N° ORDRE : 4385

Université Lille 1 Sciences et Technologies
École Doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences de l'Université Lille 1

présentée par **Amandine SALDANA**

le 29 Juin 2009

Discipline : **Mathématiques Pures**

Séries de Dirichlet à deux variables et distribution des valeurs de fonctions arithmétiques

Directeur de thèse : Olivier RAMARÉ

Membres du Jury

Rapporteur	Michel BALAZARD	Chargé de Recherche CNRS, LMD Luminy
Président	Antal BALOG	Professeur, János Bolay Math. Soc., Hongrie
Examinateur	Jean-Marie DE KONINCK	Professeur, Université de Laval, Canada
Examinateur	Hervé QUEFFÉLEC	Professeur, Université Lille 1
Directeur	Olivier RAMARÉ	Chargé de Recherche CNRS, Université Lille 1
Rapporteur	Imre RUZSA	Professeur, János Bolay Math. Soc., Hongrie
Rapporteur	Jan-Christoph SCHLAGE-PUCHTA	Professeur, Université de Gand, Belgique

Résumé

Nous traitons deux problèmes liés aux séries de Dirichlet. Nous étudions d'abord le prolongement analytique d'une certaine classe de séries de Dirichlet à deux variables :

$$g(s_1, s_2, a, r) = \sum_{d \geqslant 1} \frac{r(d)}{a(d)^{s_1} d^{s_2}},$$

où $a(d)$ est une fonction multiplicative strictement positive et $r(d)$ est une fonction multiplicative. Nous démontrons, sous certaines hypothèses, un théorème général qui permet d'approcher cette série de Dirichlet par une série connue, modulo une autre série pour laquelle nous obtenons des majorations très précises.

Nous utilisons ensuite cet outil pour obtenir des résultats quantitatifs sur la distribution des valeurs de fonctions arithmétiques. Sous certaines hypothèses sur les fonctions $a(d)$ et $r(d)$, nous déterminons

$$\lim_{X \mapsto \infty} \frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) \quad (0 < z \leqslant X)$$

et mesurons la vitesse de convergence vers la loi limite. La classe de fonctions $a(d)$ est beaucoup plus large que celle considérée jusqu'à maintenant. L'introduction de $r(d)$ semble nouvelle.

Mots clés : séries de Dirichlet, produits eulériens, fonctions multiplicatives, prolongement analytique, distribution limite, transformées de Mellin et de Fourier, fonction Zêta de Riemann, fonction de concentration, crible pondéré.

Classification Mathématique primaire : 11M41, 11N25, 11N37, 11N60, 11N64, 30B50, 32A99

Classification Mathématique secondaire : 11K65, 11N35, 11N36

Abstract

Dirichlet series with two variables and distribution of values of arithmetical functions

We deal with two problems related to Dirichlet series. First we study the analytic continuation of a class of Dirichlet series with two variables :

$$g(s_1, s_2, a, r) = \sum_{d \geqslant 1} \frac{r(d)}{a(d)^{s_1} d^{s_2}},$$

where $a(d)$ is a positive multiplicative function and $r(d)$ is a multiplicative function. We prove, under certain hypotheses, a general theorem which allows us to approach this Dirichlet series by a known series, modulo another series for which we get very precise upper bounds.

Then we use this tool to get quantitative results on the distribution of values of arithmetical functions. Under certain hypotheses on the functions $a(d)$ and $r(d)$, we determine

$$\lim_{X \mapsto \infty} \frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) \quad (0 < z \leqslant X)$$

and estimate the rate of convergence to the limit distribution. The class of functions $a(d)$ is much wider than that considered so far. The introduction of $r(d)$ seems to be new.

Keywords : Dirichlet series, Euler products, multiplicative functions, analytic continuation, limit distribution, Mellin and Fourier transforms, Riemann Zeta function, concentration function, weighted sieve.

Primary Mathematics Classification : 11M41, 11N25, 11N37, 11N60, 11N64, 30B50, 32A99

Secondary Mathematics Classification : 11K65, 11N35, 11N36

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Olivier Ramaré qui a encadré cette thèse mais aussi mon mémoire de DEA. Je lui suis infiniment reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordée pour mener à bien ce travail de thèse et sa grande disponibilité.

Je remercie Antal Balog qui me fait aujourd'hui l'honneur de présider mon jury.

Je remercie Michel Balazard, Imre Ruzsa et Jan-Christoph Schlage-Puchta d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. J'ai été sensible à leurs remarques qui ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit.

Je remercie Hervé Queffélec et Jean-Marie de Koninck pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie l'ensemble des membres du laboratoire Paul Painlevé sans oublier le personnel de la bibliothèque de mathématiques, des secrétariats et de la reprographie dont l'aide m'a été précieuse. Merci à toutes les personnes qui m'ont accompagné lors de mon monitorat, en particulier Stéphane Malek qui a accepté d'être mon tuteur pédagogique.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des doctorants ou anciens doctorants que j'ai pu côtoyer durant cette thèse. En particulier, merci à Patrick toujours présent, à Alexis pour avoir relu ma thèse, à Benoît pour l'aide qu'il m'a apportée dans les démarches administratives, à Anne et Fabien pour leurs conseils lors de ma soutenance blanche et à mes collègues du bureau 114 Saja, Manal, Youcef, Raphaël, Houcine et Qidi.

Je ne saurais oublier dans mes remerciements les personnes qui ont été mes enseignants au Lycée Henri Wallon de Valenciennes, en classes préparatoires et à l'Université de Lille 1. Je pense en particulier à M. Verrier, Mme Delcourt, Mme Marsalle, M. Suquet et Mme Queffélec.

Je souhaite enfin remercier mes amis et ma famille pour leur présence et leur soutien, en particulier mes parents sans qui je ne serais pas arrivée jusque là. Merci pour tout...

Table des matières

Introduction

Au niveau du crible pondéré, il apparaît des sommes comme $\sum_{d\leqslant D} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)+X\sigma(d)}$. Il est clair que cette somme dépend de la façon dont les valeurs des fonctions $\varphi(d)$ et $\sigma(d)$ se répartissent. Nous montrons plus loin que la quantité qui intervient est la fonction de distribution de $\sigma(d)/\varphi(d)$. Dans le même esprit, Selberg utilise dans [Sel91] $\sum_{\sigma(d)\leqslant Z} \mu^2(d)\frac{\sigma(d)}{\varphi(d)}\left(1-\frac{\sigma(d)}{Z}\right)$ (voir aussi Ramaré et Schlage-Puchta [RSP08]).
Nous voyons aussi sur ce problème qu'il est souhaitable d'utiliser ici des méthodes qui s'intègrent plus facilement au milieu d'autres démonstrations.

Nous proposons ici d'aborder ce genre de problèmes via des séries de Dirichlet d'un type particulier :

$$g(s_1, s_2, a, r) = \sum_{d\geqslant 1} \frac{r(d)}{a(d)^{s_1} d^{s_2}}, \tag{0.1}$$

où $a(d)$ est une fonction multiplicative strictement positive et $r(d)$ est une fonction multiplicative.
Dans notre exemple, il faut prendre $a(d) = \sigma(d)/\varphi(d)$ et $r(d) = \mu^2(d)/\varphi(d)$.
Ce n'est que dans la dernière décennie que les séries de Dirichlet sont intervenues de manière cruciale dans la résolution de certains problèmes ; le résultat le plus emblématique étant de celui de Goldston, Pintz et Yildirim sur les petits écarts entre les nombres premiers [GPY07].

Bateman, en 1972 [Bat72], a déjà utilisé ce genre d'outils mais avec une seule variable ; il considère

$$g(s) = \sum_{d\geqslant 1} \frac{1}{\varphi(d)^s} = \zeta(s)h(s)$$

où

$$h(s) = \prod_{p\geqslant 2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right).$$

Dans une première partie, nous étudions la série de Dirichlet définie par (0.1). Nous démontrons qu'avec certaines hypothèses sur les fonctions a et r, la fonction $g(s_1, s_2, a, r)$ se prolonge analytiquement jusque $\Re s_2 > 0$ et nous obtenons une majoration de $|g(s_1, s_2, a, r)|$ dans le domaine $\alpha \leqslant \Re s_1 \leqslant \beta$, $\Re s_2 \geqslant (\nu+1)^{-1} + \eta$ et $\Re s_2 \geqslant 1/2^{\mu+1} + \eta$ (α et β deux réels, μ et ν deux entiers $\geqslant 0$ et $\eta > 0$). Bien que ces résultats ne soient pas surprenants, leur preuve est particulièrement compliquée. Notons d'ailleurs qu'ils sont optimaux (au moins lorsque $\nu = 1$). Dans le cas particulier de $g(s) = \sum_{d \geqslant 1} \varphi(d)^{-s}$, Velásquez Castañón [VC08] a déjà obtenu ces résultats ainsi qu'un prolongement au demi-plan $\Re s > -1$ privé d'un système de demi-droites horizontales.

Nous nous sommes ensuite demandés à quel point la théorie des distributions limites de fonctions multiplicatives pouvait être décrite par ces objets. L'outil classique est la transformée de Fourier de la distribution limite (si elle existe) et la série $g(s_1, s_2, a, r)$ est certainement plus riche.

Nous arrivons effectivement mais avec des hypothèses assez fortes sur a et r (nous n'avons pas essayé de les amoindrir) à calculer $\sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d)$.

Nous obtenons par exemple, pour la classe de fonctions considérée, une mesure de la vitesse de convergence vers la loi limite. Des résultats partiels avaient déjà été obtenus par Fainleib [Fai68] sous des conditions diophantiennes.

Notre méthode mène à un résultat plus faible mais optimal dans notre cadre (qui englobe celui de Fainleib).

À partir de la troisième partie, nous considérons trois réels $0 < m < M$ et $\theta > 0$ ainsi qu'une fonction $\tilde{r}(d)$ définie et bornée sur les nombres premiers. Nous supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses suivantes :

$(H_1(a, B_0))$: il existe une fonction b telle que $\forall p \geqslant 2, a(p)^{-1} = 1 + b(p)/p$ et $\sup_{p \geqslant 2} |b(p)| \leqslant B_0$;

$(H_2(a, m, M))$: $\forall p \geqslant 2, \forall k \geqslant 1, m \leqslant a(p^k) \leqslant M$;

$(H_3(r, \tilde{r}, Q))$: il existe une fonction q telle que $\forall p \geqslant 2, r(p) = \tilde{r}(p) + q(p)/p$ et $\sup_{p \geqslant 2} |q(p)| \leqslant Q$;

$(H_4(r, R))$: $\forall p \geqslant 2, \forall k \geqslant 1, r(p^k)$ bornée avec $\sup_{p \geqslant 2, k \geqslant 1} |r(p^k)| \leqslant R$;

$(H_5(a, R, Q, \theta))$: pour tout réel $N > \max(Q, R)$ et pour tout premier p tel que $\max(Q, R) < p \leqslant N$, $N^{-\theta} \ll |\log a(p)|$.

Nous allons, en particulier, étudier le cas où $\tilde{r}(p) = 1$ et $\tilde{r}(p) = -1$, c'est ce qui fait l'objet des chapitres 8 et 9. Nous obtenons les théorèmes suivants :

Théorème 0.1
Supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a, B_0)$, $H_2(a, m, M)$,

$H_3(r,1,Q)$, $H_4(r,R)$ et $H_5(a,R,Q,\theta)$. Il existe une constante $B = B(R,m,M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 16$, $0 < z \leqslant X$ et $\Pi(P_0,P)$ défini à la page 95,

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) = \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \mathcal{O}\Big(z\exp\left(-B\sqrt{\log X}\right) + \frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\Big).$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Théorème 0.2
Supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a,B_0)$, $H_2(a,m,M)$, $H_3(r,-1,Q)$, $H_4(r,R)$ et $H_5(a,R,Q,\theta)$. Il existe une constante $B = B(R,m,M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 3$ et $0 < z \leqslant X$,

$$\frac{1}{X}\Bigg|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Bigg| \ll z\exp\left(-B\sqrt{\log X}\right) + \frac{1}{(\log\log X)^{1/2}}.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

La première étape de la démonstration consiste à séparer le comportement général de l'effet des points sur le bord en introduisant une fonction lisse f ; nous écrivons l'égalité suivante :

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) = \sum_{d\leqslant X} r(d) f\left(\frac{a(d)}{z}\right) + \mathcal{O}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant X\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)|\Big).$$

L'essentiel de l'étude du terme d'erreur est réglé par les majorations obtenues par les approximations faites dans la première partie.
La difficulté majeure est dans l'estimation de la somme

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)|.$$

Nous l'obtenons grâce à l'inégalité que nous nommons inégalité du produit oscillant et démontrée au chapitre 5. Tout ceci nous mène au théorème suivant :

Théorème 0.3
Supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a,B_0)$, $H_2(a,m,M)$, $H_3(r,\pm1,Q)$, $H_4(r,R)$ et $H_5(a,R,Q,\theta)$. Il existe une constante $B = B(R,m,M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 2$, $z > 0$ et τ un réel > 1,

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)| \ll \frac{X}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{X\exp\left(-B\sqrt{\log X}\right)}{\log\tau}.$$

La constante intervenant dans la notation $\ll$ dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Dans le chapitre 6, nous expliquons comment améliorer cette majoration en considérant à la place de l'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ une condition de séparation, introduite par Fainleib dans [Fai68], que nous vérifions en général à l'aide de propriétés diophantiennes :

$$|\log a(n) - \log a(m)| \geqslant (nm)^{-\theta},$$

pour une certaine constante $\theta \geqslant 1$ et des entiers $n \neq m$, n et m sans facteurs carrés. Davenport [Dav33] et Schoenberg [Sch28] avaient déjà remarqué l'intérêt des propriétés diophantiennes dans ce genre de problèmes.
L'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ nous permet cependant de considérer une classe de fonctions $a(d)$ beaucoup plus large que celle de Fainleib. Dans la partie II, nous comparons ainsi sur divers exemples notre hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ avec la condition diophantienne de Fainleib.

Nous remarquons qu'il est possible d'appliquer cette méthode dans le but d'estimer d'autres distributions limites comme $\displaystyle\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ da(d)\leqslant Xz}} r(d)$ ou, par l'utilisation de la formule de Mellin-Barnes, des sommes pouvant apparaître dans les problèmes de crible $\displaystyle\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}$ $(D \geqslant 1$ et $X > 0)$. Ces deux applications font l'objet de la partie V.

Dans la dernière partie, nous étendons la notion de fonction de concentration à celle de fonction de concentration pondérée en considérant :

$$Q_h(r, X) = \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{X}\Big|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ u\leqslant \log a(d)\leqslant u+h}} r(d)\Big|.$$

Nous obtenons, en particulier, un résultat analogue à celui de Halàsz dans [Hal75] concernant la distribution des entiers $d \leqslant X$ tels que $a(d) = z$:

Théorème 0.4
Supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a, B_0)$, $H_2(a, m, M)$, $H_3(r, \pm 1, Q)$, $H_4(r, R)$ et $H_5(a, R, Q, \theta)$. Pour $X \geqslant 3$ et $z > 0$, nous avons

$$\Big|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)=z}} r(d)\Big| \ll \frac{X}{\sqrt{\log\log X}}.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Ce théorème est optimal.

Terminons cette introduction en énonçant des résultats bien spécifiques et nouveaux qui sont des applications des théorèmes 0.1 et 0.2 :

Corollaire 0.5
Pour $X \geqslant 3$ et $0 < z \leqslant X$, nous avons

$$\sum_{\substack{d \leqslant X \\ \frac{\sigma(d)}{d} \leqslant z}} \mu(n) = o(X).$$

Corollaire 0.6
Il existe une fonction $F(z)$ telle que pour $X \geqslant 3$ et $0 < z \leqslant X$,

$$\frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ \frac{\sigma(d)}{\varphi(d)} \leqslant z}} 1 = F(z) + \mathcal{O}\left(\frac{\log\log\log X}{\sqrt{\log\log X}}\right),$$

où le $\mathcal{O}$ dépend de z.

Corollaire 0.7
Supposons que la fonction multiplicative $r(d)$ vérifie les hypothèses $H_3(r, 1, Q)$ et $H_4(r, R)$. Pour $z > 0$ et $\Pi(P_0, P)$ défini à la page 95, la limite, lorsque $P \mapsto \infty$, de

$$\prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{d \mid \Pi(P_0, P) \\ \frac{\sigma(d)}{\varphi(d)} \leqslant z}} \frac{r(d)}{d}$$

existe.

Première partie

Extension du domaine de définition d'une série de Dirichlet multiplicative et majoration dans ce domaine

Chapitre 1

Extension du domaine

Les deux premiers chapitres sont issus d'un article soumis en décembre 2008 au Journal of Number Theory.

1.1 Introduction

L'étude du prolongement analytique de produits eulériens a suscité et suscite encore un grand intérêt auprès de nombreux mathématiciens. En 1952, Dahlquist [Dah52] a prouvé que si F est une fonction analytique avec des singularités isolées à l'intérieur du cercle unité et vérifiant $F(0) = 1$, alors $\prod_{p\geqslant 2} F(p^{-s})$ possède un prolongement méromorphe au demi-plan $\Re s > 0$. En 1972, la relation $g(s) = \sum_{n\geqslant 1} \varphi(n)^{-s} = \zeta(s)h(s)$, où

$$h(s) = \prod_{p\geqslant 2}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} - \frac{1}{p^s}\right) \tag{1.1}$$

fournit à Bateman [Bat72] un prolongement analytique de $g(s)$ au demi-plan $\Re s > 0$ dont la seule singularité est un pôle simple, de résidu $\zeta(2)\zeta(3)\zeta(6)^{-1}$, en $s = 1$.
En 1991, Selberg [Sel91] utilise une approximation similaire de la série de Dirichlet

$$g(s) = \sum_{(n,Q)=1} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}\sigma(n)^{1-s} = \zeta(s)h(s),$$

où $\sigma(d)$ et $\varphi(d)$ représentent respectivement la somme des diviseurs positifs de l'entier d et la fonction d'Euler, Q le produit de tous les premiers plus petits que q, avec q premier, et

$$h(s) = \prod_{p\leqslant q}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\prod_{p>q}\left(1 + \frac{1}{p-1}(p+1)^{1-s}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

lui permettant d'obtenir, pour $Z > 1$, les estimations des sommes suivantes :

$$\sum_{\substack{\sigma(d)\leqslant Z\\(d,Q)=1}} \mu^2(d)\frac{\sigma(d)}{\varphi(d)}\left(1 - \frac{\sigma(d)}{Z}\right),$$

$$\sum_{\substack{\sigma(d)\leqslant Z\\(d,Q)=1}} \mu^2(d)\frac{1}{\varphi(d)}\left(1-\frac{\sigma(d)}{Z}\right)$$

et

$$\sum_{\substack{\sigma(d)\leqslant Z\\(d,Q)=1}} \mu^2(d)\frac{1}{\varphi(d)}\left(1-\frac{\sigma(d)}{Z}\right)^2.$$

Dans une autre direction, en 2007, Bhowmik, Essouabri et Lichtin [BEL07] ont généralisé les propriétés de prolongement méromorphe à des séries de Dirichlet à plusieurs variables qui possèdent un développement en produit eulérien absolument convergent dans un domaine ouvert de $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$.

Dans cette partie, nous nous intéressons à une classe différente de séries de Dirichlet à deux variables. Plus précisément, pour p_0 un entier $\geqslant 2$, $0 < m \leqslant M$, $\tilde{r}(d)$, $b(d)$ et $q(d)$ des fonctions bornées sur les puissances de nombres premiers plus grands que p_0, nous considérons la classe de fonctions $\mathcal{C}(p_0, m, M, \tilde{r}, b, q)$. Nous disons qu'un couple de fonctions $(a, r) \in \mathcal{C}(p_0, m, M, \tilde{r}, b, q)$ si $a(d)$ est une fonction multiplicative strictement positive et $r(d)$ une fonction multiplicative vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) $\forall p \geqslant p_0, \forall k \geqslant 1, m \leqslant a(p^k) \leqslant M$;

(2) $\forall p \geqslant p_0, \forall k \geqslant 1, a(p^k)^{-1} = 1 + \dfrac{b(p^k)}{p}$;

(3) $\forall p \geqslant p_0, \forall k \geqslant 1, r(p^k) = \tilde{r}(p^k) + \dfrac{q(p^k)}{p}$.

Nous étudions alors, pour $s_1 = \sigma_1 + it_1$ et $s_2 = \sigma_2 + it_2$, la série de Dirichlet :

$$g(s_1, s_2, a, r) = \sum_{d\geqslant 1}\frac{r(d)}{a(d)^{s_1}d^{s_2}} = \prod_{p\geqslant 2}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1}p^{ks_2}}\right) = \prod_{p\geqslant 2} g_p(s_1, s_2, a, r). \tag{1.2}$$

Concernant les fonctions a et r, nous avons opté pour des conditions individuelles et non en moyenne sur $a(p^k)$ et $r(p^k)$ par simplicité et parce que c'est ce que nous trouvons le plus souvent dans la pratique. Moralement, nous estimons que $\tilde{r}(d)$ est un modèle connu de $r(d)$ et que $a(d)^{s_1}$ va se comporter comme 1. De façon plus précise, la fonction $\tilde{r}(d)$ apparaît comme une approximation de la fonction $r(d)a(d)^{-s_1}$. L'uniformité de nos résultats permettrait de changer la définition de $\tilde{r}$ pour se ramener à ce cas-là.
Notons, pour ν et μ deux entiers $\geqslant 0$, $\alpha \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$ (α, β deux réels) et $k \geqslant 1$,

$$A = \max(m^{-\alpha}, m^{-\beta}, M^{-\alpha}, M^{-\beta}) \sup_{p\geqslant p_0, k\geqslant 1} |r(p^k)| + \sup_{p\geqslant p_0, k\geqslant 1} |\tilde{r}(p^k)|, \tag{1.3}$$

$$P = \max\left((2A)^{2^{\mu+1}}(\nu+1)^{2^{\mu+2}}, A^{\nu+1}(3\nu)!\,2^{3\nu+2}, 2\big(\Gamma_\infty(\nu)A^\nu\big)^{2^{\mu+1}}, p_0\right). \tag{1.4}$$

L'expression de $\Gamma_\infty(\nu)$ sera donnée au cours de la démonstration (chapitre 2, lemme 2.1). Nous avons, par exemple $\Gamma_\infty(1) = \Gamma_\infty(2) = 1$.

Écrivons alors

$$g(s_1, s_2, a, r) = \prod_{p \leqslant P} \frac{g_p(s_1, s_2, a, r)}{g_p(s_1, s_2, 1, \tilde{r})} g(s_1, s_2, 1, \tilde{r}) h_P^{\natural}(s_1, s_2, a, r, \tilde{r}).$$

Voici les théorèmes que nous obtenons :

Théorème 1.1
Soit $(a, r) \in \mathcal{C}(p_0, m, M, \tilde{r}, b, q)$. *Pour* $\alpha \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$, *si les produits eulériens*

$$\prod_{p \leqslant P} \frac{g_p(s_1, s_2, a, r)}{g_p(s_1, s_2, 1, \tilde{r})} \quad \textit{et } g(s_1, s_2, 1, \tilde{r}) \tag{1.5}$$

se prolongent analytiquement jusque $\Re s_2 > \max\left(2^{-\mu-1}, (\nu+1)^{-1}\right)$ *alors* $g(s_1, s_2, a, r)$ *se prolonge analytiquement jusque* $\Re s_2 > \max\left(2^{-\mu-1}, (\nu+1)^{-1}\right)$.

En 2008, Velásquez Castañón [VC08] démontre que le domaine maximal de méromorphie d'une certaine classe de séries de Dirichlet est un ensemble dense, ouvert et simplement connexe du demi-plan $\Re s > -1$ (le demi-plan $\Re s > -1$ privé d'un système de demi-droites horizontales). Cependant, la classe de séries de Dirichlet qu'il étudie est plus restreinte que celle que nous considérons ici. En effet, avec les notations que nous avons choisies ici, Velásquez Castañón [VC08] s'intéresse à la série de Dirichlet $g(s, s, a, 1)$ où $s \in \mathbb{C}$ et $a(d)$ est une fonction multiplicative positive vérifiant pour p premier et $k \geqslant 1$ entier

$$a(p^k) = 1 - \frac{\lambda}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

où λ est une constante réelle non nulle. Sa technique est similaire à la nôtre : elle consiste à multiplier le produit eulérien par des puissances de dilatations $s \to \zeta(ns)$, $n > 0$ de la fonction Zêta de Riemann, de façon à forcer la convergence du produit résultant dans un domaine plus large.

Théorème 1.2
Soit $(a, r) \in \mathcal{C}(p_0, m, M, \tilde{r}, b, q)$. *Si* $\alpha \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$, $\sigma_2 \geqslant (\nu+1)^{-1} + \eta$ *et* $\sigma_2 \geqslant 1/2^{\mu+1} + \eta$, *avec* $\eta > 0$, *il existe une constante* $B = B(\mu, \nu, m, M, \alpha, \beta, \eta, b, q, \tilde{r}, p_0)$ *telle que*

$$\begin{aligned}
|h_P^{\natural}(s_1, s_2, a, r, \tilde{r})| &\leqslant B \log^B(2+|s_1|) \exp\left(B \frac{(2+|s_1|)^{(1-\sigma_2)\nu}}{(1-\sigma_2)\nu \log(2+|s_1|)}\right) \\
&\qquad \textit{si } \sigma_2 < 1 - \frac{\log\left(\nu \log(2+|s_1|)\right)}{\nu \log(2+|s_1|)}, \\
&\leqslant B \exp\left(\frac{B\nu \log(2+|s_1|)}{\log\left(\nu \log(2+|s_1|)\right)}\right) \\
&\qquad \textit{si } \sigma_2 \geqslant 1 - \frac{\log\left(\nu \log(2+|s_1|)\right)}{\nu \log(2+|s_1|)}.
\end{aligned}$$

1.1.1 Optimalité

Nous ne savons pas si ce résultat est optimal. À titre de comparaison, en 1980, Queffélec [Que80] considère le produit eulérien $G(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\epsilon_n p_{2n-1}^{-s}}{1-\epsilon_n p_{2n}^{-s}}$ où $\{p_1, ..., p_n, ...\}$ désigne l'ensemble des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant et (ϵ_n) une suite de variables de Rademacher $\in \{\pm 1\}$ indépendantes ; il obtient ce type de croissance :

$$\lambda(G,\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > 1 \\ 1-\sigma & \text{si } 0 < \sigma \leqslant 1, \end{cases}$$

où pour une fonction f analytique dans un demi-plan vertical,

$$\lambda(f,\sigma) = \inf\{\xi \geqslant 0 / f(\sigma+it) = \mathcal{O}\big(e^{B|t|^{\xi}}\big) \text{ quand } |t| \to \infty\},$$

pour une certaine constante B.
Historiquement, signalons que Bateman [Bat72] établit, par une méthode analytique et pour $s = \sigma + it$, la majoration ($h(s)$ étant définie par (1.1))

$$h(s) \ll \exp\{50|t|^{1-\sigma} \log\log|t|\}$$

pour $|t| \geqslant 8$, $1/3 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Il en déduit, à l'aide de la formule de Perron, l'estimation

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant Z} 1 - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} Z \ll Z e^{-c\sqrt{\log Z \log\log Z}},$$

pour toute constante $c < 1/\sqrt{2}$.
En 1990, Balazard et Smati [BS90] ont montré que l'on pouvait retrouver cette majoration par une autre méthode élémentaire, reposant sur la décomposition canonique $n = ab$ où les facteurs premiers de a sont tous $\leqslant y$ alors que ceux de b sont $> y$.
Enfin, en 1998, Balazard et Tenenbaum [BT98] améliorent la majoration de $h(s)$ grâce à l'étude de sommes d'exponentielles du type

$$S_N = \sum_{M<p\leqslant N} (p-1)^{it}$$

avec $M < N \leqslant 2M$ et $|t|$ grand en fonction de M. Cela leur permet d'établir le résultat suivant : il existe une constante positive a telle que

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant Z} 1 - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} Z \ll Z \exp\left(-a\frac{(\log Z)^{3/5}}{(\log\log Z)^{1/5}}\right).$$

Une hypothèse de rationnalité en p concernant les $g_p(s_1, s_2, a, r)$ permettrait certainement d'améliorer aussi notre résultat. Il est moins évident de pouvoir dire dans quelle mesure.

1.1.2 Une expression plus détaillée

Nous pouvons donner une expression complète de la fonction $h_P^\natural(s_1, s_2, a, r, \tilde{r})$. Définissons

$$Y_k = Y_k(p, s_1) = \sum_{\substack{(\ell_1,...,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} C(\ell_1, ..., \ell_k) \prod_{i=1}^k \frac{r(p^{\ell_i})}{a(p^{\ell_i})^{s_1}}, \tag{1.6}$$

$$\tilde{Y}_k = \tilde{Y}_k(p) = \sum_{\substack{(\ell_1,...,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} C(\ell_1, ..., \ell_k) \prod_{i=1}^k \tilde{r}(p^{\ell_i}), \tag{1.7}$$

$$R_\nu = R_\nu(p, s_1, s_2) = \sum_{w \geqslant 0} \Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,...,\ell_{w+\nu+1})/\\ \sum_{i=1}^{w+\nu+1} \ell_i = w+\nu+1}} C(\ell_1, ..., \ell_{w+\nu+1}) \prod_{i=1}^{w+\nu+1} \frac{r(p^{\ell_i})}{a(p^{\ell_i})^{s_1}} \Bigg) \frac{1}{p^{ws_2}} \tag{1.8}$$

et

$$\tilde{R}_\nu = \tilde{R}_\nu(p, s_2) = \sum_{w \geqslant 0} \Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,...,\ell_{w+\nu+1})/\\ \sum_{i=1}^{w+\nu+1} \ell_i = w+\nu+1}} C(\ell_1, ..., \ell_{w+\nu+1}) \prod_{i=1}^{w+\nu+1} \tilde{r}(p^{\ell_i}) \Bigg) \frac{1}{p^{ws_2}} \tag{1.9}$$

où les $C(\ell_1, ..., \ell_k)$ sont des cœfficients entiers universels définis à la proposition 1.8. En particulier, ils sont indépendants des fonctions a, r et $\tilde{r}$, des variables s_1 et s_2 et des paramètres μ et ν.
Nous avons alors

$$h_P^\natural(s_1, s_2, a, r, \tilde{r}) = \prod_{p > P} \Bigg[\Bigg(1 + \frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\Bigg) \Bigg(1 + \frac{\tilde{R}_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\Bigg)^{-1} \prod_{k=1}^{\nu} \Bigg(1 - \frac{\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}}}{p^{2^{\mu+1}ks_2}}\Bigg)^{-1}$$
$$\prod_{k=1}^{\nu} \Bigg(1 + \sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1} \frac{(-1)^{j-1} \tilde{Y}_k^{j-1} (Y_k - \tilde{Y}_k)}{p^{jks_2}} - \frac{Y_k \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks_2}}\Bigg)\Bigg].$$

1.1.3 Applications

Dans les applications que nous verrons par la suite, la forme précise sera rarement utile. Ce sont les majorations, données dans le théorème ci-dessus, qui seront surtout intéressantes, mais nous donnons des exemples explicites à la section 1.2.
Cette approximation est très utile dans beaucoup de problèmes. Notamment dans la méthode de convolution, que le lecteur pourra trouver dans [Apo76] : celle-ci consiste à évaluer des moyennes de fonctions multiplicatives en les approchant par une fonction déjà connue.

Les majorations permettent ensuite de combiner cette approximation à des méthodes de variable complexe. Nous les utiliserons pour traiter des sommes comme

$$\sum_{\substack{d \leqslant X \\ \sigma(d)/d \leqslant z}} \mu(d), \tag{1.10}$$

où $\sigma(d)$ représente la somme des diviseurs positifs de l'entier d, $\mu(d)$ la fonction de Möbius et $0 < z \leqslant X$.

1.1.4 Méthodes

La méthode utilisée ici est la suivante. Nous écrivons d'abord chaque facteur eulérien définissant la série de Dirichlet comme un produit de facteurs *élémentaires* :

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}} = \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + \frac{Y_k}{p^{ks_2}}\right) \left(1 + \frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right), \tag{1.11}$$

ce qui fait apparaître le produit eulérien $h^\natural_{\mu,\nu,P}(s_1, s_2, a, r, \tilde{r})$. Nous réussissons ensuite à approcher chaque facteur $1 + Y_k p^{-ks_2}$ grâce à l'approximation de $r(p^k)a(p^k)^{-s_1}$ par $\tilde{r}(p^k)$. Nos hypothèses d'approximation font converger suffisamment le produit eulérien $h_{\mu,\nu,P}(s_1, s_2, a, r, \tilde{r})$. Cette première approximation par $\tilde{r}$ lorsque $k = 1$ se retrouve dans les travaux de Halász [Hal75], Montgomery [Mon78] et Ruzsa [Ruz80] ; ces derniers ont recours à une première approximation complètement multiplicative. Tenir compte des puissances successives est plus difficile qu'attendu. Ce phénomène a déjà été observé en 1996 par Friedlander et Iwaniec [FI96] qui décident de se restreindre aux entiers sans facteurs carrés pour limiter les difficultés techniques. La méthode employée dans ce papier permet d'inclure toutes les puissances. Ce que nous utilisons permet de plus de traiter les deux variables en traitant toute l'uniformité dans les cœfficients. Par ailleurs, la preuve est agencée de telle façon qu'il est assez facile d'évaluer la constante B qui intervient dans la majoration du théorème 1.2.

1.2 Cas des entiers sans facteurs carrés

Notons $r^*(d) = \mu^2(d)r(d)$ et définissons, pour ν un entier $\geqslant 0$,

$$\begin{aligned} g(s_1, s_2, a, r^*) &= \sum_{d \geqslant 1} \frac{r^*(d)}{a(d)^{s_1} d^{s_2}} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{r^*(p)}{a(p)^{s_1} p^{s_2}}\right) \\ &= h_\nu(s_1, s_2, a, r^*) \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{\tilde{r}(p)}{p^{s_2}}\right)^{-1} \prod_{p \geqslant 2} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 + \frac{\tilde{r}(p)^{2^j}}{p^{2^j s_2}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas des entiers sans facteurs carrés, nous obtenons une expression explicite du prolongement donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.3
Nous avons, pour $\nu \geqslant 0$,

$$h_\nu(s_1,s_2,a,r^*) = \prod_{p\geqslant 2}\left(1+\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1}\frac{\big(-\tilde{r}(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde{r}(p)\right)-\frac{r(p)\tilde{r}(p)^{2^{\nu+1}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+1}s_2}}\right). \quad (1.12)$$

Démonstration : Démontrons cette égalité par récurrence sur ν.
Pour $\nu = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
h_0(s_1,s_2,a,r^*) &= g(s_1,s_2,a,r^*)\prod_{p\geqslant 2}\left(1-\frac{\tilde{r}(p)}{p^{s_2}}\right)\\
&= \prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}p^{s_2}}\right)\left(1-\frac{\tilde{r}(p)}{p^{s_2}}\right)\\
&= \prod_{p\geqslant 2}\left(1-\frac{\tilde{r}(p)}{p^{s_2}}+\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}p^{s_2}}-\frac{r(p)\tilde{r}(p)}{a(p)^{s_1}p^{2s_2}}\right)\\
&= \prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{1}{p^{s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde{r}(p)\right)-\frac{r(p)\tilde{r}(p)}{a(p)^{s_1}p^{2s_2}}\right).
\end{aligned}$$

Pour $\nu = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
h_1(s_1,s_2,a,r^*) &= g(s_1,s_2,a,r^*)\prod_{p\geqslant 2}\left(1-\frac{\tilde{r}(p)}{p^{s_2}}\right)\prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{\tilde{r}(p)^2}{p^{2s_2}}\right)\\
&= h_0(s_1,s_2,a,r^*)\prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{\tilde{r}(p)^2}{p^{2s_2}}\right)\\
&= \prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{1}{p^{s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde{r}(p)\right)-\frac{r(p)\tilde{r}(p)}{a(p)^{s_1}p^{2s_2}}\right)\left(1+\frac{\tilde{r}(p)^2}{p^{2s_2}}\right)\\
&= \prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{\tilde{r}(p)^2}{p^{2s_2}}+\frac{p^{2s_2}+\tilde{r}(p)^2}{p^{3s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde{r}(p)\right)-\frac{r(p)\tilde{r}(p)\big(p^{2s_2}+\tilde{r}(p)^2\big)}{a(p)^{s_1}p^{4s_2}}\right)\\
&= \prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{1}{p^{s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde{r}(p)\right)-\frac{\tilde{r}(p)}{p^{2s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde{r}(p)\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\tilde{r}(p)^2}{p^{3s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde{r}(p)\right)-\frac{r(p)\tilde{r}(p)^3}{a(p)^{s_1}p^{4s_2}}\right).
\end{aligned}$$

Soit $\nu \geqslant 1$ fixé. Supposons alors l'égalité vraie au rang ν et montrons-la au rang $\nu+1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
h_{\nu+1}(s_1,s_2,a,r^*) &= g(s_1,s_2,a,r^*)\prod_{p\geqslant 2}\Big(1-\frac{\tilde r(p)}{p^{s_2}}\Big)\prod_{p\geqslant 2}\prod_{j=1}^{\nu+1}\Big(1+\frac{\tilde r(p)^{2^j}}{p^{2^j s_2}}\Big)\\
&= h_\nu(s_1,s_2,a,r^*)\prod_{p\geqslant 2}\Big(1+\frac{\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}}{p^{2^{\nu+1}s_2}}\Big)\\
&= \prod_{p\geqslant 2}\Bigg(1+\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+1}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+1}s_2}}\Bigg)\Big(1+\frac{\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}}{p^{2^{\nu+1}s_2}}\Big),
\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence.
Or

$$\begin{aligned}
&\Bigg(1+\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+1}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+1}s_2}}\Bigg)\Big(1+\frac{\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}}{p^{2^{\nu+1}s_2}}\Big)\\
&= 1+\frac{\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}}{p^{2^{\nu+1}s_2}}+\frac{p^{2^{\nu+1}s_2}+\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}}{p^{2^{\nu+1}s_2}}\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)\\
&-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+1}-1}\big(p^{2^{\nu+1}s_2}+\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}\big)}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+2}s_2}}\\
&= 1+\frac{\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}}{p^{2^{\nu+1}s_2}}+\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)\\
&+\frac{\tilde r(p)^{2^{\nu+1}}}{p^{2^{\nu+1}s_2}}\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+1}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+1}s_2}}-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+2}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+2}s_2}}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)+\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k+2^{\nu+1}-1}}{p^{(k+2^{\nu+1})s_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)\\
&-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+2}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+2}s_2}}.
\end{aligned}$$

Cela nous donne, par un changement d'indice dans la deuxième somme,

$$\begin{aligned}
&1+\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)+\sum_{k=2^{\nu+1}+1}^{2^{\nu+2}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)\\
&-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+2}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+2}s_2}}
\end{aligned}$$

soit

$$1+\sum_{k=1}^{2^{\nu+2}-1}\frac{\big(-\tilde r(p)\big)^{k-1}}{p^{ks_2}}\Big(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}}-\tilde r(p)\Big)-\frac{r(p)\tilde r(p)^{2^{\nu+2}-1}}{a(p)^{s_1}p^{2^{\nu+2}s_2}},$$

ce qui représente exactement l'égalité au rang $\nu + 1$. □

Remarque 1.4
Cette égalité nous permet d'affirmer que la fonction $g(s_1, s_2, a, r^*)$ se prolonge analytiquement jusque $\Re s_2 > 0$.

Donnons des exemples plus précis de ces prolongements :

Exemple 1.5
Soit

$$g_1(s) = \sum_{d \geqslant 1} \frac{\mu^2(d)}{d^s} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right). \tag{1.13}$$

Nous avons, pour $\nu \geqslant 0$,

$$g_1(s) = \zeta(s) \prod_{p \geqslant 2} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 + \frac{1}{p^{2^j s}}\right)^{-1} \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{p^{2^{\nu+1} s}}\right). \tag{1.14}$$

Exemple 1.6
Soit

$$g_2(s) = \sum_{d \geqslant 1} \frac{\mu^2(d)\varphi(d)}{d^{s+1}} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{p-1}{p^{s+1}}\right). \tag{1.15}$$

Nous avons, pour $\nu \geqslant 0$,

$$g_2(s) = \zeta(s) \prod_{p \geqslant 2} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 + \frac{1}{p^{2^j s}}\right)^{-1} \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \sum_{k=1}^{2^{\nu+1}} \frac{(-1)^k}{p^{ks+1}} - \frac{1}{p^{2^{\nu+1} s}}\right). \tag{1.16}$$

Exemple 1.7
Soit

$$g_3(s_1, s_2) = \sum_{d \geqslant 1} \frac{\mu^2(d)\varphi(d)^{s_1}}{d^{s_1+s_2}} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{(p-1)^{s_1}}{p^{s_1+s_2}}\right). \tag{1.17}$$

Nous avons, pour $\nu \geqslant 0$,

$$g_3(s_1, s_2) = \zeta(s_2) \prod_{p \geqslant 2} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 + \frac{1}{p^{2^j s_2}}\right)^{-1} \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \sum_{k=1}^{2^{\nu+1}-1} \frac{(-1)^k}{p^{ks_2}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s_1}\right) - \frac{(p-1)^{s_1}}{p^{s_1 + 2^{\nu+1} s_2}}\right). \tag{1.18}$$

Nous allons voir que le problème est beaucoup plus délicat lorsque nous passons des entiers sans facteurs carrés à tous les entiers.

1.3 Cas des puissances plus grandes

1.3.1 Énoncé du problème

En considérant la variable s_1 comme une constante, il est raisonnable de noter $\rho(p^k) = \dfrac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1}}$ et d'étudier la série suivante : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\rho(p^k)}{p^{ks_2}}$.

Dans un premier temps, fixons le paramètre p et regardons la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} X_k\pi^k$.

La démarche est la suivante : nous transformons d'abord la somme $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} X_k\pi^k$ en un produit de facteurs, que nous qualifions d'élémentaires, puis nous approchons chaque facteur élémentaire.

1.3.2 Conversion d'une somme en produit de facteurs élémentaires

Soit $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de premier terme 1. Nous désignons par facteur élémentaire tout facteur de la forme $1 + Y_k\pi^k$, où Y_k est un polynôme homogène de $\mathbb{Z}[(X_k)_{k\geqslant 0}]$.

Proposition 1.8
Pour $\nu \geqslant 0$, il existe une série $R_\nu \in \mathbb{Z}[(X_k)_{k\geqslant 0}][[\pi]]$ de la forme

$$R_\nu = \sum_{w\geqslant 0}\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_{w+\nu+1})/\\ \sum_{i=1}^{w+\nu+1}\ell_i = w+\nu+1}} C(\ell_1,\dots,\ell_{w+\nu+1})\prod_{i=1}^{w+\nu+1} X_{\ell_i}\Bigg)\pi^w = \sum_{w\geqslant 0}\rho_{w,\nu}\pi^w \tag{1.19}$$

telle que

$$\sum_{k\geqslant 0} X_k\pi^k = \prod_{k=1}^{\nu}(1+Y_k\pi^k)(1+R_\nu\pi^{\nu+1}), \tag{1.20}$$

où, pour $k \geqslant 1$,

$$Y_k = \rho_{0,k-1} = \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^{k}\ell_i = k}} C(\ell_1,\dots,\ell_k)\prod_{i=1}^{k} X_{\ell_i}. \tag{1.21}$$

Remarque 1.9
Pour $\nu = 0$, nous considérons par convention que le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{0}(1+Y_k\pi^k)^{-1}$ est égal à 1.

Remarque 1.10
Ce résultat n'est pas sans rappeler un théorème classique de Ritt [Rit30] qui affirme que toute série formelle $1 + \displaystyle\sum_{k\geqslant 1} X_k z^k$ peut être représentée comme produit infini $\displaystyle\prod_{k\geqslant 1}(1+Y_k z^k)$. Nous analysons ici précisément cette transformation.

Démonstration : Pour $\nu = 0$, nous avons $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} X_k\pi^k = 1 + \pi R_0$, avec

$$R_0 = \sum_{w\geqslant 0} X_{w+1}\pi^w.$$

Pour $\nu = 1$, en choisissant $Y_1 = X_1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(1+X_1\pi)^{-1}\sum_{k\geqslant 0} X_k\pi^k = \left(1+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k X_1^k\pi^k\right)(1+\pi R_0)\\
&= 1+\pi R_0 + \sum_{k\geqslant 1}(-1)^k X_1^k\pi^k + \pi R_0\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k X_1^k\pi^k\\
&= 1+\pi\sum_{w\geqslant 0} X_{w+1}\pi^w + \sum_{k\geqslant 1}(-1)^k X_1^k\pi^k + \pi\sum_{w\geqslant 0} X_{w+1}\pi^w\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k X_1^k\pi^k\\
&= 1+\pi\sum_{w\geqslant 1} X_{w+1}\pi^w + \sum_{k\geqslant 2}(-1)^k X_1^k\pi^k + \pi^2\sum_{w\geqslant 0} X_{w+1}\pi^w\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k+1} X_1^{k+1}\pi^k\\
&= 1+\pi^2 R_1,
\end{aligned}$$

avec

$$R_1 = \sum_{w\geqslant 0} X_{w+2}\pi^w + \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k X_1^{k+2}\pi^k + \sum_{h\geqslant 0}\sum_{w+k=h}(-1)^{k+1} X_{w+1}X_1^{k+1}\pi^h,$$

qui est bien de la forme (1.19).
Supposons alors les Y_k construits pour k allant de 1 à ν satisfaisant la condition

$$\prod_{k=1}^{\nu}(1+Y_k\pi^k)^{-1}\sum_{k\geqslant 0} X_k\pi^k = 1 + R_\nu\pi^{\nu+1}.$$

En choisissant

$$Y_{\nu+1} = \rho_{0,\nu},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{\nu+1}(1+Y_k\pi^k)^{-1}\sum_{k\geqslant 0} X_k\pi^k = (1+R_\nu\pi^{\nu+1})(1+\rho_{0,\nu}\pi^{\nu+1})^{-1}\\
&= (1+R_\nu\pi^{\nu+1})\left(1+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\rho_{0,\nu}^k\pi^{k(\nu+1)}\right)\\
&= 1+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\rho_{0,\nu}^k\pi^{k(\nu+1)} + R_\nu\pi^{\nu+1} + R_\nu\pi^{\nu+1}\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\rho_{0,\nu}^k\pi^{k(\nu+1)}\\
&= 1+\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\rho_{0,\nu}^k\pi^{k(\nu+1)} + \pi^{\nu+1}\sum_{w\geqslant 1}\rho_{w,\nu}\pi^w + \pi^{\nu+1}\sum_{w\geqslant 0}\rho_{w,\nu}\pi^w\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\rho_{0,\nu}^k\pi^{k(\nu+1)}\\
&= 1+\pi^{\nu+2}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\rho_{0,\nu}^{k+2}\pi^{(k+1)\nu+k} + \pi^{\nu+2}\sum_{w\geqslant 0}\rho_{w+1,\nu}\pi^w + \pi^{\nu+2}\sum_{w\geqslant 0}\rho_{w,\nu}\pi^w\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k+1}\rho_{0,\nu}^{k+1}\pi^{(k+1)\nu+k}\\
&= 1+R_{\nu+1}\pi^{\nu+2},
\end{aligned}$$

avec

$$R_{\nu+1} = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\rho_{0,\nu}^{k+2}\pi^{(k+1)\nu+k} + \sum_{w\geqslant 0}\rho_{w+1,\nu}\pi^w + \sum_{h\geqslant 0}\sum_{(k+1)\nu+k+w=h}(-1)^{k+1}\rho_{w,\nu}\rho_{0,\nu}^{k+1}\pi^h,$$

qui est bien de la forme (1.19). □

Établissons maintenant quelques inégalités qui vont nous permettre d'obtenir des majorations des produits eulériens $\prod_{p>P}\left(1+\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)$ et $\prod_{p>P}\left(1+\frac{\tilde{R}_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)^{-1}$.

Proposition 1.11
Supposons notre anneau muni d'une norme et qu'il existe $A \geqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant 0$, $|X_k| \leqslant A$. Alors $\forall h \geqslant 0$, $\forall \nu \geqslant 0$, nous avons

$$|\rho_{h,\nu}| \leqslant (h+\nu+1)^{2\nu}(\nu+1)^{2h}A^{h+\nu+1}. \tag{1.22}$$

Démonstration : Démontrons cette inégalité par récurrence sur ν. Pour $\nu = 0$, nous avons d'après la preuve de la proposition précédente :

$$R_0 = \sum_{w\geqslant 0} X_{w+1}\pi^w,$$

soit $\forall h \geqslant 0$,

$$\rho_{h,0} = X_{h+1}$$

et

$$|\rho_{h,0}| = |X_{h+1}| \leqslant A \leqslant A^{h+1}.$$

L'inégalité est ainsi vérifiée pour $\nu = 0$. Supposons alors que $\forall h \geqslant 0$,

$$|\rho_{h,\nu}| \leqslant (h+\nu+1)^{2\nu}(\nu+1)^{2h}A^{h+\nu+1}.$$

La preuve précédente nous dit également que

$$R_{\nu+1} = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\rho_{0,\nu}^{k+2}\pi^{(k+1)\nu+k} + \sum_{w\geqslant 0}\rho_{w+1,\nu}\pi^w + \sum_{h\geqslant 0}\sum_{(k+1)\nu+k+w=h}(-1)^{k+1}\rho_{w,\nu}\rho_{0,\nu}^{k+1}\pi^h,$$

soit

$$\begin{aligned}
|\rho_{h,\nu+1}| &\leqslant \sum_{(k+1)\nu+k=h}|\rho_{0,\nu}|^{k+2} + |\rho_{h+1,\nu}| + \sum_{(k+1)\nu+k+w=h}|\rho_{w,\nu}||\rho_{0,\nu}|^{k+1}\\
&\leqslant \sum_{(k+1)\nu+k=h}(\nu+1)^{2\nu(k+2)}A^{(\nu+1)(k+2)} + (h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2}A^{h+\nu+2}\\
&+ \sum_{(k+1)\nu+k+w=h}(w+\nu+1)^{2\nu}(\nu+1)^{2w}A^{w+\nu+1}(\nu+1)^{2\nu(k+1)}A^{(\nu+1)(k+1)}\\
&= \sum_{(k+1)\nu+k=h}A^{\nu k+2\nu+k+2}(\nu+1)^{2\nu(k+2)} + A^{h+\nu+2}(h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2}\\
&+ \sum_{(k+1)\nu+k+w=h}A^{w+2\nu+\nu k+k+2}(w+\nu+1)^{2\nu}(\nu+1)^{2w+2\nu(k+1)}.
\end{aligned}$$

Or, si $(k+1)\nu+k=h$, alors $\nu k+2\nu+k+2=h+\nu+2$ et $2\nu(k+2)\leqslant 2h+2\nu$. De même, si $(k+1)\nu+k+w=h$, alors $w+2\nu+\nu k+k+2=h+\nu+2$ et $2w+2\nu(k+1)\leqslant 2h$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}|\rho_{h,\nu+1}| \leqslant A^{h+\nu+2}\Bigg((\nu+1)^{2h+2\nu}\sum_{(k+1)\nu+k=h}1+(h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2}\\ +(\nu+1)^{2h}\sum_{(k+1)\nu+k+w=h}(w+\nu+1)^{2\nu}\Bigg).\end{aligned}$$

Si $h<\nu$, les deux sommes sont nulles et nous obtenons

$$|\rho_{h,\nu+1}| \leqslant A^{h+\nu+2}(h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2}.$$

Remarquons alors que

$$(h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2}\leqslant (h+\nu+2)^{2\nu+2}(\nu+2)^{2h},$$

puisque

$$\left(\frac{\nu+1}{h+\nu+2}\right)^2\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2h}\leqslant 1$$

et donc

$$|\rho_{h,\nu+1}| \leqslant A^{h+\nu+2}(h+\nu+2)^{2\nu+2}(\nu+2)^{2h}.$$

Ceci représente exactement l'inégalité voulue au rang $\nu+1$.
Si $h\geqslant\nu$, nous avons

$$|\rho_{h,\nu+1}| \leqslant A^{h+\nu+2}\Bigg((\nu+1)^{2h+2\nu}+(h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2}+(\nu+1)^{2h}\sum_{\nu+1\leqslant w'\leqslant h+1}w'^{2\nu}\Bigg).$$

Une sommation par parties nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{\nu+1\leqslant w'\leqslant h+1}w'^{2\nu} &= \sum_{\nu+1\leqslant w'\leqslant h+1}\left((\nu+1)^{2\nu}+\int_{\nu+1}^{w'}2\nu u^{2\nu-1}du\right)\\ &= (\nu+1)^{2\nu}(h-\nu+1)+\int_{\nu+1}^{h+1}\Bigg(\sum_{u\leqslant w'\leqslant h+1}1\Bigg)2\nu u^{2\nu-1}du\\ &\leqslant (\nu+1)^{2\nu}(h-\nu+1)+(h+2)\int_{\nu+1}^{h+1}2\nu u^{2\nu-1}du\\ &\leqslant (\nu+1)^{2\nu}(h-\nu+1)+(h+2)(h+1)^{2\nu}\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}|\rho_{h,\nu+1}| \leqslant A^{h+\nu+2}\Bigg((\nu+1)^{2h+2\nu}+(h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2}+(\nu+1)^{2h+2\nu}(h-\nu+1)\\ +(\nu+1)^{2h}(h+2)(h+1)^{2\nu}\Bigg).\end{aligned}$$

Nous espérons obtenir

$$\begin{aligned}(\nu+1)^{2h+2\nu} + (h+\nu+2)^{2\nu}(\nu+1)^{2h+2} + (\nu+1)^{2h+2\nu}(h-\nu+1)\\ + (\nu+1)^{2h}(h+2)(h+1)^{2\nu} \leqslant (h+\nu+2)^{2\nu+2}(\nu+2)^{2h},\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2h}\left(\frac{\nu+1}{h+\nu+2}\right)^{2\nu}\frac{1}{(h+\nu+2)^2} + \left(\frac{\nu+1}{h+\nu+2}\right)^{2}\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2h}\\ &+\left(\frac{\nu+1}{h+\nu+2}\right)^{2\nu}\left(\frac{h-\nu+1}{(h+\nu+2)^2}\right)\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2h} + \left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2h}\frac{h+2}{(h+\nu+2)^2}\left(\frac{h+1}{h+\nu+2}\right)^{2\nu} \leqslant 1.\end{aligned}$$

Notons $F(h,\nu)$ le membre de gauche de cette inégalité. Pour $h \geqslant \nu$, nous avons

$$\begin{aligned}F(h,\nu) &\leqslant \left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2\nu}\left(\frac{\nu+1}{2\nu+2}\right)^{2\nu}\frac{1}{(2\nu+2)^2} + \left(\frac{\nu+1}{2\nu+2}\right)^{2}\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2\nu}\\ &\quad + \left(\frac{\nu+1}{2\nu+2}\right)^{2\nu}\left(\frac{2\nu+1}{(4\nu+2)^2}\right)\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2\nu} + \left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^{2\nu}\frac{\nu+2}{(2\nu+2)^2}\\ &\leqslant \frac{\nu^2+5\nu+5}{(2\nu+2)^2},\end{aligned}$$

en majorant simplement les termes à la puissance 2ν par 1 et en minorant $4\nu+2$ par $2\nu+2$.
Cette dernière expression est inférieure à 1 si $\nu \geqslant 1$.
Si $\nu = 0$, nous avons

$$F(h,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2h}\frac{5+2h}{(h+2)^2} \leqslant 1,$$

si $h \geqslant 1$. Enfin, la preuve précédente nous dit que

$$R_1 = \sum_{w\geqslant 0} X_{w+2}\pi^w + \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k X_1^{k+2}\pi^k + \sum_{h\geqslant 0}\sum_{w+k=h}(-1)^{k+1}X_{w+1}X_1^{k+1}\pi^h,$$

soit

$$\rho_{0,1} = X_2$$

et

$$|\rho_{0,1}| = |X_2| \leqslant A \leqslant 4A^2.$$

Finalement, $\forall h \geqslant 0$, $\forall \nu \geqslant 0$,

$$|\rho_{h,\nu}| \leqslant (h+\nu+1)^{2\nu}(\nu+1)^{2h}A^{h+\nu+1}.$$

□

Proposition 1.12
Pour $\nu \geqslant 1$, si $A(\nu+1)^2|\pi| < 1$, alors nous avons

$$|R_\nu| \leqslant A^{\nu+1}(3\nu)!\big(1 - A(\nu+1)^2|\pi|\big)^{-3\nu-1}. \tag{1.23}$$

Remarque 1.13
Avec $|\pi| = p^{-\sigma_2}$ ($\sigma_2 > 1/2^{\mu+1}$ et $p \geqslant P$, où P est défini par (1.4)), nous avons

$$|R_\nu| \leqslant A^{\nu+1}(3\nu)!\, 2^{3\nu+1}. \tag{1.24}$$

Cela nous donne, si $\sigma_2 \geqslant (\nu+1)^{-1} + \eta$,

$$\left|\prod_{p>P}\left(1 + \frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)\right| \leqslant \exp\left(A^{\nu+1}(3\nu)!\, 2^{3\nu+1}\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{1+\eta}}\right).$$

Démonstration : Rappelons que $R_\nu = \sum_{w\geqslant 0}\rho_{w,\nu}\pi^w$. La proposition précédente nous permet d'écrire

$$|R_\nu| \leqslant A^{\nu+1}\sum_{w\geqslant 0}(w+\nu+1)^{2\nu}\big(A(\nu+1)^2|\pi|\big)^w.$$

Considérons alors, pour $0 \leqslant x < 1$, la série suivante $\sum_{w\geqslant 0}(w+\nu+1)^{2\nu}x^w$.
Pour tout $w \geqslant 0$, nous avons

$$\sum_{m=\nu+1}^{3\nu}\log(w+m) \geqslant \sum_{m=\nu+1}^{3\nu}\log(w+\nu+1) \geqslant 2\nu\log(w+\nu+1).$$

Par conséquent,

$$\prod_{m=1}^{3\nu}(w+m) \geqslant (w+\nu+1)^{2\nu}$$

et pour $x \geqslant 0$,

$$\sum_{w\geqslant 0}\left(\prod_{m=1}^{3\nu}(w+m)\right)x^w \geqslant \sum_{w\geqslant 0}(w+\nu+1)^{2\nu}x^w.$$

Or, pour $0 \leqslant x < 1$, nous avons

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\prod_{m=1}^{3\nu}(w+m)\right)x^w = \frac{d^{3\nu}}{dx^{3\nu}}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{(3\nu)!}{(1-x)^{3\nu+1}}.$$

Cela nous donne la proposition 1.12 avec $x = A(\nu+1)^2|\pi|$. □

Proposition 1.14
Supposons encore qu'il existe $A \geqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant 0$, $|X_k| \leqslant A$. Si $\sigma_2 \geqslant (\nu+1)^{-1} + \eta$, avec $\eta > 0$, nous avons alors

$$\left|\prod_{p>P}\left(1+\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)^{-1}\right| \leqslant \exp\left(A^{\nu+1}(3\nu)!\,2^{3\nu+1}\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{1+\eta}}+\mathcal{O}\left(A^{2\nu+2}(3\nu)!^2\,2^{6\nu+2}\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{2+2\eta}}\right)\right)$$

Démonstration : Nous avons

$$\prod_{p>P}\left(1+\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)^{-1} = \exp\left(-\sum_{p>P}\log\left(1+\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)\right).$$

Rappelons l'estimation

$$\log(1+\alpha) = \alpha + \mathcal{O}\big(|\alpha|^2\big),$$

si $|\alpha| \leqslant 1/2$. Celle-ci nous donne

$$\prod_{p>P}\left(1+\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)^{-1} = \exp\left(-\sum_{p>P}\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}+\mathcal{O}\left(\frac{|R_\nu|^2}{p^{2(\nu+1)\sigma_2}}\right)\right)$$

soit

$$\begin{aligned}\left|\prod_{p>P}\left(1+\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)s_2}}\right)^{-1}\right| &\leqslant \exp\left(\sum_{p>P}\frac{R_\nu}{p^{(\nu+1)\sigma_2}}+\mathcal{O}\left(\sum_{p>P}\frac{|R_\nu|^2}{p^{2(\nu+1)\sigma_2}}\right)\right)\\ &\leqslant \exp\left(A^{\nu+1}(3\nu)!\,2^{3\nu+1}\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{1+\eta}}+\mathcal{O}\left(A^{2\nu+2}(3\nu)!^2\,2^{6\nu+2}\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{2+2\eta}}\right)\right),\end{aligned}$$

si $\sigma_2 \geqslant (\nu+1)^{-1}+\eta$. □

1.3.3 Approximation de chaque facteur élémentaire

Proposition 1.15
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0. Pour $\mu \geqslant 0$, Y et $\tilde{Y}$ dans $\mathbb{K}$,

$$(1+Y\pi) = (1-\tilde{Y}\pi)^{-1}\prod_{j=1}^{\mu}(1+\tilde{Y}^{2^j}\pi^{2^j})^{-1}\left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j - Y\tilde{Y}^{2^{\mu+1}-1}\pi^{2^{\mu+1}}\right). \tag{1.25}$$

Démonstration : Démontrons alors cette égalité par récurrence sur μ.
Pour $\mu = 0$, nous avons

$$(1+Y\pi)(1-\tilde{Y}\pi) = 1-\tilde{Y}\pi+Y\pi-Y\tilde{Y}\pi^2 = 1+\pi(Y-\tilde{Y})-Y\tilde{Y}\pi^2.$$

Pour $\mu = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}(1+Y\pi)(1-\tilde{Y}\pi)(1+\tilde{Y}^2\pi^2) &= \big(1+\pi(Y-\tilde{Y})-Y\tilde{Y}\pi^2\big)(1+\tilde{Y}^2\pi^2)\\ &= 1+\tilde{Y}^2\pi^2+\pi(Y-\tilde{Y})+\pi^3\tilde{Y}^2(Y-\tilde{Y})-Y\tilde{Y}\pi^2-Y\tilde{Y}^3\pi^4\\ &= 1+\pi(Y-\tilde{Y})-\pi^2\tilde{Y}(Y-\tilde{Y})+\pi^3\tilde{Y}^2(Y-\tilde{Y})-Y\tilde{Y}^3\pi^4.\end{aligned}$$

Soit $\mu \geqslant 0$ fixé. Supposons alors l'égalité vraie au rang μ et montrons-la au rang $\mu+1$. Nous avons

$$\begin{aligned}&(1+Y\pi)(1-\tilde{Y}\pi)\prod_{j=1}^{\mu+1}(1+\tilde{Y}^{2^j}\pi^{2^j})\\ &= (1+Y\pi)(1-\tilde{Y}\pi)\prod_{j=1}^{\mu}(1+\tilde{Y}^{2^j}\pi^{2^j})(1+\tilde{Y}^{2^{\mu+1}}\pi^{2^{\mu+1}})\\ &= \left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j - Y\tilde{Y}^{2^{\mu+1}-1}\pi^{2^{\mu+1}}\right)(1+\tilde{Y}^{2^{\mu+1}}\pi^{2^{\mu+1}})\\ &= 1+\tilde{Y}^{2^{\mu+1}}\pi^{2^{\mu+1}}+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j\\ &+\tilde{Y}^{2^{\mu+1}}\pi^{2^{\mu+1}}\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j - Y\tilde{Y}^{2^{\mu+1}-1}\pi^{2^{\mu+1}} - Y\tilde{Y}^{2^{\mu+2}-1}\pi^{2^{\mu+2}}\\ &= 1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j - \tilde{Y}^{2^{\mu+1}-1}(Y-\tilde{Y})\pi^{2^{\mu+1}}\\ &+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j+2^{\mu+1}-1}(Y-\tilde{Y})\pi^{(j+2^{\mu+1})} - Y\tilde{Y}^{2^{\mu+2}-1}\pi^{2^{\mu+2}}.\end{aligned}$$

Cela nous donne, par un changement d'indice dans la deuxième somme,

$$\begin{aligned}&1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j + \sum_{j=2^{\mu+1}+1}^{2^{\mu+2}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j - Y\tilde{Y}^{2^{\mu+2}-1}\pi^{2^{\mu+2}}\\ &= 1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+2}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}^{j-1}(Y-\tilde{Y})\pi^j - Y\tilde{Y}^{2^{\mu+2}-1}\pi^{2^{\mu+2}},\end{aligned}$$

ce qui représente exactement l'égalité au rang $\mu+1$. $\square$

1.3.4 Application au prolongement analytique de la série de Dirichlet d'une fonction multiplicative

Soit $\rho(d)$ une fonction multiplicative vérifiant les hypothèses suivantes :

(4) il existe $A \geqslant 1$ tel que $\forall p \geqslant 2$ et $\forall k \geqslant 1$, $|\rho(p^k)| \leqslant A$;

(5) il existe un entier $p_0 \geqslant 2$ tel que $\forall p \geqslant p_0$ et $\forall k \geqslant 1$, il existe une fonction $\tilde{\rho}(p^k)$ vérifiant la propriété suivante

$$\rho(p^k) - \tilde{\rho}(p^k) = \mathcal{O}\big(1/p\big).$$

En conservant les notations précédentes, nous notons

$$\rho_{w,\nu} = \sum_{\substack{(\ell_1,\ldots,\ell_{w+\nu+1})/ \\ \sum_{i=1}^{w+\nu+1} \ell_i = w+\nu+1}} C(\ell_1, \ldots, \ell_{w+\nu+1}) \prod_{i=1}^{w+\nu+1} \rho(p^{\ell_i}) \tag{1.26}$$

et $\tilde{\rho}_{w,\nu}$ l'expression similaire associée à $\tilde{\rho}$.
Les propositions 1.8, 1.12 et 1.15 nous permettent d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 1.16
Pour μ et ν deux entiers $\geqslant 0$, si les produits eulériens

$$\prod_{p\leqslant P}\Big(\sum_{k\geqslant 0}\frac{\rho(p^k)}{p^{ks}}\Big) \text{ et } \prod_{p>P}\prod_{k=1}^{\nu}\left[\Big(1-\frac{\tilde{\rho}_{0,k-1}}{p^{ks}}\Big)^{-1}\prod_{j=1}^{\mu}\Big(1+\frac{\tilde{\rho}_{0,k-1}^{2^j}}{p^{2^j ks}}\Big)^{-1}\right] \tag{1.27}$$

se prolongent analytiquement jusque $\Re s > \max\big(2^{-\mu-1}, (\nu+1)^{-1}\big)$, alors le produit eulérien

$$\prod_{p\geqslant 2}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\rho(p^k)}{p^{ks}} \tag{1.28}$$

se prolonge analytiquement jusque $\Re s > \max\big(2^{-\mu-1}, (\nu+1)^{-1}\big)$.

Démonstration : (1) Nous décomposons d'abord chaque facteur via la proposition 1.8. Ensuite nous approchons chaque facteur $1 + Y_k p^{-ks}$ via la proposition 1.15.
(2) Les hypothèses de la proposition 1.16 garantissent le prolongement de chacun des premiers facteurs.
(3) En choisissant $Y_k = \rho_{0,k-1}$ et $\tilde{Y}_k = \tilde{\rho}_{0,k-1}$, nous avons l'égalité

$$Y_k - \tilde{Y}_k = \sum_{\substack{(\ell_1,\ldots,\ell_k)/ \\ \sum_{i=1}^{k}\ell_i = k}} C(\ell_1, \ldots, \ell_k)\Big(\prod_{i=1}^{k}\rho(p^{\ell_i}) - \prod_{i=1}^{k}\tilde{\rho}(p^{\ell_i})\Big)$$

$$= \sum_{\substack{(\ell_1,\ldots,\ell_k)/ \\ \sum_{i=1}^{k}\ell_i = k}} C(\ell_1, \ldots, \ell_k)\Big[\prod_{i=1}^{k}\big(\rho(p^{\ell_i}) - \tilde{\rho}(p^{\ell_i})\big) + \sum_{\varnothing\neq I\subsetneq\{1,\ldots k\}}\prod_{i\in I}\tilde{\rho}(p^{\ell_i})\prod_{j\in\{1,\ldots,k\}\setminus I}\big(\rho(p^{\ell_j}) - \tilde{\rho}(p^{\ell_j})\big)\Big].$$

L'hypothèse (5) nous dit alors que le terme résiduel est absolument convergent pour $2^{\mu+1}\Re s > 1$. □

Chapitre 2

Majoration de la série de Dirichlet d'une fonction multiplicative dans un domaine particulier

Nous conservons les notations du chapitre précédent. Dans la majoration

$$\rho(p^k) - \tilde{\rho}(p^k) = \mathcal{O}\big(1/p\big), \tag{2.1}$$

il est cependant important de connaître la dépendance en la fonction ρ dans le $\mathcal{O}$. C'est pourquoi nous supposons de plus qu'il existe deux réels $\hbar \geqslant 0$ et $A \geqslant 1$ tels que $\forall p \geqslant p_0$, $\forall k \geqslant 1$,

$$|\rho(p^k) - \tilde{\rho}(p^k)| \leqslant \hbar/p \ , \ |\rho(p^k)| \leqslant A \text{ et } |\tilde{\rho}(p^k)| \leqslant A. \tag{2.2}$$

Au cours de la démonstration, nous supposons que $\forall p < p_0$ et $\forall k \geqslant 1$,

$$\rho(p^k) = \tilde{\rho}(p^k) = 0. \tag{2.3}$$

La variable π dépend maintenant de p, nombre premier $\geqslant 2$. Elle est alors notée π_p et vérifie

$$\forall p \geqslant 2 : |\pi_p| \leqslant \tilde{\pi}. \tag{2.4}$$

Lemme 2.1
Pour $\mu \geqslant 1$ et $\nu \geqslant 1$, il existe des constantes $B = B(\mu, \nu, A, \tilde{\pi})$, $B' = B'(A)$ et $B'' = B''(\mu, \nu, A, \tilde{\pi})$ telles que

$$\begin{aligned}&\Bigg|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1 + \sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k - \tilde{Y}_k)\pi_p^{jk} - Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)\Bigg| \\ &\leqslant \exp\left(B(1+B'\hbar)^{\nu}\sum_{p\geqslant 2}\frac{|\pi_p|}{p} + B''\sum_{p\geqslant 2}|\pi_p|^{2^{\mu+1}}\right).\end{aligned}$$

Démonstration : Nous avons

$$Y_k = \sum_{\substack{(\ell_1,\ldots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} C(\ell_1, \ldots, \ell_k)\prod_{i=1}^{k}\rho(p^{\ell_i})$$

et

$$\tilde{Y}_k = \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} C(\ell_1,...,\ell_k) \prod_{i=1}^{k} \tilde{\rho}(p^{\ell_i}).$$

Cela nous donne

$$|Y_k| \leqslant \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} |C(\ell_1,...,\ell_k)| A^k$$

et la même majoration pour $\tilde{Y}_k$. Par conséquent,

$$|Y_k \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1} \pi_p^{2^{\mu+1}k}| \leqslant \Bigg(A^k \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} |C(\ell_1,...,\ell_k)| \Bigg)^{2^{\mu+1}} |\pi_p|^{2^{\mu+1}k}.$$

À partir de l'égalité

$$\begin{aligned} Y_k - \tilde{Y}_k &= \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} C(\ell_1,...,\ell_k) \Bigg(\prod_{i=1}^{k} \rho(p^{\ell_i}) - \prod_{i=1}^{k} \tilde{\rho}(p^{\ell_i}) \Bigg) \\ &= \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} C(\ell_1,...,\ell_k) \Bigg[\prod_{i=1}^{k} \big(\rho(p^{\ell_i}) - \tilde{\rho}(p^{\ell_i})\big) + \sum_{\varnothing \neq I \subsetneq \{1,\dots k\}} \prod_{i\in I} \tilde{\rho}(p^{\ell_i}) \prod_{j \in \{1,\dots,k\}\setminus I} \big(\rho(p^{\ell_j}) - \tilde{\rho}(p^{\ell_j})\big) \Bigg], \end{aligned}$$

nous obtenons comme majoration

$$|Y_k - \tilde{Y}_k| \leqslant \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i = k}} |C(\ell_1,...,\ell_k)| \Bigg(\frac{\hbar^k}{p^k} + \sum_{\varnothing \neq I \subsetneq \{1,\dots k\}} A^{|I|} \left(\frac{\hbar}{p}\right)^{|\{1,\dots,k\}\setminus I|} \Bigg).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\varnothing \neq I \subsetneq \{1,\dots k\}} A^{|I|} \left(\frac{\hbar}{p}\right)^{|\{1,\dots,k\}\setminus I|} &= \frac{\hbar^k}{p^k} \sum_{\varnothing \neq I \subsetneq \{1,\dots k\}} \left(\frac{Ap}{\hbar}\right)^{|I|} = \frac{\hbar^k}{p^k} \sum_{t=1}^{k-1} \binom{k}{t} \left(\frac{Ap}{\hbar}\right)^t \\ &= \frac{\hbar^k}{p^k} \left[\left(1 + \frac{Ap}{\hbar}\right)^k - 1 - \left(\frac{Ap}{\hbar}\right)^k \right]. \end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\frac{\hbar^k}{p^k} + \sum_{\varnothing \neq I \subsetneq \{1,\dots k\}} A^{|I|} \left(\frac{\hbar}{p}\right)^{|\{1,\dots,k\}\setminus I|} = A^k \left(1 + \frac{\hbar}{Ap}\right)^k - A^k = kA^k \int_1^{1+\frac{\hbar}{Ap}} u^{k-1} du,$$

soit

$$\frac{\hbar^k}{p^k}+\sum_{\varnothing\neq I\subsetneq\{1,\dots k\}} A^{|I|}\left(\frac{\hbar}{p}\right)^{|\{1,\dots,k\}\setminus I|}\leqslant kA^k\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{k-1}\frac{\hbar}{Ap}$$

et

$$|Y_k-\tilde{Y}_k|\leqslant \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,\dots,\ell_k)|\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{k-1}\frac{\hbar kA^{k-1}}{p}.$$

Cela nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
&\Big|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)\pi_p^{jk}-Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)\Big|\\
&\leqslant \exp\sum_{p\geqslant 2}\sum_{k=1}^{\nu}\Bigg[\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,\dots,\ell_k)|\Bigg)^j A^{k(j-1)}|\pi_p|^{jk}\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{k-1}\frac{\hbar kA^{k-1}}{p}\\
&+\Bigg(A^k\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,\dots,\ell_k)|\Bigg)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{2^{\mu+1}k}\Bigg].
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,\dots,\ell_k)|\Bigg)^j A^{k(j-1)}|\pi_p|^{jk}\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{k-1}\frac{\hbar kA^{k-1}}{p}\\
&=\frac{|\pi_p|\hbar}{Ap}\sum_{k=1}^{\nu}k|\pi_p|^{k-1}\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{k-1}\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,\dots,\ell_k)|\Bigg)^j A^{jk}|\pi_p|^{(j-1)k}.
\end{aligned}$$

Notons maintenant

$$\Gamma_\infty(\nu)=\max_{k\leqslant\nu}\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,\dots,\ell_k)|.$$

Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
&\log\left|\prod_{k=1}^{\nu}\left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)\pi_p^{jk}-Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)\right|\\
&\leqslant \frac{|\pi_p|\hbar}{Ap}\sum_{k=1}^{\nu}k|\pi_p|^{k-1}\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{k-1}\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Gamma_\infty(\nu)^jA^{jk}|\pi_p|^{(j-1)k}+\sum_{k=1}^{\nu}\big(A^k\Gamma_\infty(\nu)\big)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{2^{\mu+1}k}\\
&\leqslant \frac{|\pi_p|\hbar}{Ap}\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{\nu-1}\sum_{k=1}^{\nu}k|\pi_p|^{k-1}\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Gamma_\infty(\nu)^jA^{jk}|\pi_p|^{(j-1)k}+|\pi_p|^{2^{\mu+1}}\sum_{k=1}^{\nu}\big(A^k\Gamma_\infty(\nu)\big)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{2^{\mu+1}(k-1)}\\
&\leqslant B_1\hbar\left(1+\frac{\hbar}{2A}\right)^{\nu-1}\frac{|\pi_p|}{p}+B_2|\pi_p|^{2^{\mu+1}}\\
&\leqslant B_1(1+C_A\hbar)^{\nu}\frac{|\pi_p|}{p}+B_2|\pi_p|^{2^{\mu+1}},
\end{aligned}
$$

où $C_A=\max\big(1,1/(2A)\big)$,

$$B_1=\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\nu}k\tilde{\pi}^{k-1}\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Gamma_\infty(\nu)^jA^{jk}\tilde{\pi}^{(j-1)k}$$

et

$$B_2=\sum_{k=1}^{\nu}\big(A^k\Gamma_\infty(\nu)\big)^{2^{\mu+1}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+1}(k-1)}.$$

Prenons alors l'exponentielle de cette quantité et effectuons le produit sur tous les $p\geqslant 2$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 2.2
Pour $\mu\geqslant 1$ et $\nu\geqslant 1$, il existe une constante $B=B(\mu,\nu,A,\tilde{\pi})$ telle que

$$\left|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)\pi_p^{jk}-Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)\right|\leqslant\exp\left(B\sum_{p\geqslant 2}|\pi_p|\right).$$

Démonstration :

$$\log\left|\prod_{k=1}^{\nu}\left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)\pi_p^{jk}-Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)\right|$$

$$\leqslant \log\prod_{k=1}^{\nu}\left(1+2\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,...,\ell_k)|A^k\Bigg)^j|\pi_p|^{jk}+\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,...,\ell_k)|A^k\Bigg)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{2^{\mu+1}k}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\nu}\left(2|\pi_p|^k\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,...,\ell_k)|A^k\Bigg)^j|\pi_p|^{(j-1)k}\right.$$

$$\left.+|\pi_p|^k\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,...,\ell_k)|A^k\Bigg)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{(2^{\mu+1}-1)k}\right)$$

$$\leqslant |\pi_p|\sum_{k=1}^{\nu}|\pi_p|^{k-1}\left(2\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,...,\ell_k)|A^k\Bigg)^j|\pi_p|^{(j-1)k}\right.$$

$$\left.+\Bigg(\sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)/\\ \sum_{i=1}^k \ell_i=k}}|C(\ell_1,...,\ell_k)|A^k\Bigg)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{(2^{\mu+1}-1)k}\right)$$

$$\leqslant |\pi_p|\sum_{k=1}^{\nu}|\pi_p|^{k-1}\left(2\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\big(\Gamma_\infty(\nu)A^k\big)^j|\pi_p|^{(j-1)k}+\big(\Gamma_\infty(\nu)A^k\big)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{(2^{\mu+1}-1)k}\right)$$

$$\leqslant B_3|\pi_p|,$$

où

$$B_3=\sum_{k=1}^{\nu}\tilde{\pi}^{k-1}\left(2\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\big(\Gamma_\infty(\nu)A^k\big)^j\tilde{\pi}^{(j-1)k}+\big(\Gamma_\infty(\nu)A^k\big)^{2^{\mu+1}}\tilde{\pi}^{(2^{\mu+1}-1)k}\right).$$

Prenons alors l'exponentielle de cette quantité et effectuons le produit sur tous les $p\geqslant 2$, ce qui permet de conclure. □

Pour simplifier les notations, posons

$$\hbar'=\hbar'(\hbar,A,\nu)=(1+C_A\hbar)^\nu. \tag{2.5}$$

Nous étudions le cas particulier où $\pi_p=p^{-s}$ avec $s=\sigma+it$ et donc $\tilde{\pi}=2^{-\sigma}$.

Lemme 2.3
Si $\hbar'\leqslant e^e$ et $\sigma\geqslant 1/2^{\mu+1}+\eta$ avec $\eta>0$, il existe une constante $B=B(\mu,\nu,A,\sigma,\eta)$ telle que

$$\left|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)}{p^{jks}}-\frac{Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}}\right)\right|\leqslant B.$$

Démonstration : Nous utilisons la majoration du lemme 2.1 :

$$\Big|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\Big(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)}{p^{jks}}-\frac{Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}}\Big)\Big|$$
$$\leqslant \exp\Big(B_1\hbar'\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{1+\sigma}}+B_2\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{2^{\mu+1}\sigma}}\Big)\leqslant B_4,$$

où

$$B_4=\exp\Big(e^eB_1\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{1+\eta}}+B_2\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{1+2\eta}}\Big).$$

□

Lemme 2.4
Si $\hbar'\geqslant e^e$ et $\sigma\geqslant 1/2^{\mu+1}+\eta$ avec $\eta>0$, il existe trois constantes $B=B(\mu,\nu,A,\sigma,\eta)$, $B'=B'(\mu,\nu,A,\sigma)$ et $B''=B''(\mu,\nu,A,\sigma,\eta)$ telles que

$$\Big|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\Big(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)}{p^{jks}}-\frac{Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}}\Big)\Big|$$
$$\leqslant B\big(\log(1+C_A\hbar)^{\nu}\big)^{B'}\exp\Big(B''\frac{(1+C_A\hbar)^{(1-\sigma)\nu}-1}{(1-\sigma)\log(1+C_A\hbar)^{\nu}}\Big).$$

Démonstration : Nous pouvons supposer que $\sigma<2$. En effet, si $\sigma\geqslant 2$,

$$\Big|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\Big(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)}{p^{jks}}-\frac{Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}}\Big)\Big|\leqslant \exp\Big(B_3\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{p^{\sigma}}\Big)\leqslant\exp\Big(\frac{\pi^2B_3}{6}\Big).$$

Étudions d'abord le cas où $\sigma\geqslant 1-\log\log\hbar'/\log\hbar'$. Pour $p\leqslant\hbar'$, le lemme 2.2 nous dit que

$$\Big|\prod_{p\leqslant\hbar'}\prod_{k=1}^{\nu}\Big(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)}{p^{jks}}-\frac{Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}}\Big)\Big|\leqslant \exp\Big(B_3\sum_{p\leqslant\hbar'}\frac{1}{p^{\sigma}}\Big).$$

Écrivons alors

$$\sum_{p\leqslant\hbar'}\frac{1}{p^{\sigma}}=\frac{1}{\hbar'^{\sigma}}\sum_{p\leqslant\hbar'}1+\sigma\int_2^{\hbar'}\Big(\sum_{p\leqslant u}1\Big)\frac{du}{u^{\sigma+1}}\ll\frac{\hbar'^{1-\sigma}}{\log\hbar'}+\int_2^{\hbar'}\frac{du}{u^{\sigma+1}\log u}\ll 1+\int_2^{\hbar'}\frac{du}{u^{\sigma+1}\log u}.$$

Si nous posons $v=(1-\sigma)\log u$, la dernière intégrale devient

$$\int_{(1-\sigma)\log 2}^{(1-\sigma)\log\hbar'}\frac{e^v}{v}dv.$$

Si $(1-\sigma)\log \hbar' \leqslant 2$, nous avons

$$\int_{(1-\sigma)\log 2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} \frac{e^v}{v} dv \leqslant e^{(1-\sigma)\log \hbar'} \int_{(1-\sigma)\log 2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} \frac{dv}{v} \leqslant e^2(\log\log \hbar' - \log\log 2).$$

Si $(1-\sigma)\log \hbar' \geqslant 2$, séparons l'intégrale en deux :

$$\int_{(1-\sigma)\log 2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} \frac{e^v}{v} dv = \left(\int_{(1-\sigma)\log 2}^{2} + \int_{2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} \right) \frac{e^v}{v} dv.$$

Majorons la première intégrale de la façon suivante :

$$\int_{(1-\sigma)\log 2}^{2} \frac{e^v}{v} dv \leqslant e^2 \int_{(1-\sigma)\log 2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} \frac{dv}{v} = e^2(\log\log \hbar' - \log\log 2).$$

Pour la seconde, une intégration par parties nous donne

$$\int_{2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} e^v \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}\right) dv = \frac{e^{(1-\sigma)\log \hbar'}}{(1-\sigma)\log \hbar'} - \frac{e^2}{2}.$$

Or, pour $v \geqslant 2$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{v} \leqslant 2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}\right),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} \frac{e^v}{v} dv &\leqslant 2 \int_{2}^{(1-\sigma)\log \hbar'} e^v \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}\right) dv = \frac{2e^{(1-\sigma)\log \hbar'}}{(1-\sigma)\log \hbar'} - e^2 \\ &\leqslant \frac{2e^{(1-\sigma)\log \hbar'}}{(1-\sigma)\log \hbar'} - \frac{2e^2}{(1-\sigma)\log \hbar'} \leqslant \frac{2e^2(\hbar'^{1-\sigma} - 1)}{(1-\sigma)\log \hbar'}. \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas où $\sigma \geqslant 1 - \log\log \hbar' / \log \hbar'$, nous avons

$$\begin{aligned} \exp\left(B_3 \sum_{p \leqslant \hbar'} \frac{1}{p^\sigma} \right) &\leqslant B_5 (\log \hbar')^{e^2 B_3} \quad \text{si } (1-\sigma)\log \hbar' \leqslant 2 \\ &\leqslant B_5 (\log \hbar')^{e^2 B_3} \exp\left(2e^2 B_3 \frac{\hbar'^{1-\sigma} - 1}{(1-\sigma)\log \hbar'} \right) \quad \text{si } (1-\sigma)\log \hbar' \geqslant 2. \end{aligned}$$

où $B_5 = \exp(B_3 - B_3 e^2 \log\log 2)$.
Pour $p > \hbar'$, nous utilisons la majoration obtenue au lemme 2.1

$$\exp\left(B_1 \hbar' \sum_{p > \hbar'} \frac{1}{p^{1+\sigma}} + B_2 \sum_{p > \hbar'} \frac{1}{p^{2^{\mu+1}\sigma}} \right)$$

pour obtenir

$$\left| \prod_{p > \hbar'} \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + \sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1} \frac{(-1)^{j-1} \tilde{Y}_k^{j-1} (Y_k - \tilde{Y}_k)}{p^{jks}} - \frac{Y_k \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}} \right) \right| \leqslant B_6 \exp\left(B_1 \hbar' \sum_{p > \hbar'} \frac{1}{p^{1+\sigma}} \right),$$

où
$$B_6 = \exp\left(B_2 \sum_{p \geqslant 2} \frac{1}{p^{1+2\eta}}\right).$$

De plus,
$$\sum_{p>\hbar'} \frac{1}{p^{1+\sigma}} = \sum_{p>\hbar'} \int_p^{\infty} \frac{1+\sigma}{u^{2+\sigma}} du = \int_{\hbar'}^{\infty} \left(\sum_{\hbar'<p\leqslant u} 1\right) \frac{1+\sigma}{u^{2+\sigma}} du$$
$$\ll (1+\sigma) \int_{\hbar'}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\sigma}\log u} \ll \frac{1+\sigma}{\sigma} \frac{1}{\hbar'^{\sigma}\log \hbar'} \ll \frac{1+\eta^{-1}}{\hbar'^{\sigma}\log \hbar'}.$$

Cela nous donne
$$\exp\left(B_1 \hbar' \sum_{p>\hbar'} \frac{1}{p^{1+\sigma}}\right) \leqslant \exp\left(B_1(1+\eta^{-1}) \frac{\hbar'^{1-\sigma}}{\log \hbar'}\right) \leqslant \exp\Big(B_1(1+\eta^{-1})\Big).$$

Étudions maintenant le cas où $\sigma < 1 - \log\log \hbar' / \log \hbar'$. Nous commençons de la même façon :
$$\left|\prod_{p>\hbar'} \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + \sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1} \frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k - \tilde{Y}_k)}{p^{jks}} - \frac{Y_k \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}}\right)\right| \leqslant B_6 \exp\left(B_1(1+\eta^{-1}) \frac{\hbar'^{1-\sigma}}{\log \hbar'}\right)$$

et
$$\left|\prod_{p\leqslant\hbar'} \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + \sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1} \frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k - \tilde{Y}_k)}{p^{jks}} - \frac{Y_k \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks}}\right)\right| \leqslant \exp\left(B_3 \sum_{p\leqslant\hbar'} \frac{1}{p^{\sigma}}\right).$$

Écrivons alors
$$\sum_{p\leqslant\hbar'} \frac{1}{p^{\sigma}} = \frac{1}{\hbar'^{\sigma}} \sum_{p\leqslant\hbar'} 1 + \sigma \int_2^{\hbar'} \left(\sum_{p\leqslant u} 1\right) \frac{du}{u^{\sigma+1}} \ll \frac{\hbar'^{1-\sigma}}{\log \hbar'} + \int_2^{\hbar'} \frac{du}{u^{\sigma}\log u}.$$

Étudions alors cette dernière intégrale. Par le changement de variables $u = v^{1/(1-\sigma)}$, nous obtenons
$$\int_2^{\hbar'} \frac{du}{u^{\sigma}\log u} = \int_{2^{1-\sigma}}^{\hbar'^{1-\sigma}} \frac{dv}{\log v}.$$

Séparons alors cette dernière intégrale de la manière suivante :
$$\int_{2^{1-\sigma}}^{\hbar'^{1-\sigma}} \frac{dv}{\log v} = \int_{2^{1-\sigma}}^{e} \frac{dv}{\log v} + \int_{e}^{\hbar'^{1-\sigma}} \frac{dv}{\log v}.$$

Or, par la majoration du logarithme intégral, nous avons
$$\int_{e}^{\hbar'^{1-\sigma}} \frac{dv}{\log v} \ll \frac{\hbar'^{1-\sigma}}{\log(\hbar'^{1-\sigma})} = \frac{\hbar'^{1-\sigma}}{(1-\sigma)\log \hbar'}.$$

Utilisons ensuite l'inégalité $(\log v)^{-1} \ll 1/(v-1)$ valable pour $1 < v \leqslant e$. Ainsi,

$$\int_{2^{1-\sigma}}^{e} \frac{dv}{\log v} \ll \int_{2^{1-\sigma}}^{e} \frac{dv}{v-1} = \log\left(\frac{e-1}{2^{1-\sigma}-1}\right).$$

Or, la condition $1-\sigma > \log\log \hbar'/\log \hbar'$ et l'inégalité $e^x \geqslant 1+x$ pour $x \geqslant 0$ donnent $2^{1-\sigma}-1 \geqslant (1-\sigma)\log 2$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\int_{2^{1-\sigma}}^{e} \frac{dv}{\log v} &\ll \log\left(\frac{e-1}{\log 2}\right) + \log\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)\\ &\ll \log\left(\frac{e-1}{\log 2}\right) + \log\left(\frac{\log \hbar'}{\log\log \hbar'}\right) \ll \log\left(\frac{e-1}{\log 2}\right) + \log\log \hbar',\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\exp\left(B_3 \sum_{p \leqslant \hbar'} \frac{1}{p^{\sigma}}\right) &\leqslant \exp\left(\frac{B_3 \hbar'^{1-\sigma}}{\log \hbar'} + \frac{B_3 \hbar'^{1-\sigma}}{(1-\sigma)\log \hbar'} + B_3 \log\left(\frac{e-1}{\log 2}\right) + B_3 \log\log \hbar'\right)\\ &\leqslant B_7 (\log \hbar')^{B_3} \exp\left(\frac{2B_3 \hbar'^{1-\sigma}}{(1-\sigma)\log \hbar'}\right),\end{aligned}$$

où

$$B_7 = \exp\left(B_3 \log\left(\frac{e-1}{\log 2}\right)\right).$$

□

Lemme 2.5
Pour $\mu \geqslant 1$ et $\nu \geqslant 1$, il existe une constante $B = B(\mu, \nu, A, \tilde{\pi})$ telle que

$$\left| \prod_{p \geqslant 2} \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 - \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}} \pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)^{-1} \right| \leqslant \exp\left(B \sum_{p \geqslant 2} |\pi_p|^{2^{\mu+1}}\right).$$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{p \geqslant 2} \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 - \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}} \pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)^{-1} &= \exp \sum_{p \geqslant 2} \sum_{k=1}^{\nu} -\log\left(1 - \tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}} \pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)\\ &= \exp \sum_{p \geqslant 2} \sum_{k=1}^{\nu} \left(\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}} \pi_p^{2^{\mu+1}k} + \mathcal{O}\left(|\tilde{Y}_k|^{2^{\mu+2}} \pi_p^{2^{\mu+2}k}\right)\right),\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1-\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)^{-1}\right| \\
&\leqslant \exp\sum_{p\geqslant 2}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{2^{\mu+1}k}+\mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+2}}|\pi_p|^{2^{\mu+2}k}\right)\right) \\
&\leqslant \exp\sum_{p\geqslant 2}|\pi_p|^{2^{\mu+1}}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+1}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+1}(k-1)}+\mathcal{O}\left(\tilde{\pi}^{2^{\mu+1}}\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+2}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+2}(k-1)}\right)\right) \\
&\leqslant \exp\left(B_8\sum_{p\geqslant 2}|\pi_p|^{2^{\mu+1}}\right),
\end{aligned}$$

où

$$B_8=\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+1}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+1}(k-1)}+\mathcal{O}\left(\tilde{\pi}^{2^{\mu+1}}\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+2}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+2}(k-1)}\right).$$

□

Lemme 2.6
Pour $\mu\geqslant 1$ et $\nu\geqslant 1$, il existe une constante $B=B(\mu,\nu,A,\tilde{\pi})$ telle que

$$\left|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1-\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)^{-1}\right|\leqslant \exp\left(B\sum_{p\geqslant 2}|\pi_p|\right).$$

Démonstration : De la même façon que dans la preuve du lemme précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{p\geqslant 2}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1-\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}}\pi_p^{2^{\mu+1}k}\right)^{-1}\right| \\
&\leqslant \exp\sum_{p\geqslant 2}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+1}}|\pi_p|^{2^{\mu+1}k}+\mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+2}}|\pi_p|^{2^{\mu+2}k}\right)\right) \\
&\leqslant \exp\sum_{p\geqslant 2}|\pi_p|\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+1}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+1}k-1}+\mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+2}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+2}k-1}\right)\right) \\
&\leqslant \exp\left(B_9\sum_{p\geqslant 2}|\pi_p|\right),
\end{aligned}$$

où

$$B_9=\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+1}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+1}k-1}+\mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\left(A^k\Gamma_\infty(\nu)\right)^{2^{\mu+2}}\tilde{\pi}^{2^{\mu+2}k-1}\right).$$

□

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.7
Pour μ et $\nu \geqslant 0$, la fonction

$$\prod_{p>P}\left[\prod_{k=1}^{\nu}\left(1-\frac{\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}}}{p^{2^{\mu+1}ks_2}}\right)^{-1}\prod_{k=1}^{\nu}\left(1+\sum_{j=1}^{2^{\mu+1}-1}\frac{(-1)^{j-1}\tilde{Y}_k^{j-1}(Y_k-\tilde{Y}_k)}{p^{jks_2}}-\frac{Y_k\tilde{Y}_k^{2^{\mu+1}-1}}{p^{2^{\mu+1}ks_2}}\right)\right] \quad (2.6)$$

est analytique pour $\sigma > \max\left(2^{-\mu-1},(\nu+1)^{-1}\right)$. De plus, pour $\sigma \geqslant 1/2^{\mu+1}+\eta$ avec $\eta>0$, il existe trois constantes $B=B(\mu,\nu,A,\sigma,\eta)$, $B'=B'(\mu,\nu,A,\sigma)$ et $B''=B''(\mu,\nu,A,\sigma)$ telles que, en notant H l'expression ci-dessus,

$$|H| \leqslant B\left(\log(1+C_A\hbar)^{\nu}\right)^{B'}\exp\left(B''\frac{(1+C_A\hbar)^{(1-\sigma)\nu}-1}{(1-\sigma)\log(1+C_A\hbar)^{\nu}}\right). \quad (2.7)$$

Conséquence : avec $\rho(p^k)=r(p^k)a(p^k)^{-s_1}$ et $s=s_2$, nous obtenons les théorèmes 1.1 et 1.2 énoncés à la page 15.

Remarquons que nous avons choisi, dans cette partie, des hypothèses générales sur les fonctions $a(d)$ et $r(d)$. Nous pouvons écrire des choses plus spécialisées en limitant la taille du domaine, en particulier $\nu=1$. Les hypothèses (2) et (3) définissant la classe de fonctions $\mathcal{C}(p_0,m,M,\tilde{r},b,q)$ se simplifient alors de la manière suivante :

$$\forall p \geqslant p_0, r(p)=\tilde{r}(p)+\frac{q(p)}{p} \text{ et } a(p)^{-1}=1+\frac{b(p)}{p}.$$

Nous n'avons ainsi pas besoin d'estimation sur $r(p^k)$ et $a(p^k)$ pour $k \geqslant 2$, mis à part leur caractère borné.
Nous donnons ces résultats dans les théorèmes 8.3 et 9.3 énoncés aux pages 81 et 108.

Deuxième partie

Bestiaire

Chapitre 3

Bestiaire

Plus tard, afin d'assurer l'existence de la distribution limite de $\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)$, nous imposerons aux fonctions $a(d)$ et $r(d)$ les conditions suivantes (pour trois réels $0 < m < M$ et $\theta > 0$ ainsi qu'une fonction $\tilde{r}(d)$ définie et bornée sur les nombres premiers) :

$(H_1(a, B_0))$: il existe une fonction b telle que $\forall p \geqslant 2, a(p)^{-1} = 1 + b(p)/p$ et $\sup_{p\geqslant 2} |b(p)| \leqslant B_0$;

$(H_2(a, m, M))$: $\forall p \geqslant 2, \forall k \geqslant 1, m \leqslant a(p^k) \leqslant M$;

$(H_3(r, \tilde{r}, Q))$: il existe une fonction q telle que $\forall p \geqslant 2, r(p) = \tilde{r}(p) + q(p)/p$ et $\sup_{p\geqslant 2} |q(p)| \leqslant Q$;

$(H_4(r, R))$: $\forall p \geqslant 2, \forall k \geqslant 1, r(p^k)$ bornée avec $\sup_{p\geqslant 2, k\geqslant 1} |r(p^k)| \leqslant R$;

$(H_5(a, R, Q, \theta))$: pour tout réel $N > \max(Q, R)$ et pour tout premier p tel que $\max(Q, R) < p \leqslant N$, $N^{-\theta} \ll |\log a(p)|$.

3.1 Exemples de fonctions $a(d)$

Comme nous le verrons dans le chapitre 6, à la place de l'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$, Fainleib [Fai68] utilise une condition diophantienne qui est :

$$|\log a(n) - \log a(m)| \geqslant (nm)^{-\theta}, \tag{3.1}$$

pour une certaine constante $\theta \geqslant 1$ et des entiers $n \neq m$, n et m sans facteurs carrés.

Il est alors intéressant de dresser une liste de fonctions $a(d)$ qui peuvent répondre, ou non, à l'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ et à la condition (3.1). Pour toutes les fonctions $a(d)$ suivantes, les hypothèses $H_1(a, B_0)$ et $H_2(a, m, M)$ sont facilement vérifiées.

3.1.1 $a_1(d) = \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)$

L'hypothèse $H_5(a,R,Q,\theta)$ est vérifiée pour $\theta = 1$. En effet, pour $N \geqslant 1$ et $p \leqslant N$, nous avons

$$|\log a_1(p)| = \log\left(1+\frac{1}{p}\right) \geqslant \log\left(1+\frac{1}{N}\right) \geqslant \frac{\log 2}{N}.$$

La vérification de l'hypothèse de Fainleib se divise en deux sous-problèmes. Le premier est celui de la *non égalité*. Ici il faut démontrer que si $n \neq m$ et n et m sans facteurs carrés, nous avons

$$\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right) \neq \prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Notons $\{p_1, p_2, p_3, ...\}$ l'ensemble des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant, $I = \{i \in \mathbb{N}^*/p_i|n\}$ et $J = \{j \in \mathbb{N}^*/p_j|n\}$. Nous avons alors

$$\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{i\in I}(p_i+1)}{\prod_{i\in I}p_i} \text{ et } \prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{j\in J}(p_j+1)}{\prod_{j\in J}p_j}.$$

Comme nous comparons ces deux quantités, nous pouvons supposer que $\forall(i,j) \in I \times J$, $p_i \neq p_j$. Les deux fractions précédentes ne sont pas forcément irréductibles car des nombres premiers du dénominateur peuvent se simplifier avec certains entiers du numérateur. Nous rendons alors ces deux fractions irréductibles, en les simplifiant au maximum, pour obtenir

$$\frac{E_1}{\prod_{i\in I'}p_i} \text{ et } \frac{E_2}{\prod_{j\in J'}p_j},$$

où E_1 et E_2 sont deux entiers $\geqslant 1$ et $\emptyset \neq I' \subset I$ et $\emptyset \neq J' \subset J$ (les plus grands facteurs premiers de n et de m ne peuvent pas disparaître car $\forall p \geqslant 2$, $p+1 < 2p$).
L'égalité $\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ impliquerait alors que $\prod_{i\in I'}p_i = \prod_{j\in J'}p_j$, ce qui est impossible car $\forall(i,j) \in I' \times J'$, $p_i \neq p_j$.

Le deuxième sous-problème est celui de la *séparation* : la quantité

$$nm\left(\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right) - \prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right) = m\prod_{p|n}(p+1) - n\prod_{p|m}(p+1)$$

est donc un entier différent de zéro. Par conséquent,

$$\left|nm\left(\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right) - \prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)\right| \geqslant 1$$

soit

$$\left|\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)-\prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right| \geqslant \frac{1}{nm}.$$

Pour obtenir la condition (3.1), il suffit d'utiliser une inégalité qui nous est donnée par le théorème des accroissements finis :

$$|\log x - \log y| \geqslant \frac{|x-y|}{\max(x,y)},$$

valable pour $x > 0$ et $y > 0$. Celle-ci nous permet d'écrire

$$|\log a_1(n) - \log a_1(m)| \geqslant \frac{|a_1(n)-a_1(m)|}{\max\big(a_1(n),a_1(m)\big)} \geqslant \frac{1}{(nm)^2},$$

la dernière inégalité provenant du fait que $a_1(n) \leqslant n$ et $a_1(m) \leqslant m$ si n et m sont sans facteurs carrés.

3.1.2 $a_2(d) = \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p+1}\right)$

L'hypothèse $H_5(a,R,Q,\theta)$ est vérifiée pour $\theta = 1$. En effet, pour $N \geqslant 1$ et $p \leqslant N$, nous avons

$$|\log a_2(p)| = \log\left(1+\frac{1}{p+1}\right) \geqslant \log\left(1+\frac{1}{N+1}\right) \geqslant \frac{\log 2}{2N}.$$

La condition (3.1) n'est plus vérifiée. En effet, si $n \neq m$ et n et m sans facteurs carrés, nous n'avons pas

$$\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p+1}\right) \neq \prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p+1}\right).$$

Le raisonnement utilisé précédemment ne s'applique plus ici. Donnons un contre-exemple : les entiers 3 et $65 = 5 \times 13$ sont sans facteurs carrés et

$$a_2(3) = 1+\frac{1}{3+1} = \frac{5}{4} \quad , \quad a_2(65) = \left(1+\frac{1}{5+1}\right)\left(1+\frac{1}{13+1}\right) = \frac{7}{6}\times\frac{15}{14} = \frac{5}{4}.$$

Il existe beaucoup d'autres contre-exemples.

3.1.3 $a_3(d) = \frac{\sigma(d)}{\varphi(d)}$

L'hypothèse $H_5(a,R,Q,\theta)$ est vérifiée pour $\theta = 1$. En effet, pour $N \geqslant 2$ et $p \leqslant N$, nous avons

$$|\log a_3(p)| = \left|\log\left(\frac{\sigma(p)}{\varphi(p)}\right)\right| = \log\left(\frac{p+1}{p-1}\right) \geqslant \log\left(\frac{N+1}{N-1}\right) \geqslant \frac{2}{N}.$$

La condition (3.1) n'est pas non plus vérifiée ici. En effet, si $n \neq m$ et n et m sans facteurs carrés, nous n'avons pas

$$\frac{\sigma(n)}{\varphi(n)} \neq \frac{\sigma(m)}{\varphi(m)}.$$

Par exemple, les entiers 2 et $15 = 3 \times 5$ sont sans facteurs carrés et

$$a_3(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3 \quad , \quad a_3(15) = \frac{3+1}{3-1} \times \frac{5+1}{5-1} = \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} = 3.$$

Il existe également beaucoup d'autres contre-exemples.

3.1.4 $a_4(d) = \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{p^2}\right)$

L'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ est vérifiée pour $\theta = 2$. En effet, pour $N \geqslant 1$ et $p \leqslant N$, nous avons

$$|\log a_4(p)| = \log\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{p^2}\right) \geqslant \log\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{N^2}\right) \geqslant \frac{\log(1+\sqrt{2})}{N^2}.$$

L'écriture de $a_4(d)$ sous la forme $\prod_{p|d}\left(1 + \frac{b(p)}{p^2}\right)$ avec $b(p)$ qui n'est pas à valeurs entières ne nous assure pas la condition (3.1).

3.1.5 $a_5(d) = \exp \sum_{p|d} \frac{\sqrt{2}}{p}$

L'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ est vérifiée pour $\theta = 1$, car pour $N \geqslant 1$ et $p \leqslant N$, nous avons $|\log a_5(p)| = \sqrt{2}p^{-1} \geqslant \sqrt{2}N^{-1}$.
Ensuite, grâce à la factorisation de $\sqrt{2}$, la condition (3.1) est vérifiée :

$$\log a_5(n) - \log a_5(m) = \sqrt{2}\Big(\sum_{p|n} \frac{1}{p} - \sum_{p|m} \frac{1}{p}\Big).$$

En effet, si $n \neq m$ et n et m sans facteurs carrés, nous avons $\sum_{p|n} \frac{1}{p} \neq \sum_{p|m} \frac{1}{p}$ et l'entier

$$nm\Big(\sum_{p|n} \frac{1}{p} - \sum_{p|m} \frac{1}{p}\Big) = m \sum_{p|n} \frac{n}{p} - n \sum_{p|m} \frac{m}{p}$$

est donc différent de zéro. Par conséquent,

$$\Big|\sum_{p|n} \frac{1}{p} - \sum_{p|m} \frac{1}{p}\Big| \geqslant \frac{1}{nm},$$

soit

$$|\log a_5(n) - \log a_5(m)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{nm} \geqslant \frac{1}{nm}.$$

3.1.6 $a_6(d) = \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\sin p}{p}\right)$

Nous avons d'abord que $\forall p \geqslant 2$,

$$|\log a_6(p)| = \left|\log\left(1 + \frac{\sin p}{p}\right)\right| \geqslant \frac{2\log(3/2)|\sin p|}{p}.$$

Démontrons alors le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Il existe une constante $\theta > 0$ telle que*

$$\forall p \geqslant 2,\ \frac{|\sin p|}{p} \gg \frac{1}{p^{\theta}}.$$

Démonstration : Nous avons

$$\forall p \geqslant 2,\ |\sin p| \geqslant 2\left\|\frac{p}{\pi}\right\|,$$

où $\|.\|$ représente la distance à l'entier le plus proche, c'est-à-dire

$$\left\|\frac{p}{\pi}\right\| = \inf_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{p}{\pi} - k\right|.$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Si } \left|\frac{1}{\pi} - \frac{k}{p}\right| \geqslant 0.3 \text{ alors } \left|\frac{p}{\pi} - k\right| = p\left|\frac{1}{\pi} - \frac{k}{p}\right| \geqslant 0.3p \text{ et } \frac{|\sin p|}{p} \geqslant 0.6 \geqslant \frac{1}{p}.$$

Maintenant,

$$\text{si } \left|\frac{1}{\pi} - \frac{k}{p}\right| \leqslant 0.3 \text{ alors } 0 < \frac{1}{\pi} - 0.3 \leqslant \frac{k}{p} \leqslant \frac{1}{\pi} + 0.3 \leqslant 1.$$

De plus, l'irrationalité de π a permis à Mignotte en 1973 [Mig74] de démontrer que

$$\left|\pi - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{n^{20.6}},\ \text{ si } n \geqslant 2,\ m \text{ et } n \text{ entiers .}$$

Ainsi

$$\left|\frac{1}{\pi} - \frac{k}{p}\right| = \frac{|p - k\pi|}{p\pi} = \frac{k}{p\pi}\left|\pi - \frac{p}{k}\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} - 0.3\right)\frac{1}{(2k)^{20.6}} \geqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} - 0.3\right)\frac{1}{(2p)^{20.6}}$$

et

$$\frac{|\sin p|}{p} \geqslant \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} - 0.3\right)\frac{1}{(2p)^{20.6}}.$$

□

Si $p \leqslant N$, nous obtenons donc que $|\log a_6(p)| \gg N^{-\theta}$ et l'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ est vérifiée.
Par contre, la fonction $p \mapsto \sin p$ n'étant pas à valeurs entières, nous ne savons pas si la condition (3.1) est vérifiée.

3.1.7 $a_9(d) = \prod_{p|d}\left(1 + \frac{1}{e^p}\right)$

L'hypothèse $H_5(a, R, Q, \theta)$ n'est pas vérifiée. En effet, nous avons

$$\forall\theta > 0, \quad \lim_{N\mapsto+\infty} \frac{1}{N^\theta \log(1 + e^{-N})} = +\infty.$$

Ensuite, la fonction $p \mapsto e^p$ n'étant pas à valeurs entières, nous ne savons pas si la condition (3.1) est vérifiée.

3.2 Exemples de fonctions $r(d)$

Des exemples simples de fonction $r(d)$ satisfaisant les hypothèses $H_3(r, \tilde{r}, Q)$ et $H_4(r, R)$ sont

$$r_1(d) = 1,$$

$$r_2(d) = \mu^2(d)$$

ou

$$r_3(d) = \mu(d).$$

Un exemple plus original est celui de la fonction $r_4(d)$ définie par $r_4(d) = \frac{d\mu^2(d)}{\varphi(d)}$. Nous avons en effet

$$\forall p \geqslant 2, \quad r_4(p) = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{q(p)}{p} \text{ avec } q(p) = \frac{p}{p-1}$$

et $\forall k \geqslant 2$, $r_4(p^k) = 0$.

Par contre, nous ne sommes pas capables d'étudier la distribution limite de $\frac{1}{X}\sum_{\substack{n\leqslant X\\ a(n)\leqslant z}} r(n)$, par exemple dans le cas où $r(n) = d(n)$, $d(n)$ étant le nombre de diviseurs positifs de n. L'hypothèse $H_4(r, R)$ n'est d'abord pas vérifiée :

$$\forall p \geqslant 2, \forall k \geqslant 1, \ d(p^k) = k + 1.$$

L'hypothèse $H_3(r, \tilde{r}, Q)$ est certes vérifiée avec

$$\forall p \geqslant 2, \ \tilde{r}(p) = 2 \ \text{ et } \ q(p) = 0,$$

mais la fonction $g(s_1, s_2, a, r) = \sum_{d\geqslant 1} \frac{r(d)}{a(d)^{s_1} d^{s_2}}$ possède alors un pôle double en $s_2 = 1$, ce qui ne nous permet pas d'estimer la distribution limite (voir partie IV).

Troisième partie

Inégalité du produit oscillant

Chapitre 4

Introduction

Nous considérons dans cette partie une fonction multiplicative strictement positive $a(d)$ ainsi qu'une fonction multiplicative $r(d)$ et nous nous intéressons à la distribution pondérée associée à $a(d)$ donnée par $\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)$. Deux questions se posent alors. La première est celle de l'existence d'une distribution limite. Le théorème d'Erdös-Wintner [EW39] répond à cette question dans le cas où $r(d)=1$. Celui-ci donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une telle distribution :

Théorème 4.1
Une fonction additive à valeurs réelles $\psi(n)$ possède une distribution limite si et seulement si les trois séries suivantes

$$\sum_{|\psi(p)|>1}\frac{1}{p},\qquad \sum_{|\psi(p)|\leqslant 1}\frac{\psi(p)}{p},\qquad \sum_{|\psi(p)|\leqslant 1}\frac{\psi^2(p)}{p}$$

convergent. Si c'est le cas, la transformée de Fourier de la distribution limite est donnée par

$$\prod_{p\geqslant 2}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{m\geqslant 1}p^{-m}\exp\big(it\psi(p^m)\big)\Big).$$

De plus, la distribution limite est continue si et seulement si la série

$$\sum_{\psi(p)\neq 0}\frac{1}{p}$$

diverge.

La deuxième question est celle de l'estimation de la vitesse de convergence. Des problèmes d'accumulation supplémentaires apparaissent. Dans l'exemple de la fonction $\psi(m)=\log\big(\varphi(m)/m\big)$, où $\varphi(m)$ est la fonction d'Euler, la condition d'Erdös-Wintner est satisfaite. L'estimation de la vitesse de convergence dans ce cas particulier a été considérée dans [Tja66] et [Fai67]. Il a été démontré que

$$\frac{1}{n}\left|\left\{m\leqslant n\Big/\frac{\varphi(m)}{m}\leqslant z\right\}\right| = \Phi(z)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log\log n}\right), \tag{4.1}$$

uniformément en z, où $\Phi(z)$ est une fonction de distribution.
Dans un cadre plus général, Fainleib estime en 1968 dans [Fai68] la différence entre des fonctions de distribution en fonction de la différence entre leurs fonctions caractéristiques respectives. Plus précisément, il obtient le théorème suivant :

Théorème 4.2
Soient $F(z)$ et $G(z)$ des fonctions de distribution et $f(t)$ et $g(t)$ leurs fonctions caractéristiques. Alors, pour $T > 0$,

$$\sup_z |F(z) - G(z)| < C_1 \left(S_G\left(\frac{1}{T}\right) + \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} \right),$$

où C_1 est une constante absolue et

$$S_G(h) = \sup_z \frac{1}{2h} \int_0^h \big(G(z+u) - G(z-u)\big) du.$$

Ce théorème lui permet alors d'améliorer le terme d'erreur dans l'égalité (4.1) :

$$\frac{1}{n}\left|\left\{ m \leqslant n \middle/ \frac{\varphi(m)}{m} \leqslant z \right\}\right| = \Phi(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log n} \left(\frac{\log\log n}{\log\log\log n} \right)^2 \right).$$

Il ajoute d'ailleurs dans cet article une note précisant qu'il a récemment réussi à montrer que cette estimation est la meilleure possible, c'est-à-dire :

$$\sup_z \left| \frac{1}{n}\left|\left\{ m \leqslant n \middle/ \frac{\varphi(m)}{m} \leqslant z \right\}\right| - \Phi(z) \right| = \Omega\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

La notation $\Omega(...)$ est expliquée à la page 146.
Fainleib étend ensuite ses résultats à des fonctions arithmétiques additives vérifiant une condition diophantienne :

Théorème 4.3
Soit $\psi(m)$ une fonction additive réelle satisfaisant les conditions suivantes :

$$\sum_{p^r} \frac{\psi^2(p^r)}{p^r} < \infty,$$

$$|\psi(n) - \psi(m)| \geqslant (nm)^{-\theta}, \tag{4.2}$$

si $n \neq m$, n et m sans facteurs carrés, et où θ est une constante $\geqslant 1$.
Alors, nous avons

$$\frac{1}{n}\left|\left\{ m \leqslant n / \psi(m) - \sum_{p \leqslant n} \frac{\psi(p)}{p} \leqslant z \right\}\right| = F(z) + \mathcal{O}\left(\frac{\log\log \frac{1}{\rho_n}}{\log \frac{1}{\rho_n} \log\log\log \frac{1}{\rho_n}} \right),$$

où $F(z)$ est la fonction de distribution définie par sa transformée de Fourier :

$$f(t) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{it\psi(p^r)}}{p^r}\right) e^{-it\psi(p)/p}$$

et

$$\rho_n = \sum_{p > \exp \frac{\log n \log\log\log n}{6 \log\log n}} \frac{\psi^2(p)}{p}.$$

Dans le chapitre 5, nous étendons ces résultats à l'étude d'une distribution pondérée $\displaystyle\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)$ où $r(d)$ est une fonction multiplicative vérifiant les deux hypothèses suivantes :

(1) $\forall k \geqslant 1$ et $\forall p \geqslant 2$, $r(p^k)$ bornée ;

(2) il existe deux fonctions $\tilde{r}(p)$ et $q(p)$ bornées telles que $\forall p \geqslant 2$, $r(p) = \tilde{r}(p) + \dfrac{q(p)}{p}$.

Nous proposons également de nous affranchir de la condition diophantienne (4.2). Nous avons alors besoin d'une hypothèse plus forte sur la fonction $a(d)$ qui est la suivante :

(3) il existe $\theta > 0$ tel que pour tout réel $N > \max(Q, R)$ et pour tout premier p tel que $\max(Q, R) < p \leqslant N$, $N^{-\theta} \ll |\log a(p)|$ (Q et R représentant respectivement $\sup_{p\geqslant 2} |q(p)|$ et $\sup_{p\geqslant 2, k\geqslant 1} |r(p^k)|$).

Nous avons vu dans le chapitre 3 que cette hypothèse s'appliquait à certaines fonctions $a(d)$ pour lesquelles la condition diophantienne (4.2) de Fainleib n'était pas vérifiée. Nous remarquons plus loin (voir remarque 5.5) que nous pouvons remplacer (3) par une condition en moyenne.
Dans le chapitre 5, nous démontrons ainsi une inégalité appelée inégalité du produit oscillant qui va nous permettre plus tard de traiter les entiers d tels que $a(d)$ est proche de z.
Dans le chapitre 6, nous imposons la condition diophantienne de Fainleib sur la fonction $\log a(d)$. Cela nous permet, en suivant la démarche de Fainleib dans la démonstration du théorème 4.3, d'améliorer la majoration obtenue dans l'inégalité du produit oscillant.

Chapitre 5

Notre approche

Nous considérons ici deux fonctions a et r définies sur les puissances de nombres premiers vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) $\forall k \geqslant 1$ et $\forall p \geqslant 2$, $a(p^k) > 0$;

(2) $\forall k \geqslant 1$ et $\forall p \geqslant 2$, $r(p^k)$ bornée ;

(3) il existe deux fonctions $\tilde{r}(p)$ et $q(p)$ bornées telles que $\forall p \geqslant 2$, $r(p) = \tilde{r}(p) + \dfrac{q(p)}{p}$.

Nous notons $R = \sup_{p \geqslant 2, k \geqslant 1} |r(p^k)|$, $\tilde{R} = \sup_{p \geqslant 2} |\tilde{r}(p)|$, $R' = R + \tilde{R} + R\tilde{R}$ et $Q = \sup_{p \geqslant 2} |q(p)|$.

Théorème 5.1
Soient T un réel positif et N un réel $> \max(Q, R)$. Supposons que $\forall p > \max(Q, R)$, $1 - \operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)p^{-1} \geqslant 0$, que pour tout premier p tel que $\max(Q, R') < p \leqslant N$, $|\log a(p)|^{-1} \ll T$ et $\forall p > Q$, $r(p) \neq 0$. Nous avons alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big|\prod_{p>Q}\left(1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sgn}\big((r(p))\tilde{r}(p)}{p}\right)\Big| dt$$
$$\ll \exp\left[\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\frac{1}{p}\left(|r(p)| - \operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p) - \frac{\log|r(p)|}{2S_{Q,R',N}}\right)\right]\frac{1}{S_{Q,R',N}^{1/2}},$$

où

$$S_{Q,R',N} = \sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\frac{1}{p}.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de R, $\tilde{R}$, de Q et de la constante intervenant dans la majoration $|\log a(p)|^{-1} \ll T$.

Remarque 5.2
Dans l'utilisation que nous ferons par la suite de cette inégalité, nous choisirons $N = T^{1/\theta}$ avec T qui tend vers l'infini.

Remarque 5.3
L'hypothèse d'approximation concerne la fonction $r(d)$ et l'inégalité énoncée au théorème 5.1 ne fait intervenir que la fonction $|r(d)|$. Ceci s'explique par le fait que, dans les applications que nous verrons par la suite, seule l'estimation des entiers $d \leqslant X$, affectés d'un poids $|r(d)|$ et tels que $a(d)$ est proche de z est nécessaire.

Remarque 5.4
En particulier, en choisissant $r(d) = 1$ et $a(d) = \prod_{p|d} p(p+1)^{-1}$, nous avons pour $T \geqslant 3$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|\prod_{p\geqslant 2}\left(1+\left(\frac{p+1}{p}\right)^{it}\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right| dt \ll \frac{1}{\sqrt{\log\log T}}.$$

Démonstration : Séparons le produit eulérien pour $p > Q$ en deux parties : $p \leqslant R$ et $p > R$. Pour $p > R$, nous comparons le facteur $\sum_{k\geqslant 0}|r(p^k)|a(p^k)^{-it}p^{-k}$ à $1 + |r(p)|a(p)^{-it}p^{-1}$. La condition $p > R$ nous permet de développer en série entière le terme $\big(1+|r(p)|a(p)^{-it}p^{-1}\big)^{-1}$. Nous avons donc

$$\prod_{p>Q}\left|1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\right| \ll \prod_{p>\max(Q,R)}\left|1+\frac{|r(p)|}{a(p)^{it}p}\right|,$$

où la constante intervenant ne dépend que de R.
Ensuite, l'hypothèse $r(p) = \tilde{r}(p) + \dfrac{q(p)}{p}$ nous permet de réduire le produit eulérien aux premiers plus petits que N :

$$\begin{aligned}\prod_{p>\max(Q,R)}\left|\left(1+\frac{|r(p)|}{a(p)^{it}p}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\right| &\ll \prod_{\max(Q,R)<p\leqslant N}\left|\left(1+\frac{|r(p)|}{a(p)^{it}p}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\right|\\ &\ll \prod_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\exp\left(-\frac{1}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos\big(t\log a(p)\big)\Big)\right),\end{aligned}$$

où la constante intervenant dépend de R, $\tilde{R}$ et Q. La condition $p > R'$ nous permet d'utiliser l'estimation $\log(1+\lambda) = \lambda + \mathcal{O}\big(|\lambda|^2\big)$, $|\lambda| \leqslant 1/2$, avec ici

$$\lambda = \frac{|r(p)|}{a(p)^{it}p} - \frac{\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p} - \frac{|r(p)|\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{a(p)^{it}p^2}.$$

Par l'inégalité d'Hölder et en introduisant des cœfficients $\alpha_p > 0$ tels que $\displaystyle\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\alpha_p^{-1} = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_0^T \prod_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\exp\left(-\frac{1}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos\big(t\log a(p)\big)\Big)\right)dt\\ &\quad\leqslant \prod_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\left[\int_0^T \exp\left(-\frac{\alpha_p}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos\big(t\log a(p)\big)\Big)\right)dt\right]^{1/\alpha_p}.\end{aligned}$$

Notons alors

$$Z_p(T)=\int_0^T \exp\bigg(-\frac{\alpha_p}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos\big(t\log a(p)\big)\Big)\bigg)dt.$$

Le changement de variable $v=t\log a(p)$ nous donne

$$Z_p(T)=\frac{1}{|\log a(p)|}\int_0^{T|\log a(p)|}\exp\bigg(-\frac{\alpha_p}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos v\Big)\bigg)dv.$$

Par périodicité, nous obtenons

$$Z_p(T)\ll\frac{1}{|\log a(p)|}\bigg(1+\frac{T|\log a(p)|}{\pi}\bigg)\int_0^{\pi}\exp\bigg(-\frac{\alpha_p}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos v\Big)\bigg)dv.$$

Pour $v\in[0,\pi]$, nous connaissons l'inégalité classique de convexité $v/\pi\leqslant\sin(v/2)$ ce qui, par la relation $\cos v=1-2\sin^2(v/2)$, mène à $\cos v\leqslant 1-2v^2/\pi^2$. Nous obtenons alors, pour $v\in[0,\pi]$, les inégalités suivantes :

$$\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos v\geqslant\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|+\frac{2v^2}{\pi^2}|r(p)|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\exp\bigg(-\frac{\alpha_p}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|\cos v\Big)\bigg)dv\\ &\qquad\qquad\leqslant\int_0^{\pi}\exp\bigg(-\frac{\alpha_p}{p}\Big(\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|+\frac{2v^2}{\pi^2}|r(p)|\Big)\bigg)dv.\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi écrire

$$\begin{aligned}Z_p(T)^{1/\alpha_p}&\ll\bigg(\frac{1}{|\log a(p)|}+\frac{T}{\pi}\bigg)^{1/\alpha_p}\exp\bigg(-\frac{\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-|r(p)|}{p}\bigg)\bigg(\int_0^{\pi}\exp\bigg(-\frac{\alpha_p}{p}\frac{2|r(p)|v^2}{\pi^2}\bigg)dv\bigg)^{1/\alpha_p}\\ &\ll\exp\bigg(\frac{|r(p)|-\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\bigg)\bigg(\frac{1}{|\log a(p)|}+\frac{T}{\pi}\bigg)^{1/\alpha_p}\bigg(\frac{p}{\alpha_p|r(p)|}\bigg)^{1/(2\alpha_p)},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue par la majoration de l'intégrale de Gauss. De plus,

$$\prod_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\bigg(\frac{p}{\alpha_p|r(p)|}\bigg)^{1/(2\alpha_p)}=\exp\bigg(\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\frac{1}{2\alpha_p}\log\bigg(\frac{p}{\alpha_p}\bigg)-\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\frac{1}{2\alpha_p}\log\big(|r(p)|\big)\bigg).$$

Choisissons maintenant $\alpha_p=pS_{Q,R',N}$ où $S_{Q,R',N}=\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\frac{1}{p}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}&\int_0^T\bigg|\prod_{p>Q}\bigg(1+\sum_{k\geqslant1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\bigg)\bigg(1-\frac{\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\bigg)\bigg|dt\\ &\ll T\exp\bigg[\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\frac{1}{p}\bigg(|r(p)|-\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-\frac{\log|r(p)|}{2S_{Q,R',N}}\bigg)-\frac{\log S_{Q,R',N}}{2}\bigg]\\ &\ll\exp\bigg[\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N}\frac{1}{p}\bigg(|r(p)|-\mathrm{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)-\frac{\log|r(p)|}{2S_{Q,R',N}}\bigg)\bigg]\frac{T}{S_{Q,R',N}^{1/2}}.\end{aligned}$$

□

Remarque 5.5
Nous avons choisi ici l'hypothèse : pour tout premier p *tel que* $\max(Q, R') < p \leqslant N$, $|\log a(p)|^{-1} \ll T$. *Cependant une condition en moyenne est en réalité suffisante :*

$$\sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N} \frac{1}{p} \log\left(1 + \frac{\pi}{T|\log a(p)|}\right) \ll \sum_{\max(Q,R')<p\leqslant N} \frac{1}{p}.$$

Chapitre 6

L'approche de Fainleib

En s'inspirant de la démonstration de Fainleib et avec une hypothèse supplémentaire sur les fonctions $r(d)$ et $a(d)$, nous pouvons améliorer la majoration obtenue dans l'inégalité du produit oscillant.

Théorème 6.1
Soient $r(d)$ une fonction multiplicative et $a(d)$ une fonction multiplicative strictement positive vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) il existe $0 < R \leqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant 1$ et $\forall p \geqslant 2$, $|r(p^k)| \leqslant R$;

(2) il existe deux fonctions $\tilde{r}(p)$ et $q(p)$ bornées telles que $\forall p \geqslant 2$, $r(p) = \tilde{r}(p) + \dfrac{q(p)}{p}$ (nous notons $Q = \sup_{p\geqslant 2} |q(p)|$) ;

(3) $\forall p > \max(Q, R)$, $1 - \operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)p^{-1} \geqslant 0$.

Supposons de plus que pour tout entier $N > \max(Q, R)$,

$$\Big|\prod_{\max(Q,R)<p\leqslant N}\left(1 - \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\Big| \ll \frac{1}{(\log N)^R}$$

et que pour une certaine constante $\theta \geqslant 1$,

$$|\log a(n) - \log a(m)| \geqslant (nm)^{-\theta},$$

si $n \neq m$ et n et m sans facteurs carrés. Alors, nous avons

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big|\prod_{p>Q}\left(1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\Big| dt \ll \left(\frac{\log\log T}{\log T\log\log\log T}\right)^R.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de R, $\sup_{p\geqslant 2}|\tilde{r}(p)|$, Q et θ.

Fainleib a besoin d'estimations de sommes de fonctions multiplicatives et d'une inégalité que nous pouvons rapprocher de l'inégalité du produit oscillant démontrée dans le chapitre précédent :

Lemme 6.2
Soit $\alpha(n)$ une fonction multiplicative, avec $\alpha(n) \geqslant 0$ pour tout n, et

$$\sum_{p \leqslant x} \alpha(p) \log p = \mathcal{O}\big(x\big),$$

$$\alpha(p^r) = \mathcal{O}\big((2p)^{r\gamma}\big) \quad (r \geqslant 2), \quad 0 \leqslant \gamma < 1/2.$$

Alors, si

$$(\log x)^{\frac{1}{1-2\gamma}} \leqslant y \leqslant x,$$

nous avons

$$\sum_{\substack{n>x \\ n|\pi_y}} \frac{\alpha(n)}{n} \ll \prod_{p \leqslant y} \left(1 + \frac{\alpha(p)}{p}\right) e^{-\lambda\left(\frac{\log x}{\log y}\right)}$$

et

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n|\pi_y}} \alpha(n) \ll \frac{x}{\log y} \prod_{p \leqslant y} \left(1 + \frac{\alpha(p)}{p}\right) e^{-\lambda\left(\frac{\log x}{\log y}\right)},$$

où

$$\lambda(t) = t \log t + t \log\log t + \mathcal{O}(t)$$

et $n|\pi_y$ signifie que les diviseurs premiers de n sont tous inférieurs ou égaux à y.

Lemme 6.3
Soit $\psi(n)$ une fonction additive réelle telle que

$$\sum_p \frac{\psi^2(p)}{p} < \infty$$

et

$$|\psi(n) - \psi(m)| \geqslant (nm)^{-\theta},$$

pour une constante $\theta \geqslant 1$ et des entiers $n \neq m$, n et m sans facteurs carrés. Alors, si

$$g(t) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{it\psi(p^r)}}{p^r}\right) e^{-it\frac{\psi(p)}{p}},$$

nous avons

$$\frac{1}{T}\int_0^T |g(t)| dt \ll \frac{\log\log T}{\log T \log\log\log T}.$$

Par conséquent, par le théorème 6.1, nous retrouvons le lemme 6.3 de Fainleib mais avec un poids multiplicatif $r(d)$.

Démonstration du lemme 6.1 : Les hypothèses (1), (2) et (3) du théorème 6.1 entraînent que, pour tout réel $N > \max(Q, R)$,

$$\left|\prod_{p>Q}\left(1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\right| \ll \prod_{\max(Q,R)<p\leqslant N}\left|1+\frac{|r(p)|}{a(p)^{it}p}\right|\left(1-\frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)$$

$$\ll \frac{1}{(\log N)^R}\left|\prod_{\max(Q,R)<p\leqslant N}\left(1+\frac{|r(p)|}{a(p)^{it}p}\right)\right| = \frac{1}{(\log N)^R}\left|\sum_{\substack{n|\pi_N\\(n,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\frac{\mu^2(n)|r(n)|}{a(n)^{it}n}\right|,$$

où nous utilisons la notation de Fainleib : $(n, \pi_{\max(Q,R)}) = 1$ signifie que tous les diviseurs premiers de n sont plus grands que $\max(Q, R)$.
Par conséquent,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left|\prod_{p>Q}\left(1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\right|^2 dt$$

$$\ll \frac{1}{T(\log N)^{2R}}\int_0^T\left|\sum_{\substack{n|\pi_N\\(n,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\frac{\mu^2(n)|r(n)|}{a(n)^{it}n}\right|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T(\log N)^{2R}}\sum_{\substack{n|\pi_N\\(n,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\ \sum_{\substack{m|\pi_N\\(m,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm}\int_0^T e^{it\left(\log a(m)-\log a(n)\right)}dt$$

$$\ll \frac{1}{(\log N)^{2R}}\sum_{\substack{n|\pi_N\\(n,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\ \sum_{\substack{m|\pi_N\\(m,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm}\min\left(1,\frac{1}{T|\log a(m)-\log a(n)|}\right)$$

$$= \frac{1}{(\log N)^{2R}}\sum_{\substack{n|\pi_N\\(n,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\frac{\mu^2(n)r(n)^2}{n^2}$$

$$+ \frac{1}{(\log N)^{2R}}\sum_{\substack{n|\pi_N\\(n,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\ \sum_{\substack{m|\pi_N\\(m,\pi_{\max(Q,R)})=1\\n\neq m}}\frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm}\min\left(1,\frac{1}{T|\log a(m)-\log a(n)|}\right)$$

$$\ll \frac{1}{(\log N)^{2R}}\Bigg(1+$$

$$\sum_{\substack{n|\pi_N\\(n,\pi_{\max(Q,R)})=1}}\ \sum_{\substack{m|\pi_N\\(m,\pi_{\max(Q,R)})=1\\n\neq m}}\frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm}\min\left(1,\frac{1}{T|\log a(m)-\log a(n)|}\right)\Bigg).$$

L'hypothèse $|\log a(n) - \log a(m)| \geqslant (nm)^{-\theta}$ nous donne

$$\min\left(1, \frac{1}{T|\log a(m) - \log a(n)|}\right) \leqslant \min\left(1, \frac{(nm)^\theta}{T}\right)$$

et

$$\sum_{\substack{n|\pi_N \\ (n,\pi_{\max(Q,R)})=1}} \sum_{\substack{m|\pi_N \\ (m,\pi_{\max(Q,R)})=1 \\ n\neq m}} \frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm} \min\left(1, \frac{(nm)^\theta}{T}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\sum_{n|\pi_N} \sum_{\substack{m|\pi_N \\ (nm)^\theta \leqslant T \\ n\neq m}} \mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|(nm)^{\theta-1} + \sum_{n|\pi_N} \sum_{\substack{m|\pi_N \\ (nm)^\theta > T \\ n\neq m}} \frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm}$$

$$\leqslant T^{-1/\theta}\sum_{n|\pi_N} \sum_{\substack{m|\pi_N \\ nm \leqslant T^{1/\theta} \\ n\neq m}} \mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)| + \sum_{n|\pi_N} \sum_{\substack{m|\pi_N \\ nm > T^{1/\theta} \\ n\neq m}} \frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm}.$$

Nous avons de plus

$$\sum_{n|\pi_N} \sum_{\substack{m|\pi_N \\ nm \leqslant T^{1/\theta} \\ n\neq m}} \mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)| \leqslant \sum_{\substack{k|\pi_N \\ k \leqslant T^{1/\theta}}} \sum_{\substack{n|k \\ n|\pi_N \\ \mu^2(n)\neq 0}} |r(n)||r(k/n)|$$

et

$$\sum_{n|\pi_N} \sum_{\substack{m|\pi_N \\ nm > T^{1/\theta} \\ n\neq m}} \frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm} \leqslant \sum_{\substack{k|\pi_N \\ k > T^{1/\theta}}} \frac{1}{k} \sum_{\substack{n|k \\ n|\pi_N \\ \mu^2(n)\neq 0}} |r(n)||r(k/n)|.$$

Notons $p_1, ..., p_r$ les premiers plus petits que N et $k = p_1^{\nu_1}...p_r^{\nu_r}$. Comme $n|k$ et $\mu^2(n) \neq 0$, nous avons

$$n = p_1^{\mu_1}...p_r^{\mu_r}$$

avec $\forall i = 1, ..., r$, $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$ et $0 \leqslant \mu_i \leqslant \nu_i$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n|k \\ n|\pi_M \\ \mu^2(n)\neq 0}} |r(n)||r(k/n)| &= \sum_{\substack{0\leqslant \mu_i \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \mu_i \leqslant \nu_i}} |r(p_1^{\mu_1}...p_r^{\nu_r})||r(p_1^{\nu_1-\mu_1}...p_r^{\nu_r-\mu_r})| \\
&\leqslant \prod_{i=1}^r \left(\sum_{0\leqslant \mu_i\leqslant 1} |r(p_i^{\mu_i})||r(p_i^{\nu_i-\mu_i})|\right) \\
&= \prod_{i=1}^r \left(|r(p_i^{\nu_i})| + |r(p_i)||r(p_i^{\nu_i-1})|\right) \\
&\leqslant (2R)^r = (2R)^{\omega(k)},
\end{aligned}$$

où $\omega(k)$ représente le nombre de diviseurs premiers de k.
Ainsi, nous obtenons

$$\sum_{\substack{n\mid\pi_N \\ (n,\pi_{\max(Q,R)})=1}} \sum_{\substack{m\mid\pi_N \\ (m,\pi_{\max(Q,R)})=1 \\ n\neq m}} \frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm} \min\left(1, \frac{(nm)^\theta}{T}\right) \leqslant T^{-1/\theta} \sum_{\substack{k\leqslant T^{1/\theta} \\ k\mid\pi_N}} (2R)^{\omega(k)} + \sum_{\substack{k>T^{1/\theta} \\ k\mid\pi_N}} \frac{(2R)^{\omega(k)}}{k}.$$

En appliquant le lemme 6.2 de Fainleib à ces deux dernières sommes, avec $\alpha(k) = (2R)^{\omega(k)}$ et $\gamma = 0$, nous trouvons que

$$\sum_{\substack{n\mid\pi_N \\ (n,\pi_{\max(Q,R)})=1}} \sum_{\substack{m\mid\pi_N \\ (m,\pi_{\max(Q,R)})=1 \\ n\neq m}} \frac{\mu^2(n)\mu^2(m)|r(n)||r(m)|}{nm} \min\left(1, \frac{(nm)^\theta}{T}\right) \ll (\log N)^{R+R^2} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\frac{\log T}{\log N}\log\left(\frac{\log T}{\log N}\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \left|\prod_{p>Q}\left(1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\right| dt \\
&\leqslant \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left|\prod_{p>Q}\left(1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{it}p^k}\right)\left(1-\frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)\tilde{r}(p)}{p}\right)\right|^2 dt} \\
&\ll \frac{1}{(\log N)^R}\left(1+(\log N)^R \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\frac{\log T}{\log N}\log\left(\frac{\log T}{\log N}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

si

$$\frac{1}{\theta^2}\log^2 T \leqslant N \leqslant T^{1/\theta}.$$

En posant

$$N = \exp\left(\frac{1}{8\theta}\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}\right),$$

nous obtenons l'inégalité énoncée au théorème 6.1. □

Quatrième partie

Distribution limite pondérée associée à $a(d)$

Chapitre 7

Mise en place

Le premier exemple de fonction de répartition limite apparu dans la littérature est celui de Schoenberg [Sch28] qui établit en 1928 l'existence et la continuité de :

$$B(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}|\{n \leqslant N : n/\varphi(n) \geqslant t\}|.$$

En 1933, Davenport [Dav33] démontre l'existence et la continuité de

$$A(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}|\{n \leqslant N : \sigma(n)/n \geqslant t\}|.$$

Un tel nombre est appelé t-abondant et simplement abondant si $t = 2$. La meilleure estimation de $A(2)$ connue à ce jour est celle de Deléglise [Del98] en 1998 :

$$0.2474 < A(2) < 0.2480.$$

Erdös [Erd46b] et récemment Tenenbaum et Toulmonde [TT06] ont étudié le comportement de $B(t)$ au voisinage de $t = 1$. Toulmonde [Tou06] a montré que le comportement de $B(t)$ au voisinage de $t = 1$ détermine le comportement local au voisinage de chaque t dans l'image de $n/\varphi(n)$. Ce résultat est encore valable pour $A(t)$ [Tou06]. Utilisant le fait que les valeurs de $n/\varphi(n)$ et $\sigma(n)/n$ sont denses dans $[1, \infty)$, Toulmonde [Tou06] a obtenu des estimations des normes infinie et L_p du module de continuité de $A(t)$ et $B(t)$. Concernant la taille de $A(t)$ et $B(t)$, Andreas Weingartner [Wei07] établit en 2007 que

$$A(t), B(t) = \exp\Big\{ - e^{te^{-\gamma}}\big(1 + \mathcal{O}(t^{-2})\big)\Big\} \quad (t \to \infty).$$

Il améliore ainsi le résultat d'Erdös [Erd46b] de 1946 :

$$\log\log\big(1/B(t)\big) = te^{-\gamma}\big(1 + o(1)\big) \quad (t \to \infty).$$

Certains se sont intéressés à la répartition des valeurs de la fonction d'Euler , plus précisément à la fonction $\phi(Z) = \sum_{\varphi(n)\leqslant Z} 1$. Erdös et Turan [Erd45] ont montré en 1945, comme une conséquence simple du théorème de Schoenberg, que

$$\phi(Z) \sim AZ \quad (Z \to \infty),$$

pour une constante convenable A. L'étude de la série de Dirichlet

$$g(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\varphi(n)^s} = \zeta(s)h(s) \quad (\Re s > 1)$$

où
$$h(s)=\prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{1}{(p-1)^s}-\frac{1}{p^s}\right)\quad (\Re s>0),$$
permet alors d'évaluer cette limite $A=\zeta(2)\zeta(3)\zeta(6)^{-1}$. Dans [Dre70], Dressler donne une preuve élémentaire du fait que $\lim_{Z\mapsto\infty}(\phi(Z)/Z)$ existe et calcule la valeur de cette limite.
En 1972, Bateman [Bat72] a entrepris l'étude du terme résiduel $\Delta(Z)=\phi(Z)-AZ$. Il utilise pour cela une méthode d'intégration complexe. En effet la relation $g(s)=\zeta(s)h(s)$ fournit un prolongement analytique de $g(s)$ au demi-plan $\Re s>0$ dont la seule singularité est un pôle simple, de résidu A, en $s=1$. Il établit, pour $s=\sigma+it$, la majoration
$$h(s)\ll \exp\{50|t|^{1-\sigma}\log\log|t|\},$$
pour $|t|\geqslant 8$ et $1/3\leqslant\sigma\leqslant 1$, et en déduit, à l'aide de la formule de Perron, l'estimation suivante :
$$\Delta(Z)\ll Ze^{-c\sqrt{\log Z\log\log Z}},\tag{7.1}$$
pour tout $c<1/\sqrt{2}$.
En 1997, Stankus [Sta97], s'inspirant du travail de Bateman, démontre une formule asymptotique pour la répartition des valeurs de la fonction $\sigma_\delta(n)=\sum_{d|n}d^\delta\quad(\delta>0)$.
En 1998, Balazard [Bal98] améliore le résultat de Bateman en établissant que l'estimation (7.1) est valable pour toute constante $c<\sqrt{2}$. La méthode employée est élémentaire et fondée sur une application du théorème de Diamond dans le problème abélien de Beurling.
Le meilleur résultat concernant ce problème est dû à Balazard et Tenenbaum [BT98]. En 1998, ils obtiennent la forme suivante pour le terme d'erreur
$$\mathcal{O}\Big(Z\exp\big(-a(\log Z)^{3/5}(\log\log Z)^{-1/5}\big)\Big).$$

La démonstration repose sur une amélioration de la majoration de la fonction $h(s)$ grâce à l'étude de sommes d'exponentielles du type
$$S_N=\sum_{M<p\leqslant N}(p-1)^{it}$$
avec $M<N\leqslant 2M$ et $|t|$ grand en fonction de M.
Dans cette partie, nous nous intéressons à la limite , lorsque X tend vers l'infini, de
$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}}r(d),\quad 0<z\leqslant X,$$
où $r(d)$ est une fonction multiplicative et $a(d)$ une fonction multiplicative strictement positive.

Nous considérons trois réels $0 < m < M$ et $\theta > 0$ ainsi qu'une fonction $\tilde{r}(d)$ définie et bornée sur les nombres premiers. Supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses suivantes :

$(H_1(a, B_0))$: il existe une fonction b telle que $\forall p \geqslant 2, a(p)^{-1} = 1 + b(p)/p$ et $\sup_{p\geqslant 2} |b(p)| \leqslant B_0$;

$(H_2(a, m, M))$: $\forall p \geqslant 2, \forall k \geqslant 1, m \leqslant a(p^k) \leqslant M$;

$(H_3(r, \tilde{r}, Q))$: il existe une fonction q telle que $\forall p \geqslant 2, r(p) = \tilde{r}(p) + q(p)/p$ et $\sup_{p\geqslant 2} |q(p)| \leqslant Q$;

$(H_4(r, R))$: $\forall p \geqslant 2, \forall k \geqslant 1, r(p^k)$ bornée avec $\sup_{p\geqslant 2, k\geqslant 1} |r(p^k)| \leqslant R$;

$(H_5(a, R, Q, \theta))$: pour tout réel $N > \max(Q, R)$ et pour tout premier p tel que $\max(Q, R) < p \leqslant N$, $N^{-\theta} \ll |\log a(p)|$.

Notre travail repose sur trois points. Tout d'abord, notre étude, inspirée du travail de Bateman, repose sur des méthodes d'analyse complexe. Cela nous permet ensuite d'obtenir des résultats quantitatifs sur la distribution des valeurs de fonctions arithmétiques. Enfin, notre méthode se généralise à d'autres fonctions arithmétiques que la fonction d'Euler ou la fonction σ. En 1933, Davenport avait déjà remarqué que ses résultats étaient valables pour d'autres fonctions arithmétiques $a(d)$, mais il avait besoin en particulier d'une dépendance linéaire des nombres $\log a(p)$.

7.1 Introduction d'une fonction lisse

La première étape consiste à séparer le comportement général de l'effet des points sur le bord en introduisant une fonction lisse. Pour cela, nous considérons une fonction k de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

et

$$0 \leqslant k(x) \leqslant 1.$$

Choisissons un paramètre réel $\tau > 1$ et définissons

$$f(x) = k\left(\frac{x-1}{\tau-1}\right).$$

Par conséquent, f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ et satisfait

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } x \geqslant \tau, \end{cases}$$

et

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Lemme 7.1
Avec la fonction f définie ci-dessus, nous avons

$$\sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) = \sum_{d \leqslant X} r(d) f\left(\frac{a(d)}{z}\right) + \mathcal{O}\bigg(\sum_{\substack{d \leqslant X \\ 1 < \frac{a(d)}{z} < \tau}} |r(d)| \bigg).$$

Démonstration : Les hypothèses sur la fonction f amènent à l'égalité qui suit :

$$\begin{aligned} \sum_{d \leqslant X} r(d) f\big(a(d)/z\big) &= \sum_{\substack{d \leqslant X \\ \frac{a(d)}{z} \leqslant 1}} r(d) f\big(a(d)/z\big) + \sum_{\substack{d \leqslant X \\ 1 < \frac{a(d)}{z} < \tau}} r(d) f\big(a(d)/z\big) \\ &= \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) + \mathcal{O}\bigg(\sum_{\substack{d \leqslant X \\ 1 < \frac{a(d)}{z} < \tau}} |r(d)| \bigg). \end{aligned}$$

□

Désormais, nous utilisons les notations suivantes : pour $0 < z \leqslant X$ et $\tau > 1$,

$$S_1(X, z, \tau, a, r) = \sum_{\substack{d \leqslant X \\ 1 < \frac{a(d)}{z} < \tau}} |r(d)|, \tag{7.2}$$

$$S_2(X, z, a, r, f) = \sum_{d \leqslant X} r(d) f\left(\frac{a(d)}{z}\right) \tag{7.3}$$

et

$$S_3(X, z, a, r) = \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d). \tag{7.4}$$

Nous définissons de plus, pour $s_1 = \sigma_1 + it_1$ et $s_2 = \sigma_2 + it_2$, la série de Dirichlet :

$$g(s_1, s_2, a, r) = \sum_{d \geqslant 1} \frac{r(d)}{a(d)^{s_1} d^{s_2}} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}} \right).$$

7.2 Étude de $S_1(X, z, \tau, a, r)$

7.2.1 Transformées de Mellin et de Fourier

Lemme 7.2
Nous avons, pour $u > 0$ et $\kappa > 0$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{u^{-s} ds}{s(s+1)} = \begin{cases} 1 - u & si\ u < 1, \\ 0 & si\ u \geqslant 1. \end{cases}$$

Démonstration : Tout d'abord, l'intégrale sur un chemin infini est la limite de l'intégrale sur un chemin fini :

$$\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{u^{-s}ds}{s(s+1)} = \lim_{T\to\infty} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{u^{-s}ds}{s(s+1)},$$

où s parcourt le segment du bas vers le haut et où T tend vers l'infini.
Si $u = 1$, il est facile d'évaluer l'intégrale

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{1}{s(s+1)}ds$$

et de déterminer sa limite lorsque T tend vers l'infini.
Si $u > 1$, il suffit de déplacer la droite d'intégration vers la droite. Comparons l'intégrale sur le segment $[\kappa - iT, \kappa + iT]$ à

$$\int_{E-iT}^{E+iT} \frac{u^{-s}ds}{s(s+1)},$$

pour un $E \geqslant \kappa$ que nous prendrons grand mais qui est pour l'instant fixé. Cette comparaison se fait en appliquant le théorème des résidus sur le rectangle de sommets $\kappa - iT$, $\kappa + iT$, $E - iT$ et $E + iT$. Les intégrales sur les segments horizontaux sont majorées par $\frac{u^{-\kappa}E}{T^2}$. Par ailleurs aucun résidu n'appartient pas à la zone enclose par le contour, donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{u^{-s}ds}{s(s+1)} = \int_{E-iT}^{E+iT} \frac{u^{-s}ds}{s(s+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{u^{-\kappa}E}{T^2}\right).$$

Ensuite l'intégrale sur $\Re s = E$ est un $\mathcal{O}\big(x^{-E}\big)$ car

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E-iT}^{E+iT} \left|\frac{ds}{s(s+1)}\right|$$

est majoré indépendamment de T et $E \geqslant \kappa$. Il suffit alors de laisser tendre T et E vers l'infini.
Si $u < 1$, nous déplaçons cette fois-ci la droite d'intégration vers la gauche et rencontrons des contributions polaires en $s = 0$ et $s = -1$ qui donnent la valeur

$$1 - u,$$

comme attendu. □

Lemme 7.3
Nous avons la transformée de Fourier suivante : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(4\pi\xi)}{4\pi^2\xi^2} e^{2i\pi x\xi} d\xi = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2} & si\ |x| \leqslant 2, \\ 0 & si\ |x| > 2. \end{cases}$$

Démonstration : Si $l \in L^1(\mathbb{R})$, nous définissons sa transformée de Fourier par la formule :

$$\hat{l}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi x\xi} l(x) dx.$$

Nous considérons ici la fonction

$$l(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2} & \text{si } |x| \leqslant 2, \\ 0 & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

Un simple calcul d'intégrale nous permet alors de déterminer $\hat{l}(\xi)$. Nous trouvons

$$\hat{l}(\xi) = \frac{1 - \cos(4\pi\xi)}{4\pi^2\xi^2}.$$

La transformée de Fourier inverse nous donne alors

$$l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{l}(\xi) e^{2i\pi x\xi} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(4\pi\xi)}{4\pi^2\xi^2} e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

□

7.2.2 Écriture intégrale de $S_1(X, z, \tau, a, r)$

Nous utilisons la notation suivante :

$$(1 - x)^+ = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Par les lemmes 7.2 et 7.3, nous avons

$$1_{(d/X \leqslant 1)} \leqslant 2\left(1 - \frac{d/X}{2}\right)^+ = \frac{1}{i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{(d/X)^{-s}}{2^{-s} s(s+1)} ds,$$

où $\kappa > 0$ et

$$\begin{aligned} 1_{(1 < \frac{a(d)}{z} < \tau)} \leqslant 1_{(|\log \frac{a(d)}{z}| < \log \tau)} &\leqslant 2\left(1 - \frac{|\log \frac{a(d)}{z}|}{2 \log \tau}\right)^+ \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2t \log \tau)}{t^2 \log \tau} \left(\frac{a(d)}{z}\right)^{it} dt. \end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} S_1(X, z, \tau, a, r) &\leqslant \frac{1}{i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{X^{s_2}\big(1 - \cos(2t_1 \log \tau)\big)}{z^{it_1} 2^{-s_2} s_2(s_2+1) t_1^2 \log \tau} \left(\sum_{d \geqslant 1} \frac{|r(d)| a(d)^{it_1}}{d^{s_2}}\right) ds_2 dt_1 \\ &\leqslant \frac{1}{i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{X^{s_2}\big(1 - \cos(2t_1 \log \tau)\big)}{z^{it_1} 2^{-s_2} s_2(s_2+1) t_1^2 \log \tau} g(-it_1, s_2, a, |r|) ds_2 dt_1. \end{aligned}$$

Nous arrêtons l'évaluation de $S_1(X, z, \tau, a, r)$ ici puisque nous avons besoin de plus de renseignements sur la fonction $g(s_1, s_2, a, |r|)$. L'étude de $S_1(X, z, \tau, a, r)$ se poursuit dans les deux chapitres qui suivent.

7.3 ÉTUDE DE $S_2(X,z,a,r,f)$

Continuons à préparer le terrain avec l'étude de $S_2(X,z,a,r,f)$.

7.3.1 Formule de Perron tronquée

Théorème 7.4 (Formule de Perron tronquée)
Soit $F(s)=\sum_{n\geqslant 1} a_n/n^s$ *une série de Dirichlet convergeant absolument pour* $\Re s>\kappa_a$*, et soit* κ *strictement plus grand que* κ_a*. Pour* $x\geqslant 1$ *et* $T\geqslant 1$*, nous avons*

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^s ds}{s} + \mathcal{O}\Big(\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(x/n)|\leqslant u}\frac{|a_n|}{n^\kappa}\frac{x^\kappa du}{Tu^2}\Big).$$

Nous pouvons trouver la démonstration de ce résultat dans [Ram07].

7.3.2 Écriture intégrale de $S_2(X,z,a,r,f)$

Proposition 7.5
Nous avons, pour $T\geqslant 1$ *et* $\kappa=1+1/\log X$*,*

$$\begin{aligned}S_2(X,z,a,r,f) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{z^{s_1}X^{s_2}Mf(s_1)}{s_2}g(s_1,s_2,a,r)ds_2ds_1\\ +\mathcal{O}\Big(\frac{X}{T}\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(X/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^\kappa}\frac{du}{u^2}\Big).\end{aligned}$$

Démonstration : Nous avons

$$S_2(X,z,a,r,f)=\sum_{d\leqslant X} r(d)f\big(a(d)/z\big).$$

La formule de Perron tronquée nous donne, avec $\kappa=1+(\log X)^{-1}$ (d'où $X^\kappa=eX$) et $T\geqslant 1$,

$$S_2(X,z,a,r,f)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\sum_{d\geqslant 1}\frac{r(d)}{d^s}f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)\frac{X^s}{s}ds+\mathcal{O}\Big(\frac{X}{T}\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(X/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^\kappa}\frac{du}{u^2}\Big),$$

et la tranformée de Mellin de f nous permet d'écrire $f\big(a(d)/z\big)$ sous la forme

$$f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}Mf(s)\Big(\frac{z}{a(d)}\Big)^s ds.$$

Par conséquent,

$$S_2(X,z,a,r,f) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{z^{s_1}X^{s_2}Mf(s_1)}{s_2}\Big(\sum_{d\geqslant 1}\frac{r(d)}{a(d)^{s_1}d^{s_2}}\Big)ds_2ds_1$$
$$+\mathcal{O}\Big(\frac{X}{T}\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(X/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^{\kappa}}\frac{du}{u^2}\Big)$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{z^{s_1}X^{s_2}Mf(s_1)}{s_2}g(s_1,s_2,a,r)ds_2ds_1$$
$$+\mathcal{O}\Big(\frac{X}{T}\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(X/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^{\kappa}}\frac{du}{u^2}\Big).$$

□

Nous arrêtons l'évaluation de $S_2(X,z,a,r,f)$ ici puisque nous avons besoin (comme pour l'étude de $S_1(X,z,\tau,a,r)$) de plus de renseignements sur la fonction $g(s_1,s_2,a,r)$. L'étude de $S_2(X,z,a,r,f)$ se poursuit dans les deux chapitres qui suivent. Terminons ce chapitre en donnant une majoration de la transformée de Mellin de la fonction f qui nous sera nécessaire pour évaluer le terme d'erreur dans l'évaluation de $S_2(X,z,a,r,f)$.

7.3.3 Quelques résultats sur la transformée de Mellin

Lemme 7.6
Soit ϱ une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $0\leqslant m\leqslant 3$ et pour tout $k\geqslant 0$, $\varrho^{(m)}(t)\ll_k 1/(1+|t|)^k$. Pour $\Re s>0$,

$$M\varrho(s) = -\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\int_0^{\infty}t^{s+2}\varrho^{(3)}(t)dt, \tag{7.5}$$

où $M\varrho(s)$ représente la transformée de Mellin de ϱ (voir (7.6)).

Démonstration : Nous nous intéressons à la transformée de Mellin de ϱ :

$$M\varrho(s) = \int_0^{\infty}t^{s-1}\varrho(t)dt \quad (\Re s>0). \tag{7.6}$$

Une première intégration par parties nous donne :

$$M\varrho(s) = \Big[\frac{t^s}{s}\varrho(t)\Big]_0^{\infty} - \frac{1}{s}\int_0^{\infty}t^s\varrho'(t)dt = -\frac{1}{s}\int_0^{\infty}t^s\varrho'(t)dt.$$

Deux autres intégrations par parties nous permettent d'obtenir l'égalité (7.5). □

Le lemme qui suit nous donne la dépendance en τ de la transformée de Mellin de la fonction f considérée au début de cette partie.

Lemme 7.7
Pour $\Re s = \kappa$,

$$|Mf(s)| \ll \frac{\tau^{\kappa+2}}{(\tau-1)^2}\frac{1}{|s|^3},$$

où la constante impliquée est absolue.

Démonstration : D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned} Mf(s) &= -\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\int_0^\infty t^{s+2} f^{(3)}(t)dt \\ &= -\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\frac{1}{(\tau-1)^3}\int_1^\tau t^{s+2} k^{(3)}\left(\frac{t-1}{\tau-1}\right)dt \\ &= -\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\frac{1}{(\tau-1)^2}\int_0^1 \big((\tau-1)x+1\big)^{s+2} k^{(3)}(x)dx, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue par le changement de variable $x = (t-1)/(\tau-1)$. Cela nous donne, pour $\Re s = \kappa$,

$$|Mf(s)| \leqslant \frac{1}{|s|^3}\frac{\tau^{\kappa+2}}{(\tau-1)^2}\int_0^1 |k^{(3)}(x)|dx.$$

$\square$

Chapitre 8

Traitement du cas $r(p) = 1 + \mathcal{O}(1/p)$

Dans ce chapitre, nous supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a, B_0)$, $H_2(a, m, M)$, $H_3(r, 1, Q)$, $H_4(r, R)$ et $H_5(a, R, Q, \theta)$ introduites au début du chapitre 7.
L'hypothèse $H_3(r, 1, Q)$ signifie donc qu'il existe une fonction q telle que

$$\forall p \geqslant 2,\ r(p) = 1 + \frac{q(p)}{p} \quad \text{et} \quad \sup_{p \geqslant 2} |q(p)| \leqslant Q.$$

Considérons alors les fonctions

$$h(s_1, s_2, a, r) = g(s_1, s_2, a, r)\zeta(s_2)^{-1} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right)$$

et

$$h(s_1, s_2, a, |r|) = \prod_{p \leqslant Q} \left(1 - \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)}{p^{s_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right)^{-1} g(s_1, s_2, a, |r|)\zeta(s_2)^{-1}$$

$$= \prod_{p \leqslant Q} \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)}{p^{s_2}}\right) \prod_{p > Q} \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right)$$

$$= \prod_{p \leqslant Q} \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)}{p^{s_2}}\right) \prod_{p > Q} \left(1 + \frac{r(p)}{a(p)^{s_1} p^{s_2}} + \sum_{k \geqslant 2} \frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right),$$

la dernière égalité provenant du fait que si $p > Q$ alors $r(p) > 0$.

8.1 Domaine de méromorphie et majoration de ces fonctions

8.1.1 Prolongement analytique et majoration dans la bande critique de la fonction Zêta de Riemann

Lemme 8.1
La fonction $\zeta(s)$ est prolongeable analytiquement en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant pour seule singularité un pôle simple, en $s = 1$, de résidu 1.
De plus, pour toute constante positive c et pour $s = \sigma + it$, nous avons

$$\zeta(s) \ll \log|t| \quad (|t| \geqslant 2, \sigma \geqslant 1 - c/\log|t|).$$

Nous pouvons trouver la démonstration de ce résultat dans [Ten95].

8.1.2 Étude des fonctions $g(s_1, s_2, a, r)$ et $g(s_1, s_2, a, |r|)$

Théorème 8.2
Les fonctions $h(s_1, s_2, a, r)$ et $h(s_1, s_2, a, |r|)$ sont analytiques pour $\sigma_2 > 1/2$. De plus, pour trois réels α, β et $\eta > 0$, il existe trois constantes $B = B(Q, B_0, R, m, M, \eta, \alpha, \beta)$, $B' = B'(B_0, R, m, M, \alpha, \beta)$ et $B'' = B''(R, m, M, \alpha, \beta)$ telles que pour $s_2 = \sigma_2 + it_2$, $\sigma_2 \geqslant 1/2 + \eta$ et $\alpha \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$,

$$|h(s_1, s_2, a, r)| \leqslant B \exp\left(B'(1 + |s_1|)^{1-\sigma_2}\right) \log^{B''}(2 + |s_1|)$$

et nous avons une majoration similaire pour la fonction $h(s_1, s_2, a, |r|)$.

Démonstration : Écrivons, pour tout premier p assez grand, chaque facteur eulérien définissant $h(s_1, s_2, a, r)$ sous la forme

$$\left(1 + \frac{r(p)}{a(p)^{s_1} p^{s_2}}\right)\left(1 + \frac{R_1}{p^{2s_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right),$$

où R_1 est une série de $\mathbb{Z}\left[\left(r(p^k)a(p^k)^{-s_1}\right)_{k\geqslant 0}\right][[p^{-s_2}]]$ défini dans la proposition 1.8. Soit encore

$$\left(1 + \frac{1}{p^{s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}} - 1\right) - \frac{r(p)}{a(p)^{s_1} p^{2s_2}}\right)\left(1 + \frac{R_1}{p^{2s_2}}\right).$$

Nous remarquons alors que

$$\begin{aligned}\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}} - 1 = r(p)\left(1 + \frac{b(p)}{p}\right)^{s_1} - 1 &= r(p) - 1 + s_1 r(p) \int_0^{b(p)/p} (1 + x)^{s_1 - 1} dx \\ &= \frac{q(p)}{p} + s_1 r(p) \int_0^{b(p)/p} (1 + x)^{s_1 - 1} dx.\end{aligned}$$

Et, pour $\alpha \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$, nous avons

$$\left|\int_0^{b(p)/p} (1 + x)^{s_1 - 1} dx\right| \leqslant \frac{B_0 \max(m^{1-\alpha}, m^{1-\beta}, M^{1-\alpha}, M^{1-\beta})}{p}.$$

Nous pouvons dorénavant agir comme dans la démonstration du théorème 1.2 avec $\nu = 1$ et $\tilde{r}(p) = 1$. Cela nous permet d'affirmer que la fonction $h(s_1, s_2, a, r)$ est analytique pour $\sigma_2 > 1/2$ et qu'il existe des constantes $B = B(Q, B_0, R, m, M, \eta, \alpha, \beta)$, $B' = B'(B_0, R, m, M, \alpha, \beta)$ et $B'' = B''(R, m, M, \alpha, \beta)$ telles que

$$|h(s_1, s_2, a, r)| \leqslant B \exp\left(B'(1 + |s_1|)^{1-\sigma_2}\right) \log^{B''}(2 + |s_1|).$$

En ce qui concerne la fonction $h(s_1, s_2, a, |r|)$, nous majorons simplement les facteurs eulériens correspondant aux premiers $p \leqslant Q$ et nous procédons comme précédemment pour les facteurs eulériens correspondant aux premiers $p > Q$. □

Corollaire 8.3
Les fonctions $g(s_1,s_2,a,r)$ et $g(s_1,s_2,a,|r|)$ sont méromorphes pour $\sigma_2>1/2$ avec un unique pôle simple en $s_2=1$. De plus, pour trois réels α, β et $\eta>0$, il existe trois constantes $B=B(Q,B_0,R,m,M,\eta,\alpha,\beta)$, $B'=B'(B_0,R,m,M,\alpha,\beta)$ et $B''=B''(R,m,M,\alpha,\beta)$ telles que pour $s_2=\sigma_2+it_2$, $\sigma_2\geqslant 1/2+\eta$, $\sigma_2\geqslant 1-c/\log(2+|t_2|)$ et $\alpha\leqslant\sigma_1\leqslant\beta$,

$$|g(s_1,s_2,a,r)|\leqslant B\exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\sigma_2}\right)\log^{B''}(2+|s_1|)\log(2+|t_2|)$$

et nous avons une majoration similaire pour la fonction $g(s_1,s_2,a,|r|)$.

Démonstration : Il suffit d'associer le résultat du théorème 8.2 à celui du lemme 8.1.
□

8.2 ÉTUDE DE $S_1(X,z,\tau,a,r)$

Reprenons l'étude interrompue à la fin de la section 7.2.

8.2.1 Résultats préliminaires

Lemme 8.4
Pour $v\geqslant 2$ et $w\geqslant(\log 2)^2$,

$$\int_0^\infty\frac{\exp\left(-w/\log(v+t)\right)}{1+t^2}\log(2+t)dt\ll\exp\left(-\frac{w}{\log v+\sqrt{w}}\right),$$

où la constante impliquée est absolue.

Démonstration : Séparons l'intégrale en deux parties :

$$\int_0^\infty\frac{\exp\left(-w/\log(v+t)\right)}{1+t^2}\log(2+t)dt=\left(\int_0^T+\int_T^\infty\right)\frac{\exp\left(-w/\log(v+t)\right)}{1+t^2}\log(2+t)dt,$$

où T est un paramètre réel positif. Étudions d'abord la première intégrale ; pour $t\leqslant T$, nous avons

$$-\frac{w}{\log(v+t)}\leqslant-\frac{w}{\log(v+T)},$$

soit

$$\begin{aligned}\int_0^T\frac{\exp\left(-w/\log(v+t)\right)}{1+t^2}\log(2+t)dt&\leqslant\exp\left(-\frac{w}{\log(v+T)}\right)\int_0^\infty\frac{\log(2+t)}{1+t^2}dt\\&\ll\exp\left(-\frac{w}{\log(v+T)}\right).\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est majorée par

$$\int_T^\infty\frac{\log(2+t)}{1+t^2}dt\ll\frac{\log T}{T}.$$

Si nous prenons alors $T = e^{\sqrt{w}}$, nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{\exp\big(-w/\log(v+t)\big)}{1+t^2}\log(2+t)dt \ll \exp\left(-\frac{w}{\log(v+e^{\sqrt{w}})}+\frac{\log(e^{\sqrt{w}})}{e^{\sqrt{w}}}\right).$$

Comme nous avons, pour $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 2$,

$$\log(x+y) \leqslant \log x + \log y,$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\exp\big(-w/\log(v+t)\big)}{1+t^2}\log(2+t)dt &\ll \exp\left(-\frac{w}{\log v+\sqrt{w}}+\frac{\sqrt{w}}{e^{\sqrt{w}}}\right)\\ &\ll \exp\left(-\frac{w}{\log v+\sqrt{w}}\right),\end{aligned}$$

car $\sqrt{w}/e^{\sqrt{w}} \leqslant 1$. □

Lemme 8.5
Pour $\tau > 1$ et $B > 0$, nous avons

$$\int_0^\infty \frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^B(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1 \ll \log^B\left(2+\frac{1}{\log\tau}\right),$$

où la constante impliquée est absolue.

Démonstration : Introduisons un paramètre positif T_0. Nous avons :

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^B(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1\\ &=\left(\int_0^{T_0}+\int_{T_0}^\infty\right)\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^B(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $1-\cos u \leqslant u^2/2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} \frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^B(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1 &\ll \int_0^{T_0}\frac{t_1^2\log^2\tau}{t_1^2\log\tau}\log^B(2+t_1)dt_1\\ &\ll \log\tau T_0\log^B(2+T_0)\end{aligned}$$

et, en majorant simplement $|1-\cos(2t_1\log\tau)|$ par 2, cela mène à

$$\int_{T_0}^\infty \frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^B(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1 \ll \int_{T_0}^\infty \frac{\log^B(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1 \ll \frac{1}{\log\tau}\frac{\log^B(2+T_0)}{T_0}.$$

En prenant $T_0 = 1/\log\tau$, nous en déduisons que

$$\int_0^\infty \frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^B(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1 \ll \log^B\left(2+\frac{1}{\log\tau}\right).$$

□

8.2.2 Utilisation de l'inégalité du produit oscillant

Lemme 8.6
Soit un réel $\tau > 1$. Nous avons alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1-\cos(2t_1 \log\tau)}{t_1^2 \log\tau} h(-it_1, 1, a, |r|) \right| dt_1 \ll \frac{1}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}},$$

où la constante intervenant dépend de R de Q et de θ.

Démonstration : Séparons l'intégrale selon que $|t_1| \leqslant T_1$ et $|t_1| > T_1$ où T_1 est un paramètre réel positif.

$$\left(\int_{-\infty}^{-T_1} + \int_{-T_1}^{T_1} + \int_{T_1}^{\infty} \right) \frac{1-\cos(2t_1\log\tau)}{t_1^2\log\tau} h(-it_1, 1, a, |r|) dt_1.$$

Pour $|t_1| > T_1$, nous utilisons simplement l'inégalité $|1-\cos(2t_1\log\tau)| \leqslant 2$ et le fait que l'égalité $r(p) = 1 + \dfrac{q(p)}{p}$ entraîne que

$$\begin{aligned} &h(-it_1, 1, a, |r|) \\ &= \prod_{p\leqslant Q} \left(1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{-it_1}p^k}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)}{p}\right) \prod_{p>Q} \left(1 + \frac{r(p)}{a(p)^{-it_1}p} + \sum_{k\geqslant 2} \frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{-it_1}p^k}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ &= \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Pour $|t_1| \leqslant T_1$, nous utilisons :

$$\int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{1-\cos(2t_1\log\tau)}{t_1^2\log\tau} h(-it_1, 1, a, |r|) \right| dt_1 \ll \int_{-T_1}^{T_1} \min\left(\frac{1}{t_1^2\log\tau}, \log\tau\right) \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1.$$

Pour $T_2 \leqslant T_1$, écrivons

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_1} \min\left(\frac{1}{t_1^2\log\tau}, \log\tau\right) \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \\ &\qquad = \left(\int_0^{T_2} + \int_{T_2}^{T_1}\right) \min\left(\frac{1}{t_1^2\log\tau}, \log\tau\right) \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1. \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_2} \min\left(\frac{1}{t_1^2\log\tau}, \log\tau\right) \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 &\leqslant \log\tau \int_0^{T_2} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \\ &\ll \frac{T_2\log\tau}{(\log\log T_2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

par le théorème 5.1. D'autre part,

$$\int_{T_2}^{T_1} \min\left(\frac{1}{t_1^2\log\tau}, \log\tau\right) \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \leqslant \int_{T_2}^{T_1} \frac{1}{t_1^2\log\tau} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{t_1^2 \log \tau} = \frac{1}{T_1^2 \log \tau} + \int_{t_1}^{T_1} \frac{2dt}{t^3 \log \tau},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_{T_2}^{T_1} \frac{1}{t_1^2 \log \tau} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \\
&= \frac{1}{T_1^2 \log \tau} \int_{T_2}^{T_1} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 + \int_{T_2}^{T_1} \left(\int_{t_1}^{T_1} \frac{2}{t^3 \log \tau} dt \right) \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1.
\end{aligned}$$

Nous vérifions que

$$\begin{aligned}
&\int_{T_2}^{T_1} \left(\int_{t_1}^{T_1} \frac{2}{t^3 \log \tau} dt \right) \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 = \int_{T_2}^{T_1} \left(\int_{T_2}^{t} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \right) \frac{2}{t^3 \log \tau} dt \\
&= \int_{T_2}^{T_1} \left(\int_0^t \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \right) \frac{2}{t^3 \log \tau} dt - \int_0^{T_2} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \int_{T_2}^{T_1} \frac{2}{t^3 \log \tau} dt \\
&= \int_{T_2}^{T_1} \left(\int_0^t \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \right) \frac{2}{t^3 \log \tau} dt - \int_0^{T_2} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \left(\frac{1}{T_2^2 \log \tau} - \frac{1}{T_1^2 \log \tau} \right).
\end{aligned}$$

Remarquons alors que le théorème 5.1 nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{T_2}^{T_1} \frac{2}{t^3 \log \tau} \left(\int_0^t \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \right) dt &\ll \frac{1}{\log \tau} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dt}{t^2 (\log \log t)^{1/2}} \\
&\ll \frac{1}{\log \tau (\log \log T_2)^{1/2}} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T_1^2 \log \tau} \int_{T_2}^{T_1} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 - \int_0^{T_2} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \left(\frac{1}{T_2^2 \log \tau} - \frac{1}{T_1^2 \log \tau} \right) \\
&= \frac{1}{T_1^2 \log \tau} \int_0^{T_1} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 - \frac{1}{T_2^2 \log \tau} \int_0^{T_2} \big|h(-it_1, 1, a, |r|)\big| dt_1 \\
&\ll \frac{1}{T_1^2 \log \tau} \frac{T_1}{(\log \log T_1)^{1/2}} + \frac{1}{T_2^2 \log \tau} \frac{T_2}{(\log \log T_2)^{1/2}},
\end{aligned}$$

par le théorème 5.1 appliqué à nouveau. Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
&\int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{1 - \cos(2t_1 \log \tau)}{t_1^2 \log \tau} h(-it_1, 1, a, |r|) \right| dt_1 \\
&\ll \frac{1}{T_1 \log \tau} + \frac{T_2 \log \tau}{(\log \log T_2)^{1/2}} + \frac{1}{T_2 \log \tau (\log \log T_2)^{1/2}} + \frac{1}{T_1 \log \tau (\log \log T_1)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre T_1 vers l'infini et en prenant $T_2 = 1/\log \tau$, nous en déduisons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - \cos(2t_1 \log \tau)}{t_1^2 \log \tau} h(-it_1, 1, a, |r|) \right| dt_1 \ll \frac{1}{\big(\log \log(1/\log \tau) \big)^{1/2}}.$$

□

Remarque 8.7
Sous les hypothèses du théorème 6.1, nous obtenons la majoration suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1-\cos(2t_1\log\tau)}{t_1^2\log\tau}h(-it_1,1,a,|r|)\right|dt_1 \ll \left(\frac{\log\log(1/\log\tau)}{\log(1/\log\tau)\log\log\log(1/\log\tau)}\right)^R.$$

8.2.3 Estimation de $S_1(X,z,\tau,a,r)$

Théorème 8.8
Il existe une constante $B=B(R,m,M)>0$ telle que, pour $X\geqslant 2$, $z>0$ et τ un réel >1,

$$S_1(X,z,\tau,a,r)\ll \frac{X}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}}+\frac{X\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log\tau}.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Remarque 8.9
Dans le cas particulier de la fonction $a(d)=\sigma(d)/d$ et $r(d)=1$, nous pouvons améliorer cette majoration en utilisant un résultat d'Erdös exposé dans [Ell79] :

$$\left|\left\{d\leqslant X/a<\frac{\sigma(d)}{d}\leqslant a\left(1+\frac{1}{t}\right)\right\}\right|\ll\frac{X}{\log t},$$

pour tout $a>0$, $2\leqslant t\leqslant X$.
Erdös utilisait, pour cela, une méthode combinatoire particulière à la fonction $\sigma(d)/d$. Dans ce problème particulier, notre méthode est moins efficace mais elle se généralise à d'autres fonctions.

Démonstration : La sous-section 7.2.2 du chapitre précédent nous donne :

$$S_1(X,z,\tau,a,r)\leqslant\frac{1}{i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\frac{X^{s_2}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1,s_2,a,|r|)ds_2dt_1.$$

En notant $\Gamma_2(t_1)$ la courbe d'équation $s_2=1+it_2-1/\log(2+|t_1|+|t_2|)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}&\frac{X^{s_2}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1,s_2,a,|r|)ds_2dt_1\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_2(t_1)}\frac{X^{s_2}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1,s_2,a,|r|)ds_2dt_1+\Sigma_1,\end{aligned}$$

avec

$$\Sigma_1=2i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}t_1^2\log\tau}h(-it_1,1,a,|r|)dt_1. \tag{8.1}$$

D'une part, majorons la première intégrale :

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_2(t_1)} \frac{X^{s_2}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1,s_2,a,|r|)ds_2dt_1\Big|$$
$$\ll X\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''}(2+|t_1|)}{t_1^2\log\tau}\bigg(\int_0^{\infty}\frac{X^{-1/\log(2+|t_1|+t_2)}}{1+t_2^2}\log(2+t_2)dt_2\bigg)dt_1.$$

En appliquant le lemme 8.4 avec $w=\log X$ et $v=2+|t_1|$, nous obtenons

$$\int_0^{\infty}\frac{X^{-1/\log(2+|t_1|+t_2)}}{1+t_2^2}\log(2+t_2)dt_2 \ll \exp\bigg(-\frac{\log X}{\log(2+|t_1|)+\sqrt{\log X}}\bigg).$$

Nous sommes alors amenés à étudier l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\infty}\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''}(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}\exp\bigg(-\frac{\log X}{\log(2+t_1)+\sqrt{\log X}}\bigg)dt_1.$$

Séparons cette intégrale en deux parties :

$$\int_0^{\exp(\sqrt{\log X})}+\int_{\exp(\sqrt{\log X})}^{\infty}.$$

Nous majorons la première intégrale par

$$\exp\bigg(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\bigg)\int_0^{\exp(\sqrt{\log X})}\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''}(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1$$
$$\leqslant \exp\bigg(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\bigg)\int_0^{\infty}\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''}(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1$$
$$\ll \exp\bigg(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\bigg)\log^{B''}\bigg(2+\frac{1}{\log\tau}\bigg),$$

où la dernière inégalité résulte du lemme 8.5.
Pour la deuxième intégrale, nous majorons l'exponentielle par 1 et $|1-\cos(2t_1\log\tau)|$ par 2 pour obtenir

$$\frac{1}{\log\tau}\int_{\exp(\sqrt{\log X})}^{\infty}\frac{\log^{B''}(2+t_1)}{t_1^2}dt_1 \ll \frac{1}{\log\tau}\frac{\log^{B''}\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)}{\exp(\sqrt{\log X})}.$$

Finalement, nous obtenons la majoration :

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_2(t_1)} \frac{X^{s_2}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1,s_2,a,|r|)ds_2dt_1\Big|$$
$$\ll X\exp\bigg(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\bigg)\log^{B''}\bigg(2+\frac{1}{\log\tau}\bigg)$$
$$+\frac{X}{\log\tau}\frac{\log^{B''}\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)}{\exp(\sqrt{\log X})}$$
$$\ll \frac{X\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log\tau}, \tag{8.2}$$

pour une certaine constante $B > 0$. D'autre part (voir (8.1)),

$$\Sigma_1 \ll X \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(2t_1 \log \tau)}{t_1^2 \log \tau} \big| h(-it_1, 1, a, |r|) \big| dt_1 \ll \frac{X}{\big(\log\log(1/\log \tau)\big)^{1/2}},$$

par le lemme 8.6. Cette dernière estimation et (8.2) nous permettent de déduire le théorème 8.8. □

8.3 Étude de $S_2(X, z, a, r, f)$

Reprenons l'étude interrompue à la fin de la sous-section 7.3.2.

8.3.1 Évaluation du terme d'erreur issu de la formule de Perron tronquée

Dans un premier temps, nous énonçons un résultat démontré par Shiu dans [Shi80] donnant une généralisation du théorème de Brun-Titchmarsh à des fonctions multiplicatives positives :

Lemme 8.10
Soit f une fonction multiplicative positive satisfaisant les deux conditions suivantes :
(i) il existe une constante positive A_1 telle que

$$f(p^\ell) \leqslant A_1^\ell, \quad p \text{ premier }, \quad \ell \geqslant 1.$$

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive $A_2 = A_2(\epsilon)$ telle que

$$f(n) \leqslant A_2 n^\epsilon, \quad n \geqslant 1.$$

Soient $0 < \alpha < 1/2$, $0 < \beta < 1/2$ et a, k des entiers satisfaisant

$$0 < a \leqslant k, \quad (a, k) = 1.$$

Alors, lorsque $x \to \infty$,

$$\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x \\ n\equiv a[k]}} f(n) \ll \frac{y}{\varphi(k)} \frac{1}{\log x} \exp\Bigg(\sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\nmid k}} \frac{f(p)}{p} \Bigg),$$

uniformément en a, k et y à condition que

$$k < y^{1-\alpha}, \quad x^\beta < y \leqslant x.$$

Lemme 8.11
Pour $X \geqslant e$, $\kappa = 1 + 1/\log X$ et $1 \leqslant T \leqslant X^{1/4}$, nous avons

$$\frac{X}{T} \int_{1/T}^{\infty} \sum_{|\log(X/d)| \leqslant u} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \frac{du}{u^2} \ll \frac{X \log X}{T} + \frac{X \log T}{T} + 1,$$

où la constante intervenant dépend de R et de Q.

Démonstration :

$$\int_{1/T}^{\infty} \sum_{|\log(X/d)| \leqslant u} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \frac{du}{u^2} = \left(\int_{1/T}^{1} + \int_{1}^{\infty} \right) \sum_{|\log(X/d)| \leqslant u} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \frac{du}{u^2}.$$

Pour $u \geqslant 1$,

$$\sum_{|\log(X/d)| \leqslant u} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \leqslant \sum_{d \geqslant 1} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{|r(p^k)|}{p^{k\kappa}} \right) \leqslant \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{1}{p^\kappa} + \frac{Q+2R}{p^2} \right)$$
$$= \zeta(\kappa) \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{1}{p^\kappa} + \frac{Q+2R}{p^2} \right) \left(1 - \frac{1}{p^\kappa} \right) = \zeta(\kappa) \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{p^{2\kappa}} + \frac{Q+2R}{p^2} - \frac{Q+2R}{p^{2+\kappa}} \right)$$
$$= \zeta(\kappa) \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{p^2} \right).$$

Cela nous donne

$$\sum_{d \geqslant 1} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \ll \zeta(\kappa) \ll \frac{1}{\kappa - 1} = \log X$$

et

$$\int_{1}^{\infty} \sum_{|\log(X/d)| \leqslant u} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \frac{du}{u^2} \ll \log X \int_{1}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \log X.$$

Pour $u \geqslant 1$, nous obtenons donc une contribution en $\mathcal{O}\left(\frac{X \log X}{T} \right)$.
Ensuite, si $|\log(X/d)| \leqslant u$ et $1/T \leqslant u \leqslant 1$, nous avons

$$Xe^{-1} \leqslant Xe^{-u} \leqslant d \leqslant Xe^u,$$

donc

$$\sum_{|\log(X/d)| \leqslant u} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \leqslant \frac{1}{Xe^{-1}} \sum_{Xe^{-u} \leqslant d \leqslant Xe^u} |r(d)|.$$

Appliquons alors le lemme 8.10 à la fonction multiplicative positive $|r(d)|$. L'hypothèse $H_4(r, R)$ introduite au début de ce chapitre nous assure les conditions (i) et (ii) du lemme 8.10. Choisissons $k = 1$, $x = Xe^u$ et $y = Xe^u - Xe^{-u} + 1$. Les conditions $1 < y^{1-\alpha}$ et $x^\beta < y \leqslant x$ sont vérifiées pour $0 < \alpha < 1/2$ et $0 < \beta < 3/4$. En effet,

$$u > 0 \text{ et } \alpha < 1 \Rightarrow y^{1-\alpha} > 1,$$

$$X \geqslant e \text{ et } u \leqslant 1 \Rightarrow x - y = Xe^{-u} - 1 \geqslant 0$$

et l'inégalité $e^u - e^{-u} \geqslant u$ valable pour $u \geqslant 0$ et $u \geqslant 1/T$ impliquent que

$$y = X(e^u - e^{-u}) + 1 \geqslant Xu \geqslant \frac{X}{T} \geqslant X^{3/4} \geqslant X^{1/4} e^{1/2} > X^{1/4} e^{1/4} \geqslant (Xe^u)^{1/4},$$

les dernières inégalités provenant du fait que $T \leqslant X^{1/4}$, $X \geqslant e$ et $u \leqslant 1$.
Cela nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{Xe^{-u}\leqslant d\leqslant Xe^u} |r(d)| &\ll \frac{X(e^u - e^{-u}) + 1}{\log(Xe^u)} \exp\Bigg(\sum_{p\leqslant Xe^u} \frac{|r(p)|}{p}\Bigg)\\ &\ll \frac{X\mathrm{sh}u + 1}{\log(Xe^u)} \exp\Bigg(\sum_{p\leqslant Xe^u} \frac{1}{p} + \sum_{p\geqslant 2} \frac{|q(p)|}{p^2}\Bigg)\\ &\ll \frac{Xu + 1}{\log(Xe^u)} \exp\Bigg(\sum_{p\leqslant Xe^u} \frac{1}{p}\Bigg),\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue par convexité de la fonction sh. L'estimation bien connue $\displaystyle\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + \mathcal{O}\big(1\big)$, pour $x \geqslant 2$, entraîne que

$$\sum_{|\log(X/d)|\leqslant u} |r(d)| \ll Xu + 1.$$

Maintenant, nous avons

$$\int_{1/T}^{1} \frac{Xu + 1}{u^2} \leqslant X\log T + T.$$

Si $1/T \leqslant u \leqslant 1$, nous obtenons donc une contribution en $\mathcal{O}\Big(\dfrac{X\log T}{T} + 1\Big)$. □

8.3.2 Approximation par un produit eulérien fini

Pour $P \geqslant 2$ et $2 \leqslant P_0 \leqslant P$, posons

$$h_P(s_1, s_2, a, r) = \prod_{p\leqslant P_0} \Bigg(\sum_{k\geqslant 0} \frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}}\Bigg)\Big(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\Big) \prod_{P_0<p\leqslant P} \Bigg(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}} \frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1} p^{ks_2}}\Bigg)\Big(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\Big).$$

L'entier P_0 peut être choisi en fonction de R et de m de telle sorte que :

$$p > P_0 \Rightarrow R \max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa}(p-1)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{8.3}$$

Le lemme qui suit nous permet d'estimer le terme d'erreur dans l'évaluation de $S_2(X, z, a, r, f)$.

Lemme 8.12
Il existe une constante $A = A(R, Q, m, M, B_0)$ telle que pour $\Re s = \kappa$, avec $0 < \kappa \leqslant 2$,

$$\left|1 - \frac{h(s, 1, a, r)}{h_P(s, 1, a, r)}\right| \leqslant \frac{A(1 + |s|)}{\sqrt{P}\log P}.$$

Remarque 8.13
L'expression de A est donnée au cours de la démonstration.

Démonstration :

$$\begin{aligned} h_P(s,1,a,r) &= \prod_{p\leqslant P_0}\Big(\sum_{k\geqslant 0}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{P_0<p\leqslant P}\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\\ &= \prod_{p\leqslant P_0}\Big(\sum_{k\geqslant 0}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{p>P_0}\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\prod_{P_0<p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big),\end{aligned}$$

car, si $p > P$ alors $\forall k \geqslant 1$, $p^k > P$ et $\displaystyle\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k} = 1$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{h(s,1,a,r)}{h_P(s,1,a,r)} &= \prod_{p>P_0}\Bigg(1+\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1}\Bigg)\prod_{p>P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\\ &= \prod_{P_0<p\leqslant P}\Bigg(1+\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1}\Bigg)\\ &\quad\cdots\times\prod_{p>P}\Bigg(1+\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1}\Bigg)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\end{aligned}$$

$$= \prod_{P_0<p\leqslant P}\Bigg(1+\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1}\Bigg)\prod_{p>P}\Big(1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

D'une part, la partie correspondant aux premiers $p > P$ dans le produit eulérien ci-dessus est majorée par

$$\begin{aligned} &\prod_{p\geqslant 2}\Big(1+\frac{|r(p)|}{a(p)^\kappa p}+\sum_{k\geqslant 2}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^\kappa p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\\ &\leqslant \prod_{p\geqslant 2}\Big(1+\frac{1}{a(p)^\kappa p}+\frac{|q(p)|}{a(p)^\kappa p^2}+\sum_{k\geqslant 2}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^\kappa p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\\ &\leqslant \prod_{p\geqslant 2}\Big(1+\frac{1}{p}\Big(\frac{1}{a(p)^\kappa}-1\Big)+\frac{1+Q+2R}{m^\kappa p^2}\Big).\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{a(p)^\kappa}-1 = \Big(1+\frac{b(p)}{p}\Big)^\kappa - 1 = \kappa\int_0^{b(p)/p}(1+x)^{\kappa-1}dx.$$

À ce niveau, remarquons que

$$\Big|\int_0^{b(p)/p}(1+x)^{\kappa-1}dx\Big| \leqslant \frac{B_0\max(1, m^{1-\kappa}, M^{1-\kappa})}{p}.$$

Cela nous donne

$$\Big|\prod_{p>P}\Big(1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big| \leqslant \prod_{p\geqslant 2}\Big(1+\frac{A_1}{p^2}\Big),$$

où

$$A_1 = (1+Q+2R)\max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa} + 2B_0\max_{0<\kappa\leqslant 2}(1, m^{1-\kappa}, M^{1-\kappa}).$$

D'autre part, concernant la partie du produit eulérien correspondant aux premiers p tels que $P_0 < p \leqslant P$, la condition $p > P_0$ nous permet de développer en série entière le terme $\Big(1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1}$:

$$\Big(1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1} = 1+\sum_{\ell\geqslant 1}(-1)^\ell\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^\ell,$$

soit

$$\begin{aligned}\Big|\Big(1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1}\Big| &\leqslant 1+\sum_{\ell\geqslant 1}\Big(\frac{R}{m^\kappa(p-1)}\Big)^\ell \leqslant 1+\frac{R}{m^\kappa(p-1)}\Big(1-\frac{R}{m^\kappa(p-1)}\Big)^{-1}\\ &\leqslant 1+\frac{2R}{m^\kappa},\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que $p > P_0$ implique que $R\max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa}(p-1)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}$. Maintenant,

$$\begin{aligned}\Big|1+\Big(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)\Big(1+\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\Big)^{-1}\Big| &\leqslant 1+\frac{R}{m^\kappa}\Big(1+\frac{2R}{m^\kappa}\Big)\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{p^k}\\ &\leqslant 1+\frac{A_2}{p^2},\end{aligned}$$

où

$$A_2 = 2R\max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa}(1+2R\max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa}).$$

Notons $A_3 = \prod_{p\geqslant 2}(1 + A_1/p^2)(1 + A_2/p^2)$. Nous avons alors

$$\left|1 - \frac{h(s,1,a,r)}{h_P(s,1,a,r)}\right| \leqslant 1 + A_3,$$

ce qui établit le lemme 8.12 si $1 + |s| \geqslant (1 + A_3)\sqrt{P}\log P$.

Supposons donc à présent que $1 + |s| < (1 + A_3)\sqrt{P}\log P$.

D'une part, la partie correspondant aux premiers $p > P$ dans l'expression de $h(s,1,a,r)/h_P(s,1,a,r)$ se réécrit

$$\prod_{p>P}\left[1 + \frac{1}{p}\left(\frac{r(p)}{a(p)^s} - 1\right) - \frac{r(p)}{a(p)^s p^2} + \sum_{k\geqslant 2}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right].$$

Utilisons encore

$$\begin{aligned}\frac{r(p)}{a(p)^s} - 1 = r(p)\left(1 + \frac{b(p)}{p}\right)^s - 1 &= r(p) - 1 + sr(p)\int_0^{b(p)/p}(1+x)^{s-1}dx\\ &= \frac{q(p)}{p} + sr(p)\int_0^{b(p)/p}(1+x)^{s-1}dx.\end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, nous avons, pour $\Re s = \kappa$,

$$\left|\int_0^{b(p)/p}(1+x)^{s-1}dx\right| \leqslant \frac{B_0\max(1, m^{1-\kappa}, M^{1-\kappa})}{p}.$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}&\prod_{p>P}\left|1 + \frac{1}{p}\left(\frac{r(p)}{a(p)^s} - 1\right) - \frac{r(p)}{a(p)^s p^2} + \sum_{k\geqslant 2}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right|\\ &\leqslant \prod_{p>P}\left(1 + \frac{Q}{p^2} + RB_0\max(1, m^{1-\kappa}, M^{1-\kappa})\frac{|s|}{p^2} + \frac{3R}{m^\kappa p^2}\right)\\ &\leqslant \prod_{p>P}\left(1 + \frac{A_4 + A_5|s|}{p^2}\right) \leqslant \prod_{p>P}\left(1 + \frac{A_6(1+|s|)}{p^2}\right),\end{aligned}$$

où

$$A_4 = Q + 3R\max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa},\ A_5 = RB_0\max_{0<\kappa\leqslant 2}(1, m^{1-\kappa}, M^{1-\kappa}) \text{ et } A_6 = \max(A_4, A_5).$$

D'autre part, concernant la partie correspondant aux premiers p tels que $P_0 < p \leqslant P$ dans l'expression de $h(s,1,a,r)/h_P(s,1,a,r)$, nous avons

$$\begin{aligned}\left|1 + \left(\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\right)\left(1 + \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\right)^{-1}\right| &\leqslant 1 + \frac{R}{m^\kappa}\left(1 + \frac{2R}{m^\kappa}\right)\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k}\\ &\leqslant 1 + A_7\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k},\end{aligned}$$

où

$$A_7 = R \max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa}(1+2R\max_{0<\kappa\leqslant 2} m^{-\kappa}).$$

Poursuivons avec

$$\prod_{p\leqslant P}\Bigg(1+A_7\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k}\Bigg)\leqslant \exp\Bigg(A_7\sum_{p\leqslant P}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k}\Bigg).$$

Nous avons

$$\sum_{p\leqslant P}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k}=\sum_{p\leqslant P}\sum_{\substack{2\leqslant k\leqslant\frac{\log P}{\log 2}+1\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k}+\sum_{p\leqslant P}\sum_{\substack{k\geqslant\frac{\log P}{\log 2}+2\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k}. \tag{8.4}$$

D'un côté, nous avons

$$\sum_{p\leqslant P}\sum_{\substack{2\leqslant k\leqslant\frac{\log P}{\log 2}+1\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k}=\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{\log P}{\log 2}+1}\ \sum_{P^{1/k}<p\leqslant P}\frac{1}{p^k}.$$

Nous utilisons l'égalité

$$\frac{1}{p^k}=\frac{1}{P^k}+k\int_p^P\frac{du}{u^{k+1}}$$

et obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{P^{1/k}<p\leqslant P}\frac{1}{p^k}&=\frac{1}{P^k}\sum_{P^{1/k}<p\leqslant P}1+k\int_{P^{1/k}}^P\Bigg(\sum_{P^{1/k}<p\leqslant u}1\Bigg)\frac{du}{u^{k+1}}\\
&\ll\frac{1}{P^{k-1}\log P}+k\int_{P^{1/k}}^P\frac{du}{u^k\log u}\ll\frac{1}{P^{k-1}\log P}+\frac{k}{\log(P^{1/k})}\int_{P^{1/k}}^P\frac{du}{u^k}\\
&\ll\frac{1}{P^{k-1}\log P}+\frac{1}{\log P}\frac{k^2}{k-1}\frac{1}{P^{\frac{k-1}{k}}}\ll\frac{1}{P^{k-1}\log P}+\frac{1}{\log P}\frac{kP^{1/k}}{P}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en sommant cette inégalité sur k,

$$\begin{aligned}\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{\log P}{\log 2}+1}\ \sum_{P^{1/k}<p\leqslant P}\frac{1}{p^k}&\ll\frac{1}{\log P}\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{\log P}{\log 2}+1}\frac{1}{P^{k-1}}+\frac{1}{P\log P}\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{\log P}{\log 2}+1}kP^{1/k}\\
&\ll\frac{1}{P\log P}\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{\log P}{\log 2}+1}1+\frac{1}{P\log P}(P^{1/2}+P^{1/3}\log^2 P)\\
&\ll\frac{1}{P}+\frac{1}{\sqrt{P}\log P}+\frac{\log P}{P^{2/3}}\ll\frac{1}{\sqrt{P}\log P}.\end{aligned}$$

La deuxième somme de (8.4) est majorée par

$$\sum_{p\leqslant P}\sum_{k\geqslant \frac{\log P}{\log 2}+2}\frac{1}{p^k} \ll \sum_{p\leqslant P}\frac{1}{p^{\frac{\log P}{\log 2}+2}} \ll \frac{1}{P}\sum_{p\leqslant P}\frac{1}{p^2} \ll \frac{1}{P}.$$

Ainsi,

$$\sum_{p\leqslant P}\sum_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>P}}\frac{1}{p^k} \ll \frac{1}{\sqrt{P}\log P}$$

et

$$\exp\left(\frac{A_7}{\sqrt{P}\log P}\right) \leqslant 1 + \frac{A_7}{\sqrt{P}\log P}\exp\left(\frac{A_7}{\sqrt{P}\log P}\right) \leqslant 1 + \frac{A_8}{\sqrt{P}\log P},$$

où

$$A_8 = A_7 \exp\left(\frac{A_7}{\sqrt{2}\log 2}\right).$$

Finalement, nous obtenons

$$\left|1 - \frac{h(s,1,a,r)}{h_P(s,1,a,r)}\right| \leqslant \left(1 + \frac{A_8}{\sqrt{P}\log P}\right)\prod_{p>P}\left(1 + \frac{A_6(1+|s|)}{p^2}\right) - 1.$$

En utilisant l'inégalité $\sum_{p\leqslant x}\log p \leqslant 1.01x$ établie dans [RS76], nous pouvons montrer, par sommation par parties, que

$$\begin{aligned}\prod_{p>P}\left(1 + \frac{A_6(1+|s|)}{p^2}\right) &\leqslant \exp\left(\frac{2.02A_6(1+|s|)}{P\log P}\right)\\ &\leqslant 1 + \frac{2.02A_6(1+|s|)}{P\log P}\exp\left(\frac{2.02A_6(1+|s|)}{P\log P}\right).\end{aligned}$$

Si $1 + |s| < (1 + A_3)\sqrt{P}\log P$,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{A_8}{\sqrt{P}\log P}\right)\left(1 + \frac{2.02A_6(1+|s|)}{P\log P}\exp\left(\frac{2.02A_6(1+|s|)}{P\log P}\right)\right) - 1 &\leqslant \frac{A_9 + A_{10}|s|}{\sqrt{P}\log P}\\ &\leqslant \frac{A_{11}(1+|s|)}{\sqrt{P}\log P},\end{aligned}$$

où

$$A_9 = \frac{2.02A_6}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{2.02A_6(1+A_3)}{\sqrt{2}}\right) + A_8 + \frac{2.02A_6A_8}{2\log 2}\exp\left(\frac{2.02A_6(1+A_3)}{\sqrt{2}}\right),$$

$$A_{10} = \frac{2.02A_6}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{2.02A_6(1+A_3)}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2.02A_6A_8}{2\log 2}\exp\left(\frac{2.02A_6(1+A_3)}{\sqrt{2}}\right)$$

et

$$A_{11} = \max(A_9, A_{10}).$$

□

Lemme 8.14
Il existe une constante $A = A(R,Q,m,M,B_0)$ telle que pour $\Re s = \kappa$ avec $0 < \kappa \leqslant 2$,

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} z^s Mf(s)\big(h(s,1,a,r) - h_P(s,1,a,r)\big)ds \right| \leqslant \frac{Az^\kappa h_P(\kappa,1,a,|r|)}{\sqrt{P}\log P} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} |Mf(s)|(1+|s|)|ds|.$$

Démonstration : Par le lemme précédent, la preuve est immédiate. □

Pour un entier $P \geqslant 2$, notons $v(p,P)$ le plus grand entier $k \geqslant 0$ tel que $p^k \leqslant P$ et $\mathrm{val}(p,P)$ le plus grand entier $k \geqslant 0$ tel que $p^k|P$.
Pour $2 \leqslant P_0 \leqslant P$ (nous choisissons P_0 satisfaisant la relation (8.3)), définissons $\Pi(P_0,P)$ par la condition suivante :

$$d|\Pi(P_0,P) \iff \big[p|d \Rightarrow p \leqslant P \text{ et si } p > P_0 \text{ alors } \mathrm{val}(p,d) \leqslant v(p,P)\big]. \tag{8.5}$$

Lemme 8.15
Nous avons alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} z^s Mf(s) h_P(s,1,a,r)ds = \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{d|\Pi(P_0,P)} \frac{r(d)}{d} f\left(\frac{a(d)}{z}\right).$$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned} h_P(s,1,a,r) &= \prod_{p\leqslant P_0}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) \prod_{P_0<p\leqslant P}\left(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ &= \prod_{p\leqslant P_0}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\right) \prod_{P_0<p\leqslant P}\left(\sum_{\substack{k\geqslant 0\\ p^k\leqslant P}}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k}\right) \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ &= \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{d|\Pi(P_0,P)} \prod_{p^k||d} \frac{r(p^k)}{a(p^k)^s p^k} = \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{d|\Pi(P_0,P)} \frac{r(d)}{a(d)^s d}. \end{aligned}$$

Cela nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} z^s Mf(s) h_P(s,1,a,r)ds &= \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{d|\Pi(P_0,P)} \frac{r(d)}{d} \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \left(\frac{z}{a(d)}\right)^s Mf(s)ds \\ &= \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{d|\Pi(P_0,P)} \frac{r(d)}{d} f\left(\frac{a(d)}{z}\right). \end{aligned}$$

□

8.3.3 Estimation de $S_2(X, z, a, r, f)$

Théorème 8.16
Il existe une constante $c' > 0$ telle que pour $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$, $\tau > 1$, $P \geqslant 2$ et $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5),

$$S_2(X, z, a, r, f) = X \prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{d | \Pi(P_0, P)} \frac{r(d)}{d} f\left(\frac{a(d)}{z}\right) \\ + \mathcal{O}\left(\frac{Xz}{(\tau-1)^2} \exp\left(-\sqrt{c' \log X}\right) + \frac{Xz}{(\tau-1)^2 \sqrt{P} \log P}\right),$$

où la constante intervenant dépend de Q, B_0, R, m et M.

Démonstration : Rappelons que nous avons obtenu à la proposition 7.5 :

$$\begin{aligned} S_2(X, z, a, r, f) = &-\frac{1}{4\pi^2} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{z^{s_1} X^{s_2} Mf(s_1)}{s_2} g(s_1, s_2, a, r) ds_2 ds_1 \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{X}{T} \int_{1/T}^{\infty} \sum_{|\log(X/d)| \leqslant u} \frac{|r(d)|}{d^\kappa} \frac{du}{u^2}\right) \\ = &-\frac{1}{4\pi^2} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{z^{s_1} X^{s_2} Mf(s_1)}{s_2} g(s_1, s_2, a, r) ds_2 ds_1 \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{X \log X}{T} + \frac{X \log T}{T} + 1\right), \end{aligned}$$

par le lemme 8.11, pour $\kappa = 1 + (\log X)^{-1}$ et $1 \leqslant T \leqslant X^{1/4}$.
Vérifions d'abord, que nous pouvons ramener, l'intégrale par rapport à la variable s_1 entre $\kappa - iT$ et $\kappa + iT$, à un terme négligeable près.

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\kappa + iT}^{\kappa + i\infty} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{z^{s_1} X^{s_2} Mf(s_1)}{s_2} g(s_1, s_2, a, r) ds_2 ds_1 \right| \\ &\leqslant B z^\kappa X^\kappa \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{\log(2 + |t_2|)}{|s_2|} |ds_2| \int_{\kappa + iT}^{\kappa + i\infty} \exp\left(B'(1 + |s_1|)^{1-\kappa}\right) \log^{B''}(2 + |s_1|) |Mf(s_1)| |ds_1| \\ &\ll zX (\log T)^2 \int_{\kappa + iT}^{\kappa + i\infty} \log^{B''}(2 + |s_1|) |Mf(s_1)| |ds_1| \ll \frac{zX}{(\tau - 1)^2} \frac{(\log T)^{2 + B''}}{T^2}, \end{aligned}$$

les deux dernières inégalités provenant du fait que $\kappa > 1$ implique que $\exp\left(B'(1 + |s_1|)^{1-\kappa}\right) \leqslant \exp(B')$ et de la majoration de $Mf(s)$ obtenue au lemme 7.7.
Reste à étudier l'intégrale double :

$$\int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{z^{s_1} X^{s_2} Mf(s_1)}{s_2} g(s_1, s_2, a, r) ds_2 ds_1.$$

Pour cela, appliquons le théorème des résidus sur le rectangle de sommets $\kappa - iT$, $\kappa + iT$, $\delta + iT$ et $\delta - iT$, où $\delta > 1/2$, $\delta \geqslant 1 - c/\log(2 + |t_2|)$ et $\delta < 1 < \kappa$. Nous avons alors, avec

$s_1 = \kappa + it_1$ où $|t_1| \leqslant T$,

$$\left(\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} + \int_{\kappa+iT}^{\delta+iT} + \int_{\delta+iT}^{\delta-iT} + \int_{\delta-iT}^{\kappa-iT} \right) \frac{X^{s_2}}{s_2} g(s_1,s_2,a,r)ds_2 = 2i\pi X h(s_1,1,a,r),$$

soit

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2i\pi X h(s_1,1,a,r).$$

Le corollaire 8.3 nous permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$|I_2| \leqslant \int_{\delta+iT}^{\kappa+iT} \frac{X^{\sigma_2}|g(s_1,s_2,a,r)|}{|s_2|}|ds_2| \ll (\kappa-\delta)\frac{X}{T}\log T \exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\delta}\right)\log^{B''}(2+|s_1|),$$

$$|I_3| \leqslant \int_{\delta-iT}^{\delta+iT} \frac{X^{\sigma_2}|g(s_1,s_2,a,r)|}{|s_2|}|ds_2| \ll X^{\delta}(\log T)^2 \exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\delta}\right)\log^{B''}(2+|s_1|)$$

et

$$|I_4| \ll (\kappa-\delta)\frac{X}{T}\log T \exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\delta}\right)\log^{B''}(2+|s_1|).$$

Si nous posons ensuite, pour $k = 2,3,4$,

$$J_k = \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} z^{s_1} Mf(s_1) I_k ds_1,$$

nous avons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leqslant \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} z^{\sigma_1}|Mf(s_1)||I_2||ds_1| \\
&\ll (\kappa-\delta)\frac{zX}{T}\log T \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\delta}\right)\log^{B''}(2+|s_1|)|Mf(s_1)||ds_1| \\
&\ll (\kappa-\delta)\frac{zX}{T}\log T \exp\left(B'\left(1+(\kappa^2+T^2)^{1/2}\right)^{1-\delta}\right) \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \log^{B''}(2+|s_1|)|Mf(s_1)||ds_1| \\
&\ll (\kappa-\delta)\frac{zX}{T}\log T \exp\left(B'\left(1+(\kappa^2+T^2)^{1/2}\right)^{1-\delta}\right)(\tau-1)^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leqslant \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} z^{\sigma_1}|Mf(s_1)||I_3||ds_1| \\
&\ll zX^{\delta}(\log T)^2 \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\delta}\right)\log^{B''}(2+|s_1|)|Mf(s_1)||ds_1| \\
&\ll zX^{\delta}(\log T)^2 \exp\left(B'\left(1+(\kappa^2+T^2)^{1/2}\right)^{1-\delta}\right) \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \log^{B''}(2+|s_1|)|Mf(s_1)||ds_1| \\
&\ll zX^{\delta}(\log T)^2 \exp\left(B'\left(1+(\kappa^2+T^2)^{1/2}\right)^{1-\delta}\right)(\tau-1)^{-2}
\end{aligned}$$

et

$$|J_4| \ll (\kappa - \delta)\frac{zX}{T}\log T \exp\Big(B'\big(1 + (\kappa^2 + T^2)^{1/2}\big)^{1-\delta}\Big)(\tau - 1)^{-2}.$$

En choisissant $\delta = 1 - c/\log(2 + T)$ et T de telle sorte que $\log T = c\log X/\log T$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
S_2(X, z, a, r, f) &= \frac{X}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} z^{s_1} Mf(s_1)h(s_1, 1, a, r)ds_1 + \mathcal{O}\bigg(\frac{Xz}{(\tau-1)^2}\exp\Big(-\sqrt{c'\log X}\Big)\bigg)\\
&= \frac{X}{2i\pi}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} z^{s_1} Mf(s_1)h(s_1, 1, a, r)ds_1 + \mathcal{O}\bigg(\frac{Xz}{(\tau-1)^2}\exp\Big(-\sqrt{c'\log X}\Big)\bigg)\\
&= X\prod_{p\leqslant P}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big) + \mathcal{O}\bigg(\frac{Xz}{(\tau-1)^2}\exp\Big(-\sqrt{c'\log X}\Big)\bigg)\\
&\quad + \mathcal{O}\bigg(\frac{Xz}{(\tau-1)^2\sqrt{P}\log P}\bigg),
\end{aligned}$$

d'après les lemmes 8.14 et 8.15 et pour une constante $c' > 0$. □

8.4 ESTIMATION DE $S_3(X, z, a, r)$

8.4.1 Élimination de la fonction f

Lemme 8.17
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $z > 0$, $P \geqslant 2$, $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5), $\tau > 1$ et $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
\prod_{p\leqslant P}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big) &= \prod_{p\leqslant P}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\\
&+ \mathcal{O}\Bigg(\frac{1}{\log P\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{\alpha}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + e^{-\alpha}\\
&+ \frac{\exp\big(-B\sqrt{\alpha\log P}\big)}{\log P\log\tau} + \frac{\big(\log(1/\log\tau)\big)^2}{\log P}\Bigg).
\end{aligned}$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\prod_{p\leqslant P}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big) &= \prod_{p\leqslant P}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\\
&+ \prod_{p\leqslant P}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}}\frac{r(d)}{d}f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} \frac{r(d)}{d} f\left(\frac{a(d)}{z}\right) \leqslant \sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P),d\leqslant P^\alpha\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} \frac{|r(d)|}{d} + \sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P),d>P^\alpha\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} \frac{|r(d)|}{d},$$

où α est un réel strictement positif.
La première somme est égale à :

$$\frac{1}{P^\alpha} \sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P),d\leqslant P^\alpha\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)| + \sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P),d\leqslant P^\alpha\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)| \int_d^{P^\alpha} \frac{du}{u^2}.$$

Nous n'utilisons pas les inégalités strictes $1 < a(d) < z$ et tout ce qui suit reste vrai, à quelques changements près, si nous remplaçons cette condition par $1 \leqslant a(d) \leqslant z$.
Selon le théorème 8.8, il existe une constante $B > 0$ telle que

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)| \ll \frac{X}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{X\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log\tau}.$$

Par ce théorème, nous avons donc

$$\frac{1}{P^\alpha} \sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P),d\leqslant P^\alpha\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)| \leqslant \frac{1}{P^\alpha} \sum_{\substack{d\leqslant P^\alpha\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)| \ll \frac{1}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{\exp\big(-B\sqrt{\alpha\log P}\big)}{\log\tau}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P),d\leqslant P^\alpha\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)| \int_d^{P^\alpha} \frac{du}{u^2} &= \int_1^{P^\alpha} \Bigg(\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P),d\leqslant u\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)|\Bigg)\frac{du}{u^2}\\ &\leqslant \left(\int_1^U + \int_U^{P^\alpha}\right)\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)|\Bigg)\frac{du}{u^2},\end{aligned}$$

avec

$$U = \exp\left(\left(\frac{\log(1/\log\tau)}{B}\right)^2\right).$$

Si $u \geqslant U$, nous utilisons la majoration du théorème 8.8 et si $u \leqslant U$, nous oublions la condition $1 < a(d)/z < \tau$ et utilisons le lemme 8.10 avec $x = y = u$ selon lequel $\sum_{d\leqslant u} |r(d)| \ll u$.

$$\int_1^U \Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ 1<\frac{a(d)}{z}<\tau}} |r(d)|\Bigg)\frac{du}{u^2} \ll \int_1^U \frac{du}{u} = \log U = \left(\frac{\log(1/\log\tau)}{B}\right)^2.$$

$$\int_U^{P^\alpha} \Bigg(\sum_{\substack{d \leqslant u \\ 1 < \frac{a(d)}{z} < \tau}} |r(d)| \Bigg) \frac{du}{u^2} \ll \frac{1}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} \int_U^{P^\alpha} \frac{du}{u} + \frac{1}{\log\tau} \int_U^{P^\alpha} \frac{e^{-B\sqrt{\log u}}}{u} du.$$

Par le changement de variable $v = \sqrt{\log u}$ et une intégration par parties, nous pouvons évaluer cette dernière intégrale ; nous obtenons

$$\int_U^{P^\alpha} \Bigg(\sum_{\substack{d \leqslant u \\ 1 < \frac{a(d)}{z} < \tau}} |r(d)| \Bigg) \frac{du}{u^2} \ll \frac{\alpha \log P}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{\log(1/\log\tau)}{B}.$$

Pour la deuxième somme, utilisons la méthode de Rankin. Soit β dans $]0, 1/4]$ un paramètre que nous choisirons plus tard :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d \mid \Pi(P_0,P), d > P^\alpha \\ 1 < \frac{a(d)}{z} < \tau}} \frac{|r(d)|}{d} &\leqslant \sum_{\substack{d \mid \Pi(P_0,P) \\ d > P^\alpha}} \frac{|r(d)|}{d} \leqslant \sum_{d \mid \Pi(P_0,P)} \frac{|r(d)|}{d} \Big(\frac{d}{P^\alpha}\Big)^\beta = \frac{1}{P^{\alpha\beta}} \sum_{d \mid \Pi(P_0,P)} \frac{|r(d)|}{d^{1-\beta}} \\
&= \frac{1}{P^{\alpha\beta}} \sum_{d \mid \Pi(P_0,P)} \prod_{p^k \| d} \frac{|r(p^k)|}{p^{k(1-\beta)}} = \frac{1}{P^{\alpha\beta}} \prod_{p \leqslant P_0} \Bigg(\sum_{k \geqslant 0} \frac{|r(p^k)|}{p^{k(1-\beta)}} \Bigg) \prod_{P_0 < p \leqslant P} \Bigg(\sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ p^k \leqslant P}} \frac{|r(p^k)|}{p^{k(1-\beta)}} \Bigg) \\
&= \frac{1}{P^{\alpha\beta}} \prod_{p \leqslant P_0} \Bigg(\sum_{k \geqslant 0} \frac{|r(p^k)|}{p^{k(1-\beta)}} \Bigg) \prod_{P_0 < p \leqslant P} \Bigg(1 + \frac{|r(p)|}{p^{1-\beta}} + \sum_{\substack{k \geqslant 2 \\ p^k \leqslant P}} \frac{|r(p^k)|}{p^{k(1-\beta)}} \Bigg) \\
&\ll \exp\Bigg(-\alpha\beta\log P + \sum_{p \leqslant P} \frac{|r(p)|}{p^{1-\beta}} + \sum_{p \leqslant P} \sum_{\substack{k \geqslant 2 \\ p^k \leqslant P}} \frac{|r(p^k)|}{p^{k(1-\beta)}} \Bigg) \\
&\ll \exp\Bigg(-\alpha\beta\log P + \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{1-\beta}} + \sup_{p \geqslant 2} |q(p)| \sum_{p \geqslant 2} \frac{1}{p^{2-\beta}} + \sum_{p \leqslant P} \sum_{\substack{k \geqslant 2 \\ p^k \leqslant P}} \frac{|r(p^k)|}{p^{k(1-\beta)}} \Bigg) \\
&= \exp\Bigg(-\alpha\beta\log P + \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{1-\beta}} + \mathcal{O}\big(1\big) \Bigg).
\end{aligned}$$

En effet,

$$\sum_{p \leqslant P} \sum_{\substack{k \geqslant 2 \\ p^k \leqslant P}} \frac{1}{p^{k(1-\beta)}} \leqslant \sum_{p \leqslant P} \sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{p^{k(1-\beta)}} \ll \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{2(1-\beta)}} \leqslant \sum_{p \geqslant 2} \frac{1}{p^{3/2}} = \mathcal{O}\big(1\big)$$

et

$$\sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{2-\beta}} \leqslant \sum_{p \geqslant 2} \frac{1}{p^{7/4}} = \mathcal{O}\big(1\big).$$

De plus, par une sommation par parties, nous obtenons :

$$\sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{1-\beta}} = \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{P^{1-\beta}} - \sum_{p \leqslant P} \int_p^P (\beta - 1) t^{\beta-2} dt = \frac{1}{P^{1-\beta}} \pi(P) - (\beta - 1) \int_2^P \pi(t) t^{\beta-2} dt,$$

où $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers n'excédant pas x. Par le théorème des nombres premiers, nous avons (voir [RS62])

$$\pi(x) \leqslant \frac{x}{\log x}\left(1+\frac{3}{2\log x}\right).$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant P}\frac{1}{p^{1-\beta}} &\leqslant \frac{1}{P^{1-\beta}}\frac{P}{\log P}\left(1+\frac{3}{2\log P}\right)+(1-\beta)\int_2^P\frac{t}{\log t}\left(1+\frac{3}{2\log t}\right)t^{\beta-2}dt\\ &\leqslant \frac{P^\beta}{\log P}\left(1+\frac{3}{2\log P}\right)+(1-\beta)\int_2^P\frac{dt}{t^{1-\beta}\log t}+\frac{3(1-\beta)}{2}\int_2^P\frac{dt}{t^{1-\beta}\log^2 t}\\ &\leqslant \frac{P^\beta}{\log P}\left(1+\frac{3}{2\log P}\right)+(1-\beta)\int_{2^\beta}^{P^\beta}\frac{du}{\log u}+\frac{3(1-\beta)}{2}\int_2^P\frac{dt}{t^{1-\beta}\log^2 t},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue par le changement de variables $u=t^\beta$.
Or,

$$\int_{2^\beta}^{P^\beta}\frac{du}{\log u}=\int_{2^\beta}^{e}\frac{du}{\log u}+\int_{e}^{P^\beta}\frac{du}{\log u}.$$

D'une part, la majoration du logarithme intégral nous donne une majoration de la deuxième intégrale :

$$\int_{e}^{P^\beta}\frac{du}{\log u}\ll\frac{P^\beta}{\log(P^\beta)}.$$

D'autre part,

$$\int_{2^\beta}^{e}\frac{du}{\log u}=\int_{2^\beta}^{e}\frac{du}{u-1}+\int_{2^\beta}^{e}\left(\frac{1}{\log u}-\frac{1}{u-1}\right)du.$$

Comme

$$\lim_{u\to1}\left(\frac{1}{\log u}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{2}$$

et si $1<u\leqslant e$,

$$0<\frac{1}{\log u}-\frac{1}{u-1}\leqslant\frac{1}{2},$$

nous avons

$$\int_{2^\beta}^{e}\left(\frac{1}{\log u}-\frac{1}{u-1}\right)du=\mathcal{O}(1)$$

et

$$\int_{2^\beta}^{e}\frac{du}{u-1}=\log\left(\frac{e-1}{2^\beta-1}\right).$$

Or, nous avons $2^\beta-1\geqslant\beta\log 2$ donc

$$\int_{2^\beta}^{e}\frac{du}{\log u}\leqslant\log\left(\frac{e-1}{\log 2}\right)-\log\beta+\mathcal{O}(1).$$

Cela nous permet d'écrire

$$\sum_{p\leqslant P}\frac{1}{p^{1-\beta}} \leqslant \frac{P^\beta}{\log P}\Big(1+\frac{3}{2\log P}\Big) + (1-\beta)\bigg(-\log\beta + \mathcal{O}\Big(\frac{P^\beta}{\beta\log P}\Big) + \mathcal{O}(1)\bigg) + \frac{3(1-\beta)}{2}\int_2^P \frac{dt}{t^{1-\beta}\log^2 t}.$$

En prenant $\beta = 1/\log P$, nous avons

$$\sum_{p\leqslant P}\frac{1}{p^{1-\beta}} \leqslant \log\log P + \mathcal{O}(1)$$

soit

$$\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ d>P^\alpha}}\frac{|r(d)|}{d} \ll \exp(-\alpha + \log\log P).$$

Finalement, nous obtenons

$$\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ 1<\frac{a(d)}{z}\leqslant\tau}}\frac{r(d)}{d}f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big) \ll \frac{1}{\log P\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{\alpha}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + e^{-\alpha} + \frac{\exp\big(-B\sqrt{\alpha\log P}\big)}{\log\tau\log P} + \frac{1}{B}\frac{\big(\log(1/\log\tau)\big)^2}{\log P},$$

comme attendu. □

8.4.2 Théorème principal et conséquences

Théorème 8.18
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$, P un paramètre réel $\geqslant 2$, $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5) et $y \geqslant 3$,

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) = \prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \mathcal{O}\Big(y\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)\Big) + \mathcal{O}\Big(zy^2\Big(\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big) + \frac{1}{\sqrt{P}\log P}\Big)\Big) + \mathcal{O}\bigg(\frac{\log\log\log y}{(\log\log y)^{1/2}} + \frac{y\exp\big(-B\sqrt{\log\log\log y\log P}\big)}{\log P} + \frac{(\log y)^2}{\log P}\bigg).$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M et θ. Le paramètre y est à choisir au mieux de nos intérêts.

Démonstration : Nous avons

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) = S_2(X,z,a,r,f) + \mathcal{O}\big(S_1(X,z,\tau,a,r)\big).$$

Les théorèmes 8.8 et 8.16 nous permettent d'écrire l'estimation suivante :

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) = X\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}f\Big(\frac{a(d)}{z}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{Xz}{(\tau-1)^2}\exp\big(-\sqrt{c'\log X}\big)\Big)$$
$$+\,\mathcal{O}\Bigg(\frac{Xz}{(\tau-1)^2\sqrt{P}\log P} + \frac{X}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{X\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log\tau}\Bigg).$$

En utilisant le lemme 8.17 et en posant $\tau = 1+y^{-1}$ avec y qui tend vers l'infini et $\alpha = \dfrac{1}{2}\log\log\log y$, nous obtenons le théorème 8.18. □

L'indépendance des deux paramètres X et P permet alors d'affirmer le corollaire suivant :

Corollaire 8.19
Les deux limites

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) \quad et \quad \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}$$

existent et sont égales.

Nous obtenons une distribution limite qui a une densité sous forme multiplicative.

Démonstration : Soit $\epsilon>0$. Il existe $y_0(\epsilon)\geqslant 3$ tels que pour tout réel y, $y\geqslant y_0$,

$$\frac{\log\log\log y}{(\log\log y)^{1/2}}\leqslant\epsilon.$$

Prenons alors $y=y_0(\epsilon)$. Nous pouvons trouver $\tilde{P}_0(\epsilon)\geqslant 2$ tel que pour tout $P\geqslant\tilde{P}_0$,

$$\frac{zy_0^2}{\sqrt{P}\log P} + \frac{y_0\exp\big(-B\sqrt{\log\log\log y_0\log P}\big)}{\log P} + \frac{(\log y_0)^2}{\log P}\leqslant\epsilon.$$

Prenons alors $P=\tilde{P}_0(\epsilon)$. Nous pouvons trouver $X_0(\epsilon)\geqslant 3$ tel que pour tout $X\geqslant X_0$,

$$\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)(y_0+y_0^2z)\leqslant\epsilon.$$

Si X_1 et X_2 sont deux réels supérieurs à X_0, nous avons

$$\Bigg|\frac{1}{X_1}\sum_{\substack{d\leqslant X_1\\ a(d)\leqslant z}} r(d) - \frac{1}{X_2}\sum_{\substack{d\leqslant X_2\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Bigg|\leqslant 6\epsilon.$$

Cette égalité nous permet d'affirmer que la suite de terme général

$$\frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d)$$

est de Cauchy. De la même façon, nous montrons que la suite de terme général

$$\prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{d \mid \Pi(P_0,P) \\ a(d) \leqslant z}} \frac{r(d)}{d}$$

est de Cauchy. Par conséquent, les deux limites existent. En faisant tendre successivement X, P et y vers l'infini dans l'égalité du théorème 8.18, nous obtenons l'égalité des deux limites. □

Corollaire 8.20
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$, $y \geqslant 3$ et $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5),

$$\frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) = \lim_{P \to \infty} \prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{d \mid \Pi(P_0,P) \\ a(d) \leqslant z}} \frac{r(d)}{d} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-B\sqrt{\log X}\right)(y + y^2 z) + \frac{\log\log\log y}{(\log\log y)^{1/2}}\right).$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Nous faisons tendre P vers l'infini dans l'égalité du théorème 8.18. □

Corollaire 8.21
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 16$, $0 < z \leqslant X$ et $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5),

$$\frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) = \lim_{P \to \infty} \prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{d \mid \Pi(P_0,P) \\ a(d) \leqslant z}} \frac{r(d)}{d} + \mathcal{O}\left(z \exp\left(-B\sqrt{\log X}\right) + \frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\right).$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Nous choisissons $y = \exp\left(\frac{B}{4}\sqrt{\log X}\right)$ dans l'égalité du corollaire 8.20.
□

Remarque 8.22

Dans la plupart des cas, nous pouvons majorer $a(d)$ *par une puissance de* $\log d$*, ce qui permet de simplifier l'estimation du corollaire 8.21 de la façon suivante :*

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) = \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \mathcal{O}\left(\frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\right),$$

où le $\mathcal{O}$ *ne dépend plus de* z*. L'exemple* $a(d) = \dfrac{\varphi(d)2^{\omega^+(d)}}{d}$ *où* $\omega^+(d) = \#\{p \,/\, p^2|d\}$ *montre que cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite.*

Chapitre 9

Traitement du cas $r(p) = -1 + \mathcal{O}\big(1/p\big)$

Dans ce chapitre, nous supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a, B_0)$, $H_2(a, m, M)$, $H_3(r, -1, Q)$, $H_4(r, R)$ et $H_5(a, R, Q, \theta)$ introduites au début du chapitre 7.
L'hypothèse $H_3(r, -1, Q)$ signifie donc qu'il existe une fonction q telle que

$$\forall p \geqslant 2,\ r(p) = -1 + \frac{q(p)}{p} \text{ et } \sup_{p\geqslant 2} |q(p)| \leqslant Q.$$

Considérons alors les fonctions

$$\begin{aligned} h(s_1, s_2, a, r) = g(s_1, s_2, a, r)\zeta(s_2) &= \prod_{p\geqslant 2}\left(1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1}p^{ks_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p\geqslant 2}\left(1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{r(p^k)}{a(p^k)^{s_1}p^{ks_2}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^{s_2}} + \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{p^{ks_2}}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(s_1, s_2, a, |r|) &= \prod_{p\leqslant Q}\left(1 + \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)}{p^{s_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right)^{-1} g(s_1, s_2, a, |r|)\zeta(s_2)^{-1} \\ &= \prod_{p\leqslant Q}\left(1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1}p^{ks_2}}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)}{p^{s_2}}\right)\prod_{p>Q}\left(1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1}p^{ks_2}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_2}}\right) \\ &= \prod_{p\leqslant Q}\left(1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1}p^{ks_2}}\right)\left(1+\frac{\operatorname{sgn}\big(r(p)\big)}{p^{s_2}}\right)\prod_{p>Q}\left(1-\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}p^{s_2}}+\sum_{k\geqslant 2}\frac{|r(p^k)|}{a(p^k)^{s_1}p^{ks_2}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s_2}}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que si $p > Q$ alors $r(p) < 0$.

9.1 Domaine de méromorphie et majoration de ces fonctions

9.1.1 Région sans zéros de la fonction Zêta de Riemann

Lemme 9.1
Il existe une constante positive c telle que $\zeta(s)$ ne possède aucun zéro dans la région du

plan complexe définie par l'inégalité

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log(2+|t|)},$$

avec $s = \sigma + it$. *De plus, pour* $|t| \geqslant 3$ *et* $\sigma \geqslant 1 - c/\log|t|$,

$$1/\zeta(s) \ll \log|t|.$$

Nous pouvons trouver la démonstration de ce résultat dans [Ten95].

9.1.2 Étude des fonctions $g(s_1, s_2, a, r)$ et $g(s_1, s_2, a, |r|)$

Théorème 9.2
Les fonctions $h(s_1, s_2, a, r)$ *et* $h(s_1, s_2, a, |r|)$ *sont analytiques pour* $\sigma_2 > 1/2$. *De plus, pour trois réels* α, β *et* $\eta > 0$, *il existe trois constantes* $B = B(Q, B_0, R, m, M, \eta, \alpha, \beta)$, $B' = B'(B_0, R, m, M, \alpha, \beta)$ *et* $B'' = B''(R, m, M, \alpha, \beta)$ *telles que pour* $s_2 = \sigma_2 + it_2$, $\sigma_2 \geqslant 1/2 + \eta$ *et* $\alpha \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$,

$$|h(s_1, s_2, a, r)| \leqslant B \exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\sigma_2}\right) \log^{B''}(2+|s_1|)$$

et nous avons une majoration similaire pour la fonction $h(s_1, s_2, a, |r|)$.

Démonstration : Le principe est semblable à celui utilisé dans la démonstration du théorème 8.2. Il suffit simplement de remarquer que pour tout premier p assez grand, chaque facteur eulérien de $h(s_1, s_2, a, r)$ s'écrit sous la forme

$$\left(1 + \frac{1}{p^{s_2}}\left(\frac{r(p)}{a(p)^{s_1}} + 1\right) + \frac{r(p)}{a(p)^{s_1}p^{2s_2}} + \left(1 + \frac{r(p)}{a(p)^{s_1}p^{s_2}}\right)\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{p^{ks_2}}\right)\left(1 + \frac{R_1}{p^{2s_2}}\right),$$

où R_1 a été défini dans la proposition 1.8.
L'étude de $h(s_1, s_2, a, |r|)$ se fait comme dans la démonstration du théorème 8.2. □

Corollaire 9.3 *La fonction* $g(s_1, s_2, a, r)$ *est analytique pour* $\sigma_2 > 1/2$ *et la fonction* $g(s_1, s_2, a, |r|)$ *est méromorphe pour* $\sigma_2 > 1/2$ *avec un unique pôle simple en* $s_2 = 1$. *De plus, pour trois réels* α, β *et* $\eta > 0$, *il existe trois constantes* $B = B(Q, B_0, R, m, M, \eta, \alpha, \beta)$, $B' = B'(B_0, R, m, M, \alpha, \beta)$ *et* $B'' = B''(R, m, M, \alpha, \beta)$ *telles que pour* $s_2 = \sigma_2 + it_2$, $\sigma_2 \geqslant 1/2 + \eta$, $\sigma_2 \geqslant 1 - c/\log(3+|t_2|)$ *et* $\alpha \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$,

$$|g(s_1, s_2, a, r)| \leqslant B \exp\left(B'(1+|s_1|)^{1-\sigma_2}\right) \log^{B''}(2+|s_1|) \log(3+|t_2|)$$

et nous avons une majoration similaire pour la fonction $g(s_1, s_2, a, |r|)$.

Démonstration : Il suffit d'associer le résultat du théorème 9.2 à celui du lemme 9.1.
□

9.2 Théorème principal et conséquences

Nous travaillons de la même façon que dans le chapitre précédent pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 9.4
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ *telle que, pour* $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$ *et* $y \geqslant 3$,

$$\frac{1}{X}\Big|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Big| \ll \exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big)(y+y^2z) + \frac{1}{(\log\log y)^{1/2}}.$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M *et* θ.
Le paramètre y *est à choisir au mieux de nos intérêts.*

Nous en déduisons les corollaires suivants :

Corollaire 9.5
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ *telle que, pour* $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$,

$$\frac{1}{X}\Big|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Big| \ll z\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big) + \frac{1}{(\log\log X)^{1/2}}.$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M *et* θ.

Corollaire 9.6
Il existe une constante $B = B(m, M) > 0$ *telle que, pour* $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$,

$$\frac{1}{X}\Big|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} \mu(d)\Big| \ll z\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big) + \frac{1}{(\log\log X)^{1/2}}.$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de B_0, m, M *et* θ.

Démonstration : Il suffit simplement d'appliquer le corollaire 9.5 à la fonction $r(d) = \mu(d)$. Nous avons donc

$$\forall p \geqslant 2,\ r(p) = \mu(p) = -1 \text{ et } q(p) = 0,$$

soit $R = \sup_{p\geqslant 2} |r(p)| = 1$ et $Q = \sup_{p\geqslant 2} |q(p)| = 0$. □

Remarque 9.7
Si la fonction $a(d)$ *est majorée par une puissance de* $\log d$, *il est également possible de rendre l'estimation du corollaire 9.5 indépendante de* z *(voir remarque 8.22).*

Chapitre 10

Forme exploitable de ces résultats

Dans ce chapitre, nous supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a, B_0)$, $H_2(a, m, M)$, $H_3(r, 1, Q)$, $H_4(r, R)$ et $H_5(a, R, Q, \theta)$ introduites au début du chapitre 7.

À partir de l'estimation obtenue au corollaire 8.21, nous pouvons en déduire l'estimation de la somme suivante $\displaystyle\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)F\left(\frac{a(d)}{z}\right)$, pour une certaine fonction F. Nous la donnons dans le corollaire suivant :

Corollaire 10.1
Soit F une fonction telle que $t \mapsto F'(t)$ et $t \mapsto tF'(t)$ sont intégrables sur $[0,1]$. Alors il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 3$ et $0 < z \leqslant X$,

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)F\left(\frac{a(d)}{z}\right) = \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}F\left(\frac{a(d)}{z}\right) + \mathcal{O}(\Delta_1),$$

où

$$\begin{aligned}\Delta_1 = z\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big) + \frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}} + z\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big)\int_0^1 t|F'(t)|dt\\ + \frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\int_0^1 |F'(t)|dt\end{aligned}$$

et $\Pi(P_0, P)$ est défini par (8.5).
La constante intervenant dans le $\mathcal{O}$ dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Nous écrivons

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)F\left(\frac{a(d)}{z}\right) &= \sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\left(F(1)-\int_{a(d)/z}^{1}F'(t)dt\right)\\
&= F(1)\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\int_{a(d)/z}^{1}F'(t)dt\\
&= F(1)\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-\int_0^1\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant zt}} r(d)\Bigg)F'(t)dt\\
&= F(1)X\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\\
&+\mathcal{O}\left(Xz\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big)+\frac{X\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\right)\\
&-X\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^1\Bigg(\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant zt}}\frac{r(d)}{d}\Bigg)F'(t)dt\\
&+\mathcal{O}\left(Xz\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big)\int_0^1 t|F'(t)|dt+\frac{X\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\int_0^1|F'(t)|dt\right).
\end{aligned}$$

Or, nous avons également

$$\begin{aligned}
\int_0^1\Bigg(\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant zt}}\frac{r(d)}{d}\Bigg)F'(t)dt &= \sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}\int_0^1 1_{(a(d)\leqslant zt)}F'(t)dt\\
&= \sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}\int_{\min(1,a(d)/z)}^{1}F'(t)dt\\
&= F(1)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}-\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}F\left(\min\left(1,\frac{a(d)}{z}\right)\right)\\
&= F(1)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}-\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}F\left(\frac{a(d)}{z}\right)-F(1)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)>z}}\frac{r(d)}{d}\\
&= F(1)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}-\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}F\left(\frac{a(d)}{z}\right).
\end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)F\Big(\frac{a(d)}{z}\Big) = X\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}F\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)$$
$$+\mathcal{O}\bigg(Xz\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big)+\frac{X\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\bigg)$$
$$+\mathcal{O}\bigg(Xz\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big)\int_0^1 t|F'(t)|dt+\frac{X\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\int_0^1|F'(t)|dt\bigg).$$

□

Une sommation par parties nous permet d'obtenir directement une estimation de la somme $\displaystyle\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}$ donnée par le théorème suivant :

Théorème 10.2
Il existe une constante $B=B(R,m,M)>0$ telle que pour $X\geqslant 16$, $0<z\leqslant X$ et d_0 un entier $\geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} = C_1(z)\log X + C_2(z) + \mathcal{O}\big(\Delta_2\big),$$

où

$$C_1(z) = \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d},$$

$$C_2(z) = \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}-\frac{1}{d_0}\sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} r(d) + (1-\log d_0)C_2(z)$$
$$+\int_{d_0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d) - u\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\Bigg)\frac{du}{u^2},$$

$$\Delta_2 = z\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big)+\frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}+z\int_{\sqrt{\log X}}^{\infty} ve^{-Bv}dv+\int_{\log X}^{\infty}\frac{\log\log v}{(\log v)^{1/2}}dv$$

et $\Pi(P_0,P)$ est défini par (8.5).
La constante intervenant dans le $\mathcal{O}$ dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Remarque 10.3
Le corollaire 8.21 nous assure la convergence en l'infini de l'intégrale

$$\int_{d_0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d) - u\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\Bigg)\frac{du}{u^2}.$$

L'entier d_0 est choisi de telle sorte que l'expression $\dfrac{\log\log\log u}{(\log\log u)^{1/2}}$ soit bien définie pour $u\geqslant d_0$.

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} &= \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \sum_{\substack{d_0\leqslant d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\\ &= \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \sum_{\substack{d_0\leqslant d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Big(\frac{1}{X}+\int_d^X\frac{du}{u^2}\Big)\\ &= \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \frac{1}{X}\sum_{\substack{d_0\leqslant d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) + \int_{d_0}^X\Bigg(\sum_{\substack{d_0\leqslant d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Bigg)\frac{du}{u^2}.\end{aligned}$$

Nous continuons en remarquant que cette dernière expression est égale à :

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \frac{1}{X}\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) - \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Bigg) + \int_{d_0}^X\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d) - \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Bigg)\frac{du}{u^2}\\ &= \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} - \frac{1}{X}\sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} r(d) + \frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) - \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\int_{d_0}^X\frac{du}{u^2} + \int_{d_0}^X\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Bigg)\frac{du}{u^2}\\ &= \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} - \frac{1}{d_0}\sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} r(d) + \frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) + \int_{d_0}^X\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Bigg)\frac{du}{u^2}.\end{aligned}$$

D'une part, le corollaire 8.21 nous dit qu'il existe une constante $B>0$ telle que

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d) = \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d} + \mathcal{O}\Bigg(z\exp\Big(-B\sqrt{\log X}\Big) + \frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}\Bigg).$$

D'autre part, en notant

$$C = \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d},$$

nous avons

$$\begin{aligned}\int_{d_0}^{X}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Big)\frac{du}{u^2} &= \int_{d_0}^{X}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-Cu\Big)\frac{du}{u^2}+C\int_{d_0}^{X}\frac{du}{u}\\ &= \int_{d_0}^{X}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-Cu\Big)\frac{du}{u^2}+C\log\Big(\frac{X}{d_0}\Big)\\ &= \int_{d_0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-Cu\Big)\frac{du}{u^2}-\int_{X}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-Cu\Big)\frac{du}{u^2}+C\log\Big(\frac{X}{d_0}\Big).\end{aligned}$$

Le corollaire 8.21 nous permet d'estimer $\displaystyle\int_{X}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-Cu\Big)\frac{du}{u^2}$:

$$\begin{aligned}\int_{d_0}^{X}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)\Big)\frac{du}{u^2} &= \int_{d_0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-Cu\Big)\frac{du}{u^2}+C\log\Big(\frac{X}{d_0}\Big)\\ &\quad+\mathcal{O}\Big(z\int_{X}^{\infty}\frac{\exp\big(-B\sqrt{\log u}\big)}{u}du+\int_{X}^{\infty}\frac{\log\log\log u}{u(\log\log u)^{1/2}}du\Big)\\ &= \int_{d_0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d)-Cu\Big)\frac{du}{u^2}+C\log\Big(\frac{X}{d_0}\Big)\\ &\quad+\mathcal{O}\Big(z\int_{\sqrt{\log X}}^{\infty}ve^{-Bv}dv+\int_{\log X}^{\infty}\frac{\log\log v}{(\log v)^{1/2}}dv\Big),\end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue par le changement de variable $v=\sqrt{\log u}$ dans la première intégrale et $v=\log u$ dans la deuxième. □

Corollaire 10.4
Soit F une fonction telle que $t\mapsto F'(t)$ et $t\mapsto tF'(t)$ sont intégrables sur $[0,1]$. Alors il existe une constante $B=B(R,m,M)>0$ telle que, pour $X\geqslant 16$, $0<z\leqslant X$ et d_0 un entier $\geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}F\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)=C_1(z,F)\log X+C_2(z,F)+\mathcal{O}\big(\Delta_3\big),$$

où

$$C_1(z,F)=\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}F\Big(\frac{a(d)}{z}\Big),$$

$$C_2(z,F) = \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} \frac{r(d)}{d} F\left(\frac{a(d)}{z}\right) - \frac{1}{d_0} \sum_{\substack{d<d_0\\ a(d)\leqslant z}} r(d) F\left(\frac{a(d)}{z}\right) + (1-\log d_0) C_1(z,F)$$
$$+ \int_{d_0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d\leqslant u\\ a(d)\leqslant z}} r(d) F\left(\frac{a(d)}{z}\right) - u \lim_{P\to\infty} \prod_{p\leqslant P} \left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}} \frac{r(d)}{d} F\left(\frac{a(d)}{z}\right)\right) \frac{du}{u^2},$$

$$\Delta_3 = z\left(1+\int_0^1 t|F'(t)|dt\right) \exp\left(-B\sqrt{\log X}\right) + \left(1+\int_0^1 |F'(t)|dt\right) \frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}$$
$$+ z\left(1+\int_0^1 t|F'(t)|dt\right) \exp\left(-B\sqrt{\log X}\right) + \left(1+\int_0^1 |F'(t)|dt\right) \frac{\log\log\log X}{(\log\log X)^{1/2}}$$

et $\Pi(P_0,P)$ *est défini par (8.5).*
La constante intervenant dans le $\mathcal{O}$ *dépend de* Q*,* B*,* R*,* m*,* M *et* θ*.*

Démonstration : La démonstration est similaire à celle du corollaire 11.3. □

Cinquième partie

Deux autres types d'applications

Chapitre 11

Remplacement de la condition $a(d) \leqslant z$ par $da(d) \leqslant Xz$

Dans ce chapitre, nous supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a, B_0)$, $H_2(a, m, M)$, $H_3(r, 1, Q)$, $H_4(r, R)$ et $H_5(a, R, Q, \theta)$ introduites au début du chapitre 7.

Énonçons le théorème principal qui sera démontré à la fin de ce chapitre :

Théorème 11.1
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$, P un paramètre réel $\geqslant 2$, $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5) et $y \geqslant 3$,

$$\frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ da(d) \leqslant Xz}} r(d) = z \prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{d | \Pi(P_0, P)} \frac{r(d)}{da(d)} + \prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{d | \Pi(P_0, P) \\ a(d) \leqslant z}} \frac{r(d)}{d} \left(1 - \frac{z}{a(d)}\right)$$
$$+ \mathcal{O}\left(\frac{z}{y} + \frac{e^{-B\sqrt{\log X}}}{y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{P} \log P} + \frac{1}{(\log \log y)^{1/2}} + y e^{-B\sqrt{\log X}}\right).$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.
Le paramètre y est à choisir au mieux de nos intérêts.

Comme dans la partie précédente, nous pouvons, à partir de ce théorème, en déduire les trois corollaires suivants :

Corollaire 11.2
Les deux limites

$$\lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ da(d) \leqslant Xz}} r(d)$$

et

$$\lim_{P \to \infty} \left[z \prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{d | \Pi(P_0, P)} \frac{r(d)}{da(d)} + \prod_{p \leqslant P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{d | \Pi(P_0, P) \\ a(d) \leqslant z}} \frac{r(d)}{d} \left(1 - \frac{z}{a(d)}\right) \right]$$

existent et sont égales.

Démonstration : La démonstration est similaire à celle du corollaire 8.19. □

Corollaire 11.3
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$, $y \geqslant 3$ et $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5),

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ da(d)\leqslant Xz}} r(d) = \lim_{P\to\infty}\left[z\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{da(d)} + \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\left(1-\frac{z}{a(d)}\right)\right]$$
$$+\mathcal{O}\left(\frac{z}{y}+\frac{e^{-B\sqrt{\log X}}}{y^2}+\frac{1}{(\log\log y)^{1/2}}+ye^{-B\sqrt{\log X}}\right).$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Il suffit de faire tendre P vers l'infini dans l'égalité du théorème 11.1. □

Corollaire 11.4
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$ et $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5),

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ da(d)\leqslant Xz}} r(d) = \lim_{P\to\infty}\left[z\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{da(d)} + \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{d|\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\left(1-\frac{z}{a(d)}\right)\right]$$
$$+\mathcal{O}\left(z\exp\left(-B\sqrt{\log X}\right)+\frac{1}{(\log\log X)^{1/2}}\right).$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Nous choisissons $y = \exp\left(\frac{B}{2}\sqrt{\log X}\right)$ dans l'égalité du corollaire 11.3.
□

La méthode utilisée pour démontrer le théorème 11.1 est identique à celle utilisée pour déterminer la distribution limite de $\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)\leqslant z}} r(d)$ dans les chapitres 8 et 9. Nous considérons la même fonction f introduite au début de la section 7.1 et nous écrivons

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ da(d)\leqslant Xz}} r(d) = \sum_{d\leqslant X} r(d) f\left(\frac{da(d)}{Xz}\right) + \mathcal{O}\Bigg(\sum_{\substack{d\leqslant X\\ 1<\frac{da(d)}{Xz}<\tau}} |r(d)|\Bigg).$$

Utilisons désormais les notations suivantes : pour $0 < z \leqslant X$ et $\tau > 1$,

$$\mathfrak{S}_1(X, z, \tau, a, r) = \sum_{\substack{d\leqslant X\\ 1<\frac{da(d)}{Xz}<\tau}} |r(d)|, \tag{11.1}$$

$$\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f)=\sum_{d\leqslant X} r(d) f\left(\frac{da(d)}{Xz}\right) \tag{11.2}$$

et

$$\mathfrak{S}_3(X,z,a,r)=\sum_{\substack{d\leqslant X\\ da(d)\leqslant Xz}} r(d). \tag{11.3}$$

11.1 ÉTUDE DE $\mathfrak{S}_1(X,z,\tau,a,r)$

11.1.1 Écriture intégrale de $\mathfrak{S}_1(X,z,\tau,a,r)$

Par les lemmes 7.2 et 7.3, nous avons

$$1_{(d/X\leqslant 1)}\leqslant 2\left(1-\frac{d/X}{2}\right)^+=\frac{1}{i\pi}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\frac{(d/X)^{-s}}{2^{-s}s(s+1)}ds,$$

où $\kappa>0$ et

$$\begin{aligned}1_{(1<\frac{da(d)}{Xz}<\tau)}\leqslant 1_{(|\log\frac{da(d)}{Xz}|<\log\tau)}&\leqslant 2\left(1-\frac{|\log\frac{da(d)}{Xz}|}{2\log\tau}\right)^+\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2t\log\tau)}{t^2\log\tau}\left(\frac{da(d)}{Xz}\right)^{it}dt.\end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1(X,z,\tau,a,r)&\leqslant\frac{1}{i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\frac{X^{s_2-it_1}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}\left(\sum_{d\geqslant 1}\frac{|r(d)|a(d)^{it_1}}{d^{s_2-it_1}}\right)ds_2dt_1\\ &\leqslant\frac{1}{i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\frac{X^{s_2-it_1}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1,s_2-it_1,a,|r|)ds_2dt_1.\end{aligned}$$

11.1.2 Un résultat intermédiaire

Lemme 11.5
Pour $t_1\geqslant 0$ et $t_2\geqslant 0$, nous avons

$$\log(2+t_1+t_2)\leqslant\frac{\log(2+t_1)\log(2+t_2)}{\log 2}.$$

Démonstration : Il suffit, pour cela, d'étudier la fonction $t_1\mapsto\dfrac{\log(2+t_1+t_2)}{\log(2+t_1)}$ pour $t_1\in[0,+\infty[$ et $t_2\in[0,+\infty[$ fixé. La dérivée de cette fonction est égale à

$$\frac{(2+t_1)\log(2+t_1)-(2+t_1+t_2)\log(2+t_1+t_2)}{(2+t_1+t_2)(2+t_1)(\log(2+t_1))^2}. \tag{11.4}$$

Or la fonction $t \mapsto t \log t$ est croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. Par conséquent, l'expression (11.4) est négative pour $t_1 \geqslant 0$ et $t_2 \geqslant 0$ et la fonction $t_1 \mapsto \dfrac{\log(2+t_1+t_2)}{\log(2+t_1)}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Pour $t_1 \geqslant 0$, nous avons donc

$$\frac{\log(2+t_1+t_2)}{\log(2+t_1)} \leqslant \frac{\log(2+t_1+t_2)}{\log(2+t_1)}\Big|_{t_1=0} = \frac{\log(2+t_2)}{\log 2}.$$

□

11.1.3 Estimation de $\mathfrak{S}_1(X, z, \tau, a, r)$

Théorème 11.6
Il existe une constante $B = B(R, m, M) > 0$ telle que, pour $X \geqslant 2$, $z > 0$ et τ un réel > 1,

$$\mathfrak{S}_1(X, z, \tau, a, r) \ll \frac{X}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{X\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log\tau}.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Nous avons obtenu dans la sous-section 11.1.1 :

$$\mathfrak{S}_1(X, z, \tau, a, r) \leqslant \frac{1}{i\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}\frac{X^{s_2-it_1}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1, s_2-it_1, a, |r|)ds_2dt_1.$$

Notons $\Gamma_2(t_1)$ la courbe d'équation $s_2 = 1 + it_2 - 1/\log(2+|t_1|+|t_2|)$. En appliquant le théorème des résidus sur un contour bien choisi, le corollaire 8.3 nous dit qu'il existe un pôle en $s_2 = 1 + it_1$. Cela nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}&\frac{X^{s_2-it_1}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1, s_2-it_1, a, |r|)ds_2dt_1\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_2(t_1)}\frac{X^{s_2-it_1}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1, s_2-it_1, a, |r|)ds_2dt_1 + \Sigma_2,\end{aligned}$$

avec

$$\Sigma_2 = 2i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-1-it_1}(1+it_1)(2+it_1)t_1^2\log\tau}h(-it_1, 1, a, |r|)dt_1. \tag{11.5}$$

D'une part, majorons la première intégrale :

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Gamma_2(t_1)}\frac{X^{s_2}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1, s_2-it_1, a, r)ds_2dt_1\Big|\\ &\ll X\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''}(2+|t_1|)}{t_1^2\log\tau}\bigg(\int_0^{\infty}\frac{X^{-1/\log(2+|t_1|+t_2)}}{1+t_2^2}\log(2+|t_1|+t_2)dt_2\bigg)dt_1\\ &\ll X\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''+1}(2+|t_1|)}{t_1^2\log\tau}\bigg(\int_0^{\infty}\frac{X^{-1/\log(2+|t_1|+t_2)}}{1+t_2^2}\log(2+t_2)dt_2\bigg)dt_1,\end{aligned}$$

par le lemme 11.5.
En appliquant le lemme 8.4 avec $w = \log X$ et $v = 2 + |t_1|$, nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{X^{-1/\log(2+|t_1|+t_2)}}{1+t_2^2}\log(2+t_2)dt_2 \ll \exp\left(-\frac{\log X}{\log(2+|t_1|)+\sqrt{\log X}}\right).$$

Nous sommes alors amenés à étudier l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''+1}(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}\exp\left(-\frac{\log X}{\log(2+t_1)+\sqrt{\log X}}\right)dt_1.$$

Séparons cette intégrale en deux parties :

$$\int_0^{\exp(\sqrt{\log X})} + \int_{\exp(\sqrt{\log X})}^\infty .$$

Majorons la première intégrale par

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\right)\int_0^{\exp(\sqrt{\log X})}\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''+1}(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1\\
&\leqslant \exp\left(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\right)\int_0^\infty\frac{\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)\log^{B''+1}(2+t_1)}{t_1^2\log\tau}dt_1\\
&\ll \exp\left(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\right)\log^{B''+1}\left(2+\frac{1}{\log\tau}\right),
\end{aligned}$$

par le lemme 8.5.
Pour la deuxième intégrale, nous majorons l'exponentielle par 1 et $|1-\cos(2t_1\log\tau)|$ par 2 pour obtenir

$$\frac{1}{\log\tau}\int_{\exp(\sqrt{\log X})}^\infty \frac{\log^{B''+1}(2+t_1)}{t_1^2}dt_1 \ll \frac{1}{\log\tau}\frac{\log^{B''+1}\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)}{\exp\big(\sqrt{\log X}\big)}.$$

Finalement, nous obtenons la majoration :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^\infty\int_{\Gamma_2(t_1)}\frac{X^{s_2}\big(1-\cos(2t_1\log\tau)\big)}{z^{it_1}2^{-s_2}s_2(s_2+1)t_1^2\log\tau}g(-it_1,s_2,a,|r|)ds_2dt_1\right|\\
&\ll X\exp\left(-\frac{\log X}{\log\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)+\sqrt{\log X}}\right)\log^{B''+1}\left(2+\frac{1}{\log\tau}\right)\\
&+\frac{X}{\log\tau}\frac{\log^{B''+1}\big(2+\exp(\sqrt{\log X})\big)}{\exp(\sqrt{\log X})}\\
&\ll \frac{X\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log\tau},
\end{aligned}\tag{11.6}$$

pour une certaine constante $B > 0$. D'autre part (voir (11.5)),

$$\Sigma_2 \ll X\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos(2t_1\log\tau)}{t_1^2\log\tau}\big|h(-it_1,1,a,|r|)\big|dt_1 \ll \frac{X}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}},$$

par le lemme 8.6. Cette dernière estimation et (11.6) nous permettent de déduire le théorème 11.6. □

11.2 Étude de $\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f)$

11.2.1 Écriture intégrale de $\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f)$

Proposition 11.7
Nous avons, pour $X \geqslant e$, $1 \leqslant T \leqslant X^{1/4}$, $\kappa_1 = 1/\log X$ et $\kappa_2 = 1 + 1/\log X$,

$$\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}\int_{\kappa_2-iT}^{\kappa_2+iT}\frac{z^{s_1}X^{s_1+s_2}Mf(s_1)}{s_2}g(s_1,s_1+s_2,a,r)ds_2ds_1 + \mathcal{O}\left(\frac{X\log X}{T}+\frac{X\log T}{T}+1\right).$$

Démonstration : Nous avons

$$\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f) = \sum_{d\leqslant X} r(d)f\left(\frac{da(d)}{Xz}\right).$$

La formule de Perron tronquée nous donne, avec $\kappa_2 = 1 + (\log X)^{-1}$ et $T \geqslant 1$,

$$\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa_2-iT}^{\kappa_2+iT}\sum_{d\geqslant 1}\frac{r(d)}{d^s}f\left(\frac{da(d)}{Xz}\right)\frac{X^s}{s}ds + \mathcal{O}\left(\frac{X}{T}\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(X/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^{\kappa_2}}\frac{du}{u^2}\right),$$

et la transformée de Mellin de f nous permet d'écrire $f\left(\frac{da(d)}{Xz}\right)$ sous la forme

$$f\left(\frac{da(d)}{Xz}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}Mf(s)\left(\frac{Xz}{da(d)}\right)^s ds,$$

avec $\kappa_1 = 1/\log X$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f) &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa_2-i\infty}^{\kappa_2+i\infty}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\frac{z^{s_1}X^{s_1+s_2}Mf(s_1)}{s_2}\left(\sum_{d\geqslant 1}\frac{r(d)}{a(d)^{s_1}d^{s_1+s_2}}\right)ds_2ds_1\\
&+\mathcal{O}\left(\frac{X}{T}\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(X/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^{\kappa_2}}\frac{du}{u^2}\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}\int_{\kappa_2-iT}^{\kappa_2+iT}\frac{z^{s_1}X^{s_1+s_2}Mf(s_1)}{s_2}g(s_1,s_1+s_2,a,r)ds_2ds_1\\
&+\mathcal{O}\left(\frac{X\log X}{T}+\frac{X\log T}{T}+1\right),
\end{aligned}$$

par l'étude du terme d'erreur faite au lemme 8.11. □

11.2.2 Résultats intermédiaires

Lemme 11.8
Soit G la fonction définie de la manière suivante :

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du & si\ x > 0, \\ 1 & si\ x = 0, \end{cases}$$

où la fonction f est définie au début de la section 7.1.
Nous avons alors, pour $\Re s < 1$,

$$MG(s) = \frac{Mf(s)}{1-s}.$$

Démonstration : Par définition de la transformée de Mellin, nous avons

$$\begin{aligned} MG(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du\right)dx = \int_0^\infty \left(\int_u^\infty x^{s-2}dx\right)f(u)du \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{x^{s-1}}{s-1}\right]_u^\infty f(u)du = -\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{s-1}f(u)du = \frac{1}{1-s}\int_0^\infty u^{s-1}f(u)du \end{aligned}$$

et nous reconnaissons dans cette dernière intégrale l'expression de $Mf(s)$. □

Lemme 11.9
Pour $\tau > 1$, nous avons

$$G(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{\tau-1}{x}\right) & si\ x > 1. \end{cases}$$

La constante intervenant dans cette majoration est absolue.

Démonstration : Rappelons que la fonction f vérifie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } x \geqslant \tau, \end{cases}$$

et

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Par conséquent, si $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du = \frac{1}{x}\int_0^x du = 1.$$

Si $x > 1$, nous avons

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du = \frac{1}{x}\int_0^1 f(u)du + \frac{1}{x}\int_1^x f(u)du = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\int_1^\tau du\right) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{\tau-1}{x}\right).$$

□

11.2.3 Estimation de $\mathfrak{S}_2(X, z, a, r, f)$

Théorème 11.10
Il existe une constante $c' > 0$ telle que pour $X \geqslant 3$, $0 < z \leqslant X$, $\tau > 1$, $P \geqslant 2$ et $\Pi(P_0, P)$ défini par (8.5),

$$\mathfrak{S}_2(X, z, a, r, f) = X\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum_{d \mid \Pi(P_0, P)} \frac{r(d)}{d} G\Big(\frac{a(d)}{z}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{X}{(\tau-1)^2} \exp\big(-\sqrt{c' \log X}\big)\Big)$$
$$+ \mathcal{O}\Big(\frac{X}{(\tau-1)^2 \sqrt{P} \log P}\Big),$$

où la constante intervenant dépend de Q, B_0, R, m et M.

Démonstration : Rappelons que nous avons obtenu à la proposition 11.7 :

$$\mathfrak{S}_2(X, z, a, r, f) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\kappa_1 - i\infty}^{\kappa_1 + i\infty} \int_{\kappa_2 - iT}^{\kappa_2 + iT} \frac{z^{s_1} X^{s_1 + s_2} Mf(s_1)}{s_2} g(s_1, s_1 + s_2, a, r) ds_2 ds_1$$
$$+ \mathcal{O}\Big(\frac{X \log X}{T} + \frac{X \log T}{T} + 1\Big),$$

pour $X \geqslant e$, $1 \leqslant T \leqslant X^{1/4}$, $\kappa_1 = (\log X)^{-1}$ et $\kappa_2 = 1 + (\log X)^{-1}$.
Vérifions d'abord, que nous pouvons ramener, l'intégrale par rapport à la variable s_1 entre $\kappa_1 - iT$ et $\kappa_1 + iT$, à un terme négligeable près :

$$\Big| \int_{\kappa_1 + iT}^{\kappa_1 + i\infty} \int_{\kappa_2 - iT}^{\kappa_2 + iT} \frac{z^{s_1} X^{s_1 + s_2} Mf(s_1)}{s_2} g(s_1, s_1 + s_2, a, r) ds_2 ds_1 \Big|$$
$$\leqslant B z^{\kappa_1} X^{\kappa_1 + \kappa_2}$$
$$\times \int_{\kappa_2 - iT}^{\kappa_2 + iT} \Big(\int_{\kappa_1 + iT}^{\kappa_1 + i\infty} \exp\big(B'(1 + |s_1|)^{1 - \kappa_1 - \kappa_2}\big) \log^{B''}(2 + |s_1|) \log(2 + |t_1| + |t_2|) |Mf(s_1)| |ds_1| \Big) \frac{|ds_2|}{|s_2|}$$
$$\ll X \int_{\kappa_2 - iT}^{\kappa_2 + iT} \frac{\log(2 + |t_2|)}{|s_2|} |ds_2| \int_{\kappa_1 + iT}^{\kappa_1 + i\infty} \log^{B''}(3 + |t_1|) \log(2 + |t_1|) |Mf(s_1)| ds_1|,$$

par le lemme 11.5 et en utilisant le fait que $\kappa_1 + \kappa_2 > 1$ implique que $\exp\big(B'(1 + |s_1|)^{1 - \kappa_1 - \kappa_2}\big) \leqslant \exp(B')$. Nous continuons cette majoration en utilisant la majoration de $Mf(s)$ obtenue au lemme 7.7 :

$$X \int_{\kappa_2 - iT}^{\kappa_2 + iT} \frac{\log(2 + |t_2|)}{|s_2|} |ds_2| \int_{\kappa_1 + iT}^{\kappa_1 + i\infty} \log^{B''}(3 + |t_1|) \log(2 + |t_1|) |Mf(s_1)| ds_1|$$
$$\ll \frac{X (\log T)^2}{(\tau - 1)^2} \int_{\kappa_1 + iT}^{\kappa_1 + i\infty} \frac{\log^{B'' + 1}(3 + |t_1|)}{t_1^3} dt_1 \ll \frac{X}{(\tau - 1)^2} \frac{(\log T)^{B'' + 3}}{T^2}.$$

Reste à étudier l'intégrale double :

$$\int_{\kappa_1 - iT}^{\kappa_1 + iT} \int_{\kappa_2 - iT}^{\kappa_2 + iT} \frac{z^{s_1} X^{s_1 + s_2} Mf(s_1)}{s_2} g(s_1, s_1 + s_2, a, r) ds_2 ds_1.$$

Pour cela, appliquons le théorème des résidus sur le rectangle de sommets κ_2-iT, κ_2+iT, $\delta+iT$ et $\delta-iT$, où $\delta>1/2$, $\delta\geqslant 1-c/\log(2+|t_1|+|t_2|)-\kappa_1$ et $\delta<1-\kappa_1<\kappa_2$. D'après le corollaire 8.3, nous rencontrons un pôle en $s_2=1-s_1$. Nous avons alors, avec $s_1=\kappa_1+it_1$ où $|t_1|\leqslant T$,

$$\left(\int_{\kappa_2-iT}^{\kappa_2+iT}+\int_{\kappa_2+iT}^{\delta+iT}+\int_{\delta+iT}^{\delta-iT}+\int_{\delta-iT}^{\kappa_2-iT}\right)\frac{X^{s_2}}{s_2}g(s_1,s_1+s_2,a,r)ds_2=2i\pi\frac{X^{1-s_1}}{1-s_1}h(s_1,1,a,r),$$

soit

$$I_1+I_2+I_3+I_4=2i\pi\frac{X^{1-s_1}}{1-s_1}h(s_1,1,a,r).$$

Le corollaire 8.3 nous permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant(\kappa_2-\delta)\int_{\delta+iT}^{\kappa_2+iT}\frac{X^{\sigma_2}}{|s_2|}|g(s_1,s_1+s_2,a,r)||ds_2|\\&\ll\frac{X}{T}\log(2+|t_1|+T)\log^{B''}(2+|s_1|)\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\kappa_1-\delta}\big)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|I_3|&\leqslant\int_{\delta-iT}^{\delta+iT}\frac{X^{\sigma_2}}{|s_2|}|g(s_1,s_1+s_2,a,r)||ds_2|\\&\ll X^{\delta}\log T\log(2+|t_1|+T)\log^{B''}(2+|s_1|)\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\kappa_1-\delta}\big)\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|I_4|&\leqslant\int_{\delta+iT}^{\kappa_2+iT}\frac{X^{\sigma_2}}{|s_2|}|g(s_1,s_1+s_2,a,r)||ds_2|\\&\ll(\kappa_2-\delta)\frac{X}{T}\log(2+|t_1|+T)\log^{B''}(2+|s_1|)\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\kappa_1-\delta}\big)\Big).\end{aligned}$$

Si nous posons ensuite, pour $k=2,3,4$,

$$J_k=\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}z^{s_1}X^{s_1}Mf(s_1)I_k ds_1,$$

nous avons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}&|J_2|\leqslant\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}z^{\sigma_1}X^{\sigma_1}|Mf(s_1)||I_2||ds_1|\\&\ll(\kappa_2-\delta)\frac{z^{\kappa_1}X^{\kappa_1+1}}{T}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\log(2+|t_1|+T)\log^{B''}(2+|s_1|)\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\kappa_1-\delta}\big)\Big)|Mf(s_1)||ds_1|\\&\ll(\kappa_2-\delta)\frac{X}{T}\log T\exp\Big(\mathcal{O}\Big(\big(1+(\kappa_1^2+T^2)^{1/2}\big)^{1-\kappa_1-\delta}\Big)\Big)\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\log^{B''}(2+|s_1|)|Mf(s_1)||ds_1|\\&\ll(\kappa_2-\delta)\frac{X}{T}\log T\exp\Big(\mathcal{O}\Big(\big(1+(\kappa_1^2+T^2)^{1/2}\big)^{1-\kappa_1-\delta}\Big)\Big)(\tau-1)^{-2},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|J_3| &\leqslant \int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} z^{\sigma_1} X^{\sigma_1} |Mf(s_1)||I_3||ds_1| \\
&\ll z^{\kappa_1} X^{\kappa_1+\delta_2} \log T \int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} \log(2+|t_1|+T) \log^{B''}(2+|s_1|) \exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\kappa_1-\delta_2}\big)\Big)|Mf(s_1)||ds_1| \\
&\ll X^{\delta_2} (\log T)^2 \exp\bigg(\mathcal{O}\Big(\big(1+(\kappa_1^2+T^2)^{1/2}\big)^{1-\kappa_1-\delta}\Big)\bigg) \int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} \log^{B''}(2+|s_1|)|Mf(s_1)||ds_1| \\
&\ll X^{\delta_2} (\log T)^2 \exp\bigg(\mathcal{O}\Big(\big(1+(\kappa_1^2+T^2)^{1/2}\big)^{1-\kappa_1-\delta}\Big)\bigg)(\tau-1)^{-2}
\end{aligned}
$$

et

$$
|J_4| \ll (\kappa_2-\delta)\frac{X}{T}\log T \exp\bigg(\mathcal{O}\Big(\big(1+(\kappa_1^2+T^2)^{1/2}\big)^{1-\kappa_1-\delta}\Big)\bigg)(\tau-1)^{-2}.
$$

En choisissant $\delta = 1-\kappa_1-c/\log(2+2T)$ et T de telle sorte que $\log(2T) = c\log X/\log(2T)$, nous obtenons, avec c' une constante > 0,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}_2(X,z,a,r,f) &= \frac{X}{2i\pi}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} \frac{z^{s_1}Mf(s_1)}{1-s_1} h(s_1,1,a,r)ds_1 + \mathcal{O}\bigg(\frac{X}{(\tau-1)^2}\exp\Big(-\sqrt{c'\log X}\Big)\bigg) \\
&= \frac{X}{2i\pi}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty} \frac{z^{s_1}Mf(s_1)}{1-s_1} h(s_1,1,a,r)ds_1 + \mathcal{O}\bigg(\frac{X}{(\tau-1)^2}\exp\Big(-\sqrt{c'\log X}\Big)\bigg).
\end{aligned}
$$

Écrivons alors $h(s_1,1,a,r) = h_P(s_1,1,a,r)+h(s_1,1,a,r)-h_P(s_1,1,a,r)$, où $h_P(s_1,1,a,r)$ est défini au début de la sous-section 8.3.2. La démonstration du lemme 8.15 nous donne l'expression de $h_P(s_1,1,a,r)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty} \frac{z^{s_1}Mf(s_1)}{1-s_1} h_P(s_1,1,a,r)ds_1 \\
&= \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d|\Pi(P_0,P)} \frac{r(d)}{d}\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}\left(\frac{z}{a(d)}\right)^{s_1}\frac{Mf(s_1)}{1-s_1}ds_1 \\
&= \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}G\left(\frac{a(d)}{z}\right),
\end{aligned}
$$

d'après le lemme 11.8.
Les lemmes 8.12 et 7.7 nous permettent ensuite de majorer l'intégrale suivante :

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}\frac{z^{s_1}Mf(s_1)}{1-s_1}(h-h_P)(s_1,1,a,r)ds_1\right| \\
&\ll \frac{z^{\kappa_1}h_P(\kappa_1,1,a,|r|)}{\sqrt{P}\log P}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}\frac{(1+|s_1|)|Mf(s_1)|}{|1-s_1|}|ds_1| \\
&\ll \frac{1}{(\tau-1)^2\sqrt{P}\log P}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}\frac{|ds_1|}{|s_1|^2} \ll \frac{1}{(\tau-1)^2\sqrt{P}\log P}.
\end{aligned}
$$

□

11.3 ESTIMATION DE $\mathfrak{S}_3(X,z,a,r)$

11.3.1 Élimination de la fonction G

Lemme 11.11
Pour $z>0$, $P\geqslant 2$, $\Pi(P_0,P)$ défini par (8.5) et $\tau>1$, nous avons

$$\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}G\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)$$
$$=z\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{da(d)}+\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\Big(1-\frac{z}{a(d)}\Big)+\mathcal{O}\big(z(\tau-1)\big).$$

La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m et M.

Démonstration : Nous avons

$$\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}G\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)$$
$$=\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}G\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)+\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ 1<\frac{a(d)}{z}}}\frac{r(d)}{d}G\Big(\frac{a(d)}{z}\Big).$$

Le lemme 11.9 nous donne l'expression de $G(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$ et $x>1$:

$$\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d}G\Big(\frac{a(d)}{z}\Big)$$
$$=\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}+z\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ 1<\frac{a(d)}{z}}}\frac{r(d)}{da(d)}$$
$$+\mathcal{O}\Big(z(\tau-1)\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ 1<\frac{a(d)}{z}}}\frac{|r(d)|}{da(d)}\Big)$$
$$=\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}+z\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{da(d)}-z\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{da(d)}$$
$$+\mathcal{O}\big(z(\tau-1)h_P(1,1,a,|r|)\big)$$
$$=z\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{da(d)}+\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{\substack{d\mid\Pi(P_0,P)\\ a(d)\leqslant z}}\frac{r(d)}{d}\Big(1-\frac{z}{a(d)}\Big)+\mathcal{O}\big(z(\tau-1)\big).$$

□

11.3.2 Démonstration du théorème 11.1

Nous avons

$$\sum_{\substack{d \leqslant X \\ da(d) \leqslant Xz}} r(d) = \mathfrak{S}_2(X, z, a, r, f) + \mathcal{O}\big(\mathfrak{S}_1(X, z, \tau, a, r)\big).$$

Les théorèmes 11.6 et 11.10 nous permettent d'écrire l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) &= X\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{d \mid \Pi(P_0, P)} \frac{r(d)}{d} G\left(\frac{a(d)}{z}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\tau - 1)^2} \exp\left(-\sqrt{c' \log X}\right)\right) \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{X}{(\tau - 1)^2 \sqrt{P} \log P} + \frac{X}{\big(\log\log(1/\log \tau)\big)^{1/2}} + \frac{X \exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log \tau}\right).\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 11.11 et en posant $\tau = 1 + y^{-1}$ avec y qui tend vers l'infini, nous obtenons le théorème 11.1.

Chapitre 12

Utilisation de la formule de Mellin-Barnes

Dans ce chapitre, nous supposons que les fonctions $a(d)$ et $r(d)$ vérifient les hypothèses $H_1(a, B_0)$, $H_2(a, m, M)$, $H_3(r, 1, Q)$ et $H_4(r, R)$ introduites au début du chapitre 7.

12.1 Formule de Mellin-Barnes

Une transformée de Mellin importante est donnée par la formule de Mellin-Barnes que voici :

Théorème 12.1
Soient s et λ des nombres complexes tels que $\Re s > 0$, $\arg \lambda < \pi$ et $\lambda \neq 0$. Nous avons

$$\Gamma(s)(1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \Gamma(s+z)\Gamma(-z)\lambda^z dz,$$

pour tout réel κ vérifiant $-\Re s < \kappa < 0$.

Le cas $s = 1$ mérite d'être explicité :

Corollaire 12.2
Soit λ un nombre complexe tel que $\arg \lambda < \pi$ et $\lambda \neq 0$. Nous avons

$$\frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\lambda^{-z}}{\sin(\pi z)} dz.$$

Démonstration : Utilisons le théorème 12.1 avec $s = 1$ et $\kappa = 1/2$. Nous pouvons simplifier notre expression car

$$\frac{\Gamma(1+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(1)} = \frac{z}{-z}\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{-\pi}{\sin(\pi z)},$$

grâce à la formule des compléments. Par conséquent,

$$\frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \frac{-\pi}{\sin(\pi z)} \lambda^z dz.$$

Le changement de variables $z \mapsto -z$ nous permet de conclure. □

12.2 Énoncé du théorème et démonstration

Théorème 12.3
Il existe une constante $c>0$ telle que pour $D\geqslant 3$, $P\geqslant 2$ et $X>0$,

$$\frac{1}{D}\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}=\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}$$
$$+\mathcal{O}\bigg((X^{-1/2}+1)\bigg(\exp\Big(-\sqrt{c\log D}\Big)+\frac{1}{\sqrt{P}\log P}\bigg)\bigg),$$

où $\Pi(P_0,P)$ est défini par (8.5).
La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m et M.

Démonstration : La formule de Perron tronquée nous donne, pour $\kappa>1$,

$$\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\sum_{d\geqslant 1}\frac{r(d)}{d^{s_2}\big(1+Xa(d)\big)}\frac{D^{s_2}}{s_2}ds_2$$
$$+\mathcal{O}\bigg(\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(D/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^{\kappa}\big(1+Xa(d)\big)}\frac{D^{\kappa}du}{Tu^2}\bigg)$$

et le corollaire 12.2 permet d'obtenir une représentation intégrale du terme $1/\big(1+Xa(d)\big)$:

$$\frac{1}{1+Xa(d)}=\frac{1}{2i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\frac{\big(Xa(d)\big)^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)}ds_1.$$

Cela nous donne, avec $\kappa=1+1/\log D$,

$$\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}=-\frac{1}{4\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{X^{-s_1}D^{s_2}}{\sin(\pi s_1)s_2}\sum_{d\geqslant 1}\frac{r(d)}{a(d)^{s_1}d^{s_2}}ds_2ds_1$$
$$+\mathcal{O}\bigg(\frac{D}{T}\int_{1/T}^{\infty}\sum_{|\log(D/d)|\leqslant u}\frac{|r(d)|}{d^{\kappa}}\frac{du}{u^2}\bigg)$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{X^{-s_1}D^{s_2}}{\sin(\pi s_1)s_2}g(s_1,s_2,a,r)ds_2ds_1$$
$$+\mathcal{O}\Big(\frac{D}{T}\log D+\frac{D}{T}\log T+1\Big),$$

par le lemme 8.11.

Montrons tout d'abord, qu'à un terme d'erreur négligeable près, nous pouvons ramener l'intégrale par rapport à la variable s_1 entre $1/2-iT$ et $1/2+iT$:

$$\bigg|\int_{1/2+iT}^{1/2+i\infty}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{X^{-s_1}D^{s_2}}{\sin(\pi s_1)s_2}g(s_1,s_2,a,r)ds_2ds_1\bigg|\ll X^{-1/2}D\log^2 T\int_{1/2+iT}^{1/2+i\infty}\frac{\log^A(2+|s_1|)}{|\sin(\pi s_1)|}|ds_1|$$
$$\ll X^{-1/2}D\log^2 Te^{-\pi T/2}.$$

La fonction $h(s_1, s_2, a, r) = g(s_1, s_2, a, r)\zeta(s_2)^{-1}$ est analytique pour $\sigma_2 > 1/2$. Par conséquent, pour $\sigma_2 > 1/2$, la fonction g est analytique sauf un pôle d'ordre 1 en $s_2 = 1$ qui provient de la fonction ζ. En appliquant le théorème des résidus sur le rectangle de sommets $\kappa - iT$, $\kappa + iT$, $\delta + iT$ et $\delta - iT$ où $\delta > 1/2$, $\delta \geqslant 1 - c/\log|t_2|$ et $\delta < 1 < \kappa$, nous avons alors, avec $s_1 = 1/2 + it_1$ où $|t_1| \leqslant T$,

$$\left(\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} + \int_{\kappa+it}^{\delta+iT} + \int_{\delta+iT}^{\delta-iT} + \int_{\delta-iT}^{\kappa-iT}\right)\frac{D^{s_2}}{s_2}g(s_1, s_2, a, r)ds_2 = 2i\pi Dh(s_1, 1, a, r)$$

soit

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2i\pi Dh(s_1, 1, a, r).$$

Le corollaire 8.3 nous permet de majorer les intégrales I_2, I_3 et I_4 :

$$\begin{aligned}|I_2| &\leqslant \int_{\delta+iT}^{\kappa+iT}\frac{D^{\sigma_2}}{|s_2|}|g(s_1, s_2, a, r)||ds_2|\\ &\ll \frac{D}{T}\log T\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\delta}\big)\Big)\log^A(2+|s_1|),\end{aligned}$$

$$|I_3| \leqslant \int_{\delta-iT}^{\delta+iT}\frac{D^{\sigma_2}|g(s_1, s_2, a, r)|}{|s_2|}|ds_2| \ll D^{\delta}(\log T)^2\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\delta}\big)\Big)\log^A(2+|s_1|)$$

et

$$|I_4| \ll \frac{D}{T}\log T\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\delta}\big)\Big)\log^A(2+|s_1|).$$

Si nous posons ensuite, pour $k = 2, 3, 4$,

$$J_k = \int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)}I_k ds_1,$$

nous avons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}|J_2| &\leqslant X^{-1/2}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}|I_2|\frac{|ds_1|}{|\sin(\pi s_1)|}\\ &\ll \frac{X^{-1/2}D}{T}\log T\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\exp\Big(\mathcal{O}\big((1+|s_1|)^{1-\delta}\big)\Big)\frac{\log^A(2+|s_1|)}{|\sin(\pi s_1)|}|ds_1|\\ &\ll \frac{X^{-1/2}D}{T}\log T\exp\Big(\mathcal{O}\Big(\big(1+(1/4+T^2)^{1/2}\big)^{1-\delta}\Big)\Big)\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\frac{\log^A(2+|s_1|)}{|\sin(\pi s_1)|}|ds_1|\\ &\ll \frac{X^{-1/2}D}{T}\log T\exp\Big(\mathcal{O}\Big(\big(1+(1/4+T^2)^{1/2}\big)^{1-\delta}\Big)\Big),\end{aligned}$$

$$|J_3| \leqslant X^{-1/2}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}|I_3|\frac{|ds_1|}{|\sin(\pi s_1)|} \ll X^{-1/2}D^{\delta}\log^2 T\exp\Big(\mathcal{O}\Big(\big(1+(1/4+T^2)^{1/2}\big)^{1-\delta}\Big)\Big)$$

et

$$|J_4| \leqslant X^{-1/2} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} |I_4| \frac{|ds_1|}{|\sin(\pi s_1)|} \ll \frac{X^{-1/2} D}{T} \log T \exp\Big(\mathcal{O}\Big(\big(1+(1/4+T^2)^{1/2}\big)^{1-\delta}\Big)\Big).$$

En choisissant $\delta = 1 - c/\log T$, nous obtenons alors

$$\sum_{d \leqslant D} \frac{r(d)}{1+Xa(d)} = \frac{D}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} h(s_1, 1, a, r) ds_1$$
$$+ \mathcal{O}\Big(X^{-1/2} D \log^2 T e^{-\pi T/2} + \frac{D}{T} \log D + \frac{D}{T} \log T + 1 + \frac{X^{-1/2} D}{T} \log T + X^{-1/2} D^{\delta} \log^2 T\Big).$$

En prenant T de telle sorte que

$$\log T = \frac{\log D}{c \log T},$$

nous avons

$$\sum_{d \leqslant D} \frac{r(d)}{1+Xa(d)} = \frac{D}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} h(s_1, 1, a, r) ds_1 + \mathcal{O}\Big((X^{-1/2}+1) D \exp\big(-\sqrt{c \log D}\big)\Big).$$

Nous écrivons

$$\frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} h(s_1, 1, a, r) ds_1$$
$$= \frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} h_P(s_1, 1, a, r) ds_1 + \frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} (h - h_P)(s_1, 1, a, r) ds_1.$$

Le lemme 8.15 et le corollaire 12.2 nous permettent d'estimer la première intégrale :

$$\frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} h_P(s_1, 1, a, r) ds_1 = \prod_{p \leqslant P} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum_{d | \Pi(P_0, P)} \frac{r(d)}{d} \frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\big(Xa(d)\big)^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} ds_1$$
$$= \prod_{p \leqslant P} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum_{d | \Pi(P_0, P)} \frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}.$$

Et le lemme 8.12 nous permet d'estimer la deuxième intégrale :

$$\left| \frac{1}{2i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{X^{-s_1}}{\sin(\pi s_1)} (h - h_P)(s_1, 1, a, r) ds_1 \right| \ll \frac{X^{-1/2} h_P(1/2, 1, a, |r|)}{\sqrt{P} \log P} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{1+|s_1|}{|\sin(\pi s_1)|} |ds_1|$$
$$\ll \frac{X^{-1/2}}{\sqrt{P} \log P}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)} = D\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d(1+Xa(d))} + \mathcal{O}\Bigg((X^{-1/2}+1)D\bigg(\exp\Big(-\sqrt{c\log D}\Big)+\frac{1}{\sqrt{P}\log P}\bigg)\Bigg).$$

□

Corollaire 12.4
Les deux limites

$$\lim_{D\to\infty}\frac{1}{D}\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)} \quad \textit{et} \quad \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}$$

existent et sont égales.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Il existe $D_0(\epsilon) \geqslant 3$ et $\tilde{P}_0(\epsilon) \geqslant 2$ tels que pour tout réel D, $D \geqslant D_0$, et pour tout réel P, $P \geqslant \tilde{P}_0$,

$$(X^{-1/2}+1)\bigg(\exp\Big(-\sqrt{c\log D}\Big)+\frac{1}{\sqrt{P}\log P}\bigg) \leqslant \epsilon.$$

Prenons alors $P = \tilde{P}_0(\epsilon)$. Si D_1 et D_2 sont deux réels supérieurs à D_0, nous avons

$$\left|\frac{1}{D_1}\sum_{d\leqslant D_1}\frac{r(d)}{1+Xa(d)} - \frac{1}{D_2}\sum_{d\leqslant D_2}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}\right| \leqslant 2\epsilon.$$

Cette égalité nous permet d'affirmer que la suite

$$\frac{1}{D}\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}$$

est de Cauchy. De la même façon, nous montrons que la suite

$$\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}$$

est de Cauchy. Par conséquent, les deux limites existent. En faisant tendre D et P vers l'infini dans l'égalité du théorème 12.3, nous obtenons l'égalité des deux limites. □

Corollaire 12.5
Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $D \geqslant 3$ et $X > 0$,

$$\frac{1}{D}\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)} = \lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{d|\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)} + \mathcal{O}\bigg((X^{-1/2}+1)\exp\Big(-\sqrt{c\log D}\Big)\bigg),$$

où $\Pi(P_0, P)$ est défini par (8.5).
La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m et M.

Démonstration : Il suffit de faire tendre P vers l'infini dans l'égalité du théorème 12.3. □

12.3 Une sommation par parties

Par sommation par parties, nous pouvons alors estimer la somme suivante :

$$\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}.$$

Proposition 12.6
Il existe une constante $c>0$ telle que pour $D\geqslant 3$ et $X>0$,

$$\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}=(\log D+1)\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}+C$$
$$+\mathcal{O}\Big((X^{-1/2}+1)\sqrt{\log D}e^{-\sqrt{c\log D}}\Big)$$

avec

$$C=\int_1^\infty\left(\sum_{d\leqslant t}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}-t\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}\right)\frac{dt}{t^2}$$

et $\Pi(P_0,P)$ est défini par (8.5).
La constante intervenant dans cette estimation dépend de Q, B_0, R, m et M.

Démonstration : Posons pour cela

$$C_1=\lim_{P\to\infty}\prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{d\mid\Pi(P_0,P)}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}.$$

Nous écrivons :

$$\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)}=\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}\left(\int_d^D\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{D}\right)$$
$$=\int_1^D\left(\sum_{d\leqslant t}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}\right)\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{D}\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}$$
$$=\int_1^D\left(\sum_{d\leqslant t}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}-C_1t\right)\frac{dt}{t^2}+C_1\int_1^D\frac{dt}{t}+\frac{1}{D}\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}$$
$$=\int_1^\infty\left(\sum_{d\leqslant t}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}-C_1t\right)\frac{dt}{t^2}-\int_D^\infty\left(\sum_{d\leqslant t}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}-C_1t\right)\frac{dt}{t^2}+(\log D+1)C_1$$
$$+\mathcal{O}\Big((X^{-1/2}+1)\exp\big(-\sqrt{c\log D}\big)\Big)$$
$$=(\log D+1)C_1+\int_1^\infty\left(\sum_{d\leqslant t}\frac{r(d)}{1+Xa(d)}-C_1t\right)\frac{dt}{t^2}+\mathcal{O}\left((X^{-1/2}+1)\int_D^\infty\frac{e^{-\sqrt{c\log t}}}{t}dt\right)$$
$$+\mathcal{O}\Big((X^{-1/2}+1)\exp\big(-\sqrt{c\log D}\big)\Big).$$

En évaluant l'intégrale $\displaystyle\int_D^\infty \frac{e^{-\sqrt{c\log t}}}{t}dt$, nous obtenons que

$$\sum_{d\leqslant D}\frac{r(d)}{d\big(1+Xa(d)\big)} = (\log D+1)C_1 + \int_1^\infty\left(\sum_{d\leqslant t}\frac{r(d)}{1+Xa(d)} - C_1 t\right)\frac{dt}{t^2} + \mathcal{O}\Big((X^{-1/2}+1)\sqrt{\log D}e^{-\sqrt{c\log D}}\Big).$$

$\square$

Remarquons enfin que des quantités similaires aux sommes étudiées dans ce chapitre apparaissent au niveau du crible pondéré. Nous pouvons par exemple citer Riesel et Vaughan [RV83].

Sixième partie

Fonction de concentration

CHAPITRE 13

FONCTION DE CONCENTRATION

13.1 DÉFINITION ET PREMIERS RÉSULTATS

La fonction de concentration Q_F d'une fonction de répartition F est définie sur $\mathbb{R}^+$ par la formule

$$Q_F(\ell) = \sup_{z\in\mathbb{R}} \big(F(z+l) - F(z)\big).$$

Nous définissons la concentration $Q(F) = Q_F(1)$ et observons que, pour tout $\ell > 0$, nous avons $Q_F(\ell) = Q(F_\ell)$, avec $F_\ell(z) = F(\ell z)$. La fonction F est continue si, et seulement si, $Q_F(\ell) \to 0$ lorsque $\ell \to 0^+$. La notion de fonction de concentration est particulièrement bien adaptée à l'étude des convolutions de fonctions de répartition, et nous avons en effet

$$Q(F * G) \leqslant Q(F),$$

pour tout couple (F, G) de fonctions de répartition.
Une inégalité plus profonde entre la concentration d'un produit de convolution et celle des facteurs a été donnée par Kolmogorov [Kol56] et [Kol58] puis affinée par Rogozin [Rog61] :

Théorème 13.1 (Inégalité de Kolmogorov-Rogozin)
Soient $\{F_j\}_{j=1}^n$ une suite finie de fonctions de répartition et $F := F_1 * \ldots * F_n$. Nous avons pour $\ell > 0$

$$Q_F(\ell) \leqslant C \Bigg/ \sqrt{1 + \sum_{j=1}^n \big(1 - Q_{F_j}(\ell)\big)},$$

où C est une constante absolue.

Certains mathématiciens se sont intéressés à la concentration de fonctions additives. Pour une fonction f arithmétique additive, considérons

$$R(u, v, x) = x^{-1}|\{n : n \leqslant x, u \leqslant f(n) < v\}|$$

et

$$Q_h(x) = \sup_u R(u, u+h, x).$$

En 1946, Erdös [Erd46a] a démontré les résultats suivants :

Théorème 13.2
$Q_1(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$ si et seulement si il existe un nombre λ tel que

$$\sum_p \frac{\min\left(1, \left(f(p) - \lambda \log p\right)^2\right)}{p} < \infty.$$

Théorème 13.3
$Q_h(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$ et $h \to 0$ si et seulement si

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p} < \infty.$$

Ce dernier théorème a pour conséquence le résultat suivant :

Théorème 13.4
La suite des solutions de $f(n) = u$ a une densité asymptotique nulle, pour tout u, si et seulement si $\sum_{f(p)\neq 0} 1/p < \infty$.

Plus de 20 ans plus tard, Halàsz [Hal75] donne une version quantitative de ce dernier théorème :

Théorème 13.5
Nous avons

$$|\{n : n \leqslant x, f(n) = u\}| \ll \frac{x}{\sqrt{E(x)}}, \tag{13.1}$$

où

$$E(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f(p)\neq 0}} \frac{1}{p}.$$

La constante impliquée est absolue.

En modifiant quelque peu la méthode d'Halàsz, Ruzsa [Ruz80] démontre, en 1980, le théorème suivant :

Théorème 13.6

$$Q_1(x) \ll \frac{1}{\sqrt{U(x)}},$$

où

$$U(x) = \min_\lambda U(x, \lambda),$$

$$U(x, \lambda) = \sum_{p\leqslant x} \frac{\min\left(1, \left(f(p) - \lambda \log p\right)^2\right)}{p}.$$

Il améliore [Ruz80] ensuite cette majoration de la manière suivante :

Théorème 13.7

$$Q_1(x) \ll \frac{1}{\sqrt{W(x)}},$$

où

$$W(x) = \min_{\lambda} \big(\lambda^2 + U(x,\lambda)\big).$$

13.2 Fonction de concentration associée à $r(d)$

Nous étendons ici cette notion de concentration en considérant

$$Q_h(r,X) = \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{X}\Bigg|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ u\leqslant \log a(d)\leqslant u+h}} r(d)\Bigg|,$$

pour une fonction multiplicative strictement positive $a(d)$ et une fonction multiplicative $r(d)$ vérifiant les hypothèses $H_1(a,B_0)$, $H_2(a,m,M)$, $H_3(r,\pm 1,Q)$, $H_4(r,R)$ et $H_5(a,R,Q,\theta)$ introduites au début du chapitre 7, c'est-à-dire que nous possédons des hypothèses plus restreintes sur nos fonctions mais nous introduisons un poids multiplicatif.
Nous obtenons alors un résultat analogue à celui du théorème 13.3 :

Théorème 13.8
$Q_h(r,X) \to 0$ lorsque $X \to \infty$ et $h \to 0$.

Démonstration : Le théorème 8.8 nous dit que

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ \log z\leqslant \log a(d)\leqslant \log z+\log\tau}} |r(d)| \ll \frac{1}{\big(\log\log(1/\log\tau)\big)^{1/2}} + \frac{\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{\log \tau},$$

soit en choisissant $h = \log\tau > 0$,

$$\sup_{z>0}\Bigg[\frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ \log z\leqslant \log a(d)\leqslant \log z+h}} |r(d)|\Bigg] \ll \frac{1}{\big(\log\log(1/h)\big)^{1/2}} + \frac{\exp\big(-B\sqrt{\log X}\big)}{h}.$$

Il suffit alors de laisser tendre X vers l'infini et h vers 0. □

Ce même théorème nous permet également d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 13.9
Il existe une constante $B = B(R,m,M) > 0$ telle que pour $X \geqslant 3$,

$$Q_{\exp(-B\sqrt{\log X})}(r,X) \ll \frac{1}{(\log\log X)^{1/2}}.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Il suffit de choisir $\log\tau = \exp\Big(-B\sqrt{\log X}/2\Big)$ dans la majoration du théorème 8.8. □

Nous en déduisons alors l'analogue du théorème 13.5 d'Halàsz :

Corollaire 13.10
Pour $X \geqslant 3$ et $z > 0$, nous avons

$$\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)=z}} r(d) \ll \frac{X}{\sqrt{\log\log X}}.$$

La constante intervenant dans cette majoration dépend de Q, B_0, R, m, M et θ.

Démonstration : Pour $X \geqslant 3$ et $z > 0$, nous avons

$$\frac{1}{X}\Bigg|\sum_{\substack{d\leqslant X\\ a(d)=z}} r(d)\Bigg| \leqslant \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ \log a(d)=u}} |r(d)| \leqslant \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{X}\sum_{\substack{d\leqslant X\\ u\leqslant \log a(d)\leqslant u+e^{-B\sqrt{\log X}}}} |r(d)| \ll \frac{1}{(\log\log X)^{1/2}},$$

d'après le théorème précédent. □

Remarque 13.11
En gardant les notations du théorème 13.5, Halàsz affirme dans [Hal75] que la borne de l'inégalité (13.1) est atteinte si $f(p) = 0$ ou 1 et $\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)=1}} 1/p = E(x)$. Ceci nous assure l'optimalité du résultat du corollaire précédent et de l'inégalité du produit oscillant.

NOTATIONS

La lettre p désigne un nombre premier $\geqslant 2$.

Pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re s$ représente la partie réelle de s et $\Im s$ représente la partie imaginaire de s.

$\varphi(d)$ représente la fonction d'Euler, c'est-à-dire le nombre d'entiers entre 1 et d qui sont premiers à d.

$\sigma(d)$ représente la somme des diviseurs positifs de l'entier d.

$\omega(d)$ est le nombre de diviseurs premiers (sans multiplicité) de d.

$\mu(d)$ est la fonction de Möbius. Nous avons

$$\mu(1) = 1,$$

$$\mu(d) = (-1)^k \text{ si } d \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts}$$

et

$$\mu(d) = 0 \text{ si } d \text{ contient un facteur carré .}$$

$\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs à x.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sgn}(x)$ désigne le signe de x.

Pour $s \in \mathbb{C}$, $\zeta(s)$ représente la fonction zêta de Riemann. Nous avons

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s} = \prod_{p \geqslant 2} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression $(1-x)^+$ vaut $1-x$ si $x \leqslant 1$ et 0 sinon.

La notation de Landau $f = \mathcal{O}\big(g\big)$ signifie qu'il existe une constante C telle que $|f| \leqslant Cg$.

La notation $f = \mathcal{O}^*\big(g\big)$ signifie que $|f| \leqslant g$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un $\mathcal{O}$ mais avec une constante implicite égale à 1.

Nous utilisons aussi la notation de Vinogradov $f \ll g$ qui signifie $f = \mathcal{O}\big(g\big)$. Ces deux notations sont donc pour nous équivalentes (ce n'est pas toujours le cas en général car les notations de Landau font appel à la notion de voisinage d'un point ; en ce sens, il est correct de dire que la notation de Vinogradov correspond à une version uniforme de la notation de Landau).

La notation $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ signifie que $\liminf\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{f(n)}{g(n)} \right| > 0$.

Pour a et b deux entiers positifs, la notation $(a, b) = 1$ signifie que a et b sont premiers entre eux.

$p^\nu || a$ signifie : $p^\nu | a$ et $p^{\nu+1} \nmid a$ où $p|a$ signifie p divise a.

Pour n un entier et y un réel, la notation $n|\pi_y$ signifie que les diviseurs premiers de n sont tous inférieurs ou égaux à y.

Pour n un entier et y un réel, la notation $(n, \pi_y) = 1$ signifie que tous les diviseurs premiers de n sont plus grands que y.

Pour k, m et n des entiers, la notation $m \equiv n[k]$ signifie que k divise $m - n$.

Bibliographie

[Apo76] Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer, 1976.

[Bal98] Michel Balazard, *Une remarque sur la fonction d'Euler*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Second Series **47** (1998), no. 2, 325–330.

[Bat72] Paul T. Bateman, *The distribution of values of the Euler function*, Acta Arithmetica **21** (1972), 329–345.

[BEL07] Gautami Bhowmik, Driss Essouabri, and Ben Lichtin, *Meromorphic continuation of multivariable Euler products*, Forum Mathematicum **19** (2007), no. 6, 1111–1139.

[BS90] Michel Balazard and Abdelhakim Smati, *Elementary proof of a theorem of Bateman*, Progress in Mathematics **85** (1990), 41–46.

[BT98] Michel Balazard and Gérald Tenenbaum, *Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler*, Compositio Mathematica **110** (1998), no. 2, 239–250.

[Dah52] Germund Dahlquist, *On the analytic continuation of Eulerian products*, Arkiv för Matematik **1** (1952), 533–554.

[Dav33] Harold Davenport, *Über numeri abundantes*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1933), no. 26-29, 830–837.

[Del98] Marc Deléglise, *Bounds for the density of abundant integers*, Experimental Mathematics **7** (1998), no. 2, 137–143.

[Dre70] Robert E. Dressler, *A density which counts multiplicity*, Pacific Journal of Mathematics **34** (1970), 371–378.

[Ell79] Peter D. T. A. Elliott, *Probabilistic number theory. vol. 1*, Springer, 1979.

[Erd45] Paul Erdös, *Some remarks on Euler's ϕ-function and some related problems*, Bulletin of the American Mathematical Society **51** (1945), 540–544.

[Erd46a] ______, *On the distribution function of additive functions*, Annals of Mathematics. Second Series **47** (1946), 1–20.

[Erd46b] ______, *Some remarks about additive and multiplicative functions*, Bulletin of the American Mathematical Society **52** (1946), 527–537.

[EW39] Paul Erdös and Aurel Wintner, *Additive arithmetical functions and statistical independence*, American Journal of Mathematics **61** (1939), no. 3, 713–721.

[Fai67] A. S. Fainleib, *Distribution of values of Euler's function*, Matematicheskie Zametki **1** (1967), 645–652.

[Fai68] ———, *A generalization of Esseen's inequality and its application in probabilistic number theory*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya **32** (1968), 859–879.

[FI96] John Friedlander and Henryk Iwaniec, *Bombieri's sieve*, Analytic number theory. Vol. 1. Proceedings of the International Conference in honor of Heini Halberstam, Progress in Mathematics, vol. 138, Bruce C. Berndt, Harold G. Diamond and Adolf J. Hildebrand, Boston, 1996, pp. 411–430.

[GPY07] Daniel Alan Goldston, János Pintz, and Cem Yalçin Yildirim, *The path to recent progress on small gaps between primes*, Clay Mathematics Proceedings **7** (2007), 129–139.

[Hal75] Gàbor Halàsz, *On the distribution of additive arithmetic functions*, Acta Arithmetica **27** (1975), 143–152.

[Kol56] Andrei Nikolaievich Kolmogorov, *Deux théorèmes asymptotiques uniformes pour des sommes des variables aléatoires*, Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya **1** (1956), 426–436.

[Kol58] ———, *Sur les propriétés des fonctions de concentrations de M. P. Lévy*, Annales de l'Institut Henri Poincaré **16** (1958), 27–34.

[Mig74] Maurice Mignotte, *Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres*, Journées Arithmétiques (Grenoble, 1973), Bull. Soc. Math. France, Mem. 37, Soc. Math. France, Paris (1974), 121–132.

[Mon78] Hugh L. Montgomery, *A note on the mean values of multiplicative functions*, Institut Mittag-Leffler (1978), Report no. 17.

[Que80] Hervé Queffélec, *Propriétés presques sûres et quasi-sûres des séries de Dirichlet et des produits d'Euler*, Canadian Journal of Mathematics **32** (1980), no. 3, 531–558.

[Ram07] Olivier Ramaré, *Eigenvalues in the large sieve inequality*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici **37** (2007), 399–427.

[Rit30] Joseph Fels Ritt, *Representation of analytic functions as infinite products*, Mathematische Zeitschrift **32** (1930), no. 1, 1–3.

[Rog61] B. A. Rogozin, *An estimate of the concentration functions*, Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya **6** (1961), 103–105.

[RS62] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Journal of Mathematics **6** (1962), 64–94.

[RS76] ———, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$*, Mathematics of Computation **30** (1976), no. 134, 337–360.

[RSP08] Olivier Ramaré and Jan-Christoph Schlage-Puchta, *Improving on the Brun-Titchmarsh theorem*, Acta Arithmetica **131** (2008), no. 4, 351–366.

[Ruz80] Imre Z. Ruzsa, *On the concentration of additive functions*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **36** (1980), no. 3-4, 215–232.

[RV83] Hans Riesel and Robert C. Vaughan, *On sums of primes*, Arkiv för Matematik **21** (1983), no. 1, 46–74.

[Sch28] Isac Schoenberg, *Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1*, Mathematische Zeitschrift **28** (1928), no. 1, 171–199.

[Sel91] Atle Selberg, *Collected papers. vol.2*, Springer, 1991.

[Shi80] Peter Shiu, *A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **313** (1980), 161–170.

[Sta97] Eugenijus Stankus, *On the function* $\sigma_\delta(n)$, Lithuanian Mathematical Journal **37** (1997), no. 1, 74–80.

[Ten95] Gérald Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge University Press, 1995.

[Tja66] M. M. Tjan, *On the question of the distribution of values of the Euler function* $\varphi(n)$, Litovsk. Mat. Sb. **6** (1966), 105–119.

[Tou06] Vincent Toulmonde, *Module de continuité de la fonction de répartition de* $\phi(n)/n$, Acta Arithmetica **121** (2006), no. 4, 367–402.

[TT06] Gérald Tenenbaum and Vincent Toulmonde, *Sur le comportement local de la répartition de l'indicatrice d'Euler*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici **35** (2006), 321–338.

[VC08] Oswaldo José Velásquez Castanón, *Sur la répartition des zéros de certaines fonctions méromorphes liées à la fonction zêta de Riemann*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, France, 2008.

[Wei07] Andreas Weingartner, *The distribution functions of* $\sigma(n)/n$ *and* $n/\phi(n)$, Proceedings of the American Mathematical Society **135** (2007), no. 9, 2677–2681.

Résumé

Nous traitons deux problèmes liés aux séries de Dirichlet. Nous étudions d'abord le prolongement analytique d'une certaine classe de séries de Dirichlet à deux variables :

$$g(s_1, s_2, a, r) = \sum_{d \geqslant 1} \frac{r(d)}{a(d)^{s_1} d^{s_2}},$$

où $a(d)$ est une fonction multiplicative strictement positive et $r(d)$ est une fonction multiplicative. Nous démontrons, sous certaines hypothèses, un théorème général qui permet d'approcher cette série de Dirichlet par une série connue, modulo une autre série pour laquelle nous obtenons des majorations très précises.

Nous utilisons ensuite cet outil pour obtenir des résultats quantitatifs sur la distribution des valeurs de fonctions arithmétiques. Sous certaines hypothèses sur les fonctions $a(d)$ et $r(d)$, nous déterminons

$$\lim_{X \mapsto \infty} \frac{1}{X} \sum_{\substack{d \leqslant X \\ a(d) \leqslant z}} r(d) \quad (0 < z \leqslant X)$$

et mesurons la vitesse de convergence vers la loi limite. La classe de fonctions $a(d)$ est beaucoup plus large que celle considérée jusqu'à maintenant. L'introduction de $r(d)$ semble nouvelle.

Mots clés : séries de Dirichlet, produits eulériens, fonctions multiplicatives, prolongement analytique, distribution limite, transformées de Mellin et de Fourier, fonction Zêta de Riemann, fonction de concentration, crible pondéré.

Classification Mathématique primaire : 11M41, 11N25, 11N37, 11N60, 11N64, 30B50, 32A99

Classification Mathématique secondaire : 11K65, 11N35, 11N36