

N° ORDRE : 000000



École doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France

Université Lille 1 Sciences et Technologies

Ensembles convexes et mosaïques aléatoires.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 novembre 2010

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Lille 1

(spécialité mathématiques)

par

Raphaël Lachièze-Rey

Composition du jury

Rapporteurs : François Baccelli
Ilya Molchanov

Examineurs : Pierre Calka
David Dereudre
Charles Suquet

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Pr. Youri Davydov, mon directeur de thèse. Il a su me proposer des sujets intéressants et stimulants, qui m'ont permis d'explorer la géométrie stochastiques dans différentes directions, et ont probablement avivé mon goût pour la recherche. Tout au long de ma thèse, il s'est montré très disponible, et a été très agréable à côtoyer.

Je tiens également à remercier Pr. Ilya Molchanov, pour avoir fait le déplacement depuis Bern. Ses conseils de tout ordre m'ont permis d'améliorer la qualité de mon travail, et de mieux préparer l'après-thèse.

Je remercie le Pr. François Baccelli, pour avoir accepté de rapporter cette thèse et avoir porté intérêt à mon travail, ainsi que les autres membres du jury : Pierre Calka, Charles Suquet, David Dereudre, qu'ils viennent de loin ou de près.

Je remercie les nombreuses personnes qui m'ont soutenu et conseillé pendant ces années, mon père Marc et mon oncle Gilles pour leur conseils avisés dans le domaine de la recherche. Je remercie mes proches qui ont été présents pendant ces trois années, ma mère Laure, Séverine, Marion, Alexis, entre autres.

Je remercie tous les membres de l'équipe probabilités de Lille 1, pour leur gentillesse et leur sympathie uniformes, Chi, David, Charles, Radu, Laurence, Marie-claude, ainsi que tous les membres du groupe de travail de géométrie stochastique, mes collègues doctorants successifs, Benoît, Amandine, Qidi, Jean-Baptiste, Marc, Joseph, Anne, Bénédicte, Patrick, ainsi que mon ordinateur et la machine à café.

Une pensée spéciale pour Alexis, et son hospitalité, pour un autre Alexis, pour Mohammed, pour Olivier, Diego, Thomas. D'autres remerciements pour Anne et Daniel, puis Marie et Cristobal, qui m'ont également accepté sous leur toit.

Table des matières

Structuration du document	9
---------------------------	---

Partie I Introduction

Chapitre 1 Introduction
--

1.1	Introduction générale	13
1.2	Résumés et résultats	15
1.2.1	Enveloppe convexe du graphe de processus stochas- tiques	15
1.2.2	Réarrangement convexe de champs gaussiens	17
1.2.3	Ergodicité des mosaïques STIT	18
1.2.4	Enveloppes généralisées	19
1.3	Notations et conventions	20
1.3.1	Topologie et métrique	20
1.3.2	Structure euclidienne de \mathbb{R}^d	21
1.3.3	Mesures	21
1.3.4	Géométrie	21
1.3.5	Généralités et conventions sur les fonctions convexes	21

Chapter 2

Introduction

2.1	General introduction	23
2.2	Results	25
2.2.1	Convex hull of the graph of a stochastic process	25
2.2.2	Convex rearrangement of random fields	26
2.2.3	Ergodicity of STIT tessellations	28
2.2.4	Generalised envelopes	29
2.3	Notation and conventions	30
2.3.1	Topology and metric	30
2.3.2	Euclidean structure of \mathbb{R}^d	30
2.3.3	Measures	30
2.3.4	Geometry	31
2.3.5	Basics and conventions for convex functions.	31

Chapitre 3

Rappels

3.1	Convergence faible	33
3.2	Fermés aléatoires	34
3.3	Processus ponctuels	36
3.3.1	Processus ponctuels de Poissons	37

Partie II Corps de la thèse

Chapitre 4

Enveloppes convexes de processus stochastiques

4.1	Préliminaires	44
4.1.1	Etude déterministe de l'enveloppe convexe.	44
4.1.2	Processus de Lévy	45
4.1.3	Processus de Lévy à variation bornée	46
4.2	Fluide en viscosité nulle	48

4.2.1	Cas discret	48
4.2.2	Cas continu	49
4.3	Ensemble extrémal d'un processus aléatoire	51
4.3.1	Résultats de négligeabilité	51
4.3.2	Processus de Lévy à variation bornée	53
4.3.3	Structure de choc d'une turbulence de Burgers	54

Chapitre 5 Réarrangements convexes de champs aléatoires
--

5.1	Réarrangement monotone et transport optimal	60
5.1.1	Cas 1-dimensionnel. Réarrangement convexe du mouvement brownien.	60
5.1.2	Le problème de transport optimal et les opérateurs de réarrangement	61
5.1.3	Consistance des opérateurs de réarrangement	64
5.2	Mesure d'occupation asymptotique du gradient de champs aléatoires	67
5.2.1	Résultats généraux	67
5.2.2	Approximation simpliciale sur K_d	68
5.2.3	Résultats pour les champs gaussiens	71
5.3	Exemples	73
5.3.1	Champ de Lévy	75
5.3.2	Un champ gaussien additif	76
5.3.3	Drap brownien	78
5.4	Discussion	81

Chapitre 6 Mosaïques STIT
--

6.1	Description et propriétés	85
6.1.1	Construction	85
6.1.2	Consistance	87
6.1.3	Itération	88
6.2	Propriété de mélange fort	89

Chapitre 7 Enveloppes généralisées

7.1	Définition	94
-----	----------------------	----

7.1.1	Lien avec l'enveloppe convexe	94
7.1.2	Représentation fonctionnelle	95
7.1.3	Considérations topologiques	97
7.1.4	Configurations et \mathcal{F} -épluchage	99
7.2	Convergence des \mathcal{F} -enveloppes de processus ponctuels	101
7.2.1	Domaine d'attraction des lois α -stables.	101
7.2.2	Convergence de fonctionnelles	103

Partie III Preuves

Chapitre 8

Enveloppes convexes

8.1	Preuve du théorème 4.3.1	109
8.2	Preuve du théorème 4.3.2	110
8.3	Preuve du théorème 4.3.3.	112
8.4	Preuve du théorème 4.3.4	114

Chapitre 9

Réarrangements de champs gaussiens.

9.1	Preuve du théorème 5.1.2	117
9.2	Preuve du théorème 5.2.2	121

Chapitre 10

mosaïques STIT

10.1	Preuve de la Proposition (6.2.2)	125
10.2	Preuve de la proposition 6.2.1	126
10.3	Preuve du théorème 6.2.1	127

Glossaire

Structuration du document

Ce mémoire est organisé de la manière suivante.

La Partie I est la partie introductive. Elle est présente en français (Chapitre 1) et en anglais (Chapitre 2). On fait également des rappels de géométrie stochastique, en français.

La Partie II est le corps de la thèse. Elle contient des introductions plus détaillées, avec notamment plus de références bibliographiques, les motivations, une formulation précise et commentée des résultats de cette thèse.

Les preuves les plus techniques se trouvent dans la Partie III.

Le mémoire comporte un glossaire et une bibliographie.

This thesis is organised as follows.

Part I is introductory. It is written in French (Chapter 1) and in English (Chapter 2). We also give fundamental notions from stochastic geometry, in French.

Part II is the body of the thesis. It contains more detailed introductions, in particular more bibliographical references, motivations, comments and precise statements of the results.

The more technical proofs are gathered in Part III.

The thesis contains a glossary and a bibliography.

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction générale

La géométrie aléatoire fournit une classe très diversifiée de modèles, qui rendent compte de phénomènes interprétables dans un espace multidimensionnel. La notion de base est celle d'ensemble aléatoire, dont on donnera la définition formelle plus tard, et qui peut prendre différentes formes. Par exemple, en biologie, un tissu de cellules est parfois modélisé par la réalisation d'une mosaïque aléatoire. En astrophysique, l'ensemble des étoiles d'une galaxie peut être vu comme un ensemble aléatoire de points, ou processus ponctuel. Ou encore, en écologie, la zone de chasse d'un prédateur est représenté par l'enveloppe convexe des lieux visités par l'individu.

Il est facile de trouver des exemples d'ensembles aléatoires : un intervalle de \mathbb{R} dont les extrémités sont des variables aléatoires, une boule de \mathbb{R}^d dont le centre et le rayon sont des variables aléatoires, un ensemble fini ou infini de telles boules. Pour sortir du cadre paramétrique, on peut également s'intéresser aux ensembles aléatoires définis par un processus stochastique : ses ensembles de niveaux, son épigraphe, son graphe, l'enveloppe convexe de son graphe. La théorie des processus ponctuels a également permis de définir non-trivialement des ensembles aléatoires qui ne sont pas cantonnés à un compact de \mathbb{R}^d . Un processus ponctuel de Poisson homogène permet par exemple de définir un ensemble aléatoire de points Π dans \mathbb{R}^d qui sont en quelque sorte uniformément répartis dans \mathbb{R}^d . Pour fournir un autre exemple, supposons qu'un processus ponctuel Π soit à présent à valeurs dans l'espace de toutes les droites de \mathbb{R}^2 . Soit alors le fermé $F = \cup_{D \in \Pi} D$ formé par la superposition de toutes les droites de Π . Le complémentaire de F peut être décomposé en un ensemble de convexes, qui définit une mosaïque aléatoire de \mathbb{R}^2 .

On peut d'un autre côté imaginer des ensembles aléatoires dont les réalisations sont beaucoup moins agréables. Prenons par exemple le processus $\{X(a); a \in [0, 1]\}$, tel que chaque marginale $X(a)$ soit une variable de Bernoulli indépendante des $\{X(s); s \neq a\}$. L'ensemble aléatoire des zéros de ce "processus-monstre" n'est régulier pour aucune structure. La classe de tous

les fermés \mathfrak{F} fournit un cadre acceptable pour parler d'ensembles aléatoires. En plus d'être stable pour toutes les opérations usuelles sur les ensembles, elle est suffisamment riche pour englober beaucoup de modèles, et fournit des ensembles avec une certaine régularité. La théorie classique, développée indépendamment par Kendall et Matheron, définit un fermé aléatoire comme une variable aléatoire X à valeurs dans \mathfrak{F} tel que, pour tout compact K , $\mathbf{1}_{X \cap K \neq \emptyset}$ soit mesurable. Il est encore possible d'obtenir des ensembles irréguliers dans ce cadre, des structures cantorienne peuvent apparaître, voir par exemple [Dav02]. Il est difficile d'avoir une idée précise de ce qu'est un bel ensemble aléatoire. On se restreint dans cette thèse à des ensembles convexes, ou liés à des objets convexes, de sorte à éviter de trop fortes irrégularités. L'espace des compacts convexes \mathfrak{C} de \mathbb{R}^d a été bien étudié et fournit un cadre agréable pour étudier des ensembles aléatoires.

Les plupart des lois usuelles dans \mathbb{R}^d peuvent s'écrire à l'aide d'une densité et de mesures atomiques. En ce sens la mesure de Lebesgue donne une bonne idée de ce qu'est une variable aléatoire typique. Pour ce qui est de l'espace des fonctions continues, la mesure de Wiener fait de même. La plupart des processus stochastiques étudiés peuvent s'écrire à l'aide du mouvement brownien, ou d'une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien, avec l'ajout éventuel d'un processus de sauts. Il est en revanche difficile de parler de mesure canonique sur \mathfrak{C} , c'est-à-dire qu'il est difficile de parler d'ensemble convexe typique.

Dans cette thèse, on étudie diverses manières de tirer des ensembles convexes aléatoires dans \mathbb{R}^d . Elle est composée de quatre parties indépendantes, chacune traitant d'objets aléatoires issus de la géométrie convexe.

Dans le premier chapitre, on considère l'enveloppe convexe du graphe d'un processus stochastique. Pour les processus étudiés, cet ensemble ne semble pas singulier, dans la mesure où il n'est ni polygonal, ni lisse. On étudie en particulier l'ensemble de ses points extrémaux, qui est lié aux points de chocs dans un fluide soumis à une turbulence de type Burgers en viscosité nulle.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à la répartition des normales au graphe d'un champ aléatoire régulier X défini sur un compact K de \mathbb{R}^d . Plus précisément, si on définit la mesure aléatoire ν_X sur tout borélien B de la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} par

$$\nu_X(B) = \int_K \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\pm \nabla X(z)}{\|\nabla X(z)\|} \in B \right\}} dz,$$

alors il existe un unique convexe C_X dont la mesure surfacique soit ν_X . Notons qu'il y a une expression explicite de ν_X en fonction de la mesure d'occupation μ_X du gradient de X , défini sur tout borélien B de \mathbb{R}^d par

$$\mu_X(B) = \int_K \mathbf{1}_{\nabla X(z) \in B} dz,$$

et qu'il est donc équivalent d'étudier l'une ou l'autre de ces mesures. Le convexe aléatoire est une représentation convexe de X . On s'intéresse en fait au compor-

tement asymptotique de C_{X_n} , lorsque $\{X_n; n \geq 1\}$ est une famille de champs réguliers approchant un champ aléatoire irrégulier X . On exhibera, en particulier dans le cas gaussien, des hypothèses sous lesquelles on a convergence presque sûre de C_{X_n} vers un convexe limite déterministe C_X . Cette convergence correspond à la convergence faible de la suite de mesures d'occupation $\{\mu_{X_n}\}$.

Dans le troisième chapitre, on étudie une mosaïque aléatoire dont toutes les cellules sont des polygones convexes aléatoires. De telles mosaïques sont impliquées dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels issus de la biologie, géologie, ou de la physique des matériaux. La mosaïque que l'on étudie, baptisée *mosaïque STIT*, a la particularité d'être stable sous l'opération appelée *nesting*, qui consiste à nicher dans chaque cellule de la mosaïque une copie indépendante d'elle-même, puis à renormaliser à l'aide d'une dilatation. Cette propriété en fait un modèle naturel pour les processus de division d'objets en sous-objets de nature identique, comme c'est le cas lors de la division de cellules, ou du craquèlement d'une surface soumise à des forces extérieures.

Enfin, dans le quatrième chapitre, on étudie un autre type d'ensemble aléatoire. Étant donné un nuage aléatoire de points compact dans \mathbb{R}^d , on s'intéresse à l'enveloppe convexe de cet ensemble de points. On définit en fait une notion plus générale de convexité, la \mathcal{L} -convexité, où les demi-espaces fermés encapsulant l'enveloppe convexe d'un ensemble sont remplacés par une classe arbitraire de fermés \mathcal{L} . On s'intéresse plus particulièrement à la convergence de fonctionnelles définies par les valeurs extrémales de ces ensembles aléatoires, relatives à l'enveloppe \mathcal{L} -convexe.

Ces différentes approches permettent de comparer diverses manières de considérer un ensemble aléatoire, en particulier un convexe aléatoire. Dans la première partie, on étudie sa régularité par le biais de la topologie de l'ensemble de ses points extrémaux, ce qui nous renseigne sur la régularité du processus sous-jacent. Dans la seconde partie, on s'intéresse à sa mesure surfacique, qui correspond à la mesure d'occupation asymptotique des incréments du champ aléatoire. Dans la quatrième partie, on s'intéresse à un convexe aléatoire défini par ses points extrémaux, eux-mêmes faisant partie d'un ensemble aléatoire. On balaie ainsi un certain éventail des méthodes disponibles en géométrie aléatoire pour appréhender un ensemble. La troisième partie s'occupe plus de questions d'ergodicité de l'ensemble aléatoire, c'est-à-dire du comportement conjoint de deux convexe aléatoires éloignés au sein de la structure de la mosaïque.

1.2 Résumés et résultats

1.2.1 Enveloppe convexe du graphe de processus stochastiques

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $X = \{X(a); a \in I\}$ un processus stochastique. On s'intéresse à l'enveloppe convexe C_X du graphe de X . On étudie en fait l'ensemble \mathcal{E}_X des points extrémaux de C_X , ou plus précisément sa projection

sur l'axe des abscisses $\mathbf{E}_X = \{a; (a, x) \in \mathcal{E}_X \text{ pour un certain } x\} \subseteq I$, dont les propriétés métriques et topologiques sont similaires.

L'ensemble \mathbf{E}_X peut-être interprété physiquement comme l'ensemble des positions initiales des particules d'un fluide qui ne subiront pas de choc lors d'une turbulence de Burgers. Plus précisément, si l'on pose $X_t(a) = X(a) - \frac{a^2}{2t}$, \mathbf{E}_{X_t} est l'ensemble des positions initiales des particules qui forment les extrémités d'amas de particules formés au cours de la turbulence.

On a obtenu des résultats de deux types. Les premiers concernent la mesure de l'ensemble \mathbf{E}_X , et les seconds décrivent sa topologie plus en détail. Concernant la négligeabilité, voici un résumé des théorèmes 4.3.1 et 4.3.2.

Théorème 1.2.1. *Soit X un processus stochastique. Si X vérifie l'une des hypothèses suivantes :*

- (i) *X est un processus de Lévy,*
- (ii) *X est un processus de Lévy intégré,*
- (iii) *X est un processus d'Itô dont la composante brownienne n'est nulle sur aucun intervalle,*

alors p.s.

$$\lambda_1(\mathbf{E}_X) = 0,$$

où λ_1 est la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle.

Nos résultats principaux concernent l'enveloppe convexe du graphe d'un processus de Lévy dont les trajectoires sont à variation bornée.

Théorème 1.2.2. *Soit X un processus de Lévy à variation bornée, et f une fonction concave de classe C^1 . Alors tout point d'accumulation à gauche (resp. à droite) dans \mathbf{E}_{X+f} , noté a , vérifie*

$$\overline{(X+f)}'(a^-) = f'(a) \quad (\text{resp. } \overline{(X+f)}'(a^+) = f'(a)),$$

où \bar{g} représente le majorant concave d'une fonction g .

Dans le cas limite où $f = 0$, ce qui correspond à $t = +\infty$ dans la turbulence de Burgers, cela signifie que les seuls points d'accumulation possibles de \mathbf{E}_X sont les points T^+ et T^- , où X approche respectivement son maximum et son minimum. On peut même caractériser les cas où T^+ est un point d'accumulation à droite ou à gauche. Les résultats sont triviaux lorsque la mesure de Lévy est finie, c'est pourquoi on écarte ce cas dans les hypothèses. On dit que 0 est régulier pour la demi-droite positive si le processus prend des valeurs positives arbitrairement proche de 0.

Théorème 1.2.3. *Soit X un processus de Lévy à variation bornée dont la mesure de Lévy est infinie. Alors T^+ et T^- sont les seuls point d'accumulation possibles de \mathbf{E}_X . Le temps T^+ est un point d'accumulation à gauche (resp. à droite) ssi 0 est régulier pour la demi-droite positive (resp. négative). Des résultats similaires valent pour T^- .*

Grâce à ce théorème, on sait que toute turbulence de Burgers dont la vitesse initiale est un bruit de Lévy à variation bornée n'admettra aucun point régulier du Lagrangien sur \mathbb{R}^+ .

1.2.2 Réarrangement convexe de champs gaussiens

Désormais, X est un champ aléatoire sur une partie compacte K de \mathbb{R}^d . On suppose dans un premier temps que X admet p.p. un gradient, et on considère la *mesure d'occupation* de son gradient, définie sur tout borélien B de \mathbb{R}^d par

$$\mu(B) = \int_K \mathbf{1}_{\{\nabla X(z) \in B\}} dz = \lambda_d(\nabla X^{-1}(B)). \quad (1.1)$$

D'après le théorème de Brenier (Th. 5.1.1, voir aussi [Bre91]), il est possible de représenter cette mesure comme la mesure image du gradient d'une fonction convexe : il existe ψ , convexe sur K , telle que

$$\lambda_d(\nabla X^{-1}(B)) = \mu(B) = \lambda_d(\nabla \psi^{-1}(B)),$$

pour B borélien de \mathbb{R}^d . La fonction aléatoire ψ est appelée *réarrangement convexe* de X et est notée $\psi = \mathbf{C}X$.

Plaçons-nous désormais dans le cas où X est irrégulier et n'admet pas de gradient. On s'intéresse alors à une suite d'approximations $\{X_n\}$, et aux mesures d'occupation respectives $\{\mu_n\}$ définies comme dans (1.1). On note $\psi_n = \mathbf{C}X_n$ les réarrangements convexes correspondants.

Proprement renormalisée, pour une classe importante de champs gaussiens, μ_n converge faiblement et p.s. vers une limite déterministe μ . On utilise alors le théorème suivant, conséquence du théorème 5.1.2.

Théorème 1.2.4. *Soit $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de fonctions convexes sur un compact convexe K pour laquelle la mesure image du gradient $\mu_n = \lambda_d(\nabla f_n^{-1})$ converge faiblement vers une mesure μ . Alors f_n converge sur l'intérieur de K vers une fonction convexe f qui vérifie $\lambda_d \nabla f^{-1} = \mu$.*

Il s'ensuit que, pour une suite renormalisante $\{b_n\}$, on a

$$\frac{1}{b_n} \psi_n \rightarrow \psi,$$

où ψ est la fonction dont la distribution du gradient est μ . La fonction convexe ψ est un *réarrangement convexe asymptotique* de X .

Pour énoncer les résultats obtenus, on doit d'abord définir la manière dont X est approché. Sans rentrer dans les détails, on interpole X par un champ polygonal qui coïncide avec X sur les sommets d'une triangulation \mathcal{T}_n . Le théorème suivant est valable lorsque la famille de triangulations $\{\mathcal{T}_n\}$ s'obtient comme dézoom sur un pavage \mathcal{T} de \mathbb{R}^d . On appelle V_n l'ensemble des sommets de \mathcal{T}_n dans K , et on définit X_n comme l'unique fonction polygonale coïncidant avec X sur V_n et affine au-dessus de chaque simplexe de \mathcal{T}_n . On note

$$\sigma(z, \zeta) = \mathbb{E}(X(z)X(\zeta)), \quad z, \zeta \in K,$$

la covariance de X , et $\Sigma_n(z) = \text{cov}(\frac{1}{b_n} \nabla X_n(z))$, $z \in K$ la matrice de covariance du gradient de X_n convenablement renormalisé. La condition nécessaire de convergence est la convergence en espérance

$$\mathbb{E}(\mu_n(B)) \rightarrow \mu(B),$$

qui est réalisée si on a la convergence de la matrice de covariance $\Sigma_n(z)$ en chaque z de K vers une matrice $\Sigma(z)$. La mesure μ sera alors le mélange des lois Gaussiennes sur $[0, 1]^d$ ayant comme matrices de covariances les $\Sigma(z)$, $z \in [0, 1]^d$. Dans ces conditions on a le résultat suivant.

Théorème 1.2.5. *Soit Θ l'ensemble des points de K^2 où σ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 , et soit V_n l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_n . On fait les hypothèses suivantes :*

- (i) $\sum_n \frac{1}{b_n^d} < \infty$,
- (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K} \|\Sigma_n(z)\| < \infty$,
- (iii) $\sum_n \text{card}(\Theta \cap V_n^2) < \infty$,

alors presque sûrement la mesure μ_n converge faiblement vers μ . En conséquence, on a aussi la convergence $\frac{1}{b_n} \mathbf{C}X_n \rightarrow \psi$, où ψ est l'unique fonction convexe vérifiant $\lambda_d \nabla \psi^{-1} = \mu$.

Ce théorème s'applique en particulier au champ de Lévy et au drap brownien dans \mathbb{R}^d , et à de nombreux processus univariés réels. Il permet de définir une mesure d'occupation asymptotique pour les incréments d'un champ irrégulier.

1.2.3 Ergodicité des mosaïques STIT

On appelle mosaïque toute partition de \mathbb{R}^d par une famille localement finie de compacts convexes. Les mosaïques aléatoires forment une importante classe de modèles en géométrie aléatoire.

Bien qu'une mosaïque soit formellement définie comme une famille dénombrable \mathcal{F} de cellules convexes, il est plus commode de considérer le fermé $M = \cup_{C \in \mathcal{F}} \partial C$ formé par les frontières de ces cellules. On peut réciproquement retrouver les convexes $C \in \mathcal{F}$ comme toutes les composantes connexes du complémentaire de M .

Pour construire des modèles plus riches, on peut définir plusieurs types d'opérations sur les mosaïques. Par exemple, si M_1 et M_2 sont des mosaïques, (définies comme l'ensemble des frontières des cellules) alors la superposition $M_1 \cup M_2$ est une nouvelle mosaïque. Ces techniques ont par exemple été utilisées pour définir des modèles plus réalistes de réseaux de télécommunication dans [Vos09]. D'après une suggestion de Cowan [Cow84], [MecNagWei08] ont également défini l'opération de *nesting*. Etant données deux mosaïques aléatoires M_1 et M_2 , l'idée est de nicher dans chaque cellule de M_1 une copie

indépendante de M_2 . La mosaïque obtenue, notée $\mathcal{I}(M_1, M_2)$, est aussi appelée itération de M_1 par M_2 . Notons que cette opération n'est pas symétrique.

La classe STIT est une classe de mosaïques STable par IIteration. Une mosaïque STIT est décrite localement par la division d'une cellule initiale compacte en plusieurs sous-cellules compactes, qui se divisent à leur tour indépendamment les une des autres. Ces mosaïques sont adaptées pour modéliser des processus naturels de division, ou de craquèlement.

On s'intéresse ici aux propriétés d'ergodicité de la mosaïque. L'idée sous-jacente est que, si l'on considère deux compacts K et K' , si l'on translate K' d'un vecteur h tel que $\|h\| \rightarrow \infty$, alors les événements $K \cap M = \emptyset$ et $(K' + h) \cap M = \emptyset$ sont asymptotiquement indépendants. Plus précisément, on a le résultat suivant, qui en fait implique la propriété plus forte de mélange fort pour la mosaïque.

Théorème 1.2.6. *Soit K et K' des compacts. Alors, si M est une mosaïque STIT, on a*

$$\left| \frac{\mathbb{P}(K \cap M = \emptyset, (K' + h) \cap M = \emptyset)}{\mathbb{P}(K \cap M = \emptyset)\mathbb{P}((K' + h) \cap M = \emptyset)} - 1 \right| \leq \frac{\kappa(K, K')}{\|h\|\zeta(h/\|h\|)},$$

où κ est invariante sous les déplacements de K et K' , et ζ est la fonction sur \mathbb{S}^{d-1} définie par

$$\zeta(u) = \mathbb{E}(\text{card}(M \cap [0, u])).$$

1.2.4 Enveloppes généralisées

L'enveloppe convexe d'une partie A de \mathbb{R}^d est définie comme l'intersection de tous les demi-plans contenant A . Etant donné une classe générale de fermés \mathcal{L} , on appelle \mathcal{L} -enveloppe de A le fermé défini par

$$\text{env}(A; \mathcal{L}) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}, A \subseteq L} L.$$

On considère en fait une classe de fermés \mathcal{L} qui sont les ensembles de niveaux de fonctions continues issues d'une famille \mathcal{F}

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \{ \{x; f(x) \leq c\}; c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F} \}.$$

L'enveloppe correspondante est appelée la \mathcal{F} -enveloppe et est notée

$$\text{env}_{\mathcal{F}}(A) = \text{env}(A; \mathcal{L}_{\mathcal{F}}).$$

Une telle enveloppe est dite \mathcal{F} -convexe. On retrouve par exemple l'enveloppe convexe lorsque \mathcal{F} est la famille de toutes les formes linéaires de \mathbb{R}^d . On définit également l'ensemble des points \mathcal{F} -extrémaux sur un compact A par

$$\text{ext}_{\mathcal{F}}(A) = \{x \in A; f(x) = \max_A f \text{ pour une certaine fonction } f \text{ de } \mathcal{F}\}.$$

En géométrie aléatoire, le comportement de l'enveloppe convexe d'un ensemble aléatoire de points a été beaucoup étudié. Voir [SchWei08], Ch 8.2 par exemple. Considérer une classe plus générale de fonctions permet de faire de même sur un espace topologique général, et d'obtenir une famille plus riche de modèles.

Cette notion généralise celle de convexité, et permet de définir de nouveaux types de statistiques d'ordre, similaires à ce que l'on obtient par l'épluchage convexe (voir [KenMol10], Ch. 2.2.7). Plus précisément, on s'intéresse à une famille iid de variables $\mathbf{X} = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$, et on note $\mathbf{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$. On définit par récurrence le \mathcal{F} -épluchage de \mathbf{X} par

$$\begin{cases} \text{env}_{\mathcal{F}}^1(\mathbf{X}_n) = \text{env}_{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_n), \\ \text{env}_{\mathcal{F}}^{k+1}(\mathbf{X}_n) = \text{env}_{\mathcal{F}}^k(\mathbf{X}_n) \setminus (\mathbf{X}_n \cap \text{ext}_{\mathcal{F}}(\text{env}_{\mathcal{F}}^k(\mathbf{X}_n))). \end{cases}$$

On étudie à k fixé le comportement asymptotique de la k -ème enveloppe $\text{env}_{\mathcal{F}}^k(\mathbf{X}_n)$, également notée $\mathbf{X}_{n,(k)}$ en référence aux statistiques d'ordres. On montre que, sous certaines hypothèses sur la queue de la loi des $\{X_n\}$, les fonctionnelles du type

$$\zeta_n^k = \frac{1}{b_n} \sum_{X_j \in \text{env}_{\mathcal{F}}^k(X_1, \dots, X_n)} X_j$$

convergent vers une distribution limite dont on donnera une expression.

1.3 Notations et conventions

1.3.1 Topologie et métrique

Soit E un espace topologique. On note $\mathfrak{F}(E)$ $\mathfrak{F}(E)$ Fermés de E l'ensemble des fermés de E , $\mathfrak{K}(E)$ l'ensemble des compacts de E . On appelle aussi $\mathfrak{B}(E)$ la tribu borélienne associée sur E . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement $\mathfrak{F}, \mathfrak{K}, \mathfrak{B}$. On note aussi $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.

On note $\text{ad}(A)$ l'adhérence d'une partie A , $\text{int}(A)$ son intérieur, et ∂A sa frontière.

Si E est muni d'une métrique d , on note $B_d(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r pour la distance d , ou $B(x, r)$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés.

On pose $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

Pour $r \geq 0$, on note $A^r = \{x; d(x, A) \leq r\}$ le r -voisinage de A . On note $d_{\mathfrak{F}}$ la distance de Hausdorff sur l'ensemble des fermés, définie par

$$d_{\mathfrak{F}}(A, B) = \inf\{r; A \subseteq B^r, B \subseteq A^r\},$$

et \mathfrak{H} la topologie correspondante.

La plupart des études géométriques réalisées dans cette thèse porte sur des objets de \mathbb{R}^d .

1.3.2 Structure euclidienne de \mathbb{R}^d

L'espace \mathbb{R}^d est naturellement muni d'une structure euclidienne, qui dérive du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. On note \mathbb{S}^{d-1} la boule unité de \mathbb{R}^d .

Pour une matrice Σ , on note

$$\|\Sigma\|_1 = \sum_{ij} |\Sigma_{ij}|, \|\Sigma\|_2 = \sqrt{\sum_{ij} \Sigma_{ij}^2}, \|\Sigma\|_\infty = \sup_{ij} |\Sigma_{ij}|.$$

De manière plus générale, lorsque f est une application qui va d'une partie A de \mathbb{R}^d vers un autre espace normé, dont la norme est encore notée $\|\cdot\|$, on note la norme infinie de f

$$\|f\|_\infty^A = \sup_{x \in A} \|f(x)\|.$$

Pour f mesurable, on note la norme L^1 de f par

$$\|f\|_{L^1}^A = \int_A \|f(x)\| dx.$$

1.3.3 Mesures

On note λ_d la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle sur \mathbb{R}^d , γ_d la distribution normale standard, et $\mathcal{H}_k, k \leq d$, la mesure de Hausdorff k -dimensionnelle, pour $k \leq d$.

1.3.4 Géométrie

Soit \mathfrak{C} l'ensemble des convexes compacts.

Pour deux ensembles A et B de \mathbb{R}^d , et $c \in \mathbb{R}$, on note

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}, cA = \{ca; a \in A\}.$$

1.3.5 Généralités et conventions sur les fonctions convexes

Dans cette partie, on considère une partie convexe compacte K de \mathbb{R}^d . Il est notoire que toute fonction convexe bornée sur $\text{int}(K)$ est continue sur l'intérieur de K , et admet un prolongement continu sur K . On ajoute comme convention dans cette thèse que **toute fonction convexe sur K est continue sur K tout entier**. Cela ne pose pas de problème théorique majeur et permet d'énoncer des résultats d'unicité qui ne tiendraient pas si on autorisait les fonctions convexes à être discontinues sur la frontière de K .

On sait aussi que toute fonction convexe ψ sur K admet un gradient presque partout. On note ce gradient $\nabla\psi$, défini presque partout. Lorsque K est un

intervalle fermé de \mathbb{R} , on peut définir $\nabla f = f'$ partout en posant par convention f' comme la version continue à droite

$$f'(x) = \lim_{a \rightarrow x} \int_x^a f'(u) du.$$

De manière plus générale, lorsqu'on est en présence d'une fonction f admettant des limites à gauche et à droite en chaque point, on suppose par défaut que f est continue à droite. Si f est une fonction aléatoire qui vérifie cette propriété p.s., alors f est supposée càdlàg p.s.

Concernant la convergence de fonctions convexes, on a le résultat suivant.

Théorème 1.3.1. *Soit $\{\psi_n; n \geq 1\}$ une suite de fonctions convexes sur un compact convexe K . Alors les propositions suivantes sont équivalentes (On rappelle que par convention toute fonction convexe est continue).*

- (i) *Pour tout x de K , $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$.*
- (ii) $\|\psi_n - \psi\|_\infty^K \rightarrow 0$.

Chapter 2

Introduction

2.1 General introduction

Stochastic geometry provides a wide class of objects, that can model many multi-dimensional phenomena. The basic notion is that of *random set*, for which a formal definition will be given later. A random set can have different forms. For instance in biology, a cellular tissue can be modelled by a random tessellation. In astrophysics, a group of stars, or of galaxies, is sometimes seen as a random set of points, or *point process*. In ecology, the hunting area of a predator is represented by the convex hull of all places visited by the individual.

There are many trivial examples of random sets: An interval of \mathbb{R} whose extremities are random variables, a ball of \mathbb{R}^d whose center and radius are random variables, a finite or infinite union of such balls. Outside the parametric framework, there are many random sets defined by a stochastic process: Its level sets, its epigraph, the convex hull of its graph. The theory of point processes has also enabled the definition of stationary random sets which are not compact. An homogeneous Poisson point process for instance yields a random set of points Π in \mathbb{R}^d that is somehow uniformly spread on \mathbb{R}^d . For another example, suppose that a point process Π takes value in the space of all lines of \mathbb{R}^2 . Then the random closed set $F = \cup_{D \in \Pi} D$ is formed by the superposition of all lines of Π . The complementary of F can be decomposed in a family of convex sets which define a random tessellation of \mathbb{R}^2 .

It is also possible to imagine random sets which realisations are much less pleasant. Consider for instance the process $\{X(a); a \in [0, 1]\}$, such that each marginal $X(a)$ is a Bernoulli random variable, independent of the $\{X(s); s \neq a\}$. The set of zeros of this “monster-process” is not regular in any sense.

The class of all closed sets \mathfrak{F} provides a pleasant framework to work with random sets. It is stable by all usual operations on sets, is sufficiently rich to allow the definition of many models, and provides sets with some regularity. The classical theory has been developed independently by Kendall and Matheron. It is still possible to obtain irregular random sets, Cantorian structures can appear, see for instance [Dav02]. It is difficult to have a precise idea of

what is a “nice” random set. We narrow the study here to convex sets, or to sets related to convex sets, so as to avoid too strong irregularities. The class of convex sets of \mathbb{R}^d , denoted by \mathfrak{C} , is fairly good understood, and provides a pleasant framework to study random sets.

Most of the usual laws of probability on \mathbb{R}^d can be written with the help of a density and atomic measures. To that extent, Lebesgue measure gives a pretty good idea of what is a typical random variable. As regards to the space of continuous functions, Wiener plays the same role. Most stochastic processes can be written with the help of the Brownian motion, or of a stochastic integral with respect to it, with maybe the addition of a jump process. It is on the other hand difficult to talk of a canonical measure on \mathfrak{C} , which means that we don’t really know what is a “typical” convex set.

In this thesis, we study different manners to draw convex sets in \mathbb{R}^d . It is composed of four independent chapters, each one treating of random objects from the convex geometry.

In the first chapter, we consider the convex hull of the graph of a stochastic process. For the processes under study, this set does not seem to be singular in so far as it is neither polygonal nor smooth. We study in particular the set of its extremal points, which is related to the shock points of a fluid ruled by a Burgers turbulence in vanishing viscosity.

In the second chapter, we are interested in the distribution of the vectors normal to the graph of a random field X on a compact K of \mathbb{R}^d . More precisely, if we define the random measure ν_X on all Borel set B of the unit sphere \mathbb{S}^{d-1} by

$$\nu_X(B) = \int_K \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\pm \nabla X(z)}{\|\nabla X(z)\|} \in B \right\}} dz,$$

then there is a convex set C_X with surface measure ν_X . Remark that there is an explicit expression of ν_X in function of the occupation measure μ_X of X ’s gradient, defined on all Borel set B of \mathbb{R}^d by

$$\mu_X(B) = \int_K \mathbf{1}_{\nabla X(z) \in B} dz,$$

hence it is equivalent to study both measures.

The random convex set C_X is a convex representation of X . We are actually interested in the asymptotic behaviour of C_{X_n} , if $\{X_n; n \geq 1\}$ is a family of regular fields approximating X . We will give hypotheses, in the Gaussian case, under which we have a.s. convergence of C_{X_n} to a limit deterministic convex C_X . This convergence corresponds to the weak convergence of the measures $\{\mu_{X_n}\}$.

In the third part, we study a random tessellation whose all cells are random convex polygons. Such tessellations are involved in the modelisation of many natural phenomena from biology, geology, or materials science. The precise model we are interested in, called *STIT tessellation*, has the particularity of being stable under the operation called *nesting*. This operation consists in

nesting an independent copy of the tessellation in each one of its cell, and rescaling. This property makes of the STIT tessellation a good model for all processes of division of an object in sub-objects of the same nature, like in the division of cells, or the cracking of a surface undergoing external forces.

Finally, in the last part, we study random sets related to point processes. Given a bounded random set of points in \mathbb{R}^d , we are interested in the convex hull of these points. In fact, we consider the more general notion of \mathcal{F} -convexity, where the half-spaces encapsulating the convex hull of a set are replaced by an arbitrary class \mathcal{F} of closed sets. We are more particularly interested in the convergence of functionals defined by their extremal values, relatively to this \mathcal{F} -envelope.

These different approaches allow us to compare diverse ways of considering a random set, in particular a random convex set. In the first part, we study its regularity via the topology of the set of its extremal points, from which we learn about the regularity of the underlying random process. In the second part, we are interested in its surface measure, which corresponds to the asymptotical occupation measure of the increments of a random field. In the last part, we consider alternative objects, inspired of the traditional convex sets. The third part is more about ergodicity questions, meaning it deals with the joint behaviour of two convex sets far away in the tessellation.

2.2 Results

2.2.1 Convex hull of the graph of a stochastic process

Let I be an interval of \mathbb{R} , and $X = \{X(a); a \in I\}$ a stochastic process. We are interested in the convex hull C_X of X 's graph. We actually study the set \mathcal{E}_X that consists of extremal points of C_X , or more precisely its projection onto the horizontal axis $\mathbf{E}_X = \{a; (a, x) \in \mathcal{E}_X \text{ for some } x\} \subseteq I$, for which the metrical and topological properties are similar.

The set \mathbf{E}_X can be physically interpreted as the initial positions of all *shock particles* in a fluid ruled by Burgers equation. More precisely, with $X_t(a) = X(a) - \frac{a^2}{2t}$, \mathbf{E}_{X_t} contains the extremities of intervals for which all elements have finished in the same clump at time t . The right and left accumulation points of \mathbf{E}_{X_t} are the initial positions of particles which have remained untouched during the turbulence. Such points are called *Lagrangian regular points*.

We proved two types of results. The first ones concerns the Lebesgue-negligibility of \mathbf{E}_X , and the others describe its topology in more detail. As regards to the negligibility, here is a summary of Theorems 4.3.1 and 4.3.2.

Théorème 2.2.1. *Let X be a stochastic process of one of the following forms:*

- (i) X is a Lévy process,
- (ii) X is an integrated Lévy process,

(iii) or X is an Itô process whose Brownian component is identically null on no interval.

Then, a.s.

$$\lambda_1(\mathbf{E}_X) = 0,$$

where λ_1 is the 1-dimensional Lebesgue measure.

Our main results concern the convex hull of the graph of a Lévy process which sample paths have bounded variation.

Théorème 2.2.2. *Let X be a Lévy process with bounded variation, and f a concave function of class \mathcal{C}^1 . Then every left (resp. right) accumulation point a in \mathbf{E}_{X+f} satisfies*

$$\overline{X+f}'(a^-) = f'(a) \text{ (resp. } \overline{X+f}'(a^+) = f'(a)),$$

where \bar{g} is the concave majorant of a function g .

In the limit case $f = 0$, which corresponds to $t = +\infty$ in Burgers turbulence, the results mean that the only possible accumulation points of \mathbf{E}_X are T^+ et T^- , where X approaches resp. its supremum and its infimum. It is even possible to characterise the cases in which T^+ is a left or right accumulation point. Remark that the results are trivial if the Lévy measure is infinite, that is why we leave this case aside in our results. The point 0 is said *regular for the positive half-line* if the process has non-negative values arbitrarily close from 0.

Théorème 2.2.3. *Let X be a Lévy process with bounded variation for which the Lévy measure is infinite. Then T^+ and T^- are the only possible accumulation points of \mathbf{E}_X .*

The time T^+ is a left (resp. right) accumulation point iff 0 is regular for the positive (resp. negative). Similar results hold for T^- .

This theorems yields that every turbulence which initial velocity is a stable Lévy noise with bounded variation will have no Lagrangian regular point on \mathbb{R}^+ .

2.2.2 Convex rearrangement of random fields

Let X be a random field on a convex body K of \mathbb{R}^d . Assume at first that X is differentiable a.e., and consider the *occupation measure* of its gradient, defined on all Borel set B of \mathbb{R}^d by

$$\mu(B) = \int_K \mathbf{1}_{\{\nabla X(z) \in B\}} dz = \lambda_d(\nabla X^{-1}(B)). \quad (2.1)$$

From Theorem 5.1.1 (see also [Bre91]), we learn that it is possible to represent this measure as the image of Lebesgue measure under the gradient of a convex function: There exists ψ , convex on K , such that

$$\lambda_d(\nabla X^{-1}(B)) = \mu(B) = \lambda_d(\nabla \psi^{-1})(B),$$

for B a Borel set of \mathbb{R}^d . The random function ψ is called *convex rearrangement* of X and is denoted by $\psi = \mathbf{C}X$.

Consider now the case where X is rough and does not admit a gradient. We study a sequence of approximations $\{X_n\}$, and the respective occupation measure of their gradients $\{\mu_n\}$, defined as in (2.1). Denote by $\{\psi_n = \mathbf{C}X_n\}$ the corresponding convex rearrangements.

Properly renormalised, for a wide class of Gaussian fields, μ_n weakly converges to a limit distribution μ with probability 1. We can use the following fact, consequence of Theorem 5.1.2.

Théorème 2.2.4. *Let f_n be a sequence of function on a convex body K such that the occupation measure $\mu_n = \lambda_d(\nabla f_n^{-1})$ weakly converges to a measure μ . then f_n converges in the interior of K to a convex function f that satisfies $\lambda_d \nabla f^{-1} = \mu$.*

It follows that, for a normalising sequence $\{b_n\}$, we have

$$\frac{1}{b_n} \psi_n \rightarrow \psi,$$

where ψ is the convex function which gradient distribution is μ . The convex function ψ is an *asymptotical convex rearrangement* of X .

To state the obtained results, we first must define the way in which X is approximated. Without going into too much detail, we interpolate X by a polygonal field which coincides with X on the vertices of a triangulation \mathcal{T}_n . The following theorem holds when the family of triangulations $\{\mathcal{T}_n\}$ is obtained as the scaling of a periodic simplicial tessellation \mathcal{T} of \mathbb{R}^d . Call V_n the set of vertices of \mathcal{T}_n in K , and let X_n be the unique polygonal function interpolating X in V_n and affine above each simplex of \mathcal{T}_n . We note

$$\sigma(z, \zeta) = \mathbb{E}(X(z)X(\zeta)), \quad z, \zeta \in K,$$

the covariance of X , and $\Sigma_n(z) = \text{cov}(\frac{1}{b_n} \nabla X_n(z)), z \in K$ the covariance matrix of its gradient, after renormalisation. A necessary condition for convergence is the convergence of the expectation

$$\mathbb{E}(\mu_n(B)) \rightarrow \mu(B),$$

for each Borel set B , which is realised if for each z the covariance matrices $\Sigma_n(z)$ converge in each z to a matrix, denoted by $\Sigma(z)$; μ will then be the mixture of the Gaussian laws on $[0, 1]^d$ which covariances are the $\Sigma(z), z \in [0, 1]^d$. Under these assumptions we have the following result.

Théorème 2.2.5. *Let Θ be the pair of points of K^2 where σ is not of class \mathcal{C}^1 , and let V_n be the set of vertices of \mathcal{T}_n . We make the following hypotheses.*

- (i) $\sum_n \frac{1}{b_n^d} < \infty$,
- (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K} \|\Sigma_n(z)\| < \infty$,

(iii) $\sum_n \text{card}(\Theta \cap V_n^2) < \infty$,

then we have a.s. the weak convergence of μ_n towards μ . As a consequence, we also have the convergence of $\frac{1}{b_n} \mathbf{C}X_n \rightarrow \psi$, where ψ is the unique convex function for which $\lambda_d \nabla \psi^{-1} = \mu$.

This theorem can be in particular applied to the Lévy field and to the Brownian sheet in \mathbb{R}^d , and to many real univariate processes. It allows us to define an asymptotical occupation measure for the increments of random field with rough sample paths.

2.2.3 Ergodicity of STIT tessellations

We call *tessellation* every partition of \mathbb{R}^d by a locally finite family of convex bodies. The random tessellations form an important class of models in stochastic geometry.

Although a tessellation is formally defined as a countable family \mathcal{F} of convex cells, it is more convenient to work with the closed set $M = \cup_{C \in \mathcal{F}} \partial C$ that consists of the borders of the cells of \mathcal{F} . It is conversely possible to retrieve the convex bodies $C \in \mathcal{F}$ as the convex components of M 's complementary.

In order to have richer models, we can define several operations on tessellations. For instance, if M_1 and M_2 are tessellations, (defined as the borders of their cells), then the superposition $M_1 \cup M_2$ is a new tessellation. These techniques have for instance been used for more realistic models in communication networks in [Vos09]. After a suggestion of Cowan [Cow84], [MecNagWei08] have introduced the *nesting* operation. Given two random tessellations M_1 and M_2 , the idea is to nest an independent copy of M_2 into each cell of M_1 . The obtained tessellation, noted $\mathcal{I}(M_1, M_2)$, is also called *iteration* of M_2 by M_1 . Remark that this is not a symmetrical operation.

The STIT denomination comes from the words STable under ITeration. Any tessellation of this class is locally described as the division of an initial cell into several sub-cells, which in turn divide in the same way, independently of one another. These tessellations are adapted to modelling natural processes of division, or of cracking.

We are interested here in the ergodic properties of the tessellation. The underlying idea is that, if one considers two compacts K and K' , if one translates K' by a vector h such that $\|h\| \rightarrow \infty$, then the events $K \cap M = \emptyset$ and $(K + h) \cap M = \emptyset$ are asymptotically independent. More precisely, we have the following result, which implies the stronger property of *strong mixing* for the tessellation.

Théorème 2.2.6. *Let K and K' be compact sets. Then, if M is a STIT tessellation, we have*

$$\left| \frac{\mathbb{P}(K \cap M = \emptyset, (K' + h) \cap M = \emptyset)}{\mathbb{P}(K \cap M = \emptyset)\mathbb{P}((K' + h) \cap M = \emptyset)} - 1 \right| \leq \frac{\kappa(K, K')}{\|h\|\zeta(h/\|h\|)},$$

where $\kappa(K, K')$ is a constant invariant under orthogonal transformations, and ζ is the function defined on \mathbb{S}^{d-1} by

$$\zeta(u) = \mathbb{E}(\text{card}(M \cap [0, u])).$$

2.2.4 Generalised envelopes

The convex hull of a set A of \mathbb{R}^d is defined as the intersection of all closed half-spaces containing A . Given a general class of closed sets \mathcal{L} , we call \mathcal{L} -envelope of A the closed set defined by

$$\text{env}(A; \mathcal{L}) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}, A \subseteq L} L.$$

We actually consider a class of closed sets \mathcal{L} who are the level sets of a family \mathcal{F} of continuous functions

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \{ \{x; f(x) \leq c\}; c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F} \}.$$

The corresponding envelope is called \mathcal{F} -envelope and is noted

$$\text{env}_{\mathcal{F}}(A) = \text{env}(A; \mathcal{L}_{\mathcal{F}}).$$

Such an envelope is said \mathcal{F} -convex. It retrieves for instance the convex hull if \mathcal{F} is the family of all linear forms of \mathbb{R}^d . We also define the set of \mathcal{F} -extremal points of a compact A by

$$\text{ext}_{\mathcal{F}}(A) = \{x \in A; f(x) = \max_A f \text{ for some } f \text{ in } \mathcal{F}\}.$$

In random geometry, there is a wide literature about the behaviour of the convex hull of a random set of points. See [SchWei08], Ch 8.2 for example. This more general class of functions \mathcal{F} allows to do so on an abstract topological space, and to obtain a richer class of models.

This notion generalises that of convexity, and enables us to define new order statistics, similar to those obtained by the *convex peeling* (see [KenMol10], Ch. 2.2.7). More precisely, we consider a family of iid variables $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$, and we note $\mathbf{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$. One defines recursively the \mathcal{F} -peeling of \mathbf{X}_n by $\text{env}_{\mathcal{F}}^1(\mathbf{X}_n) = \text{env}_{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_n)$, $\text{env}_{\mathcal{F}}^{k+1}(\mathbf{X}_n) = \text{env}_{\mathcal{F}}^k(\mathbf{X}_n) \setminus (X_n \cap \text{ext}_{\mathcal{F}}(\text{env}_{\mathcal{F}}^k(\mathbf{X}_n)))$.

We study at fixed k the asymptotical behaviour of the k -th envelope $\text{env}_{\mathcal{F}}^k(\mathbf{X}_n)$, also noted $\mathbf{X}_{n,(k)}$ in reference to order statistics. It will be shown that under some hypotheses, functionals of the type

$$\zeta_n^k = \frac{1}{b_n} \sum_{X_j \in \text{env}_{\mathcal{F}}^k(X_1, \dots, X_n)} X_j$$

converge to a limiting distribution of which an expression will be given.

2.3 Notation and conventions

2.3.1 Topology and metric

Let E be a topological space. Denote by $\mathfrak{F}(E)$ the class of closed sets of E , $\mathfrak{K}(E)$ the class of compact sets of E . Also note $\mathfrak{B}(E)$ the corresponding Borel σ -algebra on E . If there is no ambiguity, simply write $\mathfrak{F}, \mathfrak{K}, \mathfrak{B}$. We also write $\mathfrak{B}_d = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.

Denote by $\text{ad}(A)$ the closure of a set A , $\text{int}(A)$ its interior, and ∂A its border.

If E is endowed with a metric d , the closed ball with center x and radius r is noted $B_d(x, r)$, or $B(x, r)$ if there is no ambiguity.

We note $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

For $r \geq 0$, denote by $A^r = \{x; d(x, A) \leq r\}$ the r -neighbourhood of A . Denote by $d_{\mathfrak{H}}$ the Hausdorff distance on $\mathfrak{K}(E)$, defined by

$$d_{\mathfrak{H}}(A, B) = \inf\{r; A \subseteq B^r, B \subseteq A^r\},$$

and \mathfrak{H} the corresponding topology.

2.3.2 Euclidean structure of \mathbb{R}^d

The space \mathbb{R}^d is naturally equipped with an Euclidean structure, stemming from the canonical scalar product, noted $\langle \cdot, \cdot \rangle$. The corresponding norm is $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Denote by \mathbb{S}^{d-1} the unit sphere of \mathbb{R}^d .

for a matrix Σ , we note

$$\|\Sigma\|_1 = \sum_{ij} |\Sigma_{ij}|, \|\Sigma\|_2 = \sqrt{\sum_{ij} \Sigma_{ij}^2}, \|\Sigma\|_\infty = \sup_{ij} |\Sigma_{ij}|.$$

If f is an application which goes from a subset A of \mathbb{R}^d to another normed space, which norm is also noted $\|\cdot\|$, we introduce the infinite norm of f

$$\|f\|_\infty^A = \sup_{x \in A} \|f(x)\|.$$

For a measurable f , denote the L^1 -norm of f by

$$\|f\|_{L^1}^A = \int_A \|f(x)\| dx.$$

2.3.3 Measures

Denote by λ_d the d -dimensional Lebesgue measure on \mathbb{R}^d , γ_d the standard normal distribution, and \mathcal{H}_k the k -dimensional Hausdorff measure, for $k \leq d$.

2.3.4 Geometry

Let \mathfrak{C} be the class of convex compact sets of \mathbb{R}^d .

For two sets A and B of \mathbb{R}^d , and $c \in \mathbb{R}$, we note

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}, cA = \{ca; a \in A\}.$$

2.3.5 Basics and conventions for convex functions.

Here, we consider a convex body K of \mathbb{R}^d . It is commonly known that any bounded convex function on $\text{int}(K)$ is continuous and admits a continuous extension on K . We add as an assumption in this thesis that **every convex function on K is continuous on K** . This does not yield any theoretical major problem and enables us to give unicity results who would not hold if convex functions were allowed to be discontinuous on the border of K .

We also know that any convex function ψ on K admits a gradient almost everywhere. Denote this gradient by $\nabla\psi$. If K is a closed interval of \mathbb{R} , we define on all K $\nabla f = f'$, with convention that f' is the right continuous version of f 's derivative

$$f'(x) = \frac{1}{a-x} \lim_{a \rightarrow x, a > x} \int_x^a f'(u) du.$$

As regards to the convergence of convex functions, we have the following result.

Théorème 2.3.1. *Let $\{\psi_n; n \geq 1\}$ a family of convex functions on K . Then the following assertions are equivalent.*

- (i) *For all x in K , $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$.*
- (ii) $\|\psi_n - \psi\|_\infty^K \rightarrow 0$.

Chapitre 3

Rappels

3.1 Convergence faible

Soit E un espace topologique muni de la tribu borélienne.

La convergence faible entre mesures est notée \Rightarrow , et est définie de la manière suivante. Etant donnée une famille de mesures $\{\mu_n\}$ et une mesure μ , on a $\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi, pour toute fonction continue bornée, on a

$$\int f(x)\mu_n(dx) \rightarrow \int f(x)\mu(dx).$$

La convergence faible est souvent caractérisée de la manière suivante. On dit qu'un borélien B est un ensemble de μ -continuité si $\mu(\partial B) = 0$. La convergence $\mu_n \Rightarrow \mu$ a lieu si pour tout borélien B de μ -continuité,

$$\mu_n(B) \rightarrow \mu(B).$$

On peut également réduire la classe de boréliens sur lesquels il est nécessaire d'avoir la convergence grâce à la notion de *classe de convergence* (*convergence-determining class* dans [Bil68]). Une classe \mathcal{A} de boréliens est dite *de convergence* si la convergence en chaque ensemble de μ -continuité B de \mathcal{A} entraîne la convergence faible $\mu_n \Rightarrow \mu$. L'existence de classes de convergence dénombrables est utile lorsque l'on étudie des mesures aléatoires, car si l'on a la convergence p.s de $\mu_n(B)$ vers $\mu(B)$ pour chaque B , alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ presque sûrement. D'après [Bil68], on peut trouver dans \mathbb{R}^d une classe de convergence dénombrable (les unions finies de boules à centre et rayons rationnels par exemple).

La notion de *tension* est essentielle pour parler de convergence faible. On dit qu'une famille de mesures $\{\mu_n\}$ est tendue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tel que $\mu_n(K^c) \leq \varepsilon$ pour tout n . D'après [Bil68], il est à noter que toute famille tendue de mesures est compacte pour la convergence faible, et qu'en particulier si la limite éventuelle de toute sous-suite $\{\mu_{n'}\}$ est toujours une mesure fixée μ , alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Dans \mathbb{R}^d , il est également possible de caractériser la convergence faible à l'aide de la fonction caractéristique. Pour une mesure μ , on note φ_μ la fonction

caractéristique

$$\varphi_\mu(h) = \int e^{ihx} \mu(dx), \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

On a alors le résultat suivant, attribué à Paul Lévy. La convergence $\mu_n \Rightarrow \mu$ a lieu ssi, pour tout h de \mathbb{R}^d , $\varphi_n(h) \rightarrow \varphi(h)$. Il est ici judicieux de remarquer que ce résultat tient encore si l'on n'a la convergence que pour h dans un ensemble de mesure complète. Si la suite de mesures considérées est aléatoire, on a le résultat suivant.

Théorème 3.1.1. *Soit $\{\mu_n; n \geq 1\}$ une famille de mesures aléatoires, et μ une mesure aléatoire. Alors on a p.s. la convergence $\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi, pour presque tout h de \mathbb{R}^d , on a*

$$\mathbb{P}(\varphi_{\mu_n}(h) \rightarrow \varphi_\mu(h)) = 1.$$

Démonstration. D'après le théorème de Fubini, on a un sous-ensemble A de \mathbb{R}^d de mesure complète tel que, avec probabilité 1, pour tout h de A ,

$$\varphi_{\mu_n}(h) \rightarrow \varphi_\mu(h).$$

Et dans ce cas, la convergence $\mu_n \Rightarrow \mu$ a lieu. □

Pour une variable aléatoire Y à valeurs dans \mathbb{R}^d , la fonction caractéristique est notée

$$\varphi_Y(h) = \mathbb{E}(e^{iYh}).$$

Au passage, un résultat de base de la théorie des fonctions caractéristiques stipule que, lorsque Y est une variable gaussienne centrée de matrice de covariance $\text{cov}(Y)$, on a

$$\varphi_Y(h) = e^{-1/2 \langle h, \text{cov}(Y)h \rangle}, \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

3.2 Fermés aléatoires

Les parties 3 et 4 traitent d'objets plus familiers de la géométrie aléatoire traditionnelle. Voir [Mol05] pour un développement détaillé de la théorie des fermés aléatoires. Nous présentons dans cette introduction les notions nécessaires à la compréhension de ces chapitres. On se place dans un espace topologique E .

Pour parler de fermé aléatoire, il convient de définir une tribu sur l'ensemble \mathfrak{F} . Cette tribu sera issue d'une topologie, appelée topologie de Fell. Les ouverts de cette topologie sont les

$$\mathfrak{F}^K = \{F \in \mathfrak{F}; F \cap K = \emptyset\}, \quad K \in \mathfrak{K}$$

et les

$$\mathfrak{F}_O = \{F \in \mathfrak{F}; F \cap O \neq \emptyset\} \text{ pour } O \text{ ouvert.}$$

La tribu correspondante, appelée tribu d'Effros, est notée \mathfrak{E} . Il est important de remarquer que cette tribu est engendrée par les \mathfrak{F}_K , $K \in \mathfrak{K}$. En lien avec cette remarque, étant donné un fermé quelconque A , il est possible de retrouver A si l'on connaît les valeurs de toutes les variables $\mathbf{1}_{A \cap K \neq \emptyset}$, pour $K \in \mathfrak{K}$. Cette remarque semble triviale, puisqu'il suffit en effet de considérer les cas $K = \{x\}$, $x \in E$. Cependant, cette idée de ne considérer un fermé qu'à travers les compacts qu'il intersecte est fondamentale en théorie des fermés aléatoires. En effet, si désormais X est un fermé aléatoire, la loi de X est uniquement déterminée par toutes les valeurs

$$\mathbf{T}_X(K) = \mathbb{P}(X \cap K \neq \emptyset), \quad K \in \mathfrak{K}.$$

On précisera et commentera ce résultat plus bas. La fonction $\mathbf{T}_X(K)$ est appelée *fonctionnelle de capacité* du fermé aléatoire X . Notons dès à présent deux propriétés fondamentales de \mathbf{T}_X .

Semi-continuité supérieure

La fonction \mathbf{T}_X est semi-continue supérieurement, dans le sens où, si on a une suite décroissante de compacts K_n , alors, avec $K = \bigcap_n K_n$,

$$\lim_n \mathbf{T}_X(K_n) = \mathbf{T}_X(K).$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que p.s.

$$\mathbf{1}_{K \cap X \neq \emptyset} = \lim_n \mathbf{1}_{K_n \cap X \neq \emptyset} \quad p.s.$$

et d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Alternance

En raison des propriétés élémentaires sur les ensembles, la fonctionnelle \mathbf{T}_X vérifie nécessairement certaines relations algébriques.

La plus simple de ces relations vient du fait que, pour K, K' dans \mathfrak{K} , on a $\mathbf{1}_{K \cap X = \emptyset} \geq \mathbf{1}_{(K \cup K') \cap X = \emptyset}$, et donc $\mathbf{T}_X(K) \leq \mathbf{T}_X(K \cup K')$.

Si désormais on considère des compacts $K_0, K'_0, K_1, \dots, K_n$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X \text{ ne touche pas } K_0; X \text{ touche } K_1, K_2, \dots, K_n) \\ & \geq \mathbb{P}(X \text{ ne touche pas } K_0 \cup K'_0; X \text{ touche } K_1, K_2, \dots, K_n). \end{aligned}$$

Il se trouve que la classe de toutes les relations de ce type caractérise algébriquement la classe des fonctionnelles de capacité. Pour être plus précis, définissons

$$\mathbf{U}_0(K) = 1 - \mathbf{T}_0(K), \quad K \in \mathfrak{K},$$

et par récurrence

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k(K_0; K_1, \dots, K_k) \\ = \mathbf{U}_{k-1}(K_0; K_1, \dots, K_{k-1}) - \mathbf{U}_{k-1}(K_0 \cup K_k; K_1, \dots, K_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Il est facile de montrer qu'on a toujours

$$\mathbb{P}(X \text{ ne touche pas } K_0; X \text{ touche } K_1, K_2, \dots, K_n) = \mathbf{U}_n(K_0; K_1, \dots, K_n).$$

Maintenant, étant donné simplement une fonction positive \mathbf{T} sur \mathfrak{K} , on dit que T est **complètement alternée** ssi les fonctions \mathbf{U}_k définies par récurrence comme dans (3.1) vérifient

$$\mathbf{U}_k(K_0; K_1, \dots, K_n) \geq 0.$$

théorème de Choquet

On peut alors énoncer le théorème de Choquet, pierre angulaire de la théorie des fermés aléatoires.

Théorème 3.2.1. *Soit \mathbf{T} une fonction de \mathfrak{K} dans $[0, 1]$. Alors il existe un fermé aléatoire A tel que $\mathbf{T} = \mathbf{T}_A$ ssi*

- (i) \mathbf{T} est semi-continue supérieurement,
- (ii) et \mathbf{T} est complètement alternée.

Dans ce cas, il y a unicité de la loi de A .

Ce théorème est par exemple démontré dans [SchWei08]. Plusieurs conséquences découlent facilement de ce théorème. Par exemple, si deux fermés aléatoires A et B vérifient $\mathbf{T}_A = \mathbf{T}_B$, alors $A \stackrel{(d)}{=} B$. On peut également s'en servir pour donner l'existence de limites projectives, ou de limites classiques de fermés aléatoires, voir pour cela [Mol05].

3.3 Processus ponctuels

Les processus ponctuels sont une classe particulière d'ensembles aléatoires. Chaque réalisation est constituée d'un ensemble dénombrables de points sur E . Ils peuvent être utilisés pour modéliser de nombreux phénomènes naturels multidimensionnels.

On appelle configuration tout ensemble dénombrable de points D localement fini, et on note \mathcal{D} l'ensemble de toutes les configurations. Tout élément de \mathcal{D} est assimilable à la mesure atomique définie pour chaque borélien A par

$$\mu_D(A) = \text{card}(A \cap D),$$

autrement dit $\mu_D = \sum_{x \in D} \delta_x$, où δ_x est la mesure de Dirac en x . On munit D de la topologie vague \mathfrak{D} , définie par $D_n \xrightarrow{v} D$ ssi

$$\text{card}(D_n \cap K) \rightarrow \text{card}(D \cap K)$$

pour tout compact K tel que $\mu_D(\partial K) = 0$. En termes de mesures, on a $\mu_{D_n} \xrightarrow{v} \mu_D$ ssi pour toute fonction continue à support compact f , on a

$$\int_E f(x) \mu_{D_n}(x) \rightarrow \int_E f(x) \mu_D(x).$$

Si $D_n \xrightarrow{v} D$, pour tout compact K de μ_D -continuité (i.e. tel que $D \cap \partial K = \emptyset$), si l'on numérote les points de $D \cap K = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$, alors on peut trouver pour n suffisamment grand $\{x_{n,1}, \dots, x_{n,q}\} = D_n \cap K$ tels que $x_{n,i} \rightarrow x_i$ pour tout i .

On munit D de la tribu borélienne associée à la convergence dans \mathfrak{D} . On appelle processus ponctuel toute variable aléatoire à valeurs dans D . Si X est un processus ponctuel, on appelle intensité de X la mesure

$$\mathbf{I}_X(A) = \mathbb{E}(\text{card}(X \cap A)),$$

pour A borélien.

3.3.1 Processus ponctuels de Poissons

Une classe particulière des processus ponctuels est celle des processus ponctuels de Poisson. Ils possèdent de belles propriétés mathématiques et permettent de modéliser un grand nombre de phénomènes naturels. On dit qu'un processus ponctuel est poissonien ssi, pour tous boréliens disjoints A_1, \dots, A_q , les variables aléatoires $\mu_X(A_1), \dots, \mu_X(A_q)$, sont des variables de Poisson indépendantes. Notons que dans ce cas les paramètres des lois de Poisson correspondantes sont nécessairement

$\mathbf{I}_X(A_1), \dots, \mathbf{I}_X(A_q)$, respectivement. A titre d'exemple, si la mesure μ est finie, il est possible de construire directement un tel processus. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\mu(E)$, et $\{X_k; k \in \mathbb{Z}\}$ une famille iid de variables de loi $\frac{1}{\mu(E)}\mu(\cdot)$. Alors l'ensemble $X = \{X_1, \dots, X_N\}$ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité μ . Ce résultat permet de comprendre un processus ponctuel de Poisson comme en quelque sorte une famille iid de point tirés au hasard suivant la mesure μ .

Cet exemple permet par extension de construire un processus ponctuel de Poisson sur n'importe quel espace mesuré σ -fini.

Deuxième partie

Corps de la thèse

Chapitre 4

Enveloppes convexes de processus stochastiques

Dans ce chapitre, nous allons étudier le convexe aléatoire qui forme l'enveloppe du graphe d'un processus aléatoire, et plus précisément ses points extrémaux. Les temps auxquels le graphe du processus atteint ses points extrémaux sont appelés *temps extrémaux*.

L'ensemble des points extrémaux est négligeable p.s. pour un processus de Lévy, un processus de Lévy intégré ou un processus d'Itô. Dans le cas d'un processus de Lévy à variation bornée, on peut montrer que l'ensemble des temps extrémaux est discret, sauf autour du temps éventuel T où le processus atteint son maximum, qui est évidemment toujours un temps extrémal.

L'étude des temps extrémaux d'un processus est à relier à l'étude d'un fluide uni-dimensionnel soumis à une turbulence de Burgers.

Introduction

Il y a de multiples raisons d'étudier l'enveloppe convexe C_X d'un processus aléatoire X . D'un point de vue géométrique, c'est un bon indicateur de la structure du graphe, à la fois localement et globalement, et elle capture quelques aspects de la régularité de X . [Gro83] a été le premier à étudier ce problème, avec pour X un mouvement brownien standard et $I = \mathbb{R}^+$, établissant les principaux résultats, et [Pit82] a donné une description simple et exhaustive du majorant concave, dont le graphe forme la partie supérieure de l'enveloppe convexe. [Ber00] a étudié un exemple non-gaussien, établissant la structure du minorant convexe du processus de Cauchy. [Dav02] a étudié la mesure des points extrémaux de C_X pour un processus gaussien sous des hypothèses plus générales.

On s'intéresse ici à l'ensemble \mathcal{E}_X des points extrémaux de C_X , et plus précisément à sa projection \mathbf{E}_X sur l'axe horizontal, qui a essentiellement les mêmes propriétés. On note \mathcal{E}_X^+ et \mathcal{E}_X^- les points de \mathcal{E}_X se trouvant respectivement dans la partie supérieure et inférieure de C_X , et \mathbf{E}_X^+ et \mathbf{E}_X^- leurs

projections respectives sur l'axe des abscisses. Les points de \mathbf{E}_X sont appelés *temps extrémaux*, et ceux de \mathbf{E}_X^+ (resp. \mathbf{E}_X^-), *temps extrémaux supérieurs* (resp. *inférieurs*). L'ensemble \mathbf{E}_X est appelé *ensemble extrémal*, et \mathbf{E}_X^+ (resp. \mathbf{E}_X^-) *l'ensemble extrémal supérieur* (resp. *inférieur*). Ces structures ont une interprétation physique dans une turbulence de Burgers ayant X comme donnée initiale.

Imaginons que des particules $\{P_k; k \in \mathbb{Z}\}$ soient disposées sur la ligne réelle avec positions initiales respectives $\{k \in \mathbb{Z}\}$ et vitesses initiales aléatoires $\{v_k; k \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que chaque groupe de particules évolue librement jusqu'à rencontrer un autre groupe, et lorsqu'un groupe de masse m et de vitesse v rencontre un autre groupe de masse m' et de vitesse v' , ils forment un amas unifié de masse $m + m'$ et de vitesse $\frac{mv + m'v'}{m + m'}$, de telle sorte que la masse et le moment soient préservés. L'énergie n'est en général pas conservée sur ce type de choc, c'est pourquoi on parle de choc inélastique. Soit ψ la fonction linéaire par morceaux sur \mathbb{R} , affine sur chaque intervalle $[k, k + 1]$, telle que $\psi(k + 1) - \psi(k) = -v_k$ pour tout k . On montre dans le théorème 4.2.1 que, si les marginales des lois des vitesses sont non-atomiques, la condition nécessaire et suffisante pour une particule P_k de ne jamais entrer en collision avec ses deux voisins est que k soit dans \mathbf{E}_ψ^+ .

En mécanique des fluides, ce problème géométrique est étroitement relié à la solution de l'équation de Burgers uni-dimensionnelle en viscosité nulle. Si $v(x, t)$ est le champ de vitesses d'un fluide incompressible, Burgers a introduit l'équation

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = \epsilon \partial_{xx} v \quad (4.1)$$

comme un modèle simple de turbulence hydrodynamique, où $\epsilon > 0$ est la viscosité. Cette équation est une version simplifiée de Navier-Stokes, et même s'il est répandu parmi les physiciens qu'elle ne décrit pas une turbulence de manière très pertinente, elle est largement utilisée dans de nombreux problèmes physiques tels que la formation de structure à grande échelle dans l'univers. Voir [Woy99] pour des informations plus détaillées. Frisch a expliqué pourquoi une description probabiliste de la turbulence est nécessaire, et il y a eu depuis les années 80 une littérature abondante sur la solution de l'équation de Burgers avec conditions initiales aléatoires en viscosité nulle, définie comme la limite de la solution quand la viscosité tend vers 0.

Il est expliqué dans la Section 4.2 comment déduire une description topologique du fluide de l'étude de l'enveloppe convexe de $\psi + f$, où $\partial_a \psi(0, \cdot) = -v$, et f est une dérive parabolique. Si la dérive est retirée, l'étude de l'enveloppe convexe de ψ fournit la structure asymptotique du fluide lorsque le temps tend vers l'infini. En particulier, les points de \mathbf{E}_ψ^+ sont les extrémités des *intervalles de choc*, c'est-à-dire les intervalles qui contiennent les positions initiales de toutes les particules qui ont fini dans un même amas en un temps fini. Si a est un point d'accumulation à droite et à gauche dans \mathbf{E}_ψ^+ , cela signifie que a n'a

subi de choc ni avec ses voisins de droite, ni avec ses voisins de gauche durant la turbulence. Un tel point est dit *régulier du Lagrangien*.

De nombreux auteurs se sont penchés sur la structure de choc d'un fluide aux conditions initiales aléatoires. Voir [Woy99] pour un compte-rendu détaillé des progrès dans cette directions. Les articles de référence [Sin92], [SheAur-Fri92], [Ave95] et [Ave95b], ont obtenu des résultats dans un cadre gaussien. Dans le domaine des processus de Lévy, [Ber98] et [Ber98b] ont étudié la structure de choc quand la vitesse initiale est un bruit de Lévy stable, avec un intérêt particulier pour l'ensemble des points réguliers du Lagrangien. On s'intéresse ici asymptotiquement à la topologie de la structure de choc d'une turbulence dont la vitesse est un bruit de Lévy, et on donne des résultats métriques pour une classe plus générale de processus markoviens, et pour les processus d'Itô. L'hypothèse d'auto-similarité présente dans les travaux antérieurs est relâchée, et les résultats principaux concernent la classe générale des processus de Lévy à variation bornée. On va prouver dans ce cadre qu'avec probabilité 1, il n'y a pas de point régulier du Lagrangien (c'est-à-dire que tous les points vont subir une collision) sur un intervalle non-compact. Lorsque l'intervalle est compact, la seule particule susceptible de rester intacte est celle dont la position initiale est T , le point où le processus de Lévy approche son maximum. On montre que c'est effectivement un point régulier du Lagrangien ssi 0 est régulier pour les deux demi-droites réelles, c'est-à-dire si le processus prend des valeurs dans \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- arbitrairement proche de 0.

Etant donné une fonction f sur un intervalle de \mathbb{R} , on note \bar{f} la plus petite fonction concave majorant f , ou *majorant concave* de f , et $\underline{f} = -(\overline{-f})$ son *minorant convexe*. On a également $\mathcal{E}_{\bar{f}} = \mathcal{E}_f^+$ et $\mathcal{E}_{\underline{f}} = \mathcal{E}_f^-$.

On établit les résultats en termes de l'enveloppe convexe d'un processus aléatoire X . Il sera prouvé ici que, si X appartient à une certaine classe de processus markoviens, dits *réversibles*, alors \mathbf{E}_X est p.s. négligeable, et il en est de même pour son processus intégré. Les mêmes résultats valent si X est un processus d'Itô. Le résultat principal concerne le cas où X est un processus de Lévy à variation bornée. L'ensemble \mathbf{E}_X^+ est p.s. dénombrable, avec accumulation possible uniquement au temps T où X tend vers un extremum. On donne également les conditions sous lesquelles T est un point d'accumulation de \mathbf{E}_X^+ , sur sa droite ou sur sa gauche, en termes de la régularité de 0 pour la demi-droite réelle, (on dit que 0 est régulier pour la demi-droite positive si X prend des valeurs dans \mathbb{R}_+ arbitrairement proche de 0). Plus généralement, si une fonction lisse déterministe f est ajoutée à X , on montre que les points d'accumulation à droite (resp. à gauche) de \mathbf{E}_X^+ doivent vérifier $f'(a) = (\overline{X + f})'(a^+)$ (resp. $f'(a) = (\overline{X + f})'(a^-)$).

Dans les préliminaires, on introduit rigoureusement toutes les notations spécifiques à ce chapitre, et on rappelle quelques faits concernant les processus

de Lévy. Ensuite, dans la Section 4.2, on explique la relation entre l'enveloppe convexe d'une fonction ψ et la description de la structure de choc d'un fluide de potentiel initial ψ . Bien que ce ne soit pas un modèle très employé, on présente également le cas discret, qui aide à la compréhension des principaux aspects du problème. Finalement, on donne les résultats concernant l'enveloppe convexe de certain processus aléatoires, avec une description complète pour un processus de Lévy à variation bornée.

On étudie les propriétés métriques et topologiques de l'ensemble extrémal \mathbf{E}_X d'un processus càdlàg $\{X(a) ; a \in I\}$, sur un intervalle I de \mathbb{R} . La symétrie du problème nous autorise à n'étudier que \mathbf{E}_X^+ , les propriétés de \mathbf{E}_X^- étant similaires. On définit à cette fin $X^*(a) = \max(X(a^-), X(a))$, de telle sorte que $a \in \mathbf{E}_X^+$ ssi $(a, X^*(a))$ est un point extrémal supérieur du graphe de X .

Pour un processus X défini sur un voisinage droit d'un point $a \in \mathbb{R}$, on note $R_a^+(X)$ l'événement

$$\forall \epsilon > 0, \exists s \in]a, a + \epsilon[, X(s) \geq X(a)$$

et $R_a^-(X) = R_a^+(-X)$. Si le processus vérifie la *loi du zéro-un* de Blumenthal, ce qui est le cas des "beaux" processus markoviens, alors ces deux événements sont triviaux. De plus, pour les processus de Lévy, leur probabilités ne dépendent pas de a . Dans ce cas, on écrit simplement $R^+(X)$ et $R^-(X)$, et $p^+(X) = \mathbb{P}(R^+(X))$, $p^-(X) = \mathbb{P}(R^-(X))$, ces deux nombres étant dans $\{0, 1\}$. La valeur de $p^+(X)$ est liée à la régularité de la demi-droite réelle pour 0 lorsque X a une mesure de Lévy infinie. On dit que 0 est *régulier pour la demi-droite positive* lorsque $p^+(X) = 1$, et qu'il est *régulier pour la demi-droite négative* lorsque $p^-(X) = 1$.

Dans tout l'article, pour un processus X défini sur un intervalle I , la notation M_a désigne $(a, X^*(a))$, où a appartient à I et peut-être aléatoire.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Etude déterministe de l'enveloppe convexe.

Soit f une fonction sur un intervalle réel. Quelques assertions peuvent être faites sur l'ensemble extrémal de f .

Proposition 4.1.1. *L'ensemble \mathbf{E}_f est fermé. Si f est dérivable, \bar{f} est de classe \mathcal{C}^1 et \mathbf{E}_f n'a pas de points isolés. Si f^* ne possède que des discontinuités de première espèce mais n'est continue sur aucun intervalle (ou n'est monotone sur aucun intervalle), alors \mathbf{E}_f est totalement déconnecté.*

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de remarquer que l'ensemble des points extrémaux \mathcal{E}_C de tout convexe C est fermé. Soit x_n une suite d'éléments de \mathcal{E}_C qui converge vers un point x de \mathbb{R}^2 . Comme la frontière

∂C est fermée, $x \in \partial C$. Le point x ne peut pas être dans l'intérieur d'un segment de ∂C , sinon ç'aurait aussi été le cas pour x_n à partir d'un certain rang. On a donc $x \in \mathcal{E}_C$.

Supposons désormais que f est dérivable. Pour montrer que \bar{f} est de classe \mathcal{C}^1 , il suffit de le montrer en les points extrémaux. Par l'absurde, supposons que ça n'est pas vrai en un point $a \in \mathcal{E}_f$. Alors $\bar{f}'(a^-) > \bar{f}'(a^+)$ et donc f n'est pas dérivable en a . Le majorant concave de f est bien de classe \mathcal{C}^1 . Comme un point isolé de \mathcal{E}_f induit une discontinuité dans la dérivée de \bar{f} , \mathcal{E}_f n'a pas de points isolés.

Pour la dernière assertion, si un segment $[b, c]$ est inclus dans \mathbf{E}_f , cela veut dire que pour tout $a \in [b, c]$, $f^*(a) = \bar{f}(a)$, et f^* est donc monotone et continue sur un sous-segment de $[b, c]$ d'intérieur non-vide. \square

Les réalisations typiques du mouvement brownien ou des processus de Lévy dont la mesure est infinie sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- vérifient la propriété de n'être continu ou monotone sur aucun intervalle, c'est aussi le cas pour de nombreuses autres diffusions. En conséquence, il faudra s'attendre à une structure topologique complètement déconnectée pour l'ensemble extrémal \mathbf{E}_X . Les questions qui suivent sont alors : \mathbf{E}_X est-il de mesure nulle ? possède-t-il des points isolés ? Des points d'accumulation ? Est-il dénombrable ? Si non, quelle est sa dimension de Hausdorff ? On tentera de répondre à ces questions dans le reste du chapitre.

Ces assertions sont principalement d'ordre topologique, mais il est plus difficile d'avoir des informations d'ordre métrique sur \mathbf{E}_f . On a l'exemple suivant, qui démontre qu'une fonction irrégulière n'a pas nécessairement un petit ensemble extrémal.

Exemple 4.1.1. *Soit $0 < u < 1$. Il existe une fonction f càdlàg telle que $\lambda_1(\mathbf{E}_f^+) = u$ et f n'est continue ni monotone sur aucun intervalle.*

Démonstration. Soit L un ensemble de Cantor de mesure u , et g une primitive de la fonction indicatrice de L . Alors $\text{ext}(g) = \partial L = L$ est de mesure u . Le complémentaire de L est un ouvert, il peut donc être décomposé en un union disjoint dénombrable d'intervalles ouvert $L = \cup_n I_n$. Pour chaque n , la restriction de g à I_n est affine, et on peut trouver f_n qui coïncide avec g_n aux extrémités de I_n , qui n'est ni continue ni monotone, et qui est majorée par g_n . La fonction f obtenue en recollant toutes les fonctions f_n sur les I_n et coïncidant avec g sur L vérifie bien la conclusion annoncée. \square

4.1.2 Processus de Lévy

Les processus de Lévy sont une classe particulière de processus Markoviens. En plus de l'homogénéité temporelle, ils possèdent la propriété d'homogénéité spatiale. Autrement dit, étant donné un temps a dans l'intervalle de définition, le processus $\{Y(a+b) - Y(a); b \geq 0\}$ est indépendant de $\{Y(b); b \leq a\}$, et en

particulier de $Y(a)$, à la différence d'un processus Markovien général. De plus, la loi de $\{Y(a+b) - Y(a); b \geq 0\}$ ne dépend pas de b , propriété connue sous le nom de *stationnarité des accroissements*. Tout processus vérifiant ces propriétés admet une modification dont les trajectoires sont càdlàg (voir [RogWil00]), ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 4.1.1. *Un processus de Lévy sur un intervalle I est un processus réel Y satisfaisant*

- (i) *Les trajectoires de Y sont p.s. càdlàg,*
- (ii) *Pour tous $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_q$, les variables aléatoires $(Y(a_j) - Y(a_{j-1}))_{1 \leq j \leq q}$ sont indépendantes,*
- (iii) *Pour tout a, b tels que $[a, a+b] \subseteq I$, la loi de $Y(a+b) - Y(a)$ ne dépend pas de a .*

D'après la caractérisation de Lévy-Khintchine, tout processus de Lévy Y peut se décomposer en trois composantes $Y = \sqrt{2\sigma}W + X + d$, où W est un mouvement brownien standard, X est une composante poissonnienne qui ne comporte que les "sauts" de Y , c'est-à-dire ses discontinuités, et d est simplement une fonction affine déterministe, appelée *dérive*. On étudie dans ce chapitre les propriétés de l'ensemble \mathbf{E}_Y . Cet ensemble ne dépend pas du tout de la dérive d , et c'est pourquoi dans la suite on supposera simplement $d = 0$.

Comme la plupart des "beaux" processus Markoviens, les processus de Lévy satisfont à la loi du "0-1" (voir [Ber96]), que nous énonçons maintenant.

Définition 4.1.2. *Soit X un processus stochastique sur un intervalle réel I , et $a \in I$ qui ne majore pas I . On dit que X vérifie la loi du "0-1" en a si la tribu asymptotique*

$$\mathcal{G}_0 = \bigcap_{b>a} \sigma(X(b))$$

est incluse dans $\sigma(X(a))$.

Tous les processus Markoviens considérés dans ce chapitre, en particulier au théorème 4.3.1, vérifient cette loi.

4.1.3 Processus de Lévy à variation bornée

On dit qu'une fonction f sur un intervalle I est à variation bornée si pour toute famille $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_q$ dans I la quantité

$$\sum_{j=1}^q |f(a_j) - f(a_{j-1})|$$

est finie. La propriété de bornitude de la variation d'un processus de Lévy Y est triviale, dans le sens où sa probabilité est toujours 0 ou 1. En décomposant $Y = \sqrt{2\sigma}W + X$ on a la caractérisation suivante (voir [Ber96]), adaptée de la caractérisation de Lévy-Khintchine.

Théorème 4.1.1. *Le processus Y est à variation bornée ssi*

- (i) $\sigma=0$,
- (ii) *et l'exposant caractéristique φ de X défini par*

$$\mathbb{E}(ihX(a)) = \exp(a\varphi(h))$$

vérifie

$$\varphi(h) = \int_{\mathbb{R}} (\exp(ihx) - 1) \nu(dx),$$

où ν est une mesure réelle telle que

$$\begin{cases} \nu(\{0\}) = 0, \\ \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|) \nu(dx) < \infty. \end{cases}$$

Supposons imposée la valeur initiale $Y(a_0) = x_0$ pour un certain couple $a_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}$. Alors, comme cas particulier de la caractérisation de Lévy-Khintchine (voir [Ber96]), pour chaque mesure $\nu > 0$, il existe un unique processus de Lévy sans dérive Y qui admet ν comme mesure de Lévy.

En particulier Y se réduit à sa composante poissonnienne X , qui ne progresse que par sauts. La mesure ν , appelée *mesure caractéristique*, caractérise la taille et la fréquence de ces sauts. Pour interpréter plus précisément la mesure ν , il est expliqué dans [Ber96] que si ν est approchée par ses troncatures $\nu_n = \nu(\cdot \cap (\mathbb{R} \setminus [-1/n, 1/n]))$, alors X est approché par les processus de Lévy X_n de mesures caractéristiques ν_n . Le processus X_n comporte des sauts indépendants et uniformément répartis dans chaque compact, et les tailles des sauts sont iid de loi $\frac{1}{\nu_n(\mathbb{R})} \nu_n$.

On peut déduire de cette construction les faits suivants.

Proposition 4.1.2. *Soit X un processus de Lévy sans dérive à variation bornée de mesure de Lévy ν sur un intervalle I . Les temps de saut positif (resp. négatif) de X sont p.s denses ssi $\nu(\mathbb{R}^+) = +\infty$ (resp. $\nu(\mathbb{R}^-) = +\infty$), et p.s. discrets autrement.*

Ce résultat découle du fait que les sauts de X sont l'union des sauts des $X_n, n \in \mathbb{N}$ décrits précédemment. On peut en déduire quelques propriétés faciles de certaines lois conditionnelles sur les trajectoires lorsque ν est infinie. Dans ce cas, étant donné $a < b$ dans I , la loi de $X(b) - X(a)$ conditionnellement à $X(a)$ a une distribution diffuse dans \mathbb{R}^d (et indépendante de $X(a)$). On en déduit par exemple qu'un tel processus n'atteint jamais plusieurs fois son maximum. Ces résultats sont évidemment faux si ν est finie, auquel cas sur tout intervalle borné le processus X est constant avec une probabilité positive.

Les processus de Lévy à variation bornée possèdent également la propriété d'être localement plat autour de chaque point, fixé à l'avance, avec probabilité 1.

Lemme 4.1.1. *Tout processus de Lévy X sans dérive et à variation bornée défini sur un voisinage droit de 0 vérifie*

$$p.s., \lim_{a \downarrow 0} \frac{X(a)}{a} = 0.$$

La preuve se trouve dans [Sko91].

4.2 Fluide en viscosité nulle

L'étude de l'enveloppe convexe d'une fonction ψ est connectée à la structure de choc d'un fluide dont le potentiel initial est ψ . Il est plus facile de comprendre les détails techniques dans un cadre discret, mais le cas continu est plus réaliste, et nous l'étudierons dans un second temps.

4.2.1 Cas discret

Considérons $\{P_k ; k \in \mathbb{Z}\}$, un ensemble de particules disposées sur la droite réelle, de positions respectives $\{k \in \mathbb{Z}\}$. La particule P_k a une vitesse initiale aléatoire $v_k \in \mathbb{R}$ et une masse unitaire 1. La règle d'évolution est la suivante : Tout amas de particules de vélocité v et masse m évolue librement jusqu'à rencontrer un autre amas, disons de vitesse v' et masse m' , auquel cas ils s'agrègent pour former un nouvel amas, de masse $m + m'$ et vitesse $\frac{mv + m'v'}{m + m'}$, de telle sorte que la masse et la quantité de mouvement soient préservés.

On définit le potentiel initial par $\psi(0) = 0$ et $\psi(k + 1) - \psi(k) = -v_k$. On suppose que les lois initiales des variables aléatoires v_k entraînent que, pour tous $k < p < r$ de \mathbb{Z} , $\frac{\psi(p) - \psi(k)}{p - k} \neq \frac{\psi(r) - \psi(p)}{r - p}$ p.s. C'est par exemple le cas lorsque toute distribution fini-dimensionnelle $(v_{k_1}, \dots, v_{k_q})$ sur \mathbb{R}^q , $q \geq 1$, ne charge aucun atome. On appelle encore ψ l'interpolation linéaire ψ sur \mathbb{R} , obtenue en connectant les points du graphe de ψ par des segments.

Théorème 4.2.1. *On peut partitionner l'ensemble des entiers $\mathbb{Z} = \cup_{q \in \mathbf{E}_\psi^+} Z_q$, où Z_q contient les indices de toutes les particules qui se retrouvent dans le même amas que P_q en un temps fini. Notons que $q \in \mathbf{E}_\psi^+$ est l'extrémité gauche de Z_q . En particulier, une particule P_k ne touche aucun voisin ssi k et $k + 1$ sont dans \mathbf{E}_ψ^+ .*

Ce théorème met en lumière le fait que l'étude des points extrémaux de ψ apporte toute l'information nécessaire pour une description topologique asymptotique du système de particules.

Démonstration. Pour comprendre le comportement du système de particules lorsque le temps tend vers l'infini, on cherche pour un entier k les conditions sur v_k sous lesquelles la particule P_k touche sa voisine de gauche P_{k-1} .

Ceci arrive si l'amas formé par P_k et certains de ses voisins de droite, $\{P_k, \dots, P_{k+s}\}$, pour un $s \in \mathbb{N}^*$, entre en collision avec celui formé par P_{k-1} et des voisins de gauche, $\{P_{k-1}, \dots, P_{k-1-u}\}$ pour un u de \mathbb{N}^* . Cet événement est réalisé si la vitesse de l'amas de droite est plus petite que celle de l'amas de gauche, ce qui s'écrit

$$\frac{1}{u}(v_{k-1} + \dots + v_{k-u}) > \frac{1}{s}(v_k + \dots + v_{k+s}).$$

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que P_k (et son amas du côté droit) évite indéfiniment une collision avec P_{k-1} , et peut-être d'autres particules $P_j, j < k$, est

$$\frac{\psi(k) - \psi(k-u)}{u} > \frac{\psi(k+s+1) - \psi(k)}{s}, \quad s, u \in \mathbb{N}^*.$$

Le cas d'égalité ne survient presque jamais, dû aux hypothèses faites sur les lois des v_k . Cette condition signifie exactement que k est un point extrémal supérieur pour ψ . □

4.2.2 Cas continu

On suppose désormais qu'un fluide de viscosité ϵ est disposé sur un intervalle I de \mathbb{R} , et on considère que son comportement est régi par l'équation de Burgers (4.1). Ici, $v(a, 0)$ est la vitesse initiale de la particule initialement située en a , et $v(a, t)$ est la vitesse au temps t . [Hop50] et [Cole51] ont donné une solution explicite de la solution, exprimée en termes du potentiel ψ défini par $\partial_a \psi(a, t) = -v(a, t)$ et $\psi(0, 0) = 0$. La limite de cette solution quand ϵ tend vers 0 est donnée, pour $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$, par

$$\psi(x, t) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left[\psi(a, 0) - \frac{(x-a)^2}{2t} \right] = -\frac{x^2}{2t} + \sup_{a \in \mathbb{R}} \left[\psi(a, 0) - \frac{a^2}{2t} + \frac{xa}{t} \right]. \quad (4.2)$$

Remarquons la similarité avec la transformation de Legendre de la fonction

$$\psi_t(a) = \psi(a, 0) - \frac{a^2}{2t}.$$

Soit $a(x, t)$ la plus grande valeur a à laquelle le supremum dans (4.2) est atteint. La fonction $x \mapsto a(x, t)$ est croissante et continue à droite. On peut donc définir $x(a, t)$ son inverse continue à droite. Notons que la finitude de ce supremum présuppose que $\psi(0, a) = o(a^2)$ quand a tend vers l'infini. C'est le cas avec probabilité 1 lorsque ψ est un processus de Lévy.

Graphiquement, si on laisse la droite de pente $-\frac{x}{t}$ descendre verticalement jusqu'à toucher le graphe de ψ_t (en supposant qu'elle partait d'assez haut), $a(x^-, t)$ est l'abscisse du point de contact le plus à gauche entre la droite et le graphe de ψ_t , tandis que $a(x, t)$ est le point de contact le plus à droite. A

partir de cette description, il est clair que pour tout x , $a(x^-, t)$ et $a(x, t)$ sont dans $\mathbf{E}_{\psi_t}^+$.

L'application $a \mapsto x(a, t)$ est appelée *Lagrangien*, et $x \mapsto a(x, t)$ *Lagrangien inverse*. Du point de vue hydrodynamique, $x(a, t)$ est la position au temps t d'une particule initialement située en a . Si une discontinuité du Lagrangien inverse a lieu à un point $x : a(x^-, t) < a(x, t)$, cela veut dire que toutes les particules initialement situées sur $[a(x^-, t), a(x, t)[$ ont formé un amas au point x au temps t , est c'est pourquoi un tel intervalle est appelé *intervalle de choc*.

On porte un intérêt particulier aux points qui ne sont dans l'adhérence d'aucun intervalle de choc. De tels points sont dits *réguliers du Lagrangien*, et sont caractérisés comme les points de $\mathbf{E}_{\psi_t}^+$ qui ne sont isolés ni à droite ni à gauche. On note l'ensemble de ces points par \mathbf{L}_{ψ_t} . Ce sont les positions initiales des particules qui n'ont été impliquées dans aucun choc avant le temps t .

Donc, si on appelle $\mathbf{S}_{\psi_t} = \{a(x^-, t), a(x, t) : a(x^-, t) < a(x, t)\}$ les extrémités des intervalles de choc, on a l'union disjointe $\mathbf{E}_{\psi_t}^+ = \mathbf{S}_{\psi_t} \cup \mathbf{L}_{\psi_t}$. Ainsi la topologie de $\mathbf{E}_{\psi_t}^+$ contient toute la description du fluide au temps t . Notons la similarité avec le théorème 4.2.1.

En conclusion, pour obtenir une description complète du fluide dont les vitesses initiales forment un bruit de Lévy, notre but est d'étudier $\mathbf{E}_{\psi+f}^+$, où ψ est la trajectoire d'un processus de Lévy, et f est la dérive lisse $f(a) = -\frac{a^2}{2t}$. On mène l'étude pour une fonction f dérivable, et on considérera le cas $f(a) = -\frac{a^2}{2t}$ dans la Section 4.3.3.

Comme la dérive tend vers 0 quand t tend vers l'infini, il est naturel de s'interroger sur le comportement de \mathbf{E}_{ψ_t} . Le résultat donne une certaine forme de continuité pour l'application $t \mapsto \mathbf{E}_{\psi_t}^+$.

Proposition 4.2.1. *Soit g une fonction sur un intervalle I de \mathbb{R} , et f une fonction continue sur I . Pour un réel u , on pose $g_u = g + uf$ et $\mathbf{E}_u^+ = \mathbf{E}_{g_u}^+$. Supposons que*

$$\text{cl}(\text{gr}(g_u)) \cap \text{gr}(\overline{g_u}) = \mathcal{E}_{g_u}, \quad (4.3)$$

i.e le graphe de g_u n'approche la frontière de son enveloppe convexe qu'en ses points extrémaux. Alors,

$$d_{\mathcal{H}}(\mathbf{E}_{u+h}^+, \mathbf{E}_u^+) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\eta > 0$ tel que $\mathbf{E}_{u-h}^+ \subseteq \mathbf{E}_u^+ + B(0, \epsilon)$ pour $0 < h < \eta$. Comme on peut remplacer g par $-g$, ce sera suffisant.

Comme \mathbf{E}_u^+ est fermé, $I \setminus \mathbf{E}_u^+$ peut être décomposé en une famille dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $(I_{n,u})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $K_{u,\epsilon} = I \setminus (\mathbf{E}_u^+ + B(0, \epsilon))$. Il intersecte un nombre fini d' $I_{n,u}$, ceux dont la longueur est supérieure à ϵ . On appelle J_1, \dots, J_q les intervalles fermés tels que $K_{u,\epsilon} = \cup_{i=1}^q J_i$.

Prenons i dans $\{1, \dots, q\}$. Comme par hypothèse le graphe de g_u ne touche pas celui de $\overline{g_u}$ loin d'un point extrémal, le graphe de g_u et $\overline{g_u}$ sont à une distance positive au-dessus de chaque J_i , $1 \leq i \leq q$. En conséquence, on peut trouver $h_i > 0$ tels que les graphes de g_{u-h_i} et $\overline{g_{u-h_i}}$ soient disjoints au-dessus de chaque J_i . En particulier, $\mathbf{E}_{u-h_i}^+ \cap J_i = \emptyset$. Prendre $h = \min_i(h_i) > 0$ nous donne le résultat. \square

Pour les réalisations typiques des processus aléatoires étudiés ici, l'équation (4.3) sera satisfaite p.s. pour chaque u positif. Mais avec probabilité 1, il y aura u aléatoire qui l'infirmement.

Le cas asymptotique correspond à la valeur $t = +\infty$, soit $u = 0$. Le théorème précédent nous autorise à affirmer que la structure du fluide à des temps suffisamment grands tend vers l'ensemble extrémal de $\psi(\cdot, 0)$, le processus sans dérive. Cet ensemble-limite \mathbf{E}_ψ^+ est l'objet de la prochaine section.

4.3 Ensemble extrémal d'un processus aléatoire

Dans un premier temps on va montrer que l'ensemble extrémal d'un processus de Lévy ou d'un processus d'Itô est p.s. négligeable. La structure de l'ensemble extrémal d'un processus de Lévy à variation bornée est ensuite étudiée plus en détail.

4.3.1 Résultats de négligeabilité

Dans toute la section, I désigne un intervalle de \mathbb{R} . Pour établir des résultats de négligeabilité, notre principal outil sera la théorème de Fubini, sous la forme du lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *Soit X un processus séparable. Si*

$$\forall a \in I, \quad \mathbb{P}(a \in \mathbf{E}_X^+) = 0,$$

alors on a p.s. $\lambda_1(\mathbf{E}_X^+) = 0$.

Démonstration. L'application $(\omega, a) \rightarrow 1_{(a \in \mathbf{E}_X^+)}$ est mesurable :

$$\{(\omega, a) ; a \notin \mathbf{E}_X^+(\omega)\} = \left\{ (\omega, t) ; (s-v)X(\omega, a) \leq \limsup_{\substack{s,v \in \mathbb{Q}^2 \\ s < a < v}} (s-a)X(\omega, v) + (a-v)X(\omega, s) \right\}.$$

Le théorème de Fubini nous donne

$$0 = \int_I \mathbb{P}(a \in \mathbf{E}_X^+) da = \int_\Omega \lambda_1(\{a ; a \in \mathbf{E}_X^+\}) \mathbb{P}(d\omega) \quad (4.4)$$

et la preuve est terminée. \square

Grâce à ce lemme et aux belle propriétés d'homogénéité des processus de Lévy, on peut établir la négligeabilité de l'ensemble extrémal pour les processus de Lévy. Cependant l'homogénéité spatiale n'est pas complètement nécessaire, et on peut étendre le résultat à une classe plus large de processus Markoviens. En plus de la propriété de Markov forte, on requiert d'un processus Markovien qu'il vérifié la trivialité de la tribu $\bigcap_{s \downarrow 0} \sigma(X_s)$, ou loi du zéro-un de Blumenthal.

Définition 4.3.1. Soit X un processus de Markov. X est dit réversible si, pour tout $a \in I$, les processus

$\hat{X}(s) = X(a+s) - X(a)$ et $\check{X}(s) = X(a) - X((a-s)^-)$ (pour s tel que les deux expressions aient du sens) sont Markoviens, et ont la même distribution.

Par exemple, les processus de Lévy sans dérive sont réversibles.

Théorème 4.3.1. Soit X un processus de Markov réversible. Alors

- (i) $\lambda_1(\mathbf{E}_X) = 0$ p.s.
- (ii) Soit $Z(a) = \int_0^a X(u)du$. On a p.s $\lambda_1(\mathbf{E}_Z) = 0$.

Ce résultat est démontré dans le paragraphe 8.1 . Brièvement, l'idée est d'utiliser le lemme 4.3.1 et ainsi on doit prouver que, presque tout t n'est presque jamais dans l'ensemble extrémal. Cette propriété dépend du futur et de passé de t , et la réversibilité nous assure que le comportement conjoint du passé et du futur est symétrique. La loi du 0-1 finit la preuve.

Cette propriété de négligeabilité n'est pas l'apanage des processus Markoviens, c'est également vrai pour la plupart des processus d'Itô. L'idée générale qui en résulte est que, étant donné un processus suffisamment irrégulier, son ensemble extrémal a peu de chances d'être gros. Les fonctions irrégulières contredisant ce principe exhibées dans la section 4.1.1 sont construites d'une manière spéciale qui ne peut pas arriver par accident.

On considère ici $I = \mathbb{R}^+$. Soit $\{W(a); a \geq 0\}$ un mouvement brownien standard et $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_a; a \geq 0\}$ sa filtration naturelle. Soit \mathcal{M}_2^{loc} la classe des processus \mathcal{G} -adaptés ψ sur \mathbb{R}^+ qui satisfont

$$\forall a > 0, \mathbb{E} \left(\int_0^a \psi^2(s) ds \right) < \infty.$$

Théorème 4.3.2. Soit X un processus d'Itô. Alors X s'écrit sous la forme générale

$$X(a) = \int_0^a \psi(s) dW(s) + \int_0^a \phi(s) ds, \quad (4.5)$$

où $\psi, \phi \in \mathcal{M}_2^{loc}$.

On note $Y(a)$ le premier terme dans (4.5) et $Z(a)$ le second. Supposons que, avec probabilité 1, il y n'y a pas d'intervalle ouvert non-vide où Y est identiquement nul. Alors, p.s. $\lambda_1(\mathbf{E}_X) = 0$.

L'hypothèse sur Y est nécessaire car, si $Y = 0$, Z peut être choisie lisse et strictement concave, ce qui entraîne un gros ensemble extrémal. En d'autres termes, l'irrégularité de Y est suffisamment forte pour contrebalancer l'éventuelle régularité de Z . Dans la preuve (paragraphe 8.2), on utilise encore le lemme 4.3.1. Pour tout a , Y n'étant presque jamais localement lipschitzienne en a , alors que Z l'est, de telle sorte que les grandes fluctuations de Y autour de a rendent impossible pour a d'être dans l'ensemble extrémal.

4.3.2 Processus de Lévy à variation bornée

Les processus de Lévy sont souvent pris comme données initiales pour une turbulence de Burgers. On se restreint ici à la classe des processus de Lévy à variation bornée pour des raisons techniques. Dans ce cas, le lemme 4.1.1 indique le comportement local du processus après 0, et donc après chaque temps d'arrêt. Comme le processus n'évolue que par sauts (le coefficient de diffusion est nul), et que tous ses sauts sont simultanément des temps d'arrêt, il est plus facile d'appréhender la structure du graphe avec des techniques Markoviennes.

Notons d'abord que si la mesure de Lévy est finie, X est p.s constant par morceaux, et \mathbf{E}_X est discret dans \mathbb{R}^+ . Pour des énoncés plus simples, on suppose dans la suite que la mesure de Lévy est infinie.

Dans cette section, X est un processus de Lévy à variation bornée, et f est une fonction lisse. Les hypothèses sur f seront précisées plus tard. Commençons par le cas où f est convexe.

Lemme 4.3.2. *Soit g et f deux fonctions sur I , f étant convexe. Soit a un point extrémal supérieur de $g + f$, alors a est un point extrémal supérieur de g .*

Démonstration. Choisissons s qui n'est pas extrémal supérieur pour g . Nous allons montrer que s n'est pas extrémal supérieur pour $g + f$ non plus. On peut trouver $u < s < v$ et $\alpha, \beta = 1 - \alpha$ dans $]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} s &= \alpha u + \beta v, \\ g(s) &\leq \alpha g(u) + \beta g(v). \end{aligned}$$

La convexité de f entraîne

$$f(s) \leq \alpha f(u) + \beta f(v),$$

en sommant on obtient

$$(g + f)(s) \leq \alpha(g + f)(u) + \beta(g + f)(v),$$

ce qui prouve que s n'est pas extrémal supérieur pour $g + f$. □

Corollaire 4.3.1. *Si f est convexe, $\mathbf{E}_{X+f}^+ \subseteq \mathbf{E}_X^+ \subseteq \mathbf{E}_{X-f}^+$.*

Additionner une fonction convexe à X amincit son ensemble extrémal supérieur, alors qu'ajouter une fonction concave le grossit.

Théorème 4.3.3. *Supposons que f est une fonction concave de classe \mathcal{C}^1 . Soit $Y = X + f$. Alors, pour tout $a \in \mathbf{E}_Y^+$, a est isolé à gauche (resp. à droite) dans \mathbf{E}_Y^+ si $\bar{Y}'(a^-) \neq f'(a)$ (resp. $\bar{Y}'(a^+) \neq f'(a)$).*

La preuve est à la section 8.3. Les éventuels points d'accumulation de \mathbf{E}_Y sont donc les points où les dérivées de \bar{Y} et f coïncident. Si l'on applique le théorème 4.3.3 avec $f = 0$, on obtient l'évolution asymptotique d'un fluide, comme expliqué dans la section précédente. Dans ce cas, le seul point où $\bar{Y}'(a) = f'(a) = 0$ est le supremum de X . Il est possible, dans ce cas, de préciser la topologie de l'enveloppe convexe autour de la valeur maximale.

Le théorème suivant nous donne une description topologique exhaustive de l'ensemble extrémal.

Théorème 4.3.4. *Soit X un processus de Lévy à variation bornée dont la mesure de Lévy est infinie, sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit*

$$T = \sup\{a \in I \mid X^*(a) = \sup_{u \in I} X(u)\}$$

le temps p.s. unique où X approche son supremum. Alors p.s. \mathbf{E}_X^+ ne contient que T et des temps de saut de X , et le seul point d'accumulation possible est T .

Le temps T est isolé à droite dans \mathbf{E}_X^+ ssi 0 est irrégulier pour la demi-droite positive, et isolé à gauche ssi 0 est irrégulier pour la demi-droite négative.

Ce théorème nous donne une assez bonne compréhension de la forme de l'ensemble extrémal de X . On a pas une description quantitative, comme [Gro83] et [Pit82] en ont obtenu pour le mouvement brownien, mais la structure de l'ensemble extrémal apparaît clairement.

L'exemple des subordonateurs rentre parfaitement dans ce cadre. Si X est un subordonateur sur $[0, 1]$ de mesure de Lévy infinie, alors 1 est le seul point d'accumulation de \mathbf{E}_X^+ .

4.3.3 Structure de choc d'une turbulence de Burgers

On considère un fluide sur un intervalle I , régi par l'équation de Burgers (4.1), de potentiel initial ψ . Les considérations de la Section 4.2.2, combinées aux résultats de la Section précédente, entraînent les faits suivants.

Théorème 4.3.5. *Supposons que ψ est un processus de Lévy à variation bornée sans dérive et de mesure de Lévy infinie. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout point a de I , on appelle P_a la particule dont la position initiale est a .*

Supposons dans un premier temps que I est compact. Soit T le point de I , p.s. unique, où ψ^ atteint son maximum.*

- (i) La seule particule susceptible de n'être jamais impliquée dans un choc est P_T .
- (ii) La particule P_T ne subit aucune collision à gauche (resp. à droite) ssi 0 est régulier pour la demi-droite positive (resp. négative).
- (iii) L'ensemble \mathbf{E}_ψ^+ est dénombrable et discret loin de T , et ne contient que des temps de saut, à l'exception de T .
- (iv) Pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un instant t_ε après lequel chaque particule P_a qui est soit l'extrémité d'un intervalle de choc ou un point régulier du Lagrangien est à distance au plus ε de \mathbf{E}_ψ^+ .
- (v) Pour tout temps $t > 0$, tout point régulier du Lagrangien, noté a , vérifie $\bar{\psi}'_t(a) = \bar{\psi}'_t(a^-) = -\frac{a}{t}$.

On a les conséquences suivantes lorsque I est la demi-droite $I = \mathbb{R}_+$. Notons que (v) est toujours valable.

- (i)' Toute particule subit un choc en un temps fini.
- (ii)' L'ensemble \mathbf{E}_ψ^+ est discret et ne consiste que de temps de saut positif.
- (iii)' L'ensemble des points de choc et des points réguliers du Lagrangien tend à se replier localement autour de \mathbf{E}_ψ^+ , dans le sens de (iv).

Démonstration. (i),(ii),(iii) sont des conséquences directes du théorème 4.3.4, et (iv) vient de la proposition 4.2.1.

(v) est une conséquence du théorème 4.3.3.

(i)',(ii)' : D'après (i), un point d'accumulation de \mathbf{E}_ψ^+ est censé réaliser le maximum de ψ^* sur tout intervalle non compact, et donc également sur tout I . Comme un processus de Lévy non-nul sans dérive n'est pas majoré, il n'y a pas de tel point.

(iii)' vient de (iv). □

Ces résultats complètent ceux de [Ber98b], qui a étudié la structure de choc à temps fini $t > 0$ lorsque le champ de vitesse initial est un processus de Lévy stable d'index $\alpha > \frac{1}{2}$. Notons que de tels processus ne sont à variation bornée que lorsque $\alpha < 1$. [Win02] a également obtenu des résultats asymptotiques, et a montré que la structure de choc peut être vu comme un processus ponctuel dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, où (m, v) représente un amas de masse m et vitesse v , lorsque le processus de vitesse initial est markovien et auto-similaire.

En combinant (ii)' et (iii)', on peut attacher à chaque point a dans l'ensemble discret \mathbf{E}_ψ^+ une fonction $\{\varepsilon_a(t); t > 0\}$, qui tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$, de telle sorte que, à tout temps $t > 0$, l'ensemble $\mathbf{E}_{\psi_t}^+$ des points de chocs et des points réguliers du Lagrangien soient contenus dans $\cup_{a \in \mathbf{E}_\psi^+} [a - \varepsilon_a(t), a + \varepsilon_a(t)]$.

Ceci vaut par exemple si ψ est un subordonateur. En ce cas, la structure de choc est asymptotiquement discrète. Ceci est en accord avec les résultats de [Ber98b], qui a affirmé que la structure de choc est déjà discrète à n'importe quel temps $t > 0$ lorsque ψ est un subordonateur stable d'indice $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$. Donc,

dans cette situation particulière, la structure de l'ensemble de choc ne change drastiquement pas lorsque le temps évolue vers l'infini. Il serait intéressant de voir ce qu'il en est sans les hypothèses d'auto-similarité.

Chapitre 5

Réarrangements convexes de champs aléatoires

Le réarrangement croissant d'une fonction sur un intervalle est la fonction croissante ayant la même distribution, c'est-à-dire pour laquelle l'image de la mesure de Lebesgue est la même. Le réarrangement convexe d'une fonction absolument continue f est l'unique fonction convexe dont la distribution de la dérivée est la même que celle de f' . Il est obtenu en réarrangeant f' de manière croissante. Si f n'est pas dérivable, on l'approche par des fonctions $\{f_n; n \geq 1\}$ et on étudie asymptotiquement les réarrangements convexes des fonctions $\{f_n\}$.

Cet objet peut être utilisé pour mesurer les fluctuations d'un processus stochastique. Ici, nous souhaitons étendre ces notions aux dimensions supérieures. Une fonction vectorielle est dite monotone si c'est le gradient d'une fonction convexe. Comme dans le cas 1-dimensionnel, le réarrangement monotone d'un champ de vecteurs est une fonction monotone ayant la même distribution, et le réarrangement convexe d'une fonction lisse est obtenu en réarrangeant son gradient de manière monotone.

Le réarrangement monotone trouve son intérêt dans divers domaines. C'est par exemple la solution du problème de transport optimal "Monge-Kantorovitch". On étudie ici les réarrangements convexes et monotones pour des champs gaussiens aléatoires, après approximation et renormalisation. Des exemples spécifiques sont étudiés, et on donne des expressions explicites pour le champ de Lévy et le drap brownien.

L'objet central lors du réarrangement convexe d'un champ aléatoire X est la mesure d'occupation μ_n du gradient ∇X_n de l'approximation X_n . La partie technique consiste donc à obtenir un théorème limite pour les mesures aléatoires $\{\mu_n\}$. Il est intéressant d'étudier la dépendance de la limite des μ_n à la méthode d'approximation.

Introduction et notations

Exemple préliminaire considérons une population finie, indexée par k parcourant $\{1, \dots, n\}$, pour un entier naturel n . Pour $1 \leq k \leq n$, le membre k reçoit un revenu d'une certaine ressource, désigné par un nombre réel $g(k)$. On appelle τ la permutation de $\{1, \dots, n\}$ qui fait de $k \mapsto g(\tau(k))$ une fonction croissante. On appelle $\mathbf{M}g = g \circ \tau$ le *réarrangement monotone* de g .

On définit $\psi(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{M}g(i)$. Comme $\mathbf{M}g$ est monotone, ψ est convexe. Pour $1 \leq k \leq N$, $\psi(k)$ représente la quantité totale de ressources détenue par la $\frac{k}{n}$ -ème portion la plus pauvre de la population. Considérons maintenant la fonction $\bar{\psi}(k) = \frac{k}{n}\psi(n)$. C'est la "fonction d'égalité", dans le sens où $\psi = \bar{\psi}$ ssi tous les revenus sont égaux. Aussi, pour une distance δ , la distance $\mathcal{I}_\delta = \delta(\psi, \bar{\psi})$ entre ψ et sa fonction d'égalité mesurent les inégalités au sein de la population.

Si on définit $f(k) = \sum_{i=1}^k g(i)$, $1 \leq k \leq N$, le *revenu cumulé*, ψ est le *réarrangement convexe* de f . C'est en effet la seule fonction convexe qui a les mêmes incréments (mais pas au même endroit), et coïncide avec f en 1 et n . Prenons par exemple le cas où δ est la norme L^1 sur \mathbb{R}^N . Pour une certaine fonction de revenu cumulé f , avec la quantité $\mathcal{I}_\delta = \sum_{k=1}^N |\psi(k) - \frac{k}{n}f(n)|$ on retrouve le coefficient de Gini, qui a joué un rôle central dans la mesure des inégalités depuis son introduction par Corrado Gini au début du vingtième siècle. L'utilisation de réarrangement convexes pour mesurer les inégalités économiques est discutée dans [Zit02].

La notion de réarrangement, définie au-dessus pour une population discrète, peut être généralisée dans un cadre continu. Si g_1 est une fonction intégrable sur $[0, 1]$, et τ une transformation de $[0, 1]$ qui préserve la mesure de Lebesgue, la fonction définie par

$$g_2 = g_1 \circ \tau \tag{5.1}$$

est un réarrangement de g_1 . Grossièrement, la fonction g_2 Prend les mêmes valeurs que g_1 , mais pas au même endroit.

Pour une fonction g , on note μ_g l'image de la mesure de Lebesgue sous g . La relation (5.1) implique aussi

$$\mu_{g_2} = \mu_{g_1}. \tag{5.2}$$

Une fonction g_2 est dite être un réarrangement de g_1 ssi elle satisfait (5.2). Ca n'est pas équivalent à (5.1), considérons par exemple $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = (2x - [2x])$ sur $[0, 1]$, où $[y]$ dénote la partie entière de y . Elle sont réarrangements l'une de l'autre mais il n'est pas possible de trouver τ telle que (5.1) soit satisfaite.

La situation sur un compact K de \mathbb{R}^d est similaire. Pour une fonction g intégrable sur K , soit μ_g l'image de la mesure de Lebesgue λ_d par g . Alors une fonction g_2 est un réarrangement d'une fonction g_1 ssi elle satisfait (5.2). C'est

de plus un *réarrangement monotone* si g_2 est une fonction monotone, c'est-à-dire le gradient d'une fonction convexe. D'après le théorème de Brenier, énoncé dans la section 5.1, chaque fonction intégrable admet un unique réarrangement monotone. Le résultat comprend aussi une condition de non-dégénérescence sur μ_g pour avoir également (5.1).

Dans ce chapitre, on définit le réarrangement convexe d'une fonction vectorielle lisse comme la fonction convexe obtenue en réarrangeant son gradient de manière monotone, et en intégrant. On généralise ainsi la notion de réarrangement sur $\{1, \dots, n\}$ introduite dans l'exemple préliminaire.

Quand une fonction est irrégulière, on peut s'intéresser à des régularisations et étudier asymptotiquement leur réarrangements, sous la bonne normalisation. Un de nos résultats stipule que le réarrangement est cohérent. C'est-à-dire que si, pour une suite de fonction $\{g_n; n \in \mathbb{N}\}$, μ_{g_n} converge faiblement vers une mesure μ , alors les réarrangements des g_n converge également, vers une fonction g vérifiant $\mu_g = \mu$. Le résultat concernant le réarrangement convexe est similaire.

On applique cet outil au cas où X est un champ aléatoire, et $g_n = \nabla X_n$ est le gradient de régularisations X_n de X . Ainsi μ_{g_n} est une approximation de la mesure d'occupation du gradient de X . Les résultats principaux de ce chapitre, établis dans le cadre gaussien, stipulent que cette mesure d'occupation converge sous certaines hypothèses de régularité vers une mesure déterministe μ . Il s'en suit que X admet un réarrangement convexe, dont la distribution du gradient est μ . Une section est dédiée à l'étude d'exemples, comme le champ de Lévy ou le drap brownien. Il deviendra apparent dans cet article que le réarrangement asymptotique est une opération complexe pour les champs multi-variés. En particulier, le résultat dépend fortement de la méthode d'approximation choisie.

En plus de l'intérêt théorique sur les mesures d'occupation, le réarrangement convexe possède quelques applications pratiques. Ça peut être utilisé, par exemple, pour construire des estimateurs de paramètres de processus stochastiques. En économétrie, le réarrangement convexe peut être utilisé pour mesurer les fluctuations de processus stochastiques, liés aux indices d'inégalité économique, comme l'indice de Gini, mentionné dans l'exemple préliminaire, voir [Zit02]. Le réarrangement monotone d'une fonction g a également une signification physique, en tant que solution du problème de transport optimal avec plan de transfert g .

La première section est dédiée à l'exposition des principes du réarrangement en dimension 1. On développe l'exemple du mouvement brownien. Un survey concernant les réarrangements de processus stochastiques d'une variable peut être trouvé dans [DavZit04]. On présente ensuite le problème de transport optimal sous une forme simplifiée, et ses connections avec le réarrangement

monotone. A l'aide du théorème de Brenier, on donne ensuite les définitions rigoureuses des réarrangements monotones et convexes en dimension supérieure. Le résultat principal de cette section donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les mesures d'occupation pour avoir la convergence des réarrangements monotones et convexes.

Dans la section 5.2, étant donné une famille de champs aléatoires $\{Y_n; n \in \mathbb{N}\}$, on étudie les conditions qui assurent l'existence de leur réarrangement limite. On obtient des résultats plus forts dans le cadre d'approximations polygonales de champs gaussiens.

L'efficacité de la méthode est illustrée dans la section 5.3, où différents exemples sont développés, en utilisant les résultats de convergence.

5.1 Réarrangement monotone et transport optimal

Cette section expose les détails des réarrangements monotones et convexes. On commence par présenter le cas du mouvement brownien 1-dimensionnel pour donner au lecteur une idée de la méthode pour réarranger asymptotiquement des champs aléatoires. Ensuite, on développe le problème de transport optimal, fortement lié au réarrangement monotone, dans le fait que le réarrangement monotone $\mathbf{M}S$ d'un plan de transport S coïncide avec la solution du problème de transport optimal correspondant. Enfin, on étudie la cohérence du réarrangement monotone, requis pour réarranger des fonctions irrégulières, de la même manière que pour le mouvement brownien juste en-dessous.

5.1.1 Cas 1-dimensionnel. Réarrangement convexe du mouvement brownien.

Le réarrangement monotone d'une fonction intégrable g sur $[0, 1]$ a été défini dans l'introduction. C'est l'unique fonction croissante ayant la même distribution, elle est notée $\mathbf{M}g$. Il a été prouvé dans [Ryf65] que toute fonction intégrable sur $[0, 1]$ admet un réarrangement monotone, unique à un ensemble négligeable près. Insistons sur le fait que l'objet central de cette opération est μ_g , l'image de la mesure de Lebesgue par g . En d'autres termes, deux fonctions ont le même réarrangement si elles ont les mêmes distributions.

Si maintenant f est une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que, pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt$ pour une fonction intégrable g , le *réarrangement convexe* de f est l'unique fonction $\mathbf{C}f$ qui vérifie $\mathbf{C}f(0) = f(0)$ et $(\mathbf{C}f)' = \mathbf{M}(f')$ p.p., \mathbf{C} est l'*opérateur de réarrangement convexe*.

Pour f irrégulière, on choisit des approximations $\{f_n; n \geq 1\}$, dont on étudie les réarrangements. S'il existe une suite de réels positifs $\{b_n; n \geq 1\}$ et une fonction convexe \mathbf{C} telle que $\frac{1}{b_n}\mathbf{C}f_n \rightarrow \mathbf{C}$ p.p., \mathbf{C} est un *réarrangement convexe asymptotique* de f , avec *suite normalisante* $\{b_n; n \geq 1\}$. Il y a une vaste littérature sur les réarrangements convexes asymptotiques de processus

stochastiques. Bien qu'une étude rigoureuse ne soit pas triviale, il est possible de comprendre la machinerie du réarrangement dans le cas du processus de Wiener. Soit X un mouvement brownien standard sur $[0, 1]$, et X_n son interpolation linéaire sur $\{\frac{k}{n}; 0 \leq k \leq n\}$, normalisée par \sqrt{n} pour éviter une divergence de ses incréments. Pour chaque n , X_n est dérivable p.p., et l'image de la mesure de Lebesgue λ_1 sous la dérivée renormalisée est $\mu_n = \lambda_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X_n' \right)^{-1}$. L'indépendance des incréments entraîne que μ_n est la mesure empirique de n variables normales indépendantes, et il est clair qu'elle va converger faiblement vers la loi normale γ_1 . Il sera prouvé plus tard, grâce au théorème 5.1.2, pourquoi cela entraîne que le réarrangement convexe asymptotique de X sur $]0, 1[$ est la courbe de Lorenz GL_1 , définie comme l'unique fonction convexe dont le gradient a pour distribution γ_1 . Davydov et Zitikis [DavZit04] ont obtenu le résultat le plus fort, la convergence de $\|\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{C}X_n - GL_1\|_\infty$ vers 0 avec probabilité 1. Beaucoup de résultats similaires sont valables pour des processus aux incréments stationnaires, ou stables. Voir le survey [DavZit04]. Azais et Wschebor [AzaWsc96] ont également montré que, pour X dans une certaine classe de processus gaussiens, si au lieu d'une approximation linéaire on choisit pour X_n une régularisation de X par un noyau de convolution, alors X admet encore GL_1 comme réarrangement convexe asymptotique. Dans ce cas, le réarrangement convexe asymptotique du réarrangement convexe n'est pas ambigu, modulo la multiplication par une constante non-nulle, dans le sens où il ne dépend pas de la méthode d'approximation choisie. On verra dans la Section 5.3 que ça n'est plus le cas pour les champs aléatoires multi-variés.

5.1.2 Le problème de transport optimal et les opérateurs de réarrangement

Le problème décrit en-dessous est une version simplifiée du problème de transport optimal, décrit exhaustivement et commenté dans [Vil03].

Une compagnie a une capacité de production par unité de temps représentée par une mesure μ sur \mathbb{R}^d , la *mesure de production*. La quantité produite dans la zone dx par unité de temps est $\mu(dx)$. Cette compagnie délivre ses produits dans un domaine K de \mathbb{R}^d , compact et convexe, où la demande est distribuée uniformément. Le coût de transport entre un site de production s et un point z dans K est proportionnel à $\|s - z\|$, la distance euclidienne. Un plan de transport S est une fonction qui à chaque z de K associe le site de production correspondant $S(z)$, d'où le produit vient. En particulier, cela implique que pour tout borélien $B \in \mathcal{B}_d$,

$$\mu_S(B) = \mu(B), \tag{5.3}$$

pour que la quantité de produit convoyée vers un site corresponde bien à la quantité produite pour ce site. Le coût total de ce plan de transport (par unité

de temps) est donc

$$c(S) = \int_{z \in K} \|z - S(z)\| dz.$$

Le problème de transport optimal consiste à trouver un plan de transport $S : K \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui minimise le coût $c(S)$ sous la contrainte (5.3). Dans cette optique, supposons qu'un plan de transport donné S soit modifié en échangeant les destinations z et ζ pour deux sites de productions $S(z)$ et $S(\zeta)$ pour des quantités infinitésimales de produit. Le nouveau plan de transport \tilde{S} correspond à une variation du coût

$$c(\tilde{S}) - c(S) = 2\langle z - \zeta, S(z) - S(\zeta) \rangle (dz + d\zeta).$$

De manière informelle, ce plan de transport sera en un sens localement optimal si, pour tout $z, \zeta \in L$,

$$\langle z - \zeta, S(z) - S(\zeta) \rangle \geq 0. \quad (5.4)$$

Il s'avère que (5.4) et (5.3) caractérisent bien les plans de transport optimaux (voir [Vil03]). La question qui se pose naturellement concerne l'existence d'un tel plan de transport optimal. C'est l'intérêt du théorème suivant

Théorème 5.1.1 (Brenier). *Notons $\mathcal{K}(K)$ la classe des fonctions convexes sur K . Soit $\mathcal{N}(K)$ la classe des fonctions monotones sur K , définie par*

$$\mathcal{N}(K) = \left\{ \nabla \psi; \psi \in \mathcal{K}(K), \int_K \|\nabla \Psi\| < \infty \right\}.$$

Alors, si μ est une mesure sur \mathbb{R}^d avec moment d'ordre 1, il existe une unique fonction monotone dans $\mathcal{N}(K)$, notée \mathbf{M}_μ , telle que $\lambda_d \mathbf{M}_\mu^{-1} = \mu$. Si un point z_0 de K est univoquement défini comme "point de départ" dans K , on note \mathbf{C}_μ la fonction convexe dont le gradient \mathbf{M}_μ , satisfait $\mathbf{C}_\mu(z_0) = 0$.

La preuve et des précisions pour ce théorème se trouvent dans [Bre91]. La fonction \mathbf{M}_μ est la fonction de transport optimal pour la mesure de production μ .

Le théorème 5.1.1 est le bon outil pour définir proprement les réarrangements monotones et convexe en dimension arbitraire.

Définition 5.1.1. *Pour une fonction intégrable g sur K , on appelle $\mathbf{M}g = \mathbf{M}_{\mu_g}$ son réarrangement monotone.*

Soit $\mathcal{S}(K)$ la classe des fonctions f p.p. différentiables sur L vérifiant

$$\int_K \nabla f < \infty.$$

Pour une fonction f de $\mathcal{S}(K)$, il existe une unique fonction convexe, notée $\mathbf{C}f$, qui satisfait

$$\begin{aligned}\lambda_d(\nabla \mathbf{C}f)^{-1} &= \lambda_d(\nabla f)^{-1}, \\ \mathbf{C}f(z_0) &= f(z_0).\end{aligned}$$

La fonction $\mathbf{C}f$ est le réarrangement convexe de f .

Le réarrangement convexe est également défini par $\mathbf{C}f = \mathbf{C}_{\mu_{\nabla f}} + f(z_0)$. Etant donné une fonction vectorielle S sur K , comme $\mathbf{M}S$ est le gradient d'une fonction convexe, sa restriction à chaque segment $[z, \zeta] \subseteq K$ est croissante, et satisfait donc (5.4). Sous ce regard, le théorème 5.1.1 fournit donc avec $\mathbf{M}S$ l'unique solution du problème de transport optimal de plan de transport S . Notons que [Bre91] donne aussi l'existence d'une fonction τ de $[0, 1]$ préservant la mesure de Lebesgue telle que $(\mathbf{M}S) \circ \tau = S$, pourvu que μ_S soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ceci justifie le terme "réarrangement".

En dimension 1, le réarrangement convexe a déjà été étudié dans la littérature. La classe $\mathcal{S}(K)$ est exactement celle des fonctions absolument continues lorsque K est un intervalle compact de \mathbb{R} . C'est donc pour une généralisation des fonctions absolument continues que l'on a défini l'opérateur \mathbf{C} . Notons que, bien que l'appellation soit "réarrangement convexe", la fonction $\mathbf{C}f$ n'est pas en général un réarrangement de f dans le sens de (5.2). Par exemple, f et $\mathbf{C}f$ n'ont pas en général le même maximum. Néanmoins, cette opération correspond visuellement à empiler les incréments de f dans un ordre différent de l'original.

Voilà un exemple qui nous permet de réarranger des champs avec une structure simple.

Proposition 5.1.1. *Soit I_1, \dots, I_d des intervalles compacts de \mathbb{R} , et, pour chaque i de $\{1, \dots, d\}$, soit f_i une fonction de $\mathcal{S}(I_i)$. Alors, la fonction $f = \bigoplus_{i=1}^d f_i$, définie sur $K = I_1 \times \dots \times I_d$ par*

$$\bigoplus_{i=1}^d f_i(z) = f_1(z_1) + f_2(z_2) + \dots + f_d(z_d)$$

satisfait

$$\begin{aligned}f &\in \mathcal{S}(K), \\ \mathbf{C}f &= \bigoplus_{i=1}^d \mathbf{C}f_i.\end{aligned}$$

Concernant le point de départ z_0 , il est arbitraire et ne joue aucun rôle. Il sera parfois implicitement défini et non mentionné, mais il faut être cohérent

dans son utilisation. Par exemple, dans l'exemple précédent, l'opérateur \mathbf{C} est défini pour des intervalles I_i de \mathbb{R} , avec points de départ implicites $z_{0,i}$. Pour que l'assertion du théorème soit vrai, il faut définir comme point de départ sur K l'élément $z_0 = (z_{0,i})_{1 \leq i \leq d}$.

Démonstration. [Preuve de la proposition 5.1.1] On note \otimes le produit de mesures. On a, avec $\mu_{\mathbf{M}f'_i} = \mu_{f'_i}$ et $\mathbf{M}f'_i = (\mathbf{C}f_i)'$ pour chaque i ,

$$\mu_{\nabla f} = \bigotimes_{i=1}^d \mu_{f'_i} = \bigotimes_{i=1}^d \mu_{\mathbf{M}f'_i} = \bigotimes_{i=1}^d \mu_{(\mathbf{C}f_i)'}$$

On a également

$$\mu_{\nabla(\bigoplus_{i=1}^d \mathbf{C}f_i)} = \bigotimes_{i=1}^d \mu_{(\mathbf{C}f_i)'} = \mu_{\nabla f},$$

ce qui signifie que $\bigoplus_{i=1}^d \mathbf{C}f_i$ est une fonction convexe ayant la même distribution de gradient que ∇f . L'unicité du théorème 5.1.1 conclut la preuve car les deux fonction coïncident en z_0 . \square

5.1.3 Consistance des opérateurs de réarrangement

Etant donné un champ irrégulier X , on étudie le réarrangement de régularisations $\{X_n; n \geq 1\}$. On s'intéresse en particulier aux mesure d'occupation $\{\mu_n\}$ des gradients $\{\nabla X_n\}$, car c'est par ce biais que sont définis les réarrangements $\{\mathbf{M}\nabla X_n\}$. Pour effectivement obtenir un résultat limite pour les fonctions $\{\mathbf{M}\nabla X_n\}$, ou les fonctions $\{\mathbf{C}X_n\}$, il faut savoir si la convergence d'une suite de mesures $\{\mu_n\}$ entraîne la convergence des fonctions $\{\mathbf{M}_{\mu_n}\}$ (dans le cas présent $\mathbf{M}_{\mu_n} = \mathbf{M}\nabla X_n$), et de leurs primitives.

C'est le but de cette section, qui donne les hypothèses sur la convergence des μ_n pour avoir la convergence des fonctions correspondantes \mathbf{M}_{μ_n} sur un compact K fixé. Si μ_n converge faiblement vers une mesure μ , alors \mathbf{M}_{μ_n} converge simplement sur l'intérieur de K vers \mathbf{M}_{μ} . Pour avoir la convergence uniforme sur K , il faut une hypothèse supplémentaire d'uniforme intégrabilité sur les μ_n . Rappelons que $\mathfrak{K}(\text{int}(K))$ est l'ensemble des sous-ensembles compacts de $\text{int}(K)$.

Théorème 5.1.2.

Soit $\{f_n; n \geq 1\}$ et f dans $\mathcal{S}(K)$, introduisons $g_n = \nabla f_n$, $g = \nabla f$. On suppose que $f_n(z_0) \rightarrow f(z_0)$ pour un point z_0 de $\text{int}(K)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$$\mu_{g_n} \Rightarrow \mu_g, \tag{5.5}$$

$$\|\mathbf{M}g_n - \mathbf{M}g\|_{L^1}^L \rightarrow 0, L \in \mathfrak{K}(\text{int}(K)), \tag{5.6}$$

$$\|\mathbf{C}f_n - \mathbf{C}f\|_{\infty}^L \rightarrow 0, L \in \mathfrak{K}(\text{int}(K)), z_0 \in L. \tag{5.7}$$

La preuve est dans la Section 9.1. Pour avoir la convergence sur K tout entier, il nous faut l'équicontinuité de la suite $\{f_n\}$. De manière informelle, il faut que f_n ne prenne pas de "valeurs trop larges" sur de "trop petits ensembles". Il en résulte une condition d'intégralité sur la queue des distributions des ∇f_n .

Théorème 5.1.3. *Soit $\{f_n; n \geq 1\}$ une suite de fonctions de $\mathcal{K}(K)$, et μ_n la mesure image de Lebesgue par ∇f_n . On appelle F_n la queue de la distributions de la norme de f_n :*

$$F_n(a) = \mu_n(\{z; \|z\| \geq a\}), a \geq 0, n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.8)$$

On suppose que

$$(\{F_n(a)^{1/d}; a \geq 0\}, n \in \mathbb{N}) \text{ est uniformément intégrable en } +\infty. \quad (5.9)$$

Alors $\{f_n; n \geq 1\}$ est équicontinue sur K .

La convergence est plus difficile à obtenir sur la frontière de K , spécialement dans les coins s'il y en a, car il peut y avoir des concentrations de gradient dans des petites zones proches d'un bord, ce qui provoque de grandes valeurs pour f_n .

On ajoutera la preuve de ce théorème dans une version ultérieure de cette thèse.

Exemples

Beaucoup d'information sur f_n est perdue si l'on ne regarde que la queue de la distribution de son gradient, F_n . L'exemple suivant exhibe une suite de fonctions convexes qui ne satisfont pas (5.9) et pourtant convergent uniformément sur L .

Exemple 5.1.1. *On prend $K = [0, 1]^d$. Pour z dans L , on note $(z_i)_{1 \leq i \leq d}$ ses coordonnées dans la base canonique. On définit*

$$f_n(z) = \alpha_n \left[\frac{1}{n} - z_1 \right]^+, \quad n \in \mathbb{N}^*, z \in L,$$

où $[y]^+$ dénote la partie positive de y . Pour $d = 2$, le graphe de f_n ressemble à celui d'une feuille de papier dont on aurait légèrement relevé un bord. Il est clair que f_n est une fonction positive dont la valeur maximale est $f_n(0) = \frac{\alpha_n}{n}$, et que pour $z \in \text{int}(K)$, $\|f_n(z)\| = 0$ dès que $z_1 \geq \frac{1}{n}$. Donc f_n converge vers 0 dans l'intérieur de K , et converge uniformément vers 0 ssi $\frac{\alpha_n}{n} \rightarrow 0$. Montrons que pourtant la condition (5.9) n'est pas remplie.

$$\begin{aligned} \nabla f_n(z) &= (-\alpha_n, 0, 0, \dots, 0) \mathbf{1}_{\{0 \leq z_1 \leq \frac{1}{n}\}} \quad p.p., \\ F_n(a) &= \frac{1}{n} \mathbf{1}_{a \leq \alpha_n}, \quad a \geq 0. \end{aligned}$$

Soit $c \geq 0$. On a

$$\int_c^\infty F_n(a)^{1/d} da = \frac{(\alpha_n - c)^+}{n^{1/d}}.$$

Donc, si on choisit α_n tel que

$$\begin{cases} n^{1/d} &= o(\alpha_n), \\ \alpha_n &= o(n), \end{cases}$$

pour tout $c > 0$, $\sup_n \int_c^\infty F_n(a)^{1/d} da = +\infty$ (quand $d \geq 2$), et $F_n(a)^{1/d}$ n'est pas uniformément intégrable.

Dans cet exemple, le gradient était également réparti le long d'une bande $d-1$ -dimensionnelle, ce qui a autorisé la convergence uniforme. Typiquement, la condition (5.9) est plus efficace lorsque la masse du gradient se concentre dans un coin du compact K , comme dans le prochain exemple.

Exemple 5.1.2. On pose $v = (1, 1, \dots, 1)$. Soit le simplexe

$$T_n = \{z; \langle z, v \rangle \leq \frac{1}{n}\},$$

et

$$f_n(z) = \alpha_n \left[\frac{1}{n} - \langle z, v \rangle \right]^+,$$

avec α_n tel que

$$\begin{cases} \alpha_n = o(n), \\ n^\alpha = o(\alpha_n), \alpha < 1. \end{cases}$$

Alors la valeur maximale de f_n est $f_n(0) = \frac{\alpha_n}{n}$, et f_n converge uniformément vers 0. On a également $F_n(a) = \text{vol}(T_n) \mathbf{1}_{a \leq \alpha_n}$, et, pour tout $\beta > 0$, $\int_c^\infty F_n(a)^\beta da = \frac{(\alpha_n - c)^+}{d! \beta n^{d\beta}}$. Ainsi, $\{F_n(a)^\beta, a \geq 0\}$ est uniformément intégrable en $+\infty$ ssi $\beta \geq \frac{1}{d}$, ce qui prouve l'optimalité de l'exposant $\frac{1}{d}$ dans la condition (5.9).

Cet exemple montre que la condition (5.9) est optimale, dans le sens où l'on ne peut pas faire mieux que la puissance $1/d$.

Dû à la faible queue de la distribution gaussienne, il est vraisemblable que les champs gaussiens sous étude satisferont (5.9), après approximation et renormalisation. Cependant, ça n'est pas l'objet de cette étude d'obtenir des résultats optimaux, et on s'est bornés à vérifier (5.5) dans nos exemples.

Un résultat similaire avait déjà été prouvé dans le cadre unidimensionnel par [Dav98], incluant la condition correspondante pour la convergence uniforme sur K . Dans le cadre probabiliste, pour vérifier la condition (5.5) pour les champs aléatoires, il est plus facile d'utiliser les fonctions caractéristiques. On utilisera le théorème 3.1.1.

5.2 Mesure d'occupation asymptotique du gradient de champs aléatoires

Dans cette section, on considère un champ aléatoire X défini sur $K_d = [0, 1]^d$ et on donne des résultats généraux concernant la mesure d'occupation du gradient de ses approximations. Ensuite on établit le théorème principal de convergence, valable dans le cas de champs gaussiens, approchés par des surfaces polygonales. On verra que ceci généralise le réarrangement convexe du mouvement brownien établi dans la section 5.1.1.

5.2.1 Résultats généraux

La notation $\{Y_n; n \geq 1\}$ désigne ici une suite de fonctions vectorielles régulières, et les $\{\mu_n = \mu_{Y_n}; n \geq 1\}$ sont leurs mesures d'occupation. Dans cette section on présente des résultats concernant le comportement asymptotique des $\{\mu_n\}$. L'objectif est d'obtenir une limite déterministe μ des μ_n , afin de pouvoir utiliser le théorème de consistance 5.1.2. On commence par donner l'expression de la seule limite possible à l'aide du théorème de Fubini : Etant donné un ensemble mesurable B de \mathcal{B}_d , on a

$$\mathbb{E}(\mu_n(B)) = \mathbb{E} \left(\int_{K_d} \mathbf{1}_{Y_n(z) \in B} dz \right) = \int_{K_d} \mathbb{P}(Y_n(z) \in B) dz.$$

Lorsque n va à l'infini dans (5.10) on a la proposition suivante.

Proposition 5.2.1. *Supposons que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

Il existe une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d telle que p.s., $\mu_n \Rightarrow \mu$, (5.10)

Pour presque tout z de K_d il existe une mesure de probabilité μ_z sur \mathbb{R}^d telle que $\mu_{Y_n(z)} \Rightarrow \mu_z$. (5.11)

Alors,

$$\mu(B) = \int_{K_d} \mu_z(B) dz, \quad B \in \mathcal{B}_d.$$

On a aussi $\mathbf{M}Y_n \rightarrow \mathbf{M}_\mu$ en vertu du théorème 5.1.2.

Tout le travail consiste évidemment à vérifier l'hypothèse (5.10). Pour avoir un premier résultat, le théorème suivant nous donne une condition suffisante sur les lois conjointes des variables $\{Y_n(z); z \in K_d\}$ pour avoir la convergence de μ_n .

Théorème 5.2.1. *Supposons que (5.11) soit satisfaite. Définissons μ par (5.12). Soit $Y_{\tau(n)}$ une sous-suite telle que, pour tout borélien B de μ -continuité*

dans une classe de convergence de \mathcal{B}_d (voir. [Bil68], p.15, ou la Section 3.1 de cette thèse),

$$\int_{(K_d)^2} \sum_{n \geq 1} \text{cov} \left(\mathbf{1}_{\{Y_{\tau(n)}(z) \in B\}}, \mathbf{1}_{\{Y_{\tau(n)}(\zeta) \in B\}} \right) dz d\zeta < \infty, \quad (5.12)$$

alors $\mu_{\tau(n)} \Rightarrow \mu$ p.s.

Nous avons donc existence d'un réarrangement convexe pour des sous-suites bien choisies.

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $\tau(n) = n$. Pour un borélien B de μ -continuité dans la classe de convergence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (|\mu_n(B) - \mathbb{E}(\mu_n(B))|^2) &= \mathbb{E} (\mu_n(B)^2) - (\mathbb{E} \mu_n(B))^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{K_d} dz \mathbf{1}_{Y_n(z) \in B} \int_{K_d} d\zeta \mathbf{1}_{Y_n(\zeta) \in B} \right) - \int_{K_d} dz \mathbb{P}(Y_n(z) \in B) \int_{K_d} d\zeta \mathbb{P}(Y_n(\zeta) \in B) \\ &= \int_{K_d} dz d\zeta \left[\mathbb{E} (\mathbf{1}_{Y_n(z) \in B} \mathbf{1}_{Y_n(\zeta) \in B}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_n(z) \in B}) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_n(\zeta) \in B}) \right] \\ &= \int_{K_d} dz d\zeta \text{cov} (\mathbf{1}_{Y_n(z) \in B}, \mathbf{1}_{Y_n(\zeta) \in B}). \end{aligned}$$

Donc, grâce à l'hypothèse (5.12), le lemme de Borel-Cantelli nous assure que pour chaque B de la sorte, $\mu_{\tau(n)}(B) \rightarrow \mu(B)$. Cette relation est donc vraie simultanément pour tous les boréliens concernés d'une classe dénombrable, et donc $\mu_{\tau(n)} \Rightarrow \mu$ avec probabilité 1 (Voir théorème 2.2 dans [Bil68]). \square

Pour la plupart des champs gaussiens étudiés dans la section 5.3, $\text{cov} (\mathbf{1}_{Y_n(z) \in B}, \mathbf{1}_{Y_n(\zeta) \in B})$ est en $O(\frac{1}{n})$ et on ne peut pas obtenir de réarrangement asymptotique pour $\mathbf{M}Y_n$ de cette manière. On a besoin de résultats plus forts; c'est l'objet de la prochaine section, où l'on considère des champs gaussiens interpolés sur une grille simpliciale.

5.2.2 Approximation simpliciale sur K_d

Les champs aléatoires les plus étudiés dans la littérature sont irréguliers, et ne peuvent donc pas être directement réarrangés. Il faut les approcher par des fonctions lisses. Dans cette article, on s'est cantonnés au paradigme suivant : Etant donné un champ aléatoire X , et des approximations X_n , on s'est intéressé au réarrangement des gradients $Y_n = \frac{1}{b_n} \nabla X_n$, et donc à leurs mesures d'occupation.

Dans ce paradigme, on aimerait que le comportement asymptotique ne dépende pas du choix de l'approximation X_n , tant que celle-ci converge vers X . Malheureusement, c'est dans la nature même des réarrangements asymptotiques d'être très sensibles à de légers changements dans la méthode d'approximation. Considérons l'exemple suivant. Soit, pour $n \geq 1$, f_n la fonction continue sur $[0, 1]$ nulle en 0, linéaire sur chaque segment $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ pour $1 \leq k < n$,

et avec pente ± 1 . Alors, f_n converge uniformément vers la fonction nulle, mais $\mathbf{C}f_n$ converge uniformément vers la fonction convexe linéaire par morceaux nulle en 0 ayant pour pente -1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $+1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Pour éviter ce type de phénomène, il faut s'assurer que le gradient de l'approximation choisie ressemble aux incréments de la fonction originale, ou à son gradient s'il existe. C'est une des raisons pour laquelle on a choisi ici pour X_n des interpolations de X sur une grille raisonnable, les noeuds d'une triangulation.

On présente maintenant les définitions et notations requises pour énoncer les résultats. On appelle simplexe de \mathbb{R}^d toute enveloppe convexe d'un $(d+1)$ -uplet de points d'intérieur non-vide, et triangulation de K_d toute partition simpliciale de K_d .

On note $\mathbb{T}_d = \left\{ (s_i)_{1 \leq i \leq d}; 0 \leq s_i \leq 1, \sum_{i=1}^d s_i \leq 1 \right\}$ le simplexe élémentaire de \mathbb{R}^d . Etant donné z dans \mathbb{R}^d , une base orthonormée $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq d}$ de \mathbb{R}^d et un réel positif l , on définit le simplexe avec sommet z , base \mathbf{u} , et longueur l par

$$T(z, \mathbf{u}, l) = z + l\rho_{\mathbf{u}}(\mathbb{T}_d),$$

où $\rho_{\mathbf{u}}$ est une rotation de \mathbb{R}^d transformant la base canonique \mathbf{e} en \mathbf{u} . Si u est orthonormée, T est dit *droit*. Si $l = 1$, T est dit *régulier*.

Soit \mathcal{T} une partition simpliciale de K_d . On note $X^{\mathcal{T}}$ l'approximation simpliciale de X sur \mathcal{T} , i.e. la fonction affine au-dessus de chaque T de \mathcal{T} qui coïncide avec X en chaque noeud de la triangulation.

On note l'approximation correspondante $X_n^{\mathcal{T}} = X^{\mathcal{T}_n}$. On ne considérera ici que des triangulations d'une forme spéciale, décrite ci-dessous.

On appelle *pavage simplicial* tout ensemble fini de simplexes \mathcal{T} qui vérifie la propriété suivante : Il existe un réseau Γ de \mathbb{R}^d tel que

$$\{\gamma + T; \gamma \in \Gamma, T \in \mathcal{T}\} \text{ est une partition de } \mathbb{R}^d. \quad (5.13)$$

Tout réseau Γ vérifiant (5.13) est dit *admissible* pour \mathcal{T} , et la notation $\Gamma_{\mathcal{T}}$ désigne tout choix d'un tel réseau (les résultats ne dépendront pas du réseau choisi). On définit alors, pour $n \geq 1$,

$$\tilde{\mathcal{T}}_n = \bigcup_{T \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma_{\mathcal{T}}} \left\{ \frac{1}{n}(\gamma + T) \cap K_d \right\}.$$

La propriété (5.13) assure que $\tilde{\mathcal{T}}_n$ est en effet une partition de K_d . Le problème est que l'ensemble $\frac{1}{n}(\gamma + T) \cap K_d$ peut ne pas être un simplexe. Toutefois, les $\frac{1}{n}(\gamma + T)$ qui posent problème sont situés sur la frontière de K_d et ne jouent qu'un rôle négligeable dans la mesure d'occupation. On coupe donc chacun d'entre eux en une partition simpliciale telle que, pour chaque n , on ait une triangulation simpliciale \mathcal{T}_n qui ne diffère de $\tilde{\mathcal{T}}_n$ que sur les simplexes touchant la frontière de K_d . On identifie \mathcal{T} avec la famille $\{\mathcal{T}_n; n \geq 1\}$.

Comme X_n^T est p.p. affine, on note ∇X_n^T son gradient. Dans la suite, $\{b_n; n \geq 1\}$ désigne une suite de réels positifs censés donner sens à $\lim_n \frac{1}{b_n} \mathbf{M} \nabla X_n^T$ (ou, de manière équivalente- voir théorème 5.1.2- à $\lim_n \frac{1}{b_n} \mathbf{C} X_n^T$). Le gradient renormalisé est noté

$$Y_n^T = \frac{1}{b_n} \nabla X_n^T.$$

Grâce au théorème 5.1.2, pour obtenir le réarrangement des Y_n^T , il est plus facile de travailler avec leurs distributions $\mu_n^T = \mu_{Y_n^T}$.

Lorsque l'on travaille avec des champs aléatoires, étant donné un pavage simplicial \mathcal{T} , il est plus facile d'étudier le comportement de X_n^T au-dessus des translatées d'un seul simplexe à la fois. On établit dans cette optique le lemme suivant :

Lemme 5.2.1. *Soit T un simplexe de \mathcal{T} . On pose*

$$\Gamma_n^{(T)} = \left\{ \gamma; \frac{1}{n}(\gamma + T) \subseteq K_d \right\}, \quad (5.14)$$

$$H_n^{(T)} = \frac{1}{n} \left(T + \Gamma_n^{(T)} \right), \quad (5.15)$$

$$Y_n^{(T)}(z) = Y_n(z) \mathbf{1}_{\{z \in H_n^{(T)}\}}, \quad z \in K_d, \quad (5.16)$$

$$\mu_n^{(T)} = \mu_{Y_n^{(T)}}. \quad (5.17)$$

Alors, pour tout B de \mathcal{B}_d ,

$$\mu_n^T(B) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \mu_n^{(T)}(B) \rightarrow 0.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \left| \mu_n^T(B) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \mu_n^{(T)}(B) \right| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma_T} \mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}(\gamma+T) \cap \partial K_d \neq \emptyset\}} \lambda_d \left(\frac{1}{n}(\gamma + T) \right), \\ &\leq \lambda_d \left(\partial K_d + \frac{1}{n} B(0, \sup_{T \in \mathcal{T}} \text{diam}(T)) \right), \\ &\leq \frac{\kappa_{\mathcal{T}}}{n}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

où $\kappa_{\mathcal{T}}$ est une constante dépendant de \mathcal{T} . Pour être convaincu de la dernière inégalité, il faut remarquer qu'il est possible de trouver $q_n = \kappa_d n^{d-1}$ points sur ∂K_d z^1, \dots, z^{q_n} (pour une certaine constante κ_d) tels que $\partial K_d + \frac{1}{n} B(0, \kappa_{\mathcal{T}})$ est toujours inclus dans $\bigcup_{i=1}^{q_n} B(z^i, 2\kappa_{\mathcal{T}}/n)$. \square

En conclusion, pour l'étude d'un champ aléatoire X avec un pavage simplicial \mathcal{T} , le procédé est le suivant : Pour chaque $T \in \mathcal{T}$, on calcule la mesure $\mu_n^{(T)}$ en étudiant séparément les incréments du champ le long de chaque bord du simplexe T . Si la limite $\mu^{(T)}$ existe pour chaque T , alors le réarrangement limite est donné par le théorème 5.1.2, c'est la fonction dont la distribution est la mesure $\mu^T = \sum_{T \in \mathcal{T}} \mu_n^{(T)}$.

5.2.3 Résultats pour les champs gaussiens

L'étude spécifique de champs gaussiens permet l'utilisation d'outils plus efficaces pour étudier la convergence de la mesure d'occupation. Nous donnons l'énoncé de plusieurs résultats, dont le théorème 5.2.2, central dans notre étude, qui donne la convergence de la mesure d'occupation sous des hypothèses faibles. Dans la section suivante, plusieurs exemples seront développés pour illustrer les résultats théoriques. La courbe de Lorenz joue un rôle important dans le réarrangement de champs convexes.

Définition 5.2.1. Soit γ_d la loi normale standard d -dimensionnelle. La courbe de Lorenz d -dimensionnelle est

$$GL_d = \mathbf{C}_{\gamma_d}.$$

En vertu du théorème 5.1.2, cette courbe est le réarrangement convexe de tout champ dont la distribution du gradient est γ_d . Elle correspond en dimension 1 à la courbe de Lorenz classique, fréquemment utilisée dans les domaines de la finance et de l'économétrie.

On utilise le même paradigme que précédemment ; X est un champ gaussien, X_n une suite d'approximations, et \mathcal{T} un pavage simplicial. Comme nous le permet le Lemme 5.2.1, pour l'étude asymptotique de la mesure d'occupation de ∇X_n , on procède "simplexe par simplexe". Soit un simplexe T de \mathcal{T} . Ici, $Y_n^{(T)}$ est le gradient de $\frac{1}{b_n} X_n^{(T)}$. Notons $\Sigma_n^{(T)}(z) = \text{cov}(Y_n^{(T)}(z))$. Lorsque l'on traduit la proposition 5.2.1 pour des champs gaussiens ; on obtient :

Proposition 5.2.2. Supposons que (5.10) soit satisfaite et que pour chaque z il y ait une matrice $\Sigma^{(T)}(z)$ telle que

$$\Sigma_n^{(T)}(z) \rightarrow \Sigma^{(T)}(z) \quad (5.19)$$

(ce qui est équivalent à (5.11) dans le cas gaussien). Soit $\mu_z^{(T)}$ la mesure gaussienne sur \mathbb{R}^d de matrice de covariance $\Sigma^{(T)}(z)$, $z \in K_d$. Alors, la seule probabilité limite possible $\mu^{(T)}$ pour $\mu_n^{(T)}$ est le mélange gaussien

$$\mu^{(T)}(B) = \int_{K_d} \mu_z^{(T)}(B) dz, \quad B \in \mathcal{B}_d.$$

On énonce maintenant le résultat principal de ce chapitre, qui nous donne de meilleures conditions pour la convergence de $\mu_n^{(T)}$ que le théorème 5.2.1. On établit en premier le résultat technique optimal, puis on énonce le corollaire qui sera notre principal outil pour réarranger des champs gaussiens.

Théorème 5.2.2. Soit X un champ gaussien centré sur K_d , $n \in \mathbb{N}$, et T un simplexe droit de K_d admettant $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_i)_{i=1}^d$ comme base orthonormale. On note $(Y_{n,i})_{1 \leq i \leq d}$ la décomposition de Y_n sur cette base. On note $\mu_n^{(T)}$ la distribution $Y_n^{(T)}$ et $\varphi_n^{(T)}$ sa fonction caractéristique. Alors il y a une suite déterministe κ_n d'ordre $O\left(\frac{1}{n}\right)$ qui satisfait

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|\varphi_n^{(T)}(h) - \mathbb{E}(\varphi_n^{(T)}(h)) - \kappa_n|^4) \\ &= O\left(\int_{(K_d)^2} dzd\zeta e^{-\langle h, (\Sigma_n^{(T)}(z) + \Sigma_n^{(T)}(\zeta))h \rangle} \sup_{1 \leq i, j \leq d} |\mathbb{E}(Y_{n,i}(z)Y_{n,j}(\zeta))|\right)^2, \quad h \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

La preuve se trouve dans la section 9.2. Dans tous les cas traités ici, ce résultat nous donne la convergence de la suite de mesures aléatoires $\mu_n^{(T)}$ vers son éventuelle limite $\mu^{(T)}$. Le terme déterministe κ_n , en $O(1/n)$ est un effet des problèmes survenant à la frontière, voir le Lemme 5.2.1.

Une version plus pratique du résultat précédent est le corollaire suivant, qui donne la convergence pour de nombreux champs gaussiens centrés dont la fonction de covariance est lisse par morceaux.

Corollaire 5.2.1. *Soit X un champ gaussien centré, et \mathcal{T} un pavage simplicial constitué de simplexes droits. Soit σ la fonction de covariance de X . On appelle Δ l'ensemble de paires de points de $(K_d)^2$ en lesquels σ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 . On note aussi $\Sigma_n^{(T)}$ la matrice de covariance de $Y_n^{(T)}(z)$. Si (5.19) est remplie pour chaque simplexe T de \mathcal{T} et si les conditions suivantes sont satisfaites,*

$$\sum_n \frac{1}{b_n^4} < \infty, \quad (5.20)$$

$$\sum_n \left(\frac{1}{n^{2d}} \text{card}(\Delta \cap H_n^T) \right)^2 < \infty, \quad (5.21)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, z \in K_d} \|\Sigma_n^{(T)}(z)\| < \infty, \quad (5.22)$$

où $H_n^T = \cup_{T \in \mathcal{T}} H_n^T$. Alors nous avons, avec probabilité 1,

$$\mu_n^T \Rightarrow \mu^T,$$

où $\mu^T = \sum_{T \in \mathcal{T}} \mu^{(T)}$ et donc $\mathbf{M}Y_n \rightarrow \mathbf{M}_{\mu^T}$ et $\frac{1}{b_n} \mathbf{C}X_n \rightarrow \mathbf{C}_{\mu^T}$ dans le sens du théorème 5.1.2.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}$, et \mathbf{u} une base orthonormée de T . Pour $(z, \zeta) \notin \Delta$, Soit $d\sigma_{z,\zeta}$ la différentielle de σ en (z, ζ) . On a,

$$\forall 1 \leq i, j \leq d, (z, \zeta) \in (H_n^{(T)})^2 \setminus \Delta,$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(Y_{n,i}^{(T)}(z)Y_{n,j}^{(T)}(\zeta)\right) \\ &= \frac{n^2}{b_n^2} \mathbb{E}\left(\left(X\left(z + \frac{1}{n}\mathbf{u}_i\right) - X(z)\right)\left(X\left(\zeta + \frac{1}{n}\mathbf{u}_j\right) - X(\zeta)\right)\right) \\ &= \frac{n^2}{b_n^2} \left(\sigma\left(z + \frac{1}{n}\mathbf{u}_i, \zeta + \frac{1}{n}\mathbf{u}_j\right) - \sigma\left(z + \frac{1}{n}\mathbf{u}_i, \zeta\right) - \sigma\left(z, \zeta + \frac{1}{n}\mathbf{u}_j\right) + \sigma(z, \zeta)\right) \\ &= \frac{n^2}{b_n^2} \left(d\sigma_{z,\zeta}\left(\frac{1}{n}\mathbf{u}_i, \frac{1}{n}\mathbf{u}_j\right) - d\sigma_{z,\zeta}\left(\frac{1}{n}\mathbf{u}_i, 0\right) - d\sigma_{z,\zeta}\left(0, \frac{1}{n}\mathbf{u}_j\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{b_n^2}\right). \end{aligned}$$

Pour les autres (z, ζ) , où σ n'est pas régulière, nous avons la borne supérieure suivante :

$$\mathbb{E} \left(Y_{n,i}^{(T)}(z) Y_{n,j}^{(T)}(\zeta) \right) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(Y_{n,i}^{(T)}(z)^2 \right) + \mathbb{E} \left(Y_{n,j}^{(T)}(\zeta)^2 \right)$$

qui est uniformément bornée par hypothèse. En conséquence, grâce au théorème précédent, avec $v_n = \text{vol} \left(\frac{1}{n} T \right)$,

$$\int_{(K_d)^2} e^{-\langle h, (\text{cov}(Y_n^{(T)}(z)) + \text{cov}(Y_n^{(T)}(\zeta))) h \rangle} \sup_{i,j} \left| \mathbb{E}(Y_{n,i}^{(T)}(z)) \mathbb{E}(Y_{n,j}^{(T)}(\zeta)) \right| dz d\zeta = O \left(\frac{1}{b_n^2} \right) + O \left(\sum_{(z,\zeta) \in (H_n^{(T)})^2 \cap \Delta} v_n^2 \right).$$

On vérifie facilement que $v_n^2 = O \left(\frac{1}{n^{2d}} \right)$ et donc, en utilisant le lemme 5.2.2, on a, pour une constante κ

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left(|\varphi_n^{(T)}(h) - \mathbb{E}(\varphi_n^{(T)}(h)) - \kappa_n|^4 \right) \leq \kappa \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{b_n^2} + \frac{\text{card} \left((H_n^{(T)})^2 \cap \Delta \right)}{n^{2d}} \right)^2 < \infty.$$

Grâce au lemme de Borel-Cantelli, p.s $\varphi_n^{(T)}(h) - \mathbb{E}(\varphi_n^{(T)}(h)) - \kappa_n \rightarrow 0$, pour chaque $T \in \mathcal{T}$. (Rappelons que c_n est une suite déterministe en $O(1/n)$). Comme par hypothèse $\mathbb{E}(\varphi_n^{(T)}(h)) \rightarrow \varphi^{(T)}(h)$ pour chaque T , on a la convergence de $\varphi_n(h)$ vers $\varphi(h)$ avec probabilité 1, pour chaque h de \mathbb{R}^d . Les théorèmes 3.1.1 et 5.1.2 apportent la conclusion. \square

Le théorème 5.2.1 ne donnait qu'une majoration de l'ordre de $\frac{1}{n}$, mais la dernière expression fournit souvent une majoration sommable.

Concernant les hypothèses, la condition (5.20) requiert que le champ ne soit pas trop régulier. En effet, si le champ est par exemple différentiable, son gradient est aléatoire et sa mesure d'occupation également, alors que le théorème précédent fournit une mesure d'occupation limite déterministe.

5.3 Exemples

Il y a une large littérature dans le cas 1-dimensionnel. Le corollaire 5.2.1 nous permet de retrouver certains résultats.

Théorème 5.3.1. *Soit X un processus gaussien centré 1-dimensionnel à incréments stationnaires tel que $X(0) = 0$ p.s. Soit $\sigma^2(t) = \mathbb{E}(X(t)^2)$. On définit*

$b_n = n\sigma(\frac{1}{n})$ et on fait les hypothèses suivantes

$$\sum_n \frac{1}{b_n^4} < \infty, \quad (5.23)$$

$$\sigma^2 \text{ est continue de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux.} \quad (5.24)$$

Alors,

$$\frac{1}{b_n} \mathbf{C}X_n \rightarrow GL_1.$$

Démonstration. Par stationnarité

$$\mathbb{E}(X'_n(z)^2) = \mathbb{E}(X'_n(0)^2) = n^2\sigma^2\left(\frac{1}{n}\right),$$

et donc on pose $Y_n = \frac{1}{b_n}X'_n$. Alors, pour tout z , $\text{cov}(Y_n(z)) = \text{cov}(Y_n(0))$ converge vers 1, et (5.19) est satisfaite avec $\Sigma(z) = 1$. Donc, le candidat pour la limite, donné par (5.12), est γ_1 . Aussi, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\text{cov}(Y_n(0))| < \infty$ et (5.22) est satisfaite. La condition (5.20) est également vérifiée par hypothèse. Pour vérifier (5.21), on appelle δ l'ensemble fini de points en lesquels σ^2 n'est pas de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$\Delta = \{(s, s + y); s \in [0, 1], y \in \delta\}.$$

Maintenant, $\text{card}(\Theta \cap H_n^2) = \text{card}(\delta) \text{card}(H_n) = O(n)$, donc (5.21) est également vérifiée, et p.s. $\mu_n \Rightarrow \gamma_1$.

Comme GL_1 est bien la fonction convexe dont la distribution du gradient est γ_1 , le théorème 5.1.2 nous donne la conclusion. \square

Davydov et Thilly [DavThi02], grâce à un théorème concernant les processus gaussiens aux accroissements stationnaires, ont obtenu le résultat suivant pour le mouvement brownien fractionnaire :

Théorème 5.3.2. [Davydov, Thilly 98] Soit $0 < \alpha < 2$, et W^α le mouvement brownien fractionnaire d'indice α . Alors

$$\left\| \frac{1}{n^{1-\alpha/2}} \mathbf{C}W_n^\alpha - GL_1 \right\|_{\infty}^{[0,1]} \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, la fonction de covariance $\sigma^2(t) = |t|^\alpha$ est non-dérivable uniquement en 0. On pose $b_n = n^{1-\alpha/2}$, et $\frac{1}{b_n^4}$ est sommable ssi $\alpha \in]0, \frac{3}{2}[$. Ainsi le théorème 5.3.1 retrouve le résultat pour $0 < \alpha < 3/2$. Ca nous donne également le réarrangement convexe du mouvement brownien, d'abord établi par Davydov et Vershik [DavVer98], qui ont en plus obtenu la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

On présente maintenant quelques exemples multidimensionnels, qui donnent une idée de la variété de phénomènes possibles qui peuvent survenir.

5.3.1 Champ de Lévy

Le champ de Lévy est le premier processus multivarié que nous étudierons. En dimension $d \geq 1$, il est défini comme le seul champ gaussien centré dont la fonction de covariance est

$$\sigma(z, \zeta) = \frac{1}{2}(\|z\| + \|\zeta\| - \|z - \zeta\|).$$

Il est à symétrie sphérique, et ses restrictions à des intervalles 1-dimensionnels passant par 0 sont des mouvements browniens.

Considérons, pour une base orthonormée \mathbf{u} quelconque et un point z_0 de K_d le simplexe $T = T(z_0, \mathbf{u}, 1)$ de $(\mathbb{R}_+)^d$. Alors la matrice de covariance de $\nabla X_n^{(T)}(z)$ dans la base \mathbf{u} est donnée par

$$\begin{aligned} \text{cov}(\nabla X_n^{(T)}(z))_{i,j} &= \frac{1}{2n}(\|\mathbf{u}_i\| + \|\mathbf{u}_j\| - \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|) + o(1) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + o(1)), & i \neq j, \\ \frac{1}{n}, & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Elle ne dépend pas du choix de \mathbf{u} , ce qui n'est pas étonnant vu la symétrie sphérique du champ. Mais comme la matrice de covariance a été calculée dans la base \mathbf{u} , la distribution limite dépend, elle, de \mathbf{u} . On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = \sqrt{n}, \\ \beta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \beta \\ \beta & \dots & \beta & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

et on définit μ comme la mesure gaussienne dont la matrice de covariance est Σ dans la base \mathbf{u} . La matrice Σ admet $1 - \beta$ comme valeurs propres de multiplicité $d - 1$, associé à l'espace propre $(1, \dots, 1)^\perp$, et $(n - 1)\beta + 1$ comme valeur propre de multiplicité 1, associé au vecteur propre $(1, \dots, 1)$.

On a

$$\Delta \cap \left(H_n^{(T)}\right)^2 = \left\{ (z, \zeta) \in \left(H_n^{(T)}\right)^2 ; z = \zeta \right\},$$

et donc $\text{card}\left(\Delta \cap \left(H_n^{(T)}\right)^2\right) = \text{card}\left(H_n^{(T)}\right) = O(n^d)$, le corollaire 5.2.1 et le théorème 5.1.2 nous donnent les convergences habituelles :

$$\mu_n \Rightarrow \mu, \quad \frac{1}{b_n} \mathbf{M} \nabla X_n \rightarrow \mathbf{M}_\mu, \quad \frac{1}{b_n} \mathbf{C} X_n \rightarrow \mathbf{C}_\mu.$$

Le réarrangement asymptotique est consistant sous l'action des rotations : en effet, si $\mu^{\mathcal{T}}$ est la mesure limite avec le pavage simplicial \mathcal{T} , on a, pour toute rotation ρ , $\mu^{\rho(\mathcal{T})} = \mu^{\mathcal{T}} \rho^{-1}$. Ceci est dû aux propriétés de symétrie de champ de Lévy, et ce ne sera plus le cas dans les exemples suivants.

5.3.2 Un champ gaussien additif

On définit $X(x, y) = W(x) + W(y)$ sur K_2 , où W est un mouvement brownien standard. Soit \mathcal{T}_2 le pavage de W_2 qui est constitué du simplexe élémentaire $\mathbb{T}_2 = T(0, \mathbf{e}, 1)$ et de \mathbb{T}'_2 son symétrique par rapport à $(1/2, 1/2)$. En particulier, \mathcal{T}_2 est une triangulation de K_2 lui-même. La relation (5.13) est satisfaite avec le réseau \mathbb{Z}^2 . D'après la proposition 5.1.1 et le théorème 5.3.1,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{C}X_n^{(\mathcal{T}_2)} \rightarrow GL_2.$$

Maintenant regardons ce qui se passe lorsque le pavage subit une rotation.

Soit ρ la rotation horaire de \mathbb{R}^2 d'angle $\frac{\pi}{2}$, on définit le nouveau pavage $\mathcal{T} = \rho(\mathcal{T}_2)$, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2) \right), \\ T = T((0, 0), \mathbf{u}, 1), \\ T' = T((0, \sqrt{2}), -\mathbf{u}, 1), \\ \mathcal{T} = \{T, T'\}. \end{array} \right.$$

L'ensembles de triangles \mathcal{T} satisfait la condition (5.13), et admet $\Gamma_{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_1\mathbb{Z} + \mathbf{u}_2\mathbb{Z}$ comme réseau (ainsi que $\sqrt{2}\mathbf{e}_1\mathbb{Z} + \mathbf{u}_1\mathbb{Z}$, et d'autres).

Théorème 5.3.3. *Soit $b_n^2 = \sqrt{2}n$. Alors*

$$\mu_n^{\mathcal{T}} \Rightarrow \mu, \quad \text{presque sûrement}$$

où μ est la distribution gaussienne centrée de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base \mathbf{u} . On a donc, d'après le théorème 5.1.2,

$$p.s., \quad \frac{1}{b_n} \mathbf{M} \nabla X_n \rightarrow \mathbf{M}_{\mu}, \quad \frac{1}{b_n} \mathbf{C}X_n \rightarrow \mathbf{C}_{\mu},$$

dans le sens du théorème 5.1.2.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = (x, y) \in H_n^2$. Ecrivons les coordonnées de $\nabla X_n^{(T)}$ dans la base \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \nabla X_{n,1}^{(T)}(z) &= W\left(x + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + W\left(y + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - W(x) - W(y), \\ \nabla X_{n,2}^{(T)}(z) &= W\left(x - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + W\left(y + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - W(x) - W(y). \end{aligned}$$

$$\text{cov}\left(\nabla X_n^{(T)}(z)\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{si } x - y \geq \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Pour T' :

$$\nabla X_{n,1}^{(T')}(z) = W\left(x + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + W\left(y - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - W(x) - W(y),$$

$$\nabla X_{n,2}^{(T')}(z) = W\left(x - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + W\left(y - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - W(x) - W(y).$$

$$\text{cov}\left(\nabla X_n^{(T')}(z)\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{si } x - y \geq \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

On pose alors

$$b_n^2 = \sqrt{2n},$$

$$\Sigma(z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad z \in K_d.$$

Comme $\text{cov}(Y_n(z))$ converge vers $\Sigma(0)$ presque partout sur K_d , le candidat μ pour la distribution limite est la distribution gaussienne centrée de matrice de covariance $\Sigma(0)$ dans la base \mathbf{u} . Nous devons désormais vérifier les hypothèses du corollaire 5.2.1 pour avoir la convergence $\mu_n^T \Rightarrow \mu$.

La somme $\sum_n \frac{1}{b_n^4} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{n^2}$ est finie. La covariance de la fonction X est

$$\sigma((x, y), (x', y')) = x \wedge x' + x \wedge y' + y \wedge x' + y \wedge y'.$$

Avec les notations du corollaire 5.2.1, on a

$$\Delta = \{(x, y), (x', y'); x = x' \text{ ou } x = y' \text{ ou } x' = y \text{ ou } x = y'\},$$

$$\text{card}(\Delta \cap (H_n^T))^2 = O(n^3).$$

Concernant la condition (5.22), on doit majorer $\|\text{cov}(\nabla X_n^{(S)}(x, y))\|$ pour $S \in \{T, T'\}$ quand x et y sont proches. Plutôt que d'étudier chaque cas séparément, on fait la remarque suivante sur la matrice de covariance : C'est la matrice de covariance de variables de la forme $\eta_1 + \eta_2$ et $\eta_3 + \eta_4$, où les η_i sont tous gaussiens de variance $\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Ainsi, quelle que soit la dépendance entre les η_i , dans chaque cas, toutes les composantes de la matrice seront bornées par $\frac{4}{\sqrt{2n}}$, qui est la borne uniforme que nous recherchions. Donc, en utilisant le corollaire 5.2.1,

$$p.s., \mu_n^T \Rightarrow \mu,$$

et le résultat est prouvé. \square

Cette fois, la triangulation importe dans la mesure d'occupation limite. Voir le champ sous un autre angle, c'est-à-dire tourner les simplexes de la triangulation, induit un changement radical dans les mesures d'occupation. Plus précisément, si μ_0 est la mesure d'occupation limite lorsque la triangulation utilisée est \mathcal{T}_0 , et ρ est la rotation appliquée pour passer de \mathcal{T}_0 à \mathcal{T} , il ne suffit plus de tourner μ par ρ pour avoir la nouvelle mesure limite. Ce phénomène illustre la nature complexe du réarrangement de champs multidimensionnels, en contraste avec les processus 1-dimensionnels.

5.3.3 Drap brownien

Cette section est dédiée à l'étude du drap brownien. Comme le champ de Lévy, c'est un champ gaussien irrégulier qui généralise le mouvement brownien aux dimensions supérieures. Comme dans l'exemple précédent, la nature du réarrangement convexe dépend fortement du choix de la triangulation. Pour z et ζ dans \mathbb{R}^d , on note $z \wedge \zeta$ le vecteur dont les coordonnées sont les minima des coordonnées de z et ζ , et \underline{z} est le produit des coordonnées de z . Le champ de Chentsov est défini sur $(\mathbb{R}_+)^d$ comme le champ gaussien dont la fonction de covariance est $\sigma(z, \zeta) = z \wedge \zeta$.

Théorème 5.3.4. *Soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_i)_{i=1}^d$ une base orthonormale et $T = T(0, \mathbf{u}, 1)$ un simplexe régulier de $(\mathbb{R}_+)^d$. On définit*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j} &= \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i \wedge 0 - \mathbf{u}_j \wedge 0 \in \mathbb{R}^d, \quad i, j \in \{1, \dots, d\}, \\ l(z) &= (z_2 \dots z_d, z_1 z_3 \dots z_d, \dots, z_1 \dots z_{d-1}) \in \mathbb{R}^d, \quad z \in K_d, \\ \Sigma^{(\mathbf{u})}(z)_{i,j} &= \langle l(z), \mathbf{u}_{i,j} \rangle, \quad i, j \in \{1, \dots, d\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

On appelle $\mu^{(\mathbf{u})}$ le mélange de probabilités gaussiennes de covariances respectives $\Sigma^{(\mathbf{u})}(z)$, $z \in K_d$, et $\varphi^{(\mathbf{u})}$ sa fonction caractéristique. On a

$$\mathbb{E} \left(\left| \varphi_n^{(T)}(h) - \varphi^{(\mathbf{u})}(h) - \kappa_n \right|^4 \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad h \in \mathbb{R}^d,$$

pour une certaine suite déterministe κ_n en $O(1/n)$.

Démonstration. On va utiliser la proposition 5.2.2 pour calculer la limite éventuelle et le corollaire 5.2.1 pour montrer la convergence presque sûre.

Soit $z \in H_n^{(T)}$, et $1 \leq i, j \leq d$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\nabla X_{n,i}(z) \nabla X_{n,j}(z)) &= n^2 \mathbb{E}((X(z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_i) - X(z))(X(z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_j) - X(z))) \\ &= n^2 \left(\frac{(z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_i) \wedge (z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_j) - (z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_i) \wedge z - z \wedge (z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_j) + \underline{z}}{n} \right) \\ &= n^2 \left(\frac{(z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_j) - (z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_i \wedge 0) - (z + \frac{1}{n} \mathbf{u}_j \wedge 0) + \underline{z}}{n} \right). \end{aligned}$$

Définissons la fonction Π sur \mathbb{R}^d par $\Pi(z) = \underline{z}$. Elle admet, pour $z, h \in \mathbb{R}^d$, le développement

$$\Pi(z + h) = (z_1 + h_1) \dots (z_d + h_d) = \Pi(z) + \langle l(z), h \rangle + q(z, h),$$

où

$$\begin{aligned} l(z) &= (z_2 \dots z_d, z_1 z_3 \dots z_d, \dots, z_1 \dots z_{d-1}), \\ q(z, h) &\leq \beta(z) \|h\|^2 \end{aligned}$$

pour une fonction continue β . Il est donc possible de majorer uniformément β par une constante κ . Par suite,

$$\mathbb{E}(\nabla X_{n,i}(z)\nabla X_{n,j}(z)) = n^2 \left\langle l(z), \frac{1}{n} \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_j - \frac{1}{n} \mathbf{u}_i \wedge 0 - \frac{1}{n} \mathbf{u}_j \wedge 0 \right\rangle + q \left(z, \frac{\mathbf{u}_{ij}}{n^2} \right).$$

On pose donc

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n}, \\ Y_n &= \frac{1}{b_n} \nabla X_n, \\ \mathbf{u}_{i,j} &= \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i \wedge 0 - \mathbf{u}_j \wedge 0, \\ \Sigma^{(\mathbf{u})}(z)_{i,j} &= \langle l(z), \mathbf{u}_{i,j} \rangle, \end{aligned}$$

et on a

$$\|\Sigma_n(z) - \Sigma^{(\mathbf{u})}(z)\| \leq \frac{\kappa}{n^2}.$$

Les conditions (5.19) et (5.22) sont satisfaites.

Alors, d'après la proposition 5.2.2, l'éventuelle mesure limite $\mu^{(T)}$ a la fonction caractéristique

$$\varphi^{(T)}(h) = \int_{K_d} e^{-\frac{1}{2} \langle h, \Sigma^{(\mathbf{u})}(z) h \rangle} dz.$$

On a $\Delta = \{(z, \zeta) \in K_d; \exists i \in \{1, \dots, d\} z_i = \zeta_i\}$, où σ est de classe \mathcal{C}^1 sur $(K_d)^2 \setminus \Delta$. Comme $\text{card} \left(\left(H_n^{(T)} \right)^2 \cap \Delta \right) = O(n^{2d-1})$, en utilisant le corollaire 5.2.1 on a

$$\mu_n^{(T)} \Rightarrow \mu^{(T)}.$$

□

Soit \mathcal{T} un germe de triangulation. Soit $\mu^{\mathcal{T}} = \bigotimes_{T \in \mathcal{T}} \mu^{(T)}$. Alors on a, avec probabilité 1,

$$\mu_n^{\mathcal{T}} \Rightarrow \mu^{\mathcal{T}}, \quad \frac{1}{b_n} \mathbf{M} \nabla X_n^{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbf{C}_{\mu^{\mathcal{T}}}, \quad \frac{1}{b_n} \mathbf{C} X_n^{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbf{C}_{\mu^{\mathcal{T}}}$$

au sens du théorème 5.1.2.

Trouver une expression de $\mathbf{C}_{\mu^{\mathcal{T}}}$ n'est pas tâche facile, et nous ne sommes pas parvenus à des formules explicites dans le cas général. On présente ci-dessous une expression viable dans le cas 2-dimensionnel avec le germe de triangulation $\mathcal{T}_2 = \{T(0, \mathbf{e}, 1), T(0, -\mathbf{e}, 1)\}$ introduit à la section 5.3.2.

Avec la notation du théorème 5.3.4, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{1,1} &= \mathbf{e}_1, \\
 \mathbf{e}_{1,2} &= \mathbf{e}_{2,1} = 0, \\
 \mathbf{e}_{2,2} &= \mathbf{e}_2, \\
 (-\mathbf{e})_{1,1} &= \mathbf{e}_1, \\
 (-\mathbf{e})_{1,2} &= (-\mathbf{e})_{2,1} = 0, \\
 (-\mathbf{e})_{2,2} &= \mathbf{e}_2.
 \end{aligned}$$

Notons que dans ce cas, on aurait tout aussi bien pu prendre $-\mathbf{e}$ comme base de $T(0, \mathbf{e}, 1)$ ou \mathbf{e} comme $T(0, -\mathbf{e}, 1)$, ça n'aurait pas changé le résultat. Nous avons le soulagement de constater que le résultat ne dépend pas du choix de la base du simplexe. On pose donc

$$\begin{aligned}
 l(x, y) &= (y, x), \\
 \Sigma^{(\mathbf{u})}(x, y) &= \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Soit $C_{a,b} = [-\infty, a[\times [-\infty, b[$ un rectangle de \mathcal{B}_2 , $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche l'expression du réarrangement convexe asymptotique $\mathbf{C}_{\mu^{\tau_2}}$, qui est l'unique fonction nulle en 0 qui satisfait

$$\begin{aligned}
 \lambda_d((\nabla \mathbf{C}_{\mu^{\tau_2}})^{-1}(C_{a,b})) &= \int_{C_{a,b}} dh \int_{L_2} \frac{e^{-\frac{1}{2}(h_1^2/y + h_2^2/x)}}{\sqrt{xy}} dx dy, \\
 &= G(a)G(b),
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

où

$$G(a) = \int_{-\infty}^a dh \int_0^1 \frac{e^{-\frac{h^2}{2x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

C'est une bijection croissante de \mathbb{R} vers $[0, 1]$. En conséquence, on définit $\mathbf{C}_{\mu^{\tau_2}}$ par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_1(x) &= \int_0^x G^{-1}(t) dt \\
 \mathbf{C}_{\mu^{\tau_2}}(x, y) &= (\mathbf{C}_1(x), \mathbf{C}_1(y)).
 \end{aligned}$$

Comme \mathbf{C}_1 est convexe, il en est de même de $\mathbf{C}_{\mu^{\tau_2}}$. On a

$$\begin{aligned}
 \mu_{\nabla \mathbf{C}_{\mu^{\tau_2}}}(C_{a,b}) &= \int_{L_2} \mathbf{1}_{\mathbf{C}_1'(x) \leq a} \mathbf{1}_{\mathbf{C}_1'(y) \leq b} dx dy = \int_{L_2} \mathbf{1}_{G^{-1}(x) \leq a} \mathbf{1}_{G^{-1}(y) \leq b} dx dy \\
 &= G(a)G(b).
 \end{aligned}$$

$\mathbf{C}_{\mu\tau_0}$ satisfait bien (5.26).

L'image 5.1 est une représentation graphique de $\mathbf{C}_{\mu\tau_2}$. Cette fonction est donc le réarrangement convexe asymptotique de X . Comme dans l'exemple 5.3.2, elle peut être représentée comme la somme de deux versions d'un processus 1-dimensionnel

$$\mathbf{C}_{\mu\tau_2} = \mathbf{C}_1 \oplus \mathbf{C}_1. \quad (5.27)$$

Néanmoins X ne peut pas être écrit sous la forme $X = X_1 \oplus X_2$, chacun ayant un réarrangement convexe \mathbf{C}_1 , au contraire de l'exemple dans la section 5.3.2. De plus, cette \oplus -factorisation est l'exclusivité du cas 2-dimensionnel, et est due au fait que $l(z)$, défini dans (5.25), n'implique pas de produits de coordonnées $z_i z_j$ seulement dans le cas $d \leq 2$.

Par contre, le réarrangement de X est dans un certain sens la \oplus -somme de la moyenne des réarrangements convexe de mouvements browniens intégrés. En effet, soit X_1 un mouvement brownien intégré. Il n'a pas de réarrangement convexe déterministe car son gradient est une fonction lisse aléatoire, en revanche il vérifie

$$\mathbb{E}\mu_{\nabla(X_1 \oplus X_1)}(B) = \mu_{\nabla(\mathbf{C}_1 \oplus \mathbf{C}_1)}(B) = \mu_{\nabla\mathbf{C}_{\mu\tau_0}}(C_{a,b})(B), \quad B \in \mathcal{B}_d. \quad (5.28)$$

Démonstration. Avec les notation précédentes, pour un cylindre $B = [-\infty, a] \times [-\infty, b]$, comme X'_1 est un mouvement brownien standard,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mu_{\nabla(X_1 \oplus X_1)}(B) &= \int_0^1 \mathbb{P}(X'_1(x) \leq a) dx \int_0^1 \mathbb{P}(X'_1(y) \leq b) dy, \\ &= G(a)G(b), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

Les restrictions sur des segments horizontaux et verticaux du champ de Chentsov 2-dimensionnel X sont des mouvements browniens, mais à cause de la dépendance statistique entre des locations éloignées, son réarrangement convexe ressemble plus à celui d'un mouvement brownien intégré, dans le sens de (5.28). Nous sommes en présence d'un exemple où les dépendances de longue portée influencent fortement le réarrangement convexe asymptotique.

5.4 Discussion

Dans ce chapitre, on a développé des outils pour calculer les réarrangements convexe asymptotiques de certaines classes de champs aléatoires. On a observé qu'il y avait une forte dépendance dans le choix de l'approximation choisie. Dans [DavThi02], il devient apparent que pour certains processus gaussiens 1-dimensionnels à accroissements stationnaires, la courbe de Lorenz

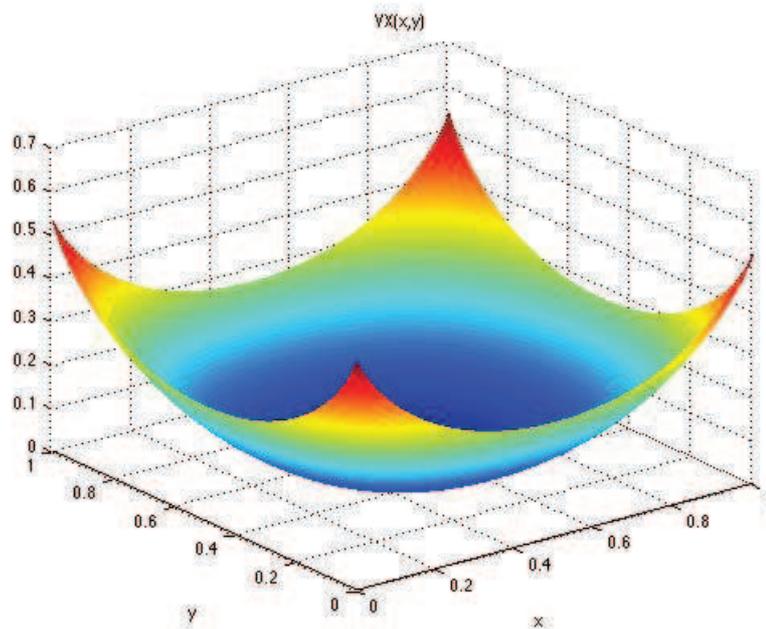


FIGURE 5.1 – Réarrangement convexe asymptotique du drap brownien.

semble être un réarrangement convexe “universel”, dans le sens qu’il ne dépend pas de l’approximation. Dans le cas multivarié, il serait appréciable de pouvoir faire de même, et d’associer de cette manière à chaque champ un unique objet convexe. Dans les deux derniers exemples de la section 5.3.2, la classe des distributions limites possibles semble être une classe de distributions gaussiennes, dans laquelle il serait intéressant de trouver une structure. C’est un programme ambitieux, et la prochaine étape serait d’investiguer le réarrangement convexe pour d’autres méthodes d’approximations, comme la convolution, et de trouver d’autres moyens de représenter l’objet convexe limite, comme le *corps convexe associé*, ou la *somme de Blaschke* des petits convexes impliqués dans l’approximation polygonale du champ.

Chapitre 6

Mosaïques STIT

On dit qu'un fermé aléatoire X de \mathbb{R}^d est stationnaire si pour tout h de \mathbb{R}^d on a l'égalité en loi $X \stackrel{(d)}{=} (X + h)$. La stationnarité est une hypothèse naturelle pour la modélisation de beaucoup de phénomènes. Il est possible de montrer que tout fermé aléatoire stationnaire non-vide p.s. est non-compact avec probabilité 1. Les objets paramétriques traditionnels (une boule, un convexe, l'union d'une famille finie ou iid de tels objets) ne peuvent en conséquence pas fournir de modèle stationnaire. La géométrie aléatoire s'est pour cela attachée à créer beaucoup d'objets stationnaires non-compacts, l'objet fondamental étant le processus ponctuel de Poisson homogène sur \mathbb{R}^d , c'est-à-dire le seul processus ponctuel de Poisson stationnaire. Les processus ponctuel de Poisson servent également à définir d'autres ensembles aléatoires plus complexe, comme les mosaïques. C'est le cas par exemple de la mosaïque de Voronoi stationnaire, définie comme la mosaïque de Voronoi associée à un processus ponctuel (Voir [SchWei08]).

Les mosaïques aléatoires forment une classe importante d'objets de la géométrie stochastique. Elles se sont révélées être un outil utile pour modéliser des structures géométriques apparaissant en biologie, géologie, sciences médicales, et bien d'autres. La mosaïque d'hyperplans poissonniens, la mosaïque de Voronoi poissonnienne, et sa duale la mosaïque de Poisson-Delaunay, sont les modèles viables les plus utilisés et étudiés jusqu'à maintenant, et sont tous définis à partir d'un processus de Poisson ponctuel dans un espace approprié. Jusqu'alors, l'opération la plus répandue pour créer une nouvelle mosaïque à partir de deux mosaïques M_1 et M_2 était la superposition $M = M_1 \cup M_2$. Cette opération est utilisée par exemple pour créer de nouveaux modèles de mosaïques en télécommunication, voir [Vos09]. Dans \mathbb{R}^2 , la superposition laisse stable la classe des mosaïques à "noeuds en X", comme la mosaïque de lignes poissonniennes. Plus récemment, Zuyev et Tchoumatchenko [ZuyTch01] ont introduit une autre opération sur les mosaïques, par la technique d'agrégation de cellules. Dans les années 1980, R. V. Ambartzumian eut l'idée d'une opération au sein des mosaïques de \mathbb{R}^d , appelée *iteration*, ou opération de *nesting*. Cette opération consiste à nicher dans les cellules d'une mosaïque des copies

iid d'une autre. Quand regardée dans \mathbb{R}^2 , cette opération laisse stable la classe des mosaïques à "noeud en T". Nagel, Mecke et Weiss ([MecNagWei08, MecNagWei08b, NagWei05]) ont introduit le modèle STIT, d'après une idée de Cowan [Cow84]. C'est un objet naturel par rapport à l'opération d'*itération*, car elle possède la propriété d'être STable sous l'ITération. Cet objet peut être utilisé, entre autres, pour modéliser des motifs de craquements, comme ceux observés sur les vieilles poteries ou durant le craquèlement de sols secs.

C'est une mosaïque stationnaire, et isotropique sous un choix adapté des paramètres. Beaucoup de propriétés géométriques des mosaïques STIT ont été étudiées, comme les moments des variables reliées aux faces typiques de la mosaïque. Cowan, dans [Cow78] et [Cow80], a souligné l'importance des propriétés ergodiques des mosaïques aléatoires. Dans ce chapitre, nous allons établir que toutes les mosaïques STIT possèdent la propriété de mélange fort, ce qui implique son ergodicité. Précisément, si K et L sont deux compacts, et M l'ensemble fermé formé par les frontières des cellules de la mosaïque, alors

$$\mathbb{P}(M \cap K = \emptyset, M \cap \theta_h L = \emptyset) - \mathbb{P}(M \cap K = \emptyset)\mathbb{P}(M \cap L = \emptyset) \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

lorsque $\|h\| \rightarrow +\infty$. où $\theta_h L$ est l'ensemble L translaté du vecteur h . De plus, quand K et L sont compacts, on peut donner l'ordre de décroissance optimal, de l'ordre de $\frac{1}{\|h\|}$.

Après avoir introduit les notations, on donnera une brève description de la construction et des propriétés des mosaïques STIT, pour finalement énoncer ses propriétés ergodiques.

Donnons à présent des définitions rigoureuses pour les mosaïques aléatoires.

Définition 6.0.1. *On appelle mosaïque de \mathbb{R}^d tout ensemble dénombrable R de polytopes convexes de \mathbb{R}^d qui vérifient*

- (i) *pour tout $C \in R$, $\text{int}(C) \neq \emptyset$;*
- (ii) $\bigcup_{C \in R} C = \mathbb{R}^d$;
- (iii) *pour tous $C, C' \in R$ tels que $C \neq C'$, on a $\text{int}(C) \cap \text{int}(C') = \emptyset$;*
- (iv) *pour tout $K \in \mathfrak{K}$, $\text{card}(\mathfrak{F}_K \cap R) < \infty$.*

Il est plus commode de considérer le fermé $M = \bigcup_{C \in R} \partial C$ formé par les frontières de cellules. On appelle mosaïque aléatoire tout fermé aléatoire M à valeurs dans $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}(\mathfrak{F}))$, (où $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ est la tribu d'Effros, associée à la topologie de Fell décrite au Chapitre 3.2) qui s'écrit p.s. $M = \bigcup_{C \in R} \partial C$, pour R satisfaisant (i)-(iv).

On appelle \mathfrak{M} l'ensemble des mosaïques de \mathbb{R}^d . D'après le théorème de Choquet (voir Chapitre 3.2), la loi d'un fermé aléatoire est caractérisée par sa fonctionnelle de capacité

$$\mathbf{T}_M(K) = \mathbb{P}(M \cap K = \emptyset), \quad K \in \mathfrak{K}.$$

6.1 Description et propriétés

Pour décrire les mosaïques STIT, on va commencer par indiquer comment les construire dans une fenêtre compacte, puis on utilisera ensuite les propriétés de consistance spatiale pour l'étendre à tout l'espace. On définira ensuite l'opération d'itération, *nesting* en anglais, et indiquer en quoi les mosaïques STIT sont un objet naturel pour cette opération.

On note \mathcal{H} l'ensemble des hyperplans de \mathbb{R}^d , et pour $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on pose

$$[A] = \mathcal{H} \cap \mathfrak{F}_A$$

l'ensemble des hyperplans qui touchent A . Pour B un autre borélien, on définit également $[A|B]$ comme l'ensemble des hyperplans H qui séparent strictement A et B . On écrit, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$[x] = [\{x\}], [x|y] = [\{x\}|\{y\}].$$

On peut factoriser $\mathcal{H} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1}$, où $H = (r, u)$ est l'hyperplan de normale u situé à une distance r de l'origine. On munit \mathcal{H} par la tribu borélienne engendrée par cette identification, \mathbb{R}^+ et \mathbb{S}^{d-1} étant équipés des tribus boréliennes habituelles.

On considère une mesure μ localement finie et invariante sous l'action des translations sur \mathcal{H} . On peut alors décomposer

$$\mu = \lambda^+ \otimes \nu,$$

où λ^+ est la restriction de la mesure de Lebesgue à \mathbb{R}^+ et ν est une mesure finie sur \mathbb{S}^{d-1} .

On suppose que ν a la propriété suivante :

$$\text{span}(\text{supp}(\nu)) = E. \tag{6.2}$$

Cette relation nous assure que la mosaïque générée par le processus d'hyperplans d'intensité μ aura p.s. des cellules compactes.

Pour $H \in \mathcal{H} \setminus [0]$, on note H^+ le demi-espace fermé délimité par H ne contenant pas 0, et H^- l'autre demi-espace fermé. Notons que $\mu([0]) = 0$ comme μ est stationnaire et localement finie, et qu'en ce sens un hyperplan "typique" se soumet à cette écriture.

6.1.1 Construction

Sur une fenêtre compacte $K \in \mathfrak{R}$ d'intérieur non-vide, on va définir la mosaïque de paramètres μ et K comme un processus temporel à valeurs dans \mathfrak{M} . Soit \mathbb{B} l'arbre de Young binaire infini, où les feuilles sont étiquetées telles que la première feuille porte le numéro 1, et si une feuille porte l'étiquette k , alors ses deux feuilles-filles portent les numéros $2k$ et $2k + 1$. On attache pour chaque k une paire (ε_k, H_k) à la feuille k , où $\{\varepsilon_k; k \geq 1\}$ est une famille de variables

exponentielles iid de paramètre $\mu([K])$, et les $\{H_k\}$ sont des hyperplans iid de loi $\frac{\mu([K] \cap \cdot)}{\mu[K]}$.

La mosaïque est définie par un processus de division cellulaire, où chaque cellule est identifiée avec une feuille de l'arbre, et la première cellule est la fenêtre de départ $C_1 = K$. On le décrit en terme d'un processus de vie et de mort, où une cellule meurt lorsqu'elle est divisée en deux cellules-filles. Les temps de mort $\{d_k\}$, de naissance $\{b_k\}$, et les cellules-filles $\{C_k\}$ sont définies récursivement de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = 0, \\ d_k = b_k + \varepsilon_k, \\ b_{2k} = b_{2k+1} = d_k, \\ C_{2k} = C_k \cap H_k^-, \\ C_{2k+1} = C_k \cap H_k^+, \end{array} \right.$$

On définit alors la mosaïque au temps $a > 0$ comme le résultat de ce processus de division cellulaire lorsqu'une durée a s'est écoulée.

$$M_{a,K} = \bigcup_{b_k \leq a} \partial C_k,$$

le paramètre ν restant pour l'instant implicite dans un souci de clarté. On note $\mathbb{P}_{a,K}$ la loi de cette mosaïque. On adopte l'écriture simplifiée

$$\mathbf{T}_{a,K} = \mathbf{T}_{M_{a,K}}, \quad \mathbf{U}_{a,K} = 1 - \mathbf{T}_{a,K}.$$

Remarques

1. Le seul aspect non-intuitif de cette construction est que H_k peut ne pas intersecter C_k , ce qui fait qu'une cellule-fille est vide, et l'autre est C_k elle-même. Il n'y a pas d'objection théorique à ça, mais on peut y remédier en choisissant, au lieu d'une famille iid de temps durées de vies (ε_k) , d'attacher indépendamment à chaque cellule C_k le taux de mort $\mu([C_k])$ et un hyperplan tiré selon la loi $\frac{\mu([C_k] \cap \cdot)}{\mu[C_k]}$. Ainsi, la loi de chaque hyperplan soit concentrée sur l'ensemble des hyperplans qui coupent effectivement la cellule.
2. Dans \mathbb{R}^2 , quand μ est isotrope, le taux de mort d'une cellule C , $\mu([C])$, est proportionnel à son périmètre.
3. Il est plus élégant de décrire certains objets de la géométrie aléatoire à l'aide d'un processus ponctuel. En fait ici c'est l'ensemble des paires (temps de morts, hyperplans) impliqués dans la construction qui est un processus ponctuel.

Soit Π un processus ponctuel poissonien d'hyperplans sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{H}$ d'intensité $\lambda^+ \otimes \mu([K] \cap \cdot)$. Comme p.s., pour tout $t \geq 0$, $\text{card}(\{t\} \times \mathcal{H} \cap \Pi) \leq 1$,

on peut numéroter les points de Π par $(\tau_k, H_k)_{k \geq 1}$ de telle sorte que p.s., pour tout $k \geq 1$, $\tau_k < \tau_{k+1}$, $\Pi = \{(\tau_k, H_k); k \geq 1\}$ et, avec $\varepsilon_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, la famille $\{(\varepsilon_k, H_k)\}$ satisfait les hypothèses de la constructions précédentes. L'idée sous-jacente d'utiliser ce processus poissonien est que le processus de "chute" des hyperplans est sans mémoire, et les hyperplans sont iid et uniformément répartis parmi tous les hyperplans touchant la fenêtre K .

Il convient de remarquer que pour l'instant, malgré ce qui est annoncé, la mosaïque n'est pas définie sur \mathbb{R}^d , mais sur toute fenêtre compacte. Cela est dû à sa construction qui vient naturellement d'un processus de division cellulaire, nécessairement compact. Si notre famille de droites devait partitionner \mathbb{R}^d , il n'y a aucune chance qu'en un temps fini on obtienne des cellules compacts. L'objet du prochain paragraphe est de montrer l'existence d'une mosaïque sur \mathbb{R}^d dont la restriction à chaque compact ait la même loi que la mosaïque que l'on vient de décrire.

6.1.2 Consistance

Nagel et Weiss [NagWei05] ont établi la propriété de consistance :

Théorème 6.1.1. *Si $K \subseteq K'$ sont deux compacts d'intérieurs non-vides, alors*

$$M_{a,K} \setminus \partial K \stackrel{(d)}{=} M_{a,K'} \cap \text{int}(K).$$

Ce qui revient à dire d'après le théorème 3.2.1 que pour tout compact $L \subseteq \text{int}(K)$,

$$\mathbf{T}_{a,K}(L) = \mathbf{T}_{a,K'}(L),$$

On est alors en droit de définir sur \mathfrak{K}

$$\mathbf{T}_a(C) = \mathbf{T}_{a,K}(C)$$

$$\mathbf{U}_a(C) = \mathbf{U}_{a,K}(C) \quad \text{pour tout } K \text{ dont l'intérieur contient } C.$$

Comme les propriétés de semi-continuité et d'alternance du théorème de Choquet sont en un certain sens locales, et qu'elles sont vraies sur $\mathfrak{K}(K)$ pour tout compact K , on vérifie facilement qu'elles sont vérifiées sur \mathfrak{K} en se plaçant dans chaque cas dans un compact K suffisamment grand.

Grâce au théorème de Choquet, cela nous permet de définir un fermé aléatoire M_a sur tout l'espace, de fonctionnelle de capacité \mathbf{T}_a , telle que

$$\forall K \in \mathfrak{K}, (M_a \cap K) \cup \partial K \stackrel{(d)}{=} M_{a,K},$$

Il est clair que M_a sera presque sûrement une mosaïque, et on l'appelle la mosaïque STIT de paramètres a et μ . On appelle \mathbb{P}_a sa loi sur \mathfrak{M} . Mecke, Nagel et Weiss [MecNagWei08b] ont aussi fourni une construction explicite globale de la mosaïque trajectoire par trajectoire.

6.1.3 Itération

Définissons brièvement l'opération d'itération. Cela peut ressembler à du bricolage à première vue, mais une définition plus élégante et naturelle, à l'aide d'un processus poissonniens d'hyperplans marqués, peut se trouver dans [Mec-NagWei08]. Soit deux mosaïques aléatoires M et M' de lois respectives \mathbf{Q} et \mathbf{Q}' . On définit la loi $\mathbf{Q} \boxplus \mathbf{Q}'$ sur $(\mathfrak{M}, \mathfrak{B}(\mathfrak{M}))$ comme celle de la mosaïque Z obtenue de la manière suivante :

Choisissons une réalisation de M et une famille iid de mosaïques $(M'_q)_{q \geq 1}$ de même loi que M' et indépendantes de M . On pose sur les cellules de M un numérotage, indépendant des M'_q , tel que $M = \bigcup_{q \geq 1} \partial C_q$, et on définit Z comme le fermé aléatoire :

$$Z = M \cup \left(\bigcup_{q \geq 1} C_q \cap M'_q \right).$$

Ainsi Z est obtenu en nichant une copie indépendante de M' dans chaque cellule de M . On note $Z = M \odot (M'_q)_{q \geq 1}$. La loi de Z est notée $\mathbf{Q} \boxplus \mathbf{Q}'$, et est dite loi *itérée* de \mathbf{Q} et \mathbf{Q}' . Par abus de langage, on appelle aussi Z l'*itération* de M par M' .

Une mosaïque aléatoire M est dit être stable sous itération ssi elle vérifie

$$M \stackrel{(d)}{=} 2M \odot M,$$

c'est-à-dire si

$$\mathbb{P}(2 \cdot) = \mathbb{P} \boxplus \mathbb{P}.$$

ou encore, en termes de fonctionnelle de capacité

$$\mathbf{T}_M(2 \cdot) = \mathbf{T}_{M \odot M}(\cdot).$$

Le facteur 2 est indispensable car $M \subseteq M \odot M$, et l'inclusion est typiquement stricte. Sans renormalisation, il est donc impossible d'avoir égalité en loi.

Il a été montré dans [NagWei05] que les mosaïques STIT sont les seules mosaïques aléatoires stables sous itération. De plus, la classe des mosaïques STIT est un puits d'attraction dans le sens suivant. Prenons une mosaïque aléatoire stationnaire L de loi \mathbf{Q} . Soit a sa longueur moyenne par unité de longueur, définie par

$$a = \mathbb{E}(\mathcal{H}_{d-1}(L \cap [0, 1]^d)).$$

On définit la suite des itérées de ses lois $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ par :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mathbf{Q}, \\ Q_{n+1} &= Q_n \boxplus Q_1. \end{aligned}$$

Ainsi, la loi Q_n est celle de L itérée n fois avec elle-même. Il est prouvé dans NagWei05 que la loi renormalisée $Q_n(\frac{1}{n} \cdot)$ converge faiblement vers la loi de la

mosaïque STIT de paramètres a et $\mu = \lambda_d \times \nu$. La mesure ν est décrite à partir de la loi de L dans [NagWei05]. La mosaïque STIT est un objet central par rapport à cette opération de nichage. Dans un sens, ça n'est pas surprenant puisqu'elle est elle-même construite dans chaque fenêtre compacte comme une sorte d'itération de la mosaïque générée par un seul hyperplan.

6.2 Propriété de mélange fort

Dans cette section on prouve la relation (6.1), et on donne un taux de convergence optimal. Ici $\mu = \lambda^+ \otimes \nu$ est une mesure sur \mathcal{H} qui satisfait l'hypothèse (6.2), et a est un paramètre strictement positif. L'espace de probabilité sous-jacent est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{B}(\mathfrak{M}), \mathbb{P}_a)$, et M_a est une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_a .

Considérons l'ensemble $\Theta = \{\theta_h; h \in \mathbb{R}^d\}$ de toutes les translations, vues comme des opérateurs sur \mathfrak{F} . La stationnarité d'un fermé aléatoire X de loi P nous assure que pour tout $\theta \in \Theta$, \mathbb{P}_a est invariant sous θ . On dit qu'un borélien \mathfrak{A} de la tribu $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ est Θ -invariant ssi pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\theta\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Par exemple $\mathfrak{K}, \mathcal{H}, \mathfrak{M}$ ou "la classe de toutes les mosaïques dont les cellules sont des rectangles" sont des ensembles invariants. Etant donné une loi stationnaire \mathbb{P} sur \mathfrak{F} , le système dynamique $(\mathfrak{F}, \mathfrak{B}(\mathfrak{F}), \mathbb{P}, \Theta)$ est dit *ergodique* ssi tout ensemble Θ -invariant a probabilité 0 ou 1, et il est *fortement mélangeant* si, pour tous boréliens $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ dans $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$,

$$\mathbb{P}(\mathfrak{A}, \theta_h \mathfrak{A}') \xrightarrow[\|h\| \rightarrow \infty]{h \in E} \mathbb{P}(\mathfrak{A})\mathbb{P}(\mathfrak{A}'). \quad (6.3)$$

Lorsque X est un fermé aléatoire de loi \mathbb{P} , on parle simplement de la stationnarité, ergodicité, ou de la propriété de mélange pour X . La propriété de mélange nous assure l'indépendance relative du comportement de X dans des zones suffisamment éloignés. Comme tout ensemble Θ -invariant vérifie $P(\mathfrak{A}, \theta_h \mathfrak{A}) = P(\mathfrak{A})$, la propriété de mélange fort implique l'ergodicité.

D'après le lemme 9.3.1 dans [SchWei08], il suffit de montrer (6.3) pour des ensembles $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ issus d'une semi-algèbre \mathfrak{B}_0 qui génère $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$. Ils utilisent ce résultat pour montrer le théorème 9.3.2, qui stipule qu'il est suffisant de le montrer pour des paires de la forme

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^K, \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{F}^L$$

pour K et L dans \mathfrak{K} .

Ainsi, pour montrer que la mosaïque M_a est fortement mélangeante, il suffit de montrer que pour tout $K, L \in \mathfrak{K}$,

$$\mathbb{P}_a(\mathfrak{F}^K \cap \mathfrak{F}^{\theta_h L}) \xrightarrow[\|h\| \rightarrow \infty]{h \in E} \mathbb{P}_a(\mathfrak{F}^K)\mathbb{P}_a(\mathfrak{F}^L).$$

On a besoin de quelques notations supplémentaires.

Proposition 6.2.1. *Etant donné $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, la mesure de tous les hyperplans séparant 0 et u a la représentation suivante :*

$$\zeta(u) := \mu([0|u]) = \mu([0, u]) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \nu(dv),$$

et donc

$$\forall u, v \in \mathbb{S}^{d-1}, |\zeta(u) - \zeta(v)| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|.$$

De plus, il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\forall u \in \mathbb{S}^{d-1}, \zeta(u) \geq \kappa.$$

Notons que ζ est également défini par

$$\zeta(u) = \mathbb{E}(\text{card}(M \cap [0, u])),$$

Ce résultat, prouvé à la section 9, est pertinent au regard du comportement asymptotique de l'expression (6.1), donné dans le théorème suivant. On note $\xi(h) = \|h\| \zeta(h/\|h\|)$.

Théorème 6.2.1. *Pour tous $K, L \in \mathfrak{K}$,*

$$\left| \mathbb{P}_a(\mathfrak{F}^K \cap \mathfrak{F}^{\theta_h L}) - \mathbb{P}_a(\mathfrak{F}^K) \mathbb{P}_a(\mathfrak{F}^L) \right| = O(\|h\|^{-1}). \quad (6.4)$$

Si de plus K et L n'ont chacun qu'une composante connexe, alors

$$\frac{\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{T_h L})}{\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K) \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^L)} - 1 \sim \frac{\Lambda([A] \cap [T_h B])}{\xi(h)},$$

pourvu que le membre de droite soit non-nul, quel que soit h .

La dépendance asymptotique de \mathfrak{F}^K et $\mathfrak{F}^{\theta_h L}$ est étroitement reliée à la probabilité que la cellule $C = \text{conv}(K \cup \theta_h L)$ soit divisée avant le temps a par un hyperplan qui sépare K et $\theta_h L$, et la dépendance asymptotique du temps nécessaire à la réalisation de cet événement est en $\xi(h)$, grâce à la stationnarité de μ (voir le lemme 10.3.2).

On donne à la fin de la preuve du théorème quelques considérations valables uniquement dans le cas où K et L sont connexes (dans ce cas la fonctionnelle de capacité a une expression très simple). On s'aperçoit qu'on est alors très proche de l'optimalité avec ce taux de convergence.

Il est difficile d'avoir une estimation générale de $\Lambda([K] \cap [T_h L])$, car cette expression repose sur la forme de K et L , et sur la direction de h . Si par exemple $K = L$ est un segment de \mathbb{R}^2 , prendre h respectivement parallèle et perpendiculaire à K donne des expressions très différentes, l'une d'entre elles étant nulle. Si K et L ont une mesure $(d-1)$ -dimensionnelle nulle, ce terme sera encore 0.

Quand K et L ont plus d'une composante connexe, l'estimation est plus difficile car la fonctionnelle de capacité a une expression plus compliquée, même avec seulement deux composantes connexes (voir [NagWei05]). Pour gérer ce problème, on doit estimer la lipschitzianité de la fonctionnelle de capacité comme une fonction temporelle. On obtient l'expression suivante, suffisamment compacte pour être signalée.

Proposition 6.2.2. *Pour $L \in \mathfrak{K}$, il existe $\beta_{L,a} > 0$ tel que*

$$0 \leq \mathbf{T}_{a+t}(L) - \mathbf{T}_a(L) \leq t\beta_{L,a}.$$

De plus, $\beta_{L,a}$ est invariante aux déplacements de L .

Cette relation est prouvée dans la section des preuves.

Chapitre 7

Enveloppes généralisées

La relation d'ordre sur \mathbb{R} ne se généralise pas à \mathbb{R}^d . De ce fait, il n'y a pas de manière naturelle de définir des statistique d'ordre dans les espaces multidimensionnels. Une possibilité est d'ordonner les éléments suivant une norme, mais il faut choisir la norme, et l'origine.

Pour exploiter la structure euclidienne naturelle des espaces fini-dimensionnels, voici une manière de définir un ordre sur un processus ponctuel Π , appelé "épluchage". On appelle $\Pi_{(1)}$ l'ensemble des points extrémaux de l'enveloppe convexe de Π , et $\Pi_1 = \Pi \setminus \Pi_{(1)}$. Par récurrence sur $k \geq 2$, on définit $\Pi_{(k)}$ comme l'ensemble des points extrémaux de Π_{k-1} , et $\Pi_k = \Pi \setminus \Pi_{(k)}$; on note aussi $\text{conv}^k(\Pi) = \Pi_k$. Ce procédé fournit une partition ordonnée $\Pi = \bigcup_{k \geq 1} \Pi_{(k)}$ qui implique peu d'arbitraire.

L'enveloppe convexe fermée d'une configuration Π , définie comme la plus petite intersection de demi-plans fermés contenant Π , est parfois non-pertinente au vu de la géométrie du problème. C'est pourquoi on définit l'enveloppe généralisée, qui vaudra aussi dans un cadre non-vectoriel. Etant donné une classe d'ensembles fermés \mathcal{L} , on appelle \mathcal{L} -enveloppe de X l'intersection de tous les ensembles de \mathcal{L} contenant X . Les éléments de \mathcal{L} pourront également être vus comme les ensembles de niveaux de fonctions continues, comme c'est le cas pour l'enveloppe convexe avec la classe des formes linéaires. L'ensemble \mathcal{L} -extrémal sera défini dans ce cadre par analogie avec la notion de point extrémal pour les enveloppes convexes. On étudie le \mathcal{L} -épluchage correspondant $\{\Pi_{(\mathcal{L},k)}; k \in \mathbb{N}\}$ de Π , par analogie avec l'épluchage convexe.

On va d'abord étudier la topologie de l'ensemble $\mathfrak{C}^{\mathcal{L}}$ des \mathcal{L} -convexes, définis comme la classe des fermés qui sont leur propre \mathcal{L} -enveloppe. On étudiera en particulier la continuité des applications $\Pi \mapsto \Pi_{(\mathcal{L},k)}$. Ces résultats nous permettront d'étudier le convergences de fonctionnelles dépendant des points \mathcal{L} -extrémaux, un peu de la même manière que l'on étudie asymptotiquement $\xi_{(n)}$ lorsque ξ_1, \dots, ξ_n sont des variables iid dans \mathbb{R} .

Cette étude a déjà été réalisée dans [DavNag04] dans le cadre des enveloppes convexes. Si ξ_1, \dots, ξ_n sont des variables iid appartenant au domaine d'attraction d'une loi α -stable, ils ont étudié asymptotiquement les fonction-

nelles du type

$$\zeta_n^{(k)} = \frac{1}{b_n} \sum_{\xi_j \in \text{conv}^k(\xi_1, \dots, \xi_n)} \xi_j,$$

où b_n est un facteur de renormalisation approprié. On généralisera ces résultats au cadre plus général des \mathcal{L} -enveloppes.

7.1 Définition

Soit E un espace topologique, et \mathcal{L} une classe de fermés de E . Soit A un sous-ensemble de E . On appelle \mathcal{L} -enveloppe de A et on note

$$\text{env}(A; \mathcal{L}) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}, L \supseteq A} L.$$

Si \mathcal{L} est l'ensemble des fermés, alors $\text{env}(A; \mathcal{L}) = \text{ad}(A)$ est l'adhérence de A . Si E est un espace vectoriel et que \mathcal{L} est l'ensemble des demi-espaces fermés, alors $\text{env}(A; \mathcal{L}) = \text{conv}(\text{ad}(A))$ est l'enveloppe convexe fermée de A . La \mathcal{L} -enveloppe jouit des propriétés suivantes.

- Proposition 7.1.1.** (i) $\text{env}(A; \mathcal{L})$ est toujours fermé.
(ii) Pour tout ensemble A , $\text{env}(A; \mathcal{L}) = \text{env}(\text{ad}(A); \mathcal{L})$.
(iii) $\text{env}(\cdot; \mathcal{L})$ est croissante pour l'inclusion.
(iv) Pour tout ensemble A , $\text{env}(\text{env}(A; \mathcal{L}); \mathcal{L}) = \text{env}(A; \mathcal{L})$.

Au vu de la propriété (ii), on restreint dans toute la suite l'étude aux A fermés.

7.1.1 Lien avec l'enveloppe convexe

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^d$, de nombreux cas nous font retrouver l'enveloppe convexe. On se restreint dans la suite à l'étude de \mathcal{L} -enveloppes de fermés.

Si \mathcal{L} est l'ensemble des boules fermées pleines de E , $\text{env}(A; \mathcal{L}) = \text{conv}(A)$. Si \mathcal{L} n'est constitué que de fermés convexes, $\text{conv}(A) \subseteq \text{env}(A; \mathcal{L})$. Soit \mathcal{A} l'ensemble des affinités de E . Pour donner un cadre qui généralise l'exemple des boules, on dit que \mathcal{L} est \mathcal{A} -stable si pour tout $L \in \mathcal{L}$ et $f \in \mathcal{A}$, $f(L) \in \mathcal{L}$.

Théorème 7.1.1. Si \mathcal{L} est \mathcal{A} -stable et contient un fermé L d'intérieur non-vide, alors pour tout compact A , $\text{env}(A; \mathcal{L}) \subseteq \text{conv}(A)$.

En conséquence, si de plus \mathcal{L} ne contient que des convexes, l'inclusion précédente est une égalité.

Démonstration. Soit $x \in \text{conv}(A)^c$. Nous allons montrer que $x \notin \text{env}(A; \mathcal{L})$, en exhibant $L_0 \in \mathcal{L}$ qui contient A et pas x . Pour cela, on part d'une ensemble quelconque $L \in \mathcal{L}$ et on lui applique des déplacements successifs $f_1, \dots, f_q \in \mathcal{A}$ tels que $L_0 = f_q \circ \dots \circ f_1(L)$. Dans la preuve, on ne mentionnera pas les f_i , on mentionnera simplement les transformations et les f_i seront implicites.

D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut séparer strictement x et $\text{conv}(A)$ par un hyperplan H . Quitte à effectuer une translation de L , on peut prendre $y \in \text{int}(L) \cap A$. Soit $r = \sup\{\rho > 0; B(y, \rho) \subseteq L\} > 0$, et soit $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $y + \rho\eta \in L$ pour $0 \leq \rho \leq r$ et $y + (r+h)\eta \notin L$ pour $h > 0$ arbitrairement petit. On pose $x_\infty = y + r\eta$.

Quitte à effectuer une homothétie, une rotation de centre y , et une translation parallèle à H , on peut supposer que $B(y, r)$ est tangente à H en x_∞ et que $x \in y + \mathbb{R}_+\eta$. On effectue une homothétie f de centre x_∞ et de paramètre $\beta > 0$, suffisamment grand pour que A soit inclus dans $B(x_\infty - \beta\eta, \beta r) \subseteq L_0 = f(L)$. Quitte à prendre β plus grand, on peut supposer que $x \notin L_0$. Ainsi, $L_0 \in \mathcal{L}$, $A \subseteq L_0$ et $x \notin L_0$, ce qui prouve que $x \notin \text{env}(A; \mathcal{L})$. \square

7.1.2 Représentation fonctionnelle

On suppose simplement que E est un espace topologique.

On peut voir les $L \in \mathcal{L}$ comme les ensembles de niveaux de fonctions, en prenant simplement comme fonctions les indicatrices des éléments de \mathcal{L} . Cependant, il est intéressant d'avoir de la régularité au sein de \mathcal{L} , c'est pourquoi on supposera que les fonctions sont continues.

Soit \mathcal{F} une famille de fonctions continues de E dans \mathbb{R} . Pour $f \in \mathcal{F}$ et B un sous-ensemble de \mathbb{R} , on adopte la notation simplifiée $\{f \in B\} = \{x \in E; f(x) \in B\}$, ainsi que les notations explicites $\{f \leq a\}, \{f < a\}$, etc... On note également $\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x)$, et $\text{argmax}_A f = \{x; f(x) = \sup_A f\}$ pour tout $A \subseteq E$. On pose $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \{\{f \leq a\}; f \in \mathcal{F}, a \in \mathbb{R}\}$, et on définit la \mathcal{F} -enveloppe par

$$\text{env}_{\mathcal{F}}(A) = \text{env}(A; \mathcal{L}_{\mathcal{F}}), A \subseteq E.$$

Remarquons qu'on a

$$\text{env}_{\mathcal{F}}(A) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{f \leq \sup_A f\}. \quad (7.1)$$

On appelle $\mathfrak{C}^{\mathcal{F}} = \{\text{env}_{\mathcal{F}}(A); A \in \mathfrak{K}\}$ l'ensemble des \mathcal{F} -enveloppes de compacts, ou *corps \mathcal{F} -convexes*. Les éléments de $\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}$ ne sont pas nécessairement compacts. On note $\mathfrak{P}_p^{\mathcal{F}} = \{\text{env}_{\mathcal{F}}(A); \text{card}(A) = p\}$ l'ensemble des (\mathcal{F}, p) -polytopes, pour $p \geq 1$, et $\mathfrak{P}^{\mathcal{F}} = \cup_{p \geq 1} \mathfrak{P}_p^{\mathcal{F}}$ l'ensemble des \mathcal{F} -polytopes.

Exemple 7.1.1. Soit E un espace euclidien et \mathcal{F} l'ensemble des formes linéaires sur E , alors $\text{env}_{\mathcal{F}}(A) = \text{conv}(A)$ pour tout fermé $A \subseteq E$.

Le plus intéressant sera en fait d'avoir \mathcal{F} le plus réduit possible. Dans l'exemple précédent, on peut se restreindre à l'ensemble des formes linéaires de norme 1, qui est localement compact. On verra dans la suite que cette propriété a son utilité.

Remarque 7.1.1. Soit $\Lambda = (\lambda_f)_{f \in \mathcal{F}}$ une famille de réels strictement positifs indexés par \mathcal{F} . On note $\Lambda.\mathcal{F} = \{\lambda_f f ; f \in \mathcal{F}\}$. Alors pour tout A , $\text{env}_{\Lambda.\mathcal{F}}(A) = \text{env}_{\mathcal{F}}(A)$.

C'est une manière d'identifier une fonction f à la classe de fonctions $[f] = \{\lambda f; \lambda > 0\}$, qui contient toute l'information pertinente pour la \mathcal{F} -enveloppe.

On cherche désormais un ensemble $M \subseteq A$ tel que $E_{\mathcal{L}}(A) = E_{\mathcal{L}}(M)$ qui en quelque sorte génère la \mathcal{L} -enveloppe de A . Cette notion est à relier à celle de point extrémal pour l'enveloppe convexe.

On définit l'ensemble \mathcal{F} -extrémal comme suit.

Définition 7.1.1. Pour A fermé, on pose

$$\text{ext}_{\mathcal{F}}(A) = \text{ad}\left(\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \text{argmax}_A f\right)$$

L'ensemble $\text{ext}_{\mathcal{F}}(A)$ génère bien la \mathcal{F} -enveloppe pour A compact.

Proposition 7.1.2. On a, pour A compact

$$\text{env}_{\mathcal{F}}(\text{ext}_{\mathcal{F}}(A)) = \text{env}_{\mathcal{F}}(A). \quad (7.2)$$

Démonstration. Comme $\text{ext}_{\mathcal{F}}(A) \subseteq A$, on a l'inclusion \subseteq .

Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer qu'une fonction continue atteint toujours sa borne supérieure sur un compact et d'appliquer (7.1). \square

Remarquons que dans le cas de l'enveloppe convexe, $\text{ext}_{\mathcal{F}}(A) = \partial(\text{conv}(A))$ ne correspond pas à l'ensemble des points extrémaux. Une généralisation exacte de la notion de point extrémal pour un convexe serait

$$\text{ext}_{\mathcal{F}}^+(A) = \text{ad}(\{x \in A; \exists f \in \mathcal{F}, \{x\} = \text{argmax}_A f\}).$$

Cependant, comme on le verra dans l'exemple suivant, $\text{ext}_{\mathcal{F}}^+(A)$ n'est pas toujours suffisant pour retrouver la \mathcal{F} -enveloppe de A .

Exemple 7.1.2. Soit $f_1(x, y) = x$ sur \mathbb{R}^2 , et $f_2(x, y) = y$. On pose $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$. Soit un carré de \mathbb{R}^2 aux côtés parallèles aux axes, et soit $z_i, 1 \leq i \leq 4$, ses 4 sommets, numérotés dans le sens horaire, avec z_1 dans le coin supérieur droit.

Soit $A = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Alors $\text{env}_{\mathcal{F}}(A) = Q$ est un quart de plan aux frontières parallèles aux axes dont le coin supérieur droit est z_1 . On a aussi $\text{env}_{\mathcal{F}}(A \setminus \{z_i\}) = Q$ pour $1 \leq i \leq 3$. En ce sens, aucun des points n'est indispensable. Pourtant, si l'on retire deux points, cela change la \mathcal{F} -enveloppe : $\text{env}_{\mathcal{F}}(A \setminus \{z_1, z_2\}) \neq Q, \text{env}_{\mathcal{F}}(A \setminus \{z_1, z_4\}) \neq Q$.

On a dans cet exemple

$$\text{ext}_{\mathcal{F}}^+(A) = \emptyset.$$

En particulier, $\text{env}_{\mathcal{F}}(\text{ext}_{\mathcal{F}}^+(A)) \neq \text{env}_{\mathcal{F}}(A)$.

Cependant, c'est une situation marginale, et on considère dans la suite des processus ponctuels pour lesquels la réalisation typique Π vérifie p.s. $\text{ext}_{\mathcal{F}}(\Pi) = \text{ext}_{\mathcal{F}}^+(\Pi)$, et on n'a pas besoin d'une structure plus fine que $\text{ext}_{\mathcal{F}}(\Pi)$.

L'ensemble extrémal jouit d'autres propriétés. On munit \mathcal{F} de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Proposition 7.1.3. *Pour A compact*

$$\text{ext}_{\mathcal{F}}(A) = \text{ext}_{\text{ad}(\mathcal{F})}(A).$$

Démonstration. Une inclusion est évidente. Pour l'autre, il faut montrer que si x vérifie $f(x) \leq \sup_A f$ pour tout f de \mathcal{F} , alors c'est également le cas si f est la limite d'une suite de fonctions $\{f_n\}$ de \mathcal{F} . On a en ce cas $f(x) - \sup_A f = \lim_n f_n(x) - \sup_A f_n \leq 0$, ce qui donne le résultat. \square

7.1.3 Considérations topologiques

Ici, E est un espace métrique. Le but de cette section est principalement de répondre à la question suivante. Si une suite de compacts A_n converge vers un autre compact A , qu'en est-il de la convergence de $\text{env}_{\mathcal{F}}(A_n)$? de $\text{ext}_{\mathcal{F}}(A_n)$?

Le première chose à faire est de définir quelle topologie sera utilisée. Nous allons en fait utiliser 2 topologies sur $\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}$, à priori distinctes, mais qui coïncident localement sous certaines hypothèses.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{F}$, on définit l'ouvert

$$O_{\alpha, \varepsilon, f} = \{C \in \mathfrak{C}^{\mathcal{F}}; |\sup_C f - \alpha| \leq \varepsilon\},$$

et on appelle $\mathfrak{W}^{\mathcal{F}}$ la topologie correspondante sur $\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}$, dite topologie \mathcal{F} -faible. Une suite $\{C_n\}$ converge \mathcal{F} -faiblement vers C ssi pour tout f de \mathcal{F}

$$\sup_{C_n} f \rightarrow \sup_C f.$$

Pour parler de la convergence \mathcal{F} -forte, on introduit la notation suivante. Pour deux fermés A, B , on note $A \prec B$ si pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\sup_A f < \sup_B f$. On dit qu'une suite $\{C_n\}$ converge \mathcal{F} -fortement vers C dans $\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}$ si, pour tous A, B de $\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}$ tels que $A \prec C \prec B$, on ait $A \subseteq C_n \subseteq B$ pour n suffisamment grand. Cela correspond à définir comme base d'ouverts les

$$O_{\alpha, \varepsilon} = \{C; |\sup_C f - \alpha_f| < \varepsilon_f\}$$

pour toute familles de réels $\alpha = \{\alpha_f; f \in \mathcal{F}\}$ et de réels strictement positifs $\varepsilon = \{\varepsilon_f; f \in \mathcal{F}\}$. On note $\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}$ la topologie correspondante.

Comme les ouverts de $\mathfrak{W}^{\mathcal{F}}$ sont des ouverts de $\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}$, la convergence forte implique la convergence faible.

La compacité de \mathcal{F} pour la norme de la convergence uniforme sur tout compact sera un argument crucial dans de nombreux cas, voyons comment elle se manifeste en pratique.

Lemme 7.1.1. Soit $\{f_n; n \geq 1\}$ une suite de fonctions de \mathcal{F} qui converge vers une fonction f dans \mathcal{F} .

Pour toute suite de compacts A_n qui converge vers un compact A dans $(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$, on a $\sup_{A_n} f_n \rightarrow \sup_A f$.

On utilisera plus souvent les cas particuliers suivants : Pour toute suite x_n qui converge vers un $x \in E$, $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$, et pour tout compact A , $\sup_A f_n \rightarrow \sup_A f$.

Démonstration. Soit n à partir duquel $A_n \subseteq A^1$. Soit $\varepsilon > 0$, et r le module de continuité de f sur A^1 pour ε (on suppose $r \leq 1$, quitte à prendre r plus petit). Pour n suffisamment grand, on a $A_n \subseteq A^r$ et $r \leq 1$ et $\sup_{x \in A^1} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Alors pour $x \in A_n$, on peut trouver $y \in A$ dans $B(x, r)$ et donc $f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon \leq f(y) + 2\varepsilon \leq \sup_A f + 2\varepsilon$. On en déduit $\sup_{A_n} f_n \leq \sup_A f + 2\varepsilon$.

Pour l'autre inégalité, on a, pour x dans A , $f(x) \leq f_n(x_n) + 2\varepsilon$ pour un certain x_n de A_n . On en déduit $f(x) \leq \sup_{A_n} f_n + 2\varepsilon$. □

Corollaire 7.1.1. $\text{env}_{\mathcal{F}}$ est continue de $(\mathfrak{K}, \mathfrak{H})$ vers $(\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}, \mathfrak{W}^{\mathcal{F}})$.

Démonstration. Il suffit de montrer que si A_n converge vers A pour \mathfrak{H} , alors pour tout f de \mathcal{F} , $\sup_{A_n} f \rightarrow \sup_A f$, qui est une conséquence du lemme précédent. □

Soit K un compact. On note $\mathcal{F}_K = \{f|_K; f \in \mathcal{F}\}$ les restriction des fonctions de \mathcal{F} à K . On rappelle que $\mathfrak{K}(K) = \{C \in \mathfrak{K}; C \subseteq K\} = \{C \cap K; C \in \mathfrak{K}\}$. On note également $\mathfrak{C}_K^{\mathcal{F}} = \{\text{env}_{\mathcal{F}}(A); A \in \mathfrak{K}(K)\} \subseteq \mathfrak{C}^{\mathcal{F}}$.

Proposition 7.1.4. Soit $K \in \mathfrak{K}$. On suppose que \mathcal{F}_K est compacte pour la norme uniforme. Alors $\mathfrak{W}^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{Z}^{\mathcal{F}}$ sont équivalentes sur $\mathfrak{C}_K^{\mathcal{F}}$.

Démonstration. Il faut montrer que si $C_n \rightarrow C$ pour $\mathfrak{W}^{\mathcal{F}}$ sur $\mathfrak{C}_K^{\mathcal{F}}$, alors c'est aussi le cas pour $\mathfrak{Z}^{\mathcal{F}}$. Soit A_n et A dans $\mathfrak{K}(K)$ tel que $C_n = \text{env}_{\mathcal{F}}(A_n)$, $C = \text{env}_{\mathcal{F}}(A)$.

Soit D tel que $C \prec D$ dans $\mathfrak{C}_K^{\mathcal{F}}$. On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe une sous-suite pour laquelle on puisse toujours trouver $x_n \in A_n$ et $f_n \in \mathcal{F}$ tels que

$$f_n(x_n) \geq \sup_D f_n.$$

Par compacité, quitte à reprendre une sous-suite, on suppose que f_n converge vers une fonction $f \in \mathcal{F}$ sur K et que x_n converge vers $x \in K$. On a $\limsup_n f(x_n) \geq \sup_D f$, mais comme $C \prec D$ et $\sup_{C_n} f \rightarrow \sup_C f$, on a

$$\limsup_n f(x_n) < \sup_D f,$$

ce qui est contradictoire. De ce fait, à partir d'un certain rang, $\sup_{A_n} f \leq \sup_D f$ pour tout $f \in \mathcal{F}$, ce qui est équivalent à $C_n \subseteq D$.

Pour l'autre inclusion, soit $B \prec C$. Si on peut trouver pour une sous-suite f_n tel que $\sup_{A_n} f_n \leq \sup_B f_n$, par compacité de \mathcal{F} et de K , on peut trouver f point d'adhérence de la famille \mathcal{F} telle que $\limsup_n \sup_{A_n} f \leq \sup_B f < \sup_C f$, ce qui est contradictoire. On a donc $B \subseteq C_n$ à partir d'un certain rang.

□

Lorsque \mathcal{F} est composée de fonction localement lipschitziennes, on choisit $l_{K,f} > 0$ une constante de Lipschitz pour chaque fonction f sur un compact K . En posant $\Lambda_K = (l_{K,f}^{-1})_{f \in \mathcal{F}}$, la famille $\mathcal{F}'_K = \Lambda_K \cdot \mathcal{F}_K$ est relativement compacte d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, et engendre la même enveloppe d'après la remarque 7.1.1. En appliquant de surcroît la proposition 7.1.3, on a $\text{env}_{\mathcal{F}} = \text{env}_{\mathcal{F}'_K} = \text{env}_{\text{ad}(\mathcal{F}'_K)}$ et comme $\text{ad}(\mathcal{F}'_K)$ est compacte, on a équivalence locale des topologies $\mathfrak{W}^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}$ d'après la proposition 7.1.4.

On a donc la proposition suivante :

Proposition 7.1.5. *Si \mathcal{F} est composée de fonctions localement lipschitziennes, Alors $\mathfrak{W}^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}$ sont localement équivalentes.*

Exemple 7.1.3. *L'ensemble \mathcal{F}_l des formes linéaires de norme 1 engendre l'enveloppe convexe, et chaque forme linéaire est évidemment localement lipschitzienne. On note, pour $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$, $f_{\sigma}(x) = \langle \sigma, x \rangle, x \in \mathbb{R}^d$.*

La \mathcal{F}_l -convergence faible d'une suite de fermés A_n correspond à la convergence simple de la fonction définie sur \mathbb{S}^{d-1} par $\varphi_n(\sigma) = \sup_{A_n} f_{\sigma}$, et la convergence forte correspond à sa convergence uniforme.

Le résultat précédent s'applique, et on retrouve le résultat bien connu que la convergence simple de la fonction de Minkowski équivaut à sa convergence uniforme.

7.1.4 Configurations et \mathcal{F} -épluchage

Dans cette section, on va procéder à "l'épluchage de processus ponctuels", suivant une structure de \mathcal{F} -enveloppes. Nous nous intéresserons en pratique à des processus dans \mathbb{R}^d dont les réalisations typiques n'ont que 0 comme point d'accumulation éventuel. On appelle configuration tout ensemble dénombrable fermé de points D sur \mathbb{R}^d qui vérifie, pour tout $r > 0$,

$$\text{card}(D \cap B(0, r)^c) < \infty.$$

En particulier toute configuration est un ensemble compact si on lui adjoint le singleton $\{0\}$.

On note $\mu_D = \sum_{x \in D} \delta_x$ la mesure correspondante. Réciproquement, si le support d'une mesure μ est une configuration, on la note D_{μ} . On munit \mathcal{D} l'ensemble des configurations de la topologie vague sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Cela correspond à exiger que pour chaque fonction continue f à support compact inclus dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on ait $\sum_{x \in D_n} f(x) \rightarrow \sum_{x \in D} f(x)$.

Proposition 7.1.6. *La convergence pour \mathfrak{H} implique la convergence pour \mathfrak{D} , mais la réciproque est fautive. En revanche, si pour K un compact de \mathbb{R}^d on note $\mathcal{D}_K = \{D \in \mathcal{D}; D \subseteq K\}$, alors les topologies \mathfrak{H} et \mathfrak{D} sont équivalentes sur \mathcal{D}_K .*

Démonstration. Montrons que la convergence pour \mathfrak{D} implique la convergence pour \mathfrak{H} . Soit $D_n \rightarrow D$ pour \mathfrak{D} dans \mathcal{D}_K . Soit $r > 0$, et $a < r/2$ tel que $\partial B(0, a) \cap D = \emptyset$. Alors on a facilement la convergence de $D_n \cap (K \cap B(0, a)^c)$ vers $D \cap (K \cap B(0, a)^c)$ pour \mathfrak{H} , puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points de D concernés. On a alors pour n suffisamment grand $(D_n \cap B(0, a)^c) \subseteq (D \cap B(0, a)^c)^r$ et $(D \cap B(0, a)^c) \subseteq (D_n \cap B(0, a)^c)^r$. Comme $\mathbf{1}_{D_n \cap B(0, a)^c} \rightarrow \mathbf{1}_{D \cap B(0, a)^c}$ et $a < r$ on a $D_n^r \subseteq D$ et $D \subseteq D_n^r$ à partir d'un certain rang. \square

Définition 7.1.2. *Soit D un ensemble de points. On définit par récurrence*

$$\begin{aligned} D^1 &= D, \\ \text{env}_{\mathcal{F}}^1(D) &= \text{env}_{\mathcal{F}}(D), \\ \text{ext}_{\mathcal{F}}^1(D) &= \text{ext}_{\mathcal{F}}(D), \\ D^{k+1} &= D^k \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}^k(D), \\ \text{env}_{\mathcal{F}}^k(D) &= \text{env}_{\mathcal{F}}(D^k), \\ \text{ext}_{\mathcal{F}}^k(D) &= \text{ext}_{\mathcal{F}}(D^k). \end{aligned}$$

On note aussi, en référence aux statistiques d'ordre, $D_{(k)} = \text{ext}_{\mathcal{F}}^k(D)$.

Notons que D est l'union disjointe des $D_{(k)}$, et que ceux-ci constituent les couches successives du \mathcal{F} -épluchage de D .

Notre but est d'obtenir la continuité des applications $D \mapsto D_{(k)}$ et $D \mapsto D^k$ lorsque D est la réalisation typique d'un processus ponctuel.

La continuité de l'application $\text{ext}_{\mathcal{F}}$ est délicate sans des hypothèses qui relèvent de la géométrie de la famille \mathcal{F} et requièrent aussi parfois une mesure sur \mathcal{F} . Pour rester dans un cadre général, on se restreint aux configurations typiques de certains processus ponctuels.

Théorème 7.1.2. *Soit D une configuration telle que $0 \notin \text{ext}_{\mathcal{F}}(D)$ et, pour tout $x \in \text{ext}_{\mathcal{F}}(D)$, il existe $f \in \mathcal{F}$ telle que $f(x) > \sup_{D \setminus \{x\}} f$. Alors $\text{ext}_{\mathcal{F}}(\cdot)$ et $D \mapsto D \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}(D)$ sont continues en D .*

Démonstration. Tout d'abord, comme $0 \notin D$ et que $\text{ext}_{\mathcal{F}}(D)$ est discret loin de 0, $\text{ext}_{\mathcal{F}}(D)$ est fini. On note $\text{ext}_{\mathcal{F}}(D) = \{x_1, \dots, x_q\}$. Par hypothèse, on peut trouver pour chaque x_i une fonction f_i tel que $f_i(x_i) > \sup_{D \setminus \{x_i\}} f_i$.

Soit D_n une suite de configurations qui tend vers D , et soit $\varepsilon > 0$. Quitte à prendre ε plus petit, par continuité des f_i , on peut supposer que pour tout i et tout y de $B(x_i, \varepsilon)$, $f_i(y) > \sup_{D \setminus \{x_i\}} f_i$.

Quitte à prendre ε plus petit, on peut trouver $\eta > 0$ tel que pour tout i , pour tout $y \in B(x_i, \varepsilon)$,

$$f_i(y) > \sup_{(D \setminus \{x_i\})^\varepsilon} f_i + \eta. \quad (7.3)$$

A partir d'un certain rang, D_n possède exactement un point dans chaque boule $B(x_i, \varepsilon)$, et les autres points de D_n sont tous contenus dans $(D \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}(D))^\varepsilon$. D'après (7.3), on a alors $\text{ext}_{\mathcal{F}}(D) \subseteq (\text{ext}_{\mathcal{F}}(D_n))^\varepsilon$, et $\text{ext}_{\mathcal{F}}(D_n) \subseteq (\text{ext}_{\mathcal{F}}(D))^\varepsilon$. Soit K un compact qui contient $(D \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}(D))^\varepsilon$ et ne rencontre aucune des boules $B(x_i, \varepsilon)$. Alors, Comme $D_n \setminus (\text{ext}_{\mathcal{F}}(D_n)) = D_n \cap K$ converge aussi vers $D \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}(D) = D \cap K$, on a également la continuité de l'application $D \mapsto D \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}(D)$ en D . □

7.2 Convergence des \mathcal{F} -enveloppes de processus ponctuels

7.2.1 Domaine d'attraction des lois α -stables.

Dans cette section on considère une suite iid de variables $\{\xi_n; n \in \mathbb{N}^*\}$, et on s'intéresse au comportement asymptotique quand $n \rightarrow \infty$ de $\text{env}_{\mathcal{F}}^k(\xi_1, \dots, \xi_n)$, à k fixé. Une première remarque est que, lorsque le support de la loi des ξ_i est non-borné, E_n^k n'est pas borné non-plus. Il faut trouver une suite renormalisante $\{b_n; n \geq 1\}$ qui assure que $\frac{1}{b_n}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ converge. En supposant choisie la suite $\{b_n\}$, on pose $\Pi_n = \frac{1}{b_n}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. La famille $\{\Pi_n; n \geq 1\}$ est une suite de processus ponctuels, dont le comportement asymptotique dépend de la queue des lois des $\xi_i, i \in \mathbb{N}$. On suppose que la loi des variables ξ_i appartient au domaine d'attraction d'une loi α -stable. Cela veut dire que la queue de la loi ressemble à celle d'une variable α -stable, pour un certain $\alpha \in]0, 2[, \alpha \neq 1$. Plus précisément, on requiert que la fonction l , définie par

$$\mathbb{P}(\|\xi_1\| > r) = r^{-\alpha}l(r),$$

soit à variation lente, c'est-à-dire que pour un certain $\beta > 0$, $\frac{l(r^\beta)}{l(r)}$ converge vers 1 lorsque $|r| \rightarrow \infty$.

Si c'est le cas, en posant $b_n = \inf\{r; r^{-\alpha}l(r) \leq \frac{1}{n}\}$, on a la convergence en loi du processus Π_n vers un processus ponctuel de Poisson Π_α sur \mathbb{R}^d , d'intensité Q_α (Voir par exemple [Rva62]). La mesure Q_α se factorise sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1}$ en

$$Q_\alpha = \delta \otimes \tau, \quad (7.4)$$

où $\frac{d\delta}{d\lambda_d}(r) = \alpha r^{-\alpha-1}$, $r > 0$, et τ est la limite faible de la suite de mesures $\nu_r, r > 0$, définie par

$$\nu_r(B) = b_r \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \in B \mid \|\xi\| \geq r\right),$$

pour B un borélien de \mathbb{S}^{d-1} , et b_r un facteur de renormalisation approprié. On appelle S_τ le support de τ .

On pose $E_\alpha^k = \text{env}_{\mathcal{F}}^k(\Pi_\alpha)$. Pour avoir la convergence en loi des E_n^k vers les E_α^k , il faut que Π_α soit un point de continuité des applications $\text{env}_{\mathcal{F}}^k$. Pour que ceci ne dépende pas de l'échelle à laquelle on se place, on suppose que les \mathcal{F} -enveloppes sont homogènes, dans le sens où $\text{env}_{\mathcal{F}}(rA) = r\text{env}_{\mathcal{F}}(A)$ pour tout nombre positif r et tout convexe fermé A . Cela revient à dire que \mathcal{F} est stable sous l'action des homothéties. On a alors le théorème suivant. On suppose que \mathcal{F} est localement compacte pour la convergence uniforme sur tout compact. On rappelle que d'après la proposition 7.1.5, c'est le cas lorsque \mathcal{F} est composée de fonctions localement lipschitziennes, ce qui en fait une hypothèse de régularité peu restrictive.

On introduit les deux hypothèses suivantes.

(H1) Pour tout compact K , et toute famille finie iid de points X_1, \dots, X_q de loi $\frac{1}{\nu(K)}\nu(K \cap \cdot)$, pour chaque i qui vérifie $X_i \in \text{ext}_{\mathcal{F}}(X_1, \dots, X_q)$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que

$$f(X_i) > \sup_{j \notin i} f(X_j).$$

(H2) pour tout f de $\text{ad}(\mathcal{F})$, $f(0) < \sup_{S_\tau} f$

Remarquons que, comme \mathcal{F} est localement compacte, **(H2)** est équivalente à $0 \in \text{int}(\text{env}_{\mathcal{F}}(S_\tau))$.

Théorème 7.2.1. *Soit Π un processus α -stable dont l'intensité $Q_\alpha = \delta \times \tau$ vérifie les hypothèses **(H1)** et **(H2)**.*

Alors p.s pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{ext}_{\mathcal{F}}^k$ est continue en Π .

Démonstration. Montrons d'abord le fait suivant. On prétend qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \prec S_\tau$. Soit $\varphi_f(\varepsilon) = \left(\sup_{S_\tau} f - \text{supp}_{B(0, \varepsilon)} f \right)$, $f \in \mathcal{F}$ et $\varphi(\varepsilon) = \inf_{\mathcal{F}} \varphi_f(\varepsilon)$. Il est facile de voir que l'application qui à $(f, \varepsilon) \mapsto \varphi_f(\varepsilon)$ est continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$ vers \mathbb{R} . Comme \mathcal{F} est compacte, on en déduit également que φ est continue, et comme $\varphi(0) > 0$ (autrement 0 est atteint pour une certaine fonction f , ce qui exclu par hypothèse), pour un certain $\varepsilon > 0$, on a $\varphi(\varepsilon) > 0$, ce qui signifie que $B(0, \varepsilon) \prec S_\tau$.

Nous allons ensuite chercher une suite de sous-ensembles $\{\Pi_q\}$ de Π tels que pour une certaine renormalisation b_q , $b_q\Pi_q$ converge vers S_τ pour la topologie \mathfrak{H} . On aura en conséquence $\text{env}(b_q\Pi_q) \rightarrow \text{env}(S_\tau)$ pour la topologie $\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}$ d'après le corollaire 7.1.1, ce qui implique que pour q suffisamment grand, $B(0, \frac{\varepsilon}{b_q}) \subseteq \text{env}_{\mathcal{F}}(\Pi_q)$. Donc Π_q vérifie $0 \in \text{int}(\text{ext}_{\mathcal{F}}(\Pi_q))$. Comme $\Pi_q \subseteq \Pi$, c'est également le cas de Π .

On définit Π_q par via le systèmes de coordonnées polaires par

$$\Pi_q = \left\{ (r, \theta) \in \Pi; \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2} \leq r \leq \frac{1}{q} \right\}.$$

Dans chaque secteur angulaire contenu dans le support de τ , le nombre de points de Π_q tend vers l'infini. On en déduit sans difficultés que $q\Pi_q$ tend vers S_τ pour \mathfrak{H} .

On a donc $0 \in \text{int}(\text{ext}_{\mathcal{F}}(\Pi))$. Comme **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées, les hypothèses du théorème 7.1.2 sont remplies, et $\text{ext}_{\mathcal{F}}$ et $\Pi \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}$ sont donc continus en Π . Par récurrence, comme les hypothèses sont encore vraies pour $\Pi \setminus \text{ext}_{\mathcal{F}}(\Pi)$, alors on peut appliquer la récurrence. □

7.2.2 Convergence de fonctionnelles

Considérons dans un premier temps une suite de variables iid $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ en dimension 1, et notons $\{\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}\}$ les statistiques d'ordre correspondantes, c'est-à-dire $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$. En appelant $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, tronquons la somme de la manière suivante

$$\zeta_n^{(m,k)} = \sum_{j=m+1}^{n-k} \xi_{(j)}. \quad (7.5)$$

Si $\mathbb{E}(\xi_1^2) < \infty$, la troncature n'affecte pas la distribution limite, c'est-à-dire que $\zeta_n^{(0,0)}$ et $\zeta_n^{(m,k)}$, après centrage et renormalisation identiques, convergent vers la distribution normale standard. La situation diffère si la distribution de ξ_1 appartient au domaine d'attraction d'une loi stable non-gaussienne. Il a été montré dans ce cas (voir par exemple [IbrLin71]), Ch.2) que les termes extrémaux convergent avec le même ordre de grandeur que la somme totale.

Un phénomène similaire a été constaté par Davydov et Nagaev [DavNag04] en dimension supérieure. Si ξ_1, ξ_2, \dots sont des variables iid de \mathbb{R}^d dont la loi appartient au domaine d'attraction d'une loi stable, et si le support S_τ de la mesure τ n'est pas unilatéral, c'est-à-dire que $0 \in \text{int}(\text{conv}(S_\tau))$, alors on a la convergence des sommants extrémaux vers une valeur donnée par la quantité correspondante pour le processus limite Π_α . Soit \mathbb{P}_k la distribution de E_k^α dans \mathfrak{B} . On considère la fonctionnelle

$$\zeta_n^k = \frac{1}{b_n} \sum_{\xi_j \in \text{env}_{\mathcal{F}}^{k-1}(\xi_1, \dots, \xi_n)} \xi_j,$$

qui est un analogue de $\zeta_n^{(k,k)}$ dans (7.5).

On fait également l'hypothèse que les \mathcal{F} -polytopes sont compacts.

Théorème 7.2.2. *Supposons que les hypothèses du théorème 7.2.1 sont vérifiées. La distribution de ζ_n^k converge faiblement vers la mesure N_k qui admet la représentation suivante :*

$$N_k(A) = \int_{\mathfrak{B}} G_C(A) \mathbb{P}_k(dC), \quad A \in \mathfrak{B}_d, \quad (7.6)$$

où G_C est la distribution infiniment divisible dont la fonction caractéristique φ_C est définie par

$$\ln(\varphi_C(t)) = \begin{cases} \int_C (e^{\imath\langle t, s \rangle} - 1) Q_\alpha(ds) & \text{si } \alpha \in]0, 1[\\ \int_C (e^{\imath\langle t, s \rangle} - 1 - \imath\langle t, s \rangle) Q_\alpha(ds) - \imath \int_{C^c} \langle t, s \rangle Q_\alpha(ds) & \text{si } \alpha \in]1, 2[\end{cases}$$

La preuve est strictement identique à celle du théorème 4.1 dans [DavNag04]. On va simplement rappeler ici les principales étapes de la preuve, sans rentrer dans les détails. On peut également traiter le cas $\alpha = 1$ de manière similaire.

Démonstration. On va supposer que la loi commune des $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Si ça n'est pas le cas, on considère la loi de $\tilde{\xi} = \xi_1 + \varepsilon$, où ε est une variable aléatoire indépendante bornée par $\eta > 0$. On obtiendrait ensuite le résultat en faisant tendre η vers 0.

La convergence faible de Π_n vers Π , processus ponctuel de Poisson dont l'intensité Q_α est définie par (7.4), entraîne

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(s) Q_n(ds) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s) Q_\alpha(ds),$$

pour f continue à support dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et

$$Q_n(B) = n \int_B \mathbb{P}(b_n^{-1} \xi \in dx), B \in \mathfrak{B}_d.$$

Ici ça n'est pas suffisant, et on a besoin du lemme suivant, qui correspond au Lemme 4.1 dans [DavNag04].

Lemme 7.2.1. *Soit*

$$f_t^{(\alpha)}(s) = \begin{cases} e^{\imath\langle t, s \rangle} - 1 & \text{si } \alpha \in]0, 1[, \\ e^{\imath\langle t, s \rangle} - 1 - \imath\langle t, s \rangle & \text{si } \alpha \in]1, 2[. \end{cases}$$

Alors, pour tout compact K ,

$$\int_K f_t^{(\alpha)}(s) Q_n(ds) \rightarrow \int_K f_t^{(\alpha)} Q_\alpha(ds)$$

uniformément en $t, |t| < T$.

Le lemme est prouvé pour K un polyèdre convexe, mais la preuve est valable pour K compact, essentiellement car les problèmes surviennent autour de 0, et ne dépendent pas de la forme de K .

Maintenant, si on appelle $\varphi_{n,k}$ la fonction caractéristique de $\zeta^{(n,k)}$, conditionnellement aux valeurs prises par les enveloppes précédentes

$$\text{env}_{\mathcal{F}}^1(\Pi_n) = C_1 \in \mathfrak{P}, \dots, \text{env}_{\mathcal{F}}^{k-1}(\Pi_n) = C \in \mathfrak{P},$$

alors grâce au caractère poissonien de Π_n et aux hypothèses faites sur la loi des ξ_n , on peut montrer que

$$\varphi_{n,k}(t) = \left(\frac{\int_C e^{t\langle s, \cdot \rangle} \mathbb{P}(b_n^{-1}\xi \in ds)}{\mathbb{P}(b_n^{-1}\xi \in C)} \right)^{n-m},$$

où m est le nombre total de points \mathcal{F} -extrémaux des enveloppes successives C_1, \dots, C_{n-2}, C (Voir corollaire 3.1 de [DavNag04]). Le lemme 7.2.1 entraîne alors la convergence de $\varphi_{n,k}$ vers φ_C , où $C = \text{env}_{\mathcal{F}}^k(\Pi_n)$ est la k -ème enveloppe de Π_n . Grâce aux hypothèses faites sur la loi de ξ , on sait que $\text{env}_{\mathcal{F}}^k(\cdot)$ est continue en Π_n . Comme $\Pi_n \xrightarrow{(v)} \Pi$, on obtient donc la convergence faible de $\text{env}_{\mathcal{F}}^k(\Pi_n)$ vers \mathbb{P}_k , et on a convergence de ζ_n^k vers la distribution mélange donnée par 7.6.

□

Troisième partie

Preuves

Chapitre 8

Enveloppes convexes

On introduit l'opérateur de translation temporelle θ :

Définition 8.0.1. Pour $T \in \mathbb{R}^+$, et X une fonction sur \mathbb{R}^+ , on pose

$$\theta_T(X)(a) = X(T + a), \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

8.1 Preuve du théorème 4.3.1

Démonstration. Soit $a \in I$. On doit montrer que a n'est presque jamais un temps extrémal supérieur.

On rappelle que $X^*(a) = \max(X(a^-), X(a))$. On pose $M_a = (a, X^*(a))$. Notons que pour a dans un ensemble de mesure complète, avec probabilité 1, $X^*(a) = a$, on peut donc supposer que a vérifie cette propriété. On ne considère que des réalisations pour lesquelles $X^*(a) = a$ dans la suite.

On sait que a n'est pas extrémal dès lors qu'on peut trouver $s > 0$ tel que

$$X(a - s) + X(a + s) \geq 2X^*(a), \quad (8.1)$$

car ensuite M_a sera sous le segment $[M_{a-s}, M_{a+s}]$. Nous allons montrer qu'on peut p.s. trouver s tel que (8.1) est vérifiée.

On pose, pour $s \geq 0$,

$$\widehat{X}(s) = X(a + s) - X(a), \quad \check{X}(s) = X(a) - X((a - s)^-)$$

et

$$Y(s) = \widehat{X}(s) - \check{X}(s) = X((a - s)^-) + X(a + s) - 2X(a).$$

Par réversibilité de X , \check{X} et \widehat{X} ont même loi et sont Markoviens pour s suffisamment petit.

Par la propriété de Markov forte, pour $x \in \mathbb{R}$, les processus conditionnés $\widehat{X}_x = (\widehat{X} | X(a) = x)$ et $\check{X}_x = (\check{X} | X(a) = x)$ sont indépendants. En conséquence, $Y_x = \widehat{X}_x - \check{X}_x$ est Markovien et symétrique, $(-Y_x \stackrel{(d)}{=} Y_x)$. La loi du

zéro-un nous donne la trivialité de la tribu

$$\mathcal{F}_{x,0} = \bigcap_{s>0} \sigma(Y_x(s)).$$

On rappelle que, pour un point a et un processus Y , $R_a^+(Y)$ est l'évènement que Y prenne des valeurs positives ou nulles arbitrairement proche de 0 (0 exclus). La symétrie de Y_x implique que $\mathbb{P}(R_0^+(Y_x)) = \mathbb{P}(R_0^-(Y_x^-)) = 0$ ou 1. Comme au moins un de ces évènements est nécessairement toujours réalisé, ces deux probabilités sont égales à 1.

On a $\mathbb{P}(R_0^+(Y)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(R_0^+(Y_x)) \mathbb{P}(X(a) \in dx) = 1$ et on peut donc trouver s arbitrairement proche de 0 tel que $Y(s) \geq 0$, ce qui prouve que X satisfait (8.1). Donc, p.s $a \notin E_X^+$. Grâce au lemme, 4.3.1 on en conclut que p.s $\lambda_1(E_X^+) = 0$.

Comme $-X$ vérifie les mêmes hypothèses, p.s $\lambda_1(E_{-X}^+) = \lambda_1(E_X^-) = 0$ et p.s $\lambda_1(E_X) = 0$, ce qui prouve (i).

Considérons maintenant $Z(a) = \int_0^a X(u)du$. Pour montrer (ii), on doit montrer, comme précédemment, que

$$p.s, \exists s > 0, \int_{a-s}^a X(u)du \geq \int_a^{a+s} X(u)du.$$

On pose

$$\widehat{Z}(s) = \int_a^{a+s} X(u)du = \int_0^s \widehat{X}(u)du \quad \text{et} \quad \check{Z}(s) = \int_{a-s}^a X(u)du = \int_0^s \check{X}(u)du$$

Posons aussi $W(s) = \widehat{Z}(s) - \check{Z}(s) = \int_0^s Y(s)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on indexe par "x" toute variable conditionnée par $X(a) = x$. Le processus Z n'est pas Markovien, mais (Z, X) l'est, et donc (W_x, Y_x) également, et a de plus une loi symétrique, en tant que soustraction de deux processus Markoviens indépendants de même loi. On utilise la loi du zéro-un à nouveau. La tribu

$$\mathcal{G}_{x,0} = \bigcap_{s>0} \sigma((W_x(s), Y_x(s)))$$

est triviale. Comme précédemment, p.s W est négatif arbitrairement proche de 0, et (8.1) est satisfaite pour Z . Donc p.s $a \notin E_Z^+$.

Grâce au lemme 4.3.1 on en conclut que p.s $\lambda_1(E_Z^+) = 0$. On arrive à $\lambda_1(E_Z) = 0$ p.s.

□

8.2 Preuve du théorème 4.3.2

Démonstration. X s'écrit sous la forme

$$X(a) = \int_0^a \phi(s)dB(s) + \int_0^a \psi(s)ds \tag{8.2}$$

où (B, \mathcal{G}) est un mouvement brownien standard muni de sa filtration, et $\phi, \psi \in \mathcal{M}_2^{loc}$.

Notons $Y(a)$ le premier terme dans (8.2), et $Z(a)$ le second. Rappelons que, par hypothèse, p.s. Y n'est nul sur aucun intervalle.

Pour la suite, on fait la remarque suivante concernant l'événement $R_a^+(X)$ que X prenne des valeurs positives arbitrairement proche de 0 (ailleurs qu'en 0). Si l'on peut trouver une fonction T continue croissante sur \mathbb{R}_+ non-constante telle que $R_a^+(X \circ T)$ soit réalisé, alors $R_a^+(X)$ est également réalisé.

Un candidat idéal pour ce changement de temps aléatoire est la fonction donnée par le théorème suivant. (Voir [RevYor91], ch.V.1) :

Théorème 8.2.1 (Dubins-Schwarz). *Pour (Y, \mathcal{G}) une martingale locale continue nulle en 0, on définit*

$$T(s) = \inf\{a; \langle Y \rangle_a \geq s\}$$

(où $\langle Y \rangle$ est la variation quadratique de Y). Alors

$$\{(B'(a) = Y \circ T(a), \mathcal{G}'_a = \mathcal{G}_{T(a)}); a \geq 0\}$$

est un mouvement brownien standard muni de sa filtration.

Pour que le changement de temps Y soit continu, on a besoin que $a \rightarrow \langle Y \rangle_a$ ne soit constant sur aucun intervalle. Le processus Y étant une martingale locale continue (voir [Com06]), sur chaque intervalle où $\langle Y \rangle_a$ est constante, Y est à variation bornée et est donc nulle (voir [RevYor91]). Les hypothèses impliquent donc que T est continue.

On applique le changement de temps à Y , et en gardant les mêmes notations que dans le théorème 8.2.1,

$$X \circ T(a) = B'(a) + Z \circ T(a).$$

On sait que, pour n'importe quel a positif, $\limsup_{v \downarrow 0} \frac{B'(a+v) - B'(a)}{v} = \infty$. Donc, si $Z \circ T$ est localement lipschitzienne, sa contribution dans le taux d'accroissement local $\frac{X(a+v) - X(a)}{v}$ est négligeable devant celle de B' , et

$$\limsup_{v \downarrow 0} \frac{X \circ T(a+v) - X \circ T(a)}{v} = \infty.$$

La symétrie nous donnera aussi

$$\limsup_{v \downarrow 0} \frac{X \circ T(a-v) - X \circ T(a)}{v} = \infty.$$

On a finalement

$$\mathbb{P}(R_a^+(X)^c) \leq \mathbb{P}(a \in L_T^c),$$

où L_T est l'ensemble de points où T est localement lipschitzien. (Z est p.s. une fonction absolument continue, donc localement lipschitzienne partout). Le théorème de Fubini entraîne

$$\int_{\Omega} \lambda_1(\{a ; R_a^+(X)^c\}) d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{P}(a \in L_T^c) da \leq \int_{\Omega} \lambda_1(L_T^c) d\mathbb{P}(\omega).$$

On a besoin d'un résultat bien connu.

Lemme 8.2.1 (Riesz-Nagy). *Si f est une fonction réelle croissante, elle est dérivable presque partout.*

Donc, T est localement lipschitzienne p.p. et p.s. $\lambda_1(L_T^c) = 0$, ce qui implique que pour tout a , p.s. $R_a^+(X)$ est réalisé.

Comme $X, -X, \tilde{X}$ et $-\tilde{X}$ satisfont les mêmes hypothèses, ils réalisent donc aussi $R_a^+(\cdot)$ en tout a . On peut alors dire que pour tout a , p.s. M_a est strictement inclus dans le polygone convexe $M_{a-s_1} M_{a-u_1} M_{a+s_2} M_{a+u_2}$ pour certains $u_1, u_2, s_1, s_2 > 0$, et n'est donc pas dans \mathcal{E}_X . On conclut grâce au lemme 4.3.1. \square

8.3 Preuve du théorème 4.3.3.

Ici, X désigne un processus de Lévy à variation bornée sans dérive sur I , f est une fonction concave de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $Y = X + f$.

Sans perte de généralité, on écrit la preuve dans le cas où $I = [0, +\infty[$, $Y(0) = f(0) = 0$. La preuve est basée sur l'utilisation de temps d'arrêt spécifiques, définis ci-dessous.

Définition 8.3.1. *Pour $\mu > 0$, on pose*

$$S_{1,\mu}(Y) = \inf\{a > 0 ; Y(a) > (f'(0) + \mu)a\},$$

et $S_{k+1,\mu} = S_{1,\mu} \circ \theta_{S_{k,\mu}} + S_{k,\mu}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $u \in \mathcal{Q} = \mathbb{Q} \cap I$, on pose $S_{k,\mu,u} = S_{k,\mu} \circ \theta_u$. Les temps $S_{k,\mu,u}$ sont appelés temps de dépassement.

Notons que les translations temporelles sont appliquées à Y , ce qui veut dire qu'à la fois X et f sont translatés dans le temps.

Proposition 8.3.1. *Pour chaque $\mu > 0, u \in \mathcal{Q}$, $\{S_{k,\mu,u}; k \geq 1\}$ est une suite de temps d'arrêt qui tend vers $+\infty$.*

Démonstration. On ne va le montrer que pour $\mu = u = 0$, le cas général s'en déduit facilement. L'aspect "temps d'arrêt" ne pose pas de problème. Pour le reste, on définit

$$H_{k+1,\mu} = \inf\{a > S_{k,\mu} ; X(a) - X(S_{k,\mu}) > \mu(a - S_{k,\mu})\}.$$

Par concavité,

$$f(S_{k+1,\mu}) - f(S_{k,\mu}) \leq f'(S_{k,\mu})(S_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}). \quad (8.3)$$

On a aussi, par définition de $S_{k+1,\mu}$,

$$\begin{aligned} X(S_{k+1,\mu}) + f(S_{k+1,\mu}) - X(S_{k,\mu}) - f(S_{k,\mu}) \\ \geq (f'(S_{k,\mu}) + \mu)(S_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Donc, la soustraction (8.3)-(8.4) entraîne,

$$\begin{aligned} X(S_{k+1,\mu}) - X(S_{k,\mu}) &\geq (f'(S_{k,\mu}) + \mu)(S_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}) - f'(S_{k,\mu})(S_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}) \\ &\geq \mu(S_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}), \end{aligned}$$

et donc $S_{k+1,\mu} \geq H_{k+1,\mu}$ par définition de $H_{k+1,\mu}$. De plus, $H_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}$ a la même loi que $\inf\{a; X(a) \geq \mu a\}$. Par indépendance et stationnarité des incréments de X , $\{H_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}; k \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires iid strictement positives, leur somme tend p.s. vers l'infini, et autant en fait la somme des $\{S_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}; k \geq 1\}$ puisque $S_{k+1,\mu} - S_{k,\mu} \geq H_{k+1,\mu} - S_{k,\mu}$. \square

On appelle J_X^+ l'ensemble des sauts positifs de X , qui contiennent 0 et ∞ par convention.

Proposition 8.3.2. *On peut trouver un ensemble dénombrable Λ dense dans \mathbb{R}_+^* tel que p.s, pour chaque $u \in \mathcal{Q}, k \in \mathbb{N}, \mu \in \Lambda$, on ait $S_{k,\mu,u} \in J_X^+$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on se limite au cas $k = 1, u = 0$. Si on montre que pour tout $\mu > 0$

$$\mathbb{P}(S_{1,\mu} \in \mathbf{J}_X^+), \quad (8.5)$$

le théorème de Fubini nous donnera le résultat. Avec le vocabulaire de [Ber96], (8.5) est équivalent à la *polarité* de $\{0\}$ pour le processus $\{X(a) - \mu a; a \geq 0\}$. D'après [Ber96], Pr. 2-(ii), la partie réelle $\Re(\varphi(x))$ de l'exposant caractéristique de X , est un $o(|x|)$ quand $|x| \rightarrow \infty$, donc [Ber96], Th. 16-(ii) implique que $\{0\}$ est essentiellement polaire, donc polaire (voir les commentaires du théorème). \square

Quitte à restreindre l'univers à un sous-ensemble de mesure complète, on suppose désormais que, pour tout $\mu \in \Lambda, u \in \mathcal{Q}, S_{1,\mu,u} \in J_X^+$.

Proposition 8.3.3. *Soit a un temps extrémal supérieur tel que $f'(a) < Y'(a^-)$. Alors on peut trouver $u \in \mathcal{Q}, k \in \mathbb{N}, \mu \in \Lambda$ tel que $a = S_{k,\mu,u}$. En particulier a est un temps de saut positif.*

Démonstration. On choisit $\mu \in \Lambda$ tel que $f'(a) < f'(a) + \mu < \bar{Y}'(a^-)$ et $u \in \mathbb{Q}$ tel que pour chaque $s \in [u, a]$ on ait $f'(s) + \mu < \bar{Y}'(a^-)$.

Prenons k tel que $S_{k,\mu,u} \leq a < S_{k+1,\mu,u}$. Si $S_{k,\mu,u} < a$, alors, comme $a < S_{k+1,\mu,u}$,

$$Y^*(a) < Y(S_{k,\mu,u}) + (a - S_{k,\mu,u})(f'(S_{k,\mu,u}) + \mu).$$

La concavité de \bar{Y} entraîne

$$\bar{Y}(a) \geq \bar{Y}(S_{k,\mu,u}) + (a - S_{k,\mu,u})\bar{Y}'(a^-) \geq Y(S_{k,\mu,u}) + (a - S_{k,\mu,u})(f'(S_{k,\mu,u}) + \mu).$$

Le point a étant extrémal supérieur, $\bar{Y}(a) = Y^*(a)$, donc les deux dernières inégalités sont contradictoires, et on a $S_{k,\mu,u} = a$. \square

Preuve du théorème 4.3.3. Soit $a \in E_X^+$ tel que $f'(a) \neq \bar{Y}'(a^-)$.

Si $f'(a) < \bar{Y}'(a^-)$, on vient de voir que $a \in J_X^+$, il est donc isolé à gauche dans E_X^+ .

Si $f'(a) > \bar{Y}'(a^-)$, en appliquant la même logique au processus \check{Y} , il est clair que a est un temps de saut positif pour \check{Y} , donc un temps de saut négatif pour Y . Comme l'ensemble de tous les temps de saut est un ensemble dénombrable de temps Makoviens, par le lemme 4.1.1 on a $\lim_{s \downarrow 0} \frac{Y(b-s) - Y(b^-)}{-s} = f'(b)$ simultanément pour tous les temps de saut b . L'hypothèse $f'(a) > \bar{Y}'(a^-)$ entraîne que le graphe de Y sur la gauche de a est situé sous la droite passant à travers M_a de pente $\bar{Y}'(a^-)$, et a est isolé à gauche dans E_Y^+ .

on peut employer un argument similaire à droite de a . \square

8.4 Preuve du théorème 4.3.4

Ici, X est un processus de Lévy à variation bornée et sans dérive sur un intervalle I de \mathbb{R} . On suppose également que sa mesure de Lévy est infinie. Posons

$$T = \inf\{a \in I ; X^*(a) = \sup_{s \in I} X(s)\}.$$

$$T' = \sup\{a \in I ; X^*(a) = \sup_{s \in I} X(s)\}.$$

Proposition 8.4.1. *Presque sûrement, $T = T'$.*

Démonstration. On pose, pour $u \in \mathbb{Q} \cap I$,

$$m_u^- = \sup_{s < u} X(s),$$

$$m_u^+ = \sup_{s > u} X(s),$$

$$T_u = \inf\{a < u ; X^*(a) = m_u^-\},$$

$$T'_u = \sup\{a > u ; X^*(a) = m_u^+\}.$$

Le point-clé est que, si $T \neq T'$, alors on peut trouver $u \in \mathbb{Q} \cap]T, T'[$ tel que $m_u^- = m_u^+$. Mais Conditionnellement à $X(u) = a \in \mathbb{R}$, comme la mesure de Lévy de X est infinie, m_u^- et m_u^+ sont deux variables indépendantes et diffuses supérieures ou égales à a , donc p.s $m_u^- \neq m_u^+$. Par contradiction on a donc p.s. $T = T'$. \square

On appelle J_X^+ l'ensemble des sauts positifs de X , qui contient 0 et $+\infty$ par convention. On pose $T_z = \inf\{a \in I ; X(a) \geq z\}$. Comme X est un processus de saut, le théorème de Fubini entraîne que

$$\mathbb{E}\lambda_1(\{z; T_z \notin J_X^+\}) = 0$$

et qu'il existe un ensemble dénombrable dense A tel que p.s. les $T_z, z \in A$ sont dans J_X^+ .

Lemme 8.4.1. *Si T est un temps de saut positif, alors 0 est irrégulier pour la demi-droite positive, et T est isolé sur la gauche mais pas sur la droite.*

Démonstration. Supposons que T soit un temps de saut positif. C'est un temps d'arrêt car c'est le temps de franchissement T_z de $z \in A \cap]\sup_{s < T} X(s), X(T)[$. Donc, $\mathbb{P}(R_T^+(X)) = \mathbb{P}(R^+(X))$. Par définition de T , $\mathbb{P}(R_T^+(X)) = 0 = p^+(X)$, ce qui implique que 0 est irrégulier. De plus, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{X(T+a) - X(T)}{a} = 0$ car c'est un temps d'arrêt, et T n'est donc pas isolé à droite. T est isolé à gauche en tant que temps de saut positif. Considérer \check{X} amène à des conclusions analogues sur la droite de T . \square

On a la réciproque :

Lemme 8.4.2. *Si 0 est irrégulier pour la demi-droite positive, T est un temps de saut positif.*

Démonstration. Soit $V_1 = \inf\{a > 0 ; X(a) \geq 0\}$ and $V_{n+1} = V_1 \circ \theta_{V_n} + V_n$ une séquence de temps d'arrêt aux incréments positifs. Si $V_1 = +\infty$, on pose $V_n = \infty$ pour $n \geq 1$. La mesure ν étant dissymétrique vers le bas, les temps V_n sont p.s. strictement positifs. En particulier, p.s $\lim_n V_n = \infty$ et les temps V_n sont discrets dans \mathbb{R}^+ .

Montrons également que $X_{V_1} > 0$. Il suffit de remarquer que si $X_{V_1} = 0$, si l'on se restreint à un intervalle de la forme $[0, q]$, $q \in \mathbb{Q} \cap]V_1, V_2[$, X atteint deux fois son maximum sur cet intervalle, ce qui n'arrive presque jamais d'après la proposition. 8.4.1 . V_1 est donc un temps de saut positif, de même que les V_n .

Il reste à montrer que $T = V_n$ pour un certain n p.s, et que T sera alors p.s. un temps de saut positif. En posant $n = \sup\{n \geq 0; V_n < T\}$, T est le temps où le niveau X_{V_n} est franchi, i.e. $T = V_{n+1}$. \square

On peut conclure la démonstration du théorème par ce dernier lemme :

Lemme 8.4.3. *Supposons désormais que ν n'est pas dissymétrique.*

Alors p.s $\overline{X}'(T^-) = \overline{X}'(T) = 0$ et T n'est isolé ni sur sa droite ni sur sa gauche.

Démonstration. Soit Ω_1 l'événement $\overline{X}'(T^-) > 0$. On va montrer par contradiction que Ω_1 est négligeable.

On suppose ici sans perte de généralité que $I = [0, 1]$ et que X est défini sur toute la droite réelle. On note $X_{|[a,b]}$ la restriction de X sur un segment $[a, b]$, et $T_{a,b}$ le temps auquel X^* atteint son maximum sur $[a, b]$. On note $T_1 = T_{0,1}$ et $T_2 = T_{1,2}$. On considère l'événement suivant

$$\Omega_2 = (\Omega_1; X(T_1) < T_2; X(T_2) \in \mathbf{E}_{X_{|[0,2]}}^+).$$

Si Ω_2 est réalisé, alors T_1 est un temps extrémal supérieur pour X sur $[0, 2]$, tout en étant strictement inférieur au temps T_2 où X atteint son maximum sur $[0, 2]$. Le temps T est donc un temps de saut positif pour X , ce qui n'arrive presque jamais d'après le lemme 8.4.1 puisqu'on a supposé ν non-dissymétrique. On arrivera donc à une contradiction si l'on montre que Ω_2 a une probabilité strictement positive.

Pour $s \in [0, 1], \beta > 0, M \in \mathbb{R}$, on appelle $Z_{s,\beta,m,M}$ la zone de \mathbb{R}^2

$$Z_{s,\beta,m,M} = \{(a, x); a \in [1, 2], x < M + \beta(a - s)\}.$$

et on définit l'événement

$$\begin{aligned} \Omega_{s,\beta,m,M} = (T_1 \leq s; X'(T_1^-) \geq \beta; m \leq X(T_1) < M; \\ M \leq X(T_2); \text{gr}(X_{|[1,2]}) \subseteq Z_{s,\beta,m,M}). \end{aligned}$$

Remarquons que si un événement de ce type est réalisé, alors Ω_2 est réalisé également. Nous allons montrer qu'un de ces événement est réalisé avec une probabilité non-nulle, ce qui nous suffira à conclure.

Comme $\mathbb{P}(\Omega_1) > 0$ par hypothèse, on peut trouver $\beta > 0$ tel que $(T_1 \leq s; X'(T_1^-) \geq \beta; m \leq X(T_1) \leq M)$ soit de probabilité non-nulle pour $s \in]0, 1[, m < M$ tels que $Z_{s,\beta,m,M}$ soit d'intérieur non-vidé. Conditionnellement à cet événement, $\mathbb{P}(M \leq X_{T_2}; \text{gr}(X_{|[1,2]}) \subseteq Z_{s,\beta,m,M}) > 0$, et on a donc $\mathbb{P}(\Omega_{s,\beta,m,M}) > 0$.

On a donc prouvé $\overline{X}'(T^-) = 0$ p.s., et par réflexivité on a aussi $\overline{X}'(T) = 0$. Comme T est le seul point où X atteint son maximum, cela implique que T n'est isolé ni sur sa droite ni sur sa gauche dans E_X^+ . \square

Chapitre 9

Réarrangements de champs gaussiens.

9.1 Preuve du théorème 5.1.2

Sans perte de généralité, on peut supposer f_n et f convexes. Cela nous permet d'omettre les opérateurs \mathbf{M} et \mathbf{C} . Nous allons d'abord montrer que (5.6) implique (5.5), puis nous montrerons (5.7) implique (5.6), et enfin (5.5) implique (5.7).

(5.6) implique (5.5), On suppose dans un premier temps qu'on a la convergence L^1 sur K tout entier.

La suite de mesures de probabilités μ_n est tendue. En effet, l'inégalité de Markov entraîne, pour $M \geq 0$,

$$\mu_n(B(0, M)^c) \leq \frac{1}{M} \int_K \|\nabla f_n\|.$$

La convergence L^1 de ∇f_n implique que la dernière quantité converge vers $\frac{1}{M} \int_K \|\nabla f\| < \infty$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $M \geq 0$ tel que pour n suffisamment grand $\mu_n(B(0, M)^c) \leq \varepsilon$, ce qui prouve la tension de la famille $\{\mu_n\}$. Pour conclure, il nous suffit alors de montrer que la seule limite possible de toute sous-suite convergente de μ_n est μ (voir Section 3.1. Soit $\mu_{n'}$ une sous-suite convergente de limite μ' . Comme $\nabla f_{n'}$ converge en norme L^1 vers ∇f , on peut trouver d'après la réciproque du théorème de Lebesgue une sous-suite $\nabla f_{n''}$ qui converge vers ∇f presque partout. Le théorème de Lebesgue implique alors que, pour toute fonction continue à support compact φ sur \mathbb{R}^d , $\int \varphi(\nabla f_{n''}) \rightarrow \int \varphi(\nabla f)$, en d'autres termes $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu_{n''}(dx) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu(dx)$. Comme $\mu_{n''} \Rightarrow \mu'$, on en déduit $\mu' = \mu$, et donc on a $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Il faut désormais traiter le cas général, où l'on n'a simplement la convergence L^1 sur chaque compact convexe inclus dans K . On considère une famille croissante de compacts $\{K_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ dont l'union est $\text{int}(K)$. La convergence a lieu sur chaque $K_\varepsilon, \varepsilon > 0$. On appelle, pour une fonction u sur K , u^ε sa restric-

tion à K_ε . On pose μ_n^ε la mesure image de ∇f_n^ε , et μ^ε celle de ∇f^ε . D'après ce qu'on vient de montrer, on a $\mu_n^\varepsilon \Rightarrow \mu^\varepsilon$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Soit désormais B un borélien de μ -continuité dans \mathbb{R}^d . D'après la Section 3.1, il suffit de montrer que $\mu_n(B) \rightarrow \mu(B)$. Comme B est aussi un ensemble de μ^ε -continuité ($\mu^\varepsilon \leq \mu$), on a $\mu_n^\varepsilon(B) \rightarrow \mu^\varepsilon(B)$. On a alors

$$|\mu_n(B) - \mu(B)| \leq |\mu_n^\varepsilon(B) - \mu^\varepsilon(B)| + \lambda_d(K_\varepsilon^c).$$

En faisant tendre ε vers 0 et en prenant n suffisamment grand, on a le résultat.

Montrons (5.7) implique (5.6). On présente le résultat sous forme d'une proposition, dont on se resserra plus tard.

Lemme 9.1.1. *Soit K un compact convexe, et $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $\mathcal{K}(K)$ qui converge simplement vers une fonction convexe f de $\mathcal{K}(K)$. Alors ∇f_n converges vers ∇f pour la norme L^1 sur chaque sous-ensemble convexe compact de $\text{int}(K)$.*

Démonstration. Nous allons procéder en trois étapes.

Fonctions convexes équilipschitziennes sur $[0, 1]$:

Pour $\kappa > 0$, on note \mathcal{C}_κ la classe des fonctions convexes κ -lipschitziennes sur $[0, 1]$. Nous supposons que f et les $\{f_n\}$ sont dans \mathcal{C}_κ . Dans ce cas, on choisit un sous-ensemble dense $S = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ dans $[0, 1]$. Comme les f'_n sont bornées (par κ), par la méthode de l'extraction diagonale, on peut trouver une sous-suite $f'_{\tau(n)}$ telle que, pour tout k , $f'_{\tau(n)}(x_k)$ converge vers un certain réel $g(x_k)$, où g est croissante sur S . Appelons aussi g l'unique extension croissante continue à droite sur $[0, 1]$. Nous allons montrer que f'_n converge vers g sur $[0, 1]$ pour la norme L^1 . Soit x un point de continuité g et $\varepsilon > 0$. Soit y et z dans S tels que $|g(y) - g(z)| \leq \varepsilon$ et $y \leq x \leq z$. Pour n suffisamment grand, comme g et les f'_n sont croissantes,

$$\begin{aligned} -2\varepsilon &\leq g(x) - g(z) + g(z) - f'_n(z) \leq g(x) - f'_n(x) \\ &\leq g(x) - g(y) + g(y) - f'_n(y) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc f'_n converge vers g en chacun de ses points de continuité, i.e presque partout d'après le théorème de Riesz-Nagy. Comme g est bornée (par κ), f'_n converge vers g pour la norme L^1 (théorème de Lebesgue). Par intégration, g égale f' p.p. et nous avons le résultat.

Fonctions convexes sur $[0, 1]$:

On lâche l'hypothèse que les f_n sont équilipschitziennes. Soit $I = [a, b]$ un sous-intervalle compact de $]0, 1[$. Alors, pour chaque f_n , pour tout x de I , on a, par convexité,

$$\frac{f_n(a) - f_n(0)}{a} \leq f'_n(x) \leq \frac{f_n(1) - f_n(b)}{1 - b}.$$

Comme les membres de droite et de gauche convergent vers des valeurs finies, les f_n sont équipschitziennes sur I , et le résultat précédent entraîne que f'_n converge vers f' pour la norme L^1 sur I .

Fonctions convexes sur K :

Soit $I_j, 1 \leq j \leq d$ des intervalles compacts de \mathbb{R} tels que $C = I_1 \times \cdots \times I_d$ est un rectangle compact contenu dans $\text{int}(K)$. Posons, pour z dans $I_1 \times \cdots \times I_{d-1}$, $I_z = \{z\} \times I_d \subseteq C$. Pour chacun de ces z , et $1 \leq i \leq d$, on définit

$$G_{n,z,i}(x) = \nabla f_{n,i}(z, x) - \nabla f_i(z, x)$$

sur I_d , et $C_{n,i}(z) = \|G_{n,z,i}\|_{L^1}^{I_d}$. Le théorème de Fubini nous donne

$$\|\nabla f_n - \nabla f\|_{L^1}^C = \sum_{i=1}^d \int_{I_1 \times \cdots \times I_{d-1}} C_{n,i}(z) dz.$$

Comme les f_n convergent uniformément vers f sur K , c'est également le cas sur chaque segment J_z dont l'intérieur contient I_z . Chaque intégrant $C_{n,i}(z)$ converge simplement vers 0 grâce au résultat précédent. Pour obtenir une domination, on écrit $I_z = [a_z, b_z]$, et on choisit un point c_z de I_z où la fonction monotone $\nabla f_{n,i}(z, \cdot)$ atteint 0, ou on pose $c_z = a_z$ (de manière arbitraire) si 0 n'est pas atteint. Par suite, grâce à la monotonie de $\nabla f_{n,i}(z, \cdot)$, on a

$$\|\nabla f_{n,i}(z, \cdot)\|_{L^1}^{I_z} \leq \|f_n(a_z)\| + \|f_n(b_z)\| + 2\|f_n(c_z)\| \leq 4\|f_n\|_{\infty}^C \leq 4\|f\|_{\infty}^C + o(1).$$

La dernière majoration provient du fait que la convergence simple de fonctions convexes sur un compact entraîne la convergence uniforme.

En faisant le même type de majoration pour f , on a

$$C_{n,i}(z) \leq 8\|f\|_{\infty}^C + o(1)$$

uniformément sur $I_1 \times \cdots \times I_{d-1}$. Donc, le théorème de Lebesgue nous donne la conclusion

$$\|\nabla f_n - \nabla f\|_{L^1}^C \rightarrow 0.$$

Maintenant, chaque convexe compact L de $\text{int}(K)$ est contenu dans un union fini de rectangles de la sorte, et on a la conclusion. □

Montrons (5.5) \Rightarrow (5.7). Ce résultat vient de la structure des fonctions convexes, et plus précisément de leur gradient, les "fonctions monotones". On établit un premier lemme qui nous aide à appréhender la topographie d'une fonction monotone.

Lemme 9.1.2. *Il y a une famille de sous-ensembles compacts $\{K_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ de K qui vérifient*

- (i) $\varepsilon > \varepsilon' \Rightarrow K_\varepsilon \subseteq K_{\varepsilon'}$,
- (ii) $\bigcup_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon = \text{int}(K)$,
- (iii) Pour toute fonction convexe f , réel positif κ et $\varepsilon > 0$,

$$\mu_{\|\nabla f\|}([\kappa, \infty[) \leq \varepsilon \Rightarrow \forall z \in K_\varepsilon, \|\nabla f(z)\| \leq 2\kappa.$$

Il est donc possible de contrôler la location des points où la norme du gradient de f atteint des grandes valeurs. En particulier $\|\nabla f\|$ ne peut pas être “trop grand ” loin des bords de K .

Démonstration. Tout fonction convexe f sur K vérifie

$$\forall z, \zeta \in K, \langle \nabla f(z) - \nabla f(\zeta), z - \zeta \rangle \geq 0.$$

C'est une conséquence du fait que la restriction de f à chaque segment $[z, \zeta]$ est convexe. Pour $z \in K, u \in \mathbb{R}^d$ on introduit le cône affine

$$Z(z, u) = \left\{ y \in K_d; \langle y - z, u \rangle \geq \frac{1}{2} \|z - y\| \|u\| \right\}.$$

On a l'implication

$$y \in Z(z, \nabla f(z)) \Rightarrow \|\nabla f(y)\| \geq \frac{1}{2} \|\nabla f(z)\|.$$

En effet, soit y dans $Z(z, \nabla f(z))$.

$$\|\nabla f(y)\| \|y - z\| \geq \langle \nabla f(y), y - z \rangle \geq \langle \nabla f(z), y - z \rangle \geq \frac{1}{2} \|\nabla f(z)\| \|y - z\|.$$

Cela signifie qu'un y dans le cône $Z(z, \nabla f(z))$ ne peut avoir un gradient trop faible, en raison de la propriété de monotonie.

On pose $\varepsilon(z) = \inf_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} \lambda_d(Z(z, u))$, qui joue simplement le rôle d'une borne inférieure pour $\lambda_d(Z(z, \nabla f(z)))$. On a, pour $z \in K$,

$$\lambda_d \left(\left\{ y \in K; \|\nabla f(y)\| \geq \frac{1}{2} \|\nabla f(z)\| \right\} \right) \geq \lambda_d(Z(z, \nabla f(z))) \geq \varepsilon(z). \quad (9.1)$$

On pose maintenant, pour $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon = \{z \in K; \varepsilon(z) \geq \varepsilon\}$. Pour z dans K_ε ,

$$\|\nabla f(z)\| \geq 2\kappa \Rightarrow \mu_{\|\nabla f\|}([\kappa, \infty[) \geq \varepsilon(z).$$

Ainsi, étant donné n'importe quel nombre positif κ , si ∇f satisfait

$$\mu_{\|\nabla f_n\|}([\kappa, \infty[) \leq \beta,$$

alors, il s'ensuit que pour $z \in K_\beta$, $\varepsilon(z) \geq \beta$, et donc, d'après (9.1)

$$\|\nabla f(z)\| \leq 2\kappa.$$

□

Pour finir de prouver le théorème, on doit montrer que f_n converge vers f sur $\text{int}(K)$. Dans un premier temps, on va utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela pour montrer que les f_n convergent uniformément sur chaque K_ε , et des propriétés de consistance impliqueront sa convergence simple sur $\text{int}(K)$. On montrera ensuite que la limite ne peut être que f .

Comme $\mu_{\nabla f_n}$ converge faiblement vers la mesure finie μ_f c'est une famille tendue. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\kappa > 0$ tel que, pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$\mu_{\|\nabla f_n\|}([\kappa, \infty[) \leq \varepsilon.$$

Alors, d'après le lemme 9.1.2,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in K_\varepsilon, \|\nabla f_n(z)\| \leq 2\kappa.$$

Comme le critère d'Ascoli-Arzela est vérifié, on sait que pour chaque $\varepsilon > 0$, $\{f_n(z); z \in K_\varepsilon\}$ est une famille relativement compacte pour la convergence uniforme. Soit ε un nombre positif. Il existe une fonction convexe f_ε et une sous-suite $f_{\varphi^\varepsilon(n)}$ telle que $f_{\varphi^\varepsilon(n)} \rightarrow f_\varepsilon$ uniformément sur K_ε . On va montrer que $f^\varepsilon = f$.

En utilisant un procédé d'extraction diagonal, comme pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ la famille $\{f_n(z); z \in K_{\varepsilon/k}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est uniformément continue on peut trouver une extraction $\{\varphi(k); k \in \mathbb{N}^*\}$ telle que pour chaque k , $f_{\varphi(k)}$ converge vers une fonction $f^{\varepsilon/k}$ sur $K_{\varepsilon/k}$ telle que, pour $k' \geq k$,

$$f^{\varepsilon/k}(z) = f^{\varepsilon/k'}(z), z \in K_{\varepsilon/k}.$$

On définit, pour $z \in \cup_{k \geq 1} K_{\varepsilon_k} = \text{int}(K)$, $\tilde{f}^\varepsilon(z) = f^{\varepsilon/k}(z)$, ce qui ne dépend pas du k tant que z est dans K_{ε_k} grâce à la propriété de consistance. On a donc la convergence simple de $f_{\varphi(k)}$ vers \tilde{f}^ε sur $\text{int}(K)$. D'après l'implication (5.6) \Rightarrow (5.5) prouvée précédemment, on sait que $\mu_{\nabla f_n} \Rightarrow \mu_{\nabla \tilde{f}^\varepsilon}$, et donc, par unicité de la limite, $\mu_{\nabla \tilde{f}^\varepsilon} = \mu_{\nabla f}$. Ainsi $\nabla \tilde{f}^\varepsilon$ et ∇f sont deux fonctions monotones sur K dont les distributions coïncident. L'unicité dans le théorème de Brenier nous assure qu'elles sont égales p.p.

Comme f^ε coïncide avec \tilde{f}^ε sur K^ε , on a aussi $f^\varepsilon = f$ sur K^ε . Ainsi, la restriction de f à K^ε est l'unique limite possible de f_n sur K^ε . Cette famille étant compacte, f est la limite de f_n sur chaque K^ε . C'est ce que nous devons montrer.

9.2 Preuve du théorème 5.2.2

Pour des raisons de clarté, on omet l'exposant (T) dans cette preuve. (Ceci concerne les variables $\nabla X_n, Y_n, \mu_n, \varphi_n$).

Soit h dans \mathbb{R}^d . Dans la suite, la notation \mathbf{z} désigne un quadruplet de points $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in (K_d)^4$. On note \mathcal{P}^4 la classe de tous les sous-ensembles de $\{1, 2, 3, 4\}$, et pour $0 \leq c \leq 4$, $\mathcal{P}_c^4 = \{P \in \mathcal{P}^4; |P| = c\}$. On pose également $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|\varphi_n(h) - \mathbb{E}(\varphi_n(h))|^4\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\varphi_n(h) - \mathbb{E}(\varphi_n(h))\right)^2 \overline{\left(\varphi_n(h) - \mathbb{E}(\varphi_n(h))\right)^2}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{K_d} dz_1 \int_{K_d} dz_2 \int_{K_d} dz_3 \int_{K_d} dz_4 \prod_{q=1}^4 \left(e^{i\langle h, \varepsilon_q Y_n(z_q) \rangle} - e^{-\frac{1}{2}\langle h, \text{cov}(Y_n(z_q))h \rangle}\right)\right) \\ &= \int_{(K_d)^4} \mathbb{E}\left(\sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|4-P|} e^{i\sum_{q \in P} \langle h, \varepsilon_q Y_n(z_q) \rangle - \frac{1}{2}\sum_{q' \notin P} \langle h, \text{cov}(Y_n(z_{q'})h \rangle}\right) d\mathbf{z} \\ &= \int_{(K_d)^4} \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} e^{-\frac{1}{2}\langle h, (\text{cov}(\sum_{q \in P} \varepsilon_q Y_n(z_q)) + \sum_{q' \notin P} \text{cov}(Y_n(z_{q'})))h \rangle} d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Précisons le terme $\text{cov}\left(\sum_{q \in P} \varepsilon_q Y_n(z_q)\right)$. Soit i, j dans $\{1, \dots, d\}$.

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(\sum_{q \in P} \varepsilon_q Y_n(z_q)\right)_{i,j} &= \mathbb{E}\left(\sum_{q \in P} \varepsilon_q Y_{n,i}(z_q) \sum_{q' \in P} \varepsilon_{q'} Y_{n,j}(z_{q'})\right) \\ &= \sum_{q, q' \in P} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z_q) Y_{n,j}(z_{q'})) \\ &= \sum_{q \in P} \text{cov}(Y_n(z_q))_{i,j} + \sum_{\substack{q, q' \in P \\ q \neq q'}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z_q) Y_{n,j}(z_{q'})). \end{aligned}$$

On pose donc, pour P dans \mathcal{P}^4 , \mathbf{z} dans $(K_d)^4$, i, j dans $\{1, \dots, d\}$,

$$\chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j} = \sum_{\substack{q, q' \in P \\ q \neq q'}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z_q) Y_{n,j}(z_{q'})).$$

On utilise la notation, pour Q sous-ensemble fini de K_d , $\psi_n^Q = e^{\sum_{z \in Q} -\frac{1}{2}\langle h, \text{cov}(Y_n(z))h \rangle}$. Notons que pour deux parties disjointes Q et Q' de K_d , $\psi_n^Q \psi_n^{Q'} = \psi_n^{Q \cup Q'}$. Aussi, pour $\mathbf{z} = \{z_i; 1 \leq i \leq 4\}$ dans $(K_d)^4$ et $P \in \mathcal{P}^4$, on pose $\mathbf{z}_P = \{z_q; q \in P\}$ et on utilise la notation simplifiée $\psi_n^{\mathbf{z}} = \psi_n^{\mathbf{z}_{1,2,3,4}} = \psi_n^{\{z_1, z_2, z_3, z_4\}}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|\varphi_n(h) - \mathbb{E}(\varphi_n(h))|^4\right) &= \int_{(K_d)^4} \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \psi_n^{\mathbf{z}_P} \psi_n^{\mathbf{z}_{P^c}} e^{\sum_{i,j} h_i h_j \chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j}} d\mathbf{z}, \\ &= \int_{(K_d)^4} \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \psi_n^{\mathbf{z}} \left(1 + \sum_{1 \leq i, j \leq d} h_i h_j \chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j} + O(\chi_n^P(\mathbf{z}))^2\right) d\mathbf{z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{(K_d)^4} \psi_n^{\mathbf{z}} \left(\sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} + \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \sum_{1 \leq i, j \leq d} h_i h_j \chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j} \right) d\mathbf{z} \\
 &\quad + O \left(\int_{(K_d)^4} \psi_n^{\mathbf{z}} \chi_n^P(\mathbf{z})^2 d\mathbf{z} \right). \quad (9.2)
 \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} &= \sum_{q=0}^4 \sum_{P \in \mathcal{P}_q^4} (-1)^q \\
 &= 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Le terme non-négligeable est une intégrale discrète, que l'on peut écrire sous la forme d'une somme sur la grille $(H_n^{(T)})^4$. On pose $t_n = \lambda_d(\frac{1}{n}T) = \frac{1}{n^d} \lambda_d(T)$. Pour tout i, j dans $\{1, \dots, d\}$,

$$\int_{(K_d)^4} \psi_n^{\mathbf{z}} \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j} d\mathbf{z} = \sum_{\mathbf{z} \in (H_n^T)^4} t_n^4 \psi_n^{\mathbf{z}} \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j} + \kappa_n,$$

où $|\kappa_n| \leq C_T/n$ p.s, d'après (5.18). Comme $\chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j}$ est une somme de termes de la forme $\mathbb{E}(Y_{n,i}(z)Y_{n,j}(\zeta))$ où $z, \zeta \in H_n^T$, l'idée est de compter le nombre de fois que chaque terme apparaît.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mathbf{z} \in (H_n^T)^4} \psi_n^{\mathbf{z}} \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \chi_n^P(\mathbf{z})_{i,j} \\
 &= \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \sum_{\substack{q, q' \in \mathcal{P}^4 \\ q \neq q'}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \sum_{\mathbf{z} \in (H_n^T)^4} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z_q)Y_{n,j}(z_{q'})) \psi_n^{\mathbf{z}} \\
 &= \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \sum_{\substack{q, q' \in \mathcal{P}^4 \\ q \neq q'}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \sum_{\mathbf{z} \in (H_n^T)^4} \sum_{z, \zeta \in H_n^T} \mathbf{1}_{\{z_q=z, z_{q'}=\zeta\}} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z)Y_{n,j}(\zeta)) \psi_n^{\mathbf{z}} \\
 &= \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \sum_{\substack{q, q' \in \mathcal{P}^4 \\ q \neq q'}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \sum_{z, \zeta \in H_n^T} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z)Y_{n,j}(\zeta)) \sum_{\mathbf{z} \in (H_n^T)^4} \mathbf{1}_{\{z_q=z, z_{q'}=\zeta\}} \psi_n^{\mathbf{z}} \\
 &= \sum_{z, \zeta \in H_n^T} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z)Y_{n,j}(\zeta)) \sum_{P \in \mathcal{P}^4} (-1)^{|P|} \sum_{\substack{q, q' \in \mathcal{P}^4 \\ q \neq q'}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \sum_{z', \zeta' \in H_n^T} \psi_n^{\{z, \zeta, z', \zeta'\}} \\
 &= \left(\sum_{z, \zeta \in H_n^T} \psi_n^{\{z, \zeta\}} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z)Y_{n,j}(\zeta)) \sum_{\substack{1 \leq q, q' \leq 4 \\ q \neq q'}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^4 \\ P \ni q, q'}} (-1)^{|P|} \right) \times \\
 &\quad \left(\sum_{z', \zeta' \in H_n^T} \psi_n^{\{z', \zeta'\}} \right).
 \end{aligned}$$

Soit $q \neq q' \in \{1, 2, 3, 4\}$. Alors il y a exactement un élément P de \mathcal{P}_2^4 , 2 P dans \mathcal{P}_3^4 et 1 dans \mathcal{P}_4^4 qui contiennent q et q' . On a donc

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^4 \\ P \ni q, q'}} (-1)^{|P|} = 1 - 2 + 1 = 0$$

et la somme précédente est nulle. Le terme de premier ordre dans (9.2) se réduit au terme déterministe κ_n , qui converge vers 0.

Estimons le dernier terme de (9.2),

$$\begin{aligned} & \int_{(K_d)^4} \psi_n^{\mathbf{z}} \chi_n^P(\mathbf{z})^2 d\mathbf{z} \\ &= \int_{(K_d)^4} \sum_{P, P' \in \mathcal{P}^4} \sum_{\substack{q, q' \in P, p, p' \in P' \\ q \neq q', p \neq p'}} \psi_n^{\mathbf{z}} \varepsilon_q \varepsilon_{q'} \varepsilon_p \varepsilon_{p'} \mathbb{E}(Y_{n,i}(z_q) Y_{n,j}(z_{q'})) \mathbb{E}(Y_{n,i}(z_p) Y_{n,j}(z_{p'})) d\mathbf{z}, \\ &= O \left(\int_{(K_d)^4} \psi_n^{\{z_1, z_2\}} \psi_n^{\{z_3, z_4\}} \sup_{i,j} |\mathbb{E}(Y_{n,i}(z_1) Y_{n,j}(z_2))| \sup_{i,j} |\mathbb{E}(Y_{n,i}(z_3) Y_{n,j}(z_4))| d\mathbf{z} \right), \\ &= O \left(\left(\int_{(K_d)^2} \psi_n^{\{z, \zeta\}} \sup_{i,j} |\mathbb{E}(Y_{n,i}(z) Y_{n,j}(\zeta))| dz d\zeta \right)^2 \right). \end{aligned}$$

et donc la formule est démontrée.

Chapitre 10

mosaïques STIT

10.1 Preuve de la Proposition (6.2.2)

Plus précisément, on va montrer le lemme suivant.

Lemme 10.1.1. *Soit $t, a > 0$ des réels positifs, L un compact, et $\beta_{L,a} = \Lambda([\text{conv}(L)])(1 + a\Lambda([\text{conv}(L)]))(1 - \mathbf{T}_a(L))$. Alors*

$$0 \leq \mathbf{T}_{a+t}(L) - \mathbf{T}_a(L) \leq t\beta_{L,a}.$$

On utilise les notations de la Section 6.1.1, avec $K = \text{conv}(L)$. Soit $M_{a,K}$ une mosaïque STIT de loi $\mathbb{P}_{a,K}$. Comme L peut ne pas être connexe, il est possible que K soit divisé par des hyperplans sans que L ne le soit. Appelons N_a le nombre d'hyperplans divisant formellement K avant le temps a ,

$$N_a = \#\{k; d_k \leq a\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\pi_n(a) = \mathbb{P}(N_a = n) > 0$. Presque sûrement, conditionnellement à $(N_a = n)$, $M_{a,K}$ contient au plus $n+1$ cellules C_1, \dots, C_{n+1} , d'intérieur non-vide (on a éventuellement $C_i = C_j$ pour $i \neq j$). On pose $L_i = L \cap C_i$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{a+t}(L) - \mathbf{T}_a(L) &= \mathbf{U}_a(L) - \mathbf{U}_{a+t}(L) = \mathbf{U}_a(L)\mathbb{P}(L \cap M_{a+t} \neq \emptyset | L \cap M_a = \emptyset) \\ &= \mathbf{U}_a(L) \sum_{n \geq 0} \pi_n(a) \mathbb{P}(\exists i, 1 \leq i \leq n+1, L_i \cap M_{a+t} \neq \emptyset | N_a = n, L \cap M_a = \emptyset) \\ &\leq \mathbf{U}_a(L) \sum_{n \geq 0} \pi_n(a) \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(L_i \cap M_{a+t} \neq \emptyset | N_a = n, L \cap Y_a = \emptyset). \end{aligned}$$

On rappelle maintenant deux faits essentiels concernant la construction des mosaïques STIT. Lorsqu'une cellule est divisée, le comportement des deux cellules-filles sont indépendants. De plus, le processus de division d'une cellule est sans mémoire, ce qui signifie que la probabilité qu'elle soit divisée au temps

$a + t$ sachant qu'elle n'a pas été divisée au temps a égale la probabilité qu'elle n'ait pas été divisée en une durée t . Comme pour chaque i , L_i est contenu dans une cellule convexe C , la probabilité que L_i soit divisée sur une certaine période égale la probabilité que la mosaïque STIT définie sur C touche L_i sur une période de la même durée. Enfin, grâce à la propriété de consistance (théorème 6.1.1), conditionnellement à $L_i = L_i^0$, pour $L_i^0 \in \mathfrak{K}$, cette dernière probabilité ne change pas si on considère la mosaïque STIT définie sur tout \mathbb{R}^d . On a donc, pour tout compact K ,

$$\mathbb{P}(L_i \cap M_{a+t} \neq \emptyset | N_a = n, L \cap Y_a = \emptyset, L_i = L_i^0) = \mathbf{T}_t(L_i^0).$$

Comme L_i^0 est nécessairement inclus dans K , on a $\mathbf{T}_t(\text{conv}(L_i^0)) \leq \mathbf{T}_t(K)$.

D'après [NagWei05], K étant connexe, $\mathbf{T}_t(K) = 1 - e^{-\Lambda([K])}$. Ceci entraîne

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_a(L) - \mathbf{U}_{a+t}(L) &\leq \mathbf{U}_a(L) \sum_{n \geq 0} \pi_n(a) \sum_{i=1}^{n+1} \left(1 - e^{-t\Lambda([K])}\right) \\ &\leq \mathbf{U}_a(L) \sum_{n \geq 0} \pi_n(a) \sum_{i=1}^{n+1} t\Lambda([K]) \\ &\leq \mathbf{U}_a(L) \sum_{n \geq 0} \pi_n(a) (n+1) t\Lambda([K]) \\ &\leq \mathbf{U}_a(L) t\Lambda([K]) (1 + \mathbb{E}(N_a)). \end{aligned}$$

Le nombre d'hyperplans impliqués dans le processus de division cellulaire de cellule initiale K jusqu'au temps a est une variable de Poisson de paramètre $a\Lambda([K])$. En conséquence on a

$$\mathbb{E}(N_a) = a\Lambda([K]),$$

ce qui conclut la preuve. □

10.2 Preuve de la proposition 6.2.1

Pour $u \in \mathcal{S}^d$ on a

$$\zeta(u) = \Lambda(]0, u]) = \Lambda([0, u]).$$

Comme la mesure Λ vérifie $\Lambda([-u, 0] \cap [0, u]) = 0$, et grâce à la stationnarité de Λ on a $\Lambda([0, u]) = \frac{1}{2}\Lambda([-u, u])$.

Maintenant, étant donné un hyperplan H à distance r de l'origine, de normale extérieure v ,

$$H \in [-u, u] \Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| \leq r,$$

et donc

$$\zeta(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}^d} |\langle u, v \rangle| \nu(dv).$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } u \neq u' \in \mathcal{S}^d, |\zeta(u) - \zeta(u')| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}^d} | |\langle u, v \rangle| - |\langle u', v \rangle| | \nu(dv) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}^d} |\langle u, v \rangle - \langle u', v \rangle| \nu(dv) \\ &\leq \frac{\|u - u'\|}{2} \int_{\mathcal{S}^d} \nu(dv) \\ &\leq \frac{\|u - u'\|}{2} \nu(\mathcal{S}^d), \end{aligned}$$

ce qui fait de ζ une fonction continue sur la sphère. Soit $u \in \mathcal{S}^d$. Grâce à l'hypothèse (6.2), ν n'est pas concentrée sur u^\perp , donc $\int_{\mathcal{S}^d} |\langle u, v \rangle| \nu(dv) > 0$. Comme \mathcal{S}^d est compacte, on a l'existence d'un $\kappa > 0$ tel que $\zeta(u) > \kappa$.

□

10.3 Preuve du théorème 6.2.1

Nous allons d'abord établir quelques inégalités pour des compacts fixés K, K' puis nous exploiterons ces inégalités en translatant K' d'un vecteur h pour obtenir des majorations asymptotiques.

Soit $L = \text{conv}(K \cup K')$. On considère le processus temporel à valeurs dans l'espace des mosaïques \mathfrak{M} , $\{M_{t,L}; t \geq 0\}$. On garde les notations de la Section 6.1.1, au temps ε_1 , la première division de L a lieu, par l'hyperplan H_1 . On introduit l'événement

$$\Omega_{K,K'} = (H_1 \in [K|K'], \varepsilon_1 \leq a).$$

Quand K et K' sont éloignés, $\Omega_{K,K'}$ a de fortes chances d'être réalisé, et après que ca soit le cas, les comportements de K et K' sont indépendants car ils se trouvent dès lors dans des cellules disjointes.

On va d'abord estimer

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'}, \Omega_{K,K'}) - \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'})| &\leq \mathbb{P}_a(\Omega_{K,K'}^c) \\ &\leq \mathbb{P}(H_1 \notin [K|K']) + \mathbb{P}(\varepsilon_1 > a) \\ &\leq \mathbb{P}(H_1 \in [K] \cup [K']) + e^{-a\Lambda[L]} \\ &\leq \frac{\Lambda([K]) + \Lambda([K'])}{\Lambda([L])} + e^{-a\Lambda[L]}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

On estime le premier terme, proche de la quantité recherchée.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'}, \Omega_{K,K'}) &= \int_0^a \mathbb{P}_a(\varepsilon_1 \in dt, H_1 \in [K|K'], \mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'}) \\ &= \int_0^a \mathbb{P}_a(\varepsilon_1 \in dt, H_1 \in [K|K']) \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'} | \varepsilon_1 = t, H_1 \in [K|K']). \end{aligned}$$

Si $\varepsilon_1 = t$ et $H_1 \in [K|K']$, les compacts K et K' sont contenus à partir du temps t dans deux cellules distinctes. En conséquence, les événements \mathfrak{F}^K et $\mathfrak{F}^{K'}$ sont indépendants après t , et la propriété que \mathcal{F}^K (resp. $\mathcal{F}^{K'}$) survienne avant le temps a est égale à la propriété que K (resp. K') soit divisé en une durée $a - t$ (le processus de division est sans mémoire). On a en conséquence

$$\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'} | \varepsilon_1 = t, H_1 \in [K|K']) = \mathbf{U}_{a-t}(K)\mathbf{U}_{a-t}(K').$$

Comme la famille des $\{H_k\}$ est indépendante de celle des $\{\varepsilon_k\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a(\varepsilon_1 \in dt, H_1 \in [K|K']) &= \mathbb{P}_a(\varepsilon_1 \in dt)\mathbb{P}_a(H_1 \in [K|K']) \\ &= e^{-t\Lambda([L])} dt \Lambda([K|K']), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'}, \Omega_{K,K'}) = \Lambda([K|K']) \int_0^a e^{-t\Lambda([L])} \mathbf{U}_{a-t}(K)\mathbf{U}_{a-t}(K') dt, \quad (10.2)$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} &|\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{K'}, \Omega_{K,K'}) - \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K)\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^{K'})| \\ &= \left| \Lambda([K|K']) \int_0^a e^{-t\Lambda([L])} \mathbf{U}_{a-t}(K)\mathbf{U}_{a-t}(K') dt - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{U}_a(K)\mathbf{U}_a(K') \int_0^\infty e^{-t\Lambda([L])} \Lambda([L]) dt \right| \\ &\leq \Lambda([K|K']) \int_0^\infty e^{-t\Lambda([L])} |\mathbf{U}_{a-t}(K)\mathbf{U}_{a-t}(K') - \mathbf{U}_a(K)\mathbf{U}_a(K')| dt + \\ &\quad + \left| \frac{\Lambda([K|K'])}{\Lambda([L])} - 1 \right| \int_0^\infty e^{-t\Lambda([L])} \mathbf{U}_a(K)\mathbf{U}_a(K') \Lambda([L]) dt \end{aligned} \quad (10.3)$$

??

On introduit désormais une dérive pour l'ensemble K' . On remplace K' par $\theta_h K'$ dans les formules précédentes, et on pose $L_h = \text{conv}(K \cup \theta_h K')$. On utilisera la relation suivante

Lemme 10.3.1. *On a*

$$\Lambda([L_h]) = \zeta(h/||h||) ||h|| (1 + o(1)).$$

Démonstration. Soit $\alpha \in K$, $\beta \in K'$. Si H est un hyperplan séparant α et $\beta + h$ et ne touchant ni $\text{conv}(K)$ ni $\text{conv}(\theta_h K')$, il sépare aussi K et $\theta_h K'$. Donc

$$\begin{aligned} |\Lambda([K|\theta_h K']) - \Lambda([\alpha, \beta + h])| &\leq \Lambda([\text{conv}(K)]) + \Lambda([\text{conv}(\theta_h K')]) \\ &\leq \Lambda([\text{conv}(K)]) + \Lambda([\text{conv}(K')]) = o(||h||). \end{aligned}$$

Pour des raisons similaires,

$$0 \leq \Lambda(L_h) - \Lambda([K|\theta_h K']) \leq \Lambda([\text{conv}(K)]) + \Lambda([\text{conv}(K')]) = o(\|h\|),$$

il ne nous reste donc qu'à prouver que, pour $\alpha \in K, \beta \in K'$,

$$\Lambda([\alpha, \beta + h]) = \zeta(h/\|h\|)\|h\|(1 + o(1)),$$

qui va nous être donné par le résultat suivant.

Lemme 10.3.2. *Si $\beta - \alpha = \|\beta - \alpha\|u$, avec $u \in \mathcal{S}^{d-1}$,*

$$\Lambda([\alpha|\beta]) = \|\beta - \alpha\|\zeta(u).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0, u \in \mathcal{S}^{d-1}, n \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda([0|(n+1)\varepsilon u]) = \Lambda([0|n\varepsilon u]) + \Lambda([0|\varepsilon u]),$$

Si c'est le cas, comme Λ est stationnaire et localement finie, $\forall x \in \mathbb{R}^d, \Lambda([x]) = 0$ ainsi on pourra obtenir le résultat par induction et approximation.

Comme $[0|(n+1)\varepsilon u]$ est l'union disjoint de $[0|n\varepsilon u], [n\varepsilon u|(n+1)\varepsilon u]$ et $[n\varepsilon u]$, on a

$$\Lambda([0|(n+1)\varepsilon u]) = \Lambda([0|n\varepsilon u]) + \Lambda([n\varepsilon u|(n+1)\varepsilon u])$$

et le résultat procède de la stationnarité de Λ . □

On peut finir la preuve du lemme.

$$\Lambda([L_h]) = \|\alpha - \beta + h\|\zeta\left(\frac{\alpha - \beta + h}{\|\alpha - \beta + h\|}\right)(1 + o(1)) = \|h\|\zeta(h/\|h\|)(1 + o(1))$$

car ζ est continue. □

Définissons

$$\begin{aligned} \delta(K, K', a) &= \beta_{K,a} + \beta_{K',a} \\ &\geq \beta_{K,a-t} + \beta_{K',a-t} \text{ pour tout } t \geq 0. \end{aligned}$$

On pose

$$\chi(K, K', a) = \delta(K, K', a) + \Lambda([\text{conv}(K)]) + \Lambda([\text{conv}(K')]).$$

Grâce à (6.2.2) et (10.3), et le lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned} &|\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{\theta_h K'}, \Omega_{K, \theta_h K'}) - \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K)\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^{K'})| \\ &\leq \Lambda([K|\theta_h K'])\delta(K, K', a) \int_0^\infty e^{-t\Lambda([L_h])} t dt + \left(1 - \frac{\Lambda([K|\theta_h K'])}{\Lambda([L_h])}\right) + o\left(\frac{1}{\|h\|}\right) \\ &\leq \frac{\delta(K, K', a)\Lambda([K|\theta_h K'])}{\Lambda([L_h])^2} + \frac{\Lambda([\text{conv}(K)]) + \Lambda([\text{conv}(\theta_h K')])}{\Lambda([L_h])} + o\left(\frac{1}{\|h\|}\right) \\ &\leq \frac{\chi(K, K', a)}{\zeta(h/\|h\|)\|h\|}(1 + o(1)), \end{aligned}$$

et, grâce à la majoration (10.1) la formule (6.4) est prouvée.

Quand K et K' sont connectés, grâce à l'expression simple (voir [Nag-Wei05])

$$\mathbf{U}_u(L) = e^{-u\Lambda([L])},$$

en utilisant (10.2) on a l'expression exacte

$$\begin{aligned} & |\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{\theta_h K'}, \Omega_{K, \theta_h K'}) - \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K)\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^{K'})| \\ &= \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K)\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^{K'}) \int_0^a e^{-t(\Lambda(L_h) - \Lambda(K) - \Lambda(K'))} dt \\ &= \mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K)\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^{K'}) \left(\frac{1}{\Lambda(L_h) - \Lambda(K) - \Lambda(K')} \right) \int_0^\infty e^{-u} du (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Donc on a

$$\left| \frac{\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K, \mathcal{F}^{\theta_h K'}, \Omega_{K, \theta_h K'})}{\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^K)\mathbb{P}_a(\mathcal{F}^{K'})} - 1 \right| = \frac{1}{\|h\|\varphi(h/\|h\|)} (1 + o(1)),$$

Ainsi, en utilisant (10.1), on peut voir que la vitesse de décroissance donnée précédemment est proche de l'optimalité.

Glossaire

Glossaire des notations et de la terminologie employée dans ce mémoire

Alternance, 35

Classe de convergence, 33

Configuration, 36

Corps \mathcal{F} -convexes, 93

Coût de production, 61

Ensemble extrémal (supérieur, inférieur), 41

Exposant caractéristique, 46

Fonctionnelle de capacité, 35

Fonctions Monotones, 62

Intensité, 37

Intervalle de choc, 49

Lagrangien (inverse), 49

Majorant concave, minorant convexe, 43

Mesure caractéristique, 47

Mesure de production, 61

Mosaïque, 84

Pavage simplicial, 69

Points réguliers du Lagrangien, 49

Potentiel, 49

Réarrangement, 58

Réarrangement convexe, 62

Réarrangement monotone, 62

Regularité de la demi-droite positive (négative), 43

Semi-continuité supérieure (Fonctionnelle de capacité), 35

	Simplexe droit, régulier, 69
	Temps extrémaux (supérieurs, inférieurs), 41
	Tension, 33
	Topologie de Fell, 34
	Topologie vague, 36
	Topologie \mathcal{F} -faible, 95
	Topologie \mathcal{F} -forte, 95
$\mathfrak{B}(E)$	Boréliens de E , 20
\mathfrak{B}_d	Boréliens de \mathbb{R}^d , 20
\mathfrak{C}	Convexes compacts, 21
$\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}$	Corps \mathcal{F} -convexes, 93
Cf	Réarrangement convexe de f , 62
$\mathfrak{C}_K^{\mathcal{F}}$	\mathcal{F} -enveloppes de fermés de K , 96
C_μ	Fonction convexe dont le gradient a distribution μ , 62
C_X	Enveloppe convexe du graphe de X , 41
\mathfrak{D}	Topologie vague, 36
$d_{\mathfrak{H}}$	Distance de Hausdorff, 20
\mathfrak{E}	Tribu d'Effros, 34
\mathbf{E}_X	Temps extrémaux, 41
\mathbf{E}_X^+	Temps extrémaux supérieurs, 41
\mathcal{E}_X	Points extrémaux de C_X , 41
$\mathfrak{F}(E)$	Fermés de E , 20
\mathfrak{F}^K	Ouverts "miss", 34
\mathfrak{F}_0	Ouverts "hit", 34
\mathcal{F}_K	Restriction sur K des fonctions de \mathcal{F} , 96
γ_d	Loi normale standard sur \mathbb{R}^d , 21
GL_d	Courbe de Lorenz d -dimensionnelle, 71
\mathfrak{H}	Topologie de Hausdorff, 20
\mathcal{H}_k	Mesure de Hausdorff k -dimensionnelle, 21
\mathcal{H}	Hyperplans de \mathbb{R}^d , 85
\mathbf{I}_X	Intensité de X , 37
$\mathcal{K}(K)$	Fonctions convexes sur K , 62
K_d	$[0, 1]^d$, 66
$\mathfrak{K}(E)$	Compacts de E , 20
λ_d	Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , 21
$\mathbf{M}g$	Réarrangement monotone de g , 62
\mathcal{M}_2^{loc}	Processus adaptés localement de carré intégrable, 52
\mathbf{M}_μ	Fonction monotone de distribution μ , 62
\mathfrak{M}	Mosaiques de \mathbb{R}^d , 84
μ_g	Image de la mesure de Lebesgue par g , 58
$\mathcal{N}(K)$	Fonctions Monotones sur K , 62

$p^+(X)$	Probabilité de $R^+(X)$, 44
\mathbf{P}_a	Loi de la mosaïque STIT de paramètre a , 87
$\mathfrak{P}^{\mathcal{F}}$	\mathcal{F} -polytopes, 93
ψ_t	Potentiel au temps t , 49
$R_a^+(X)$	Événement “ X prend des valeurs positives près de 0”, 44
$\mathcal{S}(K)$	Généralisation des fonctions absolument continues, 62
$\mathbf{T}_X(K)$	Fonctionnelle de capacité, 35
\mathbb{T}_d	Simplexe élémentaire de \mathbb{R}^d , 69
$\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}$	Topologie \mathcal{F} -forte, 95
$\mathfrak{W}^{\mathcal{F}}$	Topologie \mathcal{F} -faible, 95
$[A]$	Tous les hyperplans touchant A , 85
\Rightarrow	Convergence faible, 33
\oplus	Somme tensorielle de fonctions, 63
\boxplus	Itération de lois de mosaïques, 87
\odot	Itération de mosaïques, 87
\prec	Relation d’ordre sur les fermés, 95
\check{X}	Processus réfléchi, 51
\hat{X}	Processus tronqué, 51
A^r	r -voisinage de A , 20
$D_{(k)}$	Points extrémaux de la k -ème enveloppe, 98
$\text{env}_{\mathcal{F}}^k$	k -ème enveloppe, 98
$\text{env}(A; \mathcal{L})$	\mathcal{L} -enveloppe de A , 92
\bar{f}	Majorant concave, 43
\underline{f}	Minorant convexe, 43
$\Gamma_{\mathcal{T}}$	Réseau admissible pour \mathcal{T} , 69
$T(z, \mathbf{u}, l)$	Simplexe de sommet z , de base \mathbf{u} et de longueur l , 69
$\overset{v}{\Rightarrow}$	Convergence vague, 36
$\overset{v}{\rightarrow}$	Topologie vague, 36
$X^*(a)$	$\max(X(a), X^-(a))$, 44

Bibliographie

- [Ave95] M. Avellaneda and W. E. Statistical properties of shocks in Burgers turbulence. *Comm. Math. Phys.*, 172 :13–38, 1995.
- [Ave95b] M. Avellaneda. Statistical properties of shocks in Burgers turbulence, II : Tail probabilities for velocities, shock-strengths and rarefaction intervals. *Comm. Math. Phys.*, 169 :45–59, 1995.
- [AzaWsc96] J. Azais and M. Wschebor. Almost sure oscillation of certain random processes. *Bernoulli*, 2(3) :257–270, 1996.
- [Ber00] J. Bertoin. The convex minorant of the cauchy process. *Elect. Comm. in Probab.*, 5 :51–55, 2000.
- [Ber96] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge Tracts in Mathematics, 1996.
- [Ber98] J. Bertoin. Structure of shocks in Burgers turbulence with stable noise initial data. *Comm. Math. Phys.*, 203 :397–406, 1998.
- [Ber98b] J. Bertoin. Large deviation estimates in Burgers turbulence with stable noise initial data. *J. Stat. Phys.*, 91(3/4) :655–667, 1998.
- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & sons, New-York, 1968.
- [Bre91] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44 :375–417, 1991.
- [Cole51] J. D. Cole. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 9 :225–236, 1951.
- [Com06] F. Comets. *Calcul stochastique et modèles de diffusion*. Dunod, Paris, 2006.
- [Cow78] R. Cowan. The uses of the ergodic theorems in random geometry. *Suppl. Adv. Appl. Prob.*, 10 :47–57, 1978.
- [Cow80] R. Cowan. Properties of ergodic random mosaic processes. *Math. Nachr.*, 97 :89–102, 1980.
- [Cow84] R. Cowan. Stochastic geometry, Geometric statistics, Stereology. 1984. eds R. V. Ambartzumian and W. Weil.
- [Dav02] Yu. Davydov. Enveloppes convexes des processus gaussiens. *Ann. I. H. Poincaré*, PR 38(6) :847–861, 2002.

- [Dav98] Yu. Davydov. Convex rearrangements of stable processes. *J. Math. Sci.*, 92 :4010–4016, 1998.
- [DavNag04] Yu. Davydov and A. V. Nagaev. On the role played by extreme summands when a sum of independent and identically distributed random vectors is asymptotically α -stable. *J. Appl. Prob.*, 41 :437–454, 2004.
- [DavThi02] Yu. Davydov and E. Thilly. Convex rearrangements of Gaussian processes. *Theory Prob. and its Applications*, 47 :219–235, 2002.
- [DavVer98] Yu. Davydov and A. M. Vershik. Réarrangements convexes des marches aléatoires. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 34 :73–95, 1998.
- [DavZit04] Yu. Davydov and R. Zitikis. Convex rearrangements of random elements. *Fields Inst. Comm.*, 44 :141–171, 2004.
- [Gro83] P. Groeneboom. The concave majorant of Brownian motion. *Ann. Prob.*, 11(4) :1016–1027, 1983.
- [Hop50] E. Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 3 :201–230, 1950.
- [IbrLin71] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik. *Independent and stationary sequences of random variables*. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.
- [KenMol10] W. S. Kendall and I. Molchanov. *New perspectives in stochastic geometry*. Oxford University Press, 2010.
- [MecNagWei08] J. Mecke, W. Nagel, and V. Weiss. The iteration of random tessellations and a construction of a homogeneous process of cell divisions. *Adv. Appl. Prob.*, 40 :49–59, 2008.
- [MecNagWei08b] J. Mecke, W. Nagel, and V. Weiss. Global construction of homogeneous random planar tessellations that are stable under iteration. *Stochastics*, 80 :51–67, 2008.
- [Mol05] I. Molchanov. *Theory of random sets*. Springer, 2005.
- [NagWei05] W. Nagel and V. Weiss. Crack STIT tessellations - characterization of stationary random tessellations stable with respect to iteration. *Adv. Appl. Prob.*, 37 :859–883, 2005.
- [Pit82] J. W. Pitman. Remarks on the convex minorant of Brownian motion. *Seminar on stochastic processes*, Evanston 1982.
- [RevYor91] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Springer-Verlag, 1999.
- [RogWil00] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes and martingales Vol.1*. Cambridge mathematical Library, 2000.
- [Rva62] E. L. Rvaceva. On domain of attraction of multi-dimensional distributions. *Select. Transl. Mat. Statist. Prob.*, 2 :183–205, 1962.
- [Ryf65] J. V. Ryff. Orbits of l^1 functions under doubly stochastic transformations. *Trans. AMS*, 117 :92–100, 1965.

-
- [SchWei08] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and integral geometry*. Springer, 2008.
- [SheAurFri92] Z.-S. She, E. Aurell, and U. Frisch. The inviscid Burgers equation with initial data of Brownian type. *Comm. Math. Phys.*, 148 :623–641, 1992.
- [Sin92] Y. G. Sinai. Statistics of shocks in solutions of inviscid Burgers equation. *Comm. Math. Phys.*, 148 :601–621, 1992.
- [Sko91] A. V. Skorokhod. *Random processes with Independent increments*. Kluwers academic publishers, 1991.
- [Vil03] C. Villani. *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, 2003.
- [Vos09] F. Voss. Scaling limits for shortest path lengths along the edges of stationary tessellations. preprint, 2009.
- [Win02] M. Winkel. Limit clusters in the inviscid Burgers turbulence with certain random initial velocities. *J. Stat. Phys.*, 107 :893–917, 2002.
- [Woy99] W. A. Woyczinski. *Burgers KPZ-Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Zit02] R. Zitikis. Analysis of indices of economic inequality from a mathematical point of view. (invited plenary lecture at the 11th Indonesian mathematics conference, State University of Malang, Indonesia). *Matematika*, 8 :772–782, 2002.
- [ZuyTch01] K. Tchoumatchenko and S. Zuyev. Aggregate and fractal tessellations. *Prob. Th. Rel. Fields*, 121(2) :198–218, 2001.