

N° ORDRE : 40293



École doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France

Université Lille 1 Sciences et Technologies

# COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES DANS DES GAZ DE LORENTZ INÉLASTIQUES

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19 juillet 2010

pour l'obtention du

**Doctorat de l'université Lille 1**

(spécialité: mathématiques appliquées)

par

Bénédicte AGUER

### Composition du jury

|                          |            |                         |
|--------------------------|------------|-------------------------|
| Nils BERGLUND            | Rapporteur | Université d'Orléans    |
| Stephan DE BIÈVRE        | Directeur  | Université Lille 1      |
| François GOLSE           | Examineur  | École Polytechnique     |
| Pauline LAFITTE-GODILLON | Directeur  | Université Lille 1      |
| Roberto LIVI             | Rapporteur | Université de Florence  |
| Stefano OLLA             | Examineur  | Université Paris 9      |
| Mathias ROUSSET          | Examineur  | INRIA Lille Nord-Europe |

Mis en page avec la classe thloria.

## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la dynamique hamiltonienne asymptotique de particules libres dans des gaz de Lorentz inélastiques, milieux possédant un nombre infini de degrés de liberté distribués dans l'espace de façon périodique ou aléatoire. On distingue deux types de comportement asymptotique, selon que le système soit dissipatif ou non.

Dans le cas non-dissipatif, l'action des particules sur les degrés de liberté du gaz est négligée. Nous déterminons, numériquement et analytiquement, le comportement asymptotique en temps de l'énergie cinétique moyenne  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  et de la variance du déplacement  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  de particules rapides. L'analyse repose sur l'approximation du mouvement des particules par une marche aléatoire dont un pas correspond à une collision de la particule avec une particule du gaz de Lorentz. Nous montrons que les comportements sont différents suivant que la force exercée par le diffuseur dérive d'un potentiel ou non. En effet, dans le premier cas, nous montrons  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/5}$ , alors que  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/3}$  dans le deuxième. Ces résultats se démontrent par des arguments probabilistes, utilisant des théorèmes de convergence de chaînes de Markov et les processus de Bessel. Nous obtenons également le comportement asymptotique  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  dans ces différents cas.

Dans les modèles dissipatifs, l'évolution des degrés de liberté du gaz de Lorentz est affectée par la particule et le système dynamique considéré est composé de la particule et du milieu. Il possède donc un nombre infini de degrés de liberté. Nous démontrons, sur un espace des phases approprié, l'existence globale des solutions et nous construisons une mesure de Gibbs décrivant l'équilibre thermodynamique du système. Ces constructions nous permettent d'établir rigoureusement la relation d'Einstein à temps fini en présence d'une force constante extérieure.

**Mots-clés:** Mécanique statistique hors équilibre, transport, processus stochastiques, systèmes dynamiques.

## Abstract

We study the Hamiltonian dynamics of free particles in inelastic Lorentz gases, which are environments with an infinite number of degrees of freedom randomly or periodically distributed in space. We exhibit two different asymptotic behaviours, depending on if the particles undergo dissipation or not.

The model is called non-dissipative when the action of the particles on the degrees of freedom of the gas is neglected. We determine, numerically and analytically, the asymptotic behaviour in time of the averaged kinetic energy  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  and the mean squared displacement  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  of fast particles. The analysis is based on the approximation of the particles' dynamics by a random walk where one step corresponds to a unique collision of the particle with a particle of the Lorentz gas. We find different asymptotics, depending on whether the force exerted by the scatterer is or not a gradient field. When it is, we show  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/5}$ , whereas  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/3}$  otherwise. These results are proved by probabilistic arguments, bringing into play convergence theorems of Markov chains and Bessel processes. We also derive the asymptotic behavior of  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  in these different cases.

In dissipative models, the evolution of the degrees of freedom of the Lorentz gas is affected by the particle and the dynamical system considered is constituted of the particle and the environment. It then has an infinite number of degrees of freedom. We prove, on an appropriate phase space, the global existence of solutions and build a Gibbs measure describing the system's thermodynamic equilibrium. This enables us to prove the Einstein relation at finite time in the presence of an exterior force.

**Keywords:** Non-equilibrium statistical mechanics, transport, stochastic processes, dynamical systems.

## Remerciements

Avant tout, un grand merci à Stephan pour avoir accepté d'être mon « guide » dans cet univers impitoyable de la recherche. Merci pour sa disponibilité, toutes ses heures passées, ses encouragements et sa bonne humeur rendant tout bien plus agréable.

Merci aussi à Pauline, pour son soutien dans les épreuves et son don inégalable à transformer une maille hexagonale en véritable oeuvre d'art moderne.

Merci encore à Mathias, pour son amitié, sa patience (malgré les mêmes questions, encore et toujours) et son aide, au delà de toute espérance.

Je tiens de plus à remercier Nils BERGLUND et Roberto LIVI pour avoir accepté de rapporter ma thèse et pour l'avoir lue avec attention, ainsi que François GOLSE et Stefano OLLA pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je suis également reconnaissante envers le laboratoire Paul PAINLEVÉ et le centre INRIA Lille-Nord Europe, qui ont réglé tous les aspects matériels pendant ces trois ans. Merci aussi aux membres des équipes AN-EDP et SIMPAF pour leur accueil.

Je veux exprimer toute ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont apporté une aide ponctuelle mais décisive : à Jean-Marc BOUCLET, qui m'a aidée à dépoussiérer mes lointains souvenirs d'interpolation ; à Jean-François COULOMBEL, pour ses réponses toujours claires à mes multiples questions d'analyse ; à Thierry GOUDON, qui m'a débroussaillé un chemin dans la jungle des équations cinétiques ; à Paul PARRIS, for being so patient with my awful accent and for his beautiful graphs ; et à Thomas SIMON, pour son aide précieuse sur l'existence des processus de Bessel, démonstration tellement classique que, comme pour les fricadelles, « tout l'monde y sait c'qu'y a d'dans mais personne y l'dit », visiblement...

J'ai aussi une pensée toute spéciale pour tous ceux qui ont guidé mes pas vers ou dans l'enseignement. Je pense bien sûr à Christophe BESSE, tuteur idéal, Guoting CHEN et Yves ROLLAND, mais aussi à tous les professeurs de mathématiques qui au fil des années m'ont donné le goût d'enseigner les mathématiques : Joël ROSSIGNOL, Christophe HURIER, Jean VOEDTS, Jean-Marc DEGOND et l'équipe de Noyon ; et à mon père.

Un gigantesque, un énormissime, un pachidermique merci aux amis, grâce à qui j'ai pu garder un semblant de santé d'esprit.

À ceux du quotidien, ces trois dernières années. À mes plus que patients cobureaux : à Chang, 为中文课致谢<sup>1</sup>, à Martin et ses partages musicaux au ukulele ou sur deezer (« Coco, t'as le look ! ») et à Nicolas et son calme légendaire. Aux tour à tour vénérés chefs des doctorants : à Eric et Oscar, camarades lyonnais, et à Youcef, qui m'a accueillie à mes tous débuts. À Alexis et ses multiples demandes ; à Hern Doktor Antoine, partenaire de badminton artistique ; à Benoit et ses conseils toujours stratégiques et avisés ; à Emile, notre ingénieur associé ; à Ingrid, spécialiste es air-batterie (« mais c'est la mort qui t'a assassinée, Marcia ! ») et courageuse aventurière du muséum d'histoire naturelle by night ; à Léon et ses fameux « cool cool » ; à Raphaël, rescapé parisien ; à Shuyan et son éternelle bonne humeur ; à Vincent et sa p'tite famille. Une spéciale dédicace à Benjamin pour ses conseils de vieux sage, sa complicité et sa relecture patiente de mon pavé : Heureuse vie à Rennes, mon grand ! Je tiens aussi, comme promis, à non-remercier Guillaume qui applique le proverbe « Qui aime bien châtie bien » à la lettre et aime énormément.

---

<sup>1</sup>Merci pour les cours de chinois !

Et puis une pensée reconnaissante à Joëlle, du café Culture, qui fait défiler les grands cafés et les thés pêche-mangue comme personne.

À mes p'tits lyonnais. À Isa, Magali et Val', bien sûr, qui ont si bien su me supporter rue Pasteur ou allée d'Italie, mais aussi à Ameline, ma marraine préférée, à Benji et sa musique, toujours, à Gaël et son amour pour Porcinet et à Thomas, baroudeur londonien. Je pense aussi (eudp, bien sûr) à mes compagnons de route : Anne-Laure et Frédérick, Anne-Sandrine, Aurore, Bertrand, Claire, Elisabeth et Patrick, Florence, François, Guillaume, Jean-Etienne, Jérémie, Marie-Noëlle,...

Et enfin, aux vieux de la vieille. À mes deux irréductibles : Anne Cé (et Fred!) et Cricri ; vous allez pas vous débarasser de moi comme ça, les filles ! À Carine, toujours là malgré le temps qui passe. À toute la troupe des rescapés de Faidherbe : Beber et Elodie, Cubi, Claire et Joloss (merci pour les vacances, les jeunes!), David et Sabrina, Major et Majorette, Nico et Magali, et Roumy. Et puis à Anne, pour son amitié et sa présence pendant toutes ces années, pour les éclairs au chocolat les jours de loose, les mojitos les jours de fête, les cerfs-volants les jours de plage, les pièces montées les jours de l'an, enfin tout ça quoi.

Et enfin et surtout, mon plus grand merci va à ma famille. À mes parents : je vous dois absolument tout. À mes grands-parents, de Carresse, Caudry ou Chauny, pour tout l'amour dont ils ont su et savent m'entourer. À Marie-Laure et sa Boubou-family, quatre rayons de soleil illuminant le ciel d'Aubevoye. À Émeline, pour les souvenirs pyrénéens et sa recette (vitale!) de muffins. Et à Jean-Baptiste, présent dans les bons et les mauvais moments et qui a su rendre ces deux dernières années de collocation « musicales » (« Elle m'éneeeerve! Mon Dieu qu'elle m'énerve! ») et joyeuses.

Pour conclure, merci (et pardon...) à tous ceux que j'ai oublié parce que j'ai perdu quelques neurones dans la bataille.

Et merci à toi, vaillant lecteur, qui me fait l'honneur d'ouvrir ce manuscrit pourtant voué à prendre la poussière quelque part, dans un des rayonnages de la BU.

# Table des matières

|                     |          |
|---------------------|----------|
| <b>Introduction</b> | <b>1</b> |
|---------------------|----------|

## Chapitre 1

### Mouvement dans un gaz de Lorentz inélastique, non dissipatif et aléatoire

|     |                                                                                  |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Introduction . . . . .                                                           | 13 |
| 1.2 | Une particule dans un champ de diffuseurs : description par une marche aléatoire | 18 |
| 1.3 | Analyse de la marche aléatoire dans le cas général . . . . .                     | 21 |
| 1.4 | Analyse de la marche aléatoire dans le cas d'un gradient . . . . .               | 23 |
| 1.5 | Champ de force ne dérivant pas d'un gradient . . . . .                           | 31 |
| 1.6 | Champs aléatoires homogènes . . . . .                                            | 34 |
| 1.7 | Résultats numériques . . . . .                                                   | 37 |
| 1.8 | Démonstrations des Théorèmes 1.2 et 1.6 . . . . .                                | 39 |

## Chapitre 2

### Mouvement dans un gaz de Lorentz inélastique, non dissipatif et périodique

|     |                                                                            |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Introduction . . . . .                                                     | 49 |
| 2.2 | Gaz de Lorentz inélastiques et élastique en dimension $d \geq 2$ . . . . . | 51 |
| 2.3 | Gaz de Lorentz inélastiques en dimension 1 . . . . .                       | 56 |
| 2.4 | Rotateurs frappés . . . . .                                                | 67 |

## Chapitre 3

### Quelques rappels sur la théorie des probabilités

|     |                                                   |    |
|-----|---------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Introduction . . . . .                            | 71 |
| 3.2 | Processus de Markov et martingales . . . . .      | 73 |
| 3.3 | Équations Différentielles Stochastiques . . . . . | 76 |
| 3.4 | Les processus de Bessel . . . . .                 | 81 |
| 3.5 | Convergence faible de processus . . . . .         | 83 |

## Chapitre 4

### Résultats de convergence

|       |                                                  |     |
|-------|--------------------------------------------------|-----|
| 4.1   | Démonstration du Théorème 3.1 . . . . .          | 90  |
| 4.2   | Un modèle simplifié . . . . .                    | 93  |
| 4.3   | Démonstration du Théorème 4.3 . . . . .          | 97  |
| 4.3.1 | Étape 1 : un cut-off . . . . .                   | 97  |
| 4.3.2 | Étape 2 : la tension . . . . .                   | 97  |
| 4.3.3 | Étape 3 : convergence et limite . . . . .        | 103 |
| 4.3.4 | Étape 4 : suppression du temps d'arrêt . . . . . | 108 |

## Chapitre 5

### Un gaz de Lorentz inélastique et dissipatif

|       |                                                                |     |
|-------|----------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1   | Introduction . . . . .                                         | 111 |
| 5.2   | Modèle à énergie finie . . . . .                               | 114 |
| 5.3   | Extension des espaces . . . . .                                | 117 |
| 5.4   | Mesures de Gibbs et équilibre thermique du réservoir . . . . . | 121 |
| 5.5   | Deux exemples de distributions de diffuseurs . . . . .         | 125 |
| 5.5.1 | Réseau . . . . .                                               | 125 |
| 5.5.2 | Milieu continu . . . . .                                       | 127 |
| 5.6   | Exemples de bains d'oscillateurs . . . . .                     | 129 |
| 5.6.1 | Un oscillateur par site : le bain monochromatique . . . . .    | 129 |
| 5.6.2 | Équation des ondes . . . . .                                   | 130 |
| 5.7   | Adaptation du modèle à une évolution dans un tore . . . . .    | 135 |
| 5.7.1 | Description . . . . .                                          | 135 |
| 5.7.2 | Exemples . . . . .                                             | 136 |

## Chapitre 6

### Théorèmes d'existence et de régularité des solutions globales en temps

|     |                                                            |     |
|-----|------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 | Une trajectoire partant à l'infini en temps fini . . . . . | 139 |
| 6.2 | Existence de solutions locales en temps . . . . .          | 142 |
| 6.3 | Résultat d'existence globale . . . . .                     | 145 |
| 6.4 | Continuité par rapport à $F$ . . . . .                     | 148 |
| 6.5 | Dérivabilité par rapport à $F$ . . . . .                   | 150 |

## Chapitre 7

### Un théorème de fluctuation-dissipation

|     |                        |     |
|-----|------------------------|-----|
| 7.1 | Introduction . . . . . | 155 |
|-----|------------------------|-----|

---

|                          |                                                       |            |
|--------------------------|-------------------------------------------------------|------------|
| 7.2                      | Description de l'état d'équilibre thermique . . . . . | 156        |
| 7.3                      | Relation d'Einstein à temps fini . . . . .            | 162        |
| <b>Table des figures</b> |                                                       | <b>167</b> |
| <b>Bibliographie</b>     |                                                       | <b>169</b> |



# Introduction

Dans cette thèse, nous étudions la dynamique hamiltonienne d'une particule, appelée « petit système », dans un « réservoir », c'est-à-dire un milieu possédant un grand nombre, voire un nombre infini, de degrés de liberté. Plus spécifiquement, nous choisirons comme réservoir un gaz de Lorentz inélastique, décrit plus loin. Nous considérerons deux situations différentes. Dans le premier cas, que nous appellerons non-dissipatif, le mouvement des degrés de liberté du réservoir n'est pas affecté par la présence de la particule. La particule évolue donc dans un champ de force prescrit, dépendant du temps ; l'énergie de la particule n'est alors pas conservée. Le système dynamique étudié, uniquement composé de la particule, possède alors un nombre fini de degrés de liberté et son Hamiltonien dépend du temps. Dans le deuxième cas, appelé dissipatif, la particule affecte l'évolution du réservoir et de ce fait, l'action du réservoir sur la particule est altérée. On est alors dans le cadre des systèmes ouverts : des échanges d'énergie se produisent entre la particule et le milieu dans lequel elle évolue. Le système dynamique est par conséquent composé de la particule et du réservoir et possède un nombre infini de degrés de liberté. Le Hamiltonien du système complet est, dans ce cas, autonome. L'énergie totale du système est donc conservée, mais pas celle de la particule.

L'étude de tels systèmes est motivée par la volonté d'expliquer l'origine des lois de transport macroscopiques pour des systèmes dissipatifs, comme la loi de Fourier, la loi d'Ohm, les processus de diffusion ou la relation d'Einstein qui relie la mobilité  $\mu$  à la constante de diffusion  $D$  par  $\mu = \beta D$ , ainsi que par le désir de calculer les coefficients de transport qui y apparaissent en termes de la dynamique microscopique et de la température du réservoir. Ces lois, observées expérimentalement et déduites théoriquement par les physiciens, sont fondamentales dans la description quantitative des systèmes macroscopiques. L'enjeu en mathématiques est de les obtenir rigoureusement, à partir d'une analyse détaillée de la physique microscopique sous-jacente de ces systèmes. Par exemple, les phénomènes de diffusion d'une particule dans un gaz peuvent s'expliquer dans certains cas par des propriétés chaotiques de la dynamique microscopique. On cherche donc à construire des modèles de systèmes couplés particule-réservoir suffisamment riches pour capter l'essentiel des phénomènes physiques et suffisamment simples pour qu'on puisse, mathématiquement, les traiter de façon rigoureuse. En particulier, on veut pouvoir analyser le comportement de la particule sous l'action du réservoir.

## Les gaz de Lorentz

Afin de comprendre comment les ingrédients microscopiques créent les différents comportements macroscopiques du système, de nombreux modèles particule/réservoir ont été utilisés. Dans cette thèse, nous nous penchons sur une classe particulière de modèles, à savoir les gaz de Lorentz, et plus particulièrement les gaz de Lorentz inélastiques, dissipatifs ou non.

On appellera gaz de Lorentz tout modèle pour lequel des particules, en mouvement dans  $\mathbb{R}^d$  ou le tore  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$  avec  $d \in \mathbb{N}^*$ , sont soumises à un champ de force potentiellement dépendant du

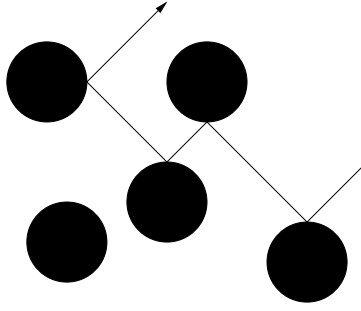


FIG. 1 – Une trajectoire de particule dans le gaz de Lorentz élastique.

temps, dont le support est contenu dans une union dénombrable de boules, toutes de même rayon et pour l'essentiel deux à deux disjointes. Les interactions entre particules sont donc négligées dans ces modèles. Les boules composant le support du champ de force sont réparties dans  $\mathbb{R}^d$ , aléatoirement ou sur un réseau. La force subie par une particule est alors la somme de forces locales, chacune d'entre elles étant à support dans une de ces boules. On suppose que toutes ces forces locales sont identiques à une éventuelle rotation près, de sorte que la force globale modélise un ensemble de diffuseurs identiques. Entre deux événements diffusifs, les particules se déplacent à accélération nulle, et donc de façon rectiligne.

Cette définition englobe une grande variété de modèles, qui seront décrits plus précisément dans la suite. En particulier, on parlera de gaz de Lorentz « dur » lorsque chaque force locale provient formellement d'un potentiel qui est, à chaque instant  $t$ , infini sur son support : dans ce cas, les particules subissent une réflexion spéculaire sur le bord du support du potentiel. Dans ce contexte, les diffuseurs sont appelés aussi obstacles. Au contraire, lorsque toutes les forces locales dérivent d'un même potentiel borné, nous dirons que le gaz de Lorentz est « mou ». Physiquement, cela signifie que la trajectoire d'une particule peut traverser les boules, support du gaz de Lorentz. On distingue de plus les gaz de Lorentz élastiques, dans lesquels les forces dérivent d'un potentiel indépendant du temps et où donc l'énergie de la particule est conservée, des gaz de Lorentz inélastiques pour lesquels ceci n'est pas le cas soit parce que la force n'est pas le gradient d'un potentiel statique, soit parce qu'elle dépend du temps.

Tous ces modèles généralisent la définition initiale du gaz de Lorentz, appelé ici gaz de Lorentz classique, qui appartient comme on le verra à la classe des gaz de Lorentz durs et élastiques.

**Le gaz de Lorentz classique.** Introduit au début des années 1900 par Lorentz [57], le gaz de Lorentz classique a pour but de décrire le mouvement d'électrons dans un métal en utilisant les méthodes de la théorie cinétique. Dans ce modèle, le mouvement des électrons a lieu dans  $\mathbb{R}^3$  et les atomes du métal (réservoir) sont assimilés à des obstacles fixes, sphériques et durs. Les interactions entre les électrons sont négligées, de sorte que chaque trajectoire d'électron est indépendante des autres. La dynamique ne prend donc en compte que les collisions élastiques entre les électrons et les atomes du métal environnant (voir la Figure 1).

Lorentz a montré par des arguments physiques que la distribution  $f(q, p, t)$  des électrons dans le gaz satisfait l'équation de Boltzmann linéaire

$$\partial_t f + p \cdot \nabla_q f + F \cdot \nabla_p f = N_{at} R^2 \mathcal{C}(f), \quad (1)$$

dans le cas où on rajoute une force extérieure constante  $F$  au modèle. Dans cette équation,  $q$  est la position d'une particule,  $p$  son moment conjugué (ou quantité de mouvement),  $N_{at}$  et  $R$  sont

respectivement la densité et le rayon des atomes et le noyau de collision  $\mathcal{C}(f)$  est défini par

$$\mathcal{C}(f)(t, q, p) := \int_{\substack{|v|=1 \\ p \cdot v > 0}} (f(t, q, p - 2(p \cdot v)v) - f(t, q, p)) \cos(p, v) dv.$$

Lorentz résout cette équation lorsque  $F \neq 0$  par une méthode perturbative. Il conclut à l'existence d'un courant électrique proportionnel à  $F$ , entraînant en particulier l'existence de la mobilité, dont il démontre qu'elle dépend de la température  $T$  en  $T^{-1}$ , reproduisant ainsi un résultat de Drude.

Bien qu'il soit clair que le mouvement des électrons dans un métal est bien plus compliqué que cela et fait notamment intervenir des phénomènes de physique quantique, le gaz de Lorentz classique, ainsi que quelques variantes, sont restés un sujet largement étudié. En effet, malgré la simplicité des phénomènes microscopiques qu'il met en jeu, les phénomènes macroscopiques sont complexes. La modélisation (1) a été démontrée rigoureusement, en l'absence de force extérieure ( $F = 0$ ) et dans la limite de Boltzmann-Grad, par Gallavotti [33, 34] lorsque les obstacles sont distribués suivant une loi de Poisson, puis étendue à d'autres distributions d'obstacles par Spohn [78] et Boldrighini, Bunimovich et Sinai [6]. La limite de Boltzmann-Grad consiste à faire tendre la densité d'obstacles  $N_{at}$  vers l'infini et leur rayon  $R$  vers 0 de façon à ce que  $N_{at}R^2$  tende vers une constante  $\sigma$  strictement positive. Le cas où la distribution des obstacles est périodique est plus complexe et aboutit à une équation cinétique totalement différente, comme le montrent les travaux [81, 60, 26, 37, 61]; les résultats récents concernant ce problème sont synthétisés par Golse dans [36].

Une étude du comportement asymptotique est faite dans [65, 63, 64] pour un gaz de Lorentz classique légèrement modifié auquel on rajoute un champ électrique et/ou un champ magnétique, et semble indiquer que les conclusions de Lorentz ne sont plus correctes sur une échelle de temps trop longue.

Lorsque  $F = 0$ , les travaux de Bunimovich, Sinai et Chernov (voir [13, 14, 12]) montrent, en utilisant la théorie des billards hyperboliques et sans passer à la limite de Boltzmann-Grad, que les particules dans un gaz de Lorentz classique, en dimension 2 et où les obstacles sont sur un réseau périodique, ont un comportement diffusif en moyenne :

$$\langle \|q(t) - q(0)\|^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} \sim Dt,$$

où  $q(t) \in \mathbb{R}^2$  est la position d'une particule à l'instant  $t$  et où on désigne par  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne sur l'ensemble des particules ayant une position initiale dans un rectangle  $[0; B_1[ \times [0; B_2[$ , base du réseau, et une vitesse initiale de norme égale à 1. La constante de diffusion  $D$  dépend de la vitesse initiale  $p_0$  et croît comme  $\|p_0\|$ .

On note qu'il n'y a, à notre connaissance, pas de résultat rigoureux sur les gaz de Lorentz mous et élastiques. Une analyse numérique, faite dans la section 2.2, aboutit encore au caractère diffusif du gaz lorsque  $F = 0$  :

$$\langle \|q(t)\|^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} \sim Dt,$$

où la constante de diffusion  $D$  croît avec la vitesse initiale  $p_0$  des particules, comme  $\|p_0\|^5$  et non plus  $\|p_0\|$  comme dans le cas d'un gaz de Lorentz dur.

On remarque qu'en l'absence de force extérieure  $F$  dans le modèle du gaz de Lorentz classique, l'énergie cinétique des électrons reste constante au cours du temps. On rappelle que dans l'état d'équilibre thermique les impulsions des électrons sont distribuées selon la mesure de probabilité de densité proportionnelle à  $e^{-\beta \|p\|^2}$ , où  $\beta$  est la température inverse. Lorsque les impulsions des particules sont, à l'instant initial, distribuées selon une mesure proche mais différente de l'état

d'équilibre thermique, leur distribution ne peut par conséquent pas tendre vers celle de l'équilibre thermique, et ce modèle ne décrit donc pas l'important phénomène de retour à équilibre. Ceci résulte du fait qu'aucun échange d'énergie entre la particule et son environnement ne soit possible, les obstacles étant fixes. Un environnement plus réaliste exerce une force dépendant du temps sur la particule, qui résulte du mouvement des degrés de liberté de l'environnement. Afin d'étudier l'effet de telles forces, des gaz de Lorentz inélastiques, que nous décrivons maintenant, ont été introduits et étudiés. Ils sont de deux types. Lorsqu'on croit pouvoir négliger l'effet de la particule sur l'évolution des degrés de liberté de l'environnement, par exemple parce que la particule est légère, on peut considérer que la particule se déplace dans un champ de forces dont la dépendance en temps est connue d'avance. Nous appellerons ces modèles non-dissipatifs. En réalité, la particule exerce une force sur l'environnement et, de ce fait, en altère le mouvement. Ce changement a, à son tour, un effet de rétroaction sur la particule. Pour en tenir compte, il faut traiter le système particule-environnement dans sa totalité. On appellera ces modèles dissipatifs. Du fait qu'ils ont un nombre infini de degrés de liberté, ils sont bien plus complexes à traiter que les systèmes non-dissipatifs. Comme nous le verrons, ce ne sont que les modèles dissipatifs qui peuvent correctement reproduire les propriétés de transport de base comme la loi d'Ohm et la relation d'Einstein. Néanmoins, les modèles non-dissipatifs ont également attiré l'attention à cause de leur plus grande simplicité et parce qu'ils peuvent être valables dans des régimes où l'influence de la particule sur son environnement est très faible [66, 67, 69, 38, 40, 52, 82, 83, 39, 25, 1].

**Gaz de Lorentz inélastiques et non-dissipatifs.** On évoque ici quelques modèles inélastiques et non dissipatifs étudiés dans la littérature. Loskutov, Ryabov et Akinshin, par exemple, ont analysé (voir [58, 59]) un gaz de Lorentz dur à maille carrée avec une perturbation des bords des obstacles (obstacles pulsants) aléatoire ou périodique. En désignant par  $r(t)$  une petite perturbation du rayon  $R$  des obstacles, le rayon perturbé d'un obstacle est  $R(t) = R + r(t)$  et la vitesse de perturbation est définie par  $u(t) = \dot{r}(t)$ . Une particule arrivant sur un obstacle à un instant  $\tau$  donné, avec une vitesse  $v$  et un angle d'incidence  $\alpha$  (voir la Figure 2(a)), est alors réfléchié selon la loi suivante :

$$\begin{cases} \|v'\|^2 = \|v\|^2 - 4u(\tau)\|v\|\cos(\alpha) + 4u(\tau)^2, \\ \alpha' = -\arcsin\left(\frac{\|v\|}{\|v'\|}\sin(\alpha)\right). \end{cases}$$

Ces équations proviennent de la loi de réflexion contre une droite en translation de vitesse  $u(t)$ , en assimilant le bord du disque touché, au point d'impact, à sa tangente en ce point. On remarque que, si à l'instant  $\tau$  où l'impact a lieu, la vitesse  $u(\tau)$  est nulle, on retrouve la réflexion spéculaire

$$\|v'\|^2 = \|v\|^2, \quad \alpha' = -\alpha$$

du gaz de Lorentz élastique. Le gaz ainsi défini est toujours un gaz dur et non-dissipatif, puisque la trajectoire des particules ne traverse pas les obstacles et n'influe pas sur les perturbations des rayons. En revanche, les chocs sont maintenant inélastiques, et l'énergie cinétique des particules varie. Dans [58, 59], des simulations numériques indiquent qu'elle croît en moyenne, pour ce modèle, avec le nombre de collisions subies, avec un exposant proche de 1, aussi bien pour une perturbation aléatoire que périodique du rayon des obstacles, mais aucune démonstration de ces affirmations n'est faite dans les travaux cités.

Dans un autre cadre, Dolgopyat et Korolov (voir [25]) se sont intéressés à des gaz de Lorentz inélastiques, mous et non dissipatifs en dimension  $d \geq 4$ , où les supports des diffuseurs sont distribués aléatoirement selon une loi de Poisson et où le champ de force est un champ aléatoire,

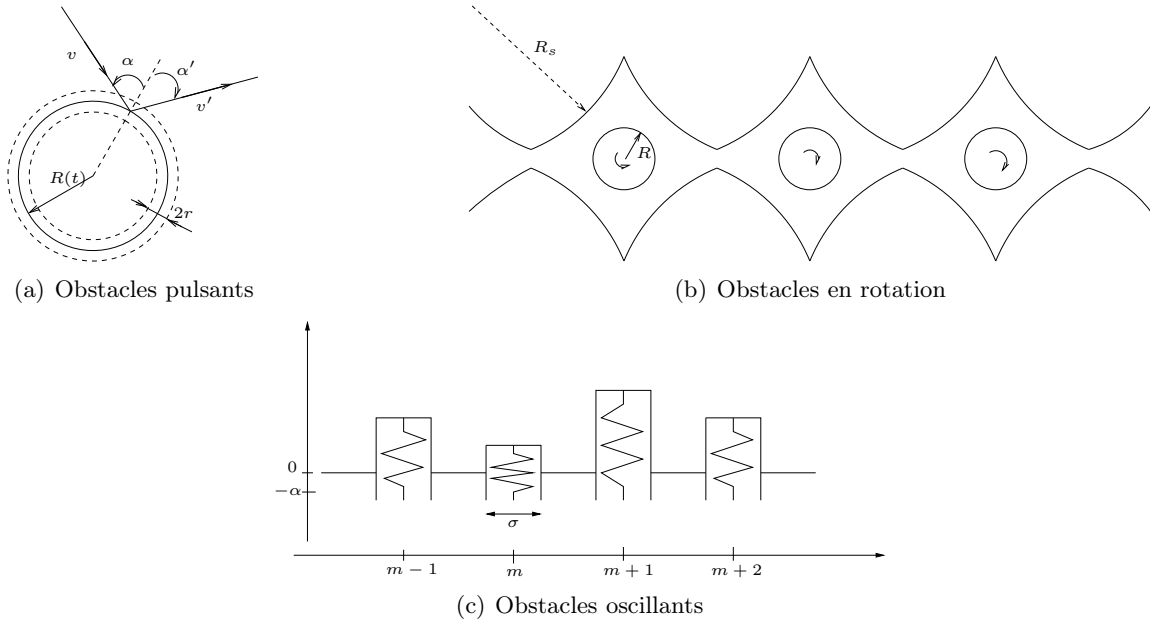


FIG. 2 – Exemples de gaz de Lorentz inélastiques

défini sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et ne dérivant pas d'un potentiel. Ils ont alors montré, en désignant par  $p(t)$  la vitesse d'une particule à l'instant  $t$  et  $p_0 = p(0)$ , le théorème suivant.

**Théorème.** *Il existe un sous-ensemble  $\Omega_{p_0}$  inclus dans  $\Omega$  tel que  $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_{p_0})$  tend vers 0 quand  $|p_0|$  tend vers l'infini et que  $p(c^3\tau)/c$  converge en distribution vers un processus de diffusion sur  $\Omega_{p_0}$  quand  $c$  tend vers l'infini, en voyant  $\Omega_{p_0}$  comme un espace de probabilités muni de la mesure obtenue par la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_{\Omega_{p_0}} := \mathbb{P}(\cdot \cap \Omega_{p_0})/\mathbb{P}(\Omega_{p_0})$ .*

En particulier, lorsque  $\|p_0\|$  est assez grand, l'énergie cinétique moyenne  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  se comporte comme  $t^{2/3}$  avec une grande probabilité. De plus, une intégration de ce résultat permet de conclure quant au comportement des positions  $q(t)$  : le processus  $q(c^3t)/c^4$  défini sur  $\Omega_{p_0}$  converge en distribution vers un processus de diffusion quand  $c$  tend vers l'infini. Dans le chapitre 1, nous développons une analyse pour des gaz de Lorentz inélastiques et non-dissipatifs plus généraux, dont les résultats dans le cas particulier du modèle étudié par Dolgopyat et Korolov reproduisent en partie les résultats montrés dans [25] ; nous obtenons en effet  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/3}$  et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^{8/3}$ .

Enfin, pour des gaz de Lorentz mous, inélastiques et non-dissipatifs dont les forces locales sont aléatoires, il existe des travaux comme [31, 69, 39] montrant que la distribution des particules satisfait, à une échelle appropriée, une équation cinétique de type Fokker-Planck. On note que ce type de résultat ne permet pas directement d'obtenir des informations sur le comportement asymptotique des particules, l'interversion de la limite  $t \rightarrow \infty$  avec le changement d'échelle n'étant pas forcément justifiable.

**Gaz de Lorentz dissipatifs.** Comme nous l'avons vu, les modèles décrits ci-dessus permettent à l'énergie cinétique de devenir arbitrairement grande au cours du temps. Ils ne vérifient donc pas les propriétés telles que le retour à l'équilibre, la loi d'Ohm ou la relation d'Einstein. La physique essentielle des phénomènes de transport n'est par conséquent pas correctement décrite

par ces modèles, comme nous l'avons déjà expliqué ci-dessus. Afin d'évacuer ce surplus d'énergie acquis par les particules, il faut des mécanismes de dissipation.

Une première idée, développée dans [7, 18, 19, 24], a été de rendre manuellement dissipatif le gaz de Lorentz élastique avec une force extérieure  $F$  en ajoutant un thermostat de Gauss. Entre les collisions, les équations de mouvement deviennent

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = F - \frac{F \cdot p}{\|p\|^2} p, \end{cases}$$

et l'énergie cinétique de la particule reste constante. Le terme rajouté  $-\|p\|^{-2}(F \cdot p)p$  peut être vu comme un terme de frottement  $-\gamma(p)p$ . L'étude de ce modèle, faite dans [18], est rigoureuse et montre que lorsque la force extérieure  $F$  provient d'un champ électromagnétique petit, un état stationnaire pour la dynamique est établi et la loi d'Ohm et la relation d'Einstein sont satisfaites pour ce modèle. Cependant, le thermostat de Gauss ne permet pas une retranscription assez fidèle des phénomènes physiques puisqu'il ne décrit, en particulier, toujours pas le retour à l'équilibre lorsque  $F = 0$ , la vitesse de la particule étant constante dans ce cas.

Eckmann, Larralde, Leyvraz, Mejía-Monasterio, Young et Zabey, quant à eux, se sont intéressés dans [62, 50, 29, 28] à un gaz de Lorentz en dimension 2, rendu dissipatif en permettant aux obstacles circulaires de tourner autour de leur centre. Plus précisément, le modèle qu'ils considèrent est le suivant. Le réservoir est une succession finie de cellules identiques (voir la Figure 2(b)). Le bord de chacune des cellules est composé de quatre arcs de cercle de rayon  $R_s$  et on place en chacun de leurs centres un disque de rayon  $R$  en rotation autour de son centre. Le rayon  $R$  est choisi de telle sorte que les particules ne peuvent traverser une cellule sans rencontrer le disque intérieur. Les particules en mouvement dans ce réservoir sont reflétées de façon spéculaire sur le bord des cellules (collisions élastiques). En revanche, la règle de réflexion sur le disque central est donnée par les équations

$$v'_n = -v_n, \quad v'_t = R\omega, \quad R\omega' = v_t,$$

où  $v_t$  et  $v_n$  sont les composantes tangente et normale au disque de la vitesse  $v$  de la particule avant la collision,  $\omega$  est la vitesse angulaire du disque avant la collision et  $v'$  et  $\omega'$  sont les vitesse de la particule et vitesse angulaire du disque après collision. Une étude numérique du comportement asymptotique de la variance du déplacement des particules dans une variante de ce modèle est en particulier faite dans [21] et aboutit à  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^\alpha$ , avec  $\alpha \leq 2$  dépendant de la masse  $m$  d'une particule et de la masse  $M$  d'un obstacle. En particulier, lorsque  $m = M$ , on observe numériquement que  $\alpha$  vaut 2; le mouvement est donc ballistique dans ce cas.

Enfin, un troisième exemple est le modèle étudié par De Bièvre, Lafitte, Parris et Silvius dans [76, 49, 22], qui est un gaz de Lorentz périodique en dimension 1 où les diffuseurs sont des oscillateurs harmoniques (voir la Figure 2(c)). Le Hamiltonien de ce système est

$$H = \frac{1}{2}p^2 - Fq + \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\pi_m^2 + \omega^2 \varphi_m^2) + \alpha \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m n_m(q), \quad (2)$$

où  $q$  et  $p$  sont les position et moment conjugué d'une particule,  $\varphi_m$  et  $\pi_m$  sont le déplacement et le moment conjugué de l'oscillateur centré en  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $F \in \mathbb{R}$  est une force extérieure,  $\omega > 0$  la fréquence commune à tous les oscillateurs et  $\alpha$  une constante strictement positive. La fonction  $n_m$  est l'indicatrice d'un segment  $[m - \sigma/2; m + \sigma/2]$ , où  $0 < \sigma < 1$  est le diamètre des obstacles. Elle permet de décrire l'interaction entre la particule et l'oscillateur centré en  $m$ . Le modèle ainsi

décrit est dissipatif et l'action de la particule sur un oscillateur se traduit par le déplacement de la position d'équilibre de celui-ci de 0 en  $-\alpha$ . Il s'agit d'un cas particulier d'une classe plus large introduite dans [11] et sur laquelle nous reviendrons dans la suite (voir l'équation (12)). Dans [11], le comportement en temps long d'une particule a été étudié en détail, lorsque le réservoir est à température nulle, et, en particulier, la loi d'Ohm y est obtenue de façon rigoureuse dans certains cas. En revanche, la relation d'Einstein ne fait pas sens dans cette situation, le réservoir étant dans ce travail considéré à température nulle ( $\beta = +\infty$ ). De ce fait, en absence de force extérieure ( $F = 0$ ), la particule ne diffuse pas. Lorsque le réservoir est à température positive, il a été vérifié numériquement dans [76] pour le modèle (2) que le mouvement des particules dans ce réservoir est diffusif si  $F = 0$  :

$$\langle q(t)^2 \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} Dt,$$

où la constante de diffusion  $D$  dépend de la température et des paramètres définissant le modèle ; cette dépendance a de plus été expliquée par des arguments physiques. Le cas où  $F$  est non nul a été analysé numériquement dans [49] et les résultats des simulations numériques tendent à montrer que la relation d'Einstein à temps fini est vérifiée pour des températures élevées sous la forme :

$$m_F(t) = \beta D(t) + O_t(F), \quad \text{où } m_F(t) := \frac{\langle q_t^F - q \rangle}{tF}, \quad D(t) := \frac{1}{2t} \langle (q_t^0 - q)^2 \rangle. \quad (3)$$

Ici  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'intégrale par rapport à la mesure invariante décrivant l'équilibre thermique lorsque  $F = 0$ . Il a de plus été montré que le modèle n'admet pas d'état stationnaire lorsque  $F$  est non nul, la dissipation inhérente au modèle n'étant pas suffisante pour absorber l'énergie apportée par la force  $F$  à des particules trop rapides. On ne peut donc pas espérer pouvoir passer à la limite  $t \rightarrow \infty$  dans l'équation (3), pour obtenir la relation d'Einstein. Une relation d'Einstein à temps fini est par conséquent le mieux que l'on puisse espérer démontrer dans ce type de modèle et c'est ce qu'on fera rigoureusement dans le chapitre 7, pour une classe de modèles bien plus large que (2) (voir équation (12)) et pour toute température  $\beta > 0$ .

## Contributions

Dans cette thèse, nous nous intéressons dans un premier temps à des gaz de Lorentz inélastiques et non-dissipatifs (chapitres 1 à 4) et nous analysons en détail, et sans passer par des limites cinétiques, les interactions entre les particules et les obstacles du gaz, afin de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie cinétique moyenne et de la variance du déplacement.

Puis, dans les chapitres 5 à 7, nous considérons une version dissipative de ces modèles à température positive. Nous construisons en particulier un espace des phases approprié, ainsi qu'une mesure de Gibbs permettant de décrire l'équilibre thermodynamique du système. Ces constructions permettent d'établir la relation d'Einstein à temps fini, lors de l'application d'une force extérieure constante.

Nous terminons cette introduction en résumant succinctement les travaux réalisés, et nous faisons référence au reste du manuscrit pour les détails.

Le chapitre 1 est en grande partie basé sur l'article [1], co-écrit avec Stephan De Bièvre, Pauline Lafitte-Godillon et Paul Parris et publié dans Journal of Statistical Physics. Nous y étudions le comportement asymptotique de l'énergie cinétique moyenne et de la variance du déplacement de particules en mouvement dans un gaz de Lorentz inélastique, non-dissipatif et aléatoire. Plus précisément, nous considérons des particules en mouvement dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ , sous

l'action d'un champ de force  $G$  :

$$\ddot{q}(t) = G(q(t), t), \quad G(q, t) = \sum_N c_N M_N g(M_N^{-1}(q - x_N), \omega t + \phi_N^0),$$

où  $q(t)$  est la position d'une particule à l'instant  $t$ . La fonction  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction régulière, à support dans la boule centrée en l'origine et de rayon  $1/2$  en sa première variable (variable d'espace). Les  $x_N$  sont les localisations des diffuseurs et sont disposés aléatoirement ou sur un réseau, de sorte que les boules  $B(x_N, 1/2)$  ne s'intersectent pas et que le modèle soit à horizon fini (équation (1.9)),  $\omega$  est un vecteur constant dans  $\mathbb{R}^m$ , avec  $\|\omega\| = 1$ , représentant un ensemble de  $m$  fréquences. Les  $c_N$  sont des constantes de couplage, les  $M_N$  des matrices de rotation et les  $\phi_N^0 \in \mathbb{T}^d$  des phases initiales, caractérisant les diffuseurs; elle sont toutes choisies aléatoirement et de façon indépendante.

Le comportement asymptotique des particules dans un tel champ de force est dérivé numériquement et analytiquement. Les simulations numériques sont réalisées en dimension 1 et 2, avec les diffuseurs centrés sur les mailles d'un réseau et dans le cas où la force dérive d'un potentiel. Elles sont décrites précisément dans la section 1.7. Analytiquement, nous partons du constat que la trajectoire d'une particule dans le gaz est une succession d'événements diffusifs, et est rectiligne entre ces différents événements (voir un exemple de trajectoire, Figure 1.8 page 38). L'idée à la base de ce chapitre est que le mouvement de l'ensemble des particules dans un tel champ de force doit pouvoir être approché par une marche aléatoire décrivant le mouvement des particules entre deux événements diffusifs successifs :

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + R(p_n, \kappa_n), \\ t_{n+1} = t_n + \frac{\eta_*}{\|p_{n+1}\|}, \\ q_{n+1} = q_n + \eta_* e_{n+1}, \end{cases} \quad (4)$$

où  $e_n := p_n / \|p_n\|$  et  $\kappa_n$  regroupe l'ensemble des paramètres aléatoires caractérisant l'événement diffusif. La fonction  $R$ , définie par l'équation (1.11), traduit le changement de moment cinétique lors d'un événement diffusif et permet de déterminer les vitesses successives (entre les événements diffusifs) de la particule. L'étude est faite pour des particules rapides et est basée sur l'analyse des événements diffusifs successifs. On remarque que la première équation dans (4) est indépendante des deux autres, et on étudie donc dans un premier temps le comportement des  $p_n$ . On trouve deux comportements distincts, suivant que  $g$  dérive ou non d'un potentiel. Lorsque la force  $g$  dérive d'un potentiel, on a les estimations suivantes de la moyenne et de la variance du changement d'énergie cinétique  $\Delta E = (\|p + R(p, \kappa)\|^2 - \|p\|^2)/2$  d'une particule lors d'un unique événement diffusif.

**Théorème 1.2 p.23.** *On suppose que  $g = -\nabla_q W$ . Alors pour tout  $p \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\overline{\Delta E(p)} = \frac{B}{\|p\|^4} + O(\|p\|^{-5}), \quad \overline{(\Delta E(p))^2} = \frac{D^2}{\|p\|^2} + O(\|p\|^{-3}),$$

où

$$B = \frac{d-3}{2} D^2$$

et

$$D^2 = \frac{\overline{c^2}}{C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^{2d}} dy_0 dy'_0 \|y_0 - y'_0\|^{1-d} \partial_\tau W(y_0, \phi) \partial_\tau W(y'_0, \phi) > 0.$$

On désigne ici par  $\bar{\cdot}$  la moyenne sur  $\kappa$ , lors d'un unique événement diffusif,  $c$  est la constante de couplage du diffuseur et  $C_d$  le volume de la boule de rayon  $1/2$  dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ . Ce théorème montre que le changement d'énergie cinétique est d'ordre  $\|p\|^{-1}$  mais que tous ses termes jusqu'à l'ordre  $\|p\|^{-4}$  sont de moyenne nulle. Ce résultat détermine le comportement asymptotique de l'énergie cinétique moyenne. En effet, en définissant  $\xi_n$  proportionnel à  $\|p_n\|^3$  et en faisant un développement de  $R(p_n, \kappa_n)$  lorsque  $p_n$  est grand, c'est-à-dire  $|\xi_n|$  supérieur à une valeur critique  $\bar{\xi}$ , la première équation de la marche aléatoire (4) implique

$$\xi_{n+1}^2 = \xi_n^2 + 2\varepsilon_n \xi_n + O_0 \left( \xi_n^{2/3} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{\beta_n^{(4)}}{D^2} + 2\varepsilon_n \right) + O \left( \xi_n^{-1/3} \right), \quad (5)$$

où  $O_0 \left( \xi_n^{2/3} \right)$  est un terme d'ordre  $O \left( \xi_n^{2/3} \right)$  et de moyenne nulle,  $\varepsilon_n = D^{-1} \beta_n^{(1)}$  est de moyenne nulle et les coefficients  $\beta_n^{(i)}$  sont définis en fonction du potentiel  $V$  dans (1.21).

**Théorème 1.4 p.27.** *Soit une suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation (5) lorsque  $|\xi_n| \geq \bar{\xi}$  et*

$$\xi_{n+1}^2 = \xi_n^2 + 2\gamma + 1$$

*lorsque  $|\xi_n| < \bar{\xi}$ , où*

$$2\gamma + 1 := \frac{2}{3} \left( \frac{\overline{\beta_n^{(4)}}}{D^2} + 2\bar{\varepsilon}_n \right) = \frac{2}{3} \frac{\overline{\beta_n^{(4)}}}{D^2}.$$

*Alors en toute dimension  $d \geq 2$  et pour tout  $\ell > -\lfloor 2\gamma + 1 \rfloor / 2$ , on a*

$$\left\langle \xi_n^{2\ell} \right\rangle \sim n^\ell.$$

En particulier, pour  $\ell = 1/3$ , on obtient le comportement asymptotique de l'énergie cinétique :

$$\left\langle \|p_n\|^2 \right\rangle \sim n^{1/3}.$$

Lorsque la force  $g$  ne dérive pas d'un potentiel, les estimations sur le changement d'énergie sont différentes de celles du Théorème 1.2 ci-dessus.

**Théorème 1.6 p.32.** *On suppose  $g \neq -\nabla_q W$ . Alors pour tout  $p \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\overline{\Delta E(p)} = \frac{B'}{\|p\|^2} + O(\|p\|^{-3}), \quad \overline{\Delta E(p)^2} = D'^2 + O(\|p\|^{-1}),$$

*où  $B' = \frac{(d-1)}{2} D'^2$  et*

$$\begin{aligned} D'^2 &= \frac{\bar{c}^2}{C_d} \int_{T^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^{2d}} dy_0 dy'_0 \|y_0 - y'_0\|^{-(1+d)} \\ &\quad \times (y_0 - y'_0) \cdot g(y_0, \phi) (y_0 - y'_0) \cdot g(y'_0, \phi) \geq 0. \end{aligned}$$

Le changement d'énergie est donc maintenant d'ordre 1 et ses termes d'ordre 1 et  $\|p\|^{-1}$  sont d'espérance nulle. Cette différence par rapport au cas où  $g = -\nabla_q W$  aboutit à un comportement asymptotique différent pour l'énergie cinétique moyenne. En effet, le développement de  $R(p_n, \kappa_n)$ ,

lorsque  $p_n$  est grand (c'est-à-dire  $\|p_n\|^2$  plus grand qu'une valeur critique  $\bar{\xi}$ ), est différent et en définissant  $\xi'_n$  proportionnel à  $\|p_n\|^2$ , on obtient

$$\xi_{n+1}'^2 = \xi_n'^2 + 2\varepsilon_n' \xi_n' + O\left(\sqrt{\xi_n'}\right) + \left(\frac{\beta_n^{(2)}}{D^2} + \varepsilon_n'^2\right) + O\left(\xi_n'^{-1/2}\right), \quad (6)$$

avec  $\varepsilon_n' = \beta_n^{(0)}/D'$  de moyenne nulle. On remarque que cette équation est très similaire à celle (équation (5)) obtenue dans le cas où le potentiel dérive d'un gradient ; la seule différence est qu'ici,  $\xi_n'$  est proportionnel à  $\|p_n\|^2$  et non plus à  $\|p_n\|^3$ .

**Théorème 1.8 p.32.** *Soit une suite  $(\xi_n')_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , (6) lorsque  $|\xi_n'| \geq \bar{\xi}$  et*

$$\xi_{n+1}'^2 = \xi_n'^2 + \frac{d+1}{2}$$

*si  $|\xi_n'| < \bar{\xi}$ . Alors en toute dimension  $d \geq 1$  et pour tout  $\ell > -\lfloor (d+1)/2 \rfloor / 2$ , on a*

$$\langle \xi_n'^{2\ell} \rangle \sim n^\ell.$$

En particulier, pour  $\ell = 1/2$ , on trouve

$$\langle \|p_n\|^2 \rangle \sim n^{1/2}.$$

Les Théorèmes 1.4 et 1.8 donnent le comportement asymptotique de l'énergie cinétique moyenne des particules en fonction du nombre d'événements diffusifs, et permettent de prédire

$$\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/5}, \text{ si } g = -\nabla_q W, \quad \langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^2, \text{ si } g \neq -\nabla_q W;$$

nous confirmons ces résultats par des simulations numériques. Nous dérivons aussi dans ces deux cas, par des arguments intuitifs, le comportement asymptotique de  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  en analysant la façon dont la particule change de direction en dimension  $d \geq 2$  :

$$\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/3}, \text{ si } g = -\nabla_q W, \quad \langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^{8/3}, \text{ si } g \neq -\nabla_q W.$$

Nous montrons alors, dans le cas  $g = -\nabla_q W$ , que ces résultats sont encore en accord avec les simulations numériques effectuées.

Dans le chapitre 2, nous mettons à profit les résultats du chapitre 1 pour traiter quelques modèles apparentés. Nous étudions en particulier des gaz de Lorentz, toujours inélastiques et non-dissipatifs, mais périodiques en temps et en espace, et non plus aléatoires. Nous nous restreignons au cas où la force dérive d'un potentiel et l'étude faite est essentiellement numérique. En dimension  $d \geq 2$  et pour les gaz mous et inélastiques, les simulations numériques montrent que, malgré la périodicité du potentiel en temps et en espace, les trajectoires des particules sont aléatoires. Cela illustre le fait que la géométrie du réservoir suffit à elle seule à rendre les trajectoires aléatoires. On argumente donc que l'on peut reprendre l'analyse de la marche aléatoire telle qu'elle est faite dans le chapitre 1 et on obtient alors des comportements asymptotiques identiques à ceux dérivés dans le cas de potentiels aléatoires. Toutes ces affirmations ont été confirmées par des tests numériques.

Nous étudions, en utilisant ces mêmes arguments, le cas des gaz élastiques et nous obtenons, numériquement et formellement, que les particules ont en moyenne un comportement diffusif.

En dimension  $d = 1$ , en revanche, le comportement est complètement différent de celui dérivé dans le chapitre 1, dans le cas d'un potentiel aléatoire, car la géométrie ne permet plus

de rendre les trajectoires aléatoires. Les simulations numériques montrent que le système est stable :  $p(t) \sim p(0)$  et  $|q(t)| \sim t$ . En utilisant la théorie hamiltonienne des perturbations, nous montrons qu'en effet, la vitesse ne peut pas subir de grande variation et on a, pour des temps arbitrairement grands,  $|p(t) - p(0)| \leq Cp(0)^{-1}$  (Théorème 2.1 page 59). Nous calculons de plus une valeur approchée de  $p(t)$  à l'ordre  $p(0)^{-2}$  pour des temps arbitrairement grands (Théorème 2.2 page 59).

Du fait de la périodicité en espace, le Hamiltonien du modèle génère une dynamique hamiltonienne sur  $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$  et peut être vu comme décrivant une particule en mouvement sur le tore  $\mathbb{T}^d$ , perturbé par un diffuseur ; ces modèles sont appelés rotateurs pulsés. Nous comparons donc les résultats pour les rotateurs pulsés au comportement asymptotique pour les rotateurs frappés, où les particules sont en mouvement dans un champ de potentiel de la forme

$$V(q, t) = \lambda \sum_n \delta(t - n)v(q),$$

et où  $v$  est une fonction régulière par rapport à sa première variable. Nous obtenons numériquement, pour ce système,

$$\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t, \quad \langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^3$$

en toute dimension. Nous montrons de plus que ces lois de puissances peuvent être intuitées en adaptant la raisonnement utilisant une marche aléatoire à ce modèle.

Le but des chapitres 3 et 4 est de prouver les Théorèmes 1.4 et 1.8. Ces démonstrations faisant appel à des notions de probabilités non triviales, le chapitre 3 est consacré au rappel des définitions et résultats nécessaires. On retiendra en particulier le Théorème 3.47, montrant sous certaines conditions la convergence en distribution d'une suite de processus stochastiques vers la solution d'un problème aux martingales. Il permet de montrer que la suite de processus stochastiques  $(Y_t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  définis par

$$Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} = \frac{\xi_k^2}{n}, \quad k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket \quad (7)$$

$$Y_t^{(n)} = (k + 1 - nt) Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} + (nt - k) Y_{\frac{k+1}{n}}^{(n)}, \quad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, \quad (8)$$

avec  $\xi_k$  comme dans les Théorèmes 1.4 ou 1.8, converge vers un processus de Bessel, ce qui permet de prouver les Théorèmes 1.4 et 1.8. Le Théorème 3.47, énoncé et démontré par Stroock et Varadhan dans [79] est très technique. Nous mettrons en évidence les idées principales de sa démonstration en montrant un cas particulier (Théorème 4.3).

Dans les trois derniers chapitres, nous nous intéressons à un analogue des modèles étudiés dans les chapitres 1 et 2 dans le cas dissipatif. Le but est de démontrer en toute rigueur la relation d'Einstein à temps fini pour ces modèles. On a donc besoin de décrire une interaction entre les particules et le réservoir. La démonstration de la relation d'Einstein en temps fini est faite dans le chapitre 7. Auparavant, nous aurons besoin de décrire la classe de modèles étudiée (chapitre 5) et de montrer l'existence et la régularité d'un flot global en temps (chapitre 6).

Dans ce nouveau modèle, les particules sont en mouvement dans  $\mathbb{R}^n$  ou sur le tore  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  et interagissent avec un réservoir composé de diffuseurs centrés en les points  $x$  d'un sous-ensemble  $E_1$  de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{T}^n$ . Ces diffuseurs sont des bains d'oscillateurs, indexés par  $k \in E_2$ , et sont tous

identiques. Les équations du mouvement sont alors

$$\dot{q}_t = p_t, \quad (9)$$

$$\dot{p}_t = F + \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) \omega_k^2 c_k \varphi_{k,t}(x) \nabla \rho(x - q_t), \quad (10)$$

$$\ddot{\varphi}_{k,t}(x) = -\omega_k^2 \varphi_{k,t}(x) - \omega_k^2 c_k \rho(x - q_t), \quad (11)$$

où  $q$  et  $p$  sont la position et le moment conjugué d'une particule,  $\xi$  est le couple  $(q, p)$  et  $\phi = \{(\varphi_k(x), \pi_k(x)), x \in E_1, k \in E_2\}$  regroupe les déplacements et moments des oscillateurs. L'interaction entre la particule et le réservoir, générant la dissipation, est définie par la fonction  $\rho$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact. Le Hamiltonien du modèle est alors

$$\begin{aligned} H(\xi, \phi) = & \frac{|p|^2}{2} - F \cdot q + \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) \frac{\pi_k(x)^2 + \omega_k^2 \varphi_k(x)^2}{2} \\ & + \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) \omega_k^2 c_k \varphi_k(x) \rho(x - q). \end{aligned} \quad (12)$$

Nous avons donc dorénavant un nombre infini de degrés de liberté. Afin de travailler à température positive, nous devons permettre au réservoir d'avoir une énergie infinie. Nous construisons donc, dans le chapitre 5, une échelle d'espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_{res}^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , décroissante, permettant de définir l'espace des phases du réservoir  $\mathcal{N}' = \cup_s \mathcal{H}_{res}^s$ , dual de l'espace  $\mathcal{N} = \cap_s \mathcal{H}_{res}^s$  et sur lequel il existe des états du système à énergie infinie. Cette échelle d'espaces est construite en adaptant la méthode développée dans [42], dans le cas d'un potentiel extérieur confinant et non d'une force constante. Nous montrons de plus l'existence d'une mesure de Gibbs  $\mu_{res}^\beta$  sur  $\mathcal{N}'$  (Proposition 5.11), définissant l'équilibre thermodynamique du réservoir à température positive. Cette proposition affirme de plus que les espaces  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  sont de mesure pleine dans  $\mathcal{N}'$  pour  $s > 1$ .

Dans le chapitre 6, nous nous intéressons aux solutions du système (9)-(11). Nous détaillons dans une première section un exemple de condition initiale dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N}'$  du système couplé à laquelle correspond une solution explosant en temps fini. Cela illustre la difficulté d'obtenir des théorèmes d'existence de solution à temps infini. Pour montrer l'existence locale de solutions, nous restreignons l'ensemble des conditions initiales à  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  (ou  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ), pour des valeurs de  $s$  dans un intervalle  $]1, s_c - 1[$ ,  $s_c > 2$ ; ces espaces sont de mesure pleine dans l'espace des phases. L'existence de solutions globales en temps est ensuite démontrée pour toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  d'une part, et pour toute condition initiale dans  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  d'autre part. Enfin, nous montrons dans les deux dernières sections du chapitre le caractère  $\mathcal{C}^1$  des solutions par rapport à la force  $F$  (Théorèmes 6.6 et 6.7).

Le dernier chapitre (chapitre 7) est dédié à la démonstration de la relation d'Einstein à temps fini pour le modèle où les particules évoluent dans le tore. Nous montrons dans un premier temps (Théorème 7.1) l'existence d'une mesure de Gibbs  $\mu^\beta$  pour le système couplé particule-réservoir. Nous définissons alors la mobilité  $m$  et la matrice de diffusion  $D$  par

$$m(t) := \partial_F \left( \frac{\left\langle \int_0^t p_\tau^F d\tau \right\rangle}{t} \right)_{|F=0} \quad \text{et} \quad D_{i,j}(t) := \frac{1}{2t} \left\langle \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' p_{j,\tau}^0 p_{i,\tau'}^0 \right\rangle,$$

où la notation  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'intégrale par rapport à  $\mu^\beta$ . Nous démontrons alors la relation d'Einstein à temps fini.

**Théorème 7.3 p.162** *Avec ces notations, on a à tout instant  $t > 0$*

$$m(t) = \beta D(t).$$

# Chapitre 1

## Mouvement dans un gaz de Lorentz inélastique, non dissipatif et aléatoire

### 1.1 Introduction

On étudie ici le mouvement

$$\ddot{q}(t) = F(q(t), t) \quad (1.1)$$

de particules rapides dans un champ de force aléatoire dont les corrélations spatiales sont à courte portée, alors que les corrélations temporelles ne le sont pas nécessairement. On s'intéresse à deux classes de modèles différentes. Dans la première, à laquelle on s'intéressera plus particulièrement, la force est supposée de la forme

$$F(q, t) = \sum_N f_N \left( \frac{q - q_N}{\ell}, \frac{t}{\sigma} \right), \quad (1.2)$$

où les  $f_N$  sont des fonctions régulières à support compact inclus dans une boule centrée en 0 et de rayon  $1/2$ , dont on détaillera les caractéristiques dans la section 1.2 ;  $\ell, \sigma > 0$  sont les échelles de longueur et de temps. Les fonctions  $f_N$  modélisent un réseau aléatoire ou périodique de diffuseurs identiques, orientés aléatoirement, centrés en les points  $q_N$ , et qui évoluent périodiquement ou quasi-périodiquement en fonction du temps. On fait l'hypothèse  $\inf_{N \neq M} \|q_N - q_M\| \geq \ell$ , de sorte que les forces locales  $f_N \left( \frac{q - q_N}{\ell}, \frac{t}{\sigma} \right)$  ne se chevauchent pas. Par conséquent, la particule interagit avec au plus un diffuseur à la fois, et évolue librement entre deux collisions avec un potentiel aléatoire. Ce modèle décrit donc un *gaz de Lorentz inélastique et non-dissipatif* qu'on appellera « mou », c'est-à-dire une distribution de diffuseurs centrés en les points  $q_N$ , sur lesquels la particule rebondit de façon inélastique. Les conditions initiales sont supposées aléatoires, et on impose au système d'être à horizon fini, de sorte que toute particule évoluant librement croise le support de  $F$  en un temps futur  $t$ .

Afin de justifier la terminologie et de comparer avec les théories existantes, on rappelle que dans le cadre d'un gaz de Lorentz standard, la diffusion est *élastique*, et que les diffuseurs sont des obstacles durs tous identiques et fixes, centrés en des points fixes  $q_N$ , dont la distribution spatiale peut être aléatoire, périodique ou quasi-périodique. Contrairement à notre modèle, l'énergie de la particule dans le gaz de Lorentz est conservée et il a été montré dans [14] que la variance du déplacement de la particule se comporte de façon diffusive, du fait de propriétés fortement chaotiques de la dynamique locale. Un gaz de Lorentz dur mais *inélastique* est étudié dans [58, 59], où les rayons des obstacles oscillent en fonction du temps, périodiquement

ou aléatoirement. L'énergie de la particule croît alors avec le temps, avec un exposant proche de 1 dans les deux cas. Le comportement de la variance du déplacement n'est en revanche pas analysé dans ces travaux. Finalement, un modèle *dissipatif*, en lien avec le gaz de Lorentz ainsi qu'avec les modèles considérés ici, a été étudié dans [76, 49] ; la diffusion y est engendrée par un réseau unidimensionnel d'oscillateurs représentant les degrés de liberté environnementaux d'un milieu à l'équilibre thermique. Le système complet, composé d'une particule en interaction avec un bain d'oscillateurs, a été traité en utilisant la dynamique hamiltonienne et la conservation de l'énergie totale. L'interaction hamiltonienne de la particule avec le bain d'oscillateurs engendre, en plus d'une force aléatoire, une force de friction effective qui provoque une *dissipation* de tout excès d'énergie de la particule, et par conséquent un équilibre avec l'environnement. Il est alors montré que l'énergie cinétique moyenne de la particule est asymptotiquement constante et que son mouvement est diffusif, avec une constante de diffusion dépendant de la température.

La force (1.2) considérée ici est obtenue de la même façon que dans [76, 49] en supprimant le terme de friction de la force engendré par l'impact de la particule sur le milieu. L'accélération stochastique de la particule induite par le champ de force aléatoire implique alors une accélération non bornée de la particule. On calcule ici les lois de puissance par rapport au temps de l'énergie cinétique moyenne de la particule  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle / 2$  et de la variance de son déplacement  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$ , ainsi que les échelles de temps auxquelles ces phénomènes apparaissent.

Dans l'autre classe de modèles considérés dans ce chapitre, la force  $F(q, t)$  est un champ aléatoire homogène en temps et en espace vérifiant

$$\langle F(q, t) \rangle = 0, \quad \langle F(q, t) F(q', t') \rangle = \frac{\ell^2}{\sigma^4} C \left( \frac{q - q'}{\ell}, \frac{t - t'}{\sigma} \right), \quad (1.3)$$

où  $C$  est une fonction matricielle à décroissance rapide en sa variable d'espace, mais pas nécessairement décroissante en sa variable temporelle. Pour ces modèles, comme pour (1.2), on s'intéresse au comportement asymptotique de  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$ .

Il existe de nombreux travaux dans la littérature de physique et de physique mathématique sur des problèmes de ce type, motivés en partie par des questions de physique des plasmas, d'astronomie et de physique des solides (voir par exemple [80, 75, 30, 3]). Dans la plupart des travaux mathématiques rigoureux sur le sujet, on cherche, avec des changements d'échelle adaptés, des équations de Fokker-Planck satisfaites par la densité de la particule (c'est en particulier le cas dans [69, 39]). Cependant, de telles analyses ne peuvent donner directement d'information sur les comportements asymptotiques de l'énergie cinétique moyenne et de la variance du déplacement de la particule.

En physique théorique, la plupart des modèles étudiés dans la littérature sont ceux dérivant de potentiels aléatoires Gaussiens, et on trouve des affirmations contradictoires quant aux lois de puissance de  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$ . Pour des champs de potentiel delta-corrélés en temps mais pas en espace, pour la limite du faible couplage, on trouve généralement (voir par exemple [43]) les comportements asymptotiques  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t$  et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^3$ ; par contre, il existe une certaine controverse à propos de ces comportements lorsque le champ de potentiel Gaussien a des corrélations temporelles de durées finies mais non nulles. Dans ce cas, il est expliqué dans les articles [38, 52, 74] qu'en dimension  $d = 1$ ,  $\langle p(t)^2 \rangle \sim t^{2/5}$  et que  $\langle q(t)^2 \rangle \sim t^{12/5}$ , comportements compatibles avec les résultats numériques et théoriques présentés ici. Par contre, dans [40], il est affirmé qu'en dimension  $d = 1$ ,  $\langle q(t)^2 \rangle \sim t^3$ , tout comme dans le cas des potentiels aléatoires delta-corrélés en temps. Pour des dimensions  $d > 1$ , on trouve dans [38] que  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{1/2}$ , et que  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^{9/4}$ . Dans [74], les conclusions de [38] pour  $d > 1$  sont contestées et il est montré que pour des potentiels aléatoires Gaussiens à corrélations spatiales et temporelles décroissant rapidement,  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/5}$  en toute dimension, et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^2$  lorsque  $d > 1$ .

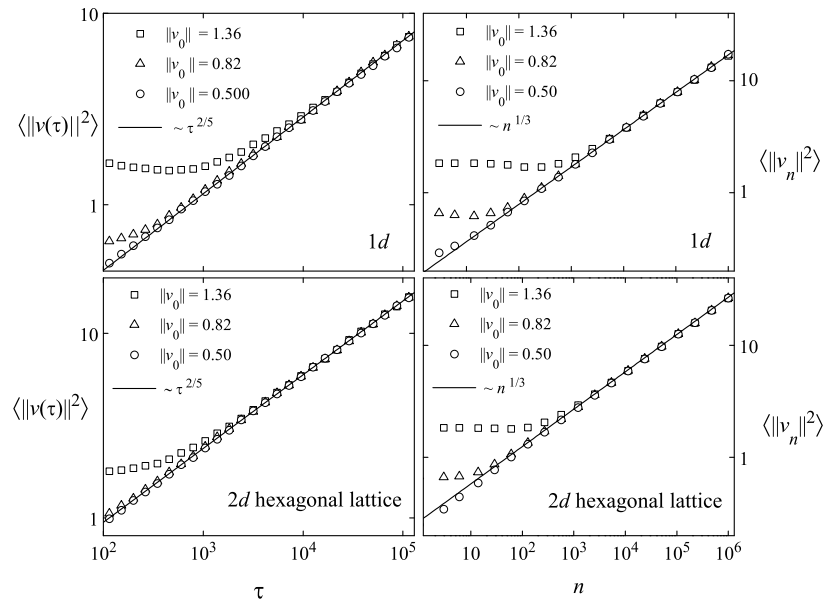


FIG. 1.1 – Valeurs déterminées numériquement de  $\langle \|v(\tau)\|^2 \rangle$  et  $\langle \|v_n\|^2 \rangle$  en dimension 1 (haut) et pour un réseau à maille hexagonale en dimension 2 (bas), pour le modèle décrit dans la section 1.7. Sur chaque graphique, les différents symboles correspondent à différentes conditions initiales, comme indiqué dans les légendes, et les courbes en trait plein représentent les lois de puissance données par (1.4).

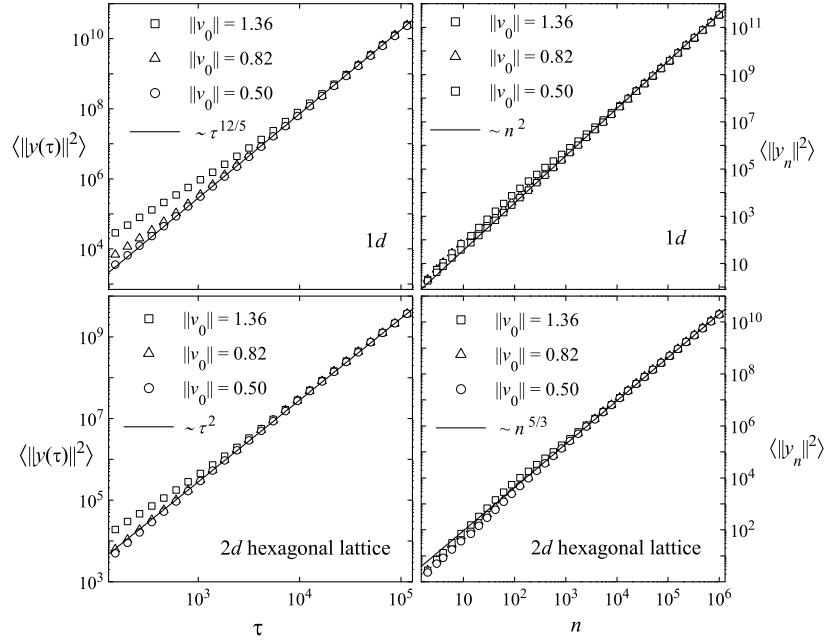


FIG. 1.2 – Valeurs déterminées numériquement de  $\langle \|y(\tau)\|^2 \rangle$  et  $\langle \|y_n\|^2 \rangle$ , en dimension 1 (haut), et pour un réseau à maille hexagonale en dimension 2 (bas), pour le modèle décrit dans la section 1.7. Sur chaque graphique, les différents symboles correspondent à différentes conditions initiales, comme indiqué dans les légendes, et les courbes en trait plein représentent les lois de puissance données par (1.5) et (1.6).

Bien qu'il y ait une étude numérique dans [52] confirmant les prédictions en dimension  $d = 1$  de [38, 52, 74], nous n'avons trouvé aucune simulation numérique en dimension supérieure. Afin d'aider à résoudre la controverse existant sur le sujet, on présentera des résultats numériques en dimensions 1 et 2 sur un modèle particulièrement simple (non Gaussien) où la force aléatoire s'exprime comme dans (1.2), et qui permet une intégration numérique efficace des équations de mouvement pour des temps très longs. Les détails complets des simulations numériques sont présentés dans la section 1.7, mais les principaux résultats dans le cas où la force  $F$  dérive d'un champ de potentiel sont présentés dans les Figures 1.1 et 1.2, où on a tracé les quantités  $\langle \|v\|^2 \rangle = \langle \|p\sigma/\ell\|^2 \rangle$  et  $\langle \|y\|^2 \rangle = \langle \|q/\ell\|^2 \rangle$ , en fonction du temps adimensionné  $\tau = t/\sigma$  et du nombre de collisions  $n$ , qui indique le nombre de diffuseurs visités par la particule.

Les résultats numériques indiquent qu'en dimensions 1 et 2,

$$\langle \|v(\tau)\|^2 \rangle \sim \tau^{2/5}, \quad \langle \|v_n\|^2 \rangle \sim n^{1/3}, \quad (1.4)$$

ce qui concorde avec les résultats de [38, 52, 74]. En dimension 1, la variance du déplacement est superballistique, avec

$$\langle y(\tau)^2 \rangle \sim \tau^{12/5}, \quad \langle y_n^2 \rangle \sim n^2. \quad (1.5)$$

Par contre, en dimension 2,  $\langle \|y(\tau)\|^2 \rangle$  devient balistique, c'est-à-dire

$$\langle \|y(\tau)\|^2 \rangle \sim \tau^2, \quad \langle \|y_n\|^2 \rangle \sim n^{5/3}. \quad (1.6)$$

Ces lois de puissance sont différentes de celles prédites dans [38] pour des potentiels Gaussiens, mais coïncident avec les prédictions faites pour ce cas dans [74].

Afin de comprendre les résultats numériques en dimensions 1 et 2 et de pouvoir établir ce qui se passe pour les modèles du type (1.2) et (1.3) en dimension plus grande, ce chapitre est consacré à une analyse mathématique mettant en évidence les mécanismes principaux du problème. Cette analyse apporte en particulier un moyen de calculer les lois de puissance de l'énergie cinétique moyenne et de la variance du déplacement associées à un ensemble de particules en mouvement dans des champs de force aléatoires dépendant du temps des types décrits précédemment.

Elle est fondée sur l'étude de la trajectoire typique d'une particule en mouvement dans un champ de force fluctuant avec le temps décrit par (1.2) ou (1.3) ; ce mouvement peut être vu comme une suite d'événements diffusifs isolés. On argumente que le mouvement est bien approché par une marche aléatoire à temps discret couplant les position et moment de la particule. Chaque pas de temps correspond à une collision de la particule avec un unique diffuseur, ou à la traversée par la particule d'une distance de l'ordre de la longueur de corrélation du potentiel. Les variations du moment cinétique, à chaque pas, sont traitées comme des événements aléatoires indépendants dont la magnitude dépend de la vitesse de la particule. Une analyse théorique de la marche aléatoire obtenue montre que le comportement pour des vitesses élevées du changement du moment de la particule lors d'un tel événement diffusif détermine entièrement les propriétés asymptotiques du mouvement. Comme on le montre, ce comportement à énergie élevée n'est pas sensible aux détails du champ de force, et donc ni à ses propriétés statistiques, ni à la géométrie précise des diffuseurs ; le comportement asymptotique du mouvement est par conséquent presque universel, et n'est en particulier pas spécifique aux champs de potentiel Gaussiens.

En effet, pour des champs de force obtenus comme gradients de champs de potentiel, on trouve (Théorème 1.2) que le changement d'énergie subi par une particule de vitesse  $v$  satisfait  $\Delta E \sim \|v\|^{-1}$ . Ce résultat, associé à l'analyse de la marche aléatoire obtenue dans l'espace des moment et position, aboutit à une croissance de  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  qui est, en toute dimension, de la forme observée sur la Figure 1.1, et décrite par (1.4). En dimension 1, notre analyse prédit que  $\langle q^2(t) \rangle$  croît en temps comme dans l'équation (1.5), et conformément aux résultats du graphique en haut à gauche de la Figure 1.2. En toute dimension plus grande que 1, on prédit une croissance comme celle observée sur le graphique en bas à gauche sur la figure 1.2, et décrite par (1.6). Cette croissance plus faible de  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  en dimension plus grande que 1 vient du fait que la particule peut maintenant tourner durant son déplacement, puisque l'orientation de son vecteur vitesse réalise une marche aléatoire résultant de petites déflexions aléatoires.

La même analyse s'applique aussi au cas où  $F(q, t)$  ne dérive pas d'un champ de potentiel, contexte souvent étudié dans la littérature mathématique. On trouve que pour un champ de force n'étant pas un gradient, la variation d'énergie lors d'un seul événement diffusif est considérablement plus grande que lorsque le champ de force s'écrit comme un gradient :  $\Delta E \sim 1$  (Théorème 1.6). Par conséquent, on prédit un taux d'accélération plus grand  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/3}$  (voir (1.60)), ce qui confirme les résultats rigoureux obtenus en dimension  $d \geq 4$  dans [25, 45] sous des hypothèses techniques convenables sur les forces  $f_N$  intervenant dans (1.2). Notre analyse aboutit au fait qu'en toute dimension, le mouvement de la particule dans un champ de force aléatoire ne dérivant pas d'un potentiel est superbalistique avec  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^{8/3}$  (voir (1.61)). La principale raison de la différence de comportement par rapport au cas d'un champ dérivant d'un potentiel est que la particule tourne plus lentement : elle est en effet plus vite accélérée

et donc moins facilement déviée. La différence entre ces deux cas se retrouve dans le fait que les champs de force provenant d'un gradient et dépendant du temps induisent de plus petites variations de l'énergie de la particule que ceux ne dérivant pas d'un gradient. C'est une conséquence de la conservation d'énergie, propriété caractéristique des champs dérivant d'un potentiel et dépendant du temps.

Le problème posé ici est lié à celui de la croissance de l'énergie d'une particule confinée dans un potentiel dépendant de façon (quasi-)périodique du temps, comme par exemple dans le cas des rotateurs pulsés ou frappés ou dans celui des accélérateurs de Fermi. On montrera dans le chapitre 2 comment les techniques développées ici peuvent s'appliquer aussi à ce type de problème.

Le reste du chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 1.2, on introduit la description du mouvement d'une particule dans un champ de diffuseurs par une marche aléatoire. Des propriétés générales de la marche, satisfaites dans les cas gradient et non gradient, sont décrites dans la section 1.3. La section 1.4 est vouée au calcul des lois de puissance dans le cas d'un champ de force dérivant d'un gradient, l'analyse du cas non gradient est faite dans la section 1.5. Dans la section 1.6, on adapte l'analyse faite dans les sections précédentes 1.3-1.5 au cas du champ de force aléatoire de la forme (1.3), et on obtient des résultats pour les cas gradient et non gradient identiques à ceux trouvés respectivement dans les sections 1.4 et 1.5. Les détails des simulations numériques, dont les résultats sont présentés dans les figures au fur et à mesure de l'article, sont donnés dans la section 1.7. Enfin, les démonstrations des résultats mathématiques utilisés dans les sections 1.3 à 1.6 sont détaillées dans la section 1.8. La démonstration rigoureuse du comportement asymptotique de  $\langle \|v_n\|^2 \rangle$  (Théorèmes 1.4 et 1.8) est faite dans les chapitres 3 et 4. Par contre, le comportement asymptotique de la variance du déplacement est obtenu de façon formelle et on ne donnera pas ici de démonstration rigoureuse.

## 1.2 Une particule dans un champ de diffuseurs : description par une marche aléatoire

On décrit dans un premier temps les hypothèses faites sur les fonctions  $f_N$  dans (1.2) sous lesquelles on travaille. On utilise dans toute la suite, après un changement d'échelle, les nouvelles variables ( $\ell > 0, \sigma > 0$ )

$$\tau = \frac{t}{\sigma} \in \mathbb{R}, \quad y(\tau) = \frac{q(t)}{\ell} \in \mathbb{R}^d, \quad v(\tau) = \dot{y}(\tau) = \frac{\sigma}{\ell} p(t), \quad x_N = \frac{q_N}{\ell}$$

et on suppose que  $f_N$  est de la forme

$$f_N(y, \tau) = \frac{\ell}{\sigma^2} c_N M_N g(M_N^{-1} y, \omega \tau + \phi_N^0). \quad (1.7)$$

Les localisations  $x_N, N \in \mathbb{Z}^d$ , des centres des diffuseurs peuvent être choisies de façon aléatoire (avec une densité uniforme) ou sur un réseau régulier. Les constantes de couplage  $c_N$  sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $[-1, 1]$  et sont identiquement distribuées selon une mesure de probabilité  $\nu$  qui n'est pas concentrée en 0. Les  $M_N$  sont des matrices de rotation appartenant à  $\text{SO}(d, \mathbb{R})$  et sont elles aussi indépendantes et identiquement distribuées, suivant la mesure de Haar invariante à gauche sur  $\text{SO}(d, \mathbb{R})$ . Les diffuseurs sont par conséquent des objets tous identiques, orientés aléatoirement dans l'espace et tous décrits par la même fonction  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ , supposée assez régulière et à support compact dans la boule centrée en l'origine et de rayon  $1/2$  en sa première variable;  $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$  est le tore de dimension  $m$  et

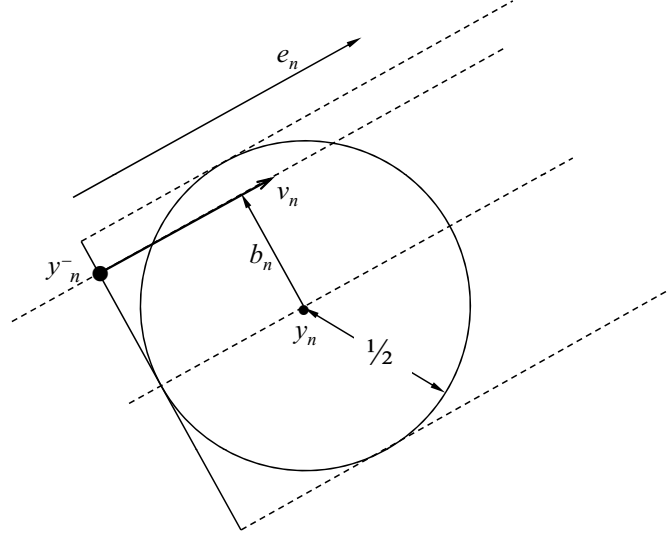


FIG. 1.3 – Une particule arrivant, à l’instant  $\tau_n$ , avec une vitesse  $v_n$  et un paramètre d’impact  $b_n$ , sur le  $n$ –ième diffuseur centré au point  $y_n$ .

$\omega \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|\omega\| = 1$ . Lorsque  $\omega$  a des composantes irrationnelles, la force est quasi-périodique ; sinon, elle est périodique. Les paramètres  $\phi_N^0 \in \mathbb{T}^m$  sont des phases initiales choisies aléatoirement, indépendantes, identiquement et uniformément distribuées sur le tore. On désigne par  $d\mu(M, \phi, c)$  la mesure de probabilité ainsi décrite sur  $\text{SO}(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}^m \times [-1, 1]$ . On ne fait, à ce stade, pas d’hypothèse sur la dérivation d’un gradient ou pas de la force. La classe de modèle décrite par ces hypothèses est assez riche pour englober les diffuseurs pulsant, vibrant et en rotation ; un exemple explicite est décrit dans la section 1.7.

Dans la nouvelle échelle, les équations de mouvement (1.1)-(1.2) deviennent

$$\ddot{y}(\tau) = G(y(\tau), \tau), \quad G(y, \tau) = \sum_N c_N M_N g(M_N^{-1}(y - x_N), \omega\tau + \phi_N^0). \quad (1.8)$$

On peut interpréter  $g(y, \omega\tau + \phi)$  comme la force produite par un diffuseur mou, centré en l’origine et dépendant du temps ;  $G$  décrit alors un *champ* de diffuseurs *identiques*, orientés aléatoirement, et centrés en les points  $x_N$ . On suppose que le système est à horizon fini, de sorte que la distance parcourue par une particule libre est majorée par une distance  $L > 0$  fixée, uniformément en temps et en espace et indépendamment de la direction suivie par la particule. Donc, avec probabilité 1, pour tout  $(y, v, \tau) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}$  tel que  $G(y, \tau) = 0$ , on a

$$\sup\{\tau' > 0 \mid \forall 0 \leq \tau'' \leq \tau', G(y + v\tau'', \tau + \tau'') = 0\} \leq \frac{L}{\|v\|}. \quad (1.9)$$

On considère une particule qui à l’instant initial  $\tau_0 = 0$  est proche du diffuseur centré en  $x_0 = 0$  et s’en rapproche avec une vitesse  $v_0$  dans une direction initiale qui, suivie sans déviation, l’amène au point de sa trajectoire le plus proche du centre de la force, point défini par le paramètre d’impact  $b_0 \in \mathbb{R}^d$  (voir figure 1.3). Après l’action inélastique du diffuseur centré en  $x_0$  sur la particule, cette dernière se déplace librement avec une nouvelle vitesse  $v_1$  jusqu’à ce qu’elle

rencontre un second diffuseur. En poursuivant le raisonnement, on obtient une succession aléatoire d'événements diffusifs. Le  $n$ -ième événement commence par définition de l'instant  $\tau_n$ , à partir duquel la particule se rapproche, avec une vitesse  $v_n$  et en partant du point (voir la Figure 1.3)

$$y_n^- = y_n - \frac{1}{2}e_n + b_n, \quad b_n \cdot e_n = 0, \quad \|b_n\| \leq \frac{1}{2},$$

du diffuseur centré en  $y_n = x_{N_n}$ , où  $e_n = v_n/\|v_n\|$ , et où le paramètre d'impact  $b_n$  est un vecteur perpendiculaire au vecteur vitesse. Le  $n$ -ième diffuseur en lui-même est caractérisé par son orientation  $M_n := M_{N_n}$ , sa phase  $\phi_n := \omega\tau_n + \phi_{N_n}^0$  à l'instant où la particule le rencontre, et la constante de couplage  $c_n := c_{N_n}$ .

Le changement de vitesse subi par une particule suffisamment rapide lors de la traversée du  $n$ -ième diffuseur peut s'écrire (Proposition 1.13)

$$v_{n+1} = v_n + R(v_n, b_n, M_n, \phi_n, c_n) \quad (1.10)$$

où, pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $b \in \mathbb{R}^d$  avec  $v \cdot b = 0$ , et  $(M, \phi, c) \in \text{SO}(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$ ,

$$R(v, b, M, \phi, c) = c \int_0^{+\infty} d\tau' M g(M^{-1}y(\tau'), \omega\tau' + \phi), \quad (1.11)$$

avec  $y(\tau)$  l'unique solution de

$$\ddot{y}(\tau) = c M g(M^{-1}y(\tau), \omega\tau + \phi), \quad y(0) = b - \frac{1}{2} \frac{v}{\|v\|}, \quad \dot{y}(0) = v.$$

Une fois que la particule n'est plus sous l'influence du  $n$ -ième diffuseur, elle se déplace sur une distance  $\eta_n$  avec une vitesse  $v_{n+1}$  vers le  $(n+1)$ -ième diffuseur, qu'elle rencontre après un intervalle de temps de taille  $\Delta\tau_n = \eta_n/\|v_{n+1}\|$ .

En se basant sur cette description de la dynamique et en ignorant le rôle des recollisions, on peut affirmer que la dynamique d'un ensemble de particules en mouvement dans un champ de force décrit par (1.2) est bien approché par une marche aléatoire à temps discret couplant les moment et position. Chaque pas de la marche est associé à un événement diffusif, où les variables  $M_n, \phi_n, c_n$  caractérisant le diffuseur, et les variables  $\eta_n, b_n$  caractérisant l'approche du diffuseur par la particule, sont choisis aléatoirement à partir des distributions qui les caractérisent dans le système auquel on s'intéresse. Ainsi, en partant d'une distribution initiale donnée  $(y_0, v_0)$ , on détermine de façon itérative la vitesse, la position et l'instant caractérisant la particule juste avant le  $n$ -ième événement diffusif grâce aux relations :

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + R(v_n, \kappa_n) \\ \tau_{n+1} &= \tau_n + \frac{\eta_n}{\|v_{n+1}\|} \\ y_{n+1} &= y_n + \eta_n e_{n+1} \end{aligned} \right\}$$

où  $\kappa_n = (b_n, M_n, \phi_n, c_n)$ . Les paramètres  $(M_n, \phi_n, c_n)$  sont choisis de façon indépendante suivant les distributions décrites précédemment (la distribution de  $\phi_n$  étant la même que celle de  $\phi_n^0$ ). On peut, sans perdre de phénomène physique essentiel, remplacer la variable aléatoire  $\eta_n$  dans (1.12) à chaque pas de temps par la distance moyenne  $\eta_* = \langle \eta_n \rangle < L$  qui sépare les événements diffusifs :

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + R(v_n, \kappa_n) \\ \tau_{n+1} &= \tau_n + \frac{\eta_*}{\|v_{n+1}\|} \\ y_{n+1} &= y_n + \eta_* e_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Les  $b_n$  sont tirés de façon indépendante à chaque pas, uniformément dans la boule de dimension  $d - 1$ , de rayon  $1/2$  et perpendiculaire à  $v_n$ . Pour résumer, cette marche aléatoire décrit le mouvement d'une particule se déplaçant librement sur une distance  $\eta_*$ , puis rencontrant, avec un paramètre d'impact aléatoire, un diffuseur orienté aléatoirement, à un instant aléatoire de son évolution (quasi-)périodique. Après la diffusion, le processus se répète. Notre hypothèse de base est alors que cette description retranscrit de manière assez fidèle une trajectoire typique dans le vrai système.

Dans toute la suite du chapitre, on désigne par  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne sur les réalisations du processus aléatoire  $\kappa_n$ . Dans les sections 1.3 à 1.6, on étudie le comportement asymptotique de cette marche aléatoire, sous les conditions suivantes.

**Hypothèse 1.1.** *La fonction  $g \in C^3(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$  est à support compact en la variable  $y$ , avec son support dans la boule de rayon  $1/2$  centrée en l'origine. La fonction  $g$  et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre trois sont toutes bornées, et on écrit*

$$0 < g_{\max} := \|g\|_{\infty} < +\infty.$$

*Si  $g(y, \phi) = -\nabla_y W(y, \phi)$ , on suppose la fonction  $W \in C^4(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$  elle aussi à support dans la boule de rayon  $1/2$  et centrée en l'origine en la variable  $y$ . De plus,  $(\omega \cdot \nabla_{\phi})W \neq 0$  et, si  $d = 1$ , on impose que pour certains  $\phi \in \mathbb{T}^m$ , on ait*

$$\int_{\mathbb{R}} dy (\omega \cdot \nabla_{\phi}) W(y, \phi) \neq 0. \quad (1.13)$$

L'intérêt de (1.13) sera expliqué dans la Remarque 1.3.

### 1.3 Analyse de la marche aléatoire dans le cas général

On passe maintenant à l'analyse du comportement pour des  $n$  grands de la première équation de (1.12)

$$v_{n+1} = v_n + R(v_n, \kappa_n), \quad (1.14)$$

qui est indépendante des autres. On suppose que les particules sont rapides, c'est-à-dire qu'on impose  $\|v_0\|^2 \gg cg_{\max}$  (Lemme 1.12). On a alors besoin de comprendre le comportement pour des moments élevés du transfert de moment  $R(v_n, \kappa_n)$ , ainsi que le comportement du transfert d'énergie

$$\Delta E(v_n, \kappa_n) = \frac{1}{2} \left( (v_n + R(v_n, \kappa_n))^2 - v_n^2 \right). \quad (1.15)$$

Une théorie de la perturbation à l'ordre 1 permet d'écrire (voir Proposition 1.13 pour les détails)

$$\begin{aligned} R(v_n, \kappa_n) &= \frac{c_n}{\|v_n\|} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda M_n g \left( M_n^{-1} \left( b_n + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) e_n \right), \frac{\omega \lambda}{\|v_n\|} + \phi_n \right) \\ &\quad + O(\|v_n\|^{-3}). \end{aligned}$$

Plus généralement, si  $g$  est assez régulière, on peut écrire, pour  $K \in \mathbb{N}^*$  et  $(v, \kappa) \in \mathbb{R}^{2d} \times \text{SO}(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$ , avec  $b \cdot v = 0$ ,

$$R(v, \kappa) = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha^{(k)}(e, \kappa)}{\|v\|^k} + O(\|v\|^{-K-1}), \quad e = \frac{v}{\|v\|}. \quad (1.16)$$

On remarque que

$$\alpha^{(1)}(e, \kappa) = c \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \, Mg \left( M^{-1} \left( b + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) e \right), \phi \right) \quad (1.17)$$

et que

$$\alpha^{(2)}(e, \kappa) = c \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \, \lambda \partial_\tau Mg \left( M^{-1} \left( b + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) e \right), \phi \right), \quad (1.18)$$

où on utilise la notation

$$\partial_\tau := \omega \cdot \nabla_\phi. \quad (1.19)$$

On a donc

$$\Delta E(v, \kappa) = \sum_{\ell=0}^L \frac{\beta^{(\ell)}(e, \kappa)}{\|v\|^\ell} + O(\|v\|^{-L-1}), \quad (1.20)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \beta^{(0)} &= e \cdot \alpha^{(1)} \\ \beta^{(1)} &= e \cdot \alpha^{(2)} \\ \beta^{(2)} &= \left( \frac{1}{2} \alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(1)} + e \cdot \alpha^{(3)} \right) \\ \beta^{(3)} &= \left( \alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)} + e \cdot \alpha^{(4)} \right) \\ \beta^{(4)} &= \left( \frac{1}{2} \alpha^{(2)} \cdot \alpha^{(2)} + \alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(3)} + e \cdot \alpha^{(5)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

On peut alors facilement remarquer que le développement (1.16) a des coefficients dominants différents suivant que  $g$  est un champ de vecteur dérivant d'un gradient ou pas. En effet, lorsque  $g = -\nabla W$ , le terme du premier ordre dans le transfert de moment (1.16) est orthogonal au moment rentrant  $v$ , de sorte que

$$\beta^{(0)}(e, \kappa) = e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa) = 0. \quad (1.22)$$

Par conséquent,  $\Delta E \sim \|v\|^{-1}$  dans ce cas. De plus, on a alors

$$\beta^{(1)}(e, \kappa) = c \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \, \partial_\tau W \left( M^{-1} (b + \lambda e), \phi \right). \quad (1.23)$$

En revanche, lorsque  $g$  ne provient pas d'un gradient,  $\beta^{(0)}$  ne s'annule pas et on a alors  $\Delta E \sim 1$ . Cette différence est à l'origine des différences de comportements asymptotiques pour  $\langle \|v_n\|^2 \rangle$  et  $\langle \|y_n\|^2 \rangle$  dans ces deux cas, comme on le verra plus tard.

Un calcul simple et utile dans la suite, à partir des équations (1.14)-(1.16), permet d'écrire

$$e_{n+1} = \left( 1 - \frac{\Delta E_n}{\|v_n\|^2} \right) \left[ e_n + \frac{R_n}{\|v_n\|} \right] + O \left( \frac{(\Delta E_n)^2}{\|v_n\|^4} \right) = e_n + \delta_n, \quad (1.24)$$

où  $R_n = R(v_n, \kappa_n)$  et  $\Delta E_n = \Delta E(v_n, \kappa_n)$ . On déduit alors de (1.21)

$$\begin{aligned} \delta_n &= \left( \alpha_n^{(1)} - (\alpha_n^{(1)} \cdot e_n) e_n \right) \frac{1}{\|v_n\|^2} + \left( \alpha_n^{(2)} - (\alpha_n^{(2)} \cdot e_n) e_n \right) \frac{1}{\|v_n\|^3} \\ &\quad + \left( \alpha_n^{(3)} - (\alpha_n^{(3)} \cdot e_n) e_n \right) \frac{1}{\|v_n\|^4} - \frac{1}{2} \left( \alpha_n^{(1)} \cdot \alpha_n^{(1)} \right) \frac{e_n}{\|v_n\|^4} \\ &\quad - \left( \alpha_n^{(1)} \cdot e_n \right) \frac{\alpha_n^{(1)}}{\|v_n\|^4} + O(\|v_n\|^{-5}) \\ &= \delta_n^{(4)} + O(\|v_n\|^{-5}). \end{aligned}$$

On utilise ici la notation  $\alpha_n^{(k)} = \alpha^{(k)}(e_n, \kappa_n)$ . On peut alors décomposer  $\delta_n$  sous la forme  $\delta_n = \delta_n^\perp + \mu_n e_n$ , avec  $\delta_n^\perp \cdot e_n = 0$  et, puisque  $\|e_{n+1}\| = 1 = \|e_n\|$ ,

$$\begin{aligned} \mu_n &= -1 + \sqrt{1 - \delta_n^\perp \cdot \delta_n^\perp} \leq 0 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \alpha_n^{(1)} \cdot \alpha_n^{(1)} \right) \frac{1}{\|v_n\|^4} - \left( \alpha_n^{(1)} \cdot e_n \right)^2 \frac{1}{\|v_n\|^4} + O(\|v_n\|^{-5}). \end{aligned}$$

Pour toute fonction  $f$  dépendant de  $v$  et de  $\kappa = (b, M, \phi, c)$ ,  $b \cdot v = 0$ ,  $\|b\| \leq 1/2$ , on désignera sa moyenne par rapport aux paramètres associés au diffuseur par

$$\overline{f(v)} = \int \frac{db}{C_d} \int d\mu(M, \phi, c) f(v, b, M, \phi, c), \quad (1.25)$$

où  $C_d$  est le volume de la boule de rayon  $1/2$  dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ .

## 1.4 Analyse de la marche aléatoire dans le cas d'un gradient

On s'intéresse dans cette section au cas où  $g = -\nabla_y W$ . Le théorème suivant, dont la démonstration est détaillée dans la section 1.8, décrit le changement d'énergie lors d'une collision unique et sera essentiel dans l'obtention des résultats annoncés en introduction.

**Théorème 1.2.** *On suppose que l'Hypothèse 1.1 est satisfaite et que  $g = -\nabla_y W$ .*

(i) *Pour tout vecteur unitaire  $e \in \mathbb{R}^d$ , on a*

$$\overline{\alpha^{(1)}(e)} = 0 = \overline{\alpha^{(2)}(e)}. \quad (1.26)$$

De plus, pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\overline{\Delta E(v)} = \frac{B}{\|v\|^4} + O(\|v\|^{-5}), \quad \overline{(\Delta E(v))^2} = \frac{D^2}{\|v\|^2} + O(\|v\|^{-3}), \quad (1.27)$$

où

$$B = \frac{d-3}{2} D^2 \quad (1.28)$$

et

$$D^2 = \frac{\overline{c^2}}{C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^{2d}} dy_0 dy'_0 \|y_0 - y'_0\|^{1-d} \partial_\tau W(y_0, \phi) \partial_\tau W(y'_0, \phi) > 0. \quad (1.29)$$

En particulier, pour tout vecteur unitaire  $e \in \mathbb{R}^d$  et tout  $\ell = 1, 2, 3$ ,

$$\overline{\beta^{(\ell)}(e)} = 0, \quad B = \overline{\beta^{(4)}(e)} \text{ et } D^2 = \overline{(\beta^{(1)}(e))^2} > 0. \quad (1.30)$$

(ii) Soient  $v_n$  le processus aléatoire défini par (1.14) et  $e_n = v_n / \|v_n\|$ . Soit, pour  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_n^{(\ell)} := \beta^{(\ell)}(e_n, \kappa_n)$ . Alors, pour tout  $n \neq n' \in \mathbb{N}$  et tout  $0 \leq \ell \leq \ell' \leq 3$ , on a

$$\left. \begin{aligned} \langle \beta_n^{(4)} \rangle - B &= 0 = \langle \beta_n^{(\ell)} \rangle, \\ \langle \beta_n^{(\ell)} \beta_{n'}^{(\ell')} \rangle &= 0 = \langle \beta_n^{(\ell)} (\beta_{n'}^{(4)} - B) \rangle = \langle (\beta_n^{(4)} - B) (\beta_{n'}^{(4)} - B) \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

De plus,  $\langle (\beta_n^{(4)})^2 \rangle$  et  $\langle \beta_n^{(\ell)} \beta_n^{(4)} \rangle$  sont indépendants de  $n$ .

**Remarque 1.3.** (i) La partie (i) du théorème ne fait pas intervenir la marche aléatoire (1.14). Il s'agit juste d'une affirmation à propos des fonctions  $\alpha^{(\ell)}(e, \kappa)$  et  $\beta^{(\ell)}(e, \kappa)$ , vues comme des variables aléatoires en  $\kappa$ .

(ii) Le fait que  $D^2$  soit strictement positif est équivalent au fait que  $\beta^{(1)}$  ne soit pas identiquement nul. Cela provient de l'Hypothèse 1.1, et plus particulièrement du fait que la dérivée temporelle du potentiel ne soit pas nulle. C'est bien le résultat escompté puisque dans le cas d'un potentiel indépendant du temps, l'énergie est conservée à tous les ordres et qu'alors on a  $\beta^{(1)} = 0$ . En dimension 1, l'hypothèse supplémentaire (1.13) est nécessaire pour s'assurer que  $\beta^{(1)} \neq 0$  : en effet, quand  $d = 1$ ,  $\beta^{(1)} = 0$  dès que le potentiel a une moyenne spatiale nulle. Dans ce cas, certains termes d'ordres inférieurs  $\beta^{(\ell)}$  ne s'annuleront pas et, comme on le verra dans la suite, cela pourrait changer les lois de puissance de l'accélération stochastique. De telles situations ne seront pas étudiées ici, mais pourraient l'être facilement en utilisant les méthodes développées dans la suite.

(iii) Dans l'équation (1.27), on voit que le changement d'énergie typique au cours d'une collision est d'ordre  $D/\|v\|$ , pour de grandes valeurs de  $\|v\|$ , alors que sa valeur moyenne  $B/\|v\|^4$  est bien plus petite. De plus, on a une légère perte d'énergie en dimension  $d \leq 2$  et un gain lorsque  $d \geq 4$ . On verra dans ce qui suit que même pour les petites dimensions et asymptotiquement en temps, l'énergie croît en moyenne, malgré ce terme de perte.

On se concentre d'abord sur le comportement asymptotique de  $\langle \|v_n\|^2 \rangle$ , où  $v_n$  est le processus stochastique défini par (1.14). Le développement (1.20) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\|v_{n+1}\|^2}{\|v_n\|^2} &= 1 + \sum_{i=1}^4 \frac{2\beta_n^{(i)}}{\|v_n\|^{i+2}} + O(\|v_n\|^{-7}), \\ \frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_n\|} &= 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_n^{(i)}}{\|v_n\|^{i+2}} + O(\|v_n\|^{-6}), \\ \|v_{n+1}\| - \|v_n\| &= \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_n^{(i)}}{\|v_n\|^{i+1}} + \frac{\beta_n^{(4)} - \frac{1}{2}(\beta_n^{(1)})^2}{\|v_n\|^5} + O(\|v_n\|^{-6}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\|v_n\|^3 &= \|v_n\|^2 \Delta\|v_n\| \left[ 1 + \frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_n\|} + \frac{\|v_{n+1}\|^2}{\|v_n\|^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{3\beta_n^{(i)}}{\|v_n\|^{i-1}} + \frac{3\left(\beta_n^{(4)} + \frac{1}{2}(\beta_n^{(1)})^2\right)}{\|v_n\|^3} + O(\|v_n\|^{-4}) \\ &= 3\beta_n^{(1)} + \frac{3\left(\beta_n^{(4)} + \frac{1}{2}(\beta_n^{(1)})^2\right)}{\|v_n\|^3} + O_0(\|v_n\|^{-1}) + O(\|v_n\|^{-4}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

et

$$\|v_{n+1}\|^6 = \|v_n\|^6 + 6\beta_n^{(1)}\|v_n\|^3 + O_0(\|v_n\|^2) + 6\left(\beta_n^{(4)} + 2(\beta_n^{(1)})^2\right) + O(\|v_n\|^{-1}). \quad (1.34)$$

On désigne ici par  $O_0(\|v_n\|^\alpha)$  un terme d'ordre  $O(\|v_n\|^\alpha)$  et de moyenne nulle. On introduit les notations

$$\xi_n = \frac{\|v_n\|^3}{3D}, \quad \varepsilon_n = \frac{\beta_n^{(1)}}{D} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{3} \left( \frac{B}{D^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} (d-2) \geq -\frac{1}{6}. \quad (1.35)$$

Pour comprendre ce qui se passe, on néglige dans un premier temps les termes d'erreur dans l'équation (1.33). On obtient la marche aléatoire unidimensionnelle

$$\Delta \xi_n = \varepsilon_n + \frac{\gamma}{\xi_n} \quad \text{avec} \quad \langle \varepsilon_n \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_n^2 \rangle = 1 \quad (1.36)$$

en la variable  $\xi_n$ . Dans le membre de droite, le premier terme est le terme dominant de moyenne nulle de (1.33), alors que le second est un terme de dérive systématique et est le terme de moyenne non nulle dominant de (1.33) lorsque  $\gamma \neq 0$ .

On peut déduire de cette marche aléatoire simple le comportement en temps court de la dynamique. Si on suppose  $\xi_0 \gg |\gamma|$ , alors

$$\xi_n = \xi_0 + n \frac{\gamma}{\xi_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k,$$

et cette approximation reste correcte tant que  $|\xi_n - \xi_0| \ll \xi_0$ . Un rapide calcul montre que ceci est garanti dès que <sup>2</sup>

$$n \ll N_*(\xi_0) \sim \xi_0^2 \sim \|v_0\|^6. \quad (1.37)$$

Cette dernière inégalité donne, comme on le verra plus tard, une estimation du nombre de collisions nécessaires avant que le régime asymptotique en temps long ne s'installe. Cette dépendance par rapport à la vitesse s'observe dans les résultats numériques obtenus pour le modèle décrit dans la section 1.7, comme on le voit sur la Figure 1.4. On s'intéresse maintenant au régime asymptotique des  $\xi_n$ ,  $n \gg N_*(\xi_0)$ . On va montrer que, pour  $d \geq 2$  et  $k > -3$ ,

$$\langle \|v_n\|^k \rangle \sim n^{\frac{k}{6}}. \quad (1.38)$$

On remarque tout d'abord que c'est bien le comportement observé numériquement sur la Figure 1.1 pour  $k = 2$  et la Figure 1.5 pour  $k = -1$  et  $-2$ , pour la dynamique complète des modèles numériques décrits dans la section 1.7.

De plus, le résultat (1.38) est clairement vrai en dimension  $d = 2$ , puisqu'alors  $\gamma = 0$  et que (1.36) ne décrit plus qu'une marche aléatoire simple sur la demi-droite. Dans le cas général, en observant l'équation et en constatant que  $\gamma \geq 0$  lorsque  $d \geq 2$ , on s'attend à ce que la conséquence des termes de dérive et de diffusion de (1.36) soit  $\langle \xi_n \rangle \rightarrow +\infty$ . En dimension  $d = 1$ ,  $\gamma < 0$  et le second terme agit alors comme un terme de frottement. On montrera néanmoins que pour tout  $\gamma > -1/2$ , ce terme de frottement est trop petit pour altérer le comportement asymptotique des  $\langle \xi_n \rangle$ . Dans ce but, on remarque que

$$\Delta \xi_n^2 = (2\xi_n + \Delta \xi_n) \Delta \xi_n.$$

En ne gardant, une fois encore, que les termes dominants, on obtient

$$\Delta \xi_n^2 = 2\xi_n \varepsilon_n + 2\gamma + 1. \quad (1.39)$$

---

<sup>2</sup>A partir de maintenant, on utilise la notation  $f(x) \sim g(x)$  lorsqu'il existe  $0 < c \leq C < +\infty$  tels que  $cf(x) \leq g(x) \leq Cf(x)$ .

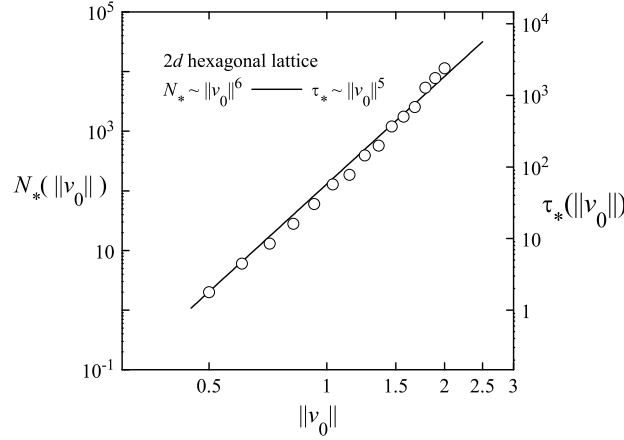


FIG. 1.4 – Les quantités  $N_*(||v_0||)$  (sur l’axe vertical de gauche) et  $\tau_*(||v_0||)$  (sur l’axe vertical de droite) en fonction de  $||v_0||$  pour une particule évoluant dans un réseau à maille hexagonale ( $d = 2$ ) décrit dans la section 1.7.

Pour tout  $\gamma > -1/2$ , on montre que le processus  $\xi_n^2$  divisé par  $n$  a une limite bien définie qui est le processus de Bessel carré en dimension  $\delta = 2\gamma + 1$ . Cela implique (1.38) pour ces valeurs de  $\gamma$  et pour tout  $k > -3$ . Pour s’en convaincre, on définit pour tous  $s \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq \sigma \leq s$ ,

$$Y_\sigma^{(n)} = \frac{s}{n} \xi_k^2, \quad \text{si } \sigma_k = k \frac{s}{n} \leq \sigma < (k+1) \frac{s}{n} = \sigma_{k+1}. \quad (1.40)$$

En multipliant l’équation (1.39) par  $s/n$ , on trouve

$$Y_s^{(n)} = Y_0^{(n)} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{Y_{\sigma_k}^{(n)}} \Delta B_{\sigma_k}^{(n)} + (2\gamma + 1) s,$$

avec

$$B_{\sigma_k}^{(n)} = \sqrt{\frac{s}{n}} \sum_{\ell=0}^{k-1} \varepsilon_\ell.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  et en écrivant  $Y_s := \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_s^{(n)}$ , on obtient

$$Y_s = Y_0 + 2 \int_0^s \sqrt{Y_s} dB_s + (2\gamma + 1) s,$$

où  $B_s$  est un mouvement Brownien en dimension 1 puisque les  $\varepsilon_n$  sont indépendants et identiquement distribués. En d’autres termes, le processus limite  $Y_s$  satisfait l’équation différentielle stochastique

$$dY_s = 2\sqrt{Y_s} dB_s + (2\gamma + 1) ds, \quad (1.41)$$

du processus de Bessel carré en dimension  $\delta = 2\gamma + 1$  (voir chapitre 3, section 3.4).

Ainsi, puisque  $\xi_n^2/n$  converge, on peut approcher sa distribution par celle de  $Y_1$  et conclure que pour tout  $\ell > -1$ ,  $\langle \xi_n^\ell \rangle \sim n^{\frac{\ell}{2}}$ , ce qui est exactement (1.38). Une version rigoureuse de ces arguments est donnée par le théorème suivant, conséquence directe du Théorème 3.1 démontré dans le chapitre 4.

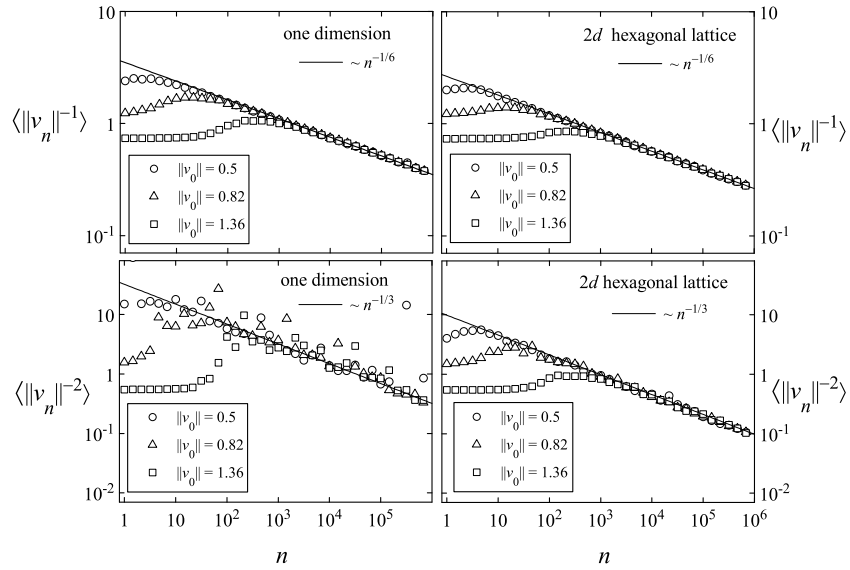


FIG. 1.5 – Résultats numériques illustrant le comportement asymptotique de  $\langle \|v_n\|^k \rangle$ , dans le cadre du modèle décrit dans la section 1.7, en dimensions 1 et 2, avec pour conditions initiales et valeurs de  $k$  les valeurs indiquées dans les légendes.

**Théorème 1.4.** *On suppose que la suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}^2 &= \xi_n^2 + 2\varepsilon_n \xi_n + O_0\left(\xi_n^{2/3}\right) + \frac{2}{3} \left( \frac{\beta_n^{(4)}}{D^2} + 2\varepsilon_n \right) + O\left(\xi_n^{-1/3}\right), \quad \text{si } |\xi_n| \geq \bar{\xi}, \\ \xi_{n+1}^2 &= \xi_n^2 + 2\gamma + 1, \quad \text{si } |\xi_n| < \bar{\xi}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

pour une valeur critique  $\bar{\xi} > 0$ . Alors en toute dimension  $d \geq 2$  et pour tout  $\ell > -[2\gamma + 1]/2$ , on a  $\langle \|v_n\|^{6\ell} \rangle = (3D)^{2\ell} \langle \xi_n^{2\ell} \rangle \sim n^\ell$ .

**Remarque 1.5.** Pour des  $\xi_n$  petits, l'hypothèse  $\xi_{n+1}^2 = \xi_n^2 + 2\gamma + 1$ , avec  $2\gamma + 1 = (d+1)/3 > 0$ , fait que les valeurs successives de  $\xi_n$  vont progressivement augmenter jusqu'à être suffisamment grandes pour reprendre la marche aléatoire (1.42). Le choix de la valeur  $2\gamma + 1$  des coups reçus par les particules pour  $\xi_n$  petit peut sembler arbitraire : n'importe quel pas  $\xi_{n+1}^2 - \xi_n^2$  strictement positif, constant ou pas, permet d'acheminer progressivement les valeurs de  $\xi_n$  vers  $\bar{\xi}$ . Le choix de cette restriction technique est justifié dans le chapitre 4.

Le Théorème 1.4 implique en particulier, en utilisant (1.12), que (voir la Figure 1.6)

$$\langle \tau_n \rangle \sim n^{5/6} \quad (1.43)$$

et donc, au final,

$$\langle v^2(\tau) \rangle \sim \tau^{2/5}, \quad \tau \gg \tau_*(\|v_0\|) := \frac{N_*(\xi_0)}{\|v_0\|} \sim \|v_0\|^5. \quad (1.44)$$

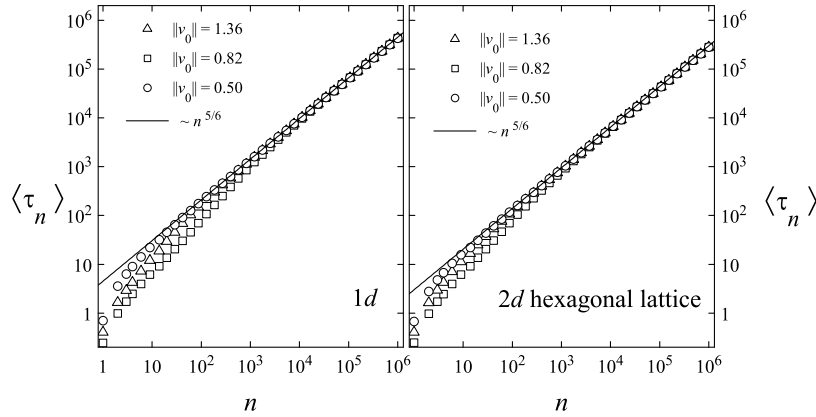


FIG. 1.6 – Évolution de l’instant de collision  $\langle \tau_n \rangle$  pour le modèle de la section 1.7, en dimensions 1 et 2, pour les vitesses initiales indiquées dans les légendes.

On remarque que le comportement asymptotique ne dépend pas de la vitesse initiale  $\|v_0\|$ ; par contre, on a montré que l’échelle de temps  $\tau_*(\|v_0\|) = \tau_{N_*(\|v_0\|)}$  à partir de laquelle il se met en place croît comme  $\|v_0\|^5$ , résultat vérifié dans les résultats numériques en dimension  $d = 2$  sur la Figure 1.4, qui représente, en fonction de  $\|v_0\|$ , le nombre de collisions  $N_*$  et le temps moyen  $\tau_*$  avant que le régime asymptotique ne s’installe.

En dimension  $d = 1$ , la même loi de puissance a été trouvée dans le cadre des champs aléatoires (Gaussiens) dans [38], [52], et [2], en utilisant différentes méthodes. Lorsque  $d > 1$ , les seules études dont nous avons connaissance sont [38] et [74] : elles traitent de champs aléatoires Gaussiens et mentionnent respectivement  $\langle \|v(\tau)\|^2 \rangle \sim \tau^{1/2}$ , qui contredit (1.44), et  $\langle \|v(\tau)\|^2 \rangle \sim \tau^{2/5}$ , qui est en accord avec (1.44). Comme mentionné en introduction, les prédictions (1.38) et (1.44), incluant le temps  $\tau_*(\|v_0\|)$  auquel le régime asymptotique s’installe, sont corroborées par des calculs numériques en dimensions 1 et 2, dont les résultats sont présentés dans la Figure 1.1 et décrits plus précisément dans la section 1.7.

On détermine maintenant le comportement asymptotique de  $\langle \|y_n\|^2 \rangle$  et  $\langle \|y(\tau)\|^2 \rangle$  (voir les équations (1.48) et (1.49) dans la suite). On s’intéresse d’abord au cas où  $d > 1$ , qui dépend clairement de la déviation du chemin de la particule par rapport à une ligne droite, c’est-à-dire de quel angle et avec quelle rapidité la particule tourne. En particulier, on a besoin d’étudier la troisième équation de (1.12). Pour cela, on analyse d’abord l’évolution des vecteurs unitaires  $e_n$ , qui exécutent une marche aléatoire sur la sphère unité en dimension  $(d - 1)$ . Pour tout  $n$ , en utilisant le Théorème 1.2(i) et l’observation que  $e_n$  est indépendant de  $\kappa_n$ , on trouve que la valeur moyenne du pas  $\delta_n$  de la marche en  $e_n$  définie par (1.24) satisfait  $\langle \delta_n \rangle = O(\|v_n\|^{-4})$ . D’autre part, l’amplitude de ce pas est

$$\|\delta_n\| = \frac{\|\alpha_n^{(1)}\|}{\|v_n\|^2} + O(\|v_n\|^{-3}) = \|\delta_n^\perp\|.$$

Étant donné que la particule arrive avec une vitesse  $\|v_n\|$  élevée au niveau du  $n$ -ième diffuseur, on veut déterminer le nombre de collisions  $m$  que la particule doit subir avant que sa direction

ne varie d'une quantité macroscopique. Pour cela, on calcule l'espérance conditionnelle

$$\langle \|e_{n+m} - e_n\|^2 \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m-1} \langle \delta_{n+k} \cdot \delta_{n+k'} \rangle.$$

On suppose que  $m$  vérifie  $m \ll N_*(\xi_n) \sim \|v_n\|^6 \sim n$ , de sorte que (1.37) implique  $\|v_{n+m}\| \sim \|v_n\|$ ; on peut donc approcher  $\|v_{n+k}\|$  par  $\|v_n\|$ . D'après le Théorème 1.2(i), on a donc, pour tout  $k$ ,

$$\langle \delta_{n+k} \cdot \delta_{n+k} \rangle = \frac{\langle \|\alpha_{n+k}^{(1)}\|^2 \rangle}{\|v_n\|^4} + O(\|v_n\|^{-5}).$$

Pour les termes non diagonaux, on remarque que, si  $k > k'$ ,

$$\begin{aligned} \langle \delta_{n+k} \cdot \delta_{n+k'} \rangle &= \langle \delta_{n+k}^\perp \cdot \delta_{n+k'}^\perp \rangle + \langle \mu_{n+k} e_{n+k} \cdot \delta_{n+k'}^\perp \rangle + \\ &\quad \langle \delta_{n+k}^\perp \cdot \mu_{n+k'} e_{n+k'} \rangle + O(\|v_n\|^{-8}). \end{aligned}$$

De plus, l'invariance par rotation du système implique que pour un  $e_{n+k}$  donné, le vecteur  $\overline{\delta_{n+k}^\perp}$  s'annule; on rappelle que la moyenne désignée par la barre est définie par (1.25). Par conséquent, si  $k > k'$ ,

$$\langle \delta_{n+k}^\perp \cdot \delta_{n+k'}^\perp \rangle = 0 = \langle \delta_{n+k}^\perp \cdot \mu_{n+k'} e_{n+k'} \rangle.$$

En écrivant  $e_{n+k} = e_{n+k'+1} + \Delta_k$ , l'invariance par rotation implique encore que l'espérance conditionnelle de  $\Delta_k$ , avec  $e_{n+k'+1}$  donné, est un vecteur  $\nu_k e_{n+k'+1}$  de longueur  $|\nu_k| \leq 2$ . On a donc

$$\langle \delta_{n+k'}^\perp \cdot \mu_{n+k} e_{n+k} \rangle = \langle \delta_{n+k'}^\perp \cdot \mu_{n+k} e_{n+k'+1} \rangle + \langle \delta_{n+k'}^\perp \cdot \mu_{n+k} \nu_k e_{n+k'+1} \rangle,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \left| \langle \delta_{n+k'}^\perp \cdot \mu_{n+k} e_{n+k} \rangle \right| &\leq 3 \langle |\delta_{n+k'}^\perp \cdot e_{n+k'+1}| |\mu_{n+k}| \rangle \\ &\leq 3 \langle |\delta_{n+k'}^\perp \cdot [e_{n+k'} + \delta_{n+k'}]| |\mu_{n+k}| \rangle \\ &\leq \frac{3}{\|v_n\|^4} \|\delta_{n+k'}^\perp\|^2 = O(\|v_n\|^{-8}). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\langle \|e_{n+m} - e_n\|^2 \rangle = m \frac{\langle \|\alpha_0^{(1)}\|^2 \rangle}{\|v_n\|^4} + mO(\|v_n\|^{-5}) + m^2O(\|v_n\|^{-8}).$$

Par conséquent, lorsque

$$m = M_*(\|v_n\|) \sim \|v_n\|^4 \sim n^{2/3} \ll n, \quad (1.45)$$

on trouve  $\langle \|e_{n+m} - e_n\|^2 \rangle \sim 1$ . Cela montre qu'après  $M_*(\|v_n\|)$  collisions, et en ne considérant pas les compensations accidentelles entre les termes diagonaux et non diagonaux, la particule tourne d'un angle macroscopique et les réalisations des vecteurs unitaires  $e_{n+m}$  couvrent la sphère unité. Dans la Figure 1.7, on a tracé les valeurs de  $M_*(\|v_0\|)$  obtenues par une étude numérique de la décroissance de la fonction de corrélation  $\langle e_n \cdot e_0 \rangle$  pour le modèle numérique bidimensionnel décrit dans la section 1.7. La loi de puissance alors observée coïncide avec celle prédite par l'analyse de la marche aléatoire faite précédemment.

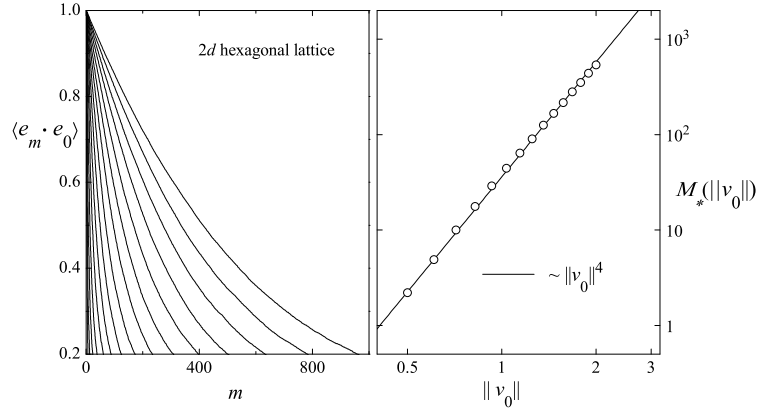


FIG. 1.7 – À gauche, la fonction de corrélation  $\langle e_m \cdot e_0 \rangle$  tracée en fonction de  $m$  pour un ensemble de quinze vitesses initiales  $||v_0||$  comprises entre 0.5 et 2.0. À droite, une estimation numérique de  $M_*(||v_0||)$  obtenue à partir des pentes initiales des données et tracée en fonction de  $||v_0||$ .

On peut maintenant étudier le comportement asymptotique de  $||y_n||$ . Pour des particules lancées à l'instant initial avec une vitesse initiale  $||v_0||$ , il faut typiquement  $M_1 = ||v_0||^4$  collisions pour que la direction du mouvement devienne aléatoire. On peut alors définir de façon récursive

$$M_{k+1} = M_k + M_k^{\frac{2}{3}}, \quad (1.46)$$

suite pour laquelle on a  $M_k \sim k^3$ . Les  $M_k$  peuvent s'interpréter de la façon suivante : lorsque  $n = M_k$ , la vitesse de la particule a subi  $k$  virages en moyenne, c'est-à-dire que sa direction a varié  $k$  fois d'une quantité macroscopique, alors que le long d'une séquence de  $m \ll M_{k+1} - M_k$  collisions entre  $M_k$  et  $M_{k+1}$ , la trajectoire suit plus ou moins une ligne droite. Cette image est utilisée pour calculer de façon approchée  $y_{M_k}$  en écrivant

$$y_{M_{k+1}} = y_{M_k} + \eta_*(M_{k+1} - M_k) e_{M_k}. \quad (1.47)$$

Cette estimation n'est pas anodine, mais l'idée est qu'en moyenne, la particule avance sans dévier pendant environ  $(M_{k+1} - M_k)$  pas dans la direction  $e_{M_k}$ . En utilisant (1.45) et (1.46), on peut considérer ces directions successives  $e_{M_k}$  comme aléatoires et indépendantes, choisies sur la sphère, de sorte que (1.47) décrit une marche aléatoire sur une échelle de longueur plus large, avec des pas indépendants d'ordre  $\eta_*(M_{k+1} - M_k) \sim k^2$ . Cela entraîne

$$\langle ||y_{M_k}||^2 \rangle \sim \sum_{\ell=1}^k \ell^4 \sim k^5 \sim M_k^{5/3}.$$

En interpolant entre les  $M_k$ , on obtient

$$\langle ||y_n||^2 \rangle \sim n^{5/3}. \quad (1.48)$$

Enfin, avec l'équation (1.43), on conclut que

$$\langle ||y(\tau)|| \rangle \sim \tau. \quad (1.49)$$

Le mouvement des particules est donc balistique, dans le sens où  $\|y(\tau)\|/\tau$ , qui décrit le taux auquel la particule s'éloigne de l'origine, reste fini en moyenne. On remarque cependant que la vitesse instantanée moyenne croît comme  $\tau^{1/5}$ , comme on l'a montré précédemment. Les particules accélèrent donc, mais leurs trajectoires font des virages, ce qui diminue la vitesse à laquelle elles s'éloignent de l'origine. Les résultats des simulations numériques en dimension  $d = 2$ , présentés dans la Figure 1.2, et décrits en détails dans la section 1.7 coïncident avec les résultats de l'étude de la marche aléatoire décrits ici.

Pour finir, on traite rapidement le cas de la dimension 1. Dans ce cas, la particule ne peut pas changer progressivement de direction, et l'analyse décrite ci-dessus ne s'applique plus. En effet, en dimension 1, un changement de direction implique un renversement complet du sens du mouvement, mais cela ne peut se produire que si la particule rencontre une séquence de diffuseurs l'arrêtant d'abord complètement. Des calculs similaires à ceux faits précédemment montrent qu'un tel phénomène ne peut apparaître sur une échelle de temps plus petite que  $M_*(\|v_0\|) \sim \|v_0\|^6$ , qui est l'échelle de temps sur laquelle, comme on l'a vu plus tôt, la particule accélère. De plus, à tout instant, on a la borne supérieure évidente

$$\langle \|y(\tau)\| \rangle \leq \int_0^\tau ds \langle \|v(\tau)\| \rangle \sim \tau^{6/5}. \quad (1.50)$$

Il est donc clair que pour des échelles de temps sur lesquelles la plupart des particules n'ont pas changé de direction, on a

$$\langle \|y_n\| \rangle \sim n, \quad (1.51)$$

ce qui avec (1.43) implique  $\langle \|y(\tau)\| \rangle \sim \tau^{6/5}$ , c'est-à-dire qu'il y a une saturation au niveau de la borne supérieure (1.50). À des temps plus longs, la distribution des instants auxquels la marche aléatoire (1.36) repasse par l'origine en  $\xi = 0$ , et qui gouverne la distribution des instants auxquels les vitesses s'inversent, pourrait changer le comportement asymptotique. Si ce type de phénomène apparaît, il le fait à des temps plus longs que ceux atteignables numériquement. En effet, jusqu'aux temps étudiés dans nos simulations numériques, la borne (1.50) semble décrire de façon précise les propriétés asymptotiques de la croissance de  $y(\tau)$ .

## 1.5 Champ de force ne dérivant pas d'un gradient

Quand le champ de force  $g$  ne dérive pas d'un potentiel  $W$ , on suppose que la distribution  $\nu$  de la constante de couplage  $c$  est centrée en 0

$$\int c \, d\nu(c) = 0, \quad (1.52)$$

de sorte que la force moyenne s'annule en tout point  $y \in \mathbb{R}^d$ . Le développement (1.20) devient

$$\|v_{n+1}\|^2 = \|v_n\|^2 + 2\beta_n^{(0)} + \frac{2\beta_n^{(1)}}{\|v_n\|} + \frac{2\beta_n^{(2)}}{\|v_n\|^2} + O(\|v_n\|^{-3}), \quad (1.53)$$

et permet d'écrire

$$\|v_{n+1}\|^4 = \|v_n\|^4 + 4\beta_n^{(0)} \|v_n\|^2 + 4\beta_n^{(1)} \|v_n\| + 4\left(\beta_n^{(2)} + \left(\beta_n^{(0)}\right)^2\right) + O(\|v_n\|^{-1}). \quad (1.54)$$

On obtient le théorème suivant, semblable au Théorème 1.2 et dont la démonstration est faite dans la section 1.8.

**Théorème 1.6.** *On suppose vérifiées l'Hypothèse 1.1 et l'égalité (1.52). Alors :*

(i) *Pour tout vecteur unitaire  $e \in \mathbb{R}^d$ ,  $\overline{\alpha^{(1)}(e)} = 0 = \overline{\alpha^{(2)}(e)}$ . De plus, pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\overline{\Delta E(v)} = \frac{B'}{\|v\|^2} + O(\|v\|^{-3}), \quad \overline{\Delta E(v)^2} = D'^2 + O(\|v\|^{-1}), \quad (1.55)$$

où  $B' = \frac{(d-1)}{2} D'^2$  et

$$D'^2 = \frac{\bar{c}^2}{C_d} \int_{T^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^{2d}} dy_0 dy'_0 \|y_0 - y'_0\|^{-(1+d)} \\ \times (y_0 - y'_0) \cdot g(y_0, \phi) (y_0 - y'_0) \cdot g(y'_0, \phi) \geq 0.$$

En particulier, pour tout vecteur unitaire  $e \in \mathbb{R}^d$  et tout  $\ell = 0, 1$ ,

$$\overline{\beta^{(\ell)}(e)} = 0, \quad B' = \overline{\beta^{(2)}(e)} \text{ et } D'^2 = \overline{(\beta^{(0)}(e))^2} \geq 0. \quad (1.56)$$

$D' > 0$  si et seulement si  $\beta^{(0)}(e, \kappa)$  n'est pas identiquement nul, ce qui implique que  $g$  n'est pas un champ de vecteur dérivant d'un potentiel.

(ii) Soient  $v_n$  le processus aléatoire défini par (1.14) et  $e_n = v_n / \|v_n\|$ . Soit, pour  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_n^{(\ell)} = \beta^{(\ell)}(e_n, \kappa_n)$ . Alors pour tous  $n \neq n' \in \mathbb{N}$  et tous  $0 \leq \ell \leq \ell' \leq 1$ , on a

$$\left. \begin{aligned} \langle \beta_n^{(2)} \rangle - B' &= 0 = \langle \beta_n^{(\ell)} \rangle \\ \langle \beta_n^{(\ell)} \beta_{n'}^{(\ell')} \rangle &= 0 = \langle \beta_n^{(\ell)} (\beta_{n'}^{(2)} - B') \rangle = \langle (\beta_n^{(2)} - B') (\beta_{n'}^{(2)} - B') \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

De plus,  $\langle (\beta_n^{(2)})^2 \rangle$  et  $\langle \beta_n^{(\ell)} \beta_n^{(2)} \rangle$  sont indépendants de  $n$ .

**Remarque 1.7.** Le fait que la force dépende ou non du temps n'a ici aucune influence, contrairement à ce qui se passait dans le Théorème 1.2. En d'autres termes, lorsque le champ de force ne dérive pas d'un gradient, le comportement prédominant du transfert d'énergie d'une particule ne dépend pas de la dépendance ou non par rapport au temps. En particulier, les coefficients  $B'$  et  $D'$  ne font pas intervenir de dérivée temporelle de la force, contrairement à  $B$  et  $D$ .

On analyse maintenant le comportement asymptotique de la vitesse et de la position de la particule, comme dans la section 1.4. À partir de l'équation (1.54) et en introduisant les notations

$$\xi'_n = \frac{\|v_n\|^2}{2D'} \quad \text{et} \quad \varepsilon'_n = \frac{\beta_n^{(0)}}{D'}, \quad (1.58)$$

on trouve

$$\xi_{n+1}'^2 = \xi_n'^2 + 2\varepsilon_n' \xi_n' + D'^{-3/2} \beta_n^{(1)} \sqrt{\xi_n'} + \left( \frac{\beta_n^{(2)}}{D'^2} + \varepsilon_n'^2 \right) + O(\xi_n'^{-1/2}). \quad (1.59)$$

On a alors un résultat semblable au Théorème 1.4.

**Théorème 1.8.** *On suppose que la suite  $(\xi_n')_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , (1.59) lorsque  $|\xi_n'| \geq \bar{\xi}$  et*

$$\xi_{n+1}'^2 = \xi_n'^2 + \frac{d+1}{2}$$

si  $|\xi_n'| < \bar{\xi}$ , pour une valeur critique  $\bar{\xi} > 0$ . Alors en toute dimension  $d \geq 1$  et pour tout  $\ell > -[(d+1)/2]/2$ , on a  $\langle \|v_n\|^{4\ell} \rangle = (2D')^{2\ell} \langle \xi_n'^{2\ell} \rangle \sim n^\ell$ .

C'est, là encore, une conséquence directe du Théorème 3.1, démontré dans le chapitre 4. En utilisant ce résultat dans la seconde équation de (1.12), on obtient

$$\langle \tau_n \rangle \sim \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell^{1/4}} \sim n^{3/4}, \quad \text{et} \quad \langle \|v(\tau)\| \rangle \sim \tau^{1/3}. \quad (1.60)$$

Ce résultat est prouvé rigoureusement dans [25] pour un champ de force ne dérivant pas d'un gradient, dépendant du temps, de la forme (1.2) et (1.7), pour les dimensions  $d \geq 4$ , et sous quelques hypothèses techniques adaptées sur  $g$  et sur la distribution des centres des diffuseurs.

On regarde maintenant ce que cela implique pour le comportement asymptotique de  $\|y(\tau)\|$ . Tout d'abord, l'échelle des temps courts  $N'_*(\xi'_0)$  est maintenant  $N_*(\xi'_0) \sim \xi_0'^2 \sim n \sim \|v_0\|^4$ . De plus, en utilisant (1.24), on trouve

$$e_{n+1} = e_n + \frac{\alpha_n^{(1)} - (\alpha_n^{(1)} \cdot e_n) e_n}{\|v_n\|^2} + O(\|v_n\|^{-3}).$$

Par conséquent,  $\langle \|e_{n+m} - e_n\|^2 \rangle \sim m/\|v_n\|^4 \sim m/n$ . La particule tourne donc maintenant d'un angle macroscopique après  $M_*(\|v_n\|) \sim \|v_n\|^4 \sim n$  collisions, c'est-à-dire bien plus longtemps après que dans le cas d'un champ de force dérivant d'un potentiel (voir (1.45)) et du même ordre que le nombre  $N_*(\|v_n\|) \sim n$  de collisions nécessaires pour accélérer de façon significative. Cela vient simplement du fait que la particule est plus rapide avec  $\|v_n\| \sim n^{1/4}$ , plutôt que  $\|v_n\| \sim n^{1/6}$ , et est plus difficilement déviée. Cela influe sur le comportement asymptotique de  $\|y(\tau)\|$  de la façon suivante. On définit comme précédemment  $M_1 = \|v_0\|^4$ ,  $M_{k+1} = M_k + M_k$ , de sorte que  $M_k \sim 2^k$ , et  $y_{M_{k+1}} = y_{M_k} + \eta_*(M_{k+1} - M_k) e_{M_k}$ . Cela s'intègre en  $\langle \|y_{M_k}\| \rangle \sim M_k$ , et on obtient

$$\langle \|y(\tau)\| \rangle \sim \tau^{4/3}, \quad (1.61)$$

indépendamment de la dimension  $d$  de l'espace ambiant.

**Remarque 1.9.** Ces résultats (équations (1.60) et (1.61)) coïncident avec les résultats rigoureux montrés dans [25]. Dolgopyat et Korolov y étudient le comportement de particules dans un champ de force  $G$  défini sur  $\mathbb{R}^d$  par

$$G(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i(y - x_i),$$

où les fonctions  $g_i$  sont des variables aléatoires définies sur un espace de probabilités  $(\Omega', \mathbb{P}')$  indépendantes et identiquement distribuées, ce sont de plus des fonctions lisses de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , à support dans une boule centrée en l'origine et ne dérivant pas d'un potentiel. Les centres  $x_i$  des diffuseurs sont distribués aléatoirement dans  $\mathbb{R}^d$  selon une loi de Poisson et indépendamment des  $g_i$ . Il est alors montré qu'en dimension  $d \geq 4$  et pour tout  $v_0$  assez grand, il existe un sous-ensemble  $\Omega'_{v_0} \subset \Omega'$  tel que  $\lim_{|v_0| \rightarrow \infty} \mathbb{P}'(\Omega'_{v_0}) = 1$  et en se plaçant sur l'espace  $\Omega'_{v_0}$  muni de la mesure de probabilité  $\mathbb{P}'_{v_0} := \mathbb{P}'/\mathbb{P}'(\Omega'_{v_0})$ , on a :

1.  $y(t)$  et  $v(t)$  tendent presque-sûrement vers l'infini quand  $t$  tend vers l'infini,
  2.  $v(c^3\tau)/c$  converge en distribution vers un processus diffusif  $\bar{v}(\tau)$  lorsque  $c$  tend vers l'infini,
  3.  $y(c^3\tau)/c^4$  converge en distribution vers un processus diffusif lorsque  $c$  tend vers l'infini.
- Dolgopyat et Korolov utilisent en particulier le fait que le processus limite  $\bar{v}$  est tel que  $|\bar{v}(\tau)|^{3/2}$  est un processus de Bessel de dimension  $2d/3$  (voir section 3.4). L'hypothèse  $d \geq 4$  permet alors de travailler avec un processus de Bessel de dimension strictement plus grande que 2 et, par conséquent, de construire un espace  $\Omega'_{v_0}$  sur lequel les trajectoires des particules ne passent presque-sûrement jamais deux fois au même endroit.

## 1.6 Champs aléatoires homogènes

On montre brièvement dans cette section que l'analyse faite dans les sections précédentes peut être adaptée, même si c'est de façon moins rigoureuse, dans le cas où le champ de force n'est pas de la forme (1.8), mais est un champ vectoriel aléatoire homogène en temps et en espace tel que

$$\langle G(y, \tau) \rangle = 0, \quad \langle G(y, \tau) G(y', \tau') \rangle = C(y - y', \tau - \tau').$$

La fonction  $C$  est à valeurs matricielles, et on suppose qu'elle décroît rapidement en sa variable d'espace, mais pas nécessairement en sa variable de temps.

Dans cette situation aussi, on s'attend à ce que le mouvement asymptotique de la particule soit bien décrit par une marche aléatoire semblable à celle décrite par (1.12), avec la différence que maintenant, le pas de temps  $\Delta\tau_n$  est déterminé par le temps mis par la particule pour parcourir une distance  $\eta_*$  égale à un multiple de la longueur de corrélation (qui vaut 1 dans les variables de la nouvelle échelle utilisées ici) du champ de force :

$$\left. \begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + R(y_n, v_n, \tau_n, \Delta\tau_n) \\ \tau_{n+1} &= \tau_n + \frac{\eta_*}{\|v_n\|}, \quad \eta_* \geq 1 \\ y_{n+1} &= y_n + \eta_* e_n. \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

Ici,  $R(y_n, v_n, \tau_n, \Delta\tau_n)$  est la variation du moment subi par une particule qui, après être arrivée en  $y_n$  à l'instant  $\tau_n$  et avec un moment  $v_n$ , se déplace pendant une durée  $\Delta\tau_n$ .

On s'intéresse dans un premier temps au cas où  $G = -\nabla W$  est un champ aléatoire dérivant d'un gradient et tel que

$$\langle W(y, \tau) \rangle = 0, \quad \langle W(y, \tau) W(y', \tau') \rangle = K(y - y', \tau - \tau'), \quad (1.63)$$

avec  $K$  une fonction à support compact contenu dans la boule unité  $\mathbb{B}(0, 1)$ , appartenant à  $\mathcal{C}^5(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , invariante par rotation et paire en sa variable de temps.

Pour étudier le comportement asymptotique de  $v_n$  défini par (1.62), on a d'abord besoin, comme dans les sections précédentes, de comprendre le comportement asymptotique de

$$\|v_n\|^2 = \|v_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\|v_k\|^2 = \|v_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 2\Delta H_k - 2(W_n - W_0), \quad (1.64)$$

où  $H_k = H(y_k, v_k, \tau_k) = \|v_k\|^2/2 + W_k$ , et  $W_k = W(y_k, \tau_k)$ . En introduisant la notation

$$\Delta H(y, v, \tau, \Delta\tau) = H(y(\tau + \Delta\tau), v(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) - H(y, v, \tau),$$

on trouve

$$\Delta H\left(y, v, \tau, \frac{\eta_*}{\|v\|}\right) = \Delta H_I\left(y, v, \tau, \frac{\eta_*}{\|v\|}\right) + \Delta H_{II}\left(y, v, \tau, \frac{\eta_*}{\|v\|}\right) + O(\|v\|^{-5}),$$

avec

$$\Delta H_I\left(y, v, \tau, \frac{\eta_*}{\|v\|}\right) = \frac{\eta_*}{\|v\|} \int_0^1 d\lambda \partial_\tau W\left(y + \eta_* \lambda e, \tau + \frac{\eta_* \lambda}{\|v\|}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta H_{II}\left(y, v, \tau, \frac{\eta_*}{\|v\|}\right) &= -\frac{\eta_*^3}{\|v\|^3} \int_0^1 d\lambda \nabla \partial_\tau W\left(y + \eta_* \lambda e, \tau + \frac{\eta_* \lambda}{\|v\|}\right) \\ &\quad \cdot \int_0^\lambda d\lambda' \int_0^{\lambda'} d\lambda'' \nabla W\left(y + \eta_* \lambda'' e, \tau + \frac{\eta_* \lambda''}{\|v\|}\right). \end{aligned}$$

On obtient alors le même type de résultat que le Théorème 1.2, avec une démonstration immédiate.

**Proposition 1.10.** *Sous les conditions détaillées ci-dessus, on a  $\langle \alpha^{(1)} \rangle = 0 = \langle \alpha^{(2)} \rangle$  et pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\langle \Delta H(v) \rangle = \frac{\tilde{B}}{\|v\|^4} + O(\|v\|^{-5}), \quad \langle (\Delta H(v))^2 \rangle = \frac{\tilde{D}^2}{\|v\|^2} + O(\|v\|^{-3}),$$

où

$$\tilde{B} = (d-3)\eta_* K^{(0)} - 2(d-4)K^{(1)}, \quad \tilde{D}^2 = 2(\eta_* K^{(0)} - K^{(1)}),$$

et

$$K^{(0)} = \int_0^1 d\mu (-\partial_t^2 K(\mu e, 0)), \quad K^{(1)} = \int_0^1 d\mu (-\mu \partial_t^2 K(\mu e, 0)).$$

*Démonstration.* En remarquant que  $\langle \Delta H_I(v) \rangle = 0$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle \Delta H(v) \rangle &= \langle \Delta H_{II}(v) \rangle \\ &= \frac{\eta_*^3}{\|v\|^3} \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda'' (\lambda - \lambda'') (\Delta \partial_t K) \left( \eta_* (\lambda - \lambda'') e, \frac{\eta_* (\lambda - \lambda'')}{\|v\|} \right) \\ &= \frac{\eta_*^4}{\|v\|^4} \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda'' (\lambda - \lambda'')^2 (\Delta \partial_t^2 K) (\eta_* (\lambda - \lambda'') e, 0) + O(\|v\|^{-5}) \\ &= \frac{\eta_*^4}{\|v\|^4} \int_0^1 d\lambda (1 - \lambda) \lambda^2 (\Delta \partial_t^2 K) (\eta_* \lambda e, 0) + O(\|v\|^{-5}). \end{aligned}$$

On utilise alors l'invariance par rotation de  $\Delta \partial_t^2 K(\cdot, 0)$  et une intégration par parties pour obtenir l'expression de  $\tilde{B}$ .

De plus, puisque

$$(\Delta H(y, v, \tau, \Delta \tau))^2 = \frac{\eta_*^2}{\|v\|^2} \left( \int_0^1 d\lambda \partial_\tau W(y + \eta_* \lambda e, \tau) \right)^2 + O(\|v\|^{-3}),$$

on trouve

$$\langle (\Delta H(v))^2 \rangle = \frac{\tilde{D}^2}{\|v\|^2} + O(\|v\|^{-3}),$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{D}^2 &= \eta_*^2 \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' (-\partial_\tau^2 K) (\eta_* (\lambda - \lambda') e, 0) \\ &= 2\eta_*^2 \int_0^1 d\lambda (1 - \lambda) (-\partial_\tau^2 K) (\eta_* \lambda e, 0). \end{aligned}$$

Un changement de variable permet de conclure.  $\square$

En multipliant  $\|v_n\|^2$  par  $(s/n)^{1/3}$  dans (1.64) et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on trouve que le processus limite  $Z_\sigma$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dZ_\sigma = \frac{2}{3} \frac{dB_\sigma}{\sqrt{Z_\sigma}} + \frac{2}{3} \left( \gamma - \frac{1}{6} \right) \frac{d\sigma}{Z_\sigma^2}, \quad \gamma = \frac{1}{3} \left( \frac{\tilde{B}}{\tilde{D}^2} + \frac{1}{2} \right).$$

En utilisant le calcul d'Itô, on a alors que  $Y_\sigma = Z_\sigma^3$  est solution de l'équation différentielle stochastique du processus de Bessel carré [73] de dimension  $\delta = 2\gamma + 1$ . En choisissant  $\eta_*$  assez grand, on peut rendre  $\gamma$  arbitrairement proche de  $(d-2)/6$ . L'analyse de la marche aléatoire est donc complètement analogue à celle de la section 1.4, et on obtient en particulier les mêmes lois de puissance pour la croissance de  $\langle \|v(\tau)\|^2 \rangle$  et  $\langle \|y(\tau)\|^2 \rangle$  que dans (1.44) et (1.49).

Dans le cas où  $G$  n'est pas un champ dérivant d'un gradient, on garde les hypothèses d'invariance par rotation et de symétrie par réflexion. Cela assure l'existence de fonctions  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  telles que la fonction de corrélation soit de la forme

$$C(y, \tau) = \Lambda_1(\|y\|, \tau) \mathbb{P}_y + \Lambda_2(\|y\|, \tau) \mathbb{P}_y^\perp,$$

où  $\mathbb{P}_y$  est le projecteur orthogonal par rapport à la direction du vecteur  $y$  et  $\mathbb{P}_y^\perp + \mathbb{P}_y = I_d$ . On suppose de plus que  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  qui décroissent rapidement en leur variable d'espace, et que pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\Lambda_1(\cdot, \tau)$  et  $\Lambda_2(\cdot, \tau)$  sont à support compact dans  $[0, 1]$ . Sous ces hypothèses, on peut monter un analogue du Théorème 1.6.

**Proposition 1.11.** *Sous les hypothèses décrites, on a  $\langle \alpha^{(1)} \rangle = 0 = \langle \alpha^{(2)} \rangle$ , et pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\langle \Delta E(v) \rangle = \frac{\tilde{B}'}{\|v\|^2} + O\left(\|v\|^{-3}\right), \quad \langle (\Delta E(v))^2 \rangle = \tilde{D}'^2 + O\left(\|v\|^{-1}\right),$$

avec

$$\tilde{B}' = \eta_*(d-1)K'^{(0)} - (d-2)K'^{(1)}, \quad \tilde{D}'^2 = 2\left(\eta_*K'^{(0)} - K'^{(1)}\right) > 0$$

et

$$K'^{(0)} = \int_0^1 d\mu \Lambda_1(\mu, 0), \quad K'^{(1)} = \int_0^1 d\mu \mu \Lambda_1(\mu, 0).$$

*Démonstration.* En calculant

$$R(y, v, \tau, \eta_*/\|v\|) = \int_\tau^{\tau+\eta_*/\|v\|} G(y(\tau'), \tau') d\tau'$$

à l'aide d'une théorie de perturbation à l'ordre 2, on obtient

$$R(y, v, \tau, \eta_*/\|v\|) = R_I(y, v, \tau, \eta_*/\|v\|) + R_{II}(y, v, \tau, \eta_*/\|v\|)$$

avec

$$R_I(y, v, \tau, \eta_*/\|v\|) = \frac{\eta_*}{\|v\|} \int_0^1 d\lambda G\left(y + \eta_*\lambda e, \tau + \frac{\eta_*\lambda}{\|v\|}\right)$$

et

$$\begin{aligned} R_{II}(y, v, \tau, \eta_*/\|v\|) &= \frac{\eta_*^3}{\|v\|^3} \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda'' (\lambda - \lambda'') \times \\ &\quad (G(y + \eta_*\lambda''e, \tau) \cdot \nabla) G(y + \eta_*\lambda e, \tau) + O\left(\|v\|^{-4}\right). \end{aligned}$$

Alors,  $\langle \alpha^{(1)} \rangle$  et  $\langle \alpha^{(2)} \rangle$  s'annulent, et donc  $\langle \beta^{(0)} \rangle$  et  $\langle \beta^{(1)} \rangle$  également. L'égalité  $w \cdot \mathbb{P}_y(v) = (v \cdot y)(w \cdot y)/y^2$  implique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(1)} \rangle &= \\ &= \frac{\eta_*^2}{2} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda'' (\Lambda_1(L|\lambda - \lambda''|, 0) + (d-1)\Lambda_2(\eta_*|\lambda - \lambda''|, 0)) \\ &= \eta_*^2 \int_0^1 d\lambda (1-\lambda) (\Lambda_1(\eta_*\lambda, 0) + (d-1)\Lambda_2(\eta_*\lambda, 0)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha^{(3)} \cdot e \rangle &= \\
 &= \eta_*^2 \int_0^1 d\lambda (1 - \lambda) (\eta_* \lambda \Lambda'_1(\lambda, 0) + (d - 1) (\Lambda_1(\lambda, 0) - \Lambda_2(\lambda, 0))) \\
 &= \eta_*^2 \int_0^1 d\lambda (((d - 2) - \lambda(d - 3)) \Lambda_1(\eta_* \lambda, 0) - (d - 1)(1 - \lambda) \Lambda_2(\eta_* \lambda, 0)).
 \end{aligned}$$

On obtient alors l'expression de  $\tilde{B}'$  en additionnant ces deux dernières équations et en faisant le changement de variable  $\mu = \eta_* \lambda$ .  $\square$

L'analyse de la marche aléatoire se fait de la même façon que dans la section 1.5, et on obtient les mêmes lois de puissance.

## 1.7 Résultats numériques

Afin d'illustrer l'analyse théorique du mouvement d'une particule dans un champ de force présentée précédemment, des calculs numériques ont été réalisés pour un réseau périodique de diffuseurs mous en dimensions 1 et 2. Dans le cas bidimensionnel, on a utilisé un réseau à maille hexagonale avec, pour  $N = (N_1, N_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $x_N = N_1 u + N_2 v$ , avec  $u = (1, 0)$  et  $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ . On s'est restreint au cas où le champ de force associé aux diffuseurs dérive d'un potentiel, en choisissant  $W$  sous la forme d'un potentiel plat, circulaire et dépendant du temps :

$$W(y, \phi) = f(\phi) \chi\left(\frac{\|y\|}{y_*}\right), \quad y \in \mathbb{R}^d, d = 1, 2,$$

où  $\chi(x) = 1$  si  $0 \leq x \leq 1$  et  $\chi(x) = 0$  sinon. Le paramètre  $y_*$  satisfait ici  $\sqrt{3}/4 < y_* < 1/2$ , lorsque  $d = 2$ , afin de s'assurer que le système soit à horizon fini ; lorsque  $d = 1$ , on prend  $y_* = 1/3$ . On s'est intéressé à trois choix différents pour la fonction  $f$ , à savoir

$$f_1(\phi) = \cos(2\pi\phi), \quad f_2(\phi) = 1 + \cos^2(2\pi\phi), \quad \phi \in [0, 1[,$$

qui engendrent des potentiels périodiques en temps, et

$$f_3(\phi) = f_3(\phi_1, \phi_2) = \cos(2\pi\phi_1) + \cos(2\pi\phi_2).$$

Dans le dernier cas, le vecteur fréquence  $\omega$  est choisi égal à  $\omega = (1, \sqrt{2})$  ; le potentiel résultant est ainsi quasi-périodique en temps. Les phases  $\phi_N$  sont choisies uniformément sur le tore, de façon indépendante pour chaque diffuseur. Les constantes de couplage  $c_N$  sont elles aussi choisies de façon indépendante avec une distribution uniforme sur  $[0, 1/2]$ , ou fixée égales à  $c_N = 1$  ou  $c_N = -1$ , pour tout  $N$ .

Chaque potentiel ainsi défini représente une barrière ou un puits de potentiel à symétrie centrale, dépendant de la phase et du choix de la constante de couplage et dont le maximum/minimum oscille en fonction du temps. Pour  $f = f_1$  et  $f_3$ , tout diffuseur agira à certains moments comme un puits de potentiel et à d'autres comme une barrière, suivant le signe de  $c_N f_1(\phi_N + \tau)$  ou de  $c_N f_3(\phi_N + \omega\tau)$  à l'instant  $\tau$  d'arrivée de la particule ; en moyenne, la force exercée en un point donné de l'espace s'annule toujours. Par contre, lorsque  $f = f_2$  et  $c_N = 1$  pour tout  $N$ ,  $c_N f_2(\phi + \tau)$  reste toujours positif, générant un réseau de barrières de potentiel oscillantes pour lequel la force moyenne en un point donné ne s'annule pas. De même, lorsque

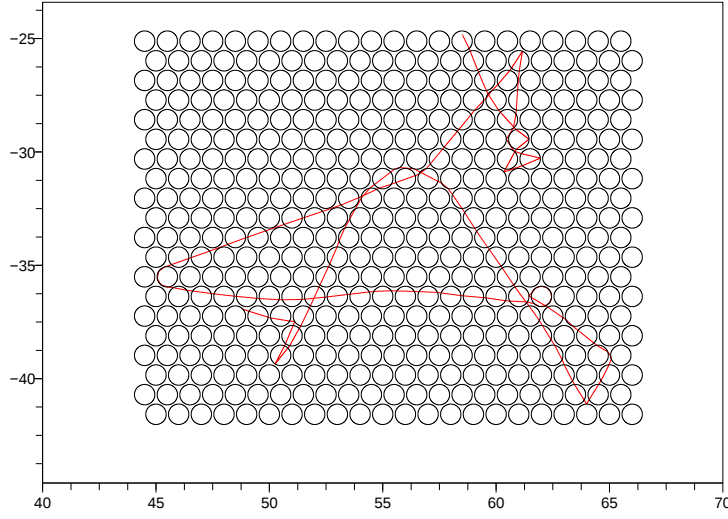


FIG. 1.8 – Un exemple de trajectoire dans la maille hexagonale.

$f = f_2$  et  $c_N = -1$  pour tout  $N$ , on obtient un réseau de puits de potentiel oscillants. Dans tous les cas étudiés numériquement, le système est à horizon fini.

Le mouvement d'une particule dans un réseau de tels diffuseurs peut se calculer par récurrence, en utilisant la conservation de l'énergie et du moment de la particule à son entrée et sa sortie du support du potentiel, et sans avoir à intégrer numériquement d'équation différentielle d'ordre 2. Cela permet de calculer la trajectoire jusqu'à des temps très longs, comme requis pour une étude de régime asymptotique. Un exemple de trajectoire est tracé dans la Figure 1.8.

Dans les simulations, chaque particule est placée initialement en un point choisi aléatoirement sur le bord du diffuseur centré en l'origine, avec un vecteur vitesse initial choisi avec égale probabilité parmi les directions pointant vers l'extérieur. Pour chaque ensemble de conditions initiales, la vitesse initiale  $\|v_0\|$  de la particule est constante et ses valeurs sont indiquées dans les légendes des figures ou sur les figures elles-mêmes. Les résultats présentés représentent les moyennes sur  $10^4$  trajectoires, pour chaque vitesse initiale. Pour faciliter la présentation, les données tracées tout au long du chapitre en fonction du temps  $\tau$  ou du nombre de collisions  $n$  ne représentent qu'un sous-ensemble des données obtenues, évaluées en des valeurs de  $\tau$  ou  $n$  régulièrement espacées sur un axe en échelle logarithmique.

On retrouve, aussi bien dans les calculs numériques que dans la théorie, que la loi de puissance de l'évolution associée à l'accélération stochastique ne dépend pas de la forme précise du potentiel ; en particulier, elle ne dépend pas de l'annulation ou non en moyenne de la force. C'est pourquoi on a choisi de ne présenter dans les figures que le cas où  $f = f_1$  et  $c_N$  est uniformément distribué dans  $[0, 1/2]$ .

Pour ce modèle en particulier, la Figure 1.1 (page 15) représente l'évolution de l'énergie cinétique moyenne de la particule, en fonction du temps  $\tau$  et du nombre de collisions  $n$ . Comme on l'a déjà mentionné, les résultats observés sont en parfait accord avec les lois de puissance prédites par l'analyse (voir (1.4), (1.38), (1.44)), dans les deux dimensions. On peut aussi remarquer sur cette figure que le régime asymptotique est atteint après une durée initiale de  $N_*(\|v_0\|)$  collisions

qui croît comme  $\|v_0\|$ . La valeur de  $N_*(\|v_0\|)$  a été calculée numériquement pour quinze valeurs de  $\|v_0\|$  entre 0.5 et 2, et le résultat est présenté dans la Figure 1.4 page 26. Là encore, la loi de puissance observée  $N_*(\|v_0\|) \sim \|v_0\|^6$  est en accord avec celle prédite dans la section 1.4 (équation (1.37)).

De même, la Figure 1.2 (page 16) représente, pour le même modèle que précédemment, l'évolution de la variance du déplacement de la particule en fonction de  $\tau$  et  $n$ . Les lois de puissance obtenues en dimensions 1 (équations (1.5) et (1.51)) et 2 (équations (1.6) et (1.48)-(1.49)) sont effectivement différentes, et correspondent à celles obtenues dans la section 1.4.

Afin d'obtenir des résultats analytiques pour une classe suffisamment large de potentiels, l'analyse théorique de la section 1.4 a été faite pour des potentiels lisses ; ce n'est clairement pas le cas des potentiels utilisés dans les simulations numériques. En effet, pour avoir des résultats numériques en temps long avec un potentiel lisse, il faudrait résoudre à chaque itération une équation différentielle du second ordre ; cela entraînerait une perte de précision et des temps de calculs trop longs. De plus, des calculs explicites spécifiques au potentiel plateau montrent que les formules (1.16) et (1.20) restent vraies, et que leurs termes dominants ont le même comportement que ceux dans l'analyse présentée ; les arguments sont ainsi toujours valides. Cela conforte encore dans l'idée que c'est le comportement à énergie élevée des transferts de moment et d'énergie lors d'un seul événement diffusif qui détermine le comportement asymptotique de la particule, et suggère que les résultats sont encore plus généraux que ceux donnés par l'analyse faite ici.

Pour finir, on remarque que les potentiels utilisés dans le modèle numérique sont invariants par rotation, et que les réseaux sont ordonnés. Ainsi, quand  $c_N$  est constant, le seul aléa qui reste dans le problème se trouve dans les phases initiales  $\phi_N$  des diffuseurs et les directions initiales  $e_0$  des particules. Par conséquent, l'essentiel de l'aléa nécessaire à l'analyse faite ici résulte de la nature dispersive des événements diffusifs eux-mêmes, qui génèrent, en évaluant le long de la trajectoire suivie par la particule, une suite aléatoire d'événements diffusifs.

## 1.8 Démonstrations des Théorèmes 1.2 et 1.6

On commence par quelques remarques préliminaires. Pour faciliter l'écriture, on définit

$$\hat{g}(y, \tau) = Mg(M^{-1}y, \omega\tau + \phi),$$

en supprimant les variables  $\phi$  et  $M$  dans les notations.

Les estimations faites dans la suite sont toutes uniformes en  $\phi$  et  $M$ . On remarque que quand  $g = -\nabla W$ , on obtient  $\hat{g} = -\nabla \hat{W}$ , avec  $\hat{W}(y, \tau) = W(M^{-1}y, \omega\tau + \phi)$ . On a besoin d'étudier les solutions de

$$\ddot{y}(\tau') = c\hat{g}(y(\tau'), \tau') = -c\nabla \hat{W}(y(\tau'), \tau'), \quad y(\tau_0) = y_0, \quad \dot{y}(\tau_0) = v_0. \quad (1.65)$$

Pour toute condition initiale  $y(\tau_0) = y_0, v(\tau_0) = v_0$ , on définit

$$v_{\pm} = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \dot{y}(\tau). \quad (1.66)$$

En particulier, si  $y_0 = b - v_0/(2\|v_0\|)$  et  $\dot{y}_0 = v_0$ , on a (équation (1.11))

$$R(v_0, \kappa) = v_+ - v_- = -c \int_{\mathbb{R}} d\tau' \nabla \hat{W}(y(\tau'), \tau'). \quad (1.67)$$

Le lemme suivant assure que ces limites existent quand  $\|v_0\|$  est assez grand.

**Lemme 1.12.** *On suppose l'Hypothèse 1.1 vérifiée. Soient  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  et  $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^{2d}$  tels que  $\|y_0\| \leq 1/2$ ,  $\|v_0\|^2 \geq 12cg_{\max}$ . Alors il existe des uniques  $\tau_{\text{in}} \leq \tau_0 \leq \tau_{\text{out}}$  tels que  $\|y(\tau_{\text{in}})\| = 5/2 = \|y(\tau_{\text{out}})\|$ . De plus,*

$$\frac{\sqrt{3}}{\|v_0\|} \leq \min\{\tau_0 - \tau_{\text{in}}, \tau_{\text{out}} - \tau_0\} \leq \max\{\tau_0 - \tau_{\text{in}}, \tau_{\text{out}} - \tau_0\} \leq \frac{3\sqrt{2}}{\|v_0\|}. \quad (1.68)$$

Ce lemme dit en substance que toute particule, se trouvant à l'instant  $\tau_0$  à l'intérieur de la région où le potentiel est non nul et ayant une énergie cinétique assez grande à cet instant, est entrée dans cette région en un instant du passé et la quittera à un instant futur, en mettant une durée d'ordre  $\frac{1}{\|v_0\|}$  pour la traverser ; les bornes inférieure et supérieure dans (1.68) seront utilisées dans la démonstration de la Proposition 1.14 énoncée plus loin. On remarque de plus que ce lemme implique en effet l'existence des limites dans (1.66).

*Démonstration.* À partir de (1.65), on peut écrire

$$y(\tau) = y_0 + v_0(\tau - \tau_0) + c \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \hat{g}(y(\tau''), \tau''), \quad (1.69)$$

de sorte que  $Q(\tau - \tau_0) \leq \|y(\tau)\| \leq P(\tau - \tau_0)$ , avec

$$Q(\tau - \tau_0) = -cg_{\max} \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} + \|v_0\| |\tau - \tau_0| - \frac{1}{2}$$

et

$$P(\tau - \tau_0) = cg_{\max} \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} + \|v_0\| |\tau - \tau_0| + \frac{1}{2}.$$

On a alors  $Q(\sigma_+) = \frac{5}{2} = P(\sigma_-)$ , où

$$\sigma_- = \frac{\|v_0\|}{cg_{\max}} \left( \sqrt{1 + \frac{4cg_{\max}}{\|v_0\|^2}} - 1 \right) \text{ et } \sigma_+ = \frac{\|v_0\|}{cg_{\max}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{6cg_{\max}}{\|v_0\|^2}} \right).$$

On remarque que  $\sigma_- \leq \sigma_+$ . Puisque  $\|y(\tau_0 \pm \sigma_-)\| \leq \frac{5}{2} \leq \|y(\tau_0 \pm \sigma_+)\|$ , on obtient l'existence de  $\tau_{\text{in}}$  et  $\tau_{\text{out}}$  satisfaisant

$$\tau_0 - \sigma_+ \leq \tau_{\text{in}} \leq \tau_0 - \sigma_- \quad \text{et} \quad \tau_0 + \sigma_- \leq \tau_{\text{out}} \leq \tau_0 + \sigma_+.$$

Leur unicité vient du fait que  $\hat{g}$  est nul en dehors de la boule de rayon  $1/2$  et que, par conséquent, la particule ne peut entrer et sortir qu'une seule fois de la boule de rayon  $5/2$ . L'équation (1.68) est due au fait que si  $0 \leq x \leq A < 1$ , alors

$$\sqrt{1+x} - 1 \geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+A}} x, \quad 1 - \sqrt{1-x} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-A}} x.$$

Il suffit de prendre  $A = 1/3$  dans la première inégalité et  $A = 1/2$  dans la seconde.  $\square$

En utilisant  $v_{\pm}$  (équation (1.66)), on définit, pour tout  $(y_0, v_0, \tau_0)$  tel que  $\|v_0\|^2 \geq 12cg_{\max}$ ,

$$\Delta v(v_0, y_0, \tau_0) := v_+ - v_-, \quad \Delta K(v_0, y_0, \tau_0) := \frac{1}{2} (v_+^2 - v_-^2). \quad (1.70)$$

On remarque que  $\Delta v$  et  $\Delta K$  sont constants le long des trajectoires :

$$\Delta v(v_0, y_0, \tau_0) = \Delta v(v(\tau'), y(\tau'), \tau'), \quad \Delta K(v_0, y_0, \tau_0) = \Delta K(v(\tau'), y(\tau'), \tau'). \quad (1.71)$$

On peut donc les interpréter comme des fonctions sur l'espace de toutes les trajectoires avec énergie cinétique suffisamment grande. On veut comprendre le comportement pour des vitesses élevées de  $\Delta K$  et de sa moyenne sur toutes les trajectoires intersectant le support du potentiel. On verra que lorsque  $\hat{g} = -\nabla \hat{W}$ , on a  $\Delta K \sim \|v_0\|^{-1}$  (Proposition 1.14) mais que la moyenne de  $\Delta K$  s'annule jusqu'au terme d'ordre  $\|v_0\|^{-4}$  (Proposition 1.15). En d'autres mots, les termes dominants de  $\Delta K$  sont de moyenne nulle. Cette observation est le coeur du Théorème 1.2, comme on le verra plus tard.

**Proposition 1.13.** *On suppose l'Hypothèse 1.1 vérifiée. Soient  $y_0, v_0 \in \mathbb{R}^d$  et  $\tau_0 \in \mathbb{R}$ , avec  $\|v_0\|^2 \geq 12cg_{\max}$ . Alors*

$$\begin{aligned} \Delta v(v_0, y_0, \tau_0) &= \frac{c}{\|v_0\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y_0 + \lambda e_0, \tau_0) d\lambda \\ &+ \frac{c}{\|v_0\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\tau \hat{g}(y_0 + \lambda e_0, \tau_0) \lambda d\lambda + O(\|v_0\|^{-3}). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Le terme d'erreur est uniforme en  $y_0, \tau_0$ ,  $c \in [-1, 1]$  et  $e_0 = v_0/\|v_0\|$ .

*Démonstration.* On suppose dans un premier temps  $\|y_0\| \leq 1/2$ . Le Lemme 1.12 implique alors que, sous les conditions énoncées en  $\|v_0\|$ , il existe des temps d'entrée et de sortie uniques  $\tau_{\text{in}}$  et  $\tau_{\text{out}}$  de la boule de rayon  $5/2$ , avec  $\tau_{\text{out}} - \tau_0$  et  $\tau_0 - \tau_{\text{in}}$  d'ordre  $\|v_0\|^{-1}$ . Par conséquent, pour les temps  $\tau < \tau_{\text{in}}$  et  $\tau > \tau_{\text{out}}$ , la particule évolue librement avec les vecteurs vitesse  $v_-$  et  $v_+$ , dans la région où la force  $\hat{g}$  est identiquement nulle. En intégrant (1.65) par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta v(v_0, y_0, \tau_0) &= c \int_{\tau_{\text{in}}}^{\tau_{\text{out}}} \hat{g}(y(\tau), \tau) d\tau \\ &= c \int_{\tau_{\text{in}}}^{\tau_{\text{out}}} \hat{g}(y_0 + v_0(\tau - \tau_0), \tau) d\tau + O(\|v_0\|^{-3}), \end{aligned}$$

où on a utilisé  $\|y(\tau) - (y_0 + v_0(\tau - \tau_0))\| \leq cg_{\max}(\tau - \tau_0)^2/2$ , conséquence directe de (1.69). On remarque alors que le Lemme 1.12 implique que

$$\|y_0 + v_0(\tau_{\text{out/in}} - \tau_0)\| \geq \|v_0\| |\tau_{\text{out/in}} - \tau_0| - \frac{1}{2} \geq 1/2.$$

Par conséquent, on peut étendre l'intégration en  $\tau$  à tout l'axe réel, l'intégrande s'annulant pour  $\tau \leq \tau_{\text{in}}$  et  $\tau_{\text{out}} \leq \tau$ . Le changement de variable  $\lambda = \|v_0\|(\tau - \tau_0)$  entraîne

$$\Delta v(v_0, y_0, \tau_0) = \frac{c}{\|v_0\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}\left(y_0 + \lambda e_0, \tau_0 + \frac{\lambda}{\|v_0\|}\right) d\lambda + O(\|v_0\|^{-3}), \quad (1.73)$$

et un développement de Taylor permet de conclure.

Reste à considérer le cas où  $\|y_0\| > 1/2$ . On suppose que la trajectoire de la particule intersecte la boule de rayon  $1/2$  centrée en l'origine : si tel n'est pas le cas,  $\Delta v(v_0, y_0, \tau_0) = 0$ , et le résultat voulu est vrai. On suppose donc que la trajectoire intersecte la boule, ainsi que  $y_0 \cdot v_0 \leq 0$ . Il existe alors un unique instant  $\tau_* > \tau_0$  auquel la trajectoire entre dans cette boule : ainsi  $y(\tau) = y_0 + v_0(\tau - \tau_0)$  pour tout  $\tau \leq \tau_*$ ,  $\|y(\tau_*)\| = 1/2$  et  $y(\tau_*) \cdot v_0 \leq 0$ . Clairement, on a

$$\Delta v(v_0, y_0, \tau_0) = \Delta v(v_0, y(\tau_*), \tau_*),$$

et on peut alors appliquer le résultat de la première partie de la preuve pour obtenir

$$\Delta v(v_0, y_0, \tau_0) = \frac{c}{\|v_0\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g} \left( y(\tau_*) + \lambda e_0, \tau_* + \frac{\lambda}{\|v_0\|} \right) d\lambda + O(\|v_0\|^{-3}). \quad (1.74)$$

Le changement de variable

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \|v_0\|(\tau_* - \tau_0)$$

transforme (1.74) en (1.73), et termine la preuve. Le cas où  $y_0 \cdot v_0 \geq 0$  se traite de façon analogue.  $\square$

Lorsque  $\hat{g} = -\nabla \hat{W}$ , on a besoin du développement à vitesse  $\|v_0\|$  élevée de  $\Delta K$  à l'ordre  $\|v_0\|^{-4}$  obtenu dans la proposition suivante.

**Proposition 1.14.** *On suppose l'Hypothèse 1.1 vérifiée et  $\hat{g} = -\nabla \hat{W}$ . Alors, pour tout  $v_0 \in \mathbb{R}^d$  tel que  $\|v_0\|^2 \geq 12cg_{\max}$  et pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\Delta K(v_0, y_0, \tau_0) = \Delta K_I(v_0, y_0, \tau_0) + \Delta K_{II}(v_0, y_0, \tau_0) + O(\|v_0\|^{-5}) \quad (1.75)$$

où

$$\Delta K_I(v_0, y_0, \tau_0) = \frac{c}{\|v_0\|} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \partial_{\tau} \hat{W} \left( y_0 + \lambda e_0, \tau_0 + \frac{\lambda}{\|v_0\|} \right), \quad (1.76)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta K_{II}(v_0, y_0, \tau_0) &= -\frac{c^2}{\|v_0\|^3} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \nabla \partial_{\tau} \hat{W} \left( y_0 + \lambda e_0, \tau_0 + \frac{\lambda}{\|v_0\|} \right) \\ &\quad \cdot \int_0^{\lambda} d\lambda' \int_0^{\lambda'} d\lambda'' \nabla \hat{W} \left( y_0 + \lambda'' e_0, \tau_0 + \frac{\lambda''}{\|v_0\|} \right). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Le terme d'erreur est uniforme en  $y_0, \tau_0$ , et en  $e_0 = v_0/\|v_0\|$ .

Les indices "I" ou "II" font référence aux premier et second ordres en  $\hat{W}$ , mais les contributions correspondantes ont chacune un développement en  $\|v_0\|^{-1}$ .

*Démonstration.* On considère d'abord le cas  $\|y_0\| \leq 1/2$ . Comme dans la démonstration de la Proposition 1.13, on peut intégrer l'équation du mouvement pour trouver

$$\Delta K(v_0, y_0, \tau_0) = -c \int_{\tau_{\text{in}}}^{\tau_{\text{out}}} \dot{y}(\tau) \cdot \nabla \hat{W}(y(\tau), \tau) d\tau = c \int_{\tau_{\text{in}}}^{\tau_{\text{out}}} \partial_{\tau} \hat{W}(y(\tau), \tau) d\tau.$$

En la combinant avec l'équation (1.69), on obtient, pour  $\tau \in [\tau_{\text{in}}; \tau_{\text{out}}]$ ,

$$\left. \begin{aligned} \|\dot{y}(\tau) - v_0\| &\leq cg_{\max} |\tau - \tau_0| \\ \|y(\tau) - (y_0 + v_0(\tau - \tau_0))\| &\leq cg_{\max} (\tau - \tau_0)^2 \\ y(\tau) &= y_I(\tau) + O(\|v_0\|^{-4}) \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

où on a utilisé (1.68) pour la dernière ligne, et où

$$y_I(\tau) = y_0 + v_0(\tau - \tau_0) - c \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \nabla \hat{W}(y_0 + v_0(\tau'' - \tau_0), \tau'').$$

On a donc

$$\Delta K(v_0, y_0, \tau_0) = c \int_{\tau_{\text{in}}}^{\tau_{\text{out}}} \partial_{\tau} \hat{W}(y_I(\tau), \tau) d\tau + O(\|v_0\|^{-5}).$$

La conclusion s'obtient en développant  $\partial_{\tau} \hat{W}(y_I(\tau), \tau)$  en  $y_0 + v_0(\tau - \tau_0)$ . Le cas  $\|y_0\| > 1/2$  se traite de la même façon que dans la démonstration de la Proposition 1.13.  $\square$

Dans le but de démontrer le Théorème 1.2, on calcule le changement d'énergie moyen sur toutes les trajectoires, pour un moment entrant ou une énergie donnés et suffisamment grands, qui intersectent la boule de rayon  $1/2$  centrée en l'origine. On rappelle que

$$\hat{g}(y, \tau) = Mg(M^{-1}y, \omega\tau + \phi);$$

ceci implique que pour  $v_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $b \cdot v_0 = 0$  et  $\kappa = (b, M, \phi + \omega\tau_0, c)$ ,

$$\Delta E(v_0, \kappa) = \Delta K\left(v_0, b - \frac{1}{2}e_0, \tau_0\right). \quad (1.79)$$

On calcule dans un premier temps la moyenne de  $\Delta E(v_0, b, M, \phi, c)$  suivant  $\phi$  :

$$\int_{\mathbb{T}^m} d\phi \Delta E(v_0, b, M, \phi, c). \quad (1.80)$$

**Proposition 1.15.** *On suppose l'Hypothèse 1.1 vérifiée. Alors, pour tout  $v_0 \in \mathbb{R}^d$  et tous  $b \in \mathbb{R}^d$ ,  $b \cdot v_0 = 0$ ,  $M \in \text{SO}(d, \mathbb{R})$ ,  $c \in [-1, 1]$ ,*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi (\Delta E(v_0, b, M, \phi, c) + \Delta E(-v_0, b, M, \phi, c)) \\ = \frac{2\widehat{\beta_{II}^{(4)}}(e_0, b, M, c)}{\|v_0\|^4} + O(\|v_0\|^{-5}), \end{aligned} \quad (1.81)$$

avec

$$\widehat{\beta_{II}^{(4)}}(e_0, b, M, c) = \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' (\lambda - \lambda')^2 \partial_\tau S\left(\lambda - \frac{1}{2}, M, \phi\right) \partial_\tau S\left(\lambda' - \frac{1}{2}, M, \phi\right), \quad (1.82)$$

et  $S(\mu, M, \phi) = \nabla W(M^{-1}(b + \mu e_0), \phi)$ .

On remarque que  $\Delta E(v_0, b, M, \phi, c)$  et  $\Delta E(-v_0, b, M, \phi, c)$  sont les changements d'énergie subis par deux particules distinctes, arrivant toutes deux sur le même obstacle au même instant avec le même paramètre d'impact, mais avec des vecteurs vitesse opposés. D'après la Proposition 1.14, chacun de ces deux termes  $\Delta E(\pm v_0, b, M, \phi, c)$  est d'ordre  $\|v_0\|^{-1}$ , de sorte que la Proposition 1.15 montre que la combinaison d'une moyenne en temps avec une « inversion de temps »  $v_0 \rightarrow -v_0$  diminue le changement d'énergie subi par la particule lors d'un événement diffusif de manière drastique.

*Démonstration.* En utilisant (1.79), on a, comme dans (1.76)-(1.77), la décomposition

$$\Delta E = \Delta E_I + \Delta E_{II} + O(\|v_0\|^{-5}). \quad (1.83)$$

On écrira de façon similaire  $\beta^{(\ell)} = \beta_I^{(\ell)} + \beta_{II}^{(\ell)}$ , où  $\beta^{(\ell)}$  est défini dans (1.20). De l'équation (1.76), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \Delta E_I(v_0, b, M, \phi, c) &= \frac{c}{\|v_0\|} \int d\lambda \int d\phi \\ &\times \partial_\tau W\left(M^{-1}\left(b + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)e_0\right), \omega\tau_0 + \frac{\omega\lambda}{\|v_0\|} + \phi\right) = 0, \end{aligned}$$

puisque  $\partial_\tau = \omega \cdot \nabla_\phi$  et  $W$  est  $\phi$ -périodique.

On s'intéresse maintenant à  $\Delta E_{II}$ , qui est d'ordre  $\|v_0\|^{-3}$  d'après l'équation (1.77) et s'écrit

$$\Delta E_{II} = \frac{\beta_{II}^{(3)}}{\|v_0\|^3} + \frac{\beta_{II}^{(4)}}{\|v_0\|^4} + O(\|v_0\|^{-5}). \quad (1.84)$$

On trouve donc

$$\beta_{II}^{(3)}(e_0, b, M, \phi, c) = -c^2 \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda' \int_0^{\lambda'} d\lambda'' \partial_\tau S\left(\lambda - \frac{1}{2}, M, \phi\right) \cdot S\left(\lambda'' - \frac{1}{2}, M, \phi\right), \quad (1.85)$$

et, en prenant directement la moyenne sur les  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \beta_{II}^{(4)}(e, b, M, \phi, c) &= \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' (\lambda - \lambda')^2 \\ &\quad \times \partial_\tau S\left(\lambda - \frac{1}{2}, M, \phi\right) \cdot \partial_\tau S\left(\lambda' - \frac{1}{2}, M, \phi\right). \end{aligned}$$

On note que dans (1.85), l'intégrande n'est en général plus un gradient par rapport à la variable  $\phi$ , sauf dans le cas particulier où  $W(y, \phi) = w(y) f(\phi)$ . Il n'y a donc a priori aucune raison pour que la moyenne par rapport à  $\phi$  de  $\beta_{II}^{(3)}(e_0, b, M, \phi, c)$  soit nulle. Cependant, en utilisant (1.85) et la définition de  $S$ , on remarque que

$$\beta_{II}^{(3)}(-e_0, b, M, \phi, c) = -c^2 \int_0^1 d\mu \partial_\tau S\left(\frac{1}{2} - \mu, M, \phi\right) \cdot \int_0^\mu d\mu' \int_0^{\mu'} d\mu'' S\left(\frac{1}{2} - \mu'', M, \phi\right).$$

En faisant dans cette dernière équation la succession de changements de variables définis par  $1/2 - \mu'' = \lambda - 1/2$ ,  $\mu' = 1 - \lambda'$ ,  $-\mu + 1 = \lambda''$ , on trouve

$$\beta_{II}^{(3)}(-e_0, b, M, \phi, c) = -c^2 \int_0^1 d\lambda'' \int_{\lambda''}^1 d\lambda' \int_{\lambda'}^1 d\lambda \partial_\tau S\left(\lambda'' - \frac{1}{2}, M, \phi\right) \cdot S\left(\lambda - \frac{1}{2}, M, \phi\right). \quad (1.86)$$

On observe alors que le domaine d'intégration est le même que dans (1.85), et que seul l'ordre des intégrations change. Ainsi, en additionnant (1.85) et (1.86), l'intégrande devient

$$S\left(\lambda - \frac{1}{2}, M, \phi\right) \cdot \partial_\tau S\left(\lambda'' - \frac{1}{2}, M, \phi\right) + \partial_\tau S\left(\lambda - \frac{1}{2}, M, \phi\right) \cdot S\left(\lambda'' - \frac{1}{2}, M, \phi\right)$$

qui est une dérivée complète par rapport au temps. La moyenne par rapport à  $\phi$  de la somme vaut donc

$$\int_{\mathbb{T}^m} d\phi \left( \beta_{II}^{(3)}(e_0, b, M, \phi, c) + \beta_{II}^{(3)}(-e_0, b, M, \phi, c) \right) = 0. \quad (1.87)$$

Un calcul similaire aboutit à

$$\int_{\mathbb{T}^m} d\phi \beta_{II}^{(4)}(-e_0, b, M, \phi, c) = \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \beta_{II}^{(4)}(e_0, b, M, \phi, c). \quad (1.88)$$

En additionnant les différentes contributions et en utilisant (1.83), on obtient la conclusion de la proposition.  $\square$

On a maintenant tous les éléments pour démontrer le Théorème 1.2.

*Démonstration du Théorème 1.2.* (i) En remarquant que

$$\nabla \hat{W}(y, \tau) = M \nabla W(M^{-1}y, \omega\tau + \phi),$$

on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{e \cdot b=0} db \nabla \hat{W} \left( b + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) e, \tau \right) = 0$$

puisque  $\hat{W}$  est à support compact en sa première variable. Par conséquent,  $\overline{\alpha^{(1)}} = 0$ , où  $\overline{\cdot}$  est défini par (1.25). De même, une intégration par rapport à la variable  $\phi$  donne que  $\overline{\alpha^{(2)}(e)}$  est nul. Pour prouver (1.27), on note d'abord qu'avec l'invariance par rotation du système, on a  $\frac{\Delta E(M'v_0, M'b, M'M, \phi, c)}{\Delta E(M'v_0)} = \frac{\Delta E(v_0, b, M, \phi, c)}{\Delta E(v_0)}$ , pour tout  $M' \in \text{SO}(d, \mathbb{R})$ . Par conséquent,  $\frac{\Delta E(M'v_0)}{\Delta E(M'v_0)} = \frac{\Delta E(v_0)}{\Delta E(v_0)}$ . Cela implique que  $\frac{\Delta E(v_0)}{\Delta E(v_0)}$  ne dépend que de  $\|v_0\|$  et non pas de  $e_0$ . En particulier,  $\frac{\Delta E(-v_0)}{\Delta E(v_0)} = \frac{\Delta E(v_0)}{\Delta E(v_0)}$ . En utilisant (1.81), on en déduit que

$$\overline{\Delta E(v_0)} = \frac{\overline{\beta_{II}^{(4)}}}{\|v_0\|^4} + O(\|v_0\|^{-5}).$$

Cela prouve la première équation dans (1.27). En utilisant

$$\Delta E(v, \kappa) = \frac{\beta^{(1)}(e, \kappa)}{\|v\|} + O(\|v\|^{-2}),$$

la deuxième équation de (1.27) et l'équation (1.30) sont immédiates.

Il reste à montrer (1.28) et (1.29). Pour cela, on calcule  $B$  :

$$\begin{aligned} B &= \overline{\beta_{II}^{(4)}} \\ &= \frac{\overline{c^2}}{2} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{S}^d} d\Omega(e_0) \int_{b \cdot e_0=0} \frac{db}{C_d} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' (\lambda - \lambda')^2 \\ &\quad \tilde{S}(b + (\lambda - \frac{1}{2})e_0, \phi) \cdot \tilde{S}(b + (\lambda' - \frac{1}{2})e_0, \phi) \end{aligned}$$

avec  $\tilde{S}(y, \phi) = \nabla \partial_\tau W(y, \phi)$ . La formule de changement de variables (1.89), prouvée dans la suite, implique

$$B = \frac{\overline{c^2}}{2C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} dy' \|y - y'\|^{3-d} \tilde{S}(y, \phi) \cdot \tilde{S}(y', \phi).$$

La définition de  $\tilde{S}$  et deux intégrations par parties entraînent

$$B = \frac{\overline{c^2}}{2C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} dy' \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} \partial_{y'_i} \|y - y'\|^{3-d} \partial_\tau W(y, \phi) \partial_\tau W(y', \phi).$$

Puisque

$$\partial_{y_i} \partial_{y'_i} \|y - y'\|^{3-d} = (d-3) \left( (1-d)(y_i - y'_i)^2 + \|y - y'\|^2 \right) \|y - y'\|^{-1-d},$$

on obtient

$$B = (d-3) \frac{\overline{c^2}}{2C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} dy' \|y - y'\|^{1-d} \partial_\tau W(y, \phi) \partial_\tau W(y', \phi).$$

Les équations (1.23) et (1.30) impliquent

$$\begin{aligned} D^2 &= \overline{c^2} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{S}^d} d\Omega(e_0) \int_{b \cdot e_0=0} \frac{db}{C_d} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{\mathbb{R}} d\lambda' \partial_\tau W(M^{-1}(b + (\lambda - \frac{1}{2})e_0), \phi) \\ &\quad \partial_\tau W(M^{-1}(b + (\lambda' - \frac{1}{2})e_0), \phi). \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables (1.89), cette égalité se réécrit

$$D^2 = \frac{\overline{c^2}}{C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\mathbb{R}^d} dy' \|y - y'\|^{1-d} \partial_\tau W(y, \phi) \partial_\tau W(y', \phi),$$

ce qui prouve les équations (1.28) et (1.29).

(ii) Comme  $v_n$  est défini par (1.14), il ne dépend que des  $\kappa_k$  pour  $k < n$  et est donc indépendant de  $\kappa_n$ . Les équations de (1.30) impliquent alors  $\langle \beta_n^{(\ell)} \rangle = 0 = \langle \beta_n^{(4)} \rangle - B$ . La même remarque s'applique au calcul des corrélations. Par exemple, en calculant  $\langle \beta_n^{(\ell)} \beta_{n+k}^{(\ell')} \rangle$ , pour tout  $k$  strictement positif, on peut intégrer d'abord par rapport à  $\kappa_{n+k}$ , et le résultat suit grâce à (i).  $\square$

**Lemme 1.16.** *En dimension  $d \geq 2$ , pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\|y_0 - y'_0\|^{1-d} f(y_0, y'_0, \|y_0 - y'_0\|) \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$ , on a*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^d} d\Omega(e_0) \int_{b \cdot e_0 = 0} db \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{\mathbb{R}} d\lambda' f(b + \lambda e_0, b + \lambda' e_0, |\lambda - \lambda'|) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dy_0 \int_{\mathbb{R}^d} dy'_0 \|y_0 - y'_0\|^{1-d} f(y_0, y'_0, \|y_0 - y'_0\|). \end{aligned} \quad (1.89)$$

*Démonstration.* Soient  $y_0$  et  $y'_0$  dans  $\mathbb{R}^d$ , avec  $y_0 \neq y'_0$ . Il existe un unique  $(\lambda, \lambda', e_0, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^d$  avec  $(y_0 - y'_0) \cdot e_0 > 0$  et tel que

$$y_0 = b + \lambda e_0, \quad y'_0 = b + \lambda' e_0 \text{ et } b \cdot e_0 = 0.$$

Puisque  $e_0 \in \mathbb{S}^d$ , il existe aussi un unique  $(d-1)$ -uplet d'angles  $(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) \in [0, \pi]^{d-2} \times [0, 2\pi]$  vérifiant

$$e_0 = R u_1, \quad R = R_{d-1}(\theta_{d-1}) \cdots R_1(\theta_1),$$

où  $(u_1, \dots, u_d)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  et  $R_i(\theta)$  est la rotation d'angle  $\theta$  dans le plan défini par  $u_i$  et  $u_{i+1}$ . Comme  $R^{-1}b$  est orthogonal à  $u_1$ , il existe aussi un unique  $(\rho, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_{d-1}) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi]^{d-3} \times [0, 2\pi]$  tel que

$$b = \rho R \tilde{R} u_2, \quad \tilde{R} = R_{d-1}(\tilde{\theta}_{d-1}) \cdots R_2(\tilde{\theta}_2).$$

On obtient l'égalité suivante :

$$dy_0 dy'_0 = |J| d\lambda d\lambda' d\rho \prod_{i=1}^{d-1} d\theta_i \prod_{j=2}^{d-1} d\tilde{\theta}_j,$$

où

$$|J| = \begin{vmatrix} R u_1 & 0_{d \times 1} & R \tilde{R} u_2 & N & M \\ 0_{d \times 1} & R u_1 & R \tilde{R} u_2 & N & M' \end{vmatrix},$$

$$N = \rho R \nabla_{\tilde{\theta}}(\tilde{R} u_2),$$

$$M = \nabla_{\theta}(R(\rho \tilde{R} u_2 + \lambda u_1)) \text{ et } M' = \nabla_{\theta}(R(\rho \tilde{R} u_2 + \lambda' u_1)).$$

Des manipulations simples sur les lignes et les colonnes aboutissent à

$$|J| = \left| \begin{array}{cc|c} Ru_1 & R\tilde{R}u_2 & N \\ \hline 0_{d \times d} & Ru_1 & M' - M \end{array} \right| = |\lambda' - \lambda|^{d-1} \rho^{d-2} J_1 J_2,$$

avec  $J_1 = |Ru_1; \nabla_\theta Ru_1|$  et  $J_2 = |u_1; \tilde{R}u_2; \nabla_{\tilde{\theta}} \tilde{R}u_2|$ . Le résultat suit en remarquant que

$$d\Omega(e_0) = J_1 \prod_{i=1}^{d-1} d\theta_i \text{ et } db = \rho^{d-2} J_2 d\rho \prod_{j=2}^{d-1} d\tilde{\theta}_j.$$

□

*Démonstration du Théorème 1.6.* On calcule  $R(v, \kappa)$  en utilisant une théorie de perturbation à l'ordre deux, de façon similaire au calcul fait dans la démonstration de la Proposition 1.14, et on trouve

$$R(v, \kappa) = R_I(v, \kappa) + R_{II}(v, \kappa) + O(\|v\|^{-4}), \quad (1.90)$$

où

$$R_I(v, \kappa) = \frac{c}{\|v\|} \int_{\mathbb{R}} d\mu \hat{g} \left( b + \mu e, \tau_0 + \frac{\mu + \frac{1}{2}}{\|v\|} \right)$$

et

$$R_{II}(v, \kappa) = \frac{c^2}{\|v\|^3} \int_{\mathbb{R}} d\mu [K(e, \kappa, \mu) \cdot \nabla] \hat{g}(b + \mu e, \tau_0),$$

avec

$$K(e, \kappa, \mu) = \int_{-\infty}^{\mu} d\mu' \int_{-\infty}^{\mu'} d\mu'' \hat{g}(b + \mu'' e, \tau_0).$$

L'égalité (1.52) implique  $\overline{R_I(v, \kappa)} = 0$ , ainsi que  $\overline{\alpha^{(\ell)}} = 0$  pour  $\ell = 1, 2$  et donc  $\overline{\beta^{(\ell)}} = 0$  pour  $\ell = 0, 1$  (voir (1.21)). Pour calculer  $\overline{\beta^{(2)}}$ , on a besoin de  $\overline{e \cdot \alpha^{(3)}}$ . D'après (1.90), on a  $\overline{e \cdot \alpha^{(3)}}(e, \kappa) = \overline{T(e, \kappa)}$  avec

$$\begin{aligned} T(e, \kappa) &= c^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu \int_{-\infty}^{\mu} d\mu' \int_{-\infty}^{\mu'} d\mu'' [\hat{g}(b + \mu'' e, \tau_0) \cdot \nabla] (e \cdot \hat{g})(b + \mu e, \tau_0) \\ &= c^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu \int_{-\infty}^{\mu} d\mu'' (\mu - \mu'') [\hat{g}(b + \mu'' e, \tau_0) \cdot \nabla] (e \cdot \hat{g})(b + \mu e, \tau_0). \end{aligned}$$

L'intégrande reste inchangée si on fait le changement de variables  $\tilde{e} = -e, \tilde{\mu} = -\mu, \tilde{\mu}'' = -\mu''$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} \int d\Omega(e) \int_{b \cdot e=0} db T(e, \kappa) &= c^2 \int d\Omega(\tilde{e}) \int_{b \cdot \tilde{e}=0} db \int_{\mathbb{R}} d\tilde{\mu} \int_{\tilde{\mu}}^{+\infty} d\tilde{\mu}'' (\tilde{\mu} - \tilde{\mu}'') \\ &\quad \times [\hat{g}(b + \tilde{\mu}'' \tilde{e}, \tau_0) \cdot \nabla] (\tilde{e} \cdot \hat{g})(b + \tilde{\mu} \tilde{e}, \tau_0). \end{aligned}$$

Une moyenne des deux dernières formules et le changement de variables (1.89) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \overline{e \cdot \alpha^{(3)}} &= \frac{\overline{c^2}}{2} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{S}^d} d\Omega(e_0) \int_{b \cdot e_0=0} \frac{db}{C_d} \int_{\mathbb{R}} d\mu \int_{\mathbb{R}} d\mu \\ &\quad (g(b + \mu'' e, \phi) \cdot \nabla) (((b + \mu e) - (b + \mu'' e)) \cdot g)(b + \mu e, \phi) \\ &= \frac{\overline{c^2}}{2C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int dy dy'' \|y - y''\|^{1-d} \sum_j (y - y'')_j [g(y'', \phi) \cdot \nabla] g_j(y, \phi). \end{aligned}$$

Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \overline{e \cdot \alpha^{(3)}} &= -\frac{\overline{c^2} (1-d)}{2C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int dy dy'' \|y - y''\|^{-1-d} \\ &\quad \times ((y - y'') \cdot g(y, \phi)) ((y - y'') \cdot g(y'', \phi)) \\ &\quad - \frac{\overline{c^2}}{2C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int dy dy'' \|y - y''\|^{1-d} g(y, \phi) \cdot g(y'', \phi). \end{aligned}$$

En utilisant (1.17), on voit que le second terme vaut  $-\frac{1}{2} \overline{\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(1)}}(e)$ , de sorte qu'en utilisant (1.21), on trouve

$$\begin{aligned} \overline{\beta^{(2)}}(e) &= \frac{\overline{c^2} (d-1)}{2C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int dy dy'' \|y - y''\|^{-1-d} ((y - y'') \cdot g(y, \phi)) ((y - y'') \cdot g(y'', \phi)) \\ &= \frac{d-1}{2} \overline{\beta^{(0)}}(e)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

## Chapitre 2

# Mouvement dans un gaz de Lorentz inélastique, non dissipatif et périodique

### 2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer la flexibilité de la description en marche aléatoire et le lien étroit entre  $\Delta\|p\| \sim \|p\|^{-\alpha}$  d'une part et  $\langle\|p(t)\|^2\rangle \sim t^\beta$  et  $\langle\|q(t)\|^2\rangle \sim t^\gamma$  d'autre part, pour des modèles autres que ceux étudiés dans le chapitre précédent et qui ne proviennent pas forcément de la mécanique statistique mais plutôt de la théorie des systèmes dynamiques. On s'intéresse alors à la dynamique générée par des Hamiltoniens de la forme

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + \lambda V(q, t), \quad (2.1)$$

où le potentiel  $V$  est périodique en sa variable d'espace  $q$  (sans dimension) et périodique ou quasi-périodique en sa variable de temps  $t$  (sans dimension), avec une dépendance en temps régulière. Plus spécifiquement, on considère les potentiels de la forme

$$V(q, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} W(q - x_m, \omega t + \phi_0), \quad x_m = \sum m_i e_i, \quad (2.2)$$

où les  $e_i, i = 1 \dots d$  forment une base de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $\|e_i\| = 1$  et où  $W(q, \phi)$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m$ , qui est à symétrie sphérique en  $q$ , et à support compact, avec son support inclus dans la boule de rayon  $1/2$  centrée en  $q = 0$ . Elle est de plus périodique en  $\phi$  de sorte que, avec  $\omega \in \mathbb{R}^m$  un vecteur de fréquences, le potentiel est périodique ou quasi-périodique en temps. Ce modèle peut être interprété comme un gaz de Lorentz mou, inélastique et périodique, dans lequel une particule de position  $q$  et moment conjugué  $p$  percute des diffuseurs placés périodiquement et modélisés par le même potentiel  $W$ , dépendant du temps et localisé en espace. On considère un ensemble de particules ayant une énergie initiale fixée  $\|p_0\|^2 \gg \lambda$ , lancées dans une direction initiale aléatoire à partir d'une position proche de l'origine. On donnera des preuves numérique et formelle du fait qu'en dimension  $d \geq 2$ , l'énergie cinétique moyenne  $\langle\|p(t)\|^2\rangle$  et la variance du déplacement  $\langle\|q(t)\|^2\rangle$  d'un tel ensemble vérifie

$$\langle\|p(t)\|^2\rangle \sim t^{2/5}, \quad \langle\|q(t)\|^2\rangle \sim t^2. \quad (2.3)$$

Ces lois de puissance sont les mêmes que celles dérivées dans le chapitre précédent (équations (1.4) et (1.6)) pour des potentiels dépendant de temps *aléatoires*. On verra que ceci est dû au fait que la

géométrie du réseau et les instabilités dans la dynamique lorsque la particule subit un évènement diffusif suffisent à rendre le mouvement aléatoire, même lorsque le potentiel est complètement déterministe.

On illustrera les résultats (2.3) par des simulations numériques pour deux modèles simples pour  $W$  d'une part (Figure 2.3), et en étendant les raisonnements du chapitre précédent d'autre part. On verra que ceux-ci seront aussi adaptés au gaz de Lorentz mou élastique ( $d \geq 2$ ), où les potentiels  $W$  dans (2.2) ne dépendent plus du temps. L'énergie est alors conservée et l'énergie cinétique de la particule bornée, constante par rapport au temps entre les collisions. On montrera qu'alors les particules ont un comportement diffusif en espace, de sorte que

$$\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t. \quad (2.4)$$

On verra de plus que l'analyse de la marche aléatoire montre que la constante de diffusion croît comme  $\|p_0\|^5$  et on illustrera ces résultats par des simulations numériques (Figure 2.6). On rappelle que pour le gaz de Lorentz classique, avec des obstacles durs, la mouvement est aussi diffusif [14], mais que la constante de diffusion croît comme  $\|p_0\|$ , seulement.

On peut interpréter ces résultats d'une seconde manière. En effet, à l'étude de perturbations périodique ou quasi-périodique en temps de systèmes Hamiltoniens complètement intégrables suscite un fort intérêt, aussi bien en mécanique classique que quantique [53, 56, 4, 8, 9, 10, 27]. Le problème principal est celui de leur stabilité. En remarquant que le Hamiltonien (2.1) est invariant par le groupe de translations sur  $\mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_d$ , on conclut qu'il génère une dynamique Hamiltonienne sur  $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ , où  $\mathbb{T}^d$  est le tore  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / (\mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_d)$ . Par ce changement de point de vue, le Hamiltonien (2.1) décrit une particule en mouvement sur un tore plat, perturbé par un diffuseur décrit par le potentiel  $W$ . De tels systèmes sont appelés des rotateurs pulsés, et sont des perturbations du système complètement intégrable consistant en une particule libre en mouvement sur un tore plat. Ce changement de point de vue n'affecte pas le comportement des moments des particules et la loi de puissance de l'énergie donnée par l'équation (2.3) montre que les rotateurs pulsés sont instables lorsque  $d \geq 2$ . On rappelle que dire qu'un rotateur pulsé est stable signifie que  $\sup_t \|p(t)\|^2 < \infty$ . Il n'existe pas à notre connaissance de démonstration rigoureuse de l'instabilité des rotateurs pulsés lorsque  $d \geq 2$ .

L'analyse en dimension  $d \geq 2$  ne s'applique plus lorsque  $d = 1$ , où le mouvement pour un potentiel dépendant du temps aléatoire, comme dans le chapitre précédent, est complètement différent du mouvement lorsque le potentiel est (quasi-)périodique en temps comme dans (2.2). En effet, l'étude numérique pour ce dernier modèle montre, jusqu'à des temps très longs, (voir la Figure 2.7)

$$\langle p^2(t) \rangle \sim 1, \quad \langle q^2(t) \rangle \sim t. \quad (2.5)$$

Ces résultats diffèrent de ceux trouvés dans le cas d'un potentiel aléatoire, dans le chapitre 1, pour lequel on avait en dimension  $d = 1$  :

$$\langle p^2(t) \rangle \sim t^{\frac{2}{5}}, \quad \langle q^2(t) \rangle \sim t^{\frac{12}{5}}. \quad (2.6)$$

On expliquera cette différence dans la section 2.3 (voir les Théorèmes 2.1 et 2.2).

On note en particulier que (2.5) indique que le système est stable. Nous démontrerons un théorème confirmant cette affirmation à des temps arbitrairement grands en utilisant les techniques de la théorie hamiltonienne des perturbations (voir la Figure 2.8 et les Théorèmes 2.1 et 2.2). Nous montrerons en particulier que l'impulsion est un invariant adiabatique pour des temps arbitrairement grands. Ce résultat est en réalité vérifié pour des potentiels quelconques, pourvu qu'ils soient bornés et suffisamment réguliers par rapport à la variable de temps : aucune hypothèse sur la (quasi-)périodicité de la dépendance en temps n'est nécessaire. Ces résultats ne sont

pas surprenants. En effet, d'autres systèmes unidimensionnels et non-autonomes ont été étudiés dans la littérature ; on cite par exemple le modèle de Fermi-Ulam [84] dans lequel une particule est en mouvement entre un mur fixe et un mur en mouvement périodique. Comme cela a été montré pour certains de ces modèles, la stabilité de tels systèmes est liée au fait que quelques tores KAM subsistent malgré la perturbation et créent des barrières empêchant une croissance infinie de l'énergie [55, 54, 56]. Des mécanismes similaires apparaissent dans le modèle étudié ici, comme on le verra dans la section 2.3.

Il est instructif de remarquer la différence de comportement pour les rotateurs pulsés considérés ci-dessus et pour les rotateurs frappés, où la dépendance en temps est très singulière :

$$V(q, t) = \lambda \sum_n \delta(t - n)v(q), \quad (2.7)$$

avec  $v$  une fonction régulière par rapport à sa première variable. Pour de tels systèmes, on peut facilement écrire la transformation de Floquet donnant l'évolution du système sur une période du potentiel :

$$\Phi(q, p) = (q', p'), \quad \text{avec} \quad p' = p - \lambda \nabla v(q), \quad q' = q + p'. \quad (2.8)$$

Dans ce cas, on trouve numériquement pour des valeurs de  $\lambda$  assez larges, et *indépendamment de la dimension  $d$* , que (voir la Figure 2.9)

$$\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t, \quad \langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^3. \quad (2.9)$$

Ces résultats peuvent eux aussi être obtenus grâce à l'image de la marche aléatoire développée dans le chapitre précédent. La principale différence avec le cas des rotateurs pulsés réside dans le fait que, alors que pour les rotateurs frappés la variation du moment subie par une particule sur une période du potentiel est d'ordre 1, indépendamment de la taille du moment initial de la particule et de la dimension  $d$  (comme on le voit dans (2.8)), alors que cette variation du moment est d'ordre  $\|p\|^{-3/2}$  pour les systèmes pulsés (équation (2.35)). Cela explique la croissance plus faible de l'énergie, ainsi que de la variance du déplacement, pour les systèmes pulsés.

Le reste du chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 2.2, on décrit l'approximation par la marche aléatoire permettant d'analyser le mouvement des particules lorsque  $d \geq 2$ . On montre de plus comment en déduire les lois de puissance pour  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  et on présente les résultats numériques. Dans la section 2.3, on étudie le problème en dimension 1. La section 2.4 est dédiée à la comparaison avec les systèmes frappés.

## 2.2 Gaz de Lorentz inélastiques et élastique en dimension $d \geq 2$

Dans cette section, on explique dans un premier temps brièvement comment la description du mouvement par la marche aléatoire, développée dans le chapitre précédent, peut être adaptée au cas présent en dimension  $d \geq 2$ , pour ensuite trouver les lois de puissance (2.3). De façon similaire à ce qui est fait dans la section 1.2, on considère une trajectoire typique d'une particule en mouvement soumise au potentiel  $V$  décrit par (2.2). Une telle trajectoire « visite » successivement des centres de diffusions  $x_{N_n}$  à une suite d'instants  $t_n$ , avec pour moments entrant  $p_n$  et pour paramètres d'impact  $b_n$ . Ces quantités sont reliés par (voir la Figure 2.1) :

$$q_n^- = x_{N_n} - \frac{1}{2}e_n + b_n, \quad e_n = \frac{p_n}{\|p_n\|} \quad b_n \cdot e_n = 0, \quad \|b_n\| \leq 1/2.$$

On choisit  $t_0 = 0$  et  $x_0 = 0$ . On suppose de plus que la vitesse initiale est assez grande, c'est-à-

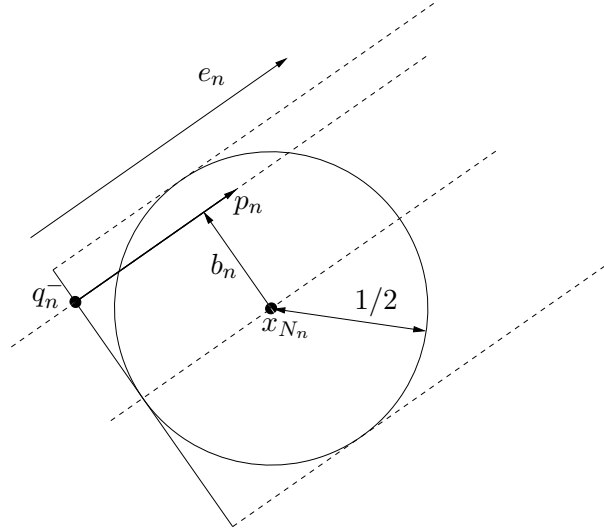


FIG. 2.1 – Une particule à l’instant  $t_n$  arrivant avec un moment  $p_n$  et un paramètre d’impact  $b_n$  sur le  $n$ -ième diffuseur, centré en  $x_{N_n}$ .

dire  $\|p_0\|^2 \gg \lambda$ . À chaque événement diffusif, le moment de la particule subit un changement  $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$ , où  $p_{n+1}$  est le moment avec le quel la particule quitte le  $n$ -ième diffuseur ainsi que le moment avec lequel elle arrive sur le  $n + 1$ -ième. Ce changement dépend de l’instant d’arrivée  $t_n$  de la particule sur le diffuseur, via la phase  $\phi_n = \phi_0 + \omega t_n$ , ainsi que du paramètre d’impact  $b_n$ . On a

$$\Delta p_n = R(p_n, b_n, \phi_n), \quad (2.10)$$

où

$$R(p, b, \phi) = -\lambda \int_0^{+\infty} d\tau \nabla W(q(\tau), \omega\tau + \phi) \quad (2.11)$$

et où  $\tau \rightarrow q(\tau)$  est la solution de

$$\ddot{q}(t) = -\lambda \nabla W(q(t), \omega t + \phi), \quad q(0) = b - \frac{1}{2} \frac{p}{\|p\|}, \quad p(0) = p.$$

Après avoir quitté le support du  $n$ -ième diffuseur, la particule parcourt une distance  $\eta_n$  jusqu’au diffuseur suivant, atteint après une durée  $\Delta t_n = \eta_n / \|p_{n+1}\|$ . La distance  $\eta_n$ , et donc l’instant  $t_{n+1}$  et la phase  $\phi_{n+1}$ , dépendent de la géométrie du réseau ainsi que de la dynamique de l’événement diffusif, par l’intermédiaire du point précis  $q_n^+$  auquel la particule quitte le  $n$ -ième diffuseur et de la direction à la sortie  $e_{n+1}$ . Par conséquent, on peut s’attendre à ce qu’après un grand nombre d’événements diffusifs, les phases  $\phi_n$  et les paramètres d’impact  $b_n$  deviennent aléatoires, c’est-à-dire qu’ils soient uniformément distribués sur leurs espaces naturels, avec de faibles corrélations temporelles. Cette hypothèse a été testée numériquement et les résultats sont présentés dans la Figure 2.2. Toutes les simulations numériques présentées dans cette section ont été effectuées pour le modèle à maille hexagonale décrit dans la section 1.7. Le potentiel  $W$  est un potentiel plat, circulaire, dépendant du temps

$$W(q, t) = f(t) \chi\left(\frac{\|q\|}{q_*}\right), \quad q \in \mathbb{R}^2, \quad (2.12)$$

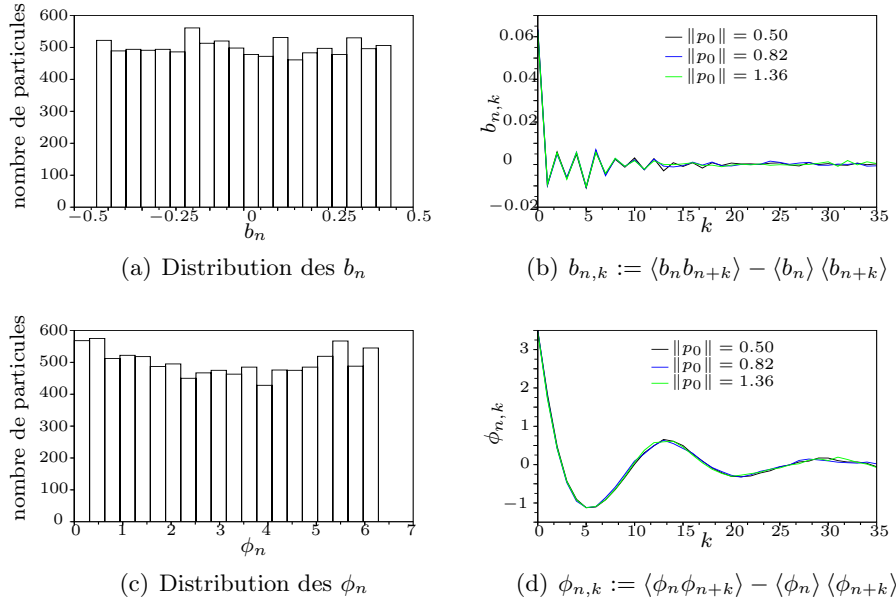


FIG. 2.2 – Distributions et corrélations de  $b_n$  et  $\phi_n$ , avec  $n = 50000$ , pour le modèle décrit par l'équation (2.12) avec  $f(t) = \cos(t)$ , calculées avec  $10^4$  trajectoires.

où  $\chi(x) = 1$  si  $0 \leq x \leq 1$  et  $\chi(x) = 0$  sinon et  $q_*$  vérifie  $\frac{\sqrt{3}}{4} < q_* < 1/2$ . On choisit de plus  $\lambda = 1/6$ . Deux cas différents ont été testés pour la fonction  $f$ , à savoir

$$f_1(t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t).$$

Les données présentées sur la Figure 2.2 indiquent que les distributions de phases et paramètres d'impact sont effectivement aléatoires après un temps relativement court, et qu'elles sont décorréliées en temps, malgré la périodicité en temps et en espace du potentiel. Par conséquent, le comportement de l'ensemble des particules doit être statistiquement le même que celui d'un ensemble de particules exécutant la marche aléatoire

$$p_{n+1} = p_n + R(p_n, b_n, \phi_n), \quad t_{n+1} = t_n + \frac{\eta_*}{\|p_{n+1}\|}, \quad q_{n+1} = q_n + \eta_* e_{n+1}, \quad (2.13)$$

où  $\eta_*$  est la distance moyenne parcourue entre deux événements diffusifs,  $q_n$  est la position de la particule au  $n$ -ième tel événement et  $b_n$  et  $\phi_n$  sont traités comme des variables aléatoires indépendantes, chacune distribuée sur son espace naturel. Cette marche aléatoire est la même que celle obtenue dans le chapitre 1 (voir l'équation (1.12)) et est analysée dans le cas où la force dérive d'un potentiel dans les sections 1.3 et 1.4. On obtient, pour ce modèle périodique, les mêmes lois de puissance que dans le cas aléatoire du chapitre 1, à savoir

$$\begin{aligned} \langle \|p_n\|^2 \rangle &\sim n^{1/3}, & \langle \|p(t)\|^2 \rangle &\sim t^{2/5}, \\ \langle \|q_n\|^2 \rangle &\sim n^{5/3}, & \langle \|q(t)\|^2 \rangle &\sim t^2. \end{aligned}$$

Ces résultats ont été testés numériquement pour le modèle décrit par l'équation (2.12) et sont présentés sur la Figure 2.3. Ils confirment bien que, malgré la périodicité du potentiel, le mouvement dans un tel potentiel devient aléatoire, du fait des instabilités liées au mécanisme des

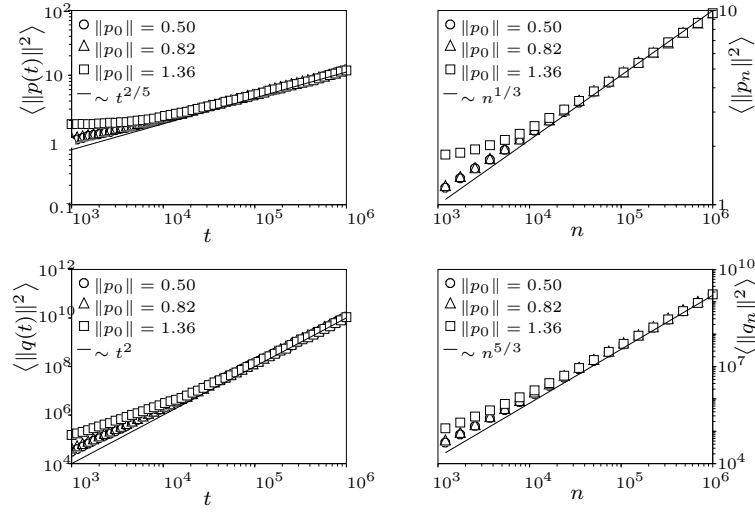


FIG. 2.3 – Valeurs déterminées numériquement de  $\langle \|p_n\|^2 \rangle$ ,  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$ ,  $\langle \|q_n\|^2 \rangle$  et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  dans un réseau à maille hexagonale, pour le potentiel décrit par l'équation (2.12) avec  $f(t) = \cos(t)$ . Sur chaque graphe, les différents symboles correspondent à différentes conditions initiales, dont les valeurs sont indiquées dans les légendes.

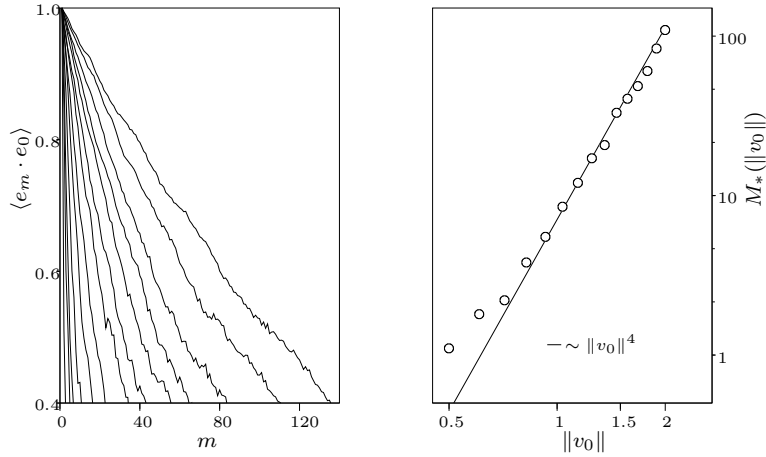


FIG. 2.4 – À gauche, la fonction de corrélation  $\langle e_m \cdot e_0 \rangle$  tracée en fonction de  $m$  pour un ensemble de quinze vitesses initiales  $\|v_0\|$  comprises entre 0.5 et 2.0. À droite, une estimation numérique de  $M_*(\|v_0\|)$  (défini par l'équation (1.45)) obtenue à partir des pentes initiales des données et tracée en fonction de  $\|v_0\|$ .

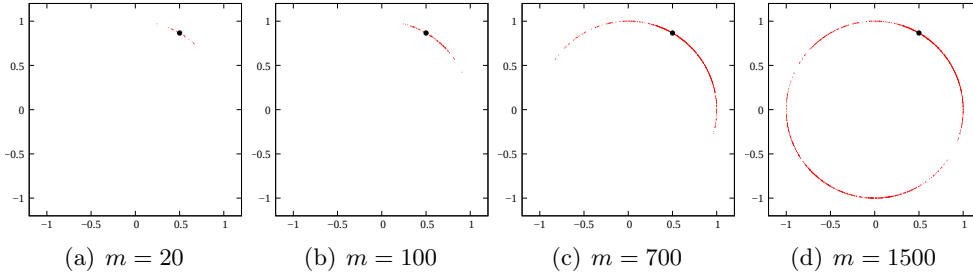


FIG. 2.5 – Coordonnées des vecteurs  $e_k$ ,  $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$ , pour les différentes valeurs de  $m$  indiquées dans les légendes, pour une seule trajectoire dans le modèle décrit par l'équation (2.12) avec  $f(t) = \cos(t)$ . La vitesse initiale est prise égale à  $p_0 = 2e_0$ , et  $e_0$  est indiqué sur les figures par le gros point.

événements diffusifs. En particulier, les directions  $e_n$  des vecteurs vitesses  $p_n$  décrivent bien une marche aléatoire sur le cercle unité, et on observe ici (Figure 2.4) encore qu'après  $n$  collisions, il faut encore un nombre de collisions d'ordre  $n^{2/3}$  pour que la direction d'une particule typique ait varié d'un angle macroscopique. Cette variation est illustrée par la Figure 2.5, sur laquelle on observe qu'après  $m \sim 1500$  collisions, l'ensemble des directions  $\{e_k\}_{k \in \llbracket 1; m \rrbracket}$  recouvre le cercle unité.

On termine cette section en soulignant le fait que l'analyse développée dans le chapitre 1 pour prédire le comportement de  $q_n$  s'applique aussi lorsque le potentiel  $W$  est indépendant du temps. Dans ce cas, l'énergie cinétique  $\|p_n\|^2$  de la particule est constante et on trouve la marche aléatoire suivante pour les directions :

$$e_{n+1} \simeq e_n + \frac{\alpha_n^{(1)}}{\|p_0\|^2}, \quad (2.14)$$

au lieu de

$$e_{n+1} \simeq e_n + \frac{\alpha_n^{(1)}}{\|p_n\|^2}$$

dans le cas où le potentiel dépend du temps. On en déduit

$$e_{n+m} = e_n + \frac{1}{\|p_0\|^2} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}^{(1)}, \text{ et } \langle \|e_{n+m} - e_n\| \rangle \sim \frac{\lambda}{\|p_0\|^2} \sqrt{m},$$

lorsque  $\|p_0\|$  est grand, c'est-à-dire  $\|p_0\|^2 \gg \lambda$ . Les directions  $e_n$  se répartissent donc maintenant sur la sphère unité avec un taux fixé, décroissant avec la vitesse de la particule comme  $\|p_0\|^{-2}$  : plus la particule va vite et moins elle est déviée par un événement diffusif. On déduit de (2.14) que  $M_{k+1} = M_k + \lambda^{-2} \|p_0\|^4$ , de sorte que  $M_k \sim \lambda^{-2} \|p_0\|^4 k$  et on en conclut, par le même raisonnement que dans le chapitre 1 que

$$\|q(t)\|^2 \sim \frac{\eta_*}{\lambda^2} \|p_0\|^5 t.$$

En d'autres termes, l'analyse par la marche aléatoire montre que pour un gaz de Lorentz *élastique* mou, la particule diffuse, avec une constante de diffusion croissant comme  $\|p_0\|^5$ . Ces résultats sont illustrés par la Figure 2.6. On remarque sur le graphe de gauche que, pour des vitesses

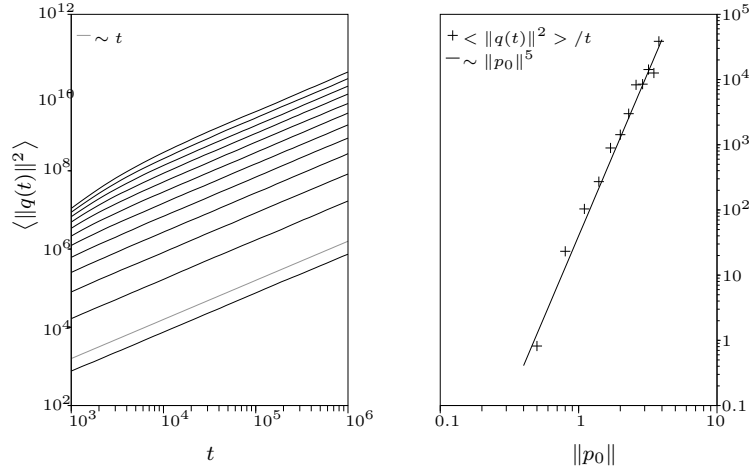


FIG. 2.6 – Valeurs déterminées numériquement de  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  (panneau de gauche) et de la constante de diffusion (panneau de droite) dans le cas d'un gaz de Lorentz élastique mou avec un potentiel décrit par (2.12), avec  $f(t) = 1$  et  $\lambda = 0.49^2/2$ , pour 12 vitesses initiales  $\|p(0)\|$  différentes, entre 0.5 et 3.8.

initiales élevées, le régime diffusif met plus de temps à s'installer, comme on s'y attend ; cela se traduit par le fléchissement des courbes les plus hautes. Pour des temps courts, le mouvement est bien sûr balistique. Il est par ailleurs intéressant de noter la différence avec ce qui se passe dans un gaz de Lorentz élastique dur, où la diffusion de la particule a été prouvée de façon rigoureuse ; on a dans ce cas  $\|q(t)\|^2 \sim \|p_0\|t$ . La faible croissance (comme  $\|p_0\|$ ) de la constante de diffusion peut dans ce cas être expliquée par le fait qu'en présence d'obstacles durs, les trajectoires ne dépendent plus de la vitesse de la particule, de sorte que la dépendance par rapport à la vitesse de la constante de diffusion provient d'une simple intégration.

Ceci termine l'analyse des gaz de Lorentz mous non-dissipatifs inélastiques et élastiques en dimension  $d \geq 2$ , décrits par (2.2). Comme mentionné en introduction, les Hamiltoniens (2.1)-(2.2) peuvent aussi être vus comme décrivant des rotateurs pulsés : les résultats trouvés ici montrent qu'ils sont instables en dimension plus grande que 2 puisque leur énergie croît en moyenne. Une comparaison avec les rotateurs frappés sera faite dans la section 2.4. Auparavant, on s'intéresse à l'étude du système en dimension 1.

## 2.3 Gaz de Lorentz inélastiques en dimension 1

Contrairement au gaz de Lorentz classique (dur), qui n'a pas d'analogue intéressant en dimension 1, le gaz de Lorentz mou décrit par (2.1)-(2.2) génère en dimension 1 aussi une dynamique non triviale. On en fait l'étude dans cette section.

Nous venons de montrer qu'en dimension strictement plus grande que 1, le comportement asymptotique d'une particule rapide dans un potentiel périodique en espace et (quasi-)périodique en temps (comme dans (2.2)) est identique au comportement dans un champ de diffuseurs aléatoires comme dans le chapitre 1. Nous allons voir qu'en dimension 1, la situation est tout à fait différente. Dans le chapitre précédent, où le potentiel était aléatoire (section 1.4), nous avons

montré que le moment de la particule croît comme  $t^{1/5}$ , en dimension 1 comme en dimension supérieure. Nous allons montrer dans la suite qu'au contraire, le moment d'une particule dans un potentiel périodique en temps et en espace reste borné jusqu'à des temps arbitrairement grands. Les résultats précis sont énoncés dans les Théorèmes 2.1 et 2.2 ci-dessous. Comme on le remarquera, cette conclusion reste valable pour des potentiels périodiques en espace avec une dépendance en temps arbitraire, lisse et bornée : la périodicité par rapport à la variable temporelle n'est pas nécessaire pour établir le résultat. Nous obtiendrons nos résultats en utilisant la théorie des perturbations hamiltoniennes (voir [16, 53, 56]), avec l'inverse de la vitesse initiale de la particule comme petit paramètre.

Afin de comprendre la notion de vitesse élevée dans le contexte décrit ici, on rappelle comment sont obtenus le Hamiltonien  $H$ , la position  $q$ , le moment  $p$  et l'instant  $t$  adimensionnés apparaissant dans (2.1). Les problèmes que nous considérons ici ont une échelle d'espace naturelle  $\ell$ , qui est la taille de la cellule unité du réseau, et une échelle de temps naturelle  $T$ , qui est l'échelle typique sur laquelle le potentiel fluctue. Cela suggère l'expression de la position  $\tilde{q}$  de la particule comme un multiple de  $\ell$ , de son moment comme un multiple de  $\ell/T$  (on prenant la masse de la particule égale à 1) et la mesure du temps en unité de  $T$ . Ainsi, en écrivant  $\tilde{q} = \ell q$ ,  $\tilde{p} = p\ell/T$  et  $\tau = tT$ , les équations du mouvement pour  $(\tilde{q}, \tilde{p})$ , équivalentes à celles obtenues de (2.1), sont

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{q}}{d\tau}(\tau) &= \tilde{p}(\tau), \\ \frac{d\tilde{p}}{d\tau}(\tau) &= -\frac{\lambda\ell}{T^2} \partial_q V \left( \frac{\tilde{q}(\tau)}{\ell}, \frac{\tau}{T} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

qui sont les équations hamiltoniennes correspondant à

$$\hat{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau) = \frac{\tilde{p}^2}{2} + \mu V \left( \frac{\tilde{q}}{\ell}, \frac{\tau}{T} \right),$$

avec  $\mu = \lambda \frac{\ell^2}{T^2}$  ayant la dimension d'une énergie. Dans notre analyse numérique, le potentiel  $V$  est une fonction sans dimension et régulière (on supposera qu'elle est un élément de  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ), périodique de période 1 en sa première variable (variable d'espace), et bornée, avec des dérivées uniformément bornées en ses deux variables. Il n'est pas nécessaire que  $V$  soit de la forme spécifique décrite par (2.2) et en particulier, dans cette section, nous ne supposons plus le potentiel (quasi-)périodique en temps. On remarque que, comme dans la section précédente, la périodicité spatiale du potentiel fait que l'on peut également interpréter les équations comme décrivant une particule en mouvement sur un cercle de circonférence  $\ell$  dans un potentiel dépendant du temps et borné.

Ce système a un paramètre sans dimension, à savoir  $\lambda = \mu T^2 / \ell^2$ , où  $\mu$  est la valeur typique du potentiel et  $\ell^2 / T^2$  l'énergie cinétique d'une particule traversant la cellule unité en un temps  $T$ . On étudiera les solutions des équations de mouvement pour des vitesses initiales élevées  $\tilde{p}(0)$ , c'est-à-dire ici

$$ap_* \frac{\ell}{T} \leq \tilde{p}(0) \leq Ap_* \frac{\ell}{T} \Leftrightarrow ap_* \leq p(0) \leq Ap_* < +\infty$$

pour  $2 \leq a \leq A < +\infty$  fixés et pour une valeur élevée de  $p_*$ , qui sera précisée dans la suite ;  $p_*$  est par conséquent un second paramètre sans dimension, mesurant la taille relative de la vitesse initiale  $\tilde{p}(0)$  et de  $\ell/T$ . On remarque que

$$\varepsilon = 1/p_*$$

est le temps mis par une particule libre, ayant pour vitesse initiale  $p_*$ , pour traverser la cellule unité de longueur 1, de sorte que  $\varepsilon \ll 1$  signifie que ce temps est petit, comparé à l'intervalle

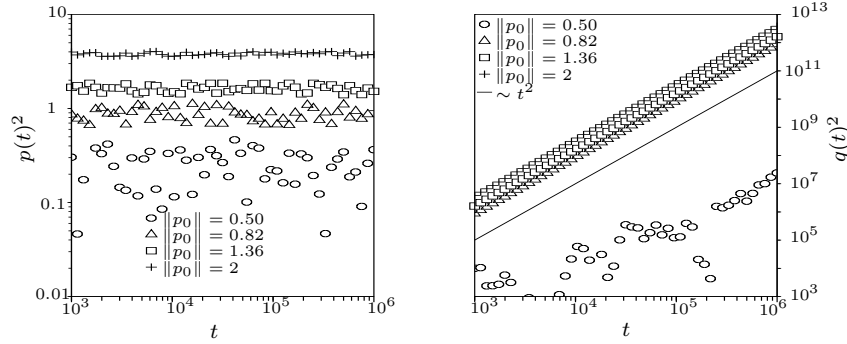


FIG. 2.7 – Valeurs déterminées numériquement de  $p(t)^2$  et  $q(t)^2$  en dimension 1 pour le modèle décrit par le potentiel  $V(q, t) = \cos(t)\mathbb{1}_{[0;2/3]}(q)$ . Sur chaque graphique, les différents symboles correspondent à différentes conditions initiales, comme indiqué dans les légendes.

de temps 1, caractéristique de la variation du potentiel. La particule est en ce sens rapide. On supposera de plus  $\lambda\varepsilon^2 \ll 1$ , ce qui signifie que l'énergie cinétique de la particule est bien plus grande que la taille typique du potentiel ; la particule est ainsi énergétique.

Ce qui se passe est intuitivement clair : puisque la particule est énergétique et se déplace rapidement, le potentiel perturbe, faiblement et lentement, le mouvement de la particule libre. Le potentiel constitue donc une petite perturbation adiabatique du mouvement libre de la particule. En fait, lors de la traversée d'une cellule unité, le moment de la particule va subir un changement d'ordre  $p_*^{-1}$  au plus puisque

$$p_{n+1} - p_n \sim \frac{\alpha_n^{(1)}}{p_n}$$

(voir les équations (1.14) et (1.16)). Naïvement, on pourrait s'attendre à ce qu'après un temps d'ordre 1, la particule ait parcouru  $p_*$  fois le cercle, subissant un changement de moment d'ordre 1. Si les changements de moments étaient systématiques, cela donnerait lieu à une accélération  $p(t) \sim t$ , bien plus rapide que dans le cas du potentiel aléatoire (section 1.4) où on a prouvé que  $p(t) \sim t^{1/5}$ . Comme on le montrera, la situation est en fait bien meilleure que cela : par des effets de compensation, la variation du moment reste d'ordre  $p_*^{-1}$  pour des temps arbitrairement grands (voir la Figure 2.7) et on obtient que  $p(t)$  reste borné et que ses valeurs restent très proches de  $p(0)$ . La différence avec la situation en dimension plus grande est intuitivement claire : en dimension 1, il n'y a pas de paramètre d'impact rendu aléatoire par les événements diffusifs successifs et, de plus, les distances parcourues entre deux événements diffusifs successifs sont toutes rigoureusement identiques, donc les phases du potentiel ne sont pas non plus rendues aléatoires. Nous ne prouverons pas que le système est stable (dans le sens où  $\sup_t \|p(t)\| < \infty$ ) ; on note néanmoins que les similitudes avec d'autres modèles unidimensionnels étudiés dans la littérature laissent à penser que cela pourrait se faire en utilisant la théorie KAM et en imposant des conditions d'analyticité assez fortes sur le potentiel  $V$ .

On donne maintenant les énoncés précis des affirmations ci-dessus, que nous prouverons par une application de la théorie hamiltonienne des perturbations bien connue, décrite dans [16], [53] et [56], par exemple. On supposera

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^1 V(q, t) dq = 0. \quad (2.16)$$

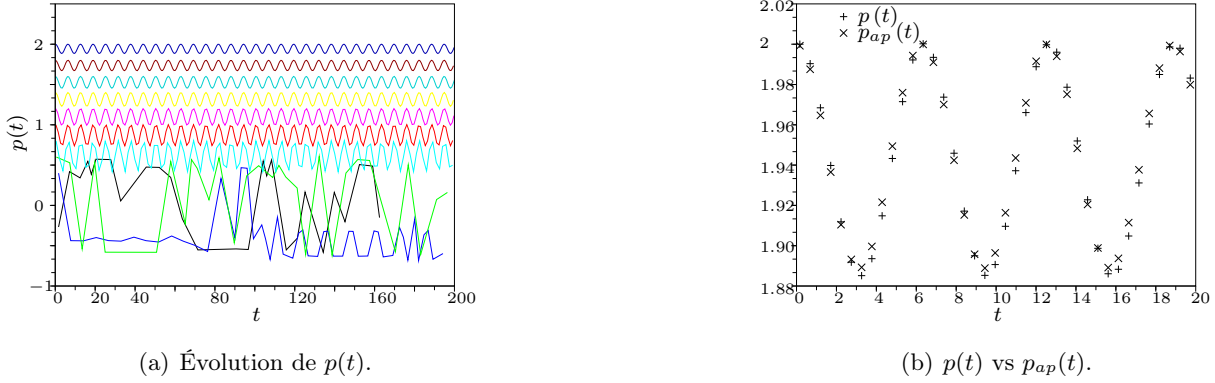


FIG. 2.8 – À gauche, évolution de  $p(t)$  pour 10 vitesses initiales différentes, entre 0.2 et 2, pour le modèle décrit par le potentiel  $V(q, t) = \cos(t)\mathbb{1}_{[0;2/3]}(q)$ . À droite, valeurs déterminées numériquement de  $p(t)$ , comparées aux valeurs de  $p_{ap}(t)$  pour le même modèle et avec pour vitesse initiale  $p(0) = 2$ .

Cette condition ne représente pas une réelle restriction puisque l'on peut toujours soustraire sa moyenne spatiale au potentiel, sans changer les équations de mouvement.

**Théorème 2.1.** *Soit  $2 \leq a \leq A < +\infty$ . Pour tout  $\sigma_* > 0$  et tout  $K \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $C_K > 0$  telle que, pour tout  $p_*$  assez grand et toute condition initiale*

$$ap_* \leq p(0) \leq Ap_*, \quad q(0) \in [0, 1[,$$

*on ait, pour tout  $0 \leq t \leq \sigma_* p_*^{K-2}$ ,*

$$|p(t) - p(0)| \leq C_K \frac{1}{p(0)}.$$

L'estimation de l'erreur est optimale dans ce résultat, comme le Théorème 2.2 ci-dessous le montre. Les variations de  $p(t)$  ont bien une amplitude d'ordre  $p(0)^{-1}$ .

**Théorème 2.2.** *Pour tout  $\sigma_* > 0$  et tout  $0 \leq t \leq \sigma_*$ ,*

$$p(t) = p_{ap}(t) + O(p_*^{-2})$$

*où*

$$p_{ap}(t) = p(0) - \frac{\lambda}{p(0)} (V(q(0) + p(0)t, t) - V(q(0), 0)).$$

Ce résultat est illustré par la Figure 2.8. Sa démonstration permet de plus d'expliciter une valeur approchée de  $p(t)$  à l'ordre  $p_*^{-2}$  pour des temps arbitrairement grands (voir le Corollaire 2.4 page 67). Pour démontrer ces résultats, on utilise la théorie hamiltonienne des perturbations. Ces techniques sont standard, elles sont en particulier développées dans [16, 53, 56], mais on trouve difficilement des énoncés et surtout des preuves précis dans la littérature. Ainsi, le Théorème 2.1 est proche d'un énoncé page 200 dans [56]. On adapte ici la théorie dans le cas qui nous intéresse. Dans ce but, on doit d'abord réécrire les équations de mouvement dans une forme permettant

l'application de la théorie hamiltonienne des perturbations (voir (2.19) ci-dessous). On définit pour cela une nouvelle échelle de temps

$$\sigma = \frac{t}{\varepsilon} = p_* t \quad (2.17)$$

qui compte le nombre de révolutions effectuées par la particule sur un intervalle de temps de taille  $t$ . On introduit les nouvelles variables

$$\bar{q}(\sigma) = q(\varepsilon\sigma), \quad \bar{p}(\sigma) = \frac{p(\varepsilon\sigma)}{p_*} = \varepsilon p(\varepsilon\sigma). \quad (2.18)$$

Alors, si  $(q(t), p(t))$  résout le système hamiltonien associé à (2.1), elles satisfont

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{q}}{d\sigma}(\sigma) &= \bar{p}(\sigma), \\ \frac{d\bar{p}}{d\sigma}(\sigma) &= -\varepsilon^2 \lambda \partial_1 V(\bar{q}(\sigma), \varepsilon\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

avec les conditions initiales  $\bar{q}(0) \in [0, 1[$  et  $2 \leq a \leq \bar{p}(0) \leq A < +\infty$ . Ce sont les équations hamiltoniennes correspondant au Hamiltonien  $\bar{H}$  défini par

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, \varepsilon, \tau) = \frac{1}{2} \bar{p}^2 + \varepsilon^2 \lambda V(\bar{q}, \tau), \quad (2.20)$$

en posant

$$\tau = \varepsilon\sigma.$$

Dans la suite, on désigne par

$$(\bar{q}(\sigma), \bar{p}(\sigma)) := \Phi_{\sigma}^{\bar{H}}(\bar{q}(0), \bar{p}(0))$$

le flot hamiltonien associé à  $\bar{H}$ .

*Démonstration du Théorème 2.1.* On considère un Hamiltonien  $\chi(\bar{q}, \bar{p}, \mu, \tau)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , périodique en  $\bar{q}$  et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Le but est de choisir  $\chi$  judicieusement, puis d'utiliser son flot pour définir un nouveau système de coordonnées  $(\bar{Q}, \bar{P})$  dans lequel les équations (2.19) prennent une forme simple. En effet,  $\chi$  permet de définir une famille de symplectomorphismes  $\Phi_{(\mu, \tau)}^\chi$ , où, pour chaque  $\tau \geq 0$ ,  $\Phi_{(\mu, \tau)}^\chi$  est le flot hamiltonien de  $\chi$ , obtenu en intégrant à  $\tau$  fixé et à partir de  $\mu = 0$  les équations hamiltoniennes. Ce flot est donc solution du système

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{q}(\mu, \tau)}{d\mu} &= (\partial_{\bar{p}} \chi)(\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau), \mu, \tau), \\ \frac{d\bar{p}(\mu, \tau)}{d\mu} &= -(\partial_{\bar{q}} \chi)(\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau), \mu, \tau), \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

avec conditions initiales  $(\bar{Q}, \bar{P}) = (\bar{q}(0, \tau), \bar{p}(0, \tau))$ , et on écrira

$$\Phi_{(\mu, \tau)}^\chi(\bar{Q}, \bar{P}) = (\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau)).$$

Comme on le verra, ces conditions initiales seront utilisées pour définir le nouveau système de coordonnées. On peut de plus choisir  $\mu$  assez petit pour que

$$\left( \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right)^{-1}(\mathbb{R} \times [a/4; \infty[) \subset \mathbb{R} \times [a/8; \infty[, \quad \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi(\mathbb{R} \times [a; \infty[) \subset \mathbb{R} \times [a/2; \infty[ \quad (2.22)$$

et  $\varepsilon$  assez petit pour que  $\Phi_\sigma^{\overline{H}}(\mathbb{R} \times [a/2; \infty[) \subset \mathbb{R} \times [a/4; \infty[$ . On prendra plus tard  $\mu = \varepsilon$ , ce qui implique que  $\varepsilon = 1/p_*$  doit être assez petit. Pour tout  $(\mu, \sigma)$ , on désigne par  $\psi_{(\mu, \sigma)} : \mathbb{R} \times [a; \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \times [a/8; \infty[$  l'application définie par

$$\psi_{(\mu, \sigma)} := \left( \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right)^{-1} \circ \Phi_\sigma^{\overline{H}} \circ \Phi_{(\mu, 0)}^\chi;$$

on a donc trivialement le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} (\bar{q}(0), \bar{p}(0)) & \xrightarrow{\Phi_\sigma^{\overline{H}}} & (\bar{q}(\sigma), \bar{p}(\sigma)) \\ \Phi_{(\mu, 0)}^\chi \uparrow & & \uparrow \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \\ (\overline{Q}(0), \overline{P}(0)) & \xrightarrow{\psi_{(\mu, \sigma)}} & (\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma)) \end{array}$$

Puisque  $\psi_{(\mu, \sigma)}$  est un symplectomorphisme, il existe un Hamiltonien  $\tilde{H} : (\overline{Q}, \overline{P}, \mu, \tau) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dont  $\psi_{(\mu, \sigma)}$  soit le flot par rapport à  $\sigma$ , à  $\mu$  fixé :

$$\frac{d}{d\sigma} f \circ \psi_{(\mu, \sigma)} = \left\{ f; \tilde{H} \right\} \circ \psi_{(\mu, \sigma)}, \quad \forall f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

On utilisera alors la notation  $\psi_{(\mu, \sigma)} = \Phi_\sigma^{\tilde{H}}$ .

La démonstration du théorème se fait alors en deux temps. Tout d'abord, on va calculer  $\tilde{H}$ . Puis on montrera que pour tout  $K \in \mathbb{N}^*$ , on peut choisir  $\chi$  de sorte qu'en  $\mu = \varepsilon$ , on ait

$$\frac{d}{d\sigma} \overline{P}(\sigma) = O(\varepsilon^{K+1}) \quad \text{et} \quad \sup_{\sigma \geq 0} |\overline{P}(\sigma) - \bar{p}(\sigma)| = O(\varepsilon^2). \quad (2.23)$$

La conclusion suivra de ces deux résultats.

#### 1. Calcul de $\tilde{H}$ .

Par construction de  $\Phi_\sigma^{\tilde{H}}$ , on a

$$\Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \circ \Phi_\sigma^{\tilde{H}} = \Phi_\sigma^{\overline{H}} \circ \Phi_{(\mu, 0)}^\chi. \quad (2.24)$$

Par conséquent, pour tout  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut écrire

$$\frac{d}{d\sigma} f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \circ \Phi_\sigma^{\tilde{H}} = \frac{d}{d\sigma} f \circ \Phi_\sigma^{\overline{H}} \circ \Phi_{(\mu, 0)}^\chi. \quad (2.25)$$

Dans le membre de droite, seul le facteur  $\Phi_\sigma^{\overline{H}}$  dépend de  $\sigma$ . On a donc, pour tout  $(\overline{Q}, \overline{P}) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} f \circ \Phi_\sigma^{\overline{H}} \circ \Phi_{(\mu, 0)}^\chi(\overline{Q}, \overline{P}) &= \left\{ f; \overline{H} \right\} \circ \Phi_\sigma^{\overline{H}} \left( \Phi_{(\mu, 0)}^\chi(\overline{Q}, \overline{P}) \right) \\ &= \left\{ f; \overline{H} \right\} \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \circ \Phi_\sigma^{\tilde{H}}(\overline{Q}, \overline{P}) \\ &= \left\{ f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi; \overline{H} \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right\}(\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma)), \end{aligned}$$

en utilisant l'égalité (2.24) et la définition de  $\overline{Q}(\sigma)$  et  $\overline{P}(\sigma)$ . Le membre de gauche de l'équation (2.25), quant à lui, se développe en

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \circ \Phi_\sigma^{\tilde{H}}(\overline{Q}, \overline{P}) &= \frac{d}{d\sigma} \left( f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right) \circ \Phi_\sigma^{\tilde{H}}(\overline{Q}, \overline{P}) + f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \circ \frac{d}{d\sigma} \Phi_\sigma^{\tilde{H}}(\overline{Q}, \overline{P}) \\ &= \frac{d}{d\sigma} \left( f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right) (\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma)) + \left\{ f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi; \tilde{H} \right\}(\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma)), \end{aligned}$$

par définition de  $\Phi_\sigma^{\tilde{H}}$  et de  $(\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma))$ .

Comme la famille  $\Phi_{(\mu, \tau)}^\chi$  définit une famille de symplectomorphismes, il existe un Hamiltonien  $R : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$

$$\frac{d}{d\sigma} f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi = \{f; R\} \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi.$$

Le Hamiltonien  $R$  est entièrement déterminé par  $\chi$ , comme indiqué dans le lemme suivant et démontré dans la suite. On en trouve également un énoncé et une démonstration dans [16, 56].

**Lemme 2.3.** *Les Hamiltoniens  $R$  et  $\chi$  sont liés par l'équation*

$$\partial_\mu R + \{R; \chi\} = \partial_\sigma \chi, \quad (2.26)$$

où  $\{\cdot; \cdot\}$  désigne le crochet de Poisson. Cette équation s'intègre en

$$R \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi = \int_0^\mu \partial_\sigma \chi \circ \Phi_{(\mu', \tau)}^\chi d\mu'. \quad (2.27)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left( f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right) (\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma)) &= \left( \{f; R\} \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right) (\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma)) \\ &= \left\{ f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi; R \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right\} (\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma)), \end{aligned}$$

et l'égalité (2.25) devient

$$\left\{ f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi; R \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right\} + \left\{ f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi; \tilde{H} \right\} = \left\{ f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi; \overline{H} \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right\}.$$

Comme cette égalité est vérifiée pour toute fonction  $f$ , on en déduit que  $\tilde{H}$  satisfait, à une constante près, l'égalité

$$R \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi + \tilde{H} = \overline{H} \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi.$$

Par l'équation (2.27) du Lemme 2.3, on conclut

$$\tilde{H} = \overline{H} \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi - \int_0^\mu \partial_\sigma \chi \circ \Phi_{(\mu', \tau)}^\chi d\mu'. \quad (2.28)$$

2. Pour tout  $K \in \mathbb{N}^*$ , on peut choisir  $\chi$  de sorte que (2.23) soit satisfaite.

Soit  $K \in \mathbb{N}^*$ . La première égalité de (2.23) revient à affirmer que l'on peut trouver  $\chi$  de sorte qu'en  $\mu = \varepsilon$ , le nouveau Hamiltonien  $\tilde{H}$  s'écrive comme la somme d'une fonction indépendante de  $\overline{Q}$  et d'un terme d'ordre  $\varepsilon^{K+1}$ . En effet, on aura alors

$$\frac{d\overline{P}(\sigma)}{d\sigma} = -\partial_{\overline{Q}} \tilde{H} (\overline{Q}(\sigma), \overline{P}(\sigma), \varepsilon, \tau) = O(\varepsilon^{K+1}).$$

On choisit pour démontrer (2.23) la fonction  $\chi$  comme étant un polynôme de degré  $K$  en sa variable  $\mu$  :

$$\chi(\overline{q}, \overline{p}, \mu, \tau) = \sum_{n=0}^K \mu^n \chi_{n+1}(\overline{q}, \overline{p}, \tau),$$

où les fonctions  $\chi_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et uniformément bornées. Alors, pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , tout  $\tau \geq 0$  et tous  $(\bar{q}, \bar{p})$  et  $(\bar{Q}, \bar{P}) \in \mathbb{R} \times [a; \infty[$ , les fonctions

$$\mu \mapsto f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi(\bar{Q}, \bar{P}) \quad \text{et} \quad \mu \mapsto f \circ \left( \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right)^{-1}(\bar{q}, \bar{p})$$

sont aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En effet,  $\mu \mapsto f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi(\bar{Q}, \bar{P})$  satisfait

$$\partial_\mu^k \left( f \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right)(\bar{Q}, \bar{P}) = \left( \Delta_\chi^k f \right) \circ \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi(\bar{Q}, \bar{P}), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

avec  $\Delta_\chi := \{\cdot; \chi\} + \partial_\mu$ , et est par conséquent de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ; on montre de même que  $\mu \mapsto f \circ \left( \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right)^{-1}(\bar{q}, \bar{p})$  l'est aussi. On peut donc écrire les développements limités de ces deux fonctions à l'ordre  $K$ , et les coefficients apparaissant sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $(\bar{q}, \bar{p}, \tau)$ .

On se place à partir de maintenant en  $\mu = \varepsilon$ . Comme  $\bar{H}$  défini par l'équation (2.20) est clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\varepsilon$ , l'équation (2.28) implique que  $\tilde{H}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\varepsilon$ . On peut alors introduire les notations suivantes

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \varepsilon^2 \bar{H}_2, \quad \tilde{H} = \sum_{n=0}^K \varepsilon^n \tilde{H}_n + O(\varepsilon^{K+1}) = \tilde{H}^K + O(\varepsilon^{K+1}), \quad (2.29)$$

$$f \circ \left( \Phi_{(\varepsilon, \tau)}^\chi \right)^{-1} = \sum_{n=0}^K \varepsilon^n T_n f + O(\varepsilon^{K+1}).$$

En dérivant l'équation (2.28) par rapport à  $\varepsilon$  :

$$\partial_\varepsilon \tilde{H} = \partial_\varepsilon \bar{H} \circ \Phi_{(\varepsilon, \tau)}^\chi + \{\bar{H}; \chi\} \circ \Phi_{(\varepsilon, \tau)}^\chi - \partial_\sigma \chi \circ \Phi_{(\varepsilon, \tau)}^\chi$$

et en composant à droite par  $\left( \Phi_{(\varepsilon, \tau)}^\chi \right)^{-1}$ , on obtient

$$\partial_\sigma \chi = \partial_\varepsilon \bar{H} + \{\bar{H}, \chi\} - \partial_\varepsilon \tilde{H} \circ \left( \Phi_{(\varepsilon, \tau)}^\chi \right)^{-1}.$$

En remarquant que  $\partial_\sigma = \varepsilon \partial_\tau$ , l'identification des termes d'ordre 1 implique

$$\partial_{\bar{q}} \chi_1 = -\frac{1}{\bar{p}} \tilde{H}_1,$$

$\bar{H}_1$  étant nul. Comme  $\tilde{H}_1$  doit être choisi indépendant de  $\bar{q}$ , une intégration de cette égalité par rapport à  $\bar{q}$  implique nécessairement  $\tilde{H}_1 = 0$ , et donc

$$\partial_{\bar{q}} \chi_1 = 0;$$

on choisit la solution particulière  $\chi_1 = 0$ .

L'identification des termes d'ordre  $\varepsilon^n$ , avec  $n \in \llbracket 1; K-1 \rrbracket$ , quant à elle, implique

$$\begin{aligned} \partial_\tau \chi_n &= (n+1) \bar{H}_{n+1} + \sum_{k=0}^n \{\bar{H}_{n-k}; \chi_{k+1}\} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k+1) T_k \tilde{H}_{n-k+1} \\ &= (n+1) \bar{H}_{n+1} + \{\bar{H}_0; \chi_{n+1}\} + \sum_{k=0}^{n-1} \{\bar{H}_{n-k}; \chi_{k+1}\} \\ &\quad - (n+1) T_0 \tilde{H}_{n+1} - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (n-k+1) T_k \tilde{H}_{n-k+1}, \end{aligned}$$

où  $\overline{H}_k = 0$  lorsque  $k \notin \{0; 2\}$ . Puisque  $T_0 = Id$ , on obtient

$$-\{\overline{H}_0; \chi_{n+1}\} = (n+1) \left( \overline{H}_{n+1} - \tilde{H}_{n+1} \right) - \partial_\tau \chi_n + \sum_{k=0}^{n-1} \{\overline{H}_{n-k}; \chi_{k+1}\} - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (n-k+1) T_k \tilde{H}_{n-k+1}.$$

Comme  $\overline{H}_0(\bar{q}, \bar{p}, \tau) = \bar{p}^2/2$  (voir équation (2.20)) et par définition du crochet de Poisson, cette égalité est équivalente à

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{q}} \chi_{n+1} = \frac{1}{\bar{p}} & \left[ (n+1) \left( \overline{H}_{n+1} - \tilde{H}_{n+1} \right) - \partial_\tau \chi_n + \sum_{k=0}^{n-1} \{\overline{H}_{n-k}; \chi_{k+1}\} \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (n-k+1) T_k \tilde{H}_{n-k+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , les coefficients  $T_k f$  ne dépendent que des  $\chi_j$ ,  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . En effet, on sait déjà que  $T_0 = Id$  et, de plus, l'égalité

$$\frac{d}{d\mu} \left( f \circ \left( \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right)^{-1} \right) = - \left\{ f \circ \left( \Phi_{(\mu, \tau)}^\chi \right)^{-1}; \chi \right\}$$

implique, en identifiant les termes d'ordre  $\mu^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(n+1)T_{n+1}f = - \sum_{k=0}^n \{T_{n-k}f; \chi_{k+1}\}.$$

On peut par conséquent calculer de façon récursive les coefficients  $\chi_n$  en fonction des coefficients  $\tilde{H}_j$ ,  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , et donc construire  $\chi$  de sorte que, pour tout  $n \in \llbracket 0; K \rrbracket$ ,  $\tilde{H}_n$  ne dépende pas de  $\overline{Q}$ , en intégrant l'équation (2.30) par rapport à  $\overline{Q}$ . On a alors la première équation de (2.23) :

$$\frac{d}{d\sigma} \overline{P}(\sigma) = O(\varepsilon^{K+1}).$$

Pour montrer la seconde équation de (2.23), à savoir

$$\sup_{\sigma \geq 0} |\overline{P}(\sigma) - \bar{p}(\sigma)| = O(\varepsilon^2),$$

on utilise le fait que  $\chi_1 = 0$ . On a alors (en utilisant (2.22))

$$\begin{aligned} \bar{p}(\sigma) - \overline{P}(\sigma) &= - \int_0^\varepsilon \partial_{\bar{q}} \chi(\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau), \mu, \tau) d\mu \\ &= - \int_0^\varepsilon (\mu \partial_{\bar{q}} \chi_2(\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau), \tau) + O(\mu^2)) d\mu. \end{aligned} \quad (2.31)$$

À partir de la récurrence (2.30), on a de plus que tous les  $\partial_{\bar{q}} \chi_k$  sont uniformément bornés en  $\tau$ . On obtient donc

$$\sup_{\sigma \geq 0} |\bar{p}(\sigma) - \overline{P}(\sigma)| = O(\varepsilon^2).$$

### 3. Conclusion.

On conclut en revenant à la définition de  $\bar{p}$  (voir (2.18)) :

$$p(t) - p(0) = p_* (\bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0)) = \varepsilon^{-1} (\bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0)).$$

On décompose alors cette différence de la façon suivante :

$$|\bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0)| \leq |\bar{p}(\sigma) - \bar{P}(\sigma)| + |\bar{P}(\sigma) - \bar{P}(0)| + |\bar{P}(0) - \bar{p}(0)|.$$

Ces trois termes peuvent se majorer grâce à (2.23) et il existe des constantes  $c_K$  et  $C_K$  telles que

$$\begin{aligned} |p(t) - p(0)| &\leq \varepsilon^{-1} c_K (\varepsilon^2 + \varepsilon^{K+1} \sigma + \varepsilon^2) \\ &\leq C_K \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout  $0 \leq t = \varepsilon \sigma \leq \sigma_* \varepsilon^{-K+2}$ .

□

Reste à montrer le Lemme 2.3 pour que la démonstration du Théorème 2.1 soit complète.

*Démonstration du Lemme 2.3.* D'après le théorème de Schwarz, on peut intervertir les dérivées partielles de  $f \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi$  par rapport à  $\mu$  et  $\sigma$ , pour tout  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  :

$$\partial_\sigma \partial_\mu f \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi = \partial_\mu \partial_\sigma f \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi.$$

Or

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\sigma f \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi &= \partial_\mu \left( \{f; R\} \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi \right) \\ &= \{f; \partial_\mu R\} \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi + \{\{f; R\}; \chi\} \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \partial_\mu f \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi &= \partial_\sigma \left( \{f; \chi\} \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi \right) \\ &= \{f; \partial_\sigma \chi\} \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi + \{\{f; \chi\}; R\} \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\{f; \partial_\mu R\} + \{\{f; R\}; \chi\} = \{f; \partial_\sigma \chi\} + \{\{f; \chi\}; R\}.$$

Par l'identité de Jacobi, on a

$$\{\{f; R\}; \chi\} = \{\{\chi; R\}; f\} + \{\{f; \chi\}; R\},$$

et il reste

$$\{f; \partial_\mu R\} + \{\{\chi; R\}; f\} = \{f; \partial_\sigma \chi\}.$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout  $f$ , on obtient

$$\partial_\mu R + \{R; \chi\} = \partial_\sigma \chi.$$

On remarque qu'alors

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( R \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi \right) &= (\partial_\mu R) \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi + \{R; \chi\} \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi \\ &= \partial_\sigma \chi \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi. \end{aligned}$$

Comme en  $\mu = 0$ ,  $\Phi_{(0,\tau)}^\chi = Id$ , on a  $R_{\mu=0} = 0$  et

$$R \circ \Phi_{(\mu,\tau)}^\chi = \int_0^\mu \partial_\sigma \chi \circ \Phi_{(\mu',\tau)}^\chi d\mu'.$$

□

*Démonstration du Théorème 2.2.* Par définition de  $\bar{q}$ ,  $\bar{p}$  et  $\sigma$  (voir les équations (2.17) et (2.18)), il suffit de montrer que, pour tout  $0 \leq t = \varepsilon\sigma \leq \sigma_*$ , on a

$$\bar{p}(\sigma) = \bar{p}(0) - \varepsilon^2 \frac{\lambda}{\bar{p}(0)} (V(\bar{q}(0) + \bar{p}(0)\sigma, \tau) - V(\bar{q}(0), 0)) + O(\varepsilon^3).$$

Soit  $K \in \mathbb{N}$ ,  $K \geq 3$ . L'estimation (2.31) permet d'écrire

$$\bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0) = \bar{P}(\sigma) - \bar{P}(0) - \int_0^\varepsilon \mu (\partial_{\bar{q}} \chi_2(\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau), \tau) - \partial_{\bar{q}} \chi_2(\bar{q}(\mu, 0), \bar{p}(\mu, 0), 0)) d\mu + O(\varepsilon^3).$$

Comme on a  $\partial_\sigma \bar{P}(\sigma) = O(\varepsilon^{K+1})$ , on obtient

$$\bar{P}(\sigma) - \bar{P}(0) = O(\varepsilon^{K+1}\sigma),$$

et

$$\bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0) = - \int_0^\varepsilon \mu (\partial_{\bar{q}} \chi_2(\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau), \tau) - \partial_{\bar{q}} \chi_2(\bar{q}(\mu, 0), \bar{p}(\mu, 0), 0)) d\mu + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^{K+1}\sigma).$$

De plus, la récurrence (2.30) prise en  $n = 1$  est

$$\partial_{\bar{q}} \chi_2 = \frac{1}{\bar{p}} \left[ 2 \left( \bar{H}_2 - \tilde{H}_2 \right) \right],$$

puisque  $\chi_1 = 0$ . En intégrant par rapport à  $\bar{q}$ , cette égalité implique

$$0 = -\frac{2}{\bar{p}} \tilde{H}_2,$$

puisque  $V$ , et donc  $\bar{H}_2$ , sont de moyenne nulle et que  $\tilde{H}_2$  doit être indépendant de  $\bar{q}$ . On obtient donc

$$\partial_{\bar{q}} \chi_2 = \frac{2}{\bar{p}} \bar{H}_2 = \frac{2\lambda}{\bar{p}} V,$$

et

$$\bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0) = - \int_0^\varepsilon 2\lambda\mu \left( \frac{V(\bar{q}(\mu, \tau), \tau)}{\bar{p}(\mu, \tau)} - \frac{V(\bar{q}(\mu, 0), 0)}{\bar{p}(\mu, 0)} \right) d\mu + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^{K+1}\sigma). \quad (2.32)$$

Ceci implique en particulier  $\bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0) = O(\varepsilon^2)$ . De plus, comme  $\chi_1 = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \bar{q}(\sigma) - \bar{Q}(\sigma) &= \int_0^\varepsilon \partial_{\bar{p}} \chi(\bar{q}(\mu, \tau), \bar{p}(\mu, \tau), \mu, \tau) d\mu = O(\varepsilon^2), \\ \bar{q}(\sigma) - \bar{q}(\mu, \tau) &= O(\varepsilon^2), \\ \bar{p}(\sigma) - \bar{p}(\mu, \tau) &= O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

uniformément en  $\sigma$ . En remplaçant dans l'équation (2.32), on trouve

$$\begin{aligned} \bar{p}(\sigma) - \bar{p}(0) &= - \int_0^\varepsilon 2\lambda\mu \left( \frac{V(\bar{q}(\sigma), \tau)}{\bar{p}(\sigma)} - \frac{V(\bar{q}(0), 0)}{\bar{p}(0)} \right) d\mu + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^{K+1}\sigma) \\ &= -\varepsilon^2 \lambda \left( \frac{V(\bar{q}(\sigma), \tau)}{\bar{p}(\sigma)} - \frac{V(\bar{q}(0), 0)}{\bar{p}(0)} \right) + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^{K+1}\sigma) \\ &= -\frac{\varepsilon^2 \lambda}{\bar{p}(0)} (V(\bar{Q}(\sigma), \tau) - V(\bar{q}(0), 0)) + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^{K+1}\sigma). \end{aligned}$$

Enfin, par définition de  $\tilde{H}^K$  (équation (2.29)), on a

$$\begin{aligned}\bar{Q}(\sigma) &= \bar{Q}(0) + \int_0^\sigma \partial_{\bar{P}} \tilde{H}^K(\bar{P}(\sigma'), \varepsilon, \varepsilon \sigma') d\sigma' + O(\varepsilon^{K+1}\sigma) \\ &= \bar{Q}(0) + \int_0^\sigma \partial_{\bar{P}} \tilde{H}^K(\bar{P}(0), \varepsilon, \varepsilon \sigma') d\sigma' + O(\varepsilon^{K+1}\sigma) \\ &= \bar{q}(0) + \int_0^\sigma \partial_{\bar{P}} \tilde{H}^K(\bar{p}(0), \varepsilon, \varepsilon \sigma') d\sigma' + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^{K+1}\sigma).\end{aligned}$$

Donc

$$\bar{p}(\sigma) = \bar{p}(0) - \frac{\varepsilon^2 \lambda}{\bar{p}(0)} \left( V \left( \bar{q}(0) + \int_0^\sigma \partial_{\bar{P}} \tilde{H}^K(\bar{p}(0), \varepsilon, \varepsilon \sigma') d\sigma', \tau \right) - V(\bar{q}(0), 0) \right) + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^{K+1}\sigma). \quad (2.33)$$

Pour terminer la démonstration du théorème, on fixe  $K = 3$ . On sait, par définition, que

$$\tilde{H}^3 = \tilde{H}_0 + \varepsilon \tilde{H}_1 + \varepsilon^2 \tilde{H}_2 + \varepsilon^3 \tilde{H}_3.$$

Or on a déjà  $\tilde{H}_0 = \bar{H}_0 = \bar{P}^2/2$  et  $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = 0$ . L'égalité (2.30) en  $n = 2$  implique

$$\partial_{\bar{q}} \chi_3 = \frac{1}{\bar{p}} \left( -3\tilde{H}_3 - \partial_\tau \chi_2 \right).$$

En moyennant par rapport à  $\bar{q}$ , on obtient alors  $\tilde{H}_3 = 0$ , puisqu'on peut choisir  $\chi_2$  de moyenne nulle. L'équation (2.33) devient

$$\bar{p}(\sigma) = \bar{p}(0) - \frac{\varepsilon^2 \lambda}{\bar{p}(0)} (V(\bar{q}(0) + \bar{p}(0)\sigma, \tau) - V(\bar{q}(0), 0)) + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^4\sigma),$$

d'où la conclusion. □

L'équation (2.33) implique le corollaire suivant.

**Corollaire 2.4.** *Pour tout  $K \in \mathbb{N}$ ,  $K \geq 3$ , et tout  $0 \leq t \leq \sigma_* p_*^{K-3}$ ,*

$$p(t) = p_{ap}^K(t) + O(p_*^{-2})$$

où

$$p_{ap}^K(t) = p(0) - \frac{\lambda}{p(0)} \left( V \left( q(0) + p_* \int_0^t \partial_1 \tilde{H}^K \left( \frac{p(0)}{p_*}, \frac{1}{p_*}, \tau \right) d\tau, t \right) - V(q(0), 0) \right).$$

## 2.4 Rotateurs frappés

On s'intéresse maintenant au système frappé décrit par les équations (2.7)-(2.8) et on considère  $(q_n, p_n) = \Phi^n(q_0, p_0) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ , tel que

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \lambda \nabla v(q_n), \\ q_{n+1} = q_n + p_{n+1}. \end{cases} \quad (2.34)$$

On remarque qu'ici  $q_n = q(n)$  et  $p_n = p(n)$  puisque dans (2.7), le potentiel est de période 1. Ainsi, pour les systèmes frappés, il y a exactement un « événement diffusif » par unité de temps, indépendamment de la vitesse de la particule, alors que pour les systèmes pulsés, le nombre de

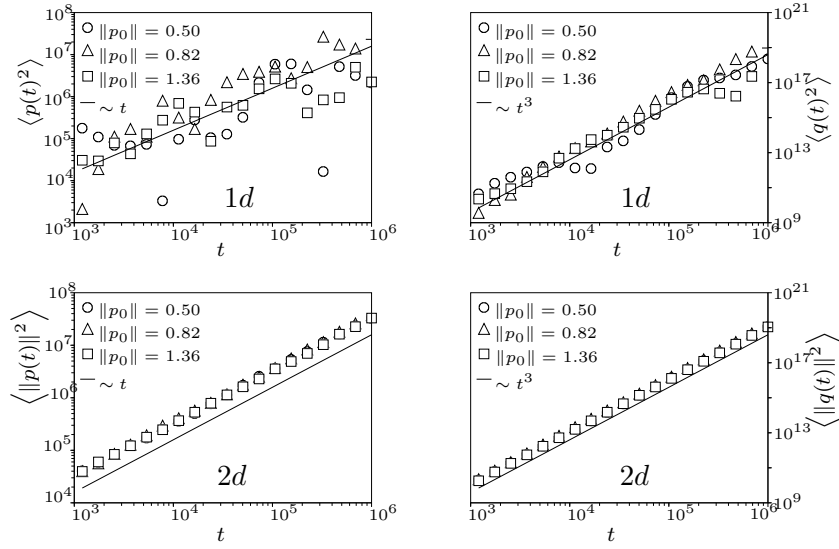


FIG. 2.9 – Valeurs déterminées numériquement de  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$  et  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle$  en dimensions 1 (haut) et 2 (bas) pour le modèle des rotateurs frappés décrit par l'équation (2.8), où  $V(q) = \prod_{i=1}^d \cos(q_i)$  et  $\lambda = 10$ . Les différents symboles correspondent à différentes conditions initiales, comme indiqué dans les légendes.

tels événements par unité de temps augmente linéairement avec  $\|p\|$  lorsque la particule accélère. Par conséquent, pour les systèmes frappés, la variation du moment cinétique  $\Delta_{\text{kick}}\|p\|$  est d'ordre  $\lambda$  sur un intervalle de temps d'ordre 1, indépendamment de la valeur de  $\|p\|$ . Par contre, pour les systèmes pulsés en dimension  $d > 1$ , par l'équation (1.32) et en supposant les  $\beta_n^{(1)}$  indépendants et identiquement distribués, la variation typique du moment cinétique  $\Delta_{\text{puls}}\|p\|$  d'une particule rapide de moment  $\|p\|$  sur un intervalle de temps d'ordre 1 est

$$\Delta_{\text{puls}}\|p\| \sim \left\langle \left( \sum_{n=1} \frac{\beta_n^{(1)}}{\|p\|^2} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \sim \|p\|^{-3/2}. \quad (2.35)$$

On a donc

$$\Delta_{\text{puls}}\|p\| \ll \Delta_{\text{kick}}\|p\|.$$

On va voir dans ce qui suit qu'une conséquence de cette remarque est que les rotateurs frappés accélèrent beaucoup plus rapidement les particules que les rotateurs pulsés. En effet, l'équation (2.34) implique

$$p_n = p_0 - \lambda \sum_{\ell=0}^{n-1} (\nabla V)(q_\ell).$$

Puisque pour les systèmes frappés,  $\Delta p_n$  est d'ordre  $\lambda$ , indépendamment de la valeur de  $\|p\|$ , la deuxième équation du système (2.34) suggère que, pour des valeurs de  $\lambda$  grandes, ces variations de moment élevées successives rendent aléatoire la position du système sur le tore, permettant de voir les  $q_n$  comme étant uniformément distribués sur le tore, avec corrélations en temps à courte portée. Ceci implique  $\langle (p_n - p_0)^2 \rangle \sim n$  ou, de façon équivalente

$$\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t.$$

En dimension  $d = 1$ , cela implique immédiatement  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^3$ . En dimension  $d > 1$ , la variation de direction  $e_{n+1} - e_n$ , où  $e_n := p_n / \|p_n\|$ , est d'ordre  $\|p_n\|^{-1} \sim n^{-1/2}$ , de sorte que

$$\langle \|e_{n+m} - e_n\| \rangle \sim 1 \quad \text{pour} \quad m \sim n.$$

En désignant, comme dans la section 2.2, par  $M_k$  le nombre de collisions nécessaires pour que la particule ait tourné  $k$  fois d'un angle macroscopique, on obtient  $M_k \sim 2^k$  et

$$\begin{aligned} q_{M_{k+1}} &= q_{M_k} + (M_{k+1} - M_k) p_{M_k} \\ &= q_{M_k} + M_k^{3/2} e_{M_k}. \end{aligned}$$

Cela implique  $\langle \|q_{M_k}\|^2 \rangle \sim M_k^3$  et, en interpolant entre les  $M_k$ , on trouve finalement que  $\langle \|q(t)\|^2 \rangle \sim t^3$  en dimension  $d \geq 2$  aussi. L'explication de ce comportement est claire : la particule accélère considérablement plus vite pour les systèmes frappés (où  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t$ ) que pour les pulsés (où  $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/5}$ ) et donc tourne beaucoup moins. Ces comportements asymptotiques coïncident avec les résultats numériques présentés dans la Figure 2.9.



# Chapitre 3

## Quelques rappels sur la théorie des probabilités

### 3.1 Introduction

Ce chapitre et le suivant sont voués à la démonstration des Théorèmes 1.4 et 1.8. Tous deux sont des cas particuliers du théorème suivant.

**Théorème 3.1.** *Soit une marche aléatoire  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$\begin{aligned}\xi_0 &> 0 \\ \xi_{n+1}^2 &= \xi_n^2 + F(\xi_n, \varepsilon_n),\end{aligned}\tag{3.1}$$

avec les hypothèses suivantes.

1. Les tirages  $\varepsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont des variables aléatoires sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ; elles sont indépendantes, identiquement distribuées, bornées, et

$$|\varepsilon_n| \leq \bar{\varepsilon}, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_n^2) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. On suppose qu'il existe une valeur critique  $\bar{\xi} > 0$  telle que pour tout  $|\xi| \geq \bar{\xi}$

$$F(\xi, \varepsilon_n) = 2\varepsilon_n \xi + G(\xi, \varepsilon_n),$$

où l'espérance de la fonction  $G$  par rapport à  $\varepsilon_n$  est bornée en  $\xi$  et  $G$  satisfait

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbb{E}(G(\xi, \varepsilon_n)) = \delta > 0, \quad \sup_{|\varepsilon_n| \leq \bar{\varepsilon}} |G(\xi, \varepsilon_n)| = o(|\xi|),\tag{3.2}$$

et telle que  $\xi^2 + F(\xi, \varepsilon_n)$  soit strictement positif pour tout  $|\xi| \geq \bar{\xi}$ . Pour les valeurs  $|\xi| < \bar{\xi}$ , on pose

$$F(\xi, \varepsilon_n) = \delta.$$

La suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par (3.1) est donc bien définie, les valeurs prises par la suite  $\xi_n^2 + F(\xi_n, \varepsilon_n)$  restant positives.

La chaîne de Markov  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie alors

$$\mathbb{E}(\xi_k^{2\ell}) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^\ell, \quad \forall \ell > -\frac{[\delta]}{2},$$

où on désigne par  $[\delta]$  la partie entière de  $\delta$ .

Dans le cas des développements faits dans le chapitre 1, on a

$$\delta = \frac{2}{3} \left( \frac{B}{D^2} + 2 \right) = \frac{d+1}{3},$$

(voir le Théorème 1.2 pour les définitions) lorsque le champ de force dérive d'un potentiel. De plus,  $\xi_n$  est défini comme étant proportionnel à  $\|v_n\|^3$  (équation (1.35)) et on veut, au minimum, le comportement des  $\|v_n\|^{-1}$  permettant l'étude de celui de  $\tau_n$  (équation (1.12)). On est donc intéressé par le résultat du Théorème 3.1 pour des valeurs de  $\ell$  supérieures ou égales à  $-1/6$  : en effet,  $\xi_n^{2\ell} = \|v_n\|^{6\ell}$ . En particulier, on a besoin de  $-1/6 > -[\delta]/2$ , c'est-à-dire ici  $\lfloor \frac{d+1}{3} \rfloor \geq 1$ , d'où l'hypothèse  $d \geq 2$  dans le Théorème 1.4. Lorsque le champ de force ne dérive pas d'un potentiel (section 1.5), par contre, on a

$$\delta = \frac{B'}{D'^2} + 1 = \frac{d+1}{2},$$

où  $B'$  et  $D'$  sont définis dans le Théorème 1.6, et  $\xi_n$  est proportionnel à  $\|v_n\|^2$  (équation (1.58)). On a donc besoin du Théorème 3.1 pour des valeurs de  $\ell$  supérieures ou égales à  $-1/4$ , et il faut donc  $[\delta] = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor > 1/2$ , c'est-à-dire  $d \geq 1$ , ce qui est toujours vrai (Théorème 1.8).

Le Théorème 3.1 se démontre en considérant la suite de processus aléatoires  $\left( Y_t^{(n)}, t \in [0; 2] \right)_{n \in \mathbb{N}}$  continus, affines par morceaux et définis à partir de la suite  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante :

$$Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} = \frac{\xi_k^2}{n}, \quad k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \quad (3.3)$$

$$Y_t^{(n)} = (k+1-nt) Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} + (nt-k) Y_{\frac{k+1}{n}}^{(n)}, \quad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}. \quad (3.4)$$

La condition initiale  $Y_0^{(n)}$  est, comme  $\xi_0$ , strictement positive et non aléatoire. Chaque réalisation  $Y^{(n)}(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , du processus est une fonction continue sur l'intervalle de temps  $[0; 2]$  et on désignera par  $\mathcal{C}$  l'espace

$$\mathcal{C} := (\mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \quad (3.5)$$

muni de la tribu des Boréliens  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ . En particulier, on remarque que  $Y_1^{(n)} = n^{-1}\xi_n^2$ ; on s'intéresse donc à la convergence de la suite des  $\left\langle \left( Y_1^{(n)} \right)^\ell \right\rangle$  quand  $n$  tend vers l'infini. On va montrer que cette suite converge effectivement vers une constante. Il est à noter que la division par  $n$  de  $\xi_n^2$  est cruciale; c'est la seule puissance de  $n$  aboutissant à un résultat de convergence. Une division par une puissance strictement plus grande que 1 donnerait que  $Y_1^{(n)}$  tend vers 0, alors qu'une division par une puissance de  $n$  strictement inférieure à 1 provoquerait une explosion de  $Y_1^{(n)}$ . Le choix de la puissance utilisée n'est donc pas anodin.

Le coeur du chapitre 4 va être de démontrer que la suite des processus  $Y^{(n)}$  converge en distribution vers le processus de Bessel en dimension  $\delta$ , où  $\delta$  est l'espérance du terme d'ordre 0 de  $F$ . On utilisera pour cela le Théorème 3.47, démontré dans [79]. Il s'agit d'un théorème technique, dont on détaillera la démonstration dans un cas particulier (Théorème 4.3). La méthode utilisée pour montrer ce type de théorème est standard, elle est en particulier décrite dans [39]. Elle se décompose en quatre grandes étapes, de la façon suivante.

- Étape 1 : On remplace les processus étudiés par des processus restreints les approchant et restant à valeurs bornées. Pour ce faire, deux méthodes différentes peuvent être utilisées. On peut tronquer les générateurs du processus, comme par exemple dans la démonstration

des Théorèmes 3.34 et 3.47 ; ou alors arrêter les processus à l'aide d'un temps d'arrêt, comme dans la démonstration du Théorème 4.3 ou dans [39].

- Étape 2 : On montre que cette nouvelle suite de processus est relativement compacte, c'est-à-dire qu'elle admet des sous-suites convergentes. On utilise pour cela l'équivalence entre la tension et la relative compacité.
- Étape 3 : On considère les limites de sous-suites convergentes, elles sont toutes solution d'un même problème aux martingales. Lorsque ce problème est bien posé, on en déduit que toutes les sous-suites convergentes ont la même limite et que c'est finalement la suite des processus elle-même, et pas seulement des sous-suites, qui converge.
- Étape 4 : On montre que le résultat de convergence reste vrai pour les processus de départ, en faisant tendre vers l'infini la borne choisie pour le compact dans lequel évoluent les processus restreints.

Les notions de probabilités utilisées sont résumées dans le chapitre 3. Pour une étude exhaustive, on renvoie aux ouvrages [44], [73], [46] ou [79].

## 3.2 Processus de Markov et martingales

Soit un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On rappelle tout d'abord la notion de probabilité conditionnelle.

**Définition 3.2.** Soit  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . La **probabilité conditionnelle** de  $A \in \mathcal{F}$  par rapport à  $\mathcal{G}$  est la variable aléatoire  $\mathcal{G}$ -mesurable  $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$  telle que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) \mathbb{1}_B), \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

La définition de  $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$  est unique, à un ensemble de mesure nulle près. Un cas particulier de probabilité conditionnelle fréquemment utilisé est la probabilité conditionnelle par rapport à une variable aléatoire.

**Définition 3.3.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On désigne par  $\mathbb{P}(A|X)$  la probabilité conditionnelle de  $A \in \mathcal{F}$  par rapport à la sous-tribu  $\sigma(X)$  engendrée par  $X$ . C'est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ . On désigne alors par  $\mathbb{P}(A|X = x)$  la valeur  $\mathbb{P}(A|X)(\omega)$  prise en tout point  $\omega$  tel que  $X(\omega) = x$ .

La notion de probabilité conditionnelle est de plus un cas particulier de la notion d'espérance conditionnelle.

**Définition 3.4.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs réelles, intégrable. Si  $\mathcal{G}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ , on appelle **version de l'espérance conditionnelle** de  $X$  par rapport à  $\mathcal{G}$  une variable aléatoire  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$   $\mathcal{G}$ -mesurable telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B), \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

À nouveau, c'est une notion unique à un ensemble de mesure nulle près.

**Exemple 3.5.** Lorsque  $X = \mathbb{1}_A$ , avec  $A \in \mathcal{F}$ , on retrouve la probabilité conditionnelle de  $A$  :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}) = \mathbb{P}(A|\mathcal{G}).$$

À l'aide de ces notations, on définit les chaînes de Markov.

**Définition 3.6.** Une **chaîne de Markov** est une suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ . On définit alors sa **probabilité de transition** par

$$\Pi_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Les chaînes de Markov, ainsi que toute suite de variables aléatoires, sont des processus stochastiques à temps discret. On en rappelle la définition la plus générale.

**Définition 3.7.** Un **processus stochastique**  $X = \{X(t), t \in I\}$  est une collection de variables aléatoires  $X(t)$  sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  commun et à valeurs dans un espace métrique  $(S, \rho)$ , indexée par un paramètre  $t \in I \subset \mathbb{R}$ .

Le paramètre  $t$  est interprété comme étant le temps. Lorsque l'ensemble  $I$  est discret, on parle de processus à temps discret ; lorsque  $I$  est un intervalle, on parle de processus à temps continu. Un processus stochastique peut être vu comme une fonction  $X : I \times \Omega \rightarrow S$  telle que la fonction  $X(t, \cdot)$  soit mesurable, l'espace d'arrivée  $S$  étant muni de la tribu des boréliens  $\mathcal{B}$  associée à la métrique  $\rho$ . Dans toute la suite, on écrira  $X_t(\cdot) = X(t, \cdot)$ . La Définition 3.6 des chaînes de Markov correspond donc à un processus stochastique dont la variable temporelle est prise dans l'ensemble  $I = \mathbb{N}$  et dont le futur ne dépend du passé que par l'intermédiaire du présent. On définit de façon similaire les processus de Markov pour un ensemble  $I$  quelconque.

**Définition 3.8.** On appelle **processus de Markov** un processus stochastique satisfaisant la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} \in B | X_{t_i} = x_i, i = 1, \dots, n) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} \in B | X_{t_n} = x_n)$$

pour tout Borélien  $B \subset \mathbb{R}$ , tout  $(n+1)$ -uplet  $0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \in I$  et tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . On définit alors les **probabilités de transition** par

$$\mathbb{P}(s, x; t, B) = \mathbb{P}(X_t \in B | X(s) = x), \quad s < t.$$

Une seconde famille de processus stochastiques dont on aura besoin est celle des martingales. On introduit pour la définir la notion de filtration.

**Définition 3.9.** Une **filtration** est une famille croissante  $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$  de sous- $\sigma$ -algèbres de  $\mathcal{F}$ , avec  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On dit qu'un processus stochastique  $X = \{X_t; t \in I\}$  est **adapté** à la filtration  $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$  si  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout  $t \in I$ . En particulier, pour un processus stochastique donné  $X$ , on utilisera souvent la filtration usuelle  $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ , où  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in I$ , est la sous- $\sigma$ -algèbre de  $\mathcal{F}$  engendrée par les ensembles  $A = \{\omega \in \Omega | X_{t_i} \in L_i, i = 1, \dots, n\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , tous  $t_1 < \dots < t_n \leq t$  appartenant à  $I$  et tous sous-ensembles  $L_1, \dots, L_n$  de la tribu de Lebesgue. On rappelle que la tribu de Lebesgue est la tribu engendrée par les unions de Boréliens et d'espaces de mesure nulle. La filtration ainsi construite est adaptée à  $X$  et on la note  $\{\sigma(X_s; s \in I, s \leq t), t \in I\}$ .

Les martingales sont définies à partir des filtrations comme des processus à moyennes constantes au cours du temps.

**Définition 3.10.** Soit  $X = \{X_t, t \in I\}$ , avec  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , un processus stochastique adapté à une filtration  $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ . On dit que  $X$  est une **martingale** s'il vérifie la condition

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, \quad \text{presque-sûrement,}$$

pour tous  $s < t$  appartenant à  $I$ . Lorsque  $I$  est dénombrable, respectivement un intervalle, on parle de martingale à temps discret, respectivement continu.

À l'aide de la définition de l'espérance conditionnelle, on peut redéfinir une martingale de la façon suivante.

**Proposition 3.11.** Un processus  $X = \{X_t, t \in I\}$ , avec  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , est une martingale pour la filtration usuelle  $\{\sigma(X_s; s \in I, s \leq t), t \in I\}$  si et seulement si pour tous  $s$  et  $t \in I$  avec  $s < t$ , tout maillage  $s_1 < \dots < s_d \leq s$  appartenant également à  $I$  et toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on a

$$\mathbb{E}((X_t - X_s) \phi(X_{s_1}, \dots, X_{s_d})) = 0.$$

Aux familles des processus de Markov et des martingales sont associées des propriétés bien distinctes. La première regroupe les processus sans mémoire, tandis que la seconde assure la conservation de la moyenne. Toutefois, leur intersection est non vide et contient en particulier les processus de Wiener.

**Définition 3.12.** Un **processus de Wiener** ou **mouvement Brownien unidimensionnel** est un processus continu  $W = \{W_t; 0 \leq t < \infty\}$  défini sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs réelles et adapté à une filtration  $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$  tel que  $W_0 = 0$  presque-sûrement et que pour tous  $0 \leq s < t$ , la différence  $W_t - W_s$  soit indépendante de  $\mathcal{F}_s$  et ait une distribution normale de moyenne nulle et de variance  $t - s$ . Cette définition se généralise en plusieurs dimensions. Soient  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités et  $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$  une filtration. Un **mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel de distribution initiale  $\mu$**  est un processus  $W = \{W_t; 0 \leq t < \infty\}$  continu, défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et adapté à  $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$  tel que

- $\mathbb{P}(W_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$ , pour tout  $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,
- pour tous  $0 \leq s < t$ , la différence  $W_t - W_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$  et normalement distribuée avec moyenne nulle et matrice de covariance  $(t - s)I_d$ , où  $I_d$  désigne la matrice identité en dimension  $d$ .

La construction de tels processus est faite dans le chapitre 2 de [44]. Dans la définition, le fait que  $W_t - W_s$  soit de moyenne nulle et indépendant de  $\mathcal{F}_s$  implique qu'un processus de Wiener est une martingale. L'indépendance a également pour conséquence le théorème suivant.

**Théorème 3.13.** Tout mouvement Brownien en dimension  $d$  est un processus de Markov.

L'hypothèse sur la distribution des différences  $W_t - W_s$  permet aussi de calculer les probabilités de transition de ces processus de Markov. Par exemple, pour tout processus de Wiener  $W$  en dimension 1 et tout borélien  $B$ , on a

$$\mathbb{P}(W_t \in B | W_s = x) = (2\pi(t - s))^{-\frac{1}{2}} \int_B e^{-\frac{1}{2}(t-s)^{-1}(y-x)^2} dy, \quad \forall 0 \leq s < t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On termine cette section en introduisant la notion de temps d'arrêt, utile en particulier pour maintenir l'évolution de processus stochastiques dans des compacts. Elle est basée sur la notion de filtration.

**Définition 3.14.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable muni d'une filtration  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ . Un temps aléatoire  $T$  est appelé **temps d'arrêt** si pour tout  $t \geq 0$ , l'événement  $\{T \leq t\}$  appartient à la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}_t$ .

Plusieurs exemples de temps d'arrêt découlent de la proposition suivante.

**Proposition 3.15.** 1. Tout temps aléatoire égal à une constante positive est un temps d'arrêt.  
 2. Soit  $X$  un processus stochastique défini sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ , et continu à droite par rapport à la variable temporelle  $t$ . Soit  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  une filtration qui lui est adaptée. Alors pour tout sous-ensemble fermé  $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , le temps

$$T(\omega) := \inf \{t \geq 0; X_t(\omega) \in \Gamma\}, \quad \forall \omega \in \Omega$$

est un temps d'arrêt.

3. Soient  $T$  et  $S$  deux temps d'arrêt. Alors la somme  $T + S$ , le minimum  $T \wedge S$  et le maximum  $T \vee S$  sont encore des temps d'arrêt.

Pour restreindre l'évolution d'un processus continu à droite  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  à un compact  $\Gamma \in \mathbb{R}^d$ , on définit le processus arrêté  $X_{\cdot \wedge T}$ , où  $T$  est le temps d'arrêt défini par

$$T(\omega) := \inf \{t \geq 0; X_t(\omega) \in \overline{\Gamma^c}\}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

En particulier, lorsque le processus  $X$  est une martingale, ce processus arrêté est encore une martingale.

**Théorème 3.16.** Soient  $X$  une martingale pour la filtration  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, u \leq t)$  et  $\tau$  un temps d'arrêt pour cette même filtration. Si  $\tau$  prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs, le processus arrêté  $\{X_{t \wedge \tau}, \mathcal{F}_t\}$  et le processus décalé  $\{X_{t+\tau}, \mathcal{F}_t\}$  sont encore des martingales. En particulier, si  $X$  est une martingale discrète et  $\tau$  un temps d'arrêt quelconque, ces deux processus sont des martingales. Dans le cas des processus en temps continu, on peut ignorer l'hypothèse sur les valeurs de  $\tau$  dès que  $X$  est continu à droite.

### 3.3 Équations Différentielles Stochastiques

On s'intéresse dans cette section aux processus stochastiques qui sont solutions d'une équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t + b(X_t) dt, \quad (3.6)$$

où  $W$  est un mouvement Brownien en une dimension ;  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé terme de dérive et  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  terme de dispersion. On distingue deux types de solution : les solutions fortes et les solutions faibles. On dit qu'une solution  $X$  est forte lorsqu'elle est solution de l'équation (3.6), pour laquelle les coefficients  $\sigma$  et  $b$ , ainsi que le processus de Wiener  $W$ , sont connus et donc  $X$  est l'unique inconnue. Par contre, lorsque seuls les termes  $\sigma$  et  $b$  de l'équation (3.6) sont connus, une solution faible est la donnée d'un processus  $X$  et d'un processus de Wiener  $W$  satisfaisant l'équation (3.6). Plus précisément, les solutions fortes sont définies de la façon suivante.

**Définition 3.17.** Soit  $\xi$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et soit  $W$  un mouvement Brownien en dimension 1. En considérant la filtration

$$\mathcal{G}_t := \sigma(\xi, W_s; 0 \leq s \leq t), \quad \forall 0 \leq t < \infty$$

ainsi que la collection d'ensembles de mesure nulle

$$\mathcal{N} := \{N \subset \Omega \mid \exists G \in \mathcal{G}_\infty \text{ tel que } N \subset G \text{ et } \mathbb{P}(G) = 0\},$$

on crée la **filtration augmentée**

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}), \quad 0 \leq t < \infty.$$

On appelle **solution forte** de l'équation (3.6) sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , par rapport au mouvement Brownien  $W$  et avec la condition initiale  $\xi$ , un processus  $X = \{X_t, 0 \leq t < \infty\}$  tel que

1. le processus  $X$  est adapté à la filtration augmentée  $\mathcal{F}_t$ ,
2.  $\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1$ ,
3.  $\mathbb{P}\left(\int_0^t (|b(X_s)| + \sigma(X_s)^2) ds < \infty\right) = 1$  pour tout  $0 \leq t < \infty$ ,
4. l'égalité

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.7)$$

est vraie presque sûrement.

L'équation (3.7) est la version intégrée de l'équation différentielle stochastique (3.6). L'intégrale d'Itô  $\int_0^t \sigma(X_s) dW_s$  y apparaissant est construite et étudiée dans le chapitre 3 de [44]. L'existence des solutions fortes est assurée lorsque les coefficients de l'équation différentielle stochastique (3.6) sont lipschitziens.

**Théorème 3.18.** *On suppose que les coefficients  $b$  et  $\sigma$  de l'équation différentielle stochastique (3.6) sont lipschitziens et à croissance au plus linéaire sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que*

$$\begin{aligned} |b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| &\leq K|x - y|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ |b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 &\leq K(1 + x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors l'équation différentielle stochastique (3.6) admet une solution forte.

On définit une notion d'unicité pour ces solutions.

**Définition 3.19.** *Il y a unicité forte si pour toutes solutions fortes  $X$  et  $\tilde{X}$  de l'équation (3.6) par rapport au même mouvement Brownien  $W$  et avec la même condition initiale  $\xi$ , on a*

$$\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t, 0 \leq t < \infty) = 1.$$

Il existe dans la littérature plusieurs critères impliquant l'unicité forte des solutions. On reprend ici l'énoncé montré par Yamada et Watanabe dans [85].

**Théorème 3.20.** *On suppose que les coefficients  $\sigma$  et  $b$  de l'équation (3.6) vérifient les conditions*

$$|b(x) - b(y)| \leq K|x - y|, \quad (3.8)$$

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq h(|x - y|), \quad (3.9)$$

pour tout  $0 \leq t < \infty$  et tous  $x$  et  $y$  réels, avec  $K$  une constante strictement positive et  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction strictement croissante telle que  $h(0) = 0$  et

$$\int_0^\varepsilon h^{-2}(u) du = +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Alors on a l'unicité forte des solutions.

Ce théorème s'applique en particulier lorsque  $h(u) = u^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1/2$ . C'est le résultat ayant les hypothèses les moins restrictives existant dans la littérature pour obtenir l'unicité des solutions. Par contre, il ne donne aucun renseignement sur l'existence de celles-ci. Sous des hypothèses semblables, on peut aussi comparer les solutions fortes de deux équations différentielles stochastiques différentes.

**Théorème 3.21.** *On suppose que pour  $j \in \{1; 2\}$ , on a des solutions fortes  $X^{(j)}$  sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  pour les équations différentielles stochastiques*

$$dX_t^{(j)} = \sigma \left( X_t^{(j)} \right) dW_t + b^{(j)} \left( X_t^{(j)} \right) dt, \quad 0 \leq t < \infty,$$

où  $W$  est un mouvement Brownien en dimension 1. On suppose de plus que

1.  $\sigma$  et  $b^{(j)}$  sont continus,
2.  $\sigma$  vérifie la condition (3.9), où  $h$  est décrit dans le Théorème 3.20,
3. on a  $X_0^{(1)} \leq X_0^{(2)}$  presque-sûrement,
4. pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $b^{(1)}(x) \leq b^{(2)}(x)$ ,
5.  $b^{(1)}$  ou  $b^{(2)}$  vérifie la condition (3.8).

Alors on a

$$\mathbb{P} \left( X_t^{(1)} \leq X_t^{(2)}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \right) = 1.$$

On s'intéresse maintenant à une nouvelle notion de résolution de l'équation différentielle stochastique (3.6), plus faible que celle discutée jusqu'alors mais utile dans la suite.

**Définition 3.22.** *Une solution faible de l'équation (3.6) est un triplet  $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$  où*

1.  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilités et  $\{\mathcal{F}_t\}$  est une filtration,
2.  $X = \{X_t, 0 \leq t < +\infty\}$  est continu et adapté et  $W = \{W_t, 0 \leq t < +\infty\}$  est un mouvement Brownien,
3.  $\mathbb{P} \left( \int_0^t (|b(X_s)| + \sigma^2(X_s)) ds < \infty \right) = 1$  pour tout  $0 \leq t < \infty$ ,
4. l'égalité

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s, \quad 0 \leq t < \infty,$$

est vérifiée presque-sûrement.

La mesure de probabilité définie par  $\mu(\Gamma) := \mathbb{P}(X_0 \in \Gamma)$ , pour tout  $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , est appelée **distribution initiale** de la solution.

La principale différence entre solutions forte et faible est que la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$  utilisée pour les solutions faibles n'est pas forcément la filtration augmentée construite dans la définition de solution forte à partir de la distribution initiale et du mouvement Brownien. La valeur  $X_t$  de la solution au temps  $t$  n'est donc pas forcément mesurable par rapport au mouvement Brownien et à la distribution initiale  $\xi$ . Par conséquent, l'existence d'une solution faible ne garantit pas l'existence d'une solution forte. Par contre, la réciproque est vraie : l'existence d'une solution forte assure l'existence d'une solution faible. On mentionne ici un des théorèmes d'existence de solutions faibles.

**Théorème 3.23.** *On suppose que les fonctions  $\sigma$  et  $b$  sont continues et bornées. L'équation différentielle stochastique (3.6) admet alors une solution faible avec distribution initiale  $\mu$ , pour toute mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  telle que*

$$\exists m > 1, \quad \int_{\mathbb{R}} |x|^{2m} \mu(dx) < \infty.$$

On définit deux notions d'unicité de solution faible d'une équation différentielle stochastique, l'unicité trajectorielle et l'unicité en loi. L'unicité trajectorielle est une adaptation de l'unicité forte aux solutions faibles.

**Définition 3.24.** *L'équation (3.6) vérifie l'unicité trajectorielle si pour tout couple de solutions faibles  $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}$  et  $(\tilde{X}, \tilde{W}), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ , définies sur un même espace de probabilités et ayant mêmes mouvement Brownien et condition initiale :*

$$\mathbb{P}(X_0 = \tilde{X}_0) = 1,$$

*les deux processus  $X$  et  $\tilde{X}$  sont presque sûrement égaux :*

$$\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t, 0 \leq t < \infty) = 1.$$

L'unicité en loi, quant à elle, est une notion plus adaptée à la notion de solution faible.

**Définition 3.25.** *L'équation (3.6) vérifie l'unicité en loi si toutes solutions faibles*

$$(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\} \quad \text{et} \quad (\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}), \{\tilde{\mathcal{F}}_t\},$$

*définies sur des espaces de probabilités a priori différents mais ayant la même distribution initiale*

$$\mathbb{P}(X_0 \in \Gamma) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}_0 \in \Gamma), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

*ont la même distribution.*

Tout comme la notion de solution forte est plus forte que celle de solution faible, la notion d'unicité trajectorielle est plus forte que celle d'unicité en loi.

**Proposition 3.26** (Yamada et Watanabe, [85]). *L'unicité trajectorielle de solutions faibles implique leur unicité en loi.*

**Corollaire 3.27.** *L'existence d'une solution faible, avec l'unicité trajectorielle, implique l'existence d'une solution forte.*

Pour étudier l'existence et l'unicité en loi de solutions faibles d'équations différentielles stochastiques, une théorie a été développée par Stroock et Varadhan. Ils montrent l'équivalence entre l'existence et l'unicité en loi de la solution faible d'une équation différentielle stochastique et l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux martingales. La théorie est détaillée dans [44] et [79]. On en reprend ici les quelques éléments dont on aura besoin dans la démonstration du Théorème 3.1.

Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables. On définit l'opérateur  $L$  sur l'espace des fonctions  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  par

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}a(x)f''(x) + b(x)f'(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Définition 3.28.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités muni d'une filtration  $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ . Une **solution du problème aux martingales** homogène en temps associé à  $L$  est un processus  $Z = \{Z_t, t \in \mathbb{R}^+\}$  adapté à  $\{\mathcal{F}_t\}$  et tel que

$$M_t^f := f(Z_t) - f(Z_0) - \int_0^t (Lf)(Z_s) ds, \quad \mathcal{F}_t; \quad 0 \leq t < +\infty \quad (3.10)$$

soit une martingale continue pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ . En particulier, on a l'égalité

$$\mathbb{E} \left( f(Z_t) - f(Z_s) - \int_s^t (Lf)(Z_u) du \mid \mathcal{F}_s \right) = 0, \quad \mathbb{P}\text{-presque surement,}$$

pour tous  $0 \leq s < t < +\infty$  et  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ . On désignera par  $Z^x$  toute solution vérifiant

$$\mathbb{P}(Z_0^x = x) = 1.$$

On dit de plus d'un problème aux martingales qu'il est **bien posé** s'il admet une unique solution  $Z^x$ , pour toute condition initiale  $x \in \mathbb{R}$ .

On peut alors établir un lien entre solution d'équation différentielle stochastique et solution de problème aux martingales.

**Théorème 3.29.** On suppose que  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et bornée sur les compacts de  $\mathbb{R}$ . Alors il existe une solution faible à l'équation différentielle stochastique (3.6) avec condition initiale  $X_0$  si et seulement si il existe une solution  $Z$  au problème aux martingales associé à  $L$  avec condition initiale  $Z_0$  de même loi que  $X_0$ , où  $L$  est défini par

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2} \sigma(x)^2 f''(x) + b(x) f'(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La démonstration de ce théorème met en évidence que la solution de l'équation différentielle stochastique et celle du problème aux martingales ont les mêmes distributions. On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 3.30.** Si  $b$  et  $\sigma$  sont continues et bornées sur les compacts de  $\mathbb{R}$ , alors on a équivalence entre existence et unicité en loi de la solution du problème aux martingales associé à  $L$  et existence et unicité en loi de la solution faible de l'équation différentielle stochastique (3.6), pour tout condition initiale  $x \in \mathbb{R}$ , i.e.  $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$ .

**Exemple 3.31.** Le processus de Wiener  $W_t$  est solution faible de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = dW_t,$$

c'est-à-dire de l'équation (3.6) pour  $\sigma = 1$  et  $b = 0$ . De plus, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , le calcul d'Itô permet d'écrire

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt,$$

équation qui s'intègre en

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds.$$

L'étude des intégrales d'Itô faites dans [44] montre que  $\int_0^t f'(W_s) dW_s$  est une martingale. Le processus de Wiener est donc aussi solution du problème aux martingales associé à l'opérateur  $(Lf)(x) = f''(x)/2$  : pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$f(W_t) - f(W_0) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(W_s) ds, \quad \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$$

est une martingale.

On aura aussi besoin dans la suite de la notion de problème aux martingales arrêté et d'un critère assurant l'existence et l'unicité de sa solution. La théorie est détaillée dans [32].

**Définition 3.32.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités muni d'une filtration  $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ . et  $T$  un temps d'arrêt. On appelle solution du **problème aux martingales arrêté** associé au générateur  $L$  un couple  $(Z, T)$  où  $Z$  est un processus stochastique adapté à  $\{\mathcal{F}_t\}$ ,  $T$  est un temps d'arrêt pour  $\{\mathcal{F}_t\}$  et

$$f(Z_{t \wedge T}) - f(Z_0) - \int_0^{t \wedge T} (Lf)(Z_s) \mathbb{1}_{s \leq T} ds, \quad \mathcal{F}_t; \quad 0 \leq t < +\infty$$

est une martingale pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ . La solution du problème aux martingales arrêté vérifie l'**unicité arrêtée** si pour tout couple de solutions  $((Z_1, T_1), (Z_2, T_2))$  du problème aux martingales arrêté avec condition initiale  $x$ , il existe un processus  $\tilde{Z}$  et des temps aléatoires positifs  $\tilde{T}_1$  et  $\tilde{T}_2$  tels que

1.  $(\tilde{Z}, \tilde{T}_1 \vee \tilde{T}_2)$  soit solution du problème aux martingales arrêté avec condition initiale  $x$ ,
2. pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $(\tilde{Z}_{\cdot \wedge \tilde{T}_i}, \tilde{T}_i)$  ait la même distribution que  $(Z_{\cdot \wedge T_i}, T_i)$ .

Enfin, un problème aux martingales arrêté est **bien posé** s'il admet, pour toute condition initiale  $x \in \mathbb{R}$ , une unique solution (au sens de l'unicité arrêtée).

L'unicité arrêtée peut s'interpréter de la façon suivante. Si  $(Z_1, T_1)$  et  $(Z_2, T_2)$  sont deux solutions d'un problème aux martingales arrêté ayant même condition initiale, alors les processus  $Z_1$  et  $Z_2$  coïncident jusqu'à l'instant  $T_1 \wedge T_2$  et  $(Z, T_1 \vee T_2)$ , où la réalisation  $Z(\omega)$  vaut  $Z_1(\omega)$  lorsque  $T_1(\omega) \geq T_2(\omega)$  et  $Z_2(\omega)$  sinon, est aussi une solution du problème aux martingales arrêté. La proposition suivante est alors vérifiée.

**Proposition 3.33.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités muni d'une filtration  $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ . Alors si un problème aux martingales de générateur  $L$  est bien posé, le problème aux martingales arrêté associé admet une unique solution (au sens de l'unicité arrêtée). De plus, si  $Z^x$  désigne la solution de condition initiale  $x$  du problème non-arrêté, la solution de condition initiale  $x$  du problème arrêté est  $(Z_{\cdot \wedge T}^x, T)$ , pour tout temps d'arrêt  $T$ .

### 3.4 Les processus de Bessel

On rappelle ici la définition et quelques propriétés sur les processus de Bessel. Une étude détaillée est faite dans [73]. Soit  $\tilde{W}$  un mouvement Brownien en dimension  $n \in \mathbb{N}$ . En posant

$$Z_t := \|\tilde{W}_t\|^2,$$

le calcul d'Ito permet d'écrire

$$dZ_t = 2 \sum_{i=1}^n \widetilde{W}_t^i d\widetilde{W}_t^i + n dt.$$

On remarque que

$$W_t := \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\widetilde{W}_s^i}{\|\widetilde{W}_t\|} d\widetilde{W}_s^i$$

est un mouvement Brownien en dimension 1. En effet, l'intégrale d'Ito

$$I(f) := \int_0^t f(X_s) d\widetilde{W}_s$$

satisfait

$$\mathbb{E}(I(f)) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(I(f)^2) = \int_0^t \mathbb{E}(f(X_s)^2) ds.$$

Aussi pour tous  $t$  et  $t'$  réels avec  $t \geq t' \geq 0$ , on a  $\mathbb{E}(W_t) = 0$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((W_t - W_{t'})^2\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\left(\int_{t'}^t \frac{\widetilde{W}_s^i}{\|\widetilde{W}_t\|} d\widetilde{W}_s^i\right)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t'}^t \mathbb{E}\left(\frac{(\widetilde{W}_s^i)^2}{\|\widetilde{W}_t\|^2}\right) ds \\ &= \int_{t'}^t ds = (t - t'). \end{aligned}$$

Le processus  $(Z_t, W_t)$  est donc une solution faible de l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = 2\sqrt{|Z_t|}dW_t + n dt. \quad (3.11)$$

L'inégalité  $\left|\sqrt{|z|} - \sqrt{|z'|}\right| < \sqrt{|z - z'|}$ , vérifiée pour tous réels  $z$  et  $z'$  permet d'appliquer le Théorème 3.20 d'unicité forte des solutions avec la fonction  $h(u) = \sqrt{u}$ , puis le Corollaire 3.27, pour obtenir que  $Z$  est l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique (3.11). Ce résultat se généralise.

**Théorème 3.34.** *Soit  $W$  un mouvement Brownien en dimension 1. Pour tout réel  $\delta \geq 0$  et toute condition initiale  $x \geq 0$ , il existe une unique solution forte à l'équation différentielle stochastique*

$$dZ_t = 2\sqrt{|Z_t|}dW_t + \delta dt. \quad (3.12)$$

*Cette solution est appelée **processus de Bessel carré** en dimension  $\delta$ .*

*Démonstration du Théorème 3.34.* On commence par montrer l'existence d'une solution faible, en utilisant le Théorème 3.23. La fonction  $\sqrt{\cdot}$  n'étant pas bornée, on considère des fonctions tronquées et on construit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{|x|}, & \text{si } |x| \leq n^2, \\ f_n(x) &= n, & \text{si } |x| \geq n^2. \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de  $n$ , l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t^n = 2f_n(Z_t^n) dW_t + \delta dt \quad (3.13)$$

vérifie alors les hypothèses du Théorème 3.23 et admet des solutions faibles. De plus, on a l'unicité trajectorielle pour ces solutions, puisqu'on peut appliquer le Théorème 3.20 avec  $h(u) = \sqrt{u}$ . Le Corollaire 3.27 de Yamada et Watanabe permet alors de conclure que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation différentielle stochastique (3.13) admet une unique solution forte  $Z^n$ .

Soit  $T_n(\delta) := \inf \{t > 0; Z_t^n = n^2\}$ . Alors pour tout  $t \leq T_n(\delta)$ ,  $Z_t^n$  vérifie l'équation différentielle stochastique de Bessel :

$$dZ_t^n = 2\sqrt{|Z_t^n|} dW_t + \delta dt.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que  $T_n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini. Le théorème de comparaison 3.21 implique que l'application  $T_n(\cdot)$  est décroissante. En particulier, on a  $T_n(\delta) \geq T_n(\lfloor \delta \rfloor + 2)$ . Or en dimension entière  $\lfloor \delta \rfloor + 2$ , la solution  $Z_t(\lfloor \delta \rfloor + 2)$  est la norme d'un mouvement Brownien de même dimension. Par construction, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n(\lfloor \delta \rfloor + 2) = \infty) = 1,$$

d'où la conclusion.  $\square$

Le Théorème 3.21 de comparaison de solution et la construction du processus de Bessel en dimension entière induisent la propriété suivante.

**Proposition 3.35.** *En toute dimension  $\delta \geq 0$  et pour toute condition initiale  $Z_0 \geq 0$ , le processus de Bessel carré  $Z$  est à valeurs positives et est non-explosif :*

$$\mathbb{P}(\|Z_t\| < \infty; \forall 0 \leq t < \infty) = 1.$$

De plus, en dimension  $\delta \geq 2$ , il satisfait

$$\mathbb{P}(Z_t > 0; \forall 0 < t < \infty) = 1.$$

Ce résultat implique qu'en dimension  $\delta \geq 2$  et pour toute condition initiale  $Z_0 \geq 0$ , le processus de Bessel carré  $Z$  est solution de l'équation différentielle stochastique (3.12) sans valeur absolue :

$$dZ_t = 2\sqrt{Z_t} dW_t + \delta dt.$$

Il est aussi, d'après le Théorème 3.29, l'unique solution du problème aux martingales associé au générateur  $L$  défini par

$$Lf(x) = 2|x|f''(x) + \delta f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad (3.14)$$

pour tout  $\delta \geq 0$ .

### 3.5 Convergence faible de processus

On cherche à étudier la convergence de suites de processus stochastiques. On définit pour cela une notion de convergence adaptée : la convergence faible, et on établit un critère de convergence (Théorème 3.47).

**Définition 3.36.** Soit  $(S, \rho)$  un espace métrique muni de la tribu des Boréliens  $\mathcal{B}(S)$ . Soient  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des mesures de probabilité sur  $(S, \mathcal{B}(S))$ . La suite  $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge faiblement** vers  $\mathbb{P}$  si pour toute fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S f(s) d\mathbb{P}_n(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans l'espace métrique  $(S, \mathcal{B}(S))$ . Elle induit une mesure de probabilité  $\mathbb{P}X^{-1}$  sur  $(S, \mathcal{B}(S))$  définie par :

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(S). \quad (3.15)$$

On définit alors une notion de convergence de variables aléatoires basée sur la convergence faible des probabilités induites.

**Définition 3.37.** Soit  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces de probabilités. Sur chacun d'entre eux, on considère une variable aléatoire  $X_n$  à valeurs dans l'espace  $(S, \rho)$ . Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités et  $X$  une variable aléatoire sur cet espace à valeurs dans  $(S, \rho)$ . La suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en distribution** vers  $X$  si la suite des mesures  $(\mathbb{P}_n X_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\mathbb{P}X^{-1}$ . En d'autres termes, une suite de variables aléatoires  $X_n$  converge en distribution vers une variable aléatoire  $X$  si et seulement si, pour toute fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_n(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)), \quad (3.16)$$

où  $\mathbb{E}_n$  et  $\mathbb{E}$  sont les espérances correspondant aux mesures de probabilités  $\mathbb{P}_n$  et  $\mathbb{P}$  respectivement. En voyant un processus stochastique continu  $X = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$  défini sur un intervalle de temps compact comme une variable aléatoire à valeurs dans  $(\mathcal{C}([0; T], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , on définit de même la convergence en distribution de processus stochastiques.

La convergence presque-sûre implique la convergence en distribution. La réciproque est fausse. Néanmoins, on peut passer de la convergence en distribution à la convergence presque-sûre en utilisant le théorème de Skorohod.

**Théorème 3.38** (Skorohod). On suppose que  $(S, \rho)$  est complet et séparable. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires sur un même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $S$  convergeant en distribution vers une variable aléatoire  $X$  sur le même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $S$ . Alors il existe un espace de probabilités  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$  et des variables aléatoires  $\tilde{X}_n$  et  $\tilde{X}$  définies sur  $\tilde{\Omega}$  et à valeurs dans  $S$  tels que, pour tout borélien  $B$  de  $S$ , on ait

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X} \in B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}_n \in B) = \mathbb{P}(X_n \in B), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\rho(\tilde{X}_n - \tilde{X}) \rightarrow 0 \text{ presque-sûrement.}$$

**Corollaire 3.39.** Soient  $X$  et  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des processus aléatoires continus, définis sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  pour des temps  $t \in [0; T]$  avec  $0 < T < \infty$  et à valeurs réelles. Si  $X_n$  converge en distribution vers  $X$ , alors il existe un espace de probabilités  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$  et des processus stochastiques  $\tilde{X}$  et  $\tilde{X}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définis sur  $\tilde{\Omega}$  sur l'intervalle de temps  $[0; T]$  et à valeurs réelles tels que, pour tout borélien  $B$  de  $(\mathcal{C}^0([0; T]), \|\cdot\|_\infty)$ , on ait

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X} \in B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}_n \in B) = \mathbb{P}(X_n \in B), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\|\tilde{X}_n(\omega) - \tilde{X}(\omega)\|_\infty := \sup_{t \in [0; T]} |\tilde{X}_{t,n}(\omega) - \tilde{X}_t(\omega)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{pour presque tout } \omega \in \tilde{\Omega}.$$

Le théorème de Skorohod permet d'élargir l'égalité (3.16) à des fonctions continues non bornées.

**Théorème 3.40.** *Si  $X_n$  converge en distribution vers  $X$ , alors pour toute fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\mathbb{E}(|f(X)|)$  soit fini, on a la convergence*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_n(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)).$$

On cherche un critère de convergence faible. Pour cela, on introduit les notions de relative compacité et tension.

**Définition 3.41.** *Une famille  $\Pi$  de mesures de probabilité sur  $(S, \mathcal{B}(S))$  est **relativement compacte** si toute suite d'éléments de  $\Pi$  admet une sous-suite faiblement convergente. Elle est **tendue** si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \subseteq S$  tel que  $\mathbb{P}(K) \geq 1 - \varepsilon$ , pour tout  $\mathbb{P} \in \Pi$ .*

*Soit  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille de variables aléatoires, chacune d'entre elles étant définie sur un espace de probabilités  $(\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathbb{P}_\alpha)$  et à valeurs dans  $S$ . On dit de cette famille qu'elle est **relativement compacte** (respectivement **tendue**) si la famille  $(\mathbb{P}_\alpha X_\alpha^{-1})_{\alpha \in A}$ , définie par l'équation (3.15) est relativement compacte (respectivement tendue).*

*En prenant pour  $S$  l'espace des fonctions continues sur le segment  $[0; T]$  et à valeurs réelles, on définit de même des familles de processus stochastiques relativement compactes et tendues.*

Sous certaines conditions, relative compacité et tension sont équivalentes.

**Théorème 3.42** (Prohorov). *Soit  $\Pi$  une famille de mesures de probabilité sur  $S$ . On suppose que  $S$  est un espace métrique complet séparable. Alors  $\Pi$  est relativement compacte si et seulement si elle est tendue.*

On donne enfin un critère pour qu'une famille de processus stochastiques soit tendue :

**Théorème 3.43** (Kolmogorov). *Soit  $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de processus stochastiques continus  $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}; 0 \leq t \leq T\}$ ,  $0 < T < \infty$ , sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs réelles telle qu'il existe des constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\nu$  strictement positives avec*

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} \left| X_0^{(n)} \right|^\nu < +\infty, \quad (3.17)$$

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} \left| X_t^{(n)} - X_s^{(n)} \right|^\alpha \leq C_T |t - s|^{1+\beta}, \quad \forall T > 0 \text{ et } 0 \leq s, t \leq T. \quad (3.18)$$

*Alors la famille des mesures  $\left( \mathbb{P} X^{(n)-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $(\mathcal{C}([0; T], \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{C}([0; T], \mathbb{R})))$  est tendue.*

Une fois acquise la convergence en distribution d'une suite de processus stochastiques, on cherche à caractériser sa limite. On reprend ici un des théorèmes de convergence développé dans le chapitre 11 de [79], permettant d'approcher la solution d'un problème aux martingales par des chaînes de Markov. On considère pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$  une chaîne de Markov  $\left( \xi_k^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  homogène en temps, définie sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On désigne par  $\Pi_n$  sa probabilité de transition. On définit, pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'opérateur

$$(A_n f)(x) = \int (f(y) - f(x)) \Pi_n(x, dy).$$

**Proposition 3.44.** *Pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ,*

$$f\left(\xi_k^{(n)}\right) - \sum_{j=0}^{k-1} A_n f\left(\xi_j^{(n)}\right), \sigma\left(\xi_j^{(n)}, j \in \llbracket 0; k \rrbracket\right), \mathbb{P}$$

*est une martingale.*

On définit aussi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$a_n(x) = n \int_{|x-y| \leq 1} (y-x)^2 \Pi_n(x, dy),$$

$$b_n(x) = n \int_{|x-y| \leq 1} (y-x) \Pi_n(x, dy)$$

et

$$\Delta_n^\varepsilon(x) = n \Pi_n(x, \mathbb{R} \setminus ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[).$$

Les fonctions  $a_n$  et  $b_n$  représentent respectivement la variance et l'espérance de la chaîne de Markov  $\xi_k^{(n)}$ . On suppose enfin qu'il existe deux fonctions réelles  $a$  et  $b$  définies et continues sur  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout  $R > 0$ , on ait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq R} |a_n(x) - a(x)| = 0, \quad (3.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq R} |b_n(x) - b(x)| = 0, \quad (3.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq R} \Delta_n^\varepsilon(x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.21)$$

On a alors le lemme suivant.

**Lemme 3.45.** *Les conditions (3.19), (3.20) et (3.21) sont équivalentes à :*

$$n A_n f \rightarrow L f, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad (3.22)$$

*uniformément sur les compacts, avec*

$$(L f)(x) := \frac{1}{2} a(x) f''(x) + b(x) f'(x). \quad (3.23)$$

On construit à partir de la suite de chaînes de Markov  $\left(\left(\xi_k^{(n)}\right)_{k \in \mathbb{N}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de processus stochastiques  $\left(\left\{Y_t^{(n)}, 0 \leq t < \infty\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  continus, affines par morceaux :

$$\begin{aligned} Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} &= \xi_k^{(n)}, \\ Y_t^{(n)} &= (k+1-nt) \xi_k^{(n)} + (nt-k) \xi_{k+1}^{(n)}, \quad k \leq nt \leq k+1. \end{aligned}$$

Lorsque  $a_n$  et  $b_n$  sont uniformément bornés, le Lemme 3.45 permet de démontrer le résultat de convergence suivant.

**Lemme 3.46.** *On suppose qu'en plus des hypothèses (3.19) et (3.20), on a*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} (|a_n(x)| + |b_n(x)|) < \infty.$$

On suppose de plus qu'à la place de l'hypothèse (3.21), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \Delta_n^\varepsilon(x) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Alors, lorsque  $\xi_0^{(n)} \rightarrow \xi_0$  quand  $n$  tend vers l'infini, la suite des processus stochastiques  $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est tendue et toute limite de sous-suite convergente est solution du problème aux martingales associé au générateur défini par  $a$  et  $b$ , avec la condition initiale  $\xi_0$ .

On peut supprimer l'hypothèse sur le caractère borné des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  lorsque les coefficients limites  $a$  et  $b$  induisent un problème aux martingales bien posé.

**Théorème 3.47.** *On suppose que les hypothèses (3.19), (3.20) et (3.21) sont satisfaites, que les coefficients  $a$  et  $b$  sont continus et que pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ , le problème aux martingales associé à  $a$  et  $b$  et avec condition initiale  $\xi_0$  a une unique solution  $Y = \{Y_t, 0 \leq t < \infty\}$ . Alors la suite de processus stochastiques  $Y^{(n)}$  converge en distribution vers  $Y$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .*

Ce théorème est énoncé et démontré dans [79] (Théorème 11.2.3). L'idée de la preuve est, comme dans la démonstration de l'existence des processus de Bessel (Théorème 3.34), de tronquer les fonctions  $a_n$  et  $b_n$  de façon à ce qu'elles restent bornées par une constante  $K > 0$ . Les coefficients  $a_{n,K}$  et  $b_{n,K}$  ainsi définis vérifient alors les hypothèses du Lemme 3.46, qui implique que la famille des processus  $X_K^{(n)}$  correspondant aux coefficients tronqués est tendue et que les processus limites sont solutions du problème aux martingales associé aux coefficients tronqués  $a_K$  et  $b_K$ . Il suffit alors de faire tendre  $K$  vers l'infini pour conclure. La démonstration rigoureuse de ce résultat est technique et on mettra en évidence ses différents arguments en démontrant un cas particulier dans le prochain chapitre (Théorème 4.3).



# Chapitre 4

## Résultats de convergence

Le chapitre précédent comprend toutes les notions nécessaires à la démonstration du Théorème 3.1, dont on rappelle ici l'énoncé.

**Théorème 3.1.** *Soit une marche aléatoire  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$\begin{aligned}\xi_0 &> 0 \\ \xi_{n+1}^2 &= \xi_n^2 + F(\xi_n, \varepsilon_n),\end{aligned}\tag{4.1}$$

avec les hypothèses suivantes.

1. *Les tirages  $\varepsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont des variables aléatoires sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ; elles sont indépendantes, identiquement distribuées, bornées, et*

$$|\varepsilon_n| \leq \bar{\varepsilon}, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_n^2) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *Il existe  $\bar{\xi} > 0$  tel que pour tout  $|\xi_n| \geq \bar{\xi}$*

$$F(\xi_n, \varepsilon_n) = 2\varepsilon_n \xi_n + G(\xi_n, \varepsilon_n),$$

*où l'espérance de la fonction  $G$  par rapport à  $\varepsilon_n$  est bornée en  $\xi_n$  et  $G$  satisfait*

$$\lim_{\xi_n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(G(\xi_n, \varepsilon_n)) = \delta > 0, \quad |G(\xi_n, \varepsilon_n)| = o(|\xi_n|),\tag{4.2}$$

*et telle que  $\xi^2 + F(\xi, \varepsilon_n)$  soit strictement positif pour tout  $|\xi| \geq \bar{\xi}$ . Pour les valeurs  $|\xi_n| < \bar{\xi}$ , on pose*

$$F(\xi_n, \varepsilon_n) = \delta.$$

*La chaîne de Markov  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie alors*

$$\mathbb{E}(\xi_k^{2\ell}) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^\ell, \quad \forall \ell > -\frac{[\delta]}{2},$$

*où on désigne par  $[\delta]$  la partie entière de  $\delta$ .*

On verra dans la section 4.1 que le point clé de la démonstration de ce théorème est l'utilisation du Théorème 3.47, qui est un résultat de convergence de processus de Markov vers la solution d'un problème aux martingales. Ce théorème, dont la démonstration est particulièrement technique (voir [79]), cache les difficultés du Théorème 3.1. C'est pourquoi, dans les sections 4.2 et 4.3, on redémontre le Théorème 3.1 pour des fonctions  $F$  particulières, pour lesquelles on donnera une démonstration du Théorème 3.47 (section 4.3).

## 4.1 Démonstration du Théorème 3.1

La démonstration se décompose en deux parties. Dans un premier temps, on construit une suite de processus stochastiques  $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  continus à partir de la chaîne de Markov  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme indiqué dans la section 3.1 :

$$Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} = \frac{\xi_k^2}{n}, \quad k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket \quad (4.3)$$

$$Y_t^{(n)} = (k+1-nt)Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} + (nt-k)Y_{\frac{k+1}{n}}^{(n)}, \quad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}. \quad (4.4)$$

On montre que cette suite converge en distribution vers le processus de Bessel carré en dimension  $\delta$  et avec condition initiale 0, à l'aide du Théorème 3.47. Puis, dans un deuxième temps, on utilise le Théorème 3.40 et le fait que  $Y_1^{(n)} = \xi_n^2/n$  pour conclure quant au comportement de la moyenne des  $\xi_n^{2\ell}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

*Démonstration du Théorème 3.1.* On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le processus  $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, 0 \leq t \leq 2\}$  défini par (4.3)-(4.4), continu par rapport au temps  $t$ , affine par morceaux et à valeurs strictement positives. On commence par montrer que les hypothèses du Théorème 3.47 sont satisfaites et que la suite de ces processus converge en distribution vers le processus de Bessel carré de condition initiale 0 et de dimension  $\delta$ .

1. *Convergence des processus  $Y^{(n)}$ .*

La récurrence (4.1) sur les  $\xi_k$  permet d'obtenir une récurrence sur les  $Y_{\frac{k}{n}}^{(n)}$  :

$$Y_{\frac{k+1}{n}}^{(n)} = Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} + \frac{1}{n}F\left(\sqrt{n|Y_{\frac{k}{n}}^{(n)}|}, \varepsilon_k\right). \quad (4.5)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la chaîne de Markov des  $Y_{\frac{k}{n}}^{(n)}$ ,  $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ , est homogène en temps, avec une probabilité de transition  $\Pi_n$  définie par

$$\begin{aligned} \Pi_n(x, \Gamma) &= \mathbb{P}\left(Y_{\frac{k+1}{n}}^{(n)} \in \Gamma \mid Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} = x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(x + \frac{1}{n}F\left(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k\right) \in \Gamma\right), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a de plus dans ce cas

$$\begin{aligned} a_n(x) &:= n \int_{|x-y| \leq 1} (y-x)^2 \Pi_n(x, dy) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(F\left(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k\right)^2 \mathbb{1}_{|F(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k)| \leq n}\right), \\ b_n(x) &:= n \int_{|x-y| \leq 1} (y-x) \Pi_n(x, dy) = \mathbb{E}\left(F\left(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k\right) \mathbb{1}_{|F(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k)| \leq n}\right), \\ \Delta_n^\varepsilon(x) &:= n \Pi_n(x, \mathbb{R} \setminus ]x-\varepsilon; x+\varepsilon[) = n \mathbb{P}\left(|F\left(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k\right)| > n\varepsilon\right), \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

On remarque qu'alors, les conditions (3.19)-(3.21) sont satisfaites. En effet, soit  $R > 0$  fixé. Pour tout  $|x| \leq R$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} a_n(x) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\left(2\varepsilon_k \sqrt{n|x|} + G\left(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k\right)\right)^2 \mathbb{1}_{|2\varepsilon_k \sqrt{n|x|} + G(\sqrt{n|x|}, \varepsilon_k)| \leq n}\right] \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} \\ &\quad + \frac{1}{n} \delta^2 \mathbb{1}_{\delta \leq n} \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}} \end{aligned}$$

et

$$b_n(x) = \mathbb{E} \left[ \left( 2\varepsilon_k \sqrt{n|x|} + G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right) \mathbb{1}_{\left| 2\varepsilon_k \sqrt{n|x|} + G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right| \leq n} \right] \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} + \delta \mathbb{1}_{\delta \leq n} \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}}.$$

Pour  $n$  assez grand,  $\mathbb{1}_{\delta \leq n}$  et  $\mathbb{1}_{\left| 2\varepsilon_k \sqrt{n|x|} + G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right| \leq n}$  deviennent presque sûrement égaux à 1 pour tout  $|x| \leq R$  et on obtient

$$\begin{aligned} a_n(x) &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ \left( 2\varepsilon_k \sqrt{n|x|} + G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right)^2 \right] \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} + \frac{1}{n} \delta^2 \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}} \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} \left( 4n|x| + 4\sqrt{n|x|} \mathbb{E} \left[ \varepsilon_k G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right] + \mathbb{E} \left[ G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right)^2 \right] \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \delta^2 \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}} \\ &= \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} \left( 4|x| + 4\sqrt{\frac{|x|}{n}} \mathbb{E} \left[ \varepsilon_k G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right] + \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right)^2 \right] \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \delta^2 \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}} \end{aligned}$$

et

$$b_n(x) = \mathbb{E} \left( G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right) \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} + \delta \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}}.$$

La première condition sur  $G$  imposée par (4.2) implique que la condition (3.20) est satisfaite avec  $b \equiv \delta$ . En effet, lorsque  $x = 0$ ,  $b_n(0) = \delta$ , et lorsque  $0 < |x| < R$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right) = \delta.$$

La deuxième condition sur  $G$  dans (4.2) assure la condition (3.19) pour  $a(\cdot) = 4|\cdot|$ , puisque

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|x|}{n}} \mathbb{E} \left[ \varepsilon_k G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right] &\leq \sqrt{\frac{|x|}{n}} \bar{o} \left( \sqrt{n|x|} \right), \\ \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right)^2 \right] &\leq \frac{1}{n} o(n|x|). \end{aligned}$$

De même, on a, pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $|x| \leq R$ ,

$$\Delta_n^\varepsilon(x) = n\mathbb{P} \left( \left| \frac{2\varepsilon_k \sqrt{|x|}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right| > \varepsilon \right) \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} + n\mathbb{P}(\delta > n\varepsilon) \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}}.$$

Il existe alors un entier  $N_\varepsilon$  tel que pour tout  $|x| \leq R$  et tout  $n \geq N_\varepsilon$ , on ait  $\Delta_n^\varepsilon(x) = 0$ , et la condition (3.21) est vérifiée. De plus, les fonctions  $a$  et  $b$  sont continues, et le problème aux martingales qui leur est associé est le problème aux martingales satisfait par les processus de Bessel carrés en dimension  $\delta$ . C'est donc un problème bien posé, comme montré dans la section 3.4. Enfin, la suite des conditions initiales  $Y_0^{(n)} = n^{-1}\xi_0 > 0$  est une suite convergente, de limite  $Z_0 = 0$ . On peut donc appliquer le Théorème 3.47 : la suite des processus  $\left( Y^{(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en distribution vers le processus de Bessel carré de dimension  $\delta$  et de condition initiale 0.

## 2. Conclusion.

Pour conclure, on veut appliquer le Théorème 3.40, en considérant les fonctions qui a un processus stochastique  $X$ . défini sur l'intervalle de temps  $[0; 2]$  associent  $|X_1|^\ell$ , avec  $\ell > -\lfloor \delta \rfloor / 2$ . En effet, on aurait alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\xi_n^\ell)}{n^\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_1^\ell) = \mathbb{E}(Z_1^\ell).$$

Il suffit donc de vérifier l'hypothèse du Théorème 3.40, à savoir que pour tout  $\ell > -\lfloor \delta \rfloor / 2$ , on a

$$\mathbb{E}(|Z_1|^\ell) < +\infty.$$

On remarque tout d'abord que le processus de Bessel carré étant à valeurs positives (Proposition 3.35), on a

$$\mathbb{E}(|Z_1|^\ell) = \mathbb{E}(Z_1^\ell).$$

On considère dans un premier temps le cas où  $\delta > 0$  est entier. La construction du processus de Bessel faite dans la section 3.4 montre qu'alors

$$Z_t = \|W_t\|^2, \quad \text{où } W_t \text{ est un processus de Wiener en dimension } \delta.$$

Le fait qu'un processus de Wiener soit d'abord un processus gaussien implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_1^\ell) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\delta} W_1^{(i)2}\right)^\ell \\ &= \int_{\mathbb{R}^\delta} \left(\sum_{i=1}^{\delta} x_i^2\right)^\ell \frac{1}{(2\pi)^{\delta/2}} \prod_{i=1}^{\delta} e^{-\frac{1}{2}(x_i - W_0^{(i)})^2} dx_i \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\delta/2}} \int_{\mathbb{R}^\delta} \|x\|^{2\ell} e^{-\frac{1}{2}\|x - W_0\|^2} dx. \end{aligned}$$

Un changement de variables en polaires permet alors d'affirmer que  $\mathbb{E}(Z_1^\ell)$  est fini dès que  $\ell > -\delta/2$ .

Les dimensions  $\delta$  non entières se traitent alors en utilisant le critère de comparaison de solutions fortes (Théorème 3.21) de Yamada et Watanabe. Il permet en effet d'écrire, pour tout  $\delta \geq 0$ ,

$$0 \leq Z.(\lfloor \delta \rfloor) \leq Z.(\delta) \leq Z.(\lfloor \delta \rfloor + 1),$$

où on désigne par  $Z.(\delta)$  le processus de Bessel carré avec condition initiale 0 et en dimension  $\delta$ . On rappelle que le processus  $Z.(0)$  est constant égal à 0 au cours du temps. On en déduit donc que

$$\mathbb{E}(Z_1(\delta)^\ell) < +\infty, \quad \forall \ell > -\lfloor \delta \rfloor / 2.$$

□

L'hypothèse  $F(\xi, \varepsilon_k) = \delta$  pour  $|\xi| < \bar{\xi}$  est nécessaire dans ce théorème pour vérifier les conditions (3.19)-(3.21). En effet, intuitivement, on voudrait s'autoriser un choix moins restrictif  $F(\xi, \varepsilon_k) = \tilde{F}(\xi) > 0$  pour les valeurs de  $|\xi|$  petites. En supposant cette fonction bornée inférieurement par une constante strictement positive, cela suffirait, physiquement, à augmenter

progressivement  $\xi_n$  jusqu'à atteindre  $\bar{\xi}$ . On aurait alors, pour des  $n$  assez grands et pour tout  $|x| \leq R$ ,

$$\begin{aligned} a_n(x) &= \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} \left( 4|x| + 4\sqrt{\frac{|x|}{n}} \mathbb{E} \left[ \varepsilon_k G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right] + \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[ G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right)^2 \right] \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \tilde{F} \left( \sqrt{n|x|} \right)^2 \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}}, \\ b_n(x) &= \mathbb{E} \left( G \left( \sqrt{n|x|}, \varepsilon_k \right) \right) \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} \geq \bar{\xi}} + \tilde{F} \left( \sqrt{n|x|} \right) \mathbb{1}_{\sqrt{n|x|} < \bar{\xi}}, \\ \Delta_n^\varepsilon(x) &= 0. \end{aligned}$$

Les conditions (3.19) et (3.21) sont alors bien vérifiées, avec  $a(\cdot) = 4|\cdot|$ . Par contre, on obtient une nouvelle fonction  $b$  qui vaut  $b(x) = \delta$  tant que  $x$  est non nul et  $b(0) = \tilde{F}(0)$ . Aussi, pour que la condition (3.20) soit vérifiée, il faut en particulier que

$$\sup_{0 < \sqrt{n|x|} < \bar{\xi}} \left| \tilde{F} \left( \sqrt{n|x|} \right) - \delta \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Si on choisissait par exemple  $\tilde{F}$  égale à une constante différente de  $\delta$ , cette condition ne serait pas vérifiée. C'est pourquoi on a imposé  $\tilde{F} \equiv \delta$ . Ce choix peut cependant être vu comme un détail technique sans conséquence sur la dynamique en remarquant qu'il n'est important que pour des valeurs de  $Y_{\frac{k}{n}}^{(n)}$  vérifiant  $\sqrt{n} \left| Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} \right| < \bar{\xi}$ , c'est-à-dire  $\left| Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} \right| \leq \bar{\xi}^2 n^{-1}$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini, cet intervalle se réduit au singleton zéro, et pour une dimension  $\delta \geq 2$ , on sait (Proposition 3.35) que le processus de Bessel carré, limite de la suite de processus  $Y^{(n)}$ , ne passe jamais en l'origine.

Un résultat similaire au Théorème 3.1 est obtenu dans [25], mais uniquement pour des dimensions  $\delta \geq 5/2$ . Cette condition est utilisée pour montrer que le processus de Bessel carré apparaissant lors du passage à la limite ne retourne jamais en 0, et que  $Y_1^{(n)}$  converge presque-sûrement vers l'infini lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cela permet en particulier de ne plus avoir à s'intéresser aux conditions aux bords et confirme l'intuition que les hypothèses faites sur  $F$  pour  $\xi$  petit ne modifient en rien la dynamique asymptotique, au moins pour des dimensions assez grandes.

## 4.2 Un modèle simplifié

Comme on l'a vu, la démonstration du Théorème 3.1 repose sur l'utilisation du Théorème 3.47. On étudie dans cette section un cas particulier où la fonction  $F$  intervenant dans la marche aléatoire (4.1) est assez simple pour qu'on puisse démontrer le Théorème 3.1 sans utiliser le Théorème 3.47. La marche aléatoire considérée est la suivante :

$$\xi_{k+1}^2 = \xi_k^2 + 2\varepsilon_k |\xi_k| + \delta, \quad \text{avec } \delta > 0. \quad (4.6)$$

Il s'agit de la marche aléatoire sur laquelle on a raisonné dans un premier temps, dans le chapitre 1, argumentant que les autres termes apparaissant dans les développements (1.42) et (1.59) ne modifiaient pas la dynamique. Cette récurrence, plus simple que celle du cas général traitée dans la section précédente, permet de faire des calculs explicites et on peut démontrer le Théorème 3.47 d'une manière plus directe que dans [79] dans ce contexte (voir le Théorème 4.3, la section 4.3, et plus particulièrement la sous-section 4.3.2)

La condition initiale est choisie strictement positive et non aléatoire. Les  $\varepsilon_n$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et bornées, avec

$$|\varepsilon_n| < \sqrt{\delta}, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_n^2) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Théorème 4.1.** *Sous les hypothèses décrites ci-dessus, la chaîne de Markov  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par (4.6) vérifie*

$$\mathbb{E}(\xi_k^{2\ell}) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^\ell, \quad \forall \ell > -\frac{[\delta]}{2},$$

où on désigne par  $[\delta]$  la partie entière de  $\delta$ .

On peut remarquer qu'on n'a, pour ce modèle, plus besoin de distinguer les cas  $|\xi_k|$  petit ou  $|\xi_k|$  grand dans la marche aléatoire (4.6). En effet, en supposant  $|\varepsilon_k| < \sqrt{\delta}$ , on obtient que la somme  $\xi_k^2 + 2\varepsilon_k |\xi_k| + \delta$  reste strictement positive, et que la suite  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bien définie par cette récurrence. Le fait de ne pas avoir à changer l'expression de  $\xi_{k+1}^2 - \xi_k^2$  permet de manipuler plus facilement cette marche aléatoire. Cela se voit en particulier dans la démonstration du Théorème 4.3, faite dans la section suivante ; l'étape 2 (Théorème 4.5) dans laquelle on démontre un critère de tension pour des processus construits à partir des  $\xi_k$  repose complètement sur l'expression de  $\xi_{k+1}^2 - \xi_k^2$  et deviendrait plus technique si on devait distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de  $\xi_k$ . Cependant, cette hypothèse ne peut être faite dans le cas général, traité dans la section précédente. En effet, si on se place, par exemple, dans le cas d'un champ de force dérivant d'un potentiel, on a calculé  $\delta = 3^{-1}(d+1)$ , où  $d$  est la dimension de l'espace dans lequel évoluent les particules, et les variables aléatoires  $\varepsilon_k$  sont définies par  $\varepsilon_k = D^{-1}\beta_k^{(1)}$ , où  $D$  est défini par (1.30) et  $\beta_k^{(1)}$  par (1.18) et (1.21). On a alors bien que  $\varepsilon_k$  est borné, indépendamment de  $k$ , mais on n'a aucune indication sur une dépendance de la borne par rapport à la dimension  $d$ . L'hypothèse  $|\varepsilon_k| < \sqrt{\delta}$  est donc une hypothèse spécifique pour le modèle simplifié étudié dans cette section, permettant de faciliter les calculs, et qui doit être remplacée, dans le cas général, par une hypothèse technique sur le comportement de  $\xi_{k+1}^2 - \xi_k^2$  pour des  $|\xi_k|$  petits.

Pour démontrer le Théorème 4.1, on construit, comme dans la section précédente et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le processus  $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, 0 \leq t \leq 2\}$  défini par (4.3)-(4.4). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , ce processus est continu par rapport au temps  $t$ , affine par morceaux et à valeurs strictement positives, puisque les  $\xi_k$  sont eux-mêmes tous strictement positifs par construction. En utilisant la récurrence (4.6) sur les  $\xi_k$ , on obtient une récurrence sur les  $Y_{\frac{k}{n}}^{(n)}$  :

$$Y_{\frac{k+1}{n}}^{(n)} = Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\left|Y_{\frac{k}{n}}^{(n)}\right|} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n}. \quad (4.7)$$

Aussi, pour tout  $0 \leq t \leq 2$ , en désignant par  $[s]$  la partie entière d'un réel  $s$ , on a

$$Y_t^{(n)} = Y_0^{(n)} + \frac{2}{\sqrt{n}} \left( \sum_{j=0}^{[nt]-1} \sqrt{\left|Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}\right|} \varepsilon_j + (nt - [nt]) \sqrt{\left|Y_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)}\right|} \varepsilon_{[nt]} \right) + \delta t. \quad (4.8)$$

Puisque  $Y_1^{(n)} = n^{-1}\xi_n^2$ , la conclusion du Théorème 4.1 est équivalente à

$$\mathbb{E} \left( \left( Y_1^{(n)} \right)^\ell \right) \sim 1, \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty;$$

on cherche par conséquent à montrer que le processus  $Y^{(n)}$  converge en distribution quand  $n$  tend vers l'infini. Il faut pour cela appliquer un résultat du même type que le Théorème 3.47 et donc reprendre la construction de la section 3.5, commencée à la page 85.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la chaîne de Markov  $Y_{k/n}^{(n)}$ , construite à partir de la relation de récurrence (4.7), a pour probabilité de transition  $\Pi_n$ , définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned}\Pi_n(x, \Gamma) &= \mathbb{P} \left( Y_{\frac{k+1}{n}}^{(n)} \in \Gamma \mid Y_{\frac{k}{n}}^{(n)} = x \right) \\ &= \mathbb{P} \left( x + \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{|x|} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n} \in \Gamma \right), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

On note que  $\Pi_n(x, \Gamma)$  est indépendant de  $k$ , les  $\varepsilon_k$  étant des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Les chaînes  $\left( Y_{k/n}^{(n)} \right)_{k \in [0; 2n]}$  sont donc, comme dans la section 3.5, des chaînes de Markov homogènes en temps, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . La probabilité de transition  $\Pi_n$  est de plus indépendante de la définition  $Y_0^{(n)} := n^{-1} \xi_0^2$ , qui a une valeur déterministe et non aléatoire. On peut donc redéfinir le processus  $Y^{(n)}$  dans un cas plus général où  $\left( Y_0^{(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite quelconque de termes non aléatoires strictement positifs, avec  $Y_t^{(n)}$  affine par morceaux, continue et construite à partir de la récurrence (4.7). Pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned}a_n(x) &:= n \int_{|x-y| \leq 1} (y-x)^2 \Pi_n(x, dy) = n \mathbb{E} \left( \left( \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{x} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n} \right)^2 \mathbb{1}_{\left| \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{x} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n} \right| \leq 1} \right), \\ b_n(x) &:= n \int_{|x-y| \leq 1} (y-x) \Pi_n(x, dy) = n \mathbb{E} \left( \left( \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{x} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n} \right) \mathbb{1}_{\left| \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{x} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n} \right| \leq 1} \right), \\ \Delta_n^\varepsilon(x) &:= n \Pi_n(x, \mathbb{R} \setminus ]x-\varepsilon; x+\varepsilon[) = n \mathbb{P} \left( \left| \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{x} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n} \right| > \varepsilon \right), \quad \forall \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

On montre alors que le Lemme 3.45 est applicable dans ce contexte :

**Lemme 4.2.** *Soit*

$$A_n : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

*le générateur de la chaîne de Markov  $\left( Y_{k/n}^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ , défini par*

$$\begin{aligned}A_n f(x) &:= \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(x)) \Pi_n(x, dy), \\ &= \mathbb{E} \left( f \left( x + \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{|x|} \varepsilon_k + \frac{\delta}{n} \right) - f(x) \right), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.9)\end{aligned}$$

*Alors on a*

$$n A_n(f) \rightarrow Lf, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}),$$

*uniformément sur les compacts, avec*

$$Lf(x) = 2|x|f''(x) + \delta f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Il suffit de vérifier les conditions (3.19)-(3.21) et de conclure grâce au Lemme 3.45.

Pour tout  $R > 0$ , on remarque qu'il existe un entier  $N$  tel que pour tous  $|x| \leq R$  et  $n \geq N$ ,  $\mathbb{1}_{\left|\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{|x|}\varepsilon_k + \frac{\delta}{n}\right| \leq 1}$  soit presque-sûrement égal à 1. On a alors

$$\begin{aligned} a_n(x) &= n\mathbb{E}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{|x|}\varepsilon_k + \frac{\delta}{n}\right)^2\right) = 4|x| + \frac{\delta^2}{n}, \\ b_n(x) &= n\mathbb{E}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{|x|}\varepsilon_k + \frac{\delta}{n}\right) = \delta. \end{aligned}$$

Les hypothèses (3.19) et (3.20) sont donc vérifiées pour

$$a(x) = 4|x|, \quad b(x) = \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De même, pour tous  $R$  et  $\varepsilon$  strictement positifs, il existe un entier  $N_\varepsilon$  tel que pour tous  $|x| \leq R$  et  $n \geq N_\varepsilon$ ,  $\left|\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{|x|}\varepsilon_k + \frac{\delta}{n}\right|$  soit presque-sûrement inférieur à  $\varepsilon$  et que  $\Delta_n^\varepsilon(x)$  soit nul. Donc la condition (3.21) est elle aussi vérifiée, et la conclusion du lemme suit.  $\square$

Le générateur induit par les fonctions  $a(\cdot) = 4|\cdot|$  et  $b \equiv \delta$  est, ici encore, celui des processus de Bessel carrés en dimension  $\delta$ , étudiés dans la section 3.4. Le lemme permet alors de démontrer le théorème suivant, dont le Théorème 4.1 est une conséquence.

**Théorème 4.3.** *Soit  $(Y_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de conditions initiales strictement positives, non aléatoires, convergeant simplement vers une limite  $Z_0 \geq 0$ . Soient  $\varepsilon_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées sur l'espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , vérifiant les conditions*

$$|\varepsilon_k| \leq \sqrt{\delta}, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_k^2) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Alors la suite  $Y^{(n)}$  converge en distribution, sur l'intervalle de temps  $[0; 1]$ , vers le processus de Bessel carré  $Z$  en dimension  $\delta$  de condition initiale  $Z_0$ .*

À partir de ce résultat, le Théorème 4.1 se démontre exactement de la même façon que le Théorème 3.1, en utilisant la caractérisation de la convergence en distribution (Théorème 3.40).

On remarque qu'on aurait pu obtenir la même conclusion en appliquant le Théorème 3.47. En effet, les conditions (3.19)-(3.21) sont satisfaites, les fonctions limites  $a$  et  $b$  sont continues et, d'après le Théorème 3.34, le problème aux martingales associé au processus de Bessel carrés admet une unique solution pour toute condition initiale  $Z_0 \geq 0$ . Le Théorème 3.47 affirme donc que pour toute suite de conditions initiales  $(Y_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  strictement positives convergeant vers une valeur  $Z_0$ , la suite de processus stochastiques  $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en distribution vers le processus de Bessel carré de dimension  $\delta$  et avec condition initiale  $Z_0$ . Le Théorème 4.3 est par conséquent un énoncé dans un cas particulier du Théorème 3.47. Pour sa démonstration, plus simple, on adopte un point de vue différent de celui utilisé dans la démonstration du théorème général 3.47, faite dans [79]. Plutôt que de tronquer les fonctions  $a_n$  et  $b_n$  de façon à ce qu'elles soient constantes en dehors d'un compact et donc bornées, on tronque les processus  $Y^{(n)}$  à l'aide d'un temps d'arrêt et ce ne sont plus les fonctions  $a_n$  et  $b_n$  mais le processus lui-même qui est borné. Cependant, l'idée de la démonstration reste globalement la même dans ces deux théorèmes et la lecture, dans un premier temps, de celle détaillée ici peut aider à la compréhension de celle du théorème général faite dans [79]. Ces deux démonstrations suivent le schéma décrit en introduction du chapitre 3. Seule la deuxième étape dans la démonstration du Théorème 4.3, montrant la tension, est vraiment spécifique au modèle (4.6) étudié ici.

### 4.3 Démonstration du Théorème 4.3

On utilise le schéma de preuve en 4 étapes décrit en introduction du chapitre 3 (voir p.72). Dans la première étape, on introduit un temps d'arrêt afin de maintenir l'évolution des processus dans un compact. Puis on montre (étape 2, Théorème 4.5) que la suite arrêtée est tendue, et donc relativement compacte. Cela permet d'assurer l'existence de sous-suites convergentes. L'étape 3 est constituée du Théorème 4.8, montrant la convergence de sous-suites, puis de la suite elle-même (Corollaire 4.9), vers un processus de Bessel carré arrêté. Enfin, dans l'étape 4, on montre que le résultat de convergence reste vrai en supprimant les temps d'arrêts, grâce aux propriétés du processus limite.

#### 4.3.1 Étape 1 : un cut-off

On introduit un paramètre  $\eta$  strictement positif, tel que  $1/\eta > Y_0^{(n)} > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il permet de définir un temps d'arrêt  $\tau^{(n)}$  comme le premier instant auquel le processus sort du compact  $[0; \eta^{-1}]$  :

$$\tau^{(n)} := \inf \left\{ t \in [0; 2] \mid Y_t^{(n)} \geq \frac{1}{\eta} \right\}, \quad (4.10)$$

avec la convention  $\inf \{\emptyset\} = 2$ . Cela revient à considérer le temps d'arrêt  $\tau^{(n)} \wedge \tau_2$ , où  $\tau_2$  est le temps d'arrêt constant égal à 2 (voir la Proposition 3.15). On se restreint dans les étapes 2 et 3 à l'étude du processus arrêté

$$X_t^{(n)} := Y_{t \wedge \tau^{(n)}}^{(n)}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (4.11)$$

où on utilise la notation

$$t \wedge \tau^{(n)} = \min(t, \tau^{(n)}).$$

#### 4.3.2 Étape 2 : la tension

L'espace  $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$  défini par (3.5) et muni de la norme infinie est un espace métrique complet et séparable. Le Théorème de Prohorov 3.42 s'applique donc, et pour montrer la relative compacité de la famille de processus  $\{X^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*\}$ , il suffit de montrer qu'elle est tendue. On va pour cela utiliser le critère de Kolmogorov donné par le Théorème 3.43.

**Remarque 4.4.** Dans [79], la démonstration de la tension dans le cadre du Théorème 3.47 fait appel à plusieurs théorèmes généraux. Ici, la marche aléatoire étudiée est simple et on peut obtenir la tension, sans utiliser ces théorèmes, par des calculs largement liés à la définition de la marche. On obtient donc une démonstration assez calculatoire mais ne demandant qu'un minimum de prérequis.

**Théorème 4.5.** Les conditions du Théorème 3.43 sont vérifiées pour  $\nu = 1$ ,  $\alpha = 4$  et  $\beta = 1$  : il existe une constante  $K$  telle que

$$\sup_{n>0} \mathbb{E} \left| X_0^{(n)} \right| < +\infty, \quad (4.12)$$

$$\sup_{n>0} \mathbb{E} \left| X_t^{(n)} - X_s^{(n)} \right|^4 \leq K |t - s|^2, \quad \forall 0 \leq s < t \leq 2. \quad (4.13)$$

Par conséquent, la famille  $\left( \left\{ X_t^{(n)}, t \in [0, 2] \right\} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est tendue.

*Démonstration.* La condition (4.12) est facilement vérifiée puisqu'on a choisi  $X_0^{(n)} = Y_0^{(n)} \in ]0; \eta^{-1}]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Reste à vérifier la condition (4.13). On revient pour cela à la définition du processus  $X^{(n)}$  :

$$X_t^{(n)} - X_s^{(n)} = Y_{t \wedge \tau^{(n)}}^{(n)} - Y_{s \wedge \tau^{(n)}}^{(n)}.$$

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on définit les variables aléatoires

$$T^{(n)} := \left\lfloor n \left( t \wedge \tau^{(n)} \right) \right\rfloor = \lfloor nt \rfloor \wedge \lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \quad \text{et} \quad S^{(n)} := \left\lfloor n \left( s \wedge \tau^{(n)} \right) \right\rfloor = \lfloor ns \rfloor \wedge \lfloor n\tau^{(n)} \rfloor, \quad (4.14)$$

où on rappelle que l'on désigne par  $\lfloor \cdot \rfloor$  l'application partie entière. Comme  $s \leq t$ , on a

$$S^{(n)} \leq T^{(n)}.$$

À  $n$  fixé, on peut donc distinguer deux cas suivant  $\omega \in \Omega$  :

1. soit  $S^{(n)}(\omega) = T^{(n)}(\omega)$ ,
  2. soit  $S^{(n)}(\omega) < T^{(n)}(\omega)$ .
1. Si  $\omega$  est tel que  $T^{(n)}(\omega) = S^{(n)}(\omega)$  :

Cela implique

$$\frac{S^{(n)}}{n} \leq s \wedge \tau^{(n)} \leq t \wedge \tau^{(n)} < \frac{S^{(n)} + 1}{n}. \quad (4.15)$$

En utilisant le caractère affine de la fonction  $t \mapsto Y_t^{(n)}$  sur le segment  $[s \wedge \tau^{(n)}; t \wedge \tau^{(n)}]$ , ainsi que la formule (4.8), on obtient

$$X_t^{(n)} - X_s^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{n}} \left( n(t \wedge \tau^{(n)}) - n(s \wedge \tau^{(n)}) \right) \sqrt{Y_{\frac{S^{(n)}}{n}}^{(n)}} \varepsilon_{S^{(n)}} + (2\gamma + 1) \left( t \wedge \tau^{(n)} - s \wedge \tau^{(n)} \right).$$

L'inégalité

$$(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) \quad (4.16)$$

nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \left| X_t^{(n)} - X_s^{(n)} \right|^4 &\leq 8 \left( 16n^2 \left( Y_{\frac{S^{(n)}}{n}}^{(n)} \right)^2 \varepsilon_{S^{(n)}}^4 + (2\gamma + 1)^4 \right) \left( t \wedge \tau^{(n)} - s \wedge \tau^{(n)} \right)^4 \\ &\leq 8 \left( \frac{16}{\eta^2} \varepsilon_{S^{(n)}}^4 + \frac{(2\gamma + 1)^4}{n^2} \right) n^2 \left( t \wedge \tau^{(n)} - s \wedge \tau^{(n)} \right)^2 (t - s)^2 \\ &\leq 8 \left( \frac{16}{\eta^2} \varepsilon_{S^{(n)}}^4 + \frac{(2\gamma + 1)^4}{n^2} \right) (t - s)^2, \end{aligned}$$

en utilisant l'équation (4.15). On obtient donc finalement

$$\mathbb{E} \left( \left| X_t^{(n)} - X_s^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)}=S^{(n)}} \right) \leq K \left( \frac{\delta^2}{\eta^2} + \frac{1}{n^2} \right) (t - s)^2. \quad (4.17)$$

2. Si  $\omega$  est tel que  $T^{(n)}(\omega) > S^{(n)}(\omega)$  :

On utilise la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left| X_t^{(n)} - X_s^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) &\leq 8^2 \left( \mathbb{E} \left( \left| Y_{t \wedge \tau^{(n)}}^{(n)} - Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) \right. \\ &\quad + \mathbb{E} \left( \left| Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} - Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left( \left| Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} - Y_{s \wedge \tau^{(n)}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les premier et troisième termes du membre de droite se traitent de façon similaire au cas où  $T^{(n)} = S^{(n)}$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \left| Y_{t \wedge \tau^{(n)}}^{(n)} - Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} \right|^4 &= \left| \frac{2}{\sqrt{n}} \left( n(t \wedge \tau^{(n)}) - T^{(n)} \right) \sqrt{Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)}} \varepsilon_{T^{(n)}} + (2\gamma + 1) \left( t \wedge \tau^{(n)} - \frac{T^{(n)}}{n} \right) \right|^4 \\ &= \left( 2\sqrt{n} \sqrt{Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)}} \varepsilon_{T^{(n)}} + (2\gamma + 1) \right)^4 \left( t \wedge \tau^{(n)} - \frac{T^{(n)}}{n} \right)^4 \\ &\leq 8 \left( \frac{16}{\eta^2} \varepsilon_{T^{(n)}}^4 + \frac{(2\gamma + 1)^4}{n^2} \right) (t - s)^2, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\mathbb{E} \left( \left| Y_{t \wedge \tau^{(n)}}^{(n)} - Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) \leq K_1 \left( \frac{\delta^2}{\eta^2} + \frac{1}{n^2} \right) (t - s)^2. \quad (4.19)$$

De même,

$$\begin{aligned} \left| Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} - Y_{s \wedge \tau^{(n)}}^{(n)} \right|^4 &= \left| \frac{2}{\sqrt{n}} \left( S^{(n)} + 1 - n(s \wedge \tau^{(n)}) \right) \sqrt{Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)}} \varepsilon_{S^{(n)}} + (2\gamma + 1) \left( \frac{S^{(n)}+1}{n} - s \wedge \tau^{(n)} \right) \right|^4 \\ &= \left( 2\sqrt{n} \sqrt{Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)}} \varepsilon_{S^{(n)}} + (2\gamma + 1) \right)^4 \left( \frac{S^{(n)}+1}{n} - s \wedge \tau^{(n)} \right)^4 \\ &\leq 8 \left( \frac{16}{\eta^2} \varepsilon_{S^{(n)}}^4 + \frac{(2\gamma + 1)^4}{n^2} \right) (t - s)^2, \end{aligned}$$

et on obtient donc

$$\mathbb{E} \left( \left| Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} - Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) \leq K_2 \left( \frac{\delta^2}{\eta^2} + \frac{1}{n^2} \right) (t - s)^2. \quad (4.20)$$

Reste à majorer le terme  $\mathbb{E} \left( \left| Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} - Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right)$ . En itérant la récurrence (4.7), on obtient l'égalité

$$Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} - Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=S^{(n)}+1}^{T^{(n)}-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j + (2\gamma + 1) \frac{T^{(n)} - S^{(n)} - 1}{n}.$$

En utilisant l'inégalité (4.16), il en résulte

$$\begin{aligned} \left| Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} - Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} \right|^4 &\leq 8 \left( \frac{16}{n^2} \left| \sum_{j=S^{(n)}+1}^{T^{(n)}-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \right|^4 + (2\gamma + 1)^4 \left( \frac{T^{(n)} - S^{(n)} - 1}{n} \right)^4 \right) \\ &\leq 8 \left( \frac{16}{n^2} \left| \sum_{j=S^{(n)}+1}^{T^{(n)}-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \right|^4 + (2\gamma + 1)^4 (t - s)^4 \right), \end{aligned}$$

et puisque  $0 \leq s < t \leq 2$ ,  $(t-s)^4 \leq 4(t-s)^2$  et

$$\mathbb{E} \left( \left| Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} - Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) \leq \frac{K_3}{n^2} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=S^{(n)}+1}^{T^{(n)}-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) + K_4(t-s)^2.$$

D'après les définitions de  $S^{(n)}$  et  $T^{(n)}$  données par (4.14), l'inégalité  $S^{(n)}(\omega) < T^{(n)}(\omega)$  implique  $\tau^{(n)} > s$  et  $S^{(n)} = \lfloor ns \rfloor$ . On peut alors réécrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=S^{(n)}+1}^{T^{(n)}-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} &= \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor \wedge \lfloor n\tau^{(n)} \rfloor - 1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \\ &= \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j+1} \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}}. \end{aligned}$$

et on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left| Y_{\frac{T^{(n)}}{n}}^{(n)} - Y_{\frac{S^{(n)}+1}{n}}^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) &\leq \frac{K_3}{n^2} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j+1} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) + K_4(t-s)^2 \\ &\leq \frac{K_3}{n^2} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor - 1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j+1} \right|^4 \right) + K_4(t-s)^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Le lemme suivant, qui sera démontré ci-dessous, permet alors de conclure.

**Lemme 4.6.** *Il existe  $\tilde{K} > 0$  tel que pour tous entiers  $N_1$  et  $N_2$  avec  $0 \leq N_2 < N_1 \leq 2n$ , on ait la majoration*

$$\mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j+1} \right|^4 \right) \leq K \frac{1+\delta^2}{\eta^2} (N_1 - N_2)^2. \quad (4.22)$$

En effet, on obtient de (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22)

$$\mathbb{E} \left( \left| X_t^{(n)} - X_s^{(n)} \right|^4 \mathbb{1}_{T^{(n)} > S^{(n)}} \right) \leq K \left( \frac{1+\delta^2}{\eta^2} + \frac{1}{n^2} + 1 \right) (t-s)^2.$$

Cette majoration et l'équation (4.17) impliquent (4.13). □

Reste le lemme à démontrer pour que la preuve soit complète.

*Démonstration du Lemme 4.6.* On remarque tout d'abord

$$\sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j+1} = \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \left( \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} - \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor = j} \right).$$

L'inégalité (4.16) implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j+1} \right|^4 \right) \\ \leq 8 \mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \right|^4 \right) + 8 \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \mathbb{E} \left( Y_{\frac{j}{n}}^{(n)2} \varepsilon_j^4 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor = j} \right). \end{aligned}$$

Le deuxième terme se majore facilement puisque  $Y_{j/n}^{(n)2} \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor = j} \leq \eta^{-2}$  :

$$\mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j+1} \right|^4 \right) \leq 8 \mathbb{E} \left( \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \right|^4 \right) + \frac{8\varepsilon^4}{\eta^2} (N_1 - N_2). \quad (4.23)$$

Reste donc à majorer le premier de ces deux termes. En remarquant que la puissance quatrième d'une somme peut se développer en isolant les facteurs de plus haut indice de la façon suivante

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=N_2}^{N_1-1} a_j \right)^4 &= \binom{4}{1} \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} a_l \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} a_i \right)^3 + \binom{4}{2} \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} a_l^2 \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} a_i \right)^2 \\ &\quad + \binom{4}{3} \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} a_l^3 \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} a_i \right) + \sum_{l=N_2}^{N_1-1} a_l^4, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \right|^4 &= 4 \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{l}{n}}^{(n)}} \varepsilon_l \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq l} \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right)^3 \\ &\quad + 6 \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} Y_{\frac{l}{n}}^{(n)} \varepsilon_l^2 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq l} \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right)^2 \\ &\quad + 4 \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} Y_{\frac{l}{n}}^{(n)3/2} \varepsilon_l^3 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq l} \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right) \\ &\quad + \sum_{l=N_2}^{N_1-1} Y_{\frac{l}{n}}^{(n)2} \varepsilon_l^4 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq l}. \end{aligned}$$

On remarque que les termes  $Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}$  et  $\mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i}$ ,  $N_2 \leq i \leq l$ , sont indépendants de  $\varepsilon_l$ . En effet, par définition de  $\tau^{(n)}$ , on a

$$\mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} = \prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{1}_{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)} < \eta^{-1}} \times \mathbb{1}_{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)} \leq \eta^{-1}}.$$

On rappelle que les  $Y_{j/n}^{(n)}$ ,  $1 \leq j \leq l$ , sont indépendants de  $\varepsilon_l$  (voir la définition de la marche aléatoire (4.7)). Par conséquent, le premier terme du développement est d'espérance nulle et pour le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned} 6 \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} \mathbb{E} \left[ Y_{\frac{l}{n}}^{(n)} \varepsilon_l^2 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq l} \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right)^2 \right] \\ \leq \frac{6}{\eta} \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

L'espérance du troisième terme se majore de la façon suivante :

$$4 \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} \mathbb{E} \left( Y_{\frac{l}{n}}^{(n)3/2} \varepsilon_l^3 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq l} \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right) \right) \leq 4 \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} \sum_{i=N_2}^{l-1} \frac{\delta^2}{\eta^2}$$

Enfin, pour le quatrième et dernier terme, on a

$$\sum_{l=N_2}^{N_1-1} \mathbb{E} \left( Y_{\frac{l}{n}}^{(n)2} \varepsilon_l^4 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq l} \right) \leq \frac{\delta^2}{\eta^2} (N_1 - N_2).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \right|^4 \right] &= \frac{6}{\eta} \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right)^2 \right] \\ &\quad + 4 \frac{\delta^2}{\eta^2} \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} (l - N_2) \\ &\quad + \frac{\delta^2}{\eta^2} (N_1 - N_2). \end{aligned} \tag{4.24}$$

À nouveau, on développe le terme carré en isolant les facteurs de plus haut indice :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right)^2 &= 2 \sum_{j=N_2+1}^{l-1} \sum_{i=N_2}^{j-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \times \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \\ &\quad + \sum_{j=N_2}^{l-1} Y_{\frac{j}{n}}^{(n)} \varepsilon_j^2 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \\ &= 2 \sum_{j=N_2+1}^{l-1} \sum_{i=N_2}^{j-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \\ &\quad + \sum_{j=N_2}^{l-1} Y_{\frac{j}{n}}^{(n)} \varepsilon_j^2 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j}. \end{aligned}$$

L'indépendance de  $Y_{i/n}^{(n)}$  et de  $\mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i}$ ,  $N_2 \leq i \leq j$ , par rapport à  $\varepsilon_j$  implique que le premier terme est d'espérance nulle et on obtient

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=N_2}^{l-1} \sqrt{Y_{\frac{i}{n}}^{(n)}} \varepsilon_i \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq i} \right)^2 \right] = \sum_{j=N_2}^{l-1} \mathbb{E} \left[ Y_{\frac{j}{n}}^{(n)} \varepsilon_j^2 \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \right] \leq \frac{1}{\eta} (l - N_2).$$

En remplaçant dans l'inégalité (4.24), on trouve la majoration

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{j=N_2}^{N_1-1} \sqrt{Y_{\frac{j}{n}}^{(n)}} \varepsilon_j \mathbb{1}_{\lfloor n\tau^{(n)} \rfloor \geq j} \right|^4 \right] \leq K_1 \frac{1+\delta^2}{\eta^2} \sum_{l=N_2+1}^{N_1-1} (l - N_2) + \frac{\delta^2}{\eta^2} (N_1 - N_2).$$

L'équation (4.23) et l'inégalité  $N_2 + 1 \leq N_1$  permettent de conclure.  $\square$

### 4.3.3 Étape 3 : convergence et limite

On sait par l'étape précédente que la famille  $(t \mapsto X_t^{(n)}, t \in [0, 2])_{n \in \mathbb{N}^*}$  est tendue. La suite  $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  appartenant au compact  $[0, 2]$ , elle vérifie la Définition 3.41 de la tension et on obtient le caractère tendu de la suite

$$(t \mapsto X_t^{(n)}, t \in [0, 2]; \tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Le Théorème 3.42 de Prohorov donne donc l'existence de sous-suites  $\varphi(n)$  convergeant en distribution :

$$(t \mapsto X_t^{\varphi(n)}, t \in [0, 2]; \tau^{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CVD} (t \mapsto X_t^{\varphi(\infty)}, t \in [0, 2]; \tau^{\varphi(\infty)}).$$

On note de plus que  $X_t^{\varphi(n)} > 0$  implique  $X_t^{\varphi(\infty)} \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Remarque 4.7.** On désigne par  $\tau$  le temps d'arrêt pour le processus  $X^{\varphi(\infty)}$  défini par

$$\tau := \inf \left\{ t \in [0, 2], X_t^{\varphi(\infty)} \geq \frac{1}{\eta} \right\}, \quad (4.25)$$

avec la convention  $\inf(\emptyset) = 2$ . On peut remarquer que la limite  $\tau^{\varphi(\infty)}$  des temps d'arrêt  $\tau^{\varphi(n)}$  n'est a priori pas égale à  $\tau$ . En effet, on peut par exemple imaginer qu'une réalisation du processus limite soit constante et égale à  $\eta^{-1}$  à partir d'un temps  $\tau < 2$  et qu'elle soit approchée par des processus  $X^{\varphi(n)}$  dont les valeurs pour  $t \geq \tau$  tendent par valeurs inférieures vers  $\eta^{-1}$ , sans jamais atteindre cette valeur. Dans ce cas,  $\tau^{\varphi(n)}(\omega) = 2 = \tau^{\varphi(\infty)}(\omega)$ , et  $\tau(\omega)$  et  $\tau^{\varphi(\infty)}(\omega)$  sont distincts. Par contre, on démontrera dans la suite qu'on a la relation  $\tau \leq \tau^{\varphi(\infty)}$  presque-sûrement (Lemme 4.10). On va donc, dans le théorème qui suit, se restreindre aux temps plus petits que  $\tau$ , et non que  $\tau^{\varphi(\infty)}$ , afin de garder des informations sur le temps final : la définition de  $\tau$  est précise et ne dépend que du processus limite  $X^{\varphi(\infty)}$ , alors que la valeur de  $\tau^{\varphi(\infty)}$  est construite à partir de la suite des processus, mais dépend de  $X^{\varphi(\infty)}$  d'une façon non déterminée a priori.

**Théorème 4.8.** Soit  $\tau$  le temps d'arrêt du processus  $X^{\varphi(\infty)}$  défini par (4.25). Soit  $L$  l'opérateur défini par

$$Lf(x) = 2|x|f''(x) + (2\gamma + 1)f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

et soit  $\sigma(\{X_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t\})$  la filtration engendrée par  $X^{\varphi(\infty)}$ . Alors  $(X_t^{\varphi(\infty)}, \tau)$  est solution du problème aux martingales arrêté associé à  $L$ , c'est-à-dire que

$$\left( f \left( X_{t \wedge \tau}^{\varphi(\infty)} \right) - \int_0^t ds Lf \left( X_{s \wedge \tau}^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{s \leq \tau}, \sigma \left( \{X_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t\} \right), \mathbb{P} \right)$$

est une martingale pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ .

En regardant la définition de l'opérateur  $L$ , on reconnaît le générateur des processus de Bessel carrés (équation (3.14)). L'étude faite dans la section 3.4 montre que le problème aux martingales associé à  $L$  est bien posé : le processus de Bessel carré en dimension  $2\gamma + 1$  existe et est unique pour toute condition initiale réelle, et en particulier pour toute condition initiale  $Z_0 \geq 0$ . La Proposition 3.33 permet alors d'affirmer que le problème aux martingales arrêté associé à  $L$  est bien posé. Puisque  $(Z, 2)$ , où  $Z$  est le processus de Bessel carré, est aussi solution du problème arrêté (car  $Z$  est solution du problème non arrêté), la Définition 3.32 de l'unicité arrêtée permet d'affirmer que le temps d'arrêt pour  $Z$  défini par

$$\tau_Z := \inf \left\{ t \in [0; 2], Z \geq \frac{1}{\eta} \right\}, \quad \text{avec } \inf \{\emptyset\} = 2,$$

a la même distribution que  $\tau$ . De plus,  $Z$  et  $X^{\varphi(\infty)}$  ont des distributions identiques jusqu'à l'instant  $\tau$ . Le processus  $X^{\varphi(\infty)}$  ne dépend donc pas de la fonction  $\varphi$ , et la suite  $X_{\cdot \wedge \tau}^{\varphi(n)}$  converge en distribution vers  $Z_{\cdot \wedge \tau}$ , où  $\tau$  et  $\tau_Z$  sont considérés comme égaux. Cela permet de montrer que ce ne sont pas seulement des sous-suites, mais la suite  $\left(X_{\cdot \wedge \tau}^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  elle-même qui converge en distribution.

**Corollaire 4.9.** *La suite  $\left(X_{\cdot \wedge \tau}^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en distribution vers  $Z_{\cdot \wedge \tau}$ , où  $\tau$  est le temps d'arrêt défini par*

$$\tau := \inf \left\{ t \in [0, 2], Z_t \geq \frac{1}{\eta} \right\}.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer (voir la Définition 3.37) que pour toute fonction

$$f : \mathcal{C}([0; 2], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

continue bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( f \left( X_{\cdot \wedge \tau}^{(n)} \right) \right) = \mathbb{E} (f(Z_{\cdot \wedge \tau})).$$

On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe une telle fonction  $f$  pour laquelle on n'ait pas la convergence des espérances. Alors il existe une sous-suite  $X_{\cdot \wedge \tau}^{\varphi(n)}$  et un  $\varepsilon$  strictement positif tels que

$$\left| \mathbb{E} \left( f \left( X_{\cdot \wedge \tau}^{\varphi(n)} \right) \right) - \mathbb{E} (f(Z_{\cdot \wedge \tau})) \right| > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Or la famille  $\left(X_{\cdot \wedge \tau}^{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est tendue, puisque le critère de Kolmogorov utilisé dans l'étape 2 est encore satisfait. En effet, on peut remplacer le processus  $X_{\cdot}^{(n)}$  par  $X_{\cdot \wedge \tau}^{(n)}$  dans le Théorème 4.5 sans changer la conclusion. On peut donc extraire une sous-suite  $\psi(\varphi(n))$  convergente. Le Théorème 4.8 affirme que la suite  $X_{\cdot \wedge \tau}^{\psi(\varphi(n))}$  converge elle aussi en distribution vers  $Z_{\cdot \wedge \tau}$ . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( f \left( X_{\cdot \wedge \tau}^{\psi(\varphi(n))} \right) \right) = \mathbb{E} (f(Z_{\cdot \wedge \tau})).$$

On obtient une contradiction, et  $f$  n'existe pas.  $\square$

On termine cette section en démontrant le Théorème 4.8.

*Démonstration du Théorème 4.8.* Soit  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le processus

$$\left( f \left( X_{\frac{k}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)} \right) - \sum_{j=0}^{k-1} A_n f \left( X_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)} \right) \mathbb{1}_{\tau^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}}, \mathcal{F}_{\frac{k}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}, \mathbb{P} \right), \quad (4.26)$$

où  $\mathcal{F}^{\varphi(n)}$  est la filtration adaptée au processus  $Y^{\varphi(n)}$  et  $\tau^{\varphi(n)}$  le temps d'arrêt défini par l'équation (4.10), est une martingale discrète. En effet, par construction des  $Y^{\varphi(n)}$  comme une chaîne de Markov et d'après la Proposition 3.44,

$$f\left(Y_{\frac{k}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) - \sum_{j=0}^{k-1} A_{\varphi(n)} f\left(Y_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right), \mathcal{F}_{\frac{k}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}, \mathbb{P}$$

est une martingale discrète. Le Théorème 3.16 permet alors d'arrêter ce processus et d'affirmer que

$$\left(f\left(X_{\frac{k}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) - \sum_{j=0}^{k-1} A_n f\left(X_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \mathbb{1}_{\tau^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}}, \mathcal{F}_{\frac{k}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}, \mathbb{P}\right)$$

est encore une martingale discrète.

Puisque la suite de variables aléatoires  $\left(t \mapsto X_t^{\varphi(n)}, t \in [0, 2]; \tau^{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en distribution vers  $\left(t \mapsto X_t^{\varphi(\infty)}, t \in [0, 2]; \tau^{\varphi(\infty)}\right)$ , le Théorème 3.38 de Skorohod garantit l'existence d'un espace de probabilités  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$  et de processus

$$\left(t \mapsto \tilde{X}_t^{\varphi(n)}, t \in [0, 2]; \tilde{\tau}^{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } \left(t \mapsto \tilde{X}_t^{\varphi(\infty)}, t \in [0, 2]; \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}\right)$$

de mêmes lois que

$$\left(t \mapsto X_t^{\varphi(n)}, t \in [0, 2]; \tau^{\varphi(n)}\right) \text{ et } \left(t \mapsto X_t^{\varphi(\infty)}, t \in [0, 2]; \tau^{\varphi(\infty)}\right)$$

respectivement et tels que

$$\sup_{t \in [0, 2]} \left| \tilde{X}_t^{\varphi(\infty)} - \tilde{X}_t^{\varphi(n)} \right| \rightarrow 0, \tilde{\mathbb{P}}\text{-presque-sûrement,}$$

$$\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \rightarrow \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}, \tilde{\mathbb{P}}\text{-presque-sûrement.}$$

En particulier, il en résulte que

$$\left(f\left(\tilde{X}_{\frac{k}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) - \sum_{j=0}^{k-1} A_{\varphi(n)} f\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}}, \sigma\left(\left\{\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}, j \leq k\right\}\right), \tilde{\mathbb{P}}\right)$$

est une martingale discrète arrêtée. On veut en étudier le comportement lorsque  $n$  tend vers l'infini. Le lemme suivant, démontré dans la suite, permet de conclure.

**Lemme 4.10.** *Soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . On a les trois propriétés suivantes.*

1. *Soit  $\tilde{\tau}$  un temps d'arrêt défini sur  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$  et de même distribution que  $\tau$ . Alors l'inégalité  $\tilde{\tau} \leq \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}$  est vraie presque-sûrement.*
2. *Soient  $t_1 < t_2$  deux instants dans l'intervalle  $[0, 2]$ . Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( f\left(\tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) - f\left(\tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) - \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} A_n f\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right) \\ = f\left(\tilde{X}_{t_2}^{\varphi(\infty)}\right) - f\left(\tilde{X}_{t_1}^{\varphi(\infty)}\right) - \int_{t_1}^{t_2} ds Lf\left(\tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s} \end{aligned}$$

presque sûrement.

3. Le processus limite

$$\left( f \left( \tilde{X}_t^{\varphi(\infty)} \right) - \int_0^t ds Lf \left( \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s}, \sigma \left( \left\{ \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t \right\} \vee \left\{ \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t \right\} \right), \tilde{\mathbb{P}} \right)$$

est une martingale pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ .

En effet, le Théorème 3.16 permet d'affirmer que le processus limite arrêté

$$\begin{aligned} & \left( f \left( \tilde{X}_{t \wedge \tilde{\tau}}^{\varphi(\infty)} \right) - \int_0^t ds Lf \left( \tilde{X}_{s \wedge \tilde{\tau}}^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s} \mathbb{1}_{\tilde{\tau} \geq s}, \sigma \left( \left\{ \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t \right\} \vee \left\{ \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t \right\} \right), \tilde{\mathbb{P}} \right) \\ &= \left( f \left( \tilde{X}_{t \wedge \tilde{\tau}}^{\varphi(\infty)} \right) - \int_0^t ds Lf \left( \tilde{X}_{s \wedge \tilde{\tau}}^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau} \geq s}, \sigma \left( \left\{ \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t \right\} \vee \left\{ \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t \right\} \right), \tilde{\mathbb{P}} \right) \end{aligned}$$

(d'après l'affirmation 1 du Lemme 4.10) est encore une martingale. Comme  $\mathbb{1}_{\tilde{\tau} \geq s}$  est mesurable par rapport à la filtration  $\sigma \left( \left\{ \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t \right\} \right)$ , cette dernière filtration, plus grossière que  $\sigma \left( \left\{ \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t \right\} \vee \left\{ \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t \right\} \right)$ , est suffisante et

$$\left( f \left( \tilde{X}_{t \wedge \tilde{\tau}}^{\varphi(\infty)} \right) - \int_0^t ds Lf \left( \tilde{X}_{s \wedge \tilde{\tau}}^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau} \geq s}, \sigma \left( \left\{ \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t \right\} \right), \tilde{\mathbb{P}} \right)$$

est une martingale. En repassant dans l'espace de probabilités de départ  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , on obtient la conclusion du théorème.  $\square$

Reste à démontrer le lemme énoncé dans la preuve.

*Démonstration du Lemme 4.10.* On démontre la première affirmation en utilisant la définition de l'espace de probabilités de Skorohod  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ . Cet espace est construit pour qu'on ait

$$\tilde{\tau}^{\varphi(n)}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}(\omega)$$

et

$$\left| \tilde{X}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)}(\omega) - \tilde{X}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}(\omega) \right| \leq \sup_{t \in [0; 2]} \left| \tilde{X}_t^{\varphi(\infty)}(\omega) - \tilde{X}_t^{\varphi(n)}(\omega) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pour presque tout  $\omega \in \tilde{\Omega}$ . En se restreignant aux  $\omega$  pour lesquels il y a convergence, on distingue deux cas de figure :

- soit  $\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}(\omega) = 2$ , et alors certainement  $\tilde{\tau}(\omega) \leq \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}(\omega)$ , puisqu'on a par définition  $\tilde{\tau} \in [0; 2]$  ;
- soit  $\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}(\omega) < 2$  et il existe alors un rang  $N \in \mathbb{N}^*$  à partir duquel on a aussi  $\tilde{\tau}^{\varphi(n)}(\omega) < 2$ .

Donc pour tout  $n \geq N$ ,  $\tilde{X}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}(\omega) = \eta^{-1}$  et

$$\left| \tilde{X}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)}(\omega) - \frac{1}{\eta} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par continuité de la fonction  $t \mapsto \tilde{X}_t^{\varphi(\infty)}(\omega)$ , on obtient

$$\tilde{X}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}}^{\varphi(\infty)}(\omega) = \frac{1}{\eta}, \quad \text{d'où } \tilde{\tau}(\omega) \leq \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}(\omega).$$

L'affirmation 1 est donc montrée.

Les mêmes résultats de convergence dans l'espace de Skorohod permettent de montrer la propriété 2. En effet, la convergence uniforme en  $t$  et presque-sûre obtenue par le Théorème 3.38

de Skorohod assure que  $\tilde{X}^{\varphi(\infty)}$  est limite uniforme des  $\tilde{X}^{\varphi(n)}$ , processus continus par rapport au temps. En conséquence,  $\tilde{X}^{\varphi(\infty)}$  est lui aussi continu par rapport au temps et

$$\left| f\left(\tilde{X}_t^{\varphi(\infty)}\right) - f\left(\tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \right| \leq \|f'\|_{\infty} \left( \left| \tilde{X}_t^{\varphi(\infty)} - \tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)} \right| + \sup_{t \in [0;2]} \left| \tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)} - \tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)} \right| \right)$$

tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, pour tout  $t \in [0;2]$ . Reste donc à montrer que

$$\int_{t_1}^{t_2} ds Lf\left(\tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s} - \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} A_{\varphi(n)} f\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}}$$

tend presque sûrement vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. On utilise pour cela la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_1}^{t_2} ds Lf\left(\tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s} - \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} A_{\varphi(n)} f\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right| \\ & \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} ds Lf\left(\tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s} - \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} Lf\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)}\right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right| \\ & \quad + \frac{1}{\varphi(n)} \left| \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} Lf\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)}\right) \left( \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} - \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right) \right| \\ & \quad + \frac{1}{\varphi(n)} \left| \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} \left( Lf\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)}\right) - Lf\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right| \\ & \quad + \frac{1}{\varphi(n)} \left| \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} \left( Lf\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) - \varphi(n) A_{\varphi(n)} f\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)}\right) \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme est une approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles et tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Le deuxième tend aussi vers 0 par définition de  $\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)}$  comme limite des  $\tilde{\tau}^{\varphi(n)}$  et parce que les  $Lf\left(\tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(\infty)}\right)$  restent uniformément bornés. En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on ait  $|\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} - \tilde{\tau}^{\varphi(n)}| < \varepsilon$ . La différence  $\left| \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} - \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right|$  vaut alors 1 en au maximum  $2\varepsilon n$  valeurs de  $j$  et 0 pour toutes les autres. On obtient donc

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{j=\lfloor nt_1 \rfloor + 1}^{\lfloor nt_2 \rfloor} Lf\left(\tilde{X}_{\frac{j}{n}}^{\varphi(\infty)}\right) \left( \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq \frac{j}{n}} - \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{n}} \right) \right| \leq \frac{2K}{n} \varepsilon n.$$

Le troisième terme tend vers 0 par convergence uniforme des  $\tilde{X}^{\varphi(n)}$  vers  $\tilde{X}^{\varphi(\infty)}$ . Enfin, le quatrième et dernier terme tend vers 0 grâce au Lemme 4.2. Ces estimations concluent la démonstration de 2.

La démonstration de l'affirmation 3 se fait en utilisant la Proposition 3.11. Celle-ci assure que, puisque

$$\left( f\left(\tilde{X}_{\frac{k}{n}}^{(n)}\right) - \sum_{j=0}^{k-1} A_n f\left(\tilde{X}_{\frac{j}{n}}^{(n)}\right) \mathbb{1}_{\tau^{(n)} \geq \frac{j}{n}}, \tilde{\mathcal{F}}_{\frac{k}{n}}^{(n)}, \mathbb{P} \right)$$

est une martingale discrète, le produit

$$\begin{aligned} & \left( f \left( \tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)} \right) - f \left( \tilde{X}_{\frac{\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)} \right) - \sum_{j=\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor + 1}^{\lfloor \varphi(n)t_2 \rfloor} A_{\varphi(n)} f \left( \tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{j}{\varphi(n)}} \right) \\ & \quad \times \Phi \left( \tilde{X}_{s_1}^{\varphi(n)}, \dots, \tilde{X}_{s_d}^{\varphi(n)}, \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor}{n}} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

est d'espérance nulle pour toute fonction  $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , et tout maillage

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_d = t_1.$$

Comme on travaille dans l'espace de Skorohod, on a la convergence presque sûre

$$\Phi \left( \tilde{X}_{s_1}^{\varphi(n)}, \dots, \tilde{X}_{s_d}^{\varphi(n)}, \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \geq \frac{\lfloor \varphi(n)t_1 \rfloor}{\varphi(n)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi \left( \tilde{X}_{s_1}^{\varphi(\infty)}, \dots, \tilde{X}_{s_d}^{\varphi(\infty)}, \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t_1} \right).$$

Donc, d'après l'affirmation 2, le produit (4.27) converge presque sûrement vers le produit des limites

$$\left( f \left( \tilde{X}_{t_2}^{\varphi(\infty)} \right) - f \left( \tilde{X}_{t_1}^{\varphi(\infty)} \right) - \int_{t_1}^{t_2} ds Lf \left( \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s} \right) \Phi \left( \tilde{X}_{s_1}^{\varphi(\infty)}, \dots, \tilde{X}_{s_d}^{\varphi(\infty)}, \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t_1} \right)$$

pour tout  $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ .

De plus, en utilisant la définition de  $A_{\varphi(n)}f$  donnée par l'égalité (4.9), on obtient par un développement limité

$$\left| A_n f \left( \tilde{X}_{\frac{j}{\varphi(n)}}^{\varphi(n)} \right) \right| \leq \frac{K}{\varphi(n)},$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $n$ . Puisque  $f$  et  $\Phi$  sont lisses et à supports compacts, on peut majorer le produit (4.27) par

$$(2 \|f\|_\infty + K(t_2 - t_1)) \|\Phi\|_\infty,$$

qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée assure donc que le produit

$$\left( f \left( \tilde{X}_{t_2}^{\varphi(\infty)} \right) - f \left( \tilde{X}_{t_1}^{\varphi(\infty)} \right) - \int_{t_1}^{t_2} ds Lf \left( \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s} \right) \Phi \left( \tilde{X}_{s_1}^{\varphi(\infty)}, \dots, \tilde{X}_{s_d}^{\varphi(\infty)}, \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t_1} \right)$$

est d'espérance nulle. Par conséquent, en utilisant une nouvelle fois la Proposition 3.11, on obtient que

$$\left( f \left( \tilde{X}_t^{\varphi(\infty)} \right) - \int_0^t ds Lf \left( \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)} \right) \mathbb{1}_{\tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq s}, \sigma \left( \left\{ \tilde{X}_s^{\varphi(\infty)}, s \leq t \right\} \vee \left\{ \tilde{\tau}^{\varphi(\infty)} \geq t \right\} \right), \tilde{\mathbb{P}} \right)$$

est une martingale, et cela termine la démonstration de l'affirmation 3.  $\square$

#### 4.3.4 Étape 4 : suppression du temps d'arrêt

On a montré dans les étapes précédentes que la suite de processus  $X_{\cdot \wedge \tau}^{(n)} = Y_{\cdot \wedge \tau^{(n)} \wedge \tau}^{(n)}$  converge en distribution vers le processus  $Z_{\cdot \wedge \tau}$ , où  $Z$  est le processus de Bessel carré en dimension  $2\gamma + 1$ . On rappelle la définition des temps d'arrêt :

$$\tau^{(n)} = \inf \left\{ t \in [0; 2] \mid Y_t^{(n)} \geq \frac{1}{\eta} \right\}, \quad \tau = \inf \left\{ t \in [0; 2] \mid Z_t \geq \frac{1}{\eta} \right\}.$$

On veut montrer que le résultat de convergence reste vrai lorsqu'on supprime les temps d'arrêt, c'est-à-dire que  $Y^{(n)}$  converge en distribution vers le processus de Bessel carré non arrêté  $Z$ . On utilise pour cela le caractère non-explosif du processus de Bessel (Proposition 3.35) et on montre que supprimer les temps d'arrêt dans le résultat de convergence revient en fait à faire tendre le paramètre  $\eta$  vers 0.

**Proposition 4.11.** *En dimension  $\delta > 0$ , la suite de processus  $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)} \mid t \in [0; 1]\}$  converge en distribution vers le processus de Bessel carré  $Z = \{Z_t \mid t \in [0; 1]\}$ .*

Avant de démontrer ce résultat, on remarque que la convergence en distribution du processus  $Y^{(n)}_{\cdot \wedge \tau^{(n)} \wedge \tau}$  n'implique pas nécessairement la convergence de la suite des  $\tau^{(n)}$ . En effet, on peut imaginer un exemple où  $Y^{(n)}_{t \wedge \tau^{(n)} \wedge \tau}$  vaudrait  $\eta^{-1}$  sur un intervalle de temps fixé  $[T; 2]$ , avec  $0 < T < 2$ , pour les entiers  $n$  pairs et approcherait  $\eta^{-1}$  par valeurs strictement inférieures sur ce même intervalle de temps pour les  $n$  impairs. On aurait alors  $\tau^{(n)} \wedge \tau = T < 2$  pour tout  $n$  pair et  $\tau^{(n)} \wedge \tau = 2$  pour tout  $n$  impair, suite qui ne converge pas. On ne peut donc a priori rien dire sur la convergence de la suite  $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Par contre, cette suite reste à valeurs dans le compact  $[0; 2]$ . Elle est donc tendue et admet des sous-suites convergentes par le théorème de Prohorov (Théorème 3.42). On va donc utiliser ces sous-suites dans la démonstration de la proposition, afin de s'assurer une convergence des temps d'arrêts.

*Démonstration.* D'après la Proposition 3.35, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbb{P}(\tau = 2) = 1.$$

Soit  $\varphi(n)$  une extraction de  $\mathbb{N}$  telle que la suite extraite  $\tau^{\varphi(n)}$  converge en distribution vers une limite, désignée comme dans tout ce qui précède par  $\tau^{\varphi(\infty)}$ . Le premier point du Lemme 4.10 permet alors d'écrire le même résultat pour  $\tau^{\varphi(\infty)}$  :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbb{P}(\tau^{\varphi(\infty)} = 2) = 1.$$

Aussi, puisque  $\tau^{\varphi(\infty)}$  est la limite des  $\tau^{\varphi(n)}$ , on a

$$\forall \delta > 0, \exists \eta_c > 0, \exists N(\eta_c) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(\eta), \forall 0 < \eta \leq \eta_c, \quad \mathbb{P}(\tau^{\varphi(n)} \geq 1) \geq 1 - \delta.$$

Soit  $\phi : \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. Alors, on peut écrire

$$\phi(X^{(n)}_{\cdot \wedge \tau}) \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varphi(n)} \geq 1} = \phi(Y^{\varphi(n)}_{\cdot \wedge \tau}) \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varphi(n)} \geq 1}.$$

On en déduit la majoration de l'espérance de  $\phi(Y^{\varphi(n)}_{\cdot \wedge \tau}) - \phi(Z_{\cdot})$  suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left( \phi(Y^{\varphi(n)}_{\cdot \wedge \tau}) - \phi(Z_{\cdot}) \right) \right| \\ & \leq \mathbb{E} \left| \left( \phi(Y^{\varphi(n)}_{\cdot \wedge \tau}) - \phi(Z_{\cdot}) \right) \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varphi(n)} < 1} \right| + \mathbb{E} \left| \left( \phi(Y^{\varphi(n)}_{\cdot \wedge \tau}) - \phi(Z_{\cdot}) \right) \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varphi(n)} \geq 1} \right| \\ & \leq 2 \|\phi\|_{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varphi(n)} < 1}) + \mathbb{E} \left| \left( \phi(X^{(n)}_{\cdot \wedge \tau}) - \phi(Z_{\cdot \wedge \tau}) \right) \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varphi(n)} \geq 1} \right| \\ & \leq 2 \|\phi\|_{\infty} \delta + \mathbb{E} \left| \phi(X^{(n)}_{\cdot \wedge \tau}) - \phi(Z_{\cdot \wedge \tau}) \right|. \end{aligned}$$

La convergence en distribution de  $X_{\cdot \wedge \tau}^{\varphi(n)}$  donne, par le Théorème 3.40,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \phi \left( X_{\cdot \wedge \tau}^{\varphi(n)} \right) - \phi \left( Z_{\cdot \wedge \tau} \right) \right| = 0.$$

Aussi, en faisant tendre  $n$  vers  $\infty$ , on obtient

$$\forall \delta > 0, \exists \eta_c > 0, \forall 0 < \eta \leq \eta_c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left( \phi \left( Y^{\varphi(n)} \right) - \phi \left( Z_{\cdot} \right) \right) \right| \leq 2 \|\phi\|_{\infty} \delta.$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left( \phi \left( Y^{\varphi(n)} \right) - \phi \left( Z_{\cdot} \right) \right) \right| = 0,$$

pour toute fonction  $\phi$  continue bornée et donc, en utilisant le Théorème 3.40, que la suite  $Y^{\varphi(n)}$  converge en distribution vers  $Z$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ , pour toute extraction  $\varphi(n)$  telle que la suite  $(\tau^{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge en distribution.

La conclusion vient alors du fait que, puisque les  $\tau^{(n)}$  sont à valeurs dans un compact, tout entier  $N$  est atteint par une des extractions  $\varphi(n)$  induisant une sous-suite convergente. Plus rigoureusement, on raisonne par l'absurde. Supposons que la suite des  $Y^{(n)}$  ne converge pas en distribution. Il existe alors une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  continue et bornée telle que  $\mathbb{E}(\phi(Y^{(n)}) - \phi(Z))$  ne tende pas vers 0. Cela signifie donc qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et une extraction  $\psi(n)$  tels que

$$\left| \mathbb{E} \left( \phi \left( Y^{\psi(n)} \right) - \phi \left( Z \right) \right) \right| > \varepsilon.$$

Or la sous-suite  $(\tau^{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est encore tendue car à valeurs dans le compact  $[0; 2]$  et admet donc une sous-suite  $\psi(\varphi(n))$  convergente. La raisonnement ci-dessus implique alors que la suite  $Y^{\psi(\varphi(n))}$  converge en distribution vers  $Z$  et donc que  $\mathbb{E}(\phi(Y^{\psi(\varphi(n))}) - \phi(Z))$  tende vers 0. On a donc contradiction.  $\square$

# Chapitre 5

## Un gaz de Lorentz inélastique et dissipatif

### 5.1 Introduction

Dans les quatre chapitres précédents, on a étudié la dynamique de particules sous l'action d'un milieu de dimension infinie, aléatoire ou périodique, composé de diffuseurs. Cette action était décrite par une équation

$$\ddot{q}(t) = F(q(t), t),$$

où les caractéristiques du milieu, traduites par la force  $F$ , influençaient la trajectoire  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  de la particule. Par contre, la dépendance en temps de la force étant fixée, la trajectoire de la particule n'avait aucun impact sur le milieu. Dans les chapitres suivants, on va s'intéresser à un modèle dans lequel le milieu est maintenant réactif au déplacement de la particule. Le système, composé de la particule et du milieu, devient un système Hamiltonien autonome, et on voit apparaître dans l'énergie un terme d'interaction modélisant en même temps l'action du milieu sur la particule et l'action de la particule sur le milieu. Le réservoir considéré dans la suite est, comme dans de nombreux travaux (voir par exemple [22, 23, 76, 20]), constitué d'oscillateurs. Ses degrés de liberté sont locaux et on peut l'interpréter comme étant une version classique du modèle quantique du cristal moléculaire d'Holstein (voir [41]). On restreint enfin l'étude au cas où l'état initial est à l'équilibre thermique.

Plus précisément, on étudie une particule en mouvement dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et sous l'influence d'une force constante  $F \in \mathbb{R}^n$ . On note  $q$  sa position,  $p$  son moment conjugué et  $\xi = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Son Hamiltonien est alors la somme de son énergie cinétique et du potentiel lié à  $F$

$$H_S(\xi) = \frac{1}{2} |p|^2 - F \cdot q, \tag{5.1}$$

où on désigne par  $|\cdot|$  la norme sur  $\mathbb{R}^n$  associée au produit scalaire  $\cdot$  usuel. On plonge cette particule dans un milieu, appelé réservoir, composé d'oscillateurs harmoniques et construit comme suit.

On fixe une tribu  $\mathcal{F}_1$  et une mesure  $\mu_1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et on choisit un sous-ensemble mesurable  $E_1$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\mu_1(\mathbb{R}^n \setminus E_1) = 0.$$

En chaque point  $x$  de  $E_1$ , on place un bain d'oscillateurs harmoniques, indexés par un ensemble mesuré  $(E_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$  et on note  $\varphi_k(x)$  le déplacement et  $\pi_k(x)$  le moment conjugué du  $k$ -ième

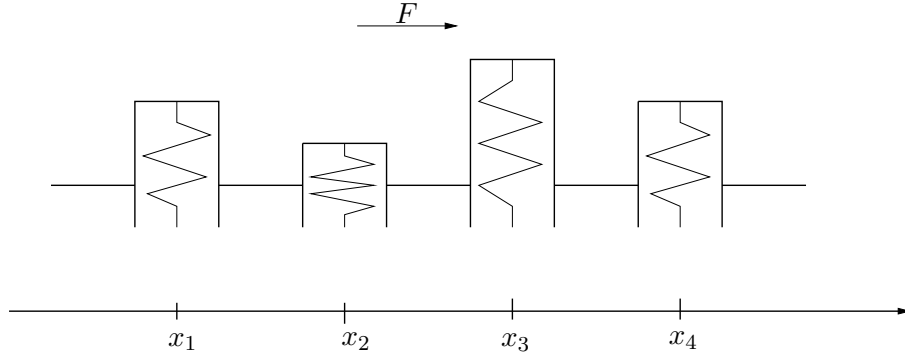


FIG. 5.1 – Illustration schématique du modèle en dimension  $n = 1$  avec  $E_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $\text{card}(E_2) = 1$  et  $\rho$  la fonction indicatrice d'un segment  $[-\sigma; \sigma]$

oscillateur, avec  $k \in E_2$ . Chaque oscillateur  $(\varphi_k(x), \pi_k(x))$ ,  $k \in E_2$ ,  $x \in E_1$ , est associé à une fréquence  $\omega_k$ , de sorte que son énergie est

$$\frac{1}{2} \left( \omega_k^2 \varphi_k(x)^2 + \pi_k(x)^2 \right).$$

Ces bains d'oscillateurs joueront le rôle des diffuseurs, par analogie avec les chapitres 1 et 2.

À titre d'exemple, on considère d'abord brièvement le cas où il n'y a qu'un nombre fini  $N$  de diffuseurs centrés en les points  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ , chacun ayant un nombre fini  $M$  de degrés de liberté :  $\text{card}(E_2) = M < \infty$ . On pose donc  $E_1 = \{x_1, \dots, x_N\}$  et le Hamiltonien du réservoir est alors

$$H_{res}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{x \in E_1} \sum_{k \in E_2} \left( \omega_k^2 \varphi_k(x)^2 + \pi_k(x)^2 \right),$$

et est défini sur l'espace

$$\mathcal{H}_{res} := \left\{ \phi = (\varphi_k, \pi_k)_{k \in E_2} : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \right\} \cong \mathbb{R}^{2NM}.$$

Les fréquences  $\omega_k$  ne dépendent ici pas des centres  $x \in E_1$ , ce qui signifie qu'en chaque  $x \in E_1$  la particule voit le même bain d'oscillateurs.

On décrit maintenant l'interaction entre la particule et ces oscillateurs. La constante de couplage est définie à partir de coefficients  $(c_k)_{k \in E_2}$  réels, strictement positifs, et on suppose que tous les oscillateurs ont un rayon d'action fini, déterminé par un profil identique pour tous défini par une fonction  $\rho$  dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On décrit alors l'interaction entre la particule et le  $k$ -ième oscillateur centré en  $x$  par le produit

$$\omega_k^2 c_k \rho(x - q) \varphi_k(x), \quad k \in E_2, x \in E_1. \quad (5.2)$$

Le Hamiltonien du modèle global, dans le cas d'un nombre fini de centres de diffuseurs et d'oscillateurs par bain, s'écrit donc

$$H(\xi, \phi) = \frac{1}{2} |p|^2 - F \cdot q + \frac{1}{2} \sum_{x \in E_1} \sum_{k \in E_2} \left( \omega_k^2 \varphi_k(x)^2 + \pi_k(x)^2 \right) + \sum_{x \in E_1} \sum_{k \in E_2} \omega_k^2 c_k \rho(x - q) \varphi_k(x)$$

et induit les équations de mouvement

$$\begin{cases} \dot{q}_t = p_t, \\ \dot{p}_t = F + \sum_{x \in E_1} \sum_{k \in E_2} \omega_k^2 c_k (\nabla \rho)(x - q_t) \varphi_{k,t}(x), \\ \dot{\varphi}_{k,t}(x) = \pi_{k,t}(x), \\ \dot{\pi}_{k,t}(x) = -\omega_k^2 (\varphi_{k,t}(x) + c_k \rho(x - q_t)), \end{cases} \quad (5.3)$$

pour tous  $x \in E_1$  et  $k \in E_2$ , équivalentes à

$$\begin{cases} \ddot{q}_t = F + \sum_{x \in E_1} \sum_{k \in E_2} \omega_k^2 c_k (\nabla \rho)(x - q_t) \varphi_{k,t}(x), \\ \ddot{\varphi}_{k,t}(x) = -\omega_k^2 (\varphi_{k,t}(x) + c_k \rho(x - q_t)). \end{cases}$$

Ce modèle est une adaptation diffusive du modèle non diffusif étudié dans le chapitre 1. En effet, l'action de la particule sur les oscillateurs est traduite par le terme  $-\omega_k^2 c_k \rho(x - q_t)$  dans la deuxième équation de ce système. Dans les modèles non dissipatifs, la particule n'influe pas sur le milieu. On considère donc ce terme nul (le système particule-réservoirs n'est alors plus Hamiltonien) et l'équation de mouvement des oscillateurs est simplement

$$\ddot{\varphi}_{k,t}(x) = -\omega_k^2 \varphi_{k,t}(x), \quad \forall x \in E_1, \forall k \in E_2.$$

En considérant des solutions de la forme

$$\varphi_{k,t}(x) = A(x) \cos(\omega_k t + B_k(x)),$$

la première équation du système devient un cas particulier de l'équation de mouvement étudié dans le chapitre 1 (voir par exemple l'équation (1.8)) :

$$\ddot{q}_t = F + \sum_{x \in E_1} A(x) g(x - q_t, \omega t + B(x)),$$

avec  $\omega := (\omega_k)_{k \in E_2}$ ,  $B(x) = (B_k(x))_{k \in E_2}$  pour tout  $x \in E_1$  et, pour tout  $q \in \mathbb{R}^n$  et tout  $\tau \in \mathbb{R}^{E_2}$ ,

$$g(q, \tau) := \sum_{k \in E_2} c_k \omega_k \cos(\tau_k) \nabla \rho(q).$$

Les bains d'oscillateurs du modèle décrit ici jouent par conséquent le rôle des diffuseurs intervenant dans le chapitre 1.

On étudie les solutions  $(\xi_t, \phi_t)$  du système (5.3) au cours du temps lorsque le réservoir est à température positive, ce qui signifie qu'on munit l'espace  $\mathcal{H}_{res}$  de la mesure gaussienne

$$d\mu_{res}^\beta(\phi) = \prod_{x \in E_1} \prod_{k \in E_2} \frac{2\pi}{\omega_k \beta} e^{-\frac{1}{2}\beta(\omega_k^2 \varphi_k^2(x) + \pi_k^2(x))} d\varphi_k(x) d\pi_k(x), \quad (5.4)$$

dans le cas où  $\text{card}(E_1) = N < \infty$  et  $\text{card}(E_2) = M < \infty$ . Le paramètre  $\beta$  est inversement proportionnel à la température  $T$  et est défini par  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , où  $k_B$  est la constante de

Boltzmann. La fonction caractéristique de  $\mu_{res}^\beta$  est encore une gaussienne et vaut, pour tout  $f = (f_{1,k}(x), f_{2,k}(x))_{k \in E_2, x \in E_1} \in \mathcal{H}_{res}$ ,

$$\begin{aligned} S^\beta(f) &:= \int_{\mathcal{H}_{res}} e^{i\langle \phi; f \rangle} d\mu_{res}^\beta(\phi) \\ &= \prod_{x \in E_1} \prod_{k \in E_2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\pi}{\omega_k \beta} e^{i(\omega_k^2 \varphi_k(x) f_{1,k}(x) + \pi_k(x) f_{2,k}(x))} e^{-\frac{1}{2}\beta(\omega_k^2 \varphi_k^2(x) + \pi_k^2(x))} d\varphi_k(x) d\pi_k(x) \\ &= \prod_{x \in E_1} \prod_{k \in E_2} e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1}(\omega_k^2 f_{1,k}(x)^2 + f_{2,k}(x)^2)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1}\|f\|^2}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

On veut étendre cette construction à un nombre infini de diffuseurs, ainsi qu'à un nombre infini de degrés de liberté pour chacun des diffuseurs. Comme l'illustrent les travaux [15, 17], ce passage d'un nombre fini à un nombre infini de degrés de liberté n'est pas trivial. En particulier, la définition de la mesure  $\mu_{res}^\beta$  donnée par l'équation (5.4) n'a plus de sens. On va donc détailler dans ce chapitre les espaces sur lesquels on travaille dans le cas général où le nombre de diffuseurs peut être infini, et décrire ce qu'on entend par réservoir à température positive dans ce cas. Comme la discussion est technique, on détaille un exemple au fur et à mesure de la construction. D'autres exemples sont étudiés dans les sections 5.5 et 5.6.

## 5.2 Modèle à énergie finie

On considère l'opérateur  $\omega$  défini par

$$(\omega f)_k(x) := \omega_k f_k(x), \quad \forall x \in E_1, \forall k \in E_2,$$

pour tout  $f$  dans

$$\mathcal{D}(\omega) := \{f \in L^2(E_1 \times E_2, \mu_1 \times \mu_2; \mathbb{R}) \mid \omega f \in L^2(E_1 \times E_2, \mu_1 \times \mu_2; \mathbb{R})\}.$$

On désigne par  $\Omega$  l'opérateur

$$\Omega := \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

défini sur le domaine

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\phi \in L^2(E_1 \times E_2, \mu_1 \times \mu_2; \mathbb{R}^2) \mid \|\phi\| < \infty\} = \mathcal{D}(\omega) \oplus \mathcal{D}(1),$$

où la norme  $\|\cdot\|$  est définie par

$$\|\phi\|^2 := \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) [\omega_k^2 \varphi_k(x)^2 + \pi_k(x)^2]. \tag{5.6}$$

On travaillera sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{res}$ , défini comme étant l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour cette norme :

$$\mathcal{H}_{res} := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|}. \tag{5.7}$$

Le produit scalaire associé à la norme  $\|\cdot\|$  est noté  $\langle \cdot; \cdot \rangle$ , avec pour tous  $\phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix}$  et  $\phi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \pi' \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{H}_{res}$  :

$$\langle \phi; \phi' \rangle := \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) [\omega_k^2 \varphi_k(x) \varphi'_k(x) + \pi_k(x) \pi'_k(x)]. \tag{5.8}$$

Du Hamiltonien du réservoir

$$H_{res}(\phi) = \frac{1}{2} \|\phi\|^2, \quad (5.9)$$

défini pour tout  $\phi \in \mathcal{H}_{res}$ , dérivent les équations de mouvement Hamiltoniennes formelles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{k,t}(x) &= \pi_{k,t}(x), \\ \dot{\pi}_{k,t}(x) &= -\omega_k^2 \varphi_{k,t}(x), \end{aligned}$$

pour tout  $(x, k) \in E_1 \times E_2$ . On peut réécrire ces équations

$$\dot{\phi}_t = L_{res} \phi_t, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(L_{res}),$$

en introduisant l'opérateur  $L_{res} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ , défini de  $\mathcal{D}(L_{res}) := \mathcal{D}(\omega^2) \oplus \mathcal{D}(\omega)$  dans  $\mathcal{H}_{res}$  par

$$(L_{res}\phi)_k(x) = \begin{pmatrix} \pi_k(x) \\ -\omega_k^2 \varphi_k(x) \end{pmatrix}, \quad \forall (x, k) \in E_1 \times E_2, \quad \forall \phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(L_{res}). \quad (5.10)$$

Une intégration permet d'obtenir l'équation d'évolution du réservoir libre sur  $\mathcal{H}_{res}$  tout entier :

$$\phi_t = e^{tL_{res}} \phi_0 \quad (5.11)$$

où l'opérateur  $e^{tL_{res}}$  est l'opérateur unitaire défini de  $\mathcal{H}_{res}$  dans lui-même par

$$(e^{tL_{res}}\phi)_k(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_k t) & \omega_k^{-1} \sin(\omega_k t) \\ -\omega_k \sin(\omega_k t) & \cos(\omega_k t) \end{pmatrix} \phi_k(x), \quad \forall (x, k) \in E_1 \times E_2, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_{res}.$$

**Exemple 5.1.** Dans le cas où  $n = 1$ , on peut considérer l'exemple de diffuseurs composés chacun d'un nombre dénombrable d'oscillateurs et placés sur un réseau. Par exemple, on peut choisir  $E_1 = E_2 = \mathbb{Z}$ , tous deux munis de la mesure de comptage. Si on choisit les fréquences suivantes

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + 1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

l'espace  $\mathcal{H}_{res}$  est le sous-espace de l'ensemble des suites indexées sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  défini par

$$\mathcal{H}_{res} := \left\{ \phi = \begin{pmatrix} \varphi_k(x) \\ \pi_k(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \left| \|\phi\|^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left( (k^2 + 1) \varphi_k(x)^2 + \pi_k(x)^2 \right) < \infty \right. \right\}$$

et l'évolution libre du réservoir est décrite par l'équation (5.11) avec pour tous  $x \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$(e^{tL_{res}}\phi)_k(x) = \begin{pmatrix} \cos\left((k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} t\right) & (k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \sin\left((k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} t\right) \\ -(k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \sin\left((k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} t\right) & \cos\left((k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} t\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_k(x) \\ \pi_k(x) \end{pmatrix}.$$

Afin d'aider à la compréhension, on développera cet exemple dans toute cette section, au fur et à mesure de la construction des espaces et mesures. C'est un cas particulier d'exemples plus généraux traités dans les sections 5.5 et 5.6.

On décrit maintenant l'interaction entre la particule et le réservoir. Le Hamiltonien  $H$  global est la somme de l'énergie de la particule libre (équation (5.1)), de l'énergie du réservoir libre (équation (5.9)) et du terme d'interaction (équations (5.2) et (5.8)) :

$$\begin{aligned} H(\xi, \phi) &= \frac{|p|^2}{2} - F \cdot q + \frac{1}{2} \|\phi\|^2 + \langle \phi; \alpha(\xi) \rangle \\ &= \frac{|p|^2}{2} - F \cdot q + \frac{1}{2} \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) \left( \omega_k^2 \varphi_k(x)^2 + \pi_k(x)^2 \right) \\ &\quad + \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) \omega_k^2 \rho(x - q) c_k \varphi_k(x), \end{aligned} \quad (5.12)$$

pour tout  $(\xi, \phi) = (q, p, \varphi, \pi) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}$ , où on définit la fonction  $\alpha$  à partir de la fonction  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et des coefficients  $(c_k)_{k \in E_2}$  de la façon suivante :

$$(\alpha(\xi))_k(x) = \rho(x - q) c_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, k) \in E_1 \times E_2. \quad (5.13)$$

On impose la condition suivante sur les  $(c_k)_{k \in E_2}$

$$\int_{E_2} d\mu_2(k) \omega_k^2 c_k^2 < \infty,$$

de sorte que la fonction  $\alpha(\xi)$  et ses dérivées spatiales  $\partial_i \alpha(\xi)$ ,  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , définies par

$$(\partial_i \alpha(\xi))_k(x) := (\partial_i \rho)(x - q) c_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, k) \in E_1 \times E_2, \quad (5.14)$$

soient dans l'espace  $\mathcal{H}_{res}$  défini par l'équation (5.7).

Les équations Hamiltoniennes régissant la dynamique sont par conséquent :

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= p_t, \\ \dot{p}_t &= F + \langle \phi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \\ \dot{\phi}_t &= L_{res}(\phi_t + \alpha(\xi_t)), \end{aligned} \quad (5.15)$$

où  $\langle \phi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^n$  ayant pour  $i$ -ème coordonnée  $\langle \phi_t, \partial_i \alpha(\xi_t) \rangle$ . Elles peuvent se réécrire formellement de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{q}_t = p_t, \\ \dot{p}_t = F + \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) \omega_k^2 c_k \varphi_{k,t}(x) \nabla \rho(x - q_t), \\ \dot{\varphi}_{k,t}(x) = \pi_{k,t}(x), \\ \dot{\pi}_{k,t}(x) = -\omega_k^2 (\varphi_{k,t}(x) + \rho(x - q_t) c_k), \end{cases}$$

pour tous  $(x, k) \in E_1 \times E_2$  et  $t \in \mathbb{R}$ . L'égalité (5.15) implique

$$\frac{d}{dt} (e^{-tL_{res}} \phi_t) = L_{res} e^{-tL_{res}} \alpha(\xi_t).$$

Par une intégration, on obtient alors

$$\phi_t = e^{tL_{res}} \phi_0 + \int_0^t L_{res} e^{(t-\tau)L_{res}} \alpha(\xi_\tau) d\tau,$$

et les équations de mouvement du système sont donc

$$\dot{q}_t = p_t, \quad (5.16)$$

$$\dot{p}_t = F + \langle \phi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \quad (5.17)$$

$$\phi_t = e^{tL_{res}} \phi_0 + \int_0^t L_{res} e^{(t-\tau)L_{res}} \alpha(\xi_\tau) d\tau. \quad (5.18)$$

**Exemple 5.2.** Pour l'exemple 5.1, le terme d'interaction  $\alpha(\xi)$  est

$$(\alpha(\xi))_k(x) = \rho(x - q) c_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Le Hamiltonien est alors

$$H(\xi, \phi) = \frac{1}{2} p^2 - Fq + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left( \omega_k^2 \varphi_k(x)^2 + \pi_k(x)^2 \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \omega_k^2 \rho(x - q) c_k \varphi_k(x),$$

induisant les équations de mouvement :

$$\dot{q}_t = p_t,$$

$$\dot{p}_t = F + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \omega_k^2 \rho'(x - q_t) c_k \varphi_{k,t}(x),$$

$$\phi_{k,t}(x) = (e^{tL_{res}} \phi_0)_k(x) - \int_0^t \rho(x - q_\tau) c_k \omega_k^2 \begin{pmatrix} (k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \sin \left( (k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (t - \tau) \right) \\ \cos \left( (k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (t - \tau) \right) \end{pmatrix} d\tau,$$

pour tous  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

### 5.3 Extension des espaces

On vient de décrire un modèle composé d'une particule et d'une infinité d'oscillateurs à énergie totale finie. Cela implique qu'une large part des oscillateurs doit avoir une énergie négligeable. Afin de pouvoir travailler en équilibre thermique, à température strictement positive, il faut supprimer cette contrainte et s'autoriser à travailler à énergie infinie, on doit donc définir un espace des phases plus gros que l'espace  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}$  construit jusqu'alors. La méthode utilisée pour construire ce nouvel espace est une adaptation de celle décrite dans [42] par V. Jaksic et C.A. Pillet. Dans cet article, la particule étudiée est soumise à un potentiel confinant, et son Hamiltonien est donc borné inférieurement. L'espace des phases est alors construit à partir d'opérateurs de Hilbert-Schmidt vérifiant certaines hypothèses. Dans le modèle étudié ici, la particule est soumise à une force  $F$  constante, et l'hypothèse de confinement n'est plus vérifiée. On peut cependant adopter la même méthode que Jaksic et Pillet, en choisissant des hypothèses adaptées sur les opérateurs considérés.

Comme l'opérateur  $\Omega = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est un isomorphisme unitaire de  $\mathcal{H}_{res}$  dans

$$\mathcal{H} \cong L^2(E_1, d\mu_1(x); \mathbb{R}) \otimes L^2(E_2, d\mu_2(k); \mathbb{R}^2),$$

l'espace  $\mathcal{H}_{res}$  défini par (5.7) vérifie  $\mathcal{H}_{res} \cong L^2(E_1, d\mu_1(x); \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{h}$ , où l'espace de Hilbert  $\mathfrak{h}$  est l'adhérence de

$$\{f \in L^2(E_2, d\mu_2(k); \mathbb{R}^2) \mid \Omega f \in L^2(E_2, d\mu_2(k); \mathbb{R}^2)\}$$

pour la norme

$$\|f\|_{\mathfrak{h}}^2 = \int_{E_2} d\mu_2(k) \left( (\omega_k f_{1,k})^2 + f_{2,k}^2 \right), \quad \forall f = \begin{pmatrix} f_{1,k} \\ f_{2,k} \end{pmatrix}_{k \in E_2} \in \mathfrak{h}, \quad (5.19)$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{h} = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}. \quad (5.20)$$

Dans la suite, on assimilera  $\mathcal{H}_{res}$  à  $L^2(E_1, d\mu_1(x); \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{h}$ . On définit sur  $L^2(E_1, d\mu_1(x); \mathbb{R})$ , respectivement  $\mathfrak{h}$ , des opérateurs  $\Lambda_1$ , respectivement  $\Lambda_2$ , définis positifs, réels et autoadjoints, tels que pour tout  $s > 1$ ,  $\Lambda_1^{-s}$  et  $\Lambda_2^{-s}$  soient des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

**Exemple 5.3.** Dans le cas de l'exemple 5.1, on a

$$\mathcal{H}_{res} \cong \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{h}, \quad \text{avec } \mathfrak{h} := \left\{ f = \begin{pmatrix} f_{1,k} \\ f_{2,k} \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{Z}} \mid \|f\|^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} ((k^2 + 1) f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2) < \infty \right\}.$$

On choisit sur  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  l'opérateur  $\Lambda_1$  défini par

$$(\Lambda_1 u)(x) = (|x| + 1)^{1/2} u(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}).$$

Sur  $\mathfrak{h}$ , on prend un opérateur  $\Lambda_2$  diagonal

$$(\Lambda_2 f)_k = \lambda_k f_k = \begin{pmatrix} \lambda_k f_{1,k} \\ \lambda_k f_{2,k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}, \forall f \in \mathfrak{h},$$

avec des valeurs propres  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  strictement positives et telles que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^{2s} < \infty, \quad \forall s < -1.$$

L'opérateur  $\Lambda$  défini sur  $\mathcal{D}(\Lambda_1) \otimes \mathcal{D}(\Lambda_2) \subset \mathcal{H}_{res}$  par

$$\Lambda = \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$$

est, comme  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , un opérateur défini positif, réel, autoadjoint, et dont les puissances  $\Lambda^{-s}$ ,  $s > 1$ , sont Hilbert-Schmidt. Il est par conséquent diagonalisable dans une base Hilbertienne  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{H}_{res}$  :

$$\Lambda \phi = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j (\phi, e_j) e_j$$

et ses valeurs propres  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sont strictement positives et telles que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j^{-2s}$  est fini pour tout  $s > 1$ . On définit à partir de l'opérateur  $\Lambda$  un ensemble de sous-espaces de  $\mathcal{H}_{res}$

$$\mathcal{H}_{res}^s = [\mathcal{D}(\Lambda^s)]$$

pour tout  $s \geq 0$ , où  $[\mathcal{D}(\Lambda^s)]$  désigne l'adhérence du domaine  $\mathcal{D}(\Lambda^s)$  pour la norme

$$\|f\|_s := \|\Lambda^s f\|.$$

Ce sont des espaces de Hilbert, et on note  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  leurs espaces duaux respectifs. On obtient alors une échelle d'espaces  $(\mathcal{H}_{res}^s)_{s \in \mathbb{R}}$  décroissants

$$\mathcal{H}_{res}^s \subset \mathcal{H}_{res}^t, \quad \forall t < s,$$

dont on note  $\mathcal{N}$  l'intersection, de dual  $\mathcal{N}'$  :

$$\mathcal{N} = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_{res}^s, \quad \mathcal{N}' = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_{res}^s.$$

L'espace  $\mathcal{N}'$  est l'espace des phases du réservoir sur lequel on va travailler dans toute la suite. Il contient  $\mathcal{H}_{res}^0 = \mathcal{H}_{res}$ ; pour les éléments n'appartenant pas à  $\mathcal{H}_{res}$  (typiquement, les éléments de  $\mathcal{H}_{res}^s \setminus \mathcal{H}_{res}$  avec  $s$  négatif), l'énergie du système est infinie.

**Remarque 5.4.** Les vecteurs de la base Hilbertienne  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{H}_{res}$  diagonalisant  $\Lambda$  sont des vecteurs appartenant à  $\mathcal{N}$ . De plus, pour tout  $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j e_j \in \mathcal{H}_{res}$  et tout réel  $s > 0$ ,  $f$  est dans  $\mathcal{H}_{res}^s$  si et seulement si

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j^2 a_j^{2s} < +\infty.$$

Il existe donc un isomorphisme unitaire tel que, pour tout  $s > 0$ , on ait :

$$\mathcal{H}_{res}^s \cong \left\{ (f_j)_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j^2 a_j^{2s} < +\infty \right\} =: h_{res}^s.$$

Le même résultat est vrai pour les espaces duaux  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$ , pour tout  $s > 0$ . En effet,  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  est isomorphe au dual  $h_{res}^{-s}$  de  $h_{res}^s$  :

$$\mathcal{H}_{res}^{-s} \cong h_{res}^{-s} := \left\{ (f_j)_{j \in \mathbb{N}}, \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j^2 a_j^{-2s} < +\infty \right\}. \quad (5.21)$$

On a alors que  $\mathcal{N}$ , respectivement  $\mathcal{N}'$ , est isomorphe à

$$\mathcal{M} := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} h_{res}^s, \quad \text{respectivement } \mathcal{M}' := \bigcup_{s \in \mathbb{R}} h_{res}^s. \quad (5.22)$$

Ce sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  que l'on munit de la norme  $|\cdot|$  et du produit scalaire  $\cdot$  définis par

$$\begin{aligned} |f|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j^2, \quad \forall f \in h_{res}, \\ f_1 \cdot f_2 &= \sum_{j \in \mathbb{N}} f_{1,j} f_{2,j}, \quad \forall f_1 \in h_{res}^{-s}, \forall f_2 \in h_{res}^s, \forall s \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et tout  $f \in h_{res}^s$ , on note

$$\Lambda^s f := \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j^s f_j.$$

Il est nécessaire d'adapter  $\Lambda$  à  $\Omega$ , qui détermine toute la dynamique. On impose par conséquent deux conditions sur  $\Lambda$ . La première est une restriction du choix de  $\Lambda$  de façon à ce que l'évolution libre d'un élément de  $\mathcal{H}_{res}^s$  reste dans  $\mathcal{H}_{res}^s$  pour tout  $s$  réel. Avec  $L_{res}$  défini en (5.10), on suppose :

**Hypothèse 5.5.** Pour tout  $f \in \mathcal{N}$  et tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\|e^{tL_{res}} f\|_s \leq K_s (1 + t^2)^{|s|/2} \|f\|_s, \quad (5.23)$$

$$\|(e^{tL_{res}} - 1) f\|_s \leq K_s (1 + t^2)^{|s|/2} |t|^\alpha \|f\|_{s+\alpha}, \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5.24)$$

Cette hypothèse donne en réalité uniquement une condition sur  $\Lambda_2$ . En effet, en écrivant

$$f = f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{H}_{res} \cong L^2(E_1, \mu_1(x); \mathbb{R}) \times \mathfrak{h},$$

on a  $e^{tL_{res}} f = f_1 \otimes e^{tL_{res}} f_2$  et

$$\begin{aligned} \|e^{tL_{res}} f\|_s &= \|\Lambda_1^s f_1\|_{L_{\mu_1}^2} \|\Lambda_2^s e^{tL_{res}} f_2\|_{\mathfrak{h}}, \\ \|(e^{tL_{res}} - 1) f\|_s &= \|\Lambda_1^s f_1\|_{L_{\mu_1}^2} \|\Lambda_2^s (e^{tL_{res}} - 1) f_2\|_{\mathfrak{h}}. \end{aligned}$$

Les équations (5.23), respectivement (5.24), sont donc équivalentes à

$$\|\Lambda_2^s e^{tL_{res}} f_2\|_{\mathfrak{h}} \leq K_s (1 + t^2)^{|s|/2} \|\Lambda_2^s f_2\|_{\mathfrak{h}},$$

$$\text{respectivement} \quad \|\Lambda_2^s (e^{tL_{res}} - 1) f_2\|_{\mathfrak{h}} \leq K_s (1 + t^2)^{|s|/2} |t|^\alpha \|\Lambda_2^{s+\alpha} f_2\|_{\mathfrak{h}}.$$

**Exemple 5.6.** On montrera dans la section 5.6 (Proposition 5.17) que cette hypothèse est vérifiée dans le cas de l'exemple 5.1 dès que l'opérateur  $\Lambda_2$  de valeurs propres  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  satisfait la condition  $\omega_k = \sqrt{k^2 + 1} \leq \lambda_k, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

L'Hypothèse 5.5 permet en particulier d'étendre l'évolution sur  $\mathcal{H}_{res}$  décrite par l'équation (5.11) à tout l'espace de phase  $\mathcal{N}'$  en définissant  $e^{tL_{res}} \phi$  pour tous  $\phi \in \mathcal{N}'$  et  $t \in \mathbb{R}$  par :

$$\langle e^{tL_{res}} \phi; f \rangle = \langle \phi; e^{-tL_{res}} f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{N}. \quad (5.25)$$

La deuxième condition imposée est une hypothèse sur  $\Lambda_1, \Lambda_2$  et  $(c_k)_{k \in E_2}$  de façon à avoir certaines bonnes propriétés pour le terme d'interaction  $\alpha$ .

**Hypothèse 5.7.** Il existe un réel  $2 < s_c < 3$  tel que, pour tout  $q \in \mathbb{R}^n$ , on ait

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|_{L_{\mu_1}^2} \leq K (1 + |q|)^{ns}, \quad \forall 1 \leq s \leq s_c, \quad (5.26)$$

$$\Lambda_1^s \partial_i \rho(\cdot - q) \in L^2(E_1, \mu_1; \mathbb{R}), \quad \forall q \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall 1 \leq s \leq s_c, \quad (5.27)$$

$$\left\| \Lambda_2^s \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}} < \infty, \quad \left\| \Lambda_2^s \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 c \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}} < \infty, \quad \forall 0 \leq s \leq s_c, \quad (5.28)$$

où on rappelle que la norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{h}}$  est définie par l'équation (5.19). On suppose de plus que pour tout  $x \in E_1$ , l'application  $q \mapsto \Lambda_1^2 \nabla \rho(x - q)$  appartient à  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Les Hypothèses (5.26)-(5.28), ajoutées au fait que les espaces  $\mathcal{H}_{res}^s$  sont décroissants, impliquent le résultat suivant.

**Lemme 5.8.** Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ , les fonctions  $\alpha(\xi)$  (voir l'équation (5.13)) et  $L_{res} \alpha(\xi)$ , ainsi que  $\nabla \alpha(\xi)$  et  $L_{res} \nabla \alpha(\xi)$ , sont dans les espaces  $\mathcal{H}_{res}^s$  pour tout  $s \leq s_c$ . En particulier,  $\alpha(\xi)$  est dans le domaine de  $L_{res}$ . On a de plus

$$\|\alpha(\xi)\|_s \leq K (1 + |q|)^{ns}, \quad \|L_{res} \alpha(\xi)\|_s \leq K (1 + |q|)^{ns}, \quad 1 \leq s \leq s_c.$$

**Exemple 5.9.** Pour l'exemple 5.1, les Hypothèses (5.26) et (5.27) sont montrées dans la section 5.5. L'Hypothèse (5.28) est vérifiée dès que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^{2s} c_k^2 (k^2 + 1) (2 + k^2) < \infty,$$

comme démontré dans la sous-section 5.6.2 (Proposition 5.17). De plus, à  $x \in \mathbb{Z}$  fixé, l'application  $q \mapsto (|x| + 1) \rho'(x - q)$  est dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  puisque  $\rho$  l'est.

## 5.4 Mesures de Gibbs et équilibre thermique du réservoir

On veut étudier le réservoir à température positive, et donc munir l'espace des phases  $\mathcal{N}'$  du réservoir d'une mesure équivalente à la mesure Gaussienne (équation (5.4)) définie dans le cas d'un nombre fini d'oscillateurs. On construit donc une mesure de probabilité  $\mu_{res}^\beta$  ayant la même fonction caractéristique que dans le cas fini

$$S^\beta(f) = e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1}\|f\|^2}, \quad \forall f \in \mathcal{N}. \quad (5.29)$$

On munit pour cela  $\mathcal{N}'$  de la mesure engendrée par les cylindres.

**Définition 5.10.** On appelle tribu engendrée par les cylindres sur  $\mathcal{N}'$  la plus petite tribu pour laquelle les applications  $\phi \mapsto \langle \phi; f \rangle$  définies sur  $\mathcal{N}'$  sont mesurables pour tout  $f \in \mathcal{N}$ .

**Proposition 5.11.** Il existe une unique mesure  $\mu_{res}^\beta$  sur  $\mathcal{N}'$  muni de la tribu engendrée par les cylindres ayant pour fonction caractéristique la fonction  $S^\beta$ . De plus, cette mesure vérifie les propriétés suivantes.

1. Pour tout  $f \in \mathcal{N}$ , l'application  $\phi \mapsto \langle \phi; f \rangle^2$  définie sur  $\mathcal{N}'$  est  $\mu_{res}^\beta$ -intégrable et on a

$$\int_{\mathcal{N}'} \langle \phi; f \rangle^2 d\mu_{res}^\beta(\phi) = \beta^{-1} \|f\|^2.$$

2. Pour  $s > 1$ , on a :

$$\int_{\mathcal{N}'} \|\Lambda^{-s}\phi\|^2 d\mu_{res}^\beta(\phi) < +\infty, \quad (5.30)$$

ce qui implique

$$\mu_{res}^\beta(\mathcal{H}_{res}^{-s}) = 1. \quad (5.31)$$

Les isomorphismes entre  $\mathcal{N}$ , respectivement  $\mathcal{N}'$ , et  $\mathcal{M}$ , respectivement  $\mathcal{M}'$ , détaillées dans la Remarque 5.4 permettent de donner un énoncé équivalent à cette proposition.

**Proposition 5.12.** Il existe une unique mesure  $\nu_{res}^\beta$  sur  $\mathcal{M}'$  muni de la tribu engendrée par les cylindres ayant pour fonction caractéristique la fonction

$$s^\beta : f \in \mathcal{M} \mapsto e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1}|f|^2}. \quad (5.32)$$

De plus, cette mesure vérifie les propriétés suivantes.

1. Pour tout  $f \in \mathcal{M}$ , l'application  $\phi \mapsto (\phi \cdot f)^2$  définie sur  $\mathcal{M}'$  est  $\nu_{res}^\beta$ -intégrable et on a

$$\int_{\mathcal{M}'} (\phi \cdot f)^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \beta^{-1} |f|^2.$$

2. Pour  $s > 1$ , on a :

$$\int_{\mathcal{M}'} \|\Lambda^{-s}\phi\|^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) < +\infty, \quad (5.33)$$

ce qui implique

$$\nu_{res}^\beta(h_{res}^{-s}) = 1, \quad (5.34)$$

où on rappelle que  $h_{res}^{-s}$  est défini par (5.21).

C'est cette dernière proposition que l'on va démontrer. L'existence de la mesure  $\nu_{res}^\beta$  est assurée par une variante du théorème de Minlos, théorème dont on trouve un énoncé standard en particulier dans [77].

**Théorème 5.13** (Minlos). *Une application  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\mathcal{M}'$ , muni de la tribu engendrée par les cylindres notée  $\mathcal{C}$ , si et seulement si elle vérifie :*

1.  $\Phi(0) = 1$ ,
2.  $\Phi$  est de type positif, c'est-à-dire

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}, \forall f_1, \dots, f_N \in \mathcal{M}, \sum_{i,j=1}^N \bar{z}_i z_j \Phi(f_i - f_j) \geq 0,$$

3.  $\Phi$  est continue par rapport à la topologie de Fréchet induite par les normes  $\|\cdot\|_s := \|\Lambda^s \cdot\|$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

De plus, la mesure  $\nu$  est unique.

On va d'abord donner la démonstration de ce théorème, puis celle de la Proposition 5.12.  
*Démonstration du Théorème 5.13.* On démontre d'abord l'implication directe. Si  $\Phi$  est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $(\mathcal{M}', \mathcal{C})$ , alors  $\Phi(0) = \nu(\mathcal{M}') = 1$ . De plus, pour tous  $N \in \mathbb{N}$ ,  $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$  et  $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{M}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \bar{z}_i z_j \Phi(f_i - f_j) &= \int_{\mathcal{M}'} d\nu(\phi) \sum_{i,j=1}^N \bar{z}_i z_j e^{i\phi \cdot (f_i - f_j)} \\ &= \int_{\mathcal{M}'} d\nu(\phi) \left| \sum_{j=1}^N z_j e^{-i\phi \cdot f_j} \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et  $\Phi$  est de type positif. Enfin, par la continuité de l'exponentielle et le théorème de convergence dominée, on obtient la continuité de  $\Phi$ .

Montrons maintenant la réciproque. D'après le théorème de Bochner, dont un énoncé est donné dans [70], pour tout ensemble  $I \subset \mathbb{N}$  fini, il existe une unique mesure de probabilité  $\nu_I$  sur

$$\mathcal{M}_I := \left\{ (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid f_j = 0, \forall n \notin I \right\} \cong \mathbb{R}^I$$

telle que

$$\Phi(f) = \int_{\phi \in \mathcal{M}_I} e^{i \sum_{j \in I} \phi_j f_j} d\nu_I(\phi).$$

L'unicité de ces mesures assure leur consistance. Ainsi, d'après le théorème de Kolmogorov, il existe une unique mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\Phi(f) = \int_{\phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} e^{i\phi \cdot f} d\nu(\phi),$$

où  $\phi \cdot f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \phi_j f_j$  et  $f \in \cup_{\text{card}(I) < \infty} \mathcal{M}_I \subset \mathcal{M}$ . Les espaces  $h_{res}^s$  et  $\mathcal{M}'$  sont donc mesurables. Pour étendre  $\Phi$  à  $\mathcal{M}$ , il ne reste qu'à montrer que  $\nu(\mathcal{M}') = 1$ . On utilise pour cela l'Hypothèse 3 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta_\varepsilon > 0, \|f\|_{s_\varepsilon} \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |\Phi(f) - 1| \leq \varepsilon.$$

Elle implique la minoration suivante :

$$\operatorname{Re}(\Phi(f)) \geq 1 - \varepsilon - 2\delta_\varepsilon^{-2} \|f\|_{s_\varepsilon}^2, \quad \forall f \in \mathbb{R}^N. \quad (5.35)$$

En effet,

- si  $\|f\|_{s_\varepsilon}^2 \leq \delta_\varepsilon^2$ , alors  $|\Phi(f) - 1| \leq \varepsilon$ , et donc  $\operatorname{Re}(\Phi(f)) \geq 1 - \varepsilon$ ,
- si  $\|f\|_{s_\varepsilon}^2 > \delta_\varepsilon^2$ , alors  $|\Phi(f)| \leq \Phi(0) = 1$  et  $\operatorname{Re}(\Phi(f)) \geq -1 \geq 1 - 2\delta_\varepsilon^{-2} \|f\|_{s_\varepsilon}^2$ .

On pose  $l_j = a_j^{-2(2+s_\varepsilon)}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , en rappelant que les  $a_j$  sont les valeurs propres de  $\Lambda$ . Pour tout  $a > 0$  et tout  $N \in \mathbb{N}$ , on définit la mesure  $d\sigma_{a,N}$  sur  $\mathbb{R}^{N+1}$  par

$$d\sigma_{a,N}(\zeta) = \prod_{j=0}^N (2\pi a l_j)^{-1/2} e^{-(2a l_j)^{-1} \zeta_j^2} d\zeta_j.$$

Elle satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\sigma_{a,N}(\zeta) &= 1, \quad \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \zeta_i \zeta_j d\sigma_{a,N}(\zeta) = a l_i \delta_{ij}, \\ \int_{\mathbb{R}^{N+1}} e^{i\zeta \cdot f} d\sigma_{a,N}(\zeta) &= e^{-\frac{1}{2}a \sum_{j=0}^N l_j f_j^2}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}a \sum_{j=0}^N l_j f_j^2} d\nu(f) &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} e^{i\zeta \cdot f} d\sigma_{a,N}(\zeta) d\nu(f) \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} e^{i\zeta \cdot f} d\sigma_{a,N}(\zeta) d\nu(f) \right), \end{aligned}$$

puisque cette intégrale est réelle. En appliquant le théorème de Fubini et en intégrant l'inégalité (5.35), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}a \sum_{j=0}^N l_j f_j^2} d\nu(f) &= \int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\sigma_{a,N}(\zeta) \operatorname{Re}(\Phi(\zeta_0, \dots, \zeta_N, 0, \dots)) \\ &\geq 1 - \varepsilon - 2\delta_\varepsilon^{-2} a \sum_{j=0}^N a_j^{-2s_\varepsilon} l_j \\ &\geq 1 - \varepsilon - 2\delta_\varepsilon^{-2} a \sum_{j=0}^N a_j^{-4}. \end{aligned}$$

Puisque  $\Lambda^{-2}$  est Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j^{-4} = K < +\infty,$$

et en appliquant le théorème de convergence monotone, cette minoration reste vraie lorsque  $N$  tend vers l'infini :

$$\int_{h_{res}^{-2-s_\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}a \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j^{-2(2+s_\varepsilon)} f_j^2} d\nu(f) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}a \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j^{-2(2+s_\varepsilon)} f_j^2} d\nu(f) \geq 1 - \varepsilon - 2\delta_\varepsilon^{-2} a K.$$

En faisant tendre  $a$  vers 0, on obtient :

$$\nu(\mathcal{M}') \geq \nu(h_{res}^{-2-s\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon.$$

On fait alors tendre  $\varepsilon$  vers 0 pour conclure que  $\nu(\mathcal{M}') = 1$ .  $\square$

On termine cette section par la démonstration de la Proposition 5.12, montrant l'existence et quelques propriétés de la mesure de Gibbs sur le réservoir  $\mathcal{M}'$ .

*Démonstration de la Proposition 5.12.* Puisque la fonction  $S^\beta$ , définie par l'équation (5.29), satisfait les conditions (1), (2) et (3) du Théorème 5.13, la mesure  $\nu_{res}^\beta$  sur  $\mathcal{M}'$  existe et est unique. Les propriétés 1 et 2 proviennent du caractère gaussien de cette mesure, de la façon suivante.

Pour les suites  $f \in \mathcal{M}$  n'ayant qu'un nombre fini de composantes non nulles, c'est-à-dire

$$f = (f_0, \dots, f_N, 0, \dots) \in \mathcal{M}_{[0;N]} \subset \mathcal{M},$$

on a par définition de  $\nu_{res}^\beta$

$$e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1} \sum_{j=0}^N f_j^2} = \int_{\mathcal{M}'} e^{i \sum_{j=0}^N \phi_j f_j} d\nu_{res}^\beta(\phi).$$

De plus, la mesure

$$d\nu_N^\beta(\phi) := \prod_{j=0}^N \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} e^{-\frac{\beta\phi_j^2}{2}} d\phi_j$$

construite sur  $\mathcal{M}_{[0;N]}$  par le théorème de Bochner ( $\nu_N^\beta = \nu_{[0;N]}$  dans les notations de la démonstration du Théorème 5.13 de Minlos) vérifie

$$e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1} \sum_{j=0}^N f_j^2} = \int_{\mathcal{M}_{[0;N]}} e^{i \sum_{j=0}^N \phi_j f_j} d\nu_N^\beta(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i \sum_{j=0}^N \phi_j f_j} \prod_{j=0}^N \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} e^{-\frac{\beta\phi_j^2}{2}} d\phi_j.$$

On obtient alors que  $(\phi \cdot f)^2$  est intégrable et que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}'} (\phi \cdot f)^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) &= \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=0}^N \phi_j f_j\right)^2 \prod_{j=0}^N e^{-\frac{1}{2}\beta\phi_j^2} d\phi_j \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \sum_{j=0}^N f_j^2 \int_{\mathbb{R}} \phi_j^2 e^{-\frac{1}{2}\beta\phi_j^2} d\phi_j \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{j=0}^N f_j^2. \end{aligned}$$

Pour une suite quelconque  $f \in \mathcal{M}$ , on utilise la troncature au rang  $N \in \mathbb{N}$ , désignée par  $T_N(f)$  :

$$T_N(f) = (f_0, \dots, f_N, 0, \dots), \quad \forall f = (f_0, \dots, f_j, \dots) \in \mathcal{M}.$$

Comme  $f \in \mathcal{M}$ , on a  $|f|_s^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j^{2s} f_j^2 < \infty$  pour tout  $s$  réel, et en particulier, en  $s = 0$ ,

$$|f|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j^2 < \infty.$$

D'après ce qui précède,  $\phi \cdot T_N(f)$  est de carré  $\nu_{res}^\beta$ -intégrable et

$$\int_{\mathcal{M}'} (\phi \cdot T_N(f))^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \beta^{-1} |T_N(f)|^2 \leq \beta^{-1} |f|^2.$$

De plus, pour tout  $\phi \in \mathcal{M}'$ ,  $\phi \cdot T_N(f)$  tend vers  $\phi \cdot f$  quand  $N$  converge vers l'infini. Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure

$$\int_{\mathcal{M}'} (\phi \cdot f)^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}'} (\phi \cdot T_N(f))^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta^{-1} |T_N(f)|^2 = \beta^{-1} |f|^2,$$

ce qui prouve l'affirmation 1.

En choisissant  $f = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , avec la coordonnée non nulle placée en  $j$ -ème position, on a

$$\int_{\mathcal{M}'} \phi_j^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \int_{\mathcal{M}'} (\phi \cdot f)^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \beta^{-1}.$$

Aussi l'application définie sur  $\mathcal{M}'$  par

$$\phi \mapsto \|\Lambda^{-s} \phi\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \phi_j^2 a_j^{-2s}$$

est  $\nu_{res}^\beta$ -intégrable et on a

$$\int_{\mathcal{M}'} \|\Lambda^{-s} \phi\|^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j^{-2s} \int_{\mathcal{M}'} \phi_j^2 d\nu_{res}^\beta(\phi) = \beta^{-1} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j^{-2s} < +\infty,$$

ce qui termine la démonstration de l'affirmation 2.  $\square$

Les espaces  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$ ,  $s > 1$ , sont donc strictement inclus dans l'espace de phase du réservoir  $\mathcal{N}'$  mais sont de mesure pleine pour la mesure de Gibbs. Cette propriété sera utilisée dans le chapitre 6, où on montrera l'existence, lorsque  $n = 1$ , de solutions globales en temps pour les équations (5.16)-(5.18) pour toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ , pour tout  $1 < s < s_c - 1$ . Le fait que les espaces  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  soient de mesure pleine dans  $\mathcal{N}'$  pour ces valeurs de  $s$  implique l'existence de solutions globales en temps pour les mêmes équations et pour presque toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{N}'$ .

## 5.5 Deux exemples de distributions de diffuseurs

Le modèle introduit dans les sections précédentes a été décrit dans un cadre assez général (voir l'équation (5.12)). On va développer dans cette section et la suivante plusieurs exemples de classes de modèles pour lesquels les Hypothèses 5.5 et 5.7 sont satisfaites. On considère deux possibilités pour l'ensemble des centres des diffuseurs  $E_1$  : on peut placer les oscillateurs sur un réseau de  $\mathbb{R}^n$  ou en chaque point de  $\mathbb{R}^n$ . Pour les bains d'oscillateurs  $E_2$ , on traite dans la section suivante le cas où on ne met qu'un seul oscillateur par site, ainsi que le cas où les diffuseurs sont des membranes dont le support peut être un compact de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ , ou  $\mathbb{R}^d$  tout entier.

### 5.5.1 Réseau

On traite dans ce paragraphe le cas où les diffuseurs sont centrés sur le réseau  $E_1 = \mathbb{Z}^n$ , muni de la mesure de comptage. Le cas d'un réseau quelconque de  $\mathbb{R}^n$  se traiterait de façon similaire, en travaillant avec les vecteurs de la base associée.

L'opérateur  $\Lambda_1$  défini sur l'espace  $\ell^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R})$  par

$$(\Lambda_1 u)(x) := (|x| + 1)^{n/2} u(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}^n, \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}),$$

est un opérateur défini positif, réel et autoadjoint. De plus, ses puissances  $\Lambda_1^{-s}$  sont Hilbert Schmidt pour tout  $s > 1$ . Il existe en effet une constante  $K_n$  strictement positive telle que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(|x| + 1)^{ns}} \leq K_n \left( 1 + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(|y| + 1)^{ns}} \right).$$

En passant en coordonnées polaires dans cette intégrale, on obtient bien

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(|x| + 1)^{ns}} < \infty, \quad \forall s > 1.$$

La fonction  $\alpha$  définissant l'interaction entre la particule et le réservoir s'écrit

$$(\alpha(\xi))_k(x) = \rho(x - q) c_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall k \in E_2, \forall x \in \mathbb{Z}^n.$$

Dans le cadre de cet exemple, la partie de l'Hypothèse 5.7 portant sur  $\Lambda_1$  est satisfaite car on a la proposition suivante.

**Proposition 5.14.** *Pour tout  $s \geq 1$ , on a les majorations*

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|_{\ell^2} \leq K_s (1 + |q|)^{ns}, \quad \|\Lambda_1^s \partial_i \rho(\cdot - q)\|_{\ell^2} \leq K_s (1 + |q|)^{ns}, \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad (5.36)$$

et à  $x \in \mathbb{Z}^n$  fixé, l'application  $q \mapsto \Lambda_1^2 \nabla \rho(x - q) = (|x| + 1)^n \nabla \rho(x - q)$  est dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* Le fait que l'application  $q \mapsto (|x| + 1)^n \nabla \rho(x - q)$  soit dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  vient directement du fait que  $\rho$  l'est aussi. Pour montrer les inégalités de (5.36), on utilise les définitions de  $\Lambda_1$  et  $\rho$ , qui permettent d'écrire

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} (|x| + 1)^{ns} \rho(x - q)^2.$$

Comme  $\rho$  est une fonction à support compact, cette somme est en fait une somme finie et on peut trouver une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|_{\ell^2}^2 &\leq \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \\ |x| \leq C + |q|}} (|x| + 1)^{ns} \rho(x - q)^2 \\ &\leq \|\rho\|_\infty^2 \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \\ |x| \leq C + |q|}} (|q| + C + 1)^{ns} \\ &\leq \|\rho\|_\infty^2 (|q| + C + 1)^{ns} \times 2^n (C + |q|)^n \\ &\leq K (1 + |q|)^{2ns}. \end{aligned}$$

On montre de la même façon

$$\|\Lambda_1^s \partial_i \rho(\cdot - q)\|_{\ell^2}^2 \leq K (1 + |q|)^{2ns}, \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

□

### 5.5.2 Milieu continu

On s'intéresse maintenant au cas où  $E_1$  est l'espace  $\mathbb{R}^n$  tout entier, muni de la tribu des Boréliens et de la mesure de Lebesgue. On prend sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}^n, dx; \mathbb{R})$  une puissance de l'opérateur de l'oscillateur harmonique quantique :

$$(\Lambda_1 u)(x) := \left(-\Delta_x + |x|^2\right)^{n/2} u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{D}(\Lambda_1) \subset L^2(\mathbb{R}^n, dx; \mathbb{R}).$$

L'étude de cet opérateur, faite dans [71] et [70], montre que c'est un opérateur réel, autoadjoint, défini positif, et dont les valeurs propres sont les réels

$$(n + 2 \sum_{i=1}^n r_i)^{n/2}, \quad \text{pour tout } r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n,$$

associées aux vecteurs propres  $\prod_{i=1}^n H_{r_i}(x_i)$ , avec  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $H_i$  la  $i$ -ème fonction de Hermite. L'équivalence des normes en dimension finie assure l'existence d'une constante  $K_n$  strictement positive telle que

$$\sum_{r \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(n + 2 \sum_{i=1}^n r_i)^{ns}} \leq K_n \sum_{r \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(|r| + 1)^{ns}} < \infty$$

pour tout  $s > 1$ , et  $\Lambda_1^{-s}$  est par conséquent Hilbert-Schmidt. De plus, l'oscillateur harmonique satisfait bien l'Hypothèse 5.7.

**Proposition 5.15.** *Pour tous  $0 \leq s \leq 4$  et  $q \in \mathbb{R}^n$ , on a l'inégalité*

$$\left\| \left(-\Delta + |\cdot|^2\right)^{ns/2} \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2} \leq K (1 + |q|)^{ns} \quad (5.37)$$

et à  $x \in \mathbb{R}^n$  fixé, la fonction  $q \mapsto \left(-\Delta_x + |x|^2\right)^n \nabla \rho(x - q)$  est dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* Le caractère  $\mathcal{C}_c^\infty$  de la fonction  $q \mapsto \left(-\Delta_x + |x|^2\right)^n \nabla \rho(x - q)$  vient directement du fait que la fonction  $\rho$  est elle-même dans  $\mathcal{C}_c^\infty$ . L'inégalité (5.37) est facilement vérifiée lorsque le produit  $ns$  est un entier pair :

- Si  $s = 0$ , comme  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $\|\rho(\cdot - q)\|_{L_x^2}$  est borné par le produit de  $\|\rho\|_\infty$  avec la mesure du support de  $\rho$ .
- Lorsque  $ns = 2$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| \left(-\Delta + |\cdot|^2\right) \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2} &= \left\| -(\Delta \rho)(\cdot - q) + (|\cdot - q|^2 + 2q \cdot (\cdot - q) + |q|^2) \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2} \\ &\leq \|\Delta \rho\|_{L_x^2} + \left\| |\cdot|^2 \rho(\cdot) \right\|_{L_x^2} + 2|q| \|\cdot\| \|\rho(\cdot)\|_{L_x^2} + |q|^2 \|\rho(\cdot - q)\|_{L_x^2} \\ &\leq K (1 + |q|^2) \leq K (1 + |q|)^2. \end{aligned}$$

- Lorsque  $ns$  est un entier pair en général, le développement de la puissance entière de l'oscillateur harmonique  $\left(-\Delta_x + |x|^2\right)^{ns/2}$  donne un résultat similaire :

$$\left\| \left(-\Delta + |\cdot|^2\right)^{ns/2} \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2} \leq K (1 + |q|)^{ns}.$$

En particulier, cette inégalité est vraie pour  $ns = 4n$  (i.e.  $s = 4$ ).

On conclut alors en utilisant un théorème d'interpolation.

On cherche en effet à majorer le terme  $\left\| \left( -\Delta_x + |\cdot|^2 \right)^{nz/2} \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2}$  pour tout  $z$  dans la bande

$$S := \{s + i\sigma, s \in [0; 4], \sigma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

Pour cela, on définit pour  $z \in S$  et  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$  la fonction  $f_q$ , linéaire en  $\psi$ , par

$$f_q(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \left( -\Delta_x + |x|^2 \right)^{nz/2} \rho(x - q) dx.$$

En décomposant dans la base de vecteurs propres de l'oscillateur harmonique, on peut trouver une suite de réels  $(\rho_j^q)_{j \in \mathbb{N}^n}$  telle que

$$\rho(x - q) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \rho_j^q H_j(x),$$

où  $H_j(x) = \prod_{i=1}^n H_{j_i}(x_i)$  est la fonction propre de  $\left( -\Delta_x + |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  associée à la valeur propre  $(2|j|_1 + n)^{1/2}$ , et une suite  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}^n}$  telle que

$$\psi(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} \psi_j H_j(x),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . La fonction  $f_q$  peut alors se réécrire

$$f_q(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} (2|j|_1 + n)^{nz/2} \rho_j^q \psi_j.$$

Puisque  $\rho$  et  $\psi$  sont toutes deux dans  $\mathcal{C}_c^\infty$ , on obtient que cette série converge uniformément. La fonction  $f_q$  est donc continue et holomorphe sur  $S$ . De plus, elle est bornée sur  $S$  puisque

$$\begin{aligned} |f_q(s + i\sigma)| &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}^n} (2|j|_1 + n)^{2n} \left| \rho_j^q \right| |\psi_j| \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|\psi\|_{L_x^2}^2 + \left\| \left( -\Delta + |\cdot|^2 \right)^{2n} \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Enfin, il existe une constante  $K_\rho$  telle que

$$|f_q(0 + i\sigma)| \leq K_\rho \|\psi\|_{L^2} \text{ et } |f_q(4 + i\sigma)| \leq K_\rho \|\psi\|_{L^2} (1 + |q|)^{4n}.$$

Aussi, d'après le lemme des trois droites d'Hadamard (voir [5] pour l'énoncé), on obtient

$$|f_q(s + i\sigma)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \left( -\Delta_x + |x|^2 \right)^{nz/2} \rho(x - q) dx \right| \leq K_\rho \|\psi\|_{L^2} (1 + |q|)^{ns}.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tous  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ ,  $s \in [0; 4]$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$ , on conclut que :

$$\left\| \left( -\Delta + |\cdot|^2 \right)^{s/2} \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2} \leq K (1 + |q|)^{ns}, \quad \text{pour tout } s \in [0; 4].$$

Un raisonnement similaire permet de montrer

$$\left\| \left( -\Delta + |\cdot|^2 \right)^{s/2} \partial_i \rho(\cdot - q) \right\|_{L_x^2} \leq K (1 + |q|)^{ns}, \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall s \in [0; 4].$$

□

## 5.6 Exemples de bains d'oscillateurs

Comme l'illustre la section précédente, le modèle décrit dans les sections 5.2 à 5.4 permet une certaine flexibilité dans le choix de la distribution des bains d'oscillateurs. On va maintenant voir que la définition des bains d'oscillateurs est elle aussi assez générale pour couvrir plusieurs exemples traités dans la littérature.

### 5.6.1 Un oscillateur par site : le bain monochromatique

On s'intéresse dans un premier temps au cas où on place un unique oscillateur par site. Ce type de modèle est décrit et étudié dans [23, 22, 49, 76] lorsque les diffuseurs sont distribués sur un réseau en dimension  $n = 1$ . L'ensemble  $E_2$  est dans ce cas un singleton, muni de la mesure de Dirac. Les fonctions ne dépendent alors plus de  $k \in E_2$  et on notera  $\omega = \omega_k > 0$ ,  $\phi_t(x) = \phi_{k,t}(x)$ , etc. Le Hamiltonien du réservoir

$$H_B(\phi) = \frac{1}{2} \int_{E_1} (\omega^2 \varphi(x)^2 + \pi(x)^2) d\mu_1(x)$$

est alors défini sur l'espace  $\mathcal{H}_{res}$ , adhérence de

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{ \phi \in L^2(E_1, \mu_1; \mathbb{R}^2) \left| \|\phi\|^2 := \int_{E_1} (\omega^2 \varphi(x)^2 + \pi(x)^2) d\mu_1(x) < +\infty \right. \right\} = L^2(E_1, \mu_1; \mathbb{R}^2)$$

pour la norme  $\|\cdot\|$ , c'est-à-dire  $\mathcal{H}_{res} = L^2(E_1, \mu_1; \mathbb{R}^2)$ . Le terme d'interaction ne dépend pas non plus de  $k$  et s'écrit

$$\alpha(\xi)(x) = \begin{pmatrix} c\rho(x - q) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $c$  est une constante. Comme  $\mathcal{H}_{res} = L^2(E_1, \mu_1; \mathbb{R}^2) \cong L^2(E_1, \mu_1; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^2$ , on a  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$ , et on choisit pour  $\Lambda_2$  l'opérateur identité  $\mathbb{I}_2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Les Hypothèses 5.5 et 5.7 sont satisfaites puisqu'on a la proposition suivante.

**Proposition 5.16.** *Pour tout  $f \in \mathbb{R}^2$  et tout réel  $t$ , on a*

$$\|e^{tL_{res}} f\|_{\mathfrak{h}} = \|f\|_{\mathfrak{h}}, \quad (5.38)$$

$$\|(e^{tL_{res}} - 1) f\|_{\mathfrak{h}} \leq 2\omega^\alpha |t|^\alpha \|f\|_{\mathfrak{h}}, \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5.39)$$

De plus, l'Hypothèse 5.7 est assurée puisqu'on a

$$\left\| \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}} = \omega^2 c^2 < \infty \quad \text{et} \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 c \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}} = \omega^4 c^2 < \infty.$$

*Démonstration.* Seules les équations (5.38) et (5.39) nécessitent une démonstration. Pour tout  $f \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned} e^{tL_{res}} f &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) f_1 + \omega^{-1} \sin(\omega t) f_2 \\ -\omega \sin(\omega t) f_1 + \cos(\omega t) f_2 \end{pmatrix} & \text{et} \\ (e^{tL_{res}} - 1) f &= \begin{pmatrix} (\cos(\omega t) - 1) f_1 + \omega^{-1} \sin(\omega t) f_2 \\ -\omega \sin(\omega t) f_1 + (\cos(\omega t) - 1) f_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par définition de la norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{h}}$  (équation (5.19)), on obtient donc

$$\begin{aligned}\|e^{tL_{res}} f\|_{\mathfrak{h}}^2 &= \omega^2 \left( \cos(\omega t) f_1 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} f_2 \right)^2 + (-\omega \sin(\omega t) f_1 + \cos(\omega t) f_2)^2 \\ &= \omega^2 f_1^2 + f_2^2 \\ &= \|f\|_{\mathfrak{h}}^2,\end{aligned}$$

et de façon similaire

$$\|(e^{tL_{res}} - 1) f\|_{\mathfrak{h}}^2 = 2(1 - \cos(\omega t)) \|f\|_{\mathfrak{h}}^2.$$

Comme on a l'inégalité

$$1 - \cos(\omega t) \leq \min \left( 2; \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right), \quad \text{et donc} \quad 2(1 - \cos(\omega t)) \leq 4\omega^{2\alpha} t^{2\alpha}, \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (5.40)$$

on conclut :

$$\|(e^{tL_{res}} - 1) f\|_{\mathfrak{h}}^2 \leq 4\omega^{2\alpha} t^{2\alpha} \|f\|_{\mathfrak{h}}^2.$$

□

### 5.6.2 Équation des ondes

On considère maintenant l'exemple où les diffuseurs sont des membranes ayant pour support un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d \in \mathbb{N}^*$ . Les équations de mouvement sont alors

$$\begin{cases} \dot{q}_t = p_t, \\ \dot{p}_t = F + \int_D dy \int_{E_1} d\mu_1(x) \rho(x - q_t) \rho_2(y) \nabla_x \psi_{1,t}(x, y), \\ \dot{\psi}_{1,t}(x, y) = \psi_{2,t}(x, y), \\ \dot{\psi}_{2,t}(x, y) = \Delta_y \psi_{1,t}(x, y) - \rho(x - q_t) \rho_2(y), \quad \forall (x, y) \in E_1 \times D, \end{cases}$$

où  $\rho$  et  $\rho_2$  sont deux fonctions ne dépendant que du rayon de leurs variables et appartiennent à  $\mathcal{C}_c^\infty$ . Ce système d'équations a été étudié à température nulle dans [11]. On considère ici deux choix distincts pour  $D$  :

- soit  $D$  est le compact  $[0; 2\pi]^d$ ,  $\Delta_y$  est alors le Laplacien de Dirichlet et l'hypothèse  $\rho_2 \in \mathcal{C}_c^\infty$  se restreint naturellement à  $\rho_2 \in \mathcal{C}^\infty$ ,
- soit  $D$  est  $\mathbb{R}^d$  tout entier.

Dans les deux cas, le Laplacien se diagonalise et il existe un isomorphisme unitaire

$$U : L^2(D, dy) \rightarrow L^2(E_2, d\mu_2)$$

tel que  $U\psi_1 := \varphi$ ,  $U\psi_2 := \pi$  et

$$(U(-\Delta_y)U^*\varphi)_k = \omega_k^2 \varphi_k, \quad \forall k \in E_2, \quad \forall (\varphi, \pi) \in L^2(E_2, d\mu_2; \mathbb{R}^2).$$

Dans les deux cas considérés pour  $D$ , on a  $\omega_k^2 = |k|^2$ , pour tout  $k \in E_2$ , avec  $E_2 = \mathbb{Z}^d$ , muni de la mesure de comptage, lorsque  $D = [0; 2\pi]^d$  et  $E_2 = \mathbb{R}^d$ , muni de la mesure de Lebesgue, lorsque  $D = \mathbb{R}^d$ . Dans le premier cas, on utilise en fait la décomposition en série de Fourier ; dans le deuxième, c'est la transformée de Fourier qui intervient. L'Exemple 5.1 dérive donc d'un modèle semblable à celui où chaque diffuseur est une corde et à support compact  $[0; 2\pi]$ , en remplaçant le Laplacien de Dirichlet  $\Delta_y$  par  $\Delta_y - 1$ .

Dans les deux cas considérés ici, les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{cases} \dot{q}_t = p_t, \\ \dot{p}_t = F + \int_{E_2} d\mu_2(k) \int_{E_1} d\mu_1(x) \rho(x - q_t) (U\rho_2)_k \nabla_x \varphi_{k,t}(x), \\ \dot{\varphi}_{k,t}(x) = \pi_{k,t}(x), \\ \dot{\pi}_{k,t}(x) = -|k|^2 \varphi_{k,t}(x) - \rho(x - q_t) (U\rho_2)_k, \quad \forall x \in E_1, \forall k \in E_2. \end{cases}$$

En définissant les coefficients  $c_k$  intervenant dans la définition de  $\alpha$  (équation (5.13)) par

$$(U\rho_2)_k = |k|^2 c_k, \quad \forall k \in E_2,$$

on retrouve l'écriture formelle des équations (5.16)-(5.18). On cherche alors des opérateurs  $\Lambda_2$  définis sur l'espace  $\mathfrak{h}$  (équation (5.20)) satisfaisant les Hypothèses 5.5 et 5.7.

On s'intéresse tout d'abord au cas où  $E_2 = \mathbb{Z}^d$ , c'est-à-dire le cas où les membranes sont à support dans  $D = [0; 2\pi]^d$ .

**Proposition 5.17.** *Soit  $\Lambda_2$  un opérateur diagonal défini sur  $\mathfrak{h}$  (voir équation (5.20)) par*

$$\Lambda_2 f = (\lambda_k f_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}, \quad \forall f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \mathfrak{h},$$

où les réels  $\lambda_k$  sont tous strictement positifs et vérifient

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{-2s} < \infty, \quad \forall s > 1.$$

Si, de plus,

$$\lambda_k \geq |k|, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d,$$

l'Hypothèse 5.5 est satisfaite. En particulier, les inégalités suivantes sont vérifiées pour tous  $f \in \cap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(\Lambda_2^s) \subset \mathfrak{h}$ ,  $s$  réel et  $0 \leq \alpha \leq 1$  :

$$\|\Lambda_2^s e^{tL_{res}} f\|_{\mathfrak{h}} = \|\Lambda_2^s f\|_{\mathfrak{h}}, \quad \|\Lambda_2^s (e^{tL_{res}} - 1) f\|_{\mathfrak{h}} \leq 2t^\alpha \|\Lambda_2^{s+\alpha} f\|_{\mathfrak{h}}.$$

L'Hypothèse 5.7, quant à elle, est équivalente à l'existence d'un réel  $s_c > 2$  tel que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s_c} c_k^2 |k|^2 (1 + |k|^2) < +\infty, \quad (5.41)$$

et est satisfaite si il existe un  $j \in \mathbb{N}^*$  et une constante  $C$  tels que  $\lambda_k \leq C(|k|^j + 1)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$ .

*Démonstration.* Pour tous

$$f \in \cap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(\Lambda_2^s) = \left\{ (f_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \mid \forall s \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s} (|k|^2 f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2) < \infty \right\}$$

et tout  $k \in \mathbb{Z}^d$ , on a

$$\begin{aligned} (e^{tL_{res}} f)_k &= \begin{pmatrix} \cos(|k|t) f_{1,k} + |k|^{-1} \sin(|k|t) f_{2,k} \\ -|k| \sin(|k|t) f_{1,k} + \cos(|k|t) f_{2,k} \end{pmatrix}, \\ ((e^{tL_{res}} - 1) f)_k &= \begin{pmatrix} (\cos(|k|t) - 1) f_{1,k} + \frac{\sin(|k|t)}{|k|} f_{2,k} \\ -|k| \sin(|k|t) f_{1,k} + (\cos(|k|t) - 1) f_{2,k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda_2^s e^{tL_{res}} f\|_{\mathfrak{h}}^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s} \left( |k|^2 \left( \cos(|k|t) f_{1,k} + \frac{\sin(|k|t)}{|k|} f_{2,k} \right)^2 + (-|k| \sin(|k|t) f_{1,k} + \cos(|k|t) f_{2,k})^2 \right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s} (|k|^2 f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2) \\
 &= \|\Lambda_2^s f\|_{\mathfrak{h}}^2.
 \end{aligned}$$

Le calcul pour la deuxième inégalité se fait de façon identique, en utilisant en plus l'inégalité (5.40) déjà utilisée dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda_2^s (e^{tL_{res}} - 1) f\|_{\mathfrak{h}}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s} (2 - 2 \cos(|k|t)) (|k|^2 f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2) \\
 &\leq 4t^{2\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s} |k|^{2\alpha} (|k|^2 f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2)
 \end{aligned}$$

Les hypothèses  $0 < \lambda_k$  et  $|k| \leq \lambda_k$  permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda_2^s (e^{tL_{res}} - 1) f\|_{\mathfrak{h}}^2 &\leq 4t^{2\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2(s+\alpha)} (|k|^2 f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2) \\
 &\leq 4t^{2\alpha} \|\Lambda_2^{s+\alpha} f\|_{\mathfrak{h}}^2.
 \end{aligned}$$

Ces deux inégalités impliquent directement l'Hypothèse 5.5.

Les quantités en jeu dans l'Hypothèse 5.7 (équation (5.28)) se réécrivent

$$\begin{aligned}
 \left\| \Lambda_2^s \left( c_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{k \in \mathbb{Z}^d} \right\|_{\mathfrak{h}}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s} c_k^2 |k|^2, \\
 \left\| \Lambda_2^s \left( c_k \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_k^2 \end{pmatrix} \right)_{k \in \mathbb{Z}^d} \right\|_{\mathfrak{h}}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k^{2s} c_k^2 |k|^4,
 \end{aligned}$$

pour tout réel  $s$ . Comme  $\rho_2$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ses coefficients de Fourier  $c_k$  décroissent vers 0 quand  $|k|$  tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance négative de  $|k|$ . Comme la croissance des  $\lambda_k$  est majorée par  $|k|^j$ , ces deux sommes sont finies.  $\square$

Lorsque  $D = E_2 = \mathbb{R}^d$ , on a une construction différente, basée sur les résultats de Lax et Phillips (voir [51]). L'idée est de constater que

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{h} &= \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \int_{\mathbb{R}^d} dk (|k|^2 f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2) < \infty \right\} \\
 &\cong \left\{ f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \sigma^{(d-1)/2} \begin{pmatrix} \sigma f_{1,\sigma e} \\ f_{2,\sigma e} \end{pmatrix} \in L^2 \left( \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{R}^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

en utilisant un changement de variable en coordonnées polaires. À une relation de conjugaison près, on peut donc considérer comme nouvel espace de travail l'espace  $L^2(\mathbb{R}, d\sigma; \mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{S}^{d-1}, d\Omega(e); \mathbb{R}^2)$  sur lequel l'opérateur  $e^{tL_{res}}$  agit simplement comme  $e^{it\sigma} \otimes Id$ .

**Proposition 5.18.** *On a l'isomorphisme unitaire suivant :*

$$\mathfrak{h} \cong \hat{L}^2 \left( \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{R}^2 \right), \quad (5.42)$$

où la notation  $\hat{L}^2$  désigne l'ensemble des fonctions  $L^2 \left( \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{R}^2 \right)$  muni de la relation de conjugaison

$$(f_1 + if_2)(-\sigma, -e) = \overline{(f_1 + if_2)(\sigma, e)} = (f_1 - if_2)(\sigma, e),$$

pour tout  $f = (f_1, f_2) \in \hat{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{R}^2)$ . On définit

$$\Lambda_2 = (-\partial_\sigma^2 + \sigma^2)^{1/2} \otimes \Lambda_0$$

où  $\Lambda_0$  est un opérateur défini positif, autoadjoint, réel défini sur  $L^2(\mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{R}^2)$  dont les puissances  $\Lambda_0^{-s}$  sont Hilbert-Schmidt pour tout  $s > 1$ . L'Hypothèse 5.5 est alors vérifiée.

On suppose de plus la fonction  $c$  invariante par rotation et que pour tout  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ , la fonction  $\sigma \mapsto c_{\sigma e}$  est dans l'espace de Schwartz. L'Hypothèse 5.7 est alors elle aussi satisfaite.

*Démonstration.* Pour obtenir (5.42), il suffit de montrer

$$\mathfrak{h} \cong \hat{L}^2 \left( \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{C} \right).$$

On définit pour cela l'opérateur  $U_2 : \mathfrak{h} \rightarrow \hat{L}^2 \left( \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{C} \right)$  tel que

$$(U_2\phi)(\sigma, e) = -\frac{(i\sigma)^{\frac{d-1}{2}}}{(2S_{d-1})^{\frac{1}{2}}} (i\sigma\varphi_{\sigma e} + \pi_{\sigma e})$$

pour tous  $\phi = (\varphi, \pi) \in \mathfrak{h}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  et  $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ . On désigne ici par  $S_{d-1}$  le volume de la boule unité en dimension  $d-1$ . L'opérateur  $U_2$  est un isomorphisme unitaire.

En effet, c'est une isométrie puisque pour tout  $\phi \in \mathfrak{h}$ ,

$$\begin{aligned} \|U_2\phi\|_{L^2_{d\sigma \times d\Omega(e)}}^2 &= \frac{1}{2S_{d-1}} \int_{\mathbb{R}} d\sigma \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\Omega(e) |\sigma|^{d-1} |i\sigma\varphi_{\sigma e} + \pi_{\sigma e}|^2 \\ &= \frac{1}{2S_{d-1}} \int_{\mathbb{R}} d\sigma \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\Omega(e) |\sigma|^{d-1} (\sigma^2\varphi_{\sigma e}^2 + \pi_{\sigma e}^2). \end{aligned}$$

En remarquant que les fonctions  $\sigma \mapsto \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \varphi_{\sigma e}^2 d\Omega(e)$  et  $\sigma \mapsto \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \pi_{\sigma e}^2 d\Omega(e)$  sont paires, on obtient

$$\begin{aligned} \|U_2\phi\|_{L^2_{d\sigma \times d\Omega(e)}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^+} d\sigma \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{d\Omega(e)}{S_{d-1}} |\sigma|^{d-1} (\sigma^2\varphi_{\sigma e}^2 + \pi_{\sigma e}^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (|k|^2 \varphi_k^2 + \pi_k^2) dk \\ &= \|\phi\|_{\mathfrak{h}}^2. \end{aligned}$$

De plus, l'image de  $U_2$  est dense dans  $\hat{L}^2 \left( \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{C} \right)$  pour la norme  $L^2$ , puisqu'elle contient les fonctions de  $\mathcal{C}_0^\infty \left( \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{C} \right)$  s'annulant sur un voisinage de 0 en  $\sigma$ . En effet, soit  $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty \left( \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{C} \right)$  s'annulant pour des valeurs de  $\sigma$  petites. Alors la fonction

$$(\sigma, e) \mapsto -\frac{(2S_{d-1})^{1/2}}{(i\sigma)^{\frac{d-1}{2}}} \psi(\sigma, e) =: \tilde{\psi}(\sigma, e)$$

s'annule encore pour  $\sigma$  proche de 0 et est aussi dans  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \otimes \mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{R}^2)$ . En définissant les fonctions paires  $\tilde{\psi}_1$  et  $\tilde{\psi}_2$  par

$$\tilde{\psi}_1(\sigma, e) = \frac{\tilde{\psi}(\sigma, e) + \tilde{\psi}(-\sigma, -e)}{2}, \quad \tilde{\psi}_2(\sigma, e) = \frac{\tilde{\psi}(\sigma, e) - \tilde{\psi}(-\sigma, -e)}{2i\sigma}, \quad (\sigma, e) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1},$$

on obtient la décomposition

$$\psi(\sigma, e) = -\frac{(i\sigma)^{\frac{d-1}{2}}}{(2S_{d-1})^{1/2}} \left( \tilde{\psi}_1(\sigma, e) + i\sigma \tilde{\psi}_2(\sigma, e) \right).$$

Comme  $\tilde{\psi}_1$  et  $\tilde{\psi}_2$  sont uniques et paires, on obtient

$$\psi(-\sigma, -e) = -\frac{(i\sigma)^{\frac{d-1}{2}}}{(2S_{d-1})^{1/2}} \left( \tilde{\psi}_1(\sigma, e) - i\sigma \tilde{\psi}_2(\sigma, e) \right).$$

La relation de conjugaison définissant l'espace  $\hat{L}^2$  permet de plus d'écrire

$$\psi(-\sigma, -e) = \overline{\psi}(\sigma, e) = -\frac{(i\sigma)^{\frac{d-1}{2}}}{(2S_{d-1})^{1/2}} \left( \overline{\tilde{\psi}_1}(\sigma, e) - i\sigma \overline{\tilde{\psi}_2}(\sigma, e) \right).$$

En identifiant les deux expressions de  $\psi(-\sigma, -e)$ , on obtient que les fonctions  $\tilde{\psi}_1$  et  $\tilde{\psi}_2$  sont à valeurs réelles. De plus,  $\left\| \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}} = \|\psi\|_{L^2_{d\sigma \times d\Omega(e)}} < \infty$  et  $\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}$  est donc un antécédent de  $\psi$  par  $U_2$ . On en conclut qu'on a bien l'isomorphisme unitaire

$$\mathfrak{h} \cong \hat{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{C}).$$

Puisque  $\hat{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}, d\sigma \times d\Omega(e); \mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}, d\sigma; \mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{S}^{d-1}, d\Omega(e); \mathbb{R}^2)$ , on peut définir  $\Lambda_2 = (-\partial_\sigma^2 + \sigma^2)^{1/2} \otimes \Lambda_0$  sur  $\mathfrak{h}$ , avec  $\Lambda_0$  un opérateur réel, autoadjoint, défini positif et tel que  $\Lambda_0^{-s}$  soit Hilbert-Schmidt pour tout  $s > 1$ , de sorte que  $\Lambda_2$  vérifie les mêmes propriétés. On note  $\mathcal{S}^s$  l'adhérence du domaine de  $(-\partial_\sigma^2 + \sigma^2)^{s/2}$  pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{S}^s} := \left\| (-\partial_\sigma^2 + \sigma^2)^{s/2} f \right\|_{L_\sigma^2}.$$

Il est montré dans [71] que leur intersection est l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}$ . De plus, tous ces espaces  $\mathcal{S}^s$  s'injectent continuellement dans l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'$ . Le théorème d'interpolation complexe (voir [5] pour l'énoncé) aboutit aux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|e^{it\sigma}\|_{\mathcal{S}^s, \mathcal{S}^s} &\leq K_s \langle t \rangle^{|s|}, \\ \|e^{it\sigma} - 1\|_{\mathcal{S}^{s+\alpha}, \mathcal{S}^s} &\leq K_s \langle t \rangle^{|s|} |t|^\alpha, \end{aligned}$$

pour tous  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$ . On en déduit que l'Hypothèse 5.5 est bien vérifiée.

Enfin, comme

$$U_2 \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}(\sigma, e) = -\frac{(i\sigma)^{\frac{d+1}{2}}}{(2S_{d-1})^{1/2}} c_{\sigma e}, \quad U_2 \begin{pmatrix} 0 \\ |\cdot|^2 c \end{pmatrix}(\sigma, e) = -\frac{(i\sigma)^{\frac{d-1}{2}}}{(2S_{d-1})^{1/2}} \sigma^2 c_{\sigma e},$$

l'hypothèse 5.7 est satisfaite, puisque pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\| (-\partial_\sigma^2 + \sigma^2)^{s/2} \sigma^{\frac{d+1}{2}} c_{\sigma e} \right\|_{L_{\sigma, e}^2} < \infty \quad \text{et} \quad \left\| (-\partial_\sigma^2 + \sigma^2)^{s/2} \sigma^{\frac{d+3}{2}} c_{\sigma e} \right\|_{L_{\sigma, e}^2} < \infty.$$

□

## 5.7 Adaptation du modèle à une évolution dans un tore

Le but de cette section est d'adapter le modèle dans le cas où la particule n'évolue plus dans  $\mathbb{R}^n$  mais sur le tore  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ . Le modèle est alors identique à celui décrit sur  $\mathbb{R}$ , aux hypothèses concernant  $E_1$  (Hypothèse 5.7) près. Cette adaptation sera reprise dans le chapitre 7, dans lequel on montre la relation d'Einstein à temps fini (Théorème 7.3) lorsque le système est à l'équilibre thermique à l'état initial et réagit à la force  $F$ . La démonstration de ce théorème nécessite la construction d'une mesure de probabilité invariante sur l'espace des phases. Lorsque les particules évoluent dans  $\mathbb{R}^n$ , on ne peut expliciter une telle mesure, du fait de l'intégration sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier par rapport à la variable de position  $q$ . C'est pourquoi on étudiera dans ce chapitre un modèle dans lequel on force les particules à rester confinées. On décrit ici brièvement ce modèle.

### 5.7.1 Description

On considère une tribu  $\mathcal{F}_1$  et une mesure  $\mu_1$ , non plus sur  $\mathbb{R}^n$  mais sur le tore  $\mathbb{T}^n$ , ainsi qu'un sous-ensemble  $E_1$  de  $\mathbb{T}^n$  tel que  $\mu_1(\mathbb{T}^n \setminus E_1) = 0$ . En chaque point de  $E_1$ , on place encore un bain d'oscillateurs, toujours indexé par l'ensemble  $(E_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ . On veut étudier l'évolution d'un point  $(q, p, \phi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}$ , où  $\mathcal{H}_{res}$  a la même définition que dans le modèle précédent (voir l'équation (5.7)), suivant les équations de mouvement suivantes :

$$\dot{q}_t = p_t, \quad (5.43)$$

$$\dot{p}_t = F + \langle \phi_t, \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \quad (5.44)$$

$$\phi_t = e^{tL_{res}} \phi_0 + \int_0^t L_{res} e^{(t-\tau)L_{res}} \alpha(\xi_\tau) d\tau, \quad (5.45)$$

avec  $\alpha(\xi)$  défini à partir de la fonction  $\rho \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$  par l'équation (5.13).

Afin d'étendre l'espace de travail, on peut encore utiliser la décomposition

$$\mathcal{H}_R \cong L^2(E_1, d\mu_1; \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{h}$$

ainsi que les opérateurs  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  et  $\Lambda$  définis dans la section 5.3, dont les puissances  $-s$ ,  $s > 1$ , sont Hilbert-Schmidt. La construction des espaces  $\mathcal{H}_{res}^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{N} = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_{res}^s$  et  $\mathcal{N}' = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_{res}^s$  est donc inchangée. On peut remarquer que l'espace

$$\mathfrak{h} := \left\{ f = (f_1, f_2) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \|f\|_{\mathfrak{h}}^2 := \int_{E_2} d\mu_2(k) (\omega_k^2 f_{1,k}^2 + f_{2,k}^2) < \infty \right\}$$

est inchangé par rapport au chapitre 5, les conditions sur  $E_2$  n'ayant pas changé. On impose donc toujours l'Hypothèse 5.5, qui ne porte que sur  $\Lambda_2$  et que nous rappelons pour mémoire.

**Hypothèse 5.19.** *Pour tout  $f \in \mathcal{N}$  et tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$\|e^{tL_{res}} f\|_s \leq K_s (1+t^2)^{|s|/2} \|f\|_s, \quad (5.46)$$

$$\|(e^{tL_{res}} - 1) f\|_s \leq K_s (1+t^2)^{|s|/2} |t|^\alpha \|f\|_{s+\alpha}, \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5.47)$$

Par contre, les parties de l'Hypothèse 5.7 concernant  $\Lambda_1$  doivent être légèrement adaptées. En particulier, l'estimation (5.26) n'a plus de sens telle quelle,  $|q|$  étant borné dans le cas présent. La propriété de support compact de  $q \mapsto \Lambda_1^2 \nabla \rho(x - q)$  est quant à elle naturellement supprimée, les intégrations en  $x$  se faisant dorénavant sur le tore.

**Hypothèse 5.20.** *Il existe une constante  $K$  et un réel  $2 < s_c < 3$  tel que, pour tout  $\xi = (q, p)$  dans  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ , on ait*

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|_{L_{\mu_1}^2} \leq K, \quad \|\Lambda_1^s \partial_i \rho(\cdot - q)\|_{L_{\mu_1}^2} \leq K, \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall 1 \leq s \leq s_c, \quad (5.48)$$

$$\left\| \Lambda_2^s \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}} < \infty, \quad \left\| \Lambda_2^s \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 c \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}} < \infty, \quad \forall 0 \leq s \leq s_c. \quad (5.49)$$

On suppose de plus que pour tout  $x \in E_1$ , l'application  $q \mapsto \Lambda_1^2 \nabla \rho(x - q)$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ .

Enfin, la construction de la mesure de Gibbs est identique à celle faite dans la section 5.4, celle-ci ne reposant que sur le caractère de Hilbert-Schmidt des opérateurs  $\Lambda^{-s}$ ,  $s > 1$ .

### 5.7.2 Exemples

On reprend les équivalents des deux exemples traités dans la section 5.5 pour l'ensemble  $E_1$  dans le cas du mouvement dans le tore. Le but est de vérifier qu'ils satisfont la partie de l'Hypothèse 5.20 portant sur  $E_1$ , c'est-à-dire l'inégalité (5.48).

Le premier exemple, où  $E_1 = \mathbb{Z}^n$ , se transpose ici en  $\text{card}(E_1) = 1$ , en considérant  $E_1 = \mathbb{Z}^n \cap [0; 1]^n$ . Il est alors suffisant de prendre l'identité pour l'opérateur  $\Lambda_1$ . Les inégalités (5.48) sont alors satisfaites, la fonction  $\rho$  étant dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ .

Dans le deuxième exemple (sous-section 5.5.2), on place des bains d'oscillateurs en chaque point de l'espace et on choisit donc  $E_1 = \mathbb{T}^n$ , identifié au cube  $[0; 1]^n$  et muni de la mesure de Lebesgue. On se restreint à la dimension  $n = 1$  dans cet exemple afin de simplifier les notations, le raisonnement étant identique en dimension supérieure. Une base de l'espace  $L^2(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^2)$  est la base formée par les fonctions trigonométriques  $x \mapsto 1$ ,  $x \mapsto \cos(2\pi jx)$  et  $x \mapsto \sin(2\pi jx)$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$  :

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(f) \cos(2\pi jx) + b_j(f) \sin(2\pi jx)), \quad \forall x \in \mathbb{T}^1, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}),$$

où les  $a_j(f)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , et les  $b_j(f)$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ , sont les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ . On définit l'opérateur  $\Lambda_1$  suivant :

$$\Lambda_1 f(x) = a_0(f) + \sum_{j=1}^{\infty} j (a_j(f) \cos(2\pi jx) + b_j(f) \sin(2\pi jx)), \quad \forall x \in \mathbb{T}^1, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}).$$

Cet opérateur est bien un opérateur défini positif, réel et autoadjoint dont les puissances  $\Lambda_1^{-s}$  sont Hilbert-Schmidt pour tout  $s > 1$  puisque  $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} j^{-2s} < \infty$  pour de telles valeurs de  $s$ . L'Hypothèse 5.20 est alors satisfaite.

**Proposition 5.21.** *Pour tout réel  $s$ , il existe une constante  $K_s$  telle que, pour tout  $\xi = (q, p)$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , les inégalités*

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|_{L_{\mu_1}^2} \leq K_s, \quad \|\Lambda_1^s \partial_i \rho(\cdot - q)\|_{L_{\mu_1}^2} \leq K_s, \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall 1 \leq s \leq s_c, \quad (5.50)$$

*soient satisfaites.*

*Démonstration.* Pour tout  $s$  réel,

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|^2 = \frac{a_0(\rho(\cdot - q))^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}^*} j^{2s} \left( a_j(\rho(\cdot - q))^2 + b_j(\rho(\cdot - q))^2 \right).$$

Or

$$a_0(\rho(\cdot - q)) = \int_0^1 \rho(x - q) dx = a_0(\rho),$$

$$\begin{aligned} a_j(\rho(\cdot - q)) &= 2 \int_0^1 \rho(x - q) \cos(2\pi jx) dx \\ &= \cos(2\pi jq) a_j(\rho) - \sin(2\pi jq) b_j(\rho) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_j(\rho(\cdot - q)) &= 2 \int_0^1 \rho(x - q) \sin(2\pi jx) dx \\ &= \cos(2\pi jq) b_j(\rho) + \sin(2\pi jq) a_j(\rho), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|^2 = \frac{a_0(\rho)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}^*} j^{2s} (a_j(\rho)^2 + b_j(\rho)^2) = \|\Lambda_1^s \rho\|^2.$$

Le fait que  $\rho$  soit de classe  $\mathcal{C}^\infty$  assure que cette série converge et

$$\|\Lambda_1^s \rho(\cdot - q)\|^2 = \|\Lambda_1^s \rho\|^2 < \infty.$$

De même, en utilisant que, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$$a_0(\rho'(\cdot - q)) = 0, \quad a_j(\rho'(\cdot - q)) = 2\pi j b_j(\rho(\cdot - q)), \quad b_j(\rho'(\cdot - q)) = -2\pi j a_j(\rho(\cdot - q)),$$

on obtient que

$$\|\Lambda_1^s \rho'(\cdot - q)\|^2 < \infty.$$

□



## Chapitre 6

# Théorèmes d'existence et de régularité des solutions globales en temps

On s'intéresse dans ce chapitre à l'existence de solutions  $(\xi_t, \phi_t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N}'$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'$ ) globales en temps pour les équations

$$\dot{q}_t = p_t, \quad (6.1)$$

$$\dot{p}_t = F + \langle \phi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \quad (6.2)$$

$$\phi_t = e^{tL_{res}} \phi_0 + \int_0^t L_{res} e^{(t-\tau)L_{res}} \alpha(\xi_\tau) d\tau, \quad (6.3)$$

dérivées dans le chapitre précédent, avec condition initiale dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N}'$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'$ ). Dans le chapitre 1, la question de l'existence des solutions étudiées n'a pas été évoquée mais est évidemment vérifiée. En effet, l'équation  $\ddot{q}(t) = F(q(t), t)$  admettait des solutions globales en temps pour toute condition initiale, la fonction  $F$  ayant été choisie régulière et uniformément bornée en  $q$  et  $t$ . Ici, par contre, il faut restreindre l'ensemble des conditions initiales pour s'assurer de l'existence globale des solutions. On verra en effet dans une première section qu'en dimension 1, on peut construire un exemple de solution avec condition initiale dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{N}'$  explosant en temps fini, illustrant le fait que toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N}'$  ne permet pas de construire une solution globale en temps. Par contre, on démontrera (sections 6.2 et 6.3) l'existence globale en temps de ces solutions pour toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ), avec  $1 < s \leq s_c - 1$ . On rappelle que ces espaces sont de mesure pleine dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{N}'$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'$ ) pour la mesure de Gibbs  $\mu_{res}^\beta$ , construite sur  $\mathcal{N}'$  par la Proposition 5.11, et que cela implique en particulier l'existence de solutions globales pour presque toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{N}'$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'$ ).

### 6.1 Une trajectoire partant à l'infini en temps fini

On se place, dans cette section, en dimension  $n = 1$ , dans le cas où  $(\xi, \phi)$  évolue dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{N}'$ , et on construit un exemple simple de distribution initiale des oscillateurs pour laquelle une particule accumule, au fur et à mesure des collisions, assez d'énergie pour partir en un temps fini vers l'infini. On se restreint au cas où  $E_1 = \mathbb{Z}$  et  $E_2$  est un singleton. On suppose de plus que la force  $F$  est nulle, que la fréquence des oscillateurs est  $\omega = 1$  et que la fonction  $\rho$  est la fonction plateau sur le segment  $[-1/4; 1/4]$  :  $\rho(z) = 1$  dès que  $|z| \leq 1/4$  et 0 sinon. Il s'agit en fait du système utilisé dans les applications numériques du chapitre 1 et décrit dans la section 1.7,

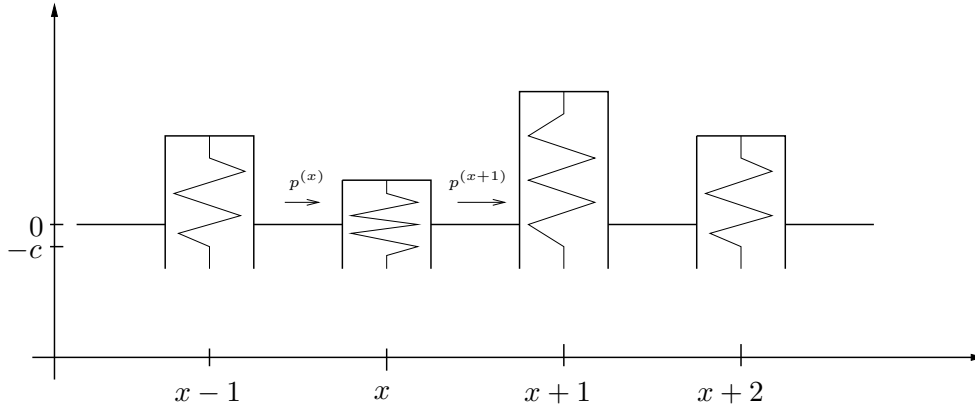


FIG. 6.1 – Illustration schématique du modèle. Une particule est en mouvement sur une ligne, munie périodiquement ( $x \in \mathbb{Z}$ ) d'oscillateurs harmoniques oscillant perpendiculairement à la trajectoire de la particule. Ces oscillateurs ont pour position d'équilibre 0, lors de l'évolution libre. Lors d'une interaction avec la particule ( $q \in [x - 1/4; x + 1/4]$ ), la position d'équilibre est déplacée en  $-c < 0$ . On désigne par  $p^{(x)}$  le moment de la particule lorsqu'elle se situe entre les plots centrés en  $x - 1$  et  $x$ .

dans lequel on considère maintenant une réaction des plots lors du passage de la particule. La fonction  $\rho$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et ce modèle ne rentre pas exactement dans la classe de modèles décrite dans le chapitre précédent. Cependant, les équations de mouvement restent similaires à celles obtenues dans le chapitre précédent et le phénomène décrit ici donne une idée du type de phénomène pouvant empêcher l'existence globale de solution dans les modèles où  $\rho$  est lisse.

À énergie finie, le Hamiltonien du modèle est

$$H(\xi, \phi) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (\varphi(x)^2 + \pi(x)^2) + c \sum_{x \in \mathbb{Z}} \rho(x - q) \varphi(x).$$

On peut, comme expliqué dans la section 1.7, calculer facilement une trajectoire en utilisant la conservation de l'énergie. De l'expression du Hamiltonien, il découle que le moment  $p$  de la particule est constant par morceaux, avec des sauts de vitesses ne se produisant que lorsque la particule se trouve au bord d'un des segments  $[x - 1/4; x + 1/4]$ , avec  $x \in \mathbb{Z}$ . De plus, les oscillateurs harmoniques oscillent autour de la hauteur 0 lorsqu'ils évoluent librement. Lors d'une interaction avec la particule, ils oscillent autour de la hauteur  $-c$  : lorsque la particule se trouve à l'intérieur d'un segment  $[x - 1/4; x + 1/4]$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , le terme d'interaction  $c\rho(x - q)\varphi(x)$  fait baisser la position d'équilibre de l'oscillateur centré en  $x$  en  $-c$ . Une illustration schématique de ce modèle est donnée par la Figure 6.1.

On considère une trajectoire ayant pour condition initiale  $q_0 = 1/4$ ,  $p_0 > 0$  et pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi_0(x)^2 + \pi_0(x)^2 = |x|^{2z}$ , avec  $z > 2$ . On choisira plus loin des valeurs exactes de  $\varphi_0(x)$  et  $\pi_0(x)$  satisfaisant cette condition. En tous cas, quelles que soient ces valeurs,  $(q_0, p_0, \phi_0)$  est une condition initiale dans l'espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  pour tout  $s > 2z + 1$ , puisque pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a (voir sections 5.5.1 et 5.6.1)

$$\mathcal{H}_{res}^{-s} = \left\{ \phi = (\varphi, \pi) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}} (|x| + 1)^{-s} (\varphi(x)^2 + \pi(x)^2) < \infty \right. \right\}.$$

La particule part donc du bord droit de l'oscillateur centré en 0 et se dirige vers la droite, en direction de celui centré en 1. On choisit les conditions initiales  $\varphi_0(1)$  et  $\pi_0(1)$  de façon à ce que, après un temps  $(2p_0)^{-1}$ , à l'instant où la particule atteint le bord gauche de l'oscillateur centré en 1, cet oscillateur ait une hauteur nulle et soit en train de monter :  $\varphi_{(2p_0)^{-1}}(1) = 0$  et  $\pi_{(2p_0)^{-1}}(1) = 1^z > 0$ . Ce choix est possible puisque cet oscillateur a jusqu'alors évolué librement, suivant les équations de mouvement

$$\dot{\varphi}_t(1) = \pi_t(1), \quad \dot{\pi}_t(1) = -\varphi_t(1).$$

La conservation de l'énergie fait que la particule continue alors son mouvement vers la droite sans changer de vitesse ; elle traverse donc la zone d'interaction en un temps  $(2p_0)^{-1}$  et arrive au bord droit  $q = 1 + 1/4$  de l'oscillateur à l'instant  $t = p_0^{-1}$ . La conservation de l'énergie permet alors d'affirmer que la particule ne continue son chemin vers la droite que si

$$\frac{1}{2}p_0^2 + c \sin\left(\frac{1}{2p_0}\right) + c^2 \left(\cos\left(\frac{1}{2p_0}\right) - 1\right) > 0,$$

et l'énergie cinétique  $p^2/2$  à la sortie est alors égale à cette somme. Or il existe une vitesse critique  $p^* > 0$  telle que pour tout  $p \geq p^*$  et tout  $x \in \mathbb{N}^*$ ,

$$2cx^z \sin\left(\frac{1}{2p}\right) + 2c^2 \left(\cos\left(\frac{1}{2p}\right) - 1\right) \geq \frac{cx^z}{2p}.$$

On choisit donc  $p_0 \geq p^*$  de sorte que  $p^2 - p_0^2 \geq c(2p)^{-1}$ . La particule a alors accéléré et continue à se diriger vers la droite, en direction de l'oscillateur suivant, centré en 2.

On procède alors par récurrence, en introduisant les notations  $p^{(1)} = p_0$  et  $t^{(1)} = 0$ . Soit  $x \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la particule arrive en  $q = x - 3/4$  à l'instant  $t^{(x)}$  et avec une vitesse  $p^{(x)} \geq p^*$  ; elle se dirige alors vers l'oscillateur centré en  $x$  et il lui faut un temps  $(2p^{(x)})^{-1}$  pour atteindre le bord gauche de celui-ci. Ce nouvel oscillateur n'ayant pas encore été rencontré, il a évolué librement jusqu'alors et on peut choisir  $\varphi_0(x)$  et  $\pi_0(x)$  de sorte qu'à l'instant  $t = t^{(x)} + (2p^{(x)})^{-1}$ , on ait  $\varphi_t(x) = 0$  et  $\pi_t(x) = x^z > 0$ . Avec cette hypothèse, la particule continue son mouvement vers la droite, toujours avec la vitesse  $p^{(x)}$ , et atteint le bord droit de l'oscillateur à l'instant  $t^{(x+1)} := t^{(x)} + 1/p^{(x)}$ . La conservation de l'énergie permet alors de définir la vitesse  $p^{(x+1)}$  à la sortie du plot par

$$\left(p^{(x+1)}\right)^2 = \left(p^{(x)}\right)^2 + 2cx^z \sin\left(\frac{1}{2p^{(x)}}\right) + 2c^2 \left(\cos\left(\frac{1}{2p^{(x)}}\right) - 1\right),$$

ce qui implique la minoration suivante de la variation d'énergie

$$\left(p^{(x+1)}\right)^2 - \left(p^{(x)}\right)^2 \geq \frac{cx^z}{2p^{(x)}}.$$

La suite  $(p^{(x)})_{x \in \mathbb{N}^*}$  ainsi construite est croissante, à valeurs plus grandes que  $p^*$  et il existe une constante  $K_z > 0$  telle que  $p^{(x)} \geq K_z x^{\frac{1}{3}(z+1)}$ . La suite des instants  $t^{(x)} = \sum_{j=1}^x p^{(j)^{-1}}$  reste borné uniformément en  $x$  puisque  $z > 2$ . La particule part donc à l'infini en un temps  $\lim_{x \rightarrow \infty} t^{(x)}$  fini.

On a donc construit une solution maximale, avec une condition initiale dans un espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  pour un certain  $s > 3$ , qui n'est pas globale en temps. L'explosion qui se produit est liée au fait que l'espace  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  considéré ici permet aux oscillateurs d'avoir des énergies trop grandes : lors des interactions, la particule accélère trop et part très rapidement en l'infini. Pour que la

particule accélère moins, il faut empêcher les oscillateurs d'avoir une énergie trop grande et pour cela, restreindre l'espace des conditions initiales. On verra dans la section 6.3 que dans le cas du mouvement en dimension 1 ou sur le tore, restreindre les conditions initiales à l'espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ) avec  $1 < s \leq s_c - 1$  (où  $s_c$  est défini dans l'Hypothèse 5.7) est suffisant pour assurer l'existence de solutions globales pour toute condition initiale. Le cas du mouvement dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 2$  est plus délicat (voir la Remarque 6.4) et n'est pas résolu ici.

## 6.2 Existence de solutions locales en temps

Avant d'étudier l'existence d'un flot global, on commence par s'intéresser à l'existence de solutions locales en temps. Comme indiqué précédemment, on choisit les conditions initiales non pas dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N}'$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'$ ), mais dans les espaces  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  (respectivement  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ), pour  $1 < s \leq s_c - 1$ . La minoration de  $s$  par 1 assure que les  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  considérés sont de mesure pleine dans  $\mathcal{N}'$  : pour  $s$  plus petit que 1, l'espace  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  est trop petit pour être intéressant. On impose de plus la majoration de  $s$  par  $s_c - 1$  pour pouvoir utiliser l'Hypothèse 5.7. Pour des espaces  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  plus gros ( $s > s_c - 1$ ), on perd le contrôle sur la fonction  $\alpha$  (voir le Lemme 5.8) et les diffuseurs peuvent avoir une énergie très élevée, comme dans l'exemple développé dans la section précédente.

**Théorème 6.1.** *On suppose les Hypothèses 5.5 et 5.7 satisfaites. Alors, pour tout  $1 < s \leq s_c - 1$  et toute dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , les équations Hamiltoniennes (6.1)-(6.3) définissent un flot local  $(\xi_t, \phi_t)$  sur  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$ .*

*Démonstration.* En définissant  $\psi_t := e^{-tL_{res}}\phi_t$ , on peut réécrire le système d'équations (6.1)-(6.3) :

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= p_t, \\ \dot{p}_t &= F + \langle e^{tL_{res}}\psi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \\ \psi_t &= \phi_0 + \int_0^t L_{res} e^{-\tau L_{res}} \alpha(\xi_\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ou encore, puisque d'après le Lemme 5.8,  $L_{res}\alpha(\xi)$  appartient à  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\dot{q}_t = p_t, \tag{6.4}$$

$$\dot{p}_t = F + \langle e^{tL_{res}}\psi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \tag{6.5}$$

$$\dot{\psi}_t = L_{res} e^{-tL_{res}} \alpha(\xi_t), \tag{6.6}$$

avec  $\psi_0 = \phi_0$ . L'opérateur  $e^{-tL_{res}}$  étant un isomorphisme unitaire de  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  dans lui-même, chercher des solutions dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  au système (6.1)-(6.3) est équivalent à chercher des solutions dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  pour ce nouveau système.

On introduit la notation

$$\Theta := \begin{pmatrix} t \\ \xi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ q \\ p \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}. \tag{6.7}$$

Le vecteur

$$\Theta_t = \begin{pmatrix} t \\ \xi_t \\ \psi_t \end{pmatrix}$$

est solution de l'équation différentielle autonome

$$\frac{d\Theta_t}{dt} = X(\Theta_t), \quad (6.8)$$

avec pour tout  $\Theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ,

$$X(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ F + \langle e^{tL_{res}}\psi; \nabla\alpha(\xi) \rangle \\ L_{res}e^{-tL_{res}}\alpha(\xi) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

L'Hypothèse 5.7 et le Lemme 5.8 assurent que le champ de vecteurs  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ . On munit cet espace d'une norme encore notée  $\|\cdot\|_{-s}$  définie par

$$\|\Theta\|_{-s} := |t| + |q| + |p| + \|\psi\|_{-s}, \quad \forall \Theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}. \quad (6.10)$$

Le lemme suivant, démontré en fin de section, permet de conclure.

**Lemme 6.2.** *La fonction  $X$ , définie par (6.9), est localement Lipschitzienne sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ , pour tout  $1 < s \leq s_c - 1$ , c'est-à-dire que pour tout  $\Theta_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ , il existe deux constantes  $a$  et  $K$  strictement positives,  $K$  dépendant de  $a$  et  $\Theta_0$ , telles que pour tous  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  dans le voisinage  $V$  de  $\Theta_0$  défini par*

$$V = \{\Theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}, \|\Theta - \Theta_0\|_{-s} < a\},$$

on ait

$$\|X(\Theta_1) - X(\Theta_2)\|_{-s} \leq K \|\Theta_1 - \Theta_2\|_{-s}.$$

En effet, le théorème de Cauchy-Lipschitz donne alors l'existence, pour toute condition initiale  $\Theta_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ , d'une solution locale pour l'équation (6.8) de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport au temps. On conclut à l'existence locale de solutions  $(\xi_t, \phi_t) = (\xi_t, e^{tL_{res}}\psi_t)$  aux équations (6.1)-(6.3), pour toute condition initiale  $(\xi_0, \phi_0) = (\xi_0, \psi_0) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  en  $t = 0$ .  $\square$

Pour que la preuve du théorème soit complète, il reste à démontrer le Lemme 6.2.

*Démonstration du Lemme 6.2.* Soient  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  appartenant à  $V$ . Comme

$$X(\Theta_1) - X(\Theta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 - p_2 \\ \langle e^{t_1 L_{res}}\psi_1; \nabla\alpha(\xi_1) \rangle - \langle e^{t_2 L_{res}}\psi_2; \nabla\alpha(\xi_2) \rangle \\ L_{res}e^{t_1 L_{res}}\alpha(\xi_1) - L_{res}e^{t_2 L_{res}}\alpha(\xi_2) \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

on a la majoration

$$\|X(\Theta_1) - X(\Theta_2)\|_{-s} \leq |p_1 - p_2| + |\langle (e^{t_1 L_{res}} - e^{t_2 L_{res}})\psi_1; \nabla\alpha(\xi_1) \rangle| \quad (6.12)$$

$$+ |\langle e^{t_2 L_{res}}(\psi_1 - \psi_2); \nabla\alpha(\xi_1) \rangle| \quad (6.13)$$

$$+ |\langle e^{t_2 L_{res}}\psi_2; \nabla(\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2)) \rangle| \quad (6.14)$$

$$+ \|L_{res}(e^{t_1 L_{res}} - e^{t_2 L_{res}})\alpha(\xi_1)\|_{-s} \quad (6.15)$$

$$+ \|L_{res}e^{t_2 L_{res}}(\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|_{-s}. \quad (6.16)$$

On va majorer chacun des termes, un par un, pour conclure.

- Terme (6.12) : Par la définition (5.25), on a

$$\left| \langle (e^{t_1 L_{res}} - e^{t_2 L_{res}}) \psi_1; \nabla \alpha(\xi_1) \rangle \right| = \left| \langle \Lambda^{-s} \psi_1; \Lambda^s e^{-t_2 L_{res}} (e^{(t_2 - t_1) L_{res}} - 1) \nabla \alpha(\xi_1) \rangle \right|,$$

et l'inégalité de Schwarz et l'Hypothèse 5.5 impliquent

$$\begin{aligned} \left| \langle (e^{t_1 L_{res}} - e^{L_{res} t_2}) \psi_1; \nabla \alpha(\xi_1) \rangle \right| &\leq \|\psi_1\|_{-s} \times K \langle t_2 \rangle^{|s|} \langle t_1 - t_2 \rangle^{|s|} |t_1 - t_2| \|\nabla \alpha(\xi_1)\|_{s+1} \\ &\leq K |t_1 - t_2| \|\nabla \alpha(\xi_1)\|_{s+1}, \end{aligned}$$

car  $V$  est borné. Puisque

$$\|\nabla \alpha(\xi_1)\|_{s+1} = \|\Lambda_1^{s+1} \nabla \rho(\cdot - q_1)\|_{L_{\mu_1}^2} \left\| \Lambda_2^{s+1} c(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{h}},$$

on obtient par l'Hypothèse 5.7

$$\|\nabla \alpha(\xi_1)\|_{s+1} \leq K,$$

et on conclut

$$\left| \langle (e^{t_1 L_{res}} - e^{t_2 L_{res}}) \psi_1; \nabla \alpha(\xi_1) \rangle \right| \leq K |t_1 - t_2|.$$

- Terme (6.13) : On utilise la même méthode que pour le terme (6.12) :

$$\begin{aligned} \left| \langle e^{t_2 L_{res}} (\psi_1 - \psi_2); \nabla \alpha(\xi_1) \rangle \right| &= \left| \langle \Lambda^{-s} (\psi_1 - \psi_2); \Lambda^s e^{-t_2 L_{res}} \nabla \alpha(\xi_1) \rangle \right| \\ &\leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{-s} \|e^{-t_2 L_{res}} \nabla \alpha(\xi_1)\|_s \\ &\leq K \|\psi_1 - \psi_2\|_{-s}. \end{aligned}$$

- Terme (6.14) : Un raisonnement similaire aux deux premiers implique

$$\begin{aligned} \left| \langle e^{t_2 L_{res}} \psi_2; \nabla (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2)) \rangle \right| &= \left| \langle \Lambda^{-s} \psi_2; \Lambda^s e^{-t_2 L_{res}} \nabla (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2)) \rangle \right| \\ &\leq K \|\nabla (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|_s. \end{aligned}$$

Par définition de  $s$  et  $s_c$ , on a  $s \leq s_c - 1 < 2 < s_c$ . Puisque les espaces  $\mathcal{H}_{res}^s$  sont décroissants, on a alors

$$\left| \langle e^{t_2 L_{res}} \psi_2; \nabla (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2)) \rangle \right| \leq K \|\nabla (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|_2.$$

De plus, d'après l'Hypothèse 5.7, la fonction  $q \mapsto \Lambda_1^2 \nabla \rho(x - q)$  est une fonction dans  $\mathcal{C}_c^\infty$ ; il existe donc un compact  $B$ , dépendant de  $V$  mais pas de  $q_1$  et  $q_2$ , tel que

$$|\Lambda_1^s (\nabla \rho(x - q_1) - \nabla \rho(x - q_2))| \leq K |q_1 - q_2| \mathbb{1}_B(x).$$

Par conséquent,

$$\|\nabla (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|_2 \leq K |q_1 - q_2|,$$

et on conclut

$$\left| \langle e^{t_2 L_{res}} \psi_2; \nabla (\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2)) \rangle \right| \leq K |q_1 - q_2|.$$

- Terme (6.15) : L'opérateur  $L_{res}$  commute avec les opérateurs  $e^{t_2 L_{res}}$  et  $e^{L_{res}(t_1 - t_2)} - 1$ . Cela permet d'écrire, en utilisant les Hypothèses 5.5 et 5.7,

$$\begin{aligned} \|L_{res} (e^{t_1 L_{res}} - e^{t_2 L_{res}}) \alpha(\xi_1)\|_{-s} &\leq K \langle t_2 \rangle^s \left\| L_{res} (e^{L_{res}(t_1 - t_2)} - 1) \alpha(\xi_1) \right\|_{-s} \\ &\leq K \langle t_2 \rangle^s \langle t_1 - t_2 \rangle^s |t_1 - t_2| \|L_{res} \alpha(\xi_1)\|_{-s+1}. \end{aligned}$$

Comme  $s > 1$ ,  $-s + 1 < 0$  et la décroissance des espaces  $\mathcal{H}_{res}^s$  implique

$$\|L_{res}(e^{t_1 L_{res}} - e^{t_2 L_{res}})\alpha(\xi_1)\|_{-s} \leq K \langle t_2 \rangle^s \langle t_1 - t_2 \rangle^s |t_1 - t_2| \|L_{res}\alpha(\xi_1)\|.$$

Puisque  $V$  est borné, on conclut

$$\|L_{res}(e^{t_1 L_{res}} - e^{t_2 L_{res}})\alpha(\xi_1)\|_{-s} \leq K |t_1 - t_2|.$$

- Terme (6.16) : En faisant commuter  $L_{res}$  et  $e^{t_2 L_{res}}$  et en utilisant l'Hypothèse 5.5, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|L_{res}e^{t_2 L_{res}}(\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|_{-s} &\leq K \|L_{res}(\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|_{-s} \\ &\leq K \|L_{res}(\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|. \end{aligned}$$

De la même façon que pour le terme  $\|\nabla(\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\|_2$  étudié lors de la majoration du terme (6.14), on peut montrer

$$\|L_{res}(\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2))\| \leq K |q_1 - q_2|$$

en utilisant le fait que  $\rho$  est dans  $\mathcal{C}_c^\infty$ , ainsi que l'Hypothèse 5.7.

Tous les termes ont été majorés et la conclusion du lemme suit.  $\square$

Cette démonstration s'adapte au cas où l'évolution de la particule se fait dans un tore décrit dans la section 5.7, en remplaçant l'Hypothèse 5.7 par l'Hypothèse 5.20. On a donc pour ce système aussi existence locale de solutions pour toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ,  $1 < s \leq s_c - 1$ .

### 6.3 Résultat d'existence globale

Une fois l'existence du flot local démontrée, on s'attache à étendre ce flot en un flot global. Il faut pour cela s'assurer que les solutions locales n'explosent pas en temps fini. On démontre ici un résultat d'existence de solutions globales en dimension  $n = 1$ .

**Théorème 6.3.** *On suppose  $n = 1$  et les Hypothèses 5.5 et 5.7 satisfaites. Alors, pour tout  $1 < s \leq s_c - 1$ , les équations Hamiltoniennes (6.1)-(6.3) définissent un flot global  $(\xi_t, \phi_t)$  sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ . De plus,  $t \mapsto (\xi_t, \phi_t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Pour prouver que le flot local, dont l'existence est assurée par le Théorème 6.1, peut être étendu à un flot global, on utilise la conservation de l'énergie de la particule. Elle se traduit par

$$\frac{p_t^2}{2} - \frac{p_0^2}{2} = F(q_t - q_0) - \int_0^t d\tau \left\langle \phi_0 + \int_0^\tau d\tau' L_{res} e^{-\tau' L_{res}} \alpha(\xi_{\tau'}) ; e^{-\tau L_{res}} \frac{d}{d\tau} \alpha(\xi_\tau) \right\rangle. \quad (6.17)$$

On définit la fonction  $\tilde{\phi}_t$  comme suit :

$$\left(\tilde{\phi}_t\right)_k(x) = \int_0^t d\tau e^{-L_B \tau} \frac{d}{d\tau} (\alpha(\xi_\tau))_k(x), \quad \forall (x, k) \in E_1 \times E_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (6.18)$$

Par une intégration par parties dans son intégrale par rapport à  $\tau'$ , l'équation (6.17) devient

$$\begin{aligned} \frac{p_t^2}{2} - \frac{p_0^2}{2} &= F(q_t - q_0) + \int_0^t d\tau \left\langle -\phi_0 + e^{-\tau L_{res}} \alpha(\xi_\tau) - \alpha(\xi_0) - \tilde{\phi}_\tau ; \frac{d}{d\tau} \tilde{\phi}_\tau \right\rangle \\ &= F(q_t - q_0) - \left\langle \phi_0 + \alpha(\xi_0) ; \tilde{\phi}_t \right\rangle - \frac{1}{2} \left( \|\tilde{\phi}_t\|^2 - \|\tilde{\phi}_0\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \|\alpha(\xi_t)\|^2 - \|\alpha(\xi_0)\|^2 \right). \end{aligned}$$

Par définition de  $\tilde{\phi}_t$ , on a  $\tilde{\phi}_0 = 0$ . Donc on a :

$$\frac{p_t^2}{2} - \frac{p_0^2}{2} = F(q_t - q_0) - \langle \phi_0 + \alpha(\xi_0); \tilde{\phi}_t \rangle - \frac{1}{2} \|\tilde{\phi}_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\alpha(\xi_t)\|^2 - \|\alpha(\xi_0)\|^2).$$

L'introduction des fonctions  $\Lambda^s$  dans cette égalité et l'inégalité de Schwarz permettent alors de majorer  $|p_t|^2$  :

$$\begin{aligned} p_t^2 &\leq p_0^2 + 2|F||q_t - q_0| + 2\|\Lambda^{-s}\phi_0\| \|\Lambda^s\tilde{\phi}_t\| + 2\|\alpha(\xi_0)\| \|\tilde{\phi}_t\| - \|\tilde{\phi}_t\|^2 + \|\alpha(\xi_t)\|^2 - \|\alpha(\xi_0)\|^2 \\ &\leq p_0^2 + 2|F||q_t - q_0| + 2\|\Lambda^{-s}\phi_0\| \|\Lambda^s\tilde{\phi}_t\| + \|\alpha(\xi_t)\|^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Par une intégration par parties dans la définition (6.18) de  $\tilde{\phi}_t$ , puis en utilisant la première inégalité de l'Hypothèse 5.5, ainsi que l'Hypothèse 5.7, on majore la norme  $s$  de  $\tilde{\phi}_t$  :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi}_t\|_s &\leq \|e^{-tL_{res}}\alpha(\xi_t)\|_s + \|\alpha(\xi_0)\|_s + \left| \int_0^t \|L_{res}e^{-\tau L_{res}}\alpha(\xi_\tau)\|_s d\tau \right| \\ &\leq K_s \langle t \rangle^s \|\alpha(\xi_t)\|_s + K_s + K_s \left| \int_0^t \langle \tau \rangle^s \|L_{res}\alpha(\xi_\tau)\|_s d\tau \right| \\ &\leq K_s \langle t \rangle^s \langle q_t \rangle^s + K_s + K_s \left| \int_0^t \langle \tau \rangle^s \langle q_\tau \rangle^s d\tau \right| \\ &\leq K \langle t \rangle^{s+1} \left( 1 + \max_{\tau \in [-|t|; |t|]} |q_\tau|^s \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

où on rappelle  $\langle t \rangle = \sqrt{1+t^2}$ . En posant  $h(t) = \max_{\tau \in [-|t|; |t|]} |q_\tau|$  et puisque  $\|\alpha(\xi)\| = \|\alpha(\xi)\|_0$  est borné (Lemme 5.8), on obtient finalement une majoration du carré de la vitesse :

$$\begin{aligned} |p_t|^2 &\leq |p_0|^2 + 4|F|h(t) + K \langle t \rangle^{s+1} (1 + h(t)^s) + K \\ &\leq K \langle t \rangle^{s+1} (1 + h(t)^s), \end{aligned}$$

puisque  $s > 1$ . En passant à la racine, on trouve donc

$$|p_t| \leq K \langle t \rangle^{\frac{s+1}{2}} (1 + h(t)^s)^{1/2} \leq K \langle t \rangle^{\frac{s+1}{2}} (1 + h(t))^{s/2}. \quad (6.21)$$

L'application  $t \mapsto q_t$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $h$  est continue et dérivable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) et pour tout  $T > 0$ , on a :

$$\frac{dh(t)}{dt} \leq |p_t| \leq K \langle t \rangle^{\frac{s+1}{2}} (1 + h(t))^{s/2}, \quad (6.22)$$

pour presque tout  $|t| \leq T$ . L'intégration de  $(1 + h(t))^{-s/2} \dot{h}(t)$  donne

$$\left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-1} \left( (1 + h(t))^{1-s/2} - (1 + |q_0|)^{1-s/2} \right) \leq K \langle T \rangle^{\frac{s+1}{2}} T \quad (6.23)$$

pour tout  $|t| \leq T$ . Puisqu'on s'est restreint aux  $s < 2$ ,  $1 - s/2$  est strictement positif. Aussi  $h(t)$ , ainsi que  $q_t$ , restent bornés tant que  $t < T$ , pour tout  $T$  fini. De l'inégalité (6.21), on déduit qu'alors  $p_t$  reste également borné sur l'intervalle  $[-T, T]$ . Enfin, en utilisant l'égalité (6.3) et les

Hypothèses 5.5 et 5.7, on obtient pour tout  $t \in [-T, T]$

$$\begin{aligned}
 \|\phi_t\|_{-s} &\leq K \langle t \rangle^s \|\phi_0\|_{-s} + K \langle t \rangle^{2s} \left| \int_0^t \|L_{res} \alpha(\xi_\tau)\|_{-s} d\tau \right| \\
 &\leq K \langle T \rangle^s \|\phi_0\|_{-s} + K \langle T \rangle^{2s} \left| \int_0^t \|L_{res} \alpha(\xi_\tau)\|_s d\tau \right| \\
 &\leq K \langle T \rangle^s \|\phi_0\|_{-s} + K \langle T \rangle^{2s} \left| \int_0^t \langle q_\tau \rangle^s d\tau \right| \\
 &\leq K \langle T \rangle^s \|\phi_0\|_{-s} + K \langle T \rangle^{2s} Th(t)^s \\
 &< +\infty.
 \end{aligned}$$

Au final, les solutions des équations Hamiltoniennes (6.1)-(6.3) ne peuvent pas atteindre le bord de l'espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  en un temps fini. On peut donc les étendre à des solutions globales et le théorème est démontré.  $\square$

**Remarques 6.4.** (i) La borne  $s \leq s_c - 1 < 2$ , nécessaire dans la démonstration pour que l'estimation (6.23) implique bien une majoration de  $|q(t)|$ , coïncide avec l'exemple de trajectoire développé dans la section 6.1. En effet, pour un choix trop élevé de  $s$ , une particule peut acquérir assez d'énergie pour partir à l'infini en temps fini, ce qui signifie que les conditions initiales de cette trajectoire ne sont pas associées à une solution globale en temps.

(ii) La démonstration du Théorème 6.3 n'est pas adaptable, telle qu'elle, en dimension plus grande que 1. En effet, en dimension  $n$  quelconque, l'estimation (6.22) devient

$$\frac{dh(t)}{dt} \leq K \langle t \rangle^{\frac{s+1}{2}} (1 + h(t))^{\frac{ns}{2}},$$

qui, une fois intégrée, se réécrit

$$\left(1 - n\frac{s}{2}\right)^{-1} \left((1 + h(t))^{1-ns/2} - (1 + |q_0|)^{1-ns/2}\right) \leq K \langle T \rangle^{\frac{s+1}{2}} T.$$

Cette estimation n'implique une majoration de  $|q(t)|$  que lorsque  $1 - ns/2 > 0$ , c'est-à-dire  $s < 2/n$ . Lorsque  $n \geq 2$ , on n'est donc assuré de l'existence globale des solutions que pour les conditions initiales dans des espaces  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$ , avec  $s < 1$ , qui ne sont plus de mesure pleine.

Lorsque  $s > 1$ , les espaces  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  sont de mesure pleine mais le réservoir peut avoir une énergie plus grande (voir l'Hypothèse 5.7) et peut donc, pour certaines conditions initiales particulières, transmettre trop d'énergie à la particule pour avoir une solution globale en temps, à l'instar du phénomène décrit en dimension 1 dans la section 6.1. Les conditions initiales provoquant des explosions en temps fini semblent néanmoins improbables et l'existence de solutions globales en temps pour presque toute condition initiale dans  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N}'$  et en dimension  $n \geq 2$  pourrait se démontrer par des arguments probabilistes prouvant que l'ensemble des conditions initiales dans  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$ , avec  $s > 1$ , provoquant une explosion est de mesure nulle.

Dans le modèle décrit dans la section 5.7, où la particule évolue sur un tore, l'existence globale des solutions est assurée en toutes dimensions par le même raisonnement que celui utilisé dans le théorème précédent. Ceci est dû au fait que l'Hypothèse 5.20 donne une majoration plus forte sur  $\Lambda_1^s \rho$  que celle donnée par l'Hypothèse 5.7.

**Théorème 6.5.** On se place dans le modèle du tore décrit dans la section 5.7 et on suppose les Hypothèses 5.5 et 5.20 satisfaites. Alors, pour tout  $1 < s \leq s_c - 1$ , les équations Hamiltoniennes (6.1)-(6.3) définissent un flot global  $(\xi_t, \phi_t)$  sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ . De plus,  $t \mapsto (\xi_t, \phi_t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* La démonstration est similaire à celle du Théorème 6.3, et on peut majorer l'énergie cinétique à l'instant  $t$  par

$$|p_t|^2 \leq |p_0|^2 + 2|F| \left| \int_0^t p_\tau d\tau \right| + 2 \|\Lambda^{-s} \phi_0\| \|\Lambda^s \tilde{\phi}_t\| + \|\alpha(\xi_t)\|^2$$

avec  $\|\tilde{\phi}_t\|_s \leq K \langle t \rangle^{s+1}$ . En désignant par

$$h(t) = \max_{\tau \in [-|t|; |t|]} \left| \int_0^\tau p_{\tau'} d\tau' \right|$$

le déplacement maximal sur l'intervalle de temps  $[-|t|; |t|]$ , on obtient

$$\frac{dh(t)}{dt} \leq |p_t| \leq K \langle t \rangle^{(s+1)/2} (1 + h(t))^{1/2}.$$

L'intégration de  $(1 + h(t))^{-1/2} \dot{h}(t)$  donne

$$2 \left( (1 + h(t))^{1/2} - (1 + |q_0|)^{1/2} \right) \leq K \langle T \rangle^{\frac{s+1}{2}} T \quad (6.24)$$

pour tout  $|t| \leq T$ . On conclut alors de la même façon que dans la démonstration du Théorème 6.3.  $\square$

## 6.4 Continuité par rapport à $F$

La fin de ce chapitre est consacrée à l'étude de la régularité des solutions du système par rapport à la force extérieure  $F$ . On ne développera que le cas où les particules évoluent dans  $\mathbb{R}$ , le cas de l'évolution dans un tore étant similaire. Les résultats de cette section et de la suivante sont des adaptations en dimension infinie des théorèmes de régularité de solutions d'équations différentielles ordinaires en dimension finie démontrés dans [68]. La première étape est l'étude de la continuité par rapport à  $F$  des solutions.

**Théorème 6.6.** *Les solutions sont continues par rapport à  $F$ , c'est-à-dire pour tout  $t$  réel et toute condition initiale  $(t_0, \xi_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ,  $1 < s \leq s_c - 1$ , la fonction*

$$F \mapsto (\xi_t^F(t_0, \xi_0, \phi_0), \phi_t^F(t_0, \xi_0, \phi_0))$$

*est continue sur  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Puisqu'on a la décomposition  $(\xi_t^F, \phi_t^F) = (\xi_t^F, e^{tL_{res}} \psi_t^F)$  et que l'opérateur  $e^{tL_{res}}$  ne dépend pas de  $F$ , il suffit de montrer que la fonction  $F \mapsto (\xi_t^F(\Theta_0), \psi_t^F(\Theta_0))$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , pour toute condition initiale  $\Theta_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  avec  $\psi_0 := e^{-t_0 L_{res}} \phi_0$ . On reprend ici la notation  $\Theta = (t, \xi, \psi)$  introduite dans l'équation (6.7).

Soit  $(\Theta_0, F^*)$  une condition initiale dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \times \mathbb{R}$  et soient  $t_1$  et  $t_2$  deux réels vérifiant  $-\infty < t_1 \leq t_0 \leq t_2 < +\infty$ . Pour tous  $a$  et  $b$  strictement positifs, on définit l'ensemble

$$\Pi_{-s} = \left\{ (\Theta, F) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \times \mathbb{R}, t_1 \leq t \leq t_2, \|\Theta - \Theta_t^{F^*}\|_{-s} \leq a, |F - F^*| \leq b \right\}.$$

On rappelle que la norme  $\|\cdot\|_{-s}$  sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  est définie par l'équation (6.10). Les couples  $(\Theta_t^{F^*}, F^*)$  appartiennent à  $\Pi_{-s}$ , pour tout  $t_1 \leq t \leq t_2$ , et  $\Pi_{-s}$  est un cylindre d'axe l'axe du

temps  $t$ . C'est de plus un fermé borné dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \times \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\{\Theta_t^{F^*}, t_1 \leq t \leq t_2\}$  étant lui-même un fermé borné de  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ . Enfin, la continuité de la solution  $t \mapsto \Theta_t^{F^*}$  implique que  $\Pi_{-s}$  est d'intérieur non vide, puisqu'on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que la boule centrée en  $(\Theta_{t_0}^{F^*}, F^*)$  et de rayon  $\varepsilon$  soit incluse dans  $\Pi_{-s}$ .

Soit  $F \in \mathbb{R}$  tel que  $|F - F^*| \leq b$ . On va montrer que pour tout  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $(t, \xi_t^F, \psi_t^F, F)$  appartient aussi à  $\Pi_{-s}$  et qu'il existe une constante  $K$  indépendante de  $F$  et  $F^*$  telle que

$$\left\| (t, \xi_t^F, \psi_t^F) - (t, \xi_t^{F^*}, \psi_t^{F^*}) \right\|_{-s} \leq K |F - F^*|.$$

Tout d'abord,  $(\Theta_{t_0}^F, F) = (\Theta_0, F)$  est un élément de  $\Pi_{-s}$ . Aussi, lorsqu'on fait tendre  $t$  vers  $+\infty$ , le point  $(\Theta_t^F, F)$  quitte  $\Pi_{-s}$  et on note  $r_2$  le premier instant après  $t_0$  auquel le point sort de  $\Pi_{-s}$  :

$$r_2 := \inf \{t \geq t_0 \mid (\Theta_t^F, F) \notin \Pi_{-s}\}.$$

Cela implique en particulier  $t_0 < r_2 \leq t_2$ . Symétriquement, en faisant décroître  $t$  à partir de  $t_0$ , on définit  $t_1 \leq r_1 < t_0$  comme étant le dernier instant où le point  $(\Theta_t^F, F)$  entre dans  $\Pi_{-s}$  avant  $t_0$  :

$$r_1 := \sup \{t \leq t_0 \mid (\Theta_t^F, F) \notin \Pi_{-s}\}.$$

Une intégration de l'équation (6.8), pour tout temps  $t_0 \leq t \leq r_2$ , implique

$$\begin{aligned} \left\| \Theta_t^F - \Theta_t^{F^*} \right\|_{-s} &= \left\| \int_{t_0}^t \left( X^F(\Theta_\tau^F) - X^{F^*}(\Theta_\tau^{F^*}) \right) d\tau \right\|_{-s} \\ &\leq \int_{t_0}^t \left\| X^F(\Theta_\tau^F) - X^F(\Theta_\tau^{F^*}) \right\|_{-s} d\tau + \int_{t_0}^t \left\| X^F(\Theta_\tau^{F^*}) - X^{F^*}(\Theta_\tau^{F^*}) \right\|_{-s} d\tau. \end{aligned}$$

D'après la définition de  $X^F$ , donnée par l'équation (6.9), on a

$$X^F(\Theta_\tau^{F^*}) - X^{F^*}(\Theta_\tau^{F^*}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F - F^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme l'opérateur  $X^F$  est localement lipschitzien (Lemme 6.2), on obtient l'inégalité :

$$\left\| \Theta_t^F - \Theta_t^{F^*} \right\|_{-s} \leq K \int_{t_0}^t \left\| \Theta_\tau^F - \Theta_\tau^{F^*} \right\|_{-s} d\tau + (t_2 - t_1) |F - F^*|, \quad (6.25)$$

ce qui permet d'appliquer le lemme de Gronwall :

$$\begin{aligned} \left\| \Theta_t^F - \Theta_t^{F^*} \right\|_{-s} &\leq (t_2 - t_1) |F - F^*| e^{K(t-t_0)} \\ &\leq K_2 |F - F^*|. \end{aligned}$$

En restreignant le choix de  $F$  à  $|F - F^*| < \min(a/K_2, b)$ , on conclut que  $r_2 = t_2$  et que pour tout  $t$  dans  $[t_0, t_2]$ , on a

$$\left\| \Theta_t^F - \Theta_t^{F^*} \right\|_{-s} \leq K_2 |F - F^*|.$$

On traite de la même façon le cas des temps antérieurs à  $t_0$  pour trouver  $r_1 = t_1$  et l'existence d'une constante  $K_1$  telle que pour tout  $t \in [t_1, t_0]$  et tout  $F$  vérifiant  $|F - F^*| < \min(a/K_1, b)$ , on ait

$$\left\| \Theta_t^F - \Theta_t^{F^*} \right\|_{-s} \leq K_1 |F - F^*|.$$

Finalement, on peut trouver deux constantes  $K$  et  $K'$  strictement positives telles que pour tout  $t \in [t_1; t_2]$  et pour tous  $F$  et  $F^*$  avec  $|F - F^*| < K'$ , on ait

$$\left\| \Theta_t^F - \Theta_t^{F^*} \right\|_{-s} \leq K |F - F^*|.$$

D'où la continuité par rapport à  $F$ . □

## 6.5 Dérivabilité par rapport à $F$

Une fois la continuité démontrée, on s'intéresse à la dérivabilité de  $(\xi_t^F, \phi_t^F)$  par rapport à  $F$ . On ne traitera ici que le cas où  $(\xi, \phi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ,  $1 < s \leq s_c - 1$ , le cas où l'évolution des particules se passe dans le tore se traitant de façon similaire.

**Théorème 6.7.** *On considère  $n = 1$ . Pour tout instant  $t \in \mathbb{R}$  et toute condition initiale  $(t_0, \xi_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ,  $1 < s \leq s_c - 1$ , la fonction*

$$F \mapsto (\xi_t^F(t_0, \xi_0, \phi_0), \phi_t^F(t_0, \xi_0, \phi_0))$$

*est de classe  $\mathcal{C}^1$ .*

*Démonstration.* Pour montrer la dérivabilité de  $\Theta_t^F$  par rapport à  $F$ , on étudie les taux d'accroissement, définis pour  $F \neq F^*$  par

$$\Psi(t, F, F^*) = \frac{\Theta_t^F - \Theta_t^{F^*}}{F - F^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_1(t, F, F^*) \\ \Psi_2(t, F, F^*) \\ \Psi_3(t, F, F^*) \end{pmatrix},$$

où  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont à valeurs réelles et  $\Psi_3$  est à valeurs dans  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$ . D'après le Théorème 6.3,  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$ . En utilisant l'équation (6.8), on obtient que sa dérivée temporelle vaut :

$$\dot{\Psi}(t, F, F^*) = \frac{X^F(\Theta_t^F) - X^{F^*}(\Theta_t^{F^*})}{F - F^*}.$$

La définition de  $X^F$  et  $X^{F^*}$ , donnée par l'équation (6.9), permet d'écrire

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1(t, F, F^*) &= \Psi_2(t, F, F^*), \\ \dot{\Psi}_2(t, F, F^*) &= 1 + \frac{(e^{tL_{res}}\psi_t^F; \alpha'(\xi_t^F)) - (e^{tL_{res}}\psi_t^{F^*}; \alpha'(\xi_t^{F^*}))}{F - F^*}, \\ \dot{\Psi}_3(t, F, F^*) &= L_{res}e^{tL_{res}} \frac{\alpha(\xi_t^F) - \alpha(\xi_t^{F^*})}{F - F^*}, \end{aligned}$$

pour tout  $(t, F, F^*) \in \mathbb{R}^3$ ,  $F \neq F^*$ , et où  $\alpha'(\xi)(x, y) = \rho'(x - q)c(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D'après le lemme d'Hadamard, il existe des fonctions  $h$  et  $h'$  définies sur  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}_c^\infty$  par rapport à leurs deux variables, telles que

$$\begin{aligned} \rho(x - q_t^F) - \rho(x - q_t^{F^*}) &= h(x - q_t^F, x - q_t^{F^*}) (q_t^F - q_t^{F^*}), \\ \rho'(x - q_t^F) - \rho'(x - q_t^{F^*}) &= h'(x - q_t^F, x - q_t^{F^*}) (q_t^F - q_t^{F^*}). \end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont continues par rapport à  $(t, F, F^*)$  (puisque  $q_t^F$  et  $q_t^{F^*}$  le sont), de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$  et satisfont pour tout  $q \in \mathbb{R}$

$$h(x - q, x - q) = \rho'(x - q) \quad h'(x - q, x - q) = \rho''(x - q).$$

En définissant les fonctions  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}'$  par

$$\tilde{h}(t, F, F^*)_k(x) := h\left(x - q_t^F, x - q_t^{F^*}\right) c_k\left(\frac{1}{0}\right),$$

$$\tilde{h}'(t, F, F^*)_k(x) := h'\left(x - q_t^F, x - q_t^{F^*}\right) c_k\left(\frac{1}{0}\right),$$

pour tout  $x \in E_1$  et tout  $k \in E_2$ , on réécrit le système dont  $\Psi$  est solution :

$$\dot{\Psi}_1 = \Psi_2, \tag{6.26}$$

$$\dot{\Psi}_2 = 1 + \langle e^{tL_{res}} \Psi_3; \alpha'(\xi_t^F) \rangle + \Psi_1 \left\langle e^{tL_{res}} \phi_t^{F^*}; \tilde{h}'(t, F, F^*) \right\rangle, \tag{6.27}$$

$$\dot{\Psi}_3 = \Psi_1 L_{res} e^{tL_{res}} \tilde{h}(t, F, F^*), \tag{6.28}$$

que l'on réécrira pour simplifier

$$\dot{\Psi}(t, F, F^*) = Y(t, F, F^*) (\Psi(t, F, F^*)),$$

avec pour condition initiale  $\Psi(0, F, F^*) = 0$ . Le lemme suivant permet de conclure.

**Lemme 6.8.** *Pour tout  $\Theta_0 \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  et tout couple  $(F, F^*) \in \mathbb{R}^2$ , l'équation différentielle*

$$\dot{\chi}(t, F, F^*) = Y(t, F, F^*) (\chi(t, F, F^*))$$

*admet une solution globale en temps avec condition initiale nulle et l'application  $(t, F, F^*) \mapsto \chi(t, F, F^*)$  est continue sur  $\mathbb{R}^3$ .*

En effet, on obtient

$$\partial_F \Theta_t^F|_{F=F_1} = \lim_{F_2 \rightarrow F_1} \Psi(t, F_1, F_2) = \lim_{F_2 \rightarrow F_1} \chi(t, F_1, F_2) = \chi(t, F_1, F_1),$$

où, d'après le lemme,  $\chi(t, F_1, F_1)$  est défini pour tout  $t$  et  $F_1$  réels, et est continu par rapport à ces deux variables. On en conclut que  $\partial_F \Theta_t^F$  est lui aussi défini et continu, et le théorème est démontré.  $\square$

Reste à démontrer le Lemme 6.8.

*Démonstration du Lemme 6.8.* On réécrit les équations (6.26)-(6.28) satisfaites par

$$\chi = (0, \chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s} :$$

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2 \tag{6.29}$$

$$\dot{\chi}_2 = 1 + \langle e^{tL_{res}} \chi_3; \alpha'(\xi_t^F) \rangle + \left\langle e^{tL_{res}} \phi_t^{F^*}; \tilde{h}'(t, F, F^*) \right\rangle \chi_1 \tag{6.30}$$

$$\dot{\chi}_3 = L_{res} e^{tL_{res}} \tilde{h}(t, F, F^*) \chi_1. \tag{6.31}$$

On sait que les fonctions  $(t, F) \mapsto \alpha'(\xi_t^F)$  et  $(t, F, F^*) \mapsto \left\langle e^{tL_{res}} \phi_t^{F^*}; \tilde{h}'(t, F, F^*) \right\rangle$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$  et continues par rapport à  $F$  et  $F^*$ , d'après le Théorème

6.6 et l'Hypothèse 5.5. Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que ce système admet pour tous paramètres  $F$  et  $F^*$  des solutions globales, continues par rapport à ces deux paramètres. On va donc naturellement décomposer la preuve en trois étapes : d'abord l'existence d'un flot local, qu'on étendra ensuite en un flot global, et enfin la continuité. Les raisonnements sont identiques à ceux utilisés dans la démonstration des Théorèmes 6.1, 6.3 et 6.6.

1. *Existence de solutions locales* : Il suffit de prouver que  $Y(\cdot, F, F^*)$  est localement lipschitzien. On utilise pour cela des majorations similaires à celles développées dans la preuve du Lemme 6.2.

Soient  $(t, \chi)$  un point de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  et  $(\tilde{t}, \tilde{\chi})$  dans un voisinage borné de  $(t, \chi)$ . Alors

$$\begin{aligned} & \|Y(t, F, F^*)(\chi) - Y(\tilde{t}, F, F^*)(\tilde{\chi})\|_{-s} \\ & \leq |\chi_2 - \tilde{\chi}_2| + \left| \left\langle e^{tL_{res}} \chi_3; \alpha'(\xi_t^F) \right\rangle - \left\langle e^{\tilde{t}L_{res}} \tilde{\chi}_3; \alpha'(\xi_{\tilde{t}}^F) \right\rangle \right| \\ & \quad + \left| \left\langle e^{tL_{res}} \phi_t^{F^*}; \tilde{h}'(t, F, F^*) \right\rangle \chi_1 - \left\langle e^{\tilde{t}L_{res}} \phi_{\tilde{t}}^{F^*}; \tilde{h}'(\tilde{t}, F, F^*) \right\rangle \tilde{\chi}_1 \right| \\ & \quad + \left\| L_{res} e^{tL_{res}} \tilde{h}(t, F, F^*) \chi_1 - L_{res} e^{\tilde{t}L_{res}} \tilde{h}(\tilde{t}, F, F^*) \tilde{\chi}_1 \right\|_{-s} \\ & \leq K (\beta(t - \tilde{t}) + \|\chi - \tilde{\chi}\|_{-s}), \end{aligned}$$

où  $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction continue et croissante telle que  $\beta(0) = 0$ .

2. *Passage du local au global* :

Soit  $T$  une constante strictement positive. Pour tout  $t$  dans  $[-T, T]$ , on peut borner  $\|\chi(t, F, F^*)\|_{-s}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|\chi(t, F, F^*)\|_{-s} & \leq \|\chi(0, F, F^*)\|_{-s} + \|\chi(t, F, F^*) - \chi(0, F, F^*)\|_{-s} \\ & \leq \|\chi(0, F, F^*)\|_{-s} + \left| \int_0^t \|Y(\tau, F, F^*)(\chi(\tau, F, F^*))\|_{-s} d\tau \right| \\ & \leq \|\chi(0, F, F^*)\|_{-s} + \left| \int_0^t (1 + K \|\chi(\tau, F, F^*)\|_{-s}) d\tau \right| \\ & \leq \|\chi(0, F, F^*)\|_{-s} + T + K \left| \int_0^t \|\chi(\tau, F, F^*)\|_{-s} d\tau \right|. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve que  $\|\chi(t, F, F^*)\|_{-s}$  reste borné sur  $[-T, T]$ , et que les solutions peuvent être étendues à  $t \in \mathbb{R}$ .

3. *Les solutions sont continues par rapport à  $(F, F^*)$*  :

Soient  $(F_1, F_1^*)$  et  $(F_2, F_2^*)$  deux couples de réels. On a la majoration

$$\begin{aligned} & \|\chi(t, F_1, F_1^*) - \chi(t, F_2, F_2^*)\|_{-s} \\ & \leq \left| \int_0^t \|Y(\tau, F_1, F_1^*)(\chi(\tau, F_1, F_1^*)) - Y(\tau, F_2, F_2^*)(\chi(\tau, F_2, F_2^*))\|_{-s} d\tau \right| \\ & \leq \left| \int_0^t \|Y(\tau, F_1, F_1^*)(\chi(\tau, F_1, F_1^*)) - Y(\tau, F_1, F_1^*)(\chi(\tau, F_2, F_2^*))\|_{-s} d\tau \right| \\ & \quad + \left| \int_0^t \|Y(\tau, F_1, F_1^*)(\chi(\tau, F_2, F_2^*)) - Y(\tau, F_2, F_2^*)(\chi(\tau, F_2, F_2^*))\|_{-s} d\tau \right| \\ & \leq K \left| \int_0^t \|\chi(\tau, F_1, F_1^*) - \chi(\tau, F_2, F_2^*)\|_{-s} d\tau \right| + \gamma(|F_1 - F_1^*|, |F_2 - F_2^*|), \end{aligned}$$

où  $\gamma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction continue et croissante par rapport à chacune de ses variables, avec  $\gamma(0, 0) = 0$ . De même que dans la démonstration du Théorème 6.6, le lemme de Gronwall permet alors de conclure sur la continuité de  $\chi$  par rapport à  $(F, F^*)$ .

□



## Chapitre 7

# Un théorème de fluctuation-dissipation

### 7.1 Introduction

Les théorèmes de fluctuation dissipation sont bien connus en physique, dans divers contextes. Ils permettent en principe de prédire le comportement d'un système proche d'équilibre à partir de ses fluctuations à l'équilibre thermique [47, 48]. Un exemple d'un tel résultat est la relation d'Einstein

$$m = \beta D,$$

entre la mobilité  $m$ , la constante de diffusion  $D$  et la température inverse  $\beta$ . On s'attend à ce que cette égalité soit vérifiée pour des électrons ayant un mouvement Brownien avec constante de diffusion  $D$  à l'état d'équilibre thermodynamique et à température inverse  $\beta$ . Elle exprime très précisément la réaction de ces électrons à une petite force extérieure  $F$  de la façon suivante : la mobilité  $m$ , définie comme étant le quotient de la vitesse de dérive, produite par la force extérieure  $F$ , par la force  $F$  elle-même, est le produit de la température inverse  $\beta$  avec la constante de diffusion  $D$  des électrons en l'absence de la force extérieure ( $F = 0$ ).

Comme annoncé dans l'introduction de cette thèse, un problème en physique mathématique est d'établir ce type d'équation rigoureusement dans des modèles où la dynamique microscopique des électrons est décrite de façon hamiltonienne. Il s'agit d'un problème difficile. La définition naturelle de la mobilité est

$$m := \left( \partial_F \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle q_t^F - q \rangle}{t} \right)_{|F=0},$$

où on désigne par  $\langle \cdot \rangle$  l'intégrale par rapport à la mesure définissant l'état d'équilibre thermique, lorsque  $F = 0$ . Donc lorsqu'elle existe, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle q_t^F - q \rangle}{t} = mF + O(|F|^2),$$

ce qui signifie que le courant est proportionnel au champ  $F$  appliqué. L'existence de  $m$  et la relation d'Einstein sont par exemple démontrées dans [19] pour les gaz de Lorentz durs et élastiques, munis d'un thermostat de Gauss.

Dans [49], par contre, est étudié un modèle hamiltonien

$$H(q, p, \phi) = \frac{1}{2}p^2 - Fq + \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (\pi(x)^2 + \omega^2 \varphi(x)^2) + c \sum_{x \in \mathbb{Z}} \varphi(x) \rho(q - ax),$$

cas particulier du modèle décrit dans le chapitre 5 où les particules évoluent dans  $\mathbb{R}$  et où les diffuseurs sont placés sur le réseau  $E_1 = a\mathbb{Z}$  et sont composés d'un unique oscillateur ( $E_2$  est un singleton) de fréquence  $\omega$ . Dans ce modèle, P. Lafitte, S. De Bièvre et P.E. Parris montrent que la mobilité ainsi définie ne peut exister. En revanche, ils obtiennent numériquement puis par un argument formel, en utilisant la théorie de la réponse linéaire (voir [48]), une relation d'Einstein à temps fini sous la forme

$$m_F(t) = \beta D(t) + O_t(F), \quad (7.1)$$

avec

$$m_F(t) := \frac{\langle q_t^F - q \rangle}{tF}, \quad D(t) := \frac{1}{2t} \langle (q_t^0 - q)^2 \rangle.$$

Dans la suite du chapitre, nous rendrons rigoureuse et adapterons aux dimensions supérieures (section 7.3) la démonstration de (7.1) dans le cas général du chapitre 5, en considérant le cas où l'évolution des particules se passe dans le tore  $\mathbb{T}^n$ . En effet, la démonstration nécessite la construction d'une mesure de probabilité invariante définissant l'état d'équilibre thermique, ce qui peut se faire sur le tore. Plus précisément, on montre

$$m(t) = \beta D(t),$$

où

$$m(t) := \left( \partial_F \frac{\langle q_t^F - q \rangle}{t} \right)_{|F=0} = \left( \partial_F \frac{\langle \int_0^t p_\tau^F \rangle}{t} \right)_{|F=0}, \quad (7.2)$$

$$D_{i,j}(t) := \frac{\langle (q_{i,t}^0 - q_i)(q_{j,t}^0 - q_j) \rangle}{2t} = \frac{\int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \langle p_{i,\tau}^0 p_{j,\tau'}^0 \rangle}{2t}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket, \quad (7.3)$$

Un problème intéressant qui reste ouvert est de démontrer l'existence de la limite  $D = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t)$ , ce qui permettrait de conclure

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \beta D,$$

ce qui serait la relation d'Einstein adaptée à ce modèle.

## 7.2 Description de l'état d'équilibre thermique

On décrit dans cette section l'état d'équilibre thermique du système couplé composé de la particule et du réservoir lorsque la force extérieure est nulle :  $F = 0$ . On rappelle que les équations de mouvement régissant la dynamique sont

$$\begin{cases} \dot{q}_t = p_t, \\ \dot{p}_t = \langle \phi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \\ \dot{\phi}_t = L_{res}(\phi_t + \alpha(\xi_t)), \end{cases} \quad (7.4)$$

où  $L_{res}$  est l'opérateur de  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  dans lui-même, pour  $1 < s \leq s_c - 1$ , déterminant l'évolution libre du réservoir (voir l'équation (5.10)) :

$$L_{res} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On désigne le flot qu'elles définissent par

$$\Theta_t^0(q, p; \phi) = (\xi_t(q, p; \phi), \phi_t(q, p; \phi)),$$

où  $\xi_t = (q_t, p_t)$  et  $\Theta_0^0 = Id$ , l'opérateur identité.

Dans le cas des modèles ayant un nombre fini de variables, l'équilibre thermique est décrit par la mesure de probabilité de densité proportionnelle à  $e^{-\beta H}$ . Cette mesure n'a plus de sens lorsqu'on a un nombre infini de degrés de liberté. On en construit une analogue, bien définie sur l'espace des phases  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  et invariante pour ce flot, c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble mesurable  $A \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ , on a

$$\mu^\beta(\Theta_t^0(A)) = \mu^\beta(A), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Théorème 7.1.** *Pour tout  $1 < s \leq s_c - 1$ , la mesure*

$$d\mu^\beta(\xi, \phi) := \frac{1}{Z^\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{-\beta\langle\phi; \alpha(\xi)\rangle} dq dp d\mu_{res}^\beta(\phi),$$

où  $Z^\beta = (2\pi\beta^{-1})^{n/2} \int_{\mathbb{T}^n} e^{\beta\|\alpha(\xi)\|^2/2} dq$ , est une mesure de probabilité invariante sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ . Comme  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  est de mesure pleine dans  $\mathcal{N}'$ ,  $d\mu^\beta$  s'étend en une mesure de probabilité invariante sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'$ .

On rappelle que la mesure  $\mu_{res}^\beta$  est la mesure de Gibbs de l'espace des phases du réservoir construite dans la section 5.4 (Proposition 5.11). La démonstration du Théorème 7.1 repose sur le changement de variable

$$T : (\xi, \phi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \mapsto (\xi, \phi + \alpha(\xi)), \quad (7.5)$$

permettant de transformer le système couplé défini sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  en un système « découplé » sur ce même espace, ayant pour état d'équilibre la mesure

$$d\nu^\beta(\xi, \psi) := \frac{1}{Z^\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi). \quad (7.6)$$

En effet, l'application  $T^{-1}$  transforme le Hamiltonien du système couplé, à savoir

$$H(q, p, \phi) = \frac{|p|^2}{2} + \frac{\|\phi\|^2}{2} + \langle\phi; \alpha(\xi)\rangle,$$

en

$$\begin{aligned} H \circ T^{-1}(q, p, \psi) &= \frac{|p|^2}{2} + \frac{\|\psi - \alpha(\xi)\|^2}{2} + \langle\psi - \alpha(\xi); \alpha(\xi)\rangle \\ &= \frac{|p|^2}{2} + \frac{\|\psi\|^2}{2} - \frac{\|\alpha(\xi)\|^2}{2}, \end{aligned}$$

où il n'y a plus de terme de couplage. On parle alors de système « découplé » en gardant à l'esprit que le nouveau système n'est pas hamiltonien, la transformation  $T^{-1}$  n'étant pas canonique. On note de plus que le « découplage » du système fait apparaître dans les équations de mouvement des nouvelles variables un potentiel (contre-terme)  $-\|\alpha(\xi)\|^2/2$  ne dépendant que de la variable  $q$ . Par l'Hypothèse 5.20,  $\|\alpha(\xi)\|$  est borné uniformément en  $q$  et son exponentielle est intégrable sur le tore  $\mathbb{T}^n$ , ce qui implique que  $\nu^\beta$  définit bien une mesure de probabilité. La construction faite ici est identique à celle développée dans [42], dans le cas où la particule est soumise à un

potentiel  $V$  confinant. Cette hypothèse permet d'obtenir, sous de bonnes conditions sur  $V$  et  $\alpha$ , des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}^n$ , et par conséquent une mesure invariante sur  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N}'$ .

*Démonstration du Théorème 7.1.* La démonstration se décompose en les étapes suivantes. Tout d'abord, on montre que l'application  $T$  définie par l'équation (7.5) est bien un changement de variable, en vérifiant qu'il s'agit d'un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  dans lui-même. On utilise ensuite ce changement de variable pour montrer que la fonction  $(\xi, \phi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \mapsto e^{-\frac{1}{2}\beta p^2} e^{-\beta\langle\phi; \alpha(\xi)\rangle}$  est  $dqdpd\mu_{res}^\beta(\phi)$ -intégrable, ce qui implique que  $\mu^\beta$  est bien une mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ . Enfin, on conclut en montrant que  $\mu^\beta$  est une mesure invariante.

1. *L'application  $T : (\xi, \phi) \mapsto (\xi, \phi + \alpha(\xi))$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  dans lui-même.*

Tout d'abord,  $T$  est à valeurs dans  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  puisque pour tout  $(\xi, \phi) = (q, p, \phi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  et par définition de  $\|\cdot\|_{-s}$  (voir l'équation (6.10)) sur cet espace,

$$\begin{aligned} \|T(\xi, \phi)\|_{-s}^2 &= \|(\xi, \phi + \alpha(\xi))\|_{-s}^2 \\ &= |q|^2 + |p|^2 + \|\phi + \alpha(\xi)\|_{-s}^2 \\ &\leq |q|^2 + |p|^2 + 2\left(\|\phi\|_{-s}^2 + \|\alpha(\xi)\|_{-s}^2\right). \end{aligned}$$

Par croissance des normes  $\|\cdot\|_s$  et puisque  $\|\alpha(\xi)\|$  est borné, d'après l'Hypothèse 5.20, on a  $\|\alpha(\xi)\|_{-s}^2 \leq K \|\alpha(\xi)\|_0^2 = K'$ ; on obtient donc

$$\|T(\xi, \phi)\|_{-s}^2 \leq |q|^2 + |p|^2 + 2\|\phi\|_{-s}^2 + 2K' < \infty$$

et  $T(\xi, \phi)$  appartient à  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ . De plus,  $T$  est une bijection. En effet, tout  $(\xi, \psi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  possède un unique antécédent dans  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$  et on a

$$T^{-1}(\xi, \psi) = (\xi, \psi - \alpha(\xi)).$$

Enfin, par définition de  $\alpha$ , les fonctions  $T$  et  $T^{-1}$  sont toutes les deux de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et  $T$  est donc bien un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme.

2.  *$\mu^\beta$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ .*

On va montrer que pour toute fonction  $G : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \rightarrow \mathbb{R}$   $\nu^\beta$ -intégrable,

$$\int G \circ T(\xi, \phi) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{-\beta\langle\phi; \alpha(\xi)\rangle} dqdpd\mu_{res}^\beta(\phi) = Z^\beta \int G(\xi, \psi) d\nu^\beta(\xi, \psi). \quad (7.7)$$

En particulier, pour  $G$  identiquement égale à 1, cela montre que la fonction

$$(\xi, \phi) \mapsto e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{-\beta\langle\phi; \alpha(\xi)\rangle}$$

est  $dqdpd\mu_{res}^\beta(\phi)$ -intégrable et que  $\mu^\beta$  définit bien une mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ .

Soit  $G : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\nu^\beta$ -intégrable. Par définition de  $T$ , on a alors

$$\begin{aligned} &\int G \circ T(\xi, \phi) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{-\beta\langle\phi; \alpha(\xi)\rangle} dqdpd\mu_{res}^\beta(\phi) \\ &= \int G(\xi, \phi + \alpha(\xi)) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{-\beta\langle\phi; \alpha(\xi)\rangle} dqdpd\mu_{res}^\beta(\phi) \\ &= \int G(\xi, \psi) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{-\beta\langle\psi - \alpha(\xi); \alpha(\xi)\rangle} dqdpd\mu_{res}^\beta(\psi - \alpha(\xi)), \end{aligned}$$

où  $d\mu_{res}^\beta(\psi - \alpha(\xi))$  est l'unique mesure (Proposition 5.11) telle que pour tout  $f \in \mathcal{N}$ , on ait

$$e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1}\|f\|^2} = \int_{\mathcal{N}'} e^{i\langle \psi - \alpha(\xi); f \rangle} d\mu_{res}^\beta(\psi - \alpha(\xi)).$$

On remarque qu'on a alors

$$d\mu_{res}^\beta(\psi - \alpha(\xi)) = e^{-\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2 + \beta\langle \psi; \alpha(\xi) \rangle} d\mu_{res}^\beta(\psi),$$

puisque

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{N}'} e^{i\langle \psi - \alpha(\xi); f \rangle} e^{-\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2 + \beta\langle \psi; \alpha(\xi) \rangle} d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= e^{-i\langle \alpha(\xi); f \rangle} e^{-\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} \int_{\mathcal{N}'} e^{i\langle \psi; f - i\beta\alpha(\xi) \rangle} d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= e^{-i\langle \alpha(\xi); f \rangle} e^{-\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1}\|f - i\beta\alpha(\xi)\|^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\beta^{-1}\|f\|^2}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \int G \circ T(\xi, \phi) e^{-\frac{1}{2}\beta\|p\|^2} e^{-\beta\langle \phi; \alpha(\xi) \rangle} dq dp d\mu_{res}^\beta(\phi) \\ &= \int G(\xi, \psi) e^{-\frac{1}{2}\beta\|p\|^2} e^{-\beta\langle \psi - \alpha(\xi); \alpha(\xi) \rangle} e^{-\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2 + \beta\langle \psi; \alpha(\xi) \rangle} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= \int G(\xi, \psi) e^{-\frac{1}{2}\beta\|p\|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $\nu^\beta$  (équation (7.6)), on trouve l'égalité (7.7).

3.  $\mu^\beta$  est une mesure invariante.

En prenant  $G = f^2$  dans l'égalité (7.6), avec  $f : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque de carré  $\mu^\beta$ -intégrable, on obtient que  $\mu^\beta$  est une mesure invariante pour le flot  $\Theta_t^0$  si et seulement si  $\nu^\beta$  est une mesure invariante pour le flot des nouvelles variables  $(\xi_t, \psi_t)$ . Les équations de mouvement pour ces variables sont

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= p_t, \\ \dot{p}_t &= \langle \psi_t; \nabla \alpha(\xi_t) \rangle - \langle \alpha(\xi_t); \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \\ \dot{\psi}_t &= L_{res} \psi_t - p_t \cdot \nabla \alpha(\xi_t), \end{aligned}$$

où on rappelle que  $\nabla \alpha(\xi) = -\nabla_q \alpha(\xi)$  (voir l'équation (5.14)). On remarque alors que pour toute fonction  $f : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a

$$\frac{df(\xi_t, \psi_t)}{dt} = L_0 f(\xi_t, \psi_t),$$

où

$$L_0 f = \nabla_q f \cdot p + \nabla_p f \cdot \left( \langle \phi; \nabla \alpha(\xi) \rangle + \frac{1}{2} \nabla_q \|\alpha(\xi)\|^2 \right) + d_{res} f \cdot (L_{res} \psi - p \cdot \nabla \alpha(\xi)) \quad (7.8)$$

et avec  $d_{res} f$  défini par

$$f(\xi, \phi + h) = f(\xi, \phi + h) + d_{res} f \cdot h + o(\|h\|).$$

Ceci permet d'écrire l'évolution de  $f$  :

$$f(\xi_t, \psi_t) = e^{tL_0} f(\xi, \psi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (\xi, \psi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}.$$

On utilise alors le lemme suivant, démontré en fin de section.

**Lemme 7.2.** *Les deux propriétés suivantes sont satisfaites pour tout  $1 < s \leq s_c - 1$ .*

- (i) *L'espace  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}; \mathbb{R})$  des fonctions à support borné (au sens de la norme  $\|\cdot\|_{-s}$ ) et de classe  $\mathcal{C}^1$  est dense dans  $L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}, d\mu^\beta; \mathbb{R})$ .*
- (ii) *L'opérateur  $e^{tL_0}$  laisse l'espace  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s})$  stable.*

D'après la propriété (i) de ce lemme, il suffit de montrer que toute fonction  $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s})$  satisfait

$$\frac{d}{dt} \|e^{tL_0} f\|^2|_{t=0} = 0,$$

où on utilise la notation

$$\|f\|^2 = \int f^2(q, p, \psi) d\nu^\beta(q, p, \psi).$$

En effet, ceci implique  $\frac{d}{dt} \|e^{tL_0} f\|^2 = 0$ , et donc  $\|f \circ \Theta_t^0\|^2 = \|f\|^2$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $f \in \mathcal{C}_b^1$ . Par densité, ce résultat est encore vrai pour tout  $f \in L^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s})$  et  $\mu^\beta$  est bien une mesure invariante.

On remarque qu'on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{tL_0} f\|^2|_{t=0} &= \int L_0 f^2 d\nu^\beta \\ &= \frac{1}{Z^\beta} \int \left[ \nabla_q f^2(q, p, \psi) \cdot p + \nabla_p f^2(q, p, \psi) \cdot \left( \langle \psi; \nabla \alpha(\xi) \rangle + \frac{1}{2} \nabla_q \|\alpha(\xi)\|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + d_{res} f^2(q, p, \psi) \cdot (L_{res} \psi - \nabla \alpha(\xi) \cdot p) \right] e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi), \end{aligned}$$

par définition de  $L_0$  (équation (7.8)) et de  $\nu^\beta$  (équation (7.6)). À l'aide d'intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned} &\int \nabla_q f^2(q, p, \psi) \cdot p e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= - \int f^2(q, p, \psi) p \cdot \nabla_q e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= -\frac{1}{2}\beta \int f^2(q, p, \psi) (p \cdot \nabla_q \|\alpha(\xi)\|^2) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int \nabla_p f^2(q, p, \psi) \cdot \left( \langle \psi; \nabla \alpha(\xi) \rangle + \frac{1}{2} \nabla_q \|\alpha(\xi)\|^2 \right) e^{\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= - \int f^2(q, p, \psi) \left( \langle \psi; \nabla \alpha(\xi) \rangle + \frac{1}{2} \nabla_q \|\alpha(\xi)\|^2 \right) \cdot \nabla_p e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= \beta \int f^2(q, p, \psi) \left( \langle \psi; \nabla \alpha(\xi) \rangle + \frac{1}{2} \nabla_q \|\alpha(\xi)\|^2 \right) \cdot p e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi). \end{aligned}$$

De plus, une intégration par parties pour les mesures gaussiennes (voir [35]) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int d_{res} f^2(q, p, \psi) \cdot (-\nabla \alpha(\xi) \cdot p) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ = -\beta \int f^2(q, p, \psi) \langle \psi; \nabla \alpha(\xi) \cdot p \rangle e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi). \end{aligned}$$

Par conséquent, il reste

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{tL_0} f\|^2|_{t=0} &= \int d_{res} f^2(q, p, \psi) \cdot (L_{res} \psi) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \\ &= \frac{d}{dt} \int f^2(q, p, e^{tL_{res}} \psi) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{\frac{1}{2}\beta\|\alpha(\xi)\|^2} dq dp d\mu_{res}^\beta(\psi) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Comme  $e^{tL_{res}}$  est un opérateur unitaire (voir l'équation (5.11)), la conclusion suit.  $\square$

Reste à démontrer le Lemme 7.2.

*Démonstration du Lemme 7.2.* Pour montrer la propriété (i), on remarque tout d'abord que  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  à support borné définies sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ , est dense dans  $L^2\left(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n, e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} dq dp; \mathbb{R}\right)$ . Il suffit donc de montrer que pour  $1 < s$ ,  $\mathcal{C}_b^1(\mathcal{H}_{res}^{-s})$  est dense dans  $L^2\left(\mathcal{H}_{res}^{-s}, d\mu_{res}^\beta; \mathbb{R}\right)$  pour conclure.

Pour toute fonction  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  positive et tout  $f \in \mathcal{H}_{res}^s$ , on définit une fonction  $G_f$  sur  $\mathcal{H}_{res}^{-s}$  par

$$G_f(\psi) := \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) e^{i\langle \psi; f \rangle}, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{res}^{-s}.$$

Ce sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  dont les parties réelles et imaginaires sont dans  $\mathcal{C}_b^1(\mathcal{H}_{res}^{-s})$ . Soit  $G$  un élément de  $L^2\left(\mathcal{H}_{res}^{-s}, d\mu_{res}^\beta; \mathbb{R}\right)$  orthogonal à toute combinaison linéaire finie de telles fonctions. Alors pour tout  $f \in \mathcal{H}_{res}^s$  et tout  $0 \leq \chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , on a

$$\int G(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) e^{i\langle \psi; f \rangle} d\mu_{res}^\beta(\psi) = 0.$$

En désignant par  $G^+$  (respectivement  $G^-$ ) la partie positive (respectivement négative) de  $G$ , et en appliquant le théorème de Minlos (en particulier l'unicité de la mesure) à l'égalité des fonctions caractéristiques des mesures  $G^+(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) d\mu_{res}^\beta(\psi)$  et  $G^-(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) d\mu_{res}^\beta(\psi)$  :

$$\int G^+(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) e^{i\langle \psi; f \rangle} d\mu_{res}^\beta(\psi) = \int G^-(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) e^{i\langle \psi; f \rangle} d\mu_{res}^\beta(\psi), \quad \forall f \in L^2(\mathcal{H}_{res}^{-s}),$$

on obtient l'égalité de ces deux mesures, et donc  $G^+(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) = G^-(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right)$ . Par conséquent,

$$G(\psi) \chi\left(\|\psi\|_{-s}^2\right) = 0, \quad \forall 0 \leq \chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{res}^{-s}.$$

On conclut que

$$G(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{res}^{-s},$$

ce qui conclut la démonstration de la propriété (i).

L'affirmation (ii) est une conséquence immédiate de l'estimation (6.24) utilisée pour démontrer l'existence du flot global en temps : sur un intervalle de temps borné et pour des conditions initiales bornées, l'évolution de  $(\xi_t, \psi_t) = (\xi_t, \phi_t - \alpha(\xi_t))$  reste bornée.  $\square$

### 7.3 Relation d'Einstein à temps fini

Le but de cette section est de montrer la relation d'Einstein en temps fini (équation (7.1)). On considère donc maintenant le cas où la force  $F$  est non nulle. On rappelle que les équations de mouvement régissant la dynamique sont

$$\begin{aligned}\dot{q}_t &= p_t, \\ \dot{p}_t &= F + \langle \phi_t, \nabla \alpha(\xi_t) \rangle, \\ \dot{\phi}_t &= L_{res}(\phi_t + \alpha(\xi_t)).\end{aligned}$$

On désigne le flot qu'elles définissent par

$$\Theta_t^F(q, p; \phi) = (\xi_t^F(q, p; \phi), \phi_t^F(q, p; \phi)),$$

où  $\xi_t^F = (q_t^F, p_t^F)$  et  $\Theta_0^F = \Theta_0^0 = Id$ . On sait, par le Théorème 6.5 que ce flot existe et est un flot global en temps pour toute condition initiale  $(\xi, \phi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$ ,  $1 < s \leq s_c - 1$ , c'est-à-dire pour presque toute condition initiale dans  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'$ .

Comme la particule évolue sur un tore, son déplacement n'est pas la différence des positions comme dans [49] (voir l'équation (7.1)). Par contre, il est égal à l'intégrale de la vitesse. La matrice de mobilité  $m(t)$  est alors définie par

$$m(t) := \left( \partial_F \frac{\left\langle \int_0^t p_\tau^F d\tau \right\rangle}{t} \right)_{|F=0}$$

et la matrice de diffusion est la matrice  $D(t) \in \mathcal{M}_n$  de coefficients

$$D_{i,j}(t) := \frac{1}{2t} \left\langle \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' p_{j,\tau}^0 p_{i,\tau'}^0 \right\rangle,$$

où on désigne par  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne par rapport à la distribution initiale  $\mu^\beta$  :

$$\langle f \rangle := \int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}'} f(q, p, \phi) d\mu^\beta(q, p, \phi) = \int_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}} f(q, p, \phi) d\mu^\beta(q, p, \phi), \quad \forall 1 < s \leq s_c - 1.$$

**Théorème 7.3.** *Avec les notations introduites ci-dessus, on a à tout instant  $t > 0$*

$$\frac{\left\langle \int_0^t p_\tau^F d\tau \right\rangle}{t} = \beta D(t) F + O_t(|F|^2)$$

*lorsque la force extérieure  $F$  tend vers 0. En d'autres termes,*

$$m(t) = \beta D(t)$$

*et on note en particulier que la mobilité  $m(t)$  est une matrice symétrique, ce qui est une manifestation des relations de réciprocity d'Onsager.*

*Démonstration.* 1. *Théorie de la perturbation.*

L'évolution d'une fonction  $f \circ \Theta_t^F$ , pour toute fonction  $f : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , est donnée par

$$\frac{df \circ \Theta_t^F}{dt} = L_0 f \circ \Theta_t^F + L_F f \circ \Theta_t^F,$$

où

$$L_F f = F \cdot \nabla_p f$$

et où on utilise, ainsi que dans toute la suite, l'opérateur  $L_0$  redéfini dans les variables  $(\xi, \phi)$  (voir l'équation (7.8))

$$L_0 f = \nabla_q f \cdot p + \nabla_p f \cdot \langle \phi; \nabla \alpha(\xi) \rangle + d_{res} f \cdot L_{res}(\phi + \alpha(\xi)).$$

Cela implique

$$\frac{d}{dt} ((e^{-tL_0} f) \circ \Theta_t^F) = (L_F e^{-tL_0} f) \circ \Theta_t^F.$$

Une intégration en temps de cette égalité donne

$$f \circ \Theta_t^F = e^{tL_0} f + \int_0^t (e^{tL_0} L_F e^{-\tau L_0} f) \circ \Theta_\tau^F d\tau, \quad (7.9)$$

et lorsque la force  $F$  est nulle,

$$f \circ \Theta_t^0 = e^{tL_0} f. \quad (7.10)$$

Comme on a montré dans le chapitre précédent que  $\Theta_t^F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en fonction de  $F$  (Théorème 6.7), on peut écrire pour toute condition initiale  $(\xi, \phi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s}$

$$\Theta_t^F(\xi, \phi) = \Theta_t^0(\xi, \phi) + O_{t,\xi,\phi}(|F|),$$

et la fonction  $t \mapsto O_{t,\xi,\phi}(|F|)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . La différence

$$(e^{tL_0} L_F e^{-\tau L_0} f) (\Theta_\tau^F(\xi, \phi)) - (e^{tL_0} L_F e^{-\tau L_0} f) (\Theta_\tau^0(\xi, \phi))$$

est alors elle aussi d'ordre  $|F|$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $\tau$ . L'égalité (7.9) devient donc

$$\begin{aligned} f \circ \Theta_t^F(\xi, \phi) &= e^{tL_0} f(\xi, \phi) + F \cdot \int_0^t (e^{tL_0} \nabla_p e^{-\tau L_0} f) \circ \Theta_\tau^0(\xi, \phi) d\tau + O_{t,\xi,\phi}(|F|^2) \\ &= e^{tL_0} f(\xi, \phi) + F \cdot \int_0^t (e^{(t+\tau)L_0} \nabla_p e^{-\tau L_0} f) (\xi, \phi) d\tau + O_{t,\xi,\phi}(|F|^2). \end{aligned} \quad (7.11)$$

2. Calcul de  $\left\langle \int_0^t p_\tau^F d\tau \right\rangle / t$ .

L'équation (7.11) appliquée en  $f = p_i$  se réécrit

$$p_{i,\tau}^F = e^{\tau L_0} p_i + F \cdot \int_0^\tau e^{(\tau+\tau')L_0} \nabla_p e^{-\tau' L_0} p_i d\tau' + O_{\tau,\xi,\phi}(|F|^2).$$

Ces quatre termes sont  $\mu^\beta$ -intégrable. En effet, la majoration (6.24), obtenue dans la démonstration de l'existence globale des solutions (Théorème 6.5), permet de borner le membre de gauche :

$$|p_{i,t}^F| \leq |p_t^F| \leq K \langle T \rangle^{\frac{s+1}{2}} \left( (|p_0|^2 + \|\phi_0\|_{-s} + 1 + |F| |q_0|)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} |F| K \langle T \rangle^{\frac{s+1}{2}} T \right).$$

Les deux premiers termes du membre de droite sont eux aussi  $\mu^\beta$ -intégrables, par invariance de la mesure  $\mu^\beta$  par rapport à l'évolution lorsque  $F = 0$ . Par conséquent, le dernier terme du membre de droite est lui aussi  $\mu^\beta$ -intégrable. En utilisant l'invariance de la mesure  $\mu^\beta$  montrée dans le Théorème 7.1, on obtient

$$\langle p_{i,\tau}^F \rangle = \langle p_i \rangle + F \cdot \int_0^\tau \langle \nabla_p e^{-\tau' L_0} p_i \rangle d\tau' + O_\tau(|F|^2).$$

Par définition de  $d\mu^\beta$ , on a

$$\langle p_i \rangle = 0.$$

Une intégration par parties en la variable  $p$  permet de réécrire le terme restant :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_p e^{-\tau' L_0} p_i \rangle &= \frac{1}{Z_\beta} \int \nabla_p \left( e^{-\tau' L_0} p_i \right) e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} e^{-\beta\langle\phi;\alpha(\xi)\rangle} dq dp d\mu_{res}^\beta(\phi) \\ &= -\frac{1}{Z_\beta} \int e^{-\tau' L_0} p_i \left( \nabla_p e^{-\frac{1}{2}\beta|p|^2} \right) e^{-\beta\langle\phi;\alpha(\xi)\rangle} dq dp d\mu_{res}^\beta(\phi) \\ &= \beta \langle e^{-\tau' L_0} p_i p \rangle \\ &= \beta \langle p_i e^{\tau' L_0} p \rangle, \end{aligned}$$

par invariance de la distribution initiale. Par conséquent,

$$\langle p_{i,\tau}^F \rangle = \beta F \cdot \int_0^\tau \langle p_i e^{\tau' L_0} p \rangle d\tau' + O_t(|F|^2).$$

En intégrant par rapport à  $\tau$ , on obtient

$$\left( \frac{\langle \int_0^t p_\tau^F d\tau \rangle}{t} \right)_i = \frac{\beta}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \langle p_i e^{\tau' L_0} p \rangle \cdot F + O_t(|F|^2).$$

### 3. Calcul de la diffusion.

Par définition de  $D(t)$ , on a pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} D_{i,j}(t) &= \frac{1}{2t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \langle e^{\tau L_0} p_j e^{\tau' L_0} p_i \rangle \\ &= \frac{1}{2t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \langle e^{\tau L_0} p_j e^{\tau' L_0} p_i \rangle + \frac{1}{2t} \int_0^t d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau \langle e^{\tau L_0} p_j e^{\tau' L_0} p_i \rangle \\ &= \frac{1}{2t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \langle e^{(\tau-\tau')L_0} p_j p_i \rangle + \frac{1}{2t} \int_0^t d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau \langle p_j e^{(\tau'-\tau)L_0} p_i \rangle \\ &= \frac{1}{2t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \langle e^{\tau' L_0} p_j p_i \rangle + \frac{1}{2t} \int_0^t d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau \langle p_j e^{\tau L_0} p_i \rangle. \end{aligned}$$

On utilise la réversibilité en temps de la dynamique pour montrer que ces deux derniers termes sont égaux (voir [72]). En effet, on désigne par  $\vartheta$  l'application définie par

$$\vartheta : (q, p, \varphi, \pi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{res}^{-s} \mapsto (q, -p, \varphi, -\pi).$$

Comme  $H \circ \vartheta = H$  (où l'expression de  $H$  est donnée par l'équation (5.12) page 116), on a

$$\vartheta \circ \Theta_t^F = \Theta_{-t}^F \circ \vartheta$$

pour tous  $t \in \mathbb{R}$  et  $F \in \mathbb{R}^n$ . De plus, par définition de  $\mu^\beta$ , on a pour toute fonction  $f$  intégrable

$$\langle f \rangle = \langle f \circ \vartheta \rangle.$$

En particulier, en désignant par  $f_k$ ,  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , l'application définie par  $f_k(q, p, \phi) = p_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle p_j e^{\tau L_0} p_i \rangle &= \langle f_j (f_i \circ \Theta_\tau^0) \rangle \\ &= \langle (f_j \circ \vartheta) (f_i \circ \Theta_\tau^0 \circ \vartheta) \rangle \\ &= \langle (f_j \circ \vartheta) (f_i \circ \vartheta \circ \Theta_{-\tau}^0) \rangle \\ &= \langle -p_j (-e^{-\tau L_0} p_i) \rangle \\ &= \langle p_j (e^{-\tau L_0} p_i) \rangle. \end{aligned}$$

Par invariance de la mesure  $\mu^\beta$ , on obtient donc

$$\langle p_j e^{\tau L_0} p_i \rangle = \langle e^{\tau L_0} p_j p_i \rangle.$$

D'où la conclusion :

$$D_{i,j}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \langle e^{\tau' L_0} p_j p_i \rangle$$

et

$$\frac{\langle \int_0^t p_\tau^F d\tau \rangle}{t} = \beta D(t) F + O_t(|F|^2).$$

□



# Table des figures

|     |                                                                                                                                                             |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1   | Une trajectoire de particule dans le gaz de Lorentz élastique. . . . .                                                                                      | 2   |
| 2   | Exemples de gaz de Lorentz inélastiques . . . . .                                                                                                           | 5   |
| 1.1 | Valeurs de $\langle \ v(\tau)\ ^2 \rangle$ et $\langle \ v_n\ ^2 \rangle$ en dimensions un et deux. . . . .                                                 | 15  |
| 1.2 | Valeurs de $\langle \ y(\tau)\ ^2 \rangle$ et $\langle \ y_n\ ^2 \rangle$ en dimensions un et deux. . . . .                                                 | 16  |
| 1.3 | Une particule arrivant sur le $n$ -ième diffuseur. . . . .                                                                                                  | 19  |
| 1.4 | Les quantités $N_*(\ v_0\ )$ et $\tau_*(\ v_0\ )$ en fonction de $\ v_0\ $ . . . . .                                                                        | 26  |
| 1.5 | Comportement asymptotique de $\langle \ v_n\ ^k \rangle$ , $k = -1$ et $-2$ , en dimensions un et deux. . . . .                                             | 27  |
| 1.6 | Évolution de $\langle \tau_n \rangle$ en dimensions un et deux. . . . .                                                                                     | 28  |
| 1.7 | Fonction de corrélation $\langle e_m \cdot e_0 \rangle$ en fonction de $m$ et estimation numérique de $M_*(\ v_0\ )$ en fonction de $\ v_0\ $ . . . . .     | 30  |
| 1.8 | Un exemple de trajectoire dans la maille hexagonale. . . . .                                                                                                | 38  |
| 2.1 | Une particule arrivant sur le $n$ -ième diffuseur. . . . .                                                                                                  | 52  |
| 2.2 | Distributions et corrélations de $b_n$ et $\phi_n$ . . . . .                                                                                                | 53  |
| 2.3 | Valeurs de $\langle \ p_n\ ^2 \rangle$ , $\langle \ p(t)\ ^2 \rangle$ , $\langle \ q_n\ ^2 \rangle$ et $\langle \ q(t)\ ^2 \rangle$ en dimension 2. . . . . | 54  |
| 2.4 | Fonction de corrélation $\langle e_m \cdot e_0 \rangle$ en fonction de $m$ et estimation numérique de $M_*(\ v_0\ )$ en fonction de $\ v_0\ $ . . . . .     | 54  |
| 2.5 | Coordonnées des vecteurs $e_k$ . . . . .                                                                                                                    | 55  |
| 2.6 | Valeurs de $\langle \ q(t)\ ^2 \rangle$ et de la constante de diffusion dans le cas d'un gaz de Lorentz élastique mou. . . . .                              | 56  |
| 2.7 | Valeurs de $p(t)^2$ et $q(t)^2$ en dimension 1. . . . .                                                                                                     | 58  |
| 2.8 | Évolution de $p(t)$ en fonction de $p(0)$ et comparaison de $p(t)$ et $p_{ap}(t)$ . . . . .                                                                 | 59  |
| 2.9 | Valeurs de $\langle \ p(t)\ ^2 \rangle$ et $\langle \ q(t)\ ^2 \rangle$ en dimensions 1 et 2 pour le modèle des rotateurs frappés. . . . .                  | 68  |
| 5.1 | Schéma du modèle diffusif. . . . .                                                                                                                          | 112 |
| 6.1 | Illustration schématique du modèle avec des plots. . . . .                                                                                                  | 140 |



# Bibliographie

- [1] B. Aguer, S. De Bièvre, P. Lafitte, and P. E. Parris. Classical motion in force fields with short range correlations. *J. Stat. Phys.*, 138(4) :780–814, 2010.
- [2] E. Arvedson, M. Wilkinson, B. Mehlig, and K. Nakamura. Staggered ladder operators. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :030601, 2006.
- [3] A. Beck and N. Meyer-Vernet. The trajectory of an electron in a plasma. *Am. J. Phys.*, 76(10) :934–936, 2008.
- [4] J. Bellissard. Stability and instability in quantum mechanics. In *Trends and developments in the 80's (Bielfeld, 1982/1983)*, pages 1–106. World Sci. Publishing, Singapore, 1985.
- [5] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [6] C. Boldrighini, L. A. Bunimovich, and Ya. G. Sinai. On the Boltzmann equation for the Lorentz gas. *J. Statist. Phys.*, 32(3) :477–501, 1983.
- [7] F. Bonetto, D. Daems, and J. L. Lebowitz. Properties of stationary nonequilibrium states in the thermostatted periodic Lorentz gas. I. The one particle system. *J. Statist. Phys.*, 101(1-2) :35–60, 2000. Dedicated to Grégoire Nicolis on the occasion of his sixtieth birthday (Brussels, 1999).
- [8] J. Bourgain. Growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with quasi-periodic potential. *Comm. Math. Phys.*, 204(1) :207–247, 1999.
- [9] J. Bourgain. On growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with smooth time dependent potential. *J. Anal. Math.*, 77 :315–348, 1999.
- [10] J. Bourgain. On long-time behaviour of solutions of linear Schrödinger equations with smooth time-dependent potential. In *Geometric aspects of functional analysis*, volume 1807 of *Lecture Notes in Math.*, pages 99–113. Springer, Berlin, 2003.
- [11] L. Bruneau and S. De Bièvre. A Hamiltonian model for linear friction in a homogeneous medium. *Comm. Math. Phys.*, 229(3) :511–542, 2002.
- [12] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai. Markov partitions for dispersed billiards. *Comm. Math. Phys.*, 78(2) :247–280, 1980/81.
- [13] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Comm. Math. Phys.*, 78(4) :479–497, 1980/81.
- [14] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, and N.I. Chernov. Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards. *Russ. Math. Surv.*, 45 :105–152, 1990.
- [15] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. Path integral approach to quantum Brownian motion. *Phys. A*, 121(3) :587–616, 1983.
- [16] J. R. Cary. Lie transform perturbation theory for hamiltonian systems. *Physics Reports*, 79(2) :129 – 159, 1981.

- [17] F. Castella, L. Erdős, F. Frommlet, and P. A. Markowich. Fokker-Planck equations as scaling limits of reversible quantum systems. *J. Statist. Phys.*, 100(3-4) :543–601, 2000.
- [18] N. I. Chernov, G. L. Eyink, J. L. Lebowitz, and Ya. G. Sinai. Derivation of ohm’s law in a deterministic mechanical model. *Phys. Rev. Lett.*, 70(15) :2209–2212, Apr 1993.
- [19] N. I. Chernov, G. L. Eyink, J. L. Lebowitz, and Ya. G. Sinai. Steady-state electrical conduction in the periodic Lorentz gas. *Comm. Math. Phys.*, 154(3) :569–601, 1993.
- [20] D. Cohen. Unified model for the study of diffusion localization and dissipation. *Phys. Rev. E*, 55(2) :1422–1441, Feb 1997.
- [21] P. Collet, J.P. Eckmann, and C. Mejía-Monasterio. Superdiffusive heat transport in a class of deterministic one-dimensional many-particle lorentz gases. *Journal of Statistical Physics*, 136(2) :331–347, 2009.
- [22] S. De Bièvre, P. Lafitte, and P. E. Parris. Normal transport at positive temperatures in classical Hamiltonian open systems. In *Adventures in mathematical physics*, volume 447 of *Contemp. Math.*, pages 57–71. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [23] S. De Bièvre, P. E. Parris, and A. Silvius. Chaotic dynamics of a free particle interacting linearly with a harmonic oscillator. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 208(1-2) :96 – 114, 2005.
- [24] C. P. Dettmann and G. P. Morriss. Crisis in the periodic lorentz gas. *Phys. Rev. E*, 54(5) :4782–4790, Nov 1996.
- [25] D. Dolgopyat and L. Korolov. Motion in a random force field. *Nonlinearity*, (22) :187–211, 2009.
- [26] D.I. Dolgopyat and N.I. Chernov. Anomalous current in periodic Lorentz gases with infinite horizon. *Russ. Math. Surv.*, 64(4) :651–699, 2009.
- [27] P. Duclos, E. Soccorsi, P. Šťovíček, and M. Vittot. On the stability of periodically time-dependent quantum systems. *Rev. Math. Phys.*, 20(6) :725–764, 2008.
- [28] J.-P. Eckmann, C. Mejía-Monasterio, and E. Zabey. Memory effects in nonequilibrium transport for deterministic hamiltonian systems. *Journal of Statistical Physics*, 123(6) :1339–1360, 2006.
- [29] J.-P. Eckmann and L.-S. Young. Nonequilibrium energy profiles for a class of 1-d models. *Communications in Mathematical Physics*, 262(1) :237–267, 2006.
- [30] E. Vanden Eijnden. Some remarks on the quasilinear treatment of the stochastic acceleration problem. *Phys. Plasmas*, 4(5) :1486–1488, 1997.
- [31] L. Erdős and H.-T. Yau. Linear Boltzmann equation as the weak coupling limit of a random Schrödinger equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(6) :667–735, 2000.
- [32] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.
- [33] G. Gallavotti. Divergences and the approach to equilibrium in the lorentz and the wind-tree models. *Phys. Rev.*, 185(1) :308–322, Sep 1969.
- [34] G. Gallavotti. Rigorous theory of the boltzmann equation in the lorentz gas, 1972.
- [35] J. Glimm and A. Jaffe. *Quantum physics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1987. A functional integral point of view.

- 
- [36] F. Golse. Recent Results on the Periodic Lorentz Gas. 62 pages. Course at the conference "Topics in PDEs and applications 2008" held in Granada, April 7-11th 2008 ; figure 13 and a misprint in Theorem 4.6 corrected in the new version (MSC) 82C70, 35B27 (82C40, 11A55, 11B57, 11K50).
  - [37] F. Golse. The periodic Lorentz gas in the Boltzmann-Grad limit. In *International Congress of Mathematicians. Vol. III*, pages 183–201. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
  - [38] L. Golubović, S. Feng, and F. Zeng. Classical and quantum superdiffusion in a time-dependent random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 67(16) :2115–2118, 1991.
  - [39] T. Goudon and M. Rousset. Stochastic acceleration in an inhomogenous time random force field. *Applied Mathematics Research Express*, 2009. 10.1093/amrx/abp001.
  - [40] J. Heinrichs. Diffusion and superdiffusion of a quantum particle in time-dependent random potentials. *Z. Phys. B*, 89 :115–121, 1992.
  - [41] T. Holstein. Studies of polaron motion : Part ii. the "small" polaron. *Annals of Physics*, 8(3) :343 – 389, 1959.
  - [42] V. Jakšić and C.-A. Pillet. Ergodic properties of classical dissipative systems. I. *Acta Math.*, 181(2) :245–282, 1998.
  - [43] A. M. Jayannavar and N. Kumar. Nondiffusive quantum transport in a dynamically disordered medium. *Phys. Rev. Lett.*, 48(8) :553–556, 1982.
  - [44] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, 1989.
  - [45] H. Kesten and G. C. Papanicolaou. A limit theorem for turbulent diffusion. *Comm. Math. Phys.*, 65(2) :97–128, 1979.
  - [46] P.E. Kloeden and E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer-Verlag, 1999.
  - [47] R. Kubo. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on Progress in Physics*, 29(1) :255–284, 1966.
  - [48] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical physics. II*, volume 31 of *Springer Series in Solid-State Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1991. Nonequilibrium statistical mechanics.
  - [49] P. Lafitte, S. De Bièvre, and P. Parris. Normal transport properties in a metastable stationary state for a classical particle coupled to a non-ohmic bath. *J. Stat. Phys.*
  - [50] H. Larralde, F. Leyvraz, and C. Mejía-Monasterio. Transport properties of a modified Lorentz gas. *J. Statist. Phys.*, 113(1-2) :197–231, 2003.
  - [51] P. D. Lax and R. S. Phillips. *Scattering theory*, volume 26 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, second edition, 1989. With appendices by Cathleen S. Morawetz and Georg Schmidt.
  - [52] N. Lebedev, P. Maas, and S. Feng. Diffusion and superdiffusion of a particle in a random potential with finite correlation time. *Phys. Rev. Lett.*, 74(11) :1895–1899, 1995.
  - [53] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and stochastic motion*, volume 38 of *Applied Mathematics*. 1983.
  - [54] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*, volume 38 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.

- [55] M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg. Stochastic and adiabatic behavior of particles accelerated by periodic forces. *Phys. Rev. A*, 5(4) :1852–1866, Apr 1972.
- [56] P. Lochak and C. Meunier. *Multiphase averaging for classical systems*, volume 72 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988. With applications to adiabatic theorems, Translated from the French by H. S. Dumas.
- [57] H. A. Lorentz. The motion of electrons in metallic bodies I. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 7 :438–453, 1904.
- [58] A. Loskutov, A. B. Ryabov, and L. G. Akinshin. Mechanism for Fermi acceleration in dispersing billiards with time-dependent boundaries. *J. Exp. Theor. Phys.*, 89(5) :966–974, 1999.
- [59] A. Loskutov, A. B. Ryabov, and L. G. Akinshin. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. *J. Phys. A*, 33(44) :7973–7986, 2000.
- [60] J. Marklof and A. Strömbergsson. Kinetic transport in the two-dimensional periodic Lorentz gas. *Nonlinearity*, 21(7) :1413–1422, 2008.
- [61] J. Marklof and A. Strombergsson. The Boltzmann-Grad limit of the periodic Lorentz gas. *ArXiv e-prints*, January 2008.
- [62] C. Mejía-Monasterio, H. Larralde, and F. Leyvraz. Coupled normal heat and matter transport in a simple model system. *Phys. Rev. Lett.*, 86(24) :5417–5420, Jun 2001.
- [63] K. Olaussen and P. C. Hemmer. The drift velocity of a hard-sphere lorentz gas. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 15(10) :3255, 1982.
- [64] J. Piasecki, Alex Hansen, and E. H. Hauge. Magnetotransport in the 2d lorentz model : linear and nonlinear effects of a weak electric field. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 30(3) :795, 1997.
- [65] J. Piasecki and E. Wajnryb. Long-time behavior of the lorentz electron gas in a constant, uniform electric field. *J. Stat. Phys.*, 21(5) :549–559, 1979.
- [66] C.-A. Pillet. Some results on the quantum dynamics of a particle in a Markovian potential. *Comm. Math. Phys.*, 102(2) :237–254, 1985.
- [67] C.-A. Pillet. Asymptotic completeness for a quantum particle in a Markovian short range potential. *Comm. Math. Phys.*, 105(2) :259–280, 1986.
- [68] L. Pontriaguine. *Équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir, Moscow, 1975. Traduit du russe par Guy Der-Megreditchian [G. Ter-Mkrtčjan].
- [69] F. Poupaud and A. Vasseur. Classical and quantum transport in random media. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(6) :711–748, 2003.
- [70] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [71] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.
- [72] F. Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill, 1965.
- [73] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

- 
- [74] M.N. Rosenbluth. Comment on “Classical and quantum superdiffusion in a time-dependent random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :1831, 1992.
- [75] M.B. Silevitch and K.I. Golden. Dielectric formulation of test particle energy loss in a plasma. *J. Stat. Phys.*, 7(1) :65–87, 1973.
- [76] A.A. Silvius, P.E. Parris, and S. De Bièvre. Adiabatic-nonadiabatic transition in the diffusive Hamiltonian dynamics of a classical Holstein polaron. *Phys. Rev. B*, 73 :014304, 2006.
- [77] B. Simon. *Functional integration and quantum physics*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2005.
- [78] H. Spohn. The Lorentz process converges to a random flight process. *Comm. Math. Phys.*, 60(3) :277–290, 1978.
- [79] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer-Verlag, 1979.
- [80] P. A. Sturrock. Stochastic acceleration. *Phys. Rev.*, 141(1) :186–191, 1965.
- [81] D. Szász and T. Varjú. Limit laws and recurrence for the planar Lorentz process with infinite horizon. *J. Stat. Phys.*, 129(1) :59–80, 2007.
- [82] S. Tcheremchantsev. Markovian Anderson model : bounds for the rate of propagation. *Comm. Math. Phys.*, 187(2) :441–469, 1997.
- [83] S. Tcheremchantsev. Transport properties of Markovian Anderson model. *Comm. Math. Phys.*, 196(1) :105–131, 1998.
- [84] S. M. Ulam. On some statistical properties of dynamical systems. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (University of California, Berkeley, June 20–July 30, 1960)*, pages 315–320. 1961. Translated into Russian (1963).
- [85] T. Yamada and S. Watanabe. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11 :155–167, 1971.