

Université Lille 1
Ecole Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur

THESE

Spécialité : Génie Electrique

Présentée par :

Francisc BÖLÖNI

En vue de l'obtention du grade de Docteur en Génie Electrique
de l'Université Lille 1

**Contribution à la modélisation déterministe et stochastique
du phénomène de *pull-in* dans les MEMS à actionnement électrostatique**

Soutenue le 10 novembre 2010

Devant le Jury composé de :

Mr. Jean-Louis COULOMB	Rapporteur
Mr. Yvan LEFEVRE	Rapporteur
Mr. Michel HECQUET	Examineur
Mr. Jan MELKEBEEK	Examineur
Mr. Nicolas TIERCELIN	Examineur
Mr. Abdelkader BENABOU	Examineur
Mr. Abdelmounaïm TOUNZI	Examineur, Directeur de Thèse

Remerciements

Je remercie Messieurs les Professeurs Jean-Louis COULOMB et Yvan LEFEVRE pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, puis particulièrement à M. COULOMB pour avoir présidé le jury.

Je remercie également mes examinateurs Messieurs Michel HECQUET, Jan MELKEBEEK, et Nicolas TIERCELIN.

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse, le Professeur Abdelmounaïm Tounzi pour ce qu'il m'aura appris tant sur le plan scientifique que sur le plan humain et surtout pour sa patience tout au long de ces années.

Je remercie également mon co-encadrant Abdelkader Benabou pour ses défis moraux systématiques, m'obligeant à sortir de mon état de confort, sans lesquels je n'aurais pas abouti avec autant de succès. Dans le cadre de ces travaux de thèse, j'ai été amené à collaborer avec d'excellents scientifiques. Je remercie donc Guillaume Krebs pour les discussions sur l'estimation d'erreur, Stéphane Clénet, Karim Beddek et Hung Mac pour leurs discussions de qualité sur les aspects stochastiques et Thomas Henneron et Yvonick Le Menach pour les éclaircissements sur le fonctionnement du code de calcul `code_Carmel`.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Francis Piriou pour son encadrement au début de la thèse et ses conseils avisés tout au long de mon parcours.

Je remercie tous mes collègues du L2EP, Anne-Laure, Maxime, Guillaume P., Bruno, Juliana, Julien, Benoît, Zuqi, Tony pour avoir contribué à une bonne ambiance de travail.

Il me faut ajouter quelques mots supplémentaires pour mes amis qui ont ensoleillé mes journées d'une sincère amitié. Merci donc à Mugur, Gabi Munteanu, Costin, Oana, Christian, Raluca, Mircea, Radu, Dana, Patrice, Paul et Leandro.

Je remercie l'ensemble de ma famille pour son aide précieuse dans les moments difficiles et je souhaite bonne chance à mes petits frères, Lacika et Zoltan.

Le dernier remerciement est adressé à Teodor Repciuc, mon mentor spirituel, qui a su me modeler, malgré une énorme opposition involontaire au changement, en étant un exemple parfait de conduite humaine.

Contribution à la modélisation déterministe et stochastique du phénomène de *pull-in* dans les MEMS à actionnement électrostatique

Résumé

Un microsystème électromécanique (MEMS – Micro Electro-Mechanical Systems) est une structure qui intègre un ou plusieurs éléments mécaniques réalisant la fonction de capteur ou d'actionneur à l'échelle du micron. Jusqu'au milieu des années 1990, les MEMS étaient réservés à des applications spécifiques, notamment dans les domaines spatiales et aéronautiques. Depuis une décennie, ces microsystèmes connaissent un essor important dans de nombreux secteurs grand public comme l'automobile, l'informatique ou encore les télécommunications. La conception et l'évaluation des performances de ces microsystèmes nécessitent des outils de modélisation robustes et fiables. Ainsi, les présents travaux de recherche ont pour objectif la modélisation, déterministe et stochastique, de MEMS à actionnement électrostatique, notamment en ce qui concerne le « phénomène de collage électrostatique » (*pull-in phenomenon*).

Les différentes approches de modélisation associant les deux physiques mises en jeu, à savoir les comportements électrostatique et élastique, sont investiguées. La présentation des résultats suit une approche didactique, allant du modèle le moins précis (analytique) vers le modèle le plus fin (éléments finis), mettant ainsi en évidence les effets prédominants, notamment la déformation des parties mobiles et les effets de bord.

De plus, afin de tenir compte des incertitudes sur la géométrie et les matériaux, une étude stochastique, à l'aide d'approches non intrusives de types Monte Carlo et décomposition en chaos polynomial, est également effectuée pour le calcul de la tension de collage d'un dispositif MEMS.

Mots-clefs : MEMS, microsystèmes, éléments finis, tension de collage, phénomène de collage, couplage électromécanique, modélisation stochastique, Monte Carlo, polynômes chaos

Contribution to the deterministic and stochastic modelling of the *pull-in* phenomenon in electrostatic MEMS

Abstract

MEMS are micro-structures integrating one or several mechanical elements performing as transducers or actuators. Until the mid 90s, MEMS technology was mainly dedicated to aerospace and aeronautical applications. In the last decade, these microsystems have known a strong expansion, spreading in mass market applications like automotive, IT and telecommunications. The design and performance analysis of MEMS requires reliable and robust simulation tools. Thereby, the presented works, aim at the deterministic and stochastic modelling of electrostatic MEMS, focusing on the well known pull-in phenomenon.

The different modelling approaches describing the electrostatic, elastic and coupled electromechanical behaviours are investigated. The results are presented following a didactic approach, from the simplest model (analytical) towards the most accurate (Finite Element), emphasizing the predominant effects, like the deformation of the active parts and fringing effects.

Furthermore, in order to take into account the uncertainties on the geometry and material properties, a stochastic analysis is also realised, using non-intrusive approaches, such as the Monte-Carlo method and the polynomial chaos decomposition, in order to determine the pull-in voltage of a MEMS device.

Keywords : MEMS, microsystems, finite element, pull-in voltage, pull-in phenomenon, electromechanical coupling, stochastic modelling, Monte Carlo, polynomial chaos

Sommaire

CHAPITRE 1 - MICRO SYSTEMES ELECTRO MECANQUES **17**

1.1. GENERALITES MICROSYSTEMES, MICRO-ACTIONNEURS	18
1.1.1. QU'EST-CE QU'UN MICROSYSTEME ?	18
1.1.2. HISTORIQUE	19
1.2. PRINCIPAUX PHENOMENES PHYSIQUES EXPLOITES DANS LES MEMS	20
1.2.1. PROPRIETE PIEZO-RESISTIVE	20
1.2.2. PROPRIETE PIEZO-ELECTRIQUE	21
1.2.3. PROPRIETES D'ELECTROSTRICITION ET MAGNETOSTRICITION	23
1.2.4. PROPRIETE THERMIQUE	23
1.2.5. PROPRIETE OPTIQUE	24
1.2.6. PROPRIETE MAGNETIQUE	25
1.2.7. PROPRIETE ELECTROSTATIQUE	26
1.2.8. SYNTHESE DES DIFFERENTES PROPRIETES	28
1.3. COMPARAISON DES ACTIONNEMENTS ELECTROSTATIQUE ET MAGNETIQUE DANS LES MEMS	28
1.4. EXEMPLES D'APPLICATIONS D'ACTIONNEMENT ELECTROSTATIQUE	31
1.4.1. DISPOSITIFS OPTIQUES	31
1.4.1.1. Miroir à déflexion contrôlée pour l'optique adaptative	31
1.4.1.2. Miroir à mouvement de torsion	32
1.4.2. CAPACITES REGLABLES	34
1.4.2.1. Réglage de la distance inter-plaques. Structure à plaques parallèles	34
1.4.2.2. Réglage de la surface de plaques. Peignes interdigités	36
1.4.3. LES RESONATEURS ET LES CAPTEURS RESONANTS	37
1.4.3.1. Les résonateurs micromécaniques	37
1.4.3.2. Les capteurs résonants	37
1.4.4. APPLICATIONS DE LA MICROFLUIDIQUE	38
1.4.4.1. Micropompes	39
1.4.4.2. Microvalves	40
1.5. CONCLUSION	41

CHAPITRE 2 - MODELISATION DES MEMS **47**

2.1. PROBLEMATIQUE : PHENOMENE DE COLLAGE ELECTROSTATIQUE (« PULL-IN »)	50
2.2. ETAT DE L'ART SUR LES MODELES DE DETERMINATION DE LA TENSION DE PULL-IN	51
2.2.1. MODELISATION ANALYTIQUE	52
2.2.2. MODELISATION NUMERIQUE	53
2.2.3. LOGICIELS DEDIES	54
2.3. MODELES ANALYTIQUES	54
2.3.1. MODELE ANALYTIQUE ELECTROSTATIQUE	55
2.3.2. MODELE ANALYTIQUE MECANIQUE	56
2.3.2.1. Poutre encastrée à une seule extrémité	58
2.3.2.2. Poutre posée à ses deux extrémités	59
2.3.2.3. Poutre encastrée à ses deux extrémités	60
2.4. MODELISATION ELEMENTS FINIS. CADRE THEORIQUE	61
2.4.1. MODELE ELEMENTS FINIS ELECTROSTATIQUE	61
2.4.1.1. Problème électrostatique	62
2.4.1.2. Formulation en potentiel scalaire	63
2.4.1.3. Formulation en potentiel vecteur	64

2.4.1.4. Calcul de force	65
2.4.2. MODELE ELEMENTS FINIS MECANIQUE (ELASTIQUE)	66
2.4.2.1. Equations d'équilibre d'un solide élastique	66
2.4.2.2. Conditions aux limites	67
2.4.2.3. Le principe des travaux virtuels	68
2.5. MODELES COUPLES ELECTROSTATIQUE - MECANIQUE	69
2.5.1. MODELE ANALYTIQUE SIMPLE (MODELE NATHANSON)	69
2.5.2. MODELE ANALYTIQUE AVANCE (IMEC)	71
2.5.2.1. Influence du coefficient de rigidité effective K_{eff}	72
2.5.2.2. Influence du coefficient de surface effective A_{eff}	74
2.5.3. MODELE COUPLE EF ELECTROSTATIQUE 2D – ANALYTIQUE MECANIQUE (EFE2D-AM)	75
2.5.4. MODELE COUPLE EF ELECTROSTATIQUE 3D – ANALYTIQUE MECANIQUE (EFE3D-AM)	76
2.5.4.1. Procédure de détermination de la tension de <i>pull-in</i>	77
2.5.5. MODELE COUPLE EF ELECTROSTATIQUE 3D – EF MECANIQUE 3D (EFE3D-EFM3D)	78
2.6. CONCLUSION	80

CHAPITRE 3 - EXPLOITATION DES MODELES **85**

3.1. EXPLOITATION DES MODELES DE <i>PULL-IN</i>	86
3.1.1. DESCRIPTION DES SYSTEMES ETUDIES	86
3.1.2. MODELISATION ANALYTIQUE SIMPLE	88
3.1.2.1. Exploitation pour les structures définies	88
3.1.2.2. Etude paramétrique	88
3.1.3. MODELISATION FINE	90
3.1.3.1. Les effets de bords	90
3.1.3.2. Effet de la déformation	95
3.1.3.3. Discussion	97
3.1.3.4. Effet conjugué	98
3.1.4. SYNTHESE SUR LES DIFFERENTS MODELES	108
3.2. MODELISATION D'UN MOTIF ELEMENTAIRE D'UN PEIGNE INTER-DIGITE	109
3.2.1. ERREUR NUMERIQUE SUR LA TENSION DE <i>PULL-IN</i>	110
3.2.2. ESTIMATEUR D'ERREURS	112
3.2.2.1. Estimateur basé sur la discontinuité numérique du champ	112
3.2.2.2. Estimateur basé sur la vérification des lois de comportement à partir des deux formulations complémentaires	115
3.2.3. APPLICATION DU RAFFINEMENT DE MAILLAGE	116
3.2.3.1. Résultats de l'estimateur basé sur la discontinuité du champ D	119
3.2.3.2. Résultats de l'estimateur basé sur la vérification des lois de comportement	121
3.2.4. SYNTHESE	123
3.3. CONCLUSION	124

CHAPITRE 4 - MODELISATION STOCHASTIQUE DE MEMS **127**

4.1. TECHNOLOGIES DE FABRICATION	128
4.1.1. LE MICRO USINAGE DE SURFACE	128
4.1.2. LE MICRO USINAGE DE VOLUME	129
4.2. PROBLEMATIQUE / CONTEXTE	130
4.3. ETAT DE L'ART DE LA MODELISATION STOCHASTIQUE DE MEMS	131
4.3.1. METHODES D'ECHANTILLONNAGE	132
4.3.2. METHODE DU CHAOS POLYNOMIAL	133
4.4. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE DE MODELISATION STOCHASTIQUE	137
4.4.1. METHODE DE MONTE-CARLO	137

4.4.2. METHODE DE DECOMPOSITION EN CHAOS POLYNOMIAL	139
4.5. APPLICATIONS	146
4.5.1. ANALYSE STATISTIQUE	146
4.5.1.1. Modélisation électrostatique	146
4.5.1.2. Modélisation mécanique	150
4.5.1.3. Discussion sur analyse statistique	152
4.5.2. MODELISATION ANALYTIQUE DU <i>PULL-IN</i>	153
4.5.2.1. Configurations à une seule variable aléatoire	153
4.5.2.2. Configurations à deux variables aléatoires	154
4.5.2.3. Configurations à trois variables aléatoires	155
4.5.3. MODELISATION STOCHASTIQUE DU <i>PULL-IN</i> A L' AIDE D' UN MODELE ELECTROSTATIQUE PAR ELEMENTS FINIS	156
4.5.3.1. Configurations à une seule variable aléatoire	156
4.5.3.2. Configurations à deux variables aléatoires	158
4.5.3.3. Configurations à trois variables aléatoires	158
4.5.3.4. Discussion	159

ANNEXES **169**

A. FORMULATION EN DEPLACEMENTS, DISCRETISATION	170
B. NOTIONS DE STATISTIQUES	172
C. PROPRIETES DES POLYNOMES ORTHOGONAUX	178

Introduction générale

Un microsystème électromécanique (Micro Electro Mechanical System – MEMS, en anglais) est un microsystème comprenant un ou plusieurs éléments mécaniques, réalisant la fonction de capteur ou d'actionneur avec au moins une structure présentant des dimensions à l'échelle du micron. Les premiers travaux présentant un MEMS opérationnel, fabriqué à l'aide des technologies de fabrication utilisées pour les circuits intégrés, datent de 1967. Depuis, de nombreux travaux portant sur les aspects tels que la conception, la fabrication ou bien la modélisation de MEMS ont été effectués au niveau international.

Les MEMS sont amplement utilisés dans les applications des domaines de l'automobile (pour déclencher les airbags des voitures), de l'aéronautique (pour contrôler de débits, circulations de fluides), des communications (dans des commutateurs, résonateurs ou filtres RF) ou de l'optique (pour constituer les pixels des écrans de haute définition).

Dans la plupart de ces applications, il est nécessaire d'assurer un fonctionnement basé sur des critères de fiabilité, de précision et d'intégration. Ainsi, le développement et l'utilisation de modèles performants aura un rôle très important, d'une part, dans la phase de conception afin d'assurer la ou les fonctionnalité(s) souhaitée(s) et, d'autre part, dans la phase d'optimisation pour l'amélioration des performances des microsystèmes existants.

D'un point de vue historique, ce sont les microsystèmes électrostatiques qui, tirant profit de leur compatibilité avec les techniques de fabrication des circuits intégrés, ont été développés en premier lieu et sont aujourd'hui les plus répandus. Le principe de ces dispositifs repose sur la création d'une force électrostatique, par application d'une différence de potentiel électrique, afin d'engendrer la déformation ou le déplacement d'une partie mobile. Toutefois, dans la plupart de ces dispositifs apparaît un phénomène non-linéaire appelé « phénomène de collage » électrostatique (*pull-in* phenomenon, en anglais). Ce phénomène, caractérisé par une tension et une distance de collage, est soit exploité pour assurer la fonctionnalité du microsystème, soit évité car pouvant conduire à la dégradation, jusqu'à la destruction, et au fonctionnement erratique du dispositif. Afin de décrire ce phénomène, la résolution d'un problème couplé électromécanique est nécessaire, notamment pour la détermination de la tension et de la distance de *pull-in*. La précision de détermination de ces paramètres dépendra alors fortement du niveau de description physique (hypothèses) du modèle qui sera utilisé.

Dans les travaux traitant de la modélisation des microsystèmes électrostatiques, des approches analytiques sont développées dans le cas de géométries simples, telles des poutres ou des plaques. Le modèle le plus simple que l'on puisse rencontrer traite de la modélisation d'un microsystème de type plaques parallèles non déformables soumises à une différence de potentiel. La précision de ce type de modèle peut être améliorée en

introduisant des paramètres d'ajustement, le plus souvent à partir de mesures expérimentales. D'autres modèles analytiques, basés sur une approche énergétique, permettent la prise en compte de certains effets de façon intrinsèque, comme la déformation de la poutre, les effets de bords et la redistribution des charges électriques lors de la déformation du dispositif.

Ces modèles analytiques atteignent vite leur limitation lorsque les géométries mises en jeu sont plus complexes. L'approche numérique se révèle alors un choix judicieux pour rendre compte de cette complexité géométrique. La méthode des éléments finis, couramment utilisée pour la modélisation de systèmes électromagnétiques à l'échelle macroscopique, est souvent privilégiée pour la modélisation des microsystèmes. Son utilisation pour la modélisation du couplage électromécanique peut être effectuée par un couplage numérique *fort* ou un couplage numérique *faible* (chaînage) des domaines de résolution électrostatique et mécanique.

Le *couplage numérique fort* consiste à assembler dans un système non linéaire unique, les équations de Maxwell et les équations d'élasticité. Dans le cadre d'un tel couplage, la résolution d'une seule matrice globale est nécessaire. En revanche, le fait d'avoir des termes de couplage entre les degrés de liberté mécaniques et électriques est un inconvénient, tant au niveau des temps de calcul qu'au niveau de l'implémentation. Dans le cas d'un *couplage numérique faible*, les deux problèmes sont résolus de manière itérative. La résolution du problème électrostatique fournit la force électrostatique, qui est utilisée comme terme source dans le calcul élastique. Ce dernier permet d'obtenir les déformations au sein du système, menant à la répartition spatiale du champ électrique. Un nouveau calcul électrostatique est alors nécessaire et le cycle est répété jusqu'à convergence de la solution.

D'autre part, dans la très grande majorité des modèles rencontrés dans la bibliographie, l'approche considérée reste déterministe, les paramètres d'entrée des modèles sont considérés parfaitement connus. Or, si les procédés de fabrication de l'échelle macroscopique sont bien maîtrisés, ceci n'est pas toujours le cas des procédés de fabrication à l'échelle du micron. En effet, les procédés de fabrication de MEMS engendrent de fortes variations des paramètres géométriques, ainsi que des propriétés matériaux. Par conséquent, afin d'améliorer la précision des modèles, les incertitudes introduites par les processus de fabrication doivent être considérées.

Les travaux présentés dans ce mémoire traitent de la comparaison des différentes approches pour la modélisation du phénomène de pull-in au sein des microsystèmes électromécaniques. Les études présentées couvrent les modèles du plus simple (analytique) au plus complexe (chaînage de codes éléments finis tridimensionnels). La prise en compte des aspects stochastiques, liés aux paramètres de matériaux et de géométrie, est également développée à l'aide de deux approches non intrusives (i.e. sans modification des modèles déterministes).

Le L2EP dispose d'un code de calcul éléments finis (*code_Carmel*) qui permet de résoudre, entre autres, les problèmes électrostatiques tridimensionnels. Dans ces travaux nous privilégierons le couplage faible, ou chaînage, de *code_Carmel* avec un code éléments finis pour les problèmes mécaniques (*code_Aster*).

Ces travaux de recherche ont été effectués dans le cadre du PAI (Pôle d'Attraction Interuniversitaires) qui regroupe plusieurs universités (Liège, Gent, Leuven et Lille).

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres.

Le premier chapitre aborde une présentation générale des microsystèmes électromécaniques. Les principaux phénomènes physiques exploités dans les MEMS y sont décrits avec des exemples d'applications. Une partie plus conséquente est dédiée aux exemples d'application utilisant le phénomène électrostatique.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation théorique des modèles permettant de décrire le phénomène de collage. Tout d'abord, les modèles analytiques électrostatique et mécanique sont présentés. Ensuite, les modèles éléments finis des deux domaines électrostatique et élastique sont développés. Enfin, les différentes stratégies de couplage des modèles analytique, éléments finis 2D et éléments finis 3D, en vue du calcul de la tension de *pull-in*, sont abordées.

Le troisième chapitre est dédié à l'exploitation des modèles développés pour l'étude de la tension de collage dans des dispositifs MEMS électrostatiques. Ainsi, ces modèles sont appliqués à deux configurations typiques de MEMS simples, à poutre étroite et large. La présentation des résultats issus des différents modèles suit une approche didactique, du modèle le moins précis, vers le modèle le plus fin. Cette approche permet de traiter et de mettre en évidence les effets prédominant au sein des dispositifs modélisés, notamment la déformation des parties actives et les effets de bord.

Le dernier chapitre est, quant à lui, consacré à la prise en compte des incertitudes dans la modélisation. Dans un premier temps, les procédés de fabrication couramment utilisés pour les MEMS sont énumérés, puis un état de l'art des méthodes de modélisation stochastique de MEMS est effectué. Deux méthodes non intrusives, la méthode Monte-Carlo et celle basée sur la décomposition en chaos polynomial, sont développées. La première technique est utilisée lors d'une analyse statistique afin de mettre en évidence les paramètres les plus influents sur le comportement électrostatique et mécanique. Nous appliquons ensuite les deux approches stochastiques à un modèle déterministe couplé électrostatique 2D et mécanique analytique. Cette dernière étude considère des paramètres géométriques et une propriété de matériau comme étant soumis à des incertitudes. L'effet de l'incertitude de ces paramètres, sur la tension de collage des dispositifs MEMS, est mis en évidence par le calcul des grandeurs statistiques en sortie des modèles

1

Micro Systèmes Electro Mécaniques

1.1. Généralités microsystèmes, micro-actionneurs

Le thème principal des travaux développés dans cette thèse concerne la modélisation de microsystèmes électrostatiques (MEMS). Ces structures sont relativement récentes et constituent une partie de la grande famille des microsystèmes. Ce chapitre a pour objectif de faire une présentation générale de ces derniers tout en portant une attention plus particulière aux MEMS électrostatiques. Dans un premier temps, l'histoire des microsystèmes sera succinctement retracé suivi d'une présentation des différentes propriétés physiques qui y sont exploitées. L'accent sera ensuite mis sur l'actionnement électrostatique dont on détaillera les caractéristiques. Une étude comparative entre l'actionnement électrostatique et magnétique sera également effectuée, notamment en mettant en exergue les avantages et inconvénients de ces deux types d'actionnement.

Enfin, des exemples d'applications dans les différents domaines d'utilisation des microsystèmes seront donnés.

1.1.1. Qu'est-ce qu'un microsystème ?

Du point de vue des dimensions, les microsystèmes peuvent être situés entre les machines conventionnelles à l'échelle macroscopique et les nano-mécanismes futuristes [Pelesko 2003]. Le terme "microsystème" (Micro Electro Mechanical System MEMS - en anglais) désigne l'assemblage, dans un même composant, et quelle que soit la technique employée, d'un actionneur, d'un capteur, et d'une électronique. En fait, on parle encore de microsystème même si l'assemblage ne comporte qu'un capteur ou un actionneur associé à une électronique. Dans le cas où le composant ne comporte qu'un actionneur contrôlé par une électronique non intégrée, on parle plutôt de micro-actionneur. Ceci est également valable pour les capteurs.

Les microsystèmes rendent possible le développement de produits intelligents et donnent une dimension supplémentaire aux capacités de la microélectronique. En effet, les capacités de perception et de commande des micro-capteurs et micro-actionneurs élargissent les domaines de conception et d'applications possibles. Les circuits intégrés de la micro-électronique sont souvent considérés comme les « cerveaux » d'un système, alors que les microsystèmes augmentent la capacité de décision avec des « yeux » et des « bras » afin de permettre aux microsystèmes d'appréhender et de contrôler l'environnement. Les capteurs amassent de l'information à partir de l'environnement en mesurant des phénomènes mécaniques, thermiques, biologiques, chimiques, optiques ou magnétiques. La partie électronique traite ensuite l'information reçue des capteurs et, au travers d'un processus de prise de décision, « pilote » les actionneurs. Ceux-ci répondent par un mouvement, un positionnement, une régulation, un pompage ou bien une filtration, contrôlant ainsi l'environnement pour un objectif ou un résultat désiré.

Les microsystèmes étant fabriqués à partir de techniques de fabrication similaires à celles des circuits intégrés, des niveaux de fonctionnalité, de fiabilité et de complexité sans précédent peuvent ainsi être réalisés sur une petite puce de silicium, pour un coût relativement faible.

1.1.2. Historique

L'origine de la technologie des microsystèmes se trouve clairement dans les développements technologiques durant la Seconde Guerre Mondiale. Le développement des radars a particulièrement stimulé la recherche dans la synthèse des matériaux semi-conducteurs purs. Ces matériaux, notamment le silicium pur, sont devenus les matériaux de base des circuits intégrés et de la technologie des MEMS [Pelesko 2003].

Le précurseur dans ce domaine de recherche est le physicien et prix Nobel de physique (1965) Richard Feynman qui, lors de la réunion annuelle de l'American Physical Society le 26 décembre 1959, annonça que le monde microscopique serait un formidable champ d'investigation scientifique dès que la technologie en donnerait les moyens [Feynman 1992]. La présentation portant le nom de « *There is plenty room at the bottom* », que l'on peut traduire par « Il y a beaucoup d'espace en bas », avait pour but d'attirer l'attention sur l'intérêt de la miniaturisation, non pas en terme de taille ou de volume, mais sur le fait que la miniaturisation d'un système rend possible la multiplication des fonctions réalisées par celui-ci. En effet, tout en gardant le volume occupé par un système, la miniaturisation permettra de démultiplier les tâches que celui-ci pourra assurer. Feynman est d'ailleurs le premier chercheur à avoir proposé l'utilisation de la technologie de fabrication des circuits intégrés dans le but de réaliser des machines microscopiques. Il est évident que les premiers acteurs du domaine ont été ceux qui, comme Feynman l'avait entrevu, possédaient les moyens technologiques, à savoir les chercheurs issus de la micro-électronique.

Les premiers travaux présentant un MEMS opérationnel, fabriqué en utilisant les mêmes techniques que celles des circuits intégrés [Nathanson 1967], ont été publiés seulement 10 ans après l'invention du circuit intégré à base de transistors. Et c'est seulement au début des années 80 que les MEMS parviendront à retenir l'attention, notamment pour la fabrication des capteurs. Le début des années 2000 est marqué par la popularité des MEMS dans des applications comme les têtes d'imprimantes à jet d'encre ou encore des accéléromètres [Analog 2010] employés pour l'ouverture des airbags de voitures. Actuellement, on rencontre des applications plus complexes utilisant cette technologie, comme les vidéoprojecteurs numériques, dont on détaillera les caractéristiques ultérieurement [TI 2010]. Aujourd'hui, les MEMS ont atteint un niveau suffisant de maturité pour l'intégration dans diverses applications industrielles.

Le Tableau I présente un bref historique avec différents repères dans le développement des MEMS.

TABLEAU I

1940	La découverte du RADAR entraîne le développement de semi-conducteurs purs.
1959	Présentation de R. Feynman « There's plenty of room at the bottom ».
1967	Fabrication du premier dispositif MEMS par H. C. Nathanson.
1970	Le microprocesseur est inventé, conduisant à une demande de circuits intégrés plus élevée.
1979	Le premier accéléromètre est développé à l'Université de Stanford.
1984	Le micro-usinage de surface est développé à l'Université de Californie, Berkeley. Les microsystèmes et les circuits intégrés peuvent être fabriqués ensemble pour la première fois.
1992	Le procédé de fabrication Multi Users MEMS Process Service (MUMPS) est mis en place.
2000	Les années 2000 sont marquées par une augmentation continue des dispositifs et applications utilisant les MEMS.

1.2. Principaux phénomènes physiques exploités dans les MEMS

Selon les tâches qu'ils doivent réaliser, les microsystèmes peuvent être classés en deux groupes : actionneurs et capteurs. Dans ces deux catégories, les propriétés utilisées pour l'actionnement ou pour la détection [Cugat 2002/I] sont basées sur les mêmes principes physiques. Les plus couramment rencontrés sont énumérés dans la suite, avec quelques uns des exemples d'applications associées.

1.2.1. Propriété piézo-résistive

Quand un matériau piézo-résistif est soumis à une contrainte, il réduit ou augmente sa capacité à transporter le courant, i.e. sa conductivité électrique. Cette propriété peut alors être utilisée pour détecter un déplacement à partir de la mesure du courant entre les deux extrémités d'un matériau piézo-résistif déformé.

En 1954, il a été découvert que l'effet de piézo-résistivité du silicium est beaucoup plus élevé que celui mesuré dans les métaux [Smith 1954], ce qui rend son utilisation bien adaptée pour les applications de type capteurs MEMS piézo-résistifs. Le premier capteur basé sur l'effet piézo-résistif date de 1962 [Tufté 1962] et consiste en un diaphragme de silicium utilisé pour la mesure de la pression appliquée (capteur de pression). Le diaphragme contient des régions piézo-résistives réalisées par des diffusions locales d'impuretés.

Un autre exemple d'application de l'effet piézo-résistif est le capteur utilisé dans les « airbags » des voitures modernes (accéléromètre). Il consiste en une micro-poutre de type « cantilever » (encastrée à une seule extrémité) ayant une masse fixée à son extrémité libre (Figure 1). Lorsque le véhicule est en phase de freinage, la décélération agit sur la masse et fléchit la poutre. La déflexion de cette dernière est

mesurée par une piézo-résistance. Si la décélération dépasse un certain seuil, par conséquent une certaine déflexion de la poutre, l'airbag est enclenché. Ce type d'accéléromètre doit être d'une fiabilité extrêmement élevée.

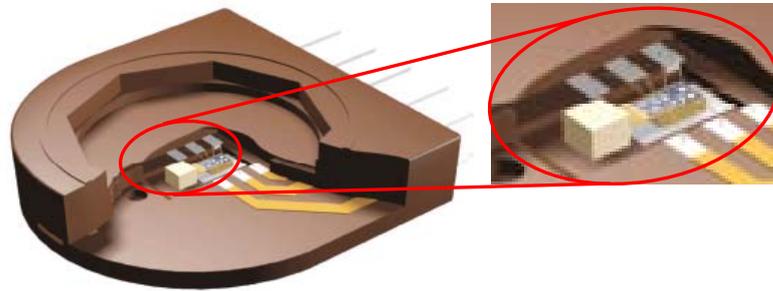


Figure 1. Le capteur de pression SA 20 utilisé dans les airbags [Senso 2010]

1.2.2. Propriété piézo-électrique

Les matériaux piézo-électriques présentent des propriétés électromécaniques linéaires et réversibles qui sont également intéressantes pour la réalisation de microsystèmes. En effet, ce type de matériau subit une déformation mécanique sous l'influence d'une différence de potentiel électrique ou, réciproquement, en génère une sous l'effet d'une déformation mécanique. Ainsi, des dispositifs à base de matériaux piézo-électriques peuvent être conçus en tant qu'*actionneurs* s'ils génèrent une déformation ou une contrainte (effort) : on parle alors de l'effet piézo-électrique inverse. Réciproquement, les dispositifs conçus pour réaliser la fonction de *capteurs* vont générer un signal électrique à partir d'une déformation : on parle alors de l'effet piézo-électrique direct.

Cette dernière propriété permet aux matériaux piézoélectriques de s'intégrer parfaitement dans la réalisation de micro-capteurs. Par contre, étant donné que l'énergie emmagasinée dans ce type de système diminue avec le volume, la miniaturisation ne constitue pas un avantage dans le cas des piézo-actionneurs [Tadigadapa 2009]. Néanmoins, leur fréquence de résonance étant relativement élevée, cela permet d'obtenir des puissances acceptables. Par ailleurs, leur temps de réponse, inférieur à la microseconde, allié à une alimentation d'une dizaine de volts pour une consommation de l'ordre de quelques microwatts, constituent des atouts indéniables [Tadigadapa 2009].

D'un point de vue industriel, on retrouve des micro-capteurs piézo-électriques notamment dans des applications de communication sans fil. Leur stabilité thermique élevée, leur protection contre les décharges électrostatiques (ESD – Electrostatic Discharge), leur sélectivité et leur facteur de qualité mécanique accrus les rendent très avantageux pour remplir les fonctions de filtres dans les applications sans fil.

Ces capteurs sont également utilisés en tant que vibromètres, accéléromètres ou gyroscopes piézo-électriques. Les accéléromètres mettent à profit le changement de la fréquence de résonance d'un oscillateur en quartz lorsque celui-ci est soumis à un effort mécanique pour mesurer une accélération linéaire [Willis 1964]. Les gyroscopes

utilisent quant à eux les effets de la force de Coriolis [Tadigadapa 2009] pour mesurer la vitesse de rotation d'un objet.

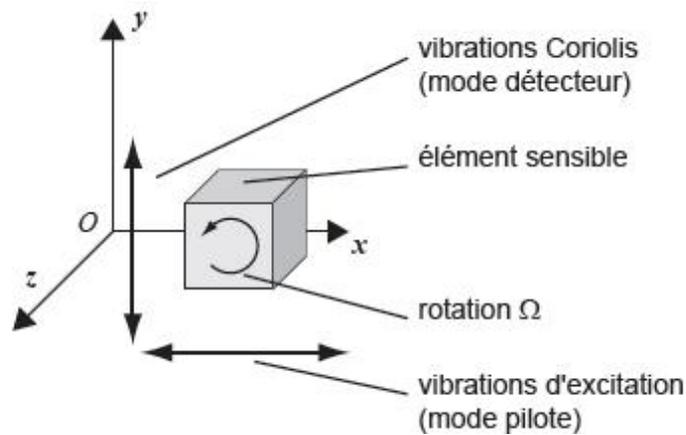


Figure 2. Schéma de principe du fonctionnement des gyromètres vibrants à effet Coriolis [Parent 2008]

Le principe de fonctionnement de ce type de capteurs est illustré sur la Figure 2. L'élément sensible du capteur est mis en vibration (vibrations d'excitation). Lorsqu'elle est soumise à un mouvement de rotation (Ω), une seconde vibration sera induite par effet Coriolis, vibration proportionnelle à la vitesse de rotation. En mesurant l'amplitude de cette vibration, il est possible de remonter à la valeur de la vitesse de rotation.

Différentes structures d'éléments sensibles existent. Un exemple concret de gyroscope est illustré sur la Figure 3.

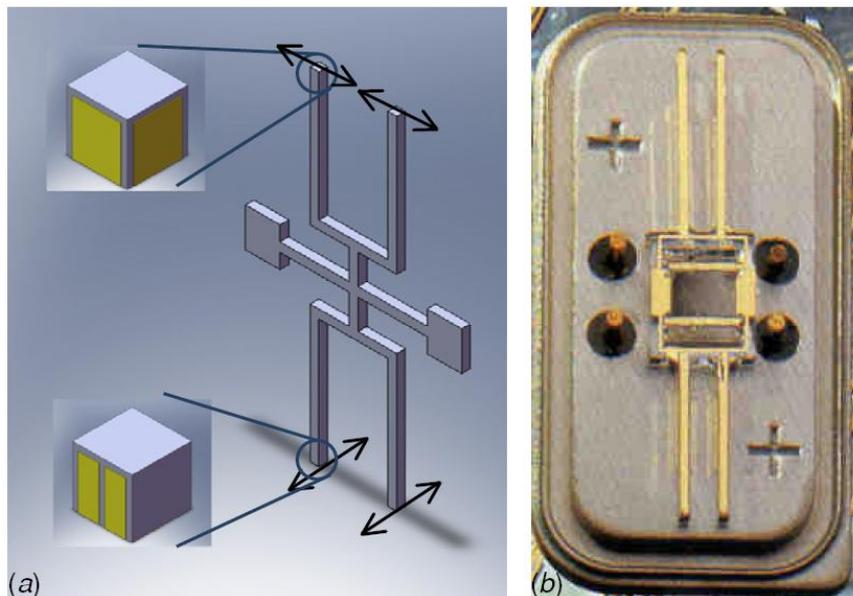


Figure 3. a) Structure typique d'élément sensible b) Gyroscope vibratoire [Tadigadapa 2009]

1.2.3. Propriétés d'électrostriction et magnétostriction

L'électrostriction est une propriété des matériaux diélectriques, due à la présence de domaines électriques répartis de façon aléatoire à l'intérieur du matériau. Sous l'effet d'un champ électrique extérieur chaque domaine se polarise suivant l'axe du champ, ce qui conduit à une réduction de leur dimension dans la direction du champ électrique et un allongement de leurs dimensions perpendiculaires au champ. La déformation résultante est proportionnelle au carré du champ électrique.

Les MEMS utilisant cette propriété sont utilisés dans les applications de relais électriques et commutateurs, obturateurs optiques et valves microfluidiques. Les efforts de recherche dans ce domaine se focalisent sur le développement de matériaux possédant de coefficients d'électrostrictions élevés [Dubois 2006, Lam 2007, Pimpin 2007].

La magnétostriction est quant à elle la propriété qu'ont les matériaux ferromagnétiques à se déformer sous l'effet d'un champ magnétique extérieur.

Cette propriété est exploitée principalement au sein des magnétomètres [Kistenmacher] pour mesurer l'aimantation d'un système ou encore pour les micromiroirs des matrices des commutateurs optiques [Heung Shik 2007].

1.2.4. Propriété thermique

La déformation d'un matériau « thermo-déformable », de par les contraintes thermiques auxquelles il est soumis, peut-être utilisée pour actionner des dispositifs. Une technique classique permettant la montée en température d'un tel matériau, et donc sa déformation, est d'y injecter un courant élevé pour générer un échauffement par effet Joule. Pour ces MEMS dits « thermiques », on peut trouver des principes de fonctionnement basés sur des propriétés combinées de thermique et de pneumatique, d'alliages à mémoire de forme, de matériaux *bimétal* mais aussi de dilatation thermique.

Les micro-actionneurs basés sur les effets thermiques et pneumatiques utilisent le changement de phase entre les états liquide et gazeux ou la dilatation thermique d'un gaz ou d'un liquide. Généralement, ces micro-actionneurs sont formés d'une cavité fermée par une membrane et contenant le fluide actif. En injectant un courant dans une résistance, l'échauffement du fluide entraîne sa dilatation et par conséquent la déformation de la membrane.

Les micro-actionneurs à base d'alliages à mémoire de forme mettent à profit l'effet réversible thermo-mécanique associé à ces alliages. Cet effet consiste en une transformation de la structure atomique du métal à partir d'une certaine température seuil. Par exemple, pour des températures inférieures à la température seuil, ces alliages s'adaptent à la déformation qu'on leur impose (manuellement ou par action mécanique). En revanche, s'ils sont soumis à une température au-delà de ce seuil, ils retrouvent leur forme initiale [Yan 2002].

Les micro-actionneurs thermiques *bimétal* consistent en l'utilisation de deux structures, à coefficients de dilatation thermique différents, collées l'une à l'autre

(Figure 4, a). Sous l'effet de la température, ces structures subissent une dilatation thermique qui, de par la différence des coefficients thermiques, entraîne une déformation (déflexion) de l'ensemble de la structure (Figure 4, b). Concrètement, une augmentation de la température engendre une déformation de la couche métallique. Etant donné qu'elle a un coefficient de dilatation supérieur, sa déformation se fera vers le bas en déformant ainsi la couche élastique, toujours vers le bas.

Cette déformation est d'autant plus importante que la différence entre les coefficients de dilatation des deux structures est importante. Ce type de micro-actionneur à dilatation thermique produit des forces relativement élevées, ainsi que de larges déformations, pour une tension d'alimentation faible. Par ailleurs, la déformation évolue linéairement avec la tension appliquée [Yan 2002].

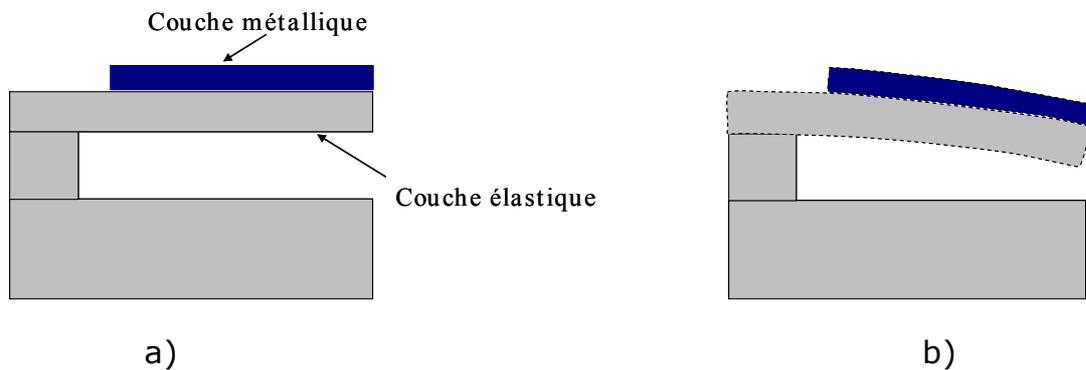


Figure 4. Structure de micro actionneur thermique bimétallique [Yan 2002]

1.2.5. Propriété optique

Il est possible d'exploiter la réflectivité et la transparence de certains matériaux pour la réalisation de capteurs et d'actionneurs MEMS. Ce genre de dispositif est souvent composé d'une source et d'un capteur de lumière. La source de lumière peut être une diode électroluminescente (DEL) ou un faisceau lumineux porté par une fibre optique.

Les microsystèmes optiques sont connus sous l'appellation MOEMS (Micro-Opto-Electromechanical Systems). Ces dispositifs sont essentiellement présents dans les domaines de la communication optique (interconnexions optiques, commutateurs optiques, routeurs, etc) et dans la micro-optique adaptative ou l'imagerie (systèmes de projection). Ils sont également utilisés en tant que micro-capteurs pour la mesure de déplacement ou pour des applications de type spectromètres.

Les avantages des microsystèmes optiques résident dans la possibilité de les disposer en ensembles structurés (ex. ensemble de micro-miroirs, correspondant chacun à un pixel d'un projecteur) avec une précision de positionnement très élevée (également appelée « nano-positionnement »).

Il existe aussi de nombreux microsystèmes optiques dont le principe de base n'est pas exclusivement de nature optique mais plutôt la combinaison avec un actionnement d'une autre nature physique pour réaliser des fonctions optiques. On peut

citer l'actionnement électrostatique associé au déplacement ou à la déformation d'un support de nature optique. Un exemple d'application est la Valve Optique à Grille (Grating Light Valve) [Bloom 1997] constituée de rubans fins réfléchissants disposés parallèlement les uns par rapport aux autres. Dans le cas où les rubans sont parfaitement alignés, le faisceau incident est réfléchi à un angle de 180°. En revanche, si les rubans sont déplacés verticalement, de manière alternative, des motifs de diffraction sont créés (Figure 5). Ce type de dispositif est largement utilisé dans la projection digitale ou dans les affichages de voitures modernes.

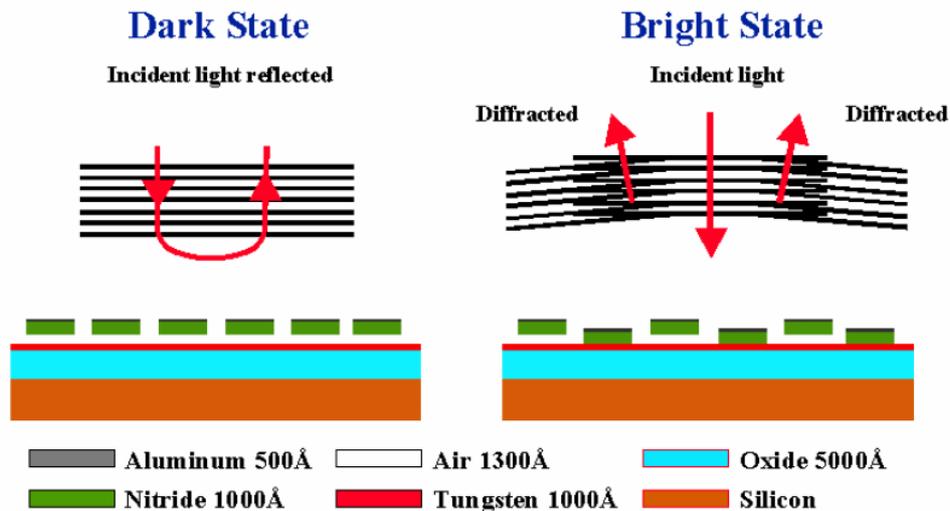


Figure 5. Principe de fonctionnement de la Valve Optique à Grille [Bloom 1997]

1.2.6. Propriété magnétique

Le champ magnétique créé par un courant circulant dans une spire peut être employé pour *manipuler* des objets magnétiques. Ce principe est utilisé dans le fonctionnement des micro-actionneurs magnétiques. De manière similaire, le courant induit peut être utilisé pour *détecter* le mouvement d'un aimant. Ce principe étant à la base du fonctionnement des micro-capteurs magnétiques.

D'un point de vue applicatif, les microsystèmes magnétiques sont utilisés avec succès pour le stockage/enregistrement de données, comme par exemple dans les têtes d'enregistrement de disques durs. Ces microsystèmes sont également intégrés dans des capteurs de champ magnétique, ou de dispositifs inductifs et dans des micro-relais ou micro-actionneurs. On les retrouve de façon très courante dans le domaine de l'automobile, pour des applications de contrôle de vitesse, de systèmes de freinage (ABS) ou de stabilité électronique (ESP) et même dans des systèmes de navigation [Grunberg 2001].

Dans le domaine des télécommunications, les applications nécessitent souvent des consommations faibles, une haute intégrabilité et portabilité, ainsi que la possibilité de remplir plusieurs fonctions à la fois. Les micro-commutateurs magnétiques se prêtent

parfaitement aux contraintes énumérées ci-dessus et sont déjà utilisés pour manipuler des signaux jusqu'à des fréquences de l'ordre du GHz.

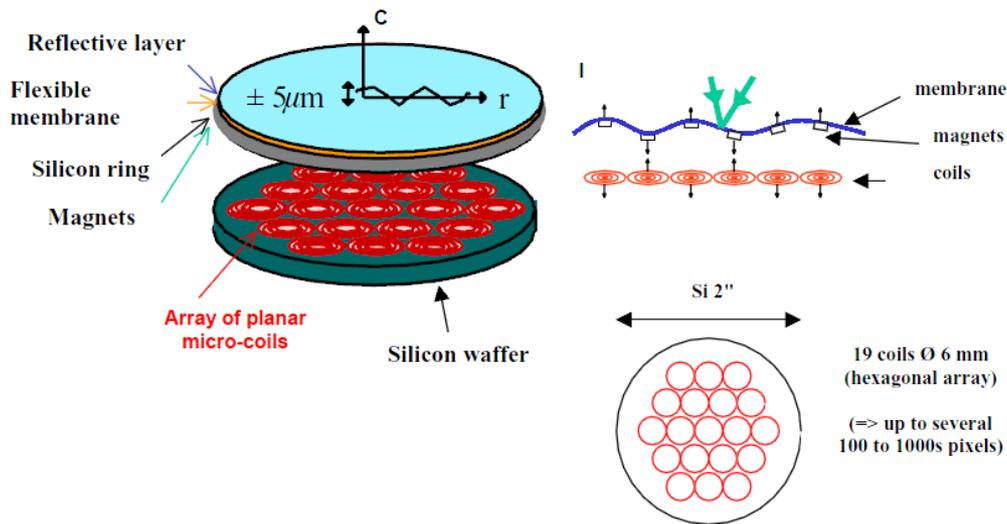


Figure 6. Combinaison de micro-bobines et micro-aimants pour l'optique adaptative [Niarchos 2003]

Dans le domaine de l'imagerie, nous pouvons rencontrer des projecteurs réalisés à base de micro-bobines et de micro-aimants combinés avec les technologies de silicium [Niarchos 2003]. Les micro-bobines interagissent avec le champ créé par les micro-aimants pour réaliser le mouvement d'une membrane solidaire des micro-aimants. La membrane ayant une surface réfléchissante, celle-ci peut constituer la partie active d'un micromiroir magnétique (Figure 6).

Enfin, le domaine de la microbiologie semble le plus prometteur pour l'intégration de microsystèmes magnétiques, notamment grâce à la facilité qu'offrent ces derniers pour une manipulation à distance. Il existe déjà des applications pour séparer certaines particules dans des solutions diluées. Cette méthode est utilisée par exemple pour extraire les cellules sanguines rouges du sang à l'aide du moment magnétique de l'hémoglobine dans son état désoxygéné.

1.2.7. Propriété électrostatique

Ce paragraphe décrit, d'une manière relativement simple, l'actionnement électrostatique qui est au cœur du fonctionnement de tout micro-actionneur électrostatique.

La polarisation électrique entre deux plaques génère une force d'attraction coulombienne entre ces deux plaques. Ce phénomène peut-être mis à profit pour réaliser un actionneur. Réciproquement, à tension constante, le mouvement relatif de plaques polarisées génère un courant induit qui est fonction du mouvement. En effet, en faisant varier la surface effective entre deux plaques, la charge électrique créée sur les plaques

est modifiée. La variation de charge conduit à la création d'un courant. Ce courant peut alors être mesuré pour remonter à l'information sur le mouvement (déplacement).

De par le principe physique mis en œuvre, l'actionnement électrostatique se prête bien aux dimensions micrométriques. Cela peut s'analyser à partir de la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_{qq'} \quad (1)$$

Cette équation exprime la force exercée par la charge q sur la charge q' . Ces charges sont séparées par une distance r avec ϵ_0 la permittivité du vide et $\vec{u}_{qq'}$ le vecteur unitaire orienté de q vers q' . Cette équation montre que la force augmente avec l'inverse du carré de la distance ($1/r^2$).

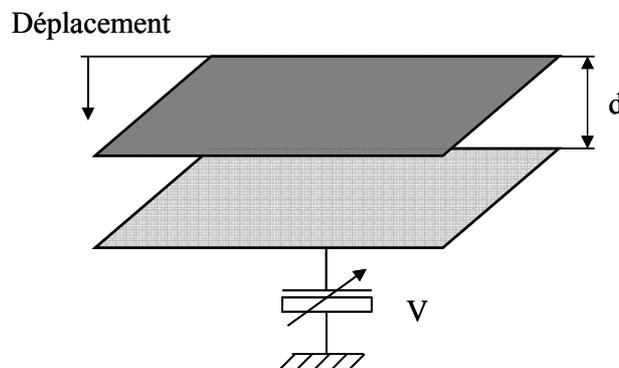


Figure 7. Structure à plaques parallèles. V – tension d'alimentation, d - distance inter-électrodes

Cette même force peut-être exprimée en fonction de la tension. La majorité des micro-actionneurs électrostatiques est composée de cellules élémentaires formées par deux plaques conductrices à comportement capacitif (Figure 7). Dans ce genre de dispositifs, les charges électriques, et dans le même temps les forces mises en jeu, varient avec la tension d'alimentation, comme marqué dans l'expression suivante,

$$F_E = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{(d-x)^2} V^2 \quad (2)$$

où S est la surface d'une plaque conductrice, d la distance inter plaques, x le déplacement d'une plaque et V la tension d'alimentation.

La relation (2) montre que les forces engendrées varient directement avec le carré de la tension appliquée, celle-ci allant de quelques volts à plusieurs dizaines de volts dans les applications MEMS. L'amplitude des forces électrostatiques peut donc être contrôlée au travers de la tension d'alimentation.

1.2.8. Synthèse des différentes propriétés

Les principales caractéristiques physiques exploitées dans le domaine des MEMS ont été énumérées, d'une manière non exhaustive. Ces derniers couvrent un large champ d'applications où des propriétés physiques, parfois non exploitables à des tailles 'macroscopiques' deviennent très attractives pour des applications à l'échelle des micro-systèmes. Pour exemple, la propriété thermique, souvent synonyme de contrainte dans les machines électriques, est utilisée comme moyen de génération de déplacement dans de micro systèmes.

D'autres propriétés physiques, comme nous l'avons évoqué dans ce paragraphe, sont, ou peuvent être, utilisées pour générer des mouvements d'amplitudes plus ou moins élevées. Toutefois, l'exploitation de la conversion électromécanique sans contact reste prépondérante. Ainsi, les conversions des énergies électrostatique ou électromagnétique en énergie mécanique restent les plus attractives dans les applications MEMS avec, à ce jour, une nette prédominance des MEMS électrostatiques. En effet, la conversion électromagnétique, largement usitée dans les applications macroscopiques, est encore peu présente dans le domaine de l'actionnement de micro-systèmes. Ceci est dû à plusieurs facteurs, plus ou moins clairs et bien définis, pour lesquels des avis parfois très divergents se retrouvent dans la littérature. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter les deux facteurs les plus communément rencontrés pour 'justifier' la 'suprématie' des MEMS électrostatiques. Le but n'est en aucun cas de prendre position mais tout simplement de donner un aperçu de l'état actuel de la réflexion sur l'opportunité d'utiliser l'une ou l'autre des deux conversions électromécaniques pour générer du mouvement dans le monde des micro-systèmes.

1.3. Comparaison des actionnements électrostatique et magnétique dans les MEMS

A une échelle que l'on peut qualifier de « naturelle » (dans laquelle les phénomènes physiques mis en jeu peuvent être décrits par une approche macroscopique), les actionneurs électromagnétiques, grâce aux densités d'énergie volumiques supérieures qu'ils peuvent développer, ont été largement privilégiés au détriment des actionneurs électrostatiques. Cependant, à l'échelle du micromètre, ce sont les actionneurs électrostatiques qui connaissent le plus grand développement. Comme spécifié ci-dessus, plusieurs raisons peuvent être avancées pour expliquer cet état de fait dont deux sont les plus importantes. Premièrement, les actionneurs électrostatiques sont compatibles avec les technologies dérivées de la fabrication de circuits intégrés et sont par conséquent très faciles à fabriquer sans nécessiter le développement de technologies spécifiques. Deuxièmement, les lois de réduction d'échelle privilégient, *a priori*, les forces électrostatiques ou autrement dit, l'actionnement électrostatique [Niarchos 2003]. Concernant ce dernier aspect, deux *visions* différentes co-existent actuellement. Celles-ci sont présentées ci-dessous afin

d'avoir une idée plus claire et ainsi mieux appréhender l'actionnement électrostatique à ces échelles.

A l'échelle macroscopique, pour une taille de système donnée, les densités d'énergies magnétiques (et par conséquent de forces) sont prépondérantes par rapport aux densités d'énergies électrostatiques [Niarchos 2003]. Ces densités élevées sont obtenues grâce à l'utilisation de matériaux ferromagnétiques doux (Fe, Ni, alliages de Fe, ...) [Cugat 2002/]. Ces derniers, caractérisés par une perméabilité magnétique très élevée, permettent de réduire les courants d'alimentation et l'énergie électrique réactive consommée. Par ailleurs, les matériaux ferromagnétiques durs (aimants) permettent le stockage de l'énergie magnétique de manière permanente et présentent l'avantage de créer des forces relativement importantes, même en l'absence d'alimentation.

En appliquant d'une manière systématique les lois de réduction d'échelle, associées aux contraintes physiques, il est possible de déterminer le seuil à partir duquel les forces électrostatiques deviennent prépondérantes par rapport aux forces magnétiques. Une comparaison entre les densités d'énergies électrostatique et magnétique, en fonction de la largeur de la zone d'interaction des champs (i.e. zone de création des forces), est donnée sur la Figure 8. Dans cette comparaison, la densité d'énergie électrostatique correspond au maximum réalisable avant d'atteindre les niveaux de tensions entraînant le phénomène de claquage. La densité d'énergie magnétique, quant à elle, correspond à l'énergie maximale produite par un actionneur magnétique fabriqué en alliages à base de fer ou de nickel. Sur la Figure 8, la largeur de la zone d'interaction des champs constitue la distance séparant les électrodes dans le cas électrostatique et l'entrefer dans le cas électromagnétique. On remarque que l'actionnement électrostatique devient plus intéressant pour des distances inférieures à 2 μm . Or, comme énoncé précédemment, cette distance correspond à l'énergie électrostatique avant le claquage. Dans le cas où on considère le fonctionnement d'un actionneur classique, l'énergie mise en oeuvre est nettement inférieure. La distance de séparation peut alors être réduite. Celle-ci est classiquement inférieure à 1 μm pour des niveaux de tensions de l'ordre de la centaine de volts [Niarchos 2003].

Cette première approche simpliste conclut à la supériorité de l'actionnement électrostatique à des échelles inférieures au millimètre. Ceci peut se concevoir facilement suite aux limites intrinsèques de la valeur de l'induction magnétique dans les matériaux ferromagnétiques.

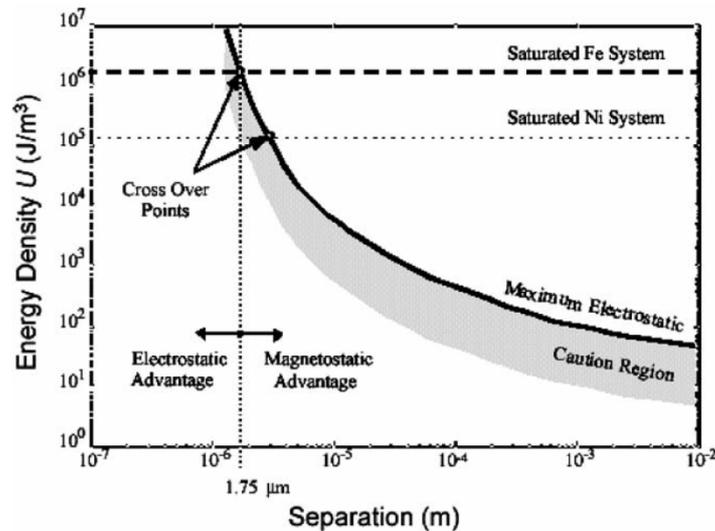


Figure 8. Comparaison de densités d'énergies électrostatique et magnétique en fonction de la distance de séparation des matériaux dans la zone active [Niarchos 2003]

Une deuxième 'école' réfute cette approche simpliste. En effet, elle considère qu'un micro-système électromagnétique ne doit pas se concevoir comme une simple réduction d'échelle d'un dispositif 'macroscopique' mais comme un actionneur spécifique dont la conception doit s'effectuer suivant des considérations toutes autres [Cugat 2002/I]. Ainsi, il est possible de créer des forces à l'aide de l'interaction entre un champ d'aimants et un autre créé par des courants circulant dans des conducteurs de cuivre, et ce, en évitant l'utilisation de matériaux ferromagnétiques et, par là même, la limitation intrinsèque de la valeur de l'induction magnétique au sein des matériaux ferromagnétiques. De par l'échelle du système et le caractère de fonctionnement intermittent des micro-actionneurs, les densités de courant admissibles peuvent être largement plus élevées que dans le cas macroscopique. Une micro bobine fabriquée sur silicium peut être parcourue par une densité de courant de l'ordre de dizaines de milliers d'ampère par millimètre carré [Cugat 2002/]. Ceci induit alors des densités d'énergie magnétique et de forces qui peuvent concurrencer, voire dépasser, celles qui sont mises en jeu dans la conversion électrostatique.

Toutefois, à cause de la non compatibilité des technologies de fabrication micrométriques classiques avec l'utilisation de matériaux ferromagnétiques, les avantages mentionnés ci-dessus n'ont été exploités à l'échelle du micromètre que très récemment. En effet, le développement rapide d'une nouvelle structure, nécessite une bonne compatibilité avec les procédés de fabrication existants, tant au niveau du laboratoire qu'au niveau industriel. Mais avec le développement des nouvelles technologies de fabrication de ces matériaux, la dominance actuelle des micro-actionneurs électrostatiques ne sera probablement plus d'actualité dans un avenir proche.

En conclusion, les dernières avancées dans le domaine de la fabrication d'aimants permanents à l'échelle microscopique semblent conforter la deuxième vision de l'avenir des micro-actionneurs. Toutefois, à l'heure actuelle, la prédominance des micro-actionneurs électrostatiques dans le micro-actionnement est encore très large, ce qui

justifie amplement l'intérêt porté à leur modélisation. Cette modélisation vise à étudier ces structures, d'une part, pour appréhender de manière fine leur fonctionnement et déterminer leurs performances et, d'autre part, pour aider dans le processus de conception et éventuellement d'optimisation. Dans la suite de ce chapitre, on donnera un aperçu de différentes applications mettant en œuvre l'actionnement électrostatique. Cela permettra, en plus de l'illustration de la large gamme d'utilisation de l'actionnement électrostatique, de mettre également en relief les limites de fonctionnement de ces dispositifs et la nécessité de les modéliser afin d'appréhender les problématiques qui leur sont propres.

1.4. Exemples d'applications d'actionnement électrostatique

Dans ce paragraphe, différents exemples d'utilisation du principe d'actionnement électrostatique seront présentés, en mettant en exergue les avantages et inconvénients de ces dispositifs.

1.4.1. Dispositifs optiques

Le Silicium est le matériau le plus utilisé pour la fabrication des micro-dispositifs optiques. Les wafers de silicium, en plus de leurs très bonnes propriétés mécaniques, fournissent des surfaces lisses et planes, favorisant ainsi le dépôt de couches réfléchissantes. Cette technologie est donc considérée comme très bien adaptée aux applications dans le domaine de l'optique.

1.4.1.1. Miroir à déflexion contrôlée pour l'optique adaptative

Dans la configuration la plus simple, le miroir à déflexion contrôlée pour l'optique adaptative est composé de deux couches de silicium. La première couche contient la structure de l'actionneur et est composée d'un réseau d'électrodes indépendantes. La deuxième couche constitue la structure d'une fine membrane flexible en nitrure de silicium (Figure 9). La membrane est couverte habituellement par une couche d'aluminium ou d'or, pour constituer le miroir (surface réfléchissante) et elle est manipulée (actionnée) par l'intermédiaire de plusieurs électrodes. En appliquant une tension entre la membrane et les électrodes de commande, la forme de la membrane peut être modulée. Le dispositif est monté sur un support contenant la structure des électrodes de commande, les connexions électriques et le spacer (entretoise). Le support sert également comme boîtier (package) du miroir.

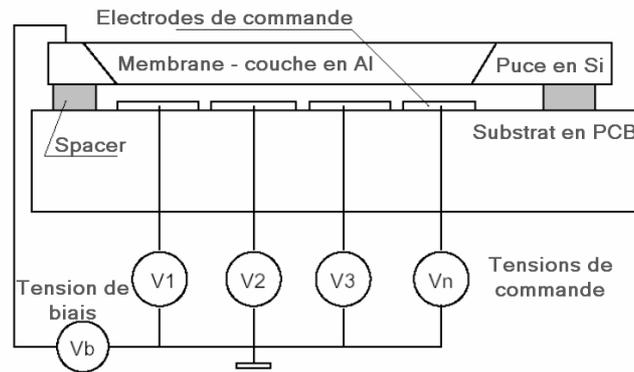


Figure 9. Schéma de principe du miroir à déflexion contrôlée [O. Tech 2010]

Les membranes et les électrodes peuvent être disposées suivant différentes configurations pour réaliser d'une façon efficace les tâches requises par l'application intégrant le micro-miroir. Les deux configurations les plus répandues sont les configurations à 9 membranes rectangulaires [O. Tech 2010] et à 37 électrodes circulaires [Vdovin 1995, Vdovin 1996].

Ces micro-dispositifs sont utilisés pour des corrections dynamiques rapides d'aberrations optiques, comme le flou (de mise au point), l'astigmatisme ou pour corriger les aberrations optiques des télescopes spatiaux. En effet, pendant de nombreuses années l'utilisation de systèmes optiques adaptatifs était restreinte aux domaines de l'astronomie et des applications militaires à cause de leur coût élevé. Aujourd'hui, l'utilisation de micro-miroirs à déflexion permet de fabriquer des systèmes optiques adaptatifs à faible coût ayant une bonne correction spatiale et une bande passante temporelle élevée utilisant une fréquence d'images de 800 Hz. Ainsi, les miroirs à déflexion enrichissent les applications de l'optique adaptative dans les domaines de la technologie médicale (« retinal imagery »), de la communication optique (« optical communication systems ») et de la microscopie (« Adaptive Optics Scanning Microscope »).

1.4.1.2. Miroir à mouvement de torsion

Poussées par une forte demande de composants nouveaux pour les systèmes optiques, de nombreuses recherches ont été entreprises ces deux dernières décennies pour réaliser et tester des micro-actionneurs fonctionnant en mode de torsion. Ces actionneurs s'apparentent à des micro-miroirs rotatifs capables de réfléchir des faisceaux optiques collimatés et trouvent leurs applications dans les systèmes de communication à fibres optiques ou de projection d'images. Le principe de fonctionnement de ces dispositifs est illustré sur la Figure 10.

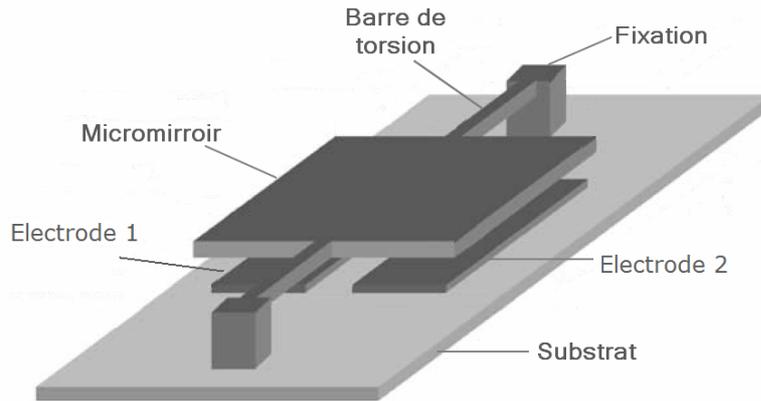


Figure 10. Principe de fonctionnement du micro-miroir à torsion

Une plaque conductrice est maintenue au-dessus des électrodes par des barres de torsion. Lorsqu'une différence de potentiel est appliquée entre la plaque mobile et l'une des électrodes latérales, la force électrostatique créée induit un couple de torsion entraînant ainsi un mouvement de rotation de la structure mobile [Toshiyoshi 1996].

L'un des exemples les plus représentatifs des actionneurs à torsion est le système de micro-miroirs (Figure 11) utilisé pour la projection d'images (DMD – Digital Micromirror Device) [Van Kessel 1998].

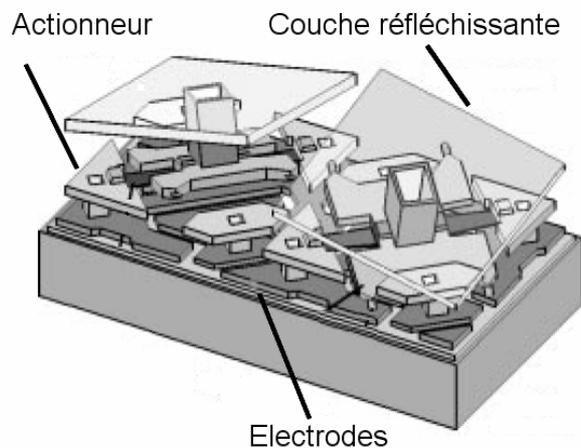


Figure 11. DMD – Digital Micromirror Device [Van Kessel 1998]

Le DMD fait partie des nouvelles technologies pour les écrans de projection DLP (Digital Light Processing). Ce dispositif permet la projection d'images par une surface réfléchissante qui est formée d'une matrice de pixels adressables individuellement. Chaque pixel est constitué de trois parties. Le niveau inférieur intègre les électrodes qui sont adressées et polarisées par le circuit de commande. En régime actif, l'une des deux électrodes est polarisée tandis que l'autre reste à la masse. Le deuxième niveau correspond à l'actionneur proprement dit, la torsion étant induite par l'attraction exercée par l'électrode polarisée. Le niveau supérieur correspond à la couche réfléchissante.

1.4.2. Capacités réglables

Connues également sous les noms de varactor (acronyme de *variable reactor*), varicap ou encore capacité variable, les capacités réglables sont des composants passifs dont la capacité peut être variée. Cette propriété est largement utilisée dans des applications de communication RF, comme les filtres réglables, les oscillateurs commandés en tension (VCO – Voltage-Controlled Oscillators) et les amplificateurs à faible bruit (LNA – Low Noise Amplifiers). Ces dispositifs sont caractérisés par une grandeur appelée facteur de qualité, représentant le rapport entre l'énergie stockée dans le condensateur et l'énergie perdue par cycle de fonctionnement [Fritschi 2007] :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans le condensateur}}{\text{énergie perdue par cycle}} = \omega \frac{W_e}{P_{diss}} \quad (3)$$

avec W_e l'énergie de pic stockée dans le condensateur et P_{diss} la puissance dissipée. On définit également la gamme de réglage par la relation suivante :

$$GR = \frac{C - C_0}{C_0} \quad (4)$$

où C_0 est la capacité non polarisée, prise comme référence.

Dans les dispositifs MEMS à capacité réglable, cette dernière est modifiée par l'ajustement de certaines dimensions physiques à l'aide d'un actionnement électromécanique. En fonction de la dimension physique ajustée, on peut rencontrer les possibilités de réglage suivantes : réglage de la distance inter-plaques, réglage de la surface de plaques, réglage de la permittivité ... etc. Des dispositifs incorporant quelques-uns des types de réglages mentionnés sont présentés ci-dessous.

1.4.2.1. Réglage de la distance inter-plaques. Structure à plaques parallèles

Les types d'actionnement les plus largement utilisés pour le réglage de la distance entre-plaques sont l'actionnement électro-thermique [Reid 1997, Wu 1998, Harsh 1999], l'actionnement piézoélectrique [Kawakubo 2005, Robert 2003] et, plus largement, l'actionnement électrostatique [Young 1996, Fan 1998, Goldsmith 1999, Beek 2001, Bakri-Kassem 2004].

Le dispositif à capacité variable présenté dans [Young 1996] a été fabriqué par micro-usinage surfacique. La partie mobile est constituée d'une plaque mince d'aluminium de $1\mu\text{m}$ d'épaisseur suspendue à une distance de $1.5\mu\text{m}$ au-dessus d'une électrode fixe également en aluminium. La partie mobile est ancrée à l'aide de quatre poutres coudées comme indiqué sur la Figure 12.

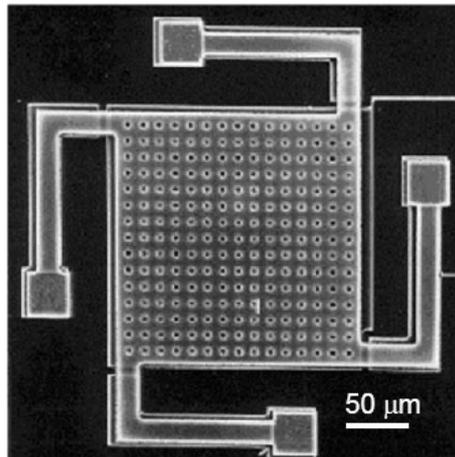


Figure 12. Microphotographie (vu de dessus) d'un dispositif à capacité variable [Young 1996]

Pour un tel dispositif, la gamme de réglage de la capacité peut atteindre 16%. Cette limitation s'explique par la particularité inhérente à ce type de structure à plaques parallèles, à savoir la limitation imposée par un phénomène bien connu dans ces dispositifs électrostatiques, le phénomène de collage (*pull-in*). La description de ce phénomène sera donnée en début du chapitre suivant.

Le phénomène de *pull-in* conduit à une limitation de fonctionnement théorique de ce type de dispositif à plaques parallèles de 50%, due à la distance maximale pouvant être parcourue par la plaque mobile avant le *pull-in* [Fritschi 2007].

Toutefois, afin de contourner le problème de *pull-in*, l'augmentation de la gamme de réglage des capacités dans les dispositifs à plaques parallèles est possible par des extensions des structures à plaques parallèles. Les exemples les plus connus sont : la structure à 3 plaques parallèles [Dec 1998] et la structure à double distance inter plaques [Zou 2000].

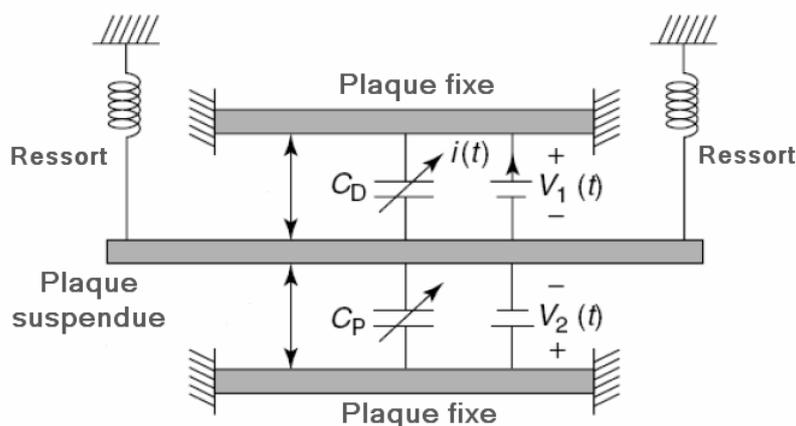


Figure 13. Vue schématique de la capacité variable à trois plaques parallèles [Dec 1998]

La première structure (Figure 13) est composée de 2 électrodes fixes placées de part et d'autre d'une électrode mobile suspendue à deux ressorts. Cette structure permet ainsi d'augmenter théoriquement la gamme de réglage jusqu'à 100%.

La deuxième structure [Zou 2000], représentée sur la Figure 14, consiste en deux électrodes fixes imbriquées et situées dans le même plan. La troisième électrode (partie mobile) est suspendue au dessus et possède une géométrie non plane offrant ainsi la combinaison de deux distances avec les électrodes fixes. Le couple d'électrodes E_1 (mobile) et E_3 (fixe) est utilisé pour l'actionnement électrostatique du dispositif et l'autre, E_1 (mobile) et E_2 (fixe), pour faire varier la capacité du dispositif. Cette configuration permet de contourner l'effet du phénomène de collage et donc d'augmenter la gamme de réglage du dispositif, allant jusqu'à 171% [Nieminen 2002].

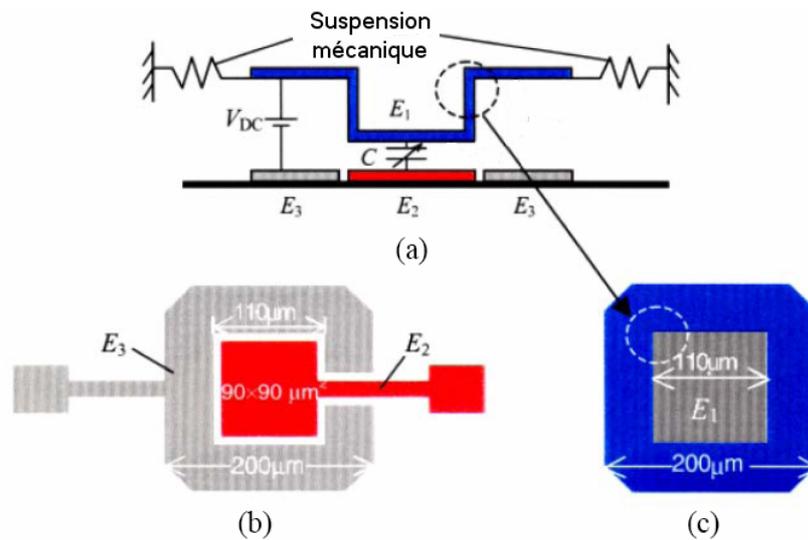


Figure 14. a) Schéma du dispositif à capacité variable à gamme large, b) Vue de dessus des plaques fixes E_2 et E_3 et c) Vue schématique de l'électrode suspendue E_1 [Zou 2000]

1.4.2.2. Réglage de la surface de plaques. Peignes interdigités

L'avantage de l'utilisation d'une structure à peignes interdigités (Figure 15) est l'augmentation du nombre de capacités. Celles-ci sont localisées entre les doigts des peignes en regard et sont multipliées par le nombre de doigts (électrodes) présents dans la structure [Yao 1998]. La capacité pour n doigts peut alors être approximée par :

$$C \cong 2n \left(\frac{\epsilon_0 w h}{d - x} + \frac{\epsilon_0 (l + x) h}{g} \right) \quad (5)$$

où w et h sont la largeur et l'épaisseur d'un doigt (Figure 15), l est la distance de recouvrement, g est la distance entre deux électrodes, d est la distance entre l'extrémité d'un doigt et la surface en regard et x le déplacement.

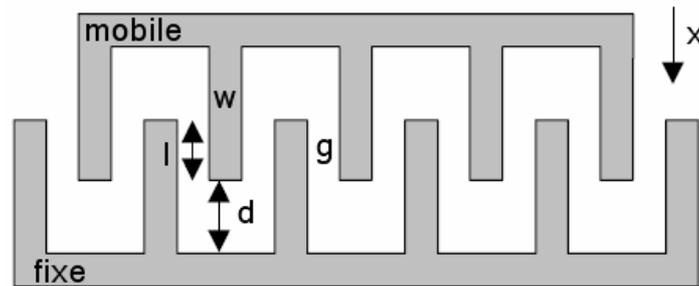


Figure 15. Schéma d'une structure à peignes interdigités [Fritschi 2007]

Etant donné que, dans le cas de ce type de dispositif, le phénomène de *pull-in* n'a pas d'influence, il n'existe pas de limite théorique de la gamme de réglage. En effet, l'actionnement est indépendant de la variation de la capacité pour des valeurs de $d \gg g$. En revanche, le *pull-in* peut porter une influence sur les électrodes situées à l'extrémité des peignes. Une attention particulière doit alors être accordée à cette partie du dispositif.

1.4.3. Les résonateurs et les capteurs résonants

1.4.3.1. Les résonateurs micromécaniques

Certains composants utilisent les fréquences de résonance mécanique des micro-poutres pour former des résonateurs. Selon les dimensions des micro-poutres, ces résonateurs peuvent présenter des fréquences de résonance de quelque kilohertz à plusieurs centaines de mégahertz. Ils sont caractérisés par des coefficients de qualité très élevés (~ 100000 s'ils opèrent sous vide). Couplés de manière capacitive, ils peuvent être utilisés afin de réaliser des filtres ou des oscillateurs avec une pureté spectrale élevée [Ruby 2003].

1.4.3.2. Les capteurs résonants

Un capteur résonant est un élément vibrant dont la fréquence de résonance est fonction d'un paramètre physique ou chimique que l'on souhaite mesurer. Ainsi, la modification de cette fréquence est induite par le phénomène physique en question qui agit sur le capteur en modifiant ses propriétés comme le module d'Young ou la géométrie du capteur par l'application de contraintes externes. L'utilisation de la fréquence comme paramètre de détection permet alors d'obtenir une qualité de signal élevée et une faible sensibilité aux influences parasites. Il existe généralement 3 structures de base pour réaliser des capteurs résonants : le cantilever (poutre simplement encadrée), la poutre encadrée aux deux extrémités et le diaphragme (Figure 16).

Chaque structure possède des modes de résonance différents, chaque mode ayant ses propres motifs de déplacement, fréquence de résonance et facteur de qualité.

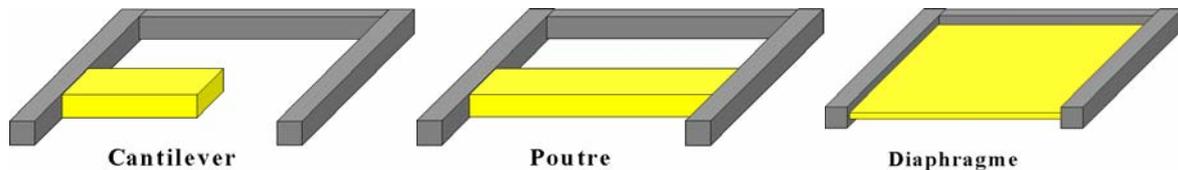


Figure 16. Les structures résonantes basiques (cantilever, poutre doublement encastree et diaphragme)

La partie active du capteur doit être mise en vibration (excitée) et ensuite, la vibration doit être détectée. Il existe six types de techniques d'excitation, à chacune d'entre elles correspond une méthode de détection : excitation électrostatique et détection capacitive, excitation et détection diélectriques, excitation et détection piézoélectriques, excitation thermo résistive et détection piézo-résistive, excitation et détection optique et, enfin, excitation et détection magnétique.

A titre d'illustration, nous présentons uniquement l'excitation électrostatique et la détection capacitive. Classiquement, pour cette technique, deux électrodes sont utilisées dont l'une fait partie de la structure en vibration. Lors de l'application d'une tension alternative entre les deux électrodes, on obtient un effet de d'attraction électrostatique alternative de l'élément vibrant. Cette structure d'excitation électrostatique constitue également un condensateur avec une distance inter électrodes variable. Cette propriété peut être utilisée pour mesurer l'amplitude de la vibration, sachant que la capacité dépend de la distance inter électrodes. Il est à noter que ce type de structure nécessite de grandes surfaces d'électrodes ainsi que de très petites distances entre les électrodes afin d'obtenir des valeurs d'excitation et de tension de détection raisonnables.

A titre d'exemple, nous pouvons citer les micro-capteurs résonants utilisés en tant qu'accéléromètres dans l'industrie automobile [Satchell 1989], mais également dans des applications spatiales ou aéronautiques. Il existe également des applications en tant que capteurs de vapeurs [Howe 1986], de pression, d'écoulement ou de mesure de densité des fluides, dans les domaines de l'automobile et de la médecine [Howe 1986, Stemme 1990].

1.4.4. Applications de la microfluidique

Parmi les microsystèmes de la microfluidique existants actuellement, les microvalves et les micropompes sont de loin les plus présentes dans la littérature scientifique. Cet intérêt s'explique par leurs fonctions indispensables dans beaucoup d'applications de la microfluidique, notamment pour véhiculer les fluides et en contrôler le débit.

1.4.4.1. Micropompes

Les micropompes sont utilisées pour contrôler la circulation de quantités infimes de fluide (de l'ordre du millilitre par minute). La plupart des applications connues sont basées sur la miniaturisation de pompes déjà existantes au niveau macroscopique. Le principe de fonctionnement des micropompes peut être expliqué à partir du fonctionnement d'une pompe mécanique volumétrique schématisée sur la Figure 17 [Anduze 2000]. Dans une chambre connectée à deux valves, un actionneur peut réaliser une variation de volume. De par leur fonctionnement en opposition, ces deux valves créent pendant un cycle de fonctionnement une surpression et par conséquent un débit en sortie de la pompe.

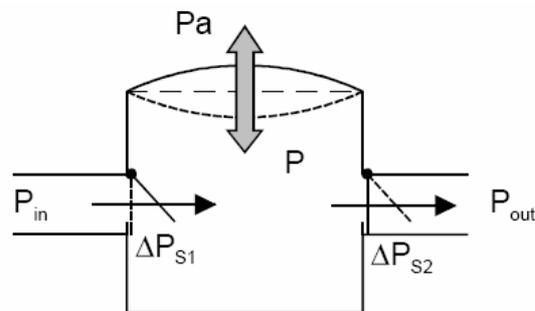


Figure 17. Principe de fonctionnement d'une pompe volumétrique [Anduze 2000]

La micropompe illustrée sur la Figure 18 utilise un actionneur électrostatique [Zengerle 1995]. Deux électrodes composent l'actionneur électrostatique, l'une solidaire de la membrane et l'autre fixée sur le corps de la micropompe. Pour réaliser le phénomène de pompage, il est nécessaire d'appliquer une tension entre les deux électrodes, ce qui va engendrer un fléchissement de la membrane et ainsi une variation de volume dans la chambre de la pompe.

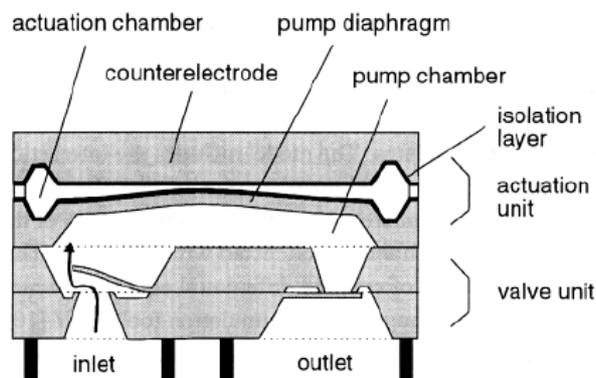


Figure 18. Schéma d'une micropompe à actionnement électrostatique [Zengerle 1995]

En plus de sa faible consommation, ce type de micropompe possède l'avantage de séparer la zone à fort champ électrostatique du volume occupé par le fluide. Cependant, les performances des micropompes électrostatiques sont fortement limitées à

cause de l'instabilité liée au phénomène de collage (*pull-in*) précédemment évoqué. Le mouvement de la membrane, que l'on essaie de maximiser habituellement, reste donc assez faible à cause de la plage limitée de déplacements stables de la membrane. Il faut éviter de faire fonctionner la pompe en mode « *pull-in* », où la membrane se colle au corps de la micropompe. En effet, le collage peut empêcher la re-libération de la membrane que des impacts répétés peuvent endommager.

1.4.4.2. Microvalves

Les microvalves présentent le même fonctionnement que les valves classiques utilisées à l'échelle macroscopique. Leur fonction est d'assurer l'ouverture ou la fermeture d'un orifice et de contrôler le passage d'un fluide. Nous distinguons deux types de microvalves, actives et passives. Les microvalves actives sont commandées habituellement par des actionneurs de natures magnétique, électrostatique, pneumatique ou piézoélectrique [Anduze 2000]. Quant aux microvalves passives, elles ne sont pas commandées par une source externe, mais directement par une différence de pression. Les microvalves passives laissent le fluide s'écouler dans un seul sens (clapet anti retour) et par conséquent ne nécessitent pas l'apport d'une énergie extérieure.

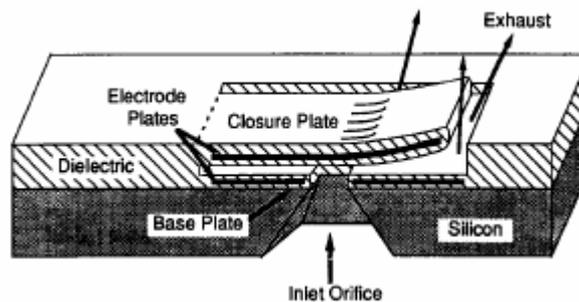


Figure 19. Microvalve électrostatique [Ohnstein 1990]

On considère l'exemple de la microvalve de la Figure 19 [Ohnstein 1990]. L'obturateur de cette microvalve est une lame flexible à l'intérieur de laquelle a été insérée une première électrode, la seconde électrode se situant dans le corps de l'ensemble. Il est possible ainsi de créer une force électrostatique entre les deux électrodes, pour commander la flexion de la lame et obturer ou non l'orifice d'entrée.

Différents dispositifs utilisant l'actionnement électrostatique ont été présentés. Bien que leurs domaines d'application soient très variés (optique, capteurs, micro fluide, ...) les technologies utilisées pour leur fabrication sont communes. Ce chapitre conclut sur la présentation des principales technologies de fabrication rencontrées dans le domaine de MEMS.

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons premièrement défini les Microsystèmes Electro Mécaniques (MEMS), en traçant les différentes étapes dans l'historique de leur développement. Ensuite, nous avons présenté les différents phénomènes étant au cœur du fonctionnement des micro-capteurs ou micro-actionneurs : le phénomène piézo-résistive, le phénomène piézo-électrique, le phénomène thermique et le phénomène optique.

L'aspect actionnement a été également abordé en décrivant les deux principaux acteurs de ce domaine, le magnétisme et l'électrostatique. De plus, une comparaison de ces deux méthodes d'actionnement a été réalisée, mettant en exergue les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles.

Les MEMS électrostatiques étant compatibles avec les procédés de fabrication des circuits intégrés, ont connu un développement plus prononcé. Nous allons donc consacrer notre attention à ce type de dispositifs, dans la suite de cette thèse.

Références :

- [Analog 2010] <http://www.analog.com/en/mems/products/index.html>
- [Anduze 2000] M. Anduze, "Etude expérimentale et numérique de microécoulements liquides dans les microsystèmes fluidiques", PhD, L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2000.
- [Bakri-Kassem 2004] M. Bakri-Kassem, and R.R. Mansour, "Two movable-plate nitride-loaded MEMS variable capacitor", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 52, no. 3, pp. 831-837, March 2004.
- [Beek 2001] J. van Beek, M. van Delden, A. Jansman, A. Boogaard, and A. Kemmeren, "The integration of RF passives using thin-film technology on high-ohmic Si in combination with thick-film interconnect", in Proceedings 34th International Symposium on Microelectronics (IMAPS '01), Baltimore, MD, USA, Oct. 9-11, 2001, pp. 467-470.
- [Bloom 1997] D.M. Bloom, "The Grating Light Valve: Revolutionizing Display Technology", Photonics West, Projection Displays III, 1997.
- [Cugat 2002/I] O. Cugat, "Micro-actionneurs électromagnétiques, MAGMAS", LAVOISIER, 2002.
- [Dec 1998] A. Dec, and K. Suyama, "Micromachined electro-mechanically tunable capacitors and their applications to RF IC's", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 46, no. 12, pp. 2587-2596, Dec. 1998.
- [Dubois 2006] Dubois et al, "Microactuators based on ion implanted dielectric electroactive polymer (EAP) membranes," Sensors and Actuators A, vol. 130-131, pp. 147-154.
- [Fan 1998] L. Fan, R.T. Chen, A. Nespola, and M.C. Wu, "Universal MEMS platforms for passive RF components: suspended inductors and variable capacitors", in Proceedings 11th Annual International Workshop on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS '98), Heidelberg, Germany, Jan. 25-29, 1998, pp. 29-33.
- [Feynman 1992] Feynman R. P. "There's plenty of room at the bottom", Journal of Microelectromechanical Systems, 1(1):60-66, 1992.
- [Fritschi 2007] R. Fritschi, "Above-IC RF MEMS devices for communication applications", PhD, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2007.
- [Goldsmith 1999] C.L. Goldsmith, A. Malczewski, Z.J. Yao, S. Chen, J. Ehmke, and D.H. Hinzl, "RF MEMS variable capacitors for tunable filters", International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering, vol. 9, no. 4, pp. 362-374, July 1999.
- [Grunberg 2001] P.A. Grunberg, "Exchange anisotropy, interlayer exchange coupling in research and applications", Sens. Actuators A Phys. 91, pp. 153-160, 2001.
- [Harsh 1999] K.F. Harsh, W. Zhang, V.M. Bright, and Y.C. Lee, "Flip-chip assembly for Si-based RF MEMS", in 12th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS '99) Technical Digest, Orlando, Florida, USA, Jan. 17-21, 1999, pp. 273-278.

- [Heung Shik 2007] Heung-Shik Lee et al, "Magnetostrictive Micro Mirrors for an Optical Switch Matrix", *Sensors*, no. 7, pp. 2174-2182, 2007.
- [Howe 1986] R.T. Howe and R.S. Muller, "Resonant Microbridge Vapor Sensor", *IEEE Trans. Electron Devices*, 33 (1986), pp. 499-506.
- [Kawakubo 2005] T. Kawakubo, T. Nagano, M. Nishigaki, K. Abe, and K. Itaya, "Piezoelectric RF MEMS tunable capacitor with 3V operation using CMOS compatible materials and process", in *IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM '05) Technical Digest*, Washington, DC, USA, Dec. 5-7, 2005, pp. 303-306.
- [Kistenmacher] T.J Kistenmacher et al, *Design and Properties of a Thin-Film, MEMS-Bases Magnetostrictive Magnetometer*, Materials Research Society.
- [Lam 2007] T.Y. Lam et al, "Characterization of proton irradiated copolymer thin films for microelectromechanical system applications," *Applied Physics Letters*, 90, vol. 4, pp. 43511-43513.
- [MUMP] MUMPs™ Design Handbook, version 7.0, disponible sur <http://www.memrsus.com>
- [Nathanson 1967] H. Nathanson et al., « The Resonant Gate Transistor », Mar. 1967, *Transactions on Electron Devices*, vol. ED-14 No. 3, IEEE, pp. 117-133.
- [Niarchos 2003] D. Niarchos, "Magnetic MEMS: key issues and some applications", *Sensors and Actuators A* 109, pp. 166-173, 2003.
- [Nieminen 2002] H. Nieminen, V. Ermolov, K. Nybergh, S. Silanto, and T. Ryhänen, "Microelectromechanical capacitors for RF applications", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 12, no. 2, pp. 177-186, March 2002.
- [O. Tech 2010] O. Technologies, 37 (19) – Channel Micromachined Deformable Mirror System : Technical Passport, <http://www.okotech.com/ao-systems-with-membrane-mirrors>.
- [Ohnstein 1990] T. Ohnstein, T. Fukiura, J. Ridley and U. Bonne, „Micromachined silicon microvalve“, *IEEE*, pp. 95-98, 1990.
- [Parent 2008] A. Parent, "Apport des nouveaux matériaux piézoélectriques dans le domaine des micro-gyromètres vibrants", PhD, Université Paris-Sud 11, 2008
- [Pelesko 2003] J.A. Pelesko and D. H. Bernstein, "Modeling MEMS and NEMS", Chapman & Hall/CRC, 2003, p. 3.
- [Peng 2006] Peng C., Chen X, Ye C., Tao H, Cui G, Bai Q, Chen S and Xia S, "Design and testing of a micromechanical resonant electrostatic field sensor", *J. Micromech. Microeng.* vol. 15, pp. 914-919, 2006.
- [Pimpin 2007] A. Pimpin et al, "Microelectrostrictive actuator with large out of plane deformation for flow control application," *Journal of Microelectromechanical Systems*, no. 16, vol. 3, pp. 753-764.
- [Reid 1997] J.R. Reid, V.M. Bright, and J.H. Comtois, "Automated assembly of flip-up micromirrors", in *9th International Conference on Solid State Sensors and Actuators (TRANSDUCERS '97) Digest of Technical Papers*, Chicago, IL, USA, June 16-19, 1997, pp. 347-350.

- [Riehl 2003] Riehl P.S., Scott K.L., Muller R.S., Howe R.T. and Yasiatis J.A., "Electrostatic charge and field sensors based on micromechanical resonators", *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 12, no. 5, pp. 577-589, Oct 2003.
- [Robert 2003] P. Robert, D. Saias, C. Billard, S. Boret, N. Sillon, C. Maeder-Pachurka, P.L. Charvet, G. Bouche, P. Ancey, and P. Berruyer, "Integrated RF-MEMS switch based on a combination of thermal and electrostatic actuation", in *12th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS '03) Digest of Technical Papers*, Boston, MA, USA, 8-12 June 2003, 2003, pp. 1714-1717.
- [Ruby 2003] R.C. Ruby, « FBAR filters and duplexers for mobile communication filters », *Workshop on new technologies for microwave and millimetre wave filters IEEE International Microwave Symposium*, 2003, pp. 111-118.
- [Satchell 1989] D. Satchell and J. Greenwood, "A thermally-excited Silicon Accelerometer", *Sensors and Actuators*, 17 (1989), pp. 241-245.
- [Senso 2010] <http://www.sensor.com/>
- [Smith 1954] C.S. Smith, "Piezoresistance effect in germanium and silicon", *Physical Review*, 94:42-49, 1954.
- [Stemme 1990] E. Stemme and G. Stemme, "A balanced resonant pressure sensor", *Sensors and Actuators A*, 21 (1990), pp. 336-341.
- [Tadigadapa 2009] S. Tadigadapa and K. Mateti, "Piezoelectric MEMS sensors: state-of-the-art and perspectives", *Meas. Sci. Technol.* 20, 2009.
- [TI 2010] <http://www.dlp.com>
- [Toshiyoshi 1996] H. Toshiyoshi and H. Fujita, "Electrostatic Micro Torsion Mirrors for an optical switch matrix", *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 5, p. 231, 1996.
- [Tufte 1962] O.N. Tufte and P.W. Chapman, "Silicon diffused-element piezoresistive diaphragms", *Journal of Applied Physics*, 33, 1962.
- [Van Kessel 1998] P.F. Van Kessel, L.G. Hornbeck, R.E. Douglas, "A MEMS based projection display", *Proc. IEEE*, vol. 86, p. 1687-1704, 1998.
- [Vdovin 1995] G. Vdovin and P. Sarro, "Flexible Mirror Micromachined in Silicon", *Applied Optics*, 34, No 16 (1995), pp. 2968-2972.
- [Vdovin 1996] G. Vdovin, "Adaptive Mirror Micromachined in Silicon", PhD thesis, University of Delft, The Netherlands, 1996
- [Willis 1964] J. Willis and B.D. Jimerson, "A piezoelectric accelerometer", *Proc. IEEE*, 52, pp.871-2, 1964.
- [Wu 1998] H.D. Wu, K.F. Harsh, R.S. Irwin, W. Zhang, A.R. Mickelson, Y.C. Lee, and J.B. Dobsa, "MEMS designed for tunable capacitors", in *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, Baltimore, MD, USA, June 7-12, 1998, pp. 127-129.
- [Yan 2002] D. Yan, "Mechanical design and modelling of MEMS thermal actuators for RF applications", Master Thesis, University of Waterloo, Ontario, 2002.

- [Yao 1998] J.J. Yao, S. Park, and J. DeNatale, "High tuning-ratio MEMS-based tunable capacitors for RF communications applications", in Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, USA, June 8-11, 1998, pp. 124-127.
- [Young 1996] D.J. Young, and B.E. Boser, "A micromachined variable capacitor for monolithic lownoise VCO's", in Solid-State Sensor and Actuator Workshop Technical Digest, Hilton Head Island, SC, USA, June 2-6, 1996, pp. 86-89.
- [Zengerle 1995] R. Zengerle, J. Ulrich, S. Kluge, M. Richter and A. Richter, „A bidirectional silicon micropump“, Sensors and Actuators A, vol. 50, pp. 81-86, 1995.
- [Zou 2000] J. Zou, C. Liu, J. Schutt-Aine, J. Chen, and S.-M. Kang, "Development of a wide tuning range MEMS tunable capacitor for wireless communication systems", in IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM '00) Technical Digest, San Francisco, CA, USA, Dec. 11-13, 2000, pp. 403-406.

2

Modélisation des MEMS

Glossaire

- g_{PI} – distance minimale inter électrodes avant *pull-in*
- g_0 – distance initiale inter électrodes
- V – différence de potentiel
- V_{PI} – tension de *pull-in*
- F_{ES} – force électrostatique
- dW – travail des forces électrostatiques
- dx – déplacement élémentaire
- dE_S – énergie de la source électrique
- dE_C – énergie stockée dans la capacité C
- Q – charge électrique stockée dans la capacité C
- ϵ_0 – permittivité du vide
- A – surface en regard des électrodes d'un dispositif à plaques parallèles
- E – module d'Young
- I – moment quadratique
- \mathbf{u} – vecteur déplacement
- \mathbf{w} – force par unité de longueur
- M – moment fléchissant
- y – déformation verticale d'une poutre
- l – longueur de la poutre
- R – couple exercé par l'encastrement
- \mathbf{h} – champ magnétique
- \mathbf{b} – induction magnétique
- \mathbf{d} – champ de déplacement électrique
- \mathbf{e} – champ électrique
- \mathbf{j} – densité de courant de conduction
- ρ – densité volumique de charges électriques
- μ – perméabilité magnétique
- ϵ – permittivité électrique
- σ – conductivité électrique
- Ω – domaine d'étude en électromagnétisme
- Γ – frontière du domaine d'étude
- \mathbf{n} – champ de vecteurs unitaires
- v – potentiel scalaire électrique
- v' – fonction test
- α – fonction scalaire utilisée à la prise en compte de la différence de potentiel
- \mathbf{p} – potentiel vecteur électrostatique
- p' – fonction d'interpolation
- \mathbf{N} – fonction vectorielle utilisée pour la prise en compte du flux électrique
- S – frontière du domaine d'étude mécanique
- ϵ_{ij} – tenseur de déformation
- u_k – déplacement dans la direction k
- $\boldsymbol{\sigma}$ – tenseur de contraintes

τ – contraintes tangentielles ou de cisaillement
 f – force volumique, forces externes
 \mathbf{G} – matrice de Hook
 U – énergie élastique d'un volume
 W – travail externe
 \mathbf{t} – charge surfacique
 Π – énergie totale du système
 $\delta\mathbf{u}$ – déplacement virtuel
 \mathbf{K} – matrice de raideur
 $\tilde{\mathbf{f}}$ – vecteur de charges nodales
 P – pression électrostatique
 L – longueur de la poutre
 b – largeur de la poutre
 h – épaisseur de la poutre
 K_p – raideur effective (expression de la pression)
 K_f – raideur effective (expression de la force)
 K_{eff} – raideur effective, modèle IMEC
 \tilde{E} – module d'Young effectif
 δ_{max} – déformation maximale
 σ_0 – contrainte résiduelle biaxiale
 σ_{NL} – contrainte non linéaire
 ν – coefficient de Poisson
 λ_r – rapport entre la distance sur laquelle on applique l'effort et la longueur de la poutre
 ξ – paramètre d'ajustement du modèle IMEC
 A_{eff} – surface effective
 b_{eff} – largeur effective
 g – distance entre électrode et surface au potentiel zéro
 α, β – coefficients du modèle IMEC

2.1. Problématique : *phénomène de collage électrostatique (« pull-in »)*

Un dispositif capacitif MEMS classique est le plus souvent constitué d'une électrode fixe, isolée par une couche diélectrique, et d'une membrane ou électrode mobile métallique suspendue au-dessus. Schématiquement, si l'électrode mobile est de type poutre, celle-ci peut-être fixée, selon l'application souhaitée, à l'une ou à ses deux extrémités.

Lorsqu'une différence de potentiel V est appliquée entre les deux électrodes (mobile et fixe), une force d'attraction électrostatique apparaît entre celles-ci, entraînant ainsi la déformation de l'électrode mobile. Lors de la déformation, l'électrode mobile réagit comme un ressort et accumule de l'énergie élastique qui tend à la ramener à sa position initiale. Dans le domaine élastique, cette force de rappel mécanique évolue de façon proportionnelle au déplacement. Par contre, pour une différence de potentiel donnée, la force électrostatique qui tend à rapprocher les deux électrodes évolue proportionnellement à l'inverse du carré de la distance inter-électrodes (Figure 20). L'équilibre du système est alors caractérisé par un comportement couplé électro-mécanique fortement non-linéaire [Zhu 2004].

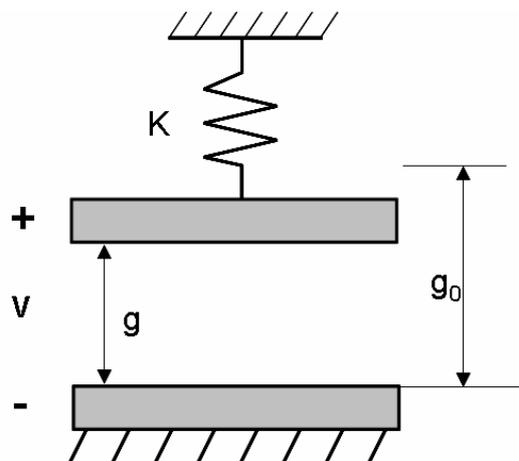


Figure 20. Mass-spring

Pour une tension inférieure à un certain seuil, qui dépend des caractéristiques physiques et géométriques, il existe une position d'équilibre entre la force électrostatique et la force de rappel mécanique. Lorsque la tension dépasse ce seuil, cet équilibre n'est plus assuré. L'électrode mobile se déforme alors jusqu'à « buter » contre l'électrode fixe. Ce comportement est appelé phénomène de collage électrostatique ou « pull-in phenomenon ». La tension seuil à partir de laquelle l'équilibre entre les deux forces antagonistes n'est plus assuré est appelée tension de collage ou « pull-in voltage ».

Dans certaines applications, ce phénomène est exploité pour réaliser la fonction souhaitée. On peut citer le cas des interrupteurs radio-fréquences (RF) où les positions initiale et de collage représentent, respectivement, les positions ouverte et fermée de

l'interrupteur. Dans ce dernier cas, pour ouvrir l'interrupteur, il suffit de supprimer la différence de potentiel entre les électrodes pour que la membrane mobile regagne sa position initiale grâce à la force de rappel élastique. Toutefois, dans d'autres structures MEMS ce phénomène doit absolument être évité car il peut conduire à l'endommagement, voire même à la destruction du dispositif. On peut citer, par exemple, le cas du dispositif à peignes interdigités (Figure 21) où le phénomène de collage n'intervient pas de manière classique. Lors de l'application d'une différence de potentiel entre les deux peignes, les électrodes situées aux extrémités peuvent être sujet au phénomène de collage. En effet, la force d'attraction électrostatique s'exerce sur une seule face de ces électrodes contrairement aux autres électrodes dont les deux faces sont soumises à ce type de force. Ainsi, dans le cas où la tension appliquée est trop élevée, les électrodes aux extrémités peuvent être attirées et collées, menant à l'endommagement du dispositif. Dans ce type de dispositifs, le phénomène de collage est donc à éviter.

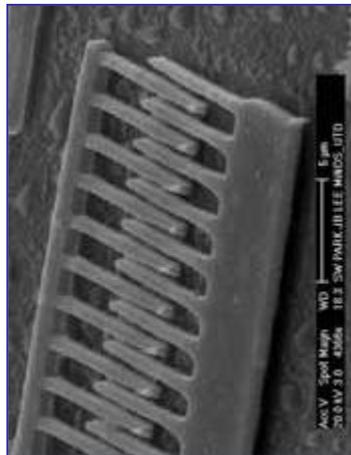


Figure 21. Structure à peignes interdigités [Dallas web]

Que ce phénomène soit recherché ou non, il est important de connaître avec une relative précision la tension de collage, et donc d'être capable de modéliser de façon fiable le phénomène en question. Nous nous proposons dans la suite de faire un état de l'art des différentes techniques de modélisation, analytiques ou numériques, pouvant mener à la détermination de la tension de collage dans un MEMS.

2.2. Etat de l'art sur les modèles de détermination de la tension de *pull-in*

L'analyse de micro-dispositifs électrostatiques requiert la résolution d'un problème couplé entre les domaines électrostatique et élastique afin d'obtenir les paramètres caractérisant ce type de système, comme par exemple la tension de *pull-in*. L'approche analytique peut fournir des résultats rapides, avec une précision plus ou moins élevée selon la nature et la géométrie du système. Toutefois, ce type d'approche est limité en ce qui concerne les phénomènes pris en compte (effets de bords, etc) et

peut être difficilement adaptable à des géométries complexes. Dans ce cas, les modèles numériques deviennent plus intéressants de par leur prise en compte, entre-autres, de la complexité des géométries étudiées et des phénomènes qui sont le plus souvent négligés dans les approches analytiques dans un souci de facilité d'utilisation.

Dans la suite, nous présentons un état de l'art concernant les principales approches, ou combinaisons d'approches, existantes pour la détermination du phénomène de pull-in.

2.2.1. Modélisation analytique

Les modèles analytiques les plus simples considèrent l'électrode mobile comme étant non déformable (approximation de plaques parallèles) et la répartition des charges électriques sur la surface des électrodes comme étant uniforme [Nathanson 1967, Osterberg 1997]. Ces modèles donnent l'expression de la tension de collage à partir de l'équilibre entre la pression électrostatique et la force de rappel exercée par un ressort équivalent qui représente la rigidité de la partie mobile. La condition pour la détermination de la tension de *pull-in* est fixée à partir de la distance minimale g_{PI} inter-électrodes avant le collage. La valeur de g_{PI} est fixée à 2/3 de la distance inter-électrodes initiale (g_0), valeur observée expérimentalement.

Toutefois, dans ce type de modèle, certains effets, comme les effets de bords ou bien la déformation de la partie mobile, sont négligés. En réalité, comme présenté au paragraphe 2.5.2, les électrodes mobiles sont des poutres ou des membranes flexibles qui peuvent subir de grandes déformations.

Une approche par modélisation empirique peut améliorer la précision des modèles analytiques simples en s'appuyant sur des données expérimentales [Osterberg 1997]. Ainsi, à partir des mesures expérimentales de la tension de *pull-in* (V_{PI}), des paramètres d'ajustement sont déterminés et intégrés dans l'expression de la raideur de la poutre afin d'obtenir une expression améliorée de la tension de collage. En effet, d'un point de vue pratique, la déformation des électrodes engendre une répartition du champ électrostatique non uniforme entre celles-ci et, par conséquent, une répartition non uniforme de la force électrostatique. Il est toutefois possible d'y intégrer des améliorations afin de considérer l'effet de la déformation et son impact sur les distributions du champ électrique et de la force électrostatique. Il existe des modèles prenant en compte les grandes déformations des poutres [Tilmans 1994, O'Mahony 2003]. Ces modèles sont basés sur une approche utilisant l'énergie stockée entre une électrode fixée à ses extrémités et une surface au potentiel zéro pour déterminer la tension de *pull-in*. Un autre modèle, analytique amélioré [Pamidighantam 2002], qui sera présenté au paragraphe 2.5.2, tient compte des effets énumérés ci-dessus, ainsi que de ceux des efforts axiaux exercés par l'encastrement, mais aussi ceux dus à l'application de la différence de potentiel sur uniquement une partie des surfaces des électrodes.

2.2.2. Modélisation numérique

Comme évoqué ci-dessus, pour l'analyse de microstructures électrostatiques, il est nécessaire de résoudre un problème couplé des domaines électrique et mécanique. De manière générale, ceci peut-être réalisé par l'intermédiaire d'un couplage par superposition des domaines physiques, on parle alors d'un mécanisme de couplage *de volume*. Cela peut également être effectué par l'imposition des conditions aux limites, on parle alors d'un mécanisme de couplage *de surface* [Zienkiewicz 1984]. Les dispositifs étudiés dans le cadre de cette thèse présentent un couplage dit *de surface* entre une structure qui subit une déformation sous l'action d'une force électrostatique. Un tel couplage est rencontré dans les applications de type *filtres électromécaniques*, *capteurs résonants (résonateurs)*, *oscillateurs* [v. d. Poel 2003].

Du point de vue de la modélisation numérique, la résolution du problème électromécanique couplé peut se faire de manière forte (couplage numérique fort) ou de manière faible (couplage numérique faible ou chaînage).

Dans le cas d'un *couplage numérique fort* [Rochus 2006, Avdeev 2003], les équations de Maxwell et les équations d'élasticité sont assemblées dans un système non linéaire unique, ce qui conduit à résoudre une seule matrice globale. Le fait d'avoir des termes de couplage entre les degrés de liberté mécaniques et électriques, en plus des termes purement électriques et mécaniques, a deux conséquences. D'une part, le système à résoudre devient plus lourd du point de vue temps de calcul et, d'autre part, des techniques de résolution spécifiques doivent être employées si le système à résoudre est non symétrique.

Dans le cas d'un *couplage numérique faible* [Boutaayamou 2008], les deux problèmes sont résolus de manière séquentielle. Le problème électrique est d'abord résolu afin de déterminer la force ou la pression électrostatique. Celles-ci seront alors utilisées comme terme source dans le calcul mécanique qui permet d'obtenir les déformations au sein du système. Cette déformation engendre une modification de la répartition spatiale du champ électrique. Ainsi, un nouveau calcul électrique est nécessaire et le cycle itératif est répété jusqu'à convergence de la solution.

Il faut préciser que le couplage séquentiel entre les deux problèmes peut se faire de manière *globale*, par l'intermédiaire du calcul de la grandeur globale pression électrostatique (force par unité de surface) ou de façon *locale*, en appliquant cette fois-ci la force électrostatique localement. La procédure du couplage séquentiel sera détaillée en fin de ce chapitre.

Le changement de configuration d'une itération à l'autre nécessite une mise à jour de la géométrie. Il existe deux possibilités pour réaliser cette mise à jour. Dans le cas d'un maillage type éléments finis, la première technique consiste à remailler la nouvelle configuration du système. Cette méthode permet d'avoir un maillage adapté (conforme) pour le pas de calcul suivant, mais la création du maillage, en particulier pour des géométries complexes, entraîne une augmentation importante du temps de calcul.

La deuxième méthode est la méthode dite de *mesh morphing*. Cette méthode consiste à mettre à jour les coordonnées des nœuds du maillage initial une fois le calcul

mécanique réalisé, celui-ci fournissant le déplacement en chaque nœud du système. L'avantage présenté par la technique du *mesh morphing* réside dans le fait que l'on évite la génération d'un nouveau maillage éléments finis et donc d'un pre-processing coûteux en temps. En revanche, pour de fortes déformations, cela engendre des zones où la qualité du maillage peut être fortement dégradée et qui peuvent avoir un impact sur la qualité de la solution.

Toutefois, dans le cas des structures MEMS les plus simples, les déformations constatées étant de faibles amplitudes à l'échelle des dimensions de la structure, cette dernière approche peut se révéler suffisante.

2.2.3. Logiciels dédiés

Le développement accéléré des technologies MEMS et leur présence dans de nombreuses applications ont conduit aux développements de logiciels spécialisés dans la modélisation de ces micro-dispositifs. Ces outils sont essentiellement utilisés lors des phases de conception, fabrication et simulation ou modélisation de MEMS.

Parmi les logiciels les plus courants, on peut citer CoventorWare [CoventorWare], avec les modules Architect3D, Designer, Analyzer et Integrator. Le module Analyzer permet de comprendre et vérifier le comportement physique de MEMS, à l'aide de solveurs en trois dimensions et des routines d'optimisation spécifiques aux phénomènes couplés.

Le logiciel de modélisation des phénomènes multiphysiques, COMSOL [COMSOL], a également dédié un module à la modélisation de MEMS. Il permet donc de tenir compte des phénomènes couplés électromagnétique-élastique, thermique-élastique et fluide-élastique exploités au sein des micro résonateurs, capteurs ou encore actionneurs.

MemSolvers [MemSolver] est un outil qui permet de générer le modèle d'un microsysteme, sur la base de modèles mathématiques prédéfinis, pour la description du comportement des MEMS les plus courants.

D'autres logiciels, basés sur l'analyse nodale, existent également. Le logiciel libre SUGAR [SUGAR], par exemple, tire profit du savoir faire de la simulation des circuits intégrés pour représenter des poutres, entrefers et éléments de circuit par des systèmes couplés d'équations différentielles.

2.3. Modèles analytiques

Les modèles analytiques fournissent des résultats relativement précis quand les systèmes à modéliser sont à géométries simples. Dans ce paragraphe, les modèles analytiques électrostatique et mécanique sont présentés. Le premier type de modèle permet de calculer la force électrostatique s'exerçant au sein d'un dispositif à plaques parallèles soumis à une différence de potentiel. Le modèle mécanique, basé sur la

théorie des poutres en résistance des matériaux (RDM), permet d'obtenir l'état de déformation des poutres soumises à des charges extérieures.

2.3.1. Modèle analytique électrostatique

Les structures à plaques parallèles sont des structures fréquemment rencontrées dans la réalisation des micro-interrupteurs (micro-switches), de pompes et de membranes déformables [Cugat 2002/II]. L'étude du comportement de telles structures revient à déterminer l'expression de la force électrostatique en fonction de la tension d'alimentation. Le modèle analytique d'un dispositif type à plaques parallèles est présenté dans la suite.

Dans un premier temps, la force électrostatique sera déterminée à partir de considérations énergétiques pour le système étudié. Considérons un actionneur à plaques parallèles tel qu'illustré à la Figure 20 constitué de deux électrodes, l'une fixe et l'autre mobile, soumises à une différence de potentiel V . L'application de la tension V engendre l'apparition d'une force électrostatique F_{ES} , force qui fournit un travail dW accompagné d'un déplacement dx . On supposera que le potentiel électrique reste constant et que l'énergie dépensée par la source pour maintenir ce potentiel constant est dE_S . Le mouvement de l'électrode mobile induit une variation de l'énergie stockée dE_C dans la capacité C entre les électrodes. Le travail de la force électrostatique et la variation de l'énergie stockée dans la capacité C sont bien entendu fournis par la source. Ceci se traduit alors par le bilan énergétique suivant :

$$dE_S = dW + dE_C \quad (6)$$

La variation d'énergie de la source s'écrit également en fonction de la variation de charges sous la forme suivante:

$$dE_S = VdQ = V^2 dC \quad (7)$$

où Q est la charge électrique stockée dans la capacité C .

Par ailleurs, la variation d'énergie stockée par la capacité a pour expression $dE_C = \frac{1}{2}V^2 dC$. Sachant que le travail s'écrit classiquement $dW = F \cdot dx$, on peut déduire l'expression générale de la force électrostatique :

$$F_{ES} = dE_C = \frac{1}{2}V^2 dC \quad (8)$$

Dans l'hypothèse où l'électrode mobile est supposée se déplacer de façon plane, i.e. pour un déplacement x donné, la distance ($g_0 - x$) séparant les deux électrodes est constante en tout point d'un plan de coupe perpendiculaire aux électrodes, la capacité s'écrit alors sous la forme :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{g_0 - x} \quad (9)$$

où ε_0 est la permittivité du vide, A l'aire de la surface en regard des électrodes et g_0 , comme défini plus haut, la distance initiale inter-électrodes.

L'expression de la force électrostatique devient alors :

$$F_{ES} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 A}{(g_0 - x)^2} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\varepsilon_0 A}{g^2} \quad (10)$$

Cette expression montre que la force électrostatique varie en fonction du carré de la tension et en fonction de l'inverse du carré de la distance inter-électrodes g , ce qui constitue une caractéristique fortement non linéaire.

2.3.2. Modèle analytique mécanique

Les structures de MEMS étudiées dans la suite peuvent être simplifiées et assimilées à des poutres, fixées à l'une ou aux deux extrémités, qui subissent une déformation sous l'action d'une charge extérieure (Figure 22). Par conséquent, étudier le comportement de telles structures revient à étudier un problème de poutres en flexion. Pour élaborer le modèle analytique, la théorie des poutres en Résistance des Matériaux (RDM) est utilisée.

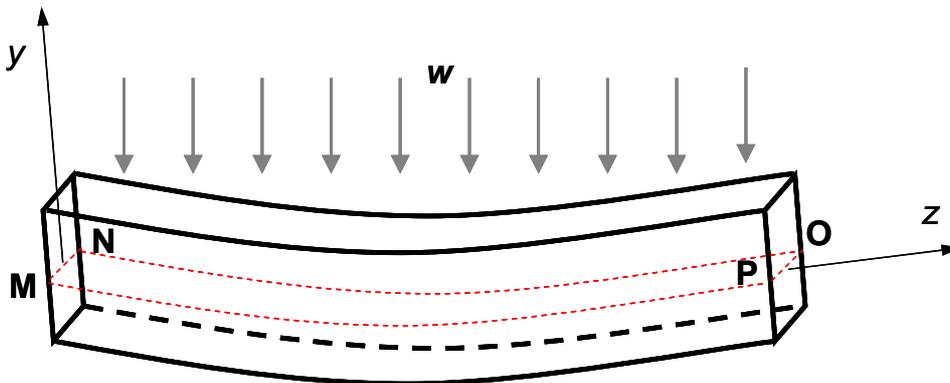


Figure 22. Poutre soumise à une charge distribuée w

Le comportement d'une poutre élastique linéaire et isotrope est régi par l'équation d'Euler-Bernoulli [Roark 1989] :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) = \mathbf{w} \quad (11)$$

où \mathbf{u} est le vecteur déplacement, \mathbf{w} la charge linéique appliquée à la poutre, E le module d'élasticité, ou module d'Young, et I le moment quadratique. L'expression du moment quadratique pour une section rectangulaire prend la forme :

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (12)$$

où b et h sont, respectivement, la largeur et la hauteur de la section d'une poutre.

Le module d'élasticité prend en compte le comportement du matériau, le moment quadratique, quant à lui, prend en compte la géométrie de la poutre.

Sachant que la géométrie de la poutre est simple, et connaissant exactement la nature du problème que l'on cherche à résoudre, on peut introduire des hypothèses suivantes pour simplifier l'équation (11) :

1) Le module d'Young E et le moment quadratique I ne varient pas le long de la poutre. Dans ce cas, l'expression (11) devient :

$$EI \frac{d^4 \mathbf{u}}{dz^4} = \mathbf{w} \quad (13)$$

2) La contrainte plane varie linéairement dans la direction de fléchissement.

3) Le matériau dont la poutre est constituée est isotrope.

4) L'effort appliqué est orthogonal à l'axe neutre de la poutre (la médiane des segments [MN] et [OP], dans le plan [MNOP]) et agit dans un plan unique.

Les dérivées successives de (13) permettent d'obtenir différentes grandeurs d'intérêt, comme la force de cisaillement ou le moment fléchissant. Nous nous intéressons uniquement au moment fléchissant M et on détermine la déformation verticale y , en un point quelconque le long de la poutre, par l'expression suivante :

$$M = EI \frac{d^2 \mathbf{u}}{dz^2} = EI y'' \quad (14)$$

où M est le moment fléchissant et y'' la dérivée seconde de la déformée y .

Dans l'équation ci-dessus, la déformée n'apparaît pas explicitement, mais uniquement sa dérivée. Pour obtenir le déplacement y , les conditions aux limites associées à la poutre, sont utilisées. En effet, les équations de déformation des poutres dépendent du type de fixation utilisée dans la microstructure. Dans la suite, les équations de déformation pour trois types de fixations seront détaillées :

- a) Poutre encastree à une seule extrémité
- b) Poutre posée à ses deux extrémités
- c) Poutre encastree à ses deux extrémités

Pour les trois cas traités, la charge mécanique w sera considérée comme une charge uniformément distribuée et orientée selon y . On considèrera alors la grandeur scalaire correspondante w .

2.3.2.1. Poutre encastrée à une seule extrémité

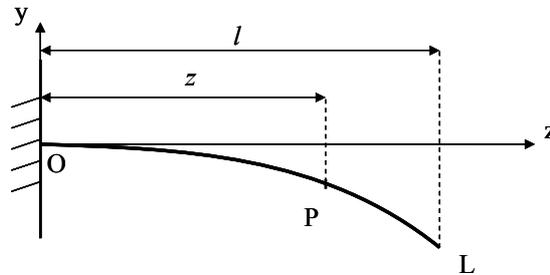


Figure 23. Poutre encastrée à une seule extrémité

Soit une poutre de longueur l encastrée à l'une de ses extrémités comme illustré sur la Figure 23. Le moment fléchissant M au point P situé à une distance z de l'origine O, peut être exprimé en fonction de la charge w . En considérant la relation classique de la force appliquée par un bras de levier $(l - z)$. On obtient alors directement le moment fléchissant:

$$M = -\frac{1}{2}(l-z)[w(l-z)] \quad (15)$$

En remplaçant M par son expression donnée par (14) dans l'équation précédente, on peut extraire :

$$y'' = -\frac{w}{2EI}(l^2 - 2zl + z^2) \quad (16)$$

$$y' = -\frac{w}{2EI}\left(l^2z - lz^2 + \frac{1}{3}z^3\right) + C_1 \quad (17)$$

et donc l'expression de y :

$$y = -\frac{w}{2EI}\left(\frac{1}{2}l^2z^2 - \frac{1}{3}lz^3 + \frac{1}{12}z^4\right) + C_1z + C_2 \quad (18)$$

Comme la poutre est encastrée, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Ce qui implique $C_2 = 0$ et $C_1 = 0$. L'équation de la déformée en tout point de la poutre sera finalement :

$$y = \frac{w}{24EI} (-z^4 + 4lz^3 - 6l^2z^2) \quad (19)$$

A noter que la flèche se trouve au point $z=l$ (Figure 23).

2.3.2.2. Poutre posée à ses deux extrémités

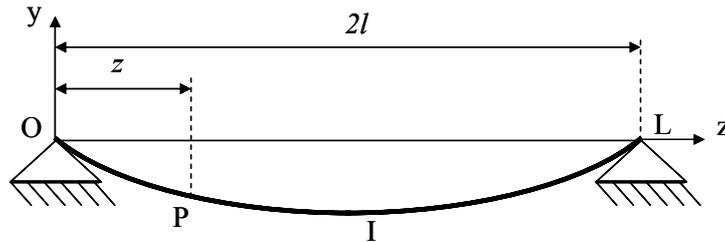


Figure 24. Poutre posée à ses deux extrémités

Soit une poutre, de longueur $2l$, posée aux points O et L (Figure 24). Le moment exprimé au point P peut s'écrire, tout comme dans la configuration précédente, à partir de la force appliquée au point P par le bras de levier en z :

$$M = wlz - wz\left(\frac{1}{2}z\right) \quad (20)$$

L'équation à résoudre devient :

$$EIy'' = wlz - \frac{1}{2}wz^2 \quad (21)$$

Tout comme dans le cas d'une poutre encastree à une seule extrémité, deux intégrations successives aboutissent aux expressions suivantes :

$$EIy' = \frac{1}{2}wlz^2 - \frac{1}{6}wz^3 + C_1 \quad (22)$$

$$EIy = \frac{1}{6}wlz^3 - \frac{1}{24}wz^4 + C_1z + C_2 \quad (23)$$

Le déplacement est nul aux points de fixation O et $2l$. Par conséquent, $y(0) = 0$ et $y(2l) = 0$ et donc $C_2 = 0$ et $C_1 = -\frac{wl^3}{3}$.

L'équation de la déformée pour cette configuration s'écrit :

$$y = \frac{w}{24EI} (-z^4 + 4lz^3 - 8l^3z) \quad (24)$$

2.3.2.3. Poutre encastree à ses deux extremités

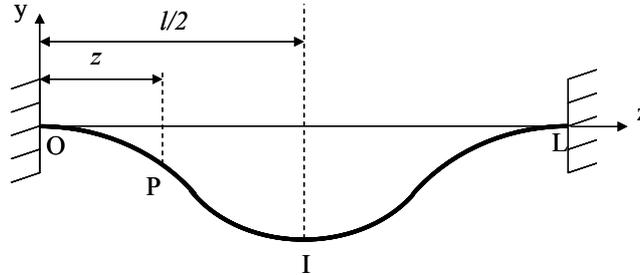


Figure 25. Poutre encastree à ses deux extremités

Ce cas est similaire au précédent, à la seule différence qu'il existe un couple constant R exercé par l'encastrement et qui s'oppose à la déformation (Figure 25). Le moment fléchissant vu du point P peut s'écrire :

$$M = R + \frac{1}{2}wlz - \frac{1}{2}wz^2 \quad (25)$$

En appliquant la démarche présentée aux deux paragraphes précédents, on obtient l'équation à résoudre pour la détermination du déplacement en tout point de la poutre :

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}Rz^2 + \frac{1}{12}wlz^3 - \frac{1}{24}wz^4 + C_1z + C_2 \right) \quad (26)$$

Les conditions en un point d'encastrement sont suffisantes pour déterminer les valeurs des constantes C_1 et C_2 . En effet, au point O, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Par conséquent on peut déduire que les constantes C_1 et C_2 sont nulles. L'expression du couple R s'écrit alors :

$$R = -\frac{l}{24}(2wl) \quad (27)$$

D'où la relation donnant le déplacement en tout point z :

$$y = \frac{1}{24EI} (-wz^4 + 2wlz^3 - l^2wz^2) \quad (28)$$

Les équations (14), (24) et (28) seront utilisées dans la suite pour calculer la déformation dans les approches utilisant le modèle mécanique analytique.

2.4. Modélisation éléments finis. Cadre théorique

Ce paragraphe traite de la présentation des modèles numériques type éléments finis pour la résolution des problèmes électrostatique et élastique. Dans une première partie, le modèle électrostatique sera introduit. Celui-ci sera décrit à partir des équations de l'électromagnétisme. Les formulations en potentiels qui y sont associées, avec l'imposition des grandeurs globales, seront présentées. Dans la seconde partie, le modèle mécanique traitera des équations d'équilibre d'un solide élastique et du principe de travaux virtuels, nécessaire pour le calcul des déformations.

2.4.1. Modèle éléments finis électrostatique

Dans ce paragraphe, les formulations en potentiel scalaire et potentiel vecteur du problème électrostatique sont présentées. Afin de décrire les phénomènes électromagnétiques, nous considérons les équations de Maxwell :

$$\mathbf{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d} \quad (29)$$

$$\mathbf{rote} = -\partial_t \mathbf{b} \quad (30)$$

$$\mathit{div} \mathbf{b} = 0 \quad (31)$$

$$\mathit{div} \mathbf{d} = \rho \quad (32)$$

où \mathbf{b} est l'induction magnétique (T), \mathbf{h} est le champ magnétique (A/m), \mathbf{d} est le champ de déplacement électrique ou induction électrique (C/m^2), \mathbf{e} est le champ électrique (V/m), \mathbf{j} est la densité de courant (A/m^2) et ρ est la densité volumique de charge électrique (C/m^3).

Afin de compléter le système constitué des relations (29) à (32), les lois constitutives des matériaux sont introduites :

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad (33)$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad (34)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (35)$$

où μ est la perméabilité magnétique (H/m), ε est la permittivité électrique (F/m) et σ est la conductivité électrique ($1/\Omega \cdot m$). Ces trois relations sont connues sous le nom de lois de comportement magnétique (33), diélectrique (34) et d'Ohm locale (35).

Pour assurer l'unicité de la solution, des conditions aux limites adéquates doivent être imposées sur la frontière du domaine d'étude. Les conditions aux limites peuvent être classées en 3 catégories :

- a) conditions homogènes
- b) conditions de transmission des champs
- c) grandeurs globales imposées, de types flux ou circulation

Les conditions homogènes s'appliquent, en fonction de la nature du problème, aux composantes normales de \mathbf{d} , \mathbf{b} et \mathbf{j} et aux composantes tangentielles de \mathbf{h} et \mathbf{e} .

2.4.1.1. Problème électrostatique

La résolution d'un problème électrostatique consiste à trouver la répartition spatiale du champ électrique \mathbf{e} dû à une différence de potentiel électrique. Dans le cas quasi-statique, le modèle mathématique régissant le phénomène électrostatique est décrit par les relations (36), (37) et la loi constitutive (34) dans le domaine d'étude Ω de frontière Γ (Figure 26) :

$$\mathbf{rote} = \mathbf{0} \quad (36)$$

$$\mathbf{divd} = \rho \quad (37)$$

Dans le cas d'un problème électrostatique, la frontière Γ se décompose en deux parties complémentaires Γ_d et Γ_e , telles que $\Gamma_d \cup \Gamma_e = \Gamma$, qui sont associées aux conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} |_{\Gamma_d} = 0 \quad (38)$$

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{e} |_{\Gamma_e} = \mathbf{0} \quad (39)$$

où \mathbf{n} est la normale à la surface.

De manière générale, la partie Γ_e de la frontière du domaine d'étude Ω peut se décomposer en deux (ou plusieurs) parties complémentaires Γ_{e1} et Γ_{e2} telles que $\Gamma_{e1} \cup \Gamma_{e2} = \Gamma_e$. Notons V la différence de potentiel entre Γ_{e1} et Γ_{e2} et Q le flux électrique traversant Γ_{e1} et Γ_{e2} .

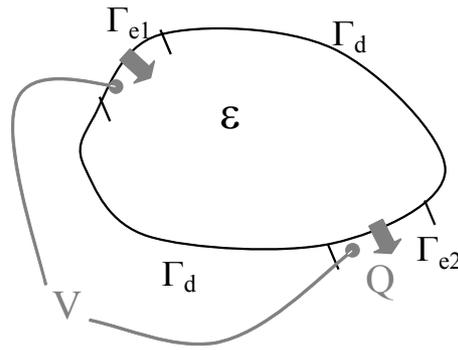


Figure 26. Représentation du domaine d'étude électrostatique

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où, pour les structures étudiées, les distributions de charges électriques sont uniquement surfaciques, il est possible de négliger les charges isolées et la relation (37) devient :

$$\text{div} \mathbf{d} = 0 \quad (40)$$

La résolution du problème électrostatique, nécessite de trouver les champs de vecteurs \mathbf{d} et \mathbf{e} définis, respectivement, par (36) et (40) en y associant les conditions aux limites adéquates. La relation constitutive (34) offre une relation directe entre ces deux champs de vecteurs. Un champ admissible est défini comme un champ de vecteurs vérifiant l'une des deux équations aux dérivées partielles définissant le problème électrostatique (36 ou 40) et la condition aux limites qui lui est associée. Ce champ, pour devenir solution du problème, doit créer un deuxième champ qui, à son tour, vérifie la deuxième équation et la seconde condition aux limites. Usuellement, on introduit des potentiels scalaire ou vecteur pour avoir des champs admissibles. Les termes sources, quant à eux, sont introduits grâce aux propriétés des formulations en potentiel.

2.4.1.2. Formulation en potentiel scalaire

A partir de l'équation (36) il est possible de définir le potentiel scalaire électrique v tel que :

$$\mathbf{e} = -\text{grad}v - V\text{grad}\alpha \quad (41)$$

avec $v=0$ sur Γ_e . La fonction scalaire α est définie pour considérer la différence de potentiel V [Dular 1998]. Elle prend la valeur 1 sur Γ_{e1} et 0 ailleurs.

L'expression du champ électrique ainsi défini constitue un champ admissible pour l'équation (36). Pour assurer l'unicité de la solution, une condition de jauge, ou une contrainte, doit être appliquée au potentiel v à l'aide des conditions aux limites. En

remplaçant, dans l'équation (40), \mathbf{d} par son expression donnée en (34) et \mathbf{e} par la relation précédente, la formulation en potentiel scalaire électrique s'écrit :

$$\text{div}\varepsilon(-\mathbf{grad}v - V\mathbf{grad}\alpha) = 0 \quad (42)$$

Cette équation doit être résolue, en tenant compte des conditions aux limites, sur tout le domaine d'étude. Dans le domaine discret, le potentiel v et la fonction α sont discrétisés à l'aide des éléments de Whitney [Bossavit 1988] dans l'espace des éléments nodaux. Ainsi, la formulation faible peut être directement déduite à partir de l'équation (42) sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad}v \cdot \mathbf{grad}v' d\Omega = -V \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{grad}\alpha \cdot \mathbf{grad}v' d\Omega \quad (43)$$

où v' est une fonction test vérifiant les mêmes conditions aux limites que le potentiel v . En utilisant la méthode de Galerkin, la fonction d'interpolation nodale est utilisée comme fonction test dans l'équation (43). A noter que, dans cette formulation, la tension V est introduite naturellement dans (41) et peut donc être aisément imposée dans le domaine d'étude. En revanche, le flux électrique traversant les frontières Γ_{e1} et Γ_{e2} (Figure 26) n'apparaît pas explicitement. Il est donc nécessaire d'introduire une équation supplémentaire. Ceci est réalisé à partir d'un bilan de puissance [Henneron 2006] ou en utilisant les propriétés des formulations faibles [Dular 1998, Henneron 2008] ou bien encore à l'aide des propriétés des maillages duaux [Bossavit 1998]. La relation qui doit être ajoutée au système précédent afin d'introduire le flux électrique Q est donnée par :

$$Q = - \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{grad}\alpha d\Omega \quad (44)$$

2.4.1.3. Formulation en potentiel vecteur

Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur, on introduit un potentiel vecteur électrostatique, noté \mathbf{p} , associé à des conditions aux limites. On introduit également une fonction vectorielle \mathbf{N} afin de prendre en compte le flux électrique Q . Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

$$\text{div}\mathbf{N} = 0 \quad (45)$$

$$\int_{\Gamma_{e1}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}\Gamma = 1 \quad (46)$$

$$\int_{\Gamma_{e2}} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{\Gamma} = -1 \quad (47)$$

à condition que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|_{\Gamma_d} = 0$. La fonction \mathbf{N} peut-être déterminée en utilisant une technique d'arbre [Le Menach 2000].

Le champ de déplacement électrique, vérifiant l'expression (40), peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{d} = \mathbf{rot}\mathbf{p} + Q\mathbf{N} \quad (48)$$

avec $\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma_d} = \mathbf{0}$. Pour assurer l'unicité du potentiel, une condition de jauge, par exemple la jauge de Coulomb doit être introduite. Le vecteur \mathbf{p} est alors discrétisé dans l'espace des éléments d'arêtes et le vecteur \mathbf{N} dans celui des éléments de facettes. En remplaçant, dans l'équation (36), \mathbf{e} par son expression donnée en (34), ensuite \mathbf{d} par la relation (48) la formulation en potentiel vecteur électrique s'écrit :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\varepsilon} (-\mathbf{rot}\mathbf{p} - Q\mathbf{N}) = 0 \quad (49)$$

La formulation faible du problème s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{rot}\mathbf{p} \mathbf{rot}\mathbf{p}' d\Omega = -Q \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{N} \mathbf{rot}\mathbf{p}' d\Omega \quad (50)$$

où \mathbf{p}' est une fonction test prise égale à la fonction d'interpolation d'arête. On remarquera que dans cette formulation, le flux électrique est introduit naturellement à l'aide de (48) et peut donc être aisément imposé dans le problème. En revanche, la tension V n'apparaît pas explicitement. Par conséquent, il est nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire pour imposer cette dernière [Dular 1998, Henneron 2008]:

$$V = \int_{\Omega} \mathbf{e}\mathbf{N}d\Omega \quad (51)$$

Pour imposer la tension V , l'équation précédente est résolue à l'aide du système décrit par l'équation (50). Le flux électrique Q devient alors une inconnue du problème.

2.4.1.4. Calcul de force

Le calcul de la force électrostatique est effectué en post-traitement. Deux techniques sont très répandues dans le domaine du calcul de champ en électromagnétisme : la méthode des travaux virtuels [Coulomb 1983, Coulomb 1984] et

la méthode du tenseur de Maxwell [Bossavit 2007, Henrotte 2000]. Les deux ont été utilisées dans ces travaux.

2.4.2. Modèle éléments finis mécanique (élastique)

Ce paragraphe traite de la résolution d'un problème d'élasticité linéaire à l'aide de la méthode des éléments finis. Les équations d'équilibre d'un solide élastique, les conditions aux limites et le principe des travaux virtuels seront présentés.

2.4.2.1. Equations d'équilibre d'un solide élastique

Le solide faisant l'objet de notre étude est constitué d'un matériau élastique, linéaire, isotrope et il occupe dans son état naturel le domaine Ω (Figure 27) en \mathbb{R}^3 .

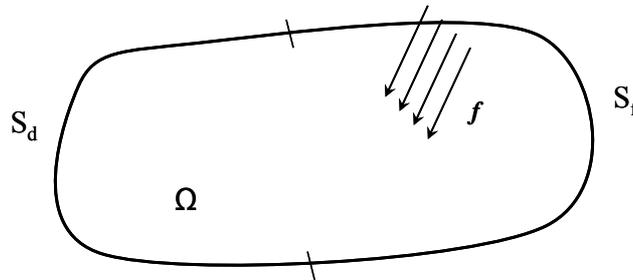


Figure 27. Le domaine Ω de frontière $\partial\Omega = S = S_d \cup S_f$ est soumis à l'action des forces extérieures f

En se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), nous pouvons écrire les équations régissant le problème d'élasticité linéaire [Craveur 2008]:

$$\text{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (52)$$

Cette équation de base de la mécanique des milieux continus, représente l'équation d'équilibre du solide sous l'action des forces extérieures.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{G}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (53)$$

L'équation (53) est une loi constitutive définissant le comportement élastique du matériau.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (54)$$

où f est la densité volumique de force, ε le tenseur de déformation, \mathbf{G} est une matrice carrée de dimension 6, appelée *la matrice de Hook*, u_k est le déplacement dans la direction k et x la coordonnée généralisée, avec $i=1,2,3$ pour une application tridimensionnelle.

La matrice des contraintes σ , représentative d'un tenseur du second ordre (tenseur de contrainte) peut être définie comme suit :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (55)$$

où les termes du tenseur de contrainte notés σ_{kk} ($k=x,y,z$) sont les contraintes normales et ceux notés τ_{kl} ($l=x,y,z$ avec $k \neq l$) sont les contraintes tangentielles ou de cisaillement. Compte tenu des propriétés de symétries des tenseurs de contrainte et de déformation, ceux-ci sont entièrement déterminés si on connaît les 6 composantes sur les neufs représentés vectoriellement par :

$$\{\sigma\}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \quad (56)$$

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}) \quad (57)$$

Aux équations (52), (53) et (54), on associe des conditions aux limites et on obtient la *formulation forte* du problème d'équilibre en élasticité.

2.4.2.2. Conditions aux limites

Des conditions aux limites de type déplacements imposés (nuls ou non nuls) ou efforts imposés (nuls ou non nuls) peuvent être appliquées à la surface externe S du domaine d'étude. Les conditions aux limites portant sur les efforts sont dites *conditions aux limites statiques* et elles s'appliquent sur une partie S_f du domaine d'étude (Figure 27). On appelle *conditions aux limites cinématiques* les conditions aux limites portant sur les déplacements et s'appliquant sur une partie S_d de la surface du domaine. Il est évident qu'on ne peut pas imposer à la fois un effort et un déplacement en un point du domaine, ce qui implique que $S_f \cap S_d = \emptyset$.

2.4.2.3. Le principe des travaux virtuels

On définit l'énergie U élastique d'un volume Ω comme une forme quadratique linéaire et symétrique des déformations :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (58)$$

Cette énergie élastique est créée par le travail des forces de cohésion. En élasticité linéaire, les charges appliquées au domaine Ω sont conservatives, c'est-à-dire qu'elles sont indépendantes des déplacements. Les charges extérieures produisent un travail W :

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (59)$$

où \mathbf{f} représente les charges de volume et \mathbf{t} les charges de surface, appliquées à la surface du domaine S . L'énergie totale du domaine peut alors être définie à partir des équations (58) et (59):

$$\Pi(\mathbf{u}) = U - W \quad (60)$$

En considérant un déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$, cinématiquement admissible du domaine, le *théorème des travaux virtuels* implique que, à l'équilibre, le travail des forces internes doit être égal à celui des forces externes. Autour du point d'équilibre, on écrit alors la variation du travail des forces externes :

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (61)$$

et la variation du travail des forces internes :

$$\delta U = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (62)$$

On obtient finalement l'équation d'équilibre :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (63)$$

Le développement de cette équation d'équilibre dans le domaine discret est détaillé dans l'Annexe A.

2.5. Modèles couplés électrostatique - mécanique

Dans les paragraphes précédents, le cadre théorique des différentes approches, analytiques et numériques, a été présenté. Toutefois, les modèles exposés ci-dessus abordent chacun un domaine physique unique. Pour modéliser le phénomène couplé électrostatique-mécanique, différentes possibilités combinant modèles analytiques et/ou éléments finis peuvent être adoptées. La suite de ce chapitre sera consacrée à la présentation de quelques couplages électrostatique-mécanique.

2.5.1. Modèle analytique simple (modèle Nathanson)

Le modèle Nathanson est une approche analytique simple et intuitive mais peu précise. Introduite dans [Nathanson 1967], cette approche est basée sur un modèle de type masse-ressort, à partir de considérations phénoménologiques, afin d'obtenir une expression approchée de la tension de collage. Il a également été utilisé dans les travaux de P. Osterberg [Osterberg 1995] qui en a déduit une expression locale de la tension de collage en fonction des dimensions géométriques et des propriétés des matériaux de la structure. Cette expression a été ensuite exploitée pour remonter aux propriétés des matériaux (coefficient de Poisson, module d'Young et contraintes résiduelles) à partir des mesures de tensions de collage effectuées sur plusieurs échantillons de MEMS.

Dans ce modèle, on considère une structure capacitive à plaques parallèles (Figure 20). L'électrode mobile est considérée rigide et fixée par un ressort idéal au dessus d'un plan à potentiel nul. Lors de l'application d'une différence de potentiel entre les deux plaques, la structure mobile se déplace vers la surface à potentiel nul sous l'action d'une force ou pression électrostatique. Le ressort, modélisant ici la raideur de la structure mobile, exerce alors une force de rappel.

Il est possible de décrire la pression qui s'exerce sur la plaque mobile à l'aide de l'expression suivante :

$$P(g) = K_p(g_0 - g) - \frac{\epsilon_0 V^2}{2g^2} \quad (64)$$

où, K_p est une constante, tenant compte de la raideur effective du ressort, g_0 comme déjà défini, la distance initiale entre les plaques, g la variable distance inter-plaques pour laquelle la pression est calculée. En introduisant la surface A des plaques, il est également possible d'écrire la force :

$$F(g) = K_f(g_0 - g) - \frac{\epsilon_0 A V^2}{2g^2} \quad (65)$$

où K_f est la raideur effective du ressort.

Les structures mobiles des MEMS sont en réalité des poutres continues et donc elles sont caractérisées par une longueur L , une largeur b et une épaisseur h . Une poutre est dite *large* lorsque sa largeur est grande par rapport à son épaisseur ($b \gg h$) et elle est *étroite* lorsque $b \approx h$.

Ainsi, selon la grandeur qu'on souhaite exprimer, force ou pression, l'expression de la raideur effective est différente. En effet, l'expression de K_p s'écrit,

$$K_p = \frac{32\tilde{E}h^3}{L^4} + \frac{8\sigma_0(1-\nu)h}{L^2} \quad (66)$$

Celle de K_f s'exprime ensuite au facteur de surface près, $K_f = K_p L b$. Il est évident que K_f et K_p dépendent des dimensions géométriques de la structure, de la contrainte résiduelle biaxiale (σ_0), de ν qui représente le coefficient de Poisson et \tilde{E} qui est le module d'Young effectif. Ce dernier diffère selon si la poutre est *large* $\tilde{E} = E / (1 - \nu^2)$ ou *étroite* $\tilde{E} = E$.

L'équilibre statique, $P(g) = 0$, est stable lorsque $\partial P(g) / \partial g < 0$ [Osterberg 1995]. Le même raisonnement peut évidemment être tenu pour $F(g)$. Il est alors possible de déduire l'expression de la tension de collage qui s'écrit :

$$V_{PI} = \sqrt{\frac{8K_f g_0^3}{27\epsilon_0 A}} \quad (67)$$

La distance inter-plaques correspondante à la distance de collage est obtenue également des mêmes équations d'équilibre,

$$g_{PI} = \frac{2}{3} g_0 \quad (68)$$

Cette expression indique que, théoriquement, la distance maximale que peut parcourir l'électrode mobile avant que le collage n'ait lieu correspond à un tiers de la distance inter-électrodes initiale.

L'équation (67) est très utile car elle permet d'avoir aisément une valeur approchée de la tension de collage, mais elle repose sur l'hypothèse que la raideur du ressort reste relativement constante et ne prend pas en compte la répartition de la charge électrique lors de la déformation de l'électrode mobile. On peut parler de régime linéaire pour de petites déformations de la structure mobile, c'est-à-dire pour des déformations plus petites que l'épaisseur de cette dernière. Néanmoins, il existe des applications, notamment des commutateurs RF, qui nécessitent des déformations allant jusqu'à dix fois l'épaisseur de l'électrode mobile [Zhu 2004]. Lorsqu'on augmente l'amplitude de la déformation, on observe une augmentation de la résistance du ressort à la déformation

(spring stiffening ou strain-stiffening). Dans ce cas là, le comportement du ressort devient non-linéaire, celui-ci est alors appelé ressort de type Duffing [Zhu 2004]. En conséquence, l'équation d'équilibre des forces mises en jeu (65) peut-être écrite de la façon suivante :

$$\frac{\varepsilon_0 AV^2}{2g^2} - K_1(g_0 - g) - K_2(g_0 - g)^3 = 0 \quad (69)$$

où K_1 prend la même expression que le paramètre K_f ,

$$K_1 = \frac{32\tilde{E}bh^3}{L^3} + \frac{8\sigma_0(1-\nu)bh}{L} \quad (70)$$

K_2 est de la forme suivante :

$$K_2 = \frac{\pi^4 \tilde{E}bh}{8L^3} \quad (71)$$

On constate que, cette fois-ci, la raideur du ressort est composée de deux termes K_1 et K_2 . Le premier, accompagne le terme d'ordre 1 pour la distance g de l'équation (69) qui est dû, comme vu précédemment, à la déformation élastique linéaire de la poutre et à sa contrainte résiduelle. Le deuxième coefficient K_2 accompagne le terme d'ordre 3 de la distance g et est associé au phénomène de strain-stiffening (raideur additionnelle due aux larges déformations).

La prise en compte du comportement mécanique non linéaire de la poutre, constitue une amélioration pour la prise en compte de la déformation élastique de la poutre. Néanmoins, dans la suite des travaux, seules des structures où les déformations restent suffisamment faibles, pour considérer que les poutres ont un comportement élastique linéaire, seront abordées.

2.5.2. Modèle analytique avancé (IMEC)

Une autre approche analytique, tenant compte de plusieurs aspects négligés dans le modèle simple, a également été développée. Connue sous le nom de modèle IMEC [Pamidighantam 2002], cette approche tient compte d'une manière approchée, de l'effet de la non uniformité de la charge mécanique (appliquée uniquement sur une partie de la poutre et non pas sur sa totalité), de la redistribution de la charge électrique en introduisant une surface équivalente (effective), l'effet des efforts axiaux exercés par les encastremets et des effets de bords (« fringing effect »).

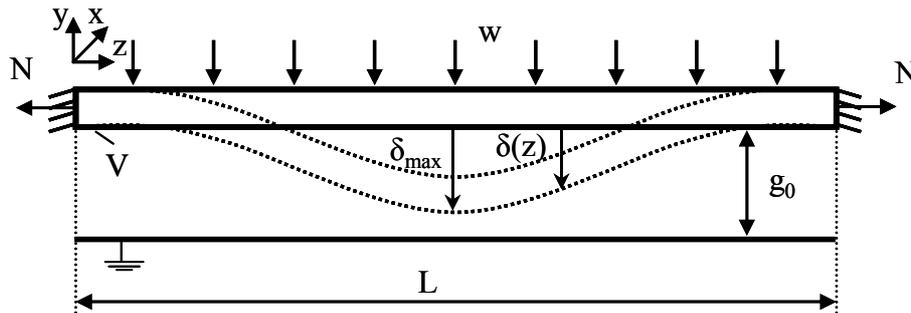


Figure 28. Poutre encastree à ses deux extremités supportant une charge distribuée w

L'expression de la tension de collage donnée dans le paragraphe précédent est obtenue pour un système « simplifié », composé de deux plaques parallèles rigides. Or, comme spécifié précédemment, l'électrode mobile d'un MEMS est une poutre déformable (Figure 28). Il est donc nécessaire de prendre en compte cette déformation et non pas uniquement la géométrie de la poutre pour obtenir une expression plus précise de la tension de collage. L'expression proposée dans ce modèle avancé, est en fait similaire à l'expression (67). La prise en compte des effets négligés dans le modèle simple s'effectue au travers de corrections apportées aux paramètres K_f et A (qui deviennent K_{eff} et A_{eff}). Ainsi, K_{eff} tient compte de la déformation de la poutre, alors que A_{eff} prend en considération les effets de bords et de la redistribution de la charge électrique lors de la déformation de la poutre.

$$V_{PI} = \sqrt{\frac{8K_{eff}g^3}{27\epsilon_0 A_{eff}}} \quad (72)$$

2.5.2.1. Influence du coefficient de rigidité effective

K_{eff}

Le coefficient K_{eff} est déterminé pour le point de déformation maximale (δ_{max}), i.e. à la limite du collage, d'une poutre comme celle représentée dans la Figure 28. Dans ce cas, K_{eff} aura l'expression suivante :

$$K_{eff} = \frac{wl_c}{\delta_{max}} \quad (73)$$

où l_c est la longueur effective sur laquelle l'effort w est appliqué. Lorsque l'effort s'applique sur toute la longueur de la poutre (L), alors $l_c=L$.

Le coefficient K_{eff} peut également être développé pour considérer le comportement d'une poutre en flexion et aussi tenir compte ses sollicitations axiales

comme les contraintes résiduelles σ_0 , ainsi que les éventuelles contraintes non linéaires dues aux grandes déformations, notées σ_{NL} .

Dans ce cas, K_{eff} a pour expression [Pamidighantam 2002, Roark 1989]:

$$K_{eff}(\lambda_r) = \left[-8k^2 L \lambda_r N \cosh\left(\frac{kL}{4}\right) \right] \cdot \left\{ \left[8 + k^2 L^2 (\lambda_r - 2) \lambda_r \right] \cosh\left(\frac{kL}{4}\right) - 8 \cosh\left[\frac{kL}{4}(L - 2\lambda_r)\right] + 4kL \sinh\left(\frac{kL}{4}\right) \right\}^{-1}$$

Les termes intervenant dans cette équation sont :

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \frac{l_c}{L} \\ k &= \sqrt{\frac{12N}{\tilde{E}bh^3}} \\ N &= (\tilde{\sigma}_0 + \sigma_{NL})bh \\ \tilde{\sigma}_0 &= \sigma_0(1-\nu) \\ \sigma_{NL} &= \frac{\pi^2 E \delta_{\max}^2}{4L^2} \end{aligned}$$

où λ_r est la fraction de la poutre sur laquelle on applique l'effort, k un paramètre intermédiaire et N la force axiale.

L'expression (74) peut être encore simplifiée en fonction des paramètres du système étudié. La première simplification est effectuée en considérant le cas particulier où $\lambda_r = 1$, c'est-à-dire lorsque l'effort mécanique est appliqué de façon uniforme sur la totalité de la poutre. Ensuite, en effectuant des développements limités à l'ordre 2 des fonctions hyperboliques *cosh* et *sinh*, l'expression de K_{eff} devient :

$$K_{eff}(\lambda_r = 1) \approx \left(\frac{32\tilde{E}bh^3}{L^3} + \frac{48N}{5L} \right) \quad (75)$$

Toutefois, compte tenu du développement limité des fonctions hyperboliques, cette expression est valable uniquement pour des valeurs du terme $(kL/4)$ inférieures à 1 [Pamidighantam 2002]. Or, il a été observé que, pour décrire le comportement d'une structure usuellement rencontrée dans les applications MEMS, ce terme $(kL/4)$ apparaissant dans les fonctions *sinh* et *cosh* est encadré de la manière suivante :

$$0,2 \ll \frac{kL}{4} \ll 40 \quad (76)$$

Ainsi, afin de couvrir la gamme donnée par l'équation (76), un paramètre d'ajustement ξ est introduit. Ce paramètre prendra des valeurs dans l'intervalle $8 \leq \xi \leq 9.6$.

Alors, une expression équivalente de K_{eff} , correspondant à l'encadrement du terme $(kL/4)$, peut être déduite:

$$K_{eff}(\lambda_r = 1) \approx \left(\frac{32\tilde{E}bh^3}{L^3} + \frac{\xi N}{L} \right) \quad (77)$$

Pour les travaux présentés dans [Pamidighantam 2002], les auteurs utilisent pour leurs calculs la valeur de compromis $\xi=8,32$, valeur pour laquelle la raideur effective s'approche le plus de la valeur obtenue par l'expression complète (74).

2.5.2.2. Influence du coefficient de surface effective

A_{eff}

Ce coefficient prend en compte les effets de bords ainsi que l'effet de la redistribution de charges lors de la déformation. Les effets de bords sont non négligeables pour des poutres *étroites* ($b \approx h$). La prise en compte de ces effets de bords est réalisée par une augmentation de la largeur effective de la poutre. Cette largeur effective est donnée par le paramètre b_{eff} tel que :

$$b_{eff}(\beta) = b \left[1 + 0,65 \frac{(1-\beta)g_0}{b} \right] \quad (78)$$

où β est un paramètre de normalisation du déplacement maximale $\beta = \delta_{max}/g_0$. Il a été constaté dans [Nathanson 1967, Hung 1999] que, pour les dispositifs MEMS, la valeur de β peut être encadrée par $0,33 < \beta < 0,6$.

Par ailleurs, lors de la déformation, la distance entre la partie mobile et la partie fixe n'est plus homogène. Par conséquent, les charges à la surface de la poutre sont redistribuées avec, bien entendu, une concentration de charges élevée dans la zone du plus grand déplacement (distance inter-électrodes minimale). Cet effet se traduit par une diminution de la surface effective A_{eff} . Un coefficient supplémentaire α est alors introduit pour prendre en compte ce phénomène :

$$\alpha(\beta, \lambda_r) = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{1-\beta} \right) \arctan \left[\frac{\tan \left(\frac{\pi \lambda_r}{2} \right)}{\sqrt{1-\beta}} \right] \quad (79)$$

La surface effective A_{eff} devient ainsi,

$$A_{eff}(\beta) = \alpha(\beta, \lambda_r) b_{eff}(\beta) L \quad (80)$$

En remplaçant dans l'équation (72) les paramètres A_{eff} , b_{eff} et K_{eff} par leurs expressions développées ci-dessus, on aboutit à une expression analytique de la tension de *pull-in* qui tient compte de la majorité des effets physiques.

Les différents modèles analytiques présentés sont issus des principaux travaux de recherche portant sur le calcul de la tension de *pull-in* dans les MEMS. Ces modèles, contiennent usuellement des paramètres ajustés à l'aide de résultats obtenus par des modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis ou par des mesures expérimentales. S'ils sont d'un abord relativement simple et donnent des résultats avec une précision parfois acceptable, ils trouvent leurs limites lors de l'étude de géométries complexes de MEMS. En effet, ils sont développés pour des géométries relativement simples et ne peuvent être généralisés à n'importe quel dispositif. Ceci restreint de façon notable leur utilisation.

Une approche plus fine, par éléments finis par exemple, de l'une ou des deux physiques mises en jeu (électrostatique et mécanique), peut apporter une amélioration appréciable pour l'estimation de la tension de collage. Dans la suite, une présentation des différentes approches de couplage des modèles analytiques et éléments finis sera effectuée. Il faut noter que les modèles en partie, ou totalement, analytiques, sont restreints, de par la physique qui est modélisée analytiquement, à des structures simples. Le développement de ces modèles « intermédiaires » est intéressant afin de mettre en évidence l'influence des différentes hypothèses des modèles analytiques sur le comportement des systèmes étudiés. Enfin, l'approche couplée des modèles fins pour les deux physiques permettra d'appréhender la précision des précédents modèles. Le point délicat des modèles fins sera la façon de déterminer la tension de *pull-in*.

2.5.3. Modèle couplé EF Electrostatique 2D – Analytique Mécanique (EFE2D-AM)

Pour étudier les effets inhérents aux MEMS électrostatiques d'une manière différenciée, il est plus judicieux d'utiliser une modélisation 2D pour l'étude électrostatique. Ainsi, selon la configuration géométrique bidimensionnelle choisie, il est possible d'étudier soit les effets de bords (modélisation d'une section transversale de la poutre), soit la déformation de la structure mobile (modélisation d'une section longitudinale de poutre). Dans les deux cas, le modèle électrostatique est un modèle EF basé sur la formulation en potentiel scalaire. Le modèle de déformation élastique de la poutre, utilisé évidemment pour la seule modélisation longitudinale, est représenté par le modèle analytique introduit dans le paragraphe 2.3.2.3. Ainsi, le modèle par EF permet de calculer la force électrostatique pour différentes configurations de déformation de la poutre qui sont obtenues à partir du modèle mécanique. Ce dernier permet également de déterminer la force de rappel de la poutre pour ces mêmes configurations de

déformation. A partir de ces deux forces, il sera possible de déterminer la tension de *pull-in* de la structure dont la procédure sera décrite en détail dans la suite.

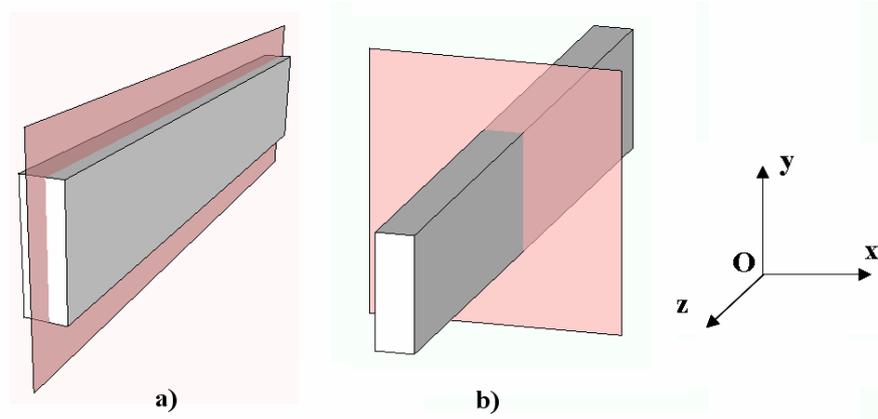


Figure 29. Structure de poutre simple : a) configuration longitudinale (plan Oyz) et b) configuration transversale (plan Oxy)

Dans le cas d'une étude longitudinale (plan (Oyz) de la Figure 29), les effets de bords dans le plan (Oxy) ne sont pas pris en compte. Seul l'effet de la déformation déterminée à partir du cadre théorique de la déformation d'une poutre d'Euler-Bernoulli comme présenté dans le paragraphe 2.3.2, peut être introduit. Cette approche permet alors d'étudier finement son influence sur la répartition du champ électrique, et donc sur la force électrostatique.

Dans le cas d'une étude transversale (plan (Oxy) de la Figure 29), l'électrode mobile est bien évidemment considérée non déformable. Par conséquent, cette configuration de modélisation est essentiellement destinée à appréhender et à quantifier l'influence des effets de bords sur la force électrostatique. Différentes configurations pourront être étudiées et analysées.

2.5.4. Modèle couplé EF Electrostatique 3D – Analytique Mécanique (EFE3D-AM)

Afin de tenir compte des effets conjugués de bords et de déformation, il est nécessaire d'effectuer l'étude électrostatique à l'aide d'un modèle EF tridimensionnel avec un couplage mécanique qui peut être issu d'une approche analytique. Le problème électrostatique peut alors être résolu en utilisant l'une des deux formulations, en potentiel vecteur et en potentiel scalaire. Cela permettra de comparer les résultats obtenus par chacune des deux formulations.

De la même façon que dans le cas de la modélisation 2D longitudinale, le calcul électrostatique permet de déterminer la force électrostatique exercée sur la poutre. Cette force est par la suite introduite dans le modèle mécanique analytique du paragraphe 2.3.2 afin de calculer le déplacement en chaque point de l'électrode déformable suivant la direction Oz de la Figure 29. La force de rappel avec laquelle l'électrode s'oppose à sa déformation peut également être déterminée à partir du modèle mécanique analytique. La résolution de ces deux problèmes nous permet de caractériser le système couplé, tout

en prenant en compte les effets de bord et la déformation de la poutre. Cette approche de modélisation permettra de juger de la précision de la prise en compte de la déformation par un modèle analytique par rapport à une modélisation mécanique numérique par éléments finis comme nous le verrons dans la dernière approche.

Pour des géométries de MEMS de type poutres ou plaques, le modèle mécanique analytique peut se révéler très largement suffisant comme nous le verrons par la suite.

2.5.4.1. Procédure de détermination de la tension de *pull-in*

Le cœur de la modélisation de MEMS électrostatiques, comme souligné auparavant est le phénomène de collage. Les grandeurs recherchées dans la modélisation sont par conséquent, la tension à laquelle le phénomène a lieu et la distance correspondante. Dans le paragraphe suivant, le procédé de détermination de la tension de *pull-in* sera détaillé, pour le modèle couplé décrit ci-dessus.

Le modèle analytique mécanique permet de calculer, à partir de la charge mécanique appliquée sur la poutre, la déformation de l'électrode mobile ayant une géométrie de type plaque ou poutre. En inversant le modèle, il est également possible de calculer la force nécessaire à appliquer pour effectuer un certain déplacement, notamment le déplacement au niveau de la flèche. Ainsi, en imposant des valeurs croissantes au niveau de la flèche lors de la déformation de la structure étudiée (axe des abscisses de la Figure 30), la force de rappel peut être aisément déterminée. On s'intéresse dans notre cas uniquement à la flèche car, d'une part, le phénomène de collage a lieu à ce niveau et, d'autre part, dans certaines applications, c'est l'amplitude maximale du mouvement qui est recherchée, celle-ci étant directement liée aux performances du MEMS en question. La force de rappel est représentée en rouge sur la Figure 30.

Ensuite, pour une valeur donnée de la tension appliquée, à partir du modèle électrostatique (2D ou 3D), il est possible d'obtenir la valeur de la force électrostatique, pour chaque position de déformation de la structure. Ainsi, il apparaît sur la Figure 30 que, lorsque la tension appliquée est faible, il existe deux points d'intersection entre la force électrostatique et la force de rappel. Le premier point correspond à la position physique d'équilibre entre les deux forces de natures électrostatique et mécanique. A l'opposé, pour une tension élevée, il n'existe pas de point d'intersection entre les deux courbes de forces et donc le système ne possède pas de position d'équilibre dans le domaine élastique. Finalement, pour une valeur de tension seuil, qui est la tension de *pull-in*, les deux courbes sont tangentes en un point qui correspond à la *dernière* position d'équilibre entre les forces électrostatique et de rappel. En pratique, une procédure d'optimisation peut être utilisée pour obtenir la valeur de la tension pour laquelle la dernière position d'équilibre est assurée dans le système avant collage.

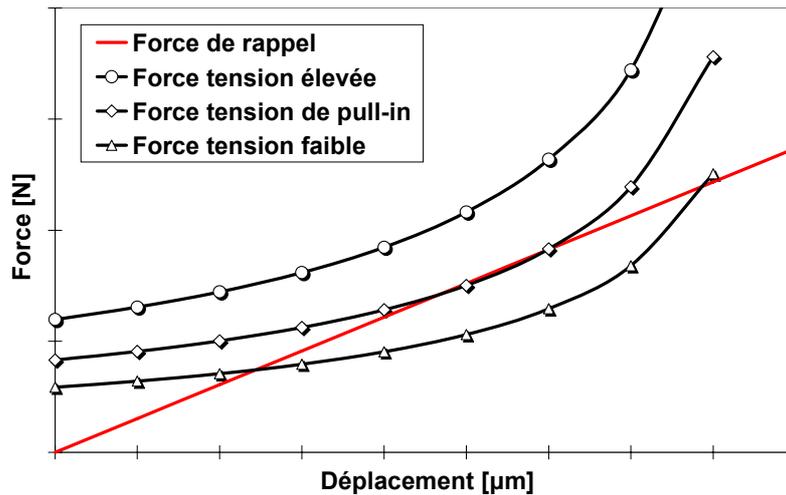


Figure 30. Illustration de la méthodologie proposée pour la détermination de la tension de *pull-in*

2.5.5. Modèle couplé EF Electrostatique 3D – EF Mécanique 3D (EFE3D-EFM3D)

Dans cette dernière approche, les deux problèmes électrostatique et mécanique sont résolus de manière itérative en utilisant des modèles EF 3D (ou de façon « chaînée »), comme le montre la Figure 31. Dans une première étape, le problème EF3D électrostatique fournit la force globale qui s'exerce sur la partie mobile. Ensuite, cette force est appliquée en tant que terme source dans le problème EF3D mécanique, qui à son tour fournit le déplacement en chaque nœud de la poutre. En utilisant la technique de *mesh morphing*, il est possible de mettre à jour les nœuds du maillage à partir des déplacements calculés. Le nouveau maillage est réinjecté dans le problème électrostatique et le processus est répété jusqu'à convergence de la solution. Le critère de convergence peut être défini soit sur la force soit sur le déplacement, selon le choix d'utilisateur. Ce critère de convergence sera détaillé dans le chapitre suivant. La technique de détermination de la tension de *pull-in* sera détaillée au cours du chapitre 3.

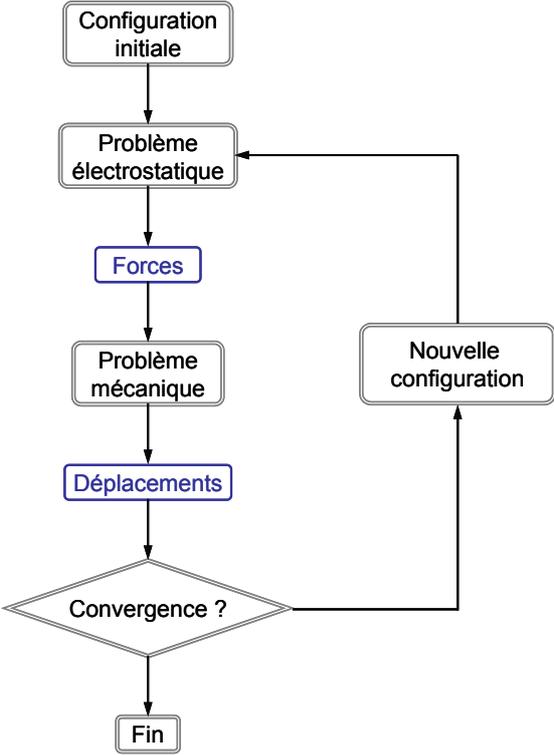


Figure 31. Stratégie de couplage séquentiel du problème électromécanique

2.6. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des différentes approches de modélisation de structures de MEMS simples. Les dispositifs MEMS, tels que les commutateurs, filtres RF et les actionneurs à peignes interdigités sont caractérisés par un comportement électromécanique fortement non linéaire. Le phénomène qui les régit est appelé phénomène de collage électrostatique (*pull-in*) et la tension correspondante, tension de collage (V_{PI}). Ce phénomène peut être exploité dans l'utilisation, le fonctionnement du dispositif ou bien évité car il peut mener à l'endommagement de ce dernier. Il est donc nécessaire de connaître avec une relative bonne précision la tension à laquelle le phénomène a lieu.

L'état de l'art des différentes approches de modélisation du phénomène de pull-in nous a permis de classer les modèles en deux catégories générales : analytiques et numériques. Les modèles analytiques ont l'avantage de fournir rapidement des résultats relativement précis, mais ils sont difficiles à implémenter dans le cas des géométries complexes. En revanche, les modèles numériques, de par les phénomènes pris en compte, améliorent la précision de la modélisation, mais ont l'inconvénient d'être coûteux en termes de temps de calculs.

La deuxième partie du chapitre contient la présentation détaillée des modèles électrostatiques, mécaniques et couplés électrostatique-mécanique. D'abord, les modélisations analytiques simples des phénomènes électrostatique et élastique ont été introduites. Ensuite, nous avons développé le cadre théorique des approches numériques, notamment celles basées sur la méthode des éléments finis, du problème électrostatique ainsi que du problème d'élasticité linéaire.

Enfin, les différentes approches couplées, ainsi que les procédures de détermination de la tension de *pull-in* ont été présentées.

Dans le chapitre suivant les différents modèles introduits sont mis en œuvre, afin de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients.

Références :

- [Avdeev 2003] Ilya V. Avdeev, "New formulation for finite element modeling electrostatically driven microelectromechanical systems", PhD thesis, University of Pittsburgh, 2003.
- [Bossavit 1988] A. Bossavit, "A rationale for "edge-elements" in 3-D fields computations", IEEE Trans. Magn., vol. 24, no. 1, pp. 74-791, Jan. 1988.
- [Bossavit 1998] A. Bossavit, "How weak is the "weak solution" in finite element methods?" IEEE Trans. Magn., vol. 34, no. 5, pp. 2429-2432, Sep.1998.
- [Bossavit 2007] A. Bossavit, "Getting even with the Maxwell stress tensor", The Oberwolfach Conf. on Comp. Electromag. and Acoustics, Oberwolfach, Feb 2007.
- [Boutaayamou 2008] M. Boutaayamou, "Méthode de perturbation pour la modélisation par éléments finis des systèmes électrostatiques en mouvement - application aux MEMS électrostatiques", PhD thesis, Université de Liège, Novembre, 2008.
- [COMSOL] <http://www.comsol.com/products/mems/>
- [Coulomb 1983] J.L. Coulomb, "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness", IEEE Trans. Magn., vol. MAG-16, no. 6, pp. 2514-2519, Nov 1983.
- [Coulomb 1984] J. L. Coulomb and G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle to magnetic or electric force and torque computation", IEEE Trans. Magn., vol MAG-20, no. 5, pp. 1894-1896, September 1984.
- [CoventorWare] <http://www.coventor.com/coventorware.html>
- [Craveur 2008] J-C. Craveur, « Modélisation pas éléments finis », Dunod, Paris, 2008.
- [Cugat 2002/II] O. Cugat, « Micro-actionneurs électroactifs », Lavoisier, Paris, 2002.
- [Dallas web] <http://www.ee.utdallas.edu/>
- [Dular 1998] P. Dular, W.Legros and A. Nicolet, "Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics" IEEE

- Trans. Magn., vol. 34, no. 5, pp. 3078–3081, sept. 1998.
- [Henneron 2006] T. Henneron, S. Clénet, S. and F. Piriou, "Calculation of extra copper losses with imposed current magnetodynamic formulations" IEEE Trans. Magn., vol. 42, no. 4, pp. 767–770, Avril 2006.
- [Henneron 2008] T. Henneron, S. Clénet, S., P. Dular and F. Piriou, "Discrete finite element characterisations of source fields for volume and boundary constraints in electromagnetic problems", Journal of computational and applied mathematics, Elsevier, vol. 215, no. 2, pp. 438-447, June 2008.
- [Henrotte 2000] F. Henrotte, "Modélisation des efforts électromagnétiques et de leurs effets dans les structures quelconques", Thèse de doctorat, Liège, 2000.
- [Hung 1999] E.S. Hung and S. Senturia, « Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators », J. MEMS, vol. 8, pp. 497-505, 1999.
- [Le Menach 2000] Y. Le Menach, S. Clénet, and F. Piriou, "Numerical model to discretize source fields in the 3D finite element method," IEEE Trans. Magn., vol. 36, no. 4, pp. 676–679, Jul. 2000.
- [MemSolver] <http://www.memsolver.com/>
- [Nathanson 1967] H. Nathanson et al., « The Resonant Gate Transistor », Transactions on Electron Devices, vol. ED-14 No. 3, IEEE, pp. 117-133, 1967.
- [O'Mahony 2003] C. O'Mahony, M. Hill, R. Duane and A. Mathewson, "Analysis of electromechanical Boundary Effects on the Pull-In of micromachined fixed-fixed beams", J. of Micromech. And Microeng., vol. 13, no. 4, pp. 75-80, July, 2003.
- [Osterberg 1995] P.M. Osterberg, « Electrostatically Actuated Microelectromechanical Test Structures for Material Property Measurement », PhD thesis, MIT, Sept. 1995.
- [Osterberg 1997] P.M. Osterberg and S.D. Senturia, "M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures", J. of Microelectromechanical Systems, vol. 6, no. 2, pp. 107-118, June, 1997.
- [Pamidighantam 2002] S. Pamidighantam, R. Puers, K. Baert and H.A.C. Tilmans, Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions", J. of Micromech. And Microeng., vol. 12, no. 4, pp. 458-464, July, 2002.
- [Roark 1989] R.J. Roark and W.C. Young, « Roark's formulas for stress and strain », McGraw-Hill, New York, 1989, (Tableau 11).

- [Rochus 2006] V. Rochus, "Finite Element Modelling of Strong Electro-Mechanical Coupling in MEMS", PhD thesis, Université de Liège, 2006
- [SUGAR] <http://www-ee.eng.hawaii.edu/~garmire/sugar/>
- [Tilmans 1994] H.A.C. Tilmans and R. Legtenberg, "Electrostatically driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators: Part II. Theory and performance", *Sensors Actuators A*, vol. 45, no. 1, pp. 67-84, October, 1994.
- [v. d. Poel 2003] C.J. v. d. Poel Filho and R. Pavanello, "Application of the finite element method to model the problem of electromechanical coupling in microsystems", *Proc. of the 17th Int. Congress of Mechanical Engineering, COBEM 2003*, São Paulo, 2003.
- [Zhu 2004] Y. Zhu and H.D. Espinosa, « Reliability of Capacitive RF MEMS Switches at High and Low Temperatures », *Int. J. RF Microw. Comput.-Aided Eng.*, Vol 14, pp. 317-328, 2004.
- [Zienkiewicz 1984] O.C. Zienkiewicz, "Coupled problems and their numerical solution", in Lewis, R.W., Bettes, P. and Hinton, E., *Numerical Methods in Coupled Systems*. John Wiley & sons, California, 1984

3

Exploitation des modèles

3.1. Exploitation des modèles de *pull-in*

Le chapitre 2 a été dédié à la présentation de différents modèles pouvant être utilisés pour l'étude de MEMS électrostatiques. Ces derniers ont tout aussi bien concerné des approches analytiques, plus ou moins étendues que des approches numériques basées sur la méthode des éléments finis bidimensionnelle ou tridimensionnelle. Dans ce chapitre, ces différentes approches vont être exploitées pour l'étude et la détermination de la tension de *pull-in* d'un microsysteme électrostatique type. Ainsi, pour deux dispositifs tests constituant soit un MEMS global ou un motif élémentaire de MEMS, des calculs seront menés afin de déterminer la valeur de la tension de *pull-in* et de quantifier, d'une manière fine, l'influence des effets de bords comme celle due à la déformation de la poutre. L'approche adoptée est celle de l'utilisation des modèles par ordre de simplicité et donc de rapidité d'exécution (du modèle analytique simple au modèle numérique 3D couplé électrostatique/mécanique).

Une catégorie répandue de MEMS est constituée par les 'peignes inter-digités'. Les modèles numériques présentés peuvent évidemment être utilisés pour l'étude des doigts extrêmes (en modifiant les conditions d'encastrement des poutres, d'une fixation à deux extrémités, en une fixation à une seule extrémité) et la détermination de la tension de *pull-in* mais ne sont pas adaptés pour appréhender l'étude du mouvement d'un motif élémentaire. Afin de pouvoir effectuer ce genre d'analyse, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à une approche, basée sur le raffinement du maillage du système suite à une estimation d'erreur, qui permet d'étudier la force d'attraction électrostatique, en fonction de la position de l'électrode mobile. En effet, la surface d'entrefer étant de géométrie complexe et le mouvement étant un mouvement linéaire 'd'encastrement', les procédures classiques de prise en compte du mouvement, dans les machines électriques par exemple, ne peuvent pas être utilisées dans le cas de figure des 'peignes inter-digités'. L'entrefer doit être remaillé à chaque déplacement, ce qui peut induire des erreurs numériques sur le calcul des forces. L'approche adoptée vise à minimiser ces erreurs.

3.1.1. Description des systèmes étudiés

Dans un premier temps, le phénomène de *pull-in* sera étudié dans le cas de systèmes de types poutres et plaques. Ceci permettra, d'une part, de mettre en évidence les phénomènes à prendre en compte lors de la modélisation et, d'autre part, de comparer la précision obtenue par chacun des modèles.

Le premier système étudié consiste en une électrode encastree à ses deux extrémités. Cette électrode, caractérisée par une longueur L , une épaisseur h et une largeur b , est soumise à un potentiel V . A une distance g_0 en regard (i.e. dans un plan parallèle) se trouve une surface, plus grande que la surface en vis-à-vis de la poutre suspendue, qui est au potentiel zéro (Figure 32).

Les électrodes utilisées dans la suite sont considérées de type « poutre », c'est à dire que leur longueur est plus grande que leur section ($L \gg b$ et $L \gg h$) [Roark 1989].

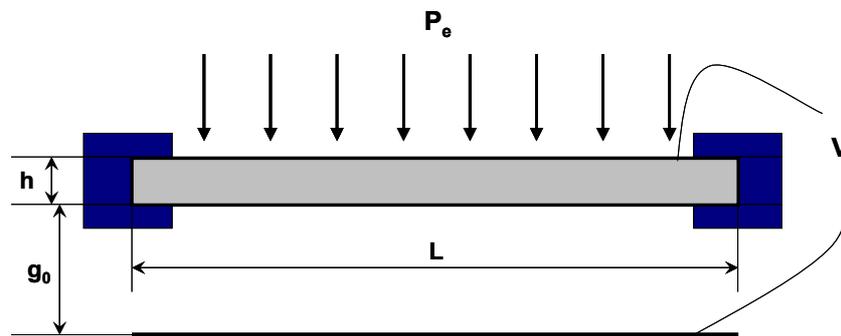


Figure 32. Structure de poutre encastrée à ses deux extrémités

Selon la largeur de la poutre, nous pouvons avoir deux configurations possibles.

Pour une largeur de $b \approx h$, la poutre est considérée 'étroite' (Figure 33 a). Dans ce cas le système remplit les conditions de déformation plane, c'est-à-dire que les déplacements sont constants selon la largeur de la poutre. La constante d'élasticité se réduit alors au module d'Young E .

Pour une largeur de $b > 5h$, la configuration est considérée comme étant celle d'une poutre large (Figure 33 b). Ceci implique que la constante d'élasticité peut s'écrire sous la forme simplifiée:

$$\tilde{E} = E / (1 - \nu^2) \quad (81)$$

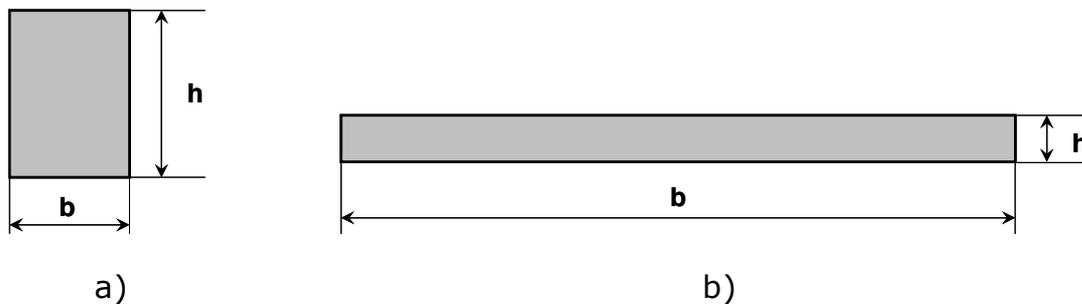


Figure 33. Configurations selon la dimension de la largeur :
a) Poutre étroite b) Poutre large

Les études qui seront menées s'intéresseront aux deux cas de poutres étant donné que les deux configurations existent dans les MEMS électrostatiques. Pour cela, deux structures types, dont les dimensions sont données dans le tableau II, seront étudiées. Ces deux exemples ont été choisis à partir de références qui traitent de l'étude de MEMS électrostatiques [Gupta 1997, Osterberg 1997, Pamidighantam 2002]. Outre leurs dimensions caractéristiques, on dispose de quelques valeurs expérimentales qui seront utilisées comme valeurs de référence pour la comparaison des résultats de simulation issus des différents modèles.

Type structure	L [μm]	b [μm]	h [μm]	g_0 [μm]	\tilde{E} [GPa]
a -Poutre étroite	300	0,5	1	1	77
b -Poutre large	200	50	3	1	170

TABLEAU II : Dimensions des structures étudiées

3.1.2. Modélisation analytique simple

3.1.2.1. Exploitation pour les structures définies

Les premiers calculs sont menés avec le modèle analytique le plus simple. Ainsi, en utilisant l'expression de la tension de *pull-in* donnée dans l'équation (67), (paragraphe 2.5.1), les valeurs de la tension de *pull-in*, sont de 3,19 V et 55,42 V pour les structures *a* et *b* respectivement. La comparaison de ces valeurs à la valeur expérimentale dont on dispose dans la bibliographie [Osterberg 1997] est présentée dans le Tableau III.

Structure/Modèle	Poutre étroite	Poutre large
Modèle simple Osterberg	3,19 V	55,42 V
Mesure [Osterberg 1997]	Non disponible	67,7 V (± 6 V)

TABLEAU III : Résultats de V_{PI} en Volts, obtenus à partir du modèle analytique simple et de l'expérimentation

On rappelle que ce modèle s'applique à des systèmes de plaques parallèles où le champ électrostatique est supposé uniformément réparti sur la surface des électrodes. Par conséquent, le comportement élastique de la poutre est pris en compte de façon approchée dans l'expression de la raideur effective (73). Dans le cas de la poutre large, le modèle analytique le plus simple, ne tenant pas compte de la déformation de la poutre, aboutit à un résultat avec un écart de 18%, par rapport à la mesure. On ne peut malheureusement pas établir l'écart dans le cas de la poutre étroite étant donné que la valeur expérimentale n'est pas disponible. Toutefois, étant donné que les effets de bords ne sont pas pris en compte par ce modèle, il est probable que l'écart serait significatif.

3.1.2.2. Etude paramétrique

Comme mentionné ci-dessus, l'approche analytique utilisée possède évidemment des limitations (approximation simple des effets de bords par exemple ou pas du tout) et ne permettra pas d'obtenir, dans le cas de géométries complexes, des précisions suffisantes. En revanche, elle nécessite de très faibles temps de calcul, ce qui la rend bien adaptée à des études de sensibilité pour mettre en évidence quelques paramètres influents sur la valeur de la tension de *pull-in*. Ce modèle analytique simple est, de ce fait exploité pour étudier le comportement électromécanique des structures présentées précédemment, en fonction de la variation de différents paramètres. Cette étude sera un prélude à une analyse plus détaillée qui sera menée au chapitre 4.

Dans un premier test, différentes longueurs de la poutre ont été considérées, pour 4 valeurs différentes du module d'Young. Ces valeurs varient entre celle du module d'Young de l'aluminium jusqu'à celle correspondant au silicium (Figure 34, a, b), matériaux courants dans les dispositifs MEMS. Les calculs ont été effectués en gardant fixes les autres paramètres géométriques (dont les valeurs sont données au Tableau II) et en restant dans les conditions de géométries de type *poutre*. L'évolution de la tension de collage V_{PI} en fonction de L , est illustrée sur les figures suivantes, pour les deux configurations étudiées : *poutre étroite* (Figure 34, a) et *poutre large* (Figure 34, b).

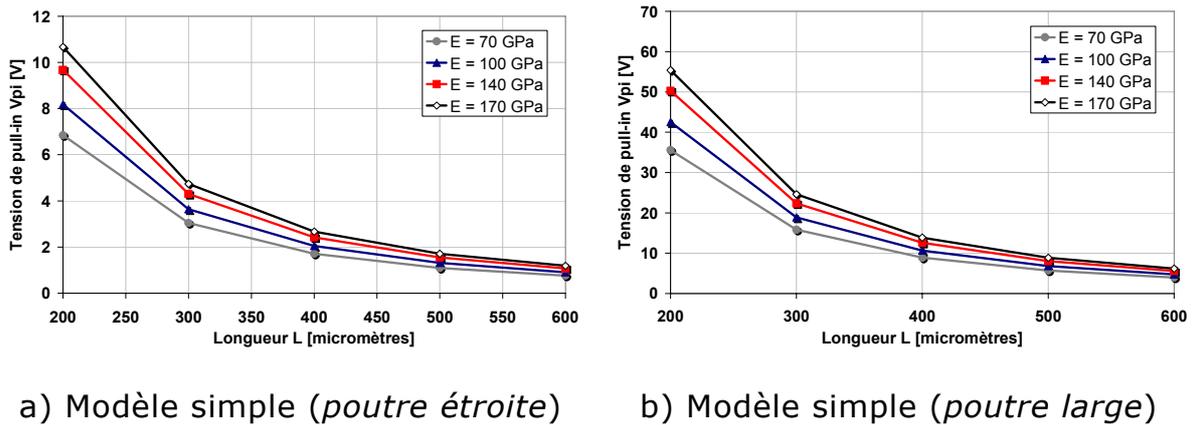


Figure 34. V_{PI} en fonction de L

Dans un second temps, la démarche a consisté à étudier l'effet de la distance g_0 séparant initialement la poutre (électrode) et la surface au potentiel zéro, dans les mêmes conditions que précédemment (4 valeurs différentes du module d'Young et en gardant fixes les valeurs des autres paramètres géométriques, Tableau II). Les évolutions de la tension de collage V_{PI} issue du modèle analytique, en fonction de g_0 , sont illustrées, pour les deux configurations possibles, sur les figures suivantes : *poutre étroite* (Figure 35, a) et *poutre large* (Figure 35, b).

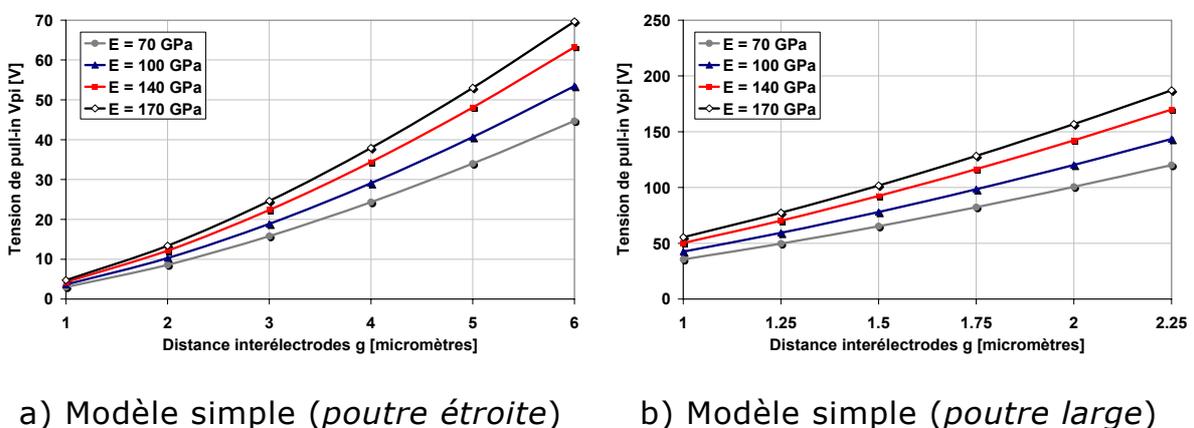


Figure 35. V_{PI} en fonction de g_0

La longueur de la poutre influence à la fois le comportement électrostatique et le comportement élastique de la poutre. Les Figure 34 a-b montrent que l'augmentation

de la longueur de la poutre induit logiquement une diminution de la tension de *pull-in*. En effet, d'un point de vue électrostatique, à tension constante, l'augmentation de la surface *active* de la poutre implique une augmentation de la force électrostatique. Par conséquent, la tension nécessaire pour appliquer une même force sera plus faible. En revanche, d'un point de vue mécanique, l'augmentation de la longueur entraîne une diminution de la raideur de la poutre. Ceci conduit encore à une diminution de la tension de *pull-in*.

Par ailleurs, la variation de V_{PI} est similaire dans les deux cas de figures (poutres étroite et large).

A l'opposé de la longueur, la distance entre la poutre et la surface au potentiel zéro influence uniquement sur le comportement électrique de la poutre et son effet sur la tension V_{PI} est l'inverse de celui de la longueur L .

L'augmentation de g_0 s'accompagne d'une variation croissante de V_{PI} , comme le montrent les Figure 35 a-b. Cette dernière est tout à fait normale suite à l'expression de la force électrostatique qui est inversement proportionnelle au carré de la distance inter-électrodes g_0 . Ainsi, la force chutant rapidement avec l'augmentation de g_0 , il est nécessaire d'avoir une tension plus importante pour atteindre la limite de collage.

En ce qui concerne le module d'Young, son influence est plus prononcée pour des longueurs L faibles et/ou des entrefers g_0 élevés.

Cette étude a permis de visualiser et quantifier l'effet de variation de quelques paramètres caractérisant une structure typique de MEMS. En même temps, cette étude a montré l'utilité d'un modèle analytique, à savoir la rapidité des calculs pour une précision moyenne.

3.1.3. Modélisation fine

Pour aboutir à des résultats précis dans la modélisation de MEMS électrostatiques, deux effets prépondérants doivent être pris en compte, les effets de bords et la déformation des structures mobiles. Une modélisation par éléments finis en 2D, rapide à mettre en œuvre, est tout à fait adaptée afin de quantifier l'influence de ces effets d'une manière indépendante.

3.1.3.1. Les effets de bords

Dans ce paragraphe, les structures présentées précédemment seront étudiées en utilisant un modèle couplé électrostatique-mécanique. Le modèle électrostatique est un modèle numérique bidimensionnel (2D) par éléments finis et utilise la méthode du tenseur de Maxwell pour le calcul de la force électrostatique [FEMM]. Pour l'aspect élastique, l'approche mécanique analytique est utilisée. Cette approche a une double utilisation, selon le cas de figure traité [Boloni 2008/II]. En effet, elle peut-être utilisée pour calculer les déplacements des nœuds du maillage éléments finis de la poutre mais également pour la détermination de la tension de collage, en fournissant la force de

rappel qu'exerce une poutre quand elle est soumise à une force extérieure (voir la détermination de V_{PI} au paragraphe 2.5.4).

Trois cas de figure seront abordés. Dans le premier, appelé configuration confinée, des conditions limites seront appliquées à des surfaces latérales délimitant une surface d'étude égale à celle des poutres (Figure 36). Ce cas est en fait similaire à l'hypothèse adoptée dans le modèle analytique simple. Le but de cette première étude est, d'une part de bien mettre en exergue cette hypothèse et, d'autre part, de déterminer la valeur de la tension de *pull-in* pour un cas test dont la valeur analytique est exacte. Cette valeur sera utilisée comme 'référence' à partir de laquelle seront quantifiés les effets de bords et de déformation. Le second cas, appelé surface en regard, est celui où les deux surfaces des électrodes sont identiques (Figure 38,a) et le troisième, appelé surface étendue, est relatif au cas où la surface à potentiel nul est plus élevée que celle de l'électrode mobile (Figure 38,b). Dans ces deux dernières configurations, les limites du domaine d'étude sont élargies pour que le champ électrostatique puisse évoluer librement et donc pouvoir ainsi quantifier les effets de bords dans les deux cas de surface en regard et de surface étendue.

a) Configuration confinée

Dans ce cas, les conditions aux limites délimitent un domaine d'étude dont la largeur est égale à celle de la poutre mobile, selon la direction transversale (Figure 36, a). La différence de potentiel V est appliquée entre le contour rouge (marqué « potentiel V ») et le contour noir (marqué « potentiel zéro ») de la Figure 36, a. Les lignes de champ électrique sont alors confinées entre les deux surfaces de potentiels différents comme on peut le voir sur la Figure 36, b.

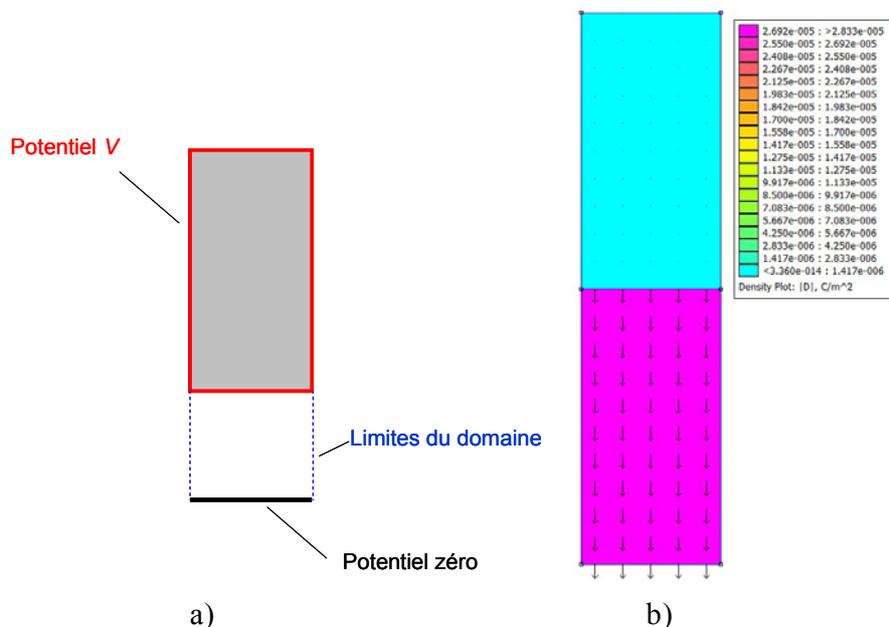


Figure 36. Modélisation confinée : a) Domaine d'étude, b) Distribution du champ D pour la position initiale

Dans cette approche, un premier calcul électrostatique est réalisé pour la position initiale du système (Figure 36, a). La géométrie de la poutre est ensuite déplacée vers l'électrode fixe et un nouveau calcul électrostatique est alors effectué. La

procédure est répétée pour plusieurs positions rapprochant ainsi la poutre de la surface à potentiel nul.

En traçant la force électrostatique en fonction du déplacement de la poutre, il est possible de déterminer, à partir de la force de rappel de la poutre, la tension de *pull-in* (Cf. procédure présentée au paragraphe 2.5.4). Il est évident que dans ce cas de figure, le modèle mécanique analytique sert uniquement à tracer la force de rappel de la poutre. La Figure 37 illustre concrètement la méthodologie pour le cas de la *poutre étroite*.

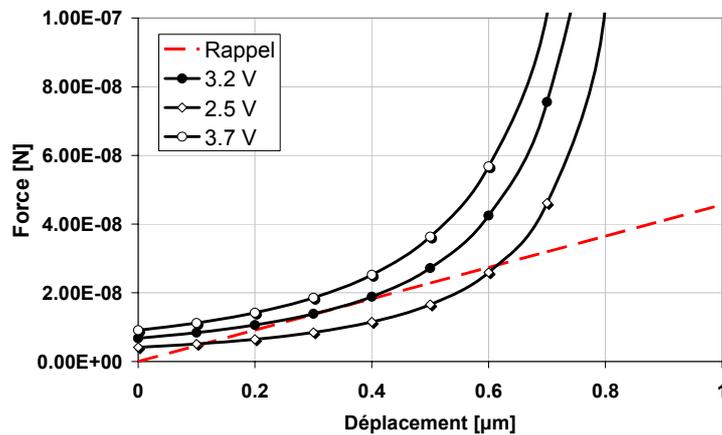


Figure 37. Détermination de la tension de *pull-in* pour la configuration de *poutre-étroite*

On distingue trois cas de figure dont nous donnons les interprétations au travers des exemples numériques ci-dessous :

-Pour $V=2,5$ V, il existe un point d'équilibre entre la force électrostatique et la force de rappel élastique de la poutre (1^{ère} intersection entre les deux courbes) pour un déplacement d'environ $0,1 \mu\text{m}$. La tension de collage n'est pas encore atteinte.

-Pour une tension appliquée $V=3,7$ V il n'existe plus de point d'équilibre entre les deux forces précitées (au moins dans le domaine élastique). Le phénomène de collage a déjà eu lieu.

-A la tension $V=3,2$ V les deux courbes sont tangentes pour un déplacement d'environ $0,35 \mu\text{m}$. La valeur de cette tension constitue la tension de collage V_{PI} . La déformation de la poutre n'étant pas prise en compte (actionneur à plaques parallèles), cette méthode est équivalente à une modélisation analytique simple et on retrouve tout naturellement les mêmes valeurs de la tension, plus précisément, $3,2$ V pour la structure *poutre étroite* et $55,5$ V pour la structure *poutre large*.

Cette procédure de détermination de V_{PI} peut être réalisée pour le calcul de l'évolution de la force électrostatique en fonction de la flèche pour différents niveaux de tension. Un raffinement de la valeur de la tension peut être ensuite réalisé selon la précision désirée. Toutefois, cette procédure peut s'avérer fastidieuse. L'utilisation de techniques d'optimisation (minimisation de la fonction donnant la distance entre les deux courbes) permet d'obtenir des résultats de façon relativement rapide et précise.

b) Configurations « surface en regard » et « surface étendue »

La prise en compte de la surface au potentiel zéro (Figure 38), dans la modélisation 2D peut se faire de deux façons différentes en fonction de la structure du MEMS que l'on souhaite modéliser. Ainsi, dans le cas de l'étude du comportement d'une électrode se situant à l'extrémité de la structure d'un dispositif à peignes inter-digités, la surface au potentiel zéro de la Figure 38 possède la même dimension que la surface inférieure de l'électrode mobile. Cette configuration sera appelée '*surface en regard*'. En revanche, dans le cas de l'étude du comportement d'un micro-interrupteur, la surface au potentiel zéro est plus large que la surface inférieure de l'électrode mobile. Cette configuration sera appelée '*surface étendue*'.

La Figure 38 illustre schématiquement les deux possibilités de modélisation précitées, dans le cas de la configuration *poutre-étroite*.

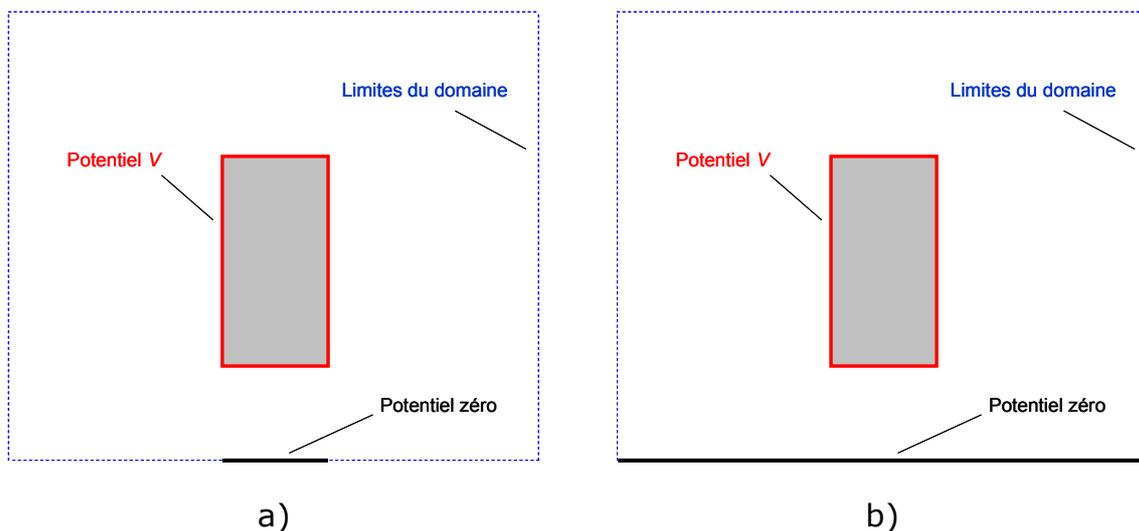
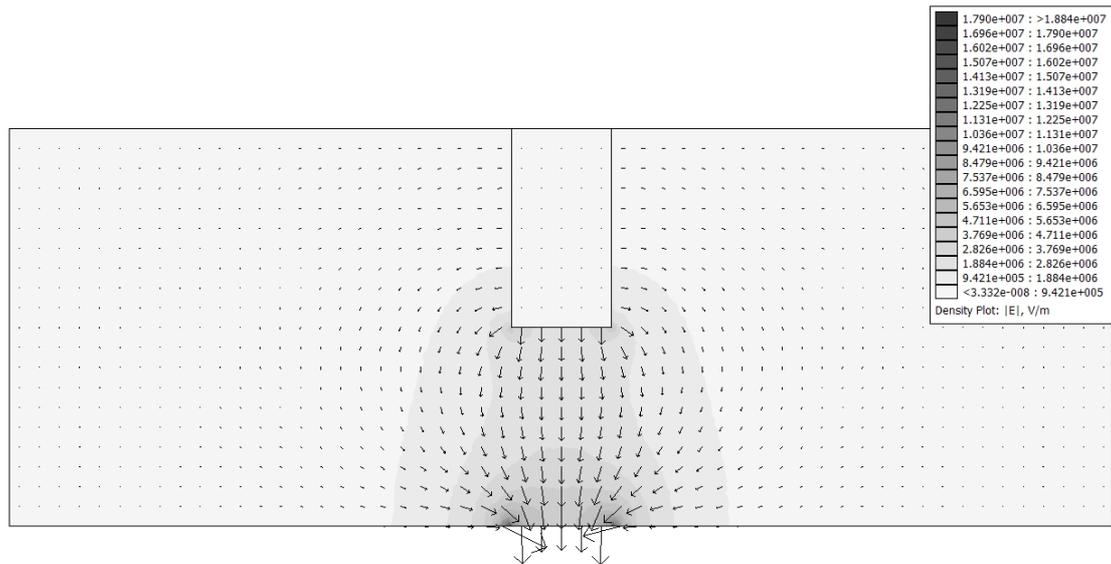
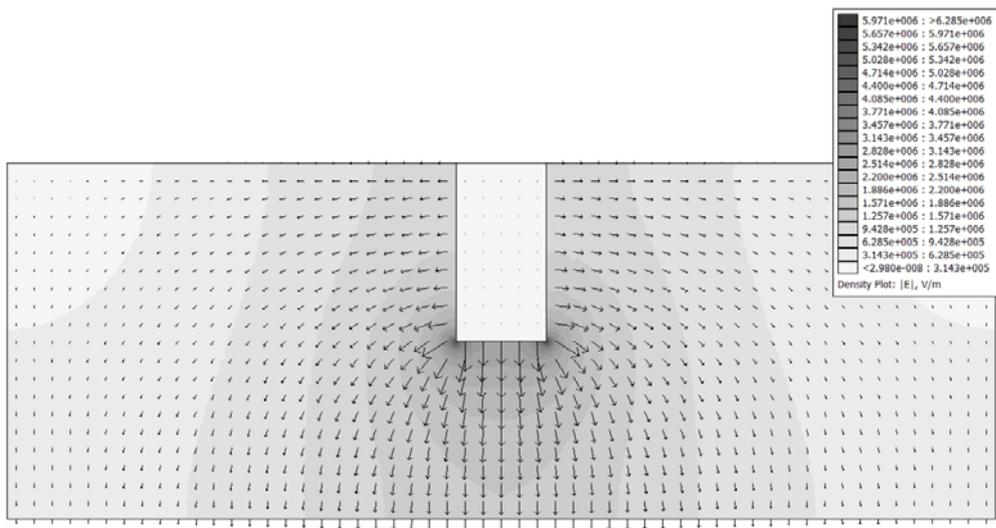


Figure 38. Configurations pour la modélisation transversale : a) *surface en regard*
b) *surface étendue*

Le domaine a été discrétisé à l'aide des éléments triangulaires et le problème électrostatique résolu en potentiel scalaire électrique. Les distributions du champ électrique, dans les deux configurations mentionnées précédemment, sont illustrées sur les Figure 39. Selon la configuration modélisée, la distribution des lignes de champ électrique n'est pas la même. En effet, dans la configuration *surface en regard* (Figure 39, a) le champ E est relativement confiné entre l'électrode et la surface à potentiel nul, alors que dans la configuration *surface étendue*, ce dernier présente un épanouissement nettement plus accentué (Figure 39, b).



a)



b)

Figure 39. Cartes de champ électrique :
a) Surface en regard, b) Surface infinie

En utilisant ces deux approches de modélisation, les tensions de *pull-in* des deux structures test ont été déterminées. Les deux approches correspondant à une modélisation purement bidimensionnelle en coupe transversale, la déformation de la poutre ne peut évidemment pas être prise en compte dans cette approche. Par conséquent, nous avons procédé par des déplacements imposés de la poutre et le calcul successif des forces pour chacune des positions (ce procédé sera détaillé dans les prochains paragraphes).

Le phénomène mis en évidence sur la Figure 39 influe notablement sur les valeurs des tensions de *pull-in* des structures test. Le Tableau IV résume les différentes valeurs de V_{PI} et g_{PI} pour chacune des configurations, ainsi que les écarts associés, par

rapport au modèle analytique simple. On rappelle que g_{PI} est la distance maximale parcourue par la poutre avant que le collage n'ait lieu.

Dans le cas de la structure de type *poutre-large*, la différence entre les tensions de *pull-in* dans les deux configurations de surface est, de manière logique, très faible, 0,3% et 0,7%. Cela s'explique par le rapport épaisseur/largeur de la poutre très faible, typique des structures de type *poutre-large*.

En revanche, dans le cas d'une structure de type *poutre-étroite*, les effets de bord sont non négligeables et la différence entre les valeurs de V_{PI} devient très importante. Si dans la configuration *surface en regard* on note un écart de 6%, dans la configuration *surface étendue* l'écart atteint 38%. Les mêmes remarques s'appliquent également à la distance de *pull-in*, dans les deux configurations.

Type de structure	VPI (V) Modèle simple	VPI (V) Surface en regard	Ecart (%)	VPI (V) Surface étendue	Ecart (%)
a -Poutre étroite	3,19	3	6	1,95	38
b -Poutre large	55,4	55,25	0,3	55	0,7
	g_{PI} [μm] Modèle simple	g_{PI} [μm] Surface en regard	Ecart (%)	g_{PI} [μm] Surface étendue	Ecart (%)
a -Poutre étroite	0,33	0,35	6	0,42	27
b -Poutre large	0,33	0,34	3	0,35	6

TABLEAU IV: Résultats de V_{PI} et g_{PI} , obtenus à partir du modèle 2D EF – mécanique analytique, dans les deux configurations : surface en regard et surface étendue

3.1.3.2. Effet de la déformation

Dans cette approche qui peut être appelée *longitudinale*, il est possible de considérer un simple déplacement ou une déformation de la poutre. Dans le premier cas l'analyse électrostatique équivaut à une modélisation analytique classique d'un condensateur plan, mais ne reflète pas le phénomène réel, c'est-à-dire la déformation de la poutre. Le deuxième cas, où l'on prend en compte cette déformation, sera bien évidemment plus précis.

a) Déplacement de la poutre (aucune déformation n'est introduite)

Les *poutres étroite* et *large* des deux cas test ont été discrétisées et les calculs électrostatiques réalisés de manière similaire au cas de la modélisation transversale en configuration confinée. Un premier calcul électrostatique [FEMM] est réalisé pour la position initiale (Figure 40), pour chaque position intermédiaire en la rapprochant de la surface au potentiel nul.

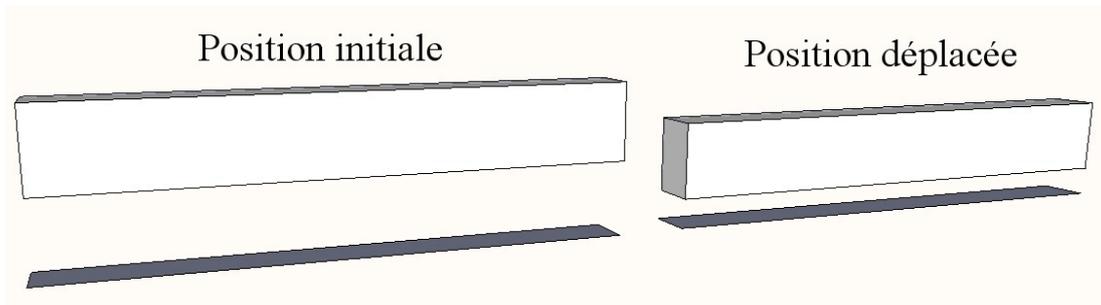


Figure 40. Schéma de la modélisation pour le déplacement de la poutre

Etant donné que ce type de modélisation ne prend pas en compte les effets de bord et que la poutre n'est pas déformée, il est évident que les résultats en termes de V_{PI} , ainsi qu'en g_{PI} seront identiques à ceux obtenus dans l'étude 2D en configuration confinée.

b) Déformation de la poutre

Dans cette seconde approche, la déformation de la poutre est prise en compte en imposant le déplacement de la flèche (Figure 41). Ce paramètre étant fixé, le modèle mécanique analytique permet de déterminer la géométrie de déformation de la poutre. La procédure consiste ensuite à effectuer, comme précédemment, une succession de calculs dans la plage de déplacements incluant la configuration seuil au-delà de laquelle le phénomène de collage a lieu.

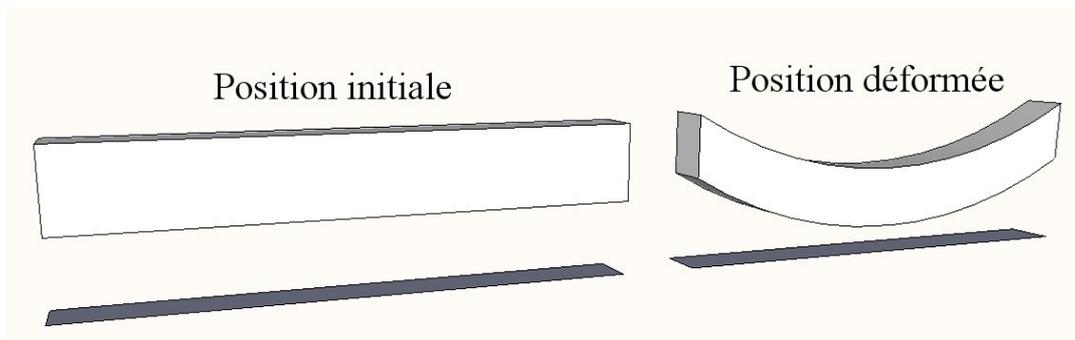


Figure 41. Schéma de modélisation pour la déformation de la poutre

Pour chacune des positions de la flèche, la force électrostatique est calculée à l'aide du modèle EF électrostatique 2D. La tension de *pull-in* est ensuite déterminée de la même façon qu'au paragraphe précédent.

Le tableau V rassemble les valeurs de la tension de *pull-in* et des distances de *pull-in* calculées pour les deux structures de poutres, dans le cas des deux modélisations décrites ci-dessus, ainsi que l'écart de ces deux approches, par rapport à la modélisation simple. La distance g_{PI} est maintenant définie, entre le point de déformation maximale (flèche) et la surface de potentiel zéro.

Comme mentionné précédemment, la configuration où aucune déformation n'est introduite fournit les mêmes résultats, en termes de V_{PI} , que le modèle analytique simple. En effet, elle ne tient compte ni de la déformation de la poutre ni des effets de bord. En revanche, dans le cas où la déformation de la poutre est considérée, l'écart par rapport à

la modélisation simple est important, 23% dans le cas de la *poutre étroite* et 24% dans le cas de la *poutre large*. Ce comportement est prévisible, car lorsqu'aucune déformation n'est considérée, pour une position donnée de la poutre x , la totalité de la surface en regard de la poutre est à la même distance x de la surface à potentiel nul. Ensuite, en tenant compte de la déformation de la poutre, on fixe la flèche au même point (x). Cette fois-ci, uniquement ce point de la poutre est à distance x de la surface à potentiel nul, les autres points de la poutre se trouvent à une distance plus élevée. Par conséquent, la force électrostatique produite dans ce dernier cas est naturellement moins élevée par rapport au précédent (sans déformation). L'effet direct est l'augmentation de la tension pour arriver au collage. Les mêmes remarques peuvent être faites quant à la distance de *pull-in*, g_{PI} .

Type structure	V_{PI} (V) Modèle simple	V_{PI} (V) Déplacement	Ecart (%)	V_{PI} (V) Déformation	Ecart (%)
a -Poutre étroite	3,19	3,2	-0,3	3,95	-23
b -Poutre large	0,33	55,5	-0,2	68,75	-24
	g_{PI} [μm] Modèle simple	g_{PI} [μm] Déplacement	Ecart (%)	g_{PI} [μm] Déformation	Ecart (%)
a -Poutre étroite	0,33	0,32	3	0,45	36
b -Poutre large	0,33	0,36	9	0,47	42

TABLEAU V: Résultats de V_{PI} et g_{PI} en Volts, obtenus à partir du modèle 2D EF – mécanique analytique, en modélisation longitudinale, dans les deux méthodes : déplacement et déformation de la poutre

3.1.3.3. Discussion

Les études réalisées dans les derniers paragraphes ont permis de visualiser et de quantifier les deux effets majeurs considérés dans la modélisation de dispositifs MEMS.

Dans les deux cas de figure (*poutre-large* et *poutre-étroite*), la prise en compte de la déformation mécanique de la poutre est nécessaire pour obtenir des résultats précis concernant la tension de *pull-in*. Cet effet présente un écart d'environ 24% sur la valeur de la tension de *pull-in*, par rapport au cas de référence considéré, quel que soit le type de la poutre et de près de 40% sur la valeur de la distance de *pull-in*.

Comme on pouvait l'escompter, l'effet de bord est relativement important dans le cas de la structure *poutre-étroite* et induit une erreur conséquente sur la valeur de la tension de collage (38%), ainsi que sur la valeur de la distance de collage (27%).

Par conséquent, il devient intéressant d'effectuer une modélisation tridimensionnelle des structures de type *poutre-étroite*, pour tenir compte à la fois des effets de bord et de la déformation de la structure.

3.1.3.4. Effet conjugué

L'objectif des prochains paragraphes est d'exploiter des modèles plus complets, qui englobent à la fois les effets de bord et la déformation de la poutre, pour améliorer la précision des résultats. Dans un premier temps, on utilisera le modèle analytique avancé (IMEC) présenté au paragraphe 2.5.2. Ensuite, les modèles EF électrostatiques en 3D, couplés avec l'équation analytique mécanique, seront présentés. Enfin, le modèle complet 3D électrostatique-mécanique sera détaillé, avec ses avantages et inconvénients.

a) *Modèle analytique avancé (IMEC)*

La tension de pull-in, pour les deux structures de poutres précédentes, a été déterminée à partir du Modèle IMEC (paragraphe 2.5.2). Ce modèle se différencie du modèle analytique simple par le fait qu'il introduit des paramètres prenant en compte la distribution non uniforme du champ électrostatique ainsi que la déformation de la poutre. Les calculs effectués par ce modèle aboutissent à des valeurs de tension de *pull-in* de 2,87 V pour la configuration en poutre étroite et 66,87 V pour la configuration en poutre large.

Dans le tableau VI, les valeurs des tensions de collage V_{PI} calculées à l'aide de ce modèle et du modèle analytique simple, sont comparées à la valeur expérimentale dont nous disposons dans la bibliographie [Osterberg 1997].

Structure/ Modèle	V_{PI} mesure [Osterberg 1997]	V_{PI} modèle simple	Ecart (%)	V_{PI} modèle IMEC	Ecart (%)
Poutre étroite	Non disponible	3,19	-	2,87 V	-
Poutre large	67,7 V (± 6 V)	55,42	18	66,87 V	1,2

TABLEAU VI: Résultats de V_{PI} en Volts, obtenus à partir des modèles analytiques et de l'expérimentation

Le résultat obtenu par le modèle IMEC, qui intègre l'effet de la déformation de la poutre, est assez précis (1%) dans le cas des poutres larges, quand on le compare à l'expérimentation. Il faut noter que les effets de bords ne sont pas prépondérants dans le cas d'une poutre large. Toutefois, l'écart entre les modèles simple et avancé, pour les deux types de poutres reste important, de l'ordre de 10%. Cela s'explique par le fait que le modèle IMEC prend en compte de façon approchée la déformation de la poutre, alors que l'approche analytique simple considère uniquement un mouvement relatif de l'électrode mobile vers la surface à potentiel nul.

Dans le cas de géométries et/ou de structures simples, les modèles analytiques 'avancés' ont l'avantage de fournir des résultats relativement précis sans nécessiter de temps de calculs importants. Toutefois, ils sont plus délicats à utiliser dans le cas de dispositifs à géométries complexes, d'où la nécessité de mettre en œuvre des modèles numériques.

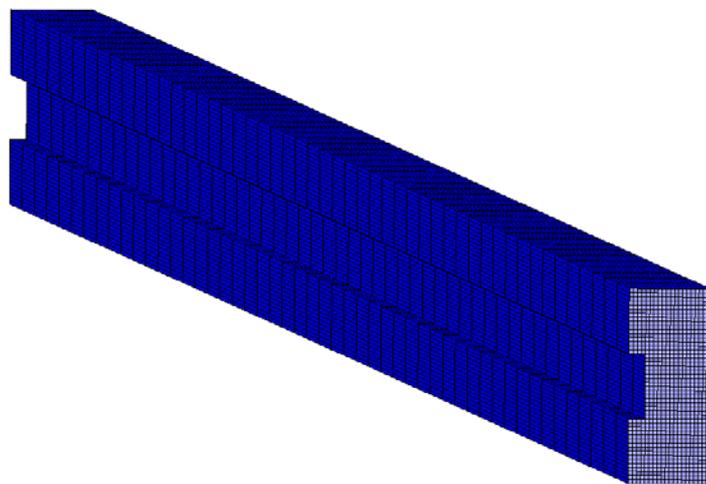
b) Modèle couplé EF 3D électrostatique – mécanique analytique

Dans ce modèle, le problème électrostatique est résolu à l'aide de la méthode des éléments finis en trois dimensions (3D) (*code_Carmel*) et la force électrostatique calculée à l'aide de la méthode des travaux virtuels. Le problème mécanique est résolu en utilisant le modèle de déformation analytique [Boloni 2008]. Etant donné que la structure étudiée est modélisée en 3D, cette approche permet de prendre en compte tant les effets de bords, d'un point de vue électrostatique, que la déformation de la structure, pour des géométries de type poutre ($L/h > 10$).

La démarche utilisée pour ce modèle est présentée sur la Figure 43. Dans un premier temps, le système est maillé en utilisant des hexaédriques. La symétrie du système est mise à profit en ne modélisant que la moitié du dispositif.

Tout comme dans la modélisation transversale au paragraphe précédent, il est possible d'imposer la différence de potentiel de deux manières différentes. La première possibilité consiste à appliquer un potentiel nul uniquement sur la surface en regard par rapport à la poutre. La seconde consiste à considérer une surface suffisamment ample pour approcher le comportement d'une surface étendue. Ces deux possibilités correspondent à deux types d'applications différentes. Comme les données expérimentales sont disponibles pour des dispositifs de type « micro-interrupteurs », les résultats présentés dans la suite seront issus d'une modélisation avec une surface très grande (3 fois la surface du potentiel V), au potentiel zéro.

La totalité de la surface extérieure de la poutre étant au même potentiel, le champ électrique à l'intérieur de celle-ci est nul. Par conséquent, le volume de la poutre n'est pas modélisé et des conditions aux limites de type $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = 0$ sont appliquées sur les surfaces où le potentiel est imposé et de type $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur les frontières du domaine. Le maillage hexaédrique du système pour la position initiale est présenté sur la Figure 42, a. La Figure 42, b représente la distribution de la densité de flux électrique. Comme escompté, le champ d'induction électrique est concentré entre les surfaces des deux électrodes où la différence de potentiel est appliquée.



a)

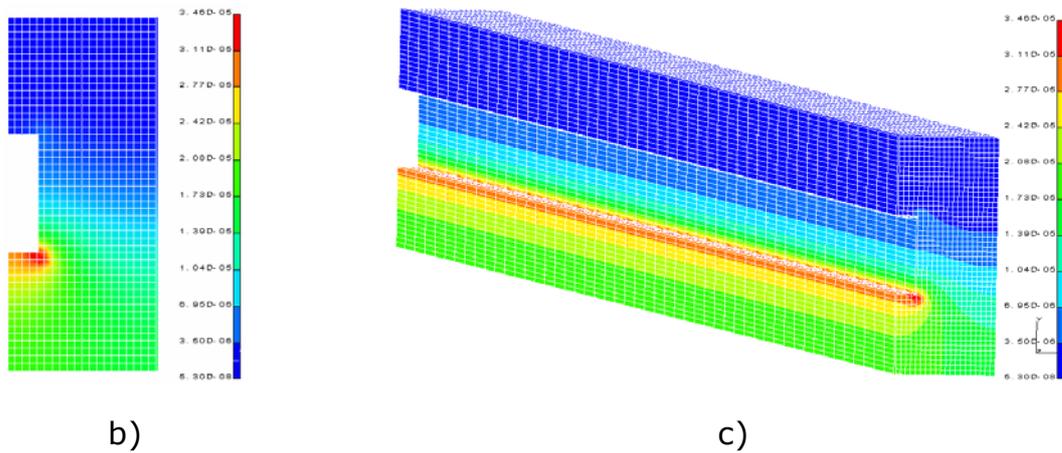


Figure 42. a) Maillage hexaédrique en position non-déformée b) Distribution de l'induction électrique en coupe transversale c) Distribution de l'induction électrique en coupe longitudinale

La procédure pour déterminer la tension de *pull-in* est similaire à celle présentée dans la modélisation 2D où la poutre est déformée à l'aide de l'équation mécanique (paragraphe 3.1.3.2). Cette procédure consiste en plusieurs étapes.

D'abord, pour une différence de potentiel donnée (V), un premier calcul électrostatique est réalisé dans la position non-déformée. Cela permet d'obtenir la valeur de la force électrostatique agissant sur la poutre. Ensuite, en imposant le déplacement des nœuds situés au niveau de la flèche, à partir de l'équation mécanique, les autres nœuds de la poutre sont déplacés, obtenant ainsi une déformation de la totalité de la poutre. Puis, la force électrostatique est calculée dans cette position déformée (position i sur la Figure 43). En imposant un nouveau déplacement (position $i+1$), le maillage de la poutre est de nouveau déformé et la force calculée dans la nouvelle position déformée. Ce procédé est répété pour plusieurs configurations déformées de la poutre dans l'intervalle de la distance inter-électrodes, comme illustré sur la Figure 43.

L'équation mécanique analytique nous permet de calculer la raideur de la poutre et ainsi la force de rappel correspondant à chaque position déformée. On rappelle que le collage électrostatique intervient lorsqu'il y a un seul point d'intersection entre les courbes de la force électrostatique et de la force de rappel. Par conséquent, si le collage n'a pas eu lieu pour la valeur choisie de V , cette valeur est modifiée, jusqu'à ce que la condition de collage soit satisfaite (voir la procédure de détermination de V_{PI} du paragraphe 3.1.3.2).

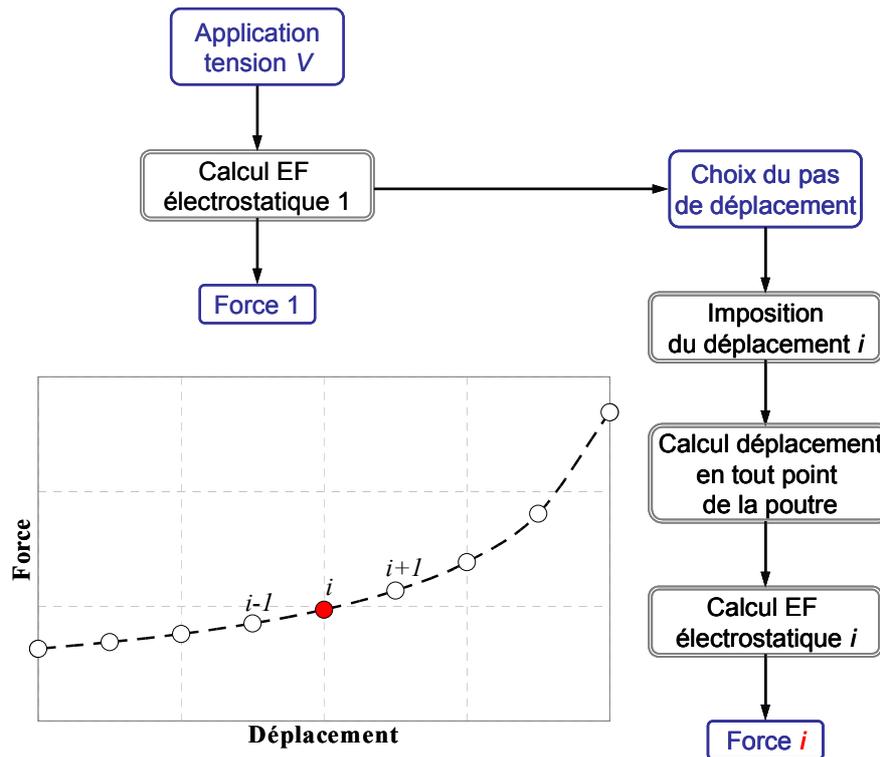


Figure 43. La démarche utilisée pour le calcul de la force électrique et la déformation de la poutre

La Figure 44, montre le maillage déformé de la poutre pour différentes valeurs du déplacement imposé de la flèche : *a*) déplacement de $0,5 \mu\text{m}$ et *b*) déplacement de $0,9 \mu\text{m}$. La distribution de l'induction électrique correspondant aux différents plans de coupe est aussi donnée : *c*) plan de coupe transversale au quart de la longueur de la poutre et *d*) plan de coupe transversale à la moitié de la longueur de la poutre.

La déformation de la poutre entraîne une déformation de son maillage éléments finis, mais également, des éléments autour de la poutre. Par conséquent, les éléments situés au-dessus de la poutre sont étirés alors que les éléments entre la poutre et la surface de potentiel nul, sont comprimés. La Figure 44, b, met en exergue ce phénomène, pour une distance entre la poutre et la surface de potentiel zéro de $0,1 \mu\text{m}$. Evidemment, la dégradation du maillage dans la zone de forte concentration de champ électrique influence la qualité de la solution. Dans la gamme de déformation de la poutre permettant d'obtenir la tension V_{PI} , les éléments ne subissent pas de déformation au-delà de $0,6 \mu\text{m}$, comme le montre le Tableau VII. Ainsi, la déformation du maillage influe peu sur la qualité de la solution en termes de tension de *pull-in*.

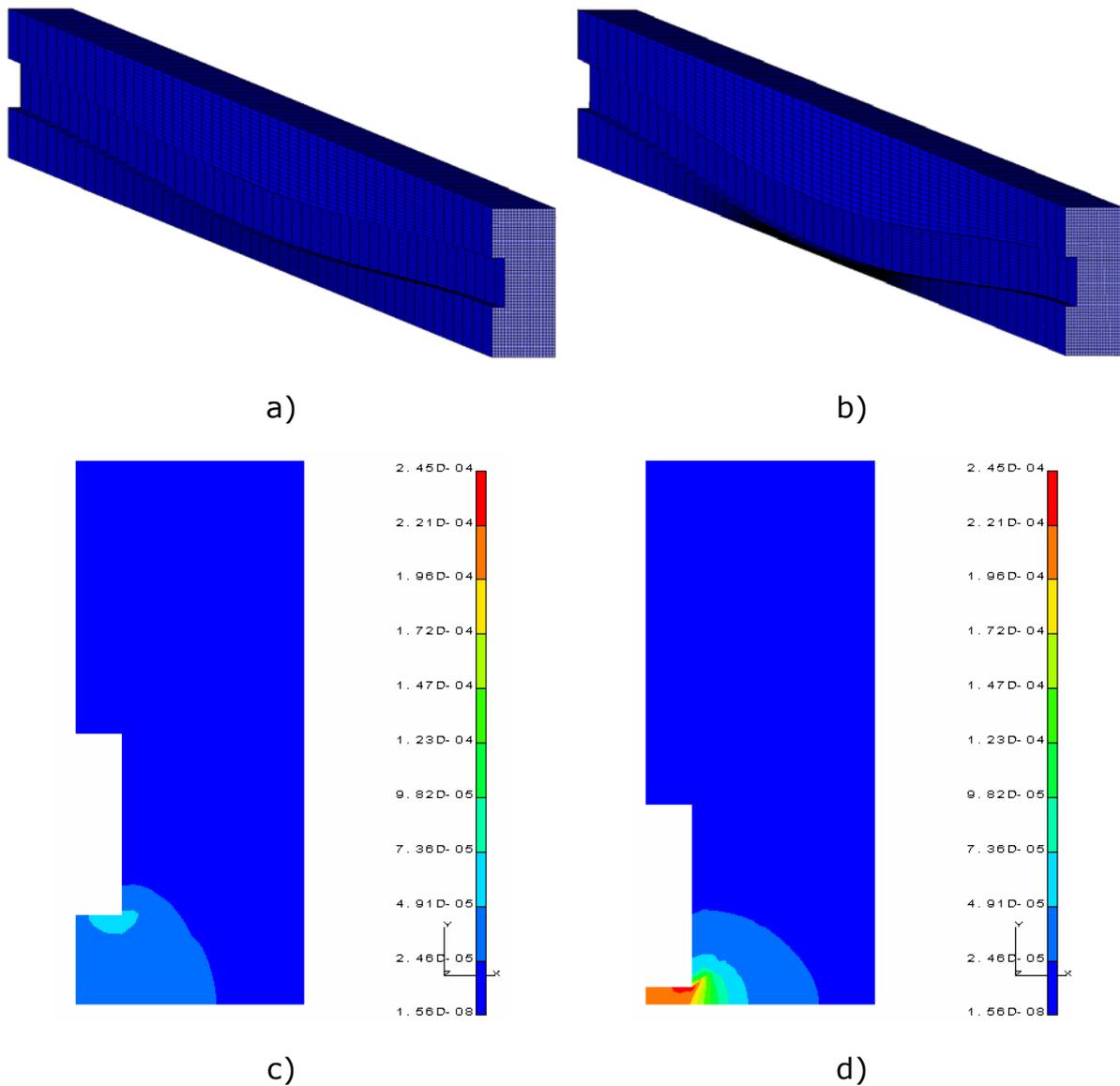


Figure 44. Maillages déformés, pour un déplacement maximal de : a) $0,5 \mu\text{m}$ et b) $0,9 \mu\text{m}$ Distribution de l'induction électrique, c) plan de coupe transversale à $L/4$ et d) plan de coupe transversale à $L/2$

Cette procédure a été appliquée aux cas des deux poutres test (*étroite et large*). Les tailles des maillages utilisés pour les calculs, constitués d'éléments hexaédriques, sont présentées dans le Tableau VII.

Maillage	Nombre des nœuds	Nombre d'éléments
a -Poutre étroite	49419	44800
b -Poutre large	21306	14400

TABLEAU VII: Propriétés des maillages hexaédriques pour les deux configurations test

Les résultats obtenus à l'aide du modèle présenté dans ce paragraphe, en utilisant les deux formulations en potentiels scalaire et vecteur électriques, sont synthétisés dans le Tableau VIII. Une comparaison avec le résultat expérimental issu de [Osterberg 1997] est également effectuée pour la structure *Poutre large*.

Type de structure	VPI [V] Mesures expérimentales	VPI [V] potentiel scalaire	VPI [V] potentiel vecteur
a -Poutre étroite	non disponible	2,51	2,53
b -Poutre large	67,7 (± 6)	67,6	68,5
		gPI [μm]	gPI [μm]
a -Poutre étroite	non disponible	0,54	0,5
b -Poutre large	non disponible	0,48	0,47

TABLEAU VIII: Résultats de V_{PI} et g_{PI} , obtenus à partir du modèle 3D EF – mécanique analytique, en formulation potentiel scalaire électrique et potentiel vecteur électrique

Ainsi, si la force calculée est surestimée, la valeur de V_{PI} aura tendance à être sous-estimée. Inversement, si la force est sous-estimée, V_{PI} sera surestimée. On observe que la formulation en potentiel scalaire donne une tension de collage inférieure à celle obtenue à l'aide de la formulation en potentiel vecteur (tableau VIII). Ceci laisse supposer que l'encadrement de la force par les deux formulations est similaire à ce qui est observé sur l'énergie. En effet, il a été montré que la formulation en potentiel scalaire surestime l'énergie électrique alors que la formulation en potentiel vecteur la sous-estime, obtenant ainsi un encadrement de la solution en termes d'énergie électrique [Marmin 1998].

Le Tableau IX récapitule les écarts des résultats, relatifs à la tension V_{PI} , par rapport à la valeur expérimentale dans le cas de la structure *Poutre large*.

Type de structure	Ecart [%] potentiel scalaire/ potentiel vecteur	Ecart [%] potentiel scalaire/ expérimentation	Ecart [%] potentiel vecteur/ expérimentation
b -Poutre large	1,31	0,14	1,16

TABLEAU IX: Ecart entre la tension V_{PI} mesurée et celles obtenues à l'aide des deux formulations

c) *Modèle couplé EF 3D électrostatique – EF 3D mécanique*

La modélisation analytique s'avère très pratique pour des études relativement précises dans le cas de géométries simples. Pour des structures géométriques plus complexes, l'approche mécanique analytique peut être difficile à mettre en œuvre. Il est évidemment toujours possible d'adopter des hypothèses simplificatrices ce qui permet d'obtenir des résultats approchés [Degani 1998]. Cependant, dans le cas d'études nécessitant une estimation précise de la tension de *pull-in*, ces modèles approchés ne sont plus suffisants. Dans la suite de ce paragraphe, une approche, basée sur le couplage d'un modèle Electrostatique (*code Carmel*) à un autre Mécanique, tous deux par éléments finis en 3D, sera présentée. Dans ce cas, la résolution des deux problèmes se fait d'une manière itérative [Boloni 2009/I].

Le système modélisé dans cette partie est identique à celui présenté au paragraphe précédent. Par contre, la totalité du système, y compris la poutre, est discrétisée et maillée. En effet, la résolution du problème mécanique linéaire par éléments finis nécessite le maillage de la structure solide qui sera décrite par son module d'Young. Ainsi, nous sommes capables de calculer les déplacements de tous les nœuds de la poutre. Afin d'aboutir à des résultats précis lors de la résolution du problème électrostatique (effets de bords), il est important d'avoir un nombre conséquent d'éléments dans une coupe transversale de la structure. De plus, il est également nécessaire de mailler la poutre d'une manière suffisamment fine suivant sa longueur de sorte à reproduire sa déformation avec une précision suffisante. Les calculs mécaniques sont effectués en utilisant le code de calcul par éléments finis Code_Aster [ASTER].

La différence de potentiel est appliquée entre la surface totale de la poutre et la surface au potentiel zéro, tout comme dans le cas du modèle EF 2D transversal. Les conditions aux limites associées au problème électrostatique sont de type $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = 0$ pour les nœuds appartenant aux surfaces où l'on impose la différence de potentiel et de type $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$ pour le reste des nœuds appartenant aux surfaces extérieures du système. Quant aux conditions limites associées au problème mécanique, elles sont de type $u = 0$ (déplacement nul) aux nœuds appartenant aux surfaces extérieures du système et aux surfaces d'encastrement de la poutre.

Une difficulté du type de couplage décrit dans ce paragraphe, est la contrainte d'utiliser un même maillage éléments finis pour les deux problèmes, électrostatique et mécanique. Afin de contourner cette difficulté, dans le calcul mécanique, les éléments autour de la poutre représentant le diélectrique dans le problème électrostatique, ont reçu de valeurs du module d'Young très faibles.

Comme décrit au paragraphe 2.5.5, le problème électrostatique est d'abord résolu afin d'obtenir la force électrostatique F_1 . Puis, cette dernière est appliquée comme terme source dans le problème mécanique qui fournit les déplacements en chaque nœud du maillage éléments finis. Ce dernier est alors déformé à partir de ces données et le problème électrostatique est à nouveau résolu sur le maillage déformé, obtenant une force F_2 .

Pour le deuxième pas d'itération, on applique au problème mécanique la différence des forces $\Delta F = F_2 - F_1$. En effet, on ne prend en compte que la différence de force entre deux pas successifs pour corriger la déformation de la poutre. Le processus est répété de manière itérative, comme illustré sur la Figure 45.

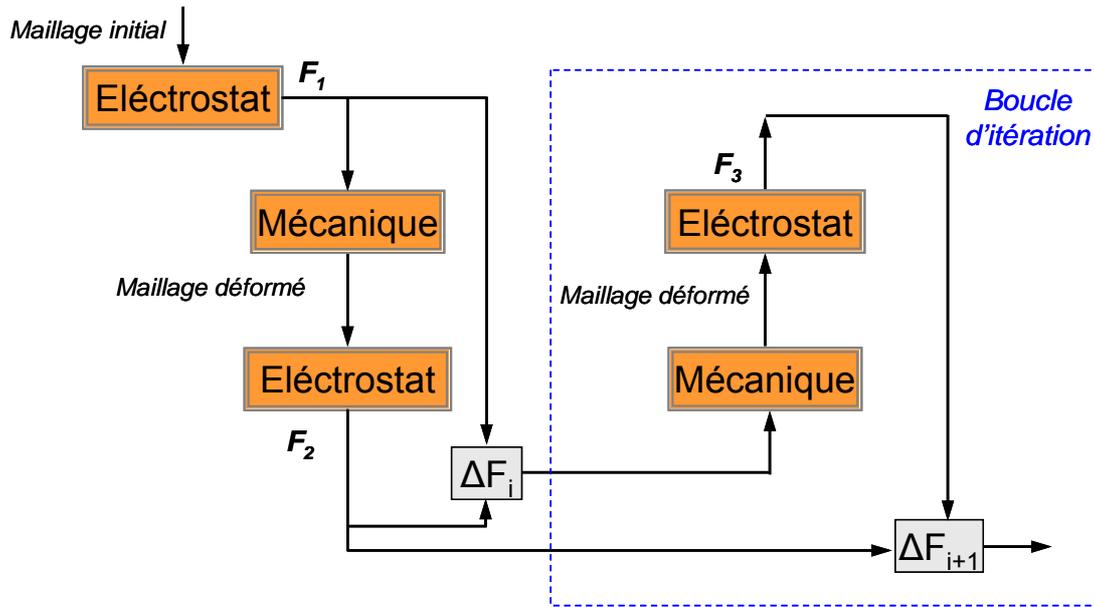


Figure 45. Schéma itératif adopté

Le critère d'arrêt du processus itératif peut-être choisi soit sur le déplacement, soit sur la force. Sachant que nous sommes dans le régime élastique de point de vue mécanique, fixer un critère sur la force ou le déplacement revient au même. De manière générale, que ce soit un critère sur la force ou sur le déplacement, une valeur seuil (ξ) est fixée et le processus est stoppé une fois que la différence relative entre deux itérations successives est inférieure à ξ . Dans le cas d'un critère sur la force par exemple, celui-ci s'écrira :

$$\frac{\|\mathbf{F}_{k+1} - \mathbf{F}_k\|_2}{\|\mathbf{F}_{k+1}\|_2} \leq \xi \quad (82)$$

où \mathbf{F}_k et \mathbf{F}_{k+1} représentent les valeurs des forces électrostatiques calculées aux itérations k et $k+1$ respectivement et $\|x\|_2 = \sqrt{|x|^2}$ la norme 2 euclidienne.

Quand le système est en équilibre stable, la variation de force ΔF d'un pas de calcul au suivant tend vers une valeur nulle, i.e. la force tend vers une valeur constante (Figure 46). Ce comportement correspond à des tensions inférieures à V_{PI} , plus précisément pour les valeurs de 1,5 V, 2 V et 2,4 V. Pour des valeurs supérieures à V_{PI} , la système est dans une position instable et la force (F_1, F_2, F_3 , etc) ne tend pas vers une valeur constante, elle passe par un minimum différent de zéro, puis devient croissante. La variation de ΔF devient également croissante, comme on peut l'observer sur la Figure 46, pour les valeurs correspondantes aux tensions 2,48 et 2,5 V.

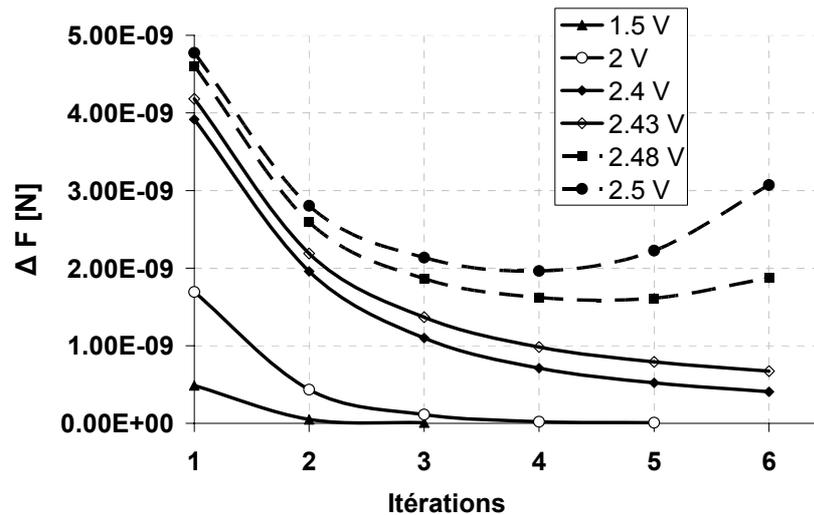


Figure 46. Evolution de ΔF pour différentes valeurs de V , au-dessus et en-dessous de V_{PI} [Boloni 2010]

De ce fait, la procédure de détermination de la tension de *pull-in* consiste d'abord à appliquer une tension faible, puis à augmenter son amplitude tout en suivant l'évolution de ΔF jusqu'à ce que celle-ci change de pente. La valeur de *pull-in* étant la dernière valeur pour laquelle ΔF ne change pas de pente et qui vérifie le critère d'erreur dans notre cas 2,43 V. L'évolution de ΔF , pour différentes valeurs de tension, dans le cas de la structure *poutre étroite* est présentée sur la Figure 46.

La démarche de détermination de V_{PI} , telle que présentée ci-dessus peut paraître fastidieuse surtout quand on ne connaît pas la gamme dans laquelle se trouve V_{PI} . Dans ce cas là, un modèle analytique peut être très utile pour fournir une valeur approchée de cette tension.

Une attention particulière doit également être accordée à la façon de parcourir les tensions pour la recherche de V_{PI} . Il est judicieux de commencer à partir d'une valeur inférieure et d'incrémenter, selon la précision souhaitée, la valeur de la tension, jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait. En effet, un parcours débutant d'une valeur élevée en diminuant la valeur de la tension ou bien, un choix aléatoire des valeurs de tension peut compromettre le résultat. L'évolution du critère d'arrêt est illustrée sur la Figure 47, pour deux valeurs de tension se situant au-dessus de la valeur de *pull-in* et également pour la valeur de *pull-in*.

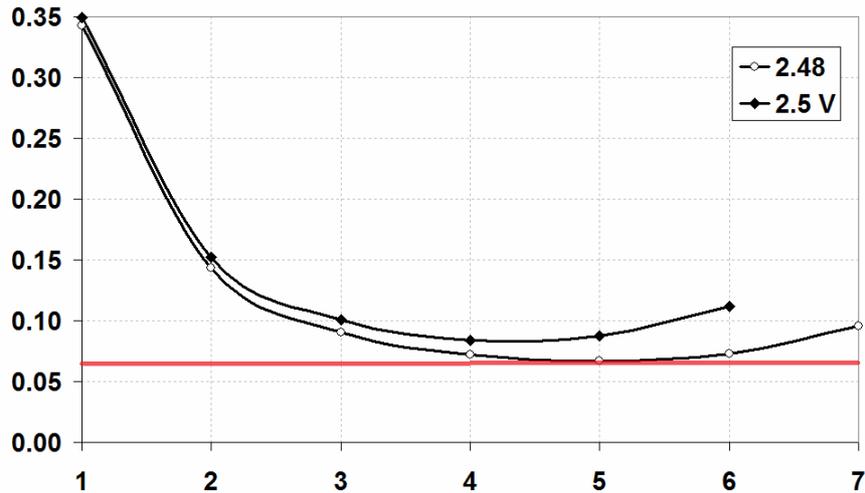


Figure 47. Critère d'arrêt et évolution de la variation de la force pour deux valeurs de tensions

Supposons que l'on fixe le critère d'arrêt comme étant à la valeur représentée par la ligne rouge. On observe que pour 2,48 V à la 5ème itération, le critère est satisfait et on peut affirmer que cette valeur est la valeur de V_{PI} . Or, si l'on se réfère à la figure précédente, pour cette valeur de tension, ΔF est de nouveau croissant à partir de la 6ème itération, ce qui veut dire que cette tension est au-dessus de la valeur de *pull-in*.

En utilisant la procédure décrite ci-dessus, nous trouvons, pour la tension de *pull-in*, les valeurs de 2,43 V pour la configuration *poutre étroite* et 63 V pour la configuration *poutre large*. Nous montrons dans le tableau X les résultats relatifs à la tension de *pull-in* issue des différents modèles, analytiques, EF 2D et EF 3D présentés dans ce chapitre.

Type de structure	Analytique		EF 2D Electrostatique Analytique Mécanique				EF 3D Electrostatique			Exp [Osterberg 1997]
			Longitudinal		Transversal		Analytique Mécanique		EF 3D Mécanique	
	Simple	IMEC	Dépl.	Déf.	Reg.	Inf.	Pot. sca.	Pot. vec.	Pot. sca.	
a -Poutre étroite	3,19	2,87	3,2	3,95	3	1,95	2,51	2,53	2,43	Non disponible
b -Poutre large	58,71	66,87	55,5	68,75	55,25	55	67,6	68,5	63	67,7 (±6)

TABLEAU X: Récapitulatif des résultats de V_{PI} en Volts, obtenus à partir des modèles analytiques et EF en 2D et EF 3D, couplés analytique mécanique et EF mécanique

La comparaison avec la donnée expérimentale dont nous disposons permet de cadrer les différents modèles introduits dans ce chapitre. On observe dans le tableau récapitulatif, qu'un modèle simple de type masse-ressort n'est pas suffisamment précis pour décrire le comportement du dispositif, et ce, même dans le cas de structures

simples. A l'inverse, un modèle analytique plus complexe, incluant des paramètres pour tenir compte des effets de bord et de la déformation de la poutre s'avère être relativement précis. Outre cette qualité, il présente également une grande rapidité d'exécution. Cependant, le développement de modèles analytiques pour des structures plus complexes peut-être laborieux, faisant perdre leurs avantages de rapidité et simplicité.

A l'aide de modèles éléments finis en 2D, nous avons pu mettre en exergue l'importance des différents phénomènes sur l'évolution de la tension de *pull-in*. En effet, comme le montre le tableau récapitulatif, la déformation de la poutre est sensiblement plus influente que les effets de bord sur la valeur de V_{PI} . Aussi, étant donné que le problème mécanique est résolu par des moyens analytiques dans le modèle 2D EF Electrostatique – Analytique Mécanique, ce dernier est le modèle qui fournit une relative bonne précision pour des temps de calculs limités.

Si nous comparons les résultats des modèles avec la donnée expérimentale, nous observons que les modèles électrostatiques par éléments finis 3D couplés à une équation mécanique analytique semblent donner les résultats les plus précis. Néanmoins, le modèle couplé EF 3D Electrostatique – Mécanique est, sans équivoque, celui qui prend le plus fidèlement en compte les différents phénomènes mis en jeu. Au vu de l'intervalle d'incertitude de la mesure, la tension de *pull-in* expérimentale est valide sur une plage assez large, incluant la valeur obtenue par ce dernier modèle. Par conséquent, le modèle par EF3D couplé électrostatique-mécanique est considéré comme la référence.

3.1.4. Synthèse sur les différents modèles

Les paragraphes précédents ont été dédiés à la modélisation et à la détermination de la tension de *pull-in* d'un système MEMS simple. Ainsi, les différents modèles introduits au chapitre 2 ont été mis en œuvre pour l'étude de structures constituées de poutres (étroite ou large) afin de déterminer la tension de collage. Comme on pouvait le prévoir, un modèle analytique simple permet d'avoir uniquement un ordre de grandeur de cette valeur étant donné qu'il est basé sur des hypothèses simplificatrices fortes. A l'opposé, un modèle numérique 3D couplé électrostatique-mécanique permet de tenir compte de tous les effets présents dans ce genre de dispositifs. Les résultats sont bien évidemment plus précis mais cela s'effectue au détriment de la simplicité de mise en œuvre et des temps de calcul qui sont bien plus élevés. La force électrique constitue la variable clé dans cette approche étant donné qu'elle représente le terme de couplage entre les problèmes électrique et mécanique. Une attention particulière doit donc être portée à son calcul. Sachant qu'elle est calculée à partir de l'énergie (méthode des travaux virtuels) et donc, à partir du champ électrique, il est nécessaire d'avoir une bonne précision du calcul électrostatique en termes de champs, ce qui induit des maillages relativement fins et donc des temps de calculs conséquents.

En conclusion de cette étude, il ressort que le modèle analytique IMEC peut constituer une bonne première approche pour déterminer la tension de *pull-in* de MEMS

électrostatiques simples d'une manière relativement rapide. Il peut donc être utilisé pour un premier dimensionnement. Toutefois, l'identification des coefficients qui y sont implantés n'est pas toujours triviale, ce qui peut amener à des erreurs dans les résultats obtenus. Les différentes procédures de modélisation qui ont été utilisées ont montré l'impact, d'une manière distincte, des deux effets les plus prépondérants dans ce genre de MEMS, à savoir les effets de bords et de déformation mécanique. Par conséquent, la recherche d'une précision accrue doit forcément passer par une modélisation tridimensionnelle couplée, certes lourde, mais tenant compte des divers phénomènes physiques.

3.2. Modélisation d'un motif élémentaire d'un peigne inter-digité

Les études menées précédemment ont concerné des MEMS électrostatiques simples ou de type poutres ou plaques. Dans ce cas de figure, comme il a été largement montré, il est possible d'utiliser des modèles de différentes granularités basés sur des hypothèses simplificatrices plus ou moins fortes.

La suite de ce chapitre est dédiée à la modélisation d'un motif élémentaire d'un dispositif MEMS à doigts inter-digités (Figure 48). Le but étant de déterminer la force électrostatique en fonction du déplacement relatif d'une des deux électrodes.

La problématique est, dans ce cas, relativement différente par rapport à l'étude précédente. En supposant les forces issues des parties latérales parfaitement compensées (F_a et F_b), la force globale se réduit à la seule composante dans l'axe de déplacement (F_c). Il faut donc pouvoir calculer cette dernière avec précision afin de pouvoir la quantifier soit dans le cadre d'une procédure de dimensionnement soit dans le cas d'une étude de prévention qui permettrait d'éviter d'atteindre la distance de collage.

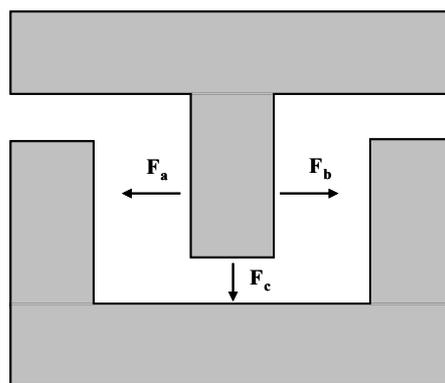


Figure 48. Cellule élémentaire d'un dispositif à peignes inter-digités

L'utilisation d'une approche analytique ne peut plus se faire avec la même aisance que dans le cas d'une poutre étant donné que les champs ne peuvent plus être supposés homogènes. Une modélisation numérique par éléments finis s'avère alors nécessaire. Mais même dans ce cas, la prise en compte du mouvement n'est pas aisée.

En effet, même si celui-ci demeure un simple mouvement linéaire, la géométrie et le fonctionnement du système à étudier font que le mouvement d'encastrement ne permet pas d'utiliser les procédures de prises en compte du mouvement classiques largement développées dans le cas des actionneurs électromécaniques 'macroscopiques'.

Plusieurs techniques peuvent être envisagées pour tenir compte du mouvement (interpolation, Mortar etc [Shi 2005]) mais ces techniques ont été souvent développées pour des entrefers à épaisseur constante ou peu variable, ce qui n'est pas le cas de notre système. Une autre solution, utilisée par beaucoup de logiciels, consiste à modifier et remailler la géométrie pour chaque position du déplacement. Cette solution est facile à mettre en œuvre mais présente l'inconvénient d'une modification du maillage à chaque pas qui s'accompagne souvent d'erreurs numériques tant sur les valeurs des champs que sur celles de la force qui en est déduite. Deux possibilités s'offrent alors pour éviter ces erreurs. La première consiste à mailler d'une façon très fine la totalité du domaine d'étude à chaque déplacement mais cela induit alors des temps de calculs importants. La seconde, qui a été privilégiée, est basée sur un remaillage de quelques zones du domaine d'étude en fonction d'un critère d'erreur. Cette dernière possibilité permet de garder un degré de précision élevé tout en limitant le nombre d'inconnues du problème et donc les temps de calcul.

3.2.1. Erreur numérique sur la tension de *pull-in*

Le calcul précis de V_{PI} dépend directement de la précision du modèle. Or, dans un modèle éléments finis, la solution est fortement influencée par la taille du maillage. Par conséquent, la taille du maillage impacte fortement la précision de calcul de V_{PI} .

Dans ce paragraphe, l'influence de la taille du maillage éléments finis sur l'estimation de la tension de *pull-in* sera investiguée. Pour cela, nous allons étudier la structure *poutre étroite* dont les caractéristiques sont données dans le Tableau II. Le modèle utilisé pour les calculs numériques est le modèle transversal, en configuration *surface en regard* présenté auparavant. Nous rappelons qu'il utilise un maillage triangulaire en deux dimensions et que la résolution s'effectue à l'aide de la formulation en potentiel scalaire électrique.

Plusieurs calculs ont été effectués, pour le même problème, en utilisant des maillages de tailles différentes. L'évolution de V_{PI} , en fonction de la taille du maillage, est illustrée sur la Figure 49.

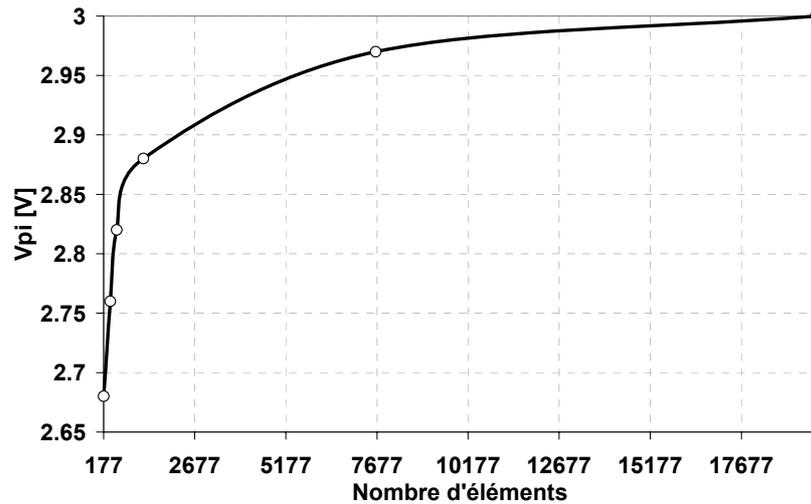


Figure 49. Evolution de V_{PI} en fonction de la taille du maillage éléments finis

On remarque que V_{PI} tend vers 3 V lorsque le maillage devient suffisamment dense. Les erreurs associées aux différentes tailles de maillage sont également quantifiées sur la Figure 50. La valeur de référence de V_{PI} est considérée comme étant celle obtenue pour le maillage le plus fin (19728 éléments).

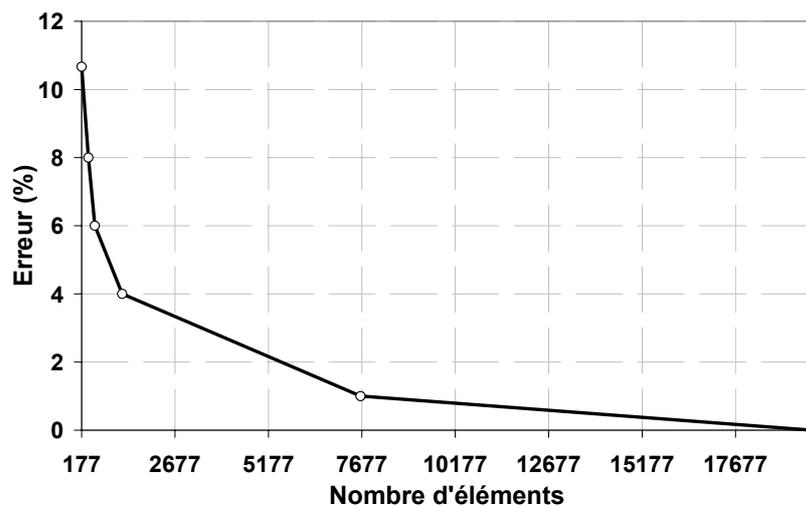


Figure 50. Erreur relative associée au calcul de V_{PI}

Bien évidemment, la précision est inversement proportionnelle aux nombres d'éléments du maillage. L'influence de la taille de maillage sur la solution du problème couplé électrostatique-mécanique, en 2D, est notable. La Figure 50 reflète bien la nécessité d'utiliser des maillages denses si l'on souhaite améliorer la précision des calculs.

Evidemment, cet effet est valable également dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle. Il peut donc être nécessaire de faire appel à des outils qui permettent la construction de maillages adéquats pour le type de problème étudié, tout en ayant un nombre d'inconnues limité.

3.2.2. Estimateur d'erreurs

L'amélioration de la qualité de la solution d'un calcul par éléments finis peut être obtenue, entre autres, en agissant sur le maillage. Dans ce cas, plusieurs approches peuvent être adoptées. La méthode la plus 'simple' consiste à raffiner le maillage sur la totalité du domaine modélisé. Cela se traduit par une augmentation du nombre d'inconnues qui peut devenir prohibitif. Une autre approche, plus 'économique' en nombres d'inconnues, vise à raffiner uniquement une partie du maillage selon la zone où l'amélioration de la solution est nécessaire. Dans le cas de ces travaux, on s'intéresse essentiellement au raffinement du maillage dans les régions de 'grandes erreurs'.

Ce paragraphe comporte deux parties. La première est dédiée à la présentation d'estimateurs d'erreurs basés sur la discontinuité numérique du champ et sur la vérification des lois de comportement dans les deux formulations complémentaires. La seconde partie traite de l'implémentation du raffinement de maillage basée sur les estimateurs d'erreurs présentés et l'exploitation des procédures développées pour l'étude du mouvement d'une cellule élémentaire d'un MEMS électrostatique à peignes interdigités.

3.2.2.1. Estimateur basé sur la discontinuité numérique du champ

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la résolution d'un problème électrostatique revient à chercher les deux champs de vecteurs \mathbf{d} et \mathbf{e} définis par une divergence (éq. 37) et un rotationnel (éq. 36) avec les conditions aux limites associées. Ces deux champs sont liés par une loi de comportement des matériaux (éq. 32).

Dans le cas de la formulation en potentiel scalaire électrique, le champ électrique \mathbf{E} est considéré comme un champ admissible. Etant donné que ce dernier est une grandeur de type *circulation*, il est naturel que sa composante tangentielle $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}$ soit conservée à l'interface de deux éléments adjacents.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_2 \quad (83)$$

L'induction électrique \mathbf{D} est, quant à elle, liée par la loi constitutive des matériaux (éq. 32) et, du fait de l'erreur numérique, sa composante normale $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ ne vérifie pas les équations de conservation

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_1 \neq \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_2 \quad (84)$$

La discontinuité de la composante normale de \mathbf{D} peut donc constituer un bon critère d'évaluation des erreurs.

Inversement, dans le cas de la formulation en potentiel vecteur électrique, la densité du flux électrique \mathbf{D} est considérée comme un champ admissible. Etant une

grandeur de type *flux*, sa composante normale $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ est conservée à travers l'interface entre deux éléments adjacents,

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_2 \quad (85)$$

De façon similaire au cas précédent, le champ électrique se calcule à partir de la loi constitutive et sa composante tangentielle, du fait de l'erreur numérique, n'est pas conservée à travers l'interface de deux éléments voisins.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_1 \neq \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_2 \quad (86)$$

Un estimateur d'erreur peut alors être basé sur la discontinuité de la composante tangentielle de \mathbf{E} .

Illustration dans le cas de champs de type flux

Considérons, dans un maillage éléments finis, deux éléments adjacents e_1 et e_2 , comme illustré sur la Figure 51, ayant une facette commune (en rouge), notée f_l . Comme mentionné ci-dessus, dans la formulation en potentiel scalaire électrique, la composante normale de \mathbf{D} n'est pas conservée à travers la facette f_l . Nous pouvons alors définir, à partir des flux normalisés au travers de cette facette (composante normale du champ rapporté à la surface de la facette), une erreur qui quantifie cette discontinuité.

L'expression de l'erreur pour une facette f_l quelconque s'écrit :

$$\gamma_{f_l} = (\Phi_{1n} - \Phi_{2n})^2 \quad (87)$$

où Φ_{1n} et Φ_{2n} sont les flux normalisés à travers la facette considérée f_l . Il est possible ensuite de calculer l'erreur sur un élément e_l en faisant la somme des erreurs sur chacune de ses facettes:

$$\gamma_{e_l} = \sum_{i=1}^F \gamma_{f_i} \quad (88)$$

avec F le nombre de facettes de l'élément (ex. $F=4$ dans le cas d'éléments tétraédriques).

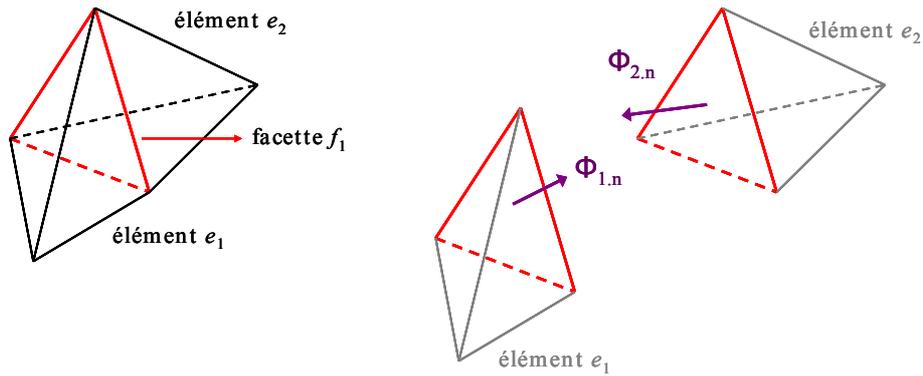


Figure 51. Vérification de la continuité de la composante normale du flux

En exploitant la discontinuité du flux normal traversant les facettes des éléments, une carte d'erreur peut être établie sur l'ensemble des éléments du domaine.

Illustration dans le cas de champs de type circulation

Considérons les mêmes éléments que dans le cas précédent, Figure 52. Le but est de quantifier les discontinuités à partir de la circulation du champ sur les arêtes. Une arête est évidemment commune à plusieurs éléments. Toutefois, à titre d'illustration, nous montrons uniquement le cas d'une arête notée a_1 commune à deux éléments e_1 et e_2 sur la Figure 52.

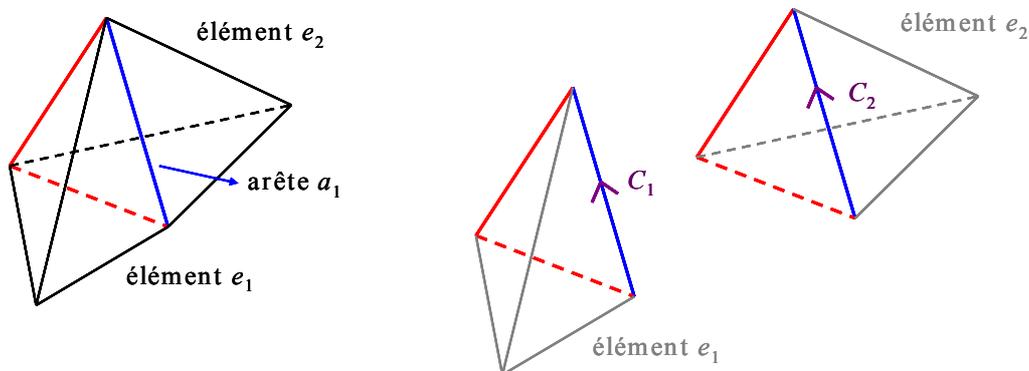


Figure 52. Vérification de la composante tangentielle d'une circulation

Les deux éléments ont chacun une contribution à la circulation de \mathbf{E} sur l'arête a_1 (en bleu, sur la Figure 52). La circulation moyenne donnée par les deux éléments est tout simplement égale à la somme des circulations divisée par deux. De la même façon, pour un nombre n d'éléments connectés à l'arête a_1 , il est possible d'exprimer une circulation moyenne :

$$\bar{C}_{a_1} = \frac{\sum_{k=1}^n (C_1 + C_2 + \dots + C_n)}{n} \quad (89)$$

où C_1, C_2, \dots, C_n sont les circulations données par les éléments connectés à l'arête a_1 .

Il est possible ensuite de déduire l'erreur sur un élément e_I comme étant la somme des différences entre les circulations calculées (C_p) et les circulations moyennes (\bar{C}_p) correspondant à chaque arête de e_I :

$$\gamma_{e_I} = \sum_{p=1}^A (C_p - \bar{C}_p)^2 \quad (90)$$

où A représente le nombre d'arêtes associées à l'élément e_I .

A partir de l'erreur sur chaque élément, nous pouvons établir une carte d'erreurs, et calculer une erreur moyenne sur l'ensemble des éléments du système. Cela permettra alors d'établir un critère global pour le raffinement du maillage.

3.2.2.2. Estimateur basé sur la vérification des lois de comportement à partir des deux formulations complémentaires

La résolution du problème électrostatique dans les deux formulations, en potentiels scalaire et vecteur électriques, implique la détermination des champs admissibles (respectivement \mathbf{E}_{adm} et \mathbf{D}_{adm}) qui sont des solutions du problème. Dans la formulation en potentiel scalaire électrique, \mathbf{E}_{adm} permet de calculer un champ \mathbf{D} à partir de la loi de comportement. De la même façon, dans la formulation en potentiel vecteur électrique, \mathbf{D}_{adm} permet de calculer un champ \mathbf{E} . Toutefois, si on considère la relation entre les champs \mathbf{E}_{adm} et \mathbf{D}_{adm} , ceux-ci ne vérifient pas la loi de comportement de par l'erreur numérique associée aux deux formulations. On peut alors définir un estimateur d'erreur sur la non vérification de la loi de comportement par ces deux champs.

Concrètement, la formulation en potentiel scalaire électrique fournit \mathbf{E}_{adm} et la formulation en potentiel vecteur électrique fournit \mathbf{D}_{adm} . Ainsi, l'erreur numérique inhérente aux deux formulations [Li 1994] nous permet d'écrire que :

$$\mathbf{D}_{adm} - \varepsilon \mathbf{E}_{adm} \neq 0 \quad (91)$$

La différence de la relation (91) est un résidu qui doit être faible pour avoir une solution se rapprochant de la solution exacte [Li 1994]. Une possibilité pour quantifier ce résidu consiste à le normaliser par rapport à l'énergie électrique, comme le montre la relation suivante :

	$\lambda_e = \int_e (\mathbf{D}_{adm} - \varepsilon \mathbf{E}_{adm}) \varepsilon^{-1} (\mathbf{D}_{adm} - \varepsilon \mathbf{E}_{adm}) d\Omega$	(92)
--	---	------

où e est un élément de volume Ω . Comme dans le cas du critère sur la vérification de la continuité des différentes composantes des champs, il est également possible de

construire une carte d'erreur, basée sur la non vérification de la loi de comportement, sur l'ensemble des éléments du système.

3.2.3. Application du raffinement de maillage

Le début de ce chapitre a principalement abordé le calcul de la tension de *pull-in* pour la modélisation des structures simples de MEMS électrostatiques. Comme la détermination précise de V_{PI} dépend directement de la force électrostatique s'appliquant au sein des dispositifs on se propose de montrer l'intérêt du raffinement de maillage au travers du calcul de la force électrostatique.

On considère le cas test d'une cellule élémentaire d'un dispositif à peignes inter-digités (Figure 53). Cette cellule est constituée d'une électrode fixe et d'une autre mobile, entre lesquelles est appliquée une différence de potentiel qui crée une force d'attraction. Les deux électrodes sont suspendues au-dessus d'un substrat soumis au même potentiel que l'électrode mobile.

L'étude consistera à calculer la force électrostatique d'attraction pour plusieurs positions de l'électrode mobile par rapport à celle fixe.

L_s	L	b	t	g	g_s	t_s
$20\ \mu\text{m}$	$10\ \mu\text{m}$	$1\ \mu\text{m}$	$2\ \mu\text{m}$	$1\ \mu\text{m}$	$1\ \mu\text{m}$	$0.5\ \mu\text{m}$

TABLEAU XI: Dimensions du système étudié

Les dimensions du système étudié, illustrées sur la Figure 53, sont présentées dans le Tableau XI. Ces dernières sont: L_s la longueur du substrat, L la longueur de l'électrode mobile, b et t respectivement la largeur et l'épaisseur des électrodes, g la distance inter électrodes, g_s la distance entre électrodes et substrat et t_s l'épaisseur du substrat [Boutaayamou 2008].

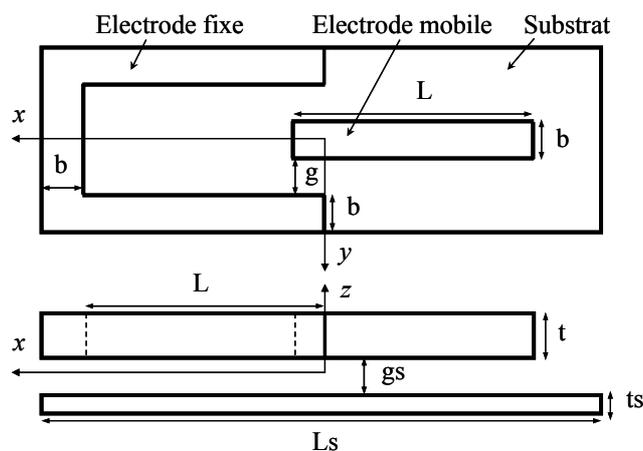


Figure 53. Géométrie d'une cellule élémentaire d'un actionneur à peignes inter-digités

Afin de simuler le mouvement de l'électrode mobile, différents maillages grossiers (~20000 éléments) tétraédriques ont été réalisés pour plusieurs positions statiques successives de l'électrode mobile (ex. $x = 1, 2, \dots, 9 \mu\text{m}$). Par ailleurs, pour ces mêmes positions, un maillage tétraédrique très fin (~300000 éléments) a également été construit. Ce dernier constituera le modèle dont le résultat, en ce qui concerne la force électrostatique, constituera la référence à laquelle seront comparés les résultats issus des modèles obtenus par le raffinement de maillage. La Figure 54 montre le maillage de référence pour les positions initiale ($0 \mu\text{m}$), l'électrode mobile est à l'extérieur de l'électrode fixe et à mi-chemin ($0.5 \mu\text{m}$).

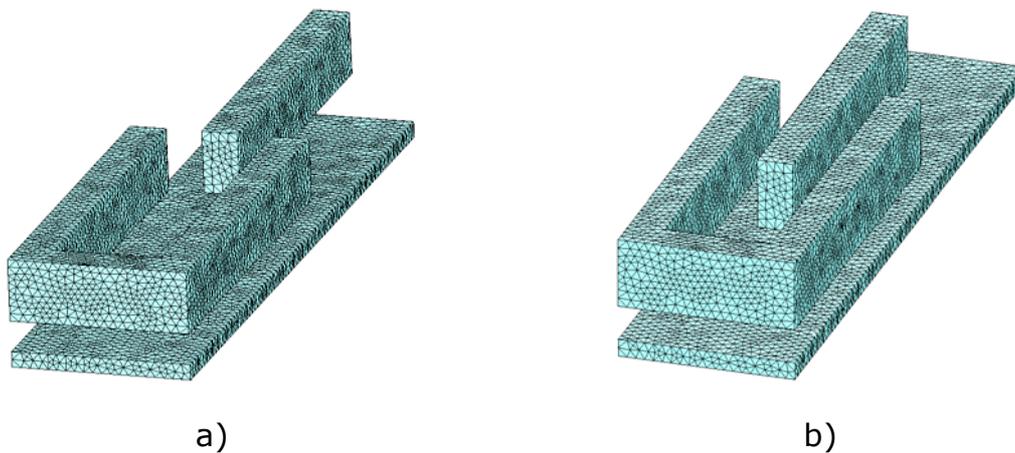


Figure 54. Aperçu du maillage de référence pour les positions (a) initiale et (b) à mi-parcours de l'élément mobile

Le premier pas du processus de raffinement consiste à réaliser un calcul à partir du maillage initial *grossier*. Ce premier calcul par éléments finis permet d'obtenir la carte d'erreurs dans le domaine étudié. A partir de cette carte, il est ensuite possible de raffiner le maillage en fixant un critère de raffinement. Celui-ci peut être basé sur l'erreur absolue, normalisée ou moyenne, et ce, en ayant la possibilité de restreindre le raffinement dans une ou des régions spécifiques du domaine. Le calcul éléments finis est ensuite effectué avec le nouveau maillage et la procédure est répétée jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint [Boloni 2009/II].

On note χ_{abs}^i l'erreur absolue γ_{ei} associée à un élément i du maillage :

$$\chi_{abs}^i = \gamma_{ei} \quad (93)$$

Deux grandeurs nécessaires pour l'application des différents critères de raffinement peuvent alors être définies. Celles-ci sont :

- l'erreur normalisée associée à chaque élément i , notée χ_{norm}^i , et calculée à partir de l'erreur maximale γ_{max} :

$$\chi_{norm}^i = \frac{\chi_{abs}^i}{\gamma_{max}} \cdot 100 \quad (94)$$

- l'erreur moyenne, notée χ_{moy} :

$$\chi_{moy} = \frac{\sum_{i=1}^N \chi_{abs}^i}{N} \quad (95)$$

où N est le nombre total d'éléments du maillage ou de la zone sélectionnée pour le raffinement.

En utilisant ces deux grandeurs, il est possible de déterminer des critères de raffinement différents. En première approche, le premier critère de raffinement (CR1) consiste, à partir de l'erreur normalisée χ_{norm}^i ou moyenne χ_{moy} , à raffiner les éléments possédant une erreur supérieure à un seuil d'erreur donné. Un critère plus élaboré (CR2) fixe la fraction (0 à 100%) du nombre d'éléments à la plus forte erreur qui seront raffinés. Enfin, un autre critère (CR3) fixe le seuil de raffinement en tant que fraction (0 à 100%) de l'écart entre les erreurs minimale et maximale.

La démarche de raffinement est illustrée sur la Figure 55.

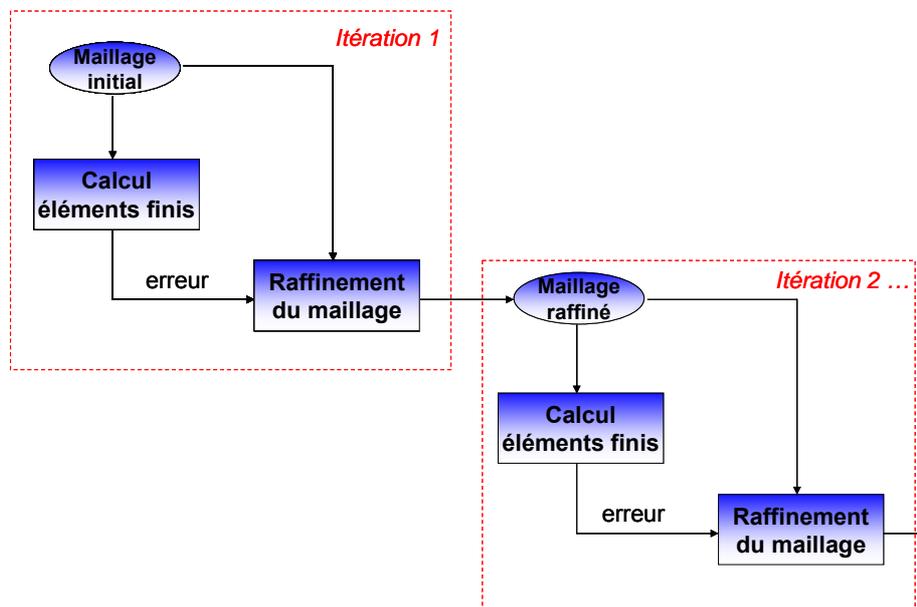


Figure 55. Schéma de principe du raffinement de maillage

L'outil de raffinement utilisé dans le cadre de ce travail est le logiciel HOMARD développé par EDF R&D, [HOMARD 2010]. Cet outil est capable de réaliser du raffinement ou du dé-raffinement de maillages (constitués de tétraèdres, hexaèdres, prismes ou pyramides) par découpage d'éléments ciblés. Les éléments marqués pour le découpage sont divisés, puis un processus de mise en conformité est effectué.

Plusieurs études ont été menées afin de déterminer le critère de raffinement optimal. Dans un premier temps, on considère l'estimateur d'erreur basé sur la discontinuité numérique du champ. Il s'avère que le critère de raffinement CR1, associé à l'erreur normalisée χ_{norm}^i , n'engendre pas d'amélioration notable de la solution en ce qui concerne la force électrostatique. Par contre, associé à l'erreur moyenne χ_{moy} , ce critère donne de bons résultats. Dans un second temps, en utilisant l'estimateur d'erreur basé sur la vérification des lois de comportement, la solution est améliorée de façon significative en utilisant le critère de raffinement CR1 associé à l'erreur normalisée.

En ce qui concerne les critères de raffinement CR2 et CR3, ceux-ci engendrent une croissance importante du nombre d'éléments sans toutefois améliorer de façon significative la qualité de la solution.

Dans la suite, les résultats issus des estimateurs basés sur la discontinuité du champ **D** et sur la vérification des lois de comportement, seront présentés.

3.2.3.1. Résultats de l'estimateur basé sur la discontinuité du champ **D**

Comme mentionné ci-dessus, en utilisant l'estimateur sur la discontinuité du champ **D**, le raffinement à l'aide d'une erreur moyenne, conduit à des bons résultats. Ceci n'est pas le cas d'une erreur normalisée. En effet, comme le montre le tableau XII, pour la position initiale, après 2 pas de raffinement, la valeur de la force n'évolue pas. Ceci s'explique par le nombre très faible d'éléments raffinés.

Pas de raffinement	Position initiale		Force électrostatique [10 ⁻⁸ N]
	Nombre de nœuds	Nombre d'éléments	
Initial	3401	19187	1,91
1	3752	21030	1,915
2	4353	24100	1,915

TABLEAU XII: Raffinement en utilisant un critère d'erreur relative

Le Tableau XIII, récapitule les dimensions des maillages du système, correspondant à trois positions de l'électrode mobile. Les tailles des maillages raffinés des autres positions, sont du même ordre de grandeur que pour ces premières positions illustrées au tableau XIII.

Pas de raffinement	Nombre d'éléments des maillages		
	Position initiale	Déplacement 1 µm	Déplacement 2 µm
Initial	21349	20644	20708
1	52298	52576	52007
2	64896	69126	65028
3	95054	100937	96484

TABLEAU XIII: Dimensions des maillages initiales et raffinés pour 3 positions différentes de l'électrode mobile

Les maillages initial (grossier) et raffiné (au 3^{ème} pas de raffinement) sont donnés, pour la position à mi-chemin, sur la Figure 56. Les éléments se situant dans les régions de forte erreur sont divisés, ce qui conduit à une *dégradation* du maillage dans les volumes des électrodes. En revanche, dans les régions d'air autour des électrodes (non représentée sur la Figure 56), la finesse du maillage est nettement améliorée, ce qui permet d'obtenir les résultats escomptés.

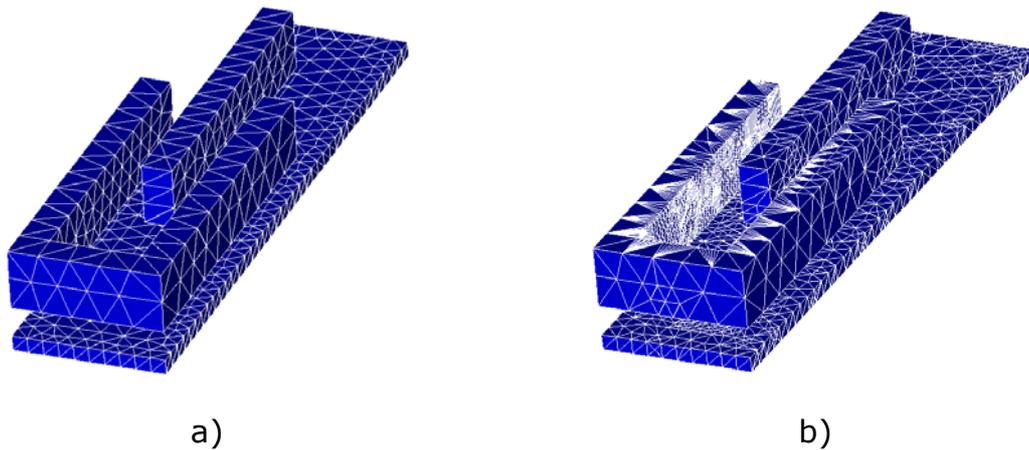


Figure 56. Aperçu des maillages initial (a) et raffiné (b) pour la position correspondante au déplacement de 5 µm de l'électrode mobile

Les résultats, en termes de force, obtenus pour les différents pas de raffinement, sont présentés sur la Figure 57.

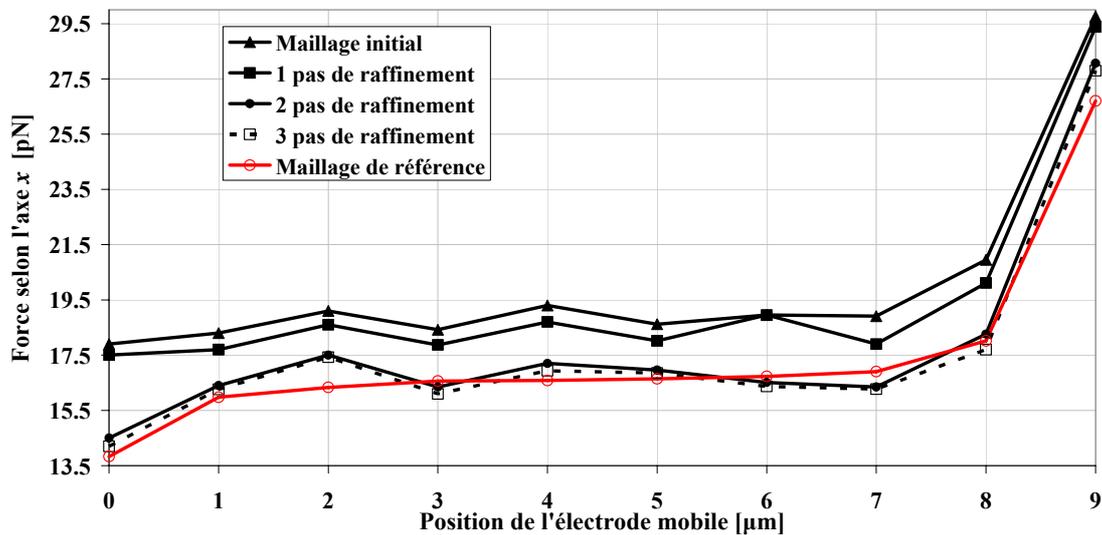


Figure 57. Comparaison des résultats issus du raffinement avec les résultats du maillage de référence pour la totalité des positions de l'électrode mobile

En faisant la comparaison avec les valeurs obtenues à partir du maillage de référence, on remarque que, dès le second pas, les résultats issus du raffinement se rapprochent fortement des valeurs de référence. Au dernier pas de raffinement, les forces obtenues ont une erreur moyenne de 3% par rapport à la référence. Pour

quantifier l'amélioration des résultats en utilisant la technique de raffinement du maillage, on montre l'erreur relative entre les résultats issus du raffinement et ceux issus du système de référence sur la Figure 58.

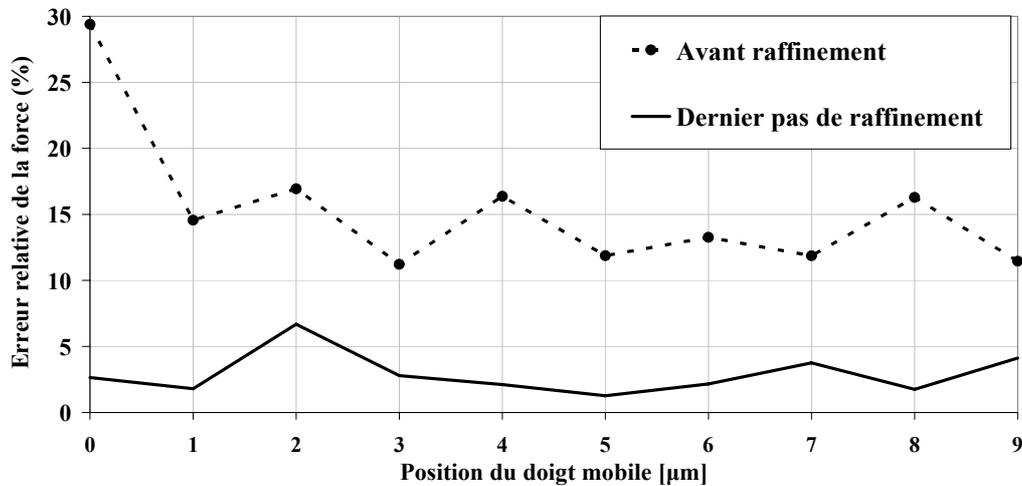


Figure 58. Evolution de l'erreur, par rapport à la référence, en fonction de la position pour les calculs issus des maillages initiaux et raffinés

On peut remarquer l'amélioration des résultats en termes de force, déjà au 3^{ème} pas de raffinement, ce qui correspond à des maillages de tailles d'environ 100000 éléments, un tiers du nombre d'éléments du maillage de référence.

3.2.3.2. Résultats de l'estimateur basé sur la vérification des lois de comportement

Dans la partie consacrée aux modèles de détermination de la tension de *pull-in* de ce chapitre, nous avons mentionné que les deux formulations en potentiel scalaire et vecteur, encadrent la solution exacte en ce qui concerne l'énergie. Le raffinement de maillage doit améliorer cet encadrement en rapprochant la valeur de l'énergie obtenue à partir de la formulation en potentiel scalaire de celle obtenue par la formulation en potentiel vecteur.

La symétrie du système nous a permis de considérer uniquement la moitié du dispositif à modéliser. Comme dans le cas de l'étude précédente, un maillage de référence a été construit à l'aide des ~230000 éléments tétraédriques. A partir de ce maillage, l'énergie électrostatique et la force électrostatique exercée entre l'électrode fixe et l'électrode mobile ont été calculées, et ce, dans les deux formulations complémentaires.

Pour mettre en œuvre le raffinement de maillage, un maillage grossier a été réalisé, comportant environ 11000 éléments tétraédriques. Ensuite, en appliquant l'estimateur d'erreur basé sur la vérification de la loi de comportement électrique et le critère de raffinement CR1 associé à l'erreur normalisée, le système a été raffiné. Le tableau XIV contient les dimensions du maillage raffiné.

Pas de raffinement	Nombre d'éléments des maillages
Initial	11213
1	15026
2	51582
3	107413

TABLEAU XIV: Dimensions des maillages initial et raffinés pour la position initiale de l'électrode

Une comparaison de l'énergie obtenue en utilisant le maillage de référence et l'énergie obtenue à partir de la technique de raffinement est présentée sur la Figure 59 (vue rapprochée).

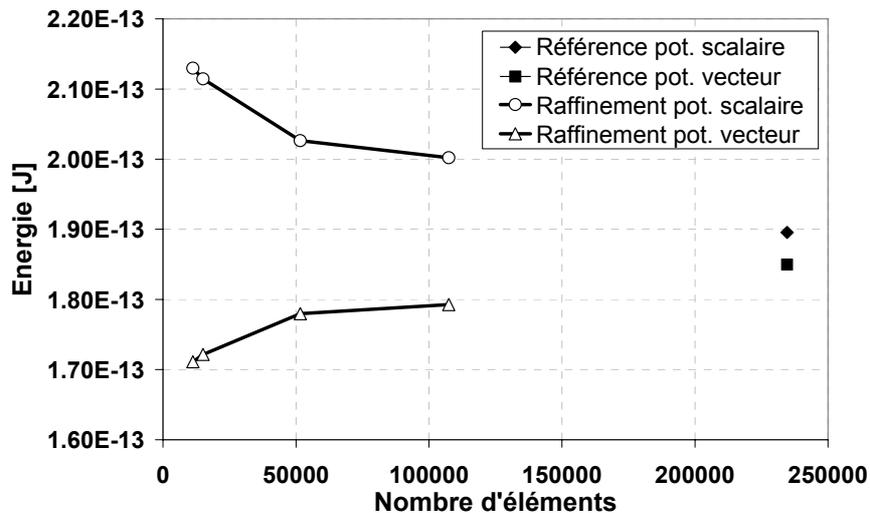


Figure 59. Evolution de l'énergie en fonction du raffinement

On observe un rapprochement notable des deux valeurs d'énergie obtenues à partir des calculs de raffinement dans les deux formulations complémentaires. En effet, l'écart entre les énergies issues du maillage de référence est de 3%, alors que pour le 3^{ème} pas de raffinement, cet écart est de 10%. En jugeant sur cet écart, on peut affirmer que le raffinement a amélioré la qualité de la solution en termes d'énergie, ayant en vu le nombre d'éléments du maillage raffiné, deux fois moins élevé que le nombre d'éléments du maillage de référence.

En ce qui concerne la force électrostatique (Figure 60) l'écart relatif entre les deux formulations après raffinement est plus faible que dans le cas de l'énergie (Figure 59). En effet, les écarts entre les derniers pas de raffinement et les références sont de 6% et 7% pour, respectivement, la formulation en potentiel scalaire et la formulation en potentiel vecteur.

Le raffinement de maillage en utilisant l'estimateur basé sur la vérification de la loi de comportement, en vue du calcul de la tension de *pull-in* présente des résultats satisfaisants. Néanmoins, il existe un écart entre les forces obtenues à partir du raffinement et à partir du maillage de référence. Une solution possible pour réduire cet écart serait de fixer un critère de raffinement incluant les éléments de forte erreur appartenant uniquement au contour de calcul de la force.

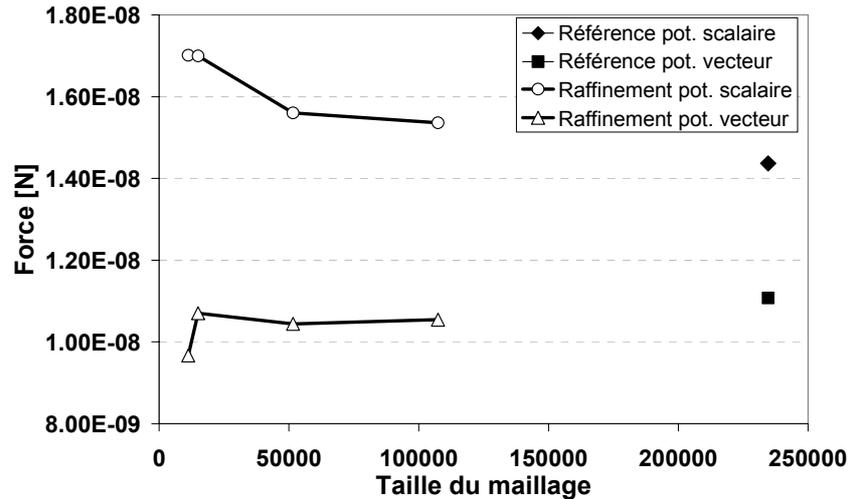


Figure 60. Evolution de la force électrostatique en fonction du raffinement

3.2.4. Synthèse

Nous avons mis en œuvre dans ces derniers paragraphes une technique d'amélioration de la qualité de la solution du calcul éléments finis appliquée au problème électrostatique. Le but a été d'améliorer les résultats en termes de forces électrostatiques, jouant un rôle important dans le calcul de la tension de collage électrostatique.

Deux estimateurs d'erreur ont été implémentés, l'un basé sur la discontinuité de la composante normale du champ \mathbf{D} et l'autre utilisant la vérification de la loi de comportement.

Une cellule élémentaire d'un actionneur à peignes inter-digités a été étudiée pour les différentes méthodes de raffinement. Les résultats issus d'un maillage fin du système ont été utilisés en tant que référence. Ensuite, le même système a été discrétisé avec un nombre réduit d'éléments et raffiné, en utilisant les deux estimateurs d'erreurs implémentés. Les résultats en termes de force électrostatique sont améliorés, dans le cas de l'estimateur basé sur la discontinuité du champ \mathbf{D} , obtenant un écart de 3% entre le système raffiné et la référence. Dans le cas de l'estimateur sur la vérification de la loi de comportement l'écart est légèrement plus élevé, de 6% dans le cas de la formulation en potentiel scalaire électrique et de 7% dans le cas de la formulation en potentiel vecteur électrique.

3.3. Conclusion

Dans ce chapitre, les modèles développés ont été appliqués à l'étude de dispositifs MEMS électrostatiques. Afin de quantifier leurs pertinence et précision, une structure test a été choisie, constituée d'une électrode déformable, soumise à un potentiel V , suspendue au-dessus d'une surface de potentiel zéro. La valeur de la tension de *pull-in* a été déterminée ensuite.

Le modèle analytique le plus simple, ne tenant pas compte des effets de déformation et de bords, a été utilisé comme modèle de référence pour permettre de quantifier l'influence de ces effets. Nous avons alors mis en œuvre les différents modèles couplés mécanique analytique et EF 2D électrostatique, dans des configurations transversale et longitudinale pour étudier respectivement l'influence des effets de bord et de la déformation de la poutre. L'influence de la déformation s'avère plus importante que celle des effets de bord. Le modèle couplé EF 3D mécanique-électrostatique permet de tenir compte des deux effets mentionnés ci-dessus, à la fois ce qui le rend plus précis, notamment dans le cas de poutres étroites où les effets de bords sont importants.

La deuxième partie du chapitre a été consacrée à l'amélioration de la qualité de la solution du calcul électrostatique. Sachant que l'évaluation de la tension de *pull-in*, dans notre approche, dépend directement de la précision du calcul de la force électrostatique, améliorer le calcul de cette dernière est très important pour avoir une modélisation précise de MEMS.

Deux estimateurs d'erreurs ont été introduits. Le premier est basé sur la discontinuité de la composante normale du champ \mathbf{D} ou bien de la composante tangentielle du champ \mathbf{E} , selon la formulation usitée, au niveau de la surface commune à deux éléments du maillage éléments finis. Le deuxième considère la vérification de la loi de comportement électrique, dans les deux formulations complémentaires en potentiels scalaire et vecteur électriques.

En utilisant les estimateurs introduits, un cas test constitué d'une cellule élémentaire d'un dispositif à peignes inter-digités a été étudié. La comparaison entre les résultats issus d'un maillage fin de référence et un autre maillage raffiné, en utilisant les estimateurs définis auparavant, montre que la solution, en termes d'énergie et force électrostatique, est nettement améliorée.

Les différents modèles utilisés se basent sur des valeurs exactes tant de la géométrie des dispositifs étudiés que de celles des propriétés physiques. Or, de par les procédés et contraintes de fabrication, ces grandeurs n'ont pas des valeurs fixes. Le chapitre suivant s'attellera à étudier l'influence des incertitudes de différents paramètres, (géométrie de la poutre et propriétés matériaux) sur le comportement des MEMS.

Références :

- [ASTER] www.code-aster.org
- [Boloni 2008/II] F. Boloni, "Modélisation de MEMS par Elements Finis 3D", JCGE 2009, Lyon, France, Décembre, 2008.
- [Boloni 2008] F. Boloni, G. Krebs, T. Henneron, A. Tounzi, "3D Study of an Electrostatic MEMS device taking account of the active part displacement", CEFC Athens, Greece, May, 2008.
- [Boloni 2009/I] F. Boloni, A. Benabou, A. Tounzi, "Comparison of Pull-In Voltage in MEMS using 3D FEM and Analytical Approach", EMF 09, Mondovi, Italy, 2009.
- [Boloni 2009/II] F. Boloni, A. Benabou, A. Tounzi, "Force Computation in a MEMS Structure Using Adaptive Mesh Refinement", COMPUMAG 2009, Florianopolis, Brésil, November, 2009
- [Boloni 2010] F. Boloni, A. Benabou and A. Tounzi, "Comparison of pull-in voltage in MEMS using 3D FEM and analytical approach", Int. J. for Comp. and Math. in El. Eng. (COMPEL), vol. 29, no. 6, 2010
- [Boutaayamou 2008] M. Boutaayamou, "Méthode de perturbation pour la modélisation par éléments finis des systèmes électrostatiques en mouvement - application aux MEMS électrostatiques", PhD thesis, Université de Liège, Novembre, 2008
- [Degani 1998] O. Degani, E. Socher, A. Lipson, T. Leitner, D.J. Setter, S. Kaldor and Y. Nemirovsky, "Pull-in Study of an Electrostatic Torsion Microactuator", J. of Micromech. Syst., vol. 7, no. 4, December, 1998
- [FEMM] <http://www.femm.info/wiki/HomePage>
- [Gupta 1997] Raj K. Gupta, "Electrostatic pull-in test structure design for *in-situ* mechanical property measurements of MicroElectroMechanical Systems (MEMS)", PhD thesis, MIT, 1997.
- [HOMARD 2010] www.code-aster.org/outils/homard/
- [Li 1994] Chengjun Li, Z. Ren and A. Razeq, "An approach to adaptive mesh refinement for three-dimensional Eddy-Current computations", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30, No. 1, January, 1994.
- [Marmin 1998] F. Marmin, "Contribution à l'étude des erreurs numériques due à la méthode des éléments finis: application aux problèmes statiques d'électromagnétisme 2D", Thèse de doctorat, Université

de Lille, Mai 1998.

- [Osterberg 1997] P. M. Osterberg, S. D. Senturia, "M-TEST: A test chip for MEMS material property measurements using electrostatically actuated test structures", *J. of Microelectromech. Syst.*, vol. 6, no. 2, pp. 107-118, Jun. 1997.
- [Pamidighantam 2002] S. Pamidighantam, R. Puers, K. Baert and H.A.C. Tilmans, Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions", *J. of Micromech. And Microeng.*, vol. 12, no. 4, pp. 458-464, July, 2002.
- [Roark 1989] R.J. Roark and W.C. Young, « Roark's formulas for stress and strain », McGraw-Hill, New York, 1989, (Tableau 11).
- [Shi 2005] X. Shi, "Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis, appliqué à la modélisation des machines électriques", Thèse de doctorat, Université de Lille, Décembre 2005.

4

Modélisation stochastique de MEMS

Les incertitudes, liées aux grandeurs géométriques et aux caractéristiques physiques des MEMS, sont essentiellement introduites lors du processus de fabrication de ces derniers. Nous allons donc, dans un premier temps, présenter les procédés de fabrication des MEMS les plus usités.

4.1. Technologies de fabrication

Au milieu des années 70, le caractère anisotrope de la gravure du silicium a été mis en évidence. Cette découverte a rendu possible l'enlèvement sélectif des couches de matériaux, de formes tridimensionnelles. Les techniques d'usinage développées suite à cette découverte ont permis de réaliser des trous, des cavités ou des membranes et des poutres, à l'aide de procédés chimiques, s'intégrant parfaitement dans les procédés de fabrication des circuits intégrés. La simplicité de la technique de gravure chimique anisotrope permet la fabrication de capteurs et d'actionneurs à un très faible coût. Par ailleurs, les propriétés mécaniques du silicium sont beaucoup mieux caractérisées, ce qui a permis de donner une dimension physique supplémentaire (mécanique) aux dispositifs purement électriques.

Nous pouvons distinguer deux grandes catégories de structures à actionnement électrostatique : les structures réalisées par micro-usinage de surface et celles obtenues par micro-usinage de volume. Ces deux procédés de micro-usinage sont présentés ci-dessous.

4.1.1. Le micro usinage de surface

Cette technique est consacrée à l'usinage des couches minces déposées sur des substrats fabriqués classiquement en silicium, polysilicium, oxyde de silicium ou nitrures. La plupart des micro-actionneurs possèdent une partie mobile, qui nécessite d'avoir au moins un degré de liberté. Pour réaliser les structures mobiles ou déformables, des couches sacrificielles sont réalisées à l'aide de matériaux comme l'oxyde de silicium ou certains polymères. Ces couches sont d'abord déposées entre les différentes couches minces afin de servir de support à l'élaboration de la structure. Elles sont ensuite dissoutes à l'aide d'un solvant, à la fin de la fabrication comme décrit sur la Figure 61, laissant uniquement les couches structurales.



Figure 61. Micro-usinage de surface [Delauche 2003]

Grâce à cette technique, il devient alors possible d'avoir des mouvements relatifs d'une couche par rapport à l'autre. L'usinage de surface est mentionné dans les

travaux de Nathanson *et al.* [Nathanson 1967]. Ces travaux sont relatifs à la réalisation du *Resonant Gate Transistor* (RGT). C'est dans ces mêmes travaux que l'on voit, pour la première fois, l'utilisation d'une couche sacrificielle pour suspendre un bras de levier. Ce transistor est souvent mentionné comme étant le tout premier MEMS.

On peut citer quelques autres technologies utilisées actuellement et basées également sur le micro-usinage de surface : MUMPs [MUMP] de Cronos (aujourd'hui Memscap), SUMMIT de Sandia [SANDIA 2010], iMEMS d'Analog Devices [Analog 2010], et celle de Texas Instrument pour la fabrication de micro-miroirs [TI 2010].

Une autre technologie se distingue de par sa capacité à réaliser des structures avec une épaisseur élevée, allant jusqu'à plusieurs centaines de micromètres (Figure 62). Il s'agit de la technologie LIGA (de l'allemand : *Lithographie Galvanoformung Abformung*). Cette technique permet également de dupliquer une forme quelconque à partir d'un moule fait en matériaux plastiques.

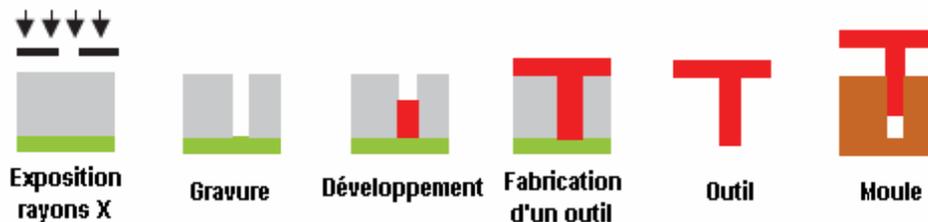


Figure 62. La technologie de fabrication LIGA [Delauche 2003]

Il est parfois nécessaire de réaliser des structures plus complexes, nécessitant la liaison entre deux systèmes fabriqués sur deux wafers différents. Cette opération est réalisable à l'aide de la technique appelée « wafer bonding ». Le « wafer bonding » est une technique de fabrication de la technologie **Silicon On Insulator** (SOI). Le SOI utilise un substrat silicium-isolateur-silicium à la place des substrats de silicium utilisés dans la fabrication des semi-conducteurs, afin de réduire les capacités parasites et améliorer les performances des dispositifs. Dans le procédé de « wafer-bonding », la couche d'isolateur est formée en collant du silicium oxydé sur un substrat, qui est postérieurement enlevé.

4.1.2. Le micro usinage de volume

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'usinage de surface est basé sur la gravure de couches minces. L'usinage de volume, connu également sous le nom de « *bulk micromachining* », utilise la gravure du substrat de silicium [Madou 2002]. Pour réaliser les structures mobiles d'un actionneur dans le silicium massif du wafer, on utilise cette fois-ci des gravures tridimensionnelles sèches ou humides. Dans le cas de gravures sèches, on parle de techniques de gravure plasma qui consistent en un bombardement par des ions qui provoquent une réaction chimique. Cette technique est connue sous le nom de *Reactive Ion Etching*. Dans le cas de gravures humides, la gravure s'effectue par une attaque chimique en solution aqueuse.

On distingue deux gros avantages de ce procédé pour la fabrication de microsystèmes :

- l'utilisation de produits spécifiques tels que l'hydroxyde de potassium (KOH) ou le tétraméthyl ammonium hydroxyde (TMAH), qui permet de graver de manière anisotrope le silicium. On obtient ainsi la forme finale de la topologie du substrat (Figure 63). La forme finale du système est donnée par les plans cristallographiques du silicium. L'avantage de la gravure sèche est qu'elle est compatible avec les technologies de la microélectronique. Ceci permet aux parties suspendues de renfermer des lignes de différents conducteurs.

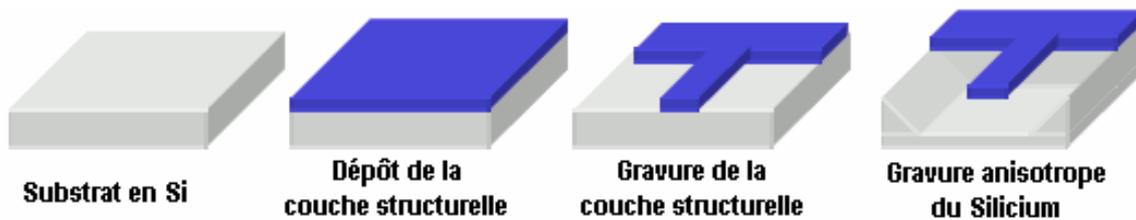


Figure 63. Le micro-usinage de volume [Delauche 2003]

- l'utilisation des couches minces en nitrures de silicium ou de l'oxyde de nitrures de silicium, permet de créer des masques dans l'étape de gravure. Ceci aide à réaliser des structures en suspension, comme la deuxième armature d'un dispositif à plaques parallèles qui se situe au-dessus d'un autre substrat.

4.2. Problématique / Contexte

Nous avons introduit dans les chapitres précédents les différents modèles de *pull-in* destinés à décrire le comportement de micro-dispositifs à actionnement électrostatique. Nous avons aussi mis en évidence la forte sensibilité de la tension de *pull-in* à certains paramètres, tels que les caractéristiques géométriques ou les propriétés des matériaux (module d'Young).

Dans l'approche classique de modélisation déterministe, les paramètres d'entrée d'un modèle, qu'il soit analytique ou numérique, sont considérés parfaitement connus. Or, si les procédés de fabrication du monde macroscopique sont relativement bien maîtrisés, ce n'est pas toujours le cas des procédés de fabrication à l'échelle du micromètre. En effet, il s'avère que de fortes variations des paramètres géométriques et de matériaux peuvent être observées suite aux processus de fabrication [Allen *et al* 2008, Sharpe *et al* 2001, Gupta 1997]. De plus, les MEMS sont soumis, pendant leur fonctionnement, à de forts gradients d'efforts, de température, d'humidité, etc. Ceci induit une variation des paramètres dans le temps qu'il est très difficile de quantifier, voir même de caractériser. Nous sommes alors en présence de données incertaines qu'il est nécessaire d'intégrer dans les modèles décrivant le fonctionnement de ces systèmes.

Pour cela, il est possible d'avoir recours à une approche de modélisation stochastique en considérant les paramètres d'entrée comme étant des variables aléatoires. Les lois de variation des paramètres d'entrée peuvent alors être décrites sous

forme probabiliste et un schéma de propagation de ces incertitudes à travers le modèle déterministe peut ensuite être défini. La sortie du modèle sera également une grandeur aléatoire à laquelle des caractéristiques statistiques pourront être associées. La propagation des incertitudes dans un modèle éléments finis peut être réalisée de façon *intrusive* ou *non intrusive*. Dans le premier cas (méthode de type Galerkin par exemple), il est nécessaire de réaliser des implémentations spécifiques à chaque type de problème traité [Agarwal *et al* 2009/1, Gaignaire 2008]. Dans le second cas (méthodes de projection et de régression par exemple), il n'est pas nécessaire d'effectuer une implémentation spécifique, seul un certain nombre de calculs déterministes est requis [Berveiller 2002, Xiu 2007]. Dans la suite, seules les méthodes *non intrusives* appliquées à la modélisation de MEMS à actionnement électrostatique seront considérées.

4.3. Etat de l'art de la modélisation stochastique de MEMS

La modélisation stochastique des MEMS connaît, depuis quelques années, un intérêt tout particulier. En effet, plusieurs travaux ont été effectués pour la prise en compte des incertitudes au sein de MEMS.

Ainsi, dans le cadre d'une modélisation en vue de commandes non-linéaires d'un dispositif MEMS à plaques parallèles, la méthode des intervalles a été employée avec succès [Zhu *et al* 2007]. Cette dernière permet d'établir des intervalles dans lesquels les MEMS fonctionneraient selon des exigences précises, ce qui en fait un outil intéressant dans la phase de conception d'un micro dispositif. Toutefois, elle ne donne aucune information sur la distribution des paramètres considérés incertains et ne permet donc pas de faire des analyses plus approfondies quant au comportement de ces dispositifs. Shanmugavalli *et al* [Shanmugavalli *et al* 2006] ont étudié la tension de *pull-in* d'une micro-poutre fixée à ses deux extrémités, en faisant varier les propriétés géométriques ainsi que celles des matériaux. Ils ont fait varier, chacun à son tour, les paramètres géométriques de +5% par rapport à leurs valeurs nominales et les propriétés des matériaux de -5%. Ils ont alors observé que les paramètres les plus influents sur la tension de *pull-in*, sont la longueur de la poutre (24% de la valeur nominale) et la distance inter-électrodes (14% de la valeur nominale). Par ailleurs en faisant varier tous les paramètres simultanément de $\pm 5\%$, la valeur de V_{PI} présente une dispersion de 52% autour de sa valeur nominale. Comme évoqué précédemment, l'analyse d'intervalles permet d'avoir une information qualitative sur l'influence des différents paramètres, mais souffre du manque de structure probabiliste et n'offre donc pas de renseignements quant à la forme de la dispersion des données de sortie.

Les paramètres de l'actionnement électromécanique ne sont pas les seuls à faire l'objet d'une modélisation stochastique des dispositifs MEMS. En effet, on trouve des travaux qui visent aussi à prendre en compte les incertitudes sur les erreurs des capteurs MEMS (accéléromètres), à l'aide de méthodes de régression [Park *et al* 2006]. D'autres travaux traitent de la prise en compte des incertitudes au niveau des jeux introduits par les procédés de fabrication dans les articulations, des supports semi-rigides, des

conditions de chargement non-idéales ou des asymétries de la géométrie. L'approche utilisée est basée sur une analyse de sensibilité à l'aide de développements en séries de Taylor d'un modèle analytique [Wittwer 2005]. Les développements en série de Taylor sont également utilisés dans le cadre des approches de prise en compte des incertitudes à l'aide de méthodes de perturbations [Juillard *et al* 2004/1, Juillard *et al* 2004/2]. Ces dernières permettent d'obtenir la densité de probabilité de la sortie d'un modèle, à partir des simulations déterministes qui concernent le système perturbé ainsi que sa dérivée par rapport au paramètre incertain. Dans la référence [Juillard *et al* 2004/1], la méthode de perturbation décrite est appliquée au calcul de la densité de probabilité de la distance de *pull-in* (g_{PI}) d'une micro-poutre.

On trouve également des travaux portant sur l'amélioration du rendement et des performances des dispositifs MEMS, dans la phase de conception, à l'aide de la méthode *worst-case scenario*, méthode utilisée fréquemment dans l'analyse des circuits en microélectronique [Vudathu *et al* 2006]. Ceci implique, dans un premier temps, la linéarisation de la performance d'un micro dispositif autour de son point de fonctionnement. Dans un deuxième temps, les spécifications de fonctionnement (contraintes, plage de fonctionnement, ...) sont définies et les paramètres incertains variés selon une loi de distribution donnée. Les résultats obtenus à partir de la variation des paramètres permettent la construction d'une carte de performances. A partir des spécifications de fonctionnement prédéfinies, les limites correspondantes peuvent être calculées et représentées sur la carte de performance. La distance de la configuration la plus défavorable (*worst-case distance*) est tout simplement la distance la plus courte entre les limites de spécification et le point de fonctionnement nominal (points correspondants aux paramètres nominaux, i.e. à variance nulle). Selon la loi de distribution utilisée, différentes équations peuvent être usitées pour relier la distance de la configuration la plus défavorable au rendement du dispositif. Par conséquent, le rendement peut être amélioré en augmentant la distance de configuration la plus défavorable.

On peut noter aussi l'utilisation de méthodes basées sur les réseaux de neurones pour la prédiction de la défaillance et l'amélioration des performances de MEMS [Ilumoka *et al* 2007].

Dans la suite, la première partie de l'état de l'art sur la modélisation stochastique de MEMS aborde les différentes approches et techniques stochastiques, ainsi que les propriétés ou les paramètres considérés incertains. Ensuite, les deux approches que nous allons utiliser, omises dans les paragraphes précédents, seront abordés ; les techniques d'échantillonnage et la décomposition spectrale en chaos polynomial.

4.3.1. Méthodes d'échantillonnage

Les méthodes statistiques basées sur les techniques d'échantillonnage (Monte Carlo, Quasi Monte Carlo, hypercubes latins, etc) connaissent une grande popularité grâce à leur facilité d'implémentation et d'exploitation des données de sortie (loi de distribution, moments statistiques, etc). Ainsi la méthode de Monte Carlo (MC) a été

utilisée, par exemple, pour l'optimisation de la forme d'onde de la tension d'alimentation d'un MEMS RF, dans le but de minimiser la vitesse d'impact de la partie mobile du dispositif [Allen *et al* 2008]. Par ailleurs, l'effet d'une distribution aléatoire des paramètres géométriques de MEMS basse fréquence a été étudié par Schenato *et al* [Schenato *et al* 2001] à l'aide de simulations MC dans le but d'évaluer les performances de ce type de micro-actionneurs.

On trouve également des travaux portant sur l'influence des incertitudes géométriques sur la tension de *pull-in* de MEMS électrostatiques, utilisant la méthode Monte Carlo dans le but d'optimiser les paramètres de conception [Voicu *et al* 2006]. Cette étude montre que, malgré une loi de distribution des variables aléatoires d'entrée supposée normale, la distribution de la variable aléatoire de sortie est une loi différente, ce qui est attendu si le modèle utilisé n'est pas linéaire.

Un autre exemple d'utilisation de la méthode Monte-Carlo est dans le cadre d'une étude quantitative. Kong *et al* [Kong *et al* 2004], ont analysé l'influence des variations des paramètres géométriques, ainsi que de la distance inter-électrodes, sur la performance d'un actionneur électrostatique à base de matériaux céramiques.

La méthode de Monte Carlo est souvent employée dans différentes études de sensibilité. Une telle étude a pour objectif d'identifier les paramètres les plus influents d'un modèle. Concrètement, dans une étude de sensibilité d'un dispositif MEMS, les valeurs des paramètres géométriques ou des propriétés des matériaux sont perturbées légèrement et leurs influences sur les performances sont quantifiées [Vudathu *et al* 2006].

Les méthodes d'échantillonnage sont très robustes et faciles à mettre en œuvre, mais présentent une vitesse de convergence relativement faible ce qui les pénalise fortement même si on utilise des techniques de réduction de variance. En effet, de par leur nature statistique, leur précision augmente avec l'augmentation de la taille des échantillons. Par conséquent, afin d'avoir une bonne précision du calcul stochastique, un grand nombre d'échantillons est nécessaire et les temps de calcul seront d'autant plus importants que la taille des échantillons est importante.

De plus, il a été montré au chapitre précédent que, pour avoir une caractérisation précise du phénomène de *pull-in*, il peut être nécessaire d'avoir recours à des modèles éléments finis, lesquels présentent une meilleure précision mais deviennent coûteux en temps de calcul, notamment lorsqu'il s'agit de la résolution de problèmes couplés. Dans ce dernier cas, l'utilisation des méthodes d'échantillonnage de type Monte Carlo avec des modèles éléments finis devient peu intéressante si l'on souhaite obtenir des résultats alliant précision et temps de calcul convenable.

4.3.2. Méthode du chaos polynomial

Afin de répondre aux besoins exprimés dans le paragraphe précédent, on peut avoir recours à des méthodes spectrales. Ce type de méthode s'appuie sur une représentation de la réponse stochastique du dispositif sur une base appelée chaos polynomial [Ghanem 1991]. La méthode consiste d'abord en une décomposition spectrale du champ aléatoire d'entrée. Ensuite, il est possible d'obtenir le

développement de la réponse dans la base du chaos polynomial. La propagation d'incertitude à travers le modèle peut être décomposée en trois étapes majeures [Gaignaire 2008] :

- a) Dans un premier temps on construit une base orthogonale de polynômes dans laquelle on exprime les variables aléatoires d'entrée décomposées sous forme de séries.
- b) La deuxième étape consiste à propager l'incertitude au sein du modèle.
- c) Enfin, on recherche la solution sous la forme décomposée dans la base des variables de sortie. De manière générale, cette base est construite à partir du produit de l'espace aléatoire et de l'espace du domaine d'étude lié au problème traité. Dans notre cas, la base de variables de sortie sera constituée uniquement du domaine d'étude.

Deux approches peuvent être distinguées dans le cadre de la méthode du chaos polynomial.

La première, dite *intrusive*, ou de type Galerkin, est à la base des éléments finis stochastiques spectraux (Spectral Stochastic Finite Element Method). Elle connaît déjà un grand succès dans le domaine de la mécanique, dans des applications d'élasticité linéaire [Sudret 2004, Ghanem 1999, Ghanem 1996, Ghanem 1991], de dynamique structurelle [Ghanem 2002], de conduction thermique [Ghanem 1999] ou de diffusion [Xiu 2002/II]. Dans le domaine des MEMS nous trouvons son application à la modélisation des phénomènes couplés thermo-élastiques [Lepage 2006], ainsi qu'à la modélisation de phénomènes électrostatiques [Agarwal *et al* 2007]. Mais, comme mentionné précédemment, l'approche *intrusive* nécessite une implémentation spécifique au type de problème étudié et donc des modifications importantes des codes de calcul déterministes. De plus, en l'état actuel, pour un très grand nombre de variables aléatoires d'entrée, la taille du système à résoudre est très élevée.

La deuxième approche, dite *non-intrusive*, considère les modèles comme étant des « boîtes noires » et le modèle stochastique vient s'ajouter comme une surcouche au modèle déterministe. En effet, les champs aléatoires d'entrée étant toujours décomposés dans la base du chaos polynomial, un nombre fini de calculs par éléments finis déterministes est réalisé et la sortie, elle aussi décomposée dans une base de chaos polynomial, est obtenue à partir d'un post-traitement adéquat. Plus spécifiquement, une méthode utilisée pour la propagation des incertitudes dans l'approche *non-intrusive* est la méthode de projection des solutions stochastiques dans un espace de dimension finie défini par une base de polynômes orthogonaux. Cette méthode consiste à réaliser une minimisation au sens de la variance [Gaignaire 2008] et sera détaillée dans la suite de ce chapitre. La méthode de collocation est quant à elle basée sur l'approximation de la solution stochastique dans le domaine aléatoire multidimensionnel, par une interpolation basée sur la technique de grilles creuses (algorithme de Smolyak) [Agarwal *et al* 2009/1]. Il existe aussi des méthodes de type surface de réponse où l'on cherche un plan d'expérience minimisant l'espérance.

Le Tableau XV donne un récapitulatif des différentes techniques de modélisation stochastiques appliquées aux MEMS rencontrées dans la bibliographie. Le tableau est divisé en trois parties distinguant un classement selon la nature de

l'incertitude d'entrée, puis selon le type du modèle déterministe utilisé et, enfin, en fonction du phénomène pris en compte dans la modélisation.

La suite du chapitre sera structurée en deux parties. Une première partie sera consacrée à la présentation des approches stochastiques non intrusives considérées dans ces travaux, à savoir la méthode d'échantillonnage basée sur des simulations Monte Carlo (MC) et l'approche basée sur la décomposition en chaos polynomial.

Dans une seconde partie, les simulations seront appliquées, dans un premier temps, pour une étude de sensibilité des différents paramètres pouvant être considérés comme incertains dans les dispositifs MEMS. Puis, les simulations MC du modèle couplé éléments finis électrostatique – analytique mécanique seront utilisées en tant que référence pour la comparaison et la validation des calculs dans l'approche du chaos polynomial.

		Etude d'intervalles	Auto-régression	Perturbation Séries Taylor	Réseaux neuronaux	Pire-cas	Monte Carlo	Chaos polynômiaux
Paramètre incertain	Géométrie	Shanmugavalli 2006		Wittwer 2005	Illumoka 2007	Vudathu 2006	Vudathu 2006 Allen 2008 Schenato 2001 Voicu 2006 Kong 2004	Agarwal 2009/1 Agarwal 2007
	Matériau				Illumoka 2007		Allen 2008 Voicu 2006	Agarwal 2009/1 Agarwal 2007
	Autre	Zhu 2007	Park 2006	Juillard 2004				
Type de modèle déterministe	Analytique	Shanmugavalli 2006 Zhu 2007	Park 2006	Wittwer 2005 Juillard 2004	Illumoka 2007		Allen 2008 Schenato 2001 Voicu 2006	
	Eléments finis			Wittwer 2005			Kong 2004	Agarwal 2009/1
	Autre					Vudathu 2006		Agarwal 2009/1 Agarwal 2007
Phénomène modélisé	Electro mécanique	Shanmugavalli 2006 Zhu 2007		Juillard 2004		Vudathu 2006	Allen 2008 Voicu 2006 Kong 2004	Agarwal 2009/1
	Electro thermique			Wittwer 2005				
	Autre		Park 2006		Illumoka 2007		Schenato 2001	Agarwal 2007

TABLEAU XV: Tableau récapitulatif de l'état de l'art de la modélisation stochastique non intrusive de MEMS

4.4. Cadre théorique et méthodologie de modélisation stochastique

4.4.1. Méthode de Monte-Carlo

Dans ce paragraphe, les méthodes stochastiques non intrusives de type échantillonnage seront abordées. Ces méthodes possèdent l'avantage de ne pas nécessiter une modification des modèles déterministes déjà existants. Par ailleurs, on appliquera les notions de statistiques introduites dans l'Annexe B pour le calcul des différents moments à partir de la méthode d'échantillonnage Monte-Carlo. Cette dernière est basée sur les statistiques paramétriques et, afin de calculer toutes les grandeurs probabilistes utiles pour la présente étude, nécessite un grand nombre de réalisations du modèle déterministe. De plus, chaque réalisation sera supposée indépendante.

On considère donc un modèle déterministe, qu'il soit analytique ou de type éléments finis, décrit par $Y=\mathbf{M}(X)$, où X et Y représentent, respectivement, les entrées et les sorties du modèle. En générant un échantillon N de réalisations indépendantes des variables d'entrée, à l'aide du modèle \mathbf{M} on obtient un échantillon de longueur N de la variable de sortie $(^jY)_{1 \leq j \leq N}$. A partir de ces réalisations, on peut définir un estimateur de la valeur moyenne de la variable aléatoire Y , comme étant :

$$\mu(Y) = E[Y] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N {}^jY \quad (96)$$

où jY correspond à la $j^{\text{ème}}$ réalisation de Y .

La variance $Var(Y)$, ou le moment d'ordre 2, et l'écart type σ_Y se définissent comme suit:

$$Var(Y) = E\left[\left(Y - E[Y]\right)^2\right] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N ({}^jY - \mu(Y))^2 = \sigma_Y^2 \quad (97)$$

On peut énoncer, à partir de la loi des grands nombres, que plus la taille de l'échantillon d'entrée est élevée (N tend vers l'infini), et plus $\mu(Y)$ s'approchera de la valeur de la moyenne de la sortie Y .

De manière générale, le moment d'ordre k est estimé par la relation suivante,

$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N ({}^jY - \mu(Y))^k \quad (98)$$

Le *skewness* (γ_1) est calculé à partir du moment d'ordre 3. Il correspond à un moment standardisé mesurant l'asymétrie de la densité de probabilité d'une variable aléatoire,

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_Y^3} \quad (99)$$

L'exemple d'une loi uniforme avec un skewness négatif et un skewness positif est illustré sur la Figure 64.

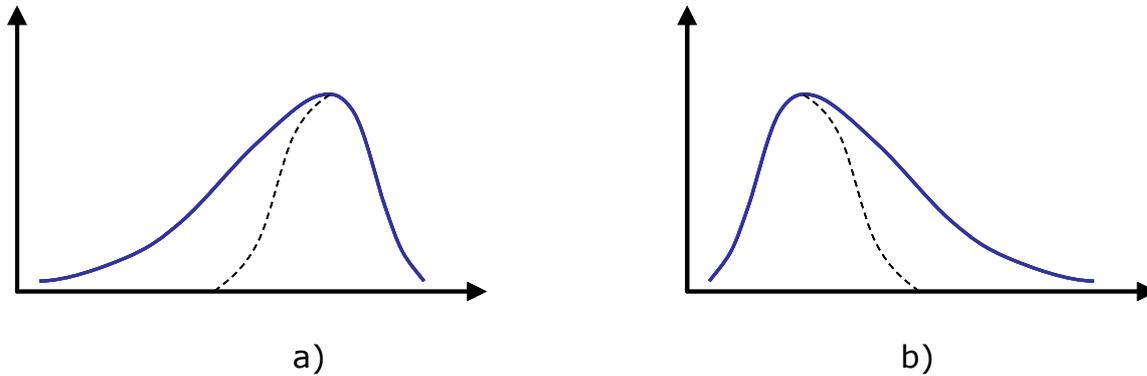


Figure 64. Asymétrie (skewness) d'une loi uniforme : a) Skewness négatif b) Skewness positif

Le kurtosis (γ_2) représente une mesure de l'aplatissement ou, à l'inverse, la *pointicité* de la distribution d'une variable aléatoire. Il est exprimé à partir du moment d'ordre 4 et de l'écart type :

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_Y^4} \quad (100)$$

La Figure 65 présente les différentes étapes d'une simulation Monte Carlo.

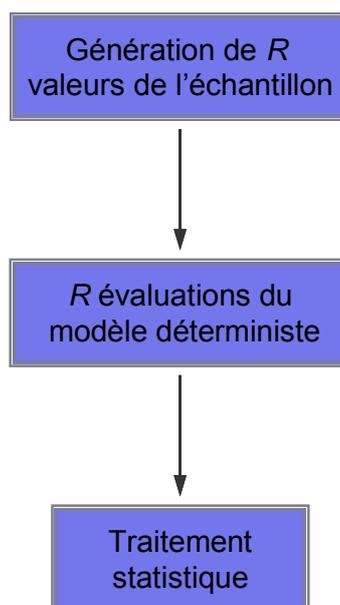


Figure 65. Etapes d'une approche de type Monte-Carlo

Les données issues du calcul Monte Carlo peuvent être directement exploitées. Le traitement statistique consiste alors à calculer les différentes grandeurs d'intérêt comme la moyenne empirique, la probabilité d'être au-dessous ou au-dessus d'une valeur seuil et d'autres paramètres de dispersion, comme la médiane, l'aplatissement, etc.

Les méthodes d'échantillonnage s'avèrent très intéressantes, tant que les modèles déterministes sur lesquels elles sont appliquées ne sont pas coûteux en temps de calcul. Ceci est dû au fait que la précision de ce type de méthode augmente avec la taille de l'échantillon. Lorsque l'on est amené à utiliser des modèles plus complexes (par exemple, des modèles éléments finis) qui sont plus *lourds* numériquement, il n'est plus envisageable de réaliser un nombre élevé de calculs déterministes. En revanche, les méthodes basées sur la décomposition en chaos polynomial présentent l'avantage de ne nécessiter qu'un nombre réduit de calculs déterministes, et ce, grâce au choix judicieux de points de calcul prédéterminés, tout en assurant une précision suffisante.

4.4.2. Méthode de décomposition en chaos polynomial

Dans l'approche basée sur le chaos polynomial, on discrétise les entrées, ainsi que les sorties du modèle stochastique, à l'aide de polynômes orthogonaux. Les polynômes orthogonaux engendrent un espace appelé chaos polynomial. La théorie qui se base sur l'utilisation de tels polynômes est connue sur le nom de chaos généralisé [Xiu 2002/I].

Plus précisément, la méthode non intrusive basée sur le chaos polynomial se décompose en trois étapes:

1. **Prétraitement.** Cette étape consiste à identifier des paramètres incertains et à les représenter en tant que variables aléatoires à l'aide d'une décomposition spectrale dans la base des polynômes chaos.

2. **Calculs déterministes.** Génération des points d'interpolation des polynômes orthogonaux. Résolution du problème déterministe pour chaque point d'interpolation. Effectuer l'interpolation et calculer les coefficients de sortie.

3. **Traitement statistique.** Calcul de la moyenne, de l'écart type et des moments d'ordres plus élevés.

Avant de présenter le détail de chacune des étapes, nous donnons dans la suite quelques définitions et notions concernant les polynômes orthogonaux.

Les polynômes orthogonaux

On appelle une fonction poids $g(x)$, une fonction positive définie sur l'intervalle $[a, b]$ par,

$$\int_a^b g(x)dx > 0 \quad (101)$$

On définit le produit scalaire de deux fonctions u et v sur l'intervalle $[a, b]$,

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)g(x)dx > 0 \quad (102)$$

Deux polynômes p_n et p_m sont considérés orthogonaux pour le produit scalaire, si leur produit scalaire est nul,

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)g(x)dx = 0 \quad \text{avec } m \neq n \quad (103)$$

Le polynôme p_n est orthogonal normalisé s'il satisfait également,

$$\langle p_n, p_n \rangle = \int_a^b p_n^2(x)g(x)dx = 1 \quad (104)$$

Nous présentons quelques propriétés intéressantes des polynômes orthogonaux dans l'Annexe C.

Les fonctions poids, ainsi que les intervalles de définition, de quelques polynômes orthogonaux usuels sont donnés dans le Tableau XVI.

Polynôme	Fonction poids	Intervalle
Legendre	1	[-1, 1]
Jacobi	$(1-x)^\lambda(1+x)^\mu, \mu > -1$	[-1, 1]
Chebyshev	$(1-x^2)^{-1/2}$	[-1, 1]
Gegenbauer	$(1-x^2)^{\nu-1/2}, \nu > -1/2$	[-1, 1]
Hermite	$\exp(-x^2/2)$	$[-\infty, +\infty]$
Laguerre	$x^\lambda \exp(-x)$	$[0, +\infty]$

Tableau XVI : Fonctions poids et intervalles de définition de quelques polynômes usuels

On présente dans la suite, les différentes étapes de l'approche non intrusive basée sur une décomposition spectrale dans la base des polynômes chaos orthogonaux.

Polynômes multi-dimensionnels

On définit les polynômes multi-dimensionnels de degré p d'indéterminées $(X_i)_{1 \leq i \leq M}$ comme le produit pour toutes les indéterminées des polynômes uni-dimensionnels de degré α_i pour la i^{e} indéterminée,

$$H_\alpha(X_1, \dots, X_M) = \prod_{i=1}^M h_{\alpha_i}(X_i) \quad (105)$$

où $(X_i)_{1 \leq i \leq M}$ est une famille de variables et $\alpha \in \mathbb{N}^M$ un M -uplet d'entiers naturels [Gaignaire 2008]. Le degré p est calculé en utilisant :

$$p = |\alpha| = \sum_{i=1}^M \alpha_i \quad (106)$$

Si par exemple $\alpha = (1, 2, 4, 6)$, alors $p = |\alpha| = 1 + 2 + 4 + 6 = 13$. Par exemple, le monôme X_1^3 sera de degré 3, $X_1 X_2$ sera de degré 2 et le polynôme $X_1^2 + X_1^2 X_2^2$ sera de degré 4.

Les trois étapes de la méthode non intrusive basée sur le chaos polynomial sont détaillées ci-dessous.

1). Prétraitement

Dans la suite, les paramètres incertains sont appelés variables aléatoires. Ces variables aléatoires (v.a.) sont utilisées comme entrées du modèle déterministe. La première étape consiste à discrétiser les v.a. à l'aide des polynômes orthogonaux. Il a été constaté que certains types de polynômes (Hermite, Legendre, Jacobi, Laguerre, etc) se prêtent mieux que d'autres à des lois de distributions spécifiques. On reviendra sur le choix de polynômes plus tard dans ce paragraphe.

Il est possible d'approximer une variable aléatoire de variance finie sous la forme d'une série de polynômes orthogonaux [Xiu 2003]. Soit $X(\theta)$ une v.a. de répartition connue. On peut donc l'écrire sous la forme :

$$X(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i H_i(\xi(\theta)) \quad (107)$$

où $\xi(\theta)$ est une variable aléatoire centrée réduite (de moyenne nulle et écart type unitaire), x_i sont des coefficients réels et les polynômes multi-dimensionnels H_i sont choisis à l'aide du schéma d'Askey [Xiu 2003].

De la même manière que la discrétisation des paramètres d'entrée, il est possible d'approximer les sorties du modèle, $Y(\theta)$, en utilisant les polynômes orthogonaux multi-dimensionnels H_k ,

$$Y(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k H_k(\xi(\theta)) \quad (108)$$

2). Méthode de projection. Calculs déterministes

Etant donné que les polynômes H_k forment une base orthogonale des variables aléatoires, les coefficients y_k doivent vérifier,

$$y_k = \frac{E\left[yH_k(\xi(\theta))\right]}{E\left[H_k^2(\xi(\theta))\right]} \quad (109)$$

Les coefficients y sont les solutions du modèle déterministe et peuvent être obtenus en utilisant la méthode de projection, présentée ci-dessous.

Le dénominateur de l'équation (109) peut être calculé analytiquement. Le numérateur, qui est en fait une espérance, peut-être calculée à l'aide de la méthode de Monte-Carlo ou avec une méthode de quadratures (quadratures de Gauss, quadratures de Smolyak, etc) ce qui revient alors à un calcul d'intégrale.

Méthode de projection de type schémas de quadratures de Gauss

Le numérateur de l'équation (109) peut s'écrire sous forme intégrale comme suit :

$$I_i^j = E\left[y_i(\theta)^j H(\xi(\theta))\right] = \int_{\mathbb{R}^M} y_i(t_1, \dots, t_M)^j h(t_1, \dots, t_M) \Phi_M(t_1, \dots, t_M) dt_1, \dots, dt_M \quad (110)$$

où $(\xi_k(\theta))_{1 \leq k \leq M}$ est une variable aléatoire centrée réduite et $\Phi_M(t)$ la densité de probabilité de la loi M -dimensionnelle centrée réduite. On peut approcher l'intégrale I_i^j en utilisant la méthode de quadratures [Gaignaire 2008], par la relation :

$$I = \int_a^b f(t)W(t)dt = \sum_{i=1}^d w_i f(t_i) \quad (111)$$

où $t = (t_1, \dots, t_M) \in \mathbb{R}^M$ et t_i sont les points de Gauss et w_i les poids de Gauss associés, W la fonction poids, f est la fonction à intégrer.

La méthode de quadrature de Gauss consiste à approcher la valeur numérique d'une intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. Le théorème de quadrature de Gauss énonce que les abscisses de d points de gauss $(t_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont les racines du polynôme $Q_d(t)$ de degré d orthogonal à la fonction poids $W(t)$ sur l'intervalle considéré. Ces points et ces poids permettent le calcul exact de l'intégrale si la fonction f considérée est polynomiale de degré au plus $2d-1$.

Dans ce cadre, les nœuds t_i de l'équation (111) sont les racines du polynôme $f(t)$ orthogonal à $W(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$ et w_i les poids associés à la $i^{\text{ème}}$ racine de $f(t)$.

Remarque

Dans les études applicatives à la fin de ce chapitre, nous considérons des lois de distribution uniformes pour les v.a. d'entrée de nos modèles. Les polynômes les plus

appropriés pour ce type de loi de distribution sont les polynômes de Legendre [Agarwal *et al* 2009/2]. Ceux-ci sont définis par l'expression,

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \quad (112)$$

Le Tableau XVII donne les polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre 5.

Degré du polynôme	Polynôme de Legendre
0	1
1	$L_1(x) = x$
2	$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

TABLEAU XVII : Polynômes de Legendre d'ordre 1-5

Les polynômes de Legendre sont définis sur l'intervalle [-1,1] et la fonction poids qui leur est associée est $W(t)=1$.

Nous avons jusqu'à présent détaillé la partie concernant la discrétisation des variables aléatoires à l'aide des polynômes orthogonaux en donnant également la méthode de quadrature de Gauss pour le calcul des coefficients y_k . Mais il n'apparaît pas explicitement comment sont reliées les entrées X et les sorties Y dans cette méthode.

D'abord, X est exprimé comme une fonction d'une variable aléatoire $\xi(\theta)$ à l'aide de l'équation 107, comme illustré à la Figure 66. Il est évident que Y sera aussi une fonction de la même variable aléatoire. Ensuite, en choisissant le degré d'interpolation, on fait le choix du nombre de points de Gauss (d) et ces points seront les valeurs prises par la variable aléatoire de la manière suivante : $\xi_1 = t_1, \dots, \xi_d = t_d$. En remplaçant les ξ par les valeurs des points de Gauss dans l'équation 107, on calcule les d valeurs X_1, \dots, X_d de l'entrée. Ensuite, les d calculs déterministes sont réalisés, obtenant les valeurs correspondantes y .

La prochaine étape consiste à approcher l'espérance en utilisant l'équation 111 pour reconstruire la sortie Y . La démarche présentée jusqu'à ce point est schématisée sur la Figure 66.

3). Traitement statistique

Une fois les coefficients y_k calculés pour la détermination de la v.a. de sortie $Y(\theta)$, il reste à calculer les différentes grandeurs probabilistes, telles que la moyenne, les moments de différents ordres, la densité de probabilité, etc. On considère donc la v.a.

$Y(\theta)$ discrétisée à l'aide de P polynômes de Legendre formant une base du chaos polynomial.

$$Y(\theta) = \sum_{k=0}^P y_k L_k(\xi(\theta)) \quad (113)$$

Les moments associés à la variable aléatoire $Y(\theta)$ peuvent être calculés analytiquement. La moyenne est le coefficient y_1 , celui qui est associé au polynôme de Legendre de degré zéro. La difficulté intervient pour les moments d'ordre plus élevé (ordre 3, ordre 4), car ils requièrent le calcul des espérances multiples, ce qui demande une implémentation plus lourde. On peut alors avoir recours à la méthode de Monte-Carlo pour le calcul de ces moments.

En effet, à partir de l'équation (20) on évalue la sortie $Y(\theta)$ pour un nombre N de réalisations. A partir de ces valeurs de $Y(\theta)$, on peut réaliser un traitement statistique, comme expliqué dans le paragraphe précédent.

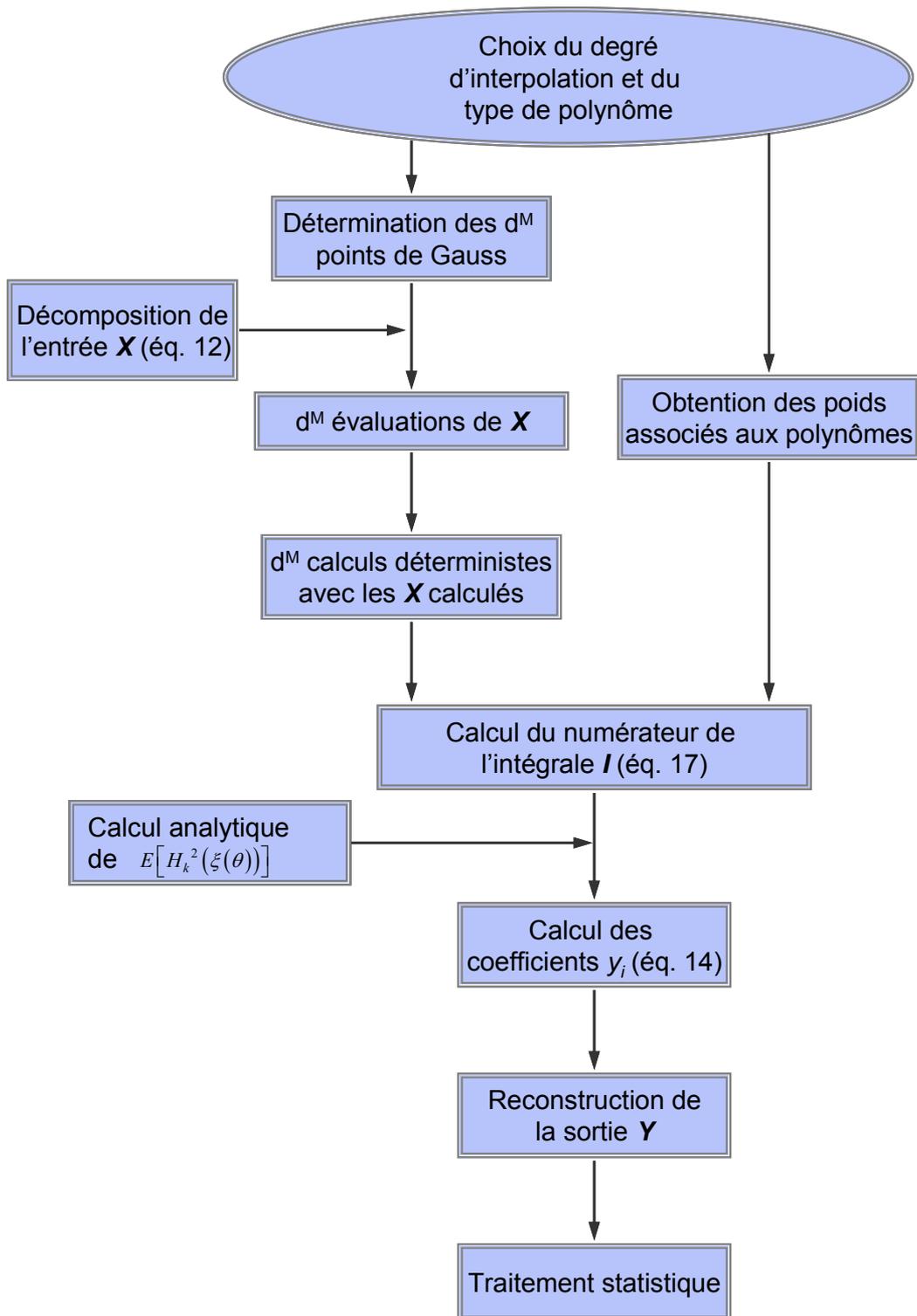


Figure 66. Approche non-intrusive basée sur le chaos polynomial

4.5. Applications

Les prochains paragraphes seront consacrés à l'exploitation des différents modèles stochastiques sur un microsystème électrostatique simple. Une première partie consiste en une étude de sensibilité, des comportements électrostatique et mécanique du système, à différents paramètres à l'aide de la méthode d'échantillonnage Monte-Carlo.

La deuxième partie, abordera l'analyse de la tension de *pull-in*, en utilisant un modèle analytique et un autre numérique, dans les approches d'échantillonnage et de décomposition spectrale en chaos polynomial. L'objectif de ces études est d'analyser l'influence des paramètres et de mettre en évidence la nécessité d'une approche stochastique.

4.5.1. Analyse statistique

Dans un premier temps, une analyse statistique du système est effectuée, en considérant des paramètres géométriques et de matériau. Pour cela, nous considérons les modèles analytiques des deux physiques mises en jeu, à savoir l'aspect électrostatique et l'aspect mécanique. Les sorties de ces deux modèles sont, respectivement, la force électrostatique F_E et la raideur de la poutre K .

A partir de la modélisation stochastique, l'exploitation statistique des sorties permettra ensuite d'identifier les paramètres influents pour effectuer une étude plus approfondie.

4.5.1.1. Modélisation électrostatique

Dans cette étude, un modèle électrostatique analytique d'un actionneur à plaques parallèles a été utilisé. Cela revient à faire, du point de vue électrostatique, une modélisation d'un condensateur plan. Nous rappelons la formule donnant l'expression de la force électrostatique F_E pour un condensateur plan (éq. 5, chapitre 2) :

$$F_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \frac{V^2}{g_0^2} \quad (114)$$

où ε_0 est la permittivité du vide, A est la surface d'une plaque du condensateur, V la différence de potentiel appliquée et g_0 la distance entre les plaques.

Les paramètres géométriques pouvant influencer la sortie du modèle électrostatique sont, dans notre cas, la distance inter électrodes g_0 et la déviation de la section de la poutre d'une forme idéale rectangulaire vers une section trapézoïdale. L'angle donnant cette information est noté θ , comme indiqué sur la Figure 67.



Figure 67. Déviation de la section rectangulaire d’une micro-poutre.
 a) Photographie MEB de la section [Gupta 1997]
 b) Géométrie trapézoïdale définie par θ

Il est possible de trouver dans la bibliographie des renseignements sur les tolérances utilisées dans les divers procédés de fabrication de MEMS. En revanche, des informations précises quant à la dispersion des paramètres de fabrication sont peu évoquées. Dans ce contexte, dans les études suivantes, la distribution des différents paramètres aléatoires dans les intervalles de tolérances sera considérée uniforme [Agarwal *et al* 2009/2]. Cette dernière, répondant aux critères d’entropie maximale.

Le Tableau XVIII contient les valeurs extrêmes des intervalles de variation des paramètres incertains utilisés dans cette étude. Sachant que l’angle θ a une répercussion sur la largeur b de la poutre ($b=b_0+2 h \tan(\theta)$) comme illustré sur la Figure 67 -b, et, afin de simplifier la présentation des données, seules les informations relatives à la largeur b sont données dans le Tableau XVIII.

Paramètre	g_{0_min}	g_{0_moy}	g_{0_max}	b_{min}	b_{moy}	b_{max}
Valeur [μm]	1,08	1,2	1,32	10	13,5	17

TABLEAU XVIII : Paramètres incertains étudiés dans la modélisation électrostatique

Etant donné que le modèle électrostatique est linéaire et que les lois de distribution des paramètres d’entrée sont considérées uniformes, il est évident que la loi de distribution de la force électrostatique (la sortie du modèle) est également uniforme pour un nombre d’échantillons qui tend vers l’infini. Afin de calculer les valeurs minimales et maximales de F_E , les paramètres V et $A=L \cdot b$ de l’équation (114) ont été fixés, respectivement, à 55 V et $L=800 \mu\text{m}$.

Dans le cas de la variation du paramètre g_0 , la largeur de la surface sur laquelle on applique le potentiel a été maintenue à sa valeur moyenne $b=13,5 \mu\text{m}$. La valeur minimale de F_E obtenue est de $0,83 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ ce qui correspond à g_{0_max} et la valeur maximale de F_E correspondante à g_{0_min} est $1,24 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. Ainsi, l’intervalle de variation de F_E est de 40%.

Dans le cas de la variation du paramètre b , la distance inter-plaques a été fixée à sa valeur moyenne de $g=1,2 \mu\text{m}$. Les valeurs minimales et maximales de F_E sont $0,744 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ et $1,26 \cdot 10^{-4} \text{ N}$, respectivement. Dans ce cas, la variation de F_E est de 50%, plus élevée que dans le cas de la variation de g_0 .

Cette étude préliminaire permet d’appréhender les intervalles de variation de F_E . Dans la suite, l’influence combinée (ou cumulée) de la variation des deux paramètres incertains considérés est investiguée.

Etude de l’influence cumulée des paramètres g_0 et b

L’exploitation des données de sortie fournit les bornes de l’intervalle dans lequel se trouvent la force, sa moyenne et l’écart type associé. Ces valeurs sont synthétisées dans le Tableau XIX. Dans le but de caractériser complètement les données de sortie aux grandeurs statistiques évoquées dans le Tableau XIX, des grandeurs décrivant la dispersion de ces données doivent être prises en compte. Ainsi, on considère le coefficient de variation c_v , défini par le rapport de l’écart type sur la moyenne.

$$c_v = \frac{\sigma}{\mu} \quad (115)$$

dont la valeur est également mentionnée dans le Tableau XIX.

Pour cette étude, il est important de préciser que les deux paramètres sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes. Ceci se traduit par le fait qu’aucune loi ne lie les deux paramètres et chacun peut être généré aléatoirement, de façon indépendante. On effectue un tirage de 10000 réalisations à distribution uniforme en considérant les mêmes intervalles que les études précédentes pour les deux paramètres (Tableau XVIII). Les résultats de la force électrostatique, en termes de grandeurs statistiques, sont regroupés dans le Tableau XIX.

Grandeur statistique	Minimum [10 ⁻⁴ N]	Maximum [10 ⁻⁴ N]	Moyenne [10 ⁻⁴ N]	Ecart type [10 ⁻⁴ N]	Coefficient de dispersion [%]
Valeur de F_E	0,619	1,56	1,02	0,194	19,13

TABLEAU XIX. Grandeurs statistiques associées à F_E (variables aléatoires g_0 et θ)

Une première observation, associée à l’effet cumulé des deux paramètres g_0 et θ , a trait à l’augmentation de l’intervalle des réalisations de la force F_E . Celui-ci est environ deux fois plus important par rapport au cas où un seul paramètre a été considéré aléatoire.

Les grandeurs présentées dans le Tableau XIX, sont des éléments statistiques permettant de caractériser, en première approche, la sortie F_E du modèle déterministe électrostatique. Afin d’analyser plus finement le comportement de la sortie, il est possible de tracer la densité de probabilité, grandeur caractérisant la distribution de F_E , sous forme d’un histogramme de la fréquence de réalisation de la force. Nous sélectionnons dix classes, i.e. l’intervalle $[F_{E \min}, F_{E \max}]$ est découpé en dix intervalles. Le nombre de réalisations de F_E est comptabilisé pour chaque classe obtenant ainsi ce qu’on appelle la fréquence de F_E . L’histogramme, est donné à la Figure 68.

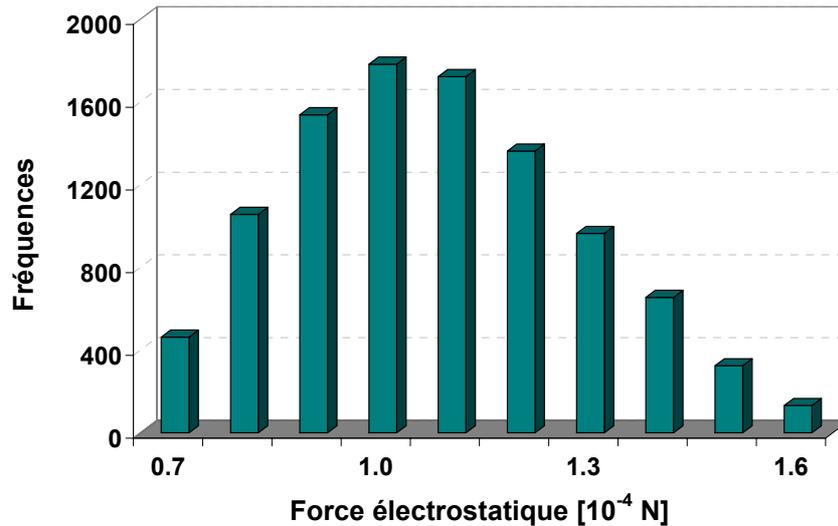


Figure 68. Histogramme de la force électrostatique F_E

Il est possible ensuite d'en déduire la densité de probabilité de la variable de sortie. Pour réaliser cela, il suffit de normaliser les fréquences correspondant à chaque classe par rapport au nombre total de réalisations. La densité de probabilité pour F_E est donnée sur la Figure 69.

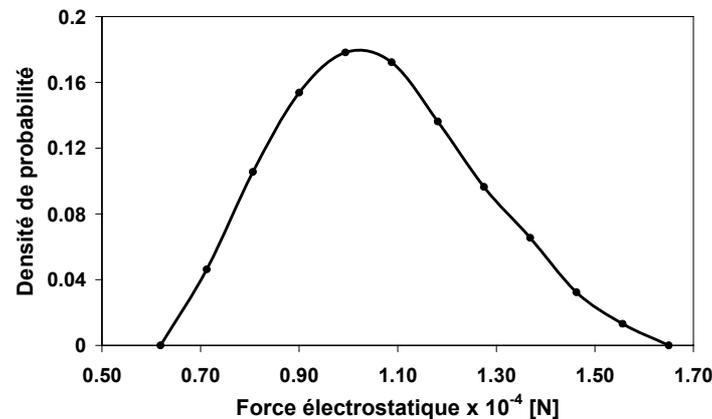


Figure 69. Densité de probabilité de la force électrostatique ; paramètres incertains g_0 et θ (ou b)

Il est intéressant d'observer (Figure 69) la distribution de la force électrostatique due à l'effet cumulé de la variation des deux paramètres g_0 et θ . En considérant un seul paramètre incertain, la distribution de la force électrostatique, due à l'utilisation d'un modèle linéaire, se rapproche d'une distribution uniforme. En revanche, l'effet cumulé des deux paramètres, comme le montre la Figure 69, est que la loi de distribution associée à la force présente une allure de loi normale.

Le paragraphe suivant sera dédié à l'étude du phénomène mécanique et permettra de mettre en évidence les paramètres mécaniques incertains les plus influents.

4.5.1.2. Modélisation mécanique

Les MEMS électrostatiques sont souvent constitués de parties mécaniques qui se déplacent ou se déforment sous l'action d'une force électrostatique. Nous avons traité au cours du chapitre précédent des systèmes simples constitués de micro-poutres caractérisées par leur rigidité. Cette dernière dépend de la forme géométrique des poutres ainsi que des propriétés des matériaux. Or, lors des procédés de fabrication, on observe des variations importantes de ces mêmes propriétés, telles que le module d'Young [Chasiotis 2007, Gupta 1997].

Pour étudier l'influence des paramètres aléatoires sur la rigidité d'une micro-poutre, on considère le modèle analytique simple représenté par l'équation (28) introduite au chapitre 2. A partir de cette équation, on déduit la flèche de la poutre, et la rigidité correspondante s'écrit :

$$K = \frac{384EI_z}{L^3} \quad (116)$$

On rappelle que E est le module d'Young, $I_z = (b \cdot h^3)/12$ le moment quadratique d'une poutre de section rectangulaire, b est la largeur et h l'épaisseur de la poutre et L sa longueur. Une variation de la largeur introduit un changement de la section de la poutre, vers un profil trapézoïdale. Si l'on note b_0 la largeur correspondant à la section rectangulaire et b_θ la dimension supplémentaire introduite par la déviation de la section vers une section trapézoïdale, la base du trapèze sera $b_0 + 2b_\theta$ Figure 67 -b. Le moment quadratique d'une poutre ayant cette section trapézoïdale s'écrit,

$$I_z^{trap} = \frac{h^3 (b_0^2 + 4b_0b_\theta + b_\theta^2)}{36(b_0 + b_\theta)} \quad (117)$$

Les paramètres considérés comme incertains dans cette étude mécanique sont le module d'Young E et l'angle θ (i.e. b la base de la section trapézoïdale). Les intervalles de variation de ces paramètres ainsi que leurs valeurs moyennes, observés expérimentalement [Gupta 1997], sont donnés dans le Tableau XX.

Paramètre	E_{\min} [GPa]	E_{moy} [GPa]	E_{\max} [GPa]	b_{\min}	b_{moy}	b_{\max}
Valeur	160	173	186	10	13,5	17

TABLEAU XX : Paramètres incertains étudiés dans la modélisation mécanique

Tout comme dans l'étude précédente, un tirage de 10000 réalisations a été réalisé pour la simulation MC du modèle. Les lois de distribution des paramètres d'entrée sont toujours supposées uniformes. Les effets des paramètres sont présentés et discutés dans la suite.

Dans un premier temps, seul le module d'Young a été considéré incertain. Les valeurs maximales et minimales de la raideur, correspondant à E_{max} et E_{min} valent $411 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}$ et $478 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}$. Cela implique un intervalle dans lequel la raideur K trouve ses valeurs 15% autour de la moyenne. En faisant varier la section de la poutre b , le modèle mécanique fournit les valeurs $K_{min} = 329 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}$ et $K_{max} = 560 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}$. Ces valeurs indiquent une variation de 51% de K autour de sa moyenne. Une première conclusion consiste alors à noter que la variation de la section d'un profil rectangulaire à trapézoïdal, est plus influente sur la caractéristique mécanique d'une poutre fixée à ses deux extrémités.

Etude de l'influence combinée des paramètres E et b

On a constaté, lors de l'étude électrostatique, que l'influence cumulée de ces deux paramètres est très importante. Afin de vérifier si le même comportement s'applique dans le cas de l'étude mécanique, les deux paramètres E et b sont considérés comme variables aléatoires, indépendantes, en entrée du modèle. Les résultats sont présentés dans le Tableau XXI.

Grandeur statistique	Minimum [10^{-4} N/m]	Maximum [10^{-4} N/m]	Moyenne [10^{-4} N/m]	Ecart type [10^{-4} N/m]	Coefficient de dispersion [%]
Valeur de K	306	601	445	69,3	15,56

TABLEAU XXI. Grandeurs statistiques associées à la raideur K (paramètres incertains E et θ)

Les résultats du TABLEAU XXI montrent que les effets simultanés des deux paramètres se traduisent par une augmentation de l'étendue de variation de la raideur K .

En ce qui concerne la densité de probabilité, représentée sur la Figure 70, elle s'éloigne assez nettement d'une loi uniforme, et présente l'allure d'une loi bimodale.

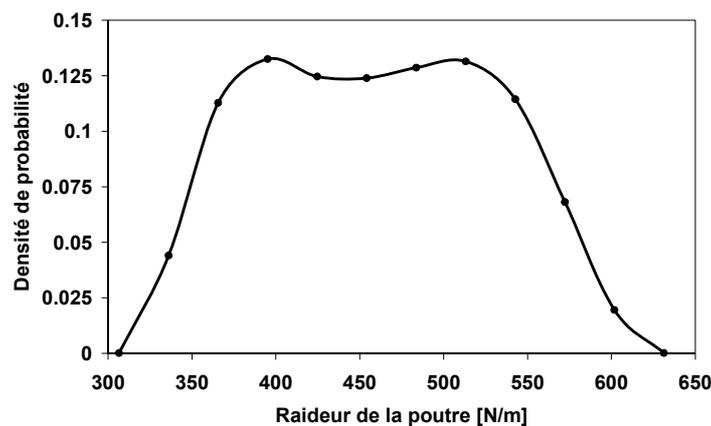


Figure 70. Densité de probabilité de la raideur K (paramètres incertains E et θ)

4.5.1.3. Discussion sur analyse statistique

Les deux études présentées, électrostatique et mécanique, ont permis de mettre en évidence, mais aussi de quantifier, l'influence des incertitudes de certains paramètres d'entrée sur les sorties des modèles associés. L'étude électrostatique de la grandeur de sortie considérée a été la force électrostatique créée, par exemple, au sein d'un dispositif capacitif à plaques parallèles. Quant à l'étude mécanique, la variable de sortie a été la raideur d'une micro-poutre se retrouvant dans un tel dispositif.

A l'aide des simulations Monte-Carlo, nous avons calculé les différentes grandeurs statistiques, telles que la moyenne, l'écart type, le coefficient de dispersion et la densité de probabilité des grandeurs de sortie des modèles. L'étude électrostatique montre que le paramètre θ est plus influent que g_0 tant sur la taille de l'intervalle de variation de la force électrostatique, que sur sa dispersion. L'étude mécanique montre, quant à elle, que le module d'Young, dans la gamme d'incertitude et pour les géométries considérées, influe peu sur la raideur de la poutre, à l'opposé de l'angle θ . Les simulations Monte-Carlo s'avèrent d'autant plus utiles qu'elles permettent de visualiser la distribution des données de sortie de façon immédiate. En effet, bien que les paramètres d'entrée aient été considérés avec des distributions uniformes, on constate que les effets cumulés de ces paramètres, que ce soit dans le cas de l'étude électrostatique ou dans celui de l'étude mécanique, engendrent des distributions des grandeurs de sortie différentes d'une loi uniforme (Figure 69 et Figure 70). Cet effet est bien plus marqué pour l'étude électrostatique.

On peut observer également que, lorsque l'on considère les deux paramètres g_0 et b aléatoires en entrée du modèle électrostatique, l'étendue de variation de F_E augmente de façon notable par rapport au cas où seul b est considéré comme variable aléatoire (on passe de 50% à 92%). Ceci nous incite à penser que la prise en compte des deux paramètres est nécessaire pour une étude statistique précise.

En revanche, en considérant les deux paramètres E et b aléatoires en entrée du modèle mécanique, l'effet cumulé des deux paramètres est moins prononcé par rapport au cas où seul le paramètre b est considéré aléatoire (de l'ordre de 15%). En comparant avec la faible influence de E , on peut penser que l'étude statistique mécanique ne nécessite pas, dans notre cas, de prendre en compte ce paramètre en tant qu'aléa. Toutefois, ce paramètre sera considéré dans les études qui suivent afin d'évaluer son influence sur la tension de collage.

Dans la suite, nous nous intéressons cette fois-ci à l'étude stochastique du phénomène de *pull-in* au sein d'une structure MEMS. Pour cela, nous allons considérer l'influence des paramètres d'entrée E , b et g_0 sur la tension de collage V_{PI} . Deux approches de modélisation seront abordées pour cette étude, l'une analytique et l'autre électrostatique par éléments finis couplée mécanique analytique.

4.5.2. Modélisation analytique du *pull-in*

Le dispositif étudié possède une structure de type poutre encadrée à ses deux extrémités comme celle étudiée au cours du chapitre 3. Dans le Tableau XXII, nous récapitulons les différentes caractéristiques de ce dispositif.

Le modèle déterministe utilisé pour cette étude est le modèle analytique simple présenté au chapitre 3 (paragraphe 3.1.2.1). L'expression de la tension de *pull-in* est rappelée ci-dessous :

$$V_{PI} = \sqrt{\frac{8K_f g_0^3}{27\varepsilon_0 A}} \quad (118)$$

Nous appliquons les techniques non intrusives présentées dans la première partie de ce chapitre, à savoir la technique d'échantillonnage Monte Carlo et l'approche du chaos polynomial.

Caractéristique	L	b	h	g_0	E
Valeur	800 μm	10 μm	14,5 μm	1,2 μm	173 GPa

Tableau XXII : Caractéristiques du dispositif étudié

En considérant les 3 paramètres E , g_0 et b (en faisant varier θ), on peut distinguer 7 configurations. Trois configurations consistent à considérer un seul paramètre aléatoire en entrée, trois autres configurations correspondent à la combinaison deux à deux des paramètres et enfin la dernière configuration prend en compte les trois paramètres en tant que variables d'entrée aléatoires. Il faut noter que les configurations à un seul ou à deux paramètres aléatoires permettent d'appréhender l'influence desdits paramètres sur la sortie. En réalité, les trois paramètres sont sujets à de l'incertitude.

De la même façon que précédemment, les distributions des trois paramètres E , g_0 et b sont considérées uniformes et, lorsque plus d'une variable aléatoire est utilisée en entrée, celles-ci seront supposées indépendantes. Les intervalles considérés pour la génération des lois uniformes sont les mêmes que ceux utilisés pour l'étude précédente (tableaux XVIII et XX).

4.5.2.1. Configurations à une seule variable aléatoire

Pour ces trois premières configurations, lorsque l'un des paramètres est considéré comme variable aléatoire d'entrée, les deux autres sont fixés à leurs valeurs moyennes données dans les tableaux XVIII et XXII.

Les simulations ont été effectuées avec les deux approches de modélisations stochastiques non intrusives introduites précédemment. Dans ce qui suit, les résultats des simulations Monte Carlo sont issus de 100000 réalisations et les simulations en chaos polynomial ont été effectuées, compte tenu de l'utilisation d'un modèle analytique peu gourmand en temps de calcul, avec un degré des polynômes égal à 8.

Variable aléatoire	Méthode	Moyenne [V]	Ecart type [V]	Asymétrie	Aplatissement	Coefficient de dispersion [%]
E	MC	48,79	1,058	-0,02	1,80	2,16
	PC	48,80	1,059	-0,03	1,82	2,17
b	MC	45,55	1,65	0,25	1,88	3,63
	PC	45,54	1,65	0,26	1,88	3,63
g ₀	MC	48,86	4,21	0,03	1,8	8,62
	PC	48,87	4,22	0,02	1,8	8,64

Tableau XXIII : Synthèse des résultats obtenus pour la tension de collage V_{PI} en considérant une variable aléatoire d'entrée (MC=Monte Carlo et PC = Polynômes chaos)

Comme le montre le tableau ci-dessus, les résultats obtenus par les deux méthodes stochastiques sont très similaires, et ce, pour toutes les grandeurs de sortie recherchées. En ce qui concerne l'influence des différents paramètres, g_0 est le plus influent de par son coefficient de dispersion le plus élevé (8,64%). La largeur b et le module d'Young, quant à eux, sont moins influents. Lorsque le paramètre E ou le paramètre g_0 sont considérés comme variables aléatoires, la dispersion de V_{PI} est symétrique, le coefficient d'asymétrie étant proche de zéro. En revanche, dans le cas de la variation de b , la distribution est plus étalée vers la gauche, (coefficient d'asymétrie positif). Le coefficient d'aplatissement est constant dans les trois cas et s'approche de la valeur d'une loi uniforme, 1,8.

4.5.2.2. Configurations à deux variables aléatoires

Dans ce paragraphe nous investiguons l'influence de deux paramètres indépendants considérés simultanément en entrée du modèle stochastique. Lorsque deux paramètres varient, le troisième paramètre est maintenu à sa valeur moyenne, comme dans l'étude précédente. Les configurations des simulations Monte Carlo et polynômes chaos sont identiques à celles de l'étude précédente à une seule variable aléatoire d'entrée. Les résultats correspondants sont présentés dans le Tableau XXIV.

Variable aléatoire	Méthode	Moyenne [V]	Ecart type [V]	Asymétrie	Aplatissement	Coefficient de dispersion [%]
E et b	MC	45,53	1,93	0,21	2,33	4,24
	PC	45,53	1,92	0,22	2,37	4,23
E et g ₀	MC	48,87	4,35	0,06	1,93	8,91
	PC	48,86	4,35	0,07	1,94	8,91
b et g ₀	MC	45,58	4,27	0,11	2,13	9,38
	PC	45,6	4,28	0,10	2,16	9,38

Tableau XXIV : Synthèse des résultats obtenus pour la tension de collage V_{PI} en considérant deux variables aléatoires d'entrée (MC=Monte Carlo et PC = Polynômes chaos)

Il a été constaté, lors de l'étude précédente, que g_0 est le paramètre le plus influent sur la dispersion des valeurs de V_{PI} . Ce paramètre garde le même comportement et son influence se voit dans les deux cas où il intervient. De plus, l'effet cumulé des variations de b et g_0 est le plus important en ce qui concerne le coefficient de dispersion (9,38%). L'asymétrie est plus prononcée pour la première configuration de variables aléatoires (E et b) et l'aplatissement quant à lui, est plus prononcé que lors de l'étude des paramètres considérés seuls.

4.5.2.3. Configurations à trois variables aléatoires

Cette configuration de simulation est la plus représentative pour l'étude stochastique de MEMS, car elle tient compte des incertitudes combinées de l'ensemble des paramètres.

Variable aléatoire	Méthode	Moyenne [V]	Ecart type [V]	Asymétrie	Aplatissement	Coefficient de dispersion [%]
E et b et g_0	MC	45,57	4,39	0,23	2,23	9,65
	PC	45,59	4,39	0,24	2,31	9,63

Tableau XXV : Synthèse des résultats obtenus pour la tension de collage V_{PI} en considérant trois variables aléatoires d'entrée (MC=Monte Carlo et PC = Polynômes chaos)

Les résultats recueillis dans le Tableau XXV montrent que l'utilisation des trois paramètres en tant que variables aléatoires d'entrée a un impact important, similaire à celui de l'utilisation combinée des deux paramètres b et g_0 (voir tableau XXIV). En effet, on observe, pour les résultats MC, que le coefficient de variation de la tension de collage V_{PI} est de 9,65% et sa valeur moyenne de 45,57V (à comparer aux valeurs respectives de 9,38% et 45,58V pour l'utilisation combinée des deux paramètres b et g_0). Si on s'intéresse aux moments statistiques comme l'asymétrie ou l'aplatissement, les valeurs obtenues sont plutôt proches de celles trouvées pour l'utilisation combinée des deux paramètres E et b (voir tableau XXIV).

L'ensemble des résultats présentés pour cette approche analytique peut être obtenu de façon rapide, notamment pour un nombre importants de réalisations des variables aléatoires pour les simulations Monte Carlo. Toutefois, la précision d'une telle approche analytique est limitée comme cela a été évoqué au chapitre 2. Nous abordons donc dans la dernière partie de ce chapitre une approche stochastique basée sur l'utilisation d'un modèle électrostatique par éléments finis associé au modèle mécanique analytique. Ce dernier modèle s'est révélé relativement précis dans l'étude déterministe, notamment dans le cas de structures de type micro-poutre.

4.5.3. Modélisation stochastique du *pull-in* à l'aide d'un modèle électrostatique par éléments finis

Pour l'étude par éléments finis, nous allons utiliser le modèle de pull-in déterministe, présenté au chapitre 3 (paragraphe 3.1.3.1), mettant en œuvre le modèle 2D EF électrostatique couplé au modèle mécanique analytique, dans la configuration longitudinale (prise en compte de la déformation de la poutre). Ce modèle, qui englobe de manière plus précise la déformation de la poutre, permet de déterminer de façon plus fine la tension de collage V_{PI} par rapport à ce que peut fournir le modèle analytique utilisé au paragraphe précédent.

On s'intéresse, pour les variables aléatoires d'entrée, aux mêmes configurations que celles considérées dans l'étude analytique au paragraphe précédent. Ces configurations correspondent à un seul, deux ou trois paramètres aléatoires en entrée en utilisant les combinaisons possibles pour E , b , g_0 .

La méthode basée sur l'approche du chaos polynomial sera considérée pour plusieurs degrés de polynômes de Legendre utilisés pour la décomposition des variables incertaines (jusqu'au degré 8). En effet, compte tenu de l'introduction dans le modèle d'une résolution éléments finis pour l'électrostatique, les temps de calculs peuvent devenir très importants. L'utilisation de la méthode de chaos polynomial se révèle ici plus intéressante d'un point de vue temps de calcul. De plus, le fait de considérer plusieurs degrés de polynômes permettra d'en appréhender l'influence sur la qualité de la solution en sortie du modèle stochastique et, par là même, de déterminer le degré suffisant pour obtenir une qualité de solution acceptable. Pour cela, la solution de référence sera calculée à partir de simulations Monte-Carlo issues de 1000 réalisations pour la taille d'échantillons. Les résultats correspondant à ces configurations sont détaillés dans la suite.

4.5.3.1. Configurations à une seule variable aléatoire

De la même façon que dans l'étude stochastique analytique, nous considérons les paramètres, à tour de rôle, en tant que variable aléatoire d'entrée tandis que les deux autres sont fixés à leurs valeurs moyennes. Nous présentons les résultats obtenus dans le Tableau XXVI. Il est évident qu'entre les valeurs de V_{PI} obtenues à partir du modèle analytique et celles du modèle éléments finis il existe un écart (48 V à 56 V), celui-ci s'explique par la différence de précision entre les deux modèles déterministes.

Variable aléatoire	Méthode	Moyenne [V]	Ecart type [V]	Asymétrie	Aplatissement	Coefficient de dispersion [%]
E	MC	56,72	1,22	-0,06	1,83	2,16
	PC	56,66	1,23	-0,03	1,78	2,17
b	MC	57,09	1,99	0,19	1,84	3,50
	PC	57,02	2,02	0,23	1,88	3,54
g_0	MC	56,65	4,56	0,11	1,85	8,05
	PC	56,83	4,61	0,09	1,79	8,11

Tableau XXVI : Synthèse des résultats obtenus pour la tension de collage V_{PI} selon la variable aléatoire considérée dans le modèle stochastique éléments finis (MC=Monte Carlo et PC = Polynômes chaos)

La première remarque qui peut-être faite est que le comportement stochastique du modèle est similaire à celui du modèle analytique exploité dans le paragraphe précédent. Plus précisément, le paramètre le plus influent sur la dispersion des valeurs est la distance inter-électrodes g_0 . On remarque également qu'en utilisant le modèle analytique (Tableau XXIII) la valeur moyenne de V_{PI} est plus faible dans le cas de la variation du paramètre b , en comparant avec la variation des paramètres E et g_0 (45,5 V par rapport à 48,8 V). Dans le cas de l'utilisation du modèle éléments finis, la valeur de la moyenne est relativement constante (56,7 à 57 V), peu importe le paramètre varié. Toutefois, de la même façon que pour le modèle analytique, on observe que le coefficient de dispersion et l'écart type sont les plus importants dans la configuration g_0 aléatoire.

Les différences entre les deux modèles (analytique et éléments finis), s'observent au niveau de la valeur moyenne de V_{PI} , mais, comme détaillé par la suite, également sur les valeurs des autres moments statistiques, sauf le coefficient de dispersion qui reste aux mêmes valeurs.

Pour le système étudié, le paramètre E intervient dans la loi de comportement mécanique, le paramètre g_0 dans le comportement électrostatique alors que le paramètre b intervient pour les deux physiques. Ainsi, le modèle analytique et le modèle éléments finis seront comparés, à l'aide de ces trois paramètres, sur les résultats en termes de comportements mécanique, électrostatique et électromécanique. Dans la suite, on définit l'écart comme étant la différence entre les deux valeurs issues des deux modèles (analytique et éléments finis) ramenée à la valeur issue du modèle éléments finis.

Ainsi, d'une part, on observe que l'écart entre les valeurs moyennes, obtenues à partir des deux modèles (Tableaux XXIII et XXVI), est de l'ordre de 13% lorsque E est aléatoire. La même observation peut être faite dans le cas où g_0 est aléatoire. En revanche, l'écart entre les valeurs moyennes, issues des deux modèles, est plus élevé, environ 20%, lorsque le paramètre b est aléatoire.

D'autre part, les valeurs moyennes issues du modèle éléments finis sont proches pour les trois paramètres alors que, dans le cas du modèle analytique, la valeur moyenne associée à l'aléa b est notablement différente de celles obtenues pour les deux autres configurations d'aléas. Il apparaît donc que le modèle analytique est sensible à la variation du paramètre b qui intervient dans le comportement électromécanique.

Enfin, concernant l'écart type, l'écart entre les modèles est le plus élevé (18%) dans le cas de la variation du paramètre b , il diminue dans le cas du paramètre E (13%) et est le plus faible dans le cas de la variation du paramètre g_0 (8%). Les écarts entre les deux modèles, en termes de *skewness* et *kurtosis* restent faibles. On notera uniquement l'écart de 7% dans le cas du coefficient de dispersion pour le paramètre g_0 .

4.5.3.2. Configurations à deux variables aléatoires

Dans cette étude, les paramètres d'entrée sont combinés deux à deux en tant que variables aléatoires, le troisième étant maintenu à sa valeur moyenne.

Les résultats en termes de tension de collage V_{PI} et les moments statistiques associés sont présentés dans le Tableau XXVII.

Variables aléatoires	Méthode	Moyenne [V]	Ecart type [V]	Asymétrie	Aplatissement	Coefficient de dispersion [%]
E et b	MC	56,88	2,33	0,23	2,34	4,09
	PC	57,00	2,37	0,21	2,33	4,16
E et g_0	MC	56,59	4,71	0,14	1,98	8,32
	PC	56,8	4,78	0,09	1,96	8,41
b et g_0	MC	57,07	5,01	0,16	2,18	8,78
	PC	57,16	5,07	0,13	2,14	8,88

Tableau XXVII : Synthèse des résultats obtenus pour la tension de collage V_{PI} en considérant deux variables aléatoires d'entrée du modèle stochastique éléments finis (MC=Monte Carlo et PC = Polynômes chaos)

La première remarque concerne les valeurs moyennes issues du modèle éléments finis, qui sont proches, que ce soit à partir de la méthode Monte-Carlo ou celle basée sur le chaos polynomial. Ceci n'est pas le cas en utilisant un modèle analytique qui présentait une valeur moyenne de V_{PI} plus élevée dans le cas de la variation du couple de paramètres (E, g_0).

Toutefois, la sensibilité de V_{PI} au paramètre g_0 est mise en évidence dans cette étude également. En effet, le coefficient de dispersion est plus élevé dans les cas de la variation des couples de paramètres (E, g_0) et (b, g_0).

En ce qui concerne la comparaison des résultats obtenus à partir des deux modèles, analytique et éléments finis, la valeur moyenne des deux configurations (E, b) et (b, g_0) est supérieure à la valeur moyenne de la configuration (E, g_0), l'écart étant de 20%. On peut supposer que le paramètre b , lorsque celui-ci intervient avec l'un ou l'autre des autres paramètres, présente la même influence sur le modèle analytique qui a été observée dans le cas à une seule variable aléatoire.

4.5.3.3. Configurations à trois variables aléatoires

Dans cette dernière étude, nous considérons les trois paramètres E, b et g_0 simultanément en tant que variables aléatoires. La Tableau XXVIII donne les moments statistiques obtenus à partir des différentes simulations.

Variabes aléatoires	Méthode	Moyenne [V]	Ecart type [V]	Asymétrie	Aplatissement	Coefficient de dispersion [%]
E et b et g_0	MC	57,49	5,20	0,18	2,28	9,05
	PC	57,15	5,23	0,16	2,31	9,14

Tableau XXVIII : Synthèse des résultats obtenus pour la tension de collage V_{PI} en considérant trois variables aléatoires d'entrée du modèle stochastique éléments finis (MC=Monte Carlo et PC = Polynômes chaos)

En considérant les trois paramètres simultanément, la dispersion de V_{PI} autour de sa moyenne est similaire au cas où l'on a considéré les paramètres (b , g_0) simultanément. Le fait d'ajouter E dans les paramètres variés simultanément n'influence pas la dispersion des valeurs de V_{PI} .

Concernant la différence entre les modèles analytique et numérique, on peut noter qu'elle se maintient à la même valeur que dans le cas où les paramètres (b , g_0) ont été variés, tant en termes de valeurs moyennes que d'écart type.

4.5.3.4. Discussion

La modélisation stochastique de la tension de *pull-in* a permis d'étudier les influences des différents paramètres considérés incertains sur le comportement électromécanique d'un dispositif MEMS simple. Ensuite, en comparant les résultats en termes de grandeurs statistiques obtenus à partir des modèles analytique et numérique, on remarque, d'une part, que l'écart entre les valeurs moyennes obtenues à partir de ces modèles se maintient et, d'autre part, que le modèle analytique, à l'opposé du modèle numérique, présente une certaine sensibilité en ce qui concerne la valeur moyenne, notamment lorsque le paramètre b intervient dans l'aléa d'entrée. Afin d'analyser si cette sensibilité est physique ou liée aux hypothèses/limites du modèle, il est nécessaire d'avoir recours à un modèle plus fin, notamment par éléments finis tridimensionnel. Toutefois, ce type de modèle conduit à des temps de calcul prohibitifs.

En utilisant un modèle analytique, nous pouvons réaliser un nombre très élevé de simulations Monte-Carlo, sans augmenter de façon considérable les temps de calcul. Ceci n'est pas possible en utilisant un modèle déterministe numérique. D'où la nécessité d'une méthode stochastique plus rapide. Dans le but d'illustrer l'avantage de la méthode de décomposition spectrale en chaos polynomial, nous avons comparé les temps de calculs pour deux cas de simulations Monte Carlo, 500 réalisations (MC-500) et 1000 réalisations (MC-1000), avec ceux des calculs pour deux valeurs différentes du degré des polynômes chaos, respectivement 2 (PC-2) et 8 (PC-8). Le Tableau XXIX présente les rapports de ces temps de calcul, le calcul PC-2 étant pris comme référence pour chaque configuration de variables aléatoires.

	1 variable aléatoire	2 variables aléatoires	3 variables aléatoires
MC-500	34	11	1,5
MC-1000	66	22	3
PC-2	1	1	1
PC-8	13	13	13

Tableau XXIX : Rapports des temps de calcul entre les approches Monte-Carlo et Polynômes chaos (PC-2 est pris comme référence pour chaque configuration de variables aléatoires)

Dans le cas d'une seule et de deux variables aléatoires, on observe que les simulations Monte-Carlo avec 1000 réalisations nécessitent, respectivement, 66 et 22 fois le temps de calcul requis pour les simulations polynômes chaos de degré 2. Les résultats, en ce qui concerne la valeur moyenne, l'écart-type et la dispersion, sont relativement proches entre les deux méthodes. Par contre, dans la configuration à trois paramètres aléatoires en entrée des modèles, les simulations Monte-Carlo (500 et 1000 réalisations) montrent des temps de calcul moins importants que l'approche polynômes chaos. Toutefois, il faut noter qu'en toute rigueur les simulations Monte-Carlo devraient être effectuées avec une taille d'échantillons importante, de l'ordre de 100.000 réalisations. Sachant que l'évolution du temps de calcul est linéaire dans ce cas, on obtiendrait des temps de calculs bien plus conséquents et l'approche polynômes chaos deviendrait plus intéressante.

Enfin, si on s'intéresse aux valeurs des grandeurs statistiques entre les simulations polynômes chaos de degrés 2 et 8, les écarts sont très faibles. Ceci implique que le degré 2, dans notre cas, se révèle suffisant pour représenter les éléments statistiques associés aux grandeurs de sortie.

Références :

- [Agarwal et al 2007] N. Agarwal and N.R. Aluru, "A stochastic Lagrangian approach for geometrical uncertainties in electrostatics", *Journal of Computational Physics*, vol. 226, pp. 156-179, 2007.
- [Agarwal et al 2009/1] N. Agarwal and N.R. Aluru, "A domain adaptive stochastic collocation approach for analysis of MEMS under uncertainties", *Journal of Computational Physics*, vol. 228, pp. 7662-7688, 2009.
- [Agarwal et al 2009/2] N. Agarwal and N.R. Aluru, "Stochastic Analysis of Electrostatic MEMS Subjected to Parameter Variations", *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 18, no. 6, December, 2009
- [Allen et al 2008] M.S. Allen, J.E. Massad, R.V. Field Jr and C.W. Dyck, "Input and Design Optimization Under Uncertainty to Minimize the Impact Velocity of an Electrostatically Actuated MEMS Switch", *Journal of Vibrations and Acoustics*, vol. 130, 021009:1-9, April, 2008.
- [Analog 2010] <http://www.analog.com/en/mems/products/index.html>
- [Berveiller 2002] M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire, "Comparison of method for computing the response coefficient in stochastic finite element analysis", *Prob. Eng. Mec.*, vol. 17, pp. 337-348, 2002.
- [Chasiotis 2007] S.W. Cho, I. Chasiotis, « Elastic properties and representative volume element of polycrystalline Silicon for MEMS », *Experimental Mechanics*, vol. 47, pp. 37-49, 2007.
- [Delauche 2003] F. Delauche, "Optimisation statistique du rendement paramétrique de Microsystèmes (MEMS)", PhD Thesis, Univ. Montpellier II, 2003.
- [Gaignaire 2008] R. Gaignaire, "Contribution à la modélisation numérique en électromagnétisme statique stochastique", thèse de doctorat, ENSAM Lille, 2008.
- [Ghanem 1991] R. Ghanem and P.D. Spanos, "Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach", Springer, Berlin, 1991.
- [Ghanem 1996] R. Ghanem and R.M. Kruger, "Numerical Solution of Spectral Stochastic Finite Element Systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 129, pp.289-303, 1996.
- [Ghanem 1999] R. Ghanem, "Ingredients for a General Purpose Stochastic Finite Elements Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 168, pp. 19-34, 1999.
- [Ghanem 1999] R. Ghanem, "Higher Order Sensitivity of Heat Conduction Problems to Random Data using the Spectral Stochastic Finite Element Method", *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 121, pp. 290-299, 1999.
- [Ghanem 2002] R. Ghanem and A. Sarkar, "Mid-frequency Structural Dynamics with Parameter Uncertainty", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pp. 5499-5513, 2002.

- [Gupta 1997] Raj K. Gupta, " Electrostatic pull-in test structure design for *in-situ* mechanical property measurements of MicroElectroMechanical Systems (MEMS)", PhD thesis, MIT, 1997.
- [Ilumoka et al 2007] A Ilumoka, Hong Lang Tan and B. Eng, « MEMS failure probability and quality enhancement using neural networks », Proc. of the 8th ISQED, 2007.
- [Juillard et al 2004/1] J. Juillard, H. Baili and E. Colinet, « Piecewise perturbation method (PPM) simulation of electrostatically actuated beam with uncertain stiffness », Proceedings of Nanotech 2004, vol. 2, pp. 283-286, Boston, 2004.
- [Juillard et al 2004/2] J. Juillard, E.Colinet and H. Baili, « A piecewise response surface method for simulating MEMS with uncertain parameters », Proceedings of ICMENS'04, 2004.
- [Kong et al 2004] J.S. Kong, D.M. Frangopol, M. Raulli, K. Maute, R.A. Saravanan, L.-A. Liew and R. Raj, « A methodology for analyzing the variability in the performance of a MEMS actuator made from a novel ceramic », Sensors and Actuators A 116, pp. 336-344, 2004.
- [Lepage 2006] Séverine Lepage, « Stochastic Finite Element Method for the Modeling of Thermoelastic Damping in Micro-Resonators », PhD, Université de Liège, 2006.
- [Madou 2002] Marc J. Madou, « Fundamentals of Microfabrication : The science of Miniaturization », 2nd edition (April 2002) CRC Press, pp. 608.
- [MUMP] MUMPsTM Design Handbook, version 7.0, disponible sur <http://www.memsrus.com>
- [Nathanson 1967] H. Nathanson et al., « The Resonant Gate Transistor », Mar. 1967, Transactions on Electron Devices, vol. ED-14 No. 3, IEEE, pp. 117-133.
- [Park et al 2006] Minha Park and Yang Gao, « Error analysis and stochastic modeling of low-cost MEMS accelerometer », J. Intell Robot Syst, vol. 46, pp. 27-41, 2006.
- [SANDIA 2010] <http://www.mdl.sandia.gov/>
- [Schenato et al 2001] L. Schenato, Wei-Chung Wu, Laurent El Ghaoui and Kristofer Pister, "Process variation analysis for MEMS design", Proc. of SPIE, vol. 4236, pp. 272-279, 2001.
- [Shanmugavalli et al 2006] M. Shanmugavalli, G. Uma, B. Vasuki and M. Umopathy, « Design and simulation of MEMS devices using interval analysis », International MEMS Conference, Journal of Physics: Conference series, vol. 34, pp. 601-605, 2006.
- [Sharpe et al 2001] W.N. Sharpe, K.M. Jackson, K. J. Hemker and Z. Xie, "Effect of Specimen Size on Young's Modulus and fracture Strength of Polysilicon", Journal of Microelectromechanical systems, vol. 10, no. 3, pp. 317-326, September 2001.
- [Sudret 2004] B. Sudret, M. Berveiller, M. Lemaire, "Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire", Comptes Rendus Mécanique, Vol.

332(7), pp. 531-537, 2004.

- [Suquet 2004] Charles Suquet, « Introduction au Calcul des Probabilités », <http://math.univ-lille1.fr/~suquet/>, 2004.
- [TI 2010] <http://www.dlp.com>
- [Voicu et al 2006] R. Voicu, C. Tibeica, M. Bazu, « Design parameters optimization using process variations of the pull-in voltage for MEMS », Proc of MIEL, Belgrad, Serbia and Montenegro, May, 2006.
- [Vudathu et al 2006] S.P. Vudathu, K.K. Duganapalli, R. Laur, D. Kubalinska, A.B. Gerstner, « Parametric yield analysis of MEMS via statistical methods », DTIP of MEMS & MOEMS, Stresa, Italy, April, 2006.
- [Wittwer 2005] Wittwer JW, "Simulation-based design under uncertainty for compliant microelectromechanical systems", PhD Thesis, Brigham Young University, Provo, USA, 2005.
- [Xiu 2002/I] D. Xiu, G.E. Karniadakis, « The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations », SIAM J. Sci. Comput., vol. 24 (2), pp. 619-644, 2002.
- [Xiu 2002/II] D. Xiu and G.E. Karniadakis, "Modeling Uncertainty in Steady State Diffusion Problems via Generalized Polynomial Chaos", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, pp. 4927-4948, 2002.
- [Xiu 2003] D. Xiu and G.E. Karniadakis, "Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos", J. Comput. Phys. vol. 187 (1), pp. 137-167, 2003.
- [Xiu 2007] D. Xiu, "Efficient collocational approach for parametric uncertainty analysis", Commun. Comput. Phys., vol. 02, pp. 293-309, April, 2007.
- [Zhu et al 2007] Guchuan Zhu, Julien Penet and Lahcen Saydy, « Modeling and control of electrostatically actuated MEMS in the presence of parasitics and parametric uncertainties », Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 129 November, 2007.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire a été consacré à la modélisation de microsystèmes électrostatiques pour la détermination des paramètres associés au phénomène de *pull-in*. L'étude a été complétée par la prise en compte de l'incertitude sur les données d'entrée des modèles.

Dans un premier temps, une présentation non exhaustive des principes physiques exploités au sein des MEMS a permis d'appréhender l'étendue des possibilités d'applications de ces systèmes en tant qu'actionneurs et/ou capteurs.

De par leur compatibilité avec les techniques de fabrication des circuits intégrés, les MEMS électrostatiques sont les plus répandus actuellement. Ils sont caractérisés par le phénomène de *pull-in* qui est soit exploité pour le fonctionnement du MEMS soit, le plus souvent, évité car constituant une contrainte pouvant mener à la dégradation, voire à la destruction, du dispositif si elle n'est pas maîtrisée. Lors du processus de conception des MEMS, la modélisation de ce phénomène consiste à résoudre un problème couplé électromécanique afin d'obtenir les paramètres du *pull-in*, à savoir la tension et/ou la distance associées à ce phénomène.

Différents modèles électrostatiques et mécaniques, aussi bien analytiques que par éléments finis, ont été présentés. Les schémas de chaînage de ces modèles, pour la résolution du problème électromécanique, ont également été abordés. Les modèles analytiques permettent d'obtenir directement la tension, ou la distance, de *pull-in* contrairement aux autres types de modèles, mais restent toutefois les moins précis. En effet, dans le modèle couplé électrostatique éléments finis / mécanique analytique, la détermination de la tension de collage est réalisée à partir de la vérification de l'existence d'un état d'équilibre entre les forces électrostatique et de rappel élastique, et ce, à partir d'un calcul d'optimisation numérique. De plus, dans le modèle couplé électrostatique éléments finis / mécanique éléments finis, la tension de *pull-in* est obtenue en déterminant le seuil à partir duquel l'équilibre entre les forces en jeu est rompu. Pour cela, un critère d'arrêt est fixé, sur le déplacement ou sur la force, afin de déterminer, par résolutions successives du problème couplé, la configuration de *pull-in*.

Les différents modèles introduits ont été exploités sur deux structures typiques (*poutre-étroite* et *poutre-large*) de MEMS suivant une approche didactique, du modèle le plus simple au modèle le plus précis. Cette exploitation a permis de quantifier l'influence des effets prépondérants au sein des systèmes modélisés, notamment les effets de bords et la déformation des parties mobiles. A l'opposé des structures à poutres larges, où les effets de bord n'ont pas d'influence notable, dans le cas des structures à poutres étroites l'influence de ces effets induit un écart de 38% par rapport à un modèle simple qui ne prend en compte aucun effet. De même, la prise en compte de la déformation des poutres conduit, pour les deux structures étudiées, à des écarts d'environ 23%. Ces résultats ont été mis en évidence à l'aide de deux modèles distincts couplés électrostatique éléments finis 2D / mécanique analytique, l'un en configuration

longitudinale et l'autre en configuration transverse. Toutefois, selon la configuration de modélisation, ces modèles ne permettent de considérer qu'un seul effet à la fois (effets de bords ou déformation). Afin de modéliser les effets conjugués, il est nécessaire d'utiliser un modèle couplé tridimensionnel. Le modèle couplé électrostatique éléments finis et analytique mécanique fournit des résultats plus précis. En comparant avec les données expérimentales les valeurs de V_{PI} obtenues à partir des formulations en potentiel scalaire et vecteur électrique, les écarts obtenus sont d'environ 1%.

De plus, la précision de calcul des grandeurs associées au *pull-in* étant fortement dépendante de la précision de calcul de la force électrostatique, une investigation complémentaire a été réalisée sur ce sujet. Pour cela, l'étude d'un motif élémentaire d'un dispositif MEMS à doigts inter-digités a été réalisée. L'objectif a consisté à déterminer la force électrostatique au sein du dispositif en fonction du déplacement de l'une des deux électrodes. Etant donné que la précision du calcul de la force est liée, entre autre, à la précision du calcul de champ électrique local, la piste qui a été abordée concerne l'amélioration de la qualité de la solution du calcul éléments finis par raffinement de maillage. Afin de sélectionner les éléments à raffiner, deux estimateurs d'erreurs ont été implémentés. Le premier est basé sur la discontinuité numérique du champ, de type circulation ou de type flux. Le deuxième considère la vérification des lois de comportement des matériaux par complémentarité des deux formulations en potentiels. Ces estimateurs ont été appliqués au raffinement du maillage dans les zones de fortes erreurs et les résultats des simulations ont montré une nette amélioration en termes de calcul de force électrostatique, notamment dans le cas de l'estimateur basé sur la discontinuité du champ.

Enfin, le dernier chapitre a été consacré à la prise en compte des incertitudes dans la modélisation de MEMS. En effet, suite aux contraintes imposées par les dimensions micrométriques, les procédés de fabrication des MEMS introduisent des incertitudes tant sur la géométrie que sur les propriétés des matériaux. La prise en compte de ces incertitudes dans les modèles de MEMS est nécessaire afin d'obtenir des informations complémentaires quant à la dispersion qui peut apparaître dans leurs performances. Un état de l'art de la modélisation stochastique de MEMS a permis de choisir les techniques appropriées, pour une implémentation non intrusive en utilisant les modèles déterministes développés dans ce mémoire, à savoir l'approche d'échantillonnage de type Monte-Carlo et la décomposition spectrale dans le chaos polynomial.

Ainsi, en utilisant d'abord des modèles analytiques au sein de ces schémas stochastiques, les comportements électrostatique et mécanique d'une structure typique de MEMS ont été étudiés. L'étude a consisté, dans un premier temps, en une quantification des effets découplés (l'un est aléatoire et les autres fixés) des paramètres incertains en entrée des modèles, à savoir la géométrie de la section de la poutre (rectangle déformé en trapèze), la distance inter-électrodes et le module d'Young du matériau. Puis, une étude de leurs effets conjugués a été menée en les combinant deux à

deux (deux sont aléatoires et l'un est fixé), notamment la géométrie de la section avec la distance inter-électrodes et la géométrie de la section avec le module d'Young.

L'analyse des résultats, avec un seul paramètre d'entrée aléatoire, montre qu'une déviation de la section idéale (rectangulaire) de la poutre est celle qui influe le plus sur la dispersion de la force électrostatique. Si on considère cette fois-ci l'effet combiné des paramètres, bien que leurs lois de distribution en entrée aient été considérées uniformes, la distribution de la force électrostatique en sortie des modèles présente une loi normale. En ce qui concerne le comportement mécanique, la raideur de la poutre est plus sensible à la variation de la géométrie de la section qu'à celle du module d'Young du matériau. De plus, on observe que, lorsque ces deux paramètres sont considérés aléatoires, la loi de distribution de la raideur de la poutre présente une allure bimodale.

Les schémas de modélisation stochastique ont été ensuite appliqués au modèle couplé électrostatique éléments finis 2D / mécanique analytique pour l'étude de la tension de *pull-in* (V_{PI}). Il a été mis en évidence que la distance inter-électrodes est le paramètre le plus influent sur la dispersion de la tension V_{PI} , et ce, lorsque les paramètres aléatoires sont considérés indépendamment. D'autre part, la tension V_{PI} est plus sensible à la combinaison des deux paramètres aléatoires que sont la géométrie de la section et la distance inter-électrodes.

Cette dernière étude a également montré l'intérêt d'un modèle numérique en tant que modèle déterministe au sein de l'approche stochastique non intrusive. Toutefois, étant donné les temps de calcul souvent prohibitifs des modèles éléments finis, il a mis en exergue la nécessité d'employer une approche stochastique plus rapide, comme celle basée sur la décomposition spectrale en chaos polynomial.

Les résultats obtenus sur la modélisation stochastique du phénomène de *pull-in* dans les MEMS constituent une première base d'étude dans ce domaine. Toutefois, les hypothèses considérées restreignent les paramètres d'entrée à des variables indépendantes. Ceci est lié à l'autre point délicat dans ce type d'étude, à savoir de disposer de données expérimentales permettant d'en extraire les paramètres pertinents pour les variables d'entrée (distributions, corrélations entre paramètres, ...).

Par conséquent, en perspective, il est envisagé d'aborder l'étude de l'influence des paramètres incertains, cette fois-ci corrélés.

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse ont montré l'adéquation de modèles numériques, basés sur la méthode des éléments finis, pour l'étude de dispositifs micrométriques. Par ailleurs, nous avons montré l'intérêt de l'utilisation de ces outils pour obtenir des résultats précis quant aux valeurs de la tension et/ou de la distance de *pull-in* de MEMS électrostatiques.

Quoi que représentatifs de la plupart des MEMS électrostatiques, les dispositifs étudiés demeurent de géométrie relativement simple. Toutefois ils permettent de mettre en exergue les phénomènes à tenir en compte dans la modélisation à savoir les effets de

bords et la déformation mécanique. La continuité la plus naturelle à ces travaux serait l'étude de systèmes électrostatiques plus complexes tels les micromiroirs ou encore les actionneurs à peignes inter-digités complets. Les modèles mis en place pourraient alors trouver toute leur utilité et être étendus pour tenir compte des mouvements complexes de tels systèmes.

Afin de pouvoir déterminer d'une manière relativement précise et rapide les effets des incertitudes les plus importantes dans le cas des MEMS électrostatiques, les approches stochastiques introduites ont été appliquées à un modèle électro-mécanique relativement simplifié. Il serait intéressant d'implémenter un modèle déterministe couplé électromécanique en trois dimensions afin, d'une part, d'améliorer la précision des résultats et, d'autre part, de tester les effets d'autres paramètres. Par ailleurs, par manque de données expérimentales, les lois statistiques des entrées ont été supposées uniformes. Il serait nécessaire de pouvoir introduire des lois issues de données expérimentales et de pouvoir comparer les résultats de simulation à des mesures.

Enfin, nous nous sommes intéressés, dans les travaux de cette thèse, aux MEMS électrostatiques car ils sont, pour l'instant, les plus répandus. Les outils que nous avons développés pourraient être adaptés à des études sur des MEMS électromagnétiques qui connaîtront, sans doute, un fort essor dans les prochaines années.

Annexes

A. Formulation en déplacements, discrétisation

Glossaire :

N – nombre de nœuds d'un élément du domaine discret mécanique

q_i – fonctions de forme ou fonctions d'interpolation

ϖ - matrice de fonctions de forme des déformations dans un élément

Cette partie complète le développement du modèle éléments finis mécanique présenté au chapitre 2.

Dans le domaine discret, le champ de déplacements \mathbf{u} est approximé sur un élément ayant un nombre de nœuds N par une combinaison linéaire de la forme :

	$\mathbf{u} = \sum_i q_i(x) \tilde{u}_i = \mathbf{q} \tilde{\mathbf{u}} \quad , i = 1, \dots, N$	(119)
--	--	-------

où q_i sont les fonctions de forme ou fonctions d'interpolation et \tilde{u}_i constituent les degrés de liberté ou les déplacements en chaque nœud d'un élément. De la même manière, on peut écrire :

	$\delta \mathbf{u} = \mathbf{q} \delta \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \varpi \delta \mathbf{u} = \varpi \mathbf{q} \delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{x} \delta \tilde{\mathbf{u}}$	(120)
--	--	-------

où ϖ est la matrice de fonctions de forme des déformations dans l'élément.

Par conséquent, en substituant dans l'équation (62) et (61) $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ par les notations de la relation précédente, dans le domaine discret, les travaux virtuels des forces internes et externes s'écrivent :

	$\delta U = \int_{\Omega} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \tilde{\mathbf{u}} d\Omega = \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} d\Omega \right) \tilde{\mathbf{u}}$	(121)
--	---	-------

	$\delta W = \int_{\Omega} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{q}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_S \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{q}^T \mathbf{t} dS = \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \mathbf{f} d\Omega + \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_S \mathbf{q}^T \mathbf{t} dS$	(122)
--	--	-------

En regroupant les termes de la manière suivante :

	$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} d\Omega$	(123)
--	---	-------

	$\tilde{\mathbf{f}} = \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_S \mathbf{q}^T \mathbf{t} dS$	(124)
--	--	-------

Conclusion générale et perspectives

où \mathbf{K} est la matrice de raideur et $\tilde{\mathbf{f}}$ le vecteur des charges nodales appliquées sur le domaine.

Nous pouvons alors écrire l'équation à résoudre dans le domaine discret :

	$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}}$	(125)
--	---	-------

B. Notions de statistiques

Le contenu de ce paragraphe est basé en grande partie sur le cours de probabilité donné à l'Université des Sciences et Technologies de Lille par Charles Suquet.

Evénements

En utilisant le langage des ensembles pour la modélisation d'une expérience aléatoire, nous pouvons noter Ω un ensemble dont les éléments sont les résultats possibles, appelés *événements élémentaires* d'une expérience aléatoire donnée. Les *événements* sont représentés par des sous-ensembles de Ω .

La probabilité comme fonction d'ensembles

La *probabilité* P est une fonction qui associe à un événement un nombre compris entre 0 et 1 et censé mesurer les chances de réalisation de cet événement. En effet, définir une probabilité, revient à attribuer une masse à chaque événement observable, la masse totale étant égale à 1 pour l'événement certain Ω . Quand les chances de réalisation de tous les événements sont égales, on parle d'*équiprobabilité* ou de *probabilité uniforme*.

Variable aléatoire discrète

Nous avons besoin d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ pour définir une variable aléatoire. Nous allons définir la *variable discrète* sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ comme étant, toute application X de type:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega \rightarrow X(\omega)$$

vérifiant les conditions :

I) L'ensemble des images $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est une partie au plus dénombrable de \mathbb{R} .

Ses éléments seront donc numérotés par des indices entiers :

	$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$	(126)
--	---	---------

II) Pour tout $x_k \in X(\Omega)$, $A_k = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\}$ est un membre de la famille F d'événements qui se voit attribuer une probabilité $P(A_k)$.

Nous pouvons déduire donc que pour chaque élément de Ω :

	$\sum_{x_k \in X(\Omega)} P(A_k) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = 1$	(127)
--	---	-------

Il est important de mentionner que les sommes de l'équation ci-dessus sont des séries convergentes dans le cas où $X(\Omega)$ est infini et des sommes ordinaires si l'ensemble $X(\Omega)$ est fini.

Loi d'une variable aléatoire discrète

On associe à une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, une fonction d'ensemble P_X définie sur la famille de toutes les parties de \mathbb{R} en posant :

	$p_k = P_X(\{x_k\}) = P(A_k) = P(X = x_k)$	(128)
--	--	-------

et pour tout C appartenant à \mathbb{R} :

	$P_X(C) = \sum_{x_k \in C} P(X = x_k) = \sum_{x_k \in C} p_k$	(129)
--	---	-------

Nous avons défini ainsi P_X comme étant une probabilité sur la famille $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ de toutes les parties de \mathbb{R} . En conséquence, P_X est appelée loi de la variable aléatoire X .

Fonction de répartition

La fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X se définit sur \mathbb{R} par :

	$\forall x \in \mathbb{R},$ $F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = P(X \leq x)$	(130)
--	--	-------

Nous pouvons écrire l'expression équivalente également :

	$F_X(x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} P(X = x_k)$	(131)
--	---	-------

Loi discrètes classiques. Loi uniforme sur un ensemble fini de réels

On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble de réels $\{x_1, \dots, x_n\}$ si P_X est l'équiprobabilité sur cet ensemble. Ceci équivaut à dire que l'ensemble de valeurs réalisables de X est :

	$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$	(132)
--	-----------------------------------	-------

et même temps :

	$P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ $\forall k = 1, \dots, n$	(133)
--	--	-------

Variables aléatoires indépendantes

On appelle variables aléatoires indépendantes, les deux v.a. X et Y , si pour tout sous-ensemble A et B de \mathbb{R} , les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants. Ceci s'écrit :

	$\forall A \subset \mathbb{R}, \forall B \subset \mathbb{R}$ $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$	(134)
--	---	-------

Moments de variables aléatoires discrètes

Les moments d'une variable aléatoire sont des quantités numériques spécifiques à la loi associée à la v.a. qui permettent d'obtenir une certaine information sur cette loi.

Espérance

Pour définir l'espérance, nous avons besoin d'une variable aléatoire discrète X vérifiant :

	$\sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k) < +\infty$	(135)
--	---	-------

L'espérance mathématique de X se définit alors comme le réel $\mathbb{E} X$:

	$\mathbb{E} X = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$	(136)
--	--	-------

On peut traduire l'espérance comme étant le barycentre de valeurs possibles de X pondérées par leurs probabilités de réalisation.

Espérance d'une loi uniforme

L'espérance $\mathbb{E} X$ de la variable aléatoire discrète X suivant une loi uniforme sur l'ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ est égale à la moyenne arithmétique des x_i . Nous pouvons écrire pour la v.a. $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'équiprobabilité $P(X = x_i) = 1/n$ pour tout i appartenant à $[1, n]$. On déduit :

	$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	(137)
--	--	-------

Moment d'ordre r

On définit le moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}^+$) de la variable aléatoire X la quantité :

	$\mathbb{E}(X^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^r P(X = x_k)$	(138)
--	---	-------

La quantité définie au-dessus, existe si elle remplit la condition :

	$\mathbb{E}(X^r) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k ^r P(X = x_k) < +\infty$	(139)
--	---	-------

Nous allons noter le moment d'ordre r par $\mathbb{E} X^r$, différent de $(\mathbb{E} X)^r$. Il vaut mentionner que si X possède un moment d'ordre r , elle possède aussi des moments de tout ordre inférieurs à r .

Variance et écart type

Si la variable aléatoire X possède un moment d'ordre 2, la variance et l'écart type de X se définissent par :

	$VarX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$	(140)
--	--	-------

	$\sigma(X) = (VarX)^{1/2}$	(141)
--	----------------------------	-------

On remarque que dans le cas où X représente une grandeur physique, X , $\mathbb{E}X$ et $\sigma(X)$ auront la même unité de mesure, ceci n'étant pas vrai pour $Var X$.

Formule de Koenig

La formule de Koenig permet d'écrire la variance de la v.a. X sous la forme :

	$VarX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$	(142)
--	--	-------

Variance de la loi uniforme

Dans le cas où X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, alors

	$VarX = \frac{n^2 - 1}{12}$	(143)
--	-----------------------------	-------

Loi des grands nombres

On définit la moyenne arithmétique M_n des n premiers termes d'une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, comme étant :

	$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	(144)
--	--------------------------------------	-------

L'expression qu'on vient de donner traduit la loi de grands nombres.

Convergence presque sûre

On suppose que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. On peut dire que X_n converge presque sûrement vers X si l'ensemble des ω avec la propriété « $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ » a pour probabilité 1.

La notation de la convergence presque sûre est :

	$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X$	(145)
--	---	-------

Loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Si $E(|X_1|) < +\infty$, alors

	$M_n \xrightarrow{P.S.} E(X_1)$	(146)
--	---------------------------------	-------

Cette loi nous dit que pour estimer la valeur de la moyenne d'une variable aléatoire, il suffit d'avoir n observations aléatoires de cette v.a., puis de calculer la valeur de M_n . On apprend également qu'il y a convergence. Etant donné que M_n converge presque sûrement vers la moyenne de X_1 , cette variable aléatoire sera appelée *moyenne empirique*.

Pour connaître la vitesse de la convergence, nous introduisons le théorème central limite.

Théorème Central Limite (TCL)

On suppose que Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ayant un moment d'ordre 2. On définit :

	$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (X_k - E(X_1))$	(147)
--	--	-------

,alors Z_n converge en loi vers une gaussienne $N(0, \sigma^2)$.

Il nous reste maintenant à introduire la notion de densité.

Densité

La loi d'une variable aléatoire X est à densité uniforme f si pour tout intervalle de \mathbf{R} , la probabilité d'appartenance de X à cet intervalle peut s'écrire sous forme d'intégrale de f sur cet intervalle. La variable aléatoire réelle X suit la loi de densité f si :

	$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \geq a, \quad P(X \in]a, b]) = \int_a^b f(t) dt$	(148)
--	--	-------

Cette définition nous dit que si une autre variable aléatoire Y de même loi que X , elle aura également la densité f . Il serait donc plus correct de parler de la densité de la loi de X .

Espérance de variables à densité

Si la loi de la variable aléatoire réelle X a une densité f et que l'intégrale $f = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$ converge, on définit l'espérance de X le réel :

	$\mathbb{E} X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$	(149)
--	---	-------

C. Propriétés des polynômes orthogonaux

On considère l'ensemble des polynômes $(h_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $h_n(x)$ est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n

b) $h_n(x)$ possède n racines réelles

c) On considère le polynôme de degré n , $p(x)$ tel que :

	$p(x) = \sum_{i=1}^n p_i h_i(x)$	(150)
--	----------------------------------	-------

où

	$p_n = \langle p, h_n \rangle = \int_a^b p(x) h_n(x) g(x) dx$	(151)
--	---	-------

alors, $p(x)$ est le polynôme qui minimise $\langle g-q, g-q \rangle$ et on obtient :

	$\sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \int_a^b p^2(x) g(x) dx$	(152)
--	---	-------

d) Cette propriété concerne les équations différentielles. Si on a :

	$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}$	(153)
--	---	-------

alors,

	$\beta(x) h_n''(x) + [\beta'(x) + \gamma(x)] h_n'(x) - \eta_n h_n(x) = 0$	(154)
--	---	-------

où

	$\eta_n = n[\gamma_1 + (n+1)\beta_2]$	(155)
--	---------------------------------------	-------

Le Tableau C-I, contient les fonctions β et γ de quelques polynômes usuels.

Polynôme	$\beta(x)$	$\gamma(x)$
Legendre	$1-x^2$	0
Jacobi	$1-x^2$	$(\mu-\lambda)-x(\mu+\lambda)$
Chebyshev	$1-x^2$	x
Gegenbauer	$1-x^2$	$(2\nu-1)x$
Hermite	1	-x
Laguerre	x	$\lambda-x$

Tableau C-I : Fonctions β et γ de quelques polynômes usuels