École doctorale SPI MADIS

Doctorat en Mathématiques pures et appliquées

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'Université de Lille

Spécialité doctorale "Mathématiques et leurs interactions"

présentée et soutenue publiquement par

Amine Laaroussi

le 15 décembre 2021

Connexions paraboliques et champ des racines

Jury

M. Ajneet Dhillon,	Associate professor, University of Western Ontario	Rapporteur
M. Dimitri Markouchevitch,	Professeur, Université de Lille	Président du jury
M. Matthieu Romagny,	Professeur, Université de Rennes	Rapporteur
M. Michel Emsalem,	Professeur émérite, Université de Lille	Examinateur
M. Niels Borne,	Maître de conférences HDR, Université de Lille	Directeur de thèse
Mme. Viktoria Heu,	Maître de conférences HDR, Université de Strasbourg	Examinateur

Université de Lille
Campus Cité scientifique
59650 Villeneuve-d'Ascq, France

Résumé

Le cadre du sujet est la géométrie algébrique, plus précisément on s'intéresse au comportement à l'infini des fibrés vectoriels sur les variétés algébriques munies d'un diviseur à croisements normaux simples. Ceux-ci peuvent être équipés d'une connexion à pôles logarithmiques, d'une part, ou bien d'une structure parabolique, d'autre part. Lorsque ces deux données sont compatibles, on parle de connexion parabolique. Les connexions paraboliques sont apparues pour la première fois sur les courbes dans les travaux de C.Simpson sur la théorie de Hodge non abélienne, et leurs espaces de modules font toujours l'objet d'intenses recherches.

Dans cette thèse, on montre dans un premier temps que les connexions paraboliques peuvent être interprétées, via une correspondance de type Fourier, comme des connexions logarithmiques sur certaines orbifoldes, les champs des racines du diviseur considéré. Cette étape requiert à la fois une définition globale des différentielles logarithmiques due à M.Olsson, et aussi la description des connexions comme sections de l'extension d'Atiyah.

Dans un deuxième temps, on définit les connexions fortement paraboliques comme étant celles dont les poids de la structure parabolique sont les morphismes induits par les résidus de la connexion sur les quotients de la filtration définissant la structure parabolique.

On prouve ensuite que la connexion sous-jacente à une connexion fortement parabolique est à résidus semi-simples et qu'elle permet de reconstruire la structure parabolique. Ce résultat est inspiré de travaux de Iyer-Simpson.

On montre finalement que la condition de forte parabolicité d'une connexion parabolique correspond à l'holomorphie de la connexion logarithmique champêtre correspondante. Ce théorème généralise en dimension quelconque un résultat de Biswas-Majumder-Wong et Loray-Saito-Simpson sur les courbes. On traduit finalement le théorème de reconstruction dans le cadre des champs algébriques.

Abstract

The framework of the subject is algebraic geometry, more precisely we are interested in the behaviour at infinity of vector bundles on algebraic varieties endowed with a simple normal crossings divisor. These can be equipped with a logarithmic connection, on the one hand, or with a parabolic structure, on the other hand. If these two data are compatible, the connection is called parabolic. Parabolic connections first appeared on curves in the work of C.Simpson on nonabelian Hodge theory, and their moduli spaces are still object of active research.

In this thesis, we first show that parabolic connections can be interpreted, via a Fourier-like correspondence, as logarithmic connections on certain orbifolds, the stacks of roots of the divisor. This step requires both a global definition of logarithmic differentials due to M.Olsson, and also the description of the connections as sections of the Atiyah extension.

In a second step, we define strongly parabolic connections as those whose weights of the parabolic structure are the morphisms induced by the residues of the connection on the quotients of the filtration defining the parabolic structure.

We then prove that the connection underlying a strongly parabolic connection has semi-simple residues and that it allows the reconstruction of the parabolic structure. This result is inspired by the work of Iyer-Simpson.

We finally show that the strong parabolicity condition of a parabolic connection corresponds to the holomorphy of the corresponding logarithmic stacky connection. This theorem generalises in any dimension a result of Biswas-Majumder-Wong and Loray-Saito-Simpson on curves. We finally translate the reconstruction theorem into the framework of algebraic stacks.

Remerciements

Je remercie avant tout mon directeur de thèse, Niels Borne, qui m'a dirigé lors de mon mémoire de master, et qui a bien voulu m'encadrer lors de ces trois ans de thèse. J'apprécie énormément les innombrables heures que vous avez consacré à m'expliquer les différentes problématiques, que ce soit au tableau ou à distance quand la situation ne le permettait pas, votre grande disponibilité et votre patience.

Je remercie Ajneet Dhillon, Dimitri Markouchevitch, Michel Emsalem, Matthieu Romagny et Viktoria Heu pour avoir accepté de participer en tant que rapporteurs et membres du jury à l'évaluation de cette thèse.

Je voudrais enfin remercier ma famille pour m'avoir soutenu et m'avoir donné le courage d'entamer ces trois ans de recherches.

We don't see things as they are, but as we are.
Immanuel Kant

Table des matières

Introduction

0.1 Fibrés paraboliques et fibrés champêtres

Soit X une variété algébrique munie d'un diviseur D. On appelle fibré parabolique sur (X, D) un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ muni d'une filtration

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_{\frac{1}{r}} \supset \cdots \supset \mathcal{E}_{\frac{r-1}{r}} \supset \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(-D)$$

où on a fixé un entier $r \geq 1$. Les sauts de la filtration sont appelés les poids du fibré parabolique. Les fibrés paraboliques trouvent leur origine dans les travaux de Mehta et Seshadri qui les ont introduits initialement sur les surfaces de Riemann. Leur but était de généraliser aux surfaces de Riemann épointées le théorème de Narasimhan-Seshadri qui affirme que les fibrés stables de degré 0 sur X sont ceux qui proviennent exactement des représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental (topologique) $\pi_1(X, x)$.

Plus récemment, les fibrés paraboliques ont été interprétés, via une correspondance de type Fourier, comme des fibrés vectoriels sur des champs algébriques : d'abord dans le cas d'un quotient global [Bis97], puis dans le cas général sur certaines orbifoldes, les champs des racines ([Bor07],[Bor09],[BV12]).

0.2 Connexions paraboliques

Le but de cette thèse est de montrer comment on peut comprendre les fibrés vectoriels munis de connexions à travers cette correspondance. Une connexion parabolique sur un schéma X le long d'un diviseur D est un fibré vectoriel sur X muni d'une structure parabolique à la Mehta-Seshadri, et d'une connexion logarithmique, compatibles entre elles. Cette définition est motivée par la correspondance de Simpson sur les courbes non-compactes [Sim90], où la notion de connexion parabolique a été introduite tout comme sa consœur : les fibrés de Higgs paraboliques. La définition a d'abord été donnée sur des courbes, sous la forme d'une filtration de faisceaux, avant d'être généralisée plus tard en dimension supérieure [Yok93].

En dimension 1, Biswas-Majumder-Wong [BMW12] et Loray-Saito-Simpson [LSS13] ont établi une correspondance entre les connexions holomorphes sur le champ des racines et les connexions paraboliques dont les résidus sont donnés par les poids de la structure parabolique. Ce sont ces deux articles qui sont à l'origine de notre sujet.

0.3 Objectif et résultats de cette thèse

Notre principal objectif est de généraliser cette correspondance en dimension supérieure. Soit X un schéma lisse sur un corps k muni d'un diviseur lisse D et r un entier naturel inversible dans k.

Au triplet (X, D, r), on peut associer un morphisme $\pi : \mathfrak{X}_r \longrightarrow X$ du champ des racines $\mathfrak{X}_r$ vers l'espace des modules X, qui est par définition le morphisme minimal tel que le diviseur $\pi^*(\frac{1}{r}D)$ soit entier.

Par ailleurs, avec le même triplet (X, D, r), on dispose de la notion de connexion parabolique, à savoir une famille décroissante $(\mathcal{E}_\alpha, \nabla_\alpha)_{\alpha\in\frac{1}{r}\mathbb{Z}}$ de connexions logarithmiques vérifiant $\mathcal{E}_{\alpha+1} \simeq \mathcal{E}_\alpha(-D)$. Une connexion parabolique est dite fortement parabolique, si les poids (les sauts de la filtration) sont les résidus des connexions $(\mathcal{E}_\alpha, \nabla_\alpha)_{\alpha\in\frac{1}{r}\mathbb{Z}}$. Notre principal théorème est

Théorème A. (Théorème 3.3.3) Une connexion logarithmique $(\mathcal{F}, \nabla)$ sur $\mathfrak{X}_r$ est holomorphe si et seulement si la connexion parabolique correspondante $(\mathcal{E}_\alpha, \nabla_\alpha)_{\alpha\in\frac{1}{r}\mathbb{Z}}$ est fortement parabolique.

Du théorème A et de la correspondance entre les fibrés champêtres et les fibrés paraboliques, on déduit l'équivalence suivante :

Théorème B. (Théorème 3.3.15) Il existe une équivalence de catégories naturelle entre les connexions holomorphes sur $\mathfrak{X}_r$ et les connexions fortement paraboliques à poids dans $\frac{1}{r}\mathbb{Z}$.

Comme application du théorème B, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire C. (Corollaire 3.3.16) Si $\pi : \mathfrak{X}_r \longrightarrow X$ désigne le morphisme du champ des racines $\mathfrak{X}_r$ vers l'espace des modules, et si $(\mathcal{F}, \nabla)$ et $(\mathcal{F}', \nabla')$ sont deux connexions holomorphes sur $\mathfrak{X}_r$, alors tout isomorphisme $(\pi_*\mathcal{F}, \pi_*\nabla) \simeq (\pi_*\mathcal{F}', \pi_*\nabla')$ se relève de manière unique en un isomorphisme $(\mathcal{F}, \nabla) \simeq (\mathcal{F}', \nabla')$.

Il est facile de voir que ce résultat est faux sans les connexions, ou pour les connexions logarithmiques. Il est inspirée par les travaux d'Iyer et Simpson [IS07] qui ont montré comment reconstruire la structure parabolique à partir de la connexion.

0.4 Structure des chapitres

Dans cette thèse, on a été amené à considérer plusieurs points de vue sur les connexions logarithmiques. Cette souplesse entre différentes définitions équivalentes s'est avérée très utile pour simplifier les preuves. Par exemple l'utilisation de l'extension d'Atiyah pour décrire les connexions permet de rester dans le monde $\mathcal{O}$-linéaire. Ou encore, l'utilisation du point de vue global d'Olsson pour définir les différentielles logarithmiques est essentiel lorsqu'il s'agit de définir rigoureusement cette notion sur un champ de Deligne-Mumford.

Les chapitres sont structurés comme suit :

0.4.1 Chapitre 1

Ce chapitre est un rappel sur les champs, et plus particulièrement sur le champ des racines. On rappelle la définition d'un diviseur à croisements normaux (simples) et on montre comment une telle hypothèse implique la lissité du champ des racines $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$. On donne ensuite différentes définitions de faisceau quasi-cohérent sur un champ de Deligne-Mumford, pour lesquels on peut utiliser le petit site étale. On explicite ensuite le résultat sur lequel est basée cette thèse, à savoir la correspondance entre les fibrés sur le champ des racines $\mathfrak{X} = \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ et les fibrés paraboliques. On se concentre finalement sur l'exemple le plus simple : la droite projective munie de deux points champêtres. Dans cette situation, on détermine la torsion du groupe de Picard $\mathrm{Tor}(\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}))$, et on calcule les fibrés paraboliques correspondants.

0.4.2 Chapitre 2

Ce chapitre est consacré aux connexions. On commence par un rappel sur les faisceaux des formes différentielles logarithmiques avec deux définitions, à savoir celle donnée par Deligne et par Esnault-Viehweg, caractérisée par sa forme locale et concrète, et celle d'Olsson, plus adaptée aux champs. Ensuite, on définit brièvement une notion ad hoc de log schéma, dont l'importance vient du fait que le morphisme $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ est log-étale. La section suivante concerne la notion usuelle de connexion comme morphisme k-linéaire vérifiant la règle de Leibniz. En plus du rappel de la définition sous sa forme holomorphe et logarithmique, cette section sert aussi à rappeler le caractère fonctoriel des connexions, à savoir le comportement des connexions vis-à-vis de l'image directe et de l'image réciproque, et de l'adjonction qui les relie, et permet la généralisation de la définition aux champs. La formule de décalage des résidus d'Esnault-Viehweg est ensuite mise en évidence dans la section suivante. Puis on reprend l'exemple de la fin du chapitre 2 de la droite projective munie de deux points orbifold en montrant comment on peut munir la torsion du groupe de Picard de connexions holomorphes. On termine le chapitre en rappelant ce qu'est l'extension d'Atiyah logarithmique pour les champs de Deligne-Mumford, et comment les sections de la suite exacte d'Atiyah logarithmique correspondent aux connexions logarithmiques, ce qui servira de prélude à la démonstration du théorème principal de cette thèse, c'est à dire le théorème B.

0.4.3 Chapitre 3

Dans ce dernier chapitre, on se focalise sur notre sujet principal, les connexions paraboliques. On commence en premier lieu par définir la notion de connexion parabolique, puis par établir la correspondance entre connexions paraboliques et connexions logarithmiques sur le champ des racines à partir de l'extension d'Atiyah, qui donne lieu à une première version de la correspondance. On définit ensuite la notion de connexion fortement parabolique en donnant un sens au morphisme induit par le résidu sur un quotient de la filtration. La suite concerne la reconstruction des fibrés paraboliques $(\mathcal{E}_\cdot, \nabla_\cdot)$ à partir de la donnée du fibré vectoriel $(\mathcal{E}_0, \nabla_0)$. Le chapitre se termine avec les théorèmes principaux de cette thèse, à savoir les théorèmes A et B, et leur corollaire C, et on clôture cette thèse par une brève discussion du cas général des λ-connexions.

0.5 Lien avec les travaux d'autres auteurs

L'article [IS07] a été une source d'inspiration dans la rédaction de la partie sur la reconstruction des fibrés paraboliques 3.2. Le choix du terme « connexion fortement parabolique » est motivé par l'usage en vigueur pour les fibrés de Higgs paraboliques, en particulier dans l'article [BMW13]. Toutefois, il apparaît important de préciser dans cette thèse que la définition donnée pour les fibrés de Higgs fortement paraboliques dans [BMW13] nous apparaît légèrement incorrecte en dimension plus grande que 1.

0.6 Conventions

Dans cette thèse, sauf mention contraire, les notations suivantes seront fixées.

Corps de base

k désignera un corps, et on notera pas $S = \mathrm{Spec}(k)$ le schéma de base. Dans quelques situations on aura besoin de supposer le corps k parfait.

Champs algébriques

Les champs seront sur la catégorie des S-schémas $\mathrm{Sch}\,/S$ munie de la topologie étale (grand site étale de S).

La plupart de nos champs $\mathfrak{X}$ seront des champs de Deligne-Mumford, et les faisceaux quasi-cohérents sur $\mathfrak{X}$ seront considérés sur le petit site étale de $\mathfrak{X}$.

Champs des racines

X sera un k-schéma lisse, I un ensemble fini, $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille finie de diviseurs de Cartier effectifs intègres deux à deux distincts, telle que la réunion $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, et $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille finie d'entiers naturels inversibles dans k.

On notera par $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ le champ des racines obtenu à partir du triplé $(X, \mathbf{D}, \mathbf{r})$. On le notera aussi par $\mathfrak{X}_r$, ou encore seulement par $\mathfrak{X}$. Le morphisme $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ désignera le morphisme naturel de $\mathfrak{X}$ vers l'espace des modules. Les racines r_i-èmes de D_i dans $\mathfrak{X}$ seront notées par $\mathfrak{D}_i$.

On utilisera l'écriture en lettres grasses pour $\mathbf{D}$ et $\mathbf{r}$ quand on sera dans la situation à plusieurs indices, et l'écriture classique dans le cas $\#I = 1$.

Chapitre 1

Généralités sur les fibrés sur les champs algébriques

1.1 Champs algébriques

Les champs algébriques (appelés aussi champs d'Artin) sont une généralisation des schémas et des variétés algébriques. Ils jouent un rôle important dans la construction des espaces des modules et la classification des objets géométriques. D'une manière générale, un champ est une catégorie fibrée en groupoïde, c'est à dire une catégorie dont les morphismes dans les fibres sont des isomorphismes, et qui vérifie les conditions de recollement entre objets et entre morphismes. C'est un champ algébrique s'il admet en plus un atlas lisse et si sa diagonale est représentable. Quand l'atlas est étale, on parle d'un champ de Deligne-Mumford. Les références principales utilisés pour les champs sont : [Ols16], [LM00] et [Sta].

On appelle site, une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une topologie de Grothendieck. C'est à dire, pour tout objet X, la catégorie $\mathcal{C}$ est munie d'une collection $\mathrm{Cov}(X)$, constituée de morphismes vers X, dits aussi recouvrements de X. Cette collection doit vérifier les 3 axiomes d'une topologie, à savoir : (i) identité : Tout isomorphisme vers X est un recouvrement de X, (ii) produit fibré : Le changement de base d'un recouvrement de X par un morphisme $Y \longrightarrow X$ est un recouvrement de Y, (iii) composition : Un recouvrement d'un recouvrement de X est encore un recouvrement de X.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on appelle catégorie fibrée en groupoïde sur $\mathcal{C}$, une catégorie $\mathfrak{X}$ munie d'un foncteur $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{C}$, en faisant une catégorie fibrée, et dont les morphismes dans les fibres $\mathfrak{X}(U)$, où U est un objet de $\mathcal{C}$, sont des isomorphismes. Ici, on désigne par $\mathfrak{X}(U)$ la catégorie qui a pour objets les objets u de $\mathfrak{X}$ vérifiant $F(u) = U$, et pour morphismes, les morphismes $h : u' \longrightarrow u$ dans $\mathfrak{X}$, vérifiant $F(h) = \mathrm{id}_U$. Moralement, $\mathfrak{X}$ est fibrée sur $\mathcal{C}$ veut dire qu'on dispose d'un foncteur image réciproque $v^* : \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U')$, pour tout morphisme $v : U' \longrightarrow U$ de $\mathcal{C}$.

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{C}$ un site. Notons par $\mathrm{pr}_{12}, \mathrm{pr}_{13}, \mathrm{pr}_{23} : X \times X \times X \longrightarrow X \times X$, et $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : X \times X \longrightarrow X$ les projections. Une catégorie $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{C}$ fibrée en groupoïde sur $\mathcal{C}$ est dite un **champ** si :

1. (recollement des morphismes)

Pour tout $T \in \mathcal{C}$, et pour tout X et Y dans $\mathfrak{X}(T)$, le pré-faisceau

$$\underline{\mathrm{Isom}}(X,Y) : \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}/T)^{op} & \longrightarrow & \mathscr{E}ns \\ U & \longmapsto & \mathrm{Isom}_{\mathfrak{X}(U)}(X_{|_U}, Y_{|_U}) \end{array} \right. \tag{1.1}$$

est un faisceau pour la topologie sur $\mathcal{C}$.

2. (recollement des objets)

   Pour tout $T \in \mathcal{C}$, et pour tout recouvrement $\{U_i \longrightarrow T\}_{i\in I}$, si $(X_i, \sigma_{ij})_{ij}$ est une collection d'objets et de morphismes telle que

   (a) Pour tout $i \in I$: $X_i \in \mathfrak{X}(U_i)$.

   (b) Pour tout i, j dans I : $X_{i|_{U_i\cap U_j}} \xrightarrow{\sigma_{ij}} X_{j|_{U_i\cap U_j}}$ est un (iso)morphisme dans $\mathfrak{X}(U_i \times_T U_j)$.

   (c) Pour tout $i, j, k \in I$, la condition de cocycle $\sigma_{jk} \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ik}$ est vérifiée :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_{12}^* \ \mathrm{pr}_1^* \ X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{12}^* \ \sigma_{ij}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{pr}_{12}^* \ \mathrm{pr}_2^* \ X_j \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{pr}_{23}^* \ \mathrm{pr}_1^* \ X_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_{23}^* \ \sigma_{jk}"] \\
\mathrm{pr}_{13}^* \ \mathrm{pr}_1^* \ X_i \arrow[r, "\mathrm{pr}_{13}^* \ \sigma_{ik}"'] & \mathrm{pr}_{13}^* \ \mathrm{pr}_2^* \ X_k \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{pr}_{23}^* \ \mathrm{pr}_2^* \ X_k
\end{tikzcd}$$

   Alors il existe un $X \in \mathfrak{X}(T)$ et pour chaque $i \in I$ un isomorphisme $\sigma_i : X_{|_{U_i}} \longrightarrow X_i$, tel que $\sigma_{ij} \circ \sigma_i = \sigma_j$.

Définition 1.1.2. Soit S un schéma. On considère la catégorie $(\mathrm{Sch}/S)_{\text{étale}}$ des schémas au dessus de S munie de la topologie étale. Un champ $\mathfrak{X}/S$ est un **champ algébrique** si :

(i) La diagonale $\Delta : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ est représentable :

   Pour tout schéma T et pour tout morphisme $T \longrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$, le produit fibré $\mathfrak{X} \times_{(\mathfrak{X}\times_S\mathfrak{X})} T$ est un espace algébrique (c'est à dire le quotient d'un schéma par une relation d'équivalence étale).

(ii) $\mathfrak{X}/S$ admet **un atlas** lisse U. C'est à dire qu'il existe un schéma U avec un morphisme surjectif lisse

$$\pi : U \longrightarrow \mathfrak{X}$$

Définition 1.1.3. Un champ $\mathfrak{X}/S$ est un **champ de Deligne-Mumford** s'il vérifie la condition (i) d'un champ algébrique et s'il admet un atlas étale.

Définition 1.1.4. Soit X/S un espace algébrique, G/S un schéma en groupe lisse agissant sur X. On définit **le champ quotient** $[X/G]$ comme étant le champ ayant

pour objets : les triplés $(Y, \mathcal{P}, \pi)$ avec

- Y un S-schéma.
- $\mathcal{P}$ un $G \times_S Y$ - torseur sur le grand site étale de Y.
- $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow X \times_S Y$ un morphisme de faisceaux $G \times_S Y$-équivariants sur $(\mathrm{Sch}/S)_{\text{étale}}$.

pour morphismes : $(T', \mathcal{P}', \pi') \longrightarrow (T, \mathcal{P}, \pi)$, les paires (f, f^b), avec

- $f : T' \longrightarrow T$ est un morphisme de schémas au dessus S.

- $f^b : \mathcal{P}' \longrightarrow f^*\mathcal{P}$ est un isomorphisme de $G_{T'}$-torseurs faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}' \arrow[rr, "f^b"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & f^*\mathcal{P} \arrow[dl, "f^*\pi"] \\ & X \times_S T' & \end{tikzcd}$$

On a une autre description de $[X/G]$ utilisant la notion de groupoïde. Rappelons ce qu'est un groupoïde et comment est défini $[X/G]$.

Définition 1.1.5. (Tag 0231) Un **schéma en groupoïde**, est un 5-uplet (U, R, s, t, c) avec U et R des S-schémas, $s, t : R \longrightarrow U$ et $c : R \times_{s,U,t} R \longrightarrow R$ des morphismes de S-schémas, tel que pour tout S-schéma T, la catégorie $\mathcal{C}_T$ définie par $(U(T), R(T), s, t, c)$ est une catégorie en groupoïde. Explicitement, la catégorie $\mathcal{C}_T$ a

pour objets : Les objets de $U(T)$.

pour morphismes : un morphisme $s \circ f \longrightarrow t \circ f$, pour tout f objet de $R(T)$.

Définition 1.1.6. (Tag 044Q) On définit $[U/R]$ comme étant le champ associé au pseudo-foncteur

$$\begin{array}{ccc} (Sch/S)^{op}_{\text{étale}} & \longrightarrow & \text{Groupoïde} \\ T & \longmapsto & (U(T), R(T), s, t, c) \end{array}$$

Dans le cas où G est un schéma en groupe avec une action $a : G \times_S X \longrightarrow X$ sur X, on note par $[X/G]$ le champ associé au groupoïde $(X, G \times_S X, a, \mathrm{pr}_2, c)$.

Proposition 1.1.7. Si G est un schéma en groupe lisse au dessus S avec une action sur X, alors $[X/G]$ est un champ algébrique.

Preuve. Voir ([Ols16], Exemple 8.1.12). □

Remarque 1.1.8. Une carte de $[X/G]$ est donnée, pour tout schéma T, par

$$q_T : \left| \begin{array}{ccc} X(T) & \longrightarrow & [X/G]\,(T) \\ f & \longmapsto & (G_T, \rho_f) \end{array} \right.$$

avec ρ_f le morphisme induit par le morphisme $f : T \longrightarrow X$ et l'action de G sur X.

Définition 1.1.9. ([Ols16]) Si G/S est un schéma en groupe lisse, avec une action triviale de G sur S, le champ quotient $BG := [S/G]$ est appelé le **champ des G-torseurs**.

Proposition 1.1.10.

1. Pour un schéma X/S et pour $G = \mathbb{G}_m$, on a une équivalence de catégories entre les faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur X et les morphismes $X \longrightarrow B\mathbb{G}_m$.
2. Si $G = \mu_r$, alors la catégorie $B\mu_r(X)$ s'identifie avec la catégorie qui a pour objets les couples $(\mathcal{M}, \sigma)$, avec $\mathcal{M}$ un faisceau inversible sur X et $\sigma : \mathcal{M}^{\otimes r} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ un isomorphisme.

Preuve. On donne seulement le principe de la preuve.

1. Notons que les morphismes de la catégorie des faisceaux inversibles sur X considérés ici, sont les isomorphismes entre deux faisceaux inversibles. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Pour tout schéma T au dessus de S, on définit le morphisme $X(T) \longrightarrow B\mathbb{G}_m(T)$, comme étant le morphisme qui envoie $f \in X(T)$ vers $\underline{\mathrm{Isom}}_T(f^*\mathcal{L}, \mathcal{O}_T)$. Dans l'autre direction, on associe à un $\mathbb{G}_m$-torseur $P \to X$ le faisceau inversible obtenu par descente fidèlement plate à partir de $\mathcal{O}_P$.
2. L'objet trivial correspond au couple $(\mathcal{O}_S, m)$, où m désigne la multiplication, dont le groupe d'automorphismes est μ_r. A un couple $(\mathcal{M}, \sigma)$, on peut donc associer le μ_r-torseur $\underline{\mathrm{Isom}}_X((\mathcal{M}, \sigma), (\mathcal{O}_X, m))$. Pour l'autre direction, on procède comme au 1. en utilisant la descente fidèlement plate le long du torseur pour descendre l'objet trivial.

□

Remarque 1.1.11. Ces équivalences sont bien connues, et sont traitées de manière plus générale dans ([Ols16], corollaire 12.1.5, page 245) en les mettant en lien avec la notion de gerbe qu'on va définir dans la section suivante.

On aura besoin dans la suite, de la proposition 1.1.13, qui montre que les G-torseurs sont des morphismes vers les champs quotients. Rappelons tout d'abord la définition d'un G-torseur au dessus d'un champ $\mathfrak{X}$.

Définition 1.1.12. Soit $\mathcal{T}$ un espace algébrique et $\mathfrak{X}$ un champ au dessus de S, et G/S un faisceau en groupe agissant sur $\mathcal{T}$. Un morphisme $\mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est un **G-torseur** si

(i) Le morphisme canonique $G \times_S \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{T}$, donné par l'action de G sur $\mathcal{T}$ et par la 2ème projection pr_2, est un isomorphisme.

(ii) Le morphisme $\mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est un épimorphisme, dans le sens que tout objet de $\mathfrak{X}$ est localement isomorphe à l'image, par ce morphisme, d'un objet de $\mathcal{T}$.

Proposition 1.1.13. Si $\mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est un G-torseur, alors $\mathfrak{X} \simeq [\mathcal{T}/G]$.

Preuve. En effet, dans la définition d'un G-torseur $\mathcal{T}$ on a un isomorphisme $G \times \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{T}$. Par définition aussi, $\mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est un épimorphisme, ce qui signifie qu'il a des sections localement. Ceci implique, d'après ([LM00],proposition 3.8, page 19), que $\mathfrak{X} \simeq [G \times \mathcal{T} \rightrightarrows \mathcal{T}]$. Ce qui nous permet de conclure. □

1.2 Gerbes

Une importante classe de champs est celle donnée par les gerbes. Elles peuvent être vues comme un analogue 2-catégorique des torseurs, où la fibre est ici le champ des G-torseurs BG, pour un schéma en groupe lisse G. Ils trouvent principalement leur utilité dans l'interprétation du deuxième groupe de cohomologie à valeurs dans G comme un ensemble de classes d'isomorphisme de G-gerbes. Les définitions utilisées dans cette section sont celles données par ([Ols16], §12.2, page 246).

Définition 1.2.1. Soit X un S-schéma. Une **gerbe** sur X est un champ $\mathfrak{X}/X$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) Localement non vide : Il existe un recouvrement $\{X_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$, tel que $\mathfrak{X}(X_i)$ est non vide pour tout $i \in I$.

(ii) Localement connexe : Pour tout schéma U sur X, et pour tout $\alpha, \beta \in \mathfrak{X}(U)$, il existe un recouvrement $\{\phi_i : U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$ de U tel que $\phi_i^*\alpha \simeq \phi_i^*\beta$ pour tout $i \in I$.

Définition 1.2.2. Soit G un schéma en groupe et X un S-schéma. Une **G-gerbe** sur X est une gerbe $\mathfrak{X}/X$ munie pour tout schéma U sur X et pour tout $\alpha \in \mathfrak{X}(U)$, d'un isomorphisme

$$\eta_\alpha : \underline{\mathrm{Aut}}_U(\alpha) \xrightarrow{\sim} G_{|U}$$

tel que pour tout isomorphisme $\sigma : \alpha \longrightarrow \beta$ dans $\mathfrak{X}(U)$, on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & G_{|U} & \\ \underline{\mathrm{Aut}}_U(\alpha) \arrow[ur, "\eta_\alpha"] \arrow[rr, "c_\sigma"'] & & \underline{\mathrm{Aut}}_U(\beta) \arrow[ul, "\eta_\beta"'] \end{tikzcd}$$

où c_σ désigne la conjugaison par σ.

La notation $\underline{\mathrm{Aut}}$ est celle utilisé pour $\underline{\mathrm{Isom}}$ dans (1.1), dans le cas $X = Y$.

Exemple 1.2.3.

1. Pour G un groupe abélien, le champ des G-torseurs BG est une G-gerbe.

   En effet, ce champ est en fait globalement non vide, puisque G est lui-même un G-torseur. Et ce champ est localement connexe, car deux G-torseurs $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont localement triviaux, et donc isomorphes localement.

   Montrons que c'est une G-gerbe. Pour cela, il faut donner, pour tout schéma T et tout objet $(\mathcal{P}, \pi)$ de $BG(T)$, un isomorphisme

   $$\underline{\mathrm{Aut}}_{BG(T)}(\mathcal{P}_{|T}, \pi_{|T}) \xrightarrow{\sim} G(T)$$

   Pour tout g dans $G(T)$, on a un morphisme $\mathcal{P}_{|T} \longrightarrow \mathcal{P}_{|T}$ qui est donné par l'action de G sur $\mathcal{P}$. Comme G est abélien, c'est un morphisme de G_T-torseurs, et c'est donc un isomorphisme. Pour montrer que $G(T)$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Aut}}_{BG(T)}(\mathcal{P}_{|T}, \pi_{|T})$, on raisonne localement : puisque $\mathcal{P}_{|T}$ est localement trivial, se donner un automorphisme revient à se donner localement un automorphisme $G_T \xrightarrow{\sim} G_T$ du torseur trivial. Mais se donner un tel automorphisme est équivalent à se donner une section de G_T.

2. Un autre exemple de μ_r-gerbe est donné par le champ $\sqrt[r]{\mathcal{L}/S}$ qu'on définira après (voir 1.3.2).

1.3 Champ des racines

Pour un schéma X muni d'un diviseur de Cartier effectif $D \subset X$, une question naturelle est de se demander si on peut trouver, pour un entier positif r donné, une racine r-ème du diviseur D, c'est à dire un champ $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ et un diviseur $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $r\mathfrak{D} = \pi^* D$. Ceci est possible, et la construction d'un tel champ est donnée par le produit fibré $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \times_{[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]} X$. Ce champ classifie les racines r-ème de $(\mathcal{L}, s)$, à savoir les diviseurs de Cartier généralisés $(\mathcal{M}, t)$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}^{\otimes r}$ envoyant t vers s^r. Dans le cas où r est inversible, c'est un champ de Deligne-Mumford.

1.3.1 Définition

On fixe un corps de base k, et on note par $S = \operatorname{Spec} k$ le schéma de base.

Notation 1.3.1. On note Div_S le champ des diviseurs de Cartier généralisés qui a

pour objets : les paires $(T, (\mathcal{L}, s))$ avec

- T un S-schéma.
- $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur T.
- s une section globale de $\mathcal{L}$.

pour morphismes : $(T', \mathcal{L}', s') \longrightarrow (T, \mathcal{L}, s)$, les paires (g, ρ), avec

- $g : T' \longrightarrow T$ un morphisme de S-schémas.
- $\rho : g^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ un isomorphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{T'} \arrow[r, "s'"] & \mathcal{L}' \\
g^*\mathcal{O}_T \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "g^*s"] & g^*\mathcal{L} \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.3.2. ([Ols16], Proposition 10.3.7) Le champ Div_S est isomorphe au champ quotient $\left[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\right]$. En particulier, Div_S est un champ algébrique.

Preuve. Div_S est un champ par la descente sur les faisceaux quasi-cohérents ([Ols16], §4.3). On considère le pré-champ $\left\{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\right\}$ donné par les objets (T, f), avec T un schéma et f une section globale de $\mathcal{O}_T$, et pour morphismes $(T', f') \longrightarrow (T, f)$ les paires (g, u), avec $g : T' \longrightarrow T$ et u une unité et section globale de $\mathcal{O}_{T'}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{T'} \arrow[rr, "f'"] & & \mathcal{O}_{T'} \\
g^*\mathcal{O}_T \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "g^*f"] & g^*\mathcal{O}_T \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_{T'} \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

On a un morphisme de catégories fibrées $\{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\} \longrightarrow \mathrm{Div}_S$ qui envoie (T, f) vers $(T, \mathcal{O}_T, f)$ et un morphisme $(g, u) : (T', f') \longrightarrow (T, f)$ vers le morphisme $(g, u \circ g^{\#})$, $g^{\#}$ étant l'isomorphisme $g^*\mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{O}_{T'}$ induit par le morphisme $T' \longrightarrow T$. Le foncteur est pleinement fidèle, puisque pour un morphisme $(g, \phi : g^*\mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{T'})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{T'} \arrow[r, "f'"] & \mathcal{O}_{T'} \\
g^*\mathcal{O}_T \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "g^*f"] & g^*\mathcal{O}_T \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

commute, il existe un unique u tel que $u \circ g^{\#} = \phi$. Le foncteur est localement surjectif car pour $(T, \mathcal{L}, s) \in \mathrm{Div}_S$, il existe un recouvrement $\{T_i \longrightarrow T\}$ tel que $\mathcal{L}_{|T_i} \simeq \mathcal{O}_{T_i}$, et le foncteur $\{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\} \longrightarrow \mathrm{Div}_S$ envoie $(T_i, s_{|T_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{O}_{T_i})$ vers $(T_i, \mathcal{L}_{T_i}, s_{|T_i})$. Ce foncteur induit finalement, en passant au champ associé, un isomorphisme

$$\left[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\right] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}_S$$

car $\{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\} \longrightarrow \mathrm{Div}_S$ est un épimorphisme pleinement fidèle, et donc Div_S s'identifie au champ associé à $\{\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m\}$. Voir par exemple ([Sta],Tag 02ZM). □

De même on pourrait considérer, pour un ensemble fini I, le champ Div_S^I qui classifie les familles de diviseurs de Cartier généralisés $((\mathcal{L})_{i\in I}, (s_i)_{i\in I})$. Tout comme pour le cas $\#I = 1$ ci-dessus (voir 1.3.2), le champ Div_S^I est isomorphe au champ quotient $[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]$.

Définition 1.3.3. Soit X un schéma sur k, $(\mathcal{L}, s)$ un diviseur de Cartier généralisé, et $r \geq 1$ un entier positif. On appelle **champ des racines** r-èmes de X le long de $(\mathcal{L}, s)$, le champ $\sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X}$ qui a

pour objets : les triplets $(T \xrightarrow{f} X, (\mathcal{M}, \lambda), \sigma)$, avec

- f un morphisme de S-schémas.
- $(\mathcal{M}, \lambda)$ un diviseur de Cartier généralisé sur T.
- $\sigma : (f^*\mathcal{L}, f^*s) \longrightarrow (\mathcal{M}^{\otimes r}, \lambda^r)$ un isomorphisme de diviseurs de Cartier généralisés sur T.

pour morphismes : $(T' \xrightarrow{f'} X, (\mathcal{M}', \lambda'), \sigma') \longrightarrow (T \xrightarrow{f} X, (\mathcal{M}, \lambda), \sigma)$, les paires (h, h^b), avec

- $h : T' \longrightarrow T$ un morphisme de X-schémas.
- $h^b : (h^*\mathcal{M}, h^*\lambda) \longrightarrow (\mathcal{M}', \lambda')$ un isomorphisme de diviseurs de Cartier généralisés sur T' faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} h^*\mathcal{M}^{\otimes r} \arrow[r, "(h^b)^{\otimes r}"] & \mathcal{M}'^{\otimes r} \\ h^*f^*\mathcal{L} \arrow[u, "h^*\sigma"] \arrow[r, "\sim"] & f'^*\mathcal{L} \arrow[u, "\sigma'"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 1.3.4. ([Cad07] et [AGV08]) $\sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X} \simeq X \times_{\mathrm{Div}_S} \mathrm{Div}_S$

Preuve. On a un diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd} \sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}_S \arrow[d, "\otimes r"] \\ X \arrow[r, "(\mathcal{L},s)"] & \mathrm{Div}_S \end{tikzcd}$$

puisque pour tout objet $(U \xrightarrow{f} X, (\mathcal{M}, \lambda), \sigma)$ de $\sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X}$, on a un isomorphisme $\sigma : (f^*\mathcal{L}, f^*s) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}^{\otimes r}, \lambda^r)$ donné par la définition de σ.

La description explicite d'un produit fibré de catégories montre que ce diagramme est en fait cartésien. Le produit cartésien est donné pour tout schéma U, par un couple d'objets $(f : U \longrightarrow X, (\mathcal{M}, \lambda))$, l'un dans X et l'autre dans Div_S, plus un isomorphisme σ entre leurs images. □

Corollaire 1.3.5. 1. Le champ des racines $\sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X}$ est un champ algébrique.

2. La formation du champ des racines commute au changement de base.

Remarque 1.3.6. Si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, alors $\sqrt[r]{(\mathcal{O}_X, s)/X}$ est isomorphe au champ quotient $[\mathrm{Spec}(\frac{\mathcal{O}_X[T]}{T^r - s})/\mu_r]$.

En effet, le schéma en groupe μ_r agit sur $Z = \mathrm{Spec}(\frac{\mathcal{O}_X[T]}{T^r - s})$ par l'action usuelle donnée par la $\frac{\mathbb{Z}}{r}$-graduation naturelle de $\mathcal{O}_Z$. Montrons que le morphisme $Z \longrightarrow \sqrt[r]{(\mathcal{O}_X, s)/X}$ donné par le couple $(\mathcal{O}_Z, T)$ est un μ_r-torseur. Ou en d'autres termes, qu'on a un isomorphisme $\mu_r \times_S Z \simeq Z \times_{\sqrt[r]{(\mathcal{O}_X,s)/X}} Z$. Ce qui nous permettra de conclure, d'après la proposition 1.1.13. On a un diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mu_r \times_S Z \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "a"] & Z \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & \sqrt[r]{(\mathcal{O}_X, s)/X}
\end{tikzcd}$$

puisque pour tout X-schéma U, et toute section (u, f) de $\mu_r(U) \times_{S(U)} Z(U)$, on a un isomorphisme $(\mathcal{O}_U, \lambda \circ f) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_U, \lambda \circ f \circ u)$ donné par u. La description explicite d'un produit fibré de catégories montre que ce diagramme est en fait cartésien.

La définition 1.3.3 reste valable si on remplace le schéma X par un champ algébrique. On peut en particulier itérer la construction. Ceci conduit, vu que la formation du champ des racines commute au changement de base, à définir le champ des racines associé à une famille de diviseurs de Cartier généralisés :

Définition 1.3.7. Soit X un k-schéma, I un ensemble fini, $(\mathcal{L}, \mathbf{s}) = ((\mathcal{L}_i)_{i \in I}, (s_i)_{i \in I})$ une famille de diviseurs de Cartier généralisés, et $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers positifs. On pose

$$\sqrt[\mathbf{r}]{(\mathcal{L}, \mathbf{s})/X} = \prod_{X, i \in I} \sqrt[r_i]{(\mathcal{L}_i, s_i)/X}$$

Remarque 1.3.8. À une famille de diviseurs de Cartier effectifs $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$, on peut associer une famille de diviseurs de Cartier généralisés $(\mathcal{O}_X(\mathbf{D}), s_{\mathbf{D}})$. On note $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ le champ des racines construit à partir de la famille $\mathbf{D}$.

Définition 1.3.9. Soit $\mathfrak{X}/k$ un champ de Deligne-Mumford, et $\mathfrak{D}$ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$. $\mathfrak{D}$ est dit un **diviseur de Cartier effectif** de $\mathfrak{X}$ s'il l'est sur une carte étale de $\mathfrak{X}$, ou de façon équivalente, le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\mathfrak{D}}$ associé à $\mathfrak{D}$ est inversible.

Lemme 1.3.10. Pour tout i dans I, il existe sur le champ $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ un diviseur de Cartier effectif canonique $\mathfrak{D}_i$ tel que $r_i \mathfrak{D}_i = \pi^* D_i$.

Preuve. Si $(\mathcal{N}_i, t_i)$ est la racine r_i-ème canonique de $(\mathcal{O}(D_i), s_{D_i})$, alors comme π est plat, on a que $t_i^{r_i} = \pi^* s_{D_i}$ est régulière, et donc t_i est aussi une section régulière. $\square$

Proposition 1.3.11. Le morphisme $\pi : \sqrt[r]{D/X} \longrightarrow X$ est un espace de module grossier pour $\sqrt[r]{D/X}$ ([Ols16], Exemple 11.1.4) et le foncteur π_* est exact ([Ols16], Proposition 11.3.4).

1.3.2 Gerbes de Chern

Dans la définition 1.3.3, le champ des racines $\sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X}$ est défini relativement à un diviseur de Cartier généralisé $(\mathcal{L}, s)$. On a aussi la définition d'un champ $\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}$ relativement à un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sans qu'on associe à ce dernier une section s. Dans le premier cas, le lieu champêtre est concentré là où s s'annule, alors que dans le second, il est partout présent : on obtient une gerbe.

Définition 1.3.12. On définit le champ $\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}$ comme étant la catégorie fibrée au dessus de la catégorie des schémas, et qui a

<u>pour objets</u> : les 3-uplets $(f : T \longrightarrow X, \mathcal{M}, \sigma)$, avec

- f un morphisme de S-schémas.
- $\mathcal{M}$ un faisceau inversible sur T.
- $\sigma : f^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\otimes r}$ un isomorphisme de faisceaux inversibles sur T.

<u>pour morphismes</u> : $(f_1 : T_1 \longrightarrow X, \mathcal{M}_1, \sigma_1) \longrightarrow (f_2 : T_2 \longrightarrow X, \mathcal{M}_2, \sigma_2)$, les paires (h, h^b), avec

- $h : T_1 \longrightarrow T_2$ un morphisme de S-schémas au dessus de X.
- $h^b : h^*\mathcal{M}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_1$ un isomorphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
h^*\mathcal{M}_2^{\otimes r} \arrow[r, "(h^b)^{\otimes r}"] & \mathcal{M}_1^{\otimes r} \\
h^*f_2^*\mathcal{L} \arrow[u, "h^*\sigma_2"] \arrow[r, "\sim"] & f_1^*\mathcal{L} \arrow[u, "\sigma_1"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.3.13. Comme ça a été mentionné dans l'exemple 1.2.3, le champ $\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}$ est une μ_r-gerbe au dessus de X. Le champ $\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}$ est localement non vide, car $\mathcal{L}$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$ et $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^{\otimes r})$ est un objet de $\sqrt[r]{\mathcal{O}_X/X}(X)$, et $\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}$ est localement connexe car $\underline{\mathrm{Isom}}((\mathcal{M}_1, \sigma_1), (\mathcal{M}_2, \sigma_2))$ est un torseur sous $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathcal{M}_1, \sigma_1) = \mu_r$, donc admet localement des sections. Finalement, pour un X-schéma T donné, et un objet $(\mathcal{M}, \sigma)$ de $\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}$, on a un isomorphisme entre $\underline{\mathrm{Aut}}_{\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}(T)}(\mathcal{M}, \sigma)$ et $\mu_r(T)$. Un tel morphisme est donné en envoyant tout automorphisme $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ compatible avec σ vers l'automorphisme $\mathcal{O}_T = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{M}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{M}^\vee = \mathcal{O}_T$. La compatibilité avec σ implique qu'il s'agit d'un élément de μ_r.

Dans le cas particulier où $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, la description de $\sqrt[r]{\mathcal{L}/X}$ est encore plus intéressante quand on fait le lien avec le champ des racines $\sqrt[r]{D/X}$ muni de son diviseur canonique $\mathfrak{D}$, comme on peut le constater dans la proposition ci-dessous :

Proposition 1.3.14. Soit X/S un schéma et D un diviseur de Cartier effectif . On considère le champ des racines $\mathfrak{X} = \sqrt[r]{D/X}$ et son diviseur de Cartier effectif canonique $\mathfrak{D}$ (voir 1.3.10). Notons $\mathcal{N}_D = \mathcal{O}_X(D)_{|D}$ et par $\mathcal{N}_{\mathfrak{D}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D})_{|\mathfrak{D}}$ les faisceaux normaux de X et de $\mathfrak{X}$ respectivement. On a alors un isomorphisme $\mathfrak{D} \simeq \sqrt[r]{\mathcal{N}_D/X}$ au dessus de D, envoyant la racine r-ème de $\mathcal{N}_D$ vers $\mathcal{N}_{\mathfrak{D}}$.

Preuve. Il s'agit de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[r, "\mathcal{N}_{\mathfrak{D}}"] \arrow[d] & B\mathbb{G}_m \arrow[d, "\otimes r"] \\
D \arrow[r, "\mathcal{N}_D"] & B\mathbb{G}_m
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Un tel diagramme est cartésien si la face du bas et le diagramme composé de la face du haut et celle de face avant du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D} \arrow[rr, dashed] \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & & B\mathbb{G}_m \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] \\
\mathfrak{X} \arrow[rr] \arrow[dd] & & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \arrow[dd] & \\
 & D \arrow[rr, dashed] \arrow[dl] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & & B\mathbb{G}_m \arrow[dl] \\
X \arrow[rr] & & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] &
\end{tikzcd}
\tag{1.2}
$$

sont cartésiennes, à savoir

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[r] \arrow[d] & B\mathbb{G}_m \arrow[d] \\
X \arrow[r] & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r] \arrow[d] & B\mathbb{G}_m \arrow[d] \\
X \arrow[r] & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]
\end{tikzcd}
$$

Pour celui de gauche, ceci est équivalent à ce que les deux diagrammes

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m] \arrow[d] \\
X \arrow[r] & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[r] \arrow[d] & B\mathbb{G}_m \arrow[d] \\
\mathfrak{X} \arrow[r] & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]
\end{tikzcd}
$$

soient cartésiens. On l'a déjà démontré pour le diagramme à gauche dans la preuve de la proposition 1.3.4. Pour les deux diagrammes à droite ci-dessus, à savoir les faces (1) et (2) de (1.2), la démonstration est similaire pour les deux, et on va donc seulement se contenter de le montrer pour (1). Ce diagramme est commutatif puisque le morphisme $D \to B\mathbb{G}_m \to [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ correspond à $(D, \mathcal{N}_D, 0)$ et le morphisme $D \to X \to [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ correspond à $(D, \mathcal{N}_D, s_{D|_D})$, sachant que la section s_D s'annule le long de D. Pour montrer que le diagramme (1) de (1.2) est cartésien, supposons qu'on a un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, bend left, "\mathcal{L}"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
 & D \arrow[r, "\mathcal{N}_D"] \arrow[d, "i"'] & B\mathbb{G}_m \arrow[d] \\
 & X \arrow[r] & [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]
\end{tikzcd}
$$

avec $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S-schémas et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible qu'on identifie avec le morphisme $Y \longrightarrow B\mathbb{G}_m$ en utilisant l'isomorphisme $\mathbf{Hom}(Y, B\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Pic}(Y)$, voir la proposition 1.1.10. La commutativité du diagramme implique que $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)_{|Y}$ et que la section s_D s'annule en restriction à Y. Mais ceci veut précisément dire que le morphisme $f : Y \longrightarrow X$ se factorise à travers le diviseur D. L'unicité du morphisme est vérifiée parce que $D \longrightarrow X$ est une immersion fermée et donc en particulier un monomorphisme. $\square$

1.3.3 Diviseurs à croisements normaux

Définition 1.3.15. ([Sta],Tag 0CBN) Soit X un schéma localement noethérien, et D un diviseur de Cartier effectif. On dit que D est à **croisements normaux simples**, si pour tout $x \in D$:

(i) L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier.

(ii) Il existe un système régulier de paramètres $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathfrak{m}_x$ et un entier $m \in [1, n]$ tel que D admet $x_1 \cdots x_m$ comme équation en x.

On dit que D est à **croisements normaux**, si localement pour la topologie étale, le diviseur est à croisements normaux simples. C'est à dire pour tout x dans X, il existe un morphisme étale $U \longrightarrow X$ tel que x est dans l'image de ce morphisme et que $D \times_X U$ est un diviseur à croisements normaux simples sur U.

Proposition 1.3.16. Soit k un corps parfait, X un schéma localement algébrique sur k, et D un diviseur de Cartier effectif. On a une équivalence entre :

(i) X est régulier et D est à croisements normaux simples (resp. croisements normaux).

(ii) Il existe localement pour la topologie de Zariski (resp. étale), un morphisme étale $X \longrightarrow \mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[X_1, \ldots, X_n]$ et un entier $m \in [0, n]$ tel que D est l'image réciproque d'un diviseur donné par $X_1, \ldots, X_m$ sur $\mathbb{A}^n_k$.

Preuve. Commençons par montrer que $(ii) \Rightarrow (i)$. On a X localement algébrique sur k, donc par définition le morphisme structurel $X \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$ est localement de type fini. D'après (ii), le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$ se factorise localement à travers le morphisme étale $X \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$, donc le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$ est lisse, et X est alors un schéma régulier d'après ([Sta],Tag 056S). De plus, puisque D est l'image réciproque d'un diviseur à croisements normaux simples le long d'un morphisme lisse, alors D est aussi à croisements normaux simples d'après ([Sta],Tag 0CBP).

Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$. X est lisse sur k, car tout schéma régulier et localement de type fini sur un corps parfait k est lisse. Comme X est localement noethérien (car localement algébrique), il est suffisant de montrer (ii) en considérant les points fermés de X. Si $x \notin D$, comme X est lisse sur k, (ii) est donné par ([Sta],Tag 054L). Supposons que $x \in D$, et soit $x_1, \ldots, x_n$ un système régulier de paramètres comme dans la définition 1.3.15. On a x un point fermé de X, donc l'extension $k(x)/k$ est finie. Puisque de plus le corps k est parfait, alors $k(x)$ est une extension séparable finie de k, ce qui revient au même que de dire que c'est une extension non ramifiée. Donc $\Omega^1_{k(x)/k} = 0$, et de par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow \left(\Omega^1_{X/k}\right)_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \longrightarrow \Omega^1_{k(x)/k} \longrightarrow 0$$

on en déduit que $(dx_1, \ldots, dx_n)$ est une base de $\left(\Omega^1_{X/k}\right)_x$. On conclut finalement par ([BLR90] §2.2 Corollaire 10) que le morphisme $(x_1, \ldots, x_n)$ est étale en x.

□

On montre maintenant comment on généralise la notion de diviseur à croisements normaux à un champ localement noethérien de Deligne-Mumford $\mathfrak{X}$. Un diviseur de Cartier effectif $\mathfrak{D}$ est un sous-champ fermé de $\mathfrak{X}$, qui est un diviseur de Cartier effectif sur une carte étale, ou de manière équivalente, tel que le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\mathfrak{D}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ soit inversible.

Définition 1.3.17. Soit $\mathfrak{D}$ un diviseur de Cartier effectif sur un champ $\mathfrak{X}$ localement noethérien de Deligne-Mumford. On dit que

1. $\mathfrak{D}$ est à croisements normaux, si c'est le cas sur une carte étale,

2. $\mathfrak{D}$ est à croisements normaux simples, s'il est à croisements normaux et si ses composantes irréductibles sont régulières.

Remarque 1.3.18. La définition 1.3.17 coïncide avec la définition donnée pour les schémas ([GM71], Lemme 1.8.4).

1.3.4 Lissité du champ des racines

Soit X un schéma lisse sur un corps parfait k, $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier irréductibles deux à deux distincts de sorte que la réunion $D = \cup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, et $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers naturels inversibles dans k.

Proposition 1.3.19. Le champ des racines $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ est lisse.

Preuve. On raisonne localement autour d'un point $x \in X$. On recouvre X par des ouverts trivialisant les faisceaux $\mathcal{O}_X(D_i)$, c'est à dire pour lesquels on a des équations de chacun des $D_i : x_i = 0$. Puisque D est un diviseur à croisements normaux simples, le système $(x_1, \ldots, x_m)$ se complète en un système de paramètres réguliers $(x_1, \ldots, x_n)$ en x (voir 1.3.15), et ce dernier définit un morphisme étale $X \longrightarrow \mathbb{A}^n$. En attribuant l'entier $r_i = 1$ à x_i pour chaque $i = m+1, \ldots, n$, on a le même champ des racines, à savoir $\mathfrak{X} = \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$. Considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] & {[\mathbb{A}^n/\mu_r]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\mathbb{A}^n/\mathbb{G}_m^n]} \arrow[d] \\
X \arrow[r] & \mathbb{A}^n \arrow[r] & {[\mathbb{A}^n/\mathbb{G}_m^n]}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $Y \longrightarrow \mathbb{A}^n$ est étale puisque $X \longrightarrow \mathbb{A}^n$ l'est, et donc Y/k est lisse. Comme $Y \longrightarrow \mathfrak{X}$ est une carte étale, ceci implique la lissité de $\mathfrak{X}/k$. ☐

On peut trouver une démonstration de cette proposition dans [BLS16].

Remarque 1.3.20. 1. Si $X = \operatorname{Spec} k[s,t]$ le champ $\sqrt[r]{(s)+(t)/X}$ n'est pas lisse, tandis que le champ $\sqrt[r]{(s)/X} \times_X \sqrt[r]{(t)/X}$ l'est.

2. Il découle de la preuve de la proposition 1.3.19 que si $\mathfrak{D}$ est le diviseur de Cartier sur le champ des racines $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ dont les composantes irréductibles sont données par les $(\mathfrak{D}_i)_{i\in I}$, alors $\mathfrak{D}$ est un diviseur à croisements normaux simples.

3. Nos champs des racines ne sont lisses que pour des diviseurs à croisements normaux simples. Pour des diviseurs à croisements normaux généraux, il faut utiliser les champs d'Olsson pour obtenir des champs lisses, voir [BV12].

1.4 Faisceaux quasi-cohérents sur les champs de Deligne-Mumford

Il existe plusieurs définitions d'un faisceau quasi-cohérent sur un champ algébrique, et l'utilisation en pratique varie selon la nécessité de la situation. On en donne quelques-unes, mais on n'utilisera que la première par sa maniabilité, mais aussi parce que c'est plus adaptée au contexte de notre travail.

La situation étant nettement plus compliquée pour les champs d'Artin, on se restreint aux champs de Deligne-Mumford, pour lesquels on peut utiliser le (petit) site étale. Donc, dans ce qui suit, $\mathfrak{X}/S$ désignera un champ de Deligne-Mumford.

1.4.1 Définition

Définition 1.4.1.

1. La première parmi nos définitions est celle qui suit le même modèle que celui d'un faisceau quasi-cohérent sur le petit site étale d'un schéma, à savoir :

   Un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{X}/S$ est un foncteur $\mathcal{F} : \text{Ét}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \text{Ens}$, où

   $$\text{Ét}(\mathfrak{X}) = \{(T, t) \mid T \text{ un } S\text{-schéma, et } t : T \longrightarrow \mathfrak{X} \text{ un morphisme étale}\}$$

   désigne le site étale de $\mathfrak{X}$ [Ols16], et tel que pour tout (T, t) dans $\text{Ét}(\mathfrak{X})$ et tout recouvrement $\{(T_i, t_i) \longrightarrow (T, t)\}_{i \in I}$, la suite

   $$F(T, t) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(T_i, t_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(T_i \times_S T_j, t_{i,j})$$

   est exacte.

   On définit le faisceau structurel $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ en posant pour tout (T, t) dans $\text{Ét}(\mathfrak{X})$: $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(T, t) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. Un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules est quasi-cohérent s'il est localement le conoyau d'un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules libres ([Sta],Tag 03OH).

   Cette définition est équivalente à se donner pour tout T un S-schéma, et tout morphisme étale $t : T \longrightarrow \mathfrak{X}$

   - Un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}_{(T,t)}$ sur le petit site étale de T.

   Et pour tout morphisme $(f, f^b) : (T', t') \longrightarrow (T, t)$

   $$\begin{tikzcd} & T \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow f^b"] & \\ T' \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "t'"'] & {} & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

   - Un isomorphisme $\rho : f^*\mathcal{F}_{(T,t)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{(T',t')}$ vérifiant la condition de cocycle ([Vis89], Définition 7.18).

2. On peut aussi définir un faisceau quasi-cohérent avec les groupoïdes (voir 1.1.5). Si on se donne une carte étale $U \longrightarrow \mathfrak{X}$, on peut lui associer le groupoïde étale donné par $(s, t) : R \rightrightarrows U$, avec $R = U \times_{\mathfrak{X}} U$. Un faisceau quasi-cohérent est alors la donnée

   - D'un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur U.

- D'un isomorphisme $\alpha : t^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} s^*\mathcal{F}$, vérifiant la condition de cocycle. ([Sta],Tag 0441).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_{12}^* \ t^* \ \mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{12}^* \ \alpha"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{pr}_{12}^* \ s^* \ \mathcal{F} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{pr}_{23}^* \ t^* \ \mathcal{F} \arrow[d, "\mathrm{pr}_{23}^* \ \alpha"] \\
\mathrm{pr}_{13}^* \ t^* \ \mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{13}^* \ \alpha"'] & \mathrm{pr}_{13}^* \ s^* \ \mathcal{F} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{pr}_{23}^* \ s^* \ \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

3. Un autre point de vue, est celui des représentations ([LM00], Définition 13.3.3). Un faisceau quasi-cohérent est un foncteur cartésien $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathrm{Qcoh}_S$ vers la catégorie des faisceaux quasi-cohérents.

Remarque 1.4.2. 1. Notons par $\text{Lis-Ét}(\mathfrak{X}) = \{(T, t) \mid T$ un S -schéma, et $t : T \longrightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme lisse$\}$ le site lisse-étale de $\mathfrak{X}$. Si le champ $\mathfrak{X}/S$ est un champ de Deligne-Mumford, on a une équivalence de catégories entre les faisceaux quasi-cohérents sur $\text{Lis-Ét}(\mathfrak{X})$ et les faisceaux quasi-cohérents sur $\text{Lis-Ét}(\mathfrak{X})$ ([Ols16], Proposition 9.1.18). Compte tenu de cette équivalence, on ne considérera, au vu du contexte de notre travail, que des faisceaux sur le site étale de $\mathfrak{X}$.

2. Il convient de préciser que la deuxième définition avec le groupoïde étale dépend à priori du choix de l'atlas. Bien que ce point de vue soit plus concret, il est cependant moins intrinsèque.

3. La troisième définition ne sera pas utilisée, puisqu'elle ne nous fournit pas le meilleur cadre pour décrire les connexions logarithmiques. La définition de $\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}$, par exemple, n'est pas naturelle dans ce contexte.

Définition 1.4.3. Soit $\mathfrak{X}/S$ un champ de Deligne-Mumford. On définit le faisceau des formes différentielles $\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}$ sur le champ $\mathfrak{X}$, comme suit :

Pour tout S-schéma T, et pour tout morphisme étale $t : T \longrightarrow \mathfrak{X}$, $(\Omega^1_{\mathfrak{X}/k})_{(T,t)} = \Omega^1_{T/k}$.

Si $(f, f^b) : (T', t') \longrightarrow (T, t)$ est un morphisme entre objets du petit site étale de $\mathfrak{X}$, on a un morphisme canonique $f^*\Omega^1_{T/k} \longrightarrow \Omega^1_{T'/k}$ envoyant l'image réciproque d'une différentielle $f^*(d\lambda)$ vers la différentielle $d(f^*\lambda)$. Comme le morphisme f est étale (car t et t' le sont), $f^*\Omega^1_{T/k} \longrightarrow \Omega^1_{T'/k}$ est donc un isomorphisme. Ces isomorphismes vérifient de plus la condition de cocycle.

1.4.2 Fonctorialité

On définit les sections globales d'un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur le champ $\mathfrak{X}/S$, en posant

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = \varprojlim_{T \xrightarrow{\text{étale}} \mathfrak{X}} \mathcal{F}(T \longrightarrow \mathfrak{X})$$

Si $f : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ est un morphisme représentable et étale entre champs de Deligne-Mumford, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $\mathfrak{X}$, on définit la restriction de $\mathcal{F}$ au champ $\mathfrak{X}'$ par

$$\mathcal{F}_{|\mathfrak{X}'}(T' \longrightarrow \mathfrak{X}') = \mathcal{F}(T' \longrightarrow \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X})$$

On suppose maintenant que f est un morphisme arbitraire.

Définition 1.4.4. On définit **l'image directe** d'un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}'$ sur $\mathfrak{X}'$ en posant pour tout morphisme $t : T \longrightarrow \mathfrak{X}$:

$$f_*\mathcal{F}'(T \xrightarrow{t} \mathfrak{X}) = \Gamma(T \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}', \mathcal{F}'_{|T\times_{\mathfrak{X}}\mathfrak{X}'})$$

Remarque 1.4.5.

1. On peut supposer que f est quasi-compact et quasi-séparé si on veut que l'image directe du faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}'$, soit encore quasi-cohérente ([Ols16], Proposition 9.2.11). A noter qu'on a pas besoin que f soit représentable et étale dans la définition de $f_*\mathcal{F}'$.
2. Pour un morphisme de champs $f : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$, et un objet étale t de $\mathfrak{X}(T)$, la définition 1.4.4 peut être reformulée avec la catégorie $I(f,t)$, ayant pour objets les triplets (g, t', u), avec t' un objet étale de $\mathfrak{X}'(T')$, $g : T' \longrightarrow T$ un morphisme de schémas, et $u : f \circ t' \longrightarrow t \circ g$ un isomorphisme, faisant 2-commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t'"'] & T \arrow[d, "t"] \\ \mathfrak{X}' \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, Rightarrow, "u"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

On définit alors $f_*\mathcal{F}'$ en posant

$$f_*\mathcal{F}'(T \longrightarrow \mathfrak{X}) = \varprojlim_{I(f,t)} \mathcal{F}'(T' \longrightarrow \mathfrak{X}')$$

Définition 1.4.6. De façon similaire que lors de la remarque 1.4.5, on définit **l'image réciproque** d'un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur le champ $\mathfrak{X}$ en considérant, pour un morphisme de champs $f : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ et un objet étale t' de $\mathfrak{X}'(T')$, la catégorie $J(f,t')$ des 2-diagrammes commutatifs (1.3), ayant pour objets les triplets (g,t,u), avec $g : T' \longrightarrow T$ un morphisme de schémas, t un objet étale de $\mathfrak{X}(T)$, et $u : f \circ t' \longrightarrow t \circ g$ un isomorphisme, en posant

$$f^*\mathcal{F}(T' \longrightarrow \mathfrak{X}') = \varinjlim_{J(f,t')} \mathcal{F}(T \longrightarrow \mathfrak{X})$$

Proposition 1.4.7. Soit $f : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de champs de Deligne-Mumford. Alors le foncteur $f^* : \mathrm{Qcoh}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(\mathfrak{X}')$ est adjoint à gauche au foncteur $f_* : \mathrm{Qcoh}(\mathfrak{X}') \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(\mathfrak{X})$.

La preuve est donné dans ([Ols16], Proposition 9.3.6) pour le cas général des champs algébriques, mais est aussi traitée dans ([Alo+15], §8) pour le cas des champs de Deligne-Mumford.

1.5 Fibrés paraboliques

Soit $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille finie d'entiers naturels inversibles dans k. On munit l'ensemble $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I = \prod_{i\in I} \frac{1}{r_i}\mathbb{Z}$ de la relation d'ordre partiel composante par composante. On utilisera la même notation pour la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$.

Soit X un schéma localement noethérien, et $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs intègres deux à deux distincts telle que la réunion $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples.

Notation 1.5.1. 1. Pour un multi-indice $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^I$, on pose $\mathcal{O}_X(-\mathbf{l}\mathbf{D}) := \mathcal{O}_X(-\sum_{i\in I} l_i D_i)$.

2. Soit $\mathcal{E}_\cdot : (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$ un foncteur. Pour tout $\mathbf{l} \geq 0$, on note $\mathcal{E}_{\cdot+\mathbf{l}}$, le décalage du foncteur $\mathcal{E}_\cdot$ par $\mathbf{l}$, à savoir le foncteur

$$\mathcal{E}_{\cdot+\mathbf{l}} : \left| \begin{array}{ccc} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I\right)^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(X) \\ \frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}} & \longmapsto & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}+\mathbf{l}} \end{array} \right.$$

Définition 1.5.2. On appelle **fibré parabolique** sur $(X, \mathbf{D})$ à poids dans $\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$, un couple $(\mathcal{E}_\cdot, (j_\mathbf{l})_{\mathbf{l}\geq 0})$, avec

- $\mathcal{E} : \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I\right)^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$ un foncteur.
- pour tout $\mathbf{l}$ dans $\mathbb{Z}^I$, un isomorphisme naturel $j_\mathbf{l} : \mathcal{E}_{\cdot+\mathbf{l}} \longrightarrow \mathcal{E}_\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\mathbf{l}\mathbf{D})$ tel que pour tout $\mathbf{l} \geq 0$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\cdot+\mathbf{l}} \arrow[r, "j_\mathbf{l}"] \arrow[d] & \mathcal{E}_\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\mathbf{l}\mathbf{D}) \arrow[d] \\ \mathcal{E}_\cdot \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{E}_\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

Un morphisme $\alpha : \mathcal{E}_\cdot \longrightarrow \mathcal{E}'_\cdot$ entre deux fibrés paraboliques $(\mathcal{E}_\cdot, j_\mathbf{l})$ et $(\mathcal{E}'_\cdot, j_{\mathbf{l}'})$ est une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I\right)^{op} \arrow[r, bend left, "\mathcal{E}_\cdot"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{E}'_\cdot"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathrm{Vect}(X) \end{tikzcd}$$

compatible avec $j_\mathbf{l}$ et $j_{\mathbf{l}'}$.

Notation 1.5.3. On note $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ la catégorie des fibrés paraboliques sur X le long de $\mathbf{D}$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$.

Théorème 1.5.4. ([Bor09], Théorème 2.4.7) Notons $\mathrm{Vect}\,(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$ la catégorie des fibrés vectoriels sur le champ des racines $\mathfrak{X} = \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$, et soit $\mathfrak{D}$ la famille de diviseurs canoniques associée au champ des racines $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ vérifiant $r_i\mathfrak{D}_i = \pi_* D_i$, pour tout i dans I. Alors

$$\wedge_\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}\,(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) & \longrightarrow & \mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D}) \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \widehat{\mathcal{F}}_\cdot = \pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X}(-.r\mathfrak{D})) \end{array} \right.$$

est une équivalence de catégories tensorielles entre $\mathrm{Vect}\,\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ et $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$.

Remarque 1.5.5. ([Bor09],§2.4.9) Le foncteur du théorème 1.5.4, a pour foncteur quasi-inverse

$$\wedge_\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}\,(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) \\ \mathcal{E}_\cdot & \longmapsto & \widehat{\mathcal{E}}_\cdot = \int^{\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I} \pi^*\mathcal{E}_\cdot \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X}(\cdot\mathbf{r}\mathfrak{D}) \end{array} \right.$$

où $\int^{\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I}$ désigne une cofin [1].

1. Pour un rappel sur les cofins, voir la section 3.3.4.1.

1.6 Exemple : la droite projective munie de deux points orbifolds

Dans cette section, on va appliquer la correspondance du théorème 1.5.4 pour déterminer les fibrés paraboliques finis sur la droite projective $\mathbb{P}^1$ le long du diviseur $D = ((0) + (\infty))$ et de poids dans $\frac{1}{r}\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}^*$, et calculer dans le même temps la torsion du groupe de Picard de $\mathfrak{X} = \sqrt[r]{((0)+(\infty))/\mathbb{P}^1}$.

1.6.1 Les fibrés paraboliques finis sur $\mathbb{P}^1$ le long de $D = ((0) + (\infty))$

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \sqrt[r]{((0)+(\infty))/\mathbb{P}^1} \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_\infty"] \arrow[dd, "\pi"] & \\
\sqrt[r]{((0))/\mathbb{P}^1} \arrow[dr, "\pi_0"'] & & \sqrt[r]{((\infty))/\mathbb{P}^1} \arrow[dl, "\pi_\infty"] \\
 & \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

et soient $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_\infty$ les fibrés vectoriels sur $\sqrt[r]{((0))/\mathbb{P}^1}$ et $\sqrt[r]{((\infty))/\mathbb{P}^1}$ respectivement tels que

$$\mathcal{N}_0^{\otimes r} \simeq \pi_0^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}((0)) \qquad \mathcal{N}_\infty^{\otimes r} \simeq \pi_\infty^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}((\infty))$$

Posons $\mathcal{N} = p_0^*\mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^*\mathcal{N}_\infty$. La correspondance pour $X = \mathbb{P}^1$ et $D = ((0) + (\infty))$ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Vect}(\sqrt[r]{((0)+(\infty))/\mathbb{P}^1}) & \longrightarrow & \mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(\mathbb{P}^1, ((0)+(\infty))) \\
\mathcal{F} & \longmapsto & \pi_*\left(\mathcal{N}^{\otimes -.r} \otimes \mathcal{F}\right)
\end{array}$$

Considérons le fibré vectoriel $\mathcal{N}' = p_0^*\mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^*\mathcal{N}_\infty^\vee$, et déterminons le fibré parabolique correspondant à $\mathcal{N}'^{\otimes l'}$. On a pour tout $\frac{l'}{r} \in \frac{\mathbb{Z}}{r}$:

$$\pi_*\left(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{N}'^{\otimes l'}\right) = \pi_*\left((p_0^*\mathcal{N}_0)^{\otimes -l} \otimes (p_\infty^*\mathcal{N}_\infty)^{\otimes -l} \otimes (p_0^*\mathcal{N}_0)^{\otimes l'} \otimes (p_\infty^*\mathcal{N}_\infty^\vee)^{\otimes l'}\right)$$

$$= (\pi_\infty)_* (p_\infty)_* \left((p_0^*\mathcal{N}_0)^{\otimes l'-l} \otimes (p_\infty^*\mathcal{N}_\infty)^{\otimes -(l+l')}\right)$$

Par la formule de projection :

$$\pi_*\left(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{N}'^{\otimes l'}\right) = (\pi_\infty)_* \left(\mathcal{N}_\infty^{\otimes -(l'+l)} \otimes (p_\infty)_* (p_0^*\mathcal{N}_0)^{\otimes l'-l}\right)$$

Comme la formation du champ des racines commute au changement de base, le diagramme (1.4) est cartésien. Ce qui nous permet d'écrire

$$\pi_*\left(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{N}'^{\otimes l'}\right) = (\pi_\infty)_* \left(\mathcal{N}_\infty^{\otimes -(l'+l)} \otimes (\pi_\infty)^* (\pi_{0*}\mathcal{N}_0)^{\otimes l'-l}\right)$$

A nouveau par la formule de projection :

$$\pi_* \left(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{N}'^{\otimes l'} \right) = (\pi_\infty)_* \mathcal{N}_\infty^{\otimes -(l'+l)} \otimes (\pi_0)_* \mathcal{N}_0^{\otimes l'-l}$$

Finalement, la formule $\pi_* \mathcal{N}^{\otimes l} = \mathcal{L}^{\otimes [\frac{l}{r}]}$ ([Bor07], Lemme 3.11) nous permet d'obtenir

$$\pi_* \left(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{N}'^{\otimes l'} \right) = \mathcal{O}((\infty))^{[\frac{-(l'+l)}{r}]} \otimes \mathcal{O}((0))^{[\frac{l'-l}{r}]}$$

1.6.2 Une suite exacte

Notons 0_r et ∞_r les points fermés de $\mathfrak{X}$ obtenus comme uniques antécédents des points 0 et ∞ de $\mathbb{P}^1$ respectivement. Considérons $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_\infty$ les gerbes résiduelles respectives de ces points, munies des morphismes $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{G}_0)$ et $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{G}_\infty)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B\mu_r \arrow[r] \arrow[d] & {[\mathrm{Spec}(\frac{k[t,s]}{t^r-s})/\mu_r]} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "0"] & \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[s]) \arrow[r] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

montre que $\mathcal{G}_0 \simeq B\mu_r$. De même, on a $\mathcal{G}_\infty \simeq B\mu_r$. Les groupes $\mathrm{Pic}(\mathcal{G}_0)$ et $\mathrm{Pic}(\mathcal{G}_\infty)$ sont donc isomorphes au groupe des caractères de μ_r, qui est $\mathbb{Z}/r$. Le faisceau $\mathcal{N}_0$ s'envoie par le morphisme $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{G}_0)$ sur le caractère canonique $\mu_r \hookrightarrow \mathbb{G}_m$, et par le morphisme $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{G}_\infty)$ sur le caractère trivial. Même raisonnement pour le faisceau $\mathcal{N}_\infty$. On a ainsi une suite

$$\begin{array}{cccccc}
0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r & \longrightarrow 0 \\
& \mathcal{N}_0 & \longmapsto & (1,0) & \\
& \mathcal{N}_\infty & \longmapsto & (0,1) &
\end{array} \tag{1.5}$$

La flèche à gauche est injective car l'application $\pi_* : \mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$ vérifie $\pi_* \circ \pi^* = \mathrm{id}$. Pour l'exactitude au milieu, elle est donnée par ([Alp13], Théorème 10.3).

1.6.3 La torsion du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})$

Calculons maintenant la torsion du groupe $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})$. Considérons le morphisme degré $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, où la première flèche est $x \longmapsto x \otimes 1$ et la deuxième est flèche $\deg \otimes \mathrm{id}$. On a

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}(1) & \longmapsto & \pi^*\mathcal{O}(1) & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 0 \\
\Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap \\
\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) & & \mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) & & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{array}$$

Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ engendre le groupe $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$. Comme le morphisme $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r$ est un conoyau du morphisme $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathfrak{X})$, alors par la propriété universelle du conoyau , il existe un unique morphisme $\mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\deg"] & \mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r \arrow[d] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

L'image de $(1,0) \in \mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r$ dans ce diagramme est $\frac{1}{r}$ puisque :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (1,0) \arrow[d, mapsto] \\
\frac{1}{r} \arrow[r, mapsto] & \frac{1}{r}
\end{tikzcd}$$

et de même $(0,1) \longmapsto \frac{1}{r} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On connaît le morphisme $\mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur des générateurs, et il est donc égal au morphisme

$$\mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r \xrightarrow{+} \mathbb{Z}/r \xrightarrow{\times \frac{1}{r}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Notons $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Z}}$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})$ dont les éléments sont de degré entier. Les seuls éléments de $\mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r$ qui s'envoient vers 0 par le morphisme $\mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r \xrightarrow{+} \mathbb{Z}/r \xrightarrow{\times \frac{1}{r}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont les éléments de la forme $(x, -x)$, avec $x \in \mathbb{Z}/r$. Donc les faisceaux inversibles de degré entier s'envoient par $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r$ vers un élément de la forme $(x, -x)$, pour un $x \in \mathbb{Z}/r$. En considérant le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/r & \longrightarrow & \mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r \\ x & \longmapsto & (x, -x) \end{array}$$

on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[dr, "\pi^*"'] & \mathrm{Pic}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z}/r \arrow[d, hook] \\
 & \mathrm{Pic}(\mathfrak{X}) \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "\deg"] & \mathbb{Z}/r \times \mathbb{Z}/r \arrow[d, "+"] \\
 & & \mathbb{Z}/r \arrow[d, "\times \frac{1}{r}"] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

On a un morphisme $\mathbb{Z}/r \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Z}}$ donné par $x \longmapsto \mathcal{N}'^{\otimes x}$, où $\mathcal{N}' = p_0^* \mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^* \mathcal{N}_\infty^\vee$. Un tel morphisme et l'exactitude de la suite (1.5) prouvent l'exactitude de la suite scindée

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}/r \longrightarrow 0$$

Donc $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r$. En prenant la torsion de ce groupe, on obtient que

$$\mathrm{Tor}(\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})) = \mathrm{Tor}(\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}/r$$

et un générateur de $\mathrm{Tor}(\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}))$ est donné par $\mathcal{N}' = p_0^*\mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^*\mathcal{N}_\infty^\vee$.

Chapitre 2

Connexions logarithmiques d'après Olsson

La donnée d'une connexion logarithmique est celle d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ muni d'un morphisme k-linéaire $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X(\log D)$ vérifiant la règle de Leibniz 2.2. D'une manière équivalente, une connexion logarithmique est une section de l'extension d'Atiyah logarithmique 2.5. L'avantage de cette deuxième définition est qu'elle permet de considérer les connexions comme des morphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires, ce qui nous évite beaucoup de complications dans différentes situations, par exemple lorsqu'il s'agit de montrer que les connexions forment un champ 2.5.2. Nous utiliserons les deux définitions, suivant la situation et la nature du problème. Nous rappelons aussi la preuve de l'équivalence entre les deux notions 2.5.2.

Le cadre le plus naturel pour définir le faisceau des différentielles logarithmiques serait celui de la géométrie logarithmique. Cependant, dans cette thèse, nous considérerons seulement des schémas « classiques ». Nous nous contentons d'une notion ad hoc de log-schéma comme un couple (X, D) où X est un schéma et D est un diviseur à croisements normaux 2.1.7. Pour un morphisme de log-schémas $f : (Y, E) \longrightarrow (X, D)$, on a un morphisme $f^*\Omega^1_X(\log D) \to \Omega^1_Y(\log E)$, qui est un isomorphisme lorsque f est log-étale 2.1.10. Ceci s'étend sans difficulté aux champs de Deligne-Mumford. Un exemple particulièrement important pour nous est celui du morphisme $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ du champ des racines vers l'espace des modules, qui est log-étale.

Après avoir rappelé la définition classique du faisceau des formes différentielles logarithmiques, nous en donnons une description plus globale 2.1.2, due à Martin Olsson, qui est bien adaptée à une généralisation aux champs de Deligne-Mumford, et spécialement, aux champs des racines. On reprend finalement l'exemple du premier chapitre (la droite projective moins deux points) et on donne une description des connexions holomorphes sur la torsion du groupe de Picard 2.4.6.

2.1 Faisceau des formes différentielles logarithmiques

2.1.1 Rappels

Soit X/k un schéma lisse, et D un diviseur de Cartier à croisements normaux. Dans [Del70] et [EV92], Deligne et Esnault-Viehweg ont donné une définition du faisceau des formes différentielles logarithmiques en l'écrivant comme le sous-faisceau de

$$\Omega^1_{X/k}(*D) = \varinjlim_{l \in \mathbb{Z}} \Omega^1_{X/k}(lD)$$

dont les sections locales sont celles de $\Omega^1_{X/k}(*D)$ qui ont, ainsi que leurs différentielles, des pôles simples le long de D :

$$\Gamma(U, \Omega^1_X(\log D)) \;=\; \{\omega \in \Gamma(U, \Omega^1_X(*D)) \mid \omega \text{ et } d\omega \text{ ont des pôles simples le long de } D\}$$

pour un ouvert U de X. Deligne a aussi montré ([Del70], §2, Lemme 3.2.1) que si le diviseur D a pour équation locale $x_1 \dots x_m$, où $x_1, \cdots, x_n$ est un système de paramètres, le faisceau $\Omega^1_X(\log D)$ est localement libre engendré par $\frac{dx_1}{x_1}, \dots, \frac{dx_m}{x_m}, dx_{m+1}, \dots, dx_n$.

Si on suppose désormais que $D = \bigcup_{j=1}^m D_j$ est à croisements normaux simples, c'est à dire que les composantes irréductibles D_j de D sont régulières et s'intersectent transversalement, et si on note par $i_{D_j} : D_j \hookrightarrow X$ les immersions fermées, on a alors une suite exacte donnée par le morphisme résidu ([EV92], §2.3) :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}(\log D) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m i_{D_j *}\mathcal{O}_{D_j} \longrightarrow 0$$

qui envoie $\lambda\frac{dx_j}{x_j}$ vers $\lambda_{|_{D_j}}$ pour $1 \le j \le m$ (et x_j une équation locale de D_j), et λdx_j vers 0, pour $j > m$.

Proposition 2.1.1. Soient X et Y des schémas lisses sur k, $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme étale, et D un diviseur de Cartier effectif à croisements normaux sur X. Alors le tiré en arrière des formes différentielles induit un isomorphisme $f^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \simeq \Omega^1_{Y/k}(\log f^*D)$.

Preuve. Soit $y \in Y$, $x = f(y)$ et notons $x_1 \dots x_m = 0$ une équation locale de D, qui se complète en un système local de paramètres $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ en x. Le faisceau $\Omega^1_X(\log D)$ est engendré localement par $\frac{dx_1}{x_1}, \dots, \frac{dx_m}{x_m}, dx_{m+1}, \dots, dx_n$. Donc $f^*\Omega^1_X(\log D)$ a pour base de sections locales

$$\{f^*(\frac{dx_1}{x_1}), \dots, f^*(\frac{dx_m}{x_m}), f^*(dx_{m+1}), \dots, f^*(dx_n)\}$$

Le système de coordonnées $\{x_1, \cdots, x_n\}$ définit un morphisme $(x_1, \dots, x_n) : X \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$. Ce morphisme est étale en x (voir la preuve de la proposition 1.3.16 (ii)). On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "(f^*x_1,\dots,f^*x_n)"] & \\ X \arrow[r, "(x_1,\dots,x_n)"'] & \mathbb{A}^n_k \end{tikzcd}$$

Le morphisme $(f^*x_1, \dots, f^*x_n)$ est étale et définit donc un système de coordonnées locales en y tel que le diviseur f^*D a pour équation locale $f^*x_1 \dots f^*x_m = 0$. On conclut que $\Omega^1_Y(\log f^*D)$ a pour base de sections locales $\{\frac{d(f^*x_1)}{f^*x_1}, \dots, \frac{d(f^*x_m)}{f^*x_m}, d(f^*x_{m+1}), \dots, d(f^*x_n)\}$ et le morphisme défini par

$$\begin{array}{ccc} f^*\Omega^1_X(\log D) & \longrightarrow & \Omega^1_Y(\log f^*D) \\ f^*\left(\frac{dx_i}{x_i}\right) & \longmapsto & \frac{d(f^*x_i)}{f^*x_i} \end{array}$$

est donc un isomorphisme, puisqu'il envoie une base de sections vers une base de sections. □

Remarque 2.1.2. Dans le cas du morphisme $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ du champ des racines $\mathfrak{X}/k$ vers l'espace des modules, ceci ne s'applique pas car le morphisme π n'est pas étale, mais comme on le verra dans le lemme 2.1.10, on a aussi un isomorphisme $\pi^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \simeq \Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D})$, dit aussi formule de Hurwitz. On peut trouver une mention de cet isomorphisme dans [MO05]. Plus généralement, la propriété d'isomorphisme reste vrai pour un morphisme log-étale de log-schémas 2.1.9.

2.1.2 La définition d'Olsson [Ols07]

On explique dans cette section comment on peut définir le faisceau des formes différentielles logarithmiques autrement qu'en passant par les pôles des formes et de leur différentielle première, comme le font Esnault et Viehweg. La définition d'Olsson a l'avantage d'être mieux adaptée aux champs algébriques.

Soit X un schéma lisse sur $S = \mathrm{Spec}(k)$, et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Considérons le $\mathbb{G}_m$-torseur $\mathbb{V}(\mathcal{L}) \setminus \{0\} = \mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}^{\pm}(\mathcal{L}))$, où $\mathrm{Sym}^{\pm}(\mathcal{L})$ désigne le faisceau inversible obtenu comme somme directe des puissances i-ème positives et négatives du faisceau $\mathcal{L}$. Pour une famille de diviseurs de Cartier effectifs $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ intègres deux à deux distincts et telle que la réunion $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, notons $T_{\mathbf{D}}$ le schéma

$$T_{\mathbf{D}} = \prod_{i\in I} (\mathbb{V}(\mathcal{O}_X(D_i)) \setminus \{0\})$$

On a un morphisme $p_{\mathbf{D}} : T_{\mathbf{D}} \longrightarrow X$ qui est un $\mathbb{G}_m^I$-torseur et un morphisme équivariant $a_{\mathbf{D}} : T_{\mathbf{D}} \longrightarrow \mathbb{A}^I$, donné par les morphismes $\mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_i)$, qui permet d'interpréter $T_{\mathbf{D}}$ comme le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} T_{\mathbf{D}} \arrow[r, "a_{\mathbf{D}}"] \arrow[d, "p_{\mathbf{D}}"'] & \mathbb{A}^I \arrow[d] \\ X \arrow[r, "(\mathcal{O}_X(D_i), s_i)_{i\in I}"'] & {[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]} \end{tikzcd}$$

Sous cette forme, la définition de $T_{\mathbf{D}}$ se généralise immédiatement aux champs de Deligne-Mumford.

Pour voir que $a_{\mathbf{D}} : T_{\mathbf{D}} \longrightarrow \mathbb{A}^I$ est un morphisme $\mathbb{G}_m^I$-équivariant, observons que

$$T_{\mathbf{D}} \simeq \prod_{i\in I} \underline{\mathrm{Isom}}(\mathcal{O}_X(D_i), \mathcal{O}_X)$$

et que se donner un isomorphisme de $\mathcal{O}_X(D_i)$ vers $\mathcal{O}_X$ est équivalent à se donner une équation globale des diviseurs D_i. De telles équations permettent de définir le morphisme $T_{\mathbf{D}} \longrightarrow \mathbb{A}^I$ et montrent en particulier l'équivariance de ce dernier. En effet, on identifie $T_{\mathbf{D}}$ et $\mathbb{A}^I_X$ à leurs foncteurs de points. On a donc un morphisme $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathcal{O}(D_i), \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbb{A}^1$ qui est donné par $\phi \longmapsto \phi \circ s_{D_i}$ où s_{D_i} désigne la section canonique associée au diviseur D_i. Pour un isomorphisme $u : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$, on voit que $u.\phi := u \circ \phi$ s'envoie par le morphisme $T_{\mathbf{D}} \longrightarrow \mathbb{A}^I$ vers $u \circ \phi \circ s_{D_i} = u.(\phi \circ s_{D_i})$.

Proposition 2.1.3. Soit $\mathfrak{X}$ le champ des racines associé au triplet $(X, \mathbf{D}, \mathbf{r})$, avec X un k-schéma, $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs intègres deux à deux distincts, telle que $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, et $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers naturels inversibles sur k. Notons $\mathfrak{D}$ la famille canonique de diviseurs de $\mathfrak{X}$ qui vérifie $r_i\mathfrak{D}_i = \pi^*D_i$, pour tout i dans I. Alors

$$T_{\mathfrak{D}} \simeq T_{\mathbf{D}} \times_{\mathbb{A}^I, r_i} \mathbb{A}^I$$

Preuve. On a un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
T_{\mathfrak{D}} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & & \mathbb{A}^I \arrow[dr, "\times r_i"] \arrow[dd, dashed] & \\
& T_{\mathbf{D}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbb{A}^I \arrow[dd] \\
\mathfrak{X} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & {[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]} \arrow[dr, "\times r_i"] & \\
& X \arrow[rr] & & {[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]}
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

qui induit par la propriété universelle du produit fibré $T_{\mathbf{D}}$, un morphisme $T_{\mathfrak{D}} \longrightarrow T_{\mathbf{D}}$. La face en haut du diagramme (2.1) est cartésienne si et seulement si le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
T_{\mathfrak{D}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^I \arrow[d] \\
X \arrow[r] & {[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]}
\end{tikzcd}
$$

est cartésien. Comme la face arrière et la face en bas du diagramme (2.1) sont cartésiennes, ceci nous permet de conclure. □

Remarque 2.1.4. 1. On a une action du groupe $\mathbb{G}_m^I$ sur $T_{\mathbf{D}} \times_{\mathbb{A}^I} \mathbb{A}^I$ induite par les deux morphismes $\mathbb{G}_m^I$-équivariants $a_{\mathbf{D}} : T_{\mathbf{D}} \longrightarrow \mathbb{A}^I$ et $\mathbb{A}^I \xrightarrow{\times r_i} \mathbb{A}^I$, où la $\mathbb{G}_m^I$-équivariance de ce dernier morphisme est donnée à travers le morphisme de groupes $\mathbb{G}_m^I \xrightarrow{\times r_i} \mathbb{G}_m^I$. Cette action est compatible avec celle faisant de $T_{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ un $\mathbb{G}_m^I$-torseur et l'isomorphisme donné par la proposition.

2. Puisque le morphisme $T_{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est un $\mathbb{G}_m^I$-torseur, le lemme 1.1.13 implique l'existence d'un isomorphisme naturel $\mathfrak{X} \simeq [T_{\mathfrak{D}}/\mathbb{G}_m^I]$.
3. Comme conséquence immédiate de la proposition 2.1.3, $T_{\mathfrak{D}}$ est en fait un schéma, pas seulement un espace algébrique.

Définition 2.1.5. On définit le faisceau des formes différentielles logarithmiques le long du diviseur $\mathbf{D}$ par

$$\Omega^1_{X/k}(\log D) = p_{\mathbf{D}*}^{\mathbb{G}_m^I} \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$$

où $p_{\mathbf{D}*}^{\mathbb{G}_m^I}$ désigne l'opération « pousser et prendre les fixes ».

Pour montrer le sens de la définition d'Olsson, on a l'exemple suivant :

Exemple 2.1.6. Soit k un corps, $S = \mathrm{Spec}(k)$ le schéma de base, et $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x])$. Si (0) est le diviseur principal correspondant à l'idéal principal $xk[x]$ alors le faisceau

$$\Omega^1_{\mathbb{A}^1/S}(\log(0)) = \Omega^1_{\mathbb{A}^1/[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}$$

est libre de rang 1 engendré par $\frac{dx}{x}$.

Preuve. En effet, considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \times_S \mathbb{A}^1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1 \arrow[r] & {[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}
\end{tikzcd}$$

On note $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x]$ pour la droite affine en bas à gauche et $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[v]$ pour celle en haut à droite. On note Ω^1_a pour les différentielles le long du morphisme action a. Comme la formation du faisceau des différentielles commute au changement de base, on a

$$pr_2^* \Omega^1_{\mathbb{A}^1/[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]} = \Omega^1_a$$

Par la descente, il s'ensuit que

$$\Omega^1_{\mathbb{A}^1/[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]} = pr_{2*}^{\mathbb{G}_m} \Omega^1_a$$

On calcule Ω^1_a en utilisant le fait que a est au-dessus de S, le triangle correspondant donnant une suite exacte

$$a^* \Omega^1_{\mathbb{A}^1/S} \to \Omega^1_{\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1/S} \to \Omega^1_a \to 0$$

On peut voir $\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1$ comme l'ouvert principal de $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[u,x]$ obtenu en inversant u si bien que $\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[u, u^{-1}, x]$. On vérifie facilement que l'application a correspond au morphisme d'anneaux $k[v] \to k[u, u^{-1}, x]$ donné par $v \mapsto ux$.

Posons $R = k[u, u^{-1}, x]$. Comme la formation des différentielles commute à la localisation et $\Omega^1_{\mathbb{A}^2/S} = k[u,x]du \oplus k[u,x]dx$, on a donc

$$\Omega^1_{\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1/S} = Rdu \oplus Rdx$$

Avec nos notations $a^* \Omega^1_{\mathbb{A}^1/S} = R \otimes_{k[v]} k[v]dv = Rdv$, la suite exacte ci-dessus montre que Ω^1_a est le conoyau du morphisme de R-modules $Rdv \to Rdu \oplus Rdx$ donné par $dv \mapsto d(ux) = udx + xdu$. Dans ce conoyau on a $dx = -xu^{-1}du$, donc Ω^1_a est libre engendré par du. Pour descendre ce résultat, il est plus facile de trouver un générateur de degré 0, et donc écrire $\Omega^1_a = Ru^{-1}du$, ce qui permet d'écrire que

$$\Omega^1_{\mathbb{A}^1/[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]} = k[x]u^{-1}du$$

L'application pr_2 est aussi définie sur S et on a donc aussi un morphisme composé $\mathrm{pr}_2^* \Omega^1_{\mathbb{A}^1/S} \to \Omega^1_{\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1/S} \to \Omega^1_a$ qui par descente donne $\Omega^1_{\mathbb{A}^1/S} \to \Omega^1_{\mathbb{A}^1/[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}$ et qui en termes de modules se lit $k[x]dx \to k[x]u^{-1}du$ et est donné par $dx \mapsto -xu^{-1}du$. Ceci montre que le générateur $-u^{-1}du$ s'interprète comme la différentielle logarithmique de x.

$\square$

On étudie finalement l'aspect fonctoriel des différentielles logarithmiques. Pour cela, on va commencer par donner une définition ad hoc d'un log-schéma.

Définition 2.1.7.

1. On appelle **log-schéma**, une paire $(X, (D_i)_{i \in I})$ avec X un schéma lisse sur k et $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs de Cartiers effectifs intègres et deux à deux distincts et telle que le diviseur $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ soit à croisements normaux simples.

2. Un morphisme entre deux log-schémas $(X', (D'_i)_{i\in I})$ et $(X, (D_i)_{i\in I})$ indexé par le même ensemble fini I, est une paire $(f, (r_i)_{i\in I})$, avec $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme de schémas plat, et $(r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers naturels telle que $r_i D'_i = f^* D_i$ pour tout i dans I. (En fait, la famille $(r_i)_{i\in I}$ est uniquement déterminée par f mais nous l'ajoutons à la notation par commodité).

Remarque 2.1.8. Si $(f, (r_i)_{i\in I})$ est un morphisme de log-schémas, alors ce morphisme induit un morphisme canonique $f^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \longrightarrow \Omega^1_{X'/k}(\log D')$. Ce morphisme peut être défini localement comme étant le morphisme qui envoie une forme différentielle $\omega_{\text{hol}} + \sum_{i\in i} \lambda_i \frac{dt_i}{t_i}$ vers $f^*\omega_{\text{hol}} + \sum_{i\in I} f^*\lambda_i (r\frac{dt'_i}{t'_i} - \frac{du_i}{u_i})$, pour des équations locales t_i et t'_i de D_i et D'_i respectivement, vérifiant $t_i'^{r_i} = u_i f^* t_i$, avec u_i une unité. On peut aussi définir le morphisme $f^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \longrightarrow \Omega^1_{X'/k}(\log D')$ globalement en utilisant la définition d'Olsson (voir le diagramme commutatif (2.2) dans la preuve du lemme 2.1.10 ci-dessous).

Définition 2.1.9. Un morphisme $(f, (r_i)_{i\in I}) : (X', (D'_i)_{i\in I}) \longrightarrow (X, (D_i)_{i\in I})$ est dit **log-étale**, si

1. L'entier r_i est inversible dans k, pour tout i dans I.
2. Le morphisme associé $X' \longrightarrow \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ est étale.

Lemme 2.1.10. Soit $(f, (r_i)_{i\in I}) : (X', (D'_i)_{i\in I}) \longrightarrow (X, (D_i)_{i\in I})$ un morphisme log-étale. Alors le morphisme canonique $f^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \longrightarrow \Omega^1_{X'/k}(\log D')$ est un isomorphisme.

Preuve. Fixons les notations des morphismes

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \mathfrak{X} = \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & {[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]} \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & {[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]} \end{tikzcd}$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \arrow[r] & \Omega^1_{X'/k}(\log D') \\ g^*\pi^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \arrow[r] \arrow[u] & g^*\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D}) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

La flèche verticale à droite est un isomorphisme, car comme $(f, (r_i)_{i\in I})$ est log-étale, le morphisme g est étale, et cette flèche s'identifie par la définition d'Olsson 2.1.5 avec l'isomorphisme $g^*\Omega^1_{\mathfrak{X}/[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]} \simeq \Omega^1_{X'/[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]}$. La flèche horizontale en bas du diagramme est aussi un isomorphisme, puisqu'en utilisant à nouveau la définition d'Olsson 2.1.5, elle s'identifie à l'image réciproque par g du morphisme $\pi^*\Omega^1_{X/[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]} \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}_m^I]}$ qui, comme la formation des différentielles commute au changement de base, est un isomorphisme.

□

Ce lemme nous permet de définir les différentielles logarithmiques $\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D})$ sur un champ de Deligne-Mumford.

Définition 2.1.11. Soit $\mathfrak{X}/k$ un champ de Deligne-Mumford lisse, muni d'une famille finie de diviseurs de Cartiers effectifs $(\mathfrak{D}_\mathbf{i})_{i\in I}$ intègres et deux à deux distincts et telle que le diviseur $\mathfrak{D} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{D}_i$ soit à croisements normaux simples. On définit pour un objet (T, t) du petit site étale de $\mathfrak{X}$

$$\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D})_{(T,t)} = \Omega^1_{T/k}(\log t^*\mathfrak{D})$$

De plus, pour un 2-morphisme $(f, f^b) : (T', t') \longrightarrow (T, t)$ entre objets du petit site étale de $\mathfrak{X}$, le lemme 2.1.10 implique la donnée d'un isomorphisme canonique $f^*\Omega^1_{T/k}(\log t^*\mathfrak{D}) \longrightarrow \Omega^1_{T'/k}(\log t'^*\mathfrak{D}')$. De tels isomorphismes vérifient la condition de cocyle, ce qui montre que le faisceau $\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D})$ est bien défini.

Remarque 2.1.12. Pour le cas du champ des racines $\mathfrak{X}$, on a une définition plus explicite de $\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D})$, qui est $\Omega^1_{\mathfrak{X}/[\mathbb{A}^I/\mathbb{G}^I_m]}$. En effet, comme le morphisme $\mathfrak{X} \longrightarrow [\mathbb{A}^I/\mathbb{G}^I_m]$ est représentable, on peut utiliser simplement la définition d'Olsson 2.1.5.

2.2 Définition d'une connexion avec la condition de Koszul

Le concept d'une connexion logarithmique est celui d'une connexion sur un schéma (ou un champ algébrique) X pouvant admettre des singularités le long d'un diviseur D. On utilisera comme références dans cette section [Del70] et [EV92].

2.2.1 Connexions sur les schémas

Soit X un schéma lisse sur un corps k, $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs intègres deux à deux distincts et telle que la réunion $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ soit à croisements normaux, et $\mathcal{E}$ un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules.

Définition 2.2.1. Une **connexion logarithmique** sur $\mathcal{E}$ est un morphisme k-linéaire

$$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k}(\log D)$$

vérifiant pour toutes sections s et f de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{O}_X$ respectivement, la règle de Leibniz :

$$\nabla(f.s) = s \otimes df + f.\nabla(s)$$

où $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ désigne la dérivation canonique sur X associée à $\Omega^1_{X/k}$.

Remarque 2.2.2. Une connexion logarithmique ∇ est dite holomorphe si et seulement si elle se factorise à travers le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\nabla"] \arrow[dr, dashed] & & \mathcal{E} \otimes \Omega^1_X(\log D) \\ & \mathcal{E} \otimes \Omega^1_X \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Notation 2.2.3. On note $\mathrm{ConnVect}(X, \mathbf{D})$ la catégorie qui a

pour objets :

- Les connexions logarithmiques $(\mathcal{E}, \nabla)$ sur X.

pour morphismes : $(\mathcal{E}, \nabla) \longrightarrow (\mathcal{E}', \nabla')$

- les morphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k} \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{E}' \arrow[r, "\nabla'"] & \mathcal{E}' \otimes \Omega^1_{X/k}
\end{tikzcd}$$

On définit sur cette catégorie le produit tensoriel par

$$(\mathcal{E}, \nabla) \otimes (\mathcal{E}', \nabla') \; = \; (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}', \nabla \otimes \nabla') \tag{2.3}$$

où $\nabla \otimes \nabla'$ est la connexion sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ donnée pour toute section s de $\mathcal{E}$ et toute section s' de $\mathcal{E}'$ par

$$(\nabla \otimes \nabla')(s \otimes s') = \nabla(s) \otimes s' + s \otimes \nabla'(s')$$

On définit le **Hom** interne par

$$\mathbf{Hom}((\mathcal{E}, \nabla), (\mathcal{E}', \nabla')) = (\mathbf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}'), \nabla^{\mathbf{Hom}})$$

où $\nabla^{\mathbf{Hom}}$ est la connexion sur $\mathbf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ donnée pour toute section s de $\mathcal{E}$ et tout morphisme $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ par

$$\nabla^{\mathbf{Hom}}(\phi)(s) = \nabla'(\phi(s)) - (\phi \otimes \mathrm{id})(\nabla(s))$$

sachant qu'on a utilisé l'identification $\mathbf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \otimes \Omega^1_{X/k}(\log D) \simeq \mathbf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D))$. En particulier, on définit le dual d'une connexion logarithmique $(\mathcal{E}, \nabla)$ par

$$(\mathcal{E}, \nabla)^\vee = \mathbf{Hom}((\mathcal{E}, \nabla), (\mathcal{O}_X, d))$$

2.2.2 Fonctorialité

Pour simplifier l'exposition, on ne considère dans cette section que des connexions holomorphes.

2.2.2.1 Image réciproque d'une connexion

Lemme 2.2.4. Soient X et Y des schémas lisses sur un corps k, $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur X, ∇ une connexion holomorphe sur $\mathcal{E}$, et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de k-schémas. Il existe une unique connexion $f^*\nabla$ sur $f^*\mathcal{E}$ vérifiant pour toute section locale s de $\mathcal{E}$:

$$f^*\nabla\,(f^*s) = f^*\,(\nabla(s))$$

Preuve. On commence par montrer l'unicité. Soient $(f^*\nabla)_1$ et $(f^*\nabla)_2$ deux connexions sur $f^*\mathcal{E}$ vérifiant

$$(f^*\nabla)_i(f^*s) = f^*(\nabla(s)) \qquad\qquad \text{pour } i = 1, 2$$

Puisque $\mathbf{Hom}_k(f^*\mathcal{E}, f^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{Y/k})$ est un faisceau, il nous suffit de montrer que ces deux connexions coïncident localement. Le faisceau $f^*\mathcal{E}$ est engendré localement par les sections du type f^*s, pour s une section locale de $\mathcal{E}$, et ces deux connexions coïncident sur les sections de ce type. Donc il reste à voir que pour toute fonction λ de $\mathcal{O}_X$, on a que $(f^*\nabla)_1(\lambda f^*s) = (f^*\nabla)_2(\lambda f^*s)$. Mais ceci est donné par la relation de Leibniz qui implique que

$$\begin{aligned}(f^*\nabla)_1(\lambda.f^*s) &= d\lambda \otimes f^*s + \lambda.(f^*\nabla)_1(f^*s)\\ &= d\lambda \otimes f^*s + \lambda.(f^*\nabla)_2(f^*s)\\ &= (f^*\nabla)_2(\lambda.f^*s)\end{aligned}$$

Montrons l'existence. On commence par raisonner localement : on sait que toute connexion s'écrit localement $\nabla = d_X + \Omega$, avec $d_X : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ la dérivation canonique associée à $\Omega^1_{X/k}$ et Ω une matrice de formes différentielles logarithmiques. Plus explicitement, pour une base de sections locales $\{e_1, \dots, e_l\}$ de $\mathcal{E}$, si $s = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i e_i$ et $\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^{l} e_j \otimes \omega_{j,i}$, on a

$$\nabla(s) = \sum_{i=1}^{l} e_i \otimes \left(d\lambda_i + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \omega_{i,j} \right)$$

Il s'agit alors de montrer que pour toute section s : $(d_Y + f^*\Omega)(f^*s) = f^*((d_X + \Omega)(s))$, ce qui prouvera que localement la connexion $f^*\nabla$ sera de la forme $d_Y + f^*\Omega$ et qu'elle vérifie $f^*\nabla(f^*s) = f^*(\nabla(s))$.

Soit donc U un ouvert de X tel que $\mathcal{E}_{|_U} \simeq \mathcal{O}_U^{\oplus l}$, $\{e_1, \dots, e_l\}$ la base de sections de $\mathcal{E}_{|_U}$ correspondante, $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ la dérivation sur X et $\Omega = (\omega_{i,j})_{1 \leq i,j \leq l}$ la matrice des formes différentielles associé à la base $\{e_1, \dots, e_l\}$ et à la connexion ∇. Posons $V = f^{-1}U$. Sachant que l'isomorphisme $f^*\mathcal{E}_{|_U} \simeq \mathcal{O}_V^{\oplus l}$ induit une base de sections locales $\{f^*e_1, \dots, f^*e_l\}$ de $f^*\mathcal{E}_{|_U}$, on a pour toute section s de $\mathcal{E}(U)$:

$$\begin{aligned}(d_V + f^*\Omega)(f^*s) = (d_V + f^*\Omega)\left(\sum_{i=1}^{l} f^*\lambda_i f^*e_i\right) &= \sum_{i=1}^{l} f^*e_i \otimes \left(d(f^*\lambda_i) + \sum_{j=1}^{k} f^*\lambda_j f^*\omega_{i,j} \right)\\ &= f^*\left(\sum_{i=1}^{l} e_i \otimes \left(d(\lambda_i) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \omega_{i,j} \right) \right)\\ &= f^*((d_X + \Omega)(s))\end{aligned}$$

Pour montrer l'existence globalement, il nous faut montrer que les connexions $(f^*\nabla_{|_{U_i}})_{i\in I}$ définies sur un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de X coïncident sur les intersections $U_i \times_X U_i$. Et ceci est vrai d'après l'unicité montrée en début de preuve, puisque

$$(f^*\nabla_{|_{U_i}})_{|_{U_i \times_X U_j}}(f^*s) = f^*(\nabla_{|_{U_i \times_X U_j}}(s)) = (f^*\nabla_{|_{U_j}})_{|_{U_i \times_X U_j}}(f^*s)$$

Le même raisonnement que sur l'unicité au début de la preuve implique que $(f^*\nabla_{|_{U_i}})_{|_{U_i \times_X U_j}} = (f^*\nabla_{|_{U_j}})_{|_{U_i \times_X U_j}}$. Donc la propriété de faisceau de $\mathbf{Hom}_k(f^*\mathcal{E}, f^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{Y/k})$ donne l'existence d'un unique morphisme $f^*\nabla : f^*\mathcal{E} \longrightarrow f^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{Y/k}$ tel que $(f^*\nabla)_{|_{f^{-1}(U_i)}} = f^*\nabla_{|_{U_i}}$. Ce morphisme vérifie localement l'égalité $(f^*\nabla)(f^*s) = f^*(\nabla(s))$, et donc la vérifie aussi globalement. De même pour la règle de Leibniz qui est vérifiée localement et donc aussi globalement. □

Remarque 2.2.5. De façon similaire, on peut définir l'image réciproque d'une connexion logarithmique le long d'un morphisme de log-schémas $(X', (D'_i)_{i\in I}) \to (X, (D_i)_{i\in I})$ (voir 2.1.7).

2.2.2.2 Image directe d'une connexion

Soient X et Y des schémas lisses sur k.

Lemme 2.2.6. Pour un morphisme de schémas étale $f : Y \longrightarrow X$ et une connexion holomorphe $(\mathcal{E}, \nabla)$ sur Y, il existe une unique connexion $f_*\nabla$ sur $f_*\mathcal{E}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_*\mathcal{E} \arrow[r, dashed, "f_*\nabla"] \arrow[ddr, "f_*(\nabla)"'] & f_*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k} \arrow[d, "\wr"] \\ & f_*(\mathcal{E} \otimes f^*\Omega^1_{X/k}) \arrow[d, "\wr"] \\ & f_*(\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{Y/k}) \end{tikzcd}$$

Preuve. L'isomorphisme $f_*(\mathcal{E} \otimes f^*\Omega^1_{X/k}) \simeq f_*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k}$ provient de la formule de projection, vu que $\Omega^1_{X/k}$ est localement libre. Comme f est lisse, la suite

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{Y/k} \longrightarrow \Omega^1_{Y/X} \longrightarrow 0$$

est exacte, et puisque f est non-ramifié on a de plus $\Omega^1_{Y/X} = 0$, ce qui donne l'autre isomorphisme $\Omega^1_{Y/k} \simeq f^*\Omega^1_{X/k}$. □

Remarque 2.2.7. Dans le lemme ci-dessus, l'image directe $f_*(\nabla)$ d'une connexion ∇ est définie pour un morphisme f étale. Notons que l'image directe peut aussi être définie pour un morphisme log-étale $(f, (r_i)_{i\in I}) : (X', (D'_i)_{i\in I}) \longrightarrow (X, (D_i)_{i\in I})$, car d'après le lemme 2.1.10, on a un isomorphisme $f^*\Omega^1_{X/k}(\log D) \longrightarrow \Omega^1_{X'/k}(\log D')$.

2.2.2.3 Adjonction

Soit X un schéma lisse sur k, et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme étale de k-schémas.

Lemme 2.2.8. Le foncteur $f^* : \mathrm{Conn}_k(X) \longrightarrow \mathrm{Conn}_k(Y)$ admet pour adjoint à droite le foncteur $f_* : \mathrm{Conn}_k(Y) \longrightarrow \mathrm{Conn}_k(X)$.

Cette vérification est possible mais pénible avec la définition de Koszul, et il vaudrait beaucoup mieux ici utiliser les suites exactes d'Atiyah 2.5. Pour cette raison, on omet la preuve, d'autant que ce résultat ne sera pas utilisé par la suite.

2.2.3 Connexions sur les champs

Soit $\mathfrak{X}/k$ un champ de Deligne-Mumford lisse, $\mathfrak{D}$ un diviseur de Cartier effectif à croisements normaux sur $\mathfrak{X}$ (voir 1.3.17). Notre référence principale pour cette partie est ([Ols07],§2) ; comme nous nous restreignons au cas des champs de Deligne-Mumford, nous utiliserons le petit site étale de $\mathfrak{X}$ (voir 1.4.1).

Définition 2.2.9. Une **connexion logarithmique** le long de $\mathfrak{D}$ est un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{X}$, muni d'un morphisme k-linéaire $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D})$ vérifiant, pour toute section locale s de $\mathcal{E}$ et toute fonction locale λ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, la règle de Leibniz $\nabla(\lambda.s) = s \otimes d\lambda + \lambda.\nabla(s)$ où $d : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathfrak{X}/k}$ désigne la dérivation canonique associée à $\Omega^1_{\mathfrak{X}/k}$.

Remarque 2.2.10. 1. D'une manière équivalente, une connexion logarithmique est la donnée pour tout schéma T et tout morphisme étale $t : T \longrightarrow \mathfrak{X}$

- d'un faisceau localement libre $\mathcal{E}_{(T,t)}$ sur le petit site étale de T,
- d'une connexion logarithmique $\nabla_{(T,t)} : \mathcal{E}_{(T,t)} \longrightarrow \mathcal{E}_{(T,t)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \Omega^1_{T/k}(\log(\mathfrak{D}_{(T,t)}))$,

et pour tout 2-morphisme $(f, f^b) : (T', t') \longrightarrow (T, t)$,

- d'un isomorphisme $\rho_{(f,f^b)} : f^*\mathcal{E}_{(T,t)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{(T',t')}$,

faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f^*\mathcal{E}_{(T,t)} \arrow[r, "f^*\nabla_{(T,t)}"] \arrow[d, "\rho_{(f,f^b)}"'] & f^*\mathcal{E}_{(T,t)} \otimes_{\mathcal{O}_{T'}} \Omega^1_{T'/k}(\log(\mathfrak{D}_{(T',t')})) \arrow[d, "\rho_{(f,f^b)}\otimes \mathrm{id}"'] \\
\mathcal{E}_{(T',t')} \arrow[r, "\nabla_{(T',t')}"] & \mathcal{E}_{(T',t')} \otimes_{\mathcal{O}_{T'}} \Omega^1_{T'/k}(\log(\mathfrak{D}_{(T',t')}))
\end{tikzcd}$$

2. Si on utilise le point de vue des groupoïdes 1.1.5, on fixe une carte étale $T \longrightarrow \mathfrak{X}$, et on note $(s,t) : R \rightrightarrows U$ le groupoïde associé. Alors se donner une connexion logarithmique revient à se donner une paire $((\mathcal{F}, \alpha), \nabla)$, avec

- $(\mathcal{F}, \alpha)$ un faisceau quasi-cohérent sur le groupoïde (U, R, s, t, c) (voir 1.1.5).
- $(\mathcal{F}, \nabla)$ une connexion logarithmique sur U.

faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
t^*\mathcal{F} \arrow[r, "t^*\nabla"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & t^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^1_{U/k}(\log t^*\mathfrak{D}) \arrow[d, "\alpha\otimes\mathrm{id}"', "\wr"] \\
s^*\mathcal{F} \arrow[r, "s^*\nabla"] & s^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^1_{U/k}(\log s^*\mathfrak{D})
\end{tikzcd}$$

2.3 Résidu d'une connexion logarithmique

Soit X un schéma lisse sur un corps k, $\mathbf{D} = (D_i)_{\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs intègres deux à deux distincts et telle que la réunion $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, $\mathcal{E}$ un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules.

Définition 2.3.1. ([EV92], Propriété 2.3) On définit le résidu d'une connexion logarithmique ∇ sur $\mathcal{E}$ le long de D_i comme étant le morphisme

$$\mathrm{res}_{D_i}(\nabla) : \mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k}(\log D) \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{D_i}$$

où $\Omega^1_{X/k}(\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i}$ est le morphisme résidu de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}(\log D) \xrightarrow{\text{résidu}} \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0$$

qui envoie, localement, une forme différentielle $\lambda d\omega$ vers $\lambda_{|D_i}$ si la forme $d\omega$ est méromorphe, et vers 0 sinon.

Remarque 2.3.2. Avec la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0$$

on obtient un faisceau $\mathcal{E}_{|D_i} := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{D_i}$, et le résidu peut alors aussi être défini comme un endomorphisme de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{D_i}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\text{rest.}"] & \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k}(\log D) \arrow[d] \\
\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{D_i} \arrow[r] & \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{D_i}
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.3.3. Si $(\mathcal{E}, \nabla)$ et $(\mathcal{E}', \nabla')$ sont deux connexions logarithmiques, le résidu du produit tensoriel $\nabla \otimes \nabla'$ le long de chaque D_h est donné par la formule

$$\mathrm{res}_{D_h}(\nabla \otimes \nabla') = \mathrm{res}_{D_h}(\nabla) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}'_{|D_h}} + \mathrm{id}_{\mathcal{E}_{|D_h}} \otimes \mathrm{res}_{D_h}(\nabla') \tag{2.4}$$

Preuve. On raisonne localement. Soit $\{e_1, \dots, e_l\}$ et $\{e_1, \dots, e_{l'}\}$ des bases de sections locales de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ respectivement. Posons $s = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i e_i$, $s' = \sum_{j=1}^{l'} \lambda'_j e'_j$, $\nabla(e_i) = \sum_{p=1}^{l} e_p \otimes \omega_{p,i}$, et $\nabla(e'_j) = \sum_{q=1}^{l'} e'_q \otimes \omega'_{q,j}$. On a

$$\begin{aligned}
(\nabla \otimes \nabla')(s \otimes s') &= \nabla(s) \otimes s' + s \otimes \nabla'(s') \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left(e_i \otimes \left(d\lambda_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_p \omega_{i,p} \right) \right) \otimes \sum_{j=1}^{l'} \lambda'_j e'_j + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i e_i \otimes \sum_{j=1}^{l'} \left(e'_j \otimes \left(d\lambda'_j + \sum_{q=1}^{l'} \lambda'_q \omega'_{j,q} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l'} (e_i \otimes e'_j) \otimes \lambda'_j \left(d\lambda_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_p \omega_{i,p} \right) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l'} (e_i \otimes e'_j) \otimes \lambda_i \left(d\lambda'_j + \sum_{q=1}^{l'} \lambda'_q \omega'_{j,q} \right)
\end{aligned}$$

Posons pour tout $i, p = 1, \dots, l$ et $j, q = 1, \dots, l'$, $u_p = \lambda_{p|D_h}$ si $w_{i,p}$ est méromorphe et 0 sinon, et $v_q = \lambda'_{q|D_h}$ si $w'_{j,q}$ est méromorphe et 0 sinon. Le calcul du résidu des deux termes de la dernière ligne de l'équation ci-dessus permet d'obtenir

$$(\mathrm{res}_{D_h}(\nabla \otimes \nabla'))(s \otimes s') = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l'} \sum_{p=1}^{l} \lambda'_j (e_i \otimes e_j) \otimes u_p + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l'} \sum_{q=1}^{l'} \lambda_i (e_i \otimes e_j) \otimes v_q$$

ce qui correspond au terme de droite de l'égalité (2.4) appliqué à $s \otimes s'$. □

2.4 Décalage d'une connexion le long d'un diviseur

Notation 2.4.1. Pour $\mathcal{E}$ un faisceau quasi-cohérent sur un schéma lisse X/k, et B un diviseur de Cartier effectif sur X, on note

$$\mathcal{E}(B) := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(B)$$

le faisceau obtenu à partir de $\mathcal{E}$ et de B. Géométriquement, ceci revient à autoriser aux sections du faisceau $\mathcal{E}$ d'avoir des pôles simples le long du diviseur B. La définition de $\mathcal{E}(B)$ et du décalage d'une connexion qu'on va définir sont ceux donnés par [EV92]. On commence par montrer l'existence d'une connexion logarithmique sur le faisceau $\mathcal{O}_X(-D_i)$, pour cela on va utiliser la définition d'Olsson.

On reprend les mêmes notations que celles de la section 2.1.2 : soit X un schéma lisse sur k, $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille finie de diviseurs de Cartier effectifs distincts et intègres, telle que le diviseur $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, $T_{\mathbf{D}}$ le schéma défini dans 2.1.2, muni de ses deux morphismes $a_{\mathbf{D}} : T_{\mathbf{D}} \longrightarrow \mathbb{A}^I$ et $p_{\mathbf{D}} : T_{\mathbf{D}} \longrightarrow X$.

Avant de donner la formule de décalage des résidus d'Esnault-Viehweg, on commence par montrer l'existence d'une connexion logarithmique sur le faisceau $\mathcal{O}_X(-D_i)$. Remarquons tout d'abord que la dérivation canonique $d : \mathcal{O}_{T_{\mathbf{D}}} \longrightarrow \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$ est $\mathbb{G}_m^I$-équivariante. Notons $(a_{\mathbf{D}})_i$ la i-ème composante de $a_{\mathbf{D}}$. C'est une équation globale du diviseur $p^*_{\mathbf{D}}(D_i)$. Puisque $d((a_{\mathbf{D}})_i) = 0$ dans $\Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$, il s'ensuit d'après la règle de Leibniz que $d((a_{\mathbf{D}})_i\mathcal{O}_{T_{\mathbf{D}}}) \subset (a_{\mathbf{D}})_i\Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$. En appliquant le foncteur $(p_{\mathbf{D}})_*^{\mathbb{G}_m^I}$ à la restriction $d : (a_{\mathbf{D}})_i\mathcal{O}_{T_{\mathbf{D}}} \longrightarrow (a_{\mathbf{D}})_i\Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$, on obtient une connexion logarithmique

$$d(-D_i) : \mathcal{O}_X(-D_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D_i) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D)$$

Remarque 2.4.2. Par construction, le morphisme $\mathcal{O}_X(-D_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est compatible avec les connexions $d(-D_i)$ et d, et ceci caractérise uniquement les connexions $d(-D_i)$.

Lemme 2.4.3. ([EV92], lemme 2.7) Soit $B = \sum_{i\in I} \mu_i D_i$ un diviseur de Cartier à support dans D. Il existe une connexion logarithmique canonique

$$d(B) : \mathcal{O}_X(B) \longrightarrow \mathcal{O}_X(B) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D)$$

qui, pour une équation locale x_i de D_i, vérifie l'égalité

$$d(B)(\prod_{i\in I} x_i^{-\mu_i}) = -\prod_{i\in I} x_i^{-\mu_i}\cdot \sum_{i\in I} \mu_i \frac{dx_i}{x_i}$$

En particulier, on a $\mathrm{res}_{D_i}(d(B)) = -\mu_i \,\mathrm{id}$.

Preuve. On l'a montré dans la discussion au début de la section pour $B = -D_i$. Pour le cas général, on remarque que la formule 2.3 permet de définir les connexions $d(-\mu_i D_i)$ avec $\mu_i \geq 0$. En prenant le dual, on obtient la connexion $d(\mu_i D_i)$ avec $\mu_i \geq 0$, puis en appliquant la formule 2.3 à nouveau on obtient le cas général. □

Notation 2.4.4. Soit $B = \sum_{i\in I} \mu_i D_i$ un diviseur de Cartier sur X à support dans D, et $(\mathcal{E}, \nabla)$ une connexion logarithmique sur X le long de D. On note $(\mathcal{E}(B), \nabla(B))$, la connexion logarithmique obtenue comme produit tensoriel de connexions 2.3 :

$$\nabla(B)(\prod_{i\in I} x_i^{-\mu_i} s) = \prod_{i\in I} x_i^{-\mu_i} \nabla(s) - \prod_{i\in I} x_i^{-\mu_i}\cdot \sum_{i\in I} \mu_i \frac{dx_i}{x_i} \otimes s$$

La proposition 2.3.3 nous permet d'obtenir la formule d'Esnault-Viehweg :

Proposition 2.4.5 (Formule de décalage des résidus d'Esnault-Viehweg)**.** ([EV92], Lemme 2.7) Avec les mêmes notations qu'au-dessus, on a

$$\mathrm{res}_{D_i}(\nabla(B)) = \mathrm{res}_{D_i}(\nabla) - \mu_i \,\mathrm{id}_{D_i}$$

Exemple 2.4.6. Reprenons l'exemple 1.6. Considérons le diviseur $B = (0) - (\infty)$. On va munir le fibré $\mathcal{N}' = p_0^*\mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^*\mathcal{N}_\infty^\vee$ d'une connexion holomorphe. Soit s la coordonnée canonique autour de 0 (correspondant à la carte $\operatorname{Spec} k[s] = \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$) et $\nabla = d + \frac{ds}{s} : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log D)$ la connexion logarithmique sur le faisceau structurel correspondant à la forme différentielle logarithmique $\omega = \frac{ds}{s}$, où $D = (0) + (\infty)$. Localement ω s'écrit

$$\omega_0 = \frac{ds}{s} \quad \text{et} \quad \omega_\infty = -\frac{ds^{-1}}{s^{-1}}$$

et donc $\operatorname{res}_0 \nabla = 1$ et $\operatorname{res}_\infty \nabla = -1$. On en déduit que la connexion $\nabla(B)$ sur $\mathcal{N}' = p_0^*\mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^*\mathcal{N}_\infty^\vee$ est holomorphe vu que :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{res}_0(\nabla(B)) & = & \operatorname{res}_0 \nabla - 1 \\ & = & 1 - 1 \\ & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \operatorname{res}_\infty(\nabla(B)) & = & \operatorname{res}_\infty \nabla + 1 \\ & = & -1 - 1 \\ & = & 0 \end{array}$$

Comme les connexions holomorphes sur $\mathcal{N}' = p_0^*\mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^*\mathcal{N}_\infty^\vee$ forment un torseur sous

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{N}', \mathcal{N}' \otimes \Omega^1_{\mathfrak{X}}) = \Gamma(\mathfrak{X}, \Omega^1_{\mathfrak{X}}) = \{0\}$$

on a en fait déterminé l'unique connexion holomorphe sur $\mathcal{N}' = p_0^*\mathcal{N}_0 \otimes p_\infty^*\mathcal{N}_\infty^\vee$.

2.5 Définition à partir de l'extension d'Atiyah

2.5.1 Rappels

Ce qui suit est inspiré de ([BK09], §1.1).

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas, $\Delta : X \longrightarrow X \times_S X$ la diagonale. On ne traitera par simplicité que le cas où X/S est un morphisme séparé, pour le cas général voir ([BO78], Proposition 2.9). On a une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "i"'] & & X \times_S X \\ & X^{(1)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

avec $X^{(1)}$ le premier voisinage infinitésimal de X dans $X \times_S X$ et i l'immersion fermée. Considérons $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux qui est le noyau du morphisme $\Delta_\#$. Le faisceau $\Omega^1_{X/S}$ est donné par la définition usuelle $\Omega^1_{X/S} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$. Notons q_1 et q_2 les compositions du morphisme $X^{(1)} \longrightarrow X \times_X X$ avec les projections. On identifie la dérivation canonique $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S}$ au morphisme $i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ donné par $f \mapsto q_2^*f - q_1^*f$. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times X}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times X}/\mathcal{I} \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

Puisque i est une immersion fermée et le faisceau $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est annulé par le faisceau $\mathcal{I}$, on a $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq i_*\Omega^1_{X/S}$, $\mathcal{O}_{X\times X}/\mathcal{I}^2 \simeq \mathcal{O}_{X^{(1)}}$ et $\mathcal{O}_{X\times X}/\mathcal{I} \simeq i_*\mathcal{O}_X$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur X. On tensorise la suite (2.5) par $q_2^*\mathcal{E}$ pour obtenir une suite exacte

$$0 \longrightarrow q_2^*\mathcal{E} \otimes i_*\Omega^1_{X/S} \longrightarrow q_2^*\mathcal{E} \longrightarrow q_2^*\mathcal{E} \otimes i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \tag{2.6}$$

Sachant que par la formule de projection et par le fait que $q_1 \circ i = q_2 \circ i = \mathrm{id}$ on a

$$q_2^*\mathcal{E}\otimes i_*\Omega^1_{X/S}\simeq i_*(i^*q_2^*\mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S})\simeq i_*(\mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S})$$

et

$$q_2^*\mathcal{E}\otimes i_*\mathcal{O}_X\simeq i_*i^*q_2^*\mathcal{E}\simeq i_*\mathcal{E}$$

la suite exacte (2.6) devient

$$0\longrightarrow i_*(\mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S})\longrightarrow q_2^*\mathcal{E}\longrightarrow i_*\mathcal{E}\longrightarrow 0$$

On applique finalement q_{1_*} à cette suite pour obtenir

$$0\longrightarrow \mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S}\longrightarrow q_{1_*}q_2^*\mathcal{E}\longrightarrow \mathcal{E}\longrightarrow 0 \tag{2.7}$$

Définition 2.5.1. La suite exacte 2.7 est appelée l'extension d'Atiyah. Le faisceau $q_{1_*}(q_2^*\mathcal{E})$ est noté $P^1_{X/S}(\mathcal{E})$ et est appelé le faisceau des parties principales de $\mathcal{E}$.

2.5.2 Équivalence des deux définitions

On montre maintenant la correspondance entre les connexions comme sections $\mathcal{O}_X$-linéaires de l'extension d'Atiyah, et les connexions définies avec la condition de Koszul.

Considérons les morphismes

$$X\xrightarrow{i}X^{(1)}\underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}}X\longrightarrow S \tag{2.8}$$

et soit U un ouvert de X. Comme i est un homéomorphisme, on a une égalité

$$q_{2_*}q_2^*\mathcal{E}(U)=q_2^*\mathcal{E}(i(U))=q_{1_*}q_2^*\mathcal{E}(U)$$

en tant que faisceaux ensemblistes. On munit $q_{2_*}q_2^*\mathcal{E}$ d'une structure de faisceau de $p^{-1}\mathcal{O}_S$-modules par le diagramme commutatif (2.8), ce qui fait que $P^1_{X/S}(\mathcal{E})$ et $q_{2_*}q_2^*\mathcal{E}$ soient égaux en tant que $p^{-1}\mathcal{O}_S$-modules.

Montrons que le morphisme canonique $q_2^{\#}:\mathcal{E}\longrightarrow q_{2_*}q_2^*\mathcal{E}$ fournit une section $p^{-1}\mathcal{O}_S$-linéaire de l'extension d'Atiyah (2.7). On a $q_{2_*}q_2^*\mathcal{E}\simeq q_{2_*}q_2^*\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}$. Quitte à tensoriser par $\mathcal{E}$, on peut supposer que $\mathcal{E}=\mathcal{O}_X$. Il faut donc montrer que le morphisme

$$\mathcal{O}_X\longrightarrow q_{2_*}q_2^*\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_X$$

est l'identité. Mais la première flèche est donnée par $f\mapsto 1\otimes f$ et la seconde par $f\otimes g\mapsto fg$.

On peut montrer maintenant la correspondance entre les deux définitions. On rappelle qu'on identifie la dérivation canonique $d:\mathcal{O}_X\longrightarrow\Omega^1_{X/S}$ avec le morphisme $i_*\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ donné par $f\longmapsto q_2^*f-q_1^*f$. Pour des sections locales f et s de $i_*\mathcal{O}_X$ et $q_2^*\mathcal{E}$ respectivement, on a $q_2^*f\otimes s=q_2^{\#}(fs)$ et $q_1^*f\otimes s=fq_2^{\#}(s)$. Soit $\alpha:\mathcal{E}\longrightarrow P^1_{X/S}(\mathcal{E})$ une section $\mathcal{O}_S$-linéaire de (2.7). Comme la composition du morphisme $\alpha-q_2^{\#}$ avec la flèche $P^1_{X/S}(\mathcal{E})\longrightarrow\mathcal{E}$ est nulle, on a donc un morphisme $\mathcal{O}_S$-linéaire $\nabla=\alpha-q_2^{\#}:\mathcal{E}\longrightarrow\Omega^1_{X/S}\otimes\mathcal{E}$. Le morphisme α est $\mathcal{O}_X$-linéaire si et seulement si

$$\alpha(fs)-f\alpha(s)=\nabla(fs)-f\nabla(s)+q_2^{\#}(fs)-fq_2^{\#}(s)=0$$

ce qui est équivalent à dire que

$$\nabla(fs)=f\nabla(s)+q_2^*f\otimes s-q_1^*f\otimes s$$

$$=f\nabla(s)+df\otimes s$$

et donc équivalent au fait que ∇ vérifie la condition de Koszul.

Proposition 2.5.2. La catégorie fibrée $\mathrm{ConnVect}_k(X)$ au-dessus de Sch/S est un champ pour la topologie étale.

Preuve. Remarquons que pour un schéma X/k et un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X, $P^1_{X/k}(\mathcal{E})$ est un faisceau quasi-cohérent car extension de faisceaux quasi-cohérents. Soit $(f_j : X_j \longrightarrow X)_{j\in J}$ un recouvrement étale. Par la descente des faisceaux quasi-cohérents, se donner une section de la suite exacte d'Atiyah revient à se donner des sections sur la restriction à chacun des X_j, telles qu'elles soient compatibles entre elles. Puisque $f_j^* P^1_{X/k}(\mathcal{E}) \simeq P^1_{X_j/k}(f_j^*\mathcal{E})$, ceci est équivalent à se donner une collection de sections compatibles de l'extension d'Atiyah locale. □

2.5.3 Extension d'Atiyah logarithmique

Soit X un schéma lisse sur le schéma de base $S = \mathrm{Spec}(k)$, $\mathbf{D} = (D_i)_{\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs deux à deux distincts telle que la réunion $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples. Considérons la suite exacte d'Atiyah

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S} \longrightarrow P^1_{X/S}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

Notons $P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E})$ la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S}(\log D) \\ P^1_{X/S}(\mathcal{E}) & \end{tikzcd}$$

On a une suite exacte (voir par exemple [Sta],Tag 010I) obtenue comme pushout de l'extension d'Atiyah :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S}(\log D) \longrightarrow P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0 \tag{2.9}$$

Définition 2.5.3. La suite exacte (2.9) est appelée l'extension d'Atiyah logarithmique. Le faisceau $P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E})$ est appelé le faisceau des parties principales logarithmiques de $\mathcal{E}$.

On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S} \arrow[r] \arrow[d] & P^1_{X/S}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E}\otimes\Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r] & P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notons $q^{\#}_{2,\log}$ le morphisme $\mathcal{E} \xrightarrow{q_2^{\#}} P^1_{X/S} \longrightarrow P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E})$. Le morphisme $q^{\#}_{2,\log}$ est une section $p^{-1}\mathcal{O}_S$-linéaire de l'extension d'Atiyah logarithmique (2.9) car le carré de droite est commutatif. On a une correspondance entre les sections $\mathcal{O}_X$-linéaires de la suite (2.9) et les connexions logarithmiques de $\mathcal{E}$. La démonstration de cette correspondance est la même que celle qu'on a donnée pour la correspondance entre sections $\mathcal{O}_X$-linéaires de l'extension d'Atiyah (2.7) et connexions holomorphes, à savoir pour une section $p^{-1}\mathcal{O}_S$-linéaire α de la suite (2.9) on a $\alpha - q^{\#}_{2,\log} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D)$ une connexion logarithmique qui vérifie la règle de Leibniz si et seulement si α est $\mathcal{O}_X$-linéaire. On donnera plus de détails sur la preuve de la correspondance dans la section suivante.

Notation 2.5.4. On note $\mathrm{SecVect}(X, \mathbf{D})$, la catégorie qui a

pour objets : les couples $(\mathcal{E}, s)$, avec

- $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X.
- s une section de la suite exacte d'Atiyah logarithmique 2.9.

et pour morphismes : $(\mathcal{E}', s') \longrightarrow (\mathcal{E}, s)$

- les morphismes $f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ de fibrés vectoriels, faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "f"] & P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}') \arrow[d] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "s"] & P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.5.5. Soit $B = \sum_{i \in I} \mu_i D_i$ un diviseur de Cartier de support dans D, et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X. La suite exacte d'Atiyah logarithmique de $\mathcal{E}(B)$ s'identifie avec le décalage de la suite exacte d'Atiyah logarithmique par B. En d'autres termes, on a un isomorphisme naturel $P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/k}(\mathcal{E}(B)) \simeq P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/k}(\mathcal{E})(B)$ compatible avec les morphismes de la suite exacte d'Atiyah logarithmique.

Preuve. On se ramène à $T_{\mathbf{D}}$, et il nous suffit donc de montrer qu'on a un isomorphisme $P^{1,\log}_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}(p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E}(B)) \simeq P^{1,\log}_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}(p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E})(p^*_{\mathbf{D}}B)$ qui est $\mathbb{G}^I_m$-équivariant, c'est à dire de degré 0 pour la $\mathbb{Z}^I$-graduation naturelle. Ceci vient du fait que la trivialisation canonique $\mathcal{O}_{T_{\mathbf{D}}} \simeq \mathcal{O}_{T_{\mathbf{D}}}(p^*_{\mathbf{D}}(B))$ est de degré $(\mu_i)_{i \in I}$, et induit des isomorphismes $P^{1,\log}_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}(p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E}) \simeq P^{1,\log}_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}(p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E}(B))$ et $P^{1,\log}_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}(p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E}) \simeq P^{1,\log}_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}(p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E})(p^*_{\mathbf{D}}B)$ de degrés $(\mu_i)_{i \in I}$. □

2.5.4 Équivalence des deux définitions dans le cas logarithmique

Considérons l'extension d'Atiyah logarithmique

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \longrightarrow P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

et l'extension d'Atiyah holomorphe associée au fibré $p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E}$

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I} \otimes p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E} \longrightarrow P^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}(p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E}) \longrightarrow p^*_{\mathbf{D}}\mathcal{E} \longrightarrow 0 \tag{2.10}$$

La première suite (logarithmique) est obtenue en prenant l'image directe de la deuxième suite (holomorphe) par le foncteur exact $p^{\mathbb{G}^I_m}_{\mathbf{D}_*}$. En admettant ce résultat, on va montrer la correspondance entre sections de la suite exacte d'Atiyah logarithmique et connexions logarithmiques évoquée à la fin du paragraphe précédent 2.5.5 en s'aidant du cas holomorphe.

Lemme 2.5.6. Les sections $\mathbb{Z}^I$-graduées de l'extension d'Atiyah associée au fibré $p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E}$ correspondent aux sections de la suite logarithmique associée au fibré $\mathcal{E}$.

Preuve. Comme tout est $\mathcal{O}_X$-linéaire, c'est un cas particulier de la descente fppf. $\square$

Lemme 2.5.7. Les connexions $\mathbb{G}_m^I$-équivariantes $p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \longrightarrow p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$ correspondent aux sections $\mathbb{Z}^I$-graduées de l'extension d'Atiyah associée au fibré $p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E}$.

Preuve. Avec le même raisonnement que dans la partie 2.5.2, en remarquant cette fois-ci que la section canonique $q_2^\#$ de la suite (2.10) est $\mathbb{Z}^I$-graduée, une section α est $\mathbb{Z}^I$-graduée et $\mathcal{O}_X$-linéaire si et seulement si le morphisme $\alpha - q_2^\# : p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \longrightarrow p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$ est $\mathbb{Z}^I$-gradué et vérifie la condition de Koszul. $\square$

Lemme 2.5.8. Les connexions $\mathbb{G}_m^I$-équivariantes $\nabla_{\mathbf{D}} : p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \longrightarrow p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$ correspondent aux connexions logarithmiques $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k}(\log D)$.

Preuve. On montre donc que se donner une connexion $\mathbb{G}_m^I$-équivariante $\nabla_{\mathbf{D}} : p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \longrightarrow p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$ est équivalent à se donner une connexion logarithmique $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/k}(\log D)$. On passe de ∇ à $\nabla_{\mathbf{D}}$ en appliquant $p_{\mathbf{D}}^*$ et de $\nabla_{\mathbf{D}}$ à ∇ en appliquant $p_{\mathbf{D}*}^{\mathbb{G}_m^I}$. Il faut d'abord montrer que $\nabla_{\mathbf{D}} := p_{\mathbf{D}}^*\nabla$ est bien défini, ce qui se démontre avec la même preuve que celle du lemme 2.2.4 donnant l'image réciproque d'une connexion.

Reste à montrer que $\nabla_{\mathbf{D}}$ est $\mathbb{Z}^I$-graduée. Pour cela, on raisonne Zariski localement. On suppose que $X = \operatorname{Spec} R$ et on note $k' = k[x_i, i \in I]$, si bien que $\mathbb{A}^I = \operatorname{Spec} k'$. On note R' la k'-algèbre correspondant à $T_{\mathbf{D}}$. Elle est naturellement $\mathbb{Z}^I$-graduée : $R' = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}} R'_l$.

Si le faisceau $\mathcal{E}$ correspond à un R-module M, alors $p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E}$ correspond au R'-module $M' = R' \otimes_R M$ qui a pour graduation $\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}} (R'_l \otimes M)$.

De même, si le faisceau $\Omega^1_{X/S}(\log D)$ correspond à un R-module Ω, et le faisceau $\Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$ à un R'-module Ω' de graduation $\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}} \Omega'_l$, alors $p_{\mathbf{D}}^*\mathcal{E} \otimes \Omega^1_{T_{\mathbf{D}}/\mathbb{A}^I}$ correspond au R'-module $M \otimes_{R'} \Omega'$ dont la graduation est donnée par

$$M \otimes_{R'} \Omega' \simeq \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} (M \otimes_R \Omega'_l) \simeq \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} R'_l \otimes_R (M \otimes_R \Omega)$$

Notons $d : R \longrightarrow \Omega$ et $d_{\mathbf{D}} : R' \longrightarrow \Omega'$ les dérivations k-linéaires et k'-linéaires de Ω et Ω' respectivement. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R R' \arrow[r, "\nabla_{\mathbf{D}}"] & M \otimes_R \Omega' \\ M \arrow[u] \arrow[r, "\nabla"] & M \otimes_R \Omega \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Pour montrer que $\nabla_{\mathbf{D}}$ est $\mathbb{Z}^I$-graduée, on a besoin de considérer un élément de degré l de M' (donc appartenant à $R_l \otimes_R M$) et montrer que l'image de cet élément par $\nabla_{\mathbf{D}}$ est de degré l. Comme $\nabla_{\mathbf{D}}$ est k'-linéaire, on peut se restreindre aux éléments de la forme $m \otimes f$, où $f \in R'_l$. Mais comme $\nabla_{\mathbf{D}}$ vérifie la règle de Leibniz, on a

$$\nabla_{\mathbf{D}}(m \otimes f) = f \nabla_{\mathbf{D}}(m \otimes 1) + m \otimes d_{\mathbf{D}}(f)$$

et donc, comme $d_{\mathbf{D}}(f)$ est aussi de degré l, il nous suffit de montrer que $\nabla_{\mathbf{D}}(m \otimes 1)$ est de degré 0. Mais ceci est donné par la commutativité du diagramme ci-dessus, qui implique en effet que $\nabla_{\mathbf{D}}(m \otimes 1)$ est de degré 0.

$\square$

Ce qui nous permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 2.5.9. On a une équivalence entre la catégorie des sections $\mathcal{O}_X$-linéaires de l'extension d'Atiyah logarithmique $\mathrm{SecVect}(X, \mathbf{D})$ et la catégorie des connexions logarithmiques $\mathrm{ConnVect}(X, \mathbf{D})$.

Preuve. La proposition découle des trois lemmes 2.5.6 , 2.5.7 et 2.5.8. □

Remarque 2.5.10. Par la suite, nous appliquerons ce résultat aux champs des racines plutôt qu'à des schémas. La preuve pour ceux-ci est inchangée en remplaçant le morphisme $p_{\mathbf{D}} : T_{\mathbf{D}} \to X$ par $p_{\mathfrak{D}} : T_{\mathfrak{D}} \to \mathfrak{X}$ (voir 2.1.3).

Chapitre 3

Connexions paraboliques et champ des racines

On introduit dans ce chapitre la notion de connexion fortement parabolique 3.1.4. On commence d'abord par montrer la correspondance entre les connexions paraboliques et les connexions logarithmiques sur les champs des racines 3.1.8, pour cela on utilise l'extension d'Atiyah parabolique 3.1.2. On affine ensuite cette correspondance en montrant que les connexions holomorphes sur les champs des racines sont en correspondance avec les connexions fortement paraboliques 3.3.3. La preuve consiste à montrer que la condition de forte parabolicité (les poids du fibré parabolique sont le spectre du résidu de la connexion) se traduit par le fait que la connexion champêtre correspondante est holomorphe.

De la correspondance, on déduit comme corollaire un résultat de reconstruction des connexions holomorphes 3.3.16. On montre le résultat en premier lieu pour des connexions fortement paraboliques 3.2.9, ce qui nous permet de reconstruire des fibrés paraboliques à partir de la donnée d'une connexion logarithmique $(\mathcal{E}_0, \nabla_0)$, puis grâce à la correspondance 3.3.3 on transporte le résultat pour les connexions holomorphes sur le champ des racines 3.3.16.

On termine en mentionnant une extension naturelle de la définition : la notion de λ-connexion fortement parabolique 3.4.1 qui relie nos connexions aux fibrés de Higgs fortement paraboliques.

On fixera tout au long de ce chapitre les notations suivantes : X un schéma lisse sur un corps k, $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs intègres deux à deux distincts de sorte que la réunion $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers naturels inversibles dans k, $\mathfrak{X} = \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ le champ des racines associé au triplet $(X, \mathbf{D}, \mathbf{r})$, $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ le morphisme vers l'espace des modules X, et $\mathfrak{D}$ la famille de diviseurs canoniques sur $\mathfrak{X}$ qui vérifie $\pi^* D_i = r_i \mathfrak{D}_i$, pour tout i dans I.

3.1 Connexions paraboliques

3.1.1 Définition

Définition 3.1.1. Une **connexion parabolique** sur $(X, \mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ est un couple $(\mathcal{E}_\cdot, \nabla_\cdot)$, avec

- $\mathcal{E}_\cdot$ un fibré parabolique sur $(X, \mathbf{D})$ (voir 1.5.2).

- $\nabla_. : \mathcal{E}_. \longrightarrow \mathcal{E}_. \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D)$ une transformation naturelle où pour chaque $\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}} \in \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$, $\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$ est une connexion logarithmique sur $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$.

Remarque 3.1.2. La définition 3.1.1 implique la compatibilité de $\nabla_.$ avec les isomorphismes de pseudo-périodicité $\mathcal{E}_{.+\mathbf{l}} \simeq \mathcal{E}_. \otimes \mathcal{O}_X(-\mathbf{l}\mathbf{D})$ pour tout $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^I$.

Notation 3.1.3. On note $\mathrm{ConnPar}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ la catégorie qui a

<u>pour objets</u> : les connexions paraboliques $(\mathcal{E}, \nabla)$.

<u>pour morphismes</u> : $(\mathcal{E}'_., \nabla'_.) \longrightarrow (\mathcal{E}_., \nabla_.)$

- les morphismes $h : \mathcal{E}'_. \longrightarrow \mathcal{E}_.$ entre fibrés paraboliques

faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \arrow[r, "h_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}"] \arrow[d, "\nabla'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}"] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \arrow[d, "\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}"] \\
\mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r, "h_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D)
\end{tikzcd}$$

pour tout $\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}^I$.

3.1.2 L'extension d'Atiyah parabolique

On reprend la suite exacte d'Atiyah logarithmique (2.9). Si $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un morphisme de faisceaux localement libres, on a un morphisme $P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}) \longrightarrow P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{F})$ qui est donné par la propriété universelle d'une somme amalgamée et qui donne lieu à un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r] \arrow[d] & P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r] & P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ce qui montre la fonctorialité en $\mathcal{E}$ de la suite exacte d'Atiyah logarithmique. Si on suppose que $\mathcal{E}_.$ est un fibré parabolique, ceci induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_. \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \longrightarrow P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_.) \longrightarrow \mathcal{E}_. \longrightarrow 0 \qquad (3.1)$$

où $P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_.)$ est le foncteur associant à chaque $\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}$ dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$, le fibré vectoriel $P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})$. D'après le lemme 2.5.5, on a $P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_{.+l}) \simeq P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_.)(-\mathbf{l}\mathbf{D})$. Donc $P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_.)$ est un fibré parabolique, et la suite (3.1) est une suite exacte de fibrés paraboliques.

Définition 3.1.4. On appelle la suite exacte (3.1) l'extension d'Atiyah parabolique. Le fibré parabolique $P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_{.})$ est appelé faisceau des parties principales paraboliques de $\mathcal{E}_{.}$.

Notation 3.1.5. On note $\mathrm{SecPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$ la catégorie qui a

pour objets : les couples $(\mathcal{E}_{.}, s_{.})$ avec

- $\mathcal{E}_{.}$ un fibré parabolique sur $(X,\mathbf{D})$ (voir 1.5.2).
- $s_{.}$ une section $\mathcal{O}_X$-linéaire de l'extension d'Atiyah parabolique de $\mathcal{E}_{.}$ (3.1).

pour morphismes : $(\mathcal{E}_{.}, s_{.}) \longrightarrow (\mathcal{E}'_{.}, s'_{.})$,

- les morphismes $\phi_{.} : \mathcal{E}_{.} \longrightarrow \mathcal{E}'_{.}$ entre fibrés paraboliques, faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}'_{\frac{1}{\mathbf{r}}} \arrow[r, "\phi_{\frac{1}{\mathbf{r}}}"] \arrow[d, "s'_{\frac{1}{\mathbf{r}}}"'] & \mathcal{E}_{\frac{1}{\mathbf{r}}} \arrow[d, "s_{\frac{1}{\mathbf{r}}}"] \\ P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}'_{\frac{1}{\mathbf{r}}}) \arrow[r, "P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\phi_{\frac{1}{\mathbf{r}}})"] & P^{1,\log}_{(X,\mathbf{D})/S}(\mathcal{E}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}) \end{tikzcd}$$

3.1.3 La correspondance avec les connexions logarithmiques

Avec les mêmes notations qu'au début du chapitre 3 :

Lemme 3.1.6. On a une équivalence entre la catégorie $\mathrm{ConnPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$ des connexions paraboliques et la catégorie $\mathrm{SecPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$ des sections de la suite exacte d'Atiyah parabolique .

Preuve. La démonstration est la même que celle donnée dans la partie 2.5.2, à savoir : pour une section $\alpha_{.}$ de la suite exacte (3.1), cette section est $\mathcal{O}_X$-linéaire si et seulement si $\alpha_{.} - q^{\#}_{2,.}$ est une connexion parabolique. □

On montre maintenant la version à la Atiyah de la correspondance entre connexions paraboliques et connexions logarithmiques sur les champ des racines :

Lemme 3.1.7. On a une équivalence entre la catégorie $\mathrm{SecPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$ des sections de la suite exacte d'Atiyah parabolique et la catégorie $\mathrm{SecVect}(\mathfrak{X},\mathfrak{D})$ des sections $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaires de l'extension d'Atiyah logarithmique sur le champ des racines.

Preuve. On utilisera la notation $\wedge_{.}$ du théorème 1.5.4 pour désigner les fibrés paraboliques correspondants. Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur le champ des racines $\mathfrak{X}$. L'équivalence de catégories du théorème 1.5.4 montre que la suite

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}\otimes\Omega^1_{\mathfrak{X}/S}(\log\mathfrak{D})}_{.} \longrightarrow \widehat{P^{1,\log}_{(\mathfrak{X},\mathfrak{D})/S}(\mathcal{F})}_{.} \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}}_{.} \longrightarrow 0$$

est exacte. D'après la formule d'Hurwitz 2.1.10 et la formule de projection, on a

$$\begin{aligned}\pi_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/S}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})\otimes\Omega^1_{\mathfrak{X}/S}(\log\mathfrak{D})) &\simeq \pi_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/S}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})\otimes\pi^*\Omega^1_{X/S}(\log D)) \\ &\simeq \pi_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathfrak{X}/S}(-\mathbf{l}\mathfrak{D}))\otimes\Omega^1_{X/S}(\log D)\end{aligned} \tag{3.2}$$

Donc

$$\widehat{\mathcal{F}\otimes\Omega^1_{\mathfrak{X}/S}(\log\mathfrak{D})}_{\cdot} \simeq \widehat{\mathcal{F}}_{\cdot}\otimes\Omega^1_{X/S}(\log D)$$

Ainsi, on a un diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widehat{\mathcal{F}\otimes\Omega^1_{\mathfrak{X}/S}(\log\mathfrak{D})}_{\cdot} \arrow[r] & \widehat{P^{1,\log}_{(\mathfrak{X},\mathfrak{D})/S}(\mathcal{F})}_{\cdot} \arrow[r] & \widehat{\mathcal{F}}_{\cdot} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{\mathcal{F}}_{\cdot}\otimes\Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r] \arrow[u] & P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\widehat{\mathcal{F}}_{\cdot}) \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{\mathcal{F}}_{\cdot} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

qui montre que

$$\widehat{P^{1,\log}_{(\mathfrak{X},\mathfrak{D})/S}(\mathcal{F})}_{\cdot} \simeq P^{1,\mathrm{par}}_{(X,\mathbf{D})/S}(\widehat{\mathcal{F}}_{\cdot})$$

Le théorème 1.5.4 montre qu'une section $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire s de l'extension d'Atiyah logarithmique (2.9) associée au fibré vectoriel $\mathcal{F}$ correspond à une section $\mathcal{O}_X$-linéaire $\widehat{s}_{\cdot}$ de l'extension d'Atiyah parabolique (3.1). □

Proposition 3.1.8. On a une équivalence entre la catégorie $\mathrm{ConnPar}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$ des connexions paraboliques et la catégorie $\mathrm{ConnVect}(\mathfrak{X},\mathfrak{D})$ des connexions logarithmiques .

Preuve. La proposition découle des lemmes 3.1.6 et 3.1.7, et de la proposition 2.5.9. □

3.1.4 Connexions fortement paraboliques

Avant de donner la définition d'une connexion fortement parabolique, on montre la proposition suivante sur la compatibilité des résidus avec les restrictions :

Proposition 3.1.9. Soit $(\mathcal{E}_{\cdot},\nabla_{\cdot})$ une connexion parabolique sur $(X,\mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$.

1. Pour tout $\mathbf{l}'\geq\mathbf{l}$, et pour tout $h\in I$, le morphisme $\left(\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}}\right)_{|D_h}\longrightarrow\left(\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}\right)_{|D_h}$ est compatible avec les résidus $\mathrm{res}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}})$ et $\mathrm{res}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})$.
2. Notons $(\mathbf{e_h})_{h\in I}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^I$. Alors cette compatibilité induit un morphisme

$$\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}/\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}\longrightarrow\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}/\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}$$

   compatible avec le résidu $\mathrm{res}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})$ de $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$.

Preuve. 1. Posons $\mathbf{l}' = \mathbf{l} + \mathbf{e_h}$, et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \arrow[r] \arrow[dl, "\nabla_{\frac{l'}{r}}"'] \arrow[d, two heads, "rest."] & \mathcal{E}_{\frac{l}{r}} \arrow[d, "rest."] \arrow[dr, "\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}"] & \\
\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[dr] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_{D_h} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}})"] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_{D_h} \arrow[d, "\mathrm{res}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})"'] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[dl] \\
 & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_{D_h} \arrow[r] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_{D_h} &
\end{tikzcd}$$

On affirme que le petit carré en bas est commutatif. En effet, comme $\nabla_{.}$ est une transformation naturelle, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}}"] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \arrow[d, "\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}"] \\
\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[d] \\
\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_{D_h} \arrow[r] & \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_{D_h}
\end{tikzcd}$$

sachant que le morphisme de restriction $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_{D_h}$ est un épimorphisme, ceci nous permet de conclure.

2. Remarquons qu'on a une factorisation épi-mono

$$\frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h)} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h)} \hookrightarrow \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h)}$$

provenant des inclusions

$$\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h) \simeq \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}+\mathbf{e_h}} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$$

où l'isomorphisme au milieu est celui de la pseudo-périodicité du fibré parabolique $\mathcal{E}_{.}$. En d'autres termes, cette factorisation prouve que $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}/\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}$ est le conoyau du morphisme $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}|_{D_h} \longrightarrow \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}|_{D_h}$. La compatibilité de ce morphisme avec les résidus et la propriété universelle du conoyau montrent qu'il existe un unique morphisme $\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}) : \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}} \longrightarrow \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{res}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})"'] & \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}} \arrow[d, "\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})"] \\
\frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h)} \arrow[r, two heads] & \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}}
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

$\square$

Définition 3.1.10. Une connexion **fortement parabolique** est une connexion parabolique $(\mathcal{E}_\cdot, \nabla_\cdot)$ avec la condition sur les résidus le long de chaque D_h, $h \in I$, et pour tout $\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}^I$:

$$\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}) = \frac{l_h}{r_h}\,\mathrm{id}$$

où $\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})$ désigne le morphisme du diagramme ci-dessus (3.4) induit sur le quotient $\dfrac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}}$.

Notation 3.1.11. On note $\mathrm{ConnFPar}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{ConnPar}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ 3.1.3, dont les objets sont les connexions fortement paraboliques.

3.2 Reconstruction de la structure parabolique

Soit X un schéma lisse sur un corps k, $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs telle que la réunion $D = \bigcup_{i\in I} D_i$ soit à croisements normaux simples, $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers naturels inversibles dans k, et $\mathcal{E}_\cdot$ un fibré parabolique sur $(X, \mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$. Notons $(\mathbf{e_i})_{i\in I}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^I$.

3.2.1 La définition de Seshadri

Définition 3.2.1. La filtration par les poids [1] $F^w_\cdot(\mathcal{E}_{0|_D})$ sur $\mathcal{E}_{0|_D}$ est la filtration d'indices dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \cap [0,1]^I$ qui est donnée, pour tout $\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}$ dans $\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \cap [0,1]^I$ par

$$F^w_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}(\mathcal{E}_{0|_D}) = \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_0(-D)}$$

Notation 3.2.2. Notons $\mathrm{Sesh}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ la catégorie [2] qui a

<u>pour objets</u> : les couples $(\mathcal{E}, F_\cdot)$, avec

- $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X.
- $F_\cdot$ une filtration décroissante sur $\mathcal{E}_{|D}$ d'indices dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \cap [0,1]^I$ qui vérifie $F_0(\mathcal{E}_{|D}) = \mathcal{E}_{|D}$ et $F_1(\mathcal{E}_{|D}) = 0$.

<u>pour morphismes</u> : $(\mathcal{E}', F_\cdot) \longrightarrow (\mathcal{E}, F_\cdot)$,

- les morphismes $f : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ entre fibrés vectoriels, compatibles avec les filtrations, au sens où $f(F_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}(\mathcal{E}'_{|D})) \subset F_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}(\mathcal{E}_{|D})$.

Remarque 3.2.3. La catégorie $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ est une sous-catégorie pleinement fidèle de $\mathrm{Sesh}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$, de foncteur d'inclusion donné par $\mathcal{E}_\cdot \longmapsto (\mathcal{E}_0, F^w_\cdot)$.

En effet, le foncteur est fidèle, car si un morphisme de fibrés paraboliques $\mathcal{E}'_\cdot \longrightarrow \mathcal{E}_\cdot$ est nul sur le morphisme des fibrés vectoriels sous-jacents : $\mathcal{E}'_0 \longrightarrow \mathcal{E}_0$, alors les morphismes $\mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$ sont aussi nuls : pour $\mathbf{l} \geq 0$, cela découle de la fonctorialité et de $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \subset \mathcal{E}_0$, et par pseudo-périodicité, c'est vrai

1. En anglais : weight filtration. La notation w sur F est pour le mot "weight".
2. La catégorie Sesh pour Seshadri, en hommage à C.S. Seshadri qui a introduit la notion de fibré parabolique.

pour un $\mathbf{l}$ arbitraire. Le foncteur est plein, car si $f : \mathcal{E}'_0 \longrightarrow \mathcal{E}_0$ est un morphisme compatible aux filtrations, alors pour $l \in \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \cap [0,1]^I$, on a par hypothèse que $f\left(\mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}\right)/\mathcal{E}_0(-D) \subset \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}/\mathcal{E}_0(-D)$, ce qui implique $f(\mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}) \subset \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$.

Définition 3.2.4. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur D, et $F_.$ une filtration décroissante de $\mathcal{G}$ d'indices dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \cap [0,1]^I$ telle que $F_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $F_1(\mathcal{G}) = 0$. La filtration $F_.$ est dite cartésienne si pour tout $\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}$ dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \cap [0,1]^I$, on a

$$F_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}(\mathcal{G}) \;=\; \bigcap_{i\in I} F_{\frac{l_i}{r_i}\mathbf{e_i}}(\mathcal{G})$$

Lemme 3.2.5. Soit $\mathcal{E}_.$ un fibré parabolique sur $(X,\mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$, et $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ dans $\mathbb{Z}^I$ tels que $\mathbf{l} \le \mathbf{l}' \le \mathbf{l} + \mathbf{r}$. Alors :

$$\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+(l'_i-l_i)\mathbf{e_i}}{\mathbf{r}}}$$

Preuve. Puisque $\mathbf{l}+(l'_i-l_i)\mathbf{e_i} = (l_1,\ldots,l_{i-1},l'_i,l_{i+1},\ldots,l_N) \le \mathbf{l}'$, pour tout i dans I, on a une première inclusion

$$\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+(l'_i-l_i)\mathbf{e_i}}{\mathbf{r}}}$$

En ce qui concerne l'inclusion inverse, on a par la pseudo-périodicité des fibrés paraboliques 3.1.2, pour tout i dans I :

$$\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+(l'_i-l_i)\mathbf{e_i}}{\mathbf{r}}} \subset \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'-\mathbf{r}}{\mathbf{r}}+\mathbf{e_i}} = \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'-\mathbf{r}}{\mathbf{r}}}(-D_i)$$

Donc

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+(l'_i-l_i)\mathbf{e_i}}{\mathbf{r}}} \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'-\mathbf{r}}{\mathbf{r}}}(-D_i)$$

De plus

$$\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}} = \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'-\mathbf{r}}{\mathbf{r}}+\mathbf{1}} = \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'-\mathbf{r}}{\mathbf{r}}}\left(-\sum_{i\in I} D_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'-\mathbf{r}}{\mathbf{r}}}(-D_i)$$

Cette dernière inclusion est une égalité puisque $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}}}$ est localement libre et $\mathcal{O}_X(-\sum_{i\in I} D_i) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_X(-D_i)$. En effet, pour chaque $i \in I$, $\mathcal{O}_X(-D_i)$ est engendré localement par une équation locale f_i de D_i. Comme les D_i sont intègres, deux à deux distincts, les f_i sont premiers, donc irréductibles, deux à deux non associés. Comme D est un diviseur à croisements normaux, les anneaux locaux sont réguliers, donc factoriels, il en découle que les idéaux (f_i) sont deux à deux premiers entre eux, d'où la conclusion. □

Lemme 3.2.6. Soit $\mathcal{E}_.$ un fibré parabolique sur $(X,\mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$. Alors la filtration par les poids $F^w_.$ de $\mathcal{E}_{0|_\mathbf{D}}$ est cartésienne.

Preuve. Le lemme résulte du lemme 3.2.5 pour $\mathbf{l} = 0$. □

3.2.2 Connexions à résidus semi-simples

Notation 3.2.7. On note $\mathrm{ConnVect}^{ss}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ la catégorie qui a

pour objets : les connexions logarithmiques $(\mathcal{E}, \nabla)$ dont le résidu $\mathrm{res}_{D_i}(\nabla)$ le long de chaque D_i (qui est un endomorphisme de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D_i}$ d'après la remarque 2.3.2), $i \in I$, est semi-simple de valeurs propres dans $\frac{1}{r_i}\mathbb{Z} \cap [0, 1[$.

pour morphismes : $(\mathcal{E}', \nabla') \longrightarrow (\mathcal{E}, \nabla)$, les morphismes entre connexions logarithmiques.

Si $\mathrm{res}_{D_i}(\nabla)$ est semi-simple, on note $\mathcal{E}_{|D_i}(\frac{l_i}{r_i})$ le sous-faisceau propre de $\mathcal{E}_{|D_i}$ associé à la valeur propre $\frac{l_i}{r_i} \in \frac{1}{r_i}\mathbb{Z} \cap [0, 1[$. Pour tout i dans I, le faisceau $\mathcal{E}_{|D_i}$ admet une filtration $F^{\nabla}_{\cdot}$ d'indices dans $\frac{1}{r_i}\mathbb{Z} \cap [0, 1]$

$$F^{\nabla}_{\frac{l_i}{r_i}}(\mathcal{E}_{|D_i}) = \bigoplus_{l_i \leq m_i < r_i} \mathcal{E}_{|D_i}(\frac{m_i}{r_i})$$

vérifiant $F^{\nabla}_0(\mathcal{E}_{|D_i}) = \mathcal{E}_{|D_i}$ et $F^{\nabla}_1(\mathcal{E}_{|D_i}) = 0$. L'image réciproque de cette filtration par le morphisme $\mathcal{E}_{|D} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_{|D_i}$, induit une filtration $F^{\nabla}_{\cdot}$ de $\mathcal{E}_{|D}$, d'indices dans $\frac{1}{r_i}\mathbb{Z} \cap [0, 1]$ et vérifiant $F^{\nabla}_0(\mathcal{E}_{|D}) = \mathcal{E}_{|D}$. On a de plus, $F^{\nabla}_1(\mathcal{E}_{|D}) = \frac{\mathcal{E}(-D_i)}{\mathcal{E}(-D)}$.

On peut étendre cette filtration à des indices dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \cap [0, 1]^I$, en posant

$$F^{\nabla}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}(\mathcal{E}_{|D}) = \bigcap_{i \in I} F^{\nabla}_{\frac{l_i}{r_i}}(\mathcal{E}_{|D})$$

La filtration $F^{\nabla}_{\cdot}$ est cartésienne, car

$$F^{\nabla}_{\frac{l_i}{r_i}\mathbf{e_i}}(\mathcal{E}_{|D}) = \bigcap_{\substack{j \in I \\ j \neq \frac{l_i}{r_i}}} F^{\nabla}_0(\mathcal{E}_{|D}) \cap F^{\nabla}_{\frac{l_i}{r_i}}(\mathcal{E}_{|D}) = F^{\nabla}_{\frac{l_i}{r_i}}(\mathcal{E}_{|D})$$

Et elle vérifie de plus

$$F^{\nabla}_0(\mathcal{E}_{|D}) = \bigcap_{i \in I} F^{\nabla}_0(\mathcal{E}_{|D}) = \mathcal{E}_{|D}$$

$$F^{\nabla}_1(\mathcal{E}_{|D}) = \bigcap_{i \in I} F^{\nabla}_1(\mathcal{E}_{|D}) = \bigcap_{i \in I} \frac{\mathcal{E}(-D_i)}{\mathcal{E}(-D)} = \frac{\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}(-D_i)}{\mathcal{E}(-D)} = \frac{\mathcal{E}(-D)}{\mathcal{E}(-D)} = 0$$

où l'avant-dernière égalité provient du même argument que celui qui est donné dans la preuve du lemme 3.2.5.

3.2.3 Coïncidence des filtrations

Proposition 3.2.8. Soit $(\mathcal{E}_{\cdot}, \nabla_{\cdot})$ une connexion fortement parabolique sur $(X, \mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$. Alors pour chaque $i \in I$, le résidu $\mathrm{res}_{D_i}(\nabla_0)$ de la connexion logarithmique $(\mathcal{E}_0, \nabla_0)$ est semi-simple de valeurs propres dans $\frac{1}{r_i}\mathbb{Z} \cap [0, 1[$, et la filtration de $\mathcal{E}_{0|_{\mathbf{D}}}$ associée à ∇_0 coïncide avec la filtration par les poids du fibré parabolique $\mathcal{E}_{\cdot}$, à savoir $F^{w}_{\cdot} = F^{\nabla_0}_{\cdot}$.

En d'autres termes, on a un diagramme bien défini et commutatif

$$
\begin{tikzcd}
& (\mathcal{E}_., \nabla_.) \arrow[r, mapsto] & \mathcal{E}_. & \\
(\mathcal{E}_., \nabla_.) \arrow[d, mapsto] & \mathrm{ConnFPar}_{\frac{1}{r}}(X, \mathbf{D}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, \mathbf{D}) \arrow[d, hook] & \mathcal{E}_. \arrow[d, mapsto] \\
(\mathcal{E}_0, \nabla_0) & \mathrm{ConnVect}^{ss}_{\frac{1}{r}}(X, \mathbf{D}) \arrow[r] & \mathrm{Sesh}_{\frac{1}{r}}(X, \mathbf{D}) & (\mathcal{E}_0, F^w_.) \\
& (\mathcal{E}, \nabla) \arrow[r, mapsto] & (\mathcal{E}, F^{\nabla}_.) &
\end{tikzcd}
\tag{3.5}
$$

De cette proposition découle la conséquence suivante

Corollaire 3.2.9. Soient $(\mathcal{E}_., \nabla_.)$ et $(\mathcal{E}'_., \nabla'_.)$ deux connexions fortement paraboliques sur $(X, \mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$. Alors tout isomorphisme $(\mathcal{E}_0, \nabla_0) \simeq (\mathcal{E}'_0, \nabla'_0)$ se relève de manière unique en un isomorphisme $(\mathcal{E}_., \nabla_.) \simeq (\mathcal{E}'_., \nabla'_.)$.

Preuve. Comme le foncteur $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, \mathbf{D}) \hookrightarrow \mathrm{Sesh}_{\frac{1}{r}}(X, \mathbf{D})$ est pleinement fidèle, et de par la commutativité du diagramme (3.5), l'isomorphisme entre fibrés vectoriels $\mathcal{E}_0 \simeq \mathcal{E}'_0$ est compatible, par hypothèse, avec les filtrations par les poids (vu que celles-ci sont égales à $F^{\nabla_0}_.$ et $F^{\nabla'_0}_.$), et donc se relève (de manière unique) en un isomorphisme entre fibrés paraboliques $\mathcal{E}_. \simeq \mathcal{E}'_.$. Considérons le diagramme pour $\mathbf{l} \geq 0$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, dashed, "\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}"] & & \mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \arrow[dr, hook] \arrow[dd, dashed, "\nabla'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}" near start] & \\
& \mathcal{E}_0 \arrow[rr] \arrow[dd, "\nabla_0" near start] & & \mathcal{E}'_0 \arrow[dd, "\nabla'_0"] \\
\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D) \arrow[dr, hook] & \\
& \mathcal{E}_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D) \arrow[rr] & & \mathcal{E}'_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D)
\end{tikzcd}
$$

Il s'agit de voir que la face arrière du diagramme commute. Puisque l'isomorphisme $\mathcal{E}_0 \simeq \mathcal{E}'_0$ est compatible avec les connexions ∇_0 et ∇'_0, on a la commutativité des autres faces, et comme de plus le morphisme $\mathcal{E}'_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D) \hookrightarrow \mathcal{E}'_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/k}(\log D)$ est un monomorphisme, la face arrière est aussi commutative, et ce pour tout $\mathbf{l} \geq 0$. Par pseudo-périodicité 3.1.2, c'est aussi vrai pour un $\mathbf{l}$ arbitraire. $\square$

Avant de montrer la proposition 3.2.8, on montre les lemmes suivants. Le premier est le résultat bien connu :

Lemme 3.2.10. Soit Y un schéma et $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ un morphisme de faisceaux localement libres sur Y de rangs finis. Pour y dans Y, notons $\mathrm{rg}_y\,\phi$ le rang du morphisme $k(y)$-linéaire $\phi_y \otimes k(y) : \mathcal{E}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \longrightarrow \mathcal{E}'_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)$. Alors

1. Si $\mathrm{coker}(\phi)$ est localement libre, alors l'application $y \longmapsto \mathrm{rg}_y \phi$ est localement constante.

2. Si Y est réduit et l'application $y \longmapsto \mathrm{rg}_y \phi$ est localement constante, alors $\mathrm{coker}(\phi)$ est localement libre.

Preuve. 1. Comme le foncteur $. \otimes_{O_{Y,y}} k(y)$ est exact à droite, on a une suite exacte

$$\mathcal{E}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \longrightarrow \mathcal{E}'_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \longrightarrow \mathrm{coker}\, \phi_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \longrightarrow 0$$

D'après le théorème du rang

$$\mathrm{rg}_y \phi = \dim_{k(y)}(\mathcal{E}'_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) - \dim_{k(y)}(\mathrm{coker}\, \phi_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y))$$

Puisque les applications

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ y & \longmapsto & \dim_{k(y)}(\mathcal{E}'_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ y & \longmapsto & \dim_{k(y)}(\mathrm{coker}\, \phi_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) \end{array}$$

sont localement constantes d'après ([Sta], Tag 05P2), alors l'application $y \longmapsto \mathrm{rg}_y \phi$ l'est aussi.

2. Le théorème du rang implique que l'application $y \longmapsto \dim_{k(y)}(\mathrm{coker}\, \phi_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y))$ est localement constante, et comme Y est réduit, on peut conclure par le lemme ([Sta], Tag 0FWH).

□

Remarque 3.2.11. Si $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est un morphisme de faisceaux localement libres de rangs finis, et que $\mathrm{coker}\, \phi$ est localement libre, alors l'image $\mathrm{Im}\, \phi$ et le noyau $\ker \phi$ sont aussi localement libres.

En effet, cela résulte du fait suivant : Si $0 \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents, tel que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ soient localement libres, alors $\mathcal{E}''$ est aussi localement libre. Pour le démontrer, on raisonne Zariski localement. On peut supposer que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^{\oplus d}$ et que $\mathcal{E}' = \mathcal{O}_Y^{\oplus d'}$. La suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{O}_Y^{\oplus d} \longrightarrow \mathcal{O}_Y^{\oplus d'} \longrightarrow 0$ admet alors une section $\mathcal{O}_Y^{\oplus d'} \longrightarrow \mathcal{O}_Y^{\oplus d}$ qui permet d'écrire $\mathcal{E}$ comme la somme directe $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$. Donc $\mathcal{E}''$ est localement un facteur direct d'un module libre, donc est localement libre d'après ([Sta], Tag 00NX).

On applique ce résultat aux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, \phi \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathrm{coker}(\phi) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \ker \phi \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Im}\, \phi \longrightarrow 0$$

On déduit de la première suite que $\mathrm{Im}\, \phi$ est localement libre, et de la seconde que $\ker \phi$ est localement libre.

Définition 3.2.12. Soit Y un schéma, et $\phi : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ un monomorphisme de faisceaux localement libres sur Y. Le faisceau $\mathcal{E}$ est dit un **sous-fibré** de $\mathcal{E}'$, si le conoyau $\mathrm{coker}(\phi)$ est localement libre.

Remarque 3.2.13. Supposons qu'on a des inclusions $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, avec $\mathcal{E}'$ un sous-fibré de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{E}''$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}'$, si et seulement si $\mathcal{E}''$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$.

En effet, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E}') \longrightarrow \operatorname{coker}(\mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E}) \longrightarrow \operatorname{coker}(\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

Donc tout comme l'argument utilisé pour la remarque 3.2.11, $\operatorname{coker}(\mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E}')$ est localement libre si et seulement si $\operatorname{coker}(\mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E})$ est localement libre.

Lemme 3.2.14. Soit Y un schéma réduit sur un corps k, $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un endomorphisme d'un faisceau $\mathcal{E}$ localement libre de rang fini, et $F_0\mathcal{E} = \mathcal{E} \supset F_1\mathcal{E} \supset \cdots \supset F_N\mathcal{E} \supset F_{N+1}\mathcal{E} = \{0\}$ une filtration de $\mathcal{E}$ par des sous-fibrés. On suppose que la filtration $F_.$ est ϕ-stable et que pour tout $i = 0, \ldots, N$, ϕ induit $\lambda_i \operatorname{id}$ sur le quotient $\frac{F_i\mathcal{E}}{F_{i+1}\mathcal{E}}$, avec les λ_i deux à deux distincts. Alors :

1. ϕ est semi-simple. Explicitement, on a $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^{N} \mathcal{E}(\lambda_i)$, et $\mathcal{E}(\lambda_i)$, le sous-faisceau propre associé à λ_i, est localement libre de rang $\frac{F_i\mathcal{E}}{F_{i+1}\mathcal{E}}$.

2. Pour tout $i = 0, \ldots N$, on a $F_i\mathcal{E} = \bigoplus_{j=i}^{N} \mathcal{E}(\lambda_j)$.

Preuve. On remarque que le premier point implique le deuxième. En effet supposons le premier point vrai. Alors comme $(F_1\mathcal{E})(\lambda_i)$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}(\lambda_i)$, et que d'après le premier point ces deux fibrés ont même rang pour $i \geq 1$, ils sont donc égaux. Une récurrence sur la longueur N de la filtration suffit à conclure.

Pour montrer le premier point, remarquons que c'est valable sur le spectre d'un corps, puisque le polynôme $P = (t - \lambda_0) \ldots (t - \lambda_N)$ annule le morphisme ϕ. On a par le théorème du rang et pour tout y dans Y

$$\operatorname{rg}_y(\phi_y - \lambda_i \operatorname{id}) = \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{E}_y - \dim_{k(y)}(\ker(\phi_y - \lambda_i \operatorname{id}))$$

et le cas d'un corps donne que $\dim_{k(y)}(\ker(\phi_y - \lambda_i \operatorname{id})) = \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_{Y,y}}(\frac{F_i\mathcal{E}}{F_{i+1}\mathcal{E}})_y$. Comme les applications $y \longmapsto \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{E}_y$ et $y \longmapsto \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_{Y,y}}(\frac{F_i\mathcal{E}}{F_{i+1}\mathcal{E}})_y$ sont localement constantes, alors $\operatorname{rg}(\phi - \lambda_i \operatorname{id})$ l'est aussi. Donc d'après le lemme 3.2.10, $\operatorname{coker}(\phi - \lambda_i \operatorname{id})$ est localement libre et est de rang égal à $\operatorname{rg}(\mathcal{E}) - \operatorname{rg}(\frac{F_i\mathcal{E}}{F_{i+1}\mathcal{E}})$.

Il s'ensuit de la remarque 3.2.11 et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(\lambda_i) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \operatorname{coker}(\phi - \lambda_i \operatorname{id}) \longrightarrow 0$$

que $\mathcal{E}(\lambda_i)$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$, et de rang

$$\operatorname{rg} \mathcal{E}(\lambda_i) = \operatorname{rg} \mathcal{E} - \operatorname{rg}(\operatorname{coker}(\phi - \lambda_i \operatorname{id})) = \operatorname{rg} \frac{F_i\mathcal{E}}{F_{i+1}\mathcal{E}}$$

Si on prend la somme directe des $\mathcal{E}(\lambda_i)$, on obtient un monomorphisme $\bigoplus_{i=0}^N \mathcal{E}(\lambda_i) \hookrightarrow \mathcal{E}$ avec $\bigoplus_{i=0}^N \mathcal{E}(\lambda_i)$ de même rang que le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ puisque

$$\operatorname{rg} \bigoplus_{i=0}^{N} \mathcal{E}(\lambda_i) = \sum_{i=0}^{N} \operatorname{rg} \frac{F_i\mathcal{E}}{F_{i+1}\mathcal{E}} = \operatorname{rg} F_0\mathcal{E} - \operatorname{rg} F_{N+1}\mathcal{E} = \operatorname{rg} \mathcal{E}$$

Comme $\bigoplus_{i=0}^N \mathcal{E}(\lambda_i)$ est un sous-fibré de même rang que $\mathcal{E}$, alors $\bigoplus_{i=0}^N \mathcal{E}(\lambda_i) \longrightarrow \mathcal{E}$ est un isomorphisme.

□

On peut maintenant montrer la proposition fondamentale de cette partie :

Preuve de la proposition 3.2.8. D'après le lemme 3.2.6, les filtrations $F^w_{\cdot}$ et $F^{\nabla}_{\cdot}$ sont cartésiennes. Donc quitte à prendre $(\mathcal{E}_{\frac{l_i}{r_i}e_i})_{l_i\in\mathbb{Z}}$ comme fibré parabolique sur (X, D_i), on peut supposer que $\#I = 1$ et travailler dans la situation d'un seul diviseur.

D'après ([Bor09], lemme 2.3.11), on a une filtration par des $\mathcal{O}_D$-sous-fibrés

$$\mathcal{E}_{0|_D} \supset \frac{\mathcal{E}_{\frac{1}{r}}}{\mathcal{E}_0(-D)} \supset \cdots \supset \frac{\mathcal{E}_{\frac{r-1}{r}}}{\mathcal{E}_0(-D)} \supset 0$$

Cette filtration est stable par le résidu $\mathrm{res}_D(\nabla_0)$ et ce dernier induit $\frac{l}{r}\,\mathrm{id}$ sur chacun des quotients de la filtration $\left(\frac{\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}}{\mathcal{E}_0(-D)}\right) / \left(\frac{\mathcal{E}_{\frac{l+1}{r}}}{\mathcal{E}_0(-D)}\right)$, ou en d'autres termes sur chacun des $\frac{\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}}{\mathcal{E}_{\frac{l+1}{r}}}$. On conclut par le lemme 3.2.14 que le résidu $\mathrm{res}_D(\nabla_0)$ est semi-simple et qu'on a

$$F^w_{\frac{l}{r}}(\mathcal{E}_{0|_D}) = \frac{\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}}{\mathcal{E}_0(-D)} = \bigoplus_{m=l}^{r-1} \mathcal{E}_{0|_D}(\frac{m}{r}) = F^{\nabla_0}_{\frac{l}{r}}(\mathcal{E}_{0|_D})$$

$\square$

Remarque 3.2.15. Le foncteur $\mathrm{ConnFPar}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D}) \longrightarrow \mathrm{Conn}^{ss}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$, de la proposition 3.2.8, qui envoie un objet $(\mathcal{E}_{\cdot}, \nabla_{\cdot})$ vers $(\mathcal{E}_0, \nabla_0)$, n'est pas essentiellement surjectif. En effet, considérons $X = \mathbb{A}^2$, $D = \{0\} \times \mathbb{A}^1$, $r = 2$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^{\oplus 2}$, et soit ∇ la connexion dont la matrice des 1-formes différentielles est donnée par

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{dx}{x} & 0 \\ dy & 0 \end{pmatrix}.$$

Le fibré parabolique correspondant vérifie $\mathcal{E}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-D)$. Comme $dy \notin \Omega^1_X(\log D)(-D)$, ce sous-module n'est pas stable par ∇.

3.3 La correspondance

3.3.1 L'énoncé

Définition 3.3.1. Pour une connexion logarithmique $(\mathcal{F}, \nabla)$ sur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$, on note $(\widehat{\mathcal{F}}_{\cdot}, \widehat{\nabla}_{\cdot})$ la connexion parabolique sur $(X, \mathbf{D})$ à poids dans $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$, avec

- $\widehat{\mathcal{F}}_{\cdot}$ le fibré parabolique donné par la correspondance 1.5.4.
- $\widehat{\nabla}_{\cdot}$ la connexion parabolique définie, pour tout $\mathbf{l}$ dans $\mathbb{Z}^I$, par : $\widehat{\nabla}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} = \pi_*(\nabla(-\mathbf{l}\mathfrak{D}))$.

où $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ est le morphisme naturel du champ des racines vers l'espace des modules.

Remarque 3.3.2. Pour définir la connexion $\widehat{\nabla}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$, on a utilisé, dans le cadre des champs de Deligne-Mumford, les opérations suivantes :

- Le décalage d'une connexion logarithmique $(\mathcal{F}, \nabla)$ par un diviseur de support dans $\mathfrak{D}$ (voir 2.4.3).
- L'image directe d'une connexion logarithmique sur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ le long du morphisme log-étale $(\pi, (r_i)_{i\in I})$: $(\mathfrak{X}, (\mathfrak{D}_i)_{i\in I}) \longrightarrow (X, (D_i)_{i\in I})$ (voir 2.2.7).

Théorème 3.3.3. Une connexion logarithmique $(\mathcal{F}, \nabla)$ est holomorphe si et seulement si la connexion parabolique correspondante $(\widehat{\mathcal{F}}_{\cdot}, \widehat{\nabla}_{\cdot})$ est fortement parabolique.

Pour montrer le théorème, on aura besoin du lemme ci-dessous. On considère, pour tout h dans I, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}_h \arrow[r, hook, "j_h"] \arrow[d, "p_h"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\pi"] \\ D_h \arrow[r, hook, "i_h"] & X \end{tikzcd}$$

Lemme 3.3.4. Soit $(\mathcal{F}, \nabla)$ une connexion logarithmique. Le morphisme canonique

$$c_h : i_h^* \pi_* \mathcal{F} \longrightarrow p_{h_*} j_h^* \mathcal{F}$$

est le conoyau du morphisme $i_h^* \pi_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-D_h) \longrightarrow i_h^* \pi_* \mathcal{F}$. Il fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\pi_* \mathcal{F})_{|D_h} \arrow[r, two heads, "c_h"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{D_h}(\pi_* \nabla)"'] & p_{h_*}(\mathcal{F}_{|\mathfrak{D}_h}) \arrow[d, "p_{h_*} \mathrm{res}_{\mathfrak{D}_h}(\nabla)"] \\ (\pi_* \mathcal{F})_{|D_h} \arrow[r, two heads, "r_h\ c_h"] & p_{h_*}(\mathcal{F}_{|\mathfrak{D}_h}) \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Preuve. $\mathcal{F}$ est localement libre, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-\mathfrak{D}_h) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes j_{h_*} \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_h} \longrightarrow 0$$

avec

$$\mathcal{F} \otimes j_{h_*} \mathcal{O}_{\mathfrak{D}_h} \simeq j_{h_*} j_h^* \mathcal{F}$$

d'après la formule de projection. Comme $\pi : \mathfrak{X} \longrightarrow X$ est un champ modéré, le foncteur π_* est exact (voir [Ols16], Proposition 11.3.4), et on obtient une suite exacte

$$i_h^* \pi_* (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(-\mathfrak{D}_h)) \longrightarrow i_h^* \pi_* \mathcal{F} \longrightarrow i_h^* \pi_* j_{h_*} j_h^* \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

avec

$$i_h^* \pi_* j_{h_*} j_h^* \mathcal{F} \simeq i_h^* i_{h_*} p_{h_*} j_h^* \mathcal{F} \simeq p_{h_*} j_h^* \mathcal{F}$$

Montrons la commutativité du diagramme (3.6). Ceci revient à montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_* \mathcal{F} \arrow[r, "\pi_* \nabla"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \pi_* \mathcal{F} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{res}"] \arrow[d] & i_{h*} i_h^* \pi_* \mathcal{F} \arrow[d, "r_h(i_{h_*} c_h)"] \\ \pi_* \mathcal{F} \arrow[r, "\pi_* \nabla"] & \pi_*(\mathcal{F} \otimes \Omega^1_{\mathfrak{X}/S}(\log \mathfrak{D})) \arrow[r, "\pi_*(\mathrm{id} \otimes \mathrm{res})"] & \pi_* j_{h*} j_h^* \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Le carré de gauche est commutatif de par la définition de $\pi_* \nabla$ (voir 2.2.2.2). Pour le carré de droite, on est ramené par l'adjonction $\pi_* \dashv \pi^*$ à un diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\pi^*\pi_*\mathcal{F}\otimes\pi^*\Omega^1_{X/S}(\log D) \arrow[r] \arrow[d] & \pi^* i_{h*} {i_h}^* \pi_*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\pi_*\mathcal{F}\otimes\pi^* i_{h*}\mathcal{O}_{D_h} \arrow[d, "\times r_h"] \\
\mathcal{F}\otimes\Omega^1_{\mathfrak{X}/S}(\log\mathfrak{D}) \arrow[r] & j_{h*}{j_h}^*\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F}\otimes j_{h*}\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_h}
\end{tikzcd}
\tag{3.7}
$$

On peut se restreindre au cas $\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Dans ce cas, la commutativité du diagramme est obtenue à partir de l'égalité $r_h\mathfrak{D}_h=\pi^*D_h$. En effet, si s_h est une équation locale de D_h, alors $\mathfrak{D}_h$ admet canoniquement une équation locale t_h telle que $s_h=t_h^{r_h}$ ([Bor07], Corollaire 3.5) et $\frac{ds_h}{s_h}=r_h\frac{dt_h}{t_h}$ permet de conclure, puisque dans ce cas, les deux faisceaux $\pi^* i_{h*}{i_h}^*\pi_*\mathcal{F}$ et $\pi^*\pi_*\mathcal{F}\otimes\pi^* i_{h*}\mathcal{O}_{D_h}$ sont isomorphes au faisceau $\pi^* i_{h*}\mathcal{O}_{D_h}$, les deux faisceaux $j_{h*}{j_h}^*\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}\otimes j_{h*}\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_h}$ sont isomorphes au faisceau $j_{h*}\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_h}$, et les deux morphismes verticales qui se trouvent sur le carré à droite du diagramme ci-dessus (3.7) envoient $\frac{ds_h}{s_h}$ vers $r_h\frac{dt_h}{t_h}$. $\square$

3.3.2 Preuve du sens direct du théorème 3.3.3

Soit $(\mathcal{F},\nabla)$ une connexion holomorphe sur $(\mathfrak{X},\mathfrak{D})$, et $(\widehat{\mathcal{F}}_\cdot,\widehat{\nabla}_\cdot)$ la connexion parabolique correspondante 3.3.1. Pour tout $\mathbf{l}$ dans $\mathbb{Z}^I$, on note $\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}$ le fibré $\pi_*\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})$. Par la proposition 3.1.9, le morphisme $\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})$ induit par le résidu $\mathrm{res}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}})$ est un endomorphisme de ${}^{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}\!\big/_{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}}$, avec

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}\!\big/_{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}} &= \frac{\pi_*\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})}{\pi_*\mathcal{F}(-(\mathbf{l}+\mathbf{e_h})\mathfrak{D})}\\
&\simeq \pi_*\left(\frac{\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})}{\mathcal{F}(-(\mathbf{l}+\mathbf{e_h})\mathfrak{D})}\right)\\
&\simeq \pi_* j_{h_*} j_h^*\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})\\
&\simeq i_{h_*} p_{h_*} j_h^*\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})
\end{aligned}
$$

La deuxième ligne de l'équation ci-dessus provient de l'exactitude de π_* (voir 1.3.11). On en déduit que $i_h^*\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}/\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}\simeq p_{h_*} j_h^*\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})$. Pour montrer le théorème 3.3.3, on applique le lemme 3.3.4 au fibré $\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})$. On a

$$
c_h \circ \mathrm{res}_{D_h}(\widehat{\nabla}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}) = \frac{1}{r_h}\, p_{h_*}\,\mathrm{res}_{\mathfrak{D}_h}(\nabla(-\mathbf{l}\mathfrak{D})) \circ c_h \tag{3.8}
$$

De $i_h^*\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}/\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}\simeq p_{h_*} j_h^*\mathcal{F}(-\mathbf{l}\mathfrak{D})$, on déduit que le morphisme c_h s'identifie avec le morphisme

$$
\frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}\otimes\mathcal{O}_X(-D_h)} \longrightarrow \frac{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}}{\mathcal{E}_{\frac{\mathbf{l}+\mathbf{e_h}}{\mathbf{r}}}}
$$

et de par la commutativité du diagramme 3.4, l'équation (3.8) devient

$$
\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\widehat{\nabla}_{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}) \circ c_h = \frac{1}{r_h}\, p_{h_*}\,\mathrm{res}_{\mathfrak{D}_h}(\nabla(-\mathbf{l}\mathfrak{D})) \circ c_h
$$

La connexion ∇ est holomorphe, donc $\mathrm{res}_{\mathfrak{D}_h}(\nabla) = 0$. Ceci et la formule de décalage des résidus d'Esnault-Viehweg 2.4.5 qui montre que $\mathrm{res}_{\mathfrak{D}_h}(\nabla(-\mathbf{l}\mathfrak{D})) = l_h\,\mathrm{id}$, nous permettent d'obtenir

$$\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\widehat{\nabla}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}) \circ c_h = \frac{l_h}{r_h}\,\mathrm{id} \circ c_h$$

Comme c_h est un épimorphisme, on a finalement

$$\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\widehat{\nabla}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}) = \frac{l_h}{r_h}\,\mathrm{id} \;,$$

donc $\widehat{\nabla}_{.}$ est fortement parabolique.

3.3.3 Preuve du sens réciproque du théorème 3.3.3

On commence par remarquer que pour un h fixé, on peut se ramener au cas d'un seul diviseur $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}_h \setminus (\bigcup_{\substack{h' \in I \\ h' \neq h}} \mathfrak{D}_{h'} \cap \mathfrak{D}_h)$ de $\mathfrak{Y} := \mathfrak{X} \setminus \bigcup_{\substack{h' \in I \\ h' \neq h}} \mathfrak{D}_{h'}$.

En effet, comme le résidu commute aux restrictions, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{|\mathfrak{D}_h} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{res}_{\mathfrak{D}_h}(\nabla)"'] & \mathcal{F}_{|\mathfrak{B}} \arrow[d, "\mathrm{res}_{\mathfrak{B}}(\nabla)"] \\ \mathcal{F}_{|\mathfrak{D}_h} \arrow[r, hook] & \mathcal{F}_{|\mathfrak{B}} \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

La flèche $\mathcal{F}_{|\mathfrak{D}_h} \longrightarrow \mathcal{F}_{|\mathfrak{B}}$ est injective car $\iota : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}_h$ est schématiquement dense dans $\mathfrak{D}_h$, ce qui implique l'injectivité de $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_h} \longrightarrow \iota_*\mathcal{O}_{\mathfrak{B}}$ ([Sta], Tag 01RE) et donc aussi de $\mathcal{F}_{|\mathfrak{D}_h} \longrightarrow \mathcal{F}_{|\mathfrak{B}}$ pour tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$. Le fait que $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}_h \setminus \bigcup_{\substack{h' \in I \\ h' \neq h}} \mathfrak{D}_{h'}$ soit schématiquement dense dans $\mathfrak{D}_h$ résulte du fait que $\bigcup_{h' \neq h} \mathfrak{D}_{h'} \cap \mathfrak{D}_h$ est un diviseur de Cartier effectif ([Sta], Tag 07ZU). Pour voir que c'est un diviseur, on peut raisonner Zariski localement : si f_h est une équation locale en x de $\mathfrak{D}_h$, alors $\bigcup_{h' \neq h} \mathfrak{D}_{h'} \cap \mathfrak{D}_h$ a pour équation locale $\prod_{h' \neq h} f_{h'}$ dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}_h} = \frac{\mathcal{O}_X}{f_h}$.

Ainsi, d'après le diagramme (3.9), si $\mathrm{res}_{\mathfrak{B}}(\nabla) = 0$, on a aussi $\mathrm{res}_{\mathfrak{D}_h}(\nabla) = 0$, et on peut donc supposer qu'on est dans le cas d'un seul diviseur. Pour cette raison, on fixe les notations suivantes pour la suite de la démonstration

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\pi"] \\ D \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Lemme 3.3.5. Soit S un schéma, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur S, et $r \geq 1$ un entier positif. On considère la μ_r-gerbe $p : \mathfrak{G} = \sqrt[r]{\mathcal{L}/S} \longrightarrow S$, et on note $\mathcal{N}$ la racine r-ème de $\mathcal{L}$ dans $\mathfrak{G}$. Si $\mathcal{G}$ est un faisceau localement libre sur $\mathfrak{G}$, alors le morphisme canonique

$$\bigoplus_{l=0}^{r-1} p^*p_*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}} \mathcal{N}^{\vee\otimes l}) \otimes \mathcal{N}^{\otimes l} \longrightarrow \mathcal{G}$$

est un isomorphisme.

Preuve. On raisonne Zariski localement sur S. Quitte à considérer un ouvert affine U de S de sorte que $\mathcal{L}_{|U} = \mathcal{O}_U$, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(R)$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S$ et $\mathfrak{G} = B\mu_r$. On a une équivalence de catégories entre les faisceaux quasi-cohérents sur $B\mu_r$ et les R-modules $\mathbb{Z}/r$-gradués. Le morphisme $\bigoplus_{l=0}^{r-1} p^*p_*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{G}}} \mathcal{N}^{\vee \otimes l}) \otimes \mathcal{N}^{\otimes l} \longrightarrow \mathcal{G}$ correspond par cette équivalence à un morphisme

$$\bigoplus_{l=0}^{r-1} (M \otimes_R R[-l])_0 \otimes_R R[l] \longrightarrow M$$

qui est un isomorphisme, puisque

$$(M \otimes_R R[-l])_0 \simeq \mathrm{Hom}(R[l], M) \simeq M_{-l}$$

où pour un R-module gradué $N = \bigoplus_{l' \in \mathbb{Z}/r} N_{l'}$, $N[l]$ désigne le décalage de la graduation par l : $(N[l])_{l'} := N_{l+l'}$. □

Lemme 3.3.6. On reprend les notations du lemme 3.3.5 ci-dessus. Soit $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ un morphisme de faisceaux localement libres sur $\mathfrak{G}$. Alors $\rho = 0$ si et seulement si pour tout $l \in \{0, \ldots, r-1\}$ les morphismes

$$p_*(\rho \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{N}^{\vee \otimes l}}) : p_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{N}^{\vee \otimes l}) \longrightarrow p_*(\mathcal{G}' \otimes \mathcal{N}^{\vee \otimes l})$$

sont nuls.

Preuve. Notons ρ_l le morphisme $p_*(\rho \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{N}^{\vee \otimes l}})$. Si $\rho = 0$, alors on a évidemment $\rho_l = 0$ pour tout l. Pour la réciproque, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{0 \leq l \leq r-1} p^*p_*\left(\mathcal{G} \otimes \mathcal{N}^{\vee \otimes l}\right) \otimes \mathcal{N}^{\otimes l} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\bigoplus_{0 \leq l \leq r-1} \rho_l"] & \mathcal{G} \arrow[d, "\rho"] \\
\bigoplus_{0 \leq l \leq r-1} p^*p_*\left(\mathcal{G}' \otimes \mathcal{N}^{\vee \otimes l}\right) \otimes \mathcal{N}^{\otimes l} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{G}'
\end{tikzcd}$$

Si $\rho_l = 0$ pour tout l, alors $\bigoplus_{0 \leq l \leq r-1} \rho_l = 0$, et comme les flèches horizontales données par le lemme 3.3.5 sont des isomorphismes, on obtient que $\rho = 0$.

□

Preuve du sens réciproque du théorème 3.3.3. Soit $(\mathcal{F}, \nabla)$ une connexion logarithmique sur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$, $(\widehat{\mathcal{F}}_., \widehat{\nabla}_.)$ la connexion parabolique correspondante 3.3.1, et $c : i^*\pi_*\mathcal{F}(-l\mathfrak{D}) \longrightarrow p_*j^*\mathcal{F}(-l\mathfrak{D})$ le morphisme du lemme 3.3.4. On pose $\mathcal{N}_{\mathfrak{D}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D})_{|\mathfrak{D}}$. Supposons que $(\widehat{\mathcal{F}}_., \widehat{\nabla}_.)$ est fortement parabolique. D'après le diagramme (3.4), on a

$$c \circ \mathrm{res}_D(\widehat{\nabla}_{\frac{l}{r}}) = \frac{l}{r}\, c$$

et il s'ensuit du diagramme 3.6 que

$$\frac{1}{r}\, p_* \mathrm{res}_{\mathfrak{D}}(\nabla(-l\mathfrak{D})) \circ c = \frac{l}{r}\, c$$

Comme c est un épimorphisme, on en déduit

$$p_* \operatorname{res}_{\mathfrak{D}}(\nabla(-l\mathfrak{D})) = l \ \mathrm{id}$$

Par la formule de décalage des résidus d'Esnault et Viehweg 2.4.5, on a $\operatorname{res}_{\mathfrak{D}}(\nabla(-l\mathfrak{D})) = \operatorname{res}_{\mathfrak{D}}(\nabla) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{\mathfrak{D}}^{\vee \otimes l}} + l \, \mathrm{id}$, ce qui nous permet d'obtenir

$$p_*(\operatorname{res}_{\mathfrak{D}}(\nabla) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{N}_{\mathfrak{D}}^{\vee \otimes l}}) = 0$$

et ce pour tout $l \in \{0, \dots, r-1\}$. Comme $\mathfrak{D} \longrightarrow D$ est la gerbe des racines r-èmes de $\mathcal{N}_D$, de racine r-ème canonique $\mathcal{N}_{\mathfrak{D}}$ (Proposition 1.3.14), on peut appliquer le lemme 3.3.6 à $\rho = \operatorname{res}_{\mathfrak{D}}(\nabla)$, ce qui nous permet d'obtenir $\operatorname{res}_{\mathfrak{D}}(\nabla) = 0$. □

3.3.4 Foncteur quasi-inverse de la correspondance 3.3.1

La construction du foncteur quasi-inverse utilisera la notion des « bouts » (appelée aussi cofins). On commence, pour cela, par faire un rappel sur cette notion catégorique (voir [Mac98] et [Lor20]).

3.3.4.1 Cofins

Définition 3.3.7. Soient $S, T : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une **transformation di-naturelle** $\alpha : S \overset{..}{\longrightarrow} T$ entre S et T est une collection de morphismes $(\alpha_c : S(c,c) \longrightarrow T(c,c))$ telle que pour tout morphisme $f : c \longrightarrow c'$ dans $\mathcal{C}$ on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & S(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] & T(c,c) \arrow[dr, "T(1,f)"] & \\
S(c',c) \arrow[ur, "S(f,1)"] \arrow[dr, "S(1,f)"'] & & & T(c,c') \\
 & S(c',c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & T(c',c') \arrow[ur, "T(f,1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 3.3.8. Soit $F : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Une **cofin** de F est une paire (d, ω) avec d un objet de la catégorie $\mathcal{D}$ et $\omega : F \overset{..}{\longrightarrow} d$ une transformation di-naturelle entre le foncteur F et le foncteur constant d, et on demande à ce que la paire (d, ω) soit universelle, dans le sens où pour tout objet x de $\mathcal{D}$ et toute transformation di-naturelle $\alpha : F \overset{..}{\longrightarrow} x$, il existe un unique morphisme $h : d \longrightarrow x$ telle que $\alpha_x = h \circ \omega_c$ pour tout c dans $\mathcal{C}$. L'objet d est noté par $\int^{c \in \mathcal{C}} F(c,c)$.

Proposition 3.3.9. Dans le cas où la catégorie $\mathcal{D}$ est co-complète et $\mathcal{C}$ une petite catégorie, une cofin est un co-égaliseur du diagramme

$$\coprod_{c' \longrightarrow c} F(c,c') \rightrightarrows \coprod_{c \in \mathcal{C}} F(c,c) \longrightarrow \int^{c \in \mathcal{C}} F(c,c)$$

Notons par $T_W(\mathcal{C})$ la catégorie qui a pour objets : les morphismes de $\mathcal{C}$, et pour morphismes entre deux objets $f : c \longrightarrow c'$ et $g : d \longrightarrow d'$ les paires de morphismes $(h : d \longrightarrow c, k : c' \longrightarrow d')$ vérifiant $k \circ f \circ h = g$. On a alors une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}, \mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(T_W(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \\ F & \longmapsto & \bar{F} \end{array}$$

où $\bar{F}$ est le foncteur qui envoie un morphisme $f : c \longrightarrow c'$ de $\mathcal{C}$, vers $F(c, c')$.

Proposition 3.3.10. ([Lor20]) Cette transformation naturelle induit un isomorphisme

$$\int^{c \in \mathcal{C}} F(c, c) \simeq \varinjlim_{f \in T_W(\mathcal{C})} \bar{F}(f)$$

3.3.4.2 Connexions et colimite

Lemme 3.3.11. Soit $\mathfrak{X}$ un champ de Deligne Mumford, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{X}$ un diviseur de Cartier effectif à croisements normaux simples (voir 1.3.17), et $(\mathcal{F}_., \nabla_.) : J \longrightarrow \mathrm{ConnVect}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ un diagramme. On suppose que la colimite $\mathcal{F} = \varinjlim_J \mathcal{F}_j$ existe dans $\mathrm{Vect}(\mathfrak{X})$. Alors il existe une unique connexion logarithmique ∇ sur $\mathcal{F}$ telle que les morphismes $\mathcal{F}_j \longrightarrow \mathcal{F}$ soient compatibles avec les connexions ∇_j et ∇ pour tout $j \in J$.

Preuve. Le lemme découle de la proposition 2.5.9. En effet, comme on a un isomorphisme $\varinjlim_J \mathcal{F}_j \otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}} \Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log(\mathfrak{D})) \simeq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}} \Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log(\mathfrak{D}))$, le morphisme

$$\varinjlim_J P^1_{(X,\mathbf{D})/k}(\mathcal{F}_j) \to P^1_{(X,\mathbf{D})/k}(\mathcal{F})$$

est aussi un isomorphisme. □

Remarque 3.3.12. D'après la proposition 3.3.10, le lemme 3.3.11 reste valable si on remplace le diagramme $(\mathcal{F}_., \nabla_.) : J \longrightarrow \mathrm{ConnVect}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ par un foncteur de variance mixte $(\mathcal{F}_{.,.}, \nabla_{.,.}) : J^{op} \times J \longrightarrow \mathrm{Conn}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ et la colimite $\varinjlim_J \mathcal{F}_j$ par la cofin $\int^J \mathcal{F}_{j,j}$.

Définition 3.3.13. Soit $(\mathcal{E}_., \nabla_.)$ une connexion parabolique 3.1.1. D'après la remarque 3.3.12, il existe une unique connexion logarithmique $\widehat{\nabla_.}$ sur le fibré vectoriel $\widehat{\mathcal{E}_.} := \int^{\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I} \pi^* \mathcal{E}_{\frac{1}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X}(\mathbf{l}\mathfrak{D})$, compatible avec les connexions $\pi^* \nabla_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(\mathbf{l}\mathfrak{D})$.

3.3.4.3 L'équivalence de catégories

Soit $(\mathcal{E}_., \nabla_.)$ une connexion parabolique. Considérons le foncteur de variance mixte

$$\begin{array}{ccc} (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \times \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I & \longrightarrow & \mathrm{ConnVect}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}) \\ (\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}, \frac{\mathbf{l}'}{\mathbf{r}'}) & \longmapsto & (\pi^* \mathcal{E}_{\frac{1}{\mathbf{r}}} \otimes \mathcal{O}_\mathfrak{X}(\mathbf{l}'\mathfrak{D}), \pi^* \nabla_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(\mathbf{l}'\mathfrak{D})) \end{array}$$

La définition 3.3.13 montre que la cofin associée est munie d'une connexion logarithmique, autrement dit on dispose d'un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ConnPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D}) & \longrightarrow & \mathrm{ConnVect}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}) \\ (\mathcal{E}_., \nabla_.) & \longmapsto & (\widehat{\mathcal{E}_.}, \widehat{\nabla_.}) \end{array}$$

Proposition 3.3.14. On a une équivalence entre la catégorie $\mathrm{ConnPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ et la catégorie $\mathrm{ConnVect}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ donnée par les foncteurs $G : (\mathcal{E}_., \nabla_.) \longmapsto (\widehat{\mathcal{E}_.}, \widehat{\nabla_.})$ et $F : (\mathcal{F}, \nabla) \longmapsto (\widehat{\mathcal{F}}_., \widehat{\nabla}_.)$.

Cet énoncé précise la proposition 3.1.8 où l'on a vu que G est une équivalence.

Preuve. L'argument dans la preuve du lemme 3.1.7 montre que les foncteurs $\mathcal{E}_. \longmapsto \widehat{\mathcal{E}_.}$ et $\mathcal{F} \longmapsto \widehat{\mathcal{F}}_.$ du théorème 1.5.4 induisent une équivalence de catégories entre $\mathrm{SecPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ et $\mathrm{Sec}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$. Celle-ci est donnée par les foncteurs $(\mathcal{E}_., s_.) \longmapsto (\widehat{\mathcal{E}_.}, \widehat{s_.})$ et $(\mathcal{F}, s) \longmapsto (\widehat{\mathcal{F}}_., \widehat{s}_.)$. On conclut à l'aide du lemme 3.1.6 et de la proposition 2.5.9. $\square$

Avec la proposition ci-dessus et le théorème 3.3.3, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.3.15. On a une équivalence entre $\mathrm{ConnFPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ et $\mathrm{ConnVect}(\mathfrak{X})$ donnée par les foncteurs $G : (\mathcal{E}_., \nabla_.) \longmapsto (\widehat{\mathcal{E}_.}, \widehat{\nabla_.})$ et $F : (\mathcal{F}, \nabla) \longmapsto (\widehat{\mathcal{F}}_., \widehat{\nabla}_.)$.

Comme conséquence et application, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.16. Soient $(\mathcal{F}, \nabla)$ et $(\mathcal{F}', \nabla')$ deux connexions holomorphes sur $\mathfrak{X}$. Alors tout isomorphisme $(\pi_*\mathcal{F}, \pi_*\nabla) \simeq (\pi_*\mathcal{F}', \pi_*\nabla')$ se relève de manière unique en un isomorphisme $(\mathcal{F}, \nabla) \simeq (\mathcal{F}', \nabla')$.

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 3.3.15 et du corollaire 3.2.9. $\square$

Remarque 3.3.17. Le corollaire 3.3.16 est faux pour des connexions logarithmiques. En effet, considérons, dans la situation à indice unique, $\omega \in \Gamma(\mathfrak{X}, \Omega^1_{\mathfrak{X}/k}(\log \mathfrak{D}))$ et soit $0 \leq l < r$. L'image directe du morphisme $\mathcal{O}_\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{O}_\mathfrak{X}(l\mathfrak{D})$ par π est un isomorphisme ([Bor07], Lemme 3.11), et elle est compatible avec les connexions $d + \omega$ et $(d + \omega)(l\mathfrak{D})$ sur $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ et $\mathcal{O}_\mathfrak{X}(l\mathfrak{D})$ respectivement (voir Remarque 2.4.2). Il s'ensuit que $(\pi_*(\mathcal{O}_\mathfrak{X}(l\mathfrak{D})), \pi_*(d + \omega)(l\mathfrak{D})) = (\mathcal{O}_X, d + \omega)$ est indépendant du l choisi, où l'on voit maintenant ω dans $\Gamma(X, \Omega^1_{X/k}(\log D))$.

3.4 Le cas des λ-connexions

Soit λ un élément de k.

Définition 3.4.1. On appelle **λ-connexion logarithmique**, un couple $(\mathcal{E}, \nabla)$, avec $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel, et $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_X(\log D)$ un morphisme k-linéaire qui vérifie, pour toutes sections s et f de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{O}_X$ respectivement, la λ-règle de Leibniz :

$$\nabla(f.s) = \lambda\,(s \otimes df) + f.\nabla(s)$$

où $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ désigne la dérivation canonique sur X associée à $\Omega^1_{X/k}$.

On a aussi une version de la formule de décalage des résidus d'Esnault-Viehweg 2.4.5 pour les λ-connexions :

Proposition 3.4.2. Pour $B = \sum_{i \in I} \mu_i D_i$, on a

$$\mathrm{res}_{D_i}(\nabla(B)) = \mathrm{res}_{D_i}(\nabla) - \lambda\mu_i\,\mathrm{id}$$

La définition des λ-connexions fortement paraboliques est similaire à celle des 1-connexions fortement paraboliques :

Définition 3.4.3. Une λ-connexion **fortement parabolique** est une λ-connexion parabolique $(\mathcal{E}_\cdot, \nabla_\cdot)$ vérifiant la condition sur les résidus le long de chaque D_h, $h \in I$, et pour tout $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}^I$:

$$\overline{\mathrm{res}}_{D_h}(\nabla_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}) = \lambda \frac{l_h}{r_h} \,\mathrm{id}$$

Les théorèmes 3.3.3 et 3.3.15, restent vrais dans le cas des λ-connexions :

Théorème 3.4.4. Une λ-connexion logarithmique $(\mathcal{F}, \nabla)$ est holomorphe si et seulement si la λ-connexion parabolique correspondante $(\widehat{\mathcal{F}}_\cdot, \widehat{\nabla}_\cdot)$ est fortement parabolique.

Preuve. La preuve est similaire à la preuve du théorème 3.3.3. □

Théorème 3.4.5. On a une équivalence entre la catégorie λ-ConnFPar$_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ des λ-connexions fortement paraboliques et la catégorie λ-ConnVect$(\mathfrak{X})$ des λ-connexions holomorphes sur le champ des racines, donnée par les foncteurs $G : (\mathcal{E}_\cdot, \nabla_\cdot) \longmapsto (\widehat{\mathcal{E}_\cdot}, \widehat{\nabla_\cdot})$ et $F : (\mathcal{F}, \nabla) \longmapsto (\widehat{\mathcal{F}}_\cdot, \widehat{\nabla}_\cdot)$.

Preuve. La preuve est similaire à la preuve du théorème 3.3.15. □

Remarque 3.4.6. 1. Ce que les λ-connexions introduisent de nouveau, autre que le cas étudié dans cette thèse, est le cas où $\lambda = 0$. De telles connexions sont ce qu'on appelle dans la littérature des fibrés de Higgs paraboliques, pour lesquels la correspondance a déjà été établie dans [BMW13].

2. Notre choix du terme « fortement parabolique » est aussi motivé par cette situation. L'existence du prédécesseur [BMW13] est la raison pour laquelle nous nous restreignons aux 1-connexions. Cependant, nous pensons que la définition des fibrés de Higgs paraboliques donnée dans [BMW13] est légèrement incorrecte en dimension plus grande que 1, puisque les conditions données sur les résidus sont insuffisantes pour assurer que la filtration parabolique soit stable par la connexion.

3. Il est clair, par définition, que les résidus d'un fibré de Higgs fortement parabolique $(\mathcal{E}_\cdot, \nabla_\cdot)$ sont nilpotents. Nous pensons qu'aussi dans cette situation, le fibré de Higgs ∇_0 devrait permettre de reconstruire la structure parabolique, de manière similaire à la reconstruction 3.2.9.

Bibliographie

[AGV08] Dan Abramovich, Tom Graber et Angelo Vistoli. "Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks". English. In : *Am. J. Math.* 130.5 (2008), p. 1337-1398. issn : 0002-9327. doi : 10.1353/ajm.0.0017.

[Alo+15] Leovigildo Alonso Tarrío et al. "A functorial formalism for quasi-coherent sheaves on a geometric stack". English. In : *Expo. Math.* 33.4 (2015), p. 452-501. issn : 0723-0869. doi : 10.1016/j.exmath.2014.12.007.

[Alp13] Jarod Alper. "Bons espaces de modules pour les champs d'Artin". English. In : *Ann. Inst. Fourier* 63.6 (2013), p. 2349-2402. issn : 0373-0956. doi : 10.5802/aif.2833.

[BLS16] Daniel Bergh, Valery A. Lunts et Olaf M. Schnürer. "Geometricity for derived categories of algebraic stacks". English. In : *Sel. Math., New Ser.* 22.4 (2016), p. 2535-2568. issn : 1022-1824 ; 1420-9020/e.

[BO78] Pierre Berthelot et Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* English. T. 21. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1978. doi : 10.1515/9781400867318.

[Bis97] Indranil Biswas. "Parabolic bundles as orbifold bundles". English. In : *Duke Math. J.* 88.2 (1997), p. 305-325. issn : 0012-7094. doi : 10.1215/S0012-7094-97-08812-8.

[BMW13] Indranil Biswas, Souradeep Majumder et Michael Lennox Wong. "Parabolic Higgs bundles and Γ-Higgs bundles". English. In : *J. Aust. Math. Soc.* 95.3 (2013), p. 315-328. issn : 1446-7887. doi : 10.1017/S1446788713000335.

[BMW12] Indranil Biswas, Souradeep Majumder et Michael Lennox Wong. "Root stacks, principal bundles and connections". English. In : *Bull. Sci. Math.* 136.4 (2012), p. 369-398. issn : 0007-4497. doi : 10.1016/j.bulsci.2012.03.006.

[Bor07] Niels Borne. "Fibrés paraboliques et champ des racines". French. In : *Int. Math. Res. Not.* 2007.16 (2007). Id/No rnm049, p. 38. issn : 1073-7928 ; 1687-0247/e.

[Bor09] Niels Borne. "Sur les représentations du groupe fondamental d'une variété privée d'un diviseur à croisements normaux simples". French. In : *Indiana Univ. Math. J.* 58.1 (2009), p. 137-180. issn : 0022-2518.

[BV12] Niels Borne et Angelo Vistoli. "Parabolic sheaves on logarithmic schemes". English. In : *Adv. Math.* 231.3-4 (2012), p. 1327-1363. issn : 0001-8708. doi : 10.1016/j.aim.2012.06.015.

[BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert et Michel Raynaud. *Néron models.* English. T. 21. Berlin etc. : Springer-Verlag, 1990, p. x + 325. isbn : 3-540-50587-3.

[BK09] Jean-Benoît Bost et Klaus Künnemann. "Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. II : The arithmetic Atiyah extension". English. In : *From probability to geometry I. Volume in honor of the 60th birthday of Jean-Michel Bismut.* Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2009, p. 361-424. isbn : 978-2-85629-288-4/pbk.

[Cad07] Charles Cadman. "Using stacks to impose tangency conditions on curves". English. In : *Am. J. Math.* 129.2 (2007), p. 405-427. issn : 0002-9327. doi : 10.1353/ajm.2007.0007.

[Del70] Pierre Deligne. *Equations différentielles à points singuliers réguliers.* French. T. 163. Springer, Cham, 1970.

[EV92] Hélène Esnault et Eckart Viehweg. *Lectures on vanishing theorems. Notes, grew out of the DMV-seminar on algebraic geometry, held at Reisensburg, October 13-19, 1991.* English. T. 20. Basel : Birkhäuser Verlag, 1992, p. 164. ISBN : 3-7643-2822-3/pbk.

[GM71] A. Grothendieck et J. P. Murre. *The tame fundamental groups of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme.* English. T. 208. Springer, Cham, 1971.

[IS07] Jaya N. N. Iyer et Carlos T. Simpson. "A relation between the parabolic Chern characters of the de Rham bundles". English. In : *Math. Ann.* 338.2 (2007), p. 347-383. ISSN : 0025-5831. DOI : 10.1007/s00208-006-0078-7.

[LM00] Gérard Laumon et Laurent Moret-Bailly. *Champs algébriques.* English. T. 39. Berlin : Springer, 2000, p. xii + 208. ISBN : 3-540-65761-4/hbk.

[LSS13] Frank Loray, Masa-Hiko Saito et Carlos Simpson. "Foliations on the moduli space of rank two connections on the projective line minus four points". In : *Geometric and differential Galois theories.* Sous la dir. de D. Bertrand et al. Séminaires et Congrès n° 27. Société Mathématique de France, 2013, p. 115-168. URL : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00547446.

[Lor20] Fosco Loregian. *Coend calculus.* 2020. arXiv : 1501.02503 [math.CT].

[Mac98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician. 2nd ed.* English. 2nd ed. T. 5. New York, NY : Springer, 1998, p. xii + 314. ISBN : 0-387-98403-8/hbk.

[MO05] Kenji Matsuki et Martin Olsson. "Kawamata-Viehweg vanishing as Kodaira vanishing for stacks". English. In : *Math. Res. Lett.* 12.2-3 (2005), p. 207-217. ISSN : 1073-2780 ; 1945-001X/e.

[Ols16] Martin Olsson. *Algebraic spaces and stacks.* English. T. 62. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2016, p. xi + 298. ISBN : 978-1-4704-2798-6/hbk ; 978-1-4704-2865-5/ebook.

[Ols07] Martin C. Olsson. *Crystalline cohomology of algebraic stacks and Hyodo-Kato cohomology.* English. T. 316. Paris : Société Mathématique de France, 2007, p. 412. ISBN : 978-2-85629-249-5/pbk.

[Sim90] Carlos T. Simpson. "Harmonic bundles on noncompact curves". English. In : *J. Am. Math. Soc.* 3.3 (1990), p. 713-770. ISSN : 0894-0347. DOI : 10.2307/1990935.

[Sta] *The Stacks project.* 2012. URL : https://stacks.math.columbia.edu.

[Vis89] Angelo Vistoli. "Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces". English. In : *Invent. Math.* 97.3 (1989), p. 613-670. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/BF01388892.

[Yok93] Kôji Yokogawa. "Compactification of moduli of parabolic sheaves and moduli of parabolic Higgs sheaves". English. In : *J. Math. Kyoto Univ.* 33.2 (1993), p. 451-504. ISSN : 0023-608X. DOI : 10.1215/kjm/1250519269.