

*est une extension de  $n$  à  $\partial\Omega_t$ , avec  $t \mapsto n_t \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .*

*Pour toute extension  $t \in [0, T] \rightarrow n_t \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  dérivable en 0 avec  $n_0 \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , on a*

$$\left. \frac{\partial n_t}{\partial t} \right|_{t=0} = -\nabla_\tau(V.n) - (Dn_0.n)V.n \text{ sur } \Gamma. \quad (7.14)$$

## 7.3 INTÉGRALE SUR UN DOMAINE VARIABLE

Nous commençons cette section par donner la dérivée la la fonction intégrale suivante :

$$t \rightarrow I(t) = \int_{\Omega_t} f(t, x) dx,$$

où  $\Omega_t = T_t(\Omega)$  est l'image d'un ensemble mesurable fixe  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Ce calcul se fait par un changement de variable en posant  $x = T_t(y)$ , pour  $y \in \mathbb{R}^d$  de telle sorte que

$$I(t) = \int_\Omega f(t, T_t(y)) |det(D_y T_t(y))| dy. \quad (7.15)$$

L'avantage de cette dernière équation est que le domaine est fixe.

### 7.3.1 Formule de dérivation

Nous commençons par un cas simple où  $f(t, \cdot)$  est définie partout sur  $\mathbb{R}^d$ . Les dérivées en 0 sont des dérivées à droite.

**Théorème 7.3.1** *Soit  $T_t$  la famille de transformation définie comme dans le paragraphe 7.1.1. Nous supposons que :*

$$t \in [0, T[ \rightarrow f(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ est dérivable en } 0 \text{ (de dérivée } f'(0))$$

$$f(0) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d).$$

Alors,

$$t \mapsto I(t) = \int_{\Omega_t} f(t) \text{ est dérivable en } 0 \text{ et on a}$$

$$I'(0) = \int_{\Omega} f'(0) + \operatorname{div}[f(0)V]. \quad (7.16)$$

Si, de plus,  $\Omega$  est un ouvert à bord lipschitzien, alors

$$I'(0) = \int_{\Omega} f'(0) + \int_{\partial\Omega} f(0)V.n. \quad (7.17)$$

**Remarque 7.3.2** *Dans ce théorème, la dérivabilité de  $I$  et la formule (7.16) sont obtenus en supposant seulement  $\Omega$  mesurable. La formule (7.17) requiert un peu plus de régularité sur le bord du domaine  $\Omega$  : il suffit que  $f(0)V$  admette une trace  $H^{d-1}$ -intégrable sur  $\partial\Omega$ . Puisque  $f(0)V \in W^{1,1}$ , c'est le cas si  $\Omega$  est à bord lipschitzien.*

**Corollaire 7.3.3** *Soit  $T_t$  la famille de transformation définie comme dans le paragraphe 7.1.1 et  $t \rightarrow f(t) \in L^1(\Omega)$ . on suppose que*

$$t \in [0, T[ \rightarrow F(t) = f(t, T_t(\cdot)) \in L^1(\Omega) \text{ est dérivable en } 0,$$

et qu'il existe un opérateur de prolongement linéaire et continu

$$P : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } P(f(0)) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d).$$

Alors, il existe un prolongement  $t \rightarrow \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  dérivable en 0 de l'application  $t \rightarrow f(t)$  avec

$$\tilde{f}'(0) = F'(0) + \nabla P(f(0)).V.$$

De plus,  $t \rightarrow I(t) = \int_{\Omega_t} f(t)$  est dérivable en 0 et on a la formule (7.17) en posant p.p  $x \in \Omega$   $f'(0, x) = \tilde{f}'(0, x)$ .

**Lemme 7.3.4** *La dérivée du déterminant de la matrice Jacobienne de  $T_t$  est donnée par :*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det DT_t(x) = \operatorname{div} V(x). \quad (7.18)$$

**Preuve :** Pour une matrice  $A(t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  à coefficients différentiable, tel que l'inverse  $A(t)^{-1}$  existe, la dérivée par rapport à  $t$  du déterminant est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \operatorname{tr} \left( \frac{dA(t)}{dt} A(t)^{-1} \right) \det A(t). \quad (7.19)$$

Puisque  $DT_0(x) = I_d$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det DT_t(x) &= \operatorname{tr} \left( \frac{dDT_t(x)}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= \operatorname{tr}(DV(x)) \\ &= \operatorname{div} V(x). \end{aligned}$$

□

Dans le cas où  $f$  ne dépend que de  $x \in \Omega$ , on a la formule de Hadamard :

**Théorème 7.3.5 (Formule de Hadamard)** *Pour une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne dépend que de  $x \in \Omega$ , on considère la fonction*

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx,$$

alors la dérivée de forme de  $J$  est donnée par

$$DJ(\Omega; V) = \int_{\partial\Omega} V \cdot n f ds. \quad (7.20)$$

**Preuve :** Nous avons par définition

$$\begin{aligned} DJ(\Omega; V) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} J(\Omega_t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Omega_t} f(x) dx \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Omega} f(T_t(x)) \det(DT_t(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(T_t(x)) \det(DT_t(x)) dx. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 7.3.4 et le théorème de divergence, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(T_t(x)) \det(DT_t(x)) dx &= \int_{\Omega} \langle \nabla f(x), V(x) \rangle + f(x) \operatorname{div} V(x) \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(V(x) f(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \langle V, n \rangle f ds. \end{aligned}$$

□

**Théorème 7.3.6** *Soit  $J$  la fonctionnelle définie par*

$$J(\Omega, u) := \int_{\Omega} f(u) dx + \int_{\partial\Omega} g(u) ds, \quad (7.21)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions qui ne dépendent pas de  $\Omega$ , alors la dérivée par rapport à la forme de la fonctionnelle  $J$  est donnée par

$$DJ(\Omega; V) = \int_{\Omega} \frac{\partial f(u)}{\partial u} u' dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g(u)}{\partial u} u' ds + \int_{\partial\Omega} V \cdot n \left[ f(u) + \frac{\partial g(u)}{\partial n} + \operatorname{div}(n) g(u) \right] ds \quad (7.22)$$

## 7.4 DÉRIVÉE DE QUELQUES PROBLÈMES DE FORME

### 7.4.1 Problème de transmission dans le cas scalaire

Dans cette section, nous rappelons la dérivée par rapport au domaine des deux problèmes aux limites suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_n = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega, \\ [u_n] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ [\alpha \frac{\partial u_n}{\partial n}] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ \alpha_e \frac{\partial u_n}{\partial n} = \varphi \text{ sur } \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} u_n ds = 0. \end{array} \right. \quad (7.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_d = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega, \\ [u_d] = 0 \text{ sur } \partial\omega \\ [\alpha \frac{\partial u_d}{\partial n}] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ u_d = g \text{ sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (7.24)$$

où  $\varphi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ ,  $f \in H^1(\partial\Omega)$  et  $\omega$  est un ouvert de classe  $C^2$  inclus dans  $\Omega$ . La conductivité  $\alpha$  est définie par :

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x \in \omega \\ \alpha_e & \text{si } x \in \Omega \setminus \bar{\omega}, \end{cases}$$

où  $\alpha_i$  et  $\alpha_e$  sont des constantes strictement positives. Le symbole  $[\cdot]$  désigne le saut à travers le bord  $\partial\omega$ .

### 7.4.2 Dérivées des fonctions d'état par rapport à la forme

Dans cette partie, nous présentons la dérivée des états  $u_n$  et  $u_d$  par rapport au domaine  $\omega$ . Pour  $d_0 > 0$  un réel fixé, nous considérons des perturbations  $T_t(x) = x + tV(x)$  avec  $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  tels que

$$\text{supp}(V) \subset \Omega_{d_0} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq d_0\}, T_t(\Omega) = \Omega \text{ et } T_t(\omega) = \omega_t.$$

Bien que les états  $u_n$  et  $u_d$  ne sont pas différentiables au sens classique, elles admettent des dérivées matérielles et de formes qui sont bien définies.

Nous rappelons certains résultats sur les dérivées des états  $u_n$  et  $u_d$ . Pour plus de détails le lecteur peut consulter [85, 3]).

**Théorème 7.4.1** *La solution  $u_d$  est différentiable par rapport au domaine et sa dérivée de forme  $u'_d$  satisfait*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u'_d = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega \\ [u'_d] = -\frac{[\alpha]}{\alpha_i} \frac{\partial u_d^-}{\partial n} V.n \text{ sur } \partial\omega \\ [\alpha \frac{\partial u'_d}{\partial n}] = -[\alpha] \operatorname{div}_\tau(V.n \nabla_\tau u_d) \text{ sur } \partial\omega \\ u'_d = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (7.25)$$

**Théorème 7.4.2** *La solution  $u_n$  est différentiable par rapport au domaine et sa dérivée de forme  $u'_n$  satisfait*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u'_n = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega \\ [u'_n] = -\frac{[\alpha]}{\alpha_i} \frac{\partial u_n^-}{\partial n} V.n \text{ sur } \partial\omega \\ [\alpha \frac{\partial u'_n}{\partial n}] = -[\alpha] \operatorname{div}_\tau(V.n \nabla_\tau u_n) \text{ sur } \partial\omega \\ \partial_n u'_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (7.26)$$

### 7.4.3 Problème de transmission dans le cas de l'élasticité

Soit  $\delta_0$  un réel positif fixé,  $\Omega$  et  $\omega$  deux ouverts bornés de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  tels que

$$\omega \subset \Omega_{\delta_0} = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

On suppose que le matériau  $\omega$  est caractérisé par des coefficients de Lamé  $(\lambda_i, \mu_i) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  et le matériau  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  est caractérisé par les coefficients de Lamé  $(\lambda_e, \mu_e) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  tel que  $(\lambda_e, \mu_e) \neq (\lambda_i, \mu_i)$ . Nous sommes intéressé à l'identification de  $\omega$  à partir des mesures sur le bord dans le cas où les propriétés du matériau sont connues. La procédure d'identification consiste à imposer un chargement surfacique  $g$  sur le bord extérieur du domaine et mesurer le déplacement  $f$  correspondant. On suppose dans la suite que le couple  $(g, f)$  est connue. Dans notre cas, le déplacement  $u$  vérifie le système surdéterminé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u)) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \sigma(u).n = g \text{ sur } \Gamma_1, \\ u = f \text{ sur } \Gamma_1, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (7.27)$$

avec

$$\sigma(u) = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)) I_d + 2\mu \varepsilon(u) \quad (7.28)$$

$$(\lambda, \mu) = \begin{cases} (\lambda_e, \mu_e) & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ (\lambda_i, \mu_i) & \text{dans } \omega. \end{cases} \quad (7.29)$$

et

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (Du + (Du)^*), \quad (7.30)$$



$I_d$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^d$ ,  $*$  indique la transposé,  $n$  est la normale unitaire sortante de la frontière  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux ouverts non vides disjoints de  $\partial\Omega$ .

Dans le cas où  $\partial\omega$  est de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , nous pouvons écrire le système (7.27) de la manière suivante :

**Proposition 7.4.3** *La solution  $u$  du problème (7.27) vérifie aussi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u)) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega \\ \sigma(u).n = g \text{ sur } \Gamma_1 \\ [\sigma(u).n] = 0 \text{ sur } \partial\omega \\ [u] = 0 \text{ sur } \partial\omega \\ u = f \text{ sur } \Gamma_1 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (7.31)$$

où  $[.]$  représente le saut sur le bord intérieur  $\partial\omega$  défini par :

$$[u] = u^+ - u^- \text{ et } [\sigma(u).n] = \sigma(u^+).n - \sigma(u^-).n. \quad (7.32)$$

#### 7.4.4 Formulation du problème de Neumann et de Dirichlet

Comme le problème de transmission (7.31) est surdéterminé, nous définissons alors deux problèmes : un problème de Neumann et un problème de Dirichlet.

##### 7.4.4.1 Formulation du problème de Neumann

Il s'agit d'un problème où les conditions aux limites imposés sur  $\Gamma_1$  sont de types  $\sigma(u).n$ . Ces conditions modélisent la donnée d'une force surfacique  $g$  sur  $\Gamma_1$ . Nous obtenons alors le problème de Neumann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u_n)) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega, \\ \sigma(u_n).n = g \text{ sur } \Gamma_1, \\ [\sigma(u_n).n] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ [u_n] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ u_n = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (7.33)$$

où  $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ .

Il est classique que le problème (7.33) admet une solution unique  $u_n$  vérifiant l'équation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(\varphi) = \int_{\Gamma_1} g \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V} = \{\varphi \in H^1(\Omega)^d : \varphi|_{\Gamma_2} = 0\}. \quad (7.34)$$

### 7.4.4.2 Formulation du problème de Dirichlet

C'est le cas où les valeurs de la solution sont fixées sur le bord extérieur du domaine :  $u|_{\Gamma_1} = f$  et  $u|_{\Gamma_2} = 0$ . Nous obtenons alors le problème de Dirichlet suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u_d)) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega, \\ [\sigma(u_d).n] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ [u_d] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ u_d = f \text{ sur } \Gamma_1, \\ u_d = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (7.35)$$

Nous considérons  $\tilde{f} \in H^1(\Omega)^d$  un prolongement de  $f$  tel que  $\tilde{f} = 0$  dans  $\Omega_\delta$ . On effectue le changement de variable suivant :  $\tilde{u}_d = u_d - \tilde{f}$ , nous obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(\tilde{u}_d)) = -\operatorname{div}(\sigma(\tilde{f})) \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega, \\ [\sigma(\tilde{u}_d).n] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ [\tilde{u}_d] = 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ \tilde{u}_d = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (7.36)$$

Nous écrivons la formulation variationnelle de (7.36) :

$$a(\tilde{u}_d, \varphi) = l(\varphi), \quad \text{pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega)^d, \quad (7.37)$$

où  $a$  est la forme bilinéaire définie par :

$$a(\tilde{u}_d, \varphi) = \int_{\Omega} \sigma(\tilde{u}_d) : \varepsilon(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)^d, \quad (7.38)$$

et  $l$  est la forme linéaire

$$l(\varphi) = - \int_{\Omega} \sigma(\tilde{f}) : \varepsilon(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)^d. \quad (7.39)$$

L'existence et l'unicité de la solution  $\tilde{u}_d$  du problème (7.36) dans  $H_0^1(\Omega)^d$  sont données par le théorème de Lax-Milgram, ce qui donne l'existence et l'unicité de la solution  $u_d$  du problème (7.35) :

$$u_d = \tilde{u}_d + \tilde{f}.$$

## 7.5 PROBLÈME INVERSE ET OPTIMISATION DE FORME

Le problème inverse que nous souhaitons résoudre consiste à trouver la forme  $\omega$  telle que la solution  $u_n$  du système (7.33) vérifie aussi  $u_n|_{\Gamma_1} = f$ .

### 7.5.1 Transformation du problème inverse en un problème d'optimisation de forme

La majorité des algorithmes d'identification sont plus souvent basés sur l'approche moindres carrés, cette dernière est largement ré pondue dans la littérature des problème inverses. Ce choix n'est évidemment pas le seul possible. Nous considérons un deuxième choix basé sur l'introduction d'une fonctionnelle coût de type Kohn- Vogelius . Cette méthode est basée sur l'écart énergétique entre la solution d'un problème de Neumann et celle d'un problème de Dirichlet. Cette idée à été utilisé au départ par Kohn-Vogelius pour implémenter un algorithme d'identification de conductivité. Dans le contexte de notre problème, nous définissons la fonctionnelle coût sous la forme suivante :

$$J(\omega) = \int_{\Omega} \sigma(u_n - u_d) : \varepsilon(u_n - u_d) dx. \quad (7.40)$$

Cette fonctionnelle est positive et nulle si et seulement si  $u_n = u_d$ . C'est le cas d'une inclusion adaptée.

### 7.5.2 Dérivée formelle par rapport au domaine $\omega$

Dans ce paragraphe, nous calculons formellement (i.e, les espaces dans lesquels les calculs sont faits et l'existence des limites en particulier pour les dérivées n'est pas justifiées) la dérivée de forme des solutions des problèmes aux limites (7.33) et (7.35). Pour calculer ces dérivées, nous considérons des déformations de la forme  $T_t(x) = x + tV(x)$ , avec  $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  et  $\text{supp}(V) \subset \Omega_{\delta_0}$ . Nous avons donc  $V.n := V.n = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On suppose que la composante tangentielle du champ  $V$  vérifie  $V_{\tau} = 0$  sur  $\partial\omega$ , c'est à dire que le bord  $\partial\omega$  bouge sans faire de rotation. Pour  $t$  suffisamment petit, on désigne par  $\omega_t = T_t(\omega)$  le domaine perturbé de  $\omega$  et on note par  $u_t$  la solution du problème de Neumann perturbé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\sigma(u_t)) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{\omega_t} \text{ et dans } \omega_t \\ \sigma(u_t).n_t = g \text{ on } \Gamma_1 \\ u_t = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ [u_t] = 0 \text{ sur } \partial\omega_t \\ [\sigma(u_t)n_t] = 0 \text{ sur } \partial\omega_t. \end{array} \right. \quad (7.41)$$

La solution  $u_t$  vérifie donc l'équation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma(u_t) : \varepsilon(v_t) = \int_{\Gamma_1} g.v_t, \quad \forall v_t \in \mathcal{V}_t = \{v_t \in H^1(\Omega)^d : v_t|_{\Gamma_2} = 0\}.$$

#### 7.5.2.1 Calculs formels des dérivées d'état

**Théorème 7.5.1** *La dérivée de forme  $u'_n$  de l'état  $u_n$  vérifie le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\sigma(u'_n)) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \sigma(u'_n).n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ [\sigma(u'_n).n] = -\text{div}_{\tau}(V.n\sigma(u_n^- - u_n^+)) \text{ sur } \partial\omega \\ [u'_n] = -[\partial_n u_n]V.n \text{ sur } \partial\omega. \end{array} \right. \quad (7.42)$$

**Preuve :** Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$  : l'espace des fonctions continues à supports compact dans  $\omega$ . Nous avons donc

$$\int_{\omega_t} \sigma(u_t) : \varepsilon(\phi) = 0 \Rightarrow \int_{\omega_t \cap \text{supp}(\phi)} \sigma(u_t) : \varepsilon(\phi).$$

Pour  $t$  voisin de 0,  $\text{supp}(\phi) \subset \omega_t$  et donc

$$\int_{\text{supp}(\phi)} \sigma(u_t) : \varepsilon(\phi) = 0.$$

En dérivant par rapport à  $t$  sur le domaine fixe, nous obtenons

$$\int_{\text{supp}(\phi)} \sigma(u') : \varepsilon(\phi) = 0.$$

et puisque  $\phi$  est à support compact dans  $\omega$ , nous retrouvons

$$\int_{\omega} \sigma(u') : \varepsilon(\phi) = 0.$$

Ce qui permet d'avoir  $\text{div}(\sigma(u')) = 0$  dans  $\omega$ . De même nous avons  $\text{div}(\sigma(u')) = 0$  dans  $\Omega \setminus \bar{\omega}$ .

Calculons maintenant la dérivée des conditions frontières. Les conditions les plus difficiles à dériver sont les conditions de sauts. Pour cela, nous les traitons sur chaque sous domaine.

**Proposition 7.5.2** *Si  $u = 0$  sur  $\Gamma_1$  alors  $u' = 0$  sur  $\Gamma_1$ .*

**Preuve :** Nous avons  $u_t(T_t(x)) = 0$  pour  $x \in \Gamma_1$ , après dérivation par rapport à  $t$ , nous obtenons

$$\frac{\partial u_t(T_t(x))}{\partial t} + Du_t(T_t(x))V(x) = 0.$$

Comme  $V$  est à support compact dans  $\Omega$ , il vient après passage à la limite quand  $t$  tend vers  $0^+$  que  $u' = 0$  sur  $\Gamma_1$ .

**Proposition 7.5.3** *Si  $[u] = 0$  sur  $\partial\omega$  alors*

$$[u'] = - \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] V.n \text{ sur } \partial\omega.$$

**Preuve :** Nous avons par définition

$$[u_t] = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} u_t(x + \delta n_t) - u_t(x - \delta n_t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} u_t^+ - u_t^-.$$

Les expressions des dérivées de  $u_t^+$  et  $u_t^-$  sont données par

$$\begin{aligned} \frac{du_t^+}{dt} &= \frac{\partial u_t^+}{\partial t} + Du_t^+ \frac{d}{dt}(x + \delta n_t) = \frac{\partial u_t^+}{\partial t} + Du_t^+ \left[ V + \delta \left( \frac{\partial n_t}{\partial t} + Dn_t V \right) \right], \\ \frac{du_t^-}{dt} &= \frac{\partial u_t^-}{\partial t} + Du_t^- \left[ V - \delta \left( \frac{\partial n_t}{\partial t} + Dn_t V \right) \right]. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand  $\delta$  tend vers 0, nous obtenons

$$0 = \frac{d}{dt}(u_t^+ - u_t^-) = \frac{\partial u_t^+}{\partial t} - \frac{\partial u_t^-}{\partial t} + (Du_t^+ - Du_t^-) \cdot V.$$

Soit donc

$$\left[ \frac{\partial u_t}{\partial t} \right] = (Du_t^- - Du_t^+) \cdot V.$$

Nous avons finalement quand  $t$  tend vers 0

$$[u'] = (Du^- - Du^+) \cdot V. \quad (7.43)$$

Nous décomposons le champ de déformation  $V$  et la différentielle de  $u$  en composante tangentielle et normale, la relation (7.43) devient donc

$$[u'] = (D_\tau u^- - D_\tau u^+) \cdot V_\tau + (Du^- \cdot n - Du^+ \cdot n) V \cdot n.$$

Du fait que le saut  $[u] = 0$  sur  $\partial\omega$ , nous obtenons

$$D_\tau u^- = D_\tau u^+.$$

Par conséquent la formule (7.43) se simplifie

$$[u'] = - \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] V \cdot n$$

□

**Proposition 7.5.4** *La dérivée par rapport à la forme de la condition aux limites  $[\sigma(u)n] = 0$  sur  $\partial\omega$  est donnée par :*

$$[\sigma(u')n] = -\text{div}_\tau(V \cdot n \sigma(u^- - u^+)).$$

**Preuve :** Par construction du champ de déformation  $V$ , nous avons  $V \cdot n = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $\Omega_t = \Omega$ . Pour  $u_t \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ , nous avons l'égalité suivante

$$\int_{\Omega} \sigma(u_t) : \varepsilon(\phi) = \int_{\Gamma_1} g \cdot \phi \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{V}. \quad (7.44)$$

D'après le Théorème 7.3.1, la différentielle de (7.44) au point  $t = 0$  est donnée par :

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma(u') : \varepsilon(\phi) dx + \int_{\omega} \sigma(u') : \varepsilon(\phi) dx + \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})} V \cdot n \sigma(u) : \varepsilon(\phi) ds + \int_{\partial\omega} V \cdot n \sigma(u) : \varepsilon(\phi) ds = 0.$$

Pour les intégrales sur le bord, nous utilisons le fait que  $V \cdot n = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})} V \cdot n \sigma(u) : \varepsilon(\phi) ds + \int_{\partial\omega} V \cdot n \sigma(u) : \varepsilon(\phi) ds &= \int_{\partial\omega} V \cdot n \sigma(u^- - u^+) : \varepsilon(\phi) ds \\ &= \int_{\partial\omega} V \cdot n \sigma(u^- - u^+) : D\phi ds. \end{aligned}$$

Nous décomposons la différentielle de  $\phi$  en composante normale et tangentielle, nous obtenons :

$$\int_{\partial\omega} V.n\sigma(u^- - u^+) : D\phi ds = \int_{\partial\omega} V.nn.\sigma(u^- - u^+) \frac{\partial\phi}{\partial n} ds + \int_{\partial\omega} V.n\sigma(u^- - u^+) : D_\tau\phi ds.$$

Après une intégration par partie sur  $\partial\omega$ , (voir [98, p 144]) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} V.n\sigma(u^- - u^+) : D\phi ds &= \int_{\partial\omega} V.nn.\sigma(u^- - u^+) \frac{\partial\phi}{\partial n} ds - \int_{\partial\omega} \operatorname{div}_\tau(V.n\sigma(u^- - u^+))\phi ds \\ &+ \int_{\partial\omega} V.n\kappa n.\sigma(u^- - u^+))\phi ds. \end{aligned}$$

Grâce au condition de saut sur  $\partial\omega$ , nous sommes menés à

$$\int_{\partial\omega} V.n\sigma(u^- - u^+) : D\phi ds = - \int_{\partial\omega} \operatorname{div}_\tau(V.n\sigma(u^- - u^+))\phi ds .$$

D'autre part,

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma(u') : \varepsilon(\phi) dx + \int_{\omega} \sigma(u') : \varepsilon(\phi) dx = \int_{\partial\Omega} \sigma(u').n\phi + \int_{\partial\omega} \sigma((u')^- - (u')^+).n\phi ds.$$

Ce qui nous permet d'avoir

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(u').n\phi = 0 \text{ et } \int_{\partial\omega} \sigma((u')^+ - (u')^-).n.\phi ds = - \int_{\partial\omega} \operatorname{div}_\tau(V.n\sigma(u^- - u^+))\phi.$$

□

De la même manière pour la solution  $u_d$  du problème de Dirichlet, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 7.5.5** *La dérivée de forme  $u'_d$  de l'état  $u_d$  vérifie le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u'_d)) = 0 \text{ dans } \Omega \\ [\sigma(u'_d).n] = -\operatorname{div}_\tau(V.n\sigma(u_d^- - u_d^+)) \text{ sur } \partial\omega \\ [u'_d] = -[\partial_n u_d]V.n \text{ sur } \partial\omega \\ u'_d = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ u'_d = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (7.45)$$

**Preuve :** La preuve est analogue à celle du problème de Neumann. Il manque seulement la dérivée de la condition au limite :  $u = f$  sur  $\Gamma_1$ . Nous avons  $u_t(T_t(x)) = f(T_t(x))$  sur  $\Gamma_1$  donc après dérivation par rapport à  $t$  nous obtenons

$$\frac{\partial u_t(T_t(x))}{\partial t} + Du_t(T_t(x))V(x) = Df(T_t(x))V(x) \text{ sur } \Gamma_1.$$

Comme  $V$  est à support compact dans  $\Omega$ , il vient après passage à la limite quand  $t$  tend vers 0 que  $u' = 0$  sur  $\Gamma_1$ . □

### 7.5.2.2 Calcul de la dérivée de forme $dJ(\omega; V)$ via la dérivée de l'état

**Proposition 7.5.6** *La dérivée de forme de la fonctionnelle  $J$  par rapport à  $\omega$  suivant la direction  $V$  est donnée par*

$$\begin{aligned} DJ(\omega; V) &= \int_{\partial\omega} \left[ [\sigma(u_d^-) : \varepsilon(u_d^-) - \sigma(u_d^+) : \varepsilon(u_d^+)] - [\sigma(u_n^-) : \varepsilon(u_d^-) - \sigma(u_n^+) : \varepsilon(u_n^+)] \right] V.n. \\ &+ 2 \int_{\partial\omega} \left( \sigma(u_d^-).n \left( \frac{\partial u_d^+}{\partial n} - \frac{\partial u_d^-}{\partial n} \right) - \sigma(u_n^-).n \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial n} - \frac{\partial u_n^-}{\partial n} \right) \right) V.n. \end{aligned} \quad (7.46)$$

**Preuve :** La fonctionnelle de forme  $J$  est définie par :

$$J = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma(u_n - u_d) : \varepsilon(u_n - u_d) + \int_{\omega} \sigma(u_n - u_d) : \varepsilon(u_n - u_d).$$

On vérifie facilement que  $J = J_N + J_D + J_{ND}$  avec

$$J_N = \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n), \quad J_D = \int_{\Omega} \sigma(u_d) : \varepsilon(u_d) \text{ et } J_{ND} = -2 \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_d).$$

Après intégration par partie, nous retrouvons

$$J_{ND} = -2 \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_d) = -2 \int_{\Gamma_1} \sigma(u_n).n u_d = -2 \int_{\Gamma_1} g f,$$

ce qui donne que  $J_{ND}$  est un terme constant, donc sa dérivée par rapport au domaine est nulle. Si les fonctions d'état  $u_n$  et  $u_d$  sont différentiables,  $J$  admet une dérivée de forme, et nous avons

$$DJ(\omega; V) = DJ_N(\omega; V) + DJ_D(\omega; V). \quad (7.47)$$

En utilisant la règle de dérivation d'une intégrale de volume (voir Théorème 7.3.1), nous obtenons :

$$DJ_N(\omega; V) = 2 \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma(u_n') : \varepsilon(u_n) + 2 \int_{\omega} \sigma(u_n') : \varepsilon(u_n) + \int_{\partial\Omega \setminus \bar{\omega}} V.n \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n) + \int_{\partial\omega} V.n \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n).$$

Par construction du champ de déformation  $V$ , nous avons  $V.n = 0$  sur  $\partial\Omega$ , donc l'intégrale sur  $\partial\Omega$  est nulle, ce qui donne

$$\int_{\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n) V.n + \int_{\partial\omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n) V.n = \int_{\partial\omega} [\sigma(u_n^-) : \varepsilon(u_n^-) - \sigma(u_n^+) : \varepsilon(u_n^+)] V.n \quad (7.48)$$

Pour les termes de volume, on utilise la formule de Green et la condition de saut vérifiée par la dérivée de l'état  $u_n$ , on obtient :

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma(u_n') : \varepsilon(u_n) + \int_{\omega} \sigma(u_n') : \varepsilon(u_n) = \int_{\partial\omega} (\sigma(u_n'^-)n - \sigma(u_n'^+)n) u_n$$

On utilise de nouveau la formule de Green dans  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  : En incorporant la relation de saut, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} (\sigma(u_n^-)n - \sigma(u_n^+)n)u_n &= \int_{\partial\omega} \operatorname{div}_\tau(\sigma(u_n^- - u_n^+)V.n)u_n \\ &= \int_{\partial\omega} [\sigma(u_n^+) : D_\tau(u_n) - \sigma(u_n^-) : D_\tau(u_n)] V.n \\ &= \int_{\partial\omega} [\sigma(u_n^+) : \varepsilon(u_n^+) - \sigma(u_n^-) : \varepsilon(u_n^-)] V.n - \sigma(u_n^-)n \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial n} - \frac{\partial u_n^-}{\partial n} \right) V.n \end{aligned}$$

Nous déduisons finalement que

$$DJ_N(\omega; V) = \int_{\partial\omega} \left( [\sigma(u_n^+) : \varepsilon(u_n^+) - \sigma(u_n^-) : \varepsilon(u_n^-)] - 2\sigma(u_n^-)n \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial n} - \frac{\partial u_n^-}{\partial n} \right) \right) V.n. \quad (7.49)$$

De même pour la fonctionnelle  $J_D$ , nous appliquons la règle de dérivation d'une intégrale de volume (cf. Théorème 7.3.1), nous obtenons :

$$DJ_D(\omega; V) = 2 \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma(u_d') : \varepsilon(u_d) + 2 \int_{\omega} \sigma(u_d') : \varepsilon(u_n) + \int_{\partial\Omega \setminus \bar{\omega}} V.n \sigma(u_d) : \varepsilon(u_d) + \int_{\partial\omega} V.n \sigma(u_d) : \varepsilon(u_d).$$

Pour les intégrales aux bords, nous avons :

$$\int_{\partial\Omega \setminus \bar{\omega}} V.n \sigma(u_d) : \varepsilon(u_d) + \int_{\partial\omega} V.n \sigma(u_d) : \varepsilon(u_d) = \int_{\partial\omega} [\sigma(u_d^-) : \varepsilon(u_d^-) - \sigma(u_d^+) : \varepsilon(u_d^+)] V.n. \quad (7.50)$$

Pour les termes de volume, on intègre par partie et on utilise les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$  et sur  $\partial\omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma(u_d') : \varepsilon(u_d) + \int_{\omega} \sigma(u_d') : \varepsilon(u_d) &= \int_{\partial\Omega} \sigma(u_d^-).nu_d' - \sigma(u_d^+).nu_d' \\ &= \int_{\partial\omega} \sigma(u_d^-).n \left( \frac{\partial u_d^+}{\partial n} - \frac{\partial u_d^-}{\partial n} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$DJ_D(\omega; V) = \int_{\partial\omega} \left( [\sigma(u_d^-) : \varepsilon(u_d^-) - \sigma(u_d^+) : \varepsilon(u_d^+)] + 2\sigma(u_d^-).n \left( \frac{\partial u_d^+}{\partial n} - \frac{\partial u_d^-}{\partial n} \right) \right) V.n \quad (7.51)$$

On achève la preuve, en sommant les equations (7.49) et (7.51).  $\square$

Nous venons d'obtenir une formule pour la dérivée de forme  $dJ(\omega; V)$  par rapport au domaine  $\omega$  à l'aide d'un calcul dont certaines étapes ne sont pas justifiées. Dans le chapitre 9, nous retrouvons la même formule par une méthode différente mais rigoureuse mathématiquement.



# Identification des inclusions par le gradient topologique et le gradient de forme

Nous présentons dans ce chapitre une technique de localisation des inclusions à l'intérieur d'un domaine par des mesures surfacique basée sur la méthode du gradient topologique. Nous utilisons ensuite la méthode du gradient classique pour identifier complètement l'inclusion. D'un point de vue numérique, le gradient topologique est très efficace pour retrouver, les inclusions extrêmement allongés. Pour implémenter cette méthode, nous avons utilisé certaines inclusion particulière à savoir des petites inclusion elliptiques très allongés. En déplaçant ces inclusions dans tous le domaine, on peut retrouver approximativement la position de l'inclusion(s) recherchée(s).

*Ce chapitre fait l'objet d'un article en préparation, en collaboration avec S. Chaabane et M. Masmoudi.*

## 8.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous intéressons encore à la détermination d'une inclusion(s)  $\omega$  à partir des mesures effectuées sur le bord extérieur du domaine. Nous considérons donc un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , à bord  $\partial\Omega = \Gamma$  de classe  $C^1$ . On désigne par  $\omega$  un sous domaine de  $\Omega$ . De point de vue physique on suppose que  $\Omega$  est un conducteur (électrique ou thermique) de conductivité  $\alpha$  définie pour tout  $x \in \Omega$  par :

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_e & \text{si } x \in \Omega \setminus \bar{\omega} \\ \alpha_i & \text{si } x \in \omega \end{cases}$$

Dans la suite, nous fixons  $\delta > 0$  et nous désignons par

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega, d(x, \Gamma) > \delta\}.$$

Notre objectif est de déterminer la forme d'une inclusion  $\omega$  simplement connexe de classe  $C^2$  incluse dans l'ensemble  $\Omega_\delta$  (i.e, l'inclusion n'est près du bord) dans le cas où les conductivités  $\alpha_i$  et  $\alpha_e$  sont connues. La procédure d'identification consiste à imposer

un flux (électrique ou thermique)  $\varphi$  sur le bord  $\Gamma$  et mesurer la réponse (potentiel ou température)  $u$ . L'état  $u$  vérifie le problème de Neumann :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\alpha \nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \alpha_e \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.1)$$

Le système (8.1), peut se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \text{ et dans } \omega, \\ \alpha_e \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi, & \text{sur } \Gamma, \\ [u] = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ [\alpha \frac{\partial u}{\partial n}] = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (8.2)$$

où  $\partial/\partial n$  dénote la dérivée partielle par rapport à la normale unitaire sortante,  $[.]$  désigne le saut à travers le bord  $\partial\omega$ . Nous supposons que le flux  $\varphi \in L^2(\Gamma)$ . Pour qu'une solution du problème (8.1) existe, la condition de compatibilité

$$\int_{\Gamma} \varphi ds = 0$$

doit être vérifiée. Dans ce cas, la solution de (8.1) existe et est déterminée à une constante additive près. Pour avoir l'unicité, on impose la condition de normalisation suivante :

$$\int_{\Gamma} u ds = 0.$$

La formulation variationnelle du problème (8.1) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{V} \text{ telle que} \\ a_{\alpha}(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (8.3)$$

où

$$a_{\alpha}(u, v) = \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad l(v) = \int_{\Gamma} \varphi v ds, \quad (8.4)$$

et

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Gamma} u ds = 0 \right\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{V}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Dans la suite nous notons par  $\|\cdot\|$  la norme associée à ce produit scalaire. il est classique que le problème (8.3) admet une solution unique  $u_{\alpha} \in \mathcal{V}$  (voir [70]).

Nous supposons dans la suite que le potentiel électrique  $f = u|_{\Gamma}$  et le flux de courant  $\varphi$  sont connus sur le bord du domaine  $\Gamma$ . Nous formulons le problème inverse de la manière suivante :

Trouver  $\omega \in \Omega_{\delta}$ , telle que la solution  $u$  du problème (8.1) vérifie aussi  $u|_{\Gamma} = f$ . (8.5)

Ce problème intervient dans plusieurs domaines d'applications, tels que l'imagerie médicale la géophysique, la détection du cancer, ...

Les questions standard pour résoudre ce problème sont, l'identifiabilité, la stabilité et l'identification. Concernant l'identifiabilité un seul flux  $\varphi$  suffit pour déterminer l'inclusion  $\omega$ . Pour plus de détail on pourra se référer à [66, Théoreme 3.1]. Nous nous sommes intéressé essentiellement dans ce travail à l'identification numérique de l'inclusion  $\omega$ .

Dans le paragraphe suivant, nous calculons le gradient topologique relatif à notre problème et nous exhibons quelques exemples numériques.

## 8.2 CALCUL DU GRADIENT TOPOLOGIQUE

La dérivée topologique est un outil pour l'étude des problèmes inverses géométriques. L'idée de base est d'obtenir un développement asymptotique d'une fonctionnelle de forme  $j$  par rapport à la création d'un petit trou dans le domaine. Généralement le développement prend la forme

$$j(\Omega \setminus \overline{(x_0 + \varepsilon D)}) - j(\Omega) = f(\varepsilon)g(x_0) + o(f(\varepsilon)), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8.6)$$

où  $x_0$  et  $\varepsilon$  sont respectivement le centre et le diamètre du trou,  $D$  est un domaine fixé contenant l'origine et  $f$  est une fonction positive qui tend vers zero avec  $\varepsilon$ . La fonction  $g$  est appelé gradient topologique et (8.6) est l'asymptotique topologique. Donc pour minimiser la fonction coût  $j$ , on a intérêt à enlever (ou rajouter selon le cas) de la matière là où le gradient topologique est le plus négatif.

Les premiers travaux sur ce sujet en optimisation de forme, sont dus à Shumackher [96], qui a déterminé la variation à l'ordre 1 de la compliance par rapport à la taille d'un trou à l'intérieur du domaine. Ensuite, M.Masmoudi [79] en généralisant la méthode de l'état adjoint, a obtenu l'asymptotique topologique pour une grande classe de fonctions coût dans le contexte de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet au bord d'un trou circulaire. Cette méthodologie a été ensuite adaptée au cas des trous de forme quelconque avec condition de Neumann ou de Dirichlet.

Une autre situation qui nous intéresse dans ce chapitre initialement étudié dans [41], consiste à étudier l'influence d'une petite inclusion avec une conductivité différente de celle du matériau.

### 8.2.1 La méthode de l'état adjoint

Soit  $\mathcal{V}$  un espace de Hilbert réel. Pour  $\varepsilon \geq 0$ , on désigne par  $a_{\varepsilon}$  une forme bilinéaire sur  $\mathcal{V}$  et par  $l_{\varepsilon}$  une forme linéaire sur  $\mathcal{V}$ . Soit  $u_{\varepsilon} \in \mathcal{V}$ , la solution du problème variationnelle suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_{\varepsilon} \in \mathcal{V} \text{ telle que} \\ a_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v) = l_{\varepsilon}(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (8.7)$$

Considérons la fonction coût

$$j(\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon), \quad (8.8)$$

où  $J_\varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable au point  $u_0$ . On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

**H<sub>1</sub>** : Il existe deux nombres réels  $\delta a$  et  $\delta l$  et une fonction  $f(\varepsilon) \geq 0$  tels que :

$$(a_\varepsilon - a_0)(u_0, v_\varepsilon) = f(\varepsilon)\delta a + o(f(\varepsilon)), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (8.9)$$

$$(l_\varepsilon - l_0)(v_\varepsilon) = f(\varepsilon)\delta l + o(f(\varepsilon)), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (8.10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0, \quad (8.11)$$

où  $v_\varepsilon \in \mathcal{V}$  est l'état adjoint vérifiant

$$a_\varepsilon(\varphi, v_\varepsilon) = -DJ_\varepsilon(u_0)\varphi \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{V}. \quad (8.12)$$

**H<sub>2</sub>** : Il existe deux nombres réels  $\delta J_1$  et  $\delta J_2$  tels que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J_\varepsilon(u_0) + DJ_\varepsilon(u_0)(u_\varepsilon - u_0) + f(\varepsilon)\delta J_1 + o(f(\varepsilon)), \quad (8.13)$$

$$J_\varepsilon(u_0) = J_0(u_0) + f(\varepsilon)\delta J_2 + o(f(\varepsilon)). \quad (8.14)$$

Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 8.2.1** [17] *La variation de la fonction coût  $j$  par rapport à  $\varepsilon$  est donnée par*

$$j(\varepsilon) - j(0) = f(\varepsilon)(\delta a - \delta l + \delta J_1 + \delta J_2) + o(f(\varepsilon)).$$

**Preuve** : D'après l'équation variationnelle (8.7), nous avons

$$j(\varepsilon) - j(0) = [J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_0(u_0)] + [a_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - a_0(u_0, v_\varepsilon)] - [l_\varepsilon(v_\varepsilon) - l_0(v_\varepsilon)].$$

En utilisant les équations (8.9) et (8.10), nous obtenons

$$j(\varepsilon) - j(0) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_0(u_0) + a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon) + f(\varepsilon)(\delta a - \delta l) + o(f(\varepsilon)).$$

Ce qui nous donne d'après (8.13) et (8.14) que

$$j(\varepsilon) - j(0) = DJ_\varepsilon(u_0)(u_\varepsilon - u_0) + a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon) + f(\varepsilon)(\delta J_1 + \delta J_2 + \delta a - \delta l) + o(f(\varepsilon)),$$

ce qui prouve le théorème d'après l'équation (8.12).  $\square$

## 8.2.2 Formulation du problème

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  à bord  $\partial\Omega = \Gamma$  suffisamment régulier. On suppose que  $\Omega$  contient une petite inhomogénéité  $D_\varepsilon = x_0 + \varepsilon D$ , où  $\varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in \Omega$  et  $D \subset \Omega$  est un domaine borné assez régulier contenant l'origine. Pour  $\varepsilon > 0$ , on désigne par  $u_\varepsilon$  une solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \alpha_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \varphi \text{ sur } \Gamma, \\ \int_\Gamma u_\varepsilon ds = 0. \end{array} \right. \quad (8.15)$$

où  $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , vérifiant la condition de normalisation suivante :

$$\int_{\Gamma} \varphi ds = 0,$$

$n$  est la normale unitaire sortante de  $\Gamma$  et  $\alpha_\varepsilon$  est une fonction constante par morceaux définie par :

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} \alpha_e & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{D_\varepsilon} \\ \alpha_i & \text{si } x \in D_\varepsilon, \end{cases}$$

où  $\alpha_e$  et  $\alpha_i$  sont des constantes strictement positives. La formulation variationnelle associée au problème (8.15) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_\varepsilon \in \mathcal{V} \text{ telle que} \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (8.16)$$

avec

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dx, \quad l_\varepsilon(v) = \int_{\Gamma} \varphi v ds,$$

et

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Gamma} v ds = 0 \right\}.$$

Nous considérons une fonction coût  $J_\varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  du type (8.8), Fréchet différentiable au point  $u_0$  et satisfaisant l'hypothèse  $\mathbf{H}_2$  avec  $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$ . On suppose que  $DJ_0(u_0) \in H^2(\Omega)$  et que

$$\|DJ_\varepsilon(u_0) - DJ_0(u_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} = o(\varepsilon). \quad (8.17)$$

Nous avons alors le théorème suivant

**Théorème 8.2.2** [17] *Pour une fonction coût vérifiant (8.13)-(8.14) et (8.17) avec  $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$ , nous avons le développement asymptotique suivant :*

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^2 [\alpha_e \nabla u_0(x_0)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_0(x_0) + \delta J] + o(\varepsilon^2), \quad (8.18)$$

où  $r = \alpha_i/\alpha_e$ ,  $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2$  et  $\mathcal{P}_{D,r}$  est la matrice de polarisation définie par :

$$(\mathcal{P}_{D,r})_{i,j} = \begin{cases} \int_{\partial D} p_i x_j ds & \text{si } r \neq 1, \\ 0 & \text{si } r = 1, \end{cases} \quad (8.19)$$

où  $x_j$  est le  $j$ -ème coordonnée du point  $x$  et  $p_i$  est la densité associée au  $i$ -ème vecteur  $e_i$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  : c'est l'unique solution de l'équation intégrale suivante :

$$\left( \frac{r+1}{r-1} \right) \frac{p_i(x)}{2} + \int_{\partial D} p_i(y) \nabla E(x-y) \cdot n(x) ds(y) = e_i \cdot n(x) \quad \forall x \in \partial D, \quad (8.20)$$

où  $E$  désigne la solution fondamentale de l'opérateur de la Laplace  $u \mapsto -\Delta u$ .

Dans le cas où  $D$  est une ellipse avec demi grand axe  $a$  et demi petit axe  $b = ae$ , parallèle à celle de la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice de polarisation est donnée explicitement par l'expression suivante :

$$\mathcal{P}_{D,r} = |D|(r-1) \begin{pmatrix} \frac{1+e}{1+re} & 0 \\ 0 & \frac{1+e}{e+r} \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

où  $|D|$  désigne la surface de l'ellipse  $D$ . Nous explicitons dans la suite, l'expression de la matrice de polarisation d'une ellipse quelconque, qui se déduit par rotation à partir de l'expression précédente.

Soit  $\alpha$  l'angle de rotation de l'ellipse  $D$ . On désigne par  $(f_1, f_2)$  l'image de la base  $(e_1, e_2)$

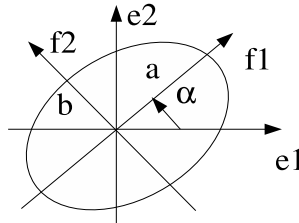


FIGURE 8.1 – Rotation de l'ellipse

par la rotation d'angle  $\alpha$  (cf. Figure 8.1). Nous notons par  $n = (n_1, n_2)^T := f_2$ , le vecteur unitaire dirigé suivant le plus petit axe de  $D$ . Dans ce cas, l'expression de la matrice de polarisation est donnée par :

$$\mathcal{P}_{D,r} = |D|(r-1)R^T \begin{pmatrix} \frac{1+e}{1+re} & 0 \\ 0 & \frac{1+e}{e+r} \end{pmatrix} R = |D|(r-1)(1+e) \begin{pmatrix} \frac{n_1^2}{e+r} + \frac{n_2^2}{1+re} & \frac{n_1 n_2}{e+r} - \frac{n_1 n_2}{1+re} \\ \frac{n_1 n_2}{e+r} - \frac{n_1 n_2}{1+re} & \frac{n_1^2}{1+re} + \frac{n_2^2}{e+r} \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

où  $R$  est la matrice de rotation définie par

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 & -n_1 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 8.2.3** La formule (8.18) peut être étendue dans le cas vectorielle comme suit

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^2 \left[ \alpha_e \sum_{j=1}^N \nabla u_0^j(x_0)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_0^j(x_0) + \delta J \right] + o(\varepsilon^2), \quad (8.23)$$

où  $u_0^j$  et  $v_0^j$ ,  $j = 1, \dots, N$  sont les composantes de  $u_0$  et  $v_0$ .

### 8.3 LOCALISATION AVEC LE GRADIENT TOPOLOGIQUE

Dans ce paragraphe, nous utilisons la méthode du gradient topologique pour localiser la position d'une inclusion(s) à partir des mesures effectuées sur tout le bord extérieur du domaine.

### 8.3.1 La fonction coût et le gradient topologique

A partir des mesures au bord  $(f, \varphi)$ , on peut définir pour une inclusion  $\omega \subset \Omega$  deux problèmes :

- Un problème de Neumann :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\alpha \nabla u_N(\omega)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \alpha_e \partial_n u_N(\omega) = \varphi & \text{sur } \Gamma, \\ \int_{\Gamma} u_N(\omega) ds = 0. \end{cases} \quad (8.24)$$

- un problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\alpha \nabla u_D(\omega)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_D(\omega) = f & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.25)$$

Il est classique que chacun des deux problèmes admet une solution unique (voir [70]). Nous définissons la fonctionnelle coût  $J$  par

$$\mathcal{J}(\omega) = J(u_N(\omega), u_D(\omega)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_N - u_D|^2. \quad (8.26)$$

Cette fonctionnelle est positive et s'annule seulement pour l'inclusion  $\omega$  recherchée. Notons que ce type de fonctionnelle a été utilisé par Amstutz et al [18] dans le cas de détection de fissure par la méthode du gradient topologique.

Pour calculer le gradient topologique, nous résolvons numériquement :

- les deux problèmes directs dans le domaine sain

$$\begin{cases} \Delta u_N = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \alpha_e \partial_n u_N = \varphi & \text{sur } \Gamma, \\ \int_{\Gamma} u_N ds = 0. \end{cases} \quad (8.27)$$

$$\begin{cases} \Delta u_D = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_D = f & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.28)$$

- les deux problèmes adjoints dans le domaine sain

$$\begin{cases} \Delta v_N = (u_N - u_D) & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n v_N = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \int_{\Gamma} v_N ds = 0. \end{cases} \quad (8.29)$$

$$\begin{cases} \Delta v_D = -(u_N - u_D) & \text{dans } \Omega, \\ v_D = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.30)$$

En se référant à [17, Thm 7.1, exp 2], la fonctionnelle  $J$  vérifie les hypothèses  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$ , de plus  $\delta J = 0$ . En utilisant la Remarque 8.2.3 pour le vecteur  $U(u_N, u_D)$ , nous obtenons le développement asymptotique suivant :

$$\mathcal{J}(D_\varepsilon) - \mathcal{J}(D_0) = \varepsilon^2 \left[ \alpha_e \left( \nabla u_N(x)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_N(x) + \nabla u_D(x)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_D(x) \right) \right] + o(\varepsilon^2). \quad (8.31)$$

Le gradient topologique est donné par l'expression suivante :

$$g(x) = \nabla u_N(x)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_N(x) + \nabla u_D(x)^T \mathcal{P}_{D,r} \nabla v_D(x). \quad (8.32)$$

**Remarque 8.3.1** *Notons que dans le cas où  $D$  est une ellipse, la matrice de polarisation définie dans (8.22) peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$\mathcal{P}_{D,r} = \pi a^2 e(1+e)(r-1) \left[ \left( \frac{1}{e+r} - \frac{1}{1+re} \right) nn^T + \frac{1}{1+re} I \right], \quad (8.33)$$

où  $n$  est vecteur unitaire dirigé par le petit axe de  $D$  et  $a$  est la longueur du plus grand axe. Dans ce cas, le gradient topologique se réécrit :

$$\begin{aligned} g(x, n) &= \Lambda_{r,e} \left[ \nabla u_N(x)^T nn^T \nabla v_N(x) + \nabla u_D(x)^T nn^T \nabla v_D(x) \right] \\ &\quad + \lambda_{r,e} \left[ \nabla u_N(x) \cdot \nabla v_N(x) + \nabla u_D(x) \cdot \nabla v_D(x) \right] \\ &= \Lambda_{r,e} \left[ (\nabla u_N(x) \cdot n)(\nabla v_N(x) \cdot n) + (\nabla u_D(x) \cdot n)(\nabla v_D(x) \cdot n) \right] \\ &\quad + \lambda_{r,e} \left[ \nabla u_N(x) \cdot \nabla v_N(x) + \nabla u_D(x) \cdot \nabla v_D(x) \right] \\ &= -\Lambda_{r,e} n^T M(x) n + \lambda_{r,e} \left[ \nabla u_N(x) \cdot \nabla v_N(x) + \nabla u_D(x) \cdot \nabla v_D(x) \right]. \end{aligned} \quad (8.34)$$

où

$$\Lambda_{r,e} = e(1+e)(r-1) \left( \frac{1}{e+r} - \frac{1}{1+re} \right), \quad \lambda_{r,e} = e(1+e)(r-1) \frac{1}{1+re},$$

et  $M$  est une matrice symétrique définie par

$$M(x) = -\text{sym}(\nabla u_N \oplus \nabla v_N + \nabla u_D \oplus \nabla v_D),$$

où  $\text{sym}(A) = (A + A^T)/2$  et  $U \oplus V = UV^T$ .

En particulier, si nous considérons le cas limite  $r \rightarrow 0$  et  $e \rightarrow 0$ , nous obtenons :  $\Lambda_{0,0} = -1$  et  $\lambda_{0,0} = 0$ . Ainsi, le gradient topologique devient

$$g(x, n) = n^T M(x) n. \quad (8.35)$$

Selon cette expression,  $g(x, n)$  est minimal au point  $x$  si le vecteur  $n$  est un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre  $\lambda_1(x)$  de la matrice  $M(x)$ . Dans la suite, cette valeur sera considérée comme le gradient topologique pour la localisation des petites inclusions extrêmement allongées.

La méthode du gradient topologique consiste à mettre une petite inclusion dans le domaine et à étudier la variation de la fonction coût. La localisation de l'inclusion(s) se fait en considérant des petites inclusions elliptiques extrêmement allongées.



### 8.3.2 Résultats numériques

Nous décrivons dans ce qui suit, la procédure numérique de la méthode du gradient topologique pour la localisation des inclusions à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .

Nous résolvons numériquement les deux problèmes directs (8.27)-(8.28) et les deux problèmes adjoints (8.29)-(8.30). Nous calculons le gradient topologique de la fonction  $J$  en chaque élément du maillage. L'inclusion est liée à la région où le gradient topologique est le plus négatif.

Dans les exemples numériques suivants,  $\Omega$  est le disque unité et  $\omega$  est l'inclusion à l'intérieur de  $\Omega$ . On impose les flux suivants sur le bord  $\Gamma$  :  $\varphi_1 = x_1$ , la première composante de  $x$ ,  $\varphi_2 = x_2$  le second composante de  $x$ ,  $\varphi_3 = x_1x_2$  et  $\varphi_4 = (x_1^2 + x_2^2)/2$ . Dans le cas d'utilisation de  $N$  flux,  $N \geq 2$ , nous considérons la fonction coût comme la somme des fonctions coûts relatives à chaque flux. Le calcul est fait avec Matlab

#### Cas d'une seule inclusion :

Dans la Figure 8.2, le gradient topologique est calculé avec 4 flux,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  et  $\varphi_4$ . Dans la Figure 8.4, le gradient topologique est calculé à l'aide de trois flux,  $\varphi_1, \varphi_2$  et  $\varphi_3$ . Nous observons d'après les exemples numériques que la région où le gradient topologique est le plus négatif est localisée près de l'inclusion.

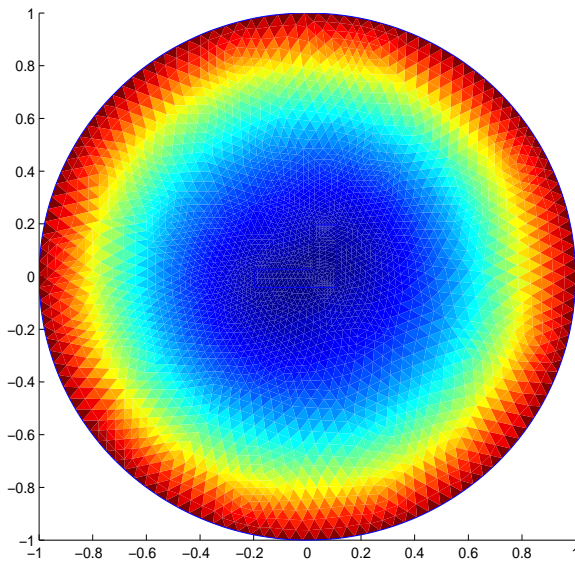


FIGURE 8.2 – Le gradient topologique par rapport aux flux  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  et  $\varphi_4$ .

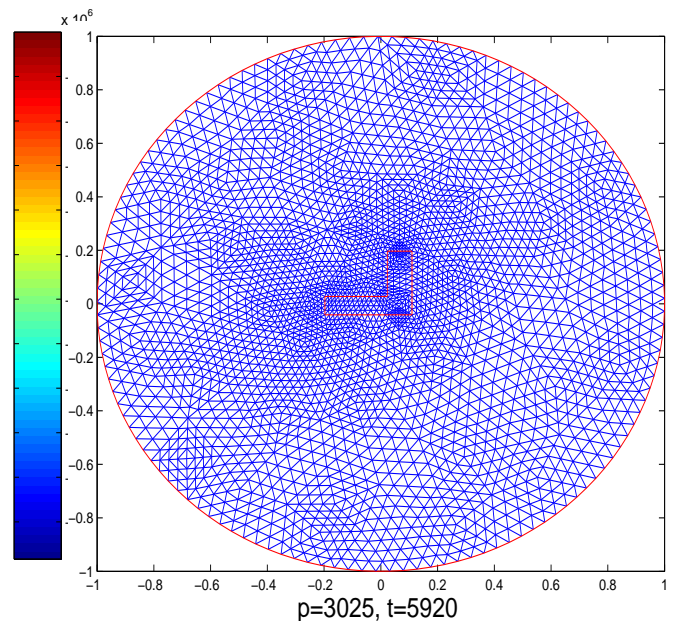


FIGURE 8.3 – Discrétisation du domaine

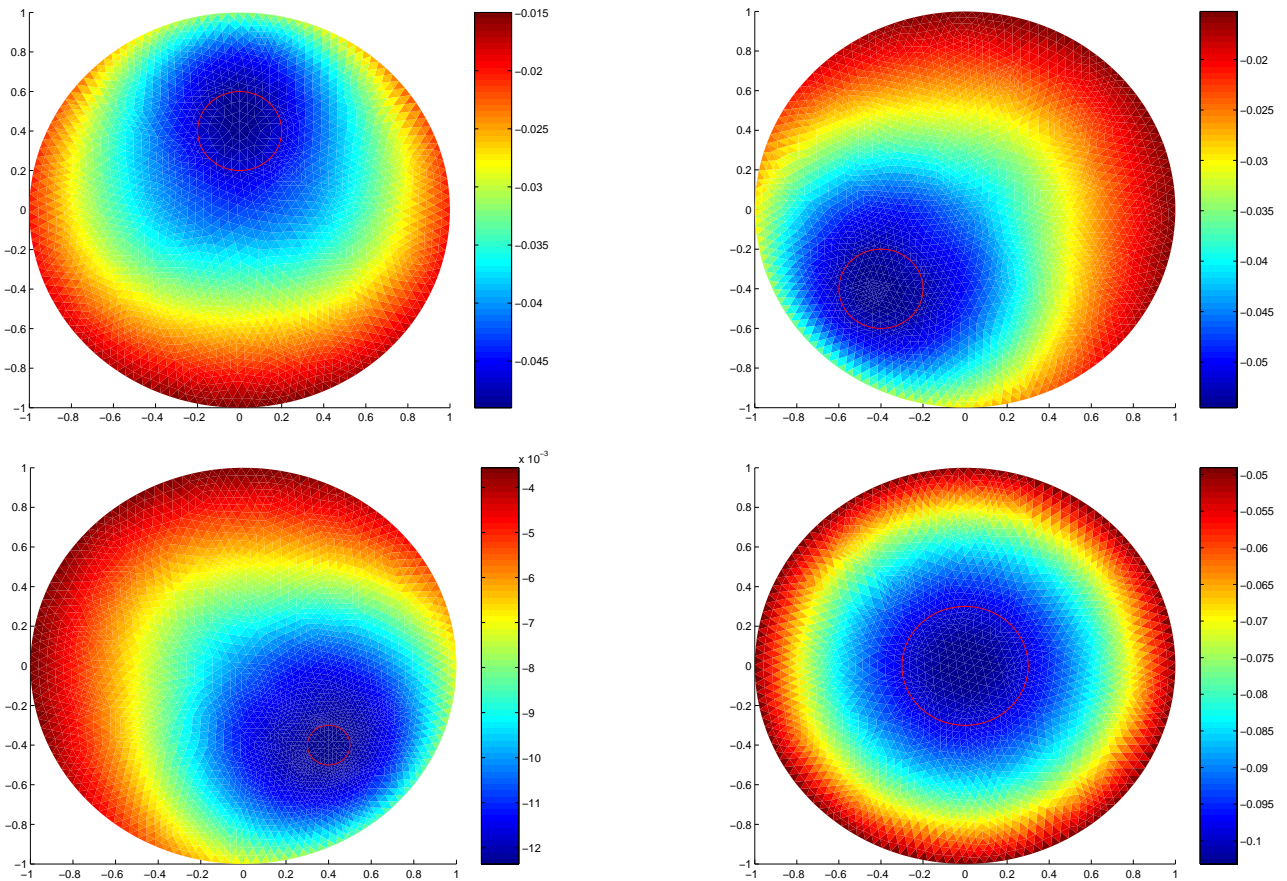


FIGURE 8.4 – Le gradient topologique par rapport aux flux  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ .

### Cas des inclusions multiples :

Dans les exemples numériques suivants, nous utilisons différents flux sur le bord  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ . Les Figures 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.10 et 8.12 représentent la superposition des isovalues du gradient topologique avec les inclusions. Dans la Figure 8.5, le gradient topologique est calculé en utilisant le flux  $\varphi_4$ . Dans les Figures 8.6, 8.8 et 8.12 le gradient topologique est calculé en utilisant les deux flux  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Le gradient topologique représenté dans les Figures 8.7 et 8.10 est calculé à l'aide de trois flux,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ . Les Figures 8.9 et 8.11 représentent les valeurs du gradient topologique.

Nous observons que le gradient topologique a une grande capacité de localiser des inclusions multiple à partir des mesures aux bord. En plus, il ne dépend pas du nombre d'inclusions à l'intérieur de  $\Omega$ .

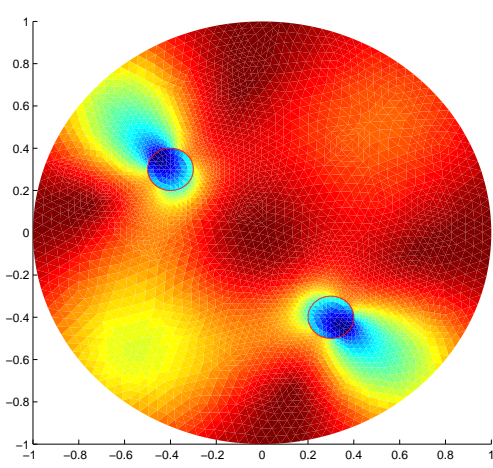


FIGURE 8.5 – Le gradient topologique par rapport au flux  $\varphi_4$

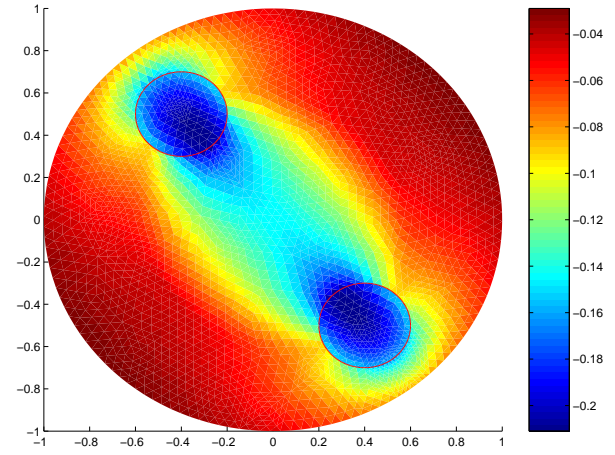


FIGURE 8.6 – Le gradient topologique par rapport aux flux  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

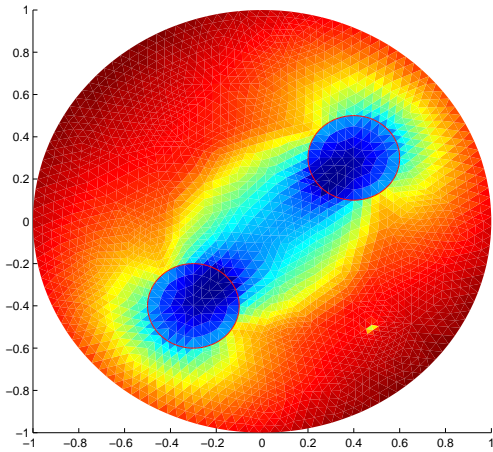


FIGURE 8.7 – Le gradient topologique par rapport aux flux  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ .

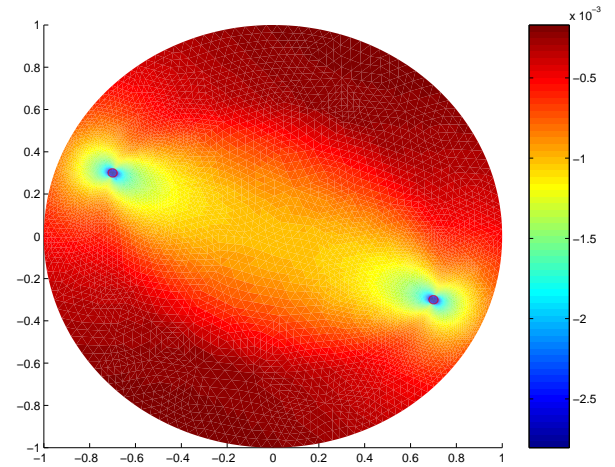


FIGURE 8.8 – Le gradient topologique par rapport aux flux  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$



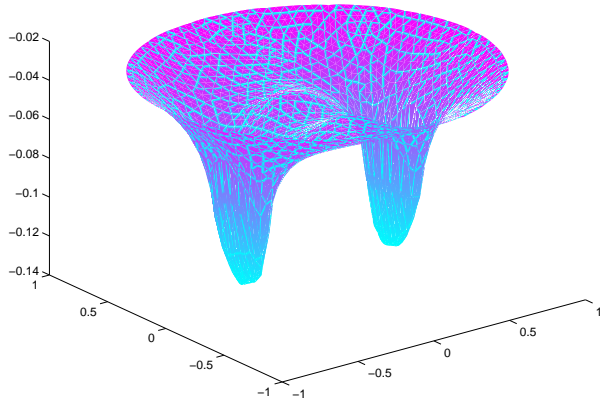


FIGURE 8.9 – Les valeurs du gradient topologique

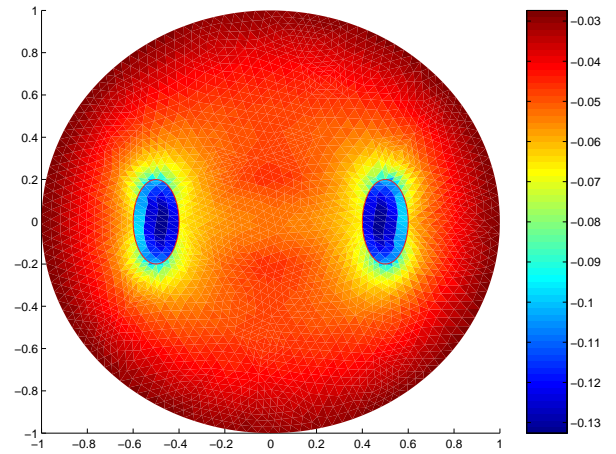


FIGURE 8.10 – Le gradient topologique par rapport aux flux  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ .

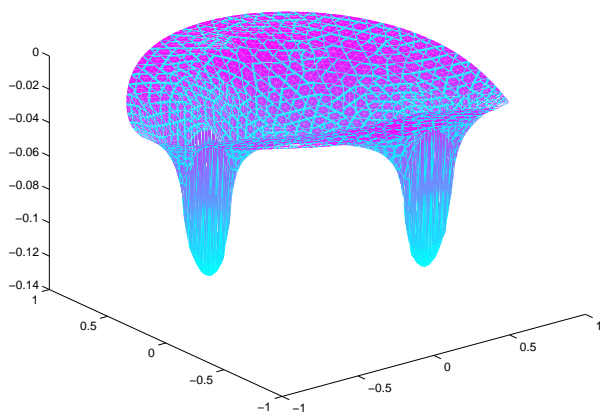


FIGURE 8.11 – Les valeurs du gradient topologique

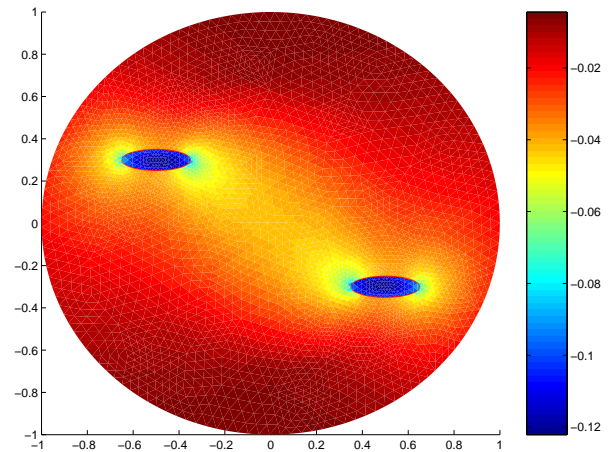


FIGURE 8.12 – Le gradient topologique par rapport aux flux  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

## 8.4 IDENTIFICATION AVEC LA MÉTHODE DU GRADIENT DE FORME

Dans ce paragraphe, nous transformons le problème inverse en un problème d'optimisation de forme par la construction d'une fonction coût de type Kohn-Vogelius :

$$J_{KV}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla(u_N - u_D)|^2, \quad (8.36)$$

où  $\alpha$  est la conductivité du matériau,  $u_N$  désigne la solution du problème de Neumann (8.24) et  $u_D$  est celle de Dirichlet (8.25). Cette fonctionnelle est positive et s'annule si et seulement si  $u_N = u_D$ , c'est le cas d'une inclusion adaptée. La détermination de l'inclusion  $\omega$  consiste à minimiser la fonctionnelle  $J_{KV}$ . Nous considérons donc le problème de minimisation suivant :

$$\omega^* = \operatorname{argmin} J_{KV}(\omega). \quad (8.37)$$

Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 8.4.1** *Si  $\omega^*$  est une solution du problème inverse (8.5) associé aux données  $(f, \varphi)$ , alors  $\omega^*$  est l'unique minimum pour  $J_{KV}$  :*

$$J_{KV}(\omega^*) \leq J_{KV}(\omega) \quad \forall \omega \subset \Omega_{\delta}.$$

**Preuve :** Si  $\omega^*$  est solution du problème inverse (8.5), alors  $u_N(\omega^*) = u_D(\omega^*)$  et  $\omega^*$  est un minimum pour  $J_{KV}$  avec  $J_{KV}(\omega^*) = 0$ .

Soit  $\omega$  un autre minimum de  $J_{KV}$ , alors  $u_N(\omega)$  vérifie le problème (8.1) avec  $u_N(\omega)|_{\Gamma} = f$ . D'après le résultat d'unicité [66, Corollary 3.2], nous obtenons  $\omega = \omega^*$ .  $\square$

En se référant à [3], nous avons le résultat suivant :

**Lemme 8.4.2** [3] *Soit  $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  telle que  $\operatorname{supp}(V) \subset \Omega_{\delta}$ . Alors, la fonctionnelle de Kohn-Vogelius  $J_{KV}$  est différentiable par rapport à  $\omega$  et sa dérivée de forme dans la direction  $V$  est donnée par :*

$$dJ_{KV}(\omega; V) = \frac{[\alpha]}{2} \int_{\partial\omega} \left[ \frac{\alpha_i}{\alpha_e} ((\partial_n u_N^-)^2 - (\partial_n u_D^-)^2) + |\nabla_{\tau} u_N|^2 - |\nabla_{\tau} u_D|^2 \right] V \cdot n, \quad (8.38)$$

où  $[\alpha] = \alpha_e - \alpha_i$  est le saut de la conductivité,  $n$  désigne la normale unitaire sortante à  $\partial\omega$ ,  $\partial_n$  est la dérivée normale,  $\nabla_{\tau}$  est la dérivée tangentielle et  $\partial_n u^-$  est la limite de  $\langle \nabla u(x - tn(x)), n(x) \rangle$  quand  $t$  tend vers  $0^+$ .

Une propriété remarquable de cette fonctionnelle c'est que son gradient ne dépend pas de la dérivée de forme des états  $u_N$  et  $u_D$ . D'un point de vue numérique, cela signifie que l'état adjoint n'intervient pas dans l'évaluation du gradient.

On suppose dans la suite que  $\omega$  est un disque de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $r$ . On désigne par  $J_N$  la fonction définie par

$$J_N = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u_N|^2 dx. \quad (8.39)$$

Nous avons la proposition suivante

**Proposition 8.4.3** *la dérivée de la fonction  $J_N$  par rapport au rayon et celle de  $J_{KV}$  par rapport au centre sont données par :*

$$J'_N(r) = \frac{[\alpha]}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\alpha_i}{\alpha_e} (\partial_n u_N)^2 + |\nabla_\tau u_N(\theta)|^2 \right] d\theta, \quad (8.40)$$

$$\partial_{x_0} J_{KV} = \frac{[\alpha]}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\alpha_i}{\alpha_e} ((\partial_n u_N^-(\theta))^2 - (\partial_n u_D^-(\theta))^2) + |\nabla_\tau u_N(\theta)|^2 - |\nabla_\tau u_D(\theta)|^2 \right] n_{x_0} d\theta, \quad (8.41)$$

$$\partial_{y_0} J_{KV} = \frac{[\alpha]}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\alpha_i}{\alpha_e} ((\partial_n u_N^-(\theta))^2 - (\partial_n u_D^-(\theta))^2) + |\nabla_\tau u_N(\theta)|^2 - |\nabla_\tau u_D(\theta)|^2 \right] n_{y_0} d\theta, \quad (8.42)$$

où  $n_{x_0}$  et  $n_{y_0}$  sont les composantes de la normale sortante à  $\partial\omega$  au point  $(x_0, y_0)$ .

**Preuve :** Si le centre  $(x_0, y_0)$ , est fixe et le rayon bouge, la perturbation est la suivante : Si  $X \in \partial\omega$ , on a en coordonnées polaire

$$X = (x_0 + r \cos(\theta), y_0 + r \sin(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Nous considérons donc la transformation

$$T_t(X) = X + tV(X) = (x_0 + (r+t) \cos(\theta), y_0 + (r+t) \sin(\theta)),$$

où  $t$  est un nombre réel suffisamment petit, tel que  $T_t(\omega) \subset \Omega_\delta$ . Ainsi, nous considérons des transformation de la forme

$$T'_t(X) = V(X) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

La normal unitaire sortante à  $\partial\omega$  est définie par  $n = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Par conséquent  $V \cdot n = 1$ .

Si on suppose que le centre  $(x_0, y_0)$  varie, alors, sa perturbation engendre un mouvement de translation du domaine  $\omega = \omega_{(x_0, y_0)}$ . Donc, le domaine transformé s'écrit  $\omega_t = \omega_{(x_0, y_0) + t(a, b)}$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On peut alors construire un champ de vitesse  $V$  tel que (cf. [40]) :

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ dans } \Omega, \\ V = (a, b) \text{ sur } \partial\omega, \\ V = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.43)$$

Sur  $\partial\omega$ , on a :

$$\begin{cases} X = (x_0 + r \cos(\theta), y_0 + r \sin(\theta)), \\ V = (a, b), \\ n = (\cos(\theta), \sin(\theta)). \end{cases} \quad (8.44)$$

Nous obtenons donc,

$$V \cdot n = a \cos(\theta) + b \sin(\theta).$$

On prend  $(a, b) = (1, 0)$  pour la dérivée par rapport a  $x_0$  et  $(a, b) = (0, 1)$  pour la dérivée par rapport à  $y_0$ . En utilisant l'équation (8.38), nous déduisons la preuve de la proposition.  $\square$

### 8.4.1 Propriétés de la fonctionnelle d'énergie $J_N$

Dans cette partie, nous établissons des propriétés de monotonie et de convexité de l'énergie  $J_N$  par rapport à la conductivité  $\alpha$  et de monotonie par rapport au rayon de l'inclusion  $\omega$ .

Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 8.4.4** *La fonction  $J_N$  est convexe monotone par rapport à la conductivité  $\alpha$  et monotone par rapport au rayon  $r$  de  $\omega$ .*

Pour prouver le Théorème 8.4.4, nous commençons par établir la différentiabilité de l'état  $u_\alpha$  solution du problème 8.1.

**Lemme 8.4.5** *Soit  $\alpha$  dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$  et  $h \in L^\infty(\Omega)$  suffisamment petit telle que  $\alpha + h$  reste dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$ , alors l'application  $\zeta : \alpha \mapsto u_\alpha$ , avec  $u_\alpha$  solution du problème (8.1), est Fréchet différentiable au point  $\alpha$ . De plus,  $\delta u = D\zeta(\alpha)h$  est l'unique solution de l'équation variationnelle suivante :*

$$a_\alpha(\delta u, v) = -a_h(u_\alpha, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (8.45)$$

**Preuve :** Soit  $\alpha \in \mathcal{P}_{ab}$ , alors la forme bilinéaire  $a_\alpha$  est coercive et continue sur  $\mathcal{V}$ . Il existe donc un nombre réel  $\alpha_1$  strictement positif tel que :

$$a_\alpha(u, u) \geq \alpha_1 \|u\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \alpha \in \mathcal{P}_{ad} \quad (8.46)$$

$$a_\alpha(u, v) \leq \|\alpha\|_\infty \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}, \alpha \in \mathcal{P}_{ad}. \quad (8.47)$$

Nous commençons par examiner la continuité de  $\zeta$ . Pour tout  $\alpha \in \mathcal{P}_{ad}$ ,  $u = u_\alpha$  satisfait  $\|u\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha_1^{-1} \|l\|_{\mathcal{V}^*}$ . C'est une estimation standard des problèmes variationnels elliptiques. Si  $v = u_\beta$ , alors  $a_\alpha(u, w) = l(w) = a_\beta(v, w)$  pour tout  $w \in \mathcal{P}_{ad}$ . Quelques manipulation donne  $a_\alpha(u - v, u - v) = -a_{\alpha-\beta}(v, u - v)$ . En utilisant les inéquations (8.46) et (8.47) nous obtenons :

$$\alpha_1 \|u - v\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \|\alpha - \beta\|_\infty \|v\|_{\mathcal{V}} \|u - v\|_{\mathcal{V}},$$

et donc

$$\|u - v\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{\alpha_1} \|v\|_{\mathcal{V}} \|\alpha - \beta\|_\infty.$$

En échangeant les rôles de  $\alpha$  et  $\beta$ , nous trouvons :

$$\|u_\alpha - u_\beta\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{\alpha_1} \min \left\{ \|u_\alpha\|_{\mathcal{V}}, \|u_\beta\|_{\mathcal{V}}, \alpha_1^{-1} \|l\|_{\mathcal{V}^*} \right\} \|\alpha - \beta\|_\infty, \quad (8.48)$$

ce qui prouve la continuité de  $\zeta$ .

Nous prouvons dans la suite que  $\zeta$  est différentiable. Si  $\alpha \in \mathcal{P}_{ad}$ , alors pour  $h$  suffisamment petit,  $\alpha + h \in \mathcal{P}_{ad}$  et  $u_{\alpha+h} - u_\alpha$  est bien défini. Par définition, si  $u = u_\alpha$ , alors on a :

$$\begin{aligned} a_\alpha(u, v) &= l(v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}, \\ a_{\alpha+h}(u_{\alpha+h}, v) &= l(v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Soustrayons la première équation de la seconde et simplifions, nous retrouvons

$$a_{\alpha+h}(u_{\alpha+h} - u_\alpha, v) = -a_h(u_\alpha, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \quad (8.49)$$

Soit  $\delta u \in \mathcal{V}$  la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{V} \text{ telle que :} \\ a_\alpha(\delta u, v) = -a_h(u_\alpha, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (8.50)$$

Soustrayons (8.50) de (8.49), on obtient

$$a_\alpha(u_{\alpha+h} - u_\alpha - \delta u, v) = -a_h(u_{\alpha+h} - u_\alpha, v), \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

Choisissons  $v = u_{\alpha+h} - u_\alpha - \delta u$ , nous obtenons

$$a_\alpha(u_{\alpha+h} - u_\alpha - \delta u, u_{\alpha+h} - u_\alpha - \delta u) = -a_h(u_{\alpha+h} - u_\alpha, u_{\alpha+h} - u_\alpha - \delta u).$$

En utilisant (8.46) et (8.47), nous obtenons :

$$\|u_{\alpha+h} - u_\alpha - \delta u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{\alpha_1} \|h\|_\infty \|u_{\alpha+h} - u_\alpha\|_{\mathcal{V}}.$$

La continuité de  $\zeta$  implique que

$$\|u_{\alpha+h} - u_\alpha - \delta u\|_{\mathcal{V}} \leq C \|h\|_\infty^2. \quad (8.51)$$

Il reste à montrer que  $\|\delta u\|_{\mathcal{V}}$  est bornée. Utilisons l'équation  $a_\alpha(\delta u, v) = -a_h(u_\alpha, v)$  pour tout  $v \in \mathcal{V}$  et choisissons  $v = \delta u$ , nous retrouvons  $a_\alpha(\delta u, \delta u) = -a_h(u_\alpha, \delta u)$ . D'après (8.46) et (8.47), nous avons

$$\|\delta u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{\alpha_1} \|u_\alpha\|_{\mathcal{V}} \|h\|_\infty. \quad (8.52)$$

Donc  $\zeta$  est différentiable au point  $\alpha$  et  $Du_\alpha h = \delta u$ .  $\square$

**Preuve du Théorème 8.4.4 :** Soit  $h \in L^\infty(\Omega)$  suffisamment petit telle que  $\alpha + h$  reste dans l'intérieur de  $\mathcal{P}_{ad}$ . Puisque l'état  $u_N$  est différentiable par rapport au paramètre  $\alpha$ ,  $J_N$  est aussi différentiable. En utilisant les notations précédente, on peut écrire

$$J_N(\alpha) = a_\alpha(u_N, u_N).$$

La dérivée de  $J_N$  est donnée par la règle de la chaîne :

$$DJ_N(\alpha)h = a_h(u_N, u_N) + 2a_\alpha(Du_N h, u_N).$$

A partir de l'équation (8.45), nous obtenons

$$a_\alpha(Du_N h, u_N) = -a_h(u_N, u_N), \quad (8.53)$$

et par conséquent

$$DJ_N(\alpha)h = -a_h(u_N, u_N).$$



D'après l'équation précédente,  $J_N$  est deux fois différentiable au point  $\alpha$  et on a

$$\begin{aligned} D^2 J_N(\alpha)(h, h) &= -a_h(Du_N h, u_N) - a_h(u_N, Du_N h) \\ &= -2a_h(u_N, Du_N h) = 2a_\alpha(Du_N h, Du_N h) \\ &\geq 2\alpha_1 \|Du_N h\|_{\mathcal{V}}^2. \end{aligned}$$

Ainsi  $J_N$  est convexe par rapport à  $\alpha$ . □

**Corollaire 8.4.6** *Soit  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$  telle que  $0 < \alpha_0 \leq \alpha_e \leq \alpha_1$ . Alors la fonction*

$$\begin{aligned} \Lambda : [\alpha_0, \alpha_1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto J_N(\alpha_e + (\alpha - \alpha_e)\chi_\omega) \end{aligned}$$

*est un lipéomorphisme (i.e,  $\Lambda$  est lipschitzienne injective et  $\Lambda^{-1}$  est lipschitzienne) strictement convexe de  $[\alpha_0, \alpha_1]$  dans  $[J_N(\alpha_1), J_N(\alpha_0)]$ , de plus on a l'estimation suivante :*

$$|\alpha - \alpha'| \int_{\omega} |\nabla u_{\alpha_1}|^2 \leq |\Lambda(\alpha) - \Lambda(\alpha')| \leq |\alpha - \alpha'| \int_{\omega} |\nabla u_{\alpha_0}|^2, \quad \forall \alpha, \alpha' \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad (8.54)$$

*et la méthode de Newton appliqué à la résolution de l'équation non linéaire*

$$\Lambda(\alpha_i) - \int_{\Gamma} \varphi f = 0, \quad (8.55)$$

*converge globalement pour tout  $\alpha \in [\alpha_0, \bar{\alpha}_i]$ , où  $\bar{\alpha}_i$  est la solution de l'équation (8.55).*

**Preuve :** Il est claire que la fonction  $\Lambda$  est deux fois Fréchet-différentiable sur  $[\alpha_0, \alpha_1]$  et vérifie pour  $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$  :

$$\Lambda'(\alpha) = - \int_{\omega} |\nabla u_N(\alpha)|^2, \quad \Lambda''(\alpha) = 2 \int_{\omega} \alpha |\nabla(Du_N(\alpha)\chi_\omega)|^2.$$

par conséquent

$$\begin{cases} 2\alpha_0 \int_{\omega} |\nabla(Du_N(\alpha)\chi_\omega)|^2 \leq \Lambda''(\alpha) \leq 2\alpha_1 \int_{\omega} |\nabla(Du_N(\alpha)\chi_\omega)|^2 \\ - \int_{\omega} |\nabla u_N(\alpha_0)|^2 \leq \Lambda'(\alpha) \leq - \int_{\omega} |\nabla u_N(\alpha_1)|^2. \end{cases} \quad (8.56)$$

Si  $\Lambda''(\alpha) = 0$ , alors  $Du_N(\alpha) = 0$  sur  $\omega$ . Ainsi  $u_N$  est constante sur  $\omega$  et par continuité  $u_N$  est constante sur  $\Omega$ . Ce qui est en contradiction avec le fait que le flux  $\varphi \neq 0$ . Donc  $\Lambda$  est un lipéomorphisme strictement convexe de  $[\alpha_0, \alpha_1]$  dans  $[J_N(\alpha_1), J_N(\alpha_0)]$ . L'estimation (8.54) est une conséquence directe de (8.56). La Monotonocité de la fonction  $J_N$  par rapport au rayon découle de l'équation (8.40). □

Les résultats numériques suivants (cf. Figures 8.13 et 8.14), montrent la monotonicité et la convexité de l'énergie de Neumann  $J_N$  et l'identification de  $\alpha_i$  par la méthode de Newton lorsque  $\alpha_e$  est supposé connue.

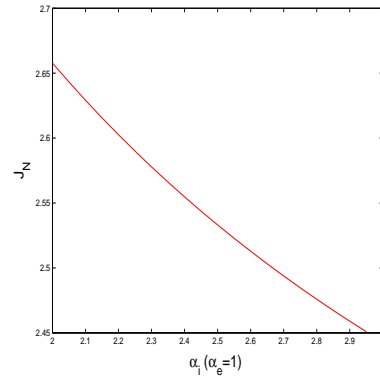
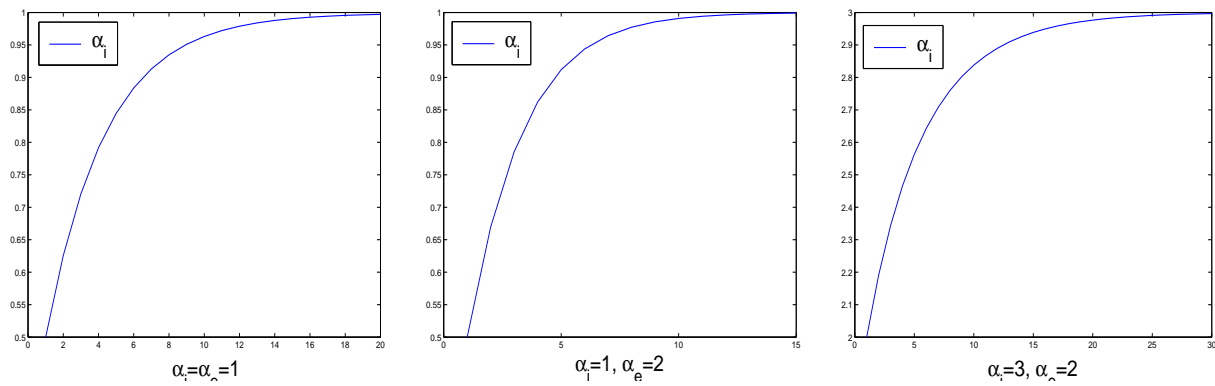
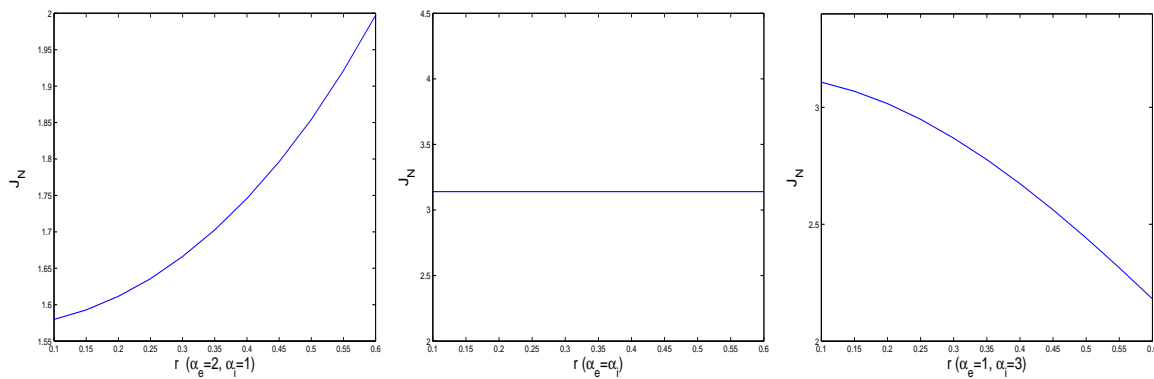
FIGURE 8.13 – Monotoncité et convexité de l'énergie  $J_N$  par rapport à  $\alpha$ 

FIGURE 8.14 – Reconstruction de la conductivité par la méthode de Newton.

On a également la propriété de monotoncité (cf. Figure 8.15) de la fonction  $J_N$  par rapport au rayon d'une inclusion circulaire dans le cas où son centre est connu.

FIGURE 8.15 – Monotoncité de l'énergie Neumann  $J_N$  par rapport au rayon.

### 8.4.2 Implémentation numérique

Dans ce paragraphe, nous présentons un algorithme numérique permettant la détermination complète de l'inclusion  $\omega$ , en utilisant une localisation initialement fournie par la méthode du gradient topologique.

D'après l'équation (8.4.2), la fonction  $J_N$  est monotone par rapport à la forme  $\omega$ . Si le centre de  $\omega$  est fixé, On peut se servir de la monotonie de  $J_N$ , en appliquant la méthode de Newton à la fonction  $J_{NE} = J_N - J_E$ , où

$$J_N = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_N|^2, \quad J_E = \int_{\Gamma} \varphi f ds, \quad (8.57)$$

pour déterminer le rayon  $r$  de l'inclusion  $\omega$ . Si le rayon est fixe et seule le centre de  $\omega$  vari, on applique la méthode du gradient à la fonctionnelle de Kohn-Vogelius  $J_{KV}$ , pour déterminer numériquement le centre  $(x_0, y_0)$  de  $\omega$ . L'algorithme peut être résumé comme suit :

1. Choisir une forme initial  $\omega_0 = \omega_{r_0, x_0, y_0}$ .
2. Calculer numériquement les solutions  $u_N$  et  $u_D$ , ensuite évaluer les directions de descentes (8.40), (8.41) et (8.42).
3. Mise à jour du rayon  $r_{k+1} = r_k - \frac{J_{NE}(r_k)}{DJ_{NE}(r_k; V)}$ .
4. Mise à jour du centre  $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) - DJ((x_k, y_k); V)$ .
5. Arrêt si  $dJ_{KV} < \epsilon$  : ( $\epsilon$  est la tolérance).

### 8.4.3 Exemples numériques

Soit  $\Omega$  le disque unité et  $\omega$  est l'inclusion recherché à l'intérieur de  $\Omega$ . Le flux est imposé sur le bord  $\Gamma$  par la condition au limite  $\varphi = x_1$  la première composante de  $x$ . Pour les exemples numériques avec rajout de bruit, nous perturbons les données exact  $f$  en utilisant la fonction random de Matlab :

$$f_p = f + \tau \beta \|f\|_{\infty}, \quad \tau \text{ est le niveau de bruit et } \beta \text{ est un vecteur aléatoire.}$$

Dans les figures qui suivent, nous désignons par :

- $\omega_i$  : l'inclusion d'initialisation,
- $\omega_e$  : l'inclusion exacte ,
- $\omega_a$  : l'inclusion approché.

Dans la Figure (8.16), nous présentons l'identification du rayon par la méthode de Newton dans le cas d'une inclusion circulaire de centre connue. Les Figures 8.17 8.18, 8.19, 8.20 et 8.21, présentent des résultats numérique obtenus avec différents niveaux de bruit : 0%, 1%, 5%, 7% et 10%. nous considérons comme initialisation du centre, le point où le gradient topologique est le plus négatif. la conductivité est  $\alpha_e = 1$  et  $\alpha_i = 0.0001$ .

Ces résultats indiquent que l'ajout d'un bruit modéré au données n'affecte pas la reconstruction de l'inclusion  $\omega$ .

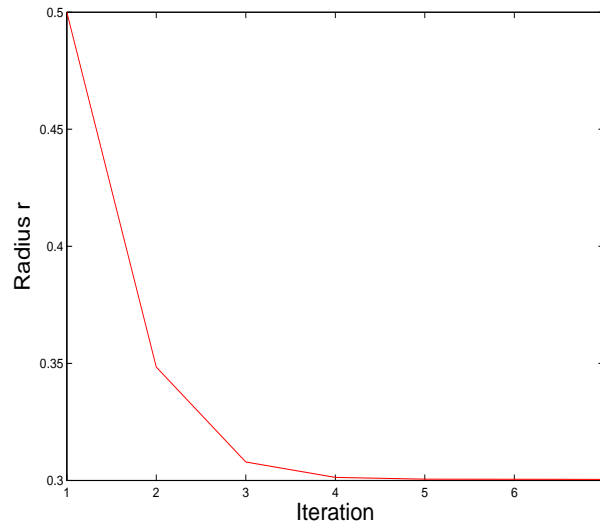


FIGURE 8.16 – Reconstruction du rayon par la méthode de Newton.

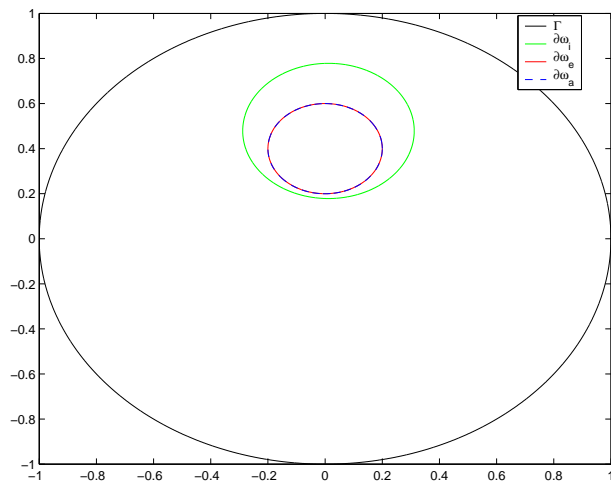


FIGURE 8.17 – Reconstruction avec des données non bruitées.

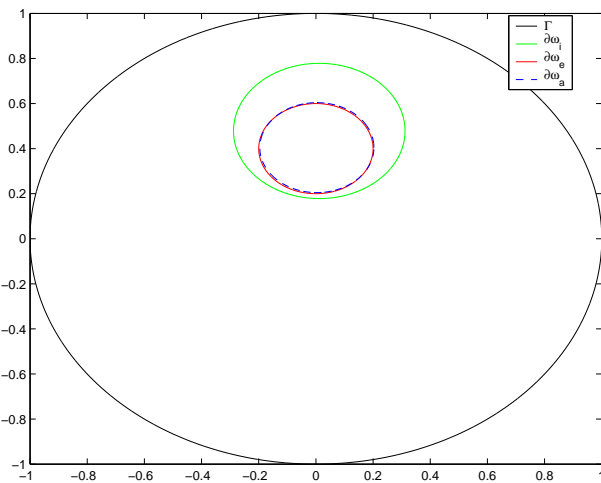


FIGURE 8.18 – Reconstruction avec 1% de bruit.

Les résultats numériques présentés dans les Figures 8.22, 8.23, 8.24 et 8.25, sont obtenus, sans faire appel à la localisation par la méthode du gradient topologique. Nous avons considéré la conductivité  $\alpha$  telle que  $\alpha_e = 1$  et  $\alpha_i = 2$

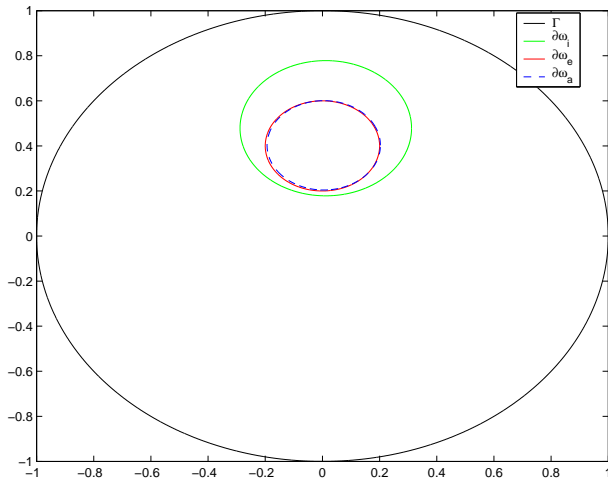


FIGURE 8.19 – Reconstruction avec 5% de bruit.

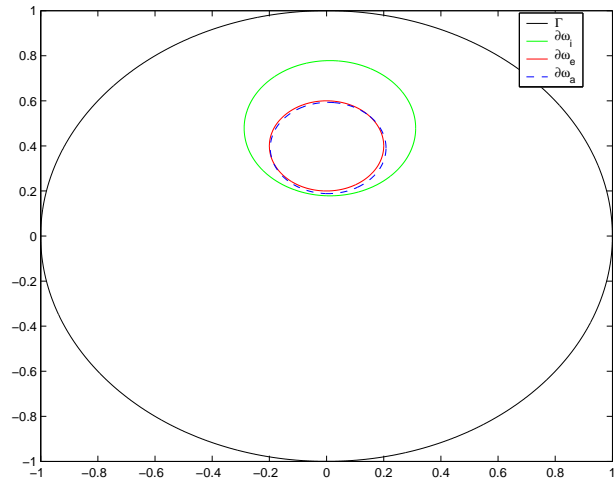


FIGURE 8.20 – Reconstruction avec 7% de bruit.

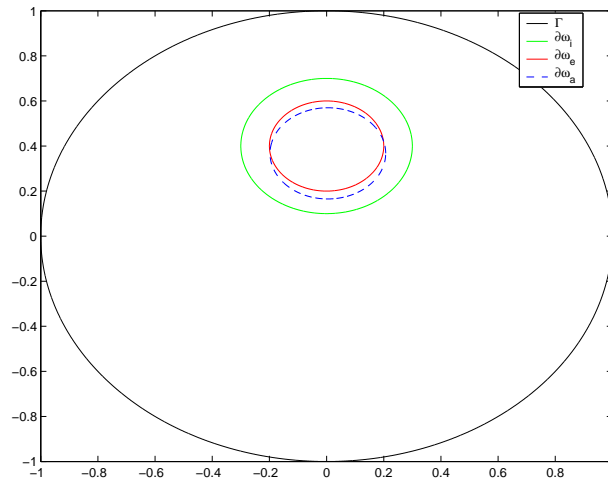


FIGURE 8.21 – Reconstruction avec 10% de bruit.

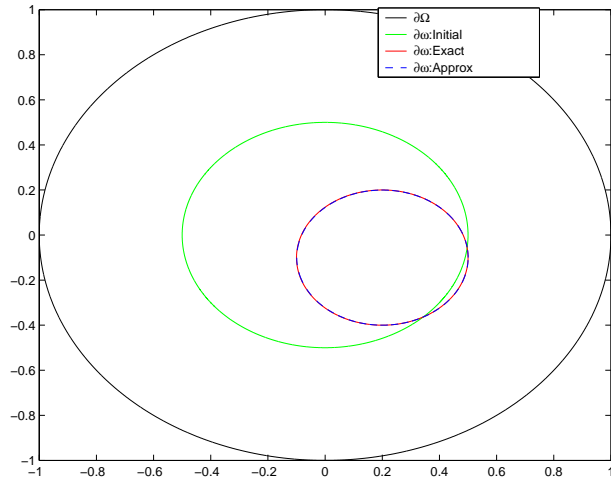


FIGURE 8.22 – Reconstruction avec des données non bruitées.

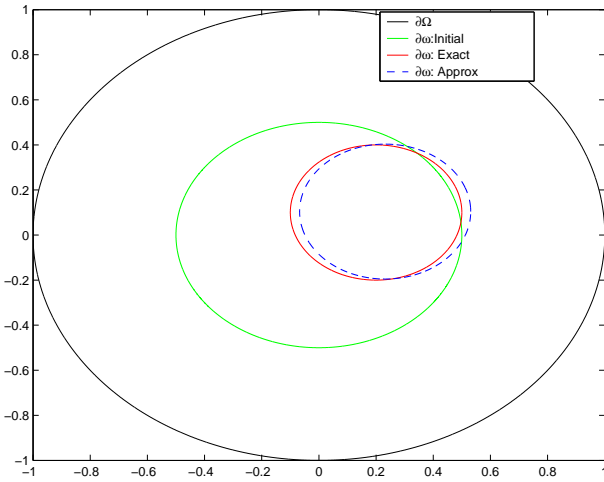


FIGURE 8.23 – Reconstruction avec 5% de bruit.

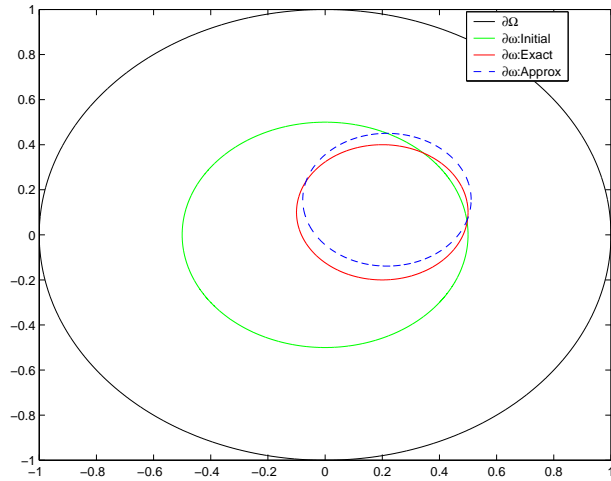


FIGURE 8.24 – Reconstruction avec 10% de bruit.

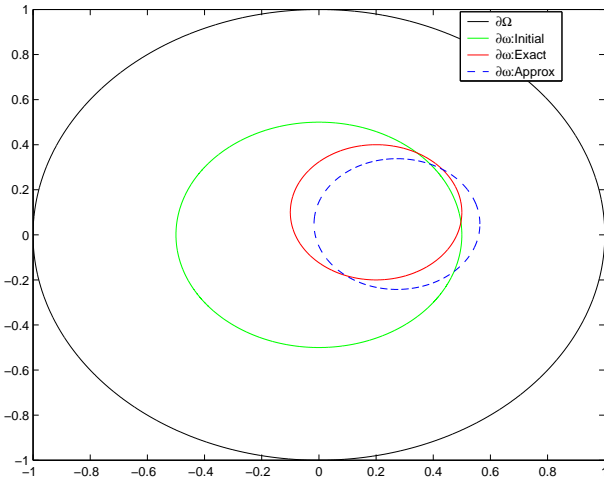


FIGURE 8.25 – Reconstruction avec 15% de bruit.

Nous présentons dans le Tableau 8.1, l'approximation numérique du centre et du rayon de l'inclusion  $\omega$  relativement aux cas illustrés dans les Figures 8.22-8.25. Nous présentons également l'erreur en norme  $\|\cdot\|_2$ . L'inclusion exacte à retrouver est le disque de centre  $(0.2, 0.1)$  et de rayon 0.3.

	x-centre	y-centre	Rayon	Erreur en norme $\ \cdot\ _2$
Figure 8.22	0.2007	0.1006	0.2993	0.0011
Figure 8.23	0.2317	0.1040	0.2992	0.0320
Figure 8.24	0.2163	0.1558	0.2945	0.0584
Figure 8.25	0.2730	0.0478	0.2900	0.0902

TABLE 8.1 – Tableau de convergence du centre et du rayon

### 8.4.4 Complément sur la résolution numérique des fonctions d'états $u_N$ et $u_D$

La discrétisation du problème de Neumann (8.1) relativement à une base de fonctions  $\Phi_j, j = 1, \dots, n$ , revient à résoudre le système linéaire  $KU = F$  :

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

où

$$K_{i,j} = \int_{\Omega} \alpha \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_i, \text{ et } F_i = \int_{\Gamma} \varphi \Phi_i.$$

Pour tenir compte de la condition de normalisation

$$\int_{\Gamma} u ds = 0,$$

nous imposons une valeur de la solution  $u$  du problème (8.1), par exemple en prend sa  $n$ -ème composante  $u_n = \beta$ . Le système de discrétisation devient

$$\sum_{j=1}^n k_{i,j} u_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Ce qui donne

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_{i,j} u_j = f_i - k_{i,n} u_n = f_i - k_{i,n} \beta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le système linéaire

$$\begin{cases} u_n = \beta, \\ KU = F \end{cases}$$

est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n-1,1} & \dots & k_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} k_{1,n} \\ \vdots \\ k_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

La solution finale  $u_N$  à moyenne nulle est alors donnée par :

$$u_N = u - \frac{1}{\text{mes}(\Gamma)} \int_{\Gamma} u ds.$$

Concernant la résolution numérique du problème de Dirichlet (8.25), les données  $f$  sont synthétiques : c'est à dire, on résout le problème de Neumann avec l'inclusion  $\omega = \omega^*$ , recherché ensuite on détermine  $f$  par la formule  $u|_{\Gamma} = f$ . Nous utilisons ces données en partant d'une initialisation  $\omega_i$  quelconque et en appliquant notre algorithme, pour déterminer l'inclusion  $\omega^*$ .

Il y a différentes méthodes numériques de résolution du problème (8.25). La seule difficulté concerne les conditions aux limites  $u = f$  sur le bord  $\Gamma$  du domaine. Pour tenir compte de ces conditions dans les calculs numériques de la solution, il y a plusieurs méthodes, on citera la méthode de pénalisation qui consiste à résoudre le système linéaire  $Au = b$  provenant de la discrétisation, sans second membre, puis on ajoute le second membre, en modifiant la matrice  $A$  et le vecteur  $b$ . Cette méthode est décrite dans le chapitre 6 (cf. 6.5.1). Il y a également la méthode lagrangienne, c'est la plus élégante car elle consiste à relaxer les conditions aux limites et introduire une nouvelle variable.

**Remarque 8.4.7** *Notons qu'on peut utiliser la méthode des éléments frontière (BEM) pour résoudre les problèmes directs. Cette méthode se présente comme une alternative à la méthode des éléments finis avec la particularité d'être plus intéressante en dimension 3. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [74].*



---

# Identification of inclusion in linear elasticity by shape optimization

---

In this chapter, we are concerned with the shape sensitivity analysis, of transmission problem in linear elasticity. We establish the Eulerian derivative with respect to the shape of a variable domain for a cost functional by using the minmax framework combining with function space parametrization and the function space embedding. We apply a gradient type algorithm to solve an inverse problem related to the identification of an inclusion. Finally numerical examples are shown.

*Ce chapitre fait l'objet d'un article en préparation, en collaboration avec J-P. Zolésio.*

## 9.1 INTRODUCTION

Shape optimization is quite indispensable in the design and construction of industrial structure. The shape optimisation problem for such structure consists in finding a geometry of the structure which minimizes a given functional. In such problem the sensitivity analysis plays a central role in the differentiability of the cost function with respect to shape of the geometric domain on which the partial differential equation is defined. For more information about shape sensitivity analysis, we refer the reader to [51, 52, 87, 98]. In this work, we express the shape optimization problem as a min max of suitable Lagrangian functional which depend on the domain  $\Omega$ . Under the action of velocity field  $V$ , the deformations domain  $\Omega_t, t \geq 0$  of the reference domain  $\Omega$  are obtained by the speed method (see[51, 52]). The shape sensitivity analysis reduces to the study of differentiability of a min max functional with respect to the parameter  $t$ .

This chapter devoted to the following problem, already seen in section 7.4.3.

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^d, d = 2, 3$  with  $C^2$  boundary  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  where the Dirichlet homogeneous boundary condition are imposed on  $\Gamma_2$  and Neumann boundary condition on  $\Gamma_1$  and let  $\omega$  be unknown subdomain contained in  $\Omega$  with  $C^2$  boundary  $\partial\omega$ . From a physical point of view, we assume that  $\Omega$  is a linear isotropic inhomogeneous material, of Lamé parameters

$$(\lambda(x), \mu(x)) = \begin{cases} (\lambda_e, \mu_e) & \text{if } x \in \Omega \setminus \bar{\omega} \\ (\lambda_i, \mu_i) & \text{if } x \in \omega. \end{cases}$$

We search to reconstruct the shape of  $\omega$  by boundary measurements. In the sequel we fixe  $\delta_0 > 0$  and we consider an inclusion  $\omega$  such that

$$\omega \subset \Omega_{\delta_0} = \{x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \delta_0\}.$$

where  $\delta_0$  is a positive real number. The linear elasticity problem is the following

$$\operatorname{div}\sigma(u) = 0 \text{ in } \Omega \tag{9.1}$$

$$\sigma(u)n = g \text{ on } \Gamma_1 \tag{9.2}$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_2, \tag{9.3}$$

where  $g \in (L^2(\Gamma_1))^2$ . As in chapter 6, the vector  $u$  denote the displacement and  $\sigma(u)$  is the associated stress tensor, which is related by the linearized strain tensor  $\varepsilon(u)$  via the Hooke's law, (cf. (6.1)). The identification problem can be stated as :

Identify the unknown shape  $\omega$  from a measurement of the displacement  $u$  on  $\Gamma_1$  where  $u$  is the solution of (9.1)-(9.2)-(9.3).

In the sequel, we assume that the displacement

$$u|_{\Gamma_1} = f \tag{9.4}$$

is known. In order to recover the shape of  $\omega$ , an usual strategy is to minimize a cost function. Many choice are possible ; however it turn out that the Kohn-Vogelius type cost function leads to a minimization problem with nicer property than the squares fitting approach. Therefore we study such a cost function in this work. Let us define the cost function. We denote by  $u_n$  the solution of the problem (9.1)-(9.2)-(9.3) and  $u_d$  the solution of the problem (9.1)-(9.4)-(9.3). As in section 7.5.1, we introduce the following cost functional associated to the states  $u_n$  and  $u_d$ ,

$$J(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_n - u_d) : \varepsilon(u_n - u_d) dx. \tag{9.5}$$

Our objective is to minimize the functional  $J$  with respect to  $\omega$ . This type of inverse problem arises in practical situation like the design, the control of optimal industrial structures.

The traditional method involves the shape derivative of the state function  $u_n$  and  $u_d$  to compute the shape derivative of the functional  $J$ . However, the state differentiability is not necessary in many cases, and even if the state is not differentiable.

In order to compute the shape derivative of the cost function  $J$ , we will use the techniques advocated by Delfour and Zolésio [52] : function space parametrization and function space embedding. We apply these two techniques coupling with the min max differentiability and we give a gradient type algorithm with some numerical examples.

In section 2, we consider the saddle point formulation of the problems (9.1)-(9.2)-(9.3) and (9.1)-(9.4)-(9.3) and the Lagrangian associated with the cost functional (9.5). Section 3 is devoted to the minmax techniques coupling with the function space parametrization. In section 4, we use the function space embedding to solve the shape optimization problem.

Finally in the last section we establish a gradient type algorithm to solve numerically the inverse problem related to the the identification of an inclusion in a particular cases. Numerical examples are shown.

In the sequel, we consider a deformation  $T_t = x + tV(x)$  (cf. Paragraphe 7.1.1) satisfying

$$\operatorname{div}(V) = 0 \text{ in } \Omega, \quad V \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (9.6)$$

where  $n$  denotes the out unit normal vector to the boundary  $\partial\Omega$ . Furthermore it is sufficient to consider a deformation  $T_t$  which change the position of  $\partial\omega$  but does not rotate it. This condition results when we choose a velocity field  $V$  with nul tangential part on  $\partial\omega$ , i.e

$$V|_{\partial\omega} = (V \cdot n)n. \quad (9.7)$$

We denote by  $\omega_t = T_t(\omega)$ . By construction, we have  $T_t(\Omega) = \Omega$ .

## 9.2 MINMAX FORMULATION

We observe from the definition (9.5), that the cost function  $J$  can be rewrite as

$$J(\omega) = J_N(\omega) + J_D(\omega) + J_{ND}(\omega),$$

where

$$J_N(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n) dx. \quad (9.8)$$

$$J_D(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_d) : \varepsilon(u_d) dx. \quad (9.9)$$

and

$$J_{ND}(\omega) = - \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_d) dx. \quad (9.10)$$

By integration by part we show that

$$J_{ND}(\omega) = - \int_{\Gamma_1} g \cdot f ds, \quad (9.11)$$

which is a constant term, so its shape derivative with respect to  $\omega$  vanish. Furthermore

$$dJ(\omega; V) = dJ_N(\omega; V) + dJ_D(\omega; V). \quad (9.12)$$

The solution  $u_n$  of the problem(9.1),(9.2),(9.3) coincides with the minimizing element of the following variational problem

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{V}} E_n(\omega, \varphi) \quad (9.13)$$

where

$$E_n(\omega, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\varphi) dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot \varphi ds$$

and

$$\mathcal{V} := \{ \varphi \in (H^1(\Omega))^d : \varphi|_{\Gamma_1} = 0 \}.$$

Note that  $\mathcal{V}$  is a Hilbert space with respect to the inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{V}} := \int_{\Omega} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\psi) dx = \int_{\Omega} C : \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\psi) dx,$$

we denote by  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  the norm associated to  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ . Similarly, the solution  $\tilde{u}_d = u_d - \tilde{f}$  where  $u_d$  is solution of the problem (9.1),(9.4),(9.3) and  $\tilde{f}$  is the extension of  $f$  such that  $\tilde{f} = 0$  on  $\Omega_{\delta_0}$ , coincides with the following minimizing variational problem

$$\inf_{\varphi \in (H_0^1(\Omega))^d} E_d(\omega, \varphi) \quad (9.14)$$

where

$$E_d(\omega, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\varphi) dx + \int_{\Omega} \sigma(\tilde{f}) : \varepsilon(\varphi).$$

The solutions of the problems (9.13) and (9.14) are respectively characterized by

$$\begin{cases} dE_n(\omega, u_n; \varphi) := \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(\varphi) dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot \varphi ds, \\ dE_n(\omega, u_n; \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (9.15)$$

$$\begin{cases} dE_d(\omega, \tilde{u}_d; \varphi) := \int_{\Omega} \sigma(\tilde{u}_d) : \varepsilon(\varphi) dx + \int_{\Omega} \sigma(\tilde{f}) : \varepsilon(\varphi) dx, \\ dE_d(\omega, \tilde{u}_d; \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in (H_0^1(\Omega))^d. \end{cases} \quad (9.16)$$

which are respectively the variational equations of  $u_n$  and  $\tilde{u}_d$ .

The objective functions  $J_N(\omega)$  and  $J_D(\omega)$  are a shape functionals and the solutions of (9.1)-(9.2)-(9.3) and (9.1)-(9.2)-(9.3) will be called states. It is convenient to introduce the objective function

$$F(\omega, \varphi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\varphi) dx \quad (9.17)$$

So, we can write  $J_N(\omega) = F(\omega, u_n(\omega))$ ,  $J_D(\omega) = F(\omega, u_d(\omega))$ .

We are interested to find an expression of the Eulerian derivative, as defined in (7.5), of the functional  $J(\omega)$  at  $\omega$  in the direction  $V$ .

### 9.2.1 Saddle point formulation

This technique is widespread in the control theory. The variational equation (9.15) respectively (9.16) is considered as a state constraint in the shape minimization problem. We first construct a Lagrangian functionals by introducing a Lagrange multiplier function or the so-called adjoint state  $\psi$  :

$$G_n(\omega, \varphi, \psi) = F(\omega, \varphi) + dE_n(\omega, \varphi; \psi), \quad (9.18)$$

$$G_d(\omega, \varphi, \psi) = F(\omega, \varphi) + L(\omega, \varphi; \psi), \quad (9.19)$$

where

$$L(\omega, \varphi, \psi) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(\varphi))\psi - \int_{\Gamma_1} (\varphi - f)\sigma(\psi)n.$$

Since

$$\sup_{\psi \in \mathcal{V}} G_n(\omega, \varphi, \psi) = \begin{cases} F(\omega, u_n(\omega)) & \text{if } \varphi = u_n(\omega) \\ +\infty & \text{if } \varphi \neq u_n(\omega), \end{cases}$$

$$\sup_{\psi \in (H^1(\Omega))^d} G_d(\omega, \varphi, \psi) = \begin{cases} F(\omega, u_d(\omega)) & \text{if } \varphi = u_d(\omega) \\ +\infty & \text{if } \varphi \neq u_d(\omega), \end{cases}$$

the cost functionals are given by

$$J_N(\omega) = \inf_{\varphi \in \mathcal{V}} \sup_{\psi \in \mathcal{V}} G_n(\omega, \varphi, \psi) \quad (9.20)$$

$$J_D(\omega) = \inf_{\varphi \in (H^1(\Omega))^d} \sup_{\psi \in (H^1(\Omega))^d} G_d(\omega, \varphi, \psi). \quad (9.21)$$

It is easily to show that the functional  $G_n$ , respectively  $G_d$ , is convex continuous with respect to  $\varphi$  and concave continuous with respect to  $\psi$ . Therefore according to Ekeland and Temam (see [56, Prop 1.6, p 157]) the functional  $G_n$  respectively  $G_d$  has a saddle point  $(u_n, p_n)$  respectively  $(u_d, p_d)$  if and only if  $(u_n, p_n), (u_d, p_d)$  solves the following systems

$$\forall \psi \in \mathcal{V}, \quad dE_n(\omega, u_n; \psi) = 0$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{V}, \quad dF(\omega, u_n; \varphi) + d^2 E_n(\omega, u_n; p_n; \varphi) = 0,$$

$$\forall \psi \in (H^1(\Omega))^d, \quad L(\omega, u_d, \psi) = 0$$

$$\forall \varphi \in (H^1(\Omega))^d, \quad dF(\omega, u_d; \varphi) + dL(\omega, u_d, p_d; \varphi) = 0,$$

or equivalently

$$\operatorname{div}(\sigma(u_n)) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \sigma(u_n) = g \text{ on } \Gamma_1, \quad u_n = 0 \text{ on } \Gamma_2. \quad (9.22)$$

$$\operatorname{div}(\sigma(p_n)) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \sigma(p_n) = -g \text{ on } \Gamma_1, \quad p_n = 0 \text{ on } \Gamma_2. \quad (9.23)$$

$$\operatorname{div}(\sigma(u_d)) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u_d = f \text{ on } \Gamma_1, \quad u_d = 0 \text{ on } \Gamma_2. \quad (9.24)$$

$$\operatorname{div}(\sigma(p_d)) = 0 \text{ in } \Omega, \quad p_d = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (9.25)$$

According to the classical theory of elliptic problems (see[59]) each of the problems (9.22)-(9.23)-(9.24)-(9.25) has a unique solution . Moreover  $p_n = -u_n, p_d = 0$  and  $(u_n, p_n)$  respectively  $(u_d, p_d)$  coincides with the unique saddle point of the functional  $G_n$  respectively of the functional  $G_d$ . To compute the shape derivative of the functionals  $J_N$  and  $J_D$ , we can avoid the state derivative by using the minmax framework.

We shall now use the Lagrangian formulation combined with the velocity method to compute the shape derivative of the functionals  $J_N(\omega)$  and  $J_D(\omega)$ .

Given a velocity field  $V$  in  $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  and the parameterized domains  $\omega_t = T_t(\omega), \Omega = T_t(\Omega)$ . Let  $u_n(t)$  respectively  $u_d(t)$  be the solution of (9.22) respectively (9.24) on the transformed domains, and the corresponding costs functionals

$$J_N(\omega_t) = \inf_{\varphi \in \mathcal{V}} \sup_{\psi \in \mathcal{V}} G_n(\omega_t, \varphi, \psi) \quad (9.26)$$

$$J_D(\omega_t) = \inf_{\varphi \in (H^1(\Omega))^d} \sup_{\psi \in (H^1(\Omega))^d} G_d(\omega_t, \varphi, \psi). \quad (9.27)$$

Our aim is to compute the derivative of a minmax with respect to the parameter  $t > 0$ .

$$dJ_N(\omega; V) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_N(\omega_t) - J_N(\omega)}{t}, \text{ and } dJ_D(\omega; V) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_N(\omega_t) - J_N(\omega)}{t} \quad (9.28)$$

There are two methods to get rid on the time dependence in the underlying functions :

- the *function space parametrization* and
- the *function space embedding*.

### 9.3 FUNCTION SPACE PARAMETRIZATION

In order to use the differential calculus in a fixed domain, we transport the const functionals  $J_N(\omega_t), J_D(\omega)$  back into the reference domain that does not depend on the parameter  $t$ .

We parameterize the functions in  $H^1(\Omega_t)$  by elements of  $H^1(\Omega)$  trough the transformation

$$\phi \mapsto \phi \circ T_t^{-1} : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega_t), \quad (9.29)$$

where "  $\circ$  " denotes the compositions of the two maps.

Since the transformations  $T_t$  and  $T_t^{-1}$  are diffeomorphisms, and  $T_t(\omega) = \omega_t, T_t(\Omega) = \Omega$ , this transformation can not affect the saddle points. We rewrite (9.26) and (9.27) as

$$J_N(\omega_t) = \inf_{\varphi \in \mathcal{V}} \sup_{\psi \in \mathcal{V}} \tilde{G}_n(t, \varphi, \psi) \quad (9.30)$$

$$J_D(\omega_t) = \inf_{\varphi \in (H^1(\Omega))^d} \sup_{\psi \in (H^1(\Omega))^d} \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi), \quad (9.31)$$

where the new functionals  $\tilde{G}_n$  and  $\tilde{G}_d$  are defined by

$$\tilde{G}_n(t, \varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) + \int_{\Omega} C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\psi \circ T_t^{-1}) - \int_{\Gamma_1} g.(\psi \circ T_t^{-1}), \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) + \int_{\Omega} \operatorname{div}(C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1})) \psi \circ T_t^{-1} \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} (\varphi \circ T_t^{-1} - f)(C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\psi \circ T_t^{-1})) n. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Furthermore the saddle points  $(u_n^t, p_n^t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  and  $(u_d^t, p_d^t) \in (H^1(\Omega))^d \times (H^1(\Omega))^d$  was characterized by

$$\int_{\Omega} C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(u_n^t \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\psi \circ T_t^{-1}) - \int_{\Gamma_1} g.(\psi \circ T_t^{-1}) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}. \quad (9.34)$$

$$\int_{\Omega} C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(u_n^t \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) + \int_{\Omega} C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(p_n^t \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \quad (9.35)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(u_d^t \circ T_t^{-1})) \psi \circ T_t^{-1} - \int_{\Gamma_1} (u_d^t \circ T_t^{-1} - f)(C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\psi \circ T_t^{-1})) n = 0 \quad \forall \psi \in (H^1(\Omega))^d. \quad (9.36)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) p_d^t \circ T_t^{-1}) - \int_{\Gamma_1} (\varphi \circ T_t^{-1} - f)(C \circ T_t^{-1} : \varepsilon(p_d^t \circ T_t^{-1})) n = 0 \quad \forall \varphi \in (H^1(\Omega))^d. \quad (9.37)$$

It is readily seen that  $(u_n^t \circ T_t^{-1}, p_n^t \circ T_t^{-1})$  and  $(u_d^t \circ T_t^{-1}, p_d^t \circ T_t^{-1})$  coincides with the saddle points in the perturbed domain

$$u_n(t) = u_n^t \circ T_t^{-1}, \quad p_n^t = p_n^t \circ T_t^{-1}, \quad u_d(t) = u_d^t \circ T_t^{-1}, \quad p_d(t) = p_d^t \circ T_t^{-1}.$$

In view of this observation, we can rewrite expressions (9.32)-(9.33) on the reference domain  $\Omega$  after a change of variable. According to the following formulae's

$$\begin{aligned} D(\varphi \circ T_t^{-1}) \circ T_t &= D(\varphi)(DT_t)^{-1} \\ 2\varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) \circ T_t &= D(\varphi)(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*, \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(t, \varphi, \psi) &= \frac{1}{8} \int_{\Omega} C : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\} : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\} : \{D\psi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\psi)^*\} \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} w(t) g \circ T_t \cdot \psi. \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi) &= \frac{1}{8} \int_{\Omega} C : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\} : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (C : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\}) \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} w(t) (\varphi - f \circ T_t) (C : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\}) n. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Where for sufficiently small  $t > 0$ ,

$$J_t = |\det DT_t| = 1 \text{ and } w(t) = \|J_t[(DT_t)^{-1}]^* n\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Similarly the systems (9.34)-(9.35)-(9.36)-(9.37) becomes

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{Du_n^t(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(Du_n^t)^*\} : \{D\psi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\psi)^*\} \\ - \int_{\Gamma_1} w(t) g \circ T_t \cdot \psi = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{Du_n^t(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(Du_n^t)^*\} : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\} + \\ \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{Dp_n^t(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(Dp_n^t)^*\} : \{D\varphi(DT_t)^{-1} + ((DT_t)^{-1})^*(D\varphi)^*\} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (C : \{Du_d^t(DT_t)^{-1} + (DT_t)^{-1}*(Du_d^t)^*\}) \psi \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} w(t)(u_d^t - f \circ T_t) (C : \{D\psi(DT_t)^{-1} + (DT_t)^*D\psi^*\}) n = 0 \quad \forall \psi \in (H^1(\Omega))^d. \end{aligned} \quad (9.42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (C : \{D\varphi DT_t^{-1} + (DT_t)^{-1}*(D\varphi)^*\}) p_d^t \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} w(t)(\varphi - f \circ T_t) (C : \{Dp_d^t DT_t^{-1} + (DT_t)^{-1}*(Dp_d^t)^*\}) n = 0 \quad \forall \varphi \in (H^1(\Omega))^d. \end{aligned} \quad (9.43)$$

The next objective is to get the limits of quantities defined in (9.28). We need theorem that will give an expression for the derivative of minmax problem with respect to the parameter  $t > 0$ . We first, introduce some notations .

Consider the functional

$$G : [0, \delta] \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad (9.44)$$

for some  $\delta > 0$  and the topological spaces  $X$  and  $Y$ . For each  $t \in [0, \delta]$ , define

$$g(t) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(t, x, y), \quad (9.45)$$

and the sets

$$X(t) = \left\{ x^t \in X : \sup_{y \in Y} G(t, x^t, y) = g(t) \right\} \quad (9.46)$$

$$Y(t, x) = \left\{ y^t \in Y : G(t, x, y^t) = \sup_{y \in Y} G(t, x, y) \right\}. \quad (9.47)$$

Similarly, we can define the dual functional

$$h(t) = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(t, x, y), \quad (9.48)$$

and the corresponding sets

$$Y(t) = \left\{ y^t \in Y : \inf_{x \in X} G(t, x, y^t) = h(t) \right\} \quad (9.49)$$

$$X(t, y) = \left\{ x^t \in X : G(t, x^t, y) = \inf_{x \in X} G(t, x, y) \right\}. \quad (9.50)$$

To complete the notations, we introduce the set of saddle points

$$S(t) = \{(x, y) \in X \times Y : g(t) = G(t, x, y) = h(t)\}. \quad (9.51)$$

Now we introduce the following theorem

**Théorème 9.3.1 (Correa and Seeger[49])** *Assume that the following assumptions hold :*  
(H<sub>1</sub>)  $S(t) \neq \emptyset, \quad t \in [0, \delta]$



(H<sub>2</sub>) the partial derivative  $\partial_t G(t, x, y)$  exists in  $[0, \delta]$  for all

$$(x, y) \in \left[ \bigcup_{t \in [0, \delta]} X(t) \times Y(0) \right] \cup \left[ X(0) \times \bigcup_{t \in [0, \delta]} Y(t) \right]$$

(H<sub>3</sub>) there exists a topology  $\mathcal{T}_X$  on  $X$  such that for any sequence  $\{t_n : t_n \in [0, \delta]\}$ , with  $t_n \rightarrow 0$ , there exists  $x^0 \in X(0)$  and a subsequence  $t_{n_k}$  of  $t_n$  and for each  $k \geq 1$ , there exists  $x_{n_k} \in X(t_{n_k})$  such that

- (i)  $x_{n_k} \rightarrow x^0$  in the  $\mathcal{T}_X$ -topology and
- (ii) for all  $y \in Y(0)$ ,

$$\liminf_{\substack{t \searrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \partial_t G(t, x_{n_k}, y) \geq \partial_t G(0, x^0, y); \quad (9.52)$$

(H<sub>4</sub>) there exists a topology  $\mathcal{T}_Y$  on  $Y$  such that for all sequence  $\{t_n : t_n \in [0, \delta]\}$ ,  $t_n \rightarrow 0$ , there exists  $y^0 \in Y(0)$ , there exists a subsequence  $t_{n_k}$  of  $t_n$  and for each  $k \geq 1$ , there exists  $y_{n_k} \in Y(t_{n_k})$  such that

- (i)  $y_{n_k} \rightarrow y^0$  in the  $\mathcal{T}_Y$ -topology and
- (ii) for all  $x \in X(0)$ ,

$$\liminf_{\substack{t \searrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \partial_t G(t, x, y_{n_k}) \leq \partial_t G(0, x, y^0). \quad (9.53)$$

Then there exists  $(x^0, y^0) \in X(0) \times Y(0)$  such that

$$dg(0) = \inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0)} \partial_t G(0, x, y) = \partial_t G(0, x^0, y^0) = \sup_{y \in Y(0)} \inf_{x \in X(0)} \partial_t G(0, x, y). \quad (9.54)$$

This means that  $(x^0, y^0)$  is a saddle point of  $\partial_t G(0, x, y)$  on  $X(0) \times Y(0)$ .

In order to apply Theorem 9.3.1 to our problem, we assume that the velocity field  $V \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

Since

$$X_n(t) = \left\{ x^t \in \mathcal{V} : \sup_{y \in \mathcal{V}} \widetilde{G}_n(t, x^t, y) = \inf_{x \in \mathcal{V}} \sup_{y \in \mathcal{V}} \widetilde{G}_n(t, x, y) \right\} = \{u_n^t\} \neq \emptyset, \quad (9.55)$$

$$Y_n(t) = \left\{ y^t \in \mathcal{V} : \inf_{x \in \mathcal{V}} \widetilde{G}_n(t, x, y^t) = \sup_{y \in \mathcal{V}} \inf_{x \in \mathcal{V}} \widetilde{G}_n(t, x, y) \right\} = \{p_n^t\} \neq \emptyset. \quad (9.56)$$

Similarly

$$X_d(t) = \left\{ x^t \in H^1(\Omega) : \sup_{y \in H^1(\Omega)} \widetilde{G}_d(t, x^t, y) = \inf_{x \in H^1(\Omega)} \sup_{y \in H^1(\Omega)} \widetilde{G}_d(t, x, y) \right\} = \{u_d^t\} \neq \emptyset, \quad (9.57)$$

$$Y_d(t) = \left\{ y^t \in H^1(\Omega) : \inf_{x \in H^1(\Omega)} \widetilde{G}_d(t, x, y^t) = \sup_{y \in H^1(\Omega)} \inf_{x \in H^1(\Omega)} \widetilde{G}_d(t, x, y) \right\} = \{p_d^t\} \neq \emptyset. \quad (9.58)$$

Therefore, we obtain

$$\forall t \in [0, \delta] \quad S_n(t) = X_n(t) \times Y_n(t) = \{u_n^t, p_n^t\} \neq \emptyset, \quad (9.59)$$

$$\forall t \in [0, \delta] \quad S_d(t) = X_d(t) \times Y_d(t) = \{u_d^t, p_d^t\} \neq \emptyset. \quad (9.60)$$

So assumption (H<sub>1</sub>) is satisfied. To check assumption (H<sub>2</sub>), we compute the derivative  $\partial_t \tilde{G}_n(t, \varphi, \psi)$  and  $\partial_t \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi)$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_n(t, \varphi, \psi) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{D\varphi \mathcal{T}'(t) + \mathcal{T}'(t)^*(D\varphi)^*\} : \{D\varphi \mathcal{T}(t) + \mathcal{T}(t)^*(D\varphi)^*\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{D\varphi \mathcal{T}'(t) + \mathcal{T}'(t)^*(D\varphi)^*\} : \{D\psi \mathcal{T}(t) + \mathcal{T}(t)^*(D\psi)^*\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{D\varphi \mathcal{T}(t) + \mathcal{T}(t)^*(D\varphi)^*\} : \{D\psi \mathcal{T}'(t) + \mathcal{T}'(t)^*(D\psi)^*\} \end{aligned} \quad (9.61)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{D\varphi \mathcal{T}'(t) + \mathcal{T}'(t)^*(D\varphi)^*\} : \{D\varphi \mathcal{T}(t) + \mathcal{T}(t)^*(D\varphi)^*\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (C : \{D\varphi \mathcal{T}'(t) + \mathcal{T}'(t)^*(D\varphi)^*\}) \psi. \end{aligned} \quad (9.62)$$

where

$$\mathcal{T}(t) := (DT_t)^{-1}, \quad \mathcal{T}'(t) = -(DT_t)^{-1} DV(t) \circ T_t.$$

Since  $V \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ ,  $t \mapsto V_t, t \mapsto DV_t$  are continuous on  $[0, \delta]$ . Furthermore the partial derivative  $\partial_t \tilde{G}_n(t, \varphi, \psi)$  respectively  $\partial_t \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi)$  exists everywhere in  $[0, \delta]$  for all  $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$  respectively  $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$ , i.e the assumption (H<sub>2</sub>) is satisfied.

To check (H<sub>3</sub>)<sub>i</sub> and (H<sub>4</sub>)<sub>i</sub>, we show that for any sequence  $t_n \subset [0, \delta], t_n \rightarrow 0$  there exists a subsequences of  $\{u_n^{t_n}\}, \{p_n^{t_n}\}, \{u_d^{t_n}\}, \{p_d^{t_n}\}$  still denoted  $\{u_n^{t_n}\}, \{p_n^{t_n}\}, \{u_d^{t_n}\}, \{p_d^{t_n}\}$  such that

$$u_n^{t_n} \rightharpoonup u_n^0 = u_n \text{ in } \mathcal{V} - \text{weak}, \quad p_n^{t_n} \rightharpoonup p_n^0 = p_n \text{ in } \mathcal{V} - \text{weak},$$

$$u_d^{t_n} \rightharpoonup u_d^0 = u_d \text{ in } (H^1(\Omega)) - \text{weak}, \quad p_d^{t_n} \rightharpoonup p_d^0 = p_d \text{ in } (H^1(\Omega)) - \text{weak},$$

First we show the boundness of the solutions  $u_n^t, p_n^t, u_d^t, p_d^t$ . We define the tensor  $\tilde{C}(t)$  by

$$\tilde{C}(t) : A : B = C : \{A(DT_t)^{-1} + A^*((DT_t)^{-1})^*\} : \{B(DT_t)^{-1} + B^*((DT_t)^{-1})^*\}.$$

and we suppose for sufficiently small  $t$  there exist a real number  $\alpha > 0$ , such that

$$\tilde{C}(t) : A : A \geq \alpha A : A.$$

Let  $\psi = u_n^t$  in the equation (9.40), and using the fact that  $T_t(x) = x$  on  $\Gamma_1$ , then we have

$$\alpha \int_{\Omega} \varepsilon(u_n^t) : \varepsilon(u_n^t) \leq \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|u_n^t\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Furthermore, there exists  $c_1 > 0$  such that

$$\|u_n^t\|_{\mathcal{V}} \leq c_1 \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Similarly, from the equations (9.41)-(9.42)-(9.43) we can show that for sufficiently small  $t$  there exists  $c_2, c_3, c_4 > 0$  such that

$$\begin{aligned}\|p_n^t\|_{\mathcal{V}} &\leq c_2 \|u_n^t\|_{\mathcal{V}}. \\ \|u_d^t\|_{H^1(\Omega)} &\leq c_3 \|f\|_{L^2(\Gamma_1)}. \\ \|p_d^t\|_{H^1(\Omega)} &\leq c_4 \|u_d^t\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

The next step is to show the continuity of  $\{u_n^t, p_n^t\}$  and  $\{u_d^t, p_d^t\}$ . To prove the continuity of  $u_n^t$ , subtract (9.40) at  $t > 0$  from (9.40) at  $t = 0$  and let  $\psi = u_n^t - u_n$ , we get

$$\int_{\Omega} \tilde{C}(t) : \varepsilon(u_n^t - u_n) : \varepsilon(u_n^t - u_n) = \int_{\Omega} (C - \tilde{C}(t)) : \varepsilon(u_n) : \varepsilon(u_n). \quad (9.63)$$

Hence

$$\alpha \int_{\Omega} \varepsilon(u_n^t - u_n) : \varepsilon(u_n^t - u_n) \leq \left| \int_{\Omega} (C - \tilde{C}(t)) : \varepsilon(u_n) : \varepsilon(u_n) \right|,$$

from which, we deduce that

$$\|u_n^t - u_n\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0 \text{ when } t \rightarrow 0.$$

Similarly, for the continuity of  $p_n^t$  subtract (9.41) at  $t > 0$  from (9.41) at  $t = 0$  and taking  $\varphi = p_n^t - p_n$ , we get

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \tilde{C}(t) : \varepsilon(p_n^t - p_n) : \varepsilon(p_n^t - p_n) &= \int_{\Omega} \tilde{C}(t) : \varepsilon(u_n^t - u_n) : \varepsilon(p_n^t - p_n) \\ &\quad + \int_{\Omega} (\tilde{C}(t) - C) : \varepsilon(u_n + p_n) : \varepsilon(p_n^t - p_n).\end{aligned}$$

Therefore,  $\|p_n^t - p_n\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0$  when  $t \rightarrow 0$ . By the same technique, we can show from (9.42) and (9.43) that

$$\|u_d^t - u_d\|_{H^1(\Omega)}, \rightarrow 0 \text{ and } \|p_d^t - p_d\|_{H^1(\Omega)}, \rightarrow 0 \text{ when } t \rightarrow 0.$$

So, assumptions (H<sub>3</sub>)i and (H<sub>4</sub>)i are verified.

Finally, assumptions (H<sub>3</sub>)ii and (H<sub>4</sub>)ii are readily satisfied in view of the strong continuity of

$$(t, \varphi) \mapsto \partial_t \tilde{G}_n(t, \varphi, \psi), (t, \varphi) \mapsto \partial_t \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi) \text{ and } (t, \psi) \mapsto \partial_t \tilde{G}_n(t, \varphi, \psi), (t, \psi) \mapsto \partial_t \tilde{G}_d(t, \varphi, \psi)$$

So all assumptions of Theorem 9.3.1 are satisfied and we have

$$dJ(\omega; V) = dJ_N(\omega; V) + dJ_D(\omega; V)$$

with

$$\begin{aligned}dJ_N(\omega; V) = \partial_t \tilde{G}_n(t, u_n, p_n) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{-Du_n DV(0) - (DV(0))^*(Du_n)^*\} : \{Du_n + (Du_n)^*\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{-Du_n DV(0) - (DV(0))^*(Du_n)^*\} : \{Dp_n + (Dp_n)^*\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{Du_n + (Du_n)^*\} : \{-Dp_n DV(0) - (DV(0))^*(Dp_n)^*\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dJ_D(\omega; V) = \partial_t \tilde{G}_d(t, u_d, p_d) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{-Du_d DV(0) - (DV(0))^*(Du_d)^*\} : \{Du_d + (Du_d)^*\} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (C : \{-Du_d DV(0) - (DV(0))^*(Du_d)^*\}) p_d. \end{aligned}$$

Since  $p_n = -u_n$  and  $p_d = 0$ , we get

$$dJ_N(\omega; V) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{Du_n + (Du_n)^*\} : \{Du_n DV(0) + (DV(0))^*(Du_n)^*\}. \quad (9.64)$$

$$dJ_D(\omega; V) = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} C : \{Du_d + (Du_d)^*\} : \{Du_d DV(0) + (DV(0))^*(u_d)^*\}. \quad (9.65)$$

It is readily seen that the map

$$V \mapsto dJ(\omega; V) = dJ_N(\omega; V) + dJ_D(\omega; V) : \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \quad (9.66)$$

is linear and continuous. By Zolésio structure theorem [52, Thm 3.5, Sect 3.3, Chap 8], we know that for a domain  $\omega$  with a  $C^2$ -boundary  $\partial\omega$  there exists a scalaire distribution  $g(\partial\omega) \in \mathcal{D}^1(\partial\omega)'$  such that

$$dJ(\omega; V) = \langle g(\partial\omega), V.n \rangle. \quad (9.67)$$

We now further characterize this boundary expression.

### 9.3.1 Formal calculations

Let  $(u_n, p_n) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  solves (9.22)-(9.23) and  $(u_d, p_d) \in (H^1(\Omega))^d \times (H^1(\Omega))^d$  solves (9.24)-(9.25). With the action of the velocity  $V \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  the corresponding systems (9.34)-(9.35) and (9.36)-(9.37) has a unique solution  $(u_n^t, p_n^t)$  and  $(u_d^t, p_d^t)$ . Now, we use the following formulae (see [52, 98])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F(t, x) dx &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_t} F(t, x) V(t).n_t ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_t} F(t, x) ds &= \int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) ds + \int_{\partial\Omega_t} \left( \frac{\partial F}{\partial n_t}(t, x) + HF(t, x) \right) V(t).n_t ds \end{aligned}$$

for sufficiently smooth functional  $F : [0, \delta] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , where  $H = \operatorname{div} n$ . We easily obtain

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_n(0, \varphi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\dot{\varphi}) : \varepsilon(\varphi) + \sigma(\varphi) : \varepsilon(\dot{\varphi}) + \frac{1}{2} \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\varphi) V.n + \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\varphi) V.n \\ &+ \int_{\Omega} \sigma(\dot{\psi}) : \varepsilon(\psi) + \sigma(\psi) : \varepsilon(\dot{\psi}) + \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})} \sigma(\psi) : \varepsilon(\psi) V.n + \int_{\partial\omega} \sigma(\psi) : \varepsilon(\psi) V.n \\ &- \int_{\partial\Omega} g.\dot{\psi} - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} + H\psi \right) V.n \\ \partial_t \tilde{G}_d(0, \varphi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\dot{\varphi}) : \varepsilon(\varphi) + \sigma(\varphi) : \varepsilon(\dot{\varphi}) + \frac{1}{2} \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\varphi) V.n + \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \sigma(\varphi) : \varepsilon(\varphi) V.n \\ &+ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(\dot{\varphi}))\psi + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(\varphi))\dot{\psi} + \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{\omega})} \operatorname{div}(\sigma(\varphi))\psi V.n + \int_{\partial\omega} \operatorname{div}(\sigma(\varphi))\psi V.n \\ &- \int_{\Gamma_1} (\dot{\varphi} - f)\sigma(\psi)n - \int_{\Gamma_1} (\varphi - f)\sigma(\dot{\psi})n. \end{aligned}$$

where

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\varphi \circ T_t^{-1} \Big|_{t=0} = -D\varphi V, \quad \dot{\psi} = \frac{d}{dt}\psi \circ T_t^{-1} \Big|_{t=0} = -D\psi V.$$

Furthermore, substitute  $(\varphi, \psi)$  by  $(u_n, p_n) = (u_n, -u_n)$  in the expression of  $\partial_t \tilde{G}_n(0, \varphi, \psi)$  we get

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_n(0, u_n, -u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} [\sigma(u_n) : \varepsilon(u_n)] V.n - \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(-Du_n V) + \int_{\partial\Omega} g.(-Du_n V) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_n}{\partial n} - Hu_n \right) V.n, \end{aligned}$$

where  $[\cdot]$  means the jump over the boundary  $\partial\omega$ . Using the condition  $V = 0$  on  $\partial\Omega$ ,  $V_\tau = 0$  on  $\partial\omega$ , Green's formula and the transmission condition, we obtain

$$dJ_N(\omega; V) = \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \left[ [\sigma(u_n) : \varepsilon(u_n)] + 2\sigma(u_n^-)n \left( \frac{\partial u_n^-}{\partial n} n - \frac{\partial u_n^+}{\partial n} n \right) \right] V.n. \quad (9.68)$$

Similarly, substitute  $(\varphi, \psi)$  by  $(u_d, p_d) = (u_d, 0)$  in the expression of  $\partial_t \tilde{G}_d(0, \varphi, \psi)$  and choosing  $\dot{\varphi} = -Du_d V$ , we get

$$\partial_t \tilde{G}_d(0, u_d, 0) = \int_{\Omega} \sigma(u_d) : \varepsilon(-Du_d V) - \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} [\sigma(u_d) : \varepsilon(u_d)] V.n.$$

Using Green's formula and the transmission condition for the volume integral, we get

$$\int_{\Omega} \sigma(u_d) : \varepsilon(-Du_d V) = - \int_{\partial\omega} \sigma(u_d^-)n \left( \frac{\partial u_d^-}{\partial n} n - \frac{\partial u_d^+}{\partial n} n \right).$$

So, we obtain

$$dJ_D(\omega; V) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \left[ [\sigma(u_d) : \varepsilon(u_d)] + 2\sigma(u_d^-)n \left( \frac{\partial u_d^-}{\partial n} n - \frac{\partial u_d^+}{\partial n} n \right) \right] V.n \quad (9.69)$$

Finally, we get from (9.68) and (9.69)

$$\begin{aligned} dJ(\omega; V) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \left[ [\sigma(u_n) : \varepsilon(u_n)] - [\sigma(u_d) : \varepsilon(u_d)] \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma(u_n^-)n \left( \frac{\partial u_n^-}{\partial n} n - \frac{\partial u_n^+}{\partial n} n \right) - 2\sigma(u_d^-)n \left( \frac{\partial u_d^-}{\partial n} n - \frac{\partial u_d^+}{\partial n} n \right) \right] V.n. \end{aligned} \quad (9.70)$$

### 9.3.2 Justified calculations

We replace the boundary  $\partial\omega$  by a boundary layer  $B_h$  such that  $\partial\omega \subset B_h$  and  $B_h \rightarrow \partial\omega$  when  $h \rightarrow 0$ .

We regularize the tensor  $C$  by convolution,  $C_h = \rho_h * C$ , where  $\rho_h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  satisfying

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_h(x) = 1, \quad \int_{|x|>\delta} |\rho_h(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{for all } \delta > 0.$$

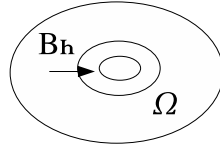


FIGURE 9.1 – Regularization by boundary layer.

We denote by  $u_n(h)$ ,  $u_d(h)$  respectively the solutions of the problems (9.1)-(9.2)-(9.3) and (9.1)-(9.4)-(9.3) with respect to the elasticity tensor  $C_h$ . Since  $C_h \in C^\infty(\Omega)$ , the solutions  $u_n(h)$ ,  $u_d(h) \in H^2(\Omega)$ . We denote by

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n^h(t, \varphi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) + \int_{\Omega} C_h \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\psi \circ T_t^{-1}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} g \cdot (\psi \circ T_t^{-1}), \end{aligned} \quad (9.71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_d^h(t, \varphi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1}) + \int_{\Omega} \operatorname{div} (C_h \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\varphi \circ T_t^{-1})) \psi \circ T_t^{-1} \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} (\psi \circ T_t^{-1} - f) (C_h \circ T_t^{-1} : \varepsilon(\psi \circ T_t^{-1})) n. \end{aligned} \quad (9.72)$$

By differentiation with respect to  $t$  at  $t = 0$ , we get

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_n^h(t, \varphi, \psi) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{C}_h : \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} C_h : \varepsilon(\dot{\varphi}) : \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} \dot{C}_h : \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\psi) \\ &\quad + \int_{\Omega} C_h : \varepsilon(\dot{\varphi}) : \varepsilon(\psi) + \int_{\Omega} C_h : \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\dot{\psi}) - \int_{\Gamma_1} g \cdot \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (9.73)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_d^h(t, \varphi, \psi) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{C}_h : \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} C_h : \varepsilon(\dot{\varphi}) : \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\dot{C}_h : \varepsilon(\varphi)) \psi \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div} (C_h : \varepsilon(\dot{\varphi})) \psi + \int_{\Omega} \operatorname{div} (C_h : \varepsilon(\varphi)) \dot{\psi} - \int_{\Gamma_1} (\dot{\psi} - f) (C_h : \varepsilon(\psi)) n \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} (\psi - f) (\dot{C}_h : \varepsilon(\psi)) n - \int_{\Gamma_1} (C_h : \varepsilon(\dot{\psi})) n. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Furthermore, substitute  $(\varphi, \psi)$  by  $(u_n(h), p_n(h)) = (u_n(h), -u_n(h))$  in the equation (9.73), we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_n^h(t, u_n(h), -u_n(h)) \Big|_{t=0} &= -\frac{1}{2} \int_{B_h} \dot{C}_h : \varepsilon(u_n(h)) : \varepsilon(u_n(h)) \\ &\quad + \int_{\Omega} C_h : \varepsilon(u_n(h)) : \varepsilon(-\dot{u}_n(h)) - \int_{\Gamma_1} g \cdot (-\dot{u}_n(h)). \end{aligned} \quad (9.75)$$

Note that the second term is the variational equation verified by  $u_n(h)$ . So we get

$$\partial_t \tilde{G}_n^h(t, u_n(h), -u_n(h)) \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} \int_{B_h} \dot{C}_h : \varepsilon(u_n(h)) : \varepsilon(u_n(h)). \quad (9.76)$$

Similarly, substitute  $(\varphi, \psi)$  by  $(u_d(h), p_d(h)) = (u_d(h), 0)$  in the equation (9.74), we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{G}_n^h(t, u_d(h), -u_d(h)) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_{B_h} \dot{C}_h : \varepsilon(u_d(h)) : \varepsilon(u_d(h)) \\ &+ \int_{\Omega} C_h : \varepsilon(u_d(h)) : \varepsilon(\dot{u}_d(h)). \end{aligned} \quad (9.77)$$

By using Green's formulae, the second term disappear, and we get finally

$$\partial_t \tilde{G}_n^h(t, u_d(h), -u_d(h)) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{B_h} \dot{C}_h : \varepsilon(u_d(h)) : \varepsilon(u_d(h)). \quad (9.78)$$

We observe that the equations (9.64) and (9.65) has limits when we replace  $C$  by  $C_h$  and  $u_n, u_d$  by  $u_n(h), u_d(h)$ . Furthermore the limits when  $h$  goes to 0 of the quantities (9.61)-(9.78) exist, and we obtain

$$\begin{aligned} DJ(\omega; V) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \int_{B_h} \dot{C}_h : \varepsilon(u_d(h)) : \varepsilon(u_d(h)) - \int_{\partial\omega_h} \dot{C}_h : \varepsilon(u_n(h)) : \varepsilon(u_n(h)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\partial\omega} C' : \varepsilon(u_d) : \varepsilon(u_d) - C' : \varepsilon(u_n) : \varepsilon(u_n) \right]. \end{aligned} \quad (9.79)$$

## 9.4 FUNCTION SPACE EMBEDDING

In the function space embedding method, we introduce a large enough domain  $D$  which contain all the transformations  $\{\Omega_t = T_t(\Omega) : t \in [0, \delta]\}$  for some small  $\delta > 0$ .

In this section we use the function space embedding method with  $D = \mathbb{R}^d$  and

$$J_N(\omega_t) = \min_{\Phi \in H^1(\mathbb{R}^d)} \max_{\Psi \in H^1(\mathbb{R}^d)} G_n(\omega_t, \Phi, \Psi) \quad (9.80)$$

$$J_D(\omega_t) = \min_{\Phi \in H^1(\mathbb{R}^d)} \max_{\Psi \in H^1(\mathbb{R}^d)} G_d(\omega_t, \Phi, \Psi), \quad (9.81)$$

where

$$G_n(\omega_t, \Phi, \Psi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} C(t) : \varepsilon(\Phi) : \varepsilon(\Phi) + \int_{\Omega} C(t) : \varepsilon(\Phi) : \varepsilon(\Psi) - \int_{\Gamma_1} g \cdot \Psi \quad (9.82)$$

$$G_d(\omega_t, \Phi, \Psi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} C(t) : \varepsilon(\Phi) : \varepsilon(\Phi) + \int_{\Omega} \operatorname{div}(C(t) : \varepsilon(\Phi)) \Psi - \int_{\Gamma_1} (\Phi - f) (C(t) : \varepsilon(\Psi)) n. \quad (9.83)$$

The price to pay for the use of this method is the fact that each of the sets of saddle points

$$S_n(t) = X_n(t) \times Y_n(t) \text{ and } S_d(t) = X_d(t) \times Y_d(t)$$

is not a singleton anymore since

$$X_n(t) = \{ \Phi \in H^1(\mathbb{R}^d) : \Phi|_{\Omega} = u_n(t) \}, \quad (9.84)$$

$$Y_n(t) = \{ \Psi \in H^1(\mathbb{R}^d) : \Psi|_{\Omega} = p_n(t) \}, \quad (9.85)$$

$$X_d(t) = \{ \Phi \in H^1(\mathbb{R}^d) : \Phi|_{\Omega} = u_d(t) \}, \quad (9.86)$$

$$Y_d(t) = \{ \Psi \in H^1(\mathbb{R}^d) : \Psi|_{\Omega} = p_d(t) \}, \quad (9.87)$$

where  $(u_n(t), p_n(t))$  and  $(u_d(t), p_d(t))$  are the unique solutions to the following saddle points equations in  $\Omega$  :

$$\operatorname{div}(\sigma(u_n(t))) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \sigma(u_n(t)) = g \text{ on } \Gamma_1, \quad u_n(t) = 0 \text{ on } \Gamma_2. \quad (9.88)$$

$$\operatorname{div}(\sigma(p_n(t))) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \sigma(p_n(t)) = -g \text{ on } \Gamma_1, \quad p_n = 0 \text{ on } \Gamma_2. \quad (9.89)$$

$$\operatorname{div}(\sigma(u_d(t))) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u_d(t) = f \text{ on } \Gamma_1 \quad u_d(t) = 0 \text{ on } \Gamma_2. \quad (9.90)$$

$$\operatorname{div}(\sigma(p_d(t))) = 0 \text{ in } \Omega, \quad p_d(t) = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (9.91)$$

We will apply Theorem 9.3.1, which says that under appropriate assumptions (to be checked in the next) that

$$dJ(\omega; V) = \min_{\Phi \in H^1(\mathbb{R}^d)} \max_{\Psi \in H^1(\mathbb{R}^d)} \partial_t G_n(\omega_t, \Phi, \Psi)|_{t=0} + \min_{\Phi \in H^1(\mathbb{R}^d)} \max_{\Psi \in H^1(\mathbb{R}^d)} \partial_t G_d(\omega_t, \Phi, \Psi)|_{t=0} \quad (9.92)$$

To compute the derivative with respect to  $t$  at  $t = 0$  of the functionals  $G_n$  and  $G_d$  we need to regularize the tensor  $C(t)$  like the previous section :

$$C_h(t) = \rho_h * C(t)$$

and we denote by  $G_n^h, G_d^h$  the corresponding functionals. So, we have

$$dJ(\omega; V) = \lim_{h \rightarrow 0} \min_{\Phi \in H^2(\mathbb{R}^d)} \max_{\Psi \in H^2(\mathbb{R}^d)} \partial_t G_n^h(\omega_t, \Phi, \Psi)|_{t=0} + \min_{\Phi \in H^2(\mathbb{R}^d)} \max_{\Psi \in H^2(\mathbb{R}^d)} \partial_t G_d^h(\omega_t, \Phi, \Psi)|_{t=0} \quad (9.93)$$

where

$$\partial_t G_n^h(\omega_t, \Phi, \Psi) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{B_h} C'_h(0) : \varepsilon(\Phi) : \varepsilon(\Phi) + \int_{B_h} C'_h(0) : \varepsilon(\Phi) : \varepsilon(\Psi). \quad (9.94)$$

$$\partial_t G_d^h(\omega_t, \Phi, \Psi) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{B_h} C'_h(0) : \varepsilon(\Phi) : \varepsilon(\Phi) + \int_{B_h} \operatorname{div}(C'_h(0) : \varepsilon(\Phi)) \Psi. \quad (9.95)$$

Expressions (9.94)-(9.95) are each an integral over the boundary  $\partial\omega_h$  which will not depend on  $\Phi$  and  $\Psi$  outside of  $\bar{\Omega}$ . As a result the min and the max can be dropped in (9.93), which reduces to

$$\begin{aligned} dJ(\omega; V) &= \lim_{h \rightarrow 0} \partial_t G_n^h(\omega_t, u_n, p_n) \Big|_{t=0} + \partial_t G_d^h(\omega_t, u_d, p_d) \Big|_{t=0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \int_{B_h} C'_h(0) : \varepsilon(u_d) : \varepsilon(u_d) - C'_h(0) : \varepsilon(u_n) : \varepsilon(u_n) \right]. \end{aligned} \quad (9.96)$$

We turn now to the verification of the four assumptions of Theorem 9.3.1. Substitute  $H^1(\mathbb{R}^d)$  by  $H^2(\Omega)$  in the sets (9.84)-(9.85)-(9.86)-(9.87). Each of them in this case is not empty since it is always possible to construct a continuous linear extension (see [2])

$$\Pi^m : H^m(\Omega) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d), \quad m \geq 1,$$



and for  $t \in [0, \delta]$

$$\Pi_t^m : H^m(\Omega_t) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d), \quad m \geq 1$$

Here we take  $m = 1$  and we define

$$U_n(t) = \Pi_t^1 u_n(t), \quad P_n(t) = \Pi_t^1 p_n(t), \quad U_d(t) = \Pi_t^1 u_d(t), \quad P_d(t) = \Pi_t^1 p_d(t).$$

Therefore, both  $S_n(t), S_d(t)$  are not empty since

$$U_n(t) \in X_n(t), \quad U_d(t) \in X_d(t), \quad P_n(t) \in Y_n(t), \quad P_d(t) \in Y_d(t).$$

So, condition (H<sub>1</sub>) is satisfied. To check (H<sub>2</sub>) we use the expressions (9.94)-(9.95). By the previous choice of  $V \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , the quantities  $\partial_t G_n(\omega_t, \Phi, \Psi), \partial_t G_d(\omega_t, \Phi, \Psi)$  exists everywhere in  $[0, \delta]$  for all  $\Phi, \Psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ . Hence the assumption (H<sub>2</sub>) is verified. To check conditions (H<sub>3</sub>) and (H<sub>4</sub>) we need the following results

**Lemme 9.4.1** [52] For  $m \geq 1, V \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  and  $\Phi \in H^m(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{t \searrow 0} \Phi \circ T_t = \Phi \quad \text{and} \quad \lim_{t \searrow 0} \Phi \circ T_t^{-1} = \Phi \quad \text{in } H^m(\mathbb{R}^d). \quad (9.97)$$

**Lemme 9.4.2** [52] Under the assumptions of the previous lemma, if

$$y^t \rightarrow y^0 \quad \text{in } H^m(\Omega) \text{ -- strong (resp., weak)}$$

then we have

$$Y_t := (\Pi^m y^t) \circ T_t^{-1} \rightarrow Y_0 \quad \text{in } H^m(\mathbb{R}^d) \text{ -- strong (resp., weak)}.$$

In the previous section we have shown that  $(u_n^t, p_n^t)$  converge to  $(u_n, p_n)$  in the strong topology of  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , similarly  $(u_d^t, p_d^t)$  converge to  $(u_d, p_d)$  in the strong topology of  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ . By the Lemma 9.4.2, we have

$$U_n(t) \rightarrow U = \Pi^1 u_n, \quad U_d(t) \rightarrow U_d = \Pi^1 u_d, \quad P_n(t) \rightarrow \Pi^1 p_n, \quad P_d(t) \rightarrow \Pi^1 p_d.$$

So, assumptions (H<sub>3</sub>)i and (H<sub>4</sub>)i are satisfied for the strong topology of  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . From the equations (9.94)-(9.95), we check that  $(t, \Phi, \Psi) \rightarrow \partial_t G_n(\omega_t, \Phi, \Psi)$  and  $(t, \Phi, \Psi) \rightarrow \partial_t G_d(\omega_t, \Phi, \Psi)$  are linear and continuous, thus (H<sub>3</sub>)ii and (H<sub>4</sub>)ii, are satisfied. So all the assumptions of Theorem 9.3.1 are verified.

## 9.5 NUMERICAL IMPLEMENTATION

In this section, we use a numerical type algorithm to solve the inverse problem of identifying an inclusion assumed to be circular or elliptic. We assume that the inner Lamé coefficients satisfy  $(\lambda_i, \mu_i) = (0, 0)$ , so from (9.70), the shape derivative of the cost function  $J$  becomes :

$$dJ(\omega; V) = dJ_N(\omega; V) + dJ_D(\omega; V) = \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} (\sigma(u_n) : \varepsilon(u_n) - \sigma(u_d) : \varepsilon(u_d)) V.n. \quad (9.98)$$

From the equation (9.98), we have

$$dJ_N(\omega; V) = \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n) V.n. \quad (9.99)$$

The construction of the velocity field  $V$  is as follows :

When  $\omega$  is an ellipse and only the semi-major axis  $a$  and the semi-minor axis  $b$  are variable, we consider for a given center  $(x_0, y_0)$  the transformation

$$T_t(X) = X + tV(X) = (x_0 + (a + ta') \cos(\theta), y_0 + (b + tb') \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]$$

where  $(a', b')$  are reals positifs numbers,  $t$  is sufficiently small real positif number such that  $T_t(\omega) \subset \Omega_{\delta_0}$ . Then we have

$$T'_t(X) = V(X) = (a' \cos(\theta), b' \sin(\theta)).$$

The outer unit vector to the boundary  $\partial\omega$  is defined as  $n = (b \cos(\theta), a \sin(\theta))$ . Furthermore

$$V.n = ba' \cos(\theta)^2 + ab' \sin(\theta)^2. \quad (9.100)$$

When  $\omega$  is a disk, we have  $a' = b' = r'$  and  $n = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ , therefore  $V.n = r'$ .

If we suppose only the center  $(x_0, y_0)$  of  $\omega = \omega_{(x_0, y_0)}$  is variable, then the transformed domain reads  $\omega_t = \omega_{(x_0, y_0) + t(c, d)}$ ,  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ . Furthermore, we can construct a velocity field  $V$  such that

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ in } \Omega, \\ V = (c, d) \text{ on } \partial\omega, \\ V = 0 \text{ on } \Gamma \end{cases} \quad (9.101)$$

Thus  $V.n = c \cos(\theta) + d \sin(\theta)$ . From the equation (9.100),  $J_N$  is a monotonous function with respect to the semi-minor or the semi-major axis. With this observation, if the center of  $\omega$  is fixed, we can use the Newton method applied to the function  $J_{NE} = J_N - J_E$ , where

$$J_N = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_n) : \varepsilon(u_n) dx, \text{ and } J_E = \int_{\Gamma_1} g.f ds$$

to compute numerically the radius  $r$  or the semi-minor axis  $a$  and the semi-major axis  $b$  of  $\omega$ . When the radius or the semi-minor and semi-major axis are fixed, we use the gradient method applied to the function  $J$  to compute numerically the center of  $\omega$ .

The resulting algorithm can be summarized as follows

1. Choose an initial shape  $\omega_0$ .
2. Compute the state equations  $u_n$  and  $u_d$ , then we can evaluate the descent directions (9.98)-(9.99).

3. **case 1** :  $\omega$  is a disk

-Set  $r_{k+1} = r_k - J_{NE}(\omega_k) / dJ_{NE}(\omega_k)$

**case 2** :  $\omega$  is an ellipse

-Set  $a_{k+1} = a_k - d_k(1)$ ,  $b_{k+1} = b_k - d_k(2)$

where the vector  $d_k$  solve the linear system :  $A_k d_k = B_k$  with

$$A_k = \begin{pmatrix} \partial_{a_k} J_{NE1}, \partial_{b_k} J_{NE1} \\ \partial_{a_k} J_{NE2}, \partial_{b_k} J_{NE2} \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} -J_{NE1} \\ -J_{NE2} \end{pmatrix},$$

$$J_{NEi} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_n(i)) \varepsilon(u_n(i)) - \int_{\Gamma_1} g(i) \cdot f(i), i = 1, 2.$$

$u_n(i)$  is solution of (9.1)-(9.2)-(9.3) with  $\omega = \omega_k$  and the chargement  $g = g(i)$ . The data  $f(i)$  is the measurement corresponding to  $g(i)$ .

4. Set  $x_{k+1} = x_k - \partial_{x_k} J(\omega_k)$ ,  $y_{k+1} = y_k - \partial_{y_k} J(\omega_k)$ .

5. Stop if  $dJ(\omega; V) < \epsilon$ , ( $\epsilon$  is the tolerance).

### 9.5.1 Numerical examples

The numerical solutions  $u_n$  and  $u_d$  of the problems (9.1)-(9.2)-(9.3) and (9.1)-(9.4)-(9.3) are obtained using pde toolbox of Matlab.

For the following numerical examples,  $\Omega$  is the unit disk. The chargement is imposed on the boundary  $\Gamma_1$  by the boundary condition  $g = (0.1, 0.1)$ . For the numerical examples with noise, we perturb the exact data  $f$  using the random function from Matlab :

$$f_p = f + \tau \beta \|f\|_{\infty}, \tau \text{ is the level noise and } \beta \text{ is a random vector .}$$

In the following figures, we shall use the notations :

- $\omega_0$  : the initial inclusion,
- $\omega_e$  : the exact inclusion,
- $\omega_a$  : the approximated inclusion.

We consider for the first example, the inclusion  $\omega$  who's parametrization is the following.

$$\partial\omega = \{(0.3 \cos(\theta) + 0.2, 0.3 \sin(\theta) + 0.3) : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

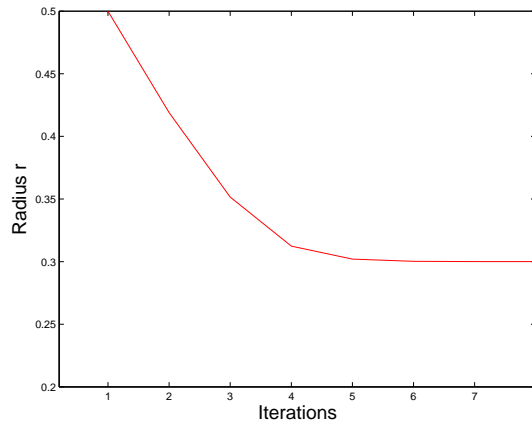


FIGURE 9.2 – Reconstruction of the radius by Newton method

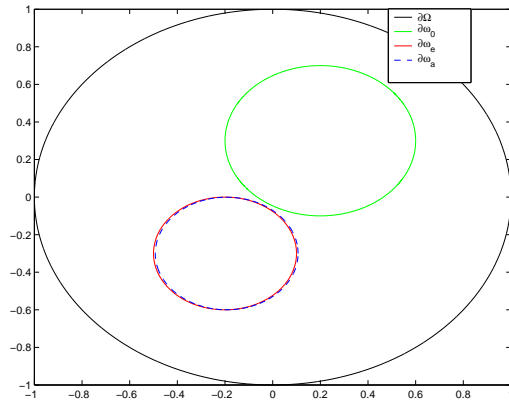


FIGURE 9.3 – Reconstruction without noise

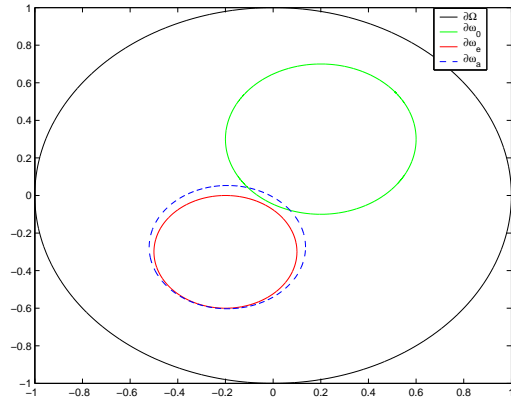


FIGURE 9.4 – Reconstruction with noise level 3%

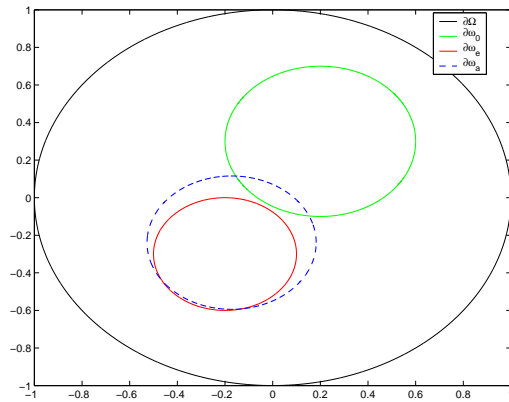


FIGURE 9.5 – Reconstruction without noise level 5%

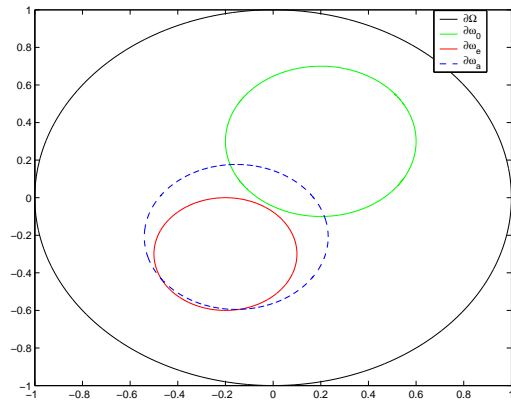


FIGURE 9.6 – Reconstruction with noise level 10%

We consider for the second exemple, the elliptic inclusion  $\omega$  defined as :

$$\partial\omega = \{(0.3 \cos(\theta) + 0.3, 0.2 \sin(\theta) - 0.2) : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

For the reconstruction of  $\omega$ , we impose two fluxes  $g_1 = (x_1, 0)$ ,  $g_2 = (0, x_2)$  on the boundary  $\Gamma_1$ .

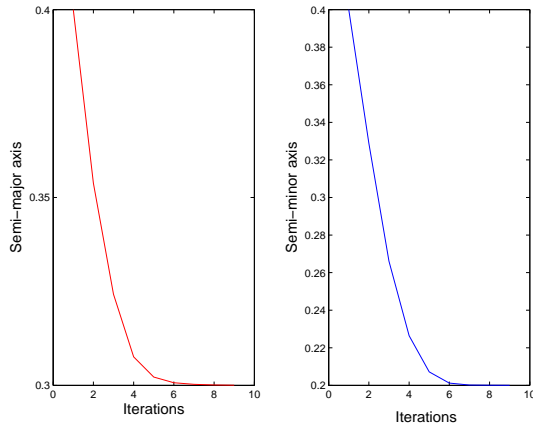


FIGURE 9.7 – Reconstruction of the semi-minor and the semi-major axis by Newton method

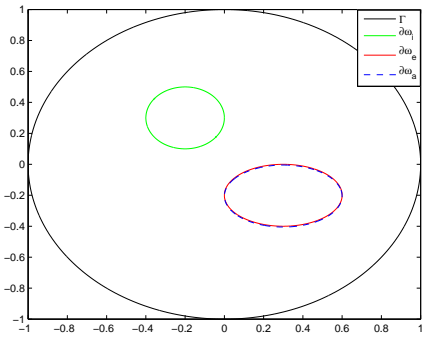


FIGURE 9.8 – Reconstruction without noise

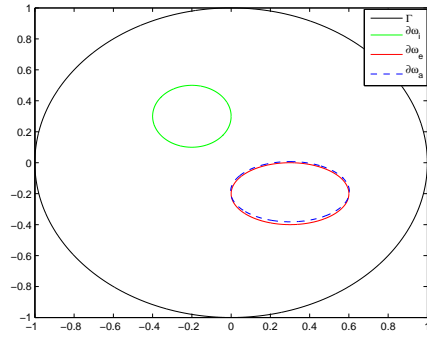


FIGURE 9.9 – Reconstruction with noise level 5%

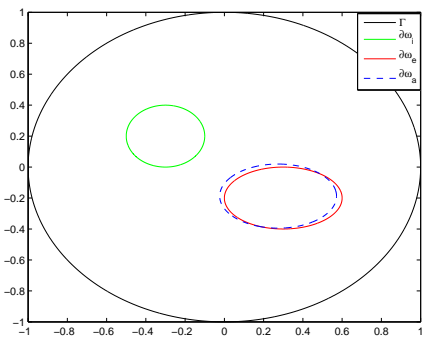


FIGURE 9.10 – Reconstruction with noise level 7%

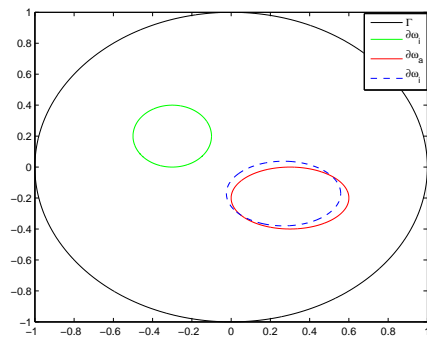


FIGURE 9.11 – Reconstruction with noise level 10%

We observe from the two numerical examples considered above, that a moderate noise has a minor effect of the reconstruction of the inclusion  $\omega$ .



---

# Bibliographie

---

- [1] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, Complex variables, Introduction and Applications, Cambridge Texts Appl. Math., 1997.
- [2] R. A. Adams, Sobolev Space, Academic press, London, 1975.
- [3] L. Afraites, M. Dambrine and J. Kateb : Conformal mapping and shape derivative for the transmission problem with a single measurement. Numerical functional analysis and optimization. Vol 28-5 and 6, (2007), 519-551.
- [4] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. 12. (1959), 623-727.
- [5] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, Éditions de l'École Polytechnique 2005, ISBN : 2-7302-1255-8.
- [6] G. Alessandrini, E. Beretta, E. Rosset, S. Vessella, Optimal stability for inverse elliptic boundary value problems with unknown boundaries, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 29, (2000), 755-806.
- [7] G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset, Detecting cavities by electrostatic boundary measurements, Inverse Problems 18, (2002), 1333-1353.
- [8] G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset, Detecting an inclusion in an elastic body by boundary measurements, SIAM J. Math. Anal. 33, (2002), 1247-1268.
- [9] G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset, Size estimates, Inverse problems : theory and applications, Contemp. Math., 333, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2003), 1-33.

- 
- [10] G. Alessandrini, V. Nesi, Univalent sigma-harmonic mappings, *Arch. Rational Mech. Anal.* 158, (2001), 155-171.
- [11] G. Alessandrini, L. Rondi, Optimal stability for the inverse problem of multiple cavities, *J. Differential Equations* 176, (2001), 356-386.
- [12] G. Alessandrini, L. Rondi, Stable determination of a crack in a planar inhomogeneous conductor, *SIAM J. Math. Anal.* 30, 2,(1998), 326-340.
- [13] G. Alessandrini, E. Rosset, The inverse conductivity problem with one measurement : bounds on the size of the unknown object, *SIAM J. Appl. Math.* 58, (1998), 1060-1071.
- [14] G. Alessandrini, E. Rosset, Volume bounds of inclusions from physical EIT measurements, *Inverse Problems*, 20, (2004), 575-588.
- [15] G. Alessandrini, E. Beretta, S. Vessella, Determining linear cracks by boundary measurements : Lipschitz stability, *SIAM J. Math. Anal.* 27, 2, (1996), 361-375.
- [16] G. Alessandrini, A. Diaz Valenzuela, Unique determination of multiple cracks by two measurements, *SIAM J. Control Optim.* 34 (3) (1996), 913-921.
- [17] S. Amstutz, Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property, *Asymptotic Analysis* 49, (2006), 87-108 .
- [18] S. Amstutz, I. Horchani and M. Masmoudi, Crack detection by the topological gradient method, *Control and Cybernetics* 34, 1, (2005) 81-101, .
- [19] S. Andrieux, A. Ben Abda and M. Jaoua, On the inverse emerging plane crack problem, *Rapport de recherche 3012, INRIA* (1996).
- [20] H. Antoine and M. Pierre, *Variation et optimisation de formes, collection mathématiques et application, vol 48, Springer, 2005.*
- [21] S. Andrieux and A. Ben Abda, Identification of planar cracks by complete overdetermined data, *Inversion formulae, Inverse problems* 12, (1996), 553-563.
- [22] S. Andrieux, A. Ben Abda et M. Jaoua, the inverse emerging plane crack problem, *Rapport de recherche 3012, INRIA* (1996).
- [23] D. Azé, *éléments d'analyse convexe et variationnelle, ellipses.*



- 
- [24] L. Baratchart, Existence and generic properties for  $L^2$  approximants of linear systems, I.M.A. Journal of math. Control and identification 3, (1986), 89-101.
- [25] L. Baratchart, M. Cardelli et M. Olivi, Identification and rational  $L^2$  approximation : a gradient algorithm, Automatica, 27,no 2, 413-418 (1991).
- [26] L. Baratchart, M. Zerner, On the recovery of functions from pointwise boundary values in a Hardy-Sobolev class of the disk, J. Comp. Appl. Math 46 (1993), 255-269.
- [27] L. Baratchart, J. Leblond, F. Mandréa et E. B. Saff, How can the meromorphic approximation help to solve some 2D inverse problems for the Laplacien , Inverse problems 15, (1999), 79-90.
- [28] L. Baratchart, E. B. Saff, et F. Wielonsky, a criterion for uniqueness of critical points in  $H^2$  rational approximation, J analyse mathématique, 70, (1996), 225-266.
- [29] L. Baratchart, F. Mandrea, E. B. Saff, F. Wielonsky, 2D inverse problems for the Laplacian, a meromorphic approximation approach, J. Math. Pures Appl. 86, (2006), 1-41.
- [30] L. Baratchart, H. Stahl, F. Wielonsky, Asymptotic uniqueness of best rational approximants of given degree to Markov functions in  $L^2$  of the circle, Constr. Approx. 17, (2001), 103-138.
- [31] L. Baratchart, J. Grimm, J. Leblond, J. Partington, Asymptotic estimates for interpolation and constraint approximation in  $H^2$  by diagonalisation of Toeplitz operators, Integer. Equ. Oper. Theory. 45, (2003), 269-299.
- [32] L. Baratchart, J. Leblond et J. Partington, Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extension, Constructive Approximation. 16, 3, (2000), 333-357.
- [33] L. Baratchart, A. Ben Abda, F. Ben Hassen and J. Leblond, Recovery of pointwise sources or small inclusions in 2D domains and rational approximation, Inverse problems. 21, (2005), 51-74.
- [34] H. G. W. Begehr, Complex Analytic methods for partial differential Equations (Singapore : World Scientific) 1994.
- [35] A. Ben Abda, M. Kallel, Reciprocity gap principle and cracks identification algorithms. ENIT LAMSIN rapport de recherche No 99-03, 1999.

- 
- [36] A. Ben Abda, M. Kallel, J. Leblond and J-P. Marmorat, Line-segment cracks recovery from incomplete boundary data. *Inverse problems*, 18, (2002), 1057-1077.
- [37] A. Ben Abda, F. Ben Hasse, J. Leblond and M. Mahjoub, Source recovery from boundary data : a model related to electroencephalography. *Mathematical and Computer Modelling*, 49 (2009), 2213-2223.
- [38] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [39] K. Bryan and M. Vogelius : Uniqueness result concerning the identification of a collection of cracks from finitely many electrostatic boundary measurements, *SIAM J. Math. Anal.* 23, no 4, (1992), 950-958.
- [40] J. Céa, Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *M.A.A.N*, 20, 3, (1986), 371-402.
- [41] D. J. Cedio-Fengya, S. Moskow and M. S. Vogelius, Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction, *Inverse problems*. 14, (1998), 553-595.
- [42] S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua, J. Leblond, Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in two-dimensional Laplace inverse problems, *Inverse Problems*, 20, (2004), 47-59.
- [43] S. Chaabane, I. Feki, Optimal logarithmic estimates in Hardy-Sobolev spaces  $H^{k,\infty}$ , *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 347, (2009), 1001-1006.
- [44] S. Chaabane, M. Joua and J. Leblond , Parameter identification for Laplace equation and approximation in Hardy classes, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 66, (2004), 367-383.
- [45] I. Chalendar and J. R. Partington, Approximation problems and representation of Hardy spaces in circular domains, *Studia Math.* 136, (1999), 255-269.
- [46] I. Chalendar, J. Leblond, and J. Partington, Approximation problems in some holomorphic spaces with applications, *Systems, Approximation, singular integral Operators and Related Topics*, Proceeding of IWOTA, (2000), 143-168.
- [47] G. Chen and J. Zhou, Boundary element method, computational mathematics and applications.
- [48] J. Cheng, Y. C. Hon, M. Yamamoto, Conditional stability estimation for an inverse boundary problem with non-smooth boundary in  $\mathbb{R}^3$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* 353,

- (2001), 4123-4138.
- [49] R. Correa, A. Seeger, Directional derivative of a minmax function, *Nonlinear Analysis, Theory method and applications* 9, (1985).
- [50] R. Dautray, J-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques : volume 2*, 1987.
- [51] M. C. Delfour, J-P. Zolésio, Shape Sensitivity analysis via min max differentiability, *SIAM Journal of Control and Optimization*, volume 26, n° 4, (1988), 834-862.
- [52] M. C. Delfour, J-P. Zolésio, *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, *Advanced in design and control*, SIAM 2002.
- [53] M. C. Delfour, J-P. Zolésio, Dérivation d'un Min Max et application à la dérivation par rapport au contrôle d'une observation non différentiable de l'état, *C.R, Acad. Sc. Paris* 302, Sér.I (1986), 571-574.
- [54] P. L. Duren, *Theory of  $H^P$  space*, Academic press, 1970.
- [55] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, (1998).
- [56] I. Ekeland and R. Temam : *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars, Bordas, Paris, Bruxelles, Montreal, 1974.
- [57] G. Eskin, J. Ralston, On the inverse boundary value problem for linear isotropic elasticity, *Inverse problems* 18, (2002), 907-921.
- [58] A. Fridmann, M. Vogelius : Determining cracks by boundary measurements, *Indiana University Mathematics Journal* Vol 38, 3, (1989), 527-556.
- [59] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, New-York, 1983.
- [60] M. S. Gockenbach, A. A. Khan, Identification of Lamé parameters in linear elasticity : A fixed point approach, *Journal of Industrial and management optimization* 1, 4, (2005), 487-497.
- [61] J. Grimm, Rational approximation of transfer functions in the Hyperion software, *Rapport de recherche 4002*, INRIA 2000.

- 
- [62] P. Henrici, Applied and Computational Analysis. Vol. 3. Wiley-interscience, 1993.
- [63] P. Henrici, Applied and computational complex analysis, volume 1.
- [64] M. Ikehata, Size estimation of inclusion, J. Inverse Ill-Posed Probl. 6, (1998), 127-140.
- [65] M. Jaoua, J. Leblond, M. Mahjoub and J. R. Partington, Robust numerical algorithms for the solution of Cauchy-type inverse problems in annular domains, J. App. Math, 74 (4), (2009), 481-506.
- [66] H. Kang and J. Seo, A note on uniqueness and stability for the inverse conductivity problem with one measurement, J.Korean Math. Soc. 38, N. 4, (2001), 781-792.
- [67] J. B. Keller. Inverse problems, Amer. Math. Monthly, 83, (1976), 107-118, .
- [68] H. Kim and J. K. Seo, Unique determination of a collection of a finite number of cracks from two boundary measurements, SIAM J. Math.Anal 27, no 5,(1996), 1336-1340 .
- [69] H. Kim and J. K. Seo, Identification problems in linear elasticity, J. Math. Anal. Appl, 215, (1997), 1-24.
- [70] A. Kirsch, The factorization method for a class of inverse elliptic problems. Math. Nachr, 278, N° 3, (2005), 258-277 .
- [71] J. Leblond and J. R. Partington, constrained approximation and interpolation in Hilbert functions spaces , Journal of Mathematical analysis and Applications, 234, 2, (1999), 500-513.
- [72] J. Leblond, J-P. Marmorat and J. R. Partington, Analytic approximation with real constraints with application to real diffusion problems, J. Inv. ILL- Posed Problems, 16, (2008), 89-105.
- [73] J. Leblond, M. Mahjoub and J R.Partington, Analytic extensions and Cauchy-type inverse problems on annular domains : Stability results, J of inverse and Ill-posed prob, volume 14, (2006), 189-204.
- [74] D. Lesnic, L. Elliott and D. B. Ingham, An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation, Engineering Analysis with boundary elements, Vol 20, (1997), 123-133.

- 
- [75] J. L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1 Dunod .
- [76] M. Mahjoub, Approximation Harmonique dans une couronne et application à la résolution numérique de quelques problèmes inverse. Thèse de doctorat, École nationale d'ingénieurs de Tunis, 2008.
- [77] F. Mandréa. Comportement asymptotique des pôles d'approximants rationnels et méromorphe : Application au problème inverse du Laplacien 2D, Thèse de Doctorat (2001).
- [78] A. Martinez-Finkelshtein, Equilibrium problems potential theory in the complex plane. Universid Carlos III de Madrid, summer school 2004.
- [79] M. Masmoudi, The topological Asymptotic, Computational Methods for Control Applications, ED. H. Kawarada and J. Periaux, International series GAKUTO, 2002.
- [80] J. McLaughlin and J. R. Yoon, unique identifiability of elastic parameters from time dependent interior displacement measurement, Inverse problems, 20 (2004), 25-45.
- [81] H. Meftahi and F. Wielonsky, Growth estimates in the Hardy-Sobolev space of an annular domain with applications, J. Math, Anal and Appli. 358, (2009), 98-109.
- [82] H. Meftahi, Étude d'un problème inverse relié à la détection de fissures par des techniques d'approximations dans le plan complexe, Mémoire de DEA, Lille1, (2004).
- [83] N. I. Mushkelishvili : Some basic problems of mathematical theory of elasticity, Nordhoff (1963).
- [84] A. A. Oberai, N. H. Gokhale and G. R. Feijóo, Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method, Inverse problems, 19, (2003), 297-313.
- [85] O. Pantz : Sensibilité de l'équation de la chaleur aux sauts de conductivité, C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I 341, (2005).
- [86] O. G. Parfenov, Estimates of the singular numbers of a Carleson operator, Math. Sb. 131 (173), 1986, 501-518; English tranl. In Math. USSR Sb 59, (1988).
- [87] O. Pironneau. Optimal shape design for elliptic system. Springer : New York, 1992.
- [88] C. Pommerenke, Boundary Behavior of Conformal Maps, Springer Verlag, Berlin, New York, 2003.

- 
- [89] T. Radó, The problem of the least area and the problem of Plateau, *Math. Z.* 32, (1930), 763-796.
- [90] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge university Press (1995).
- [91] W. Rudin, Analytic functions of class  $H_p$ . *Trans. Amer. math. Soc.* 78, (1955), 46-66.
- [92] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*, Masson (1978).
- [93] D. E. Sarason, The  $H_p$  spaces of an annulus, *Mem. Amer. Math. Soc.* 56, (1965), 1-78.
- [94] E. B. Saff and V. Totik. Logarithmic potential with external field, volume 316 of *Grundlehren der math. Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1997.
- [95] F. Santosa et M. Vogelius, A computational algorithm for determining cracks from electrostatic boundary measurements, *Int. J. Eng. Science*, 29, no 8, (1991), 917-939.
- [96] A. Schumacher, *Topologieoptimisierung von Bauteilstrukturen unter Verwundung von Lochenpositionierungskriterien*, Thesis, Universität-Gesamthochschule-Siegen, 1995.
- [97] M. P. Smith, The spectral theory of Toeplitz operators applied to approximation problems in Hilbert spaces, *Constructive approximation*, 22, (2005), 47-65.
- [98] J. Sokolowski and J-P. Zolézio. *Introduction to shape optimization*. Springer : Berline, Heiderlberg, New york, 1992.
- [99] A. Souissi, *Quelques problèmes d'optimisation de formes en hydrodynamique*. Thèse de Ph.D, Université Laval, Quebec, Canada, décembre, 1986.
- [100] E. J. Specht, Estimates of the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1951), 183-196.
- [101] M. E. Taylor, *Partial differential equations I, Basic theory*, Springer Verlag, New-York, 1996.
- [102] F. Wielonsky, *Approximation rationnelle dans l'espace de Hardy du disque, interpolation rationnelle de la fonction exponentielle et approximation de Hermite-Padé*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Lille, 2002.
- [103] N. Young, *An introduction to Hilbert space*, Cambridge university press 1988.

- 
- [104] J-P. Zolésio : Identification de domaine, Thèse de doctorat d'état, Nice 1979.
- [105] J-P. Zolésio, The material derivative in shape optimization, in "Optimization of Distributed Parameter Structure", J. Cea and E.J. Haug Eds, Stijthof and Noordhof, (1981), 1089-1194.