École Doctorale Mathématiques, sciences du numérique et de leurs interactions

Thèse

pour obtenir le grade de :

Docteur de l'Université de Lille

dans la spécialité

MATHÉMATIQUES

Quelques théorèmes limites pour les matrices aléatoires, les processus non gaussiens et en probabilités libres

Présenté par :

Charles-Philippe Diez

Sous la direction de :

Ciprian TUDOR

Thèse soutenue le 21 Septembre 2022 devant le jury composé de :

M.	Antoine Ayache	Professeur, Université de Lille,	Examinateur
M.	Laurent Decreusefond	Professeur, Télécom Paris,	Rapporteur
Mme	Catherine Donati-Martin	Professeur, Université de Versailles,	Président du jury
M.	Max Fathi	Professeur, Université de Paris,	Examinateur
M.	Giovanni Peccati	Professeur, Université du Luxembourg,	Rapporteur
M.	Ciprian Tudor	Professeur, Université de Lille,	Directeur de thèse

Table des matières

0.1 Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser toute ma gratitude à mon directeur de thèse Ciprian Tudor qui a accepté il y a trois ans d'encadrer cette thèse. Je le remercie pour son soutien, sa bienveillance, sa gentillesse et ses précieux conseils (mathématiques et sur la vie). Il m'a proposé des sujets de recherche passionnants et a toujours su se rendre disponible et être à mon écoute. Travailler sous votre direction fut une expérience unique et formidable.

J'aimerais remercier également Laurent Decreusefond et Giovanni Peccati qui ont accepté la lourde tâche de rapporter ma thèse. Je suis très honoré de pouvoir les compter parmi les membres de mon jury puisqu'une grande partie de cette thèse est basée sur leurs travaux.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement Antoine Ayache d'avoir accepté de faire partie de mon jury et pour tous les conseils qu'il a pu me donner tout au long de ma thèse.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à Catherine Donati-Martin et Max Fathi pour leur présence dans mon jury. Leurs recherches ont influencé et motivé une partie de cette thèse.

J'ai aussi une pensée pour mes amis doctorants, ainsi qu'aux membres du laboratoire Paul Painlevé pour leur gentillesse et la bonne ambiance. Je remercie Julie Gamain, Jérémy Zurcher, et plus particulièrement mon très cher ami Obayda Assaad.

Ma dernière pensée sera pour ma famille que je remercie pour son soutien inconditionnel.

0.2 Résumé

Cette thèse se compose de trois parties distinctes et se concentre à la fois sur l'analyse stochastique commutative et non commutative. La première partie de ce travail portera sur l'étude des matrices aléatoires de type Wishart via la méthode de Malliavin-Stein et de l'analyse sur l'espace de Wiener. En effet, dans un premier temps, nous analysons le comportement limite de matrices aléatoires de type *Wishart* associées à une matrice aléatoire de taille "$n \times d$" sous diverses hypothèses. Plus particulièrement nous supposons tout d'abord que les entrées de cette matrice, vivant dans les chaos de Wiener, sont indépendantes, et ont même moment d'ordre deux et quatre. Nous montrons, en utilisant la méthode de Malliavin-Stein, que proprement renormalisées, les fluctuations de la matrice de Wishart autour de sa moyenne sont gaussiennes et nous obtenons une estimation quantitative pour la distance 1-Wasserstein matricielle entre la matrice renormalisée et sa matrice limite qui se compose de variables gaussiennes. Nous généralisons ensuite ce premier résultat dans le cas d'entrées très générales, avec des entrées possiblement non identiquement distribuées, celles-ci s'exprimant comme une intégrale de Skorohod. Sous une condition d'indépendance forte et de régularité au sens de Malliavin, nous obtenons aussi une estimation quantitative de la distance 1-Wasserstein matricielle entre la matrice de Wishart et sa matrice limite.
Dans un second temps, nous explorons une hypothèse alternative à l'indépendance totale pour les matrices de Wishart, nous supposons de plus que les entrées ne sont pas gaussiennes. Nous étudions le comportement limite de la matrice de Wishart lorsque la matrice initiale associée possède une certaine structure de corrélation qui se concentre sur les lignes. Les entrées de cette dernière étant des accroissements du processus d'Hermite (processus non-gaussien, auto-similaire et à accroissements stationnaires). Nous obtenons ici une matrice limite, qui est composée par des variables aléatoires non-gaussiennes de type Rosenblatt, et nous évaluons de même la distance 1-Wasserstein matricielle.
Notre étude des matrices aléatoires se termine par l'obtention de bornes de type Berry-Esseen en distance 1-Wasserstein pour des déterminants aléatoires.
Dans la seconde partie, nous définissons deux types d'intégrales stochastiques pour une classe de processus auto-similaires, non-gaussiens, pouvant avoir des trajectoires "rugueuses" : les processus d'Hermite généralisés. Nous étudierons ensuite le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ("GHOU") associé à ce bruit et nous montrons que lorsque le drift du processus "GHOU" tend vers zéro, ce dernier converge dans un certain sens vers le processus d'Hermite généralisé lui-même.
Finalement, dans cette dernière partie, consacrée aux probabilités libres, nous généralisons une estimation quantitative au cas multidimensionnel pour l'analogue libre de la distance Wasserstein associée au coût quadratique entre un vecteur composé par des intégrales multiples de Wigner-Itô auto-adjointes et une famille semi-circulaire de matrice de covariance strictement positive. Nous appliquons ce résultat à diverses situations, et nous traitons notamment le cas de la vitesse de convergence pour le théorème central limite multivarié de Breuer-Major pour le mouvement brownien fractionnaire non commutatif.

Mots-clés : Calcul de Malliavin, processus de Hermite, mouvement brownien fractionnaire, méthode de Stein, matrice de Wishart, probabilités libres.

0.3 Abstract

This thesis consists of three distinct parts and focuses on both commutative and non-commutative stochastic analysis. The first part of this work will focus on the study of Wishart type random matrices via the Malliavin-Stein method and the analysis on the Wiener space. Indeed, in a first step, we analyze the limit behavior of random matrices of *Wishart* type associated with an initial random matrix of size "$n \times d$" under various assumptions. In particular, we assume that the entries of this matrix live in Wiener chaos, are all independent of each other, and have the same moments of order two and four. We show, using the Malliavin-Stein method that, properly renormalized, the fluctuations of the Wishart matrix around its mean are Gaussian, and we obtain a quantitative estimate of the matrix 1-Wasserstein distance between the renormalized matrix and its limiting matrix which consists of Gaussian variables. We then generalize this first result to the case of very general inputs, with possibly non-identically distributed inputs, these being expressed as a Skorohod integral. Under strong independence and a regularity condition in the Malliavin sense, we also obtain a quantitative estimate of the matrix 1-Wasserstein distance between the Wishart matrix and its limiting matrix.

In a second step, we explore an alternative hypothesis to the total independence for the Wishart matrices, we further assume that the entries are not Gaussian. We study the limiting behavior of the Wishart matrix when the associated initial matrix has some correlation structure that focuses on the rows. The entries of the initial random matrix being increments of the Hermite process (non-Gaussian, self-similar process). We obtain here a limiting matrix, which is composed by non-Gaussian random variables, and we evaluate in the same way the matrix 1-Wasserstein distance.

Our study of random matrices ends by obtaining Berry-Esseen type bounds in 1-Wasserstein distance for random determinants.

In the second part, we will define two types of stochastic integrals for a class of self-similar, non-Gaussian processes that can have "rough" trajectories : the generalized Hermite processes. We then study the Ornstein-Uhlenbeck process ("GHOU") associated with this noise, and we show that when the drift of the "GHOU" process tends to zero, the latter converges in a certain sense to the generalized Hermite process itself.

Finally, in this last part devoted to free probability, we generalize a quantitative estimate to the multidimensional case for the free analogue of the Wasserstein distance associated with the quadratic cost between a vector composed of multiple self-adjoint Wigner-Itô integrals and a semicircular family with strictly positive covariance matrix. We apply this result to various situations, and we treat in particular the case of the speed of convergence for the multivariate Breuer-Major central limit theorem for the non-commutative fractional Brownian motion.

Keywords : Malliavin calculus, Hermite process, fractional Brownian motion, Stein's method, Wishart matrices, free probability.

Chapitre 1

Introduction générale

Ce premier chapitre sera dédié à une brève introduction des principaux axes de recherches abordés dans cette thèse ainsi que des outils et des principaux résultats obtenus.

1.1 Axes de recherche

1.1.1 Matrices aléatoires

Une grande partie de ce document se concentre sur l'étude du comportement de matrices aléatoires de grandes dimensions. Ces dernières jouent un rôle important dans la physique statistique, la combinatoire, l'économétrie, la data science ou encore dans les algèbres d'opérateurs. Avant d'aborder les méthodes mises en jeu, nous proposons une présentation succinte des principaux résultats présent dans la littérature.

L'étude des matrices aléatoires remonte aux travaux de John Wishart [197] dans les années 1930, pour l'analyse de statistiques multivariées et notamment l'étude de matrices de covariance empirique. Dans les années 1950, Eugène Wigner motivé par la compréhension de phénomènes issus de la physique nucléaire, a eu l'idée de modéliser les niveaux d'énergie d'un système atomique (les valeurs propres) d'un opérateur Hermitien : l'Hamiltonien, par des matrices Hermitiennes aléatoires de grande taille. Il a alors étudié les propriétés limites de tels systèmes lorsque la taille de la matrice devient grande et en a déduit un comportement limite non aléatoire [195]. De nombreux auteurs ont alors étudié de nouveau modèles : matrice de covariance empirique (Marcenko et Pastur [115]). Des liens entre diverses branches de mathématiques ont ainsi été relié à des problématiques rencontrées en théorie des matrices aléatoires : lien avec l'hypothèse de Riemann (voir [172]) ou la finance [25]. Dans les années 1990, Voiculescu [190] a découvert un lien étroit entre matrices aléatoires et probabilités libres, traduisant le fait que la limite de n matrices aléatoires Gaussiennes indépendantes se comportent comme un système semicirculaire libre vivant dans un espace de probabilité non commutatif.

Rappelons tout d'abord le théorème de Wigner qui nous donne la limite (pour différents modes de convergence) de la mesure spectrale empirique associée à une matrice de Wigner.

Definition 1 *Considérons $\left(Z_{i,j}\right)_{i<j}$ une famille de variables aléatoires i.i.d, à valeurs réelles ou complexes, centrées, et indépendantes de la famille $(Y_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires réelles i.i.d, centrées. On considère alors M_n, une matrice de Wigner (symétrique ou Hermitienne) de taille $n \times n$ suivante :*

$$M_n(j,i) = \overline{M_n}(i,j) = \begin{cases} Y_i & si\ 1 \leq i \leq n \\ Z_{i,j} & si\ 1 \leq i < j \leq n \end{cases}, \tag{1.1}$$

Définition 1 *Alors en normalisant la matrice M_n de la façon suivante, on obtient :*

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} M_n, \tag{1.2}$$

Nous obtenons encore une matrice Hermitienne, qui possède donc n-valeurs propres réelles (que l'on rangera dans l'ordre croissant) : $\lambda_1^{(n)} \leq \ldots \leq \lambda_n^{(n)}$.

L'idée d'Eugène Wigner est de considérer la *mesure spectrale* associée à ces valeurs propres :

Définition 2 *La mesure spectrale d'une matrice Hermitienne $A \in M_n(\mathbb{C})$ est la mesure de probabilité suivante :*

$$\mu_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i^{(n)}}, \tag{1.3}$$

où $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et δ est la mesure de Dirac.

Wigner démontre alors le théorème fondamental suivant dans [195] (pour les matrices *GOE*).

Théorème 1 *(Wigner) Si les entrées $(Z_{i,j})_{i<j}$ sont à valeurs réelles, on suppose que $\mathbb{E}[Z_{1,2}^2] = 1, \mathbb{E}[Y_1^2] = 2$, si les $(Z_{i,j})_{i<j}$ sont à valeurs complexes, on suppose que $\mathbb{E}[|Z_{1,2}|^2] = \mathbb{E}[Y_1^2] = 1$. Alors, la mesure μ_{W_n} converge étroitement vers la loi du demi-cercle. C'est-à-dire que presque sûrement, pour tout fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\to} \int_{-2}^{2} f(x) d\mu_{sc}(x), \tag{1.4}$$

où μ_{sc} est la loi de Wigner ou loi du demi-cercle (ou encore loi semicirculaire) de densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$d\mu_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx,\ |x| \leq 2 \tag{1.5}$$

Rappelons puisque cette loi jouera un rôle prépondérant dans notre étude, que les moments pairs de cette mesure de probabilité sont donnés par les nombres de *Catalan* :

$$\int_{-2}^{2} x^{2m} d\mu_{sc} = C_m, \tag{1.6}$$

avec $C_m = \frac{1}{m+1}\binom{m}{2m}$ le *m-ième nombre de Catalan*.
Les moments d'ordre impairs étant tous nuls.

Notons au passage "*l'Universalité*" du résultat : il n'y a aucune hypothèse qui est supposée sur la loi des entrées, hormis des hypothèses de finitude de moments.

Matrices de Wigner gaussiennes

Il y a plusieurs ensembles de matrices aléatoires qui ont ainsi été largement etudiés et notamment ceux qui possèdent des propriétés d'invariance en loi sous l'action d'un groupe sur cet ensemble : l'ensemble *GOE* (*Gaussian Orthogonal Ensemble)* de loi invariante par le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$, *GUE Gaussian Unitary Ensemble)* invariante par le groupe unitaire $U(n)$, *GSE Gaussian Symplectic Ensemble)* invariante par le groupe unitaire Symplectique.

Définition 3 *Les matrices de l'ensemble GOE sont des matrices de Wigner (réelles) telles que $X_{1,1}$ est une gaussienne $\mathcal{N}(0,2)$ et $X_{1,2}$ est une gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$.*

Définition 4 *Les matrices de l'ensemble GUE sont des matrices de Wigner (complexes) telles que $X_{1,1}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, et pour $i < j$, $Re(Z_{i,j})$ et $Im(Z_{i,j})$ sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$.*

1.1.2 Matrices de Wishart

Nous nous sommes particulièrement intéressés dans cette thèse à l'étude de matrices aléatoires dites de Wishart (matrices de covariance empiriques).

L'étude de la mesure spectrale empirique de cette classe de matrice a été ainsi initiée par Marcenko et Pastur qui ont pu obtenir la loi limite de celle-ci sous une condition de régime entre les lignes et les colonnes de la matrice initiale.

Loi de Marcenko-Pastur Supposons que $n = n(d), d \geq 1$, tel que $\frac{n}{d} \underset{d\to\infty}{\to} c \in (0,\infty)$. Donnons-nous une matrice $\mathcal{X}_{n,d}$ de taille $n \times d$ avec $(X_{i,j})_{i,j\geq 1}$ i.i.d centrées à valeurs réelles et telle que $\mathbb{E}[X_{i,j}^2] = 1$.
Considérons la matrice suivante, que l'on appellera *matrice de Wishart* associée à $\mathcal{X}_{n,d}$:

$$\mathcal{W}_{n,d} = \frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T, \tag{1.7}$$

où "^{T}" désigne la transposé.
$\mathcal{W}_{n,d}$ est une matrice symétrique de taille $n \times n$, qui possède donc n valeurs propres notées $\lambda_1^{(n)} \leq \ldots \leq \lambda_n^{(n)}$.
En considérant la *mesure spectrale empirique*

$$\mu_{\mathcal{W}_{n,d}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i^{(n)}}, \tag{1.8}$$

associée à cette matrice de Wishart. Marcenko et Pastur parviennent alors à démontrer le théorème suivant dans [115] :

Théorème 2 *(Marcenko-Pastur) Presque surêment, pour toute fonction continue bornée, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(x) d\mu_{MP,c}(x), \tag{1.9}$$

où $\mu_{MP,c}$ est la loi de Marcenko-Pastur (ou loi de Poisson libre) de paramètre $c > 0$:

$$d\mu_{MP,c}(x) = (1 - \frac{1}{c})_+ \delta_0 + \frac{1}{c2\pi x} \sqrt{(b-x)(x-a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \tag{1.10}$$

avec $a = (1 - \sqrt{c})^2$ et $b = (1 + \sqrt{c})^2$

Les modèles gaussiens de matrice de covariance Il existe des ensembles de matrices de Wishart avec des entrées gaussiennes qui possèdent de nombreuses propriétés intéressantes, on retrouve alors l'ensemble *LOE* (*Laguerre Orthogonal Ensemble)*, *LUE* (*Laguerre Unitary Ensemble)* ou encore *LSE* (*Laguerre Symplectic Ensemble)*, on peut, en particulier dans ces modèles, détérminer la loi des valeurs propres.

Une approche non-spectrale pour les matrices de Wishart

Heuristique

Considérons une matrice aléatoire $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ de taille $n \times d$, composée d'entrées **i.i.d** et que l'on supposera pour simplifier, centrées et réduites.
Considérons donc la matrice de Wishart suivante $\mathcal{W}_{n,d} = \frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T$, dont les entrées s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} W_{i,i} &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} X_{i,k}^2, & (1.11) \\ W_{i,j} &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} X_{i,k} X_{j,k}, & (1.12) \end{aligned}$$

qui est bien entendu une matrice aléatoire symétrique de taille $n \times n$.

Supposons pour l'instant que n est fixé et que d est grand : $d \to \infty$. Il est alors aisé de voir par la loi forte des grands nombres, puisque l'on a l'indépendance totale que :

$$\mathcal{W}_{n,d} \xrightarrow[d \to \infty]{(p.s)} I_n, \tag{1.13}$$

De plus par le théorème de la limite centrale multivariée, on obtient sous réserve de finitude de $\mathbb{E}[X_{1,1}^4]$, que :

$$\sqrt{d}(\mathcal{W}_{n,d} - I_n) \xrightarrow[d \to \infty]{(loi)} \mathbb{G}_n, \tag{1.14}$$

où $\mathbb{G}_n$ est une matrice GOE.

L'ère du Big-Data, un nouveau paradigme ? Cette approche est très intéressante (puisque jusqu'à récemment), l'étude à "n" fixé : "*classical regime*" était suffisante pour performer des analyses statistiques sur un jeu de données. Cependant, entre-temps l'ère du "**BIG DATA**" a émergé et a fourni un nouveau paradigme. En effet, il n'est aujourd'hui plus suffisant d'avoir un nombre de variables "n" fixé, puisque celui-ci peut devenir très grand, c'est-à-dire que les jeux de données deviennent de plus en plus massifs en observations et en nombre de variables. On s'intéresse aujourd'hui à des datasets ayant un grand nombre de variables, et bien entendu un grand nombre d'observations (répresentées par "d"). On appellera ce régime le : *high dimensionnal regime*. De plus, avoir en pratique un accès via des méthodes computationnelles, au spectre d'une matrice lorsque celle-ci est de très grande dimension peut devenir très compliqué lorsque la matrice n'est pas *sparse* ou qu'elle n'est pas est une *matrice à bandes*.

Remarque 1 *De telles problématiques dans le classical regime se rencontre souvent dans le cadre de la finance, notamment dans les très grands fonds d'investissements qui gèrent de très grands portefeuilles d'actifs. De nombreux fonds propriétaires ou d'investissements sont de plus en plus nombreux à s'intéresser à l'application des matrices aléatoires pour la gestion de portefeuilles et notamment dans le nettoyage de matrice de corrélation où l'on cherche à éliminer le bruit : c'est-à-dire les prédictions de la théorie des matrices aléatoires (prédites par la loi de Marcenko-Pastur), des signaux de trading : et donc comprendre les valeurs propres à l'extérieur du support de la loi de Marcenko-Pastur (voir les travaux de Jean-Philippe Bouchaud [25]pour de très nombreuses applications).*

Il est donc aujourd'hui fondamental de comprendre le comportement de telles matrices de covariance (matrice de Wishart), lorsque le nombre de variables "n", ainsi que l'échelle d'observations "d" (dans le cadre de la finance, respectivement pour un très grand nombre d'actifs, et en échelle haute fréquences) sont grandes et ne sont pas forcément du même ordre de grandeurs. Une question qu'il est alors naturel de se poser, est la suivante : sous quelles hypothèses sur n et d et sur la matrice des données initiales, peut-on supposer que les fluctuations de la matrice de Wishart sont asymptotiquement gaussiennes ?

L'approche non-spectrale : Fluctuations macroscopiques Cette approche qui a été introduite d'abord par Bubeck et ses co-auteurs, puis Bubeck et Ganguly pour l'étude de graphes aléatoires géométriques (voir [32], [33]) se base sur la considération de telles matrices avec des entrées initiales particulières :

1. pour le premier cas, il y a l'hypothèse que les variables sont des gaussiennes standards toutes indépendantes.

2. dans le second cas, l'hypothèse est élargie aux mesures log-concaves (i.e $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$ avec $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $Hess(V) \geq 0$).

Introduisons tout d'abord les notations et les objets considérés, qui diffèrent légèrement de nos considérations.

Définition 5 *Considérons $\mathcal{X}_{n,d}$ une matrice composée d'entrées i.i.d centrées, normalisées et de même loi μ, supposée log-concave, ainsi que la matrice de Wishart suivante :*

$$\mathcal{W}_{n,d} = \frac{\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T - diag(\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T)}{\sqrt{d}}, \tag{1.15}$$

Remarque 2 *Cette modification ne s'interesse donc pas aux termes diagonaux de la matrice de Wishart, c'est-à-dire que l'on s'interesse uniquement aux termes non-diagonaux supérieurs (et inférieurs, mais c'est équivalent par symétrie de la matrice).*

Nous introduisons donc une légère modification de la matrice de Wigner gaussienne considérée précedemment :

$$\mathcal{G}_n = \begin{cases} G_{ii} = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ G_{ij} \sim N(0,1) & \text{pour } 1 \leq i < j \leq n \\ G_{ij} = G_{ji} & \text{pour } 1 \leq j < i \leq n, \end{cases}, \tag{1.16}$$

que l'on verra comme un vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$ (en concaténant les lignes).

Bubeck et Ganguly dans [33] montrent alors en utilisant des techniques basées sur l'entropie (voir précisément la section 2 de [33] pour plus de détails) et en partie une utilisation de la "*chain rule*" pour l'entropie relative, une transition de phase pour les matrices de Wishart associées à une matrice formée d'entrées i.i.d log-concaves. De manière informelle, le résultat suivant signifie que l'on peut considérer que l'approximation de matrice de Wishart par une matrice de Wigner gaussienne est *statistiquement* valide si le **nombre d'observations est au moins le cube du nombre de variables**.

Théorème 3 *Soit μ une mesure log-concave, et $\mathcal{W}_{n,d}$ la matrice de Wishart associée (vue comme un vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$. Alors, on a les estimations suivantes en variation totale :*

1. Si $\frac{d}{n^3 log^2(d)} \to \infty$, $TV(\mathcal{W}_{n,d}, \mathcal{G}_n) \longrightarrow 0$, *2. Si* $\frac{d}{n^3} \to 0$, $TV(\mathcal{W}_{n,d}, \mathcal{G}_n) \longrightarrow 1$,

dans le cas où $\mu = \gamma$, le facteur logarithmique disparaît.

Remarquons aussi que Mikulincer dans l'article [116] a pu étendre ce résultat et même démontrer des résultats beaucoup plus fort, puisque les estimations sont en distance 2-Wasserstein et aussi en discrépance de Stein, pour une matrice initiale $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{i,j})$, composée par des colonnes i.i.d uniformément log-concaves de loi $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (en particulier, l'hypothèse que toutes les entrées soient i.i.d, telles que $X_{1,1}$ soit log-concave peut être affaiblie à une structure de dépendance en colonne). Mikulincer montre aussi un résultat incluant fois-ci la diagonale de la matrice de Wishart lorsque en plus d'être log-concave, μ est isotropique . Notons aussi que lorsque l'on exclut la diagonale, Fang et Koike dans [69], ont pu grandement améliorer le résultat dans le cas de l'indépendance totale, et sans l'hypothèse de log-concavité sur $\mathcal{X}_{1,1}$. En effet, il est possible d'obtenir le résultat précédent en distance 1-Wasserstein si $\mathcal{X}_{1,1}$ a un moment d'ordre quatre fini.

1.1.3 Fluctuations des matrices de Wishart gaussiennes par la méthode de Malliavin-Stein

Nourdin et Zheng, dans un important papier [138] qui est à la base d'une grande partie de nos travaux, ont proposé une méthode permettant d'obtenir les précédents résultats de Bubeck et ses co-auteurs, et même de les améliorer dans le cas d'entrées gaussiennes puisque l'hypothèse d'independance n'est plus nécessaire, en effet on autorise une structure de corrélation : les lignes de la matrice $\mathcal{X}_{n,d}$ sont i.i.d suivant $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ (où $\Sigma > 0$). C'est-à-dire que si la fonction de corrélation des lignes est intégrable (dans un sens à préciser), les fluctuations des matrices de Wishart dans ce cas-là sont encore gaussiennes.

Ces travaux se basent donc principalement sur la méthode de Malliavin-Stein qui donne des estimations explicites pour différentes distances et notamment en distance 1-Wasserstein entre un vecteur composé par des fonctionnelles lisses d'un processus gaussien isonormal et un vecteur gaussien de matrice de covariance non-dégénérée.
Cette idée est fondamentale à retenir puisque la matrice limite (plus précisément le vecteur où l'on a concaténé les lignes pour en faire un vecteur de taille n^2, est un vecteur gaussien), l'utilisation la méthode de Malliavin-Stein fait alors sens.

Modèlisation du problème

Plus précisement, donnons-nous un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, ainsi qu'un processus gaussien isonormal sur cet espace de Hilbert :

$$X = \{X(h), h \in \mathcal{H}\}, \tag{1.17}$$

On peut en toute généralité considérer que la matrice initiale $\mathcal{X}_{n,d}$ possède une structure de corrélation qui se concentre sur les lignes, cela signifie que l'on se donne une famille (dénombrable) $\left\{e_{i,j} : i, j \geq 1\right\} \subset \mathcal{H}$, telle que :

$$\langle e_{i,j}, e_{k,l}\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{i,k} s(j-l), \tag{1.18}$$

où $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une fonction de corrélation, telle que $s(0) = 1$, et qui peut appartenir à différents espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Ainsi qu'une matrice $\mathcal{X}_{n,d}$, telle que

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= X(e_{i,j}), && (1.19)\\ \mathbb{E}(X_{i,k}X_{j,l}) &= \delta_{i,j}s(k-l), && (1.20) \end{aligned}$$

qui possède donc une structure de corrélation sur les lignes, mais pas sur les colonnes.

Considérons ensuite la matrice de Wishart recentrée :

$$\mathcal{W}_{n,d} = \frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T - I_n, \tag{1.21}$$

ainsi que la matrice de Wishart renormalisée :

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d} := \sqrt{d}\mathcal{W}_{n,d}, \tag{1.22}$$

Nourdin et Zheng montrent alors que l'estimation suivante est valable pour tout $n, d \geq 1$,

Théorème 4 *(Nourdin-Zheng, 2018) Considérons $\mathcal{G}^s_{n,d} = (G_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, une matrice aléatoire symétrique, telle que le vecteur gaussien associé :*

$$(G_{11}, \dots, G_{1n}, G_{22}, \dots, G_{2n}, \dots, G_{n1}, \dots, G_{nn})^T \in \mathbb{R}^{n^2}, \tag{1.23}$$

ait la même matrice de covariance que

$$(W_{11}, \dots, W_{1n}, W_{22}, \dots, W_{2n}, \dots, W_{n1}, \dots, W_{nn})^T, \tag{1.24}$$

alors on a l'estimation suivante pour la distance $1-$Wasserstein matricielle (W_1) valable pour tout $n, d \geq 1$:

$$W_1(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{G}_{n,d}) \leq \sqrt{\frac{192n^3}{\sum_{|k|\leq d}(1-\frac{|k|}{d})s(k)^2} \times \frac{1}{d}\sum_{|k|\leq d}|s(k)|^{\frac{4}{3}}}, \tag{1.25}$$

De plus, si $s \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on a alors

$$W_1(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{G}_{n,d}) \leq \frac{2\sqrt{(n+1)n}}{||s||_{\ell^2(\mathbb{Z})}}\Big(\sum_{|k|>d} s(k)^2 + \frac{1}{d}\sum_{|k|\leq d} k|s(k)^2|\Big), \tag{1.26}$$

Et si $s \in \ell^{\frac{4}{3}}(\mathbb{Z})$, on obtient :

$$W_1(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{G}_{n,d}) \leq O\Big(\sqrt{\frac{n^3}{d}}\Big), \tag{1.27}$$

C'est-à-dire que l'on peut dans ce dernier cas, considérer que l'approximation de la matrice de Wishart par une matrice de Wigner gaussienne est encore valide si $n^3/d \to 0$.

Remarque 3 *Notons aussi, que ce cas a pu être amélioré par Nourdin et Pu [134] qui ont montré que les fluctuations des matrices de Wishart $\mathcal{W}_{n,d}$ sont encore gaussiennes (sous la même condition $n^3/d \to 0$), si $\mathcal{X}_{n,d}$ est une matrice composée de gaussiennes possédant une totale dépendance : corrélation à la fois en lignes et en colonnes, sous la condition que les fonctions de corrélation des lignes et des colonnes notées respectivement par s et r satisfont des hypothèses d'intégrabilité : $s \in \ell^{\frac{4}{3}}(\mathbb{Z})$ et $\|r\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} < \frac{6}{\sqrt{2}}$.*

Notre objectif sera donc d'étendre ce résultat, dans deux directions : la première pour des entrées i.i.d non-gaussiennes. L'autre traitera de la compréhension du phénomène, lorsque la structure de corrélation est "forte" et qu'en plus les entrées ne sont pas gaussiennes.

1.1.4 Bornes de types Berry-Esseen pour des déterminants aléatoires

L'étude des déterminants aléatoires est un aspect des matrices aléatoires qui a été étudié depuis un certain temps (on retrouve des travaux depuis la fin des années 1930 : Szekeres et Tùran [174]).

Il y a eu de nombreux résultats sur les moments de la valeur absolue des déterminants $|det(A_n)|$ sous diverses hypothèses. Ces formules sont cependant très compliquées.

L'article qui aura un intérêt majeur dans notre étude est celui de Goodman en 1968 (c.f [81]), qui prouve que pour une matrice aléatoire composée d'entrées gaussiennes indépendantes, le déterminant est alors un produit de variables du chi-deux indépendantes. Et donc en passant naturellement au logarithme, $log|det(A_n)|$ est une somme de variables indépendantes. Il semble alors raisonnable de considérer qu'un théorème de la limite centrale existe pour ces déterminants aléatoires.

Un théorème central limite pour les déterminants aléatoires

Girko dans [79] prouve ainsi un théorème de la limite centrale pour le déterminant de ces matrices gaussiennes.

$$\frac{\log(|\det \mathcal{X}_n|) - \frac{1}{2}\log(n-1)!}{\sqrt{\frac{1}{2}\log n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1), \tag{1.28}$$

De nombreuses extensions (en particulier, sans l'hypothèse gaussienne) ainsi que des versions quantitatives de ce théorème ont été démontrées, en particulier des estimations pour plusieurs distances : Kolmogorov, Variation totale.

Nguyen et Vu dans l'article [126] démontrent alors la version quantitative du *CLT* pour les déterminants aléatoires en distance de Kolmogorov :

Théorème 5 *Soit $A_n = (A_{i,j})_{i,j=1}^n$, une matrice avec des entrées indépendantes centrées et normalisées, ayant des queues de distributions sous exponentielles, i.e pour tout $n \geq 1$, $i, j = 1, \dots, n$ $P(|X_{i,j} \geq t) < C_1 e^{-t^{C_2}}$ avec $C_1, C_2 > 0$ (constantes positives). Alors, on a que :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{\log(|\det \mathcal{X}_n|) - \frac{1}{2}\log(n-1)!}{\sqrt{\frac{1}{2}\log n}} \leq x \right) - P(Z \leq x) \right| \leq log^{-\frac{1}{3}+o(1)} n, \tag{1.29}$$

On va dans la suite s'intéresser à cette problématique, et obtenir une version quantitative en distance 1-Wasserstein pour le déterminant de matrices de Wishart associées à une matrice initiale ayant des lignes i.i.d, telle que $X_j \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ (la j-ème ligne et Σ non dégénérée).

1.1.5 Un modèle Hermite-Ornstein-Uhlenbeck rugueux

En finance quantitative, on modélise souvent les caractéristiques d'un actif (son prix, sa volatiltié...) par des semi-martingales. C'est-à-dire que les *log-prix* (le logarithme du prix) sont généralement modélisés par une équation différentielle stochastique

$$d(log(\mathcal{Y}_t)) = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, \tag{1.30}$$

dirigée par B, un brownien standard, où σ_t est ce qu'on appellera la *volatilité*.

De nombreux modèles, le plus célèbre étant le modèle de Black-Scholes suppose une volatilité constante (ou déterministe), des extensions ont ainsi été étudiées pour rendre mieux compte de la réalité des marchés : modèles à volatilité locale, c'est-à-dire où la volatilité dépend du temps et du spot, (travaux de Dupire [68]), des modèles à volatilité stochastique, où la volatilité est elle-même un processus de diffusion : modèle de Heston (où la volatilité suit un modèle *CIR*), modèle *CEV*, modèle *SABR* (on pourra consulter à ce sujet, les indispensables références de Bergomi [17] ou Labordère [104]).

Cependant, pour les modèles à volatilité stochastiques, les trajectoires ont en général la même régularité que celle du mouvement brownien. 2014, marque une révolution dans la modélisation des actifs financiers. En effet, Gatheral, Jaisson et Rosenbaum ont mis en lumière une nouvelle problématique pour les praticiens de la finance quantitative. De manière remarquable, ces auteurs ont montré à travers des études empiriques que la *log-volatilité* (le logarithme de la volatilité) semble décrire un comportement beaucoup plus "*rugueux*" qu'un mouvement brownien.
En effet, en utilisant des estimations statistiques et en particulier des méthodes d'estimation du coefficient de régularité (au sens de Hölder ou Besov), Gatheral, Jaisson et Rosenbaum se sont aperçus que pour différentes échelles de temps (basse, moyenne et hautes fréquences) que la quantité suivante, que l'on comprend alors comme le moment empirique d'ordre q des incréments de la log-volatilité,

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} |log(\sigma_{k\Delta}) - log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q, \tag{1.31}$$

où Δ représente le pas et $q \geq 1$, est tel que :

$$m(q,\Delta) \propto \Delta^{\zeta_q}, \tag{1.32}$$

De plus, (les graphiques confortent largement cette hypotèse) :

$$\zeta_q = qH, \tag{1.33}$$

avec H une constante de l'ordre de 0.1, ceci signifie donc que la fraction $\frac{log(m(q,\Delta))}{log(\Delta)}$ se comporte comme une fonction linéaire en q.

Ces propriétés sont en particulier vérifiées : 1.32 de manière exacte pour un mouvement brownien fractionnaire (abrégé en *fBm* d'indice de Hurst H très petit). Il semble donc naturel de considérer qu'une réelle modélisation de la volatilité passe par celui-ci.

De plus, les incréments de la log-volatilité à différentes échelles de temps exhibent un comportement gaussien et ceci d'une manière presque parfaite (voir la section 2.5 de [78]). Il est aussi important de remarquer que le paramètre H semble constant dans le temps.

Pour pouvoir cependant garder un aspect important du point de vue théorique, mais aussi constaté sur les marchés financiers, il faut garder la *stationnarité* de la log-volatilité.

Gatheral, Jaisson et Rosenbaum sur la base de ces observations considèrent donc un modèle à volatilité stochastique fractionnaire rugueux appelé *RFSV : Rough Fractionnal Stochastic Volatility model*, pour la log-volatilité :

$$dX_t = -\alpha(X_t - m)dt + \nu dB_t^H, \tag{1.34}$$

et donc la volatilité

$$\sigma_t = exp(X_t). \tag{1.35}$$

Ils montrent en particulier que lorsque le drift du processus 1.34 appelé *fractionnal Ornstein-Uhlenbeck process* tend vers zéro, la log-volatilité se comporte alors (localement) comme un mouvement brownien fractionnaire.
Cette propriété est formalisée par la proposition 3.1 de [78]

.

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_0 - \nu W_t^H|\Big] \to 0, \tag{1.36}$$

Cependant, Gatheral, Jaisson et Rosenbaum constatent que l'approximation par un processus gaussien ne semble pas approprié pour certains types d'actifs, en particulier pour les marchés des matières premières : pétrole, or ou pour les cryptomonnaies : Bitcoin (voir [2] et [108], [175] ou [77]) . En effet, ces marchés semblent en général exhiber un comportement bien différent, et ce qui nous intéressera particulièrement : des queues de distributions plus *lourdes* (distribution *leptokurtique*).

Il semble donc intéressant de considérer un modèle de type Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire (en gardant le caractère rugueux), mais dirigé par un bruit possédant ces propriétés. C'est ce que nous détaillerons dans le chapitre 6.

1.1.6 Théorème du quatrième moment en probabilités libres

La découverte de l'existence d'un théorème du quatrième moment pour les intégrales multiples de Wiener-Itô par Nualart et Peccati [143], ainsi que de la découverte d'une connexion intrinsèque entre calcul de Malliavin et méthode de Stein [128] pour des fonctionnelles lisses d'un processus gaussien isonormal a permis de nombreuses avancées dans le domaine de l'approximation probabiliste sur les espaces gaussiens, puis poissoniens... et des possibilités d'applications à de nombreux autres domaines : estimation statistique (construction d'estimateurs et étude de leurs propriétés asymptotiques), vitesse de convergence pour des CLT (théorème de Breuer-Major en distance Kolmogorov ou Wasserstein pour le mouvement brownien fractionnaire, voir Nourdin et Peccati [128]), géométrie aléatoire (Decreusefond [60], Peccati, Reitnzer [148]), des théorèmes limites pour des équations aux dérivées partielles stochastiques (Huang, Nualart, Viitasari [90])...

Les probabilités libres inventées par Voiculescu ont permis de réelles avancées dans la compréhension des algèbres de von Neumann (en particulier des facteurs de groupes libres). La notion de *liberté*, qui est la contrepartie libre de l'indépendance classique (ou *tensorielle*), a permis la construction d'un objet possédant des propriétés qui en font le parfait analogue libre du mouvement brownien classique. Cet objet sera dénommé mouvement brownien libre. Nous définirons précisément celui-ci dans les sections suivantes. Le travail pionnier de Biane et Speicher [20] a permis de définir la notion d'intégrale stochastique dans le contexte des probabilités libres. De nombreux résultats concernant celle-ci, on pu être prouvé et notamment une formule d'Itô libre. Biane et Speicher ont aussi établi de nombreux résultats concernant l'analyse stochastique sur l'espace de Wigner (qui est l'analogue libre de l'espace de Wiener classique), en particulier de définir la notion d'intégrale multiple de Wigner-Îtô (contrepartie libre de l'intégrale multiple de Wiener-Itô). Le thème central qui nous intéressera est celui du calcul de Malliavin libre. En effet, il est possible de construire des analogues libres aux opérateurs usuels du calcul de Malliavin : dérivée de Malliavin, intégrale de Skorohod, opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck, et ainsi prouver des théorèmes de représentations (formule de Bismut Clark-Ocone libre), étudier les espaces de Wigner-Sobolev (contrepartie libre des espaces de Gross-Sobolev).

Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher se sont alors posé la question de l'existence d'un analogue libre au théorème du quatrième moment. Dans l'article fondateur [100], ces résultats ont ainsi été prouvés.

Théorème 6 (Kemp, Nourdin, Peccati, Speicher) *Soit $F_n = (I_q(f_q^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'intégrales multiples auto-adjointes appartenant au q-ème chaos de Wigner, telle que $\tau(F_n^2) = 1$.*
Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $F_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(0,1)$,
2. $\tau(F_n^4) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$,

De plus, Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher ont réussi à établir une version quantitative de ce théorème pour une distance d_{C_2} qui métrise la convergence en loi (notion que nous définirons plus loin dans le cadre des W^*- espace de probabilité) et en particulier, obtenir des bornes dépendant des cumulants d'ordre deux et quatre pour le cas des intégrales multiples d'ordre deux *fully-symmetric* (fonctions à valeurs réelles et invariantes par permutation des variables), en utilisant ce que l'on appellera désormais la méthode de *Malliavin-Stein libre*. Ces travaux ont ainsi pu être étendu par divers auteurs tels que Bourguin et Campese dans [27] à un ordre chaotique quelconque, qui ont donc en particulier montré que la discrépance de Stein libre se contrôle par le deuxième et *quatrième cumulant* en gardant cependant le caractère *fully-symmetric* des intégrales multiples de Wigner-Itô. Cébron dans [35] a ensuite obtenu une estimation quantitative en fonction du quatrième cumulant pour toutes les intégrales multiples auto-adjointes, en considérant cette fois-ci la distance de Wasserstein associée au coût quadratique et en construisant un noyau de Stein libre différent, qui traduit mieux les propriétés du calcul différentiel non-commutatif.

Notons au passage que de nombreuses inégalités fonctionnelles (*Talagrand, log-Sobolev, HSI, WSH*) (Dabrowski [50] pour la version multivariée de l'inégalité Talagrand) reliant les versions libres de l'information de Fisher, de l'entropie (les deux variantes), l'analogue libre de la distance de Wasserstein W_2 introduite par Biane et Voiculescu dans [21] et plus récemment la notion dont on s'intéressera le plus dans cette partie, la notion de noyau de Stein libre introduite par Fathi et Nelson dans [70], ont été prouvées.

1.2 Axe de recherches

1.2.1 Fluctuations des matrices de Wishart à entrées chaotiques

Nous avons focalisé notre étude sur la compréhension du phénomène lorsque les entrées de la matrice $\mathcal{X}_{n,d}$ ne sont pas gaussiennes, la littérature n'apportant pas à cet instant beaucoup d'information à ce sujet. Sur la base des travaux de Nourdin et Zheng ([138]), en partant de la décomposition chaotique, on s'est tout d'abord intéressé au cas d'entrées chaotiques (homogènes). C'est-à-dire que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq d$,

$$X_{ij} = I_{q_i}(f_{ij}), \tag{1.37}$$

où $f_{ij} \in \mathfrak{H}^{\odot q_i}$, $q_i \geq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et où on a noté I_q l'intégrale multiple de Wiener-Itô par rapport à un processus gaussien isonormal .

On a de plus, supposé la totale indépendance entre les entrées (l'hypothèse est nécessaire au vu de la complexité de telles entrées). En utilisant la méthode de Malliavin-Stein, une notion d'indépendance forte, inventée par Tudor et Bourguin dans [29] : *strongly independence*, ainsi qu'un critère d'indépendance sur l'espace de Wiener (du a Ustunël et Zakai [187]), que l'approximation des matrices de Wishart par des matrices de Wigner gaussienne est encore valide dans ce cas-là, si la condition $\frac{n^3}{d} \to 0$ est vérifiée. Nous verrons plus en détail, cette problématique dans le chapitre 4.

1.2.2 Extension des résultats au cas des intégrales de Skorohod

Dans cette partie, nous avons voulu savoir si l'on pouvait généraliser le précédent résultat à des entrées plus générales et notamment comprendre ce qu'il se passe lorsque l'on considère non pas une variable chaotique (homogène), mais une somme infinie d'intégrales multiples de Wiener-Itô, c'est-à-dire une intégrale de Skorohod.

$$X_{i,j} = \sum_{p\geq 1} I_p(f_p^{(i,j)}), \tag{1.38}$$

où $f_p^{(i,j)} \in L_S^2(T^p)$ pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$ et pour tout $p \geq 1$.

On exprimera en particulier les entrées $X_{i,j}$ commes des intégrales de Skorhod

$$X_{i,j} = \delta(u_{i,j}) \text{ avec } u_{i,j}(t) = \sum_{p\geq 1} I_{p-1}(f_p^{(i,j)}(\cdot, t)), \quad t \in T,$$

On montrera alors que lorsque les entrées ont toutes la même variance supposée normalisée (comme ce sont des intégrales de Skorohod, elles sont à fortori centrées) et le même quatrième moment, avec en particulier aucune hypothèse de distribution identique sur les entrées, que si ces dernières sont mutuellement *strongly independent*, et que les processus associés à l'intégrale de Skorohod sont suffisamment (et uniformément) réguliers au sens de Malliavin, alors la matrice de Wishart renormalisée de la même façon que précédemment converge composante par composante en loi, vers la même matrice de Wigner gaussienne évoquée précédemment. Nous serons aussi en mesure, d'estimer la vitesse de convergence en distance 1-Wasserstein matricielle associée à cette convergence. Cette estimation sera basée sur des résultats étendant l'estimation quantitative multidimensionnelle entre un vecteur gaussien de covariance non-dégénérée et un vecteur aléatoire composé par des fonctionnelles lisses s'exprimant comme une intégrale de Skorohod. Nous montrerons alors que pour assurer une approximation de la matrice de Wishart associée à ces entrées, la condition $n^3/d \to 0$ doit être renforcée par une condition plus forte, c'est-à-dire que l'on perd *un peu* de vitesse de convergence tout en gardant une forme la plus générale possible sur nos entrées.

1.2.3 Etude des fluctuations des matrices de Wishart pour des entrées non-gaussiennes corrélées

On peut légitimement se poser la question de savoir ce qui se passe lorsque les entrées de la matrice $\mathcal{X}_{n,d}$ supposées de même loi sur une ligne (on peut ici considérer les accroissements discrets d'un processus à accroissement stationnaires), ne sont pas gaussiennes et que l'on impose en plus une structure de corrélation assez "*forte*", que l'on supposera sans perte de généralité, concentrée uniquement sur les lignes de la matrice initiale. Partant des résultats bien connus pour le mouvement brownien fractionnaire, on peut tout de suite remarquer que les hypothèses d'intégrabilité de la fonction de corrélation, c'est-à-dire appartenir à $\ell^2(\mathbb{Z})$, ne sont satisfaites que dans le cas $H \in (0, \frac{3}{4})$, comme le remarque Nourdin et Zheng (voir remarque 1.3 dans [138]), le comportement limite pour un indice de Hurst strictement plus grand : $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ rend compte d'un phénomène très intéressant qui est celui de non-gaussianité : voir théorème 1.6 dans [138]). C'est pourquoi la limite n'est plus gaussienne mais distribuée comme une variable vivant dans le chaos d'ordre 2.

L'exemple qui semble alors naturel et intéressant à considérer, est celui des accroissements (stationnaires) du processus d'Hermite qui possède la même fonction de covariance que le mouvement brownien fractionnaire *fBm* et possèdent la propriété d'être un processus *non-gaussien*. On supposera aussi que la corrélation s'établit uniquement sur les lignes, dont on marquera la dépendance par rapport à la ligne en introduisant un mouvement brownien $n-$dimensionnel $B = (B^1, \ldots, B^n)$, ainsi que le processus gaussien isonormal associé à chacun de ces browniens.

Nous supposerons donc que pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, que :

$$\mathcal{X}_{i,j} = Z_j^{(q,H,i)} - Z_{j-1}^{(q,H,i)} = I_{q_i}^{(i)}(L_j - L_{j-1}), \tag{1.39}$$

En particulier, on a :

$$\mathbb{E}(X_{i,j}^2) = 1, \tag{1.40}$$

$$\mathbb{E}(X_{i,j}X_{i,k}) = \rho_H(j-k), \tag{1.41}$$

où ρ_H est la corrélation du mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H > \frac{1}{2}$.

Par la propriété de stationnarité des accroissements du processus d'Hermite, les entrées d'une même ligne auront la même loi qui pourra varier d'une ligne à l'autre. Nous pourrons voir qu'intuitivement, en utilisant l'auto-similarité, l'étude des termes diagonaux de la matrice de Wishart se ramène à l'étude des variations quadratiques du processus d'Hermite. Le résultat de Chronopoulou, Viens et Tudor dans [41] assure alors la convergence en $L^2(\Omega)$ des variations quadratiques proprement renormalisées du processus d'Hermite vers une variable aléatoire de *Rosenblatt*. Nous montrerons aussi que seuls les termes de plus *bas degré* (pour l'ordre chaotique) contribue de manière non triviale à la matrice aléatoire limite (quand n est fixé) et que $d \to \infty$. Cette dernière sera une matrice diagonale. Cette approche sera étudiée dans le chapitre 6.

1.2.4 Borne de type Berry-Esseen pour des déterminants aléatoires de matrices de Wishart

Notre idée, dans cette partie sur les déterminants aléatoires a donc été d'obtenir une estimation de la distance *1-Wasserstein* pour le *CLT* 1.28. Pour parvenir à ce résultat, nous utiliserons grandement le travail de Rempala et Wesolowski [162, 163] qui analysent le comportement de la suite de variable aléatoire suivante :

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\log(C_k) + \log(N)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left(\log\left(\prod_{k=1}^{N} S_k\right) - \log(N-1)!\right), \tag{1.42}$$

où

$$S_k = X_{k,1}^2 + \ldots + X_{k,k}^2, \tag{1.43}$$

et

$$C_k = \frac{S_k}{k}. \tag{1.44}$$

On sait par ailleurs que l'on a la convergence en loi de cette variable aléatoire vers une loi gaussienne standard (voir par exemple [162])

$$T_N \overset{(d)}{\to} N(0,1) \text{ quand } N \to \infty. \tag{1.45}$$

Cette quantité, qui semble à première vue éloignée de notre objectif de départ, apparaît en fait naturellement dans l'étude des déterminants aléatoires de matrice de Wishart. Pour analyser précisément la distance 1-Wasserstein entre le membre de droite et de gauche on décomposera astucieusement le terme T_N par une partie négligeable en norme L^1 et une partie dominante qui possède une décomposition chaotique calculable. On utilisera donc la méthode de Malliavin-Stein pour la partie dominante afin d'obtenir notre résultat.

Applications aux déterminants aléatoires

On va se donner une matrice aléatoire $\mathcal{X}_n$ où $X_j = (x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ représente les j-ème vecteur colonne, et Σ est supposée inversible. On va considérer la matrice de Wishart associée :

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{X}_n \mathcal{X}_n^T, \tag{1.46}$$

En utilisant le théorème précédent, on obtiendra alors que le logarithme du déterminant de cette matrice de Wishart satisfait un théorème central limite et on évaluera la vitesse de convergence pour le *CLT* en distance 1-Wasserstein.

1.2.5 Un modèle Hermite-Ornstein-Uhlenbeck rugueux

L'article de Gatheral, Jaisson et Rosenbaum a permis de mettre en lumière l'intérêt de la modélisation de la volatilité par un mouvement brownien fractionnaire. Cependant, il semble qu'il existe des classes d'actifs où le comportement gaussien ne semble pas approprié. Nous nous sommes donc intéressés à la potentielle modélisation de cette volatilité par un processus non-gaussien à trajectoires rugueuses. Le processus d'Hermite possède la première qualité, mais malheureusement pas la seconde. C'est pourquoi nous avons décidé de le remplacer par ce que l'on dénommera : le processus d'*Hermité Généralisé*. Ce processus définit et étudié par Major dans [114] et récemment ré-étudié par Bai et Taqqu dans [9] possède des propriétés qui font de lui un *bruit* très intéressant pour modéliser des phénomènes complexes où la mémoire courte, le caractère rugueux ainsi que l'absence de gaussianité sont essentielles, par exemple, la modélisation de la "*log-volatilité*" pour les matières premières ou les cryptomonnaies.

Dans ce chapitre, on étudiera deux versions d'intégrales stochastiques par rapport à ce processus : intégrale de *Wiener* ou *Riemann-Stieltjes*. Nous définirons alors un processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé à ce bruit et nous étudierons ses propriétés ; la régularité de ses trajectoires, sa fonction de covariance en temps long et pour finir le comportement de ce processus lorsque le terme de drift devient petit.

1.2.6 Une version quantitative du CLT multidimensionnelle sur l'espace de Wigner

Notre objectif dans cette partie sera de prouver une version quantitative du théorème suivant pour l'analogue libre de la distance Wasserstein (associée au coût quadratique) introduite par Biane et Voiculescu dans [21].

Théorème 7 *(Théorème 1.3 dans [132]) Soit $d \geq 2$ et $q_1, ..., q_d$ des entiers fixés, considérons une matrice de covariance symétrique définie positive $C = \left\{C_{i,j}\right\}_{i,j=1}^{d}$. Soit $(S_1, ..., S_d)$ une famille semi-circulaire de covariance C*

Pour tout $i = 1, \ldots, d$, considérons la suite $(f_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions "mirror-symmetric" dans $L^2(\mathbb{R}_+^{q_i})$, telle que pour tout $i, j = 1, \ldots, d$

$$\lim_{k\to\infty} \tau(I_{q_i}(f_k^{(i)})I_{q_j}(f_k^{(j)}) = C_{i,j}, \tag{1.47}$$

alors quand $k \to \infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Le vecteur $(I_{q_1}(f_k^{(1)}), ..., I_{q_d}(f_k^{(d)}))$ converge en loi vers $(S_1, ..., S_d)$.*
2. *Pour tout $i = 1, \ldots, d$, la variable aléatoire non-commutative $I_{q_i}(f_k^{(i)})$ converge en loi vers S_i.*

Pour pouvoir obtenir notre résultat, on utilisera la notion de noyau de Stein libre, ainsi que l'approche utilisée par Cébron [35], qui a pu fournir la version quantitative de ce théorème en dimension un, pour la distance de Wasserstein quadratique (en dimension un, les deux notions coïncident), via des inégalités fonctionnelles libres mettant en jeu la *discrépance de Stein libre* par rapport au potentiel semicirculaire et en construisant astucieusement un autre noyau de Stein libre pour ce potentiel (où la discrépance est majorée en fonction du quatrième cumulant libre). Nous montrerons alors que l'on peut construire de même un noyau de Stein libre pour le potentiel caractérisant une famille semicirculaire de covariance $C > 0$ et en déduire des inégalités fonctionnelles, en particulier deux variantes d'inégalités *WS : Wasserstein, free Stein discrepancy*, que l'analogue libre de la distance de Wasserstein associée au coût quadratique est majoré par une quantité dépendante des deuxième et quatrième cumulants de chaque composante.

Avant d'exposer clairement nos résultats, nous proposons une présentation des principales techniques et objets utilisés dans ces travaux.

Chapitre 2

Préliminaires aux résultats

Les résultats de cette section constituent une présentation succincte des résultats qui nous seront nécesssaires. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [139] et [129] pour une exposition complète de toute la théorie. On commencera par introduire le calcul de Malliavin, dans un second temps, nous présenterons le lien entre le calcul de Malliavin et méthode de Stein, puis la connexion découverte récemment entre inégalités fonctionnelles et méthode de Stein. Nous introduisons ensuite le mouvement brownien fractionnaire, et nous présentons ses principales propriétés. On étudiera ensuite des extensions chaotiques du mouvement brownien fractionnaire, que sont les processus de Hermite.

2.1 Du Calcul de Malliavin à la méthode de Stein-Malliavin

2.1.1 Calcul de Malliavin

Bien qu'au départ, le calcul de Malliavin fut développé sur l'espace de Wiener $\mathcal{W} = C_0([0,1])$, muni de son espace de Cameron-Martin H.

Le concept central pour construire un calcul de Malliavin est la notion de processus gaussien isonormal que l'on défini comme suit :

Définition 6 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (qui sera sauf mention du contraire supposé séparable) muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$.*
Un processus gaussien isonormal $X = \{X(h) : h \in \mathcal{H}\}$ est un processus gaussien centré défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et tel que : $\mathbb{E}(X(h)X(g)) = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}}$.

Définition 7 *On notera, pour tout $q \geq 1$, $\mathcal{H}_q$ le $q-$ième chaos de Wiener de X, le sous espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ engendré par les variables aléatoires :*

$$\mathcal{H}_q = \overline{\{H_q(X(h)), h \in \mathcal{H}, \|h\|_{\mathcal{H}} = 1\}}^{L^2(\Omega)}, \tag{2.1}$$

où H_q est le $q-$ième polynôme de Hermite défini par :

$$H_q(x) = (-1)^q e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^q}{dx^q}(e^{-\frac{x^2}{2}}). \tag{2.2}$$

Les premières valeurs de cette suite de polynômes étant données par : $H_1 = X,\ H_2 = X^2 - 1,\ H_3 = X^3 - 3X.$

Définition 8 *(L'intégrale multiple de Wiener-Itô)*
Soit $q \geq 1$ on définit l'application :

$$I_q : H_q(X(h)) = I_q(h^{\otimes q}), \tag{2.3}$$

qui s'étend en application linéaire isométrique du produit tensoriel symétrique $\mathcal{H}^{\odot q}$ de norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\odot q}} = \sqrt{q!}\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\otimes}}$ vers $\mathcal{H}_q$.

On obtient donc pour tout $f, g \in \mathcal{H}^{\odot p}$ et $p, q \geq 1$, l'isométrie de Wiener-Itô suivante :

Proposition 1 *Pour tout $f \in \mathcal{H}^{\odot p}$ et $g \in \mathcal{H}^{\odot q}$*

$$\mathbb{E}(I_p(f)I_q(g)) = \delta_{p,q} \times p!\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes p}}, \tag{2.4}$$

Rappelons que nous avons la décomposition en chaos de Wiener suivante :

Théorème 8 *(décomposition chaotique)*

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \tag{2.5}$$

Et donc pour toute fonctionnelle $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on a la décomposition chaotique suivante :

$$F = E(F) + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(f_q), \tag{2.6}$$

où les fonctions $f_q \in \mathcal{H}^{\odot q}, q \geq 1$ (unique) sont entièrement déterminées par les dérivées de Malliavin successives de F. si cette dernière est infiniment différentiable au sens de Malliavin, i.e $F \in \mathbb{D}^{\infty-}$

Nous pouvons à présent definir les opérateurs du Calcul de Malliavin.

Définition 9 *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctionnelles cylindriques suivantes :*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{d=1} \left\{ f(X(h_1), \ldots, X(h_d))/(h_1, \ldots, h_d) \in \mathcal{H}^d, f \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^d) \right\}, \tag{2.7}$$

La dérivée de Malliavin de F est défini comme étant un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ par :

Définition 10

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \ldots, W(h_n))h_i. \tag{2.8}$$

Grace aux hypothèses sur les fonctions considérées, on vérifie facilement que DF est bien défini, c'est à dire que $DF \in L^2(\Omega, \mathcal{H})$.

Par itération, on définit la $k-$ième dérivée comme élément de $L^2(\Omega, \mathcal{H}^{\otimes k})$ pour tout $p \geq 1$.

$$D^k F = \sum_{i_1,\ldots i_k=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}} (W(h_1), \ldots, W(h_n)) h_{i_1} \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes h_{i_k}. \tag{2.9}$$

Pour pouvoir étendre l'action des dérivées de Malliavin à des fonctionnelles $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, dont on rappelle que les fonctionnelles cylindriques S sont denses dans ces espaces. Il nous faut pouvoir obtenir le caractère closable de ces dérivées. Ce qui est fort heureusement assuré à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 2

Pour tout $p \geq 1$, $k \geq 1$ entier, D^k est un opérateur closable de S dans $L^p(\Omega, ; \mathcal{H}^{\otimes k})$

On peut alors définir les espaces de Gross-Stroock Sobolev.

Définition 11 *On pose $\mathbb{D}^{k,p}$ où $k, p \geq 1$, l'adhérence de $\mathcal{S}$ pour la norme*

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{k,p}}^k = \mathbb{E}(|F|^k) + \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}(\|D^i F\|_{\mathcal{H}^{\otimes i}}^k). \tag{2.10}$$

Calcul de Malliavin par rapport au bruit blanc

On va supposer que l'espace de Hilbert sur lequel est construit notre processus gaussien isonormal est $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{T}, \mu)$ avec μ une mesure non atomique. Par l'identification suivante :

$$L^p(\Omega; \mathcal{H}) \simeq L^p(T \times \Omega), \tag{2.11}$$

la dérivée de Malliavin de F est donc vue comme le processus $\{D_t F, t \in T\}$.
En particulier, on obtient pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{p-1}(f(\cdot, t)). \tag{2.12}$$

On peut donc tout naturellement caractériser l'appartenance d'une fonctionnelle d'un processus gaussien isonormal (associé à un espace de Hilbert séparable de la forme précédente) aux espaces de Sobolev $\mathbb{D}^{k,2}$, via la décomposition chaotique.

Proposition 3 *(Caractérsiation chaotique des espaces de Gross-Stroock Sobolev)*
Soit $k \geq 1$ entier

$$\mathbb{D}^{k,2} = \left\{ F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \sum_{n=k}^{\infty} n^k n! \|f_n\|_{L^2(T^n)}^2 < \infty \right\}, \tag{2.13}$$

Remarque 4 *La dérivée de Malliavin possède les propriétés essentielles d'une dérivation : c'est un opérateur linéaire qui satisfait à la règle de Leibniz (pour les fonctionnelles cylindriques), et qui possèdent donc une règle pour la dérivation des fonctions composées.*

Proposition 4 *Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et soit $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{D}^{1,q}$ pour $q > 1$. Alors si F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue alors $\phi(F) \in \mathbb{D}^{1,q}$ et*

$$D\phi(F) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(F) DF_i. \tag{2.14}$$

On sait donc que $D^k : \mathbb{D}^{k,2} \to L^2(\Omega, \mathcal{H}^k)$ est un opérateur closable à valeurs dans un espace de Hilbert, on peut donc définir son adjoint.

Définition 12 *Soit $p \geq 1$ un entier.*

1. *On définit le domaine Dom δ^k comme le sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{H}^{\otimes k})$*

$$\text{Dom } \delta^k = \{u \in L^2(\Omega, \mathcal{H}^{\otimes k}); \quad |\mathbb{E}(\langle D^k F, u\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes k})})| \leq c\sqrt{\mathbb{E}(F^2)} \text{ pour tout } F \in \mathbb{D}^{k,2}\},$$

2. *Soit $u \in$ Dom δ^k alors $\delta^k(u)$ est uniquement déterminé par :*

$$\mathbb{E}(F\delta^k(u)) = \mathbb{E}(\langle D^k F, u\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes k})}). \tag{2.15}$$

L'opérateur adjoint s'appelle l'opérateur de **divergence** d'ordre k. L'existence d'un tel opérateur adjoint de la dérivée de Malliavin d'ordre p est une conséquence du théorème de représentation de Riesz.

Définition 13 *On définit le semigroupe d'Ornstein-Uhlenck $(P_t)_{t\geq 0}$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\Omega)$ ($f_n \in L^2_S(\mathbb{R}^n_+)$) par :*

$$P_t(F) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} I_n(f_n), \tag{2.16}$$

C'est un semigroupe de contraction. Remarquons aussi qu'on a une construction équivalente via la formule de Mëhler (voir section 2.8 dans [129]). On peut donc définir son générateur.

Définition 14 *On définit le générateur du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck comme l'opérateur L par :*

$$LF = \sum_{n=0}^{\infty} -nI_n(f_n), \tag{2.17}$$

pour F dans le domaine $D(L)$,

$$D(L) = \left\{ F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \sum_{n=0}^{\infty} n^2 n! \|f_n\|^2_{L^2(T^n)} < \infty \right\}, \tag{2.18}$$

Définition 15 *On définit aussi l'opérateur pseudo-inverse de L, noté L^{-1}, définit pour tout $F \in L^2(\Omega)$, par :*

$$LF = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} I_n(f_n), \tag{2.19}$$

On remarque alors que pour tout $F \in L^2(\Omega)$, $L^{-1}F \in D(L)$ et $LL^{-1} = F - \mathbb{E}(F)$

La proposition suivante permet d'établir une connexion intrinsèque entre D, δ et L (qui joue alors le rôle du Laplacien sur l'espace de Wiener) :

Proposition 5 *On a $L = -\delta D$, c'est-à-dire que $X \in D(L)$ si et seulement si $DX \in D(\delta)$ et dans ce cas $\delta(DX) = -LX$*

Remarque 5 *On peut aussi définir l'intégrale multiple de f est définie par $I_k(f) = \delta^k(f)$ pour $k \geq 1$ entier et $f \in \mathcal{H}^{\otimes k}$. On peut vérifier ques les deux définitions des intégrales multiples coïncident, on pourra à ce sujet consulter le livre de Nourdin et Peccati [129] pour plus de détails.*

La formule suivante permet de caractériser les fonctions apparaissant dans la décomposition chaotique d'une fonctionnelle F si celle si est infiniement régulière au sens de Malliavin.

Proposition 6 *(Formule de Stroock, [173]) Soit $F \in \mathbb{D}^{\infty,2} = \cap_{k\geq 1}\mathbb{D}^{k,2}$, alors on a :*

$$F = \mathbb{E}(F) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^p(D^n F), \tag{2.20}$$

La formule suivante permet d'obtenir la décomposition chaotique du produit de deux intégrales multiples (il existe une démonstration très élégante qu'on peut retouver dans le livre de Nourdin et Peccati : théorème [129, 2.7.10] ainsi que dans le travail d'Ustunël : [188]. Ce résultat pouvant être déduit grâce à la formule de Leibniz pour la dérivée de Malliavin, ainsi que de la formule de Stroock.)

Théorème 9 (Formule produit) *Soient $p, q \geq 1$ et $f \in \mathcal{H}^{\odot p}$ et $g \in \mathcal{H}^{\odot q}$ alors*

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{k=0}^{p\wedge q} r! \binom{p}{r}\binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f\tilde{\otimes}_r g), \tag{2.21}$$

avec $f\tilde{\otimes}_r g$ désigne la symetrisé de la contraction d'ordre r.

La propriété suivante traduit le fait que dans un chaos (on peut généraliser aux sommes finies de chaos, i.e $\bigoplus_{k=0}^{d} \mathcal{H}_k$) toutes les normes $L^p(\Omega)$ sont équivalentes (voir Nourdin, Peccati, Reinert, proposition [131, 2.6]).

Théorème 10 (Hypercontractivité) *Soient $p, q \geq 1$.*
Alors il existe une constante $0 < k(p, q) < \infty$ telle que

$$\mathbb{E}(|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \leq k(p, q)\mathbb{E}(Y^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.22}$$

On rappelle que l'on définit les espaces $\mathbb{L}^{k,p} = L^p\left(T;\mathbb{D}^{k,p}\right), k \geq 1, p \geq 2$ comme des sous espaces de Dom(δ), équipés des normes :

$$||u||^p_{k,p} = \int_T \left[\mathbf{E}|u_t|^p + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}||D_{s_1,\dots,s_k} u_t||^p_{L^2(T^j)}\right] dt.$$

Théorème 11 *(Inégalités de Meyer) Pour tout $u \in \mathbb{L}^{k,p}$ où $k \geq 1, p \geq 2$*

$$||\delta(u)||_{k-1,p} \leq C_p ||u||_{k,p}. \tag{2.23}$$

Remarque 6 *Il est possible de déduire le théorème précédent 10 d'hypercontractivité des chaos grâce aux inégalités de Meyer et à la définition alternative de l'intégrale multiple (voir [129]).*

Lemme 1 *(On rappelle aussi que [184]) Soit $F \in \mathbb{D}^{k,p}$, alors $D(-L)^{-1}F \in \mathbb{L}^{k+1,p}$ et*

$$||D(-L)^{-1}F||_{k+1,p} \leq C_{p,k}||F||_{k,p}, \tag{2.24}$$

2.1.2 Méthode de Malliavin-Stein

Dans cette section, nous présentons le célèbre théorème du quatrieme moment qui nous donne des conditions de convergence d'une fonctionnelle d'un processus gaussien isonormal vers une loi gaussienne, mais qui fournit aussi des bornes effectives à l'aide du Calcul de Malliavin et permet donc de donner un critère de convergence simple pour certaines fonctionnelles (les intégrales multiples) vers une telle loi. Ue complète description et de nombreux autres résultats se trouvent dans le livre fondateur de Nourdin et Peccati [129].

On peut à l'aide des opérateurs construits dans la section précédente, prouver l'intégration par parties sur l'espace de Wiener :

Théorème 12 *Pour tout $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}$, $g \in C^1$ dont la dérivée est bornée*

$$\mathbb{E}(Fg(G)) = \mathbb{E}(F)\mathbb{E}(g(G)) + \mathbb{E}\left(g'(G)\langle DG, -DL^{-1}F\rangle_{\mathcal{H}}\right). \tag{2.25}$$

Le lemme suivant appelé *lemme de Stein*, permet de caractériser la loi $\mathcal{N}(0,1)$ par un opérateur différentiel du premier ordre. C'est de cette façon qu'on va pouvoir connecter le calcul de Malliavin à la méthode de Stein.

Lemme 2 *Soit N une variable aléatoire. Alors, $N \overset{loi}{=} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ si et seulement si*

$$E(f'(N) - Nf(N)) = 0$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, dérivable et telle que : $\mathbb{E}[f'(N)] < \infty$

Remarque 7 *On va donc caractériser la proximité d'une loi de probabilité vers la loi gaussienne standard grâce à un opérateur différentiel du premier ordre :*

$$\mathcal{L}f(x) \quad = \quad f'(x) - xf(x). \tag{2.26}$$

Dans la suite, on va expliquer comment obtenir des estimations quantitatives lorsque l'on travaille sur un espace de Wiener et comment les opérateurs du calcul de Malliavin interviennent dans le contrôle de la distance. On focalisera cependant nos explications sur le cas de la distance $1-$Wasserstein.

Considérons alors l'équation de Poisson suivante d'inconnue h_f où $f \in Lip(1)$:

$$Lh_f(x) = f(x) - E[F(N)], \tag{2.27}$$

Par la dualité de Kantorovitch-Rubinstein, on sait que l'on a la représentation duale de la distance $1-$Wasserstein (où $Lip(1)$ est l'ensemble des fonctions $1-$Lipschitzienne), en utilisant alors l'intégration par parties 12, on a alors :

$$\begin{aligned} W_1(F,Z) &= \sup_{f\in Lip(1)} |\mathbb{E}[f(F)] - \mathbb{E}[F(N)]| \\ &= \sup_{f\in Lip(1)} \mathbb{E}[Lh_f(F)] \\ &= \sup_{f\in Lip(1)} \mathbb{E}[h_f^{'}(X)(1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{\mathcal{H}})] \\ &= \sup_{f\in Lip(1)} \|h_f^{'}\|_\infty \sqrt{\mathbb{E}[(1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{\mathcal{H}})^2]} \\ &, \end{aligned} \tag{2.28}$$

On arrive alors à contrôler facilement le terme suivant, en résolvant l'équation de Poisson associée :

$$\sup_{f\in Lip(1)} \|h_f^{'}\|_\infty \leq 1, \tag{2.29}$$

Et on arrive finalement au théorème suivant :

Théorème 13 *Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ tels que $\mathbb{E}(F) = 0, \mathbb{E}(F^2) = 1$. Alors on a*

$$W_1(F,Z) \leq \sqrt{\mathbb{E}\Big[(1 - \langle DF, -DL^{-1}F\rangle_{\mathcal{H}})^2\Big]}, \tag{2.30}$$

Remarque 8 *La convergence d'une fonctionnelle $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est donc caractérisée par des opérateurs du calcul de Malliavin. Si de plus, $F \in \mathbb{D}^{1,4}$, le terme de droite se majore de la façon suivante (sous l'hypothèse $\mathbb{E}(F) = 0, Var(F) = 1$)*

$$\mathbb{E}(|1 - \langle DF, D(-L)^{-1}F\rangle_{\mathcal{H}}|) \leq \sqrt{Var\left(\frac{1}{p}\|DF\|^2_{\mathcal{H}}\right)}, \tag{2.31}$$

Ce qui est maintenant intéressant, est le fait que pour des intégrales multiples de Wiener-Itô $I_p(f_p)$, le terme précédemment peut se majorer en fonction du deuxième et quatrième cumulant (voir section 5.2 de [129]), à l'aide de la formule produit pour les intégrales multiples 9). Nous le verrons dans la section suivante, mais en réalité, le résultat est plus profond et est notamment dû au fait qu'une intégrale multiple d'ordre $n \geq 1$soit un vecteur propre de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck dont la $(n+1)$ dérivée de Malliavin est nulle (chaos d'un opérateur de Markov, c.f définition [105, 5]).

Théorème 14 (Théorème quantitatif du quatrième moment) .

Soit $F_n = I_p(f_p^{(n)})$ une suite d'intégrales multiples appartenant à un chaos d'ordre $p \geq 2$ fixé, et telle que $\mathbb{E}(F_n^2) = 1$, alors :

$$W_1(F_n, Z) \leq \sqrt{Var\left(\frac{1}{p}\|DF_n\|^2_{\mathcal{H}}\right)}. \tag{2.32}$$

On obtient alors facilement les équivalences suivantes (critère de Ortiz-Latorre et Nualart, voir [141]) :

1. $F_n \to \mathcal{N}(0,1)$
2. $\|DF_n\|^2_{\mathcal{H}}$ *converge en* $L^2(\Omega)$ *vers* p

Proposition 7 (Chaos distincts implique loi distinctes) *A l'aide de l'hypercontractivité des chaos, il est facile de déduire des bornes supérieures et inférieures de type sous-exponentielles pour les queues de distributions d'une variable chaotique, qui en plus dépendent de l'ordre du chaos considéré. Ce dernier résultat implique que des variables chaotiques homogènes vivant dans des chaos distincts ont nécessairement une loi différente. Nous rappelons que tout cela se trouve de manière très clair dans le livre de Janson (cf. [94]). On peut remarquer aussi immédiatement que le théorème précédent implique directement la non-gaussianité des chaos d'ordre $p \geq 2$. En effet, si $f \in \mathcal{H}^{\odot p}$, alors : $\mathbb{E}(I_p(f)^4) > 3(\mathbb{E}(I_p(f)^2)^2$*

Remarque 9 *Il est aussi important de remarquer, que caractériser les possibles limites en loi d'une variable chaotique d'ordre plus grand que deux soient toujours un problème ouvert (voir Janson, chapitre 58 [94]) , il est cependant bien connu que les chaos de Wiener (homogènes) sont fermés en probabilité (Schreiber, [167]).*

2.1.3 Inégalités fonctionelles classiques

Dans cette section, on va présenter quelques résultats fondamentaux concernant les inégalités fonctionnelles. Ces dernières jouent un rôle important dans l'étude de la convergence vers l'équilibre de systèmes dynamiques, l'étude de la concentration de la mesure, l'analyse en temps long d'équation aux dérivées partielles, ou encore dans la physique statistique. Nous introduisons d'abord quelques rappels concernant l'entropie et l'information de Fisher classique. Rappelons l'intérêt de telles définitions et les différentes relations entre ces différentes quantités. Dans la section suivante, on présentera alors des améliorations de telles inégalités grâce à la méthode de Stein.

Considérons par exemple la mesure gaussienne γ sur $M = \mathbb{R}^n$. Rappelons qu'on note généralement $\mathcal{P}_p(M)$ l'espace des mesures de probabilités sur M : que l'on munira des p-distances de Wasserstein (on s'intéressera surtout ici à W_1 et W_2).

Définition 16 *On rappelle que les p-distances de Wasserstein pour $p \geq 1$ sont définies (dans le cas $M = \mathbb{R}^n$) par :*

$$W_p(\mu, \nu) = \left(\underset{\pi(\nu,\nu)}{inf} \int |x-y|^p d\pi(x,y) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.33}$$

où l'infinimum est pris sur tous les couplages $\pi(\mu, \nu)$, de marginales μ et ν.

Heuristique L'idée est de trouver des fonctionnelles $f(., \gamma) : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{R}$, qui permettent de dire que si une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}(M)$ vérifie $f(\mu, \gamma) \equiv 0$, alors nécessairement $\mu \equiv \gamma$.
Bien entendu, la distance Wasserstein fournit une telle fonctionnelle, mais on peut en construire d'autres et notamment la notion d'entropie relative (au sens de Shannon). La discrépance de Stein en est une autre.

Définition 17 *Soit μ, ν, deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. L'entropie relative (au sens de Shannon) de μ par rapport à ν est défini par :*

$$H(\mu|\nu) = Ent(\mu|\nu) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) log(f(x)) d\nu(x) \ si \ d\mu(x) = f(x) d\nu(x) \\ +\infty \ si \ \mu(x) \not\ll d\nu(x) \end{cases},$$

Définition 18 *On définit de même l'information de Fisher relative*

$$I(\mu|\nu) = I_\nu(h) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla log f(x)|^2 d\nu(x) \ si \ d\mu(x) = f(x) d\nu(x) \\ +\infty \ si \ \mu(x) \not\ll d\nu(x) \end{cases},$$

Définition 19 *On appellera souvent $\nabla log f(x) = \frac{\nabla f(x)}{f(x)} = (\partial^*_{x_1} 1, \ldots, \partial^*_{x_n} 1)$, la fonction score lorsque ν est la mesure de Lebesgue.*

Théorème 15 *(Inégalité de Sobolev logarithmique)*
Soit $\nu_V = e^{-V} dx$, avec $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-V} dx = 1$ une mesure uniformément log-concave, c'est-à-dire, $Hess(V) \geq c$ où $c > 0$. Soit μ, absolument continue par rapport à ν_V, $d\mu = h d\nu_V$. L'inégalité de Log-Sobolev prend alors la forme suivante :

$$H(\mu|\nu_V) \leq \frac{1}{2c} I(\mu|\nu_V), \tag{2.34}$$

Puisque les idées dans la preuve de ce théorème seront utilisées pour déduire des analogues à ces inégalités en probabilités libres (pour les idées générales, mais pas spécialement pour le calcul Gamma).

Idée de preuve (d'après Ledoux, Nourdin, Peccati) : Le fait est de considérer une diffusion brownienne avec pour drift le gradient du potentiel (diffusion de Langevin : *noisy gradient descent*).

Considérons donc l'équation différentielle stochastique suivante, (l'existence et l'unicité étant assurées grâce aux conditions sur V), avec $(B_t) = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ un mouvement brownien d-dimensionnel.

$$dX_t = -\nabla V(X_t)dt + \sqrt{2}B_t, \tag{2.35}$$

On pose $\nu_t = \mathbb{P}_{X_t}$ avec $\nu = \mathbb{P}_{X_0}$. On note $P_t f = \mathbb{E}(f(X_t^x))$, le semigroupe de Markov associé à cette diffusion où f est une fonction test et $\nu = \delta_x$, dont le générateur infinitésimal est donné par :

$$L = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle, \tag{2.36}$$

On rappelle que $(P_t)_{\tau \geq 0}$ est solution de l'équation de la chaleur (voir [10]) :

$$\partial_t P_t = LP_t = P_t L, \tag{2.37}$$

On définit aussi l'opérateur carré du champ Γ (après quelques calculs), pour $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\Gamma(f, g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle, \tag{2.38}$$

et on note $\Gamma(f) = \Gamma(f, f)$ L'unique mesure invariante (stationnaire) de la diffusion est bien entendu μ.

Définissons alors l'opérateur Γ_2 (carré du champ itéré) :

$$\Gamma_2(f) := \Gamma(Lf, f) = \frac{1}{2}(L\Gamma(f) - 2\Gamma(f, L(f)), \tag{2.39}$$

On peut montrer que

$$\Gamma_2(f) = \|\nabla^2(f)\|_{HS} + \langle \nabla f, \nabla^2(V)\nabla f \rangle, \tag{2.40}$$

avec $\|\nabla^2(f)\|_{HS} = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\right)^2$

Pour déduire l'inégalité de Log-Sobolev, on utilise le critère de décroissance exponentielle de l'information de Fisher, qui est déduit de la condition suivante, appélée condition de *Bakry-Emery* et qui garantit certaines inégalités pour le semigroupe, (en particulier elle est toujours satisfaite pour les mesures uniformément log-concave) :

Maintenant si la condition de Bakry-Emery (ou curvature-dimension) suivante est satisfaite :

Définition 20 *($CD(c,\infty)$) On dit alors que l'opérateur L satisfait le critère $CD(c,\infty)$ (curvature-dimension) si pour tout fonction $f \in D(L)$, il existe $c \in \mathbb{R}$,*

$$\Gamma_2(f) \geq c\Gamma(f), \tag{2.41}$$

Remarque 10 *Il est alors facile de voir de 2.40 que si μ_V est uniformément C-log-concave, le critère précédent 20 est satisfait.*

qui conduit à la décroissance exponentielle de l'information de Fisher :

$$I(\mu_t, \nu_t) \leq e^{-2ct} I(\mu, \nu_V), \tag{2.42}$$

dont on peut ensuite en déduire l'inégalité de *Log-Sobolev* via la formule de de Bruijn's :

$$H(\mu, \nu_V) = -\int_0^\infty I(\mu_t, \nu_t)dt, \tag{2.43}$$

Ces travaux remarquables sont dus à *Bakry et Emery* [12], et ont été étudié par différents probabilistes tels que Ledoux, Villani, Otto, Gentil (voir l'indispensable référence de Bakry, Gentil et Ledoux [10] pour une complète description de toute la théorie). Les premiers résultats dans ce domaine remontant aux travaux de Gross (1975) [83] qui à prouvé une telle inégalité pour la mesure gaussienne.

Remarque 11 *Nous pouvons déjà remarquer que la preuve de ces inégalités repose fortement sur sur le critère Γ_2 et en particulier que la commutativité joue un rôle prépondérant dans l'obtention de celles-ci. Nous verrons plus tard, que dans le cadre des probabilités libres, cela représente déjà une difficulté de déduire de telles inégalités via des critères du calcul Γ (Guionnet et Shlyakhtenko dans [85] ont en fait défini un analogue libre à ces opérateurs). De plus, la notion d'entropie en probabilités libres n'est pas unique, on peut mentionner au moins trois différentes versions de l'entropie relative à un potentiel (en particulier les versions non-microcanoniques, l'entropie microcanonique ne sera pas étudié, ni même mentionné dans ce document). Ce qui nous conduira à choisir la variante de l'entropie, introduite par Dabrowski, qui permet d'obtenir une formule de De Bruijn's ainsi que l'inégalité de Sobolev logarithmique (voir [51])*

2.1.4 Inégalités fonctionnelles et méthode de Stein

Nous mentionnons dans cette partie, une manière équivalente permettant de déduire une estimation quantitative pour les $L^p, p \geq 1$ distances de Wasserstein W_p (en particulier la distance associée au coût quadratique W_2).

En effet ce résultat peut être déduit à l'aide d'inégalités fonctionnelles qui mettent en jeu, des quantités telles que l'information de Fisher, l´entropie relative, la distance Wasserstein et une quantité fondamentale dans notre étude : la discrépance de Stein.
Elle apparaît implicitement dans la section précédente, mais on peut en dire plus en l'introduisant de manière formelle.

On a vu précédent comment cette notion apparaît (de manière iplicite) dans le cas de 1-dimensionnel.
Rappelons tout d'abord comment intervient cette discrépance à travers l'exemple de la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^d$. Il est facilement établi et bien connu que la formule d'intégration par parties suivante est satisfaite pour toutes les fonctions tests $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$ (telle que la norme du gradient appartient à $L^1(\gamma)$, ce qui revient donc à travailler avec l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\gamma)$). On utilise ici la formulation forte de l'intégration par parties gaussiennes :

$$\int_{\mathbb{R}^d} x.fd\gamma = \int_{\mathbb{R}^d} div(f)d\gamma, \tag{2.44}$$

où $div = Tr(\nabla)$.

On peut aussi considérer la formulation plus faible, qui suppose que les fonctions f sont des gradients, i.e $f = \nabla g$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} x.\nabla gd\gamma = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta gd\gamma, \tag{2.45}$$

Ce qui ne signifie rien d'autre que la mesure gaussienne est la mesure invariante du processus d'Ornstein-Ulhenbeck, dont le générateur infinitésimal est $L = \Delta - \langle x, \nabla\rangle$.

Heuristique Intuitivement, une mesure de probabilité qui satisfait approximativement à une telle intégration par parties pour une large classe de fonctions devrait être "proche" de la mesure standard gaussienne. On aimerait donc pouvoir dans le membre de droite de l'équation 2.44, remplacer le terme de divergence, par une fonction à valeurs qui est donc à valeurs matricielles, pour ensuite évaluer la "proximité" de celle-ci à l'identité. Cela nous conduit donc à définir la notion suivante :

Définition 21 *Un noyau de Stein par rapport à la mesure γ est la donnée d'une fonction mesurable à valeurs matricielles, tel que : $\tau_u : \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R})$ qui satisfait l´intégration par parties suivante : pour toutes fonctions tests f à valeurs dans $\mathbb{R}^d$:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} x.fd\gamma = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \tau_u, \nabla f\rangle_{HS} d\gamma, \tag{2.46}$$

Définition 22 *La discrépance de Stein (d'ordre 2) est alors défini comme l'infinimum sur tous les noyaux de Stein admissibles :*

$$\Sigma(\mu|\gamma) = \inf_{\tau_u} \left(\int_{\mathbb{R}^d} ||\tau_u - I_d||^2_{HS} d\mu \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.47}$$

Remarque 12 *En toute généralité, prouver l'existence de tels noyaux de Stein pour une mesure de probabilité μ (on suppose ici que la mesure de référence est la gaussienne standard) est très compliqué, on sait par exemple en dimension 1, que lorsque la mesure est à densité p par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $A = \frac{1}{p(x)} \int_x^\infty yp(y)$ est un tel noyau de Stein et il est unique. Un autre résultat montre qu'en toute dimension il y a existence de noyaux de Stein, pour les mesures satisfaisant une inégalité de Poincaré, et telle que ∇V soit intégrable (il existe une autre caractérisation via une modification de l'inégalité de Poincaré, dénommée "converse weighted Poincaré inéquality") (c.f travaux de Courtade, Fathi et Pananjady dans [48]).*

Comme nous l'avons vu précédemment, il est possible de montrer que :

$$W_1(\mu,\gamma) \leq \Sigma(\mu|\gamma), \tag{2.48}$$

L'idée cruciale étant que la proximité de $\tau_u \approx I_d$, équivaut à la proximité de $\mu \approx \gamma$ (pour W_p, $p \geq 1$. Ces heuristiques ont en fait une justification bien profonde et dont la formalisation est issue des idées de Ledoux, Nourdin et Peccati qui justifient proprement celles-ci en prouvant des estimées entre la distance Wasserstein quadratique et même plus généralement pour toutes les L^p distance Wassesrtein $p \geq 1$ et les L^p discrépances de Stein (on doit alors considérer nécessairement la formulation forte, voir section [106, 2.2] par rapport à la mesure gaussienne). D'une manière plus explicite, cela traduit le fait que la convergence en discrépance de Stein implique la convergence en distance de Wasserstein.

En premier lieu, Ledoux, Nourdin et Peccati utilisent le travail d'Otto et Villani (voir [146]) qui fournit une inégalité importante pour les accroissements infinitésimals de la distance Wasserstein W_2, entre une variable aléatoire de densité absolument continue par rapport à la mesure gaussienne et son interpolation le long du semigroupe d'Orntein-Uhlenbeck, par l'information de Fisher le long du flot :

Théorème 16 *(Otto-Villani [146]) Notons, X une variable aléatoire de loi μ et de densité h lisse par rapport à la mesure gaussienne γ. Posons $\mu_t = logP_th$ et $d\mu^t = P_th d\gamma$ où $(P_t)_{t\geq 0}$ est le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck. On a alors l'estimation suivante pour :*

$$\frac{d^+}{dt} W_2(\mu|\mu^t) \leq I(\mu^t|\gamma)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.49}$$

Ledoux, Nourdin et Peccati montrent alors la proposition suivante, qui relie l'information de Fisher relative à la mesure gaussienne le long du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck et la discrépance de Stein :

Théorème 17 *Sous les hypothèses du théorème précedent et avec les mêmes notations, on a l'inégalité suivante valable pour tout $t \geq 0$:*

$$I(\mu^t|\gamma)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \Sigma(\mu|\gamma), \tag{2.50}$$

Heuristique

En effet, on remarque qu'on a la représentation suivante de l'information de Fisher le long du flot, on se rappelle aussi que $d\nu = h\delta\gamma$:

$$I(\mu^t|\gamma) = I_\gamma(P_th) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla P_t h|^2}{P_t h} d\gamma \overset{i.i.p}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} L\mu_t P_t h d\gamma \overset{sym}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} LP_t\mu_t d\mu, \tag{2.51}$$

Maintenant, de cette réprésentation de l'information de fisher le long du flot, on va utiliser la notion de noyau de Stein, on se donne alors A, un tel noyau de Stein pour μ par rapport à la mesure gaussienne.

$$\begin{aligned} I_\gamma(P_t h) &= -\int_{\mathbb{R}^d} LP_t\mu_t d\mu && (2.52) \\ &\stackrel{def}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} [\Delta P_t\mu_t - x.\nabla P_t\mu_t] d\mu && (2.53) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle A - I_d, \nabla^2(P_t\mu_t)\rangle_{HS}\, d\mu, && (2.54) \end{aligned}$$

L'idée cruciale de Ledoux, Nourdin et Peccati pour contrôler la Hessienne de $\nabla^2(P_t\mu_t)$ est d'utiliser les relations de commutations entre gradient et le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, ainsi que les formules de type Bismut (voir section 2.3 de [106]), pour pouvoir conclure via Cauchy-Scharwz.

En intégrant la relation d'Otto-Villani et en utilisant la proposition fondamentale précédente, on arrive alors à l'inégalité suivante que l'on dénommera inégalité *WS* (pour Wasserstein-Stein discrepancy).

Théorème 18 *(Ledoux, Nourdin, Peccati, 2015)*
On a l'inégalité suivante WS sous les hypothèses du théorème précédent :

$$W_2(\mu, \gamma) \leq \Sigma(\mu|\gamma), \tag{2.55}$$

Ledoux, Nourdin et Peccati généralise même le résultat par des arguments de régularisation pour toutes les mesures centrées (et sans hypothèse d'absolue continuité par rapport à la gaussienne).

Définition 23 *Rappelons qu'une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ satisfait à une inégalité de Talagrand T_2 de constante $C > 0$ si pour tout autre mesure $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$:*

$$W_2(\nu, \mu) \leq \sqrt{2CH(\nu|\mu)}, \tag{2.56}$$

Théorème 19 *(Inégalité de Talagrand, [177]) La mesure gaussienne standard satisfait une inégalité de Talagrand avec la constante $C = 1$ (constante optimale).*

$$W_2(\mu, \gamma) \leq \sqrt{2H(\mu|\gamma)}, \tag{2.57}$$

Notons que les résultats de Ledoux, Nourdin et Peccati conduisent alors à une amélioration des inégalités de Talagrand et de Sobolev logarithmique à travers deux nouvelles inégalités dénommées *WSH* et *HSI*.

Théorème 20 *(Inégalité HSI gaussienne, [106]) Sous les mêmes hypothèses,*

$$H(\mu|\gamma) \leq \frac{1}{2}\Sigma^2(\mu|\gamma) log\Big(1 + \frac{I(\mu|\gamma)}{\Sigma^2(\mu|\gamma)}\Big), \tag{2.58}$$

Théorème 21 *(Inégalité WSH)*
On a aussi, sous les mêmes hypothèses et lorsque $H(\mu|\gamma), \Sigma(\mu|\gamma) < \infty$

$$W_2(\mu, \gamma) \leq \Sigma(\mu|\gamma) e^{-arcos\left(\frac{H(\mu|\gamma)}{\Sigma^2(\mu|\gamma)}\right)}, \tag{2.59}$$

Remarque 13 *Il est aisé de voir que ces deux inégalités améliorent respectivement : l'inégalité de Sobolev logarithmique et l'inégalité de Talagrand. En effet, pour $r, s > 0$ $log(1 + \frac{r}{s}) \leq \frac{r}{s}$ et $arcos(e^{-r}) \leq \sqrt{2}r$*

Nous pourrions aller plus loin, et considérer des mesures plus générales. Ledoux, Nourdin et Peccati vont d'ailleurs plus loin en généralisant de telles inégalités pour les mesures invariantes de processus de diffusion (avec certaines hypothèses sur les carrés du champ itéré $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$). Nous verrons plus loin, et dans un autre contexte qui est celui des probabilités libres, un exemple particulier à travers l'analogue libre des mesures log-concaves.

2.1.5 Le cas de l'espace de Wiener

Dans ce contexte, qui fait partie d'un ensemble plus général étudié par Ledoux, Nourdin et Peccati : les *triplet de Markov* (E, μ, Γ) associé à (E, μ, L) un espace de probabilité , avec un semigroupe de Markov $(P_t)_{t\geq 0}$ invariant et symétrique par rapport à une mesure μ, de générateur infinitésimal L, et de son opérateur carré du champ Γ associé. (voir par exemple la section 5 de [106], l'article important de Decreusefond dans [58] ou encore l'article de Azmoodeh, Peccati et Yang dans la section 4 [8]). Il est possible de construire facilement des noyaux de Stein par rapport à la mesure gaussienne standard à l'aide de Γ et L. Plus précisément Ledoux, Nourdin et Peccati montrent alors que

$$\tau^F(x) = \left(\tau^F_{i,j}(x)\right)^n_{i,j=1}, \tag{2.60}$$

tel que

$$\tau^F_{i,j}(x) = \mathbb{E}_\mu[\Gamma(-L^{-1}F_i, F_j)|F = x], \tag{2.61}$$

est un noyau de Stein pour F par rapport à la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, en dimension $n = 1$ (et pas nécéssairement dans un contexte diffusif : chain-rule pour Γ) où $-L$ diagonalise $L^2(E, \mu)$ (avec un spectre dénombrable et positif), :

Définition 24 *(décomposition chaotique)*

$$L^2(E, \mu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} Ker(L + nId), \tag{2.62}$$

Ledoux dans [105] montre alors que lorsque F est une valeur propre de $-L$: il existe $n > 0$ (entier), $F \in Ker(L + nId)$, (cette condition n'est en fait pas suffisante pour avoir un contrôle de la discrépance de Steinen fonction du quatrième cumulant) et que si F est un chaos d'ordre n par rapport à L (voir la définition précisé donée [105, 5], de manière intuitive cela signifie qu'une telle variable aléatoire dépend uniquement des opérateurs carré du champ itéré jusqu'a l'ordre n) , il est possible de contrôler la discrépance de Stein par rapport à le mesure gaussienne en fonction du deuxième et quatrième cumulant de F.

Dans le cas des espaces de Wiener, L est l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck, dont les chaos de Wiener : $\left\{\mathcal{H}_p, p \geq 0\right\}$ sont des espaces propres pour $-L > 0$. En effet, on a de la définition de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck que

$$-L_{|\mathcal{H}^{\otimes p}} = pId, \tag{2.63}$$

L'opérateur carré du champ prend alors la forme suivante $\Gamma(F, G) = \langle DF, DG \rangle_{\mathcal{H}}$.

Dans ce contexte, il est ensuite aisé de voir que pour un vecteur aléatoire $F = (F_1, \dots, F_n)$ tel que chaque composante soit Malliavin différentiable, alors la matrice suivante qu'on appellera matrice de *Malliavin-Stein* : $\tau^F_{i,j}(x) = \mathbb{E}[\langle DF_i, D(-L)^{-1}F_j \rangle | F = x]$ constitue un tel noyau de Stein par rapport à la mesure gaussienne, voir par exemple section 5.3 de [106]. Il ne reste donc plus qu'a évaluer la proximité (au sens L^2) de cette dernière par rapport à la matrice identité et en particulier obtenir une borne dépendant des **deuxième et quatrième cumulant** du vecteur aléatoire F.

Nourdin, Peccati et Réveillac dans [130] montre plus particulièrement l'estimation suivante qui permet d'obtenir un contrôle de la distance 1-Wasserstein d'une famille de fonctionnelles lisses $\mathbb{D}^{1,4}$ vers un vecteur gaussien de covariance $C > 0$ en fonction de la proximité au sens (L^2) de la matrice de *Malliavin-Stein* et du vecteur de covariance C.

Théorème 22 (Nourdin, Peccati, Réveillac Theorème 3.5 dans [130]) *Soit $m \geq 2$, et $F = (F_1, \dots, F_m)$ un vecteur aléatoire centré m-dimensionel avec $F_i \in \mathbb{D}^{1,4}$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Soit $C \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive , ainsi que $Z \sim N_m(0, C)$. Alors,*

$$d_W(F, Z) \leq \left\|C^{-1}\right\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} \mathbb{E}\left(\left(C_{ij} - \left\langle DF_i, -DL^{-1}F_j \right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^2\right)},$$

où $\|\cdot\|_{\text{op}}$ désigne la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Nourdin et Norredine dans [127] continuent l'analyse et prouvent alors que lorsque les composantes F_i sont des intégrales multiples (et donc précisément des vecteurs propres de L), le contrôle en distance $1-$Wasserstein et donc à fortiori de par le théorème précédent 22, le contrôle de $\|C - \tau^F\|$ se fait par une quantité dépendant des deuxièmes et quatrièmes cumulants de chaque composante.

On présente uniquement le cas isotropique pour simplifier, mais l'estimation est valable dans un cadre plus général (pour toutes les matrices de covariance strictement positive)

Théorème 23 *(Nourdin, Norredine) Soit $X = (I_{q_1}(f_{q_1}), \ldots, I_{q_n}(f_{q_n}))$, des intégrales multiples, tels que pour tout $i = 1 \ldots, n$, $f_{q_i} \in L^2(T^{q_i})$ (où le processus gaussien isonormal est construit sur $L^2(T, \mathcal{T}, \mu)$ avec μ non-atomique). Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$*

$$W_1(X,Z) \leq \psi((\mathbb{E}(X_1)^4 - 3\mathbb{E}(X_1^2)^2, \mathbb{E}(X_n)^2, \ldots, \mathbb{E}(X_n)^4 - 3\mathbb{E}(X_n^2)^2, \mathbb{E}(X_n)^2), \tag{2.64}$$

où $\psi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{1}_{q_i = q_j} \sqrt{2 \sum_{r=1}^{q_i - 1} \binom{2r}{r} |x_i|^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \sum_{i,j=1}^{d} \mathbb{1}_{q_i \neq q_j} \left(\sqrt{2}\, \sqrt{y_j} |x_i|^{\frac{1}{4}} + \sum_{r=1}^{q_i \wedge q_j} \sqrt{2(q_i + q_j - 2r)!} \binom{q_i}{r} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

De cette importante majoration, on peut ainsi démontrer d'une manière aisée le fameux théorème (multivarié) de Peccati et Tudor [150]. Cela nous donne en particulier la chaîne d'équivalences suivantes pour la convergence d'un vecteur d'intégrales multiples de Wiener-Itô $X_k = (I_{q_1}(f_{q_1}^k, \ldots, I_{q_n}(f_{q_n}^k))$ (de noyau symétrique) et supposés pour simplifier de matrice de covariance I_n vers un vecteur gaussien Z de covariance I_n, où on a noté $\mathbb{E}(X_k^4) = \left(\mathbb{E}(I_{q_1}(f_{q_1}^k)^4), \ldots, \mathbb{E}(I_{q_n}(f_{q_n}^k)^4)\right)$

$$\mathbb{E}(X_k^4) \to (3, \ldots, 3) \Leftrightarrow \Sigma(X_k|Z) \to 0 \Leftrightarrow W_1(X_k, Z) \to 0 \Leftrightarrow X_k \stackrel{(d)}{\to} Z$$

Remarque 14 *Dans la dernière partie de ce document, nous avons précisément cherché à obtenir de telles estimations quantitatives analogues, pour des intégrales multiples auto-adjointes de Wigner-Itô, pour l'analogue libre de W_2. Nous insistons sur cette vision de l'approximation probabiliste, puisque elle sera fortement utilisée dans le contexte des probabilités libres et en particulier dans notre dernier chapitre. En effet, comme nous avons pu le voir précédemment, on peut s'affranchir lorsque l'on travaille avec W_1, de toute cette vision de l'approximation probabiliste et en particulier pour la méthode de Stein relativeme au potentiel gaussien, puisque l'on possède une technique très puissante qui est fournie par l'équation de Stein. Cette dernière reposant sur le principe de dualité de Kantorovitch qui exprime la distance Wasserstein-1 sous une forme beaucoup plus "maniable". En probabilités libres, on va devoir passer par les inégalités fonctionnelles pour pouvoir obtenir une estimation quatitative du CLT multivarié pour les intégrales multiples Wigner.*

En probabilités libres, notons qu'il existe aussi un analogue libre à la dualité de Monge-Kantorovitch pour W_2 (l'analogue libre de la distance de Wasserstein associé au coût quadratique), de même qu'un analogue libre à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Cet objet "the Free Wasserstein manifold" a été récemment défini et étudié par Jekel, Li et Shlyakhtenko dans [95].

2.2 Le mouvement brownien fractionnaire et ses extensions chaotiques

Le mouvement brownien fractionnaire introduit par Kolmogorov (1940), et étudié par de nombreux auteurs tel que Mandelbrot ou Van-Ness, est un processus gaussien centré dont la fonction de covariance généralise celle du mouvement brownien classique. Ce processus possédant des propriétés d'auto-similarité, de faible ou longue dépendance à accroissements stationnaires, a ainsi été utilisé pour modéliser des phénomènes dans de nombreux domaines, hydrologie (Hurst), géostatistiques, le plus notable étant sûrement celui de la finance où ses propriétés transcrivent de manière précise des phénomènes constatés sur les marchés financiers.

Cette section aborde des aspects classiques du mouvement brownien fractionnaire. Nous renvoyons le lecteur au livre de Nualart [139] pour le détail des preuves.

Nous définissons dans un premier temps le mouvement brownien fractionnaire et rappelons les propriétés essentielles.

Définition 25 *Soit $H \in (0,1]$, Le mouvement brownien fractionnaire standard $(B^H_t)_{t\geq 0}$ est le processus gaussien centré de fonction de covariance :*

$$\mathbb{E}(B^H_t B^H_s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \tag{2.65}$$

Remarque 15 *L'existence d'un tel processus gaussien est assuré par le théorème de Kolmogorov, car la fonction de covariance : $R^H(t,s) := \mathbb{E}(B^H_t B^H_s)$ est positive (voir [161]), on sait aussi de ce même théorème que B^H est höldér-continue d'ordre δ pour tout $\delta \in (0,H)$.*

Définition 26 *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est auto-similaire d'indice $H > 0$, si pour tout $a > 0$, $(X_{at})_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} (a^H X_t)_{t\geq 0}$, au sens des loi finies-dimensionnelles.*

Définition 27 *On dit qu'un processus est à accroissement stationnaires si pour tout $h > 0$,*

$$(X_{t+h} - X_t)_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} (X_t - X_0)_{t\geq 0}, \tag{2.66}$$

au sens des lois finie-dimensionnelles.

Proposition 8 *On peut alors montrer que le mouvement brownien fractionnaire possède de telles propriétés :*

- *B^H est un processus auto-similaire d'indice H.*
- *B^H est un processus à accroissements stationnaires.*

Le mouvement brownien est donc un processus gaussien centré étandant le mouvement brownien standard ($H = \frac{1}{2}$), cependant il ne conserve pas deux propriétés importantes de ce dernier : le caractère Markovien et le fait d'être une semi-martingale.

Proposition 9 *En effet, pour tout $H \neq \frac{1}{2}$, B^H n'est pas un processus de Markov, ni une semimartingale (pour la première assertion, on utilise une formule dû à Yor, voir [161], qui assure qu'un processus gaussien et Markovien satisfait alors une propriété sur sa covariance, qui n'est pas vérifié pour $R^H, H \neq \frac{1}{2}$, pour la deuxième assertion, on utilise les p-variations et on distingue les cas).*

Définition 28 *Pour un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, à accroissement stationnaires, on défini sa fonction d'autocovariance $r(n) := \mathbb{E}((X_1 - X_0)(X_{n+1} - X_n))$.*

1. *si*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |r(n)| = +\infty, \tag{2.67}$$
on dit alors que X est à mémoire longue

2. *si*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |r(n)| < \infty, \tag{2.68}$$
on dit alors que X est à mémoire courte

On en déduit alors deux comportement distincts lorsque $H > \frac{1}{2}$ et $H < \frac{1}{2}$ (pour $H = \frac{1}{2}$, les accroisements sont indépendants, le processus est sans-mémoire)

- *soit r la fonction d'autocovariance, $r(n) := \mathbb{E}(B_1^H(B_{n+1}^H - B_n^H))$.*
  - *si $H \in (0, \frac{1}{2})$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |r(n)| < \infty$ (mémoire courte).*
  - *si $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |r(n)| = \infty$. (mémoire longue).*

Processus gaussien isonormal associé au fBM

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f élémentaires définies par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{[t_k, t_{k+1}]}(x) \quad \text{où} \quad , 0 \leq t_k \leq t_{k+1} \leq T, a_k \in \mathbb{R}, \tag{2.69}$$

On définit pour $f \in \mathcal{E}$, l'intégrale de Wiener par rapport au mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst H :

$$X(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(B^H(t_{k+1}) - B^H(t_k) \right). \tag{2.70}$$

On note alors $\mathcal{H}$, la complétion de $\mathcal{E}$, par rapport au produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}(B_t^H B_s^H), \tag{2.71}$$

Proposition 10 *Cependant, il est bien connu que cette espace ne contient pas que des fonctions mais aussi des distributions. Il est alors naturel de considérer de la remarque suivante, les espaces suivants :*

Proposition 11 *On a la représentation suivante de la covariance du mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H > \frac{1}{2}$*

$$R^H(t,s) \quad = \quad H(2H-1)\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}\mathbf{1}_{[0,s]}|u-v|^{2H-2}dudv.$$

Il est alors naturel de considérer l'espace de fonctions suivant :

$$|\mathcal{H}| := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}_+^2} |f(u)||f(v)||u-v|^{2H-2}dudv < \infty \right\}, \tag{2.72}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = (2H-1)H \int_{\mathbb{R}_+^2} f(u)g(v)|u-v|^{2H-2}. \tag{2.73}$$

Remarque 16 *On peut montrer qu'on définit bien un produit scalaire (voir le théorème* 1.7.3 *dans [119]), mais l'espace $|\mathcal{H}|$ n'est pas complet pour la norme $||.||_{\mathcal{H}}$. Pour remédier à ce problème, on considère alors le produit scalaire suivant :*

$$\langle f, g\rangle_{|\mathcal{H}|} = (2H-1)H \int_{\mathbb{R}_+^2} |f(u)||g(v)||u-v|^{2H-2}. \tag{2.74}$$

qui est un espace de Banach par rapport à la norme $||.||_{|\mathcal{H}|}$

Dans ce cas si $H \in (\frac{1}{2}, 1)$:

Proposition 12 *Soient $f, g \in |\mathcal{H}|$ alors $X(f), X(g)$ existe, de plus l'isométrie suivante est satisfaite :*

$$\mathbb{E}(X(f)X(g)) = (2H-1)H \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)|u-v|^{2H-2}dudv.$$

Remarque 17 *Malheureusement, nous ne pouvons pas obtenir une représentation du type (11) pour le cas $H < 1/2$, les considérations étant plus compliquées dans ce cas, nous renvoyons aux travaux de Laurent Decreusefond dans [56] pour avoir une description complète des résultats.*

2.2.1 Intégrales multiples et processus de Hermite

Notre volonté est maintenant de pouvoir généraliser le mouvement brownien fractionnaire, c'est-à-dire de conserver ses propriétés fondamentales tout en s'affranchissant du caractère gaussien, qui reste une restriction en soi.

Définition 29 (Le Processus de Hermite) *Donnons-nous $(B(t))_{t\in\mathbb{R}}$ un processus de Wiener et q un entier strictement positif et*

$$H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Posons

$$H_0 = 1 - \frac{1-H}{d} \in \left(1 - \frac{1}{2q}, 1\right).$$

Le processus de Hermite $(Z_t^{(q,H)})_{t\geq 0}$ *d'ordre* q *est défini comme le processus suivant (à valeurs dans le* $q-$*ième chaos de Wiener).*

$$Z_t^{(q,H)} := c(H,q) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t \prod_{j=1}^{q} (s-u_i)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} ds \right) B(dy_1)\dots B(dy_n). \tag{2.75}$$

tel que $c(H,q)_{q,H_0}$*, soit choisie comme une constante de renormalisation (au temps* $t = 1$*), c'est-à-dire* $\mathbb{E}[(Z_1^{q,H})^2] = 1$.

Proposition 13 *(Proposition 3.1 de [185])*
On a l'expression exacte de la constante :

$$c(H,q) = \left(\frac{\beta(\frac{1}{2} - \frac{1-H}{q}, \frac{2H-2}{q})^k}{q!H(2H-1)} \right)^{-1}, \tag{2.76}$$

On remarque qu'on peut écrire pour tout $t > 0$, $Z_t^{(q,H)} = I_q(f_t)$

avec

$$\begin{aligned} f_t(u_1,\dots,u_q) &= \int_0^t \prod_{j=1}^{q} (s-u_i)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} ds \\ &= \int_0^t \prod_{j=1}^{q} (s-u_i)_+^{H_0-\frac{3}{2}} ds, \end{aligned} \tag{2.77}$$

Remarque 18 *Le processus de Hermite est bien défini, c'est-à-dire que pour tout* $t \geq 0$*, son noyau est dans* $L^2(\mathbb{R}^q)$ $\|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^q)} < \infty$.

Les processus d'Hermite possèdent des propriétés très intéressantes qui en font une extension non-gaussienne du mouvement brownien fractionnaire.

Le processus vérifie les propriétés suivantes, on se réfère à Tudor [185] pour les démonstrations.

Remarque 19

1. *Le processus* $Z^{(q,H)}$ *est auto-similaire d'indice* H.
2. *Le processus est à accroissement stationnaire, et par hypercontractivité, pour tout* $t \geq 0$, $Z_t^{(q,H)}$ *appartiennt à* $L^{\infty,-} = \cap_{p\geq 1} L^p$ *: tous ses moments sont finis.*
3. *Par le critère de continuité Kolmogorov, les trajectoires du processus d'Hermite sont Hölder-continue d'ordre* δ *pour* $\delta < H$.

4. *Sa fonction de covariance est la même que celle du mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst* $H \geq \frac{1}{2}$.
$$R(t,s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \tag{2.78}$$

Remarque 20 *Comme remarqué précédemment, lorsque* $q > 1$, *ces processus ne sont plus gaussien, mais possède la même structure de covariance que le mouvement brownien fractionnaire. Concernant la régularité des trajectoires, on a aussi un résultat récent dû à Ayache [7], qui prouve que presque-surêment, les trajectoires du processus d'Hermite sont nulles part dérivables.*

Le théorème suivant dû à Pipiras et Taqqu montre que le processus d'Hermite apparaît comme la limite (au sens de lois finies-dimensionnelles) d'une somme aléatoire : c'est le théorème non-central limite.

Théorème 24 *(Pipiras-Taqqu, [150])*

Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$, *une suite de variables aléatoires gaussiennes, centrées et réduites, telles que :*

$$\mathbb{E}(\xi_0 \xi_n) = n^{\frac{2H-2}{q}} L(n), \tag{2.79}$$

avec $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, *une fonction à variation lente à l'infini :*

$$\forall m > 0, \frac{L(nm)}{L(m)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \tag{2.80}$$

Soit g, une fonction mesurable, $\mathbb{E}(g(\xi_0)) = 0$ *et* $var(g(\xi_0)) < \infty$, *qui soit de rang d'Hermite q (premier coefficient non-nul dans la décomposition de g dans la base des polnômes d'Hermite).*

alors le théorème non-central limite assure que le processus

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} g(\xi_j), \tag{2.81}$$

converge au sens des lois finies-dimensionnelles vers le processus d'Hermite.

Le processus de Rosenblatt

En prenant $q = 2$, dans la définition précédente du processus d'Hermite, on tombe sur un processus très intéressant, qu'on appellera processus de *Rosenblatt* qui vit dans le deuxième chaos de Wiener. Celui-ci a été étudié par de nombreux auteurs, on peut citer la contribution majeure de Tudor [181] qui développe une théorie de d'intégration stochastique par rapport à celui-ci.

$$Z_t^{(q,H)} := c(H,q) \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t \prod_{j=1}^q (s-u_i)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}\right)} ds \right) B(dy_1)\dots B(dy_n). \tag{2.82}$$

Définition 30 *On définit les cumulants d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ d'une variable aléatoire X à valeurs réelles comme :*

$$k_m(X) := (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} ln(\mathbb{E}(e^{itX})_{|t=0}, \tag{2.83}$$

Remarque 21 *Les cumulants vérifient les propriétés suivantes :*

1. *d'homogénéité, pour tout scalaire λ :*

$$k_m(\lambda X) = \lambda^n k_m(X), \tag{2.84}$$

2. *si X, Y sont indépendantes, $k_m(X+Y) = k_m(X) + k_m(Y)$*

On rappelle qu'une intégrale multiple d'ordre 2, $I_2(f)$ avec $f \in L^2_S(\mathbb{R}^2)$ est entièrement caractérisé par ses moments ou de manière équivalente par ses cumulants (voir section de [129]) dont on a une formule explicite pour tout $m \geq 1$:

$$c_m(I_2(f)) = 2^{m-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, y_2) f(y_2, y_3) \ldots f(y_{m-1}, y_m) f(y_m, y_1) dy_1 \ldots, dy_n, \tag{2.85}$$

Dans la seconde partie de cette thèse, on définira une extension de ce processus : le processus de Hermite généralisé, ce dernier possède la propriété d'avoir un indice d'auto-similarité dans tout l'intervalle $(0, 1)$, et en particulier pour ce qui nous intéressera, à savoir ne pas se restreindre à l'hypothèse $H > \frac{1}{2}$. Nous définirons ce dernier à la partie 3.2.

2.2.2 Intégrales de Wiener par rapport au processus d'Hermite

Dans cette section, on va présenter l'intégrale de Wiener par rapport aux processus d'Hermite. Cette construction a été notamment étudiée par Tudor et Maejima [109]. Cette étape est essentielle pour pouvoir étudier les solution d'une équation de type Ornstein-Uhlenbeck avec un bruit de type Hermite (on utilisera en particulier des idées similaires dans le chapitre 3.2).

En particulier, on aimerait pouvoir donner un sens aux équations différentielles stochastiques suivantes :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dZ^{(q,H)}_t, \tag{2.86}$$

On appellera alors X, un processus **d'Hermite-Ornstein-Uhlenbeck**. Ainsi, de manière analogue au cas du mouvement brownien (ou au mouvement brownien fractionnaire, voir [37]), on aimerait représenter (ici on suppose une condition initiale nulle) le processus suivant comme une intégrale de Wiener par rapport processus d'Hermite, et en particulier donner du sens à :

$$X_t = \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dZ^{(q,H)}_s. \tag{2.87}$$

Nous allons donc définir une intégrale de Wiener pour les processus de Hermite. La méthode est la même que pour le mouvement brownien fractionnaire, nous renvoyons le lecteur à l'article [109] ainsi qu'au livre de Tudor ([185]) pour les détails. Nous exposons, de manière substantielle, les principaux résultats et les principales idées.

Définition 31 *Pour les fonctions élementaires $f \in \mathcal{E}$, on pose :*

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(u) dZ^{(H,q)}(u) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(Z^{q,H}(t_{k+1}) - Z^{q,H}(t_k) \right), \tag{2.88}$$

Pour pouvoir étendre l'intégrale à une plus large classe de fonctions, avant de pouvoir aboutir au résultat, faisons la remarque suivante :

Remarque 22 *Pour une fonction élémentaire $f \in \mathcal{E}$, on peut écrire :*

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(u) dZ^{(q,H)}(u) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}_+^q} (Jf)(y_1, ..., y_q) dB(y_1) \dots dB(y_q),$$

avec, pour tout $y_1, ..., y_q \in \mathbb{R}_+$,

$$(Jf)(y_1, \dots, y_q) = d(q,H) \int_{\mathbb{R}_+} f(u)(u-y_1)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} \dots (u-y_q)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} du.$$

Il est alors naturel d'introduire l'espace de fonctions suivant :

Définition 32 *On définit l'espace :*

$$\mathcal{H} = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}_+^d} (J(f)(y_1, \dots, y_q))^2 < \infty \right\}, \tag{2.89}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}_+^d} (J(f)(y_1, \dots, y_q))^2 dy_1 \dots, dy_q, \tag{2.90}$$

La proposition suivante montre que l'on peut en fait avoir une plus profonde description de $\mathcal{H}$, voir Section 3.13 [185]

Proposition 14

$$\mathcal{H} = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}_+^2} f(u) f(v) |u-v|^{2H-2} du dv < \infty \right\}, \tag{2.91}$$

On montre alors que l'application ;

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(u) dZ^{(q,H)}(u), \tag{2.92}$$

de $\mathcal{E}$ vers $L^2(\Omega)$ s'étend en une isométrie de $\mathcal{H}$ vers $L^2(\Omega)$, par densité des fonctions élémentaires dans $\mathcal{H}$. Cette espace pouvant contenir des distributions, on travaillera souvent avec l'espace de fonctions $|\mathcal{H}|$.

2.3 Probabilités libres

Les probabilités libres sont le fruit des idées de Dan Virgil Voiculescu. Cette théorie a vu le jour dans les années 1980 et a été originellement créer afin de répondre à l'un des plus importants problèmes de la théorie des algèbres de von Neumann et plus précisément au fameux problème d'isomorphisme des algèbres de von neumann de groupes libres : $L(\mathbb{F}_n), n \geq 2$ (possiblement $n = \infty$).
A-t-on l'implication suivante :

$$L(\mathbb{F}_n) \simeq L(\mathbb{F}_m) \implies n = m, \tag{2.93}$$

C'est un problème toujours ouvert à l'heure actuelle. Néanmoins, la théorie des probabilités libres, ainsi que d'autres contributions ont permis d'obtenir de nombreux résultats sur leurs structures. Même si on ne s'intéressera aucunement dans cette thèse à ces problématiques, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Charlesworth et Nelson [38] pour avoir une idée globale des résultats déduits via les quantités définies par Voiculescu.

Les probabilités libres sont nées pour avoir une compréhension plus profonde de ce problème. Le concept central de cette théorie est la notion de *Liberté* ou *freeness*, qui est l'analogue dans ce contexte de l'indépendance classique.

Cette section est basée en grande partie pour le côté probabilité libre sur le livre de Speicher et Mingo [118], ainsi que sur les articles de Biane et Speicher [20], de Mai [113] qui comprend une partie introductive très complète des objets utilisés ici. Pour les notions d'algèbres d'opérateurs, on se réfère au manuscrit de Jones [99].

On rappelle, qu'une algèbre est dite unifère quand elle contient un élément neutre pour la multiplication.

Définition 33 *Un espace de probabilité non-commutatif est la donnée d'une paire* $(\mathcal{A}, \tau)$ *:*

1. $\mathcal{A}$*, une algèbre unifère (sur le corps des complexes)*
2. *Une forme linéaire à valeurs complexes* $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$*, avec* $\tau(1) = 1$ *(appelé état)*

Lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ possède une involution, c'est à dire une application notée $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ possédant les propriétés suivantes, pour tout $S, T \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:

1.
$$(S + T)^* = S^* + T^*, \tag{2.94}$$

2.
$$(TS)^* = S^*T^*, \tag{2.95}$$

3.
$$(\alpha S)^* = \bar{\alpha} S^*, \tag{2.96}$$

4.

$$(T^*)^* = T, \tag{2.97}$$

On dira alors que $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre.

Definition 2 *On dira que la paire $(\mathcal{A}, \tau)$ est un $*-$espace de probabilité non-commutatif, si $\mathcal{A}$ est une $*-$algèbre (unifère) et que τ est positif : pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\tau(x^*x) \geq 0$.*

Le premier exemple naturel d'un tel $*$-espace de probabilité non-commutatif est en réalité commutatif et est donné par :

$$\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \tag{2.98}$$

avec la conjugaison complexe pour involution, et $\mathbb{E}$, l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$.

Un autre exemple très intéressant est celui des matrices aléatoires (composés de variables aléatoires bornées) :

$$\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; M_n(\mathbb{C})), \tag{2.99}$$

l'involution étant donné par la matrice adjointe et $\phi = \frac{1}{N}\mathbb{E} \circ Tr$ avec Tr la trace usuelle.

Remarque 23 *On peut aussi demander selon le contexte, plus de structures sur l'algèbre $\mathcal{A}$ (algèbre stellaire, algèbre de von Neumann), mais aussi sur la fonctionnelle τ (normalité, fidélité, tracialité) qui joue dans ce cadre le rôle de l'espérance mathématique usuelle.*

Commencons d'abord par définir un cadre de travail très intéressant qui est celui des algèbres stellaires ou C^*-algèbres.

Définition 34 *(définiton abstraite)*

Une C^*-algebre ou algèbre stellaire est une $*-$algèbre de Banach equipée d'une involution et d'une norme $\|.\|$ qui satisfait la propriété suivante :

Pour tout $T \in \mathcal{A}$,

$$\|T^*T\| = \|T\|^2, \tag{2.100}$$

Cette définition est abstraite, c'est-à-dire qu'on sait que toutes ces algèbres stellaires se représentent (via un morphisme de C^*-algèbres) comme des sous-algèbres de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Définition 35 *(Une définiton concrète) Une sous $*$-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une C^*-algèbre si elle est fermée pour la norme d'opérateur.*

1. Le premier exemple très important de C^*-algèbre est $M_n(\mathbb{C})$, muni des opérations naturelles ainsi que de la norme d'opérateur usuelle :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Tx\|_2, \tag{2.101}$$

2. Le second exemple est le cas des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert : $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, équipé des opérations usuelles et de la norme d'opérateur.

$$||T|| = \sup_{||x||_{\mathcal{H}}=1} ||Tx||_{\mathcal{H}}, \tag{2.102}$$

3. Le dernier exemple est $C(\Omega)$, avec Ω un espace de Haussdorff compact, équipé de la multiplication point par point, de l'involution $f^* := \bar{f}$, et de la norme uniforme $||.||_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$

Remarque 24 *Le dernier exemple constitue la classe des C^*-algèbres commutatives (Théorème de Gelfand, voir [99]).*

Définition 36 *On dira alors, lorsque $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre (unifère), et τ est positif, que la paire $(\mathcal{A}, \tau)$ est un C^*-espace de probabilité non-commutatif.*

Cependant, dans le cadre des C^*-algèbres, on oublie parfois des opérateurs fondamentaux : les projections (et en particulier les projections spectrales). On notera l'ensemble des projections $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Ce sont des éléments qui satisfont aux égalités suivantes :

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \left\{p \in \mathcal{A}/p = p^2 = p^*\right\}, \tag{2.103}$$

Nous verrons par la suite l'exemple d'une telle C^*-algèbre plus complexe qui ne possède pas de projection non-triviale. Ce résultat apportant une information importe sur le support de la distribution des opérateurs auto-adjoints (ou normaux).

En effet, ces dernières sont très importantes puisqu'elles jouent le rôle des **fonctions caractéristiques** dans ce contexte.

Remarque 25 *Il existe une structure, plus riche et qui est en général la plus utilisée dans le contexte des probabilités libres : les algèbres de von Neumann (ou W^*- algèbres). Cette théorie très riche inventée par Murray et von Neumann en 1943 (c.f [120–122] est toujours en plein expension. Les probabilités libres ayant d'ailleurs permis de répondre à de nombreuses questions dans ce domaine (factorialité, absence de la propriété Γ, absence de sous-algèbres de Cartan... et en particulier de déduire des résultats pour les facteurs des groupes libres $L(\mathbb{F}_n)$ et de les distinguer du facteur hyperfini, voir par exemple Voiculescu [192]).*

2.3.1 Rappels sur les topologies de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Faisons tout d'abord quelques rappels (une complète exposition se trouve dans [93]) sur les différentes topologies intéressantes sur les espaces d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sont :

1. La topologie de la norme donnée par la norme d'opérateur : $||.||_{op}$

2. La La topologie forte d'opérateur (topologie de la convergence simple sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), dont une base de voisinages est donnée par :

$$\mathcal{N}(a, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi) = \{b : \|(b-a)\xi_i\| < \xi \text{ pour tout i=1,...,n}\}, \tag{2.104}$$

3. La topologie faible d'opérateur, dont une base de voisinages est donnée par

$$\mathcal{N}(a, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n, \xi) = \{b : \langle (b-a)\xi_i, \eta_i \rangle < \xi \text{ pour tout i=1,...,n}\}, \tag{2.105}$$

Nous rappelons que la topologie faible d'opérateur est moins forte que la topologie forte d'opérateur, qui est elle même moins forte que la topologie de la norme. Cela implique en particulier que tout ensemble faiblement fermé est à fortiori fortement fermé.

On a considéré précédemment, dans le cadre des C^* algèbres, des fermetures en norme, ce qui est en soi, assez restrictif. En effet, pour des topologies plus faibles, il y a plus de chance qu'un ensemble faiblement fermé soit compact. On peut ainsi se demander ce qui se passe lorsque l'on considère des fermetures pour les topologies moins "fortes". Cela, nous conduit à définir les algèbres de von Neumann ou W^*-algèbres.

Définition 37 *On rappelle que le commutant d'une partie $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est par définition :*

$$S^{'} = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), ST = TS\}, \tag{2.106}$$

On définit de même le bi-commutant comme le commutant du commutant : $S^{''} = (S^{'})^{'}$ et on continue ainsi récursivement. En particulier, on voit aisément que $S \subset S^{''}$, et que $S' = S^{'''}$, ce qui nous donne $S'' = S^{''''}$.

Définition 38 (Définition concrète) *Une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ est une sous $*$-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in \mathcal{A}$ (unifère) et qui est faiblement fermé.*

Théorème 25 *(Théorème du bi-commutant de von Neumann) Pour $\mathcal{A}$ une sous $*-$algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in \mathcal{A}$, on a alors*

$$\bar{A}^{SOT} = \bar{A}^{WOT} = A^{''}, \tag{2.107}$$

Ce résultat est tout à fait impressionnant puisqu'il relie des propriétés de fermetures et donc topologique à un objet purement algébrique : le bi-commutant. On remarquera aussi que toute algèbre de von Neumann est une algèbre stellaire.

Quelques exemples d'algèbre de von Neumann

1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. En effet, il est bien connu que $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))' = \mathbb{C}1$ et donc $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$
2. $\mathbb{C}1$ est une algèbre de von Neumann, où 1 est l'unité d'une $*$-algèbre unifère.
3. Posons $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$, avec (X, μ, Ω) un espace de probabilité et μ-σ finie. Faisons agir $L^\infty(X, \mu)$ sur $\mathcal{H}$ de la manière suivante (représentation *GNS*) :

$$\pi : L^\infty(X, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(X, \mu)) \tag{2.108}$$
$$f \mapsto m_f, \tag{2.109}$$

avec $m_f(g) = fg$ pour $g \in L^2(X, \mu)$.

Alors $\mathcal{M} = \pi(L^\infty(X,\mu))$ est une algèbre de von Neumann abélienne. Il suffit pour cela de montrer que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ L'inclusion $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ est trivial puisque l'algèbre est commutative. Pour obtenir l'inclusion réciproque, on remarque que si $T \in \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}$, nécessairement $T = m_f$ et on retrouverait alors $f = T1$. On est donc amené à poser pour $T \in \mathcal{M}'$, $f = T1$, et on a donc pour $h \in L^\infty \cap L^2$,

$$hf = M_h f = M_h T1 = TM_h 1 = Th, \tag{2.110}$$

où dans la troisième égalité, on a utilisé l'hypothese $T \in \mathcal{M}'$. D'où l'on déduit que

$$||hf||_2 \leq ||T||_{op}||h||_2, \tag{2.111}$$

Ainsi pour $h \in L^\infty \cap L^2$, on a $m_f = T$, par densité pour la norme $||.||_2$, de $L^\infty \cap L^2$ dans L^∞. La conclusion s'ensuit puisque m_f, T sont bornés. Cee qui signifie que son centre est l'algèbre elle-même : $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

Remarque 26 *Les opérateurs compacts $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ne sont pas une algèbre de von Neumann. On voit aisément que la fermeture pour la topologie faible/forte d'opérateur est $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

"Principales motivations d'une telle considération" :

Nous pouvons en effet classifier toutes les algèbres de von Neumann commutatives. En effet, ces dernières sont toutes isomorphes à un certain $L^\infty(X,\mu)$, avec (X,Ω,μ) un espace de probabilité et μ non-atomique.

On a ainsi une intuition de l'intérêt de telles considérations mathématiques : **une théorie de la mesure non-commutative**. Nous verrons aussi plus loin, qu'on peut aussi définir une notion d'espaces $L^p, p \geq 1$.

Définition 39 *La classe la plus importante des algèbres de von Neumann sont les "facteurs", elles sont les algèbres de von Neumann avec un centre trivial, c'est-à-dire qu'elles satisfont $\mathcal{M}$:*

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}1, \tag{2.112}$$

où $\mathcal{M}'$ est le commutant de M.

Un immense travail de Murray et von Neumann ([120] [121], [122]) montre que tout algèbre de von Neumann se "désintègre" en une "somme directe" de facteurs. Il est donc fondamental de pouvoir comprendre ces derniers. Rappelons pour le lecteur intéressé qu'il existe trois types de facteurs différents, qui ont des comportent bien différents.

1. Type I, celles-ci sont isomorphes $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec H un espace de Hilbert fini ou infini dimensionnel (quand $n = dim(H) < \infty$) $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq M_n(\mathbb{C})$.
2. Type II, deux sous classe distinctes :
   - 2.1. Type II_1, pour lesquelles il existe un unique état tracial et fidèle.
   - 2.2. Type II_∞, qui s'expriment sous la forme de produits tensoriels $M\bar{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec M un facteur II_1.
3. Type III, qui sont les plus compliquées à comprendre. Un profond travail de Connes, Tommita et Takesaki qu'on peut caractérisé par le groupe modulaire (voir [44])

2.3.2 Notre cadre de travail

On se concentrera et on travaillera principalement dans le cadre de facteurs II_1, ces derniers étant la base de toutes les algèbres de von Neumann. Les probabilités libres dans le cadre tracial (en particulier les algèbres de von Neumann de groupes libres $L(\mathbb{F}_n)$ et l'algèbre de von Neumann engendré par le mouvement brownien libre) s'injectant dans ce contexte.

Définition 40 *Les propriétés suivantes sur la fonctionnelle d'état seront toujours supposées dans la suite :*

1. *On dira que l'état τ est tracial si pour tout $x, y \in (\mathcal{A}, \tau)$,*
$$\tau(xy) = \tau(yx), \tag{2.113}$$
2. *On dira que l'état est fidèle si $x \in (\mathcal{A}, \tau)$,*
$$\tau(x^* x) = 0 \implies x = 0, \tag{2.114}$$
3. *On dira que τ est normal si pour toute séquence croissante bornée (en norme d'opérateur) $(x_i)_{i\in I}$, $\tau(\sup_{i\in I} x_i) = \sup_{i\in I} \tau(x_i)$ (convergence monotone bornée).*

Définition 41 *Un W^*- espace de probabilité (non-commutatif) est une paire $(\mathcal{A}, \tau)$ avec $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann et τ un état normal et fidèle.*

Remarque 27 *Pour ne pas alourdir les notations, on supposera dans toute la suite que tous les W^*- **espaces de probabilités sont traciaux**, et on ne le mentionnera plus sauf mention du contraire.*

2.3.3 Matrices aléatoires et probabilité libres

Voiculescu a établi un lien profond entre la théories des matrices aléatoires et celle des probabilités libres. Le pont entre les deux theories étant le mouvement brownien libre qui est la "limite" de la mesure spectrale du mouvement brownien Hermitien. Ce lien profond a permis d'étudier des problèmes issus des matrices aléatoires via les probabilités libres et inversement.

Une construction du mouvement brownien libre

On se donne un W^*- espace de probabilité $(\mathcal{A}, \tau)$ que l'on suppose filtré (i.e il existe une inclusion croissante de sous-algèbres de von Neumann) $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{A}$.
On notera aussi la distribution semicirculaire de variance t, :

$$d\mu_t = \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2}dx, \ |x| \leq 2\sqrt{t}, \tag{2.115}$$

La distribution a tous ses moments d'ordre impairs nuls et les moments d'ordre pair sont données via les nombres de *Catalan* par la formule suivante valable pour tout $m \geq 0$:

$$\int_{-2t}^{2t} x^{2m} d\mu_t = C_m t^m, \tag{2.116}$$

Remarque 28 *Nous pouvons remarquer que* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *forme un semigroupe pour la convolution libre :*

$$\mu_t \boxplus \mu_s = \mu_{t+s}, \tag{2.117}$$

pour tout $s, t \geq 0$. *Il suffit de remarquer que la somme de variables semicirculaires libre est stable par somme (de variance la somme la somme des variances).*

Définition 42 *Un mouvement brownien libre* $(S_t)_{t\geq 0} \in (\mathcal{A}, \tau)$ *est un processus qui satisfait les conditions suivantes :*

1. $S_0 = 0$ *et pour tout* $t \geq 0$, $S_t = S_t^* \in \mathcal{A}_t$.
2. *pour tout* $t > 0$, S_t *a une distribution semicirculaire de variance* t.
3. *pour* $0 \leq s < t$, $S_t - S_s$ *est libre de* $\mathcal{A}_t$.
4. *pour tout* $0 \leq s < t$, $S_t - S_s$ *a pour distribution la loi semicirculaire* μ_{t-s}

Pour avoir une idée claire du lien entre matrices aléatoires et probabilités libres, introduisons quelques notations ainsi que ce théorème fondamental du à Voiculescu :

Définition 43 *Le mouvement brownien Hermitien* $(H_t)_{t\geq 0}$ *est un processus aléatoire à valeurs dans l'ensemble des matrices Hermitiennes* $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$ *de taille* $N \times N$. *Soit* $(B(i, j), B'(i, j))_{i,j\geq 1}$ *une collection de mouvements browniens (réels) indépendants. On définit alors le mouvement brownien Hermitien :*

$$\begin{aligned} H_t(i, j) &= \frac{B_t(i, j) + iB'_t(i, j)}{\sqrt{2N}} \\ H_t(i, i) &= \frac{B_t(i, i)}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \tag{2.118}$$

Voiculescu dans [190] montre alors la convergence de la mesure spectrale du mouvement brownien Hermitien vers la loi semicirculaire :

Théorème 26 *(Voiculescu 1991)*

$$\frac{1}{N} Tr\left(H_{t_1} \dots H_{t_p}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{p.s} \tau(S_{t_1} \dots S_{t_p}), \tag{2.119}$$

où (S_t) *est un mouvement brownien libre sur un* W^**−espace de probabilité.*

Cela établit un premier lien étroit entre ces théories et a permis de démontrer de très nombreux résultats (le plus fameux étant sûrement dû à Biane, Capitaine et Guionnet (voir [18]) qui en étudiant les propriétés de grandes déviations de la mesure spectrale de ce mouvement brownien Hermitien, ont montré une inégalité entre entropie microcanonique et non-microcanonique).
Voiculescu montre même une généralisation de ce résultat, la liberté asymptotique de matrices *GUE* indépendantes.

Théorème 27 *(Voiclescu, liberté asymptotique) Soient $H_{N,1}, \dots, H_{N,n}$ des matrices GUE (de taille N) indépendantes, alors presque surêment, pour tout $i_1 \neq \dots \neq i_n$ et $k_1, \dots, k_n$ entiers :*

$$\frac{1}{N} Tr\left(H_{N,i_1}^{k_1} \dots H_{N,i_p}^{k_p})\right) \xrightarrow[N\to\infty]{p.s} \tau(S_{i_1}^{k_1} \dots S_{i_p}^{k_p}), \tag{2.120}$$

où $(S_1, \dots, S_n)$ est un système semicirculaire standard.

Remarque 29 *(Extension au mouvement brownien fractionnaire Hermitien)*
Il existe en probabilités libres, une construction plus générale de processus semicirculaires, dont le mouvement brownien libre fait partie. Le plus intéressant étant (à nos yeux) le mouvement brownien fractionnaire non-commutatif (abrégé en ncfBm : non-commutative fractionnal Brownian motion), que nous verrons par la suite.

Il s'avère que le mouvement brownien Hermitien fractionnaire est un modèle de matrice aléatoire pour le mouvement brownien fractionnaire non-commutatif (sous la restriction $H \geq \frac{1}{2}$). Ce résultat dû à Deya et Schott dans [61] est très remarquable puisqu'il a permis de mieux comprendre l'intégration stochastique pour ce dernier, mais aussi l'intrégation stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire non-commutatif.

2.4 Le mouvement brownien libre sur l'espace de Fock libre

Le mouvement brownien libre est le pendant du mouvement brownien dans le cadre des probabilités libres. Nous avons vu précédemment, une première construction possible de cette objet via des résultats de Voiculescu, qui établissent un lien profond entre la théorie des matrices aléatoires et le mouvement brownien libre.
Il existe une autre construction tout à fait naturelle ce mouvement brownien libre sur ce que l'on appellera désormais l'espace de Wigner. En plus de permettre la construction d'un processus, elle permettra d'obtenir plus de structures, et notamment de définir des opérateurs à la base du calcul de Malliavin libre. On renvoie le lecteur aux ouvrages de Biane et Speicher [20], ainsi qu'à l'article de Mai [113] pour de plus amples détails, dont la plupart des notations et présentation sont inspirées.

Définition 44 *Donnons-nous un espace de Hilbert réel : $\mathcal{H}$, qui sauf mention du contraire toujours supposé séparable. On considère alors sa complexification : $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$,*

Définition 45 *Nous définissons l'espace de Fock libre (ou plein) $F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$:*

$$F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n},$$

ainsi que le sous espace de $F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ composé des sommes finies de tenseurs purs.

$$F_{alg}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} {}_{alg}\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n},$$

où Ω est un vecteur cyclique de norme 1 appelé généralement "vaccum vector",$^{\odot n}$ est le produit tensoriel algébrique (i.e sans complétion).
muni du produit scalaire suivant

$$\langle g_1 \otimes ... \otimes g_n, h_1 \otimes ... \otimes h_m\rangle = \delta_{n,m}\langle g_1, h_1\rangle ... \langle g_n, h_n\rangle, \tag{2.121}$$

Définition 46 *Nous définissons les opérateurs de création et d'annihilation à gauche. Ce sont des opérateurs bornés sur l'espace de Fock libre $\mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$:*

1. *Pour tout $h \in \mathcal{H}$ l'opérateur de création à gauche (left creation) $l(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$ par :*

$$l(h)(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) = h \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n, \tag{2.122}$$

2. *Pour tout $h \in \mathcal{H}$ l'opérateur d'annihilation à gauche (left annihilation) $l(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$*

$$l^*(h)\Omega = 0 \tag{2.123}$$
$$l^*(h)(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) = \langle h, g_1\rangle g_2 \otimes \ldots \otimes g_n, \tag{2.124}$$

On peut remarquer facilement que ces deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre.

Définition 47 *Considérons maintenant l'opérateur borné suivant appelé "opérateur semicirculaire"*

$$X(h) = l(h) + l^*(h) \in \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})), \tag{2.125}$$

*Pour pouvoir construire un W^*-espace de probabilité, et en particulier obtenir un état tracial normal et fidèle, on va restreindre l'algèbre de von Neumann engendré par les opérateurs semicirculaires aux vecteurs **réels**, i.e $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.*

Définition 48 *On considère alors l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs semicirculaires $\Gamma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}))$*

$$\Gamma(\mathcal{H}) = v.N\{X(h), h \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\} \tag{2.126}$$

.

On notera souvent $\Gamma(\mathcal{H}) = \mathcal{SC}(\mathcal{H})$ (notations identiques à [20])

Définition 49 *On considère aussi l'$*$-algèbre engendré par ces opérateurs :*

$$\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}) = * - alg\{X(h), h \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\}, \tag{2.127}$$

On a alors les inclusions suivantes

$$\mathcal{S}_{alg}(\mathcal{H}) \subset SC(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})), \tag{2.128}$$

Proposition 15 *On peut sur cette algèbre de von Neumann $SC(\mathcal{H})$ construire un état tracial, normal et fidèle en restreignant l'action d'un opérateur sur cet espace au vecteur cyclique : τ : $SC(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$*

$$\tau(X) = \langle X\Omega, \Omega\rangle, \tag{2.129}$$

De plus, on peut montrer que $\{X(h), h \in \mathcal{H}\}$ est un système semicirculaire au sens de Voiculescu (la définition précise sera donnée un plus loin).

Remarque 30 *Le théorème suivant prouvé dans [20], fournit un isomorphisme entre $L^2(\mathcal{SC}(\mathcal{H}), \tau)$ $F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$, celui-ci sera alors utilisé pour construire le calcul de Malliavin libre sur l'espace de Wigner :*

Théorème 28 *[Décomposition chaotique]*

$$\begin{aligned} F(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) &\to L^2(\mathcal{SC}(\mathcal{H}), \tau) && (2.130)\\ X &\mapsto X\Omega, && (2.131)\end{aligned}$$

est un isomorphisme unitaire. Cela permet entre autres d'identifier à chaque élement de $L^2(\mathcal{SC}(\mathcal{H}), \tau)$, sa décomposition sur l'espace de Fock libre.

Ceci peut être facilement obtenu grâce au lemme suivant :

Lemme 3 *(Produit de Wick, Biane-Speicher)*
*Soit $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, alors il existe un **unique** opérateur noté $W(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n) \in \mathcal{SC}(\mathcal{H})$, tel que :*

$$W(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n)\Omega = h_1 \otimes \ldots \otimes h_n, \tag{2.132}$$

Plus précisément, si on se donne $(e_j)_{j=1}^{dim(H)}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, alors on a pour tout entiers $k_1, \ldots, k_n$ et $j_1 \neq j_2 \ldots \neq j_n$:

$$U_{k_1}(e_{j_1})U_{k_2}(e_{j_2}) \ldots U_{k_n}(e_{j_n})\Omega = e_{j_1}^{\otimes k_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}^{\otimes k_n}, \tag{2.133}$$

où $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ sont les polynômes de Tchebychev détérminés par $U_0(x) = 1, U_1(x) = x$ et la relation de récurrence suivante :

$$xU_k(x) = U_{k+1}(x) + U_{k-1}(x), \tag{2.134}$$

Remarque 31 *Ce sont en fait les polynômes orthogonaux associés à la distribution semicirculaire.*

Le cas qui nous intéresse sera particulièrement celui de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Théorème 29 *Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, alors $\{X(\mathbb{1}_{[0,t]}), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien libre par rapport à la filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, où :*

$$\mathcal{A}_t = v.N\left\{X(\mathbb{1}_{[0,s]}), s \leq t\right\}, \tag{2.135}$$

Définition 50 *On appellera processus (ou famille) semicirculaire (selon que l'espace d'état est dénombrable ou non) $(X_t)_{t\geq 0}$ sur un W^* espace de probabilité $(\mathcal{A}, \tau)$, un processus qui vérifie la propriété suivante, pour tout $n \geq 1$, pour tout $t_1 \ldots, t_n \geq 0$ et pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$:*

$$\lambda_1 X_{t_1} + \ldots + \lambda_n X_{t_n}, \tag{2.136}$$

a une distribution semicirculaire.

C'est l'analogue en probabilité libre d'un processus gaussien. Notons qu'un tel processus centré est uniquement déterminé par sa fonction de covariance : $K(t, s) := \tau(X_t X_s)$.

Définition 51 *De manière équivalente, un mouvement brownien libre sur un W^*-espace de probabilité $(\mathcal{A}, \tau)$ est la donnée d'un processus centré semicirculaire. $(S_t)_{t\geq 0}$ de covariance :*

$$\tau(S_t S_s) = s \wedge t, \tag{2.137}$$

Définition 52 *Un mouvement brownien fractionnaire non-commutatif d'indice de Hurst $H \in (0, 1)$ sur un W^*-espace de probabilité $(\mathcal{A}, \tau)$ est la donné d'un processus centré semicirculaire $(S_t^H)_{t\geq 0}$ de covariance :*

$$\tau(S_t^H S_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} + |t - s|^{2H}), \tag{2.138}$$

2.4.1 Intégration stochastique par rapport au mouvement brownien libre

Nous avons vu précédemment comment construire un mouvement brownien libre. Il est donc naturel de se demander si une théorie non-commutative de l'intégration existe pour un tel processus.
En particulier, on aimerait, puisque l'on se trouve dans un contexte non-commutatif, pouvoir intégrer à droite et à gauche le long du mouvement brownien libre et donc pouvoir donner un sens aux intégrales suivantes :

$$\int_0^t A_s dS_s B_s, \tag{2.139}$$

On remarque que l'on intègre donc plus nécéssairement à droite ou à gauche par rapport à un processus, mais par rapport à un biprocessus qui est donc à valeurs dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}$. On aimerait en plus que de telles intégrales stochastiques par rapport à ces biprocessus adaptés soient des martingales (non commutatives).
La réponse est oui. Biane et Speicher dans [20], ont construit de telles intégrales stochastiques pour des biprocessus adaptés par rapport au mouvement brownien libre. De manière analogue au cas classique, on cherche particulièrement à intégrer au départ des biprocessus simples adaptés, l'extension au cas des biprocessus adapté dans L^2, se fait à l'aide de l'isométrie de Wigner Itô (qui fort heureusement existe dans ce cas).

On verra de plus, et en totale analogie avec le cas classique que cette intégrale stochastique génère des martingales (non-commutatives), et dont on peut en particulier modifier la régularité, c'est-à-dire étendre l'intégrale stochastique pour des processus adaptés et dans $L^2(\mathbb{R}_+, L^p(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}))$ via des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (abbrégé en *BDG*) pour des martingales non-commutatives, résultats qui reposent sur les travaux de Pisier et Xu dans [152], et qui garantissent un contrôle en normes en L^p, $1 \leq p < \infty$ de l'intégrale stochastique par la L^p variation quadratique.

De plus, et contrairement au cas classique, on cherche intrinsèquement (les éléments d'une algèbre de von Neumann sont à fortiori des opérateurs bornés) à obtenir une régularité dans L^∞, ce qui est bien entendu beaucoup plus difficile à obtenir.

Le travail de Biane et Speicher fournit ainsi cette importante estimation : la version L^∞ de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy qui permet d'étendre l'intégrale stochastique aux processus adapté appartenant à $L^2(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}))$. La preuve d'un tel théorème est intrinsèquement lié à la notion de liberté, c'est donc pourquoi pour des extensions (on pense en particulier aux cas des intégrales stochastiques de biprocessus par rapport aux *q-Mouvement brownien* étudié par Donati-Martin dans l'article fondateur [65], qui est une interpolation dans le cas $q \in [0, 1)$ entre le mouvement brownien libre et le mouvement brownien classique), il n'existe cependant actuellement pas de résultats permettant le contrôle de l'intégrale stochastique d'un biprocessus simple par rapport au *q-Mouvement brownien* en fonction de la variation quadratique L^∞ du biprocessus (on pourra aussi consulter les notes de cours de Sauzedde [166] pour avoir une présentation brève et très claire du problème).

Nous noterons dans la suite $(\mathcal{A}, \tau)$ un W^*-espace de probabilité, supposé filtré, c'est-à-dire qu'il existe une famille de sous algèbre de von Neumann qui sont croissantes pour l'inclusion : $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$ pour $s \leq t$ et dont l'union est faiblement dense dans $\mathcal{A}$. On supposera de plus, qu'un mouvement brownien libre existe sur cet W^* espace de probabilité (l'hypothèse est non restrictive puisque si un tel processus n'existe pas sur cet espace, il suffit de prendre le produit libre de $\mathcal{A} * SC$ de $(\mathcal{A}, \tau)$ par (SC, ϕ), qu'ont muni de son état tracial normal et fidèle : ψ, tel que $\psi_{|\mathcal{A}} = \tau$, $\psi_{SC} = \phi$, tel que $\mathcal{A}$ et SC sont libres dans $\mathcal{A} * SC$ ainsi que de la filtration $\mathcal{A} \cup \{X_s, s \leq t\}$, pour obtenir un tel W^*-espace de probabilité filtré qui contient un mouvement libre. Cette hypothèse étant assuré, nous retournons dans le contexte probabiliste.

Une notion qui sera largement utilisée dans la suite de cette thèse est la notion d'espérance conditionnelle.

Définition 53 *Soit $(\mathcal{A}, \tau)$, un W^*-espace de probabilité. Soit $\mathcal{B}$, une sous algèbre de von Neumann de $\mathcal{A}$, i.e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Il existe alors une unique application linéaire notée $\tau[.|\mathcal{B}] : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\tau[.|\mathcal{B}]$ est faiblement continue et complétement positive : pour tout $n \geq 0$, $\tau[.|\mathcal{B}] \otimes I_n$ est positive sur $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$.*

2. *$\tau[.|\mathcal{B}]$ est contractante pour la norme d'opérateur*

3. pour tout $Y, Z \in \mathcal{B}$, et pour tout $X \in \mathcal{A}$:

$$\tau[YXZ|\mathcal{B}] = Y\tau[X|\mathcal{B}]Z, \tag{2.140}$$

L'existence et l'unicité d'une telle application sont assurées grâce à Takesaki (voir [176]). On notera aussi que cette application s'étend en une contraction pour tous les espaces $L^p, 1 \leq p \leq \infty$.

Remarque 32 *On notera comme de l'on contexte des probabilités classiques $\tau[.|X]$ pour $\tau[.|W^*(X)]$ avec X une variable non-commutative ou un $n-$uplet de variables non-commutatives.*

Cette notion permet entre autres de définir la notion de martingale non commutative.

Définition 54 *Un processus, $t \mapsto M_t$, de $[0, \infty[$ dans $L^p(\mathcal{A}, \tau)$ est une L^p-martingale non commutative pour la filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq s$:*

$$\tau[M_t|A_s] = M_s, \tag{2.141}$$

Bien que l'on s'intéressera uniquement à la convergence en loi de variables aléatoires non commutatives, il existe bien d'autres modes de convergence en probabilités libres : convergence en L^p, convergence en probabilité, convergence presque-sûre (voir [156]).

Fixons-nous maintenant $(\mathcal{A}, \tau)$ un W^*-espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{A}_{t\geq 0})$, ainsi qu'un mouvement brownien libre par rapport à cette filtration.

Définition 55 *Un biprocessus simple est une application*

$$\begin{array}{rcl} U : \mathbb{R} & \to & \mathcal{A} \odot \mathcal{A}^{op} \\ t & \mapsto & U_t, \end{array} \tag{2.142}$$

qui est constante par morceaux et nulle pour t assez grand : il existe t_0 positif, tel que pour tout $t > t_0$, $U_t = 0$ ($\mathcal{A} \odot \mathcal{A}^{op}$ étant le produit tensoriel algébrique, i.e sans complétion).

Nous noterons l'ensemble des biprocessus simple $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathcal{A} \odot \mathcal{A}^{op})$

Définition 56 *Un biprocessus simple sera dit adapté à la filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, $U_t \in \mathcal{A}_t \odot \mathcal{A}_t$*

L'espace des biprocessus simples est un espace vectoriel complexe, on le munira des normes suivantes :

Définition 57 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note :*

$$\|U\|_{\mathcal{B}_p} = \left(\int_0^\infty \|U_t\|^2_{L^p(\tau \otimes \tau^{op})} ds \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.143}$$

La complétion des biprocessus simples par rapport à ces familles de normes sera notée $\mathcal{B}_p$ et la restriction aux processus adaptés sera notée dans la suite $\mathcal{B}^a_p$.

Remarque 33 *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, deux algèbres, soit $\mathcal{M}$, un $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-bimodule nous noterons dans la suite l'extension linéaire de l'application suivante : $\sharp : (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, (a \otimes b) \sharp m = a.m.b$. On peut obtenir plus de structures, si on considère $\mathcal{B}^{op}$ au lieu de $\mathcal{B}$, on a alors que $\sharp$ induit une action à gauche sur $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}^{op}$.*

Définition 58 *On définit l'intégrale stochastique d'un biprocessus simple $U \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathcal{A} \odot \mathcal{A}^{op})$ par rapport au mouvement brownien libre $(S_t)_{t \geq 0}$ comme :*

$$\int_{\mathbb{R}_+} U_t dS_t = \sum_{j=1}^n U^{(j)} \sharp (S_{t_j} - S_{s_j}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i^{(j)} (S_{t_j} - S_{s_j}) b_i^j, \tag{2.144}$$

avec $U = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i^j \otimes b_i^j \mathbb{1}_{[s_j, t_j)}$ et $0 \leq s_j < t_j < \infty$. En particulier, on a l'isométrie de Wigner-Ito suivante pour des biprocessus simple adaptés, $U, V \in \mathcal{E}^a(\mathbb{R}, \mathcal{A} \odot \mathcal{A}^{op})$:

$$\left\langle \int_{\mathbb{R}_+} U_t \sharp dS_t, \int_{\mathbb{R}_+} V_t \sharp dS_t \right\rangle = \langle U, V \rangle_{\mathcal{B}_2}, \tag{2.145}$$

Cette isométrie nous permet donc en particulier d'étendre l'intégrale stochastique $\int_{\mathbb{R}_+} U_t \sharp dS_t$ à tout l'espace des biprocessus adapté $\mathcal{B}^a_2$ (par densité des biprocessus simples dans cet espace) tel que l'application suivante :

$$U \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} U_t \sharp dS_t \tag{2.146}$$

soit une isométrie entre $\mathcal{B}^a_2$ et $L^2(\mathcal{A}, \tau)$.

On présente ici la version L^∞, de

Proposition 16 *(Biane Speicher, théorème 3.2.1) Soit $U \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op})$, un biprocessus élementaire adapté, alors on a :*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^+} U_t dS_t \right\|_{L^\infty(\tau)} \leq 2\sqrt{2} \|U\|_{B_\infty} \tag{2.147}$$

2.4.2 Intégrales multiples de Wigner-Itô

Cette section se concentre sur la définition de l'analogue libre des chaos de Wiener-Itô. Nous appellerons de tel élément (la terminologie étant largement inspirée du nom d'Eugène Wigner, et en particulier de la loi de probabilité qui porte son nom).

Dans cette section, on supposera que l'espace de Hilbert sous-jacent est $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Definition 3 *On définit la collection des sous ensembles diagonaux $D^n \subset \mathbb{R}_+^n$,*

$$D^n = \left\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n, 1 \leq i, j \leq n, \exists i \neq j, t_i = t_j\right\}, \tag{2.148}$$

Définition 59 *Pour une fonction caractéristique de la forme suivante $f = \mathbb{1}_A$, où $A = [u_1, v_1] \times \ldots \times [u_n, v_n]$ telle que $A \cap D^n = \emptyset$*

Définition 60 *On définit alors :*

$$I_n^S(f) := (S_{v_1} - S_{u_1}) \ldots (S_{v_n} - S_{u_n}), \tag{2.149}$$

Remarque 34 *Cette application est bien évidemment linéaire.*

On étend ensuite cette définition par linéarité pour les fonctions simples :

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{2.150}$$

où $A_i = [u_1^i, v_i^1] \times \ldots \times [u_n^i, v_n^i]$, et $A_i \cap D^n = \emptyset$.

Isométrie de Wigner-Itô

On peut vérifier sur les fonctions élémentaires de la forme précédente, que l'isométrie suivante de Wigner-Itô est satisfaite,

Lemme 4

$$\tau(I(f)^* I(g)) = \langle g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \tag{2.151}$$

On peut donc par densité des fonctions élémentaires $L^2(\mathbb{R}_+)$ et l'isométrie de Wigner-Itô, étendre l'application :

$$f \mapsto I^S(f), \tag{2.152}$$

à tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Notations On notera comme dans le cas classique,

$$I^S(f) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t_1, \ldots, t_n) dS_{t_1} \ldots dS_{t_n}, \tag{2.153}$$

et on omettra souvent la notation :"^{S}", lorsque le contexte est clair.

Remarque 35 *La première chose qu'il est impératif de remarquer est que la construction de telles intégrales multiples de Wigner-Itô fournis un élément de $L^2(\mathcal{A})$. Il n'y a à priori aucune raison qu'un tel élément soit dans $\mathcal{A}$.*

Le lemme suivant qui peut se comprendre comme une inégalité de Haagerup montre que c'est en réalité le cas, et qu'on peut même obtenir une information supplémentaire.

Lemme 5 *(Inégalité de Haagerup, Bożejko, Biane, Speicher)*
On a la majoration suivante de la norme d'opérateur L^∞ d'une intégrale multiple de Wigner-Itô par sa norme L^2 :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} f(t_1, \ldots, t_n) dS_{t_1} \ldots dS_{t_n} \right\| \leq (n+1) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}, \tag{2.154}$$

Ce lemme implique (combiné avec le précédent résultat de densité des fonctions élémentaires) que pour tout $n \geq 0$, $I_n(f_n)$ appartient à $C^* \{S_t, t \geq 0\}$.

Remarque 36 *Cette précieuse information nous permet d'obtenir un résultat très intéressant sur la distribution analytique d'un chaos (ou même d'une somme finie). En effet, un profond résultat de Guionnet et Shlyakhtenko dans [86] montre que l'algèbre stellaire générée par un mouvement brownien libre est sans projection non triviale. C'est-à-dire qu'une projection p de $C^* \{S_t, t \geq 0\}$ est forcément triviale : $p = 0, 1$. Ce résultat est tout à fait fondamental, puisque qu'un assure que le support d'éléments auto-adjoints d'algèbre stellaire vérifiant cette propriété est forcément un intervalle.*

Hormis ce résultat, on ne savait pratiquement rien sur la distribution analytique des chaos de Wigner. Il a fallu attendre un surpenant travail de Mai (c.f [113]) pour montrer que la distribution analytique d'une somme finie d'intégrales multiples de Wigner auto-adjointes (non-triviale) est sans atomes.

Le résultat est très profond et contrairement au cas classique, où la positivité presque-sure de la dérivée de Malliavin garantit l'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue des chaos de Wiener (il existe une démonstration alternative de Nourdin et Peccati, section 2.2 dans [129]), la méthode de Mai pour parvenir à un tel résultat est complètement différent : le problème est traduit en langage algébrique. Mai dans [113] montre en fait un résultat beaucoup plus fort qui est l'absence de diviseurs de zéros pour S_{fin} (la sous $*$-algèbre, composées des sommes finies d'intégrales multiples), c'est-à-dire que si $X \in S_{fin}$, il n'existe pas d'éléments $Y \in SC$, $Y \neq 0$, tel que $XY = 0$ (ce qui en particulier implique l'absence d'atomes.)

Il est attendu, qu'on est en fait l'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue de la distribution analytique d'une somme finie d'intégrales multiples de Wigner-Itô. Cependant, le problème est encore largement ouvert. En effet, même pour une évaluation polynomiale d'un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$, le fait que la distribution de $P(X_1, \ldots, X_n)$ soit absoluement continue est encore mal comprise. Mentionnons que certains résultats dus notamment à Banna et Mai (voir [13]) assurent que sous la condition d'information de Fisher finie $\Phi^*(X_1, \ldots, X_n) < \infty$, $\chi^*(P(X_1, \ldots, X_n) > \infty$ et que la fonction de répartion de $P(X_1, \ldots, X_n)$ est Hölder-continue (avec un ordre dépendant du degré du polynôme). Charlesworth et Shlyakhtenko ([39]) montrent par d'autres arguments que l'on peut obtenir l'absolue continuité sous l'existence d'un système dual au sens de Voiculescu et que chaque variable soit un vecteur propre de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck discret (number operator) (voir Voiculescu).

En particulier, comme une intégrale multiple de Wigner-Itô (en toute généralité) est générée par une infinité d'éléments : le mouvement brownien libre, ces arguments sont obsolètes et de nouvelles techniques sont à considérer.

Nous savons donc que les intégrales multiples de Wigner-Itô définissent des opérateurs bornés. Il est donc évident qu'on peut les multiplier et obtenir ainsi un autre élément de notre algèbre. La formule suivante est l'analogue en probabilités libres du produit de deux intégrales multiples. Elle fournit ainsi une formule de linéarisation très utile (pour les calculs explicites en particulier), comme dans le cas classique.

Avant de présenter ce lemme, nous devons introduire une notion de contraction, très similaire à celle dans le cas classique.

Definition 4 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$, pour tout $0 \leq p \leq n \wedge m$, on définit la contraction d'ordre p de f et g comme l'élément de $L^2(\mathbb{R}_+^{n+m-2p})$ par :*

$$f \overset{p}{\frown} g(t_1, ..., t_{n+m-2p}) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(t_1, ..., t_{n-p}, s_p, ..., s_1) g(s_1, ..., s_p, t_{n-p+1} ..., t_{n+m-2p}) d_{s_1} ... d_{s_p}, \quad (2.155)$$

Proposition 17 *(Biane, Speicher 1998) Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$, on a la formule de linéarisation suivante pour le produit d'intégrales multiples :*

$$I_n(f) I_m(g) = \sum_{p=0}^{n\wedge m} I_{n+m-2p}(f \overset{p}{\frown} g), \quad (2.156)$$

On démontre ce lemme pour les fonctions élémentaires (nulles sur la diagonale), on étend ensuite le résultat par densité combiné à l'isométrie. On pourrait présenter une démonstration alternative de la même manière que Nourdin, Peccati ou Ustunel l'ont proposé (voir proposition 9 chapitre 2), à l'aide de la propriété de Leibniz du gradient de Malliavin libre, de la notion de gradient de Malliavin libre itérée qui permet d'obtenir un analogue libre à la formule de Stroock.

On notera dans la suite les chaos (homogènes) de Wigner $\mathcal{H}_n$

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_{n-1}^{\perp}, \tag{2.157}$$

où

$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k, \tag{2.158}$$

2.4.3 Loi non-commutatives

Dans la théorie des probabilités usuelles, la loi jointe d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ (à valeurs réelles) est donnée par la connaissance de la mesure image pour tout Borélien $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \tag{2.159}$$

Dans la théorie des probabilités libres, le contexte est assez différent.

Premièrement, considérons un opérateur auto-adjoint $x = x^*$, élément de $(\mathcal{A}, \tau)$, un C^*-espace de probabilité (qui est en particulier borné pour la norme d'opérateur).
On définit la loi ou distribution analytique de x de la façon suivante :

Définition 61 *La distribution analytique ou loi de x est l'application :*

$$\mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} \tag{2.160}$$

$$p \mapsto \tau(p(x)), \tag{2.161}$$

le théorème de répresentation de Riesz (grâce à la postivité de τ), assure alors que forme linéaire précédente s'exprime comme l'intégrale par rapport à une mesure μ_X (par linéarité, un monôme suffit)

$$\tau(x^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu_X(x), \tag{2.162}$$

avec μ_X une mesure de Borel à support compact (qui est de plus uniquement déterminé par τ grace à la positivité de celle-ci).

Remarque 37 *La définition précédente est parfaitement adaptée aux cas des C^*-algèbres, en particulier on peut aussi considérer des fonctions continues (et pas seulement polynomial) sur le spectre de x : $C(\sigma(x))$. On peut être plus spécifique et donner une définition équivalente à l'aide de la mesure spectrale dans le cadre des W^*-algèbres. Ceci est très intéressant et est intimement lié au fait suivant :*
si $T \in (\mathcal{A}, \tau)$, alors toutes les projections spectrales de T : les projections $p \in \mathcal{P}(W^*(T))$, le sont aussi (plus précisément elles appartiennent à l'algèbre de von Neumann engendré par T (on peut même en dire plus, puisque toute algèbre de von Neumann est engendré (pour la norme $\|.\|_{op}$) par ses projections, voir section 3.4 de [99])

Rappelons tout d'abord quelques propriétés du calcul fonctionnel, avant d'introduire un objet central dans l'étude des lois non-commutatives sur les W^*-espace de probabilité.

Définition 62 *Le spectre d'un élément, $X \in \mathcal{A}$ (on suppose au moins $\mathcal{A}$, Banach unifère), est l'ensemble :*

$$\sigma(X) = \{\lambda \in \mathbb{C}, X - \lambda 1 \textit{ n'est pas inversible}\}, \tag{2.163}$$

qui est un compact non-vide de $\mathbb{C}$

Donnons-nous X, une variable non commutative auto-adjointe d'un certain W^*-espace de probabilité $(\mathcal{A}, \tau)$. Alors, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints (voir Vaughan Jones [99]) assure l'existence d'une mesure E_X sur les boréliens du spectre $\sigma(X)$ et à valeurs dans l'espace des projections : c'est la mesure spectrale qui appartient toujours à $v.N(X) \subset \mathcal{A}$:

$$X = \int_{\sigma(X)} x dE_X(z), \tag{2.164}$$

et permet même d'étendre le calcul fonctionnel Borélien à l'aide de cette définition, en particulier, on a :

$$X^k = \int_{\sigma(X)} x^k dE_X(z), \tag{2.165}$$

et donc puisque la mesure spectrale E_X est à valeurs dans l'algèbre de von Neumann engendré par X : $v.N(X) \subset \mathcal{A}$, on peut a fortiori déduire que :

$$\tau(X^k) = \int_{\sigma(X)} x^k d(\tau \circ E_X(z)), \tag{2.166}$$

par unicité de la mesure μ_X, on en déduit que :

$$\mu_X = \tau \circ E_X, \tag{2.167}$$

Définition 63 *(Définition multivariée)*
Nous appelons loi jointe de $X = (X_1, \dots, X_n)$ (supposées auto-adjoints pour simplifier) dans un W^*espace de probabilité, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mu_X : \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle & \to & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & \tau(p(X_1, \dots, X_n), \end{array}$$

où $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ est l'algèbre involutive des polynômes non commutatifs.

2.4.4 Quelques rappels sur les espaces L^p non commutatifs

Dans cette section, on se donne $(\mathcal{A}, \tau)$ un W^*-espace de probabilité. On va construire les espaces $L^p \geq 1$ non commutatifs. On se focalisera principalement sur le cas $p = 2$, pour voir notamment une construction fondamentale qui est la construction *GNS*. On se réfère à Pisier et Xu [153] pour les détails.

Construction GNS Dans ce paragraphe, On rappelle d'abord la construction *GNS* (Gelfand-Naimark-Segal).
On se donne $\mathcal{A}$, une algèbre de von Neumman muni d'un état tracial normal et fidèle τ. On identifie $\mathcal{A}$ comme un sous-espace de $L^2(\mathcal{M})$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} i(x) : \mathcal{A} & \to & L^2(\mathcal{A}) \\ x & \mapsto & x\widehat{1} = \widehat{x}, \end{array} \tag{2.168}$$

l'injection dense de $\mathcal{A}$ vers $L^2(\mathcal{A})$.

On remarque aussi immédiatement cela signifie que $1_\Omega = \widehat{1}$ est un vecteur cyclique, i.e
$\mathcal{A}\widehat{1} = \{\widehat{x}, x \in \mathcal{A}\}$ est dense dans $L^2(\mathcal{A}, \tau)$ et séparant : $\widehat{x} = 0 \implies x = 0$

Considérons ensuite l'opérateur de multiplication à gauche :

$$\pi(x) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(L^2(\mathcal{A}, \tau)) \tag{2.169}$$

$$x \mapsto \pi(x), \tag{2.170}$$

On vérifie facilement que cet opérateur de multiplication définit un opérateur borné sur $\mathcal{B}(L^2(\mathcal{A}, \tau))$.

En effet, pour tout $x, y \in \mathcal{A}$

$$\begin{array}{rcl} \|\pi(x)\widehat{y}\|_2^2 & = & \|xy\|_2^2 \\ & = & \tau(y^* x^* xy) \\ & \leq & \|x\|_{op}^2 \|\widehat{y}\|_2^2, \end{array} \tag{2.171}$$

qui s'étend donc à tout $y \in L^2(\mathcal{A})$.

On en déduit donc que $\mathcal{A}$ se représente comme une sous-algèbre de $\mathcal{B}(L^2(\mathcal{A}, \tau))$.

L'hypothèse de fidélité n'est pas essentielle, en effet, si on considère l'idéal fermé à gauche de $\mathcal{A}$ (propriété facile à déduire) :

$$I = \{x, \tau(x^* x) = 0\}, \tag{2.172}$$

On peut donc quotienter $\mathcal{M}/I$ et obtenir ainsi un état fidèle et donc une forme sesquilinéaire (non-dégénérée) sur le quotient pour ensuite compléter par rapport à celui-ci.

τ défini donc un produit scalaire sur $\mathcal{A}$, en posant pour tout $x, y \in \mathcal{A}$

$$\langle x, y \rangle_\tau = \tau(y^* x),$$

La complétion de $\mathcal{A}$ par rapport à la norme induite $\|.\|_\tau$ sera notée dans la suite $L^2(\mathcal{A}, \tau)$. Quand l'état est fixé, on notera souvent $\|.\|_\tau$ comme $\|.\|_2$ et $L^2(\mathcal{A}, \tau)$ comme $L^2(\mathcal{A})$.
De la même manière, on peut définir les espaces L^p-non commutatifs $L^p(\mathcal{A}, \tau)$ associés à $\mathcal{A}$, pour $1 \leq p \leq \infty$ en complétant $\mathcal{A}$ par rapport à la norme suivante :

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.173}$$

où $|x| = (x^* x)^{\frac{1}{2}}$ and $L^\infty(\mathcal{A}, \tau) := \mathcal{A}$ muni de la norme d'opérateur $\|.\|$.

Remarque 38 *Nous pouvons aussi montrer plus généralement que pour toutes C^* algèbres unifères (à fortiori pour les W^* algèbres) munis d'un état fidèle τ, pour $x \in \mathcal{A}$, la formule suivante qui permet d'obtenir la norme d'opérateur d'un élément :*

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \tau((x^*x)^n)^{\frac{1}{2n}}, \tag{2.174}$$

2.4.5 Quelques rappels sur les produits tensoriels

Nous rencontrerons de manière fréquente la notation $\mathcal{M}^{op}$ pour des algèbres de von Neumann. La notion étant purement algébrique, on la rencontre fréquemment dans la théorie des anneaux, modules ou catégories. On parlera d'algèbre opposée, la notion signifie juste que la multiplication se fait dans le sens "inverse" : pour $x, y \in \mathcal{M}^{op}$

$$x.y = yx, \tag{2.175}$$

qui sera munie de l'état tracial normal et fidèle τ^{op}.

Nous utiliserons fréquemment la notion du produit tensoriel d'algèbres de von Neumann.

Considérons $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, deux algèbres de von Neumann qu'on supposera représentées respectivement en tant que sous-algèbres de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Pour $T \in \mathcal{M}$ et $U \in \mathcal{N}$, on notera $T \otimes U$, l'opérateur qui agit sur les tenseurs élémentaires de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ comme :

$$(T \otimes U)(h \otimes k) = Tu \otimes Uk, \tag{2.176}$$

Il suffit ensuite de vérifier que ce $T \otimes U$ défini un opérateur borné sur $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Pour le voir, on le vérifie sur les combinaisons linéaires finies de tenseurs simples. Cela, nous conduit à définir le produit tensoriel d'algèbres de von Neumann de la façon suivante.

Définition 64 *On note donc pour $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$, le produit tensoriel des algèbres de von Neumann $\mathcal{M}, \mathcal{N}$:*

$$\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{N} = \overline{\{a \otimes b, (a, b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}\}}^{WOT}, \tag{2.177}$$

Remarque 39 *De plus, lorsque $(\mathcal{M}, \tau), (\mathcal{N}, \phi)$ sont deux W^*-espaces de probabilité munis d'états traciaux, normaux et fidèles. On considère sur le produit tensoriel $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{N}$, un état tracial normal et fidèle sur celui-ci en posant pour tout $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{N}$:*

$$(\tau \otimes \phi)(x \otimes y) = \tau(x)\phi(y), \tag{2.178}$$

Remarque 40 *L'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}, \tau\otimes\tau^{op})$ s'identifie naturellement avec l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt $HS(L^2(\mathcal{M}))$ agissant sur $L^2(M)$:*

L'application suivante s'étend en un isomorphisme isométrique entre $HS(L^2(\mathcal{M}))$ et $L^2(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}, \tau \otimes \tau^{op})$

$$x \otimes y \mapsto \langle y, .\rangle_2 x,$$

2.4.6 Liberté et théorème de la limite central libre

Une notion fondamentale de Voiculescu qui est d'ailleurs l'une des principales motivations de la théorie des probabilités libres, est la notion de liberté.
On s'intéressera souvent respectivement aux C^*-algèbres et W^* algèbres générées par une famille $X = (x_1, ..., x_n)$ (possiblement de cardinal infini). On notera donc par la suite $C^*(X)$ et $W^*(X)$ pour la C^*-algèbre et l'algèbre de von Neumann générées par cette famille.

Cette notion traduit en fait, une sorte de factorisation pour les moments d'une somme $a + b$ de variables aléatoires libres "a, b", puisque les termes mixtes s'annulent.

Définition 65 *Soient $\mathcal{A}_1, .., \mathcal{A}_n$ des sous-algèbres de von Neumann de $\mathcal{A}$. Elles seront dites libres si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout indices $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$, tels que $\tau(A_j) = 0$ et $A_j \in \mathcal{A}_{i_j}$, alors on a $\tau(A_1 \ldots A_n) = 0$.*

On rappelle que dans notre contexte, la notion de convergence en loi. On notera aussi $\Big((\mathcal{A}_n, \tau_n)\Big)_{n\geq 1}$ une suite de W^*-espace de probabilité (possiblement différent).

Définition 66 *Une suite $\{X_n, n \geq 1\} \in (\mathcal{A}_n, \tau_n)$ d'éléments auto-adjoints converge en loi vers $X_\infty \in (\mathcal{A}_\infty, \tau_\infty)$ si pour tout polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$:*

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n(P(X_n)) = \tau_\infty(P(X_\infty)), \tag{2.179}$$

Voiculescu a montré a quel point la variable semicirculaire est importante dans la théorie des probabilités libres, elle joue le parfait analogue à la loi gaussienne standard dans ce cadre. Plus précisément, Voiculescu a démontré qu'il existe une version libre du théorème de la limite centrale qui s'énonce ainsi :

Théorème 30 *(Voiculescu 1991)*
Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ un W^*-espace de probabilité non commutatif. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables auto-adjointes, libres, identiquement distribuées, centrées, et telles que $\tau(X_1^2) = 1$, alors :

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \overset{loi}{\to} s, \tag{2.180}$$

où s est une variable aléatoire non-commutative de distribution analytique la loi du demi-cercle standard.

2.4.7 Calcul différentiel non-commutatif

Cette section se concentre sur la notion de calcul différentiel non-commutatatif. Nous définerons ces opérateurs de manière purement algébrique. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'indispensable monographe de Mai et Speicher [111] ainsi qu'aux travaux de Voiculescu [190–192, 194] pour avoir une pour une exposition complète des notions et d'amples généralisations.

L'idée derrière ces définitions est basée sur des expansions de type Taylor. Cependant comme nous sommes dans un cadre non commutatif, il faut prendre en compte ce défaut de commutativité.

Définition 67 *On note $\mathbb{P} = \mathbb{C}\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ l'algèbre involutive des polynômes non commutatifs en n variables et équipée de l'involution suivante : $(PQ)^* = Q^*P^*$ et $t_i^* = t_i$. On supposera de plus que les $t_1, \ldots, t_n$ ne satisfont aucune relation algèbrique, i.e $P(t_1 \ldots, t_n) = 0 \implies P = 0$.*

Definition 5 *Formellement, on définit la dérivée cyclique sur les mônomes $m \in \mathbb{P}$ comme :*

$$Dp = (D_1 p, ..., D_n p),$$

avec

$$D_j m = \sum_{m = a t_j b} ba,$$

qu'on étend ensuite linéairement à $\mathbb{P}$.

Definition 6 *L'opérateur free difference quotient est noté $\partial = (\partial_j)_{j=1}^n$ avec ∂_j la j-ème dérivé non commutative définit sur les monômes $m \in \mathbb{P}$:*

$$\partial_j p = \sum_{m = a t_j b} a \otimes b^{op},$$

et étendue linéairement à $\mathbb{P}$.

Remarque 41 *Cet opérateur apparaît naturellement comme la différentielle de l'application suivante :*

$$\begin{aligned} ev_P : \mathcal{A} &\to \mathcal{A} && (2.181)\\ a &\mapsto P(a), && (2.182)\end{aligned}$$

alors on a :

$$\frac{d}{d\epsilon} P(m + \epsilon n) = \sum_{j=1} m_n(\partial_j P)(m), \tag{2.183}$$

où m_n est l'application linéaire (multiplication) suivante

$$\begin{aligned} m_n : \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} &\to \mathcal{A} && (2.184)\\ P_1 \otimes P_2 &\mapsto P_1 n P_2, && (2.185)\end{aligned}$$

Remarque 42 *Il est évident que les deux notions sont intimement liées. En effet, un simple calcul (il suffit de le vérifier pour un monôme) montre que :*

$$D_j = m \circ flip(\partial_j), \tag{2.186}$$

avec $A = a \otimes b, B = c \otimes d \in M \otimes M^{op}$, $flip(A) = b \otimes a$ et $m(B) = cd$, la multiplication $m : \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} \to \mathbb{P}$.

Définition 68 *Pour $P = (p_1, ..., p_n)$, on définit le Jacobien non-commutatif :*

$$\mathcal{J}P = \begin{pmatrix} \partial_1 p_1 & \partial_2 p_1 & \cdots & \partial_n p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 p_n & \partial_2 p_n & \cdots & \partial_n p_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}^{op}),$$

Remarque 43 *Nous avons défini formellement les opérateurs de dérivations pour des polynômes en des variables auto-adjointes formelles. On peut considérer des polynômes en des variables vivant dans un espace de probabilitité non-commutatitif.*

Définition 69 *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables auto-adjointes vivant dans un $*$-espace de probabilité non commutatif. On notera le morphisme d'évalution :*

$$ev_X : \mathbb{P} \to \mathbb{C}\langle X \rangle,$$

tel que $ev_X(1) = 1$ et $ev_X(t_i) = x_i$.
On utilisera cependant (et souvent) la notation raccourcie $p(X) := ev_X(p)$ qui est l'image de p par le morphsime canonique d'évaluation.

Remarque 44 *Ce dernier morphisme est clairement surjectif sur $\mathbb{C}\langle X \rangle$, il peut cependant être non-injectif. En effet l'injectivité est équivalente à l'absence de relations algébriques entre les $(X_i)_{i\in I}$. On remplacera souvent dans le cas d'absence de relations algébriques $T = (t_1, \dots, t_n)$ $X = (x_1, \dots, x_n)$ par isomorphisme et nous écrirons $\partial_i = \partial_{X_i}$, ainsi que J_X definit sur les polynomes en la variable X,*

En des termes plus algébriques, on remarque facilement que cela implique que l'idéal bilatère de $\mathbb{P}$ (conséquence triviale de la définition intrinsèque de l'idéal) suivant :

$$I_X = \{P \in \mathbb{P}^n, P(x_1, \dots, x_n) = 0\}, \tag{2.187}$$

est l'idéal trivial nul de $\mathbb{P}$. De manière équivalente cela signifie que ev_X est un isomorphisme d'$*-$algèbres.

Il existe une caractérisation suivante de l'absence de relations algébriques entre des élements d'un W^* espace de probabilité muni d'un état tracial normal et fidèle. En effet, cette condition est toujours satisfaite lorsque la dimension entropique non-microcanonique est finie, pour les variables, qui est une condition plus faible que la condition d'information libre de Fisher finie (les détails, et d'autres importants résultats tels que l'absence de diviseur de zéro, se trouve dans l'article de Mai, Speicher et Weber [112]).

2.4.8 Analogues libres de l'information de Fisher et de l'entropie

Dans cette section, on va définir les quantités fondamentales dans notre étude. La majorité des définitions sont dues à Voiculescu lui-même (voir [194]), on introduira une variante d'une entropie qui a été étudiée par Dabrowski (voir [51]).
On proposera donc une approche uniquement basée sur le calcul stochastique libre et dont la majorité des résultats et quantités ont été introduite par Dabrowski.

On rappelle ici la notion de variables conjuguées (analogue libre de la fonction score défini précédemment dans 19).

Définition 70 *On dira que le n-uplet de variables non commutatives $X = (x_1, \ldots, x_n)$ possède des variables conjuguées notées $\xi_{x_1}, ..., \xi_{x_n} \in L^2(W^*(X), \tau)$, si la relation suivante est satisfaite pour tout $p \in \mathbb{P}$:*

$$\langle \xi_{x_j}, p(x) \rangle_2 = \langle 1 \otimes 1^{op}, [\partial_j p](X) \rangle_{\tau \otimes \tau^{op}}, \tag{2.188}$$

Remarque 45 *Lorsqu'il existe $\xi_1, \ldots, \xi_n \in L^2(\mathcal{A})$, telle que les relations 2.188 soit satisfaites, on dit alors qu'ils satisfont les relations conjuguées. En particulier, Mai, Speicher et Weber dans [112] montre que si tel est le cas, alors $x_1, \ldots, x_n$ ne satisfont aucune relation algébrique.*

On définit alors l'information de Fisher libre comme la norme au carré des variables conjuguées (fonctions scores libres) :

Définition 71 *L'information de Fisher libre est définie comme la quantité :*

$$\Phi^*(X) = \sum_{j=1}^{n} \|\xi_{x_j}\|_2^2, \tag{2.189}$$

si $X = (x_1, \ldots, x_n)$ possède des variables conjuguées et $+\infty$ sinon.

Définition 72 *L'information de Fisher relative au potentiel $V \in \mathbb{P}^{(R)}$ (série formelle de rayon de rayon de convergence au plus $R > \|X\|$) est la quantité positive :*

$$\Phi^*(X|V) = \sum_{j=1}^{n} \|\xi_{x_j} - [D_j V](X)\|_2^2 = \|\xi_X - [DV](X)\|_2^2, \tag{2.190}$$

où

$$\xi_X = (\xi_{x_1}, ..., \xi_{x_n}), \tag{2.191}$$

et

$$[DV](X) = ([D_i V](X), ..., [D_n V](X)), \tag{2.192}$$

si X possède des variables conjuguées et $+\infty$ sinon

Définition 73 *(Dabrowski, [51]) Pour $V \in \mathbb{C}\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$, soit la solution forte de l'equation stochastique libre ($n-$ dimensionnel) suivante :*

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2} \int_0^t DV(X_t) dt + S_t,$$

où l'existence est assurée sous la condition de (c, M) convexité suivante (Guionnet, Shlyakhtenko [86]) :

$$[DV(X) - DV(Y)].(X - Y) \geq c(X - Y).(X - Y), \tag{2.193}$$

où $X.Y = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} X_i.Y_i + Y_iX_i$ est l'anti-commutateur de X et Y (pour X, Y auto-adjoints et $\|X\|,\|Y\| \leq M$).
On définit alors l'entropie libre non-microcanonique relative au potentiel V (que l'on appellera variante Ornstein-Uhlenbeck de l'entropie libre non-microcanonique) :

$$\chi_V^*(X_0^1, ..., X_0^n) = -\int_0^\infty \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \|\xi_t^i - D_iV(X_t)\|_2^2 dt = -\int_0^\infty \frac{1}{2}\|\xi_t - DV(X_t)\|_2^2 dt, \tag{2.194}$$

On peut montrer de nombreuses inégalités fonctionnelles reliant cette variante de l'entropie libre non-microcanonique : inégalités de Log-Sobolev libre, inégalité de Talagrand libre si une condition de convexité est satisfaite pour le potentiel, en effet nous verrons au chapitre 9 une condition suffisante.

2.4.9 Calcul de Malliavin-libre

Dans les parties précédentes, nous avons vu comment intégrer par rapport au mouvement brownien libre. Il est donc naturel de savoir si une théorie du calcul différentiel sur l'espace de Wigner existe. Biane et Speicher ont répondu à l'affirmative à cette question et ont prouvé une multitude de résultats analogues au calcul de Malliavin usuel.

En effet, ils ont pu construire un gradient, ainsi que son adjoint : l'intégrale de Skorohod libre et l'analogue de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck. Rappelons comment construire un tel calcul de Malliavin libre. L'idée pour construire un tel opérateur est d'abord de le construire sur l'espace de Fock libre (plein) et d'utiliser ensuite l'identification donnée par $X \mapsto X\Omega$, pour déduire l'action du gradient de Malliavin sur S_{alg}, on pourra ensuite étendre l'action de ∇ sur un plus large sous espace de L^p, $p \geq 1$ à l'aide de la closabilité de ∇ (voir section 5.3 de [20])

Sur l'espace de Fock libre $F(\mathcal{H})$, on construit un gradient de la façon suivante :

Définition 74

$$\begin{aligned} \nabla &: F(\mathcal{H}) \to F(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes F(\mathcal{H}) \\ \nabla\Omega &:= 0 \\ \nabla(h_1 \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes h_n) &:= \sum_{j=1}^{n} (h_1 \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes h_{j-1}) \otimes h_j \otimes (h_{j+1} \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes h_n), \end{aligned} \tag{2.195}$$

Le domaine de cette : $dom(\nabla)$ est consitué des éléments de $F_{alg}(\mathcal{H})$ qui est l'espace de Fock algébrique (somme finie de tenseurs purs). Le parenthésage semble a première vue "artificiel", mais il n'en est rien. L'image de ∇ est à valeurs dans un produit tensoriel, le parenthèsage à donc toute sont importance. De plus, on se trouve dans un contexte non-commutatif.

Définition 75 *L'opérateur adjoint appelé "divergence" est un opérateur non-borné , tel que :*

$$\delta : F(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes F(\mathcal{H}) \to F(\mathcal{H})$$

$$, \qquad (2.196)$$

de domaine $dom(\delta) = F_{alg}(\mathcal{H}) \odot \mathcal{H} \odot F_{alg}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned}
\delta(\Omega \otimes h \otimes \Omega) &:= h \\
\delta(\Omega \otimes h \otimes g_1 \ldots \otimes \ldots g_m) &:= h \otimes g_1 \ldots \otimes \ldots \otimes g_m \\
\delta((h_1 \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes h_n) \otimes h \otimes (g_1 \ldots \otimes \ldots g_m)) &:= h_1 \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes h_n \otimes h \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes g_m,
\end{aligned}$$

Définition 76 *L'opérateur "number operator", définit de la façon suivante :*

$$N \quad : \quad F(\mathcal{H}) \to F(\mathcal{H}),$$

de domaine $dom(N) = F_{alg}(\mathcal{H})$*, qui est définit par* $N\Omega = 0$ *et*

$$N(h_1 \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes h_n) \quad := \quad n.h_1 \ldots \otimes \ldots h_n, \qquad (2.197)$$

Remarque 46 *On peut immédiatement déduire les propriétes suivantes pour ces opérateurs (intégrations par parties et règle de Leibniz) :*

1. *Pour tout* $u \in dom(\nabla)$ *et* $v \in dom(\delta)$

$$\langle \nabla u, v \rangle_{F(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes F(\mathcal{H})} = \langle u, \delta(v) \rangle_{F(\mathcal{H})}, \qquad (2.198)$$

2. *Si on munit* $F_{alg}(\mathcal{H})$*, d'une multiplication donnée par le produit tensoriel* $\otimes$*, on peut vérifier que* ∇ *vérifie la règle de dérivations des produits suivante :*

$$\nabla(u_1 \otimes u_2) = u_1.(\nabla u_2) + (\nabla u_1).u_2, \qquad (2.199)$$

avec ".", l'action à droite et à gauche de F_{alg} *sur* $F_{alg}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{H} \otimes F_{alg}(\mathcal{H})$

$$u_1.(v_1 \otimes h \otimes v_2).u_2 = (u_1 \otimes v_1) \otimes h \otimes (v_2 \otimes u_2), \qquad (2.200)$$

On peut maintenant déduire l'action du gradient de Malliavin sur l'algèbre unifère générée par les variables semicirculaires :

Calcul de Malliavin libre sur l'espace de Wigner

Nous utiliserons par la suite les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}
I^S : \mathcal{F} &\to L^2(S, \tau) \\
(f_n)_{n=0}^{\infty} &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),
\end{aligned} \qquad (2.201)$$

et

$$I^S \otimes I^S : L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}) \to \mathcal{B}_2, \qquad (2.202)$$

Où l'on note pour $n, m \geq 0$, l'application $I_n^S \otimes I_m^S$ de $L^2(\mathbb{R}_+^n) \otimes L^2(\mathbb{R}_+^m)$ dans $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$. De l'isomorphisme entre $L^2(\mathbb{R}_+^{n+m})$ et $L^2(\mathbb{R}_+^n) \otimes L^2(\mathbb{R}_+^m)$, on peut considérer l'extension linéaire de l'application :

$$\begin{aligned} I_n^S \otimes I_m^S \quad : \quad & L^2(\mathbb{R}_+^{n+m}) \to \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n \\ & h_1 \otimes ... \otimes h_{n+m} \mapsto \pi_n(S(h_1)...S(h_n)) \otimes \pi_m(S(h_{n+1})...S(h_m)), \end{aligned} \tag{2.203}$$

Où π_n est la projection sur le $n-$ième chaos de Wigner.

Définition 77 *Le gradient de Malliavin libre est l'unique opérateur non borné et closable :*

$$\begin{aligned} \nabla \quad : \quad & L^2(\mathcal{A}, \tau) \to L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{A}, \tau) \otimes L^2(\mathcal{A}, \tau)) \\ & A \mapsto \nabla A = (\nabla_t A)_{t \geq 0}, \end{aligned} \tag{2.204}$$

tel que pour tout $h \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\nabla(X(h)) = h.1 \otimes 1$ et qui satisfait les propriétés naturelles d'une dérivation, à savoir la règle de Leibniz, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in S_{alg}$, on a :

$$\nabla(AB) = A.\nabla B + \nabla A.B, \tag{2.205}$$

.

Proposition 18 *Le domaine de ∇ peut être décrit comme dans le cas classique, par l'expansion chaotique :*

$$\mathbb{D}^{1,2} := D(\nabla) = \left\{ I^S(f), f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \sum_{n=0}^{\infty} n \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 < \infty \right\}, \tag{2.206}$$

De plus si $X = I^S(f) \in \mathbb{D}^{1,2}$, alors on a :

$$\|\nabla X\|_{\mathcal{B}_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2, \tag{2.207}$$

Nous pouvons dejà observer que la formule précédente permet de directement déduire une variante libre de l'inégalité de Poincaré sur l'espace de Wiener : c'est l'inégalité de Poincaré sur l'espace de Wigner.

Théorème 31 *(Inégalité de Poincaré libre)*
Si $F \in D(\nabla)$, alors on a :

$$\|F - \tau(F).1\|_2 \leq \|\nabla X\|_{\mathcal{B}_2}^2, \tag{2.208}$$

Remarque 47 *La preuve de cette inégalité est immédiate via la décomposition chaotique. Même s'il n'est fait aucune mention dans la littérature de cette inégalité, elle reste très importante. En effet, les inégalités de Poincaré libres ou inégalités de "Trou spectral" sont très importantes en probabilités libres, elles permettent notamment de déduire des propriétés fondamentales pour les algèbres de* *von Neumann des groupes libres (et plus généralement $W^*(X_1, \dots, X_n)$ élements d'un W^*-espace de probabilité via des techniques d'entropie/information de Fisher non-microcanonique (on pourra consulter à ce sujet le travail de Dabrowski dans [49])* [1]

Proposition 19 *Le domaine de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck ou number operator (terme principalement utilisé par les physiciens pour décrire l'action de cet opérateur sur l'espace de Fock) L peut être décrit comme dans le cas classique, par l'expansion chaotique :*

$$\mathbb{L}^{1,2} := D(L) = \left\{ I^S(f), f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} < \infty \right\}, \tag{2.209}$$

On a alors l'égalité suivante sur le domaine de L :

$$L = \delta \circ \nabla_{|D(L)}, \tag{2.210}$$

Proposition 20 *(Proposition 5.3.10 de [20]) Il est clair (par construction et densité) que ∇ contient $\mathcal{P}_n$. De plus, la restriction de ∇ à $\mathcal{P}_n$ définit un opérateur borné.*

On peut expliciter l'action de ∇ sur $\mathcal{P}_n$.
Pour cela on définit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, la fonction $f_t^k \in L^2(\mathbb{R}_+^{n-1})$ par l'égalite pour presque tout $t \geq 0$:

$$f(t_1, ..., t, t_{k+1}, ..., t_n) = f_t^k(t_1, .., t_{k-1}, t_{k+1}, ..., t_n),$$

Définition 78 *Une fonction f est dite fully-symmetric si elle est à valeurs réelles, i.e $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R})$ et que :*

$$f(t_1, \dots, t_n) = f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}), \tag{2.211}$$

pour toute permutation $\sigma \in S_n$. (en particulier la fully-symmetric implique la mirror-symmetry).

Proposition 21 *(Proposition 5.3.9 de [20]) Le gradient de Malliavin libre envoie $\mathcal{P}_n$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)$. En effet, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, on a pour presque tout $t \geq 0$:*

$$\nabla_t(I_n(f)) = \sum_{k=1}^{n} I_{k-1} \otimes I_{n-k}(f_t^k), \tag{2.212}$$

On finit cette partie par la propriété de dérivation des fonctions composées pour le gradient de Malliavin libre :

Proposition 22 *Pour tout $F \in \mathcal{P}_n$, et tout $P \in \mathbb{C}[X]$*

$$\nabla_t(P(F)) = (\partial P(F)) \sharp \nabla_t(F), \tag{2.213}$$

Pour tout $(F_1, ..., F_d)$ avec $F_i \in \mathcal{P}_n$ et $P \in \mathbb{P}$, on a :

$$\nabla_t(P(F)) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k P(F)) \sharp \nabla_t F_k, \tag{2.214}$$

1. Notons aussi que cette inégalité de Poincaré libre, est du à Voiculescu pour le cas fini-dimensionnel dans une note non publié.

2.4.10 Etats de Gibbs libre

On appelle État de Gibbs libre, un $n-uplet$ de varibles non commutatives qui satisfont à l'intégration par parties suivante pour tout $P \in \mathbb{P}^n$:

$$\langle [DV](X), P(X)\rangle_\tau = \langle (1 \otimes 1) \otimes I_n, [\mathcal{J}P](X)\rangle_{\tau\otimes\tau^{op}}, \tag{2.215}$$

C'est l'analogue en probabilités libres d'un état de Gibbs classique.

Par exemple, lorsque

$$V = \frac{1}{2}\sum_i^n t_i^2, \tag{2.216}$$

Cet état de Gibbs caractérise la loi d'un $n-uplet$ de variables semiciculaire $(0,1)$ libres.
Il est important de noter que l'existence et l'unicité de tels états de Gibbs sont très compliquées à établir.
En effet, jusqu'à récemment et un travail de Dabrowski, Guionnet et Shlyakhtenko ([53]), un précédent article des deux derniers auteurs ([86]) assure l'existence de tels états pour les potentiels quadratiques perturbés suivants :

$$V = \frac{1}{2}\sum_i^n t_i^2 + W, \tag{2.217}$$

avec $W = \sum_i^n \beta_i q_i$, β_i suffisament petits (pour assurer une notion de convexité evoquée dans le dernier chapitre).

Remarque 48 *Le travail de Dabrowski, Guionnet et Shlyakhtenko en 2016 étend l'existence de tels États de Gibbs libres pour des potentiels plus généraux, par exemple des potentiels quartiques peuvent être considérés. Ces résultats se basent sur une extension de l'analyse stochastique libre à des espaces des fonctions non commutatives basée sur le produit tensoriel de Haagerup, ainsi qu'une nouvelle notion de convexité permettant d'étendre les résultats d'existence et d'unicité. Nous ne rentrerons pas plus dans les détails, puisque cela sortirait amplement du cadre de cette thèse. Nous renvoyons le lecteur intéressé à ce travail pour plus d'informations.*

Il est important de remarquer que l'existence de tels états se fait au moyen de modèles de matrices aléatoires. En effet, Guionnet et Shlyakhtenko montre que certains modèles de matrices aléatoires "converge" vers de tels états de Gibbs dans plusieurs références [86] ou encore [87], pour V un polynôme (non commutatif) sur l'espace des matrices Hermitiennes. On s'intéresse alors en théorie des matrices aléatoires aux modèles de matrices suivants (on suppose bien-sûr des conditions raisonnables sur le potentiel, la convexité au sens de Guionnet et Shlyakhtenko par exemple) :

$$d\mathbb{P}_n(X_1,\ldots,X_n) = \frac{1}{Z_n^V} exp(-NTr(V(X_1,\ldots,X_n))dX_1\ldots X_n, \tag{2.218}$$

où Z_n^V est la constante de normalisation. avec $\prod_{i=1}^n dX_i$ la mesure de Lebesgue sur l'espace des matrices Hermitiennes (invariante par le groupe unitaire)

On définit alors sur $\mathbb{P}$, une loi non-commutative, i.e une forme linéaire, de masse 1, positive $\tau(P^*P) \geq 0$ et traciale, en posant :

$$\tau(P) = \frac{1}{n} Tr(P(X_1, \ldots, X_n)), \tag{2.219}$$

avec Tr la trace usuelle

L'idée est alors de montrer que

$$\mathbb{E}_N \circ \tau \underset{n\to\infty}{\to} \tau_V, \tag{2.220}$$

qui satisfait alors l'intégration par parties 2.215.

Il est facile de voir qui si on prend $V = \frac{1}{2}\sum_i^n t_i^2$, on tombe sur le modèle GUE, dont on sait que la limite est une famille libre de semiciruclaire (0,1).

2.4.11 États de Gibbs classiques et noyau de Stein relatif

Il est tout aussi important de comprendre comment de tels états de Gibbs existent au sens classique et quelles en sont les notions associées.

Intéressons-nous aux mesures de probabilité suivantes, les mesures uniformément log-concaves :

$$\mu_V = e^{-V(x)} dx, \tag{2.221}$$

avec $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $HessV \geq kI_n$ pour un $k > 0$, tel que $\int e^{-V(x)} dx = 1$.

On sait alors qu'un tel état de Gibbs vérifie l'intégration par parties suivantes :

$$\int \nabla V.f d\mu_V = \int Tr(\nabla f) d\mu_V, \tag{2.222}$$

où f est une test telle que : $\int Tr(\nabla f) < \infty$.

Parallèlement au cas gaussien (qui est d'ailleurs un exemple particulier de tels états de Gibbs, en effet il suffit de prendre $V = \frac{1}{2}\sum_i^n X_i^2$), on définit un noyau de Stein pour ν relatif à ce potentiel V, comme une fonction à valeurs matricielles
$A : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$:

$$\int \nabla V.f d\nu = \int \langle A, \nabla f\rangle_{HS} d\nu, \tag{2.223}$$

avec $\int |f|^2 + \|\nabla f\|_{HS}^2 d\nu < \infty$ (l'espace de Sobolev $W_\nu^{1,2}$).

Définition 79 *La discrépance est définie de la même manière que pour le potentiel gaussien :*

$$\Sigma(\nu|\mu_V) = \inf_A \left(\int \|A - I_n\|_{HS}^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.224}$$

On renvoit aux travaux [48] pour des théorèmes d'existences et de plus amples généralisations.

2.4.12 Noyau de Stein libre

L'idée du noyau de Stein libre est très récente et remonte aux travaux de Fathi et Nelson dans [70]. L'idée était cependant déjà présente dans les travaux de Peccati et Speicher qui ont construit un tel noyau de Stein en dimension un par rapport au potentiel semicirculaire standard (voir la remarque page 5 de [73]).

Nous avons pu voir la définition d'un État de Gibbs libre ainsi que dans le contexte classique la notion de noyau de Stein relatif à un potentiel. Fathi et Nelson ont donc adapté cette définition de manière tout à fait naturelle dans le cadre non commutatif.

L'heuristique à retenir, qui est complètement analogue à la définition dans le cas commutatif, est de pouvoir mesurer à travers la discrépance de Stein libre la proximité de X par rapport à l'État de Gibbs libre de potentiel V.

Définition 80 *Un noyau de Stein libre pour un n-uplet X de variables non commutatives, par rapport au potentiel $V \in \mathbb{P}$ est un élément de $L^2(M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}), (\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr)$, tel que pour tout $P \in \mathbb{P}^n$, :*

$$\langle [DV](X), P(X)\rangle_\tau = \langle A, [\mathcal{J}P](X)\rangle_{\tau\otimes\tau^{op}}, \tag{2.225}$$

La discrépance de Stein de X relativement à V est alors définie comme :

$$\Sigma^*(X|V) = \inf_A \|A - (1 \otimes 1^{op}) \otimes I_n\|_{L^2(M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}),(\tau\otimes\tau^{op})\circ Tr))}, \tag{2.226}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des noyaux de Stein libre A de X relativement à V.

Remarque 49 *Quelques remarques sur cette notion s'imposent :*

1. *Premièrement, on remarque facilement en prenant $P_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 en i-ème position), que cela implique que $\tau([DV](X)) = (0, \dots, 0)$*
2. *On ne sait pas à priori si de tels noyaux de Stein existent, on montrera par la suite que c'est le cas pour n'importe quel potentiel et n'importe quel vecteur de variables non commutatives, pourvu qu'une condition de moment soit satisfaite.*
3. *On remarque aussi que si un tel noyau de Stein libre existe, alors si le potentiel est auto-adjoint : $V = V^*$ et si l'état est tracial, puisque $\langle a, b\rangle_{L^2(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\tau\otimes\tau)} = \langle b^\dagger, a^\dagger\rangle_{L^2(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\tau\otimes\tau)}$ on a de 2.225, que $A^\dagger = A$ avec $[A^\dagger]_{i,j} = [A]^\dagger_{i,j}$ où $(a \otimes b)^\dagger = b^* \otimes a^*$.*

Avant d'énoncer clairement le théorème, introduisons l'application linéaire suivante :

Définition 81 *On définit l'opérateur $\delta = [P, 1 \otimes 1]$ par rapport à la structure de $\mathbb{P} - \mathbb{P}$ bimodule de $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}$ comme suit :*

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{P} &\to \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} \\ P &\mapsto P \otimes 1 - 1 \otimes P, \end{aligned} \tag{2.227}$$

Théorème 32 *(Cébron, Fathi,Mai) Soit X, un n− uplet de variables non-commutatives, soit V, un potentiel polynomial quelconque, supposons que $\tau([DV](X) = (0, \ldots, 0)$, alors il existe au moins deux noyaux de Stein libres qui sont distincts.*

1. *Soit*
$$A = \frac{1}{2}\left(\delta(D_i V\sharp[\delta(t_j)])\right)_{i,j=1}^n , \tag{2.228}$$
, alors A est un noyau de Stein libre par rapport au potentiel V.

2. *Via une inégalité de Poincaré libre, on peut construire un tel noyau de Stein libre par rapport au potentiel V. En particulier, considérons la fonctionnelle suivante :*
$$f_{V,X} : \mathbb{P} \mapsto \langle [DV](X), P(X)\rangle_\tau, \tag{2.229}$$
alors il existe $C > 0$, telle que
$$|f_{V,X}(P)| \leq C\|P\|_{H^1(\mu)}, \tag{2.230}$$
où $H^1(\mu_X)$ est l'espace de Sobolev libre associé à la distribution non commutative μ_X, qui est obtenu par séparation-complétion de $\mathbb{P}^n$ par $\mathcal{N}_\mu = \left\{P \in \mathbb{P}^n, \langle P, P\rangle_{H^1(\mu_X)} = 0\right\}$ avec la forme sesquilinéaire suivante :
$$\langle P, Q\rangle_{H^1(\mu_X)} = \mu_X \otimes \mu_X(Tr(JQ)^*\sharp(JP)), \tag{2.231}$$

Remarque 50 *De cet important théorème, on peut déjà en déduire qu'il existe une formule explicite pour de tels noyaux de Stein, ce qui est déjà surprenant par rapport au cas classique.*

La deuxième construction qui se fait via une inégalité de Poincaré est en fait une adaptation d'un résultat de Fathi dans le cas classique, ce dernier stipule que pour des mesures satisfaisant à une inégalité de poincaré, et donc à fortiori des mesures log-concaves, il existe un tel noyau de Stein. Le point-clé de cette deuxième construction étant l'estimation sur la forme linéaire $f_{V,X}$, qui implique donc sa continuité sur l'espace de Sobolev $H^1(\mu_X)$ et donc permet via le théorème de Riesz de déduire l'existence d'un tel noyau via un dernier argument d'isomorphisme.

Le prochain théorème est un résultat montrant que l'on peut de même que ces formules, déduire l'existence d'un noyau de Stein libre pour n'importe quel potentiel V, pour des vecteurs composés par des intégrales multiples de Wigner-Itô auto-adjointes.
L'obtention de ce résultat repose sur la généralisation du noyau de Stein libre que nous avons pu obtenir dans le dernier chapitre de ce travail. En effet en remarquant la formule explicite de celui-ci, on a remarqué que cette construction peut se faire au moyen de la matrice de Malliavin-Stein libre, on peut le faire pour un potential polynomiale général, pas forcément auto-adjoint, nous ne mentionnons que ce dernier-cas pour simplifier la lecture.

Definition 7 *On définit la matrice non commutative de Malliavin-Stein relative au potentiel V pour un n−uplets $(F_1, \ldots, F_n) \in \mathcal{P}_d$ avec d entier fixé :*

$$\Gamma_V(F) = \left(\int_{\mathbb{R}_+} (id \otimes \tau(\nabla_t[D_i V](F))).(\nabla_t(F_j))^* dt\right)_{i,j=1}^n \in M_n(\mathcal{P}_{deg(V)d} \otimes \mathcal{P}_{deg(V)d}), \tag{2.232}$$

Théorème 33 *Soit $F = (F_1, ..., F_n)$ n-tuple d'éléments autoadjoints appartenant à $\mathcal{P}_d$, V un potentiel polynomial auto-adjoint (i.e $V = V^*$), tel que $\tau([DV](F)) = (0, \ldots, 0)$, alors :*

$$A = \Gamma_V(F), \tag{2.233}$$

est un noyau de Stein libre pour F par rapport au potentiel V.

Proof: Nous rappelons pour pouvoir arriver facilement au résultat (modulo la technicité supplémentaire) que l'on a la formule suivante reliant l'opérateur de Skorohod non commutatif et l'opérateur de gradient de Malliavin libre, pour tout $G \in \mathcal{P}_d$ (d entier quelconque fixé) :

$$\delta((\tau \otimes Id)(\nabla G) \otimes 1) = G, \tag{2.234}$$

en particulier, en prenant $(G_i = [D_i V](F))_{i=1}^n$, on obtient par dualité que pour tout $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{P}^n$:

$$\begin{aligned} \tau(P_i(F)[D_i V](F)) &= \tau(P_i(F)\delta((\tau \otimes Id)(\nabla([D_i V](F_i)) \otimes 1)) \\ &= \sum_{j=1}^n \tau \otimes \tau\left([\partial_j P_i](F) \sharp \int_0^\infty \nabla_t(F_j) \sharp (\tau \otimes id(\nabla_t[D_i V](F_i)) \otimes 1) dt\right), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, car le produit scalaire sur $M_n(L^2(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \tau \circ Tr)$ est donné par $\tau \otimes \tau \circ Tr(A^* \sharp B)$ et que pour G auto-adjoint, $(\tau \otimes id(\nabla_t(G)))^* = id \otimes \tau(\nabla_t(G))$ (voir Mai, lemme 4.6 dans [113], ou Cébron, corollaire 3.10 dans [35]).

2.4.13 Théorèmes du quatrième moment libre

La variable semicirculaire jouant le rôle de la gaussienne standard dans le contexte des probabilités libres Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher se sont posés la très intéressante question de l'existence d'un analogue libre du théorème du quatrième moment. Il ont répondu par l'affirmative dans le formidable travail [100] et ont en plus fourni des estimations quantitatives pour une distance d_{C_2} pour une sous classe d'intégrales multiples auto-adjointes. Ce fut le début de la méthode de Malliavin-Stein libre. Les deux principaux résultats sont donc les suivants : Le premier est dû à Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher et est mentionné dans l'introduction générale (voir 6)

Nourdin, Peccati et Speicher prouvent alors l'extension multidimensionnelle du résultat précédent. Ceci est donc l'analogue libre de la version multidimensionnel du célèbre théorème de Peccati et Tudor [150].

Théorème 34 *(Théorème 1.3 dans [132]) Soit $d \geq 2$ et $q_1, ..., q_d$ des entiers fixés, considérons une matrice de covariance symétrique définie positive $C = \left\{C_{i,j}\right\}_{i,j=1}^d$. Soit $(S_1, ..., S_d)$ une famille semiciruclaire de covariance C*

Pour tout $i = 1, \ldots, d$, considérons la suite $(f_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions mirror-symmetric dans $L^2(\mathbb{R}_+^{q_i})$, telle que pour tout $i, j = 1, \ldots, d$

$$\lim_{k\to\infty} \tau(I_{q_i}(f_k^{(i)})I_{q_j}(f_k^{(j)})) = C_{i,j}, \tag{2.235}$$

alors quand $k \to \infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Le vecteur $(I_{q_1}(f_k^{(1)}), ..., I_{q_d}(f_k^{(d)}))$ converge en loi vers $(S_1, ..., S_d)$.*
2. *Pour tout $i = 1, \ldots, d$, la variable aléatoire non-commutative $I_{q_i}(f_k^{(i)})$ converge en loi vers S_i.*

2.4.14 Version quantitatives des CLT sur l'espace de Wigner

Les principales estimations quantitatives que nous énoncerons dans la suite concernent uniquement l'approximation uni-dimensionnelle semicirculaire sur l'espace de Wigner. Le résultat multidimensionnel sera évoqué dans le dernier chapitre. Pour pouvoir fournir une estimation quantitative intéressante (qui caractérise la convergence en loi), il faut trouver une métrique intéressante. Cela représente déjà un premier obstacle. Nous avons pu voir précedemment que des analogues libres des L^p-distances de Wassserstein ont été construits par Biane et Voiculescu ([21]). La distance qui a été considérée par Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher métrise en particulier la convergence en loi, puisque les fonctions résolventes appartiennent à la classe de fonctions considérées (voir section 3.4 dans [100]) :

Définition 82 *Soit X, Y, deux opérateurs auto-adjoints vivant dans W^*-espace de probabilité. Considérons :*

$$d_{C_2} = sup\left\{\tau[h(X)] - \tau[h(Y)], h \in C_2, \|h\| \leq 1\right\}, \tag{2.236}$$

avec C_2 l'ensemble des transformées de Fourier $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tel que $I_2(h) = \int |\xi|^2 d|\mu|(\xi) < \infty$

Théorème 35 *(KNPS 10) Soit $F = \sum_{n=0}^N I_n(f_n)$ auto-adjoint et qui appartient au domaine $\mathbb{D}^{1,2}$, soit S une variable semicirculaire. Alors, on a l'estimation suivante :*

$$d_{C_2}(F, S) \leq \frac{1}{2}\tau \otimes \tau\left(\left| \int_0^\infty \nabla_t((-L)^{-1}F)\sharp(\nabla_t F)^* dt - 1 \otimes 1\right|\right), \tag{2.237}$$

Idée de la preuve : Trouver une bonne interpolation entre la variable initiale et la variable cible : un pont brownien libre entre F et S. L'idée importante est d'introduire un mouvement brownien libre (que l'on peut supposer sans restriction libre de F, puisque la distance compare uniquement la loi).

Posons ensuite, $F_t = \sqrt{1-t}F + S_t$, $F_0 = F$, $F_1 = S$,

On prend h une fonction test (polynomiale sur le support de F), et on pose $g(t) := \tau(h(F_t))$, en considérant cette fonction, on a par le théorème fondamental de l'analyse :
$\tau(F) - \tau(S) = \int_0^1 g'(t)dt$. On est donc ramené à contrôler cette quantité via le calcul de Malliavin libre.

Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher prouvent alors l'estimation quantitative suivante pour les chaos d'ordre 2

Théorème 36 *Posons $F = I_2(f)$ avec $f \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$ mirror-symmetric , alors on a :*

$$d_{C_2}(F,S) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{E(F^4)-2}, \tag{2.238}$$

Ce résultat utilise en fait que $\int_0^\infty (\nabla_t(L^{-1}F))\sharp(\nabla_t F)^* dt$ est un noyau de Stein si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. En particulier comme une intégrale multiple de Wigner-Itô d'ordre n, F est un vecteur propre de $Ker(L + nId)$, on obtient alors que $\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}_+}(\nabla_t F).(\nabla_t F)^*$ est un noyau de Stein libre par rapport au potentiel semicirculaire standard.

Quelques années après ce travail, Bourguin et Campese ont pu généraliser ce résultat pour un chaos d'ordre quelconque grâce à une nouvelle formule produit pour les bi-intégrales fully-symmetric.

Théorème 37 *(Bourguin, Campese) Posons $F = I_n(f)$ avec $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ fully-symmetric , alors on a :*

$$d_{C_2}(F,S) \leq \sqrt{C_n}\sqrt{E(F^4)-2}, \tag{2.239}$$

où C_n est à croissance linéaire.

Cependant, il est à remarquer que cette estimation tombe en défaut lorsque l'on ne suppose plus la *fully-symmetry* mais seulement le caractère auto-adjoint. Le problème étant, lorsque l'on suppose uniquement le caractère auto-adjoint, la discrépance de Stein libre par rapport à ce noyau de Stein ne se majore pas par une quantité dépendant du deuxième et quatrième cumulant libre. Bourguin et Campese proposent ainsi un exemple très élégant de cette proposition dans leur article [27].

Le résultat suivant généralise l'estimation à la classe des intégrales multiples auto-adjointes. De plus, c'est la distance libre Wasserstein associée au coût quadratique qui est considéré. Ce résultat est le plus "abouti". De manière assez surpenante, l'ordre de convergence n'est plus en la racine carrée du quatrième cumulant mais en la racine quatrième. Ce résultat est entièrement basé sur des inégalités fonctionnelles de transports libres et non sur une représentation duale de la distance, ainsi que sur la construction d'un noyau de Stein qui transcrit mieux les propriétés du calcul différentiel non-commutatif, en particulier, on doit éviter l'utilisation de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck,

Définition 83 *(Biane Voiculescu, [21]) La distance Wasserstein libre (de coût quadratique) est définit comme :*

$$\begin{aligned} d_W((X_1,...,X_n),(Y_1,...,Y_n)) &= inf\Big\{\|(X_i^{'} - Y_i^{'})_{1\leq i\leq n}\|_2 / (X_1^{'},...,X_n^{'},Y_1^{'},...,Y_n^{'}) \subset (M_3,\tau) \\ &\quad (X_1^{'},...,X_n^{'}) \simeq (X_1,...,X_n),(Y_1^{'},...,Y_n^{'}) \simeq (Y_1,...,Y_n)\Big\}, \end{aligned}$$

où (M_3,τ) est un W^*-espace de probabilité équipé d'un état normal tracial et fidèle tel que $(X_i^{'}, Y_i^{'}) \in M_3$ et $\simeq$ désigne l'égalité en loi.

Remarque 51 *Cette définition semble au premier abord, très compliquée à manipuler ou même à saisir. L'idée principale (à nos yeux) qu'il faut retenir est similaire à celle dans le cas commutatif : c'est-à-dire prendre des couplages des lois initiales (on suppose ici que l'on compare la loi de deux vecteurs de variables non-commutatives à n variables), telles que chacune des marginales aient même loi que la loi du vecteur initial. Il faut cependant construire un espace de probabilité non-commutatif plus gros contenant un vecteur de taille $2n$ où réaliser ce couplage.*

Théorème 38 *(Cébron 2018, [35]) Soit $F = I_n(f)$ avec f mirror-symmetric, $\tau(F^2) = 1$, alors*

$$d_W(F, S) \leq n^{\frac{3}{4}} (\tau(F^4) - 2)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.240}$$

Théorème 39 *(Cébron 2018, [35]) Soit $A, B \in (\mathcal{A}, \tau)$ auto-adjoints, tels que $\tau(A) = \tau(B) = 0$, et $\tau(A^2) = \tau(B^2) = 1$, alors on a :*

$$d_{C_2}(A, B) \leq d_W(A, B), \tag{2.241}$$

Chapitre 3

Résumé des chapitres

3.1 Partie 1, 2, 3 et 4 : Limite de matrices aléatoires de Wishart via la méthode de Malliavin-Stein et de l'analyse sur l'espace de Wiener

Dans toute cette partie, on considère un processus gaussien isonormal $\{X(h), h \in \mathfrak{H}\}$ où l'on supposera que $\mathfrak{H}$ soit de la forme $L^2(T, \mathfrak{B}, \mu)$ avec μ σ-finie et sans atome.

3.1.1 Partie 1 : Matrices de Wishart à entrées chaotiques

Donnons nous une matrice $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$ avec des entrées indépendantes appartenant à un chaos de Wiener associé à un processus gaussien isonormal. On suppose de plus que les entrées d'une même ligne appartiennent au même chaos de Wiener, ce dernier pouvant varier d'une ligne à l'autre.

On a donc :

$$X_{i,j} = I_{q_i}(f_{i,j}) \tag{3.1}$$

avec $f_{i,j} \in \mathfrak{H}^{\odot q_i}$ et $q_i \geq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

On ne fait pas l'hypothèse de distributions identiques pour les entrées, on a en effet uniquement besoin de conditions sur les moments d'ordre deux et quatre, i.e :

$$\mathbb{E}\left(X_{ij}^2\right) = q_i! \left\|f_{ij}\right\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes q_i}} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(X_{ij}^4\right) = m_4. \tag{3.2}$$

Considérons alors la matrice de Wishart recentrée, $\mathcal{W}_{n,d} = \left(W_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ définie par :

$$\mathcal{W}_{n,d} = \frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T - \mathcal{I}_n, \tag{3.3}$$

dont les entrées sont données par :

$$W_{ii} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(X_{ik}^2 - 1\right), \quad i = 1, \dots, n \tag{3.4}$$

et

$$W_{ij} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} X_{ik}X_{jk}, \quad 1 \le i \ne j \le n. \tag{3.5}$$

De l'indépendance entres les entrées X_{ij} et des hypothèses de moments 3.2, on en déduit que pour tout $1 \le i \le n$,

$$\mathbb{E}\left(W_{ii}^2\right) = \frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d} E\left(\left(X_{ik}^2 - 1\right)^2\right) = \frac{m_4 - 1}{d},$$

et pour tout $1 \le i \ne j \le n$,

$$\mathbb{E}\left(W_{ij}^2\right) = \frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d} \mathbb{E}\left(X_{ik}^2\right)\mathbb{E}\left(X_{jk}^2\right) = \frac{1}{d}.$$

De cette observation, il est naturel de considérer la renormalisation en $\sqrt{d}$, et on définit ainsi la matrice de Wishart renormalisée $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d} = (\widetilde{W}_{ij})_{1\le i,j\le n}$ comme

$$\widetilde{W}_{ij} = \sqrt{d}W_{ij}, \tag{3.6}$$

pour tout $1 \le i, j \le n$.

Considérons aussi la matrice de Wigner gaussienne (si $m_4 = 3$, on a une matrice GOE) $\mathcal{Z}_n = \left(Z_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ suivante :

$$\begin{cases} Z_{ii} \sim N(0, m_4 - 1) & \text{for } 1 \le i \le n \\ Z_{ij} \sim N(0,1) & \text{for } 1 \le i < j \le n \\ Z_{ij} = Z_{ji} & \text{for } 1 \le j < i \le n \end{cases}, \tag{3.7}$$

avec des entrées $\left\{Z_{ij} \colon i \le j\right\}$ indépendantes.

Pour pouvoir obtenir notre estimation, en utilisant le théorème de Nourdin, Peccati et Réveillac 22, il faut intuitivement passer de l'estimation de la distance $1-$Wasserstein matricielle à une estimation entre vecteurs aléatoires de taille appropriés. Pour ce faire, on utilise le résultat suivant dû à Nourdin et Zheng, qui montre l'estimation suivante pour des matrices aléatoires symétriques.

Si $\mathcal{X} = \left(X_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ est une matrice aléatoire symétrique de taille $n \times n$, on lui associe son vecteur "*half*" comme le vecteur aléatoire $n(n+1)/2$-dimensionnel :

$$\mathcal{X}^{\text{half}} = (X_{11}, X_{12} \ldots, X_{1n}, X_{22}, X_{23}, \ldots, X_{2n}, \ldots, X_{nn}). \tag{3.8}$$

Lemme 6 *(lemme de Nourdin, Zheng [138, Lemma 2.2]). Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ deux matrices aléatoires symétriques à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, on a :*

$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \le \sqrt{2}d_W(\mathcal{X}^{\text{half}}, \mathcal{Y}^{\text{half}}),$$

Ce lemme est très intuitif à comprendre, en effet par symétrie des matrices, pour évaluer la distance matricielle, il suffit de comprendre la matrice diagonale supérieure (diagonale incluse) de la matrice. On associera donc la matrice aléatoire de taille $n \times n$ à son vecteur "*half*", de taille $\frac{n(n+1)}{2}$. Remarquons aussi que la constante en $\sqrt{2}$ apparaît ainsi naturellement.

On est donc ramené à estimer la proximité de ces vecteurs *half*. C'est là que la méthode de Malliavin-Stein prend tout son sens. Puisque les entrées sont chaotiques à fortiori Malliavin-différentiable, on doit majorer les termes suivants :

Estimation de

$$\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ab}\rangle_{\mathfrak{H}} - \mathbb{E}\left(Z_{ij}Z_{ab}\right)\right)^2\right),$$

Rappelons le lemme d'Ustunel et Zakaï, qui caractérise l'indépendance de deux chaos de Wiener d'ordres quelconque avec un noyau supposé symétrique. Ce dernier résultat est équivalent à la nullité des contractions (la première implique la nullité des contractions d'ordre supérieurs).

Théorème 40 (Üstünel-Zakai [187]) *Pour tout $n, m \geq 1$, soit $f \in \mathfrak{H}^{\odot n}$ et $g \in \mathfrak{H}^{\odot m}$. Les intégrales multiples de Wiener $I_n(f)$ et $I_m(g)$ sont indépendantes si et seulement si*

$$f \otimes_1 g = 0 \text{ presque partout, sur } \mathfrak{H}^{\otimes m+n-2}. \tag{3.9}$$

Remarque 52 *Cette condition implique nécessairement que les contractions d'ordre supérieurs sont nulles :*

$$f \otimes_r g = 0 \text{ presque partout, sur} \mathfrak{H}^{\otimes m+n-2r}$$

pour tout $1 \leq r \leq n \wedge m$.

Avant d'aller plus loin, on introduit d'abord une notion inventée par Tudor et Bourguin dans [29].

Définition 84 *Deux variables X et Y ayant pour décomposition en chaos de Wiener*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \quad et \quad Y = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(g_m),$$

avec $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot n}$, $g_m \in \mathfrak{H}^{\odot m}$ pour tout $n, m \geq 0$, sont dites "strongly independent" si chaque chaos de X est indépendante de chaque chaos de Y, i.e., pour tout $n, m \geq 0$, les variables aléatoires $I_n(f_n)$ et $I_m(g_m)$ sont indépendantes.

Stabilité de l'indépendance forte par passage au carré

Lemme 7 *Posons $X = I_n(f)$, $f \in \mathfrak{H}^{\odot n}$ et $Y = I_m(g)$, $g \in \mathfrak{H}^{\odot m}$ indépendantes. Alors les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont strongly independent*

La preuve se trouve complétement rédigée dans les chapitres 4 et 5 pour le cas général et se base comme attendue sur la formule produit.

Remarque 53 *On verra plus généralement plus tard, mais le lecteur peut se convaincre que la strongly independence entre deux variables aléatoires est préservée par passage à la puissance entière quelconque (la démonstration étant très lourde en notations même pour le passage au carré, on laisse aux lecteurs les détails) et même par produit strongly independent.*

Ce critère est très important puisse qu'il permet d'annuler les termes croisés. On va détailler uniquement le cas *diagonal*, les autres cas se traitant de la même manière.

Détail du cas diagonal

$$\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} - (m_4 - 1)\right)^2\right), \tag{3.10}$$

Via les précédents lemmes, on remarque alors qu'on obtient la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} &= \frac{1}{d}\sum_{k,l=1}^{d}\langle D(X_{ik}^2 - 1), -DL^{-1}(X_{il}^2 - 1)\rangle_{\mathfrak{H}} && (3.11)\\
&= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{ik}^2 - 1), -DL^{-1}(X_{ik}^2 - 1)\rangle_{\mathfrak{H}}, && (3.12)
\end{aligned}$$

On vérifie alors sans difficulté, par l'intégration par parties sur l'espace de Wiener que

$$\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}}\right)\right) = m_4 - 1, \tag{3.13}$$

Ce qui permet entre autre, d'exprimer $\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} - (m_4 - 1)\right)^2\right)$ comme une somme de d variables aléatoires centrées avec un préfacteur en $\frac{1}{d^2}$, dont on majore ensuite la variance par une quantité dépendante seulement de i. Cela permettra alors d'obtenir une borne en $\frac{1}{d}$.

Plus formellement, nous obtenons donc après calculs, l'estimation suivante :

$$\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} - (m_4 - 1)\right)^2\right) = \frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left((F_{ikk} - \mathbb{E}(F_{ikk}))^2\right) \leq \frac{C(i)}{d}. \tag{3.14}$$

De manière analogue, on obtient la même estimation pour les autres cas. Il ne reste donc plus qu'à sommer pour obtenir l'estimation finale.

$$d_W(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq \sqrt{2}C\sqrt{\sum_{i,j,a,b=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ab}\rangle_{\mathfrak{H}} - \mathbb{E}\left(Z_{ij}Z_{ab}\right)\right)^2\right)},$$

Nous aboutissons donc au théorème suivant :

Théorème 41 *Soit la matrice de Wishart renormalisée $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ dont les coefficients sont donnés par* (3.6). *Alors pour tout $n \geq 1$, $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ converge en loi composante par composante, quand $d \to \infty$, vers la matrice $\mathcal{Z}_n$ donnée par* (3.7). *De plus, pour tout $n, d \geq 1$, il existe une constante C positive telle que*

$$d_W(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq C \sqrt{\frac{n^3}{d}}.$$

Remarque 54 *Même si l'article sur lequel est basé ce résumé, évoque aussi le cas des matrices de Wishart associées à une matrice composée par des accroissements du processus de Rosenblatt et possédant une structure de corrélation en lignes. Nous évoquerons ce cas dans la section 6, celui-ci étant juste un cas particulier.*

3.1.2 Partie 2 : Fluctuations des matrices de Wishart avec des entrées de type intégrales de Skorohod

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une généralisation du précédent résultat pour des entrées beaucoup plus générales. On s'intéressera à des matrices de Wishart associées à une matrice dont les entrées sont centrées, *strongly independent* et s'expriment comme une intégrale de Skorohod par rapport à un processus gaussien isonormal (une somme infinie d'intégrales multiples). On ne fera pas l'hypothèse de distributions identiques pour les entrées, mais seulement des hypothèses sur les moments d'ordre deux et quatre. On montrera alors, que sous l'hypothèse de régularité des entrées au sens de Malliavin, que la matrice de Wishart proprement renormalisée converge vers la même matrice de Wigner gaussienne évoquée dans la section précédente. Cependant, les entrées s'exprimant comme des intégrales de Skorohod, on doit utiliser une distance plus faible, en effet, il n'existe pas de critère permettant d'évaluer la distance de Wasserstein entre un vecteur composé par des intégrales de Skorohod on majore donc cette distance par une nouvelle distance d_2. Nous perdons ainsi un peu de vitesse de convergence tout en gardant une forme très générale pour les entrées.

On conserve dans cette section, les notations du chapitre précédant, et notamment sur les matrices de Wishart associées à la matrice intiale $\mathcal{X}_{n,d}$.

Hypothèses sur les entrées

$$X_{i,j} = \sum_{p \geq 1} I_p(f_p^{(i,j)}), \tag{3.15}$$

avec $f_p^{(i,j)} \in L^2_S(T^p)$ pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$ et pour chaque $p \geq 1$. Les entrées $X_{i,j}$ s'expriment alors comme les intégrales de Skorohod suivantes :

$$X_{i,j} = \delta(u_{i,j}) \text{ avec } u_{i,j}(t) = \sum_{p \geq 1} I_{p-1}(f_p^{(i,j)}(\cdot, t)), \quad t \in T$$

$$u_{i,j}(t) = D_t(-L)^{-1} X_{i,j}, \quad t \in T, \tag{3.16}$$

On est assuré du lemme (2.24) que $u_{i,j}$ est Skorohod-intégrable pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$.

Nous faisons alors les hypothèses suivantes sur les entrées de la matrice $X_{n,d}$:

- Les coefficients de la matrice $(X_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$ sont *strongly independent*.
- Pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$, les variables $X_{i,j}$ ont même variance (supposée sans perte de généralité égale à 1) et même quatrième moment.

$$\mathbf{E}X_{i,j}^2 = 1, \tag{3.17}$$

et

$$\mathbf{E}X_{i,j}^4 = m_4. \tag{3.18}$$

- Les processus $(u_{i,j}(t), t \in T)$ sont réguliers au sens de Malliavin, c'est à dire qu'il existe $p \geq 8$, tel que pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$, $u_{i,j} \in \mathbb{L}^{2,p}$ et les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\|u_{i,j}\|_{2,p} \leq C_p, \tag{3.19}$$

où $C_p > 0$ est une constante **Universelle** ne dépendant que de p.

On va utiliser la proposition 2.3 de [88], qui permet d'estimer la distance d_2 entre un vecteur d'intégrales de Skorohod et un vecteur gaussien de covariance C.

Proposition 23 *(Huang, Nualart, Viitasaari)*
Soit $F = (F_1, ..., , F_m)$ un vecteur aléatoire $F_i = \delta(u_i), u_i \in Dom(\delta)$ et $F_i \in \mathbb{D}^{1,2}$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Soit Z un vecteur gaussien de covariance $C = (C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$. Alors :

$$d_2(F, Z) \leq \frac{m}{2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} \mathbf{E}\left(C_{i,j} - \langle DF_i, u_j\rangle_{L^2(T)}\right)^2}.$$

L'idée derrière l'utilisation de cette proposition est basée sur le fait que nous pouvons exprimer les entrées de notre matrice de Wishart renormalisée comme des intégrales de Skorohod.

Proposition 24

$$W_{i,i} = \delta(V_{i,i}) \text{ avec } V_{i,i} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^{d} D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2 - 1). \tag{3.20}$$

Pour tout $1 \leq i, j \leq n$ *tel que* $i \neq j$,

$$W_{i,j} = \delta(V_{i,j}) \text{ avec } \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^{d} D(-L)^{-1} X_{i,k} X_{j,k}. \tag{3.21}$$

Pour passer de l'estimation de la distance Wasserstein entre matrices symétriques aléatoires $X, Y \in S_n(\mathbb{R})$ aux vecteurs "*half*" associés, on utilise la proposition utilisée précedemment (6 ainsi que l'inégalité suivante (avec au préalable, l'utilisation de l'inégalité entre d_W et d_2 pour les vecteurs aléatoires, voir proposition 4.4 de [138]).

Lemme 8
$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leq 4n^{\frac{1}{4}} \sqrt{d_2(\mathcal{X}^{\text{half}}, \mathcal{Y}^{\text{half}})}, \tag{3.22}$$

On va alors pouvoir généraliser le résultat précédent concernant la *strongly independence*. En effet, la propriété est stable par passage au carré.

Lemme 9 *Soit $F = \sum_{p\geq 1} I_p(f_p)$ et $G = \sum_{q\geq 1} I_q(g_q)$ avec $f_p, g_p \in L^2_S(T_p)$ pour tout $p \geq 1$. Supposons $F, G \in \mathbb{D}^{1,4}$ et strongly independent. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *Les variables aléatoires F^2 and G^2 sont strongly independent*
2. *Soit $u = D(-L)^{-1}F$ et $v = D(-L)^{-1}G$., alors :*
$$\langle u, v\rangle_{L^2(T)} = \langle u, DG\rangle_{L^2(T)} = \langle v, DF\rangle_{L^2(T)} = 0 \text{ presque sûrement. },$$
3. *Soient $u = D(-L)^{-1}F$ et $v = D(-L)^{-1}G$. Alors $\langle DF, u\rangle_{L^2(T)}$ et $\langle DG, v\rangle_{L^2(T)}$ sont strongly independent.*
4. *Soient $H = \sum_{p\geq 1} I_p(h_p)$, $J = \sum_{q\geq 1} I_q(j_q)$ avec $h_p, j_p \in L^2_S(T^p)$ pour tout $p \geq 1$ deux autres variables aléatoires appartenant à $\mathbb{D}^{1,4}$. Si F, G, H, J sont mutuellement strongly independent, alors FG and HJ sont strongly independent.*

Définition 85 *Introduisons l'ensemble*
$$\mathcal{I} = \left\{(i, j, a, b) \in \{1, 2, .., n\}^4 / i \leq j, a \leq b, and \{i, j\} \cap \{a, b\} = \emptyset\right\}. \tag{3.23}$$

Remarque 55 *Le lemme est crucial dans notre étude. On peut à partir de celui-ci déduire que les termes : $(i, j, a, b) \in \mathcal{I}$, ne donnent aucune contribution à l'estimation.*

En effet, on montre aisément par le lemme précédent 9 que les termes : $(i, j, a, b) \in \mathcal{I}$
$$\langle DW_{i,j}, V_{a,b}\rangle = 0,$$

En utilisant l'hypothèse de régularité sur les entrées, on montre qu'on peut borner uniformément, c'est-à-dire par une constante ne dépendant ni de $i \neq j$, ni de k et seulement de l'indice de régularité des entrées au sens de Malliavin p (on ne détaille ici que le cas : $i = a \neq j = b$).

$$\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}\right)^2 \leq C.$$

Ce dernier résultat est entièrement basé sur les inégalités de Meyer rappelées dans la chapitre 2, théorème 11 On peut finalement conclure en remarquant comme dans le chapitre précédent que $\sharp\mathcal{I} \leq 6n^3$, pour aboutir finalement au théorème suivant :

Théorème 42 *Soit la matrice de Wishart $\mathcal{W}_{n,d}$ avec les entrées (3.20) et (3.21) et supposons que les hypothèses 3.1.2***H1** *-* **H3** *soient vérifiées. Alors, pour tout $n \geq 1$, la matrice aléatoire $\mathcal{W}_{n,d}$ converge composante par composante en loi, lorsque $d \to \infty$, vers la matrice de Wigner Z_n definie par (3.7). De plus pour tout $n, d \geq 1$, il existe $C > 0$ telle que :*
$$d_W(\mathcal{W}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq C\frac{n^{\frac{9}{4}}}{d^{\frac{1}{4}}},$$

3.1.3 Partie 3 : Théorème non central limite pour matrice de Wishart avec entrées de type Hermite

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude de matrices de Wishart associées à une matrice $\mathcal{X}_{n,d}$ composées par des accroissements du processus d'Hermite. On suppose ici que la corrélation se concentre uniquement sur les lignes. Nous allons pouvoir voir que proprement renormalisée, la matrice *limite* n'est pas une matrice de Wigner gaussienne, mais une matrice diagonale avec des entrées distribuées comme une variable de Rosenblatt et donc vivant dans le chaos d'ordre deux. Nous évaluons aussi la distance de Wasserstein matricielle associée à cette convergence.

Définition 86 *La représéntation temporelle du processus d'Hermite est donnée pour tout $t \geq 0$ par :*

$$Z_t^{(q,H)} = d(q,H)\int_{[0,t]^q}\left(\int_{y_1\vee\ldots\vee y_q}^t \partial_1 K^{H'}(u,y_1)\ldots\partial_1 K^{H'}(u,y_q)du\right)dB(y_1)\ldots dB(y_q), \tag{3.24}$$

avec $(B(y))_{y\geq 0}$ un mouvement brownien.

$$H' = 1+\frac{H-1}{q} \text{ and } d(H,q) = \frac{(H(2H-1))^{1/2}}{(q!(H'(2H'-1))^q)^{1/2}}, \tag{3.25}$$

et pour $H \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ et $t > s$,

$$K^H(t,s) = c(H)s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}du, \tag{3.26}$$

où $c(H) = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H,H-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Nous pouvons donc écrire pour tout $t \geq 0$, $Z^{(q,H)}$ comme l'intégrale multiple de Wiener-Itô d'ordre q suivante :

$$Z_t^{(q,H)} = I_q(L_t),$$

avec L le noyau du processus d'Hermite donné par :

$$L_t(y_1,y_2,...,y_q) = d(q,H)1_{[0,t]\times\ldots\times[0,t]}(y_1,y_2,...,y_q)\int_{y_1\vee\ldots\vee y_q}^t \partial_1 K^{H'}(u,y_1)\ldots\partial_1 K^{H'}(u,y_q)du, \tag{3.27}$$

pour tout $y_1,y_2,...,y_q \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

Hypothèse sur les entrées de la matrice $\mathcal{X}_{n,d}$

Soit $B = (B^{(1)},\ldots,B^{(n)})$ un mouvement brownien $n-$ dimensionel. Pour tout $i = 1,\ldots,n$, on considère le processus gaussien isonormal associée à $B^{(i)}$. Pour marquer cette dépendance, on écrira $I_q^{(i)}$ l'intégrale multiple d'ordre q associé au $i-$ème processus gaussien isonormal

C'est-à-dire que pour tout i, $j = 1, \ldots, n$:

$$\mathcal{X}_{i,j} = Z_j^{(q,H,i)} - Z_{j-1}^{(q,H,i)} = I_{q_i}^{(i)}(L_j - L_{j-1}), \tag{3.28}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_{i,j}^2) & = & 1 \\ \mathbb{E}(X_{i,j}X_{i,k}) & = & \rho_H(j-k), \end{array} \tag{3.29}$$

où ρ_H est la corrélation du fBm d'indice de Hurst H.

On remarque alors que lorsque n est fixé et que $d \to \infty$,

$$\frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T \overset{(p.s)}{\to} I_n, \tag{3.30}$$

Sur la base cette observation, on considère donc la matrice de Wishart recentrée :

$$\mathcal{W}_{n,d}^o = \frac{1}{d}X_{n,d}X_{n,d}^T - I_n, \tag{3.31}$$

On a donc de 3.31, que pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathcal{W}_{ii} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}(X_{i,k}^2 - 1) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left[(Z_{k+1}^{q,H,i} - Z_k^{q,H,i})^2 - 1\right], \tag{3.32}$$

Et pour $i \neq j$,

$$\mathcal{W}_{ij} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}X_{i,k}X_{i,j} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}(Z_{k+1}^{q,H,i} - Z_k^{q,H,i})(Z_{k+1}^{q,H,j} - Z_k^{q,H,j}), \tag{3.33}$$

En utilisant l'auto-similarité du processus d'Hermite, on en déduit aisément l'egalité en loi suivante pour $W_{i,i}$ $W_{i,j}$:

$$A_{i,i} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left[\frac{\left(Z_{\frac{k}{d}}^{(q_i,H,i)} - Z_{\frac{k-1}{d}}^{(q_i,H,i)}\right)^2}{d^{-2H}} - 1\right], \tag{3.34}$$

et

$$A_{i,j} = d^{2H-1}\sum_{k=1}^{d}\left(Z_{\frac{k}{d}}^{(q,H,i)} - Z_{\frac{k-1}{d}}^{(q_i,H,i)}\right)\left(Z_{\frac{k}{d}}^{(q_i,H,j)} - Z_{\frac{k-1}{d}}^{(q,H,j)}\right). \tag{3.35}$$

Les variations quadratiques du processus d'Hermite

Le théorème suivant dû à Chronopoulou, Tudor et Viens, est le théorème crucial pour pouvoir aboutir à nos résultats. Ce puissant résultat montre que proprement renormalisées, les variations quadratiques (discrètes) du processus d'Hermite convergent en L^2 vers une variable aléatoire de *Rosenblatt*.

Théorème 43 *Fixons $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et un entier $q \geq 2$. Soit $(Z_t^{(q,H)})_{t\geq 0}$ un processus d'Hermite (3.24). Pour $d \geq 1$, on définit*

$$V_d = c_{q,H} d^{\frac{2-2H}{q}-1} \sum_{k=0}^{d-1} \left[\frac{\left(Z^{(q,H)}_{\frac{k+1}{d}} - Z^{(q,H)}_{\frac{k}{d}} \right)^2}{d^{-2H}} - 1 \right]. \tag{3.36}$$

Alors V_d converge en $L^2(\Omega)$, lorsque $d \to \infty$, vers une variable aléatoire de Rosenblatt $Z_1^{(2,2H'-1)}$ où H' est donnée par (3.25). L'expression explicite de la constante $c_{q,H}$ est donnée dans [41].

De cet important théorème, ainsi que de l'expression 3.34 et 3.35, on pose :

$$q_0 := \min\{q_1, .., q_n\}. \tag{3.37}$$

Définition 87 *La matrice de Wishart renormalisée $\widetilde{W}_{n,d} = (\widetilde{W}i, j)_{1\leq i,j\leq n}$ est donnée par :*

$$\widetilde{W}^o_{i,j} = c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} W^o_{i,j} \, for \ 1 \leq i, j \leq n, \tag{3.38}$$

où $c_{q_0,H}$ est la constante apparaissant dans (3.36).

Remarque 56 *Le théorème 43 nous donne alors immédiatement le comportement limite des termes diagonaux de la matrice de Wishart renormalisée $\widetilde{W}_{n,d}$.*
En effet, pour tout $i = 1, \ldots, n$, tel que $q_i = q_0$, on a :

$$\widetilde{W}_{i,i} \underset{d\to\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}} Z_i^{(H,2H'-1)}, \tag{3.39}$$

Ainsi que pour $i = 1, \ldots, n$, tel que $q_i > q_0$,

$$\widetilde{W}_{i,i} \underset{d\to\infty}{\overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow}} 0, \tag{3.40}$$

De ce résultat, on en déduit alors que seuls les termes diagonaux de plus "bas dégrée chaotique" donnent une contribution non-nulle à la limite.

Il nous reste maintenant à évaluer les termes non-diagonaux, nous montrerons en particulier qu'ils convergent vers 0 en $L^2(\Omega)$.

Définition 88 *Soient $Z^{(q_1.H)}, Z^{(q_2,H)}$ deux processus d'Hermite de même indice de Hurst $H \geq \frac{1}{2}$ et d'ordre $q_1, q_2 \geq 2$.*
Sans perte de généralité, on suppose $q_1 \leq q_2$.
Considérons alors :

$$F_d(q_1, q_2) = d^{\frac{2-2H}{q_1}-1} \sum_{k=0}^{d-1} \left(Z^{(q_1,H)}_{k+1} - Z^{(q_1,H)}_{k} \right) \left(Z^{(q_2,H)}_{k+1} - Z^{(q_2,H)}_{k} \right). \tag{3.41}$$

Nous obtenons alors la proposition suivante qui confirme la convergence vers O en $L^2(\Omega)$.

Proposition 25

$$\mathbf{E}F_d(q_1,q_2)^2 \leq c \begin{cases} d^{\frac{4-4H}{q_1}-1} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \\ \log(d) d^{\frac{1}{q_1}-1} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ d^{(4H-4)(1-\frac{1}{q_1})} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4},1\right) \end{cases}, \tag{3.42}$$

En utilisant l'indépendance entre les mouvements browniens, on obtient alors :

$$\mathbf{E}|\widetilde{W}_{i,j}|^2 \leq c \begin{cases} d^{\frac{4-4H}{q_i}-1} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \\ \log(d) d^{\frac{1}{q_i}-1} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ d^{(4H-4)(1-\frac{1}{q_i})} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4},1\right). \end{cases},$$

En particulier, pour tout $i \neq j$ $\widetilde{W}_{i,j}$ converge vers 0 en $L^2(\Omega)$ lorsque $d \to \infty$.

Vitesse de convergence de V_d vers sa limite Rosenblatt

Pour pouvoir évaluer la distance Wasserstein matricielle, il faut à fortiori évaluer la vitesse de convergence de l'erreur définie comme suit :

$$Err = V_d - Z^{(2,2H'-1)}, \tag{3.43}$$

(en $L^2(\Omega)$) vers 0.
L'idée est alors de décomposer en chaos V_d (pour en particulier obtenir la décomposition chaotique de 3.43, pour pouvoir via l'isométrie de Wiener-Itô (puisque l'on s'intéresse à la convergence en $L^2(\Omega)$, analyser finement les contractions qui apparaissent naturellement via la formule produit.

Remarque 57 *Il faut cependant prendre des précautions, puisque le cas $q = 2$ est légérement différent des autres cas. L'idée étant que si on note S_{2q-2r} avec $r = 1\dots, q-2$, les intégrales multiples d'ordre $2q-2r$ apparaissent dans la décomposition chaotique de V_d uniquement lorsque $q \geq 3$.*

On analyse alors, par l'analyse des normes des contractions le terme *dominant* l'expansion chaotique de V_d. Pour $q \neq 2$, on a alors la vitesse de convergence suivante :

$$\mathbf{E}\left|V_d - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2 \leq c \begin{cases} d^{\frac{4-4H}{q}-1} \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \\ d^{-\frac{1}{q}} \log(d), \text{ if } H = \frac{3}{4} \\ d^{\frac{4H-4}{q}} \text{ if } H \in \left(\frac{3}{4},1\right) \end{cases}$$

et pour $q = 2$ et d assez grand,

$$\mathbf{E}\left|V_d - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2 \leq c \begin{cases} d^{1-2H} \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \\ d^{-\frac{1}{2}} \log(d), \text{ if } H = \frac{3}{4} \\ d^{2H-2} \text{ if } H \in \left(\frac{3}{4},1\right) \end{cases}$$

Définition 89 *Soit $\mathcal{R}_n^H = (R_{i,j}^H)_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice diagonale de taille $n \times n$ composée d'entrées indépendantes :*

$$R_{i,i}^H = Z_1^{(q_i,2H'-1,i)} 1_{q_i=q_0}. \tag{3.44}$$

Ceci est donc la **matrice aléatoire limite** de la matrice de Wishart renormalisée $\widetilde{W}_{n,d}^o$.

Il nous reste maintenant à évaluer la distance de Wasserstein matricielle entre la matrice de Wishart renormalisée $\widetilde{W}_{n,d}^o$ et $\mathcal{R}_n^H = (R_{i,j}^H)_{1\leq i,j\leq n}$. Pour ce faire,

1. - On utilise l'invariance en loi de la distance Wasserstein.

2. - Et le fait que la distance de Wasserstein entre deux matrices aléatoires est toujours plus petite ou égale à la distance en norme Hilbert-Schmidt entre ces deux matrices (la norme $\mathbb{E} \otimes Tr()$ sur $L^2(\Omega) \otimes M_n(\mathbb{R})$:

On obtient donc $\mathcal{A}_{n,d} = c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $A_{i,i}$ et $A_{i,j}$ données par (3.34) et (3.35).

$$d_W\left(\widetilde{W}_{n,d}^o, \mathcal{R}_n^H\right) = d_W\left(\mathcal{A}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}\left(c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} A_{i,j} - R_{i,j}^H\right)^2}$$

Maintenant, grâce aux estimations $\mathbf{E}\left(c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}-1} A_{i,i} - R_{i,i}^H\right)^2$ et pour $i \neq j$,

$$\mathbf{E}\left(c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} A_{i,j} - R_{i,j}^H\right)^2 = c_{q_0,H}^2 \mathbf{E}\left(d^{\frac{2-2H}{q_0}} A_{i,j}\right)^2 \leq c_{q_0,H}^2 \mathbf{E}\left(F_d(q_i, q_j)\right)^2$$

Nous aboutissons au théorème suivant :

Théorème 44 *Soit $\widetilde{W}_{n,d}^o$ la matrice de Wishart renormalisée (3.6), soit $\mathcal{R}_n^H$ sa matrice aléatoire limite lorsque $d \to \infty$. Alors pour tout $n \geq 1$, $q \geq 3$ et d assez grand :*

$$d_W\left(\widetilde{W}_{n,d}^o, \mathcal{R}_n^H\right) \leq C \begin{cases} n d^{\frac{2-2H}{q_0}-1/2} \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ n d^{\frac{1}{-2q_0}}, \text{ if } H = \frac{3}{4} \\ n d^{\frac{2H-2}{q_0}} \text{ if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}, \tag{3.45}$$

Pour $n \geq 1$, $q = 2$ et d assez grand :

$$d_W\left(\widetilde{W}_{n,d}^o, \mathcal{R}_n^H\right) \leq C \begin{cases} n d^{\frac{1}{2}-H} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ n\sqrt{\log(d)} d^{-\frac{1}{4}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ n d^{H-1} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}. \tag{3.46}$$

3.1.4 Partie 4 : Bornes de type Berry-Esseen pour des déterminants aléatoires

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'obtention d'estimation quantitative pour un théorème de la limite centrale pour des matrices aléatoires. En analysant finement une quantité T_N directement reliée à ce *CLT*, c'est-à-dire en séparant de cette quantité T_N, la partie dominante qui possède une expansion chaotique explicitable de la partie négligeable (en norme $L^1(\Omega)$), nous parvenons à obtenir une borne pour la distance Wasserstein pour ce théorème central limite. On va de manière cruciale, utiliser la méthode de Malliavin-Stein pour obtenir la vitesse de convergence de la partie dominante vers la loi normale, pour ensuite grâce à une inégalité triangulaire pour la distance Wasserstein obtenir finalement notre résultat.

Cadre de travail

Soit $(X_{k,l}, k \geq 1, l = 1, \ldots k)$ une famille de gaussiennes standards indépendantes. Nous supposerons que ces variables aléatoires s'écrivent comme une intégrale d'ordre 1 par rapport à un processus gaussien isonormal W sur un espace de Hilbert H :

$$X_{k,l} = W(h_{k,l}) = I_1(h_{k,l}) \text{ pour } k \geq 1, l = 1, \ldots, k,$$

de plus $(h_{k,l}, k \geq 1, l = 1, \ldots, k)$ constitue une famille orthogonale de H.

Définition 90 *Définissons pour tout $k \geq 1$ entier, les variables aléatoires suivantes :*

$$S_k = X_{k,1}^2 + \ldots + X_{k,k}^2, \tag{3.47}$$

et

$$C_k = \frac{S_k}{k}, \tag{3.48}$$

La variable aléatoire que l'on va étudier dans cette partie sera la suivante :

Définition 91 *Pour $N \geq 1$,*

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left(\sum_{k=1}^{N} \log(C_k) + \log(N)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left(\log\left(\prod_{k=1}^{N} S_k\right) - \log(N-1)!\right). \tag{3.49}$$

Cette variable aléatoire a été étudiée par de nombreux auteurs et il est bien connu (voir par exemple [162]) que celle-ci converge en loi vers une loi normale.

Proposition 26

$$T_N \to^{(d)} N(0,1) \textit{ lorsque } N \to \infty. \tag{3.50}$$

Notre objectif est donc d'évaluer la vitesse de convergence pour ce théorème central limite. On va donc pour pouvoir appliquer la méthode de Malliavin-Stein, décomposer T_N en une partie négligeable (au sens $L^1(\Omega)$) et une partie où l'expansion chaotique calculable explicitement. Cette dernière sera en fait la partie dominante.

Découpage de T_N

$$\begin{aligned}
T_N &= \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(N) + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|\leq\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(N) + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|\leq\frac{1}{2}} + \sum_{k=3}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right]\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(C_1)1_{|C_1-1|>\frac{1}{2}} + \log(C_2)1_{|C_2-1|>\frac{1}{2}}\right]\\
&= S_N + R_N, \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

avec

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(N) + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|\leq\frac{1}{2}}\right], \qquad (3.52)$$

et

$$R_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(C_1)1_{|C_1-1|>\frac{1}{2}} + \log(C_2)1_{|C_2-1|>\frac{1}{2}} + \sum_{k=3}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right]. \qquad (3.53)$$

La partie dominante

A l'aide de la formule produit et de l'indépendance des entrées (en particulier du fait que $X_{i,j}$ soient orthogonaux dans $L^2(\Omega)$), on remarque alors qu'on peut décomposer facilement le terme S_k en somme de chaos de Wiener.

$$\begin{aligned}
S_k &= I_1(h_{k,1})^2 + I_1(h_{k,2})^2 + \ldots I_1(h_{k,k})^2\\
&= I_2(h_{k,1}^{\otimes 2}) + \ldots I_2(h_{k,k}^{\otimes 2}) + k = I_2(g_k) + k,
\end{aligned}$$

avec pour tout $k \geq 1$, entier :

$$g_k = h_{k,1}^{\otimes 2} + \ldots h_{k,k}^{\otimes 2}. \qquad (3.54)$$

De la même manière on obtient l'expansion chaotique de C_k.

$$C_k = \frac{I_2(g_k)}{k} + 1. \qquad (3.55)$$

On va alors introduire alors un nouveau découpage pour pouvoir analyser finement S_N, en utilisant la formule de Taylor Lagrange pour le logarithme :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta_x x)^3}$$

pour $x \in (-1, 1)$ avec $\theta_x \in (0, 1)$ (dépendant de x).

On obtient alors une expansion de S_N en cinq termes dont seul le premier donne une contribution non-négligeable à la limite ce terme est $S_{N,1}$

$$S_{N,1} = \frac{1}{\sqrt{2log(N)}} \sum_{k=1}^{N} (C_k - 1), \tag{3.56}$$

que l'on va alors analyser par le calcul de Malliavin. On aboutit alors au théorème suivant :

Théorème 45 *Soit $S_{N,1}$ donné par (3.56).*

$$d(S_{N,1}, N(0,1)) \leq C \frac{1}{\sqrt{\log(N)}}.$$

On obtient alors qu'en norme $L^1(\Omega)$, les autres termes ont la même vitesse de convergence vers 0.

$$\mathbb{E}|S_{N,j}| \leq C \frac{1}{\sqrt{\log(N)}}, \tag{3.57}$$

On peut alors combiner les précédents résultats pour aboutir à l'estimation finale :

Théorème 46 *Considérons la suite de variables aléatoires $(T_N, N \geq 1)$ donnée par (1.42). Alors $T_N \to^{(d)} N(0,1)$ et pour N assez grand*

$$d_W(T_N, N(0,1)) \leq C \frac{1}{\sqrt{\log(N)}}. \tag{3.58}$$

Applications aux déterminants aléatoires de matrice de Wishart Considérons tout d'abord une matrice aléatoire $\mathcal{X}_n = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de taille $n \times n$ où X_j représente le j−ème vecteur colonne, c'est-à-dire que . $X_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{n,j})$ pour $j = 1, ..., n$.

Faisons maintenant l'hypothèse que les colonnes sont indépendantes, i.e $(X_j, j = 1, ..., n)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants, qui sont de plus des vecteurs gaussiens centrés de même matrice de covariance Σ supposée inversible :

$$X_j \sim N(0, \Sigma), \tag{3.59}$$

Définition 92 *On note alors $\mathcal{W}_n$ la matrice de Wishart associée à $\mathcal{X}_{n,d}$,*

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{X}_n \mathcal{X}_n^T, \tag{3.60}$$

En utilisant le théorème précédant 46, on obtient alors la vitesse de convergence en distance 1-Wasserstein.

Theorem 1 *Pour tout $N \geq 1$, définissons*

$$U_N = \frac{1}{\sqrt{2\log N}} \left[\log(\det \mathcal{W}_N) - \log(\det \Sigma) - \log(N-1)!\right]. \tag{3.61}$$

Alors la suite $(U_N)_{N\geq 1}$ converge en loi vers la loi normale. De plus pour N assez grand

$$d_W(U_N, N(0,1)) \leq C \frac{1}{\sqrt{\log N}}.$$

3.2 Partie 5 : Du processus de Hermite généralisé au processus de Orstein-Uhlenbeck rugueux

Notre volonté est inspirée des considérations de l'article de Gatheral, Jaisson et Rosenbaum [78]. En effet, dans ce travail, les auteurs montrent tout d'abord que la variance des indices S&P 500, DAX 30, Nikkei 225, etc ... est rugueuse : c'est à dire que pour ces marchés, il semble beaucoup plus approprié de modéliser la log-volatilité par un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst très petit, $H \sim 0.1$. Il est cependant fait mention que pour certaines classes d'actifs, en particulier pour les marchés des matières premières (pétrole, or...) ainsi que pour des crypto-monnaies (Bitcoin), le caractère gaussien ne semble pas approprié car les queues de distributions de la log-volatilité semble plus *lourdes*. Comme nous savons que les processus d'Hermite d'ordre plus grand que 1, possèdent ces propriétés d'auto-similarité, de queues lourdes, il semble donc intéressant de proposer un modèle de type Ornstein-Uhlenbeck par rapport à ce type de bruit. Cependant, on doit pour garder le caractère rugueux, c'est-à-dire, introduire une modification du processus d'Hermite : le processus d'*Hermite généralisé*, qui possède la propriété d'avoir un indice d'auto-similarité dans tout l'intervalle $[0, 1]$. Nous proposons donc un processus rugueux non-gaussien : le processus de Orstein-Uhlenbeck rugueux, nous proposons deux constructions d'intégrale de Wiener par rapport aux processus d'*Hermite généralisé* : une intégrale de type *Riemann-Stieltjes* et une intégrale de type *Wiener*. Nous montrons que sous la restriction $\beta > 0$, ces deux dernières coïncident et nous analysons le processus de Ornstein-Uhlenbeck rugueux. Nous montrons, lorsque le drift de ce processus tend vers zéro dans un sens, le processus d'Orstein-Uhlenbeck rugueux converge dans un sens à définir vers le processus d'*Hermite généralisé* lui-même.

On s'interessera donc dans ce chapitre au processus de Hermite généralisé définit de la façon suivante :

Définition 93 (Processus de Hermite généralisé) *On note $\left(X_t^{(q,H,\beta)}\right)_{t\geq 0}$ le processus d'Hermite généralisé :*

$$X_t^{(q,H,\beta)} = d(q,H,\beta) \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}} g_t^{\beta}(u)(u-y_1)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} \dots (u-y_q)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} du \right] dB(y_1)\dots dB(y_q), \quad (3.62)$$

pour tout $t \geq 0$ où la fonction g_t^{β} est tel que :

$$g_t^{\beta}(u) = (t-u)_+^{\beta} - (-u)_+^{\beta} \text{ if } \beta \neq 0, \quad (3.63)$$

et $g_t^{\beta}(u) = \mathbf{1}_{[0,t]}(u)$ if $\beta = 0$.

De la même manière que pour le processus d'Hermite, on choisit $d(q,H,\beta)$ telle qu'au temps $t = 1$, la variable aléatoire $X_1^{(q,H,\beta)}$, soit de variance 1, c'est-à-dire : $\mathbf{E}(X_1^{(q,H,\beta)})^2 = 1$.

On représente donc, comme pour le processus d'Hermite $X_t^{(q,H,\beta)}$ sous la forme d'une intégrale multiple d'ordre q par rapport à mouvement brownien :

$$X_t^{(q,H,\beta)} = I_q(L_t^{\beta}),$$

de noyau L_t^{β} :

$$L_t^{\beta}(y_1, ..., y_q) = d(q, H, \beta) \int_{\mathbb{R}} g_t^{\beta}(u)(u - y_1)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} \dots (u - y_q)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})} du, \tag{3.64}$$

pour tout $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{R}$.

Pour pouvoir donner cependant un sens à cette intégrale multiple par rapport au brownien, il faut pouvoir avoir un noyau dans $L^2(\mathbb{R}^q)$. Les conditions nécessaires ont été étudiées par Bai et Taqqu (voir la proposition 3.25 dans [9]) :

Proposition 27 *Pour tout $t \geq 0$, $L_t^{\beta} \in L^2(\mathbb{R}^q)$ si :*

$$0 < H + \beta < 1 \ et \ H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{3.65}$$

On peut maintenant énoncer des propriétés fondamentales du processus d'Hermite généralisé (sous la restriction des hypothèses précédentes) :

Proposition 28 *Le processus d'Hermite généralisé vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. *Le processus de Hermite généralisé est auto-similaire d'ordre $H + \beta$ et à accroissements stationnaires. En particulier sa fonction de covariance s'écrit*

$$\mathbb{E}[X_t^{(q,H,\beta)} X_s^{(q,H,\beta)}] = \frac{1}{2}\left(t^{2(H+\beta)} + s^{2(H+\beta)} - |t - s|^{2(H+\beta)}\right),$$

qui coïncide donc avec la fonction de covariance $R^{H+\beta}$, d'un fBm d'indice de Hurst $H + B$.

2. *Le processus d'Hermite généralisé est auto-similaire d'indice d'auto-similarité $H+B$ pouvant appartenir à tout l'intervalle ouvert* $(0, 1)$.

3. *Hölder continue d'ordre δ pour tout $\delta \in (0, H + \beta)$*

Remarque 58 *On peut alors montrer, que le processus d'Hermite généralisé peut se représenter comme une intégrale de Wiener par rapport au processus d'Hermite.*

Proposition 29 *Soit $X^{(q,H,\beta)}$ donné par (3.62) et $Z^{(q,H)}$ le processus de Hermite. Alors pour tout $t \geq 0$*

$$X_t^{(q,H,\beta)} = \frac{d(q, H, \beta)}{d(q, H)} \int_{\mathbb{R}} g_t^{\beta}(u) dZ_u^{(q,H)}.$$

Avant de pouvoir définir le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé à ce bruit non-gaussien, on va présenter (puisque c'est nécessaire pour pouvoir donner un sens à la solution) deux types d'intégrales stochastiques : *Riemann-Stieltjes et Wiener* par rapport à celui-ci. On verra alors que sous une hypothèse sur β, on pourra montrer que les deux notions coïncident.

Une intégrale de Wiener par rapport aux processus d'Hermite généralisé

Une première approche est de construire une intégrale de Wiener par rapport à ce processus. On adopte donc la stratégie évoquée en chapitre 2 pour le mouvement Browien fractionnaire et le processus d'Hermite.

On doit donc pouvoir au départ intégrer des fonctions élémentaires :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i 1_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}, N \geq 1$ et $0 < t_1 < \ldots t_N$. On pose donc pour tout fonctions élémentaires, l'intégrale de Wiener par rapport au processus d'Hermite généralisé :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) dX_u^{(q,H,\beta)} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \left(X_{t_{i+1}}^{(q,H,\beta)} - X_{t_i}^{(q,H,\beta)} \right).$$

On arrive alors à l'égalité suivante en utilisant la linéarité de l'intégrale multiple :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} f(u) dX_u^{(q,H,\beta)} \\
= \quad & d(q,H,\beta) \int_{\mathbb{R}^q} dB(y_1 \ldots dB(y_q) \left(\int_{\mathbb{R}} du \beta \int_{\mathbb{R}} f(s)(s-u)_+^{\beta-1} ds \right) \prod_{j=1}^{q} (u-y_j)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}
\end{aligned}$$

,

Cependant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(s)(s-u)_+^{\beta-1} ds$ existe et est finie **si =** $\beta > 0$. On reconnaît ici un opérateur intégral bien connu : *l'intégrale de Riemann-Liouville*, qui est généralement noté $\mathcal{I}_-^{\beta}(f)$. Pour pouvoir définir une intégrale de Wiener on va se restreindre au cas $\beta > 0$.
On peut montrer que les deux intégrales coïncident de la même manière que dans l'article [37] pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.

Remarque 59 *On peut aussi considérer une intégrale de Riemann-Stieljes, sans restriction sur β car le processus d'Hermite généralisé est Hölder-continu d'ordre $\delta \in (0, H+\beta)$. Soit f une fonction à variation bornée définie sur $[a,b]$ $(-\infty \leq a < b < \infty)$ telle que l'intégrale de Riemann suivante*

$$\int_a^b X_u^{(q,H,\beta)} df(u) \text{ existe },\tag{3.66}$$

et

$$\lim_{u \to a} f(u) X_u^{(q,H,\beta)} := L_a \text{ existe.}\tag{3.67}$$

Alors l'intégrale de Riemann-Stieltjes de f par rapport à $X^{(q,H,\beta)}$ notée

$$\int_a^b f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)}$$

existe et on a l'intégration par parties suivante

$$\int_a^b f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta} = f(b) X_b^{(q,H,\beta)} - L_a - \int_a^b X_u^{(q,H,\beta)} df(u).$$

Remarque 60 *Pour $\beta > 0$ l'intégrale de Wierner et de Riemann-Stieltjes coïncident. Voir la proposition 12 du chapitre 8.*

Le processus d'Hermite Ornstein-Uhlenbeck généralisé

Nous allons donc étudier par la suite le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé, que l'on appellera processus *GHOU* en abrégé.

$$dY_t = -\alpha(Y_t - m)dt + \sigma dX_t^{(q,H,\beta)}, \quad t \geq 0, \tag{3.68}$$

avec $Y_0 \in L^0(\mathbb{R})$, $\alpha, \sigma > 0$, et $m \in \mathbb{R}$. qui est donc défini au sens de Riemann-Stieljes :

$$Y_t = Y_0 e^{-\alpha t} + m(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d_{RS} X_s^{(q,H,\beta)}.$$

On peut alors en déduire les propriétés suivantes pour le processus *GHOU*.

Proposition 30
- *lorsque le terme de retour à la moyenne (mean-reversion) m est nul, le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est stationnaire,*
- *Soit $t > 0$. Alors $Cov(Y_{t+h}, Y_t) \underset{h\to\infty}{\sim} h^{2(H+\beta)}$.*
- *$(Y_t)_{t\geq 0}$ est Hölder-continu d'ordre δ pour tout $\delta \in (0, H + \beta)$.*

On peut alors montrer une version faible de la proposition 1.36 de [78] sur le comportement local du processus *GHOU*, on montre que si le drift tend à être nul, alors celui-ci est "localement" un processus d'Hermite généralisé.

Proposition 31 *Pour tout $T \geq 0$ et $p \geq 1$*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E} \left| Y_t - Y_0 - \sigma X_t^{(q,H,\beta)} \right|^p \underset{\alpha\to 0}{\to} 0.$$

3.3 Partie 6 : Approximations multidimensionnelle semicirculaire sur l'espace de Wigner

L'intégrale multiple de Wigner-Itô et la variable semicirculaire jouant le rôle analogue de la gaussienne et de l'intégrale multiple de Wiener-Itô, nous nous intéressons ici à obtenir une version quantitative multidimensionnelle de l'estimation donnée par Cébron 38. En se basant sur la construction d'un noyau de Stein astucieux étudié par Cébron (voir corollaire 3.10 de [35]), et en introduisant un profond travail de Dabrowski dans [50] pour obtenir des inégalités de transport libre. Nous parvenons à obtenir une estimation quantitative pour l'analogue libre de la distance de Wasserstein (associé au coût quadratique) entre un vecteur composé par des intégrales multiples auto-adjointes de Wigner-Itô et une famille de semicirculaires de covariance non-dégénérée.

La partie la plus importante étant surement l'obtention de l'inégalité *WS*, on va en proposer deux versions, la moins naturelle, conduit à une approximation sur l'espace de Wigner avec une borne plus petite (la constante apparaissant devant une quantité $M(F)$ faisant intervenir les deuxième et quatrième cumulants du vecteur), cette notion différente de discrépance ne fait pas intervenir la discrépance par rapport à ce potentiel comme elle a été définit dans les sections précédentes. En effet, dans ce cas cas là, il est beaucoup plus utile de comprendre la discrépance de Stein d'une autre manière.

Une fois cette inégalité obtenue, il reste à évaluer la discrépance d'un noyau de Stein libre construit de manière analogue à celui de Cébron et de prouver qu'il est ensuite majorée par une quantité dépéndant du quatrième cumulant libre de chaque composante. Cette partie est purement technique et repose sur des estimations de contractions et notamment sur des contreparties libres des inégalités de la section de [129].

Dans un second temps, ayant pour but d'obtenir des estimations de Breuer-Major multivarié pour le mouvement brownien fractionnaire non-commutatif *ncfBm*. On présente aussi pour simplifier l'exposition, deux variantes de démonstration, l'une reposant sur l'expression du $ncfBm$ comme une intégrale de Wigner par rapport à un mouvement brownien libre. L'autre utilisant une définition des opérateurs de Malliavin par rapport au *ncfBm*, qui est cependant très peu utilisée, puisque que la plupart des travaux se concentrent sur le fait que le processus semicirculaire sur lesquelles sont construits les intégrales multiples et les opérateurs de Malliavin est un mouvement brownien libre.

On obtient ensuite une estimation de la discrépance libre entre une famille de "*q-semicirculaires*" de covariance positive et le potentiel semicirculaire associé à la famille semicirculaire de cette même covariance V_C. On généralise ainsi sans trop de difficulté, une estimation totalement similaire à celle obtenue précédemment par Fathi et Nelson dans [70].

Stratégie :

Il faut d'abord identifier le potentiel associé à une famille semiciruculaire de matrice de covariance $C > 0$ (on ne s'intéressera qu'à ce cas là). Nous devons donc trouver l'équation de Schinwger-Dyson qui caractérise la loi de cet État de Gibbs. On remarque alors que pour tout $P \in \mathbb{P}^n$:

$$\langle C^{-1}X, P(X)\rangle_2 = \langle (1 \otimes 1) \otimes I_n, [\mathcal{J}P](X)\rangle_{HS}, \tag{3.69}$$

si et seulement si X est une famille semicirculaire de covariance C.

Une fois, cette observation établie, il est donc naturel de considérer la dynamique de Langevin libre suivante :

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t C^{-1}X_t dt + S_t,$$

où $(S_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien libre $n-$dimensionnel.

L'idée qui est entièrement dû à Dabrowski (voir section 6.2 in [50]), montre que l'on peut estimer la distance Wasserstein W_2 libre associée au coût quadratique entre deux points proches de la diffusion, i.e pour $t \geq s$ (proches) :

Théorème 47 *(Dabrowski, [50]) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la diffusion de Langevin libre précédente 3.3, alors :*

$$d_W(X_t, X_s) \leq \frac{t-s}{2} \|C^{-1}X_s - \xi_s\|_2 + o(t-s). \tag{3.70}$$

Remarque 61 *Ici, le théorème de Dabrowski est appliqué pour une forme très simple pour la diffusion (i.e drift linéaire), Dabrowski montre dans [50], que l'on peut obtenir une estimation similaire si le drift de la diffusion satisfait certaines propriétés (voir section 9.4 de 9 pour plus de détails).*

On peut alors via une simple inégalité triangulaire pour la distance Wasserstein libre (la continuité de l'information de Fisher relative au potentiel n'étant pas nécessaire ici) déduire que :

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}} \frac{1}{\epsilon} |d_W(X_{t+\epsilon}, S) - d_W(X_t, S)| \leq \frac{1}{2} \Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.71}$$

et donc obtenir

Théorème 48

$$\frac{d^+}{dt} d_W(X_t, S_C) \leq \frac{1}{2} \Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.72}$$

On a donc ici une inégalité similaire à celle d'Otto-Villani (voir théorème 2.49 du chapitre 2). Notre intérêt est maintenant de déduire une inégalité pour l'information de Fisher relative à ce potentiel le long de la dynamique de Langevin libre précédente, par une quantité mettant en jeu la discrépance de Stein relative à ce potentiel.

On montre alors via une simple égalité en loi entre le processus de la dynamique précedente :

Lemme 10 *Soit X, un $n-$uplet de variables aléatoires non-commutatives auto-adjointes et S, une famille semicirculaire de covariance $C > 0$, supposées libres.*
On note pour tout $t > 0$, $X_t = e^{-tC^{-1}} X_0 + (I_n - e^{-2tC^{-1}})^{\frac{1}{2}} S$, et on a alors :

$$\Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}}{\sqrt{1 - e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}}} \|C^{-1}\|_{op}^{\frac{1}{2}} \Sigma(X|V_C), \tag{3.73}$$

On combine ensuite toutes ces inégalités pour aboutir à l'inégalité WS (Wasserstein-free Stein discrepancy)

Proposition 32 *Pour tout $n-$uplet de variables non-commutatives (on ne doit pas supposer en plus que l'information de Fisher libre relative à ce potentiel est finie.)*

$$d_W(X, S) \leq \|C\|_{op} \|C^{-1}\|_{op}^{\frac{1}{2}} \Sigma(X|V_C), \tag{3.74}$$

Il s'avère que la borne précédente n'est pas optimale pour l'approximation semicirculaire sur l'espace de Wigner, en effet on peut montrer que :

$$d_W(X,S) \leq \|C\|_{op}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Sigma}(X|V_C), \tag{3.75}$$

avec $\widetilde{\Sigma}(X|V_C)$, la discrépance modifiée. Cette quantité apparaît naturellement lorsque l'on considère non pas la diffusion libre précédente, mais plutôt :

$$X_t = e^{-2t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}C^{\frac{1}{2}}S', \tag{3.76}$$

(avec S' un système semicirculaire standard), qui est bien sûr, une autre interpolation entre X et S.

Il ne nous reste donc qu'à construire un noyau de Stein libre relatif à ce potentiel pour un $n-$uplet d'intégrales multiples de Wigner-Itô auto-adjointes, pour ensuite évaluer la discrépance associée et en particulier obtenir une borne en terme des cumulants d'ordre 2 et 4. On montre alors que la matrice de Malliavin-Stein non commutative suivante nous permet de construire un tel noyau de Stein libre :

Définition 94 *On définit la matrice de Malliavin-Stein non-commutative comme pour $F = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathcal{P}_d$.*

$$\Gamma(F) = \left(\int_{\mathbb{R}_+} (id \otimes \tau(\nabla_t F_i)).(\nabla_t F_j)^* dt\right)_{i,j=1}^n \in M_n(\mathcal{P}_{2d} \otimes \mathcal{P}_{2d}), \tag{3.77}$$

où $d = max(q_i)$ l'ordre maximal des chaos considérés.

On remarque alors que A est un noyau de Stein libre relatif au potentiel V_C pour de telles intégrales-multiples de Wigner-Itô :

Théorème 49

$$A = \left((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes C^{-1}\right).\Gamma(F),$$

est un noyau de Stein libre pour $F = (F_1, \ldots, F_n)$ par rapport au potentiel V_C.

On est donc ramené à établir des analogues libres des estimations de la section 6.2 page 104 de [129] :

Lemme 11 *Soient $F = I_p(f) \in (\mathcal{A},\tau)$ et $G = I_q(g) \in (\mathcal{A},\tau)$ avec $f \in L^2(\mathbb{R}_+^p)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ des fonctions mirror-symmetric. Soit $a \in \mathbb{R}$.*

Si $p = q$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}_+} (id \otimes \tau)(\nabla_t I_p(f)).(\nabla_t I_q(g))^* dt - a.1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}\right\|^2_{L^2(\mathcal{A},\tau)\otimes L^2(\mathcal{A},\tau)} &\leq (a - \langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^p)})^2 \\ &+ \left(\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{l=0}^{m-1} min\left(A_{f,g}^{p,l}, A_{g,f}^{p+1,m}\right)\right) \\ &+ \left(\sum_{l=0}^{p-2} min(A_{f,g}^{p,l}, A_{g,f}^{p+1,p})\right),\end{aligned}$$

Si $p < q$, on a alors :

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}_+} ((id \otimes \tau)(\nabla_t I_p(f)).(\nabla_t I_q(g))^* - a.1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}\right\|^2_{L^2(\mathcal{A},\tau)\otimes L^2(\mathcal{A},\tau)} &\leq a^2 + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} \|g \overset{q-p}{\frown} g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p})} \\ &+ \left(\sum_{m=1, m\neq p}^{q} \sum_{l=0}^{p\wedge m-1} min\left(A_{f,g}^{p,l}, A_{g,f}^{q+1,m}\right)\right) \\ &+ \left(\sum_{l=0}^{p-2} min\left(A_{f,g}^{p,l}, A_{g,f}^{q+1,p}\right)\right),\end{aligned}$$

Où l'on a défini pour tout $p, q \geq 1$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^p)$ $g \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ et pour chaque $l \leq p \wedge q$, la quantité :

$$A_{f,g}^{p,l} = \left\| f \overset{p-l-1}{\frown} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2l+2})} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)}, \tag{3.78}$$

En combinant toutes ces estimations, on arrive alors au résultat suivant :

Théorème 50 *Soit $F = (F_1, ..., F_n) = (I_{q_1}(f_1), ..., I_{q_n}(f_n))$ auto-adjoints dans $(\mathcal{A}, \tau)$, avec $f_i \in L^2(\mathbb{R}_+^{q_i})$. Soit $C > 0$ une matrice symétrique définie positive $\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $C_{i,j} = \tau(F_i F_j)$*

Posons alors :

$$M(F) = \psi(\tau(F_1^4) - 2\tau(F_1^2)^2, \tau(F_1^2), ..., \tau(F_n^4) - 2\tau(F_n^2)^2, \tau(F_n^2)), \tag{3.79}$$

avec $\psi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^d \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\psi(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) = &\sum_{j,k=1}^{n} \mathbb{1}_{q_k = q_j} q_k^{\frac{3}{4}} min\left(|x_k|^{\frac{1}{4}} y_j^{\frac{1}{2}}, |x_j|^{\frac{1}{4}} y_k^{\frac{1}{2}}\right) \\ &+ \sum_{j,k=1}^{n} \mathbb{1}_{q_k \neq q_j} (q_k \vee q_j)^{\frac{3}{4}} min\left(|x_k|^{\frac{1}{4}} y_j^{\frac{1}{2}}, |x_j|^{\frac{1}{4}} x_k^{\frac{1}{2}}\right),\end{aligned} \tag{3.80}$$

On a alors l'estimation suivante :

$$d_W(F, S) \leq \|C\|_{op} \|C^{-1}\|_{op}^{\frac{3}{2}} M(F), \tag{3.81}$$

On peut alors utiliser ce résultat pour déduire une vitesse de convergence dans le CLT de Breueur-Major multivarié pour le mouvmement brownien fractionnaire.

Théorème 51 *Soit $H < 1 - \frac{1}{2q}$, alors pour tout entier fixé $d \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_d$, il existe une constante dépendante seulement de d, q et H et $(t_0, t_1, ..., t_d)$, et non de n) telle que pour tout $n \geq 1$:*

$$d_W\left(\frac{V_n(t_i) - V_n(t_{i-1})}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}, S\right) \leq c \times \begin{cases} n^{-\frac{1}{4}} \text{ if } H \in (0, \frac{1}{2}] \\ n^{\frac{H-1}{2}}, \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2q-3}{2q-2}\right] \\ n^{\frac{2qH-2q+1}{4}} \text{ if } H \in \left(\frac{2q-3}{2q-2}, \frac{2q-1}{2q}\right) \end{cases}, \tag{3.82}$$

Remarque 62 *Pour parvenir à ce résultat, on a deux possibilités : la première consiste à écrire le ncfBm comme une intégrale de Wigner par rapport à un mouvement brownien libre et d'estimer ensuite les contractions,*

Première partie

Fluctuations des matrices aléatoires via la méthode de Malliavin-Stein

Chapitre 4

Limiting behavior of large correlated Wishart matrices with chaotic entries

This article is published on *Bernoulli* 27(2) : 1077-1102 (May 2021).
DOI : 10.3150/20-BEJ1266.

Joint work with Solesne Bourguin and Ciprian Tudor

Abstract We study the fluctuations, as $d, n \to \infty$, of the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d} = \frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T$ associated to a $n \times d$ random matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ with non-Gaussian entries. We analyze the limiting behavior in distribution of $\mathcal{W}_{n,d}$ in two situations : when the entries of $\mathcal{X}_{n,d}$ are independent elements of a Wiener chaos of arbitrary order and when the entries are partially correlated and belong to the second Wiener chaos. In the first case, we show that the (suitably normalized) Wishart matrix converges in distribution to a Gaussian matrix while in the correlated case, we obtain its convergence in law to a diagonal non-Gaussian matrix. In both cases, we derive the rate of convergence in the Wasserstein distance via Malliavin calculus and analysis on Wiener space.

4.1 Introduction

Random matrix theory plays an important role in various areas of applications, including statistical physics, engineering sciences, signal processing or mathematical finance. The various tools that can be used to study random matrices come from different branches of mathematics, such as combinatorics, non-commutative algebra, geometry, spectral analysis and, of course, probability and statistics. We focus on a special type of random matrices, called *Wishart matrices*, which have been introduced in [197]. Given a $n \times d$ random matrix $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le d}$ with real entries, its associated Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d} = (W_{ij})_{1\le i,j\le n}$ is the symmetric $n \times n$ matrix $\mathcal{W}_{n,d} = \frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T$. The class of Wishart matrices constitutes a special class of sample covariance matrices with applications in multivariate analysis or statistical theory, see e.g., the surveys [22, 98, 160]. The limiting behavior of this type of random matrices, as d goes to infinity and n is fixed (which is referred to as the one-dimensional regime) or when both n, d tend to infinity (usually called the high dimensional regime), has been studied by many authors. The starting point of this analysis is the situation where the entries of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are i.i.d. and n is fixed. In this case, the Wishart matrix associated to $\mathcal{X}_{n,d}$ converges almost surely, as $d \to \infty$, to the $n \times n$ identity matrix $\mathcal{I}_n$ by the strong law of large numbers and the renormalized Wishart matrix $\sqrt{d}(\mathcal{W}_{n,d} - \mathcal{I}_n)$ satisfies a Central Limit Theorem (CLT in the sequel). Later, due to the increasing need of handling large data sets, several authors investigated the high dimensional regime, when the matrix size n also goes to infinity. Different strategies have been considered in this case. A classical approach is based on the study of the empirical spectral distribution and of the eigenvalues of $\mathcal{W}_{n,d}$. It is well known that if $n, d \to \infty$ such that $n/d \to c \in (0, \infty)$, then the empirical spectral distribution of the Wishart matrix converges weakly to the so-called Marchenko-Pastur distribution (see [115]). A more recent approach consists in analyzing the distance in distribution (for example, under the total variation distance or Wasserstein distance) between the renormalized Wishart matrix $\sqrt{d}(\mathcal{W}_{n,d} - \mathcal{I}_n)$ and its limiting distribution when d and n are large. This approach has been used in, e.g., [32, 33, 96, 138, 157]. It has been discovered than the distance (in the Wasserstein or total variation sense) between the distribution of the renormalized Wishart matrix and its limiting distribution (when this limit is Gaussian, which happens in all the cases except when the entries have a strong enough correlation, see [138]), as $n, d \to \infty$, is of order less than n^3/d. In the above references, several situations have been studied : the entries of the initial matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are independent and Gaussian (see [32, 96, 157]), the entries are independent and not necessarily Gaussian (they are supposed to have a log-concave distribution in [32]) or the entries are Gaussian and partially correlated (see [138]). While in most references the proofs are based on entropy or moments analysis, in [138] the authors use the recent Stein-Malliavin calculus (see [129]).

Our purpose is to use the techniques of Malliavin calculus and analysis on Wiener space in order to generalize the above results in two directions. First, we start with an $n \times d$ matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ whose entries are independent (not necessarily identically distributed) elements of a Wiener chaos of arbitrary order. In this situation we obtain the convergence in law of the corresponding renormalized Wishart matrix to the GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) matrix $\mathcal{Z}_n$ given by 4.14 and we show that, when $d, n \to \infty$, the distance between the renormalized Wishart matrix and the GOE matrix is of order less that n^3/d. This generalizes the results of [32,33,96,157]. More precisely, we prove the following result.

Theorem 2 *Consider the renormalized Wishart matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ with entries given by 4.13. Then for every $n \geq 1$, $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ converges in distribution componentwise, as $d \to \infty$, to the matrix $\mathcal{Z}_n$ given by 4.14. Moreover, for every $n, d \geq 1$, there exists a positive constant C such that*

$$d_W(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq C \sqrt{\frac{n^3}{d}}, \tag{4.1}$$

where d_W denotes the Wasserstein distance defined in Section 4.2.1.

Another direction of study is to start with a matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ whose elements are non-Gaussian and partially correlated. As pointed out in e.g. [33], obtaining an approximation result without the assumption of independence represents a natural question which has been a subject of wide interest. We will assume that these entries are elements of the second Wiener chaos, correlated on the same row, with the correlation being given by the increments of the Rosenblatt process (see Section 4.4 for the definition and basic properties of this stochastic process). Notice that the correlation structure of the Rosenblatt process is the same as the one of the fractional Brownian motion (fBm). In this sense, the correlation on the rows of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ considered in our work is the same as in [138] (where the entries are increments of the fBm). Nevertheless, the non-Gaussian character of the entries brings more complexity and leads to a different behavior of the associated Wishart matrix. Actually, we show that the renormalized Wishart matrix converges to a diagonal matrix whose diagonal entries are random variables distributed according to the Rosenblatt distribution and we are also able to quantify the distance associated to this limit theorem. Our result can be stated as follows.

Theorem 3 *Let $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ be the renormalized Wishart matrix 3.38 and let $\mathcal{R}_n^H$ be the diagonal matrix with entries given by 4.42. Then, for every $n \geq 1$, the random matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ converges componentwise in distribution, as $d \to \infty$, to the matrix $\mathcal{R}_n^H$. Moreover, as $n, d \geq 1$, there exists a positive constant C such that*

$$d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right) \leq C \begin{cases} nd^{\frac{1}{2}-H} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ n\sqrt{\log(d)}d^{-\frac{1}{4}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ nd^{H-1} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases},$$

where d_W denotes the Wasserstein distance defined in Section 4.2.1.

In the case of independent entries, the proof of our main result is based on the Stein-Malliavin calculus and the characterization of independent random variables in Wiener chaos while when the entries of the initial matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are correlated, we use the properties of random variables in the second Wiener chaos and in particular the behavior of the increments of the Rosenblatt process.

The paper is organized as follows. In Section 2, we recall several facts related to the distance between the probability distributions of random matrices and random vectors, as well as the basics of Wiener space analysis and Malliavin calculus. In Section 3, we analyze the fluctuations of the Wishart matrix constructed from a matrix with independent entries in an arbitrary Wiener chaos, while in Section 4 we treat the situation where the elements of the starting matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are non-Gaussian and partially correlated.

4.2 Preliminaries

4.2.1 Distances between random matrices

We will use the Wasserstein distance between two random matrices taking values in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, which denotes the space of $n \times n$ real matrices. Given two $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$-valued random matrices $\mathcal{X}$ and

$\mathcal{Y}$, the Wasserstein distance between them is given by

$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sup_{\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} |\mathbb{E}(g(\mathcal{X})) - \mathbb{E}(g(\mathcal{Y}))|,$$

where the Lipschitz norm $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ of $g\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{A \neq B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \frac{|g(A) - g(B)|}{\|A - B\|_{\mathrm{HS}}},$$

with $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ denoting the Hilbert-Schmidt norm on $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

With this definition at hand, we recall the definition of the notion of ϕ-closeness between random matrices.

Definition 8 *For every $n \geq 1$, let $\{\mathcal{A}_{n,d}\colon d \geq 1\}$ and $\{\mathcal{B}_{n,d}\colon d \geq 1\}$ be two families of $n \times n$ random matrices. Let $\phi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ be given. Then, $\mathcal{A}_{n,d}$ is said to be ϕ-close to $\mathcal{B}_{n,d}$ if $d_W(\mathcal{A}_{n,d}, \mathcal{B}_{n,d})$ converges to zero as $n, d \to \infty$ and $\phi(n, d) \to 0$.*

We will also make use of the Wasserstein distance between random vectors, defined analogously as in the matrix case. Namely, if X, Y are two n-dimensional random vectors, then the Wasserstein distance between them is defined to be

$$d_W(X, Y) = \sup_{\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} |\mathbb{E}(g(X)) - \mathbb{E}(g(Y))|, \tag{4.2}$$

where the Lipschitz norm $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ of $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|g(x) - g(y)|}{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}},$$

with $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ denoting the Euclidean norm on $\mathbb{R}^n$.

If $\mathcal{X} = \left(X_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ is an $n \times n$ symmetric random matrix, we associate to it its "half-vector" defined to be the $n(n+1)/2$-dimensional random vector

$$\mathcal{X}^{\mathrm{half}} = (X_{11}, X_{12} \ldots, X_{1n}, X_{22}, X_{23}, \ldots, X_{2n}, \ldots, X_{nn}). \tag{4.3}$$

It turns out that, in the case of two symmetric matrices, the Wasserstein distance between said matrices can be bounded from above by a constant multiple of the Wasserstein distance between their associated half-vectors. More specifically, we have the following lemma (see [138, Lemma 2.2]).

Lemma 1 *Let $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ be two symmetric random matrices with values in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Then*

$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leq \sqrt{2} d_W(\mathcal{X}^{\mathrm{half}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{half}}),$$

where $\mathcal{X}^{\mathrm{half}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{half}}$ are the associated half-vectors defined in 4.3.

4.2.2 Elements of Malliavin calculus

We briefly describe the main tools from analysis on Wiener space that we will need in this paper. For a complete treatment of this topic, we refer the reader to the monographs [139] or [129].

Let $\mathfrak{H}$ be a real separable Hilbert space and $\{W(h)\colon h \in \mathfrak{H}\}$ an isonormal Gaussian process indexed by it, that is, a centered Gaussian family of random variables such that $\mathbb{E}\,(W(h)W(g)) = \langle h, g\rangle_{\mathfrak{H}}$. Denote by I_n the multiple Wiener (or Wiener-Itô) stochastic integral of order $n \geq 0$ with respect to W (see [139, Section 1.1.2]). The mapping I_n is actually an isometry between the Hilbert space $\mathfrak{H}^{\odot n}$ (symmetric tensor product) equipped with the scaled norm $\frac{1}{\sqrt{n!}}\,\|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes n}}$ and the Wiener chaos of order n, which is defined as the closed linear span of the random variables

$$\left\{H_n(W(h))\colon h \in \mathfrak{H},\ \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1\right\},$$

where H_n is the n-th Hermite polynomial given by $H_0 = 1$ and for $n \geq 1$

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{d^n}{dx^n}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Multiple Wiener integrals enjoy the following isometry property : for any integers $m, n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\,(I_n(f)I_m(g)) = \mathbb{1}_{\{n=m\}}n!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes n}}, \tag{4.4}$$

where $\tilde{f}$ denotes the symmetrization of f and we recall that $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$.

Recall the multiplication formula satisfied by multiple Wiener integrals : for any $n, m \geq 1$, and any $f \in \mathfrak{H}^{\odot n}$ and $g \in \mathfrak{H}^{\odot m}$, it holds that

$$I_n(f)I_m(g) = \sum_{r=0}^{n\wedge m} r!\binom{n}{r}\binom{m}{r} I_{m+n-2r}(f \otimes_r g), \tag{4.5}$$

where the r-th contraction of f and g is defined by, for $0 \leq r \leq m \wedge n$,

$$f \otimes_r g = \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{\infty} \left\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} \otimes \left\langle g, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}, \tag{4.6}$$

with $\{e_i\colon i \geq 1\}$ denoting a complete orthonormal system in $\mathfrak{H}$.

Recall that any square integrable random variable F which is measurable with respect to the σ-algebra generated by W can be expanded into an orthogonal sum of multiple Wiener integrals :

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \tag{4.7}$$

where $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot n}$ are (uniquely determined) symmetric functions and $I_0(f_0) = \mathbb{E}\,(F)$.

Let L denote the Ornstein-Uhlenbeck operator, whose action on a random variable F with chaos decomposition 4.7 and such that $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 n! \|f_n\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes n}} < \infty$ is given by

$$LF = -\sum_{n=1}^{\infty} n I_n(f_n).$$

For $p > 1$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ we introduce the Sobolev-Watanabe space $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ as the closure of the set of polynomial random variables with respect to the norm

$$\|F\|_{\alpha,p} = \|(I-L)^{\frac{\alpha}{2}} F\|_{L^p(\Omega)},$$

where I represents the identity operator. We denote by D the Malliavin derivative that acts on smooth random variables of the form $F = g(W(h_1), \dots, W(h_n))$, where g is a smooth function with compact support and $h_i \in \mathfrak{H}$, $1 \le i \le n$. Its action on such a random variable F is given by

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i.$$

The operator D is closable and continuous from $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ into $\mathbb{D}^{\alpha-1,p}(\mathfrak{H})$.

4.3 Random matrices with independent chaotic entries

In this section, we consider random matrices $\mathcal{X}_{n,d} = \left(X_{ij}\right)_{1\le i\le n,\ 1\le j\le d}$ with independent entries belonging to arbitrary order Wiener chaoses associated with an isonormal Gaussian process $W = \{W(h) \colon h \in \mathfrak{H}\}$ as introduced in Subsection 4.2.2. Moreover, we assume that the elements on the same row of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ belong to the same Wiener chaos, while the order of the chaos may change from one row to another. In other words, we assume that for every $1 \le i \le n$ and for every $1 \le j \le d$,

$$X_{ij} = I_{q_i}(f_{ij}), \tag{4.8}$$

with $f_{ij} \in \mathfrak{H}^{\odot q_i}$, where $q_i \ge 1$ for every $1 \le i \le n$. Here and in the sequel, I_q denotes the multiple Wiener integral of order q with respect to W introduced in Subsection 4.2.2.

We do not assume that the entries have the same probability distribution, only that they have the same second and fourth moments, i.e., for every $1 \le i \le n$ and $1 \le j \le d$,

$$\mathbb{E}\left(X_{ij}^2\right) = q_i! \left\|f_{ij}\right\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes q_i}} = 1 \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left(X_{ij}^4\right) = m_4. \tag{4.9}$$

Consider the centered Wishart matrix (which is what will be referred to as Wishart matrix in the sequel) $\mathcal{W}_{n,d} = \left(W_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ defined by

$$\mathcal{W}_{n,d} = \frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T - \mathcal{I}_n, \tag{4.10}$$

where $\mathcal{I}_n$ denotes the identity matrix of $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, and $\mathcal{X}^T$ stands for the tranpose of the matrix $\mathcal{X}$. Note that the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ is a symmetric $n \times n$ matrix and its entries can be explicited as

$$W_{ii} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \left(X_{ik}^2 - 1 \right), \quad i = 1, \dots, n \tag{4.11}$$

and

$$W_{ij} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} X_{ik} X_{jk}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{4.12}$$

Note that the independence of the entries X_{ij} and assumption 4.9 yield, for any $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{E}\left(W_{ii}^2\right) = \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{d} E\left(\left(X_{ik}^2 - 1\right)^2\right) = \frac{m_4 - 1}{d},$$

and for $1 \leq i \neq j \leq n$,

$$\mathbb{E}\left(W_{ij}^2\right) = \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{d} \mathbb{E}\left(X_{ik}^2\right) \mathbb{E}\left(X_{jk}^2\right) = \frac{1}{d}.$$

Based on this observation, we define the renormalized Wishart matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d} = (\widetilde{W}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ as

$$\widetilde{W}_{ij} = \sqrt{d} W_{ij} \tag{4.13}$$

for all $1 \leq i, j \leq n$.

Also, consider the GOE matrix $\mathcal{Z}_n = \left(Z_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ with entries given by

$$\begin{cases} Z_{ii} \sim N(0, m_4 - 1) & \text{for } 1 \leq i \leq n \\ Z_{ij} \sim N(0, 1) & \text{for } 1 \leq i < j \leq n \text{ ,} \\ Z_{ij} = Z_{ji} & \text{for } 1 \leq j < i \leq n \end{cases} \tag{4.14}$$

where the entries $\left\{Z_{ij} \colon i \leq j\right\}$ are independent.

Remark 1 *Note that proving Theorem 2 entails proving that the matrices $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ and $\mathcal{Z}_n$ are ϕ-close for $\phi(n, d) = \frac{n^3}{d}$ (as introduced in Definition 8).*

As pointed out in Subsection 4.2.1, assessing the Wasserstein distance between symmetric random matrices can be shifted to the problem of estimating the Wasserstein distance between associated random vectors (see Lemma 1). In our context, a helpful result in this direction is [129, Theorem 6.1.1], which we restate here for convenience.

Theorem 4 (Theorem 6.1.1 in [129]) *Fix $m \geq 2$, and let $F = (F_1, \ldots, F_m)$ be a centered m-dimensional random vector with $F_i \in \mathbb{D}^{1,4}$ for every $i = 1, \ldots, m$. Let $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ be a symmetric and positive definite matrix, and let $Z \sim N_m(0, C)$. Then,*

$$d_W(F, Z) \leq \left\|C^{-1}\right\|_{\mathrm{op}} \|C\|_{\mathrm{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} \mathbb{E}\left(\left(C_{ij} - \left\langle DF_i, -DL^{-1}F_j\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^2\right)},$$

where $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ denotes the operator norm on $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

4.3.1 Independent random variables in Wiener chaos

This section prepares the proof of Theorem 2 by providing results related to the independence of multiple Wiener integrals. By a standard argument based on the fact that separable Hilbert spaces are isometrically isomorphic, we may assume, when it serves the clarity of our exposition, that $\mathfrak{H} = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ where μ is a σ-finite measure without atoms.

Recall that the entries of the matrix $\mathcal{X}$, on which our Wishart matrices are based, are independent multiple Wiener integrals of possibly different orders. The independence of random variables in Wiener chaos can be characterized in terms of their kernels via the celebrated Üstünel-Zakai criterion (see [187]), which we will intensively make use of in the sequel. We recall the criterion here for convenience.

Theorem 5 (Üstünel-Zakai [187]) *For any $n, m \geq 1$, let $f \in \mathfrak{H}^{\otimes n}$ and $g \in \mathfrak{H}^{\otimes m}$. The multiple Wiener integrals $I_n(f)$ and $I_m(g)$ are independent if and only if*

$$f \otimes_1 g = 0 \text{ almost everywhere on } \mathfrak{H}^{\otimes m+n-2}. \tag{4.15}$$

Remark 2 *Relation 4.15 also implies that*

$$f \otimes_r g = 0 \text{ almost everywhere on } \mathfrak{H}^{\otimes m+n-2r}$$

for all $1 \leq r \leq n \wedge m$.

We will also need the notion of strong independence of random variables introduced in [29] (to which we refer for various properties of strongly independent random variables).

Definition 9 *Two random variables X and Y with Wiener chaos decomposition*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \quad \text{and} \quad Y = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(g_m),$$

where $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot n}$, $g_m \in \mathfrak{H}^{\odot m}$ for every $n, m \geq 0$, are said to be strongly independent if every chaos component of X is independent of every chaos component of Y, i.e., for every $n, m \geq 0$, the random variables $I_n(f_n)$ and $I_m(g_m)$ are independent.

The following lemma assesses the strong independence of squares of chaotic random variables.

Lemma 2 *Let $X = I_n(f)$, $f \in \mathfrak{H}^{\odot n}$ and $Y = I_m(g)$, $g \in \mathfrak{H}^{\odot m}$ be independent. Then, the random variables X^2 and Y^2 are strongly independent.*

Proof: By the product formula for multiple Wiener integrals 4.5,

$$X^2 = \sum_{r_1=0}^{n} r_1! \binom{n}{r_1}^2 I_{2n-2r_1}(f \otimes_{r_1} f)$$

and

$$Y^2 = \sum_{r_2=0}^{m} r_2! \binom{m}{r_2}^2 I_{2m-2r_2}(g \otimes_{r_2} g).$$

It suffices to show that for every $0 \leq r_1 \leq n-1$ and $0 \leq r_2 \leq m-1$, the random variables $I_{2n-2r_1}(f \otimes_{r_1} f)$ and $I_{2m-2r_2}(g \otimes_{r_2} g)$ are independent, which by 4.15 is equivalent to

$$(f \tilde{\otimes}_{r_1} f) \otimes_1 (g \tilde{\otimes}_{r_2} g) = 0 \tag{4.16}$$

almost everywhere on $\mathfrak{H}^{\otimes 2n+2m-2r_1-2r_2}$. By the definition of contractions 4.6, with $\mathfrak{S}_n$ denoting the group of permutations of $\{1, \dots, n\}$, we have

$$\begin{aligned}
&(f \tilde{\otimes}_{r_1} f)(t_1, \dots, t_{2n-2r_1}) \\
&\quad = \frac{1}{(2n-2r_1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n-2r_1}} \int_{T^{r_1}} f(u_1, \dots, u_{r_1}, t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n-r_1)}) \\
&\qquad\qquad f(u_1, \dots, u_{r_1}, t_{\sigma(n-r_1+1)}, \dots, t_{\sigma(2n-2r_1)}) du_1 \cdots du_{r_1}.
\end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
&(g \tilde{\otimes}_{r_2} g)(t_1, \dots, t_{2m-2r_2}) \\
&\quad = \frac{1}{(2m-2r_2)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{2m-2r_2}} \int_{T^{r_2}} g(u_1, \dots, u_{r_2}, t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(m-r_2)}) \\
&\qquad\qquad g(u_1, \dots, u_{r_2}, t_{\tau(m-r_2+1)}, \dots, t_{\tau(2m-2r_2)}) du_1 \cdots du_{r_2}.
\end{aligned}$$

Hence, we can write

$$\begin{aligned}
&\left((f \tilde{\otimes}_{r_1} f) \otimes_1 (g \tilde{\otimes}_{r_2} g)\right)(t_1, \dots, t_{2n-2r_1+2m-2r_2-2}) \\
&\quad = \int_T (f \tilde{\otimes}_{r_1} f)(t_1, \dots, t_{2n-2r_1-1}, x) \\
&\qquad\qquad (g \tilde{\otimes}_{r_2} g)(t_{2n-2r_1}, \dots, t_{2n-2r_1+2m-2r_2-2}, x) dx.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Note that for a symmetric function $h \in \mathfrak{H}^{\odot n}$, it holds that

$$\tilde{h}(t_1, \dots, t_{n-1}, x) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \sum_{i=1}^{n} h\left(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(i-1)}, x, t_{\sigma(i+1)}, \dots, t_{\sigma(n-1)}\right),$$

so that by plugging the above identity into 4.17, we get

$$\begin{aligned}
&[(f\tilde{\otimes}_{r_1}f)\otimes_1(g\tilde{\otimes}_{r_2}g)](t_1,\ldots,t_{2n-2r_1+2m-2r_2-2})\\
&\quad=\frac{1}{(2n-2r_1-1)!(2m-2r_2-1)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n-2r_1-1},\tau\in\mathfrak{S}_{2m-2r_2-1}}\sum_{i=1}^{2n-2r_1}\sum_{j=1}^{2m-2r_2}\\
&\int_T(f\otimes_{r_1}f)(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},\ldots,t_{\sigma(2n-2r_1-1)})\\
&\qquad\qquad(g\otimes_{r_2}g)(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\tau(j+1)},\ldots,t_{\tau(2m-2r_2-1)})dx.
\end{aligned}$$

To obtain 4.16, it suffices to show that for all $1\le i\le 2n-2r_1$ and $1\le j\le 2m-2r_2$,

$$\begin{aligned}
&\int_T(f\otimes_{r_1}f)(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},\ldots,t_{\sigma(2n-2r_1-1)})\\
&\qquad\qquad(g\otimes_{r_2}g)(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\tau(j+1)},\ldots,t_{\tau(2m-2r_2-1)})dx=0
\end{aligned}\tag{4.18}$$

almost everywhere with respect to $t_1,\ldots,t_{2n+2m-2r_1-2r_2-2}$.

Assume that $1\le i\le n-r_1$ and $1\le j\le m-r_2$ (the other cases can be dealt with in the same way). Then, we have

$$\begin{aligned}
&\int_T(f\otimes_{r_1}f)(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},\ldots,t_{\sigma(2n-2r_1-1)})\\
&\qquad\qquad(g\otimes_{r_2}g)(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\tau(j+1)},\ldots,t_{\tau(2m-2r_2-1)})dx\\
&\quad=\int_T\int_{T^{r_1}}du_1\cdots du_{r_1}f(u_1,\ldots,u_{r_1},x,t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n-r_1-1)})\\
&\qquad\qquad\qquad f(t_{\sigma(n-r_1)},\ldots,f(t_{\sigma(2n-2r_1-1)})\\
&\qquad\times\int_{T^{r_2}}dv_1\cdots dv_{r_2}g(v_1,\ldots,v_{r_2},x,t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(m-r_2-1)})\\
&\qquad\qquad\qquad g(t_{\tau(m-r_2)},\ldots,t_{\tau(2m-2r_2-1)})dx.
\end{aligned}$$

Now, for almost every $u_1,\ldots,u_{r_1},v_1,\ldots,v_{r_2},t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n-r_1-1)},t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(m-r_2-1)}$, 4.15 implies that

$$\int_T f(u_1,\ldots,u_{r_1},x,t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n-r_1-1)})g(v_1,\ldots,v_{r_2},x,t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(m-r_2-1)})dx=0,$$

which implies 4.18 and in turn 4.16.
The following lemma is the statement of [29, Lemma 2].

Lemma 3 *Let X,Y be centered, strongly independent random variables in $\mathbb{D}^{1,2}$. Then*

$$\langle DX,-DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}=\langle DY,-DL^{-1}X\rangle_{\mathfrak{H}}=0.$$

We prove another consequence of strong independence needed later in the paper.

Lemma 4 *Let X, Y be strongly independent random variables in $\mathbb{D}^{1,2}$.*

1. *The random variables $\langle DX, -DL^{-1}X\rangle_{\mathfrak{H}}$ and $\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}$ are strongly independent.*
2. *The random variables X and $\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}$ are strongly independent.*

Proof: Let us prove (i) (the proof of (ii) follows in a similar way by the same arguments, and an analogous result has been proved in [29, Lemma 1]). Assume

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \quad \text{and} \quad Y = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(g_m),$$

where $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot n}$ and $g_m \in \mathfrak{H}^{\odot m}$ for every $n, m \geq 0$. Then, we have

$$D_\theta X = \sum_{n\geq 1} nI_{n-1}(f_n(\cdot,\theta)) \quad \text{and} \quad -D_\theta L^{-1}X = \sum_{n\geq 1} I_{n-1}(f_n(\cdot,\theta)),$$

where $I_{n-1}(f_n(\cdot,\theta))$ denotes the multiple Wiener integral of the function

$$(t_1,\ldots,t_{n-1}) \mapsto f_n(t_1,\ldots,t_{n-1},\theta).$$

Then, it holds that

$$\begin{aligned}
\langle DX, -DL^{-1}X\rangle_{\mathfrak{H}} &= \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} n_1 \int_T I_{n_1-1}(f_{n_1}(\cdot,x)) I_{n_2-1}(f_{n_2}(\cdot,x))dx \\
&= \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} n_1 \sum_{r=0}^{n_1\wedge n_2-1} \binom{n_1}{r}\binom{n_2}{r} I_{n_1+n_2-2r-2}(f_{n_1}\tilde{\otimes}_{r+1} f_{n_2}).
\end{aligned}$$

Similarly,

$$\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}} = \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} m_1 \sum_{r=0}^{m_1\wedge m_2-1} \binom{m_1}{r}\binom{m_2}{r} I_{m_1+m_2-2r-2}(g_{m_1}\tilde{\otimes}_{r+1} g_{m_2}).$$

The conclusion is obtained if we prove that for every $0 \leq r_1 \leq n_1 \wedge n_2 - 1$ and for every $0 \leq r_2 \leq m_1 \wedge m_2 - 1$, the random variables $I_{n_1+n_2-2r-2}(f_{n_1}\tilde{\otimes}_{r_1+1} f_{n_2})$ and $I_{m_1+m_2-2r-2}(g_{m_1}\tilde{\otimes}_{r_2+1} g_{m_2})$ are independent, or equivalently, that

$$(f_{n_1}\tilde{\otimes}_{r_1+1} f_{n_2}) \otimes_1 (g_{m_1}\tilde{\otimes}_{r_2+1} g_{m_2}) = 0 \text{ a.e.} \tag{4.19}$$

Since for every $n, m \geq 0$, we have $f_n \otimes_1 g_m = 0$ almost everywhere on T^{m+n-2}, 4.19 follows from the proof of Lemma 4.

Let us illustrate what the above results on strong independence imply about the entries of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$. We begin by introducing some notation. For every $1 \leq i \leq n$ and for every $1 \leq k, l \leq d$, we define

$$F_{ikl} = \langle D(X_{ik}^2 - 1), -DL^{-1}(X_{il}^2 - 1)\rangle_{\mathfrak{H}}. \tag{4.20}$$

We then have the following lemma.

Lemma 5 *Let the above notation prevail.*

1. *If $k \neq l$, $F_{ikl} = 0$ almost surely.*
2. *For every $k, l = 1, \ldots, d$ with $k \neq l$, the random variables F_{ikk} and F_{ill} are independent.*

Proof: By Lemma 4, X_{ik}^2 and X_{il}^2 are strongly independent random variables. Lemma 3 yields (i), and Lemma 4 implies (ii).

4.3.2 Proof of Theorem 2

This subsection is dedicated to the proof of Theorem 2. We restate it here for convenience.

Theorem 6 *Consider the renormalized Wishart matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ with entries given by 4.13. Then for every $n \geq 1$, $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ converges in distribution componentwise, as $d \to \infty$, to the matrix $\mathcal{Z}_n$ given by 4.14. Moreover, for every $n, d \geq 1$, there exists a positive constant C such that*

$$d_W(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq C \sqrt{\frac{n^3}{d}}.$$

Proof: Lemma 5 combined with Theorem 4 implies that we need to estimate the quantity

$$\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ab}\rangle_{\mathfrak{H}} - \mathbb{E}\left(Z_{ij}Z_{ab}\right)\right)^2\right)$$

for every $1 \leq i, j, a, b \leq n$ with $i \leq j$ and $a \leq b$, and Z_{ij} as in 4.14. Note that $\mathbb{E}\left(Z_{ii}^2\right) = m_4 - 1$, $\mathbb{E}\left(Z_{ij}^2\right) = 1$ if $i \neq j$, and $\mathbb{E}\left(Z_{ij}Z_{ab}\right) = 0$ if $(i, j) \neq (a, b)$.

Step 1 : calculation of $\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} - (m_4 - 1)\right)^2\right)$.

By 4.11 and the strong independence proved in Lemma 4, for every $1 \leq i \leq n$, it holds that

$$\begin{aligned}
\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} &= \frac{1}{d}\sum_{k,l=1}^{d}\langle D(X_{ik}^2 - 1), -DL^{-1}(X_{il}^2 - 1)\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{ik}^2 - 1), -DL^{-1}(X_{ik}^2 - 1)\rangle_{\mathfrak{H}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} F_{ikk},
\end{aligned}$$

where F_{ikk} is given by 4.20. Since for every $G \in \mathbb{D}^{1,2}$, $\mathbb{E}\left(G^2\right) = \mathbb{E}\left(\langle DG, -DL^{-1}G\rangle_{\mathfrak{H}}\right)$, we can write, using 4.9,

$$\mathbb{E}\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}}\right) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left(\langle D(X_{ik}^2 - 1), -DL^{-1}(X_{ik}^2 - 1)\rangle_{\mathfrak{H}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left(X_{ik}^2-1\right)^2\right) = m_4-1.$$

Hence, we can write

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} - (m_4-1)\right)^2\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}} - \mathbb{E}\left(\langle D\widetilde{W}_{ii}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}}\right)\right)^2\right) \\
&\quad = \frac{1}{d^2}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{d}\left(F_{ikk}-\mathbb{E}\left(F_{ikk}\right)\right)\right)^2\right) \\
&\quad = \frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left(F_{ikk}-\mathbb{E}\left(F_{ikk}\right)\right)^2\right).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

We claim that for every $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq k \leq d$,

$$\mathbb{E}\left(\left(F_{ikk}-\mathbb{E}\left(F_{ikk}\right)\right)^2\right) \leq C(i),$$

where $C(i) > 0$ is a constant depending on i, but not on k. In order to prove this, we will make use of the Wiener chaos decomposition of F_{ikk}, together with 4.15 and assumption 4.9. From 4.8 and the product formula 4.5, for every $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq k \leq d$, it holds that

$$X_{ik}^2 = \sum_{r=0}^{q_i} r!\binom{q_i}{r}^2 I_{2q_i-2r}(f_{ik}\otimes_r f_{ik}),$$

$$D_\theta(X_{ik}^2-1) = \sum_{r=0}^{q_i-1} r!\binom{q_i}{r}^2 (2q_i-2r) I_{2q_i-2r-1}((f_{ik}\otimes_r f_{ik})(\cdot,\theta)),$$

and

$$-D_\theta L^{-1}(X_{ik}^2-1) = \sum_{r=0}^{q_i-1} r!\binom{q_i}{r}^2 I_{q_i-2r-1}((f_{ik}\otimes_r f_{ik})(\cdot,\theta)).$$

This yields, for every $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq k \leq d$,

$$\begin{aligned}
F_{ikk} &= \langle D(X_{ik}^2-1), -DL^{-1}(X_{ik}^2-1)\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&= \sum_{r_1,r_2=0}^{q_i-1} r_1!r_2!\binom{q_i}{r_1}^2\binom{q_i}{r_2}^2(2q_i-2r_1) \\
&\qquad\qquad \langle I_{q_i-2r_1-1}(f_{ik}\otimes_{r_1} f_{ik}), I_{q_i-2r_2-1}(f_{ik}\otimes_{r_2} f_{ik})\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&= \sum_{r_1,r_2=0}^{q_i-1} r_1!r_2!\binom{q_i}{r_1}^2\binom{q_i}{r_2}^2(2q_i-2r_1)
\end{aligned}$$

$$\sum_{p=0}^{(2q_i-2r_1)\wedge(2q_i-2r_2)-1} p!\binom{2q_i-2r_1-1}{p}\binom{2q_i-2r_2-1}{p}$$
$$I_{4q_i-2r_1-2r_2-2(p+1)}\left((f_{ik}\otimes_{r_1} f_{ik})\otimes_{p+1}(f_{ik}\otimes_{r_2} f_{ik})\right),$$

and hence

$$\begin{aligned}
&F_{ikk}-\mathbb{E}(F_{ikk})\\
&=\sum_{r_1,r_2=0}^{q_i-1}\mathbb{1}_{\{r_1\neq r_2\}}r_1!r_2!\binom{q_i}{r_1}^2\binom{q_i}{r_2}^2(2q_i-2r_1)\\
&\qquad\langle I_{2q_i-2r_1-1}(f_{ik}\otimes_{r_1} f_{ik}), I_{2q_i-2r_2-1}(f_{ik}\otimes_{r_2} f_{ik})\rangle_{\mathfrak{H}}\\
&=\sum_{r_1=0}^{q_i-1}\sum_{r_2=0}^{q_i-1}r_1!r_2!\binom{q_i}{r_1}^2\binom{q_i}{r_2}^2(2q_i-2r_1)\\
&\qquad\sum_{p=0}^{(2q_i-2r_1)\wedge(2q_i-2r_2)-1} p!\binom{2q_i-2r_1-1}{p}\binom{2q_i-2r_2-1}{p}\\
&\qquad I_{4q_i-2r_1-2r_2-2(p+1)}\left((f_{ik}\otimes_{r_1} f_{ik})\otimes_{p+1}(f_{ik}\otimes_{r_2} f_{ik})\right)\\
&+\sum_{r=0}^{q_i-1}r!^2\binom{q_i}{r}^4(2q_i-2r)\sum_{p=0}^{2q_i-2r-2}p!\binom{2q_i-2r-1}{p}^2\\
&\qquad I_{4q_i-4r-2(p+1)}\left((f_{ik}\otimes_{r} f_{ik})\otimes_{p+1}(f_{ik}\otimes_{r} f_{ik})\right).
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Now, using the isometry property 4.4 of multiple Wiener integrals together with the bounds $\|\tilde{f}\|_{\mathfrak{H}^{\otimes n}}\leq\|f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes n}}$ and $\|f\otimes_r g\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2n-2r)}}\leq\|f\|_{\mathfrak{H}^{\otimes n}}\|g\|_{\mathfrak{H}^{\otimes n}}$ for every $f,g\in\mathfrak{H}^{\otimes n}$ and $0\leq r\leq n$, we can write

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(I_{4q_i-2r_1-2r_2-2(p+1)}\left((f_{ik}\otimes_{r_1} f_{ik})\otimes_{p+1}(f_{ik}\otimes_{r_2} f_{ik})\right)^2\right)\\
&\qquad= c(q_i,r_1,r_2,p)\|(f_{ik}\tilde{\otimes}_{r_1}f_{ik})\tilde{\otimes}_{p+1}(f_{ik}\tilde{\otimes}_{r_2}f_{ik})\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(4q_i-2r_1-2r_2-2(p+1))}}\\
&\qquad\leq c(q_i,r_1,r_2,p)\|f_{ik}\tilde{\otimes}_{r_1}f_{ik}\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q_i-2r_1)}}\|f_{ik}\tilde{\otimes}_{r_2}f_{ik}\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q_i-2r_2)}}\\
&\qquad\leq c(q_i,r_1,r_2,p)\|f_{ik}\|^8_{\mathfrak{H}^{\otimes q_i}}\\
&\qquad\leq c(q_i,r_1,r_2,p),
\end{aligned}\tag{4.23}$$

where $c(q_i,r_1,r_2,p)$ is a strictly positive constant depending on q_i,r_1,r_2,p but not on k. Now, in 4.22, we use the isometry property 4.4 together with 4.23 to obtain, for every $1\leq i\leq n$ and for every $1\leq k\leq d$,

$$\mathbb{E}\left((F_{ikk}-\mathbb{E}(F_{ikk}))^2\right)\leq C(i),$$

where $C(i)>0$ is a constant (depending only on q_i). Therefore, using the above inequality and 4.21 yields

$$\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ii},-DL^{-1}\widetilde{W}_{ii}\rangle_{\mathfrak{H}}-(m_4-1)\right)^2\right)=\frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left((F_{ikk}-\mathbb{E}(F_{ikk}))^2\right)\leq\frac{C(i)}{d}.\tag{4.24}$$

Step 2 : calculation of $\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ij}\rangle_{\mathfrak{H}} - 1\right)^2\right)$ **with** $i < j$.

Assume $1 \le i < j \le n$. In this case, by 4.8, the product formula 4.4 as well as 4.15, we have for every $1 \le k \le d$,

$$X_{ik}X_{jk} = I_{q_i+q_j}(f_{ik} \otimes f_{jk}),$$

so that $X_{ik}X_{jk}$ is an element of the $(q_i + q_j)$-th Wiener chaos. Consequently,

$$-DL^{-1}(X_{ik}X_{jk}) = \frac{1}{q_i + q_j} D(X_{ik}X_{jk})$$

and

$$\begin{aligned}
\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ij}\rangle_{\mathfrak{H}} &= \frac{1}{d\left(q_i + q_j\right)} \sum_{k,l=1}^{d} \langle D(X_{ik}X_{jl}), -DL^{-1}(X_{ik}X_{jk})\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&= \frac{1}{d\left(q_i + q_j\right)} \sum_{k=1}^{d} \|D(X_{ik}X_{jk})\|_{\mathfrak{H}}^2 \\
&= \frac{1}{d\left(q_i + q_j\right)} \sum_{k=1}^{d} \left(X_{ik}^2 \|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 + X_{jk}^2 \|DX_{ik}\|_{\mathfrak{H}}^2\right).
\end{aligned}$$

On the other hand, since $\mathbb{E}\left(\|DX_{ik}\|_{\mathfrak{H}}^2\right) = q_i$ and $\mathbb{E}\left(\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2\right) = q_j$, we have

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ij}\rangle_{\mathfrak{H}}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{d\left(q_i + q_j\right)} \sum_{k=1}^{d} \left(\mathbb{E}\left(X_{ik}^2\right) \mathbb{E}\left(\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2\right) + \mathbb{E}\left(X_{jk}^2\right) \mathbb{E}\left(\|DX_{ik}\|_{\mathfrak{H}}^2\right)\right) = 1
\end{aligned}$$

and thus, writting $1 = \frac{q_i}{q_i+q_j} + \frac{q_j}{q_i+q_j}$,

$$\begin{aligned}
&\left|\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ij}\rangle_{\mathfrak{H}} - 1\right| \\
&\quad \le \frac{1}{d\left(q_i + q_j\right)} \left|\sum_{k=1}^{d} \left(X_{ik}^2 \|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j\right)\right| + \frac{1}{d\left(q_i + q_j\right)} \left|\sum_{k=1}^{d} \left(X_{jk}^2 \|DX_{ik}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_i\right)\right|
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ij}\rangle_{\mathfrak{H}} - 1\right|^2\right) \le \frac{2}{d^2\left(q_i + q_j\right)^2} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{d} \left(X_{ik}^2 \|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j\right)\right|^2\right) \\
+ \frac{2}{d^2\left(q_i + q_j\right)^2} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{d} \left(X_{jk}^2 \|DX_{ik}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_i\right)\right|^2\right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

The two summands above can be estimated in a similar way, so we only cover the first one. By the independence of the entries and [29, Lemma 1], we have

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{d}\left(X_{ik}^2\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j\right)\right|^2\right) &\leq 2\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{d} X_{ik}^2\left(\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j\right)\right|^2\right) \\
&\quad +2\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{d} q_j\left(X_{ik}^2 - 1\right)\right|^2\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left[X_{ik}^2\left(\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j\right)\right]^2\right) \\
&\quad +2\sum_{k=1}^{d} q_j^2\mathbb{E}\left(\left(X_{ik}^2 - 1\right)^2\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left(\left(\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j\right)^2\right)m_4 \\
&\quad +2d(m_4 - 1). \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Writing

$$
\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j = q_j^2\sum_{r=0}^{q_j-2} r!\binom{q_j-1}{r}^2 I_{2q_j-2r-2}(f_{ik}\tilde{\otimes}_{r+1}f_{ik})
$$

and estimating the L^2-norm as in the proof of 4.23 yields

$$
\mathbb{E}\left(\left(\|DX_{jk}\|_{\mathfrak{H}}^2 - q_j\right)^2\right) \leq C(j), \tag{4.27}
$$

where $C(j)$ is a constant depending solely on q_j. By 4.25, 4.26 and 4.27, we get

$$
\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ij}\rangle_{\mathfrak{H}} - 1\right)^2\right) \leq \frac{C(i,j)}{d}, \tag{4.28}
$$

where $C(i, j)$ is a positive constant depending only on q_i and q_j.

Step 3 : calculation of $\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ab}\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^2\right)$ with $(i, j) \neq (a, b)$.

Let $1 \leq i, j, a, b \leq n$ with $i \leq j$, $a \leq b$ and $(i, j) \neq (a, b)$. If i, j, a, b are all distinct, then we have

$$
\begin{aligned}
\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ab}\rangle_{\mathfrak{H}} &= \frac{1}{dq_a}\sum_{k,l=1}^{d}\langle D(X_{ik}X_{jk}), D(X_{al}X_{bl})\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&= \frac{1}{dq_a}\sum_{k,l=1}^{d}\langle X_{ik}DX_{jk} + X_{jk}DX_{ik}, X_{al}DX_{bl} + X_{bl}DX_{al}\rangle_{\mathfrak{H}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{dq_a}\sum_{k,l=1}^{d}\Big(X_{ik}X_{al}\langle DX_{jk}, DX_{bl}\rangle_{\mathfrak{H}} + X_{ik}X_{bl}\langle DX_{jk}, DX_{al}\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&\quad +X_{jk}X_{al}\langle DX_{ik}, DX_{bl}\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&\quad +X_{jk}X_{bl}\langle DX_{ik}, DX_{al}\rangle_{\mathfrak{H}}\Big) = 0, \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

since all the scalar products vanish according to Lemma 3.

The remaining cases, namely $\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ib}\rangle_{\mathfrak{H}}$ with $j \neq b$ and $\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{aj}\rangle_{\mathfrak{H}}$ with $i \neq a$ can all be dealt with in a similar manner. For instance, if $j \neq b$, assuming $i < j$ and $i < b$, we can write

$$
\begin{aligned}
\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ib}\rangle_{\mathfrak{H}} &= \frac{1}{2dq_i}\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{ik}X_{jk}), D(X_{ik}X_{bk})\rangle_{\mathfrak{H}} \\
&= \frac{1}{2dq_i}\sum_{k=1}^{d} X_{jk}X_{bk}\|DX_{ik}\|_{\mathfrak{H}}^2.
\end{aligned}
$$

Similarly, we also have

$$
\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{aj}\rangle_{\mathfrak{H}}\right)^2\right) = \frac{C(i)}{d^2}\sum_{k=1}^{d}\mathbb{E}\left(\|DX_{ik}\|_{\mathfrak{H}}^4\right) \leq \frac{C(i)}{d}, \qquad (4.30)
$$

where the above equality and inequality are derived similarly as for what was done for the bound appearing in 4.27.

An application of Lemma 1 together with Theorem 4 yields

$$
d_W(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq \sqrt{2}C\sqrt{\sum_{i,j,a,b=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(\langle D\widetilde{W}_{ij}, -DL^{-1}\widetilde{W}_{ab}\rangle_{\mathfrak{H}} - \mathbb{E}\left(Z_{ij}Z_{ab}\right)\right)^2\right)},
$$

where $C > 0$ is the constant appearing in Theorem 4. Since for a, b, i, j all distinct, the corresponding above summands vanish according to 4.29, we have only $n^4 - n(n-1)(n-2)(n-3) \leq 6n^3$ summands. By 4.24, 4.28 and 4.30, all these non-vanishing summands are bounded by $\frac{C}{d}$, where $C > 0$ denotes a generic constant resulting from the aggregation of the $C(i)$ and $C(i, j)$ constants appearing in the previous steps of the proof. This yields 4.1 and concludes the proof.

4.4 Random matrices with correlated second chaos entries

In this section, we consider the case where the entries of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are allowed to be correlated. As in the previous section, let $\mathcal{X}_{n,d} = \left(X_{ij}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq d}$ be a $n \times d$ random matrix whose entries are given by the increments of a Rosenblatt process, which lives in the second Wiener chaos. The choice of dealing with the second chaos in the case of correlated entries comes both from the accrued importance of the second chaos in applications, as well as from technical considerations of keeping the involved combinatorics at a reasonable level for our exposition. The Rosenblatt process $(Z_t^H)_{t\geq 0}$ with self-similarity parameter $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ is defined by, for every $t \geq 0$,

$$Z_t^H = I_2(L_t), \tag{4.31}$$

where I_2 denote the multiple Wiener integral of order two with respect to a Brownian motion $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ and the kernel L_t is given by, for every $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$,

$$L_t(y_1, y_2) = d(H)\mathbb{1}_{[0,t]^2}(y_1, y_2) \int_{y_1\vee y_2}^t \partial_1 K^{\frac{H+1}{2}}(u, y_1)\partial_1 K^{\frac{H+1}{2}}(u, y_1)du, \tag{4.32}$$

where

$$d(H) = \frac{1}{H+1}\sqrt{\frac{2(2H-1)}{H}} \tag{4.33}$$

and for $t > s$,

$$K^H(t, s) = c(H)s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}du,$$

with $c(H) = \sqrt{\left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})}\right)}$, where β denotes the beta function (see e.g. [139]).

The kernel L_t belongs to $L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ for every $t \geq 0$. The Rosenblatt process Z^H is H-self similar, has stationary increments and long memory. We refer to the monographs [150] or [185] for its basic properties. In particular, it has the same covariance as the fractional Brownian motion, i.e., for any $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{E}(Z_t^H Z_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

A random variable with the same distribution as Z_1^H will be called a *Rosenblatt random variable*.

Let us now define the entries of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$. Let $B = \left(B^1, \ldots, B^d\right)$ denote a d-dimensional Brownian motion and define

$$Z_t^{H,i} = I_2^i(L_t), \tag{4.34}$$

where I_q^i denotes the multiple Wiener integral of order q with respect to the Brownian motion B^i for any $1 \leq i \leq d$. Then, by 4.31, the processes $(Z_t^{H,i})_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq d$ are independent Rosenblatt processes with the same Hurst parameter (or self-similarity parameter) $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. For any $i \geq 1$, denote $f_i = L_i - L_{i-1}$.

Consider the random matrix $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq d}$ with entries given by

$$X_{ij} = I_2^i(f_j) = Z_j^{H,i} - Z_{j-1}^{H,i} \tag{4.35}$$

for every $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq d$, with $Z^{H,i}$ given by 4.34. This means that all the entries have the same distribution, the ones on different columns are independent and those on the same rows are correlated according to the correlation structure of the increments of the Rosenblatt process. Since the covariance of the Rosenblatt process coincides with that of the fractional Brownian motion, the correlation structure of our matrix is the same as in [138] (where the entries are given by the increments of the fractional Brownian motion). Despite this fact, the non-Gaussian character will yield a different limiting behavior of the associated Wishart matrix.

More precisely, we have for every $1 \leq 1, k \leq n$ and $1 \leq j, l \leq d$,

$$\mathbb{E}\left(X_{ij}X_{kl}\right) = \mathbb{1}_{\{i=k\}}\rho_H(j-l),$$

where ρ_H denotes the correlation function of the Rosenblatt process (or that of the fractional Brownian motion) given by, for $k \in \mathbb{Z}$,

$$\rho_H(k) = \frac{1}{2}\left(|k+1|^{2H} + |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H}\right). \tag{4.36}$$

In particular, for $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq d$,

$$\mathbb{E}\left(X_{ij}^2\right) = 2!\langle f_i, f_j\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = 1.$$

4.4.1 Rosenblatt limiting distribution

Consider the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ obtained from $\mathcal{X}_{n,d}$ as in 4.10, where $\mathcal{X}_{n,d}$ is now given by 4.35. Recall that the entries of the Wishart matrix are given by 4.11 and 4.12. We start by analyzing the asymptotic behavior in distribution of each element of the Wishart matrix. This will be related to the limiting behavior of the quadratic variations of the Rosenblatt process. Consider the constant $c_{1,H}$ given by

$$c_{1,H} = 4d(H), \tag{4.37}$$

with $d(H)$ given by 4.33. Let us recall the following result from [183].

Theorem 7 *Let $(Z_t^H)_{t\geq 0}$ be a Rosenblatt process. Define, for $d \geq 1$,*

$$V_d = c_{1,H}^{-1} d^{-H} \sum_{k=0}^{d-1} \left[\frac{\left(Z^H_{\frac{k+1}{d}} - Z^H_{\frac{k}{d}}\right)^2}{d^{-2H}} - 1 \right]. \tag{4.38}$$

Then, the sequence $(V_d)_{d\geq 1}$ converges in $L^2(\Omega)$, as $d \to \infty$, to the Rosenblatt random variable Z_1^H.

Let us first study the limiting behavior, as $d \to \infty$, of the diagonal terms of the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$.

Proposition 1 *For $1 \leq i \leq n$, let W_{ii} be given by 4.11, and let*

$$\widetilde{W}_{ii} = c_{1,H}^{-1} d^{1-H} W_{ii},$$

where $c_{1,H}$ is the constant defined in 4.37. Then, for every $1 \leq i \leq n$,

$$\widetilde{W}_{ii} \to Z_1^{H,i}$$

in $L^2(\Omega)$ as $d \to \infty$.

Proof: By the scaling property of the Rosenblatt process and 4.35, we have, for every $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} W_{ii} &= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}(X_{ik}^2 - 1) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(\left(Z_{k+1}^{H,i} - Z_{k}^{H,i}\right)^2 - 1\right) \\ &\overset{\mathscr{D}}{=} \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\left(\frac{\left(Z_{\frac{k+1}{d}}^{H,i} - Z_{\frac{k}{d}}^{H,i}\right)^2}{d^{-2H}} - 1\right) = c_{1,H}d^{H-1}V_d^i, \end{aligned}$$

where $\overset{\mathscr{D}}{=}$ denotes equality in distribution, and for $1 \leq i \leq n$,

$$V_d^i = c_{1,H}^{-1}d^{-H}\sum_{k=0}^{d-1}\left(\frac{\left(Z_{\frac{k+1}{d}}^{H,i} - Z_{\frac{k}{d}}^{H,i}\right)^2}{d^{-2H}} - 1\right). \tag{4.39}$$

The conclusion follows from Theorem 7. As far as the convergence of the non-diagonal terms of the Wishart matrix 4.10, we have the following result.

Proposition 2 *For $1 \leq i, j \leq n$ with $i \neq j$, let W_{ij} be given by 4.12, and define*

$$\widetilde{W}_{ij} = c_{1,H}^{-1}d^{1-H}W_{ij}, \tag{4.40}$$

where $c_{1,H}$ denotes the constant defined in 4.37. Then, for every $1 \leq i, j \leq n$,

$$\widetilde{W}_{i,j} \to 0$$

in $L^2(\Omega)$ as $d \to \infty$, and

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{W}_{ij}^2\right) \leq C\begin{cases} d^{1-2H} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ \log(d)d^{-\frac{1}{2}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ d^{2H-2} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}, \tag{4.41}$$

where $C > 0$ denotes a generic constant.

Proof: By self-similarity and 4.35,

$$W_{ij} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}X_{ik}X_{jk} = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1}\left(Z_{k+1}^{H,i} - Z_{k}^{H,i}\right)\left(Z_{k+1}^{H,j} - Z_{k}^{H,j}\right),$$

so that, for every $1 \leq i, j \leq n$,

$$\mathbb{E}\left(\widetilde{W}_{ij}^2\right) = c_{1,H}^{-2}d^{2-2H}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{d-1}\left(Z_{k+1}^{H,i} - Z_{k}^{H,i}\right)\left(Z_{k+1}^{H,j} - Z_{k}^{H,j}\right)\right)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= c_{1,H}^{-2} d^{-2H} \sum_{k,l=0}^{d-1} \mathbb{E}\left(\left(Z_{k+1}^{H,i} - Z_k^{H,i}\right)\left(Z_{l+1}^{H,i} - Z_l^{H,i}\right)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{E}\left(\left(Z_{k+1}^{H,j} - Z_k^{H,j}\right)\left(Z_{l+1}^{H,j} - Z_l^{H,j}\right)\right) \\
&= c_{1,H}^{-2} d^{-2H} \sum_{k,l=0}^{d-1} \rho_H(|k-l|)^2 \\
&\leq c_{1,H}^{-2} d^{1-2H} \sum_{v\in\mathbb{Z}} \rho_H(|v|)\left(1 - \frac{|v|}{n}\right) 1_{(|v|<n)},
\end{aligned}
$$

where ρ_H is given by 4.36. The fact that $\rho_H(|k|)$ behaves as $H(2H-1)|k|^{2H-2}$ as $|k| \to \infty$ concludes the proof.

4.4.2 Proof of Theorem 3

In this section, we pave the way to the proof of Theorem 3 by stating and proving some preparatory results, making use of the results established in the previous subsection to do so. Theorem 3 is restated for convenience at the end of the section right before its proof.

Consider the renormalized Wishart matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ defined in 4.40. By Propositions 1 and 2, its limit in distribution is an $n \times n$ diagonal matrix, denoted by $\mathcal{R}_n^H = (R_{ij}^H)_{1\leq i,j\leq n}$, with independent diagonal entries given by, for all $1 \leq i \leq n$,

$$
R_{ii}^H = Z_1^{H,i}. \tag{4.42}
$$

Given that what we need is to estimate the Wasserstein distance between $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ and $\mathcal{R}_n^H$, we start with the observation that, due to the scaling property of the Rosenblatt process, we have

$$
d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right) = d_W\left(\mathcal{V}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right),
$$

where the matrix $\mathcal{V}_{n,d} = (V_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ is given by

$$
\begin{cases}
V_{ii} = V_d^i & \text{for } 1 \leq i \leq n \\
V_{ij} = c_{1,H}^{-1} d^{-H} \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} \left(Z_{\frac{k+1}{d}}^{H,i} - Z_{\frac{k}{d}}^{H,i}\right)\left(Z_{\frac{k+1}{d}}^{H,j} - Z_{\frac{k}{d}}^{H,j}\right) & \text{for } 1 \leq i \neq j \leq n
\end{cases},
$$

where V_d^i was defined in 4.39. By the definition of the Wasserstein distance 4.2,

$$
d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right) = d_W\left(\mathcal{V}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left(V_{ij} - R_{ij}^H\right)^2\right)} \tag{4.43}
$$

with $R_{ij}^H = 0$ if $i \neq j$ and R_{ii}^H given by 4.42.

The estimates for the terms with $i \neq j$ in the right-hand side of 4.43 will follow from Proposition 2. The next proposition provides estimates for the diagonal summands of the right-hand side of 4.43.

Proposition 3 *Let V_d be given by 4.38. Then, it holds that*

$$\mathbb{E}\left(\left|V_d - Z_1^H\right|^2\right) \leq C \begin{cases} d^{1-2H} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ \log(d) d^{-\frac{1}{2}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ d^{2H-2} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}, \tag{4.44}$$

where $C > 0$ denotes a generic constant.

Proof: For $0 \leq k \leq d-1$, we have

$$Z^H_{\frac{k+1}{d}} - Z^H_{\frac{k}{d}} = I_2\left(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}\right),$$

where L is the kernel defined in 4.32. By the product formula for multiple Wiener integrals 4.5, we can decompose V_d as the sum of two terms, one in the fourth Wiener chaos and one in the second Wiener chaos. Namely,

$$\begin{aligned} V_d &= c_{1,H}^{-1} d^H \sum_{k=0}^{d-1} \left[I_4\left(\left(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}\right)^{\otimes 2}\right) + 4 I_2\left(\left(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}\right) \otimes_1 \left(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}\right)\right)\right] \\ &= T_{4,d} + T_{2,d}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

The estimation of the $L^2(\Omega)$-norm of the term $T_{4,d}$ has been done in [183]. This term has no contribution to the limit of V_d and using [183, Equations (3.15)–(3.17)] yields

$$\mathbb{E}\left(T_{4,d}^2\right) \leq C \begin{cases} d^{1-2H} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ \log(d) d^{-\frac{1}{2}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ d^{2H-2} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}.$$

The summand $T_{2,d}$ appearing in 4.45 converges in $L^2(\Omega)$ to Z_1^H. This has also been proved in [183], but we still need to evaluate the rate of this convergence. We can write $T_{2,d} = I_2(h_d)$, with

$$h_d(y_1, y_2) = 4 c_{1,H}^{-1} d^H \sum_{k=0}^{d-1} \left(\left(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}\right) \otimes_1 \left(L_{\frac{k+1}{n}} - L_{\frac{k}{n}}\right)\right). \tag{4.46}$$

Hence,

$$\mathbb{E}\left(\left|T_{2,d} - Z_1^H\right|^2\right) = \mathbb{E}\left(\left|T_{2,d}\right|^2\right) - 2\mathbb{E}\left(T_{2,d} Z_1^H\right) + \mathbb{E}\left(\left|Z_1^H\right|^2\right). \tag{4.47}$$

On one hand, [183, Equation (3.11)] yields

$$\mathbb{E}\left(\left|T_{2,d}\right|^2\right) = 2\|h_d\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2c_{1,H}^{-2} d(H)^4 (H(H+1))^4 d^{2H} \sum_{i,j=0}^{d-1} \int_{\frac{i}{d}}^{\frac{i+1}{d}} \int_{\frac{i}{d}}^{\frac{i+1}{d}} \int_{\frac{j}{d}}^{\frac{j+1}{d}} \int_{\frac{j}{d}}^{\frac{j+1}{d}} |u-v|^{H-1} \\
&\qquad |u'-v'|^{H-1} |u-u'|^{H-1} |v-v'|^{H-1} du dv du' dv' \\
&= H(2H-1) e(H) d^{-2H} \sum_{i,j=0}^{d-1} \int_{[0,1]^4} |u-v|^{H-1} |u'-v'|^{H-1} \\
&\qquad |u-u'+i-j|^{H-1} |v-v'+i-j|^{H-1} du dv du' dv',
\end{aligned}
$$

where $e(H)$ is a constant given by

$$
e(H) = \frac{H^2(H+1)^2}{4}. \tag{4.48}
$$

On the other hand, using the fact that $2\|L_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = 1$ yields

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|Z_1^H\right|^2\right) &= 2\|L_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \\
&= H(2H-1) \int_0^1 \int_0^1 |u-v|^{2H-2} du dv \\
&= H(2H-1) \sum_{i,j=0}^{d-1} \int_{\frac{i}{d}}^{\frac{i+1}{d}} \int_{\frac{j}{d}}^{\frac{j+1}{d}} |u-v|^{2H-2} du dv \\
&= H(2H-1) d^{-2H} \sum_{i,j=0}^{d-1} \int_{[0,1]^2} |u-v+i-j|^{2H-2} du dv \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Furthermore, note that 4.46 and 4.32 imply

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(T_{2,d} Z_1^H\right) &= 2\langle h_N, L_1\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \\
&= H(2H-1) f(H) d^H \sum_{i=0}^{d-1} \int_{\frac{i}{d}}^{\frac{i+1}{d}} \int_{\frac{i}{d}}^{\frac{i+1}{d}} \int_0^1 |u-v|^{H-1} |u-u'|^{H-1} \\
&\qquad |v-u'|^{H-1} du dv du' \\
&= H(2H-1) f(H) d^H \sum_{i,j=0}^{d-1} \int_{\frac{i}{d}}^{\frac{i+1}{d}} \int_{\frac{i}{d}}^{\frac{i+1}{d}} \int_{\frac{j}{d}}^{\frac{j+1}{d}} |u-v|^{H-1} |u-u'|^{H-1} \\
&\qquad |v-u'|^{H-1} du dv du' \\
&= H(2H-1) f(H) d^{-2H} \sum_{i,j=0}^{d-1} \int_{[0,1]^3} |u-v|^{H-1} |u-u'+i-j|^{H-1} \\
&\qquad |v-u'+i-j|^{H-1} du dv du',
\end{aligned}
$$

where $f(H)$ is a constant given by

$$
f(H) = \frac{H+1}{2(2H-1)}. \tag{4.49}
$$

Now, 4.47 becomes

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|T_{2,d}-Z_1^H\right|^2\right)\\
&= H(2H-1)d^{-2H}e(H)\sum_{i,j=0}^{d-1}\left[\int_{[0,1]^4}|u-v|^{H-1}|u'-v'|^{H-1}|u-u'+i-j|^{H-1}\right.\\
&\qquad\qquad |v-v'+i-j|^{H-1}dudvdu'dv'\\
&\quad -2f(H)\int_{[0,1]^3}|u-v|^{H-1}|u-u'+i-j|^{H-1}|v-u'+i-j|^{H-1}dudvdu'\\
&\quad \left.+\int_{[0,1]^2}|u-v+i-j|^{2H-2}dudv\right]\\
&\le Cd^{1-2H}e(H)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\int_{[0,1]^4}|u-v|^{H-1}|u'-v'|^{H-1}|u-u'+k|^{H-1}\right.\\
&\qquad\qquad |v-v'+k|^{H-1}dudvdu'dv'\\
&\quad -2f(H)\int_{[0,1]^3}|u-v|^{H-1}|u-u'+k|^{H-1}|v-u'+k|^{H-1}dudvdu'\\
&\quad \left.+\int_{[0,1]^2}|u-v+k|^{2H-2}dudv\right]. \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Now, [185, Lemma 5] (see also [42, Lemma 2]) together with the definition of $e(H)$ given in 4.48 yields

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^4}|u-v|^{H-1}|u'-v'|^{H-1}|u-u'+k|^{H-1}|v-v'+k|^{H-1}dudvdu'dv'\\
&\qquad = e(H)^{-1}k^{2H-2}+O(k^{2H-2}). \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Similarly,

$$
\int_{[0,1]^3}|u-v|^{H-1}|u-u'+k|^{H-1}|v-u'+k|^{H-1}dudvdu' = f(H)^{-1}k^{2H-2}+o(k^{2H-2}), \qquad (4.52)
$$

where $f(H)$ is given by 4.49. Finally, [31, Proof of Proposition 3.1] yields

$$
\int_{[0,1]^2}|u-v+k|^{2H-2}dudv = k^{2H-2}+o(k^{2H-2}). \qquad (4.53)
$$

Combining 4.51, 4.52 and 4.53 implies that the sum over $k\in\mathbb{Z}$ in 4.50 converges. Hence,

$$
\mathbb{E}\left(\left|T_{2,d}-Z_1^H\right|^2\right)\le Cd^{1-2H},
$$

and since, by 4.45,

$$
\mathbb{E}\left(\left|V_d-Z_1^H\right|^2\right)=\mathbb{E}\left(|T_{4,d}|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|T_{2,d}-Z_1^H\right|^2\right),
$$

we obtain 4.44. We are now ready to provide the proof of Theorem 3, which we restate here for convenience.

Theorem 8 *2 Let $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ be the renormalized Wishart matrix 4.40 and let $\mathcal{R}_n^H$ be the diagonal matrix with entries given by 4.42. Then, for every $n \geq 1$, the random matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ converges componentwise in distribution, as $d \to \infty$, to the matrix $\mathcal{R}_n^H$. Moreover, as $n, d \geq 1$, there exists a positive constant C such that*

$$d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right) \leq C \begin{cases} nd^{\frac{1}{2}-H} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ n\sqrt{\log(d)}d^{-\frac{1}{4}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ nd^{H-1} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}.$$

Proof: [Proof of Theorem 3] The conclusion follows from combining relation 4.43 with Propositions 2 and 3. Indeed, the summands with $i \neq j$ in 4.43 have been estimated in Proposition 2 (see 4.41), while the diagonal terms of 4.43 are estimated by 4.44.

Chapitre 5

Limiting behavior for Wishart matrix with Skorohod integrals

This article is published on ALEA, Lat. Am. J.Probab. Math. Stat. 18. 1625-1641 (2021).
DOI : 10.30757/ALEA.v18-59.

Joint work with Ciprian Tudor

Abstract We consider a $n \times d$ random matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ whoses entries can be expressed as Skorohod integrals. By using the techniques of the Malliavin calculus, we study the fluctuations under the Wasserstein distance, as $n, d \to \infty$, of the renormalized Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d} = \sqrt{d}\left(\frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T - \mathcal{I}_n\right)$, where $\mathcal{I}_n$ is the $n \times n$ identity matrix.

5.1 Introduction

Consider a $n \times d$ random matrix $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le d}$. We can associate to it the so-called (renormalized) Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d} = \sqrt{d}\left(\frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T - \mathcal{I}_n\right)$ where $\mathcal{I}_n$ is the $n \times n$ identity matrix and $\mathcal{X}^T$ denotes the transpose of the matrix $\mathcal{X}$. This matrix has been introduced by Wishart in the twenties in [197] and it has numerous applications in multivariate analysis or statistics. Of particular interest is to understand its asymptotic behavior when the dimensions d and n are large. Assume that the entries of the starting matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are independent and identically distributed, with zero mean and unit variance. Then it is easy to see that for fixed $n \ge 1$, the entries of the matrix $\frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T$ converge, as $d \to \infty$, to the entries of the so-called $n \times n$ GOE matrix $\mathcal{Z}_n$ (Gaussian Orthogonal Ensemble) which is a random matrix with Gaussian elements given by (5.29) with $m_4 = 3$ (this matrix belongs to the larger class of the so-called Wigner matrices). Moreover, the renormalized Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ satisfies a Central Limit Theorem (CLT in the sequel) when $d \to \infty$ and n is fixed. A relatively recent research direction on random matrices is the study of the limit behavior in distribution of the Wishart matrix in the "high-dimensional regime", i.e. when both sizes n and d tend to infinity. This research is motivated by the need to handle large data sets nowadays.

A possible way to analyze the behavior of the Wishart matrix in the high-dimensional regime is to evaluate the Wasserstein distance between its probability distribution and the law of its limiting matrix when the sizes n and d are large enough. It was first discovered (independently) in [32] and [96] that, if the entries of the starting matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are independent Gaussian random variables, then the Wasserstein distance between the associated renormalized Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ and its limit (the Wigner matrix (5.29) with $m_4 = 3$) is of order less than $\sqrt{\frac{n^3}{d}}$ which means that $\mathcal{W}_{n,d}$ is "close" to the Wigner matrix when $\frac{n^3}{d}$ tends to zero. Since then, these results have been extended in mainly two directions : by supposing that these entries are independent but with a possibly non- Gaussian distribution, or by assuming that the entries of the initial matrix are (at least partially) correlated. Concerning the second line of research, we mention the recents works [138], [28], [63] in which the authors assume that the correlation between the elements of the initial matrix are correlated and the correlation is related to the correlation structure of the increments of the fractional Brownian motion or of the Hermite process. Our work concerns the first direction of study : we start with a matrix with independent entries, not identically distributed, and we assume that these entries follow a very general probability law. As mentioned before, several works treated this question : besides the case of Gaussian entries studied in [32], [96] (see also [157] for results on the phase transition from the Wishart to the limit matrix and [33] for a discussion of the optimality of the estimates), we mention the paper [33] for entries with a log-concave distribution, the work [116] also for entries with log-concave distribution but only column independent, the work [28] for the situation when the entries belong to a Wiener chaos of arbirary order, or [69] for entries with a general distribution, assuming only the finiteness of their sixth moment.

Our purpose is to extend these results on the behavior of Wishart matrices to a more general situation by using the techniques of the Malliavin calculus. We will assume that the entries of the initial matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are independent random variables which can be expressed as Skorohod (or divergence) integrals. This covers a very general case since basically any centered square integrable random variable can be expressed as a Skorohod integral. Our results are not covered by the findings in [69] due to the following aspects. Firstly, in [69] the authors measure the Wasserstein distance between the law of the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ viewed as vector $\left(W_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n\right)$ and its limit. Notice that the random vector considered in [69] does not include the diagonal terms of the Wishart matrix. This is due to the fact that they use an approach based on the Stein method for exchangeable pairs, which does not allow to include the diagonal of the Wishart matrix. Actually, including the diagonal is not trivial, see [116] (in this reference the author uses the log-concavity of the law of the entries). Secondly, we work with a different distance (the so-called d_2-distance) which is not necessarily defined via Lipschitz functions. We detailed the relation between our findings and those in [69] in Remark 3 and we noticed that in some particular cases, our estimates can be more optimal when the diagonal of the Wishart matrix is considered.

We need in addition some regularity assumptions (in the sense of Malliavin calculus) for the integrands of the Skorohod integrals which define the entries the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ and we will also use the hypothesis of strong independence for the entries of the initial matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ which means more than the usual independence. The strong independence of two square integrable random variables F and G actually means that any component of the chaos expansion of F is independent of any component of the chaos expansion of G. This is the price to pay in order to keep a very general form for the entries of the starting matrix. Under these assumptions, we are able to evaluate the distance (the so-called d_2-distance defined later) between the random vector associated to the Wishart matrix and its limit in distribution and then to deduce the Wasserstein distance (in the matrix sense) between the renormalized Wishart matrix and its limiting Gaussian matrix. We use criteria from the recent Stein-Malliavin calculus and we exploit the strong independence of the entries, which leads to several simplifications in the calculations. Actually, we will prove that this d_2-distance between the distribution of the random vector associated to the Wishart matrix (including the diagonal) and its limit is less than $Cn^2\sqrt{\frac{n^3}{d}}$ and then that the Wasserstein distance between the renormalized Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ and its limit is less $C\frac{n^{\frac{9}{4}}}{d^{\frac{1}{4}}}$, meaning that we lose some speed with respect to the standard bound $\sqrt{\frac{n^3}{d}}$. This is due to the following fact : in a first step we majorate the Wasserstein distance between the laws of the random matrices $\mathcal{W}_{n,d}$ and $\mathcal{Z}_n$ by the Wasserstein distance between their so-called associated half-vectors (defined in Section 5.2.2). But there are no criteria to estimate directly the Wasserstein distance between random vectors whose components are Skorohod integrals and we need to bound it by a new distance (the d_2 distance defined in Section 5.2.2) in order to have some estimates.

Our paper is structured as follows. In Section 2 we describe the basic tools from Malliavin calculus which are needed in our work as well as the distances between random matrices and random vectors. Section 3 is the core of our work : here we introduce our random matrices, we present the assumptions and prepare, state and prove the main result concerning the limit in distribution, under the high-dimensional regime, of the renormalized Wishart matrix. In Section 4 we present some examples where our theoretical results can be applied.

5.2 Preliminaries

This section contains the basic tools from Malliavin calculus needed in our work (the monographs [129] and [139] contain a more complete exposition). We also define the distances between random matrices and random vectors which are used in the sequel.

5.2.1 Malliavin derivative

Let $T \subset \mathbb{R}$ be a nonempty set and denote by $L^2_S(T^p)$ the set of real-valued symmetric square integrable functions on T^p. Let $(B_t)_{t\in T}$ be a Wiener process. Denote by $B(\varphi) := \int_T \varphi_s dB_s$ the Wiener integral of $\varphi \in H := L^2(T, \mathcal{B}(T), \lambda)$ with respect to the Brownian motion B. We denoted by λ the Lebesgue measure and $\mathcal{B}(T)$ stands for the Borel subsets of T. The family $(B(\varphi), \varphi \in H)$ forms an isonormal process, i.e. a Gaussian family of centered random variables such that

$$\mathbf{E}B(\varphi_1)B(\varphi_2) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_H = \int_T \varphi_1(s)\varphi_2(s)ds$$

for any $\varphi_1, \varphi_2 \in H$.

Denote I_n the multiple stochastic integral with respect to B (see [139]). This I_n is actually an isometry between the Hilbert space $H^{\odot n}$(symmetric tensor product) equipped with the scaled norm $\sqrt{n!}\|\cdot\|_{H^{\otimes n}}$ and the Wiener chaos of order n which is defined as the closed linear span of the random variables $H_n(B(\varphi))$ where $\varphi \in H, \|\varphi\|_H = 1$ and H_n is the Hermite polynomial of degree $n \geq 1$

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

The isometry of multiple integrals can be written as : if $\tilde{f}$ denotes the symmetrization of the function f, for m, n positive integers,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(I_n(f)I_m(g)\right) &= n!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{H^{\otimes n}} \quad \text{if } m = n, \\ \mathbf{E}\left(I_n(f)I_m(g)\right) &= 0 \quad \text{if } m \neq n. \end{aligned} \tag{5.2}$$

We will use the product formula for multiple stochastic integrals, if $f \in L^2_S(T^m)$ and $g \in L^2_S(T^n)$, then

$$I_m(f)I_n(g) = \sum_{r=0}^{m\wedge n} r!\binom{m}{r}\binom{n}{r} I_{m+n-2r}(f \otimes_r g) \tag{5.3}$$

where for $r = 0, ..., m \wedge n$, the contraction $f \otimes_r g$ is the function in $L^2(T^{m+n-2r})$ given by

$$(f \otimes_r g)(t_1, ..., t_{m+n-2r}) = \int_{T^r} f(u_1, ..., u_r, t_1, ..., t_{m-r})g(u_1, ..., u_r, t_{m-r+1}, ..., t_{m+n-2r})du_1...du_r. \tag{5.4}$$

Notice that $f \otimes_r g$ is not necesarily a symmetric function (even if f, g are symmetric) and we will denote by $f\tilde{\otimes}_r g$ its symmetrization.

Let $\mathcal{S}$ be the class of smooth functionals of the form

$$F = f(B_{t_1}, .., B_{t_n}), \qquad t_1, .., t_n \in T, \tag{5.5}$$

with $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ with at most polynomial growth (for f and its derivatives). For the random variable (5.5) we define its Malliavin derivative with respect to B by

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_{t_1}, .., B_{t_n})1_{[0,t_i]}(t), \quad t \in T.$$

The operator D is an unbounded closable operator and it can be extended to the closure of $\mathcal{S}$ with respect to the Malliavin -Sobolev norm

$$\|F\|^p_{k,p} = \mathbf{E}|F|^p + \sum_{j=1}^k \mathbf{E}\|D^{(j)}F\|^p_{L^2(T^j)}, \quad F \in \mathcal{S}, p \geq 2, k \geq 1. \tag{5.6}$$

where $D^{(j)}$ stands for the jth iterated Malliavin derivative. This closure will be denoted by $\mathbb{D}^{k,p}$.

The Skorohod integral integral, denoted by δ, is the adjoint operator of D. Its domain is

$$Dom(\delta) = \left\{ u \in L^2\left(T \times \Omega\right), \mathbf{E}\left| \int_T u_s D_s F ds \right| \leq C\|F\|_2 \right\}$$

and we have the duality relationship

$$\mathbf{E}F\delta(u) = \mathbf{E}\int_T D_s F u_s ds, \quad F \in \mathcal{S}, u \in Dom(\delta). \tag{5.7}$$

We set $\mathbb{L}^{k,p} = L^p\left(T; \mathbb{D}^{k,p}\right), k \geq 1, p \geq 2$. This set is a subset of Dom(δ) and it is endowed with the norm

$$\|u\|_{k,p}^p = \int_T \left[\mathbf{E}|u_t|^p + \sum_{j=1}^k \mathbf{E}\|D_{s_1,\ldots,s_k} u_t\|_{L^2(T^j)}^p \right] dt.$$

We recall the Meyer's inequality, for $u \in \mathbb{L}^{k,p}$ with $k \geq 1, p \geq 2$ (see e.g. [139], Proposition 1.5.4)

$$\|\delta(u)\|_{k-1,p} \leq C_p \|u\|_{k,p}. \tag{5.8}$$

We also recall (see e.g. Lemma 1 in [184]) that if $F \in \mathbb{D}^{k,p}$ then $D(-L)^{-1}F \in \mathbb{L}^{k+1,p}$ and

$$\|D(-L)^{-1}F\|_{k+1,p} \leq C_{p,k}\|F\|_{k,p} \tag{5.9}$$

where $(-L)^{-1}$ denotes the pseudo-inverse of the Ornstein-Uhlenbeck operator L, which satisfies $(-L)^{-1}I_n F = \frac{1}{n} I_n(f)$ if $n \geq 1$ and $f \in L^2_S(T^n)$.

The Malliavin derivative D acts on the Wiener chaos as an annihilation operator : if $F = I_n(f)$ with $f \in L^2(T^n)$ symmetric, then $D_t F = n I_{n-1}(f(\cdot, t))$ where "$\cdot$" stands for $n-1$ variables in T.

5.2.2 Distances

Let us recall the definition of some distances between random matrices and random vectors. Let $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ be two random matrices with values in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ (the set of $n \times n$ matrices with real entries). We will denote by d_W the Wasserstein distance between the probability distributions of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$. That is,

$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sup_{\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} \left| \mathbf{E}\left(g(\mathcal{X})\right) - \mathbf{E}\left(g(\mathcal{Y})\right) \right|,$$

where the Lipschitz norm $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ of $g\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{A \neq B, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \frac{|g(A) - g(B)|}{\|A - B\|_{\mathrm{HS}}},$$

with $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ denoting the Hilbert-Schmidt norm on $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

If X, Y are two random vectors in $\mathbb{R}^n$, we will consider the d_2-distance between their probability distributions

$$d_2(X, Y) = \sup_{\|h''\|_\infty \leq 1} |\mathbf{E}h(X) - \mathbf{E}h(Y)| \tag{5.10}$$

where

$$\|h''\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{1\leq i,j\leq n} \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right|.$$

If $\mathcal{X} = \left(X_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ is an $n \times n$ symmetric random matrix, we associate to it its "half-vector" defined to be the $n(n+1)/2$-dimensional random vector

$$\mathcal{X}^{\text{half}} = (X_{1,1}, X_{1,2} \ldots, X_{1,n}, X_{2,2}, X_{2,3}, \ldots, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}). \tag{5.11}$$

It is possible to bound the Wasserstein distance between two random matrices by a constant times the square root of the d_2-distance between their associated half random vectors as follows.

Lemma 6 *If $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ are two symmetric random matrices with values in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ then*

$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leq 4n^{\frac{1}{4}} \sqrt{d_2(\mathcal{X}^{\text{half}}, \mathcal{Y}^{\text{half}})}, \tag{5.12}$$

where $\mathcal{X}^{\text{half}}, \mathcal{Y}^{\text{half}}$ are the associated half-vectors defined in 5.11 and $C > 0$.

Proof : The inequality (5.12) is obtained by combining the results in Lemma 2.2 and Proposition 4.4 in [138]. ■

5.3 The behavior of the Wishart matrix

Here we introduce the starting random matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ and the assumptions on its entries. Then we state and prove some auxiliary results concerning the strong independence, which will be used in the final part for the proof of the main result.

5.3.1 The starting matrix and the assumptions on its entries

We will consider a $n \times d$ random matrix $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$ whose entries are centered, square integrable, independent and they are written in a very general form, as an infinite sum of multiple stochastic integrals with respect to an isonormal process (see Section 5.2.1). More precisely,

$$X_{i,j} = \sum_{p\geq 1} I_p(f_p^{(i,j)}) \tag{5.13}$$

with $f_p^{(i,j)} \in L_S^2(T^p)$ for every $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$ and for every $p \geq 1$. Notice that we can express the entries $X_{i,j}$ as Skorohod integrals

$$X_{i,j} = \delta(u_{i,j}) \text{ with } u_{i,j}(t) = \sum_{p\geq 1} I_{p-1}(f_p^{(i,j)}(\cdot, t)), \quad t \in T$$

where " $\cdot$ " stands for $p-1$ variables. Actually we have

$$u_{i,j}(t) = D_t(-L)^{-1}X_{i,j}, \quad t \in T \tag{5.14}$$

where D is the Malliavin derivative, L denotes the Ornstein-Uhlenbeck operator with respect to B and $(-L)^{-1}$ its pseudo-inverse (see Section 5.2.1). The bound (5.9) assures that $u_{i,j}$ is Skorohod integrable for every $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$.

We will make the following hypothesis :

- **H1 :** We will assume that $(X_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$ are strongly independent random variables. That means that every chaos component of $X_{i,j}$ is independent of every chaos component of $X_{k,l}$ if $(i,j) \neq (k,l)$, i.e. $I_p(f_p^{(i,j)})$ and $I_q(f_q^{(k,l)})$ are independent for every $p, q \geq 1$ and for every $(i,j) \neq (k,l)$.
- **H2 :** For every $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$, the random variables $X_{i,j}$ have the same second and fourth moments (without loss of generality, the second moment is assumed to be 1),

$$\mathbf{E}X_{i,j}^2 = 1 \tag{5.15}$$

and

$$\mathbf{E}X_{i,j}^4 = m_4. \tag{5.16}$$

- **H3 :** The processes $(u_{i,j}(t), t \in T)$ are sufficiently regular in the sense of Malliavin calculus, more precisely, for some $p \geq 8$, for every $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$, $u_{i,j} \in \mathbb{L}^{2,p}$ and

$$\|u_{i,j}\|_{2,p} \leq C_p \tag{5.17}$$

with $C_p > 0$ an universal constant depending only on p.

5.3.2 Some technical results

This paragraph is devoted to the proof of some technical results needed later. These results concern some inequalities for the Malliavin-Sobolev norms and some consequences of the strong independence assumption.

We start with the following crucial lemma, well-known in the Stein-Malliavin calculus.

Lemma 7 *Let $F = \sum_{p\geq 1} I_p(f_p)$ with $f_p \in L_S^2(T^p)$ be a centered random variable in $\mathbb{D}^{k,p}$ with $k \geq 1, p \geq 2$. Then $u = D(-L)^{-1}F \in \mathbb{L}^{k+1,p}$ and*

$$F = \delta D(-L)^{-1}(F). \tag{5.18}$$

In particular $u = D(-L)^{-1}F$ given by $u(t) = \sum_{p\geq 1} I_{p-1}(f_p(\cdot, t))$ for every $t \in T$.

Proof : Let $p \geq 2$. The fact that $u = D(-L)^{-1}F$ belongs to $\mathbb{L}^{1,p}$ follows from the inequality (5.9) while the identity (5.18) is well-known (see e.g. [129]). ■

Lemma 8 *Let $u, v \in \mathbb{L}^{2,2p}$ with $p \geq 1$. Then $\delta(u)\delta(v) \in \mathbb{D}^{1,p}$ and*

$$\|\delta(u)\delta(v)\|_{1,p} \leq C_p \|u\|_{2,2p} \|v\|_{2,2p}.$$

Proof : Let $p \geq 2$. We use the definition of the norm in $\mathbb{D}^{1,p}$, the derivation rule for D and the inequality $(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q)$ for $q \geq 1$, we obtain

$$\begin{aligned}
\|\delta(u)\delta(v)\|_{1,p}^p &= \mathbf{E}\,|\delta(u)\delta(v)|^p + \mathbf{E}\left(\int_T (D_s(\delta(u)\delta(v)))^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \mathbf{E}\,|\delta(u)\delta(v)|^p + \mathbf{E}\left(\int_T [\delta(u)D_s\delta(v) + \delta(v)D_s\delta(u)]^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \mathbf{E}\,|\delta(u)\delta(v)|^p + \mathbf{E}\left(2\int_T ([\delta(u)D_s\delta(v)]^2 + [\delta(v)D_s\delta(u)]^2) ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \mathbf{E}\,|\delta(u)\delta(v)|^p + 2^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}\left(\int_T (\delta(u)D_s\delta(v))^2 ds + \int_T (\delta(v)D_s\delta(u))^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \mathbf{E}\,|\delta(u)\delta(v)|^p + 2^{p-1}\mathbf{E}\left|\delta(u)^p\left(\int_T (D_s\delta(v))^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right| + 2^{p-1}\mathbf{E}\left|\delta(v)^p\left(\int_T (D_s\delta(u))^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right| \\
&\leq (\mathbf{E}\,|\delta(u)|^{2p})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}\,|\delta(v)|^{2p})^{\frac{1}{2}} + 2^{p-1}\left(\mathbf{E}\,|\delta(u)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}\left(\int_T (D_s\delta(v))^2 ds\right)^p\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2^{p-1}\left(\mathbf{E}\,|\delta(v)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}\left(\int_T (D_s\delta(u))^2 ds\right)^p\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Notice that

$$\mathbf{E}\,|\delta(u)|^{2p} \leq \|\delta(u)\|_{1,2p}^{2p} \leq C_p \|u\|_{2,2p}^{2p} \tag{5.20}$$

where the last inequality is obtained via Meyer's inequality (5.8). Clearly a similar bound will hold for v. Also, from the definition of the norm in $\mathbb{D}^{1,2p}$,

$$\mathbf{E}\left(\int_T (D_s\delta(u))^2 ds\right)^p \leq C_p \|\delta(u)\|_{1,2p}^{2p} \leq C_p \|u\|_{2,2p}^{2p}. \tag{5.21}$$

Then the conclusion follows by plugging (5.20) and (5.21) into (5.19). ∎

Let us now state and prove some results concerning the strongly independent random variables. Let us recall a key result from [187] concerning the independence of multiple stochastic integrals. For $n, m \geq 1$, let $f \in L_S^2(T^n)$ and $g \in L_S^2(T^m)$. The multiple Wiener integrals $I_n(f)$ and $I_m(g)$ are independent if and only if (recall the definition (5.4) of the contraction)

$$f \otimes_1 g = 0 \text{ almost everywhere on } T^{m+n-2}. \tag{5.22}$$

Relation (5.22) implies that for $r = 1, ..., n \wedge m$,

$$f \otimes_r g = 0 \text{ almost everywhere on } T^{m+n-2r}. \tag{5.23}$$

Lemma 9 *Consider the random variables $F = \sum_{p\geq 1} I_p(f_p)$ and $G = \sum_{q\geq 1} I_q(g_q)$ with $f_p, g_p \in L^2_S(T_p)$ for every $p \geq 1$. Assume that $F, G \in \mathbb{D}^{1,4}$ and that they are strongly independent. Then*

1. *The random variables F^2 and G^2 are strongly independent.*
2. *Let $u = D(-L)^{-1}F$ and $v = D(-L)^{-1}G$. Then*
$$\langle u, v\rangle_{L^2(T)} = \langle u, DG\rangle_{L^2(T)} = \langle v, DF\rangle_{L^2(T)} = 0 \textit{ almost surely.}$$
3. *Let $u = D(-L)^{-1}F$ and $v = D(-L)^{-1}G$. Then the random variables $\langle DF, u\rangle_{L^2(T)}$ and $\langle DG, v\rangle_{L^2(T)}$ are strongly independent.*
4. *Let $H = \sum_{p\geq 1} I_p(h_p)$, $J = \sum_{q\geq 1} I_q(j_q)$ with $h_p, j_p \in L^2_S(T^p)$ for $p \geq 1$ be two other random variables in $\mathbb{D}^{1,4}$. Assume that F, G, H, J are mutually strongly independent. Then the random variables FG and HJ are strongly independent.*

Proof : For point 1., by the product formula (5.3),

$$F^2 = \sum_{p_1,p_2\geq 1} \sum_{r=0}^{p_1\wedge p_2} r! \binom{p_1}{r}\binom{p_2}{r} I_{p_1+p_2-2r}(f_{p_1} \otimes_r f_{p_2})$$

and

$$G^2 = \sum_{p_1,p_2\geq 1} \sum_{r=0}^{p_1\wedge p_2} r! \binom{p_1}{r}\binom{p_2}{r} I_{p_1+p_2-2r}(g_{p_1} \otimes_r g_{p_2})$$

To obtain the conclusion, it suffices to show that for every $p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 1$ and for every $r_1 = 0, ..., p_1 \wedge p_2$, $r_2 = 0, ..., q_1 \wedge q_2$,

$$(f_{p_1} \tilde{\otimes}_{r_1} f_{p_2}) \otimes_1 (g_{q_1} \tilde{\otimes}_{r_2} g_{q_2}) = 0 \text{ a.e. on } T^{p_1+p_2+q_1+q_2-2r_1-2r_2-2}$$

and this follows by Lemma 3.1 in [28].

Let us prove point 2. For every $t \in T$, we have

$$u(t) = \sum_{p\geq 1} I_{p-1}(f_p(\cdot, t)) \text{ and } v(t) = \sum_{q\geq 1} I_{q-1}(g_q(\cdot, t)).$$

It suffices to show that for every $p, q \geq 1$,

$$\int_T I_{p-1}(f_p(\cdot, t)) I_{q-1}(g_q(\cdot, t)) dt = 0 \text{ almost surely.}$$

Again by the product formula (5.3),

$$\int_T I_{p-1}(f_p(\cdot, t)) I_{q-1}(g_q(\cdot, t)) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_T dt \sum_{r=0}^{(p-1)\wedge(q-1)} r! \binom{p-1}{r}\binom{q-1}{r} I_{p+q-2r-2}(f_p(\cdot,t)\otimes g_q(\cdot,t)) \\
&= \sum_{r=0}^{(p-1)\wedge(q-1)} r! \binom{p-1}{r}\binom{q-1}{r} I_{p+q-2r-2}(f_p \otimes_{r+1} g_q)
\end{aligned}
$$

and by (5.23), for every $g \geq 0$, $f_p \otimes_{r+1} g_q = 0$ almost everywhere on $T^{p+q-2r-2}$. Point 3. is a consequence of Lemma 3.3 in [28].

Let us show the last point of the statement. By the product formula and the strongly independance, we remain with the simple expressions

$$FG = \sum_{p_1,p_2\geq 1} I_{p_1+p_2}(f_{p_1}\otimes g_{p_2})$$

and

$$HJ = \sum_{p_1,p_2\geq 1} I_{p_1+p_2}(h_{p_1}\otimes j_{p_2})$$

Thus, it suffices to show that for every $p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 1$

$$(f_{p_1}\tilde{\otimes} g_{p_2}) \otimes_1 (h_{q_1}\tilde{\otimes} j_{q_2}) = 0 \text{ a.e. on } T^{p_1+p_2+q_1+q_2-2} \tag{5.24}$$

where

$$
\begin{aligned}
&(f_{p_1}\tilde{\otimes} g_{p_2})(t_1,\dots,t_{p_1+p_2}) \\
&\quad = \frac{1}{(p_1+p_2)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p_1+p_2}} f(t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(p_1)}) g(t_{\sigma(p_1+1)},...,t_{\sigma(p_1+p_2)})
\end{aligned}
$$

Similarly,

$$
\begin{aligned}
&(h_{q_1}\tilde{\otimes} j_{q_2})(t_1,\dots,t_{q_1+q_2}) \\
&\quad = \frac{1}{(q_1+q_2)!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{q_1+q_2}} h(t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(q_1)}) j(t_{\sigma(q_1+1)},...,t_{\sigma(q_1+q_2)})
\end{aligned}
$$

Hence, we can write via (5.4),

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(f_{p_1}\tilde{\otimes} g_{p_2}\right)\otimes_1 \left(h_{q_1}\tilde{\otimes} j_{q_2}\right)\right)(t_1,\dots,t_{p_1+p_2+q_1+q_2-2}) \\
&\quad = \int_T (f_{p_1}\tilde{\otimes} g_{p_2})(t_1,\dots,t_{p_1+p_2-1},x)(h_{q_1}\tilde{\otimes} j_{q_2})(t_{p_1+p_2},\dots,t_{p_1+p_2+q_1+q_2-1},x)dx.
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Note that for a symmetric function $h \in H^{\odot n}$, it holds that

$$\tilde{h}(t_1,\dots,t_{n-1},x) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}\sum_{i=1}^{n} h\left(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},\dots,t_{\sigma(n-1)}\right),$$

so that by plugging the above identity into 5.25, we get

$$\left[\left(f_{p_1}\tilde{\otimes}g_{p_2}\right)\otimes_1\left(h_{q_1}\tilde{\otimes}j_{q_1}\right)\right](t_1,\ldots,t_{p_1+p_2+q_1+q_2-2})$$
$$=\frac{1}{(p_1+p_2)!(q_1+q_2)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p_1+p_2-1},\tau\in\mathfrak{S}_{q_1+q_2-1}}\sum_{i=1}^{p_1+p_2}\sum_{j=1}^{q_1+q_2}$$
$$\int_T(f_{p_1}\otimes g_{p_2})(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},\ldots,t_{\sigma(p_1+p_2-1)})$$
$$(h_{q_1}\otimes j_{q_1})(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\tau(j+1)},\ldots,t_{\tau(q_1+q_2-1)})dx.$$

To obtain 5.24, we prove that for all $1\le i\le p_1+p_2$ and $1\le j\le q_1+q_2$,

$$\int_T(f_{p_1}\otimes g_{p_2})(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},\ldots,t_{\sigma(p_1+p_2-1)})$$
$$(h_{q_1}\otimes j_{q_2})(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\tau(j+1)},\ldots,t_{\tau(q_1+q_2-1)})dx=0 \tag{5.26}$$

almost everywhere with respect to $t_1,\ldots,t_{p_1+p_2+q_1+q_2-2}$.

Assume that $1\le i\le p_1$ and $1\le j\le q_1$ (the other cases can be dealt with in the same way). Then, we have

$$\begin{aligned}&\int_T(f_{p_1}\otimes g_{p_2})(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,,t_{\sigma(i+1)},\ldots,t_{\sigma(p_1+p_2-1)})\\&(h_{q_1}\otimes j_{q_2})(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\tau(j+1)},\ldots,t_{\tau(q_1+q_2-1)})dx\\=&\int_T f_{p_1}(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},\ldots,t_{\sigma(p_1-1)})g_{p_2}(t_{\sigma(p_1)},\ldots,t_{\sigma(p_1+p_2-1)})\\&h_{q_2}(t_{\tau(1)},\ldots t_{\tau(j-1)},x,t_{\tau(q_1-1)})j_{q_2}(t_{\tau(q_1)},\ldots,t_{\tau(q_1+q_2-1)})dx.\end{aligned}$$

Now, the strong indepedence and so the fact that the contraction of f and h vanishes, implies for almost every $t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(p_1+p_2-1)},t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(q_1+q_1-1)}$ (see (5.22))

$$\begin{aligned}&\int_T f_{p_1}(t_{\sigma(1)},t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},...,t_{\sigma(p_1-1)})g_{p_2}(t_{\sigma(p_1)},\ldots,t_{\sigma(p_1+p_2-1)})\\&\times h_{q_1}(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\sigma(j+1)},...,t_{\sigma(q_1-1)})j_{q_2}(t_{\tau(q_1)},\ldots,t_{\tau(q_1+q_2-1)})dx\\=\;&g_{p_2}(t_{\sigma(p_1)},\ldots,t_{\sigma(p_1+p_2-1)})j_{q_2}(t_{\tau(q_1)},\ldots,t_{\tau(q_1+q_2-1)})\\&\times\int_T f_{p_2}(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i+1)},...,t_{\sigma(p_1-1)})h_{q_1}(t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(j-1)},x,t_{\sigma(j+1)},...,t_{\sigma(q_1-1)})dx\\=\;&0\end{aligned}$$

which concludes the proof. ■

5.3.3 The Wishart matrix and its asymptotic behavior

We introduce the (renormalized) Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d} = (W_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ associated to the starting matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ whose entries are given in (5.13),

$$\mathcal{W}_{n,d} = \sqrt{d}\left(\frac{1}{d}\mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T - \mathcal{I}_n\right)$$

where "^{T}" denotes the transpose and $\mathcal{I}_n$ the identity $n \times n$ matrix. Its components are

$$W_{i,i} = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=1}^{d}(X_{i,k}^2 - 1), \text{ for } 1 \leq i \leq n \tag{5.27}$$

and

$$W_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k=1}^{d} X_{i,k}X_{j,k} \text{ for } 1 \leq i,j \leq n, i \neq j. \tag{5.28}$$

The independence of the components of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ and the assumptions (5.15), (5.16) imply

$$\mathbf{E}W_{i,i}^2 = m_4 - 1 \text{ and } \mathbf{E}W_{i,j}^2 = 1 \text{ for } 1 \leq i,j \leq n, i \neq j.$$

Also, consider the Wigner matrix $\mathcal{Z}_n = \left(Z_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ with entries given by

$$\begin{cases} Z_{i,i} \sim N(0, m_4 - 1) & \text{for } 1 \leq i \leq n \\ Z_{i,j} \sim N(0,1) & \text{for } 1 \leq i < j \leq n\ , \\ Z_{i,j} = Z_{j,i} & \text{for } 1 \leq j < i \leq n \end{cases} \tag{5.29}$$

where the entries $\left(Z_{i,j} : i \leq j\right)$ are (mutually) independent. Clearly, by the standard Central Limit Theorem, the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ converges componentwise in distribution, as $d \to \infty$ to the Wigner matrix $\mathcal{Z}_n$ when n is fixed. We are interested to evaluate the distance between $\mathcal{W}_{n,d}$ and the Wigner matrix when both dimensions n, d are large enough.

Our main tool to evaluate the distance between the Wishart and Wigner matrices is the following result (Proposition 2.3 in [90], see also relation (4.6) and the footnote (6) in [138]).

Proposition 4 *Let $F = (F_1, ..., , F_m)$ be a random vector with $F_i = \delta(u_i), u_i \in Dom(\delta)$ and $F_i \in \mathbb{D}^{1,2}$ for every $1 \leq i \leq m$. Let Z be a centered Gaussian vector with covariance matrix $C = (C_{i,j})_{1\leq i,j\leq m}$. Then*

$$d_2(F,Z) \leq \frac{m}{2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m}\mathbf{E}\left(C_{i,j} - \langle DF_i, u_j\rangle_{L^2(T)}\right)^2}.$$

Let us observe that the elements of the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ can be written as Skorohod integrals. Indeed, since for every $1 \leq k \leq d$ and $1 \leq i,j \leq n$ with $i \neq j$ the random variables $X_{i,k}^2 - 1$

and $X_{i,k}X_{j,k}$ are centered (by assumption (5.15)) and sufficiently regular (by **H3**). Then by Lemma 7, we have

$$X_{i,k}^2 - 1 = \delta D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2 - 1), \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq d. \tag{5.30}$$

Consequently, the diagonal entries of the Wishart matrix can be expressed as, for every $1 \leq i \leq n$,

$$W_{i,i} = \delta(V_{i,i}) \text{ with } V_{i,i} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^{d} D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2 - 1). \tag{5.31}$$

Similarly, for every $1 \leq i, j \leq n$ with $i \neq j$, we have

$$W_{i,j} = \delta(V_{i,j}) \text{ with } \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^{d} D(-L)^{-1} X_{i,k}X_{j,k}. \tag{5.32}$$

Since all the elements of $\mathcal{W}_{n,d}$ can be expressed as Skorohod integrals, we will apply Proposition 4 in order to evaluate the d_2-distance between the half vectors associated to the $\mathcal{W}_{n,d}$ and to the Wigner matrix $\mathcal{Z}_n$. To this end we need to calculate and to evaluate the quantity

$$\mathbf{E}\left(\langle DW_{i,j}, V_{a,b}\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}(Z_{i,j}Z_{a,b})\right)^2 \tag{5.33}$$

for every $1 \leq i, j, a, b \leq n$ with $i \leq j$ and $a \leq b$. The processes $V_{i,j}$ are those defined in (5.31) and (5.32) respectively.

If $1 \leq i, j, a, b \leq n$, we denote by $M_{i,j,a,b}$ the subset of $\{1, 2, .., n\}^4$ such that $i \leq j, a \leq b$ and $\{i, j\} \cap \{a, b\} = \emptyset$. The quantity (5.33) is estimated in the below result.

Proposition 5 *Assume* **H1**-**H3**. *Let* $\left(W_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\right)$ *be given by (5.27), (5.28). Then for* $1 \leq i, j, a, b \leq n$ *with* $i \leq j, a \leq b$,

$$\mathbf{E}\left(\langle DW_{i,j}, V_{a,b}\rangle - \mathbf{E}Z_{i,j}Z_{a,b}\right)^2 \leq C\frac{1}{d} \text{ if } (i, j, a, b) \notin M_{i,j,a,b}$$

and

$$\langle DW_{i,j}, V_{a,b}\rangle - \mathbf{E}Z_{i,j}Z_{a,b} = 0 \text{ if } (i, j, a, b) \in M_{i,j,a,b}.$$

Proof : Assume $(i, j, a, b) \notin M_{i,j,a,b}$. We separate the proof into the following cases : $(i = j = a = b), (i = a \neq j = b)$ and $(i = a$ or $j = b)$. Note that $\mathbf{E}\left(Z_{i,i}^2\right) = m_4 - 1$, $\mathbf{E}\left(Z_{i,j}^2\right) = 1$ if $i \neq j$, and $\mathbf{E}\left(Z_{i,j}Z_{a,b}\right) = 0$ if $(i, j) \neq (a, b)$.

Let us consider first the case $i = j = a = b$. We have,

$$\langle DW_{i,i}, V_{i,i}\rangle = \frac{1}{d} \sum_{k,l=1}^{d} \langle D(X_{i,k}^2 - 1), D(-L)^{-1}(X_{i,l}^2 - 1)\rangle_{L^2(T)}.$$

Notice that $X_{i,k}^2$ is strongly independent, for $k \neq l$, by $X_{i,l}^2$ by Lemma 9, point 1. Therefore, by Lemma 9, point 2. we have

$$\langle D(X_{i,k}^2 - 1), D(-L)^{-1}(X_{i,l}^2 - 1)\rangle_{L^2(T)} = 0 \text{ if } 1 \leq k, l \leq d, k \neq l.$$

Thus we can write

$$\langle DW_{i,i}, V_{i,i}\rangle = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}.$$

On the other hand, by the duality formula (5.7), (5.30) and assumptions (5.15), (5.16),

$$\mathbf{E}\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)} = \mathbf{E}(X_{i,k}^2-1)\delta(D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)) = \mathbf{E}\left(X_{i,k}^2-1\right)^2 = m_4-1.$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\langle DW_{i,i}, V_{i,i}\rangle - (m_4-1)\right)^2\\
=\ & \frac{1}{d^2}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}\right)^2\\
=\ & \frac{1}{d^2}\sum_{k,l=1}^{d}\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}\right)\\
&\times\left(\langle D(X_{i,l}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,l}^2-1)\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,l}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,l}^2-1)\rangle_{L^2(T)}\right)\\
=\ & \frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d}\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}\right)^2.
\end{aligned}$$

We used the fact that for $k \neq l$, the random variables $X_{i,k}^2$ and $X_{i,l}^2$ are strongly independent (Lemma 9, point 1.) and also the fact that $\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}$ and $\langle D(X_{i,l}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,l}^2-1)\rangle_{L^2(T)}$ are independent (Lemma 9, point 3.)

It suffices to show that for every i, k,

$$\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}\right)^2 \leq C$$

with $C > 0$ an universal constant (not depending on i, k). We have

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}\right)^2\\
\leq\ & \mathbf{E}\left(\|D(X_{i,k}^2-1)\|_{L^2(T)}^2\|D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\|_{L^2(T)}^2\right)\\
\leq\ & \left(\mathbf{E}\|D(X_{i,k}^2-1)\|_{L^2(T)}^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}\|D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\|_{L^2(T)}^4\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leq\ & C\|X_{i,k}^2-1\|_{1,4}^2\|D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\|_{1,4}^2
\end{aligned}\tag{5.34}$$

and by Lemma 7 and (5.9),

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}^2-1), D(-L)^{-1}(X_{i,k}^2-1)\rangle_{L^2(T)}\right)^2\\
\leq\ & \|\delta(u_{i,k})^2-1\|_{1,4}^2\|\delta(u_{i,k})^2-1\|_{L^4(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

$$\leq \quad C(\|u_{i,k}\|_{2,8}^{8}+1) \leq C$$

due to (5.17).

Now, let us assume $i = a \neq j = b$ and compute the term $\langle DW_{i,j}, V_{i,j}\rangle_{L^2(T)}$ with $i \neq j$ where $W_{i,j}, V_{i,j}$ are given by (5.28) and (5.32) respectively.

Since the random variables $X_{i,k}X_{j,k}$ are centered for every $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq d$, we have using Lemma 7

$$X_{i,k}X_{j,k} = \delta(D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k}))$$

and by Lemma 9 point 4. $X_{i,k}X_{j,k}$ and $X_{i,l}X_{j,l}$ are strongly independant for $k \neq l$. The same Lemma 9 point 2. implies

$$\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,l}X_{j,l})\rangle_{L^2(T)} = 0 \text{ if } 1 \leq k \neq l \leq d$$

and consequently

$$\langle DW_{i,j}, V_{i,j}\rangle = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)} \tag{5.35}$$

Moreover, using again the duality formula, the strongly independence and assumption (5.15),

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)} \\ = \quad & \mathbf{E}(X_{i,k}X_{j,k}\delta(D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})) = \mathbf{E}\left(X_{i,k}^2X_{j,k}^2\right) = 1. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\langle DW_{i,j}, V_{i,j}\rangle - 1\right)^2 \\ = \quad & \frac{1}{d^2}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}\right)^2 \\ = \quad & \frac{1}{d^2}\sum_{k,l=1}^{d}\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}\right) \\ & \times\left(\langle D(X_{i,l}X_{j,l}), D(-L)^{-1}(X_{i,l}X_{j,l})\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,l}X_{j,l}), D(-L)^{-1}(X_{i,l}X_{j,l})\rangle_{L^2(T)}\right) \\ = \quad & \frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d}\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)} - \mathbf{E}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}\right)^2. \end{aligned}$$

We also used the fact that for $k \neq l$, the random variables $\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}$ and $\langle D(X_{i,l}X_{j,l}), D(-L)^{-1}(X_{i,l}X_{j,l})\rangle_{L^2(T)}$ are also strongly independent due to point 3. in Lemma 9.

It suffices to show that for every $i \neq j, k$, with $C > 0$ not depending on these parameters,

$$\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}\right)^2 \leq C.$$

We have

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}\right)^2 \\
\leq\ & \mathbf{E}\left(\|D(X_{i,k}X_{j,k})\|^2_{L^2(T)}\|D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\|^2_{L^2(T)}\right) \\
\leq\ & \left(\mathbf{E}\|D(X_{i,k}X_{j,k})\|^4_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}\|D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\|^4_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & \|X_{i,k}X_{j,k}\|^2_{1,4}\|D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\|^2_{1,4}
\end{aligned}
$$

and by Lemma 8 and (5.9), by proceeding as for the bound (5.34),

$$
\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{j,k})\rangle_{L^2(T)}\right)^2 \leq C_p\|u_{i,k}\|^4_{2,8}\|u_{j,k}\|^4_{2,8} \leq C
$$

where the last inequality is due to the assumption **H3**.

Next case we have to deal is when $i = a,\ j \neq b$, (by symmetry we can deduce the case $i \neq a$ $j = b$). Using the same arguments as above and assuming $i < j$ and $i \leq b$, we get

$$
\begin{aligned}
\langle DW_{i,j}, V_{i,b}\rangle &= \frac{1}{d}\sum_{k,l=1}^{d}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,l}X_{b,l})\rangle_{L^2(T)} \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{b,k})\rangle_{L^2(T)}
\end{aligned}
$$

.

Moreover by the same bounds as above, the following inequality is verified for every (i, j, b, k) such as (i, j, b) are all distinct

$$
\mathbf{E}\left(\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{i,k}X_{b,k})\rangle_{L^2(T)}\right)^2 \leq C
$$

The next case is when $(i, j, a, b) \in M_{i,j,a,b}$,

$$
\begin{aligned}
\langle DW_{i,j}, V_{a,b}\rangle &= \frac{1}{d}\sum_{k,l=1}^{d}\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{a,l}X_{b,l})\rangle_{L^2(T)} \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k,l=1}^{d}\langle D(\delta(u_{i,k})\delta(u_{j,k})), D(-L)^{-1}(\delta(u_{a,l})\delta(u_{b,l})\rangle_{L^2(T)}.
\end{aligned}
$$

We have, by using Lemma 9, points 2 and 4., $\forall\ 1 \leq k, l \leq d$

$$
\langle D(X_{i,k}X_{j,k}), D(-L)^{-1}(X_{a,l}X_{b,l})\rangle_{L^2(T)} = 0 \text{ if } (i, j, a, b) \in M_{i,j,a,b}
$$

Hence $\forall\ (i, j, a, b) \in M_{i,j,a,b}$,

$$
\langle DW_{i,j}, V_{a,b}\rangle = 0
$$

■

The above result allows to evaluate the d_2-distance between the half-vector associated to the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ and its limit. Recall that the half-vector associated to a matrix is defined by (5.11).

Theorem 9 *Assume that $\mathcal{W}_{n,d}$ has the entries given by (5.27) and (5.28) and consider the Wigner matrix (5.29). Then for every $n, d \geq 1$, and for any function $h : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \mathbb{R}$ with bounded second partial derivative,*

$$\left|\mathbf{E}h(\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\mathcal{Z}_n^{\text{half}}\right| \leq Cn^2 \sqrt{\frac{n^3}{d}} \tag{5.36}$$

and consequently

$$d_2\left(\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}, \mathcal{Z}_n^{\text{half}}\right) \leq Cn^2 \sqrt{\frac{n^3}{d}}.$$

Proof : It suffices to use Proposition 4 and the estimates in Proposition 5, by noticing that the dimension of the vectors $\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}$ and $\mathcal{Z}_n^{\text{half}}$ is $\frac{n(n+1)}{2}$ and the cardinal of the set $\overline{M_{i,j,a,b}}$ (the complement of the set $M_{i,j,a,b}$) is less than $6n^3$. ■

Remark 3 *Let us denore by $\overline{\mathcal{W}}_{n,d}^{\text{half}}$ and $\overline{\mathcal{Z}}_n^{\text{half}}$ the following random vectors :*

$$\overline{\mathcal{W}}_{n,d}^{\text{half}} = (W_{1,2}, \ldots, W_{1,n}, W_{2,3}, \ldots, W_{2,n}, \ldots, W_{n-1,n})$$

and

$$\overline{\mathcal{Z}}_n^{\text{half}} = (Z_{1,2}, \ldots, Z_{1,n}, Z_{2,3}, \ldots, Z_{2,n}, \ldots, Z_{n-1,n}).$$

That is, the components of the above vectors are the components of $\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}$ and $\mathcal{Z}_n^{\text{half}}$ without the diagonal terms. It follows from Theorem 1.2 in [69] that for any suitable function $h : \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \to \mathbb{R}$ (in particular h is Lipschitz but it also satisfies additional conditions),

$$\left|\mathbf{E}h(\overline{\mathcal{W}}_{n,d}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\overline{\mathcal{Z}}_n^{\text{half}})\right| \leq C\sqrt{\frac{n^3}{d}}. \tag{5.37}$$

Notice that the above estimate (5.37) does not take into account the diagonal of the matrice $\mathcal{W}_{n,d}$, which is not trivial to include (actually, in [116] one uses the log-concavity of the distribution of the entries in order to include the diagonal terms). Moreover, if we would use the triangle inequality (which is not probably, the most optimal choice),

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}h(\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\mathcal{Z}_n^{\text{half}})\right| \quad &\leq \quad \left|\mathbf{E}h(\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\overline{\mathcal{W}}_{n,d}^{\text{half}})\right| \\ &+ \left|\mathbf{E}h(\overline{\mathcal{W}}_{n,d}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\overline{\mathcal{Z}}_n^{\text{half}})\right| + \left|\mathbf{E}h(\overline{\mathcal{Z}}_n^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\mathcal{Z}_n^{\text{half}})\right| \end{aligned} \tag{5.38}$$

where we kept the notation $\overline{\mathcal{W}_{n,d}}^{\text{half}}$ *for the random vector* $(0, W_{1,2}, \ldots, W_{1,n}, W_{2,1}, 0, W_{2,3}, \ldots, W_{2,n}, \ldots, W_{n-1,n}, 0)$. *It is easy to see that, since h is Lipschitz,*

$$\left|\mathbf{E}h(\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\overline{\mathcal{W}_{n,d}}^{\text{half}})\right| \leq C\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} W_{i.i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq C\left[\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} W_{i.i}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{d}\left[\mathbf{E}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d}(X_{i,k}^2 - 1)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (m_4 - 1)\sqrt{n} \tag{5.39}$$

and a similar estimate holds for $\left|\mathbf{E}h(\overline{\mathcal{Z}_n}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\mathcal{Z}_n^{\text{half}})\right|$. *By plugging (5.37) and (5.39) into (5.38), we would get* $\left|\mathbf{E}h(\mathcal{W}_{n,d}^{\text{half}}) - \mathbf{E}h(\mathcal{Z}_n^{\text{half}})\right| \leq C\left(\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n^3}{d}}\right)$ *which is, for large enough d, a worse estimate than (5.36). We also refer to Remark 1.5 in [69] for similar estimates when the covariance matrix of* $\mathcal{Z}_n$ *is not invertible.*

We state our main result.

Theorem 10 *Consider the Wishart matrix* $\mathcal{W}_{n,d}$ *with entries (5.27) and (5.28) and assume* **H1** - **H3**. *Then for every* $n \geq 1$, *the matrix* $\mathcal{W}_{n,d}$ *converges compontwise in law, as* $d \to \infty$, *to the Wigner matrix* Z_n *defined by (5.29) and for every* $n, d \geq 1$, *there exists* $C > 0$ *such that*

$$d_W(\mathcal{W}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq C\frac{n^{\frac{9}{4}}}{d^{\frac{1}{4}}}$$

Proof : By Lemma 6 we have, since the dimension of the half-vector associated to $\mathcal{W}_{h,d}$ is $\frac{n(n+1)}{2}$,

$$d_W(\mathcal{W}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq Cn^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\mathbf{E}\left(C_{i,j} - \langle D\tilde{W}_{i,j}, V_{k,l}\rangle_{L^2(T)}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

and by Proposition 5, we obtain, since the cardinal of the set $\overline{M_{i,j,a,b}}$ is less than $6n^3$,

$$d_W(\mathcal{W}_{n,d}, \mathcal{Z}_n) \leq C\frac{n^{\frac{9}{4}}}{d^{\frac{1}{4}}}.$$

■

In the literature, one usually says that $\mathcal{W}_{n,d}$ is "Φ-close to $\mathcal{Z}_n$", where $\Phi_{n,d} = \frac{n^{\frac{9}{4}}}{d^{\frac{1}{4}}}$. As commented in the introduction, we have lost some speed with respect to the classical bound $C\sqrt{\frac{n^3}{d}}$. This is due to the need to use the d_2 distance between random vectors.

5.4 Examples

We present few examples of random matrices to which our main result can be applied.

5.4.1 Random entries in a finite sum of Wiener chaoses

Let us consider a starting matrix $\mathcal{X}_{n,d} = (X_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$ such that every random variable $X_{i,j}$ can be expanded into a finite sum of Wiener chaos, i.e. for every $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq d$ we have, with $N \geq 1$ integer

$$X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} I_{q_{i,j}^{(k)}}\left(f_{i,j}^{k}\right) \text{ with } f_{i,j}^{(k)} \in L_S^2(T^{q_{i,j}^{(k)}})$$

where $q_{i,j}^{(k)} \geq 1$ are interger numbers for every $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$ and $1 \leq k \leq N$. Assume that the family of random variables $(F_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$ are independent where

$$F_{i,j} = \left(I_{q_{i,j}^{(k)}}, k = 1, ..., N\right).$$

This ensures the strong indeoendence of the entries of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ (assumption **H1**). We need to assume (5.15) and (5.16) in order that **H2** holds true. Moreover, it is well-known that the assumption **H3** is satisfied for variables in a finite sum of Wiener chaoses (actually we have $X_{i,j}, D(-L)^{-1}X_{i,j} \in \mathbb{D}^{k,p}$ for every $k \geq 1$ and $p \geq 2$).

This example contains as a particular case a result in [28] (where the entries of $\mathcal{X}_{n,d}$ are assume to be in a Wiener chaos of fixed order).

5.4.2 Explicit probability laws in a finite sum of Wiener chaoses

A particular case of the previous example is when the elements $X_{i,j}$ have the same probability distribution. For example, we can consider

$$X_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(W(h_{i,j}) + W(g_{i,j})^2 - 1\right)$$

where W is a Wiener process and $\left(h_{i,j}, g_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d\right)$ constitutes a family of orthogonal elements in $L^2(T)$. We can also write

$$X_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(I_1(h_{i,j}) + I_2(g_{i,j}^{\otimes 2})\right).$$

Then $(X_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$ is a family of strongly independent random variable and assumptions **H2**-**H3** are also verified.

5.4.3 Random variables with an infinite chaos expansion

It is possible to provide examples of random variables with an infinite chaotic decomposition which satisfy **H1**-**H3**. Let for $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$

$$Y_{i,j} = e^{W(A_{i,j})-\frac{1}{2}} - 1 \text{ and } X_{i,j} = \frac{Y_{i,j}}{(\mathbf{E}Y_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

where $A_{i,j}$ are disjoint intervals of length one and $W(A_{i,j}) = \int_{A_{i,j}} dW_s$. Then for every $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$, we have (see e.g. [139])

$$X_{i,j} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} I_n(1_{A_{i,j}}^{\otimes n})$$

and therefore $(X_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$ is a family of strongly independent random variables with infinite chaos expansion. It is easy to see that **H2** holds true while to check **H3**, we can use for example the bound (5.9). ■

Chapitre 6

Non central limit theorem for Wishart matrix with Hermite entries

This article is published in *Journal of Stochastic Analysis* : Vol. 2 : No. 1 , Article 2.

Joint work with Ciprian Tudor

Abstract : We analyze the limit behavior of the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d} = \mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T$ constructed from an $n \times d$ random matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ whose entries are given by the increments of the Hermite process. These entries are correlated on the same row, independent from one row to another and their probability distribution is different on different rows. We prove that the Wishart matrix converges in law, as $d \to \infty$, to a diagonal random matrix whose diagonal elements are random variables in the second Wiener chaos. We also estimate the Wasserstein distance associated to this convergence.

6.1 Introduction

The Wishart matrices constitutes a class of random matrices with various applications. Given a $n \times d$ random matrix $\mathcal{X}_{n,d}$, its associated Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ can be defined as $\mathcal{W}_{n,d} = \mathcal{X}_{n,d}\mathcal{X}_{n,d}^T$, where "^{T}", denotes the transpose matrix. More complete descriptions of the Wishart matrices and of their applications in practice can be found e.g. in the surveys [22] or [98].

Of particular interest is the behavior of the Wishart matrices for large set data, i.e. when $d \to \infty$ ("one dimensional regime") of when both $n, d \to \infty$ ("high-dimensional regime"). Different approaches have been used (eigenvalues analysis, empirical distribution, Wasserstein distance etc) in order to understand the behavior of such matrices when the dimensions n, d go the infinity.

The limit behavior of the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ obviously depends on the probability distribution of the entries of the starting matrix $\mathcal{X}_{n,d}$. In their majority, the references related to this subject assume the independence (and many times the same distribution) for the entries of $\mathcal{X}_{n,d}$ (see e.g. [32], [33], [96], [157]). Relaxing the independence hypothesis constitutes a topic of interest with important potential for applications (see e.g. the discussion in [33]). Such a step has been done in the work [138], where the authors consider a starting matrix with correlated Gaussian elements on the rows, the correlation being given by the fractional Brownian noise. A further step has been made in [28], where the same correlation on rows has been considered, but the law of the entries of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ are not Gaussian anymore, being random variables in the second Wiener chaos (actually, they are increments of the so-called Rosenblatt process). Both references [138] and [28] use the techniques of Malliavin calculus or the stochastic analysis on Wiener chaos in order to prove the main results.

Our work continues the line of research in [138] and [28]. The novelty is that we begin with a random matrix whose entries are elements in a Wiener chaos of arbitrary order and we also allow correlation for the entries on the same row of the matrix. The entries on different lines are independent but not necessarily with the same distribution. More precisely, the entries on the ith line are assumed to be given by the increments of the Hermite process of order q_i with $q_i \geq 2$ and with q_i possibly different of q_j if $i \neq j$. Recall that the Hermite process is a non-Gaussian self-similar process. It also has stationary increments and it lives in the qth Wiener chaos. For $q = 1$ it coincides with the fractional Brownian motion while for $q = 2$ it is known as the Rosenblatt process. In this sense, we extend the approach in [28] (where $q_i = 2$ for every $i = 1, \dots n$).

We show that the limit distribution as $d \to \infty$ of the (properly normalized) Wishart matrix constructed from a matrix with Hermite entries in the qth Wiener chaos converges (componentwise) in distribution to a $n \times n$ diagonal random matrix, whose diagonal elements are Rosenblatt random variables (i.e. the value at time 1 of a Rosenblatt process) living in a second Wiener chaos or they vanish. We also measure the Wasserstein distance between the renormalized Wishart matrix and its limiting random matrix. Our proofs rely on the properties of the random variables in Wiener chaos and in particular on the behavior of the quadratic and cross variation of the Hermite process.

We organized our work as follows. In Section 2 we recall the basic facts related to the Hermite processes and to the Wasserstein distance. In Section 3 we introduce the random matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ and we analyze the limit behavior in distribution of its associated Wishart matrix. In Section 4, we estimate the Wasserstein distance which corresponds to this convergence in law. The last section (Section 5) is the Appendix which contains the definition and the properties of the multiple stochastic integrals.

6.2 Preliminaries

In this preliminary part, we recall the definition and the main properties of the Hermite processes and of the Wasserstein distance between two random matrices and between two randon vectors.

6.2.1 The Hermite process

We will denote by $(Z_t^{(q,H)})_{t\geq 0}$ the Hermite process of order $q \geq 1$ and with self-similarity index $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. It is a self-similar process, it has stationary increments and long memory and its trajectories are Hölder continuous of order δ for every $\delta \in (0, H)$. For every $t > 0$, the random variable $Z_t^{(q,H)}$ is an element of the qth Wiener chaos and consequently it can be represented as a multiple stochastic integral of order q with respect to the Brownian motion. There exist several such representations of the Hermite processes, see e.g. [150] or [185]. Here we made the choice to work with its representation on a finite interval, that is, for every $t \geq 0$,

$$Z_t^{(q,H)} = d(q,H) \int_{[0,t]^q} \left(\int_{y_1 \vee \ldots \vee y_q}^t \partial_1 K^{H'}(u, y_1) \ldots \partial_1 K^{H'}(u, y_q) du \right) dB(y_1) \ldots dB(y_q) \tag{6.1}$$

where $(B(y))_{y \geq 0}$ is a Wiener process. We used the notation

$$H' = 1 + \frac{H-1}{q} \text{ and } d(H,q) = \frac{(H(2H-1))^{1/2}}{(q!(H'(2H'-1))^q)^{1/2}} \tag{6.2}$$

and for $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and $t > s$,

$$K^H(t,s) = c(H) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du \tag{6.3}$$

with $c(H) = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2}}$ and with β standing for the beta function (see e.g. [139]). The notation $\partial_1 K^H(t,s)$ means the derivative of the function K^H with respect to its first variable and from (6.3), we have

$$\partial_1 K^H(t,s) = c(H) \left(H - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{2}-H} (t-s)^{H-\frac{3}{2}}. \tag{6.4}$$

We can also write $Z^{(q,H)}$ as

$$Z_t^{(q,H)} = I_q(L_t)$$

where I_q denotes the multiple Wiener-Itô integral with respect to the (two-sided) Brownian motion B and the kernel L of the Hermite process is given by

$$L_t(y_1, y_2, ..., y_q) = d(q,H) 1_{[0,t] \times \ldots \times [0,t]}(y_1, y_2, ..., y_q) \int_{y_1 \vee \ldots \vee y_q}^t \partial_1 K^{H'}(u, y_1) \ldots \partial_1 K^{H'}(u, y_q) du \tag{6.5}$$

for every $y_1, y_2, ..., y_q \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$.

The covariance of the Hermite process is the same for all $q \geq 1$ and it is given by

$$\mathbf{E} Z_t^{(q,H)} Z_s^{(q,H)} = \frac{1}{2} \left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right) \text{ for all } s,t \geq 0. \tag{6.6}$$

When $q = 1$, the Hermite process $Z^{(1,H)}$ is nothing else than the fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and in this case the covariance (6.6) determines its law. This is not the case for $q \geq 2$, the Hermite process being not Gaussian in this situation. For $q = 2$, the process $Z^{(2,H)}$ is known in the literature as the Rosenblatt process.

A random variable is called a Hermite random variable of order q if its law coincides with the law of $Z_1^{(q,H)}$. If $q = 2$, we will call such a random variable a Rosenblatt random variable.

Let $\left(Z_j^{(q,H)} - Z_{j-1}^{(q,H)}, j \geq 1\right)$ be the noise generated by the Hermite process. From the covariance formula (6.6) we deduce that this sequence is stationary and its correlation is given by, for $j, k \geq 1$,

$$\mathbf{E}\left(Z_j^{(q,H)} - Z_{j-1}^{(q,H)}\right)\left(Z_k^{(q,H)} - Z_{k-1}^{(q,H)}\right) = \rho_H(j-k)$$

where for every $v \in \mathbb{Z}$,

$$\rho_H(v) = \frac{1}{2}\left(|v+1|^{2H} + |v-1|^{2H} - 2|v|^{2H}\right). \tag{6.7}$$

In particular, the function ρ_H satisfies $\rho_H(0) = 1$ and $\rho_H(-v) = \rho_H(v)$ for every $v \in \mathbb{Z}$.

6.2.2 Wasserstein distance between random matrices and vectors

Let $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ be two random matrices with values in $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. We will denote by d_W the Wasserstein distance between the probability distributions of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$. That is,

$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sup_{\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} |\mathbf{E}(g(\mathcal{X})) - \mathbf{E}(g(\mathcal{Y}))|,$$

where the Lipschitz norm $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ of $g\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{A \neq B, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \frac{|g(A) - g(B)|}{\|A - B\|_{\mathrm{HS}}},$$

with $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ denoting the Hilbert-Schmidt norm on $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

In our work, the distances between random matrices will be evaluated via the distances between their associated random vectors. We recall that if X, Y are two n-dimensional random vectors, then the Wasserstein distance between them is defined to be

$$d_W(X, Y) = \sup_{\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} |\mathbf{E}(g(X)) - \mathbf{E}(g(Y))|, \tag{6.8}$$

where the Lipschitz norm $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ of $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|g(x) - g(y)|}{\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}},$$

with $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ denoting the Euclidean norm on $\mathbb{R}^n$. If $\mathcal{X} = \left(X_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ is an $n \times n$ symmetric random matrix, we associate to it its "half-vector" defined to be the $n(n+1)/2$-dimensional random vector

$$\mathcal{X}^{\mathrm{half}} = (X_{11}, X_{12} \ldots, X_{1n}, X_{22}, X_{23}, \ldots, X_{2n}, \ldots, X_{nn}). \tag{6.9}$$

The following result has been proven in [138]. It gives the link between the distance of two symmetric random matrices and their associated half vectors : if $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ are two symmetric random matrices with values in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ then

$$d_W(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leq \sqrt{2} d_W(\mathcal{X}^{\mathrm{half}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{half}}),$$

where $\mathcal{X}^{\mathrm{half}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{half}}$ are the associated half-vectors defined in 6.9.

6.3 The Wishart matrix with Hermite entries

Let $B = \left(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}\right)$ be a n-dimensional Brownian motion. We will denote by $I_q^{(i)}$ the multiple stochastic integral of order $q \geq 1$ with respect to the Wiener process $B^{(i)}$ for every $i = 1, \ldots, n$, see the Appendix.

We fix in the sequel n integer numbers $q_1, \ldots, q_n \geq 2$. We let, for $i = 1, \ldots n$ and for $t \geq 0$,

$$Z^{(q_i,H,i)} = I_{q_i}^{(i)}(L_t)$$

with L_t given by (6.5), That means that $Z^{(q_i,H,i)}$, $1 \leq i \leq n$ are n independent Hermite processes, all of them with self-similarity index $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and of order $q_i \geq 2$ respectively.

We will start with a $n \times d$ random matrix $\mathcal{X} = (X_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$ whose entries are given by

$$X_{i,j} = Z_j^{(q_i,H,i)} - Z_{j-1}^{(q_i,H,i)} = I_{q_i}^{(i)}(L_j - L_{j-1}) \text{ for } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d. \tag{6.10}$$

The elements of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ satisfy the following properties :

- all the entries on the line i have the same probability distribution, which coincides with the law of a Hermite random variable $Z_1^{(q_i,H)}$. In particular, for every $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d$

$$\mathbf{E} X_{i,j}^2 = q! \| L_j - L_{j-1} \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 1.$$

- the elements on the same row are correlated and this correlation is given by the correlation of the Hermite noise. That is, for $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j, k \leq d$,

$$\mathbf{E} X_{i,j} X_{i,k} = \mathbf{E}\left(Z_j^{(q_i,H,i)} - Z_{j-1}^{(q_i,H,i)}\right)\left(Z_k^{(q_i,H,i)} - Z_{k-1}^{(q_i,H,i)}\right) = \rho_H(j-k)$$

  with ρ_H given by (6.7).

- the elements on different rows are independent random variables. The distribution of the random variable on different lines is not the same, it depends on the order q_i of the corresponding Hermite process. This is more general than the assumption in [28], where all the elements of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ were identically distributed.

We define the (centered) Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ associated with $\mathcal{X}_{n,d}$ by

$$\mathcal{W}_{n,d}^o = \frac{1}{d} \mathcal{X}_{n,d} \mathcal{X}_{n,d}^T - \mathcal{I}_n \tag{6.11}$$

where $\mathcal{I}_n$ stands for the $n \times n$ identity matrix. The matrix $\mathcal{W}_{n,d} = (W_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ is a symmetric random matrix with values in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ and its entries are given by

$$W_{i,i}^o = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} (X_{i,k}^2 - 1) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \left[\left(Z_k^{(q_i,H,i)} - Z_{k-1}^{(q_i,H,i)}\right)^2 - 1\right] \tag{6.12}$$

and for $i \neq j$

$$W^o_{i,j} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} X_{i,k}X_{j,k} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(Z_k^{(q_i,H,i)} - Z_{k-1}^{(q_i,H,i)}\right)\left(Z_k^{(q_j,H,j)} - Z_k^{(q_j,H,j)}\right). \tag{6.13}$$

The limit behavior as $d \to \infty$ of the elements of the Wishart matrix $\mathcal{W}_{n,d}$ is related to the behavior of the quadratic variations of the Hermite process. Actually, due to the self-similarity property of the Hermite process, for every $1 \leq i, j \leq n$, the random variables $W_{i,i}$ and $W_{i,j}$ with $i \neq j$ have respectively the same distribution as

$$A_{i,i} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left[\frac{\left(Z_{\frac{k}{d}}^{(q_i,H,i)} - Z_{\frac{k-1}{d}}^{(q_i,H,i)}\right)^2}{d^{-2H}} - 1\right] \tag{6.14}$$

and

$$A_{i,j} = d^{2H-1}\sum_{k=1}^{d}\left(Z_{\frac{k}{d}}^{(q,H,i)} - Z_{\frac{k-1}{d}}^{(q_i,H,i)}\right)\left(Z_{\frac{k}{d}}^{(q_i,H,j)} - Z_{\frac{k-1}{d}}^{(q,H,j)}\right). \tag{6.15}$$

Let us recall the following result from [41] which gives the behavior of the quadratic variations of the Hermite process and which plays a key role in the sequel.

Theorem 11 *Fix $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and an integer $q \geq 2$. Let $(Z_t^{(q,H)})_{t\geq 0}$ be a Hermite process given by (6.1). Define, for $d \geq 1$,*

$$V_d = c_{q,H} d^{\frac{2-2H}{q}-1}\sum_{k=0}^{d-1}\left[\frac{\left(Z_{\frac{k+1}{d}}^{(q,H)} - Z_{\frac{k}{d}}^{(q,H)}\right)^2}{d^{-2H}} - 1\right]. \tag{6.16}$$

Then V_d converges in $L^2(\Omega)$, as $d \to \infty$, to a Rosenblatt random variable $Z_1^{(2,2H'-1)}$ with H' given by (6.2). The explicit expression of the constant $c_{q,H}$ can be found in [41].

Let

$$q_0 := \min\{q_1, .., q_n\}. \tag{6.17}$$

We define the renormalized Wishart matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d} = (\widetilde{W}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ by

$$\widetilde{W}^o_{i,j} = c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} W^o_{i,j} \text{ for } 1 \leq i, j \leq n \tag{6.18}$$

with $c_{q_0,H}$ appearing in (6.16).

Theorem 11 immediately gives the limit behavior of the diagonal terms of the matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$. We denote by " $\to^{(L)}$ " the convergence in law.

Corollary 1 *Let $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d} = (\widetilde{W}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ with $\widetilde{W}_{i,j}$ given by (6.18). Then for every $1 \leq i \leq n$ such that $q_i = q_0$, we have*

$$\widetilde{W}^o_{i,i} \to^{(L)}_{d\to\infty} Z^{(2,2H'-1)}$$

with H' as in (6.2). For every $1 \leq i \leq n$ with $q_i > q_0$,

$$\widetilde{W}^o_{i,i} \to_{d\to\infty} 0 \text{ in } L^2(\Omega).$$

Proof : By Theorem 11 and the scaling property of the Hermite process, each diagonal term $\widetilde{W}^o_{i,i}$ (given by (6.18)) of the matrix $\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d}$ with $q_i = q_0$ converges to a Rosenblatt random variable with self-similarity index $2H' - 1$ with H' from (6.2). The other diagonal terms of $\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d}$ (those $\widetilde{W}^o_{i,i}$ with $q_i > q_0$) converges to zero in $L^2(\Omega)$. Indeed, if $q_i > q_0$,

$$\mathbf{E}|\widetilde{W}^o_{i,i}|^2 = c^2_{q_0,H}\mathbf{E}\left|d^{\frac{2-2H}{q_0}} A_{i,i}\right|^2 = c^2_{q_0,H} d^{2(2H-2)(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_i})}\mathbf{E}\left|d^{\frac{2-2H}{q_i}} A_{i,i}\right|^2 \to_{d\to\infty} 0.$$

■

Let us regard the asymptotic behavior of the non diagonal terms. This will follow from the following result.

Proposition 6 *Let $Z^{(q_1,H)}, Z^{(q_2,H)}$ be two independent Hermite processes of orders $q_1, q_2 \geq 2$ respectively. Assume $q_1 \leq q_2$ and define*

$$F_d(q_1,q_2) = d^{\frac{2-2H}{q_1}-1}\sum_{k=0}^{d-1}\left(Z^{(q_1,H)}_{k+1} - Z^{(q_1,H)}_k\right)\left(Z^{(q_2,H)}_{k+1} - Z^{(q_2,H)}_k\right). \tag{6.19}$$

Then

$$\mathbf{E}F_d(q_1,q_2)^2 \leq c\begin{cases} d^{\frac{4-4H}{q_1}-1} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \\ \log(d) d^{\frac{1}{q_1}-1} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ d^{(4H-4)(1-\frac{1}{q_1})} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4},1\right) \end{cases}, \tag{6.20}$$

In particular $F_d(q_1,q_2)$ converges to zero in $L^2(\Omega)$ as $d \to \infty$.

Proof : We have for every $d \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}F_d(q_1,q_2)^2 &= d^{\frac{4-4H}{q_1}-2}\sum_{k,\ell=0}^{d-1}\mathbf{E}\left[\left(Z^{(q_1,H)}_{k+1} - Z^{(q_1,H)}_k\right)\left(Z^{(q_2,H)}_{k+1} - Z^{(q_2,H)}_k\right)\left(Z^{(q_1,H)}_{k+1} - Z^{(q_1,H)}_k\right)\left(Z^{(q_2,H)}_{k+1} - Z^{(q_2,H)}_k\right)\right] \\
&= d^{\frac{4-4H}{q_1}-2}\sum_{k,\ell=0}^{d-1}\mathbf{E}\left[\left(Z^{(q_1,H)}_{k+1} - Z^{(q_1,H)}_k\right)\left(Z^{(q_1,H)}_{\ell+1} - Z^{(q_1,H)}_\ell\right)\right]\mathbf{E}\left[\left(Z^{(q_2,H)}_{k+1} - Z^{(q_2,H)}_k\right)\left(Z^{(q_2,H)}_{\ell+1} - Z^{(q_2,H)}_\ell\right)\right] \\
&= d^{\frac{4-4H}{q_1}-2}\sum_{k,\ell=0}^{d-1}\rho_H(k-l)^2
\end{aligned}$$

$$= \quad d^{\frac{4-4H}{q_1}-1} \sum_{v\in\mathbb{Z}} \rho_H(|v|)^2 \left(1 - \frac{|v|}{n}\right) 1_{(|v|<n)}$$

with ρ_H from (6.7). Now we use the fact that $\rho_H(|k|)$ behaves as $H(2H-1)|k|^{2H-2}$ as $|k| \to \infty$.

The fact that $F_d(q_1, q_2)$ converges to zero in $L^2(\Omega)$ as $d \to \infty$ can be deduced from (6.20) since for $q_1 \geq 2$ we have for $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and $q \geq 2$, $\frac{4-4H}{q_1} - 1 < \frac{2}{q_1} - 1 \leq 0$, $(4H-4)(1-\frac{1}{q_1}) < 0$ and $\frac{1}{q_1} - 1 < 0$.. ■

As a consequence of Proposition 6, we have

Corollary 2 *Let $\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d} = (\widetilde{W}^o_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ be the renormalized Wishart matrix with $\widetilde{W}^o_{i,j}$ given by (6.18). Then for every $1 \leq i, j \leq n$ with $i \neq j$ and $q_i \leq q_j$, there exists a positive constant c such as*

$$\mathbf{E}|\widetilde{W}_{i,j}|^2 \leq c \begin{cases} d^{\frac{4-4H}{q_i}-1} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ \log(d) d^{\frac{1}{q_i}-1} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ d^{(4H-4)(1-\frac{1}{q_i})} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right). \end{cases},$$

In particular $\widetilde{W}_{i,j}$ converges to zero in $L^2(\Omega)$ as $d \to \infty$.

Proof : Let $i \neq j$ and assume $q_i \leq q_j$. Then

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\widetilde{W}^o_{i,j}|^2 &= c^2_{q,H} d^{2(2H-2)(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_i})} \mathbf{E}\left| d^{\frac{2-2H}{q_i}-1} \sum_{k=0}^{d-1} \left(Z^{(q_i,H,i)}_{k+1} - Z^{(q_i,H,i)}_k\right)\left(Z^{(q_j,H,j)}_{k+1} - Z^{(q_j,H,j)}_k\right)\right|^2 \\ &\leq c^2_{q,H} \mathbf{E}\left| d^{\frac{2-2H}{q_i}-1} \sum_{k=0}^{d-1} \left(Z^{(q_i,H,i)}_{k+1} - Z^{(q_i,H,i)}_k\right)\left(Z^{(q_j,H,j)}_{k+1} - Z^{(q_j,H,j)}_k\right)\right|^2 \end{aligned}$$

and it suffices to apply Proposition 6. ■

From Theorem 11 and Corollaries 1 and 2 we deduce that the renormalized Wishart matrix $\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d}$ with the entries (6.18) converges componentwise to a diagonal $n \times n$ matrix $\mathcal{R}^H_n = (R^H_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ with independent diagonal entries given by

$$R^H_{i,i} = Z^{(q_i, 2H'-1, i)}_1 1_{q_i = q_0}. \tag{6.21}$$

If there exists only one order q_i such that $q_i = q_0$ (assume that this is q_1) then the diagonal elements of the matrix $\mathcal{R}^H_n$ are

$$R^H_{1,1} = Z^{(q_1, 2H'-1, 1)} \text{ and } R^H_{i,i} = 0 \text{ for } i = 2, \ldots, n.$$

If $q_1 = q_2 = \ldots q_n = q$, then for every $i = 1, .., n$,

$$R^H_{i,i} = Z^{(q, 2H'-1, i)}.$$

6.4 The Wasserstein distance between the Wishart matrix and its limiting matrix

We need to evaluate how fast the sequence V_d converges to its Rosenblatt limit in $L^2(\Omega)$.

Proposition 7 *Let V_d be given by (6.16) and let $Z_1^{(2,2H'-1)}$ be its limit in $L^2(\Omega)$ as $d \to \infty$. Then, for $q \geq 3$ and d large enough,*

$$\mathbf{E}\left|V_d - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2 \leq c \begin{cases} d^{\frac{4-4H}{q}-1} \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ d^{-\frac{1}{q}} \log(d), \text{ if } H = \frac{3}{4} \\ d^{\frac{4H-4}{q}} \text{ if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}$$

and for $q = 2$ and d large enough,

$$\mathbf{E}\left|V_d - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2 \leq c \begin{cases} d^{1-2H} \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ d^{-\frac{1}{2}} \log(d), \text{ if } H = \frac{3}{4} \\ d^{2H-2} \text{ if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}$$

Proof : The case $q = 2$ has been treated in [28]. Assume $q \geq 3$. The random variable V_d admits the following chaos expansion

$$V_d = c_{q,H} d^{\frac{2-2H}{q}-1} \sum_{k=0}^{d-1} \left[d^{2H} I_q(f_{k,d})^2 - 1\right]$$

with (the kernel L is given by (6.5)),

$$f_{k,d} = L_{\frac{k+1}{d}} - L_{\frac{k}{d}}, \text{ for } d \geq 1, k - 0, ..., d-1.$$

By the product formula for multiple stochastic integrals (6.34), we find

$$\begin{aligned} V_d &= c_{q,H} d^{\frac{2-2H}{q}-1} \sum_{k=0}^{d-1} \left[d^{2H} \sum_{r=0}^{q} r!(C_q^r)^2 I_{2q-2r}(f_{k,d} \otimes_r f_{k,d}) - 1\right] \\ &= c_{q,H} d^{\frac{2-2H}{q}-1} \sum_{k=0}^{d-1} d^{2H} \sum_{r=0}^{q-1} r!(C_q^r)^2 I_{2q-2r}(f_{k,d} \otimes_r f_{k,d}) \\ &:= \sum_{r=0}^{q-1} S_{2q-2r} \end{aligned}$$

with, for $r = 0, .., q-1$,

$$S_{2q-2r} = c_{q,H} d^{\frac{2-2H}{q}+2H-1} \sum_{k=0}^{d-1} r!(C_q^r)^2 I_{2q-2r}(f_{k,d} \otimes_r f_{k,d}) \tag{6.22}$$

Notice that the random variable S_{2q-2r} is an element of the $2q-2r$th Wiener chaos.
We will write the difference $V_d - Z_1^{(2,2H'-1)}$ as

$$V_d - Z_1^{(2,2H'-1)} = \sum_{r=0}^{q-2} S_{2q-2r} + (S_2 - Z_1^{(2,2H'-1)})$$

and by the orthogonality of the Wiener chaoses of different orders

$$\mathbf{E}\left|V_d - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2 = \sum_{r=0}^{q-2} \mathbf{E}|S_{2q-2r}|^2 + \mathbf{E}\left|S_2 - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2. \tag{6.23}$$

The $L^2(\Omega)$ norm of the terms S_{2q-2r} with $r = 0, .., q-2$ has been estimated in [41]. From Proposition 4.2 in [41] (see relation (3.9)) we have that for $r = 1, .., q-2$

$$d^{\frac{4H-4}{q}-2(2H'-2)(q-r)}\mathbf{E}|S_{2q-2r}|^2 \to_{d\to\infty} c_{r,q,H}$$

with some explicit strictly positive constants $c_{r,q,H}$ (see formula (3.10) in [41]). Therefore, for d sufficiently large, since H' is given by (6.2),

$$\mathbf{E}|S_{2q-2r}|^2 \leq Cd^{\frac{4-4H}{q}+2(2H'-2)(q-r)} = Cd^{\frac{4H-4}{q}(q-r-1)}. \tag{6.24}$$

The term S_{2q} in the $2q$th Wiener chaos (obtained for $r = 0$) has a different behavior. Actually, if $H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$, it obeys the same estimate as above, i.e.

$$\mathbf{E}S_{2q}^2 \leq cd^{(4H-4)(1-\frac{1}{q})} \tag{6.25}$$

while for $H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, one has

$$\mathbf{E}S_{2q}^2 \leq cd^{\frac{4-4H}{q}-1} \tag{6.26}$$

and for $H = \frac{3}{4}$,

$$\mathbf{E}S_{2q}^2 \leq cd^{\frac{1}{q}-1}\log(d). \tag{6.27}$$

It remains to estimate $\mathbf{E}\left|S_2 - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2$. Actually, the estimate for this term follows from the proof opf Proposition 4.3 in [28], by replacing in this proof H by $2H'-1 = \frac{2-2H}{q} - 1$. We will have, for d large, for all $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

$$\mathbf{E}\left|S_2 - Z_1^{(2,2H'-1)}\right|^2 \leq Cd^{1-2(2H'-1)} = Cd^{\frac{4-4H}{q}-1}. \tag{6.28}$$

To finish the proof, we use the bounds (6.24)-(6.28) and we notice that for every $r = 1, .., q-2$

$$\frac{4-4H}{q} - 1 \geq \frac{4H-4}{q}(q-r-1) \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

and

$$\frac{4-4H}{q}-1 \leq \frac{4H-4}{q}(q-r-1) \text{ if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

When $H = \frac{3}{4}$, we need to compare the right-hand sides of (6.24), (6.27) and (6.28). Since for every $r = 1, ..., q-2$ and d large enough, $d^{-\frac{1}{q}} \geq d^{-\frac{1}{q}(q-r-1)} \geq \log(d) d^{\frac{1}{q}-1}$ we get the conclusion. ■

Remark 4 *The different behavior in the cases $q = 2$ and $q \geq 3$ can be noticed for the limiting situation when $H = \frac{3}{4}$. This comes from the presence of the terms S_{2q-2r} with $r = 1, ..., q-2$ given by (6.22) which appear only when $q \geq 3$. For $H = \frac{3}{4}$ and $q \geq 3$ this is the dominant term in the right-hand side of (6.23).*

Theorem 12 *Let $\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d}$ be the renormalized Wishart matrix with entries (6.18) and let $\mathcal{R}^H_n$ be its limiting matrix as $d \to \infty$. Then for every $n \geq 1$, $q \geq 3$ and for d large enough,*

$$d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d}, \mathcal{R}^H_n\right) \leq C \begin{cases} nd^{\frac{2-2H}{q_0}-1/2} \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ nd^{\frac{1}{-2q_0}}, \text{ if } H = \frac{3}{4} \\ nd^{\frac{2H-2}{q_0}} \text{ if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases} \tag{6.29}$$

while for every $n \geq 1$, $q = 2$ and for d large enough,

$$d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d}, \mathcal{R}^H_n\right) \leq C \begin{cases} nd^{\frac{1}{2}-H} & \text{if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ n\sqrt{\log(d)}d^{-\frac{1}{4}} & \text{if } H = \frac{3}{4} \\ nd^{H-1} & \text{if } H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases}. \tag{6.30}$$

Proof : Again take $q \geq 3$ since the result for $q = 2$ is known from Theorem 2 in [28]. The independence of the Hermite processes $Z^{(q_i,H,i)}$ for $i = 1, .., n$ and the scaling property of the Hermite process imply that the matrix $\widetilde{\mathcal{W}}_{n,d}$ has the same distribution as the matrix $\mathcal{A}_{n,d} = c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ with $A_{i,j}$ given by (6.14) and (6.15). Hence

$$d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}}^o_{n,d}, \mathcal{R}^H_n\right) = d_W\left(\mathcal{A}_{n,d}, \mathcal{R}^H_n\right) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}\left(c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} A_{i,j} - R^H_{i,j}\right)^2}$$

where the last bound is due to the properties of the Wasserstein distance.

Now, Proposition 7 gives the estimate for $\mathbf{E}\left(c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}-1} A_{i,i} - R^H_{i,i}\right)^2$ while for $i \neq j$,

$$\mathbf{E}\left(c_{q_0,H} d^{\frac{2-2H}{q_0}} A_{i,j} - R^H_{i,j}\right)^2 = c^2_{q_0,H} \mathbf{E}\left(d^{\frac{2-2H}{q_0}} A_{i,j}\right)^2 \leq c^2_{q_0,H} \mathbf{E}\left(F_d(q_i, q_j)\right)^2$$

with $F_d(q_i, q_j)$ given by (6.19) and whose $L^2(\Omega)$ norm is estimated in Proposition 6.

Remark 5 • *If $q_1 = \dots q_n = 2$, we retieve the main result in [28]. Actually, notice that only the minimal order q_0 of the Wiener chaoses related to the elements of the matrix $\mathcal{X}_{n,d}$ appear in the Wasserstein bound (6.29). This means that if, there exists at least one $q_i, i = 1, ..., n$ such that $q_i = 2$, the bound for the Wasserstein distance $d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}^o}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right)$ is the same as if $q_1 = q_2 = ... = q_n = 2$.*

- *Another way to interpret the result in Theorem 12 is to say that the random matrices $\widetilde{\mathcal{W}^o}_{n,d}$ and $\mathcal{R}_n^H$ are $\Phi(n,d)$-close as d, n go to infinity, where the function $\Phi(n,d)$ is given by the right-hand side of (6.29). That means that (see e.g. [138]) the Wasserstein distance $d_W\left(\widetilde{\mathcal{W}^o}_{n,d}, \mathcal{R}_n^H\right)$ converges to zero when $\Phi(n,d) \to 0$.*

6.5 Appendix : Multiple stochastic integrals

Here, we shall only recall some elementary facts; our main reference is [139]. Consider $\mathcal{H}$ a real separable infinite-dimensional Hilbert space with its associated inner product $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}}$, and $(B(\varphi), \varphi \in \mathcal{H})$ an isonormal Gaussian process on a probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, which is a centered Gaussian family of random variables such that $\mathbf{E}\left(B(\varphi)B(\psi)\right) = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}$, for every $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Denote by I_q the qth multiple stochastic integral with respect to B. This I_q is actually an isometry between the Hilbert space $\mathcal{H}^{\odot q}$ (symmetric tensor product) equipped with the scaled norm $\frac{1}{\sqrt{q!}} \| \cdot \|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}$ and the Wiener chaos of order q, which is defined as the closed linear span of the random variables $H_q(B(\varphi))$ where $\varphi \in \mathcal{H}$, $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ and H_q is the Hermite polynomial of degree $q \geq 1$ defined by :

$$H_q(x) = (-1)^q \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right), \; x \in \mathbb{R}. \tag{6.31}$$

The isometry of multiple integrals can be written as : for $p, \; q \geq 1$, $f \in \mathcal{H}^{\otimes p}$ and $g \in \mathcal{H}^{\otimes q}$,

$$\mathbf{E}\Big(I_p(f)I_q(g)\Big) = \begin{cases} q!\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q}} & \text{if } p = q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.32}$$

where $\tilde{f}$ denotes the canonical symmetrization of f and it is defined by :

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q)}),$$

in which the sum runs over all permutations σ of $\{1, \dots, q\}$. It also holds that :

$$I_q(f) = I_q(\tilde{f}).$$

In the particular case when $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{B}(T), \lambda)$ (λ being the Lebesque measure), the rth contraction $f \otimes_r g$ is the element of $\mathcal{H}^{\otimes(p+q-2r)}$, which is defined by :

$$(f \otimes_r g)(s_1, \dots, s_{p-r}, t_1, \dots, t_{q-r})$$

$$= \int_{T^r} \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_r f(s_1, \dots, s_{p-r}, u_1, \dots, u_r) g(t_1, \dots, t_{q-r}, u_1, \dots, u_r), \tag{6.33}$$

for every $f \in L^2(T^p)$, $g \in L^2(T^q)$ and $r = 1, \dots, p \wedge q$. By $f \tilde{\otimes}_l g$ we denote the symmetrization of the contraction $f \otimes_l g$.

The product for two multiple integrals can be expanded into a sum of multiple integrals (see [139]) : if $f \in L^2(T^n)$ and $g \in L^2(T^m)$ are symmetric functions, then it holds that

$$I_n(f) I_m(g) = \sum_{l=0}^{m \wedge n} l! C_m^l C_n^l I_{m+n-2l}(f \otimes_l g). \tag{6.34}$$

Chapitre 7

Berry Esseen theorem for random determinants

This article is submitted to Probability and Statistics letters

Joint Work with Ciprian Tudor

Abstract Let $\mathcal{X}_n$ be a $n \times n$ random matrix with independent Gaussian entries. Then it is well-known that $\log(|\det(\mathcal{X}_n|))$ satifies a Central Limit Theorem. Our purpose is to evaluate the Wasserstein distance for this limit theorem via the techniques of the Stein-Malliavin calculus.

7.1 Introduction

Since several decades, the study of the distribution of the determinant of a random matrix constitutes a problem of interest for many researchers in probability theory. The first studies in this direction concerned the moments of a random detrminant, see among others [74], [145], [155] or [186]. Later, a further step in the analysis of the determinants of random matrices was to show that it satisfies a Central Limit Theorem (CLT in the sequel). Let $\mathcal{X}_n$ be a $n \times n$ random matrix and assume that its entries are standard Gaussian independent random variables. Then it has been shown in [81] that, as $n \to \infty$,

$$\frac{\log(|\det \mathcal{X}_n|) - \frac{1}{2}\log(n-1)!}{\sqrt{\frac{1}{2}\log n}} \to^{(d)} N(0,1) \tag{7.1}$$

where $\to^{(d)}$ stands for the convergence in distribution and $N(0,1)$ denotes the standard normal distribution. The extensions of the above result to a more general situation (when the entries of the random matrix $\mathcal{X}_n$ are not Gaussian or not independent) are due, among others, to [26], [126], [162] or [16]. The rate of convergence for the limit theorem (7.1) has been studied in [126]. It has been shown that the Kolmogorov distance between the left-hand side of (7.1) and the standard Gaussian law is of order less than $\log^{-\frac{1}{3}+o(1)} n$.

Our purpose is to estimate the Wasserstein distance corresponding to the CLT (7.1) via the techniques of the Stein-Malliavin calculus. We will assume that the entries of the starting matrix $\mathcal{X}_n$ have Gaussian distribution but they are not necessarily mutually independent. As noticed in [81] or [162], $\det(\mathcal{X}_n^2)$ can be expressed as a product of sums of independent chi-square random variables. We will then focus of the analysis of such a product of sums, by improving the results in [4] or [162], [163]. We decompose it into a negligible part (whose $L^1(\Omega)$-norm can be relatively easily estimated) and a dominant part which can be decomposed in Wiener chaos and whose rate of convergence to the normal distribution can be analyzed by the tools of Malliavin calculus. We obtain a rate of convergence of order $\log^{-\frac{1}{2}} n$ which improves the result for the Kolmogorov distance obtained in [126].

We organized our work as follows. Section 2 is devoted to the notation and the description of the general context of this work. In Section 3 we estimate the negligible part of a product of sums of chi-square-distributed random variables. In Section 4 we apply the tools of the Malliavin calculus in order to evaluate the distance between the dominant part of such a product of sums and we deduce its rate of convergence under the Wasserstein distance. Section 4 contains the apllication to random determinants while Section 6 (the Appendix) contains some elements of the Malliavin calculus needed in this work.

7.2 Products of sums of chi-square random variables

This part is consacreted to the presentation of the problem and to some notation.

7.2.1 The settings

Let H be a real and separable Hilbert space and let $(W(h), h \in H)$ be an isonormal Gaussian process (see the Appendix). Let $(X_{k,l}, k \geq 1, l = 1, \ldots k)$ be a family of independent random variables with standard normal distribution, i.e. $X_{k,l} \sim N(0,1)$ for $k \geq 1$ and $l = 1, ..., k$. We will assume

$$X_{k,l} = W(h_{k,l}) = I_1(h_{k,l}) \text{ for } k \geq 1, l = 1, \ldots, k$$

where $(h_{k,l}, k \geq 1, l = 1, \ldots, k)$ are orthogonal elements in H and I_q denotes th multiple integral of order $q \geq 1$ with respect to W. Denote, for $k \geq 1$,

$$S_k = X_{k,1}^2 + \ldots + X_{k,k}^2 \tag{7.2}$$

and

$$C_k = \frac{S_k}{k} \tag{7.3}$$

We will need the following lemma (see e.g. Lemma 1 in [162], which is borrowed from [107]).

Lemma 10 *For $k \geq 1$, let C_k be given by (7.3). Then for every $k \geq 1$ and $p \geq 2$*

$$\mathbf{E}\, |C_k - 1|^p \leq D_p k^{-\frac{p}{2}}$$

with $D_p > 0$ not depending on k.

For $N \geq 1$, we define

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\log(C_k) + \log(N)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log\left(\prod_{k=1}^{N} S_k\right) - \log(N-1)!\right]. \tag{7.4}$$

We know that (see e.g. [162])

$$T_N \to^{(d)} N(0,1) \text{ as } N \to \infty. \tag{7.5}$$

Our purpose is to find the rate of convergence in the above limit theorem. The idea is to write T_N as the sum of a negligible part whose $L^1(\Omega)$ norm can be evaluated by standard calculation and a dominant part which fits with the Stein-Malliavin calculus. More precisely, we will decompose T_N as follows

$$\begin{aligned}
T_N &= \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(N) + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|\leq\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1>\frac{1}{2}}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(N) + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|\leq\frac{1}{2}} + \sum_{k=3}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1>\frac{1}{2}}\right]\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(C_1)1_{|C_1-1|>\frac{1}{2}} + \log(C_2)1_{|C_2-1|>\frac{1}{2}}\right]\\
&= S_N + R_N
\end{aligned} \tag{7.6}$$

where

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(N) + \sum_{k=1}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|\leq\frac{1}{2}}\right] \tag{7.7}$$

and

$$R_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\log(C_1)1_{|C_1-1|>\frac{1}{2}} + \log(C_2)1_{|C_2-1|>\frac{1}{2}} + \sum_{k=3}^{N}\log(C_k)1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right]. \tag{7.8}$$

7.2.2 Chaos expansion

For every $k \geq 1, l = 1, ..., k$, we can express the random variable $X_{k,l}$ as $X_{k,l} = I_1(h_{k,l})$ where I_q denotes the multiple integral of order $q \geq 1$ with respect to the isonormal process W. Thus we can also write for every $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_k &= I_1(h_{k,1})^2 + I_1(h_{k,2})^2 + \ldots I_1(h_{k,k})^2\\
&= I_2(h_{k,1}^{\otimes 2}) + \ldots I_2(h_{k,k}^{\otimes 2}) + k = I_2(g_k) + k
\end{aligned}$$

where for $k \geq 1$, we use the notation

$$g_k = h_{k,1}^{\otimes 2} + \ldots h_{k,k}^{\otimes 2}. \tag{7.9}$$

Similarly, the random variable C_k defined by (7.3) can be written as

$$C_k = \frac{I_2(g_k)}{k} + 1. \tag{7.10}$$

7.3 The negligible part

In this section we estimate the negligible part of the sequence $(T_N)_{N\geq 1}$ given by (7.4). This negligible part will be composed by the remainder R_N given by (7.8) and from other summands derived from S_N which will appear when we use the Taylor expansion of the logarithm function.

Let us start with the following lemmas which will give and estimate of the summand (7.8).

Lemma 11 *For $i = 1, 2$, we have*

$$\mathbf{E}\left|\log(C_i) 1_{|C_i - 1| > \frac{1}{2}}\right| \leq C$$

with $C > 0$ an universal constant.

Proof : Assume first $i = 1$ and recall that $C_1 \sim Z^2$ where $Z \sim N(0,1)$. Consequently, $C_1 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (we denoted by Γ the gamma function))and

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|\log(C_1) 1_{|C_1 - 1| > \frac{1}{2}}\right| &= C \int_0^\infty |\log(x)| x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} 1_{|x-1| > \frac{1}{2}} dx \\
&= C \int_{\frac{3}{2}}^\infty \log(x) x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx \\
&\quad -C \int_0^{\frac{1}{2}} \log(x) x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx := I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Since $0 < \log(x) \leq x - 1$ for $x > 1$ we have

$$I_1 \leq C \int_{\frac{3}{2}}^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx \leq C.$$

For I_2, by bounding the exponential function by 1 and with the change of variables $-\log(x) = y$ we get

$$I_2 \leq C \int_{\log(2)}^\infty y e^{-\frac{1}{2}y} dy \leq C.$$

Let us assume now $i = 2$ and recall that $C_2 =^{(d)} \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2}$ with Z_1, Z_2 independent standard normal random variables. Therefore $C_2 \sim Exp(1)$ (the exponential distribution with parameter 1) and we have without difficulty

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|\log(C_2) 1_{|C_2 - 1| > \frac{1}{2}}\right| &= \int_0^\infty |\log(x)| e^{-x} 1_{|x-1| > \frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{\frac{3}{2}}^\infty \log(x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} -\log(x) e^{-x} dx \leq C.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lemma 12 *For $N \geq 1$, we have*

$$\mathbf{E}\left|\sum_{k=3}^{N} \log(C_k) 1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right| \leq C$$

with $C > 0$ not depending on N.

Proof : By definition

$$C_k \sim \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_k^2}{k}$$

with $Z_1, \ldots, Z_k$ standard Gaussian independent random variables. We have, for every $k \geq 3$

$$\mathbf{E}\left|\log(C_k) 1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right| = \mathbf{E} \log(C_k) 1_{C_k > \frac{3}{2}} - \mathbf{E} \log(C_k) 1_{0 \leq C_k < \frac{1}{2}} = a_{1,k} + a_{2,k}.$$

To deal with $a_{2,k}$, we use the inequality $-\log(x) \leq \frac{1}{x} - 1$ for $x \in (0,1)$. So

$$\begin{aligned} a_{2,k} &\leq \left(\frac{1}{C_k} - 1\right) 1_{0 \leq C_k < \frac{1}{2}} \leq \mathbf{E} \frac{1}{C_k} 1_{0 \leq C_k < \frac{1}{2}} \\ &\leq k \mathbf{E}\left(\frac{1}{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} 1_{0 \leq C_k < \frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

where we used $k \geq 3$. Take $p \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$. Then

$$a_{2,k} \leq k \left(\mathbf{E}\left(\frac{1}{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(P(0 \leq C_k < \frac{1}{2})\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

and, since the density of $Z_1^2 + \ldots + Z_k^2$ is $f(x) = 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} 1_{x>0}$, we have

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\right)^p = C \int_0^\infty x^{-p+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx < C$$

since $p < \frac{3}{2}$. Consequently, we obtain, for every $a \geq 1$, via Lemma 10,

$$\begin{aligned} a_{2,k} &\leq Ck \left(P(0 \leq C_k < \frac{1}{2})\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq k \left(P(|C_k - 1| \leq 1)\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq Ck \left(\mathbf{E}|C_k - 1|^a\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq Ck^{1 - \frac{a}{2} \frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

and hence, by choosing a sufficiently large,

$$\sum_{k=3}^{N} a_{2,k} \leq C \sum_{k=3}^{\infty} k^{1 - \frac{a}{2} \frac{p-1}{p}} \leq C. \tag{7.11}$$

To handle the summand $a_{1,k}$, we use the bound $\log(x) \leq x - 1 \leq x$ for $x \in (1, \infty)$. Then for every $p \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
a_{1,k} &\leq \mathbf{E}\left(|C_k - 1| 1_{C_k > \frac{3}{2}}\right) \leq \left(\mathbf{E}|C_k - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(P\left(C_k \geq \frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbf{E}|C_k - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(P\left(|C_k - 1| \geq \frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_p \left(\mathbf{E}|C_k - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E}|C_k - 1|^p\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p k^{-\frac{1}{2} - \frac{p}{4}}.
\end{aligned}
$$

By choosing p large enough, we get

$$
\sum_{k=3}^{N} a_{1,k} \leq C_p \sum_{k \geq 3} k^{-\frac{1}{2} - \frac{p}{4}} \leq C. \tag{7.12}
$$

The conclusion follows by (7.11) and (7.12). ■

Let us conclude the estimation of the remainder R_N.

Corollary 3 *Let R_N be given by (7.8). Then for every $N \geq 1$,*

$$
\mathbf{E}|R_N| \leq C \frac{1}{\sqrt{\log(N)}}.
$$

Proof : The result is an immediate consequence of the Lemmas 11 and 12. ■

Next, we analyze the sequence S_N defined by (7.7), i.e.

$$
S_N = \frac{1}{\sqrt{2 \log(N)}} \left[\log(N) + \sum_{k=1}^{N} \log(C_k) 1_{|C_k - 1| \leq \frac{1}{2}}\right]
$$

for every $N \geq 1$. By using the expansion of the logarithm function

$$
\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1 + \theta x)^3}
$$

for $x \in (-1, 1)$ with $\theta \in (0, 1)$ (which depends on x), we can write

$$
\begin{aligned}
\log(C_k) 1_{|C_k - 1| \leq \frac{1}{2}} &= (C_k - 1) 1_{|C_k - 1| \leq \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(C_k - 1)^2 1_{|C_k - 1| \leq \frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{(C_k - 1)^3}{3(1 + \theta(C_k - 1))^3} 1_{|C_k - 1| \leq \frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

with $\theta \in (0, 1)$ a random point depending on C_k. Moreover,

$$
\log(C_k) 1_{|C_k - 1| \leq \frac{1}{2}} = (C_k - 1) - (C_k - 1) 1_{|C_k - 1| > \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(C_k - 1)^2
$$

$$+\frac{1}{2}(C_k-1)^2 1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{(C_k-1)^3}{3(1+\theta(C_k-1))^3} 1_{|C_k-1|\le\frac{1}{2}}.$$

Consequently, for every $N \geq 1$,

$$S_N = S_{N,1} + S_{N,2} + S_{N,3} + S_{N,4} + S_{N,5}$$

where

$$\begin{aligned}
S_{N,1} &:= \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}(C_k-1)\\
S_{N,2} &:= -\frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}(C_k-1)1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\\
S_{N,3} &:= -\frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}(C_k-1)^2 1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\\
S_{N,4} &:= -\frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}(C_k-1)^2-\log(N)\right)\\
S_{N,5} &:= -\frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\frac{(C_k-1)^3}{3(1+\theta(C_k-1))^3}1_{|C_k-1|\le\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

We will analyze separately the five summand from above. Actually, we show that $S_{N,i}, i = 2,3,4,5$ converge to zero in $L^1(\Omega)$ as $N \to \infty$ while for the dominant term $S_{N,1}$ will be treated via Malliavin calculus.

Lemma 13 *Let $S_{N,j}$, $j = 1, ..., 5$ be given by (7.13). Then, for $j = 2,3,5$,*

$$\mathbf{E}|S_{N,j}| \leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}} \tag{7.14}$$

with $C > 0$ not depending on N.

Proof : Let us start with the summand $S_{N,5}$. We use the inequality

$$\frac{|x|^3}{|1+\theta x|^3} \leq 8|x|^3$$

for $\theta \in (0,1)$ and $|x| \leq \frac{1}{2}$ and we get

$$\mathbf{E}|S_{N,5}| \quad \leq \quad C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{E}|C_k-1|^3$$

$$\leq \quad C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}k^{-\frac{3}{2}} \leq C\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

For the term $S_{N,3}$, we write, by using Markov inequality and Lemma 10, with $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|S_{N,3}| &\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{E}\left(|C_{k-1}|^2 1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right)\\
&\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\left(\mathbf{E}|C_k-1|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(P(|C_k-1|>\frac{1}{2})\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\left(\mathbf{E}|C_k-1|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}|C_k-1|^p\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}k^{-1-\frac{p}{4}} \leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}
\end{aligned}$$

by choosing p sufficiently large. The summand $S_{N,2}$ can be treated similarly. Indeed,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|S_{N,2}| &\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{E}\left(|C_{k-1}|1_{|C_k-1|>\frac{1}{2}}\right)\\
&\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}\left(\mathbf{E}|C_k-1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(P(|C_k-1|>\frac{1}{2})\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}k^{-\frac{1}{2}-\frac{p}{4}} \leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}
\end{aligned}$$

via Markov's inequality with p large enough and by using Lemma 10. ■

Let us analyze the term $S_{N,4}$ given by

$$S_{N,4} = -\frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}(C_k-1)^2 - \log(N)\right).$$

Lemma 14 *Consider the sequence $S_{N,4}$ given by (7.13). Then, for every $N \geq 1$, with $C > 0$ an universal constant,*

$$\mathbf{E}|S_{N,4}|^2 \leq C\frac{1}{\log(N)}.$$

Proof : Recall (see (7.10)) that $C_k - 1 = \frac{1}{k}I_2(g_k)$ for every $k \geq 1$ where the term g_k is given by (7.9). By the product formula (7.28),

$$(C_k-1)^2 = \frac{1}{k^2}I_2(g_k)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k^2}\left[I_4(g_k \otimes g_k) + 4I_2(g_k \otimes_1 g_k)\right] + \mathbf{E}(C_k - 1)^2 \\
&= \frac{1}{k^2}\left[I_4(g_k \otimes g_k) + 4I_2(g_k \otimes_1 g_k)\right] + \frac{2}{k}
\end{aligned}
$$

where we used $\mathbf{E}(C_k - 1)^2 = \frac{2}{k}$. Consequently,

$$
\begin{aligned}
S_{N,4} &= \frac{-1}{\sqrt{2\log(N)}}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\left(I_4(g_k \otimes g_k) + 4I_2(g_k \otimes_1 g_k)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \log(N)\right].
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

Via the behavior of the partial sum of the divergent harmonic series

$$
\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} = \log(N) + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{7.16}
$$

with γ the Euler-Mascheroni constant, we get from (7.15) (in the sequel we denote by $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and $\|\cdot\|$ the scalar product and the norm in H, respectively)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}|S_{N,4}|^2 &\leq C\frac{1}{\log(N)}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\left(I_4(g_k \otimes g_k) + 4I_2(g_k \otimes_1 g_k)\right)\right)^2 \\
&\quad + C\frac{1}{\log(N)} \\
&= C\frac{1}{\log(N)}\sum_{k,l=1}^{N}\frac{1}{k^2l^2}\left(4!\langle g_k\widetilde{\otimes}g_k, g_l\widetilde{\otimes}g_l\rangle + 32\langle g_k\widetilde{\otimes}_1 g_k, g_l\widetilde{\otimes}_1 g_l\rangle\right) \\
&\quad + C\frac{1}{\log(N)}
\end{aligned}
$$

By the expression of the kernel g_k in (7.9), we notice the following facts :

1. For every $k \geq 1$,
$$g_k\widetilde{\otimes}_1 g_k = g_k \otimes_1 g_k = g_k.$$

2. $$\langle g_k, g_l\rangle = \begin{cases} k, & \text{if } k = l \\ 0, & \text{if } k \neq l. \end{cases} \tag{7.17}$$

3. For $k, l = 1, ..., N$,
$$\langle g_k\widetilde{\otimes}g_k, g_l\widetilde{\otimes}g_l\rangle = 0 \text{ for } k \neq l.$$

We arrive at the following estimate

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|S_{N,4}|^2 &\leq C\frac{1}{\log(N)}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^4}\left[\|g_k\widetilde{\otimes}g_k\|^2+\|g_k\|^2\right]\\ &+C\frac{1}{\log(N)}\end{aligned}$$

and since

$$\|g_k\widetilde{\otimes}g_k\|^2 \leq \|g_k\otimes g_k\|^2 = \|g_k\|^4 = k^2,$$

we will have

$$\mathbf{E}|S_{N,4}|^2 \leq C\frac{1}{\log(N)}\left[1+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right)\right] \leq C\frac{1}{\log(N)}.$$

■

7.4 The dominant part and the rate of convergence

Let us finally deal with the sequence $S_{N,1}$ from (7.13) i.e.

$$S_{N,1} = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}\sum_{k=1}^{N}(C_k-1).$$

We know (see e.g. [162], [26], [126]) that the sequence $(S_{N,1}, N\geq 1)$ converges in distribution to the standard normal law. Our purpose is to find its rate of convergence under the Kolmogorov, total variation, Wasserstein or Fourier-Mortet metrics. Let us recall the definition of these metrics. If X, Y are two real-valued random variables, the the usual way to define the distance between the law of X and the law of Y is to set

$$d(X,Y) = \sup_{h\in\mathcal{A}}|\mathbf{E}h(X)-\mathbf{E}h(Y)| \tag{7.18}$$

where $\mathcal{A}$ is a suitable class of functions. If $\mathcal{A} = \{1_{(-\infty,z]}, z\in\mathbb{R}\}$ then (7.18) gives the Kolmogorov distance, if $\mathcal{A} = \{1_A, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, then we have the total variation distance, when $\mathcal{A} = \{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \|h\|_{Lip}\leq 1\}$ we have the Wasserstein distance and for $\mathcal{A} = \{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \|h\|_{Lip}+\|h\|_\infty\leq 1\}$ we obtain in (7.18) the Fortet-Mourier distance. By $\|\cdot\|_{Lip}$ we denoted the Lipschirz norm.

The recent Stein-Malliavin theory (see [129]) represents a method to find an explicit bound for the distance between the law of a sequence $(G_N)_{N\geq 1}$ of random variables in a Wiener chaos of fixed order and the normal law. We refer, among others, to [141], [143] and [129] and the references therein for more details. The notation in the below statement are those from the Appendix.

Theorem 13 *Fix $q\geq 1$. Assume that $(G_N)_{N\geq 1} = (I_q(g_N))_{N\geq 1}$ with $g_N\in H^{\odot q}$, a sequence of random variables belonging to the qth Wiener chaos such that :*

$$\mathbf{E}(G_N^2) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2.$$

Then, G_N converges in law to $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ if and only if

$$\|DG_N\|_H^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} q\sigma^2.$$

Furthermore,

$$d\Big(G_N, \mathcal{N}(0,\sigma^2)\Big) \leq C\left(\sqrt{\mathbf{Var}\Big(\|DG_N\|_H^2\Big)} + \sqrt{\mathbf{E}\Big(\|DG_N\|_H^2\Big) - q\sigma^2}\right). \tag{7.19}$$

The result in Theorem 13 can be applied to the sequence $S_{N,1}$ because this sequence belongs to the second Wiener chaos. Indeed, by (7.10),

$$S_{N,1} = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} I_2(g_k) = I_2(f_N) \tag{7.20}$$

with

$$f_N = \frac{1}{\sqrt{2\log(N)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} g_k.$$

We will prove the following result. Below d is one of the distances defined before Theorem 13 (Kolmogorov, total variation, Wasserstein or Fortet-Mourier distance).

Theorem 14 *Let $S_{N,1}$ be given by (7.13). Then for N large enough,*

$$d(S_{N,1}, N(0,1)) \leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}.$$

Proof : Let us notice that, via (7.17),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}S_{N,1}^2 &= \frac{1}{2\log(N)} 2\sum_{k,l=1}^{N} \frac{1}{kl}\langle g_k, g_l\rangle \\ &= \frac{1}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\|g_k\|^2 = \frac{1}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \to_{N\to\infty} 1 \end{aligned}$$

and by using (7.16), for N sufficiently large,

$$\Big|\mathbf{E}|S_{N,1}|^2 - 1\Big| \leq C\frac{1}{\log(N)}. \tag{7.21}$$

The Malliavin derivative of $S_{N,1}$ reads

$$DS_{N,1} = \frac{2}{\sqrt{2\log(N)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\left(h_{k,1} I_1(h_{k,1}) + \ldots h_{k,k} I_1(h_{k,k})\right)$$

and then, since $\langle h_{k,i}, h_{l,j}\rangle = 0$ if $k \neq l$ or $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \|DS_{N,1}\|^2 &= \frac{4}{2\log(N)} \sum_{k,l=1}^{N} \frac{1}{kl} \langle \sum_{i=1}^{k} h_{k,i} I_1(h_{k,i}), \sum_{j=1}^{l} h_{l,j} I_1(h_{l,j})\rangle \\ &= \frac{2}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} I_1(h_{k,i})^2 = \frac{2}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \left(I_2(h_{k,i}^{\otimes 2}) + 1\right) \\ &= \frac{2}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} I_2(g_k) + \frac{2}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

We have

$$\mathbf{E}\|DS_{N,1}\|^2 = \frac{2}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

and by (7.17),

$$\begin{aligned} Var\left(\|DS_{N,1}\|^2\right) &= \mathbf{E}\left(\frac{2}{\log(N)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} I_2(g_k)\right)^2 = \frac{4}{\log(N)^2} \sum_{k,l=1}^{N} \frac{1}{k^2 l^2} \langle g_k, g_l\rangle \\ &= \frac{8}{\log(N)^2} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^4} \|g_k\|^2 = \frac{8}{\log(N)^2} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^3} \end{aligned}$$

and therefore

$$Var\left(\|DS_{N,1}\|^2\right) \leq C \frac{1}{\log(N)^2}. \tag{7.22}$$

The conclusion is obtained by (7.21) and (7.22) via Theorem 13, by noticing that

$$\left|\mathbf{E}\|DS_{N,1}\|^2 - 2\right| = 2\left|\mathbf{E}S_{N,1}^2 - 1\right| \leq C \frac{1}{\log(N)}.$$

. ■

Below, d_W will stand for the Wasserstein distance.

Theorem 15 *Consider the sequence $(T_N, N \geq 1)$ given by (7.4). Then $T_N \to^{(d)} N(0,1)$ and for N large*

$$d_W(T_N, N(0,1)) \leq C \frac{1}{\sqrt{\log(N)}}. \tag{7.23}$$

Proof : By the decomposition (7.6) and the triangle inequality,

$$d_W(T_N, N(0,1)) \leq d_W(S_{N,1}, N(0,1)) + d_W(T_N, S_{N,1}).$$

By Theorem 14, $d_W(T_N, N(0,1)) \leq d_W(S_{N,1}, N(0,1)) \leq C \frac{1}{\sqrt{\log(N)}}$ while by the definition of the Wasserstein distance,

$$d_W(T_N, S_{N,1}) \leq \mathbf{E}|T_N - S_{N,1}| \leq \mathbf{E}\left|R_N + \sum_{i=2}^{5} S_{N,i}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathbf{E}\left|R_N + \sum_{i=2,3,5} S_{N,i}\right| + \left(\mathbf{E}\left|S_{N,4}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\frac{1}{\sqrt{\log(N)}}
\end{aligned}
$$

where we used Corollary 3, Lemma 13 and Lemma 14. ■

7.5 Application to random determinants

Let us consider a $n \times n$ random matrix $\mathcal{X}_n = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ and denote by X_j its jth column vector, i.e. $X_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{n,j})$ for $j = 1, ..., n$. Assume that the random vectors $(X_j, j = 1, ..., n)$ are independent and

$$X_j \sim N(0, \Sigma)$$

wihere Σ is an invertible matrix. We also denote by $\mathcal{W}_n$ the associated Wishart matrix, i.e. $\mathcal{W}_n = \mathcal{X}_n \mathcal{X}_n^T$. Then we have the following result.

Theorem 16 *Let the above notation prevail. For every $N \geq 1$, let*

$$U_N = \frac{1}{\sqrt{2\log N}}\left[\log(\det \mathcal{W}_N) - \log(\det \Sigma) - \log(N-1)!\right]. \tag{7.24}$$

Then the sequence $(U_N)_{N\geq 1}$ convergence in law to the standard normal distribution and for N large enough

$$d_W(U_N, N(0,1)) \leq C\frac{1}{\sqrt{\log N}}.$$

Proof : It is well-known (see e.g. [162] or [81]) that ($=^{(d)}$ means the equality in distribution)

$$\frac{\det \mathcal{W}_n}{\det \Sigma} =^{(d)} \prod_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{k} Y_{k,l}^2\right) =^{(d)} \prod_{k=1}^{N} S_k$$

where $(Y_{k,l}, k \geq 1, l = 1, ..., k)$ are i.i.d. standard normal random variables and S_k is given by (7.2). It then suffices to apply Theorem 15. ■

We can also write the above result as

$$\left(\frac{\det(\mathcal{W}_N)}{\det(\Sigma)(N-1)!}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2\log(N)}}} \to^{(d)} e^Z$$

where $Z \sim N(0,1)$. Concerning the determinant of the random matrix $\mathcal{X}_n$ described at the beginning of this section, we can write

$$\frac{1}{\sqrt{2\log N}}\left[2\log|\det \mathcal{X}_n| - \log(\det(\Sigma) - \log(N-1)!\right] \to^{(d)} N(0,1)$$

and

$$d_W\left(\frac{1}{\sqrt{2\log N}}\left[2\log|\det \mathcal{X}_n| - \log \Sigma + \log(N-1)!\right], N(0,1)\right) \leq C\frac{1}{\sqrt{\log N}}.$$

7.6 Appendix

Here, we shall only recall some elementary facts ; our main reference is [139]. Consider $\mathcal{H}$ a real separable infinite-dimensional Hilbert space with its associated inner product $\langle.,.\rangle_{\mathcal{H}}$, and $(B(\varphi), \varphi \in \mathcal{H})$ an isonormal Gaussian process on a probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, which is a centered Gaussian family of random variables such that $\mathbf{E}\left(B(\varphi)B(\psi)\right) = \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$, for every $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Denote by I_q the qth multiple stochastic integral with respect to B. This I_q is actually an isometry between the Hilbert space $\mathcal{H}^{\odot q}$ (symmetric tensor product) equipped with the scaled norm $\frac{1}{\sqrt{q!}}\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}$ and the Wiener chaos of order q, which is defined as the closed linear span of the random variables $H_q(B(\varphi))$ where $\varphi \in \mathcal{H},\ \|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ and H_q is the Hermite polynomial of degree $q \geq 1$ defined by :

$$H_q(x) = (-1)^q \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right),\ x \in \mathbb{R}. \tag{7.25}$$

The isometry of multiple integrals can be written as : for $p,\ q \geq 1$, $f \in \mathcal{H}^{\otimes p}$ and $g \in \mathcal{H}^{\otimes q}$,

$$\mathbf{E}\Big(I_p(f)I_q(g)\Big) = \begin{cases} q!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q}} & \text{if } p = q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7.26}$$

where $\tilde{f}$ denotes the canonical symmetrization of f and it is defined by :

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_q) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}),$$

in which the sum runs over all permutations σ of $\{1, \ldots, q\}$. It also holds that :

$$I_q(f) = I_q(\tilde{f}).$$

In the particular case when $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{B}(T), \lambda)$ (λ being the Lebesque measure), the rth contraction $f \otimes_r g$ is the element of $\mathcal{H}^{\otimes(p+q-2r)}$, which is defined by :

$$\begin{aligned}&(f \otimes_r g)(s_1, \ldots, s_{p-r}, t_1, \ldots, t_{q-r})\\ &= \int_{T^r} \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r f(s_1, \ldots, s_{p-r}, u_1, \ldots, u_r)g(t_1, \ldots, t_{q-r}, u_1, \ldots, u_r),\end{aligned} \tag{7.27}$$

for every $f \in L^2(T^p)$, $g \in L^2(T^q)$ and $r = 1, \ldots, p \wedge q$. By $f\tilde{\otimes}_l g$ we denote the symmetrization of the contraction $f \otimes_l g$.

The product for two multiple integrals can be expanded into a sum of multiple integrals (see [139]) : if $f \in L^2(T^n)$ and $g \in L^2(T^m)$ are symmetric functions, then it holds that

$$I_n(f)I_m(g) = \sum_{l=0}^{m\wedge n} l!C_m^l C_n^l I_{m+n-2l}(f \otimes_l g). \tag{7.28}$$

Let $\mathcal{S}$ be the class of smooth functionals of the form

$$F = f(B_{t_1}, .., B_{t_n}), \quad t_1, .., t_n \in T, \tag{7.29}$$

with $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ with at most polynomial growth (for f and its derivatives). For the random variable (7.29) we define its Malliavin derivative with respect to B by

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_{t_1}, .., B_{t_n}) 1_{[0,t_i]}(t), \quad t \in T.$$

The operator D is an unbounded closable operator and it can be extended to the closure of $\mathcal{S}$ with respect to the Malliavin -Sobolev norm

$$\|F\|_{k,p}^p = \mathbf{E}|F|^p + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\|D^{(j)}F\|_{L^2(T^j)}^p, \quad F \in \mathcal{S}, p \geq 2, k \geq 1. \tag{7.30}$$

where $D^{(j)}$ stands for the jth iterated Malliavin derivative. This closure will be denoted by $\mathbb{D}^{k,p}$.

The Malliavin derivative D acts on the Wiener chaos as an annihilation operator : if $F = I_n(f)$ with $f \in L^2(T^n)$ symmetric, then $D_t F = nI_{n-1}(f(\cdot, t))$ where "$\cdot$" stands for $n-1$ variables in T. The psedo-inverse of the Ornstein-Uhlenbeck operatot, denoted by L^{-1}, acts as follows : if $F = I_n(f)$ with $n \geq 1$, then $-L^{-1}F = \frac{1}{n}F$..

Deuxième partie

Processus de Hermite généralisé

Chapitre 8

Generalized Wiener-Hermite integrals and rough non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process

This article is published on Stochastics, Stochastics, Volume 34, Number 3, May 2022, https ://doi.org/10.1080/17442508.2022.2068955

Joint work with Obayda-Assaad and Ciprian A. Tudor

Abstract We discuss several properties of the generalized Hermite process, which is a non-Gaussian self-similar processes with self-similarity index belonging to the whole interval (0,1). We also define Wiener integral with respect to this process and as an application, we define and study its associated Ornstein–Uhlenbeck process.

8.1 Introduction

The Hermite processes constitutes a class of self-similar processes with stationary increments. The Hermite process is characterized by its order (an integer $q \geq 1$) and its Hurst parameter (or self-similarity index) H. The Hermite process of order $q = 1$ is nothing else than the fractional Brownian motion (fBm in the sequel) which is the only Gaussian Hermite process and it is well-defined for every $H \in (0, 1)$. For $q \geq 2$ the Hermite processes are non-Gaussian and they are defined only when the Hurst parameter belongs to the interval $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. This implies that these stochastic processes have smooth sample paths, which are Hölder continuous of order δ for any $\delta \in (0, H)$, with $H > \frac{1}{2}$. They also always exhibits long-range dependence (or long memory). These nice properties make them good models for various phenomena in physics, hydrology or economics. For a more complete exposition on Hermite processes and their applications, we refer to the monographs [150] or [185], which treat them in extenso. On the other hand, since for $q \geq 2$ their self-similarity index is always contained in the interval $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, they do not provide a good model for applications where non-gaussianity together short memory or rough sample paths are required. Such an example of application comes from the mathematical finance. During the last years, researchers from this area seemed to arrived to the conclusion that in many markets the volatility is rough and it should be modeled by a stochastic processes with rough trajectories (see, among many others [78], [91]). As a proxi for volatility, it is often chosen the fractional Brownian motion with small Hurst parameter, close to zero, or related processes such as the fractional Ornstein-Uhlenbeck process (see again [78], among others). This seems to be be a well-fitted model for $S\&P$ and other indices. For other markets (such as Crude Oil or Gold futures), besides rough sample paths and scaling property, the empirical data appears to indicate in addition a non-Gaussian character (see e.g. [2] and [108] for the market of some precious metals or [175] for the Bitcoin, see also the survey [77]). To modelize such phenomena, a self-similar non-Gaussian process with rough sample paths seems to be more appropiate. Our purpose is to propose such a stochastic processes, namely the generalized Hermite processes. It has been introduced in [114] and recently revisited by [9]. The generalized Hermite process is a self-similar process with stationary increments, including the Hermite process as a particular case, but it offers more flexibility for models, since its self-similarity index belongs to the whole interval $(0, 1)$, and therefore, upon the values of this index, it can have rough or smooth paths, or long or short memory.

Our aim is to make a deeper study of this class of stochastic processes. First we show that they can be expressed as Wiener integrals with respect to the standard Hermite process, by obtaining in this way some useful identities involving fractional integrals and derivatives. Then we aim at making a first step to construct a calculus with respect to the generalized Hermite process. We define Wiener integrals with respect to these processes and this allows to define an associated Ornstein-Uhlenbeck process, which will be called as generalized Hermite Ornstein-Uhlenbeck process (GHOU process). We will show that the GHOU process is well-defined, in Wiener or pathwise sense, upon the values of the parameters that apear in its expression. We will also give other properties for this process (its probability distribution, its sample paths) and describe its behavior when its drift parameter is small.

We organized our paper as follows. Section 2 contains the definition and basic properties of the standard and generalized Hermite processes as well as a new link between these two stochastic process (i.e. the generalized Hemite process is actually a Wiener integral with respect to the standard Hermite process). In Section 2 we construct the generalized Wiener-Hermite integral while in Section 4 we define and analyze the Ornstein-Uhlenbeck process associated with the generalized Hermite process. The last section is the Appendix where we included the basics of multiple stochastic integrals and fractional calculus.

8.2 Preliminaries

Let us start by introducing the definition and the basic properties of the standard and generalized Hermite processes. We will also notice that the generalized Hermite process can be expressed as a Wiener integral with respect to the standard Wiener process and this fact will be used in the sequel.

8.2.1 Hermite and generalized Hermite processes : Definition and basic properties

Let us start by introducing the standard Hermite process. We denote by $(Z_t^{(q,H)})_{t\geq 0}$ the Hermite process of order $q \geq 1$ and with self-similarity index $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. It lives in the qth Wiener chaos and it is defined as a multiple Wiener-Itô integral, for every $t \geq 0$,

$$Z_t^{(q,H)} = d(q,H) \int_{\mathbb{R}} dB(y_1) \dots \int_{\mathbb{R}} dB(y_q) \left(\int_0^t (s-y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)} \dots (s-y_q)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)} ds \right) \tag{8.1}$$

where $x_+^\alpha = x^\alpha \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $d(q,H)$ is a normalizing positive constant chosen such that $\mathbf{E}\left(Z_H^q(1)\right)^2 = 1$ and $(B(y))_{y\in\mathbb{R}}$ is a Wiener process with time interval $\mathbb{R}$. The stochastic integral in (8.1) is a multiple integral with respect to the Wiener process $(B(y))_{y\in\mathbb{R}}$ (its definition and properties are recalled in the Appendix). We can also write, for every $t \geq 0$,

$$Z_t^{(q,H)} = I_q(L_t)$$

with the kernel

$$L_t(y_1, .., y_q) = d(q,H) \int_0^t ds (s-y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)} \dots (s-y_q)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}, \;\; y_1, ..., y_q \in \mathbb{R}.$$

We know that for every $t \geq 0$ and $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, the function L_t belongs to $L^2(\mathbb{R}^q)$ and consequently the random variable $Z_t^{(q,H)}$ is well-defined. The constant $d(q,H)$, which will play a role in the sequel, is given by (see e.g. [185])

$$d(q,H)^2 = \frac{H(2H-1)}{q! B\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}, \frac{2-2H}{q}\right)^q} \tag{8.2}$$

where B denote the beta function $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ for $a, b > 0$. We recall (see [150] or [185]) that the Hermite process (8.1) is H-self-similar with stationary increments and its sample paths are Hölder continuous of order δ for every $\delta \in (0, H)$. Since $H > \frac{1}{2}$, it always exhibits long-range dependence.

Consider the stochastic process $\left(X_t^{(q,H,\beta)}\right)_{t\geq 0}$ given by

$$X_t^{(q,H,\beta)} = d(q,H,\beta) \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}} g_t^\beta(u)(u-y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)} \dots (u-y_q)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)} du \right] dB(y_1) \dots dB(y_q) \tag{8.3}$$

for every $t \geq 0$ where the function g_t^β is given by

$$g_t^\beta(u) = (t-u)_+^\beta - (-u)_+^\beta \text{ if } \beta \neq 0 \tag{8.4}$$

and $g_t^\beta(u) = \mathbf{1}_{[0,t]}(u)$ if $\beta = 0$.

Remark 6 *In [9], the authors used the expression $g_t^\beta(u) = \frac{1}{\beta}\left[(t-u)_+^\beta - (-u)_+^\beta\right]$ if $\beta \neq 0$. If $\beta = 0$, then $X^{(q,H,0)}$ coincides with the standard Hermite process.*

The constant $d(q,H,\beta)$ in (8.3) will be also chosen such that $\mathbf{E}(X_1^{(q,H,\beta)})^2 = 1$. Its explicit expression will be deduced later, see relation (8.14).

We can also write, for every $t \geq 0$, the random variable $X_t^{(q,H,\beta)}$ as a multiple Wiener -Itô integral

$$X_t^{(q,H,\beta)} = I_q(L_t^\beta)$$

where we denote by L_t^β the kernel of the generalized Hermite process

$$L_t^\beta(y_1,...,y_q) = d(q,H,\beta)\int_{\mathbb{R}} g_t^\beta(u)(u-y_1)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})}\dots(u-y_q)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})}du \tag{8.5}$$

for every $y_1,\dots,y_q \in \mathbb{R}$. As the standard Hermite process, the generalized Hermite process lives in the qth Wiener chaos.

It has been shown in Proposition 3.25 in [9] that for every $t \geq 0$, $L_t^\beta \in L^2(\mathbb{R}^q)$ if

$$0 < H+\beta < 1 \text{ and } H \in \left(\frac{1}{2},1\right) \tag{8.6}$$

or equivalently

$$-1 < -H < \beta < 1-H < \frac{1}{2}.$$

We will assume (8.6) throughout in the sequel.

The process $\left(X_t^{(q,H,\beta)}\right)_{t\geq 0}$ is $H+\beta$ -selfsimilar and it has stationary increments. In particular, its covariance is given by

$$\mathbf{E}X_t^{(q,H,\beta)}X_s^{(q,H,\beta)} = \frac{1}{2}\left(t^{2(H+\beta)} + s^{2(H+\beta)} - |t-s|^{2(H+\beta)}\right) =: R^{H+\beta}(t,s).$$

This implies that for $q=1$, the process $X^{(1,H,\beta)}$ coincides with the fractional Brownian motion with Hurst index $H+\beta \in (0,1)$.

Moreover, that $0 < s < t$, we have, due to the self-similarity and to the stationarity of the increments, for every $0 \leq s \leq t$ and $p \geq 1$,

$$\mathbf{E}\left|X_t^{(q,H,\beta)} - X_s^{(q,H,\beta)}\right|^p = \mathbf{E}|X_1^{(q,H,\beta)}|^p|t-s|^{p(H+\beta)}.$$

Consequently, by the Kolmogorov continuity criterion, the paths of the generalized Hermite process are Hölder continuous of order δ for any $\delta \in (0, H+\beta)$.

The generalized Hermite process has the same properties as the standard Hermite process. But, since its self-similarity index $H+\beta$ belongs to the whole interval $(0,1)$, it can have rough sample paths or short memory when $H+\beta$ is close to zero. It provides an interesting (and maybe the only) example of a self-similar non-Gaussian process with stationary increments, short memory and rough trajectories. Notice that the index $H+\beta$ is allowed to be $\frac{1}{2}$ by assumption (8.6). This case provide an interesting example (and also probably the only) of a self-similar processes with stationary and non-correlated increments, with the same covariance as the Brownian motion.

Remark 7 *Let us briefly discuss the probability distribution of the random variable $X_t^{(q,H,\beta)}$ when $t > 0$ is fixed. If $q = 1$, its law is well known since the generalized Hermite process coincides with the fBm. For $q = 2$, we know that the probability distribution of $X_t^{(q,H,\beta)}$ (and in particular its characteristic function) is entirely determinded by its moments (or, equivalently, by its cumulants). The exact expression of these cumulants can be found in e.g [171]. If $q \geq 3$, we have no knowledge about the law of the random variables in the qth Wiener chaos.*

8.2.2 The generalized Hermite process as a Wiener-Hermite integral

We need to recall the construction of the Wiener integral with respect to the (standard) Hermite process $Z^{(q,H)}$ (see [110]). The Wiener integral $\int_{\mathbb{R}} f(u)dZ_u^{(q,H)}$ (we will call is *Wiener-Hermite integral*) is well-defined for every $f \in \mathcal{H}_H$, the class of measurable functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}dudv < \infty.$$

This space is not complete and may contain distributions, see [149]. The Wiener-Hermite integral is given by

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(u)dZ_u^{(q,H)} &= d(q,H)\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)(u-y_1)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})}\dots(u-y_q)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})}du\right)dB(y_1)\dots dB(y_q)\\ &= \int_{\mathbb{R}^q}(Jf)(y_1,...,y_q)dB(y_1)\dots dB(y_q) \qquad (8.7)\end{aligned}$$

with, for every $y_1, ..., y_q \in \mathbb{R}$,

$$(Jf)(y_1,\dots,y_q) = d(q,H)\int_{\mathbb{R}} f(u)(u-y_1)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})}\dots(u-y_q)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q})}du. \qquad (8.8)$$

The Wiener integral satisfies the following isometry :

$$\mathbf{E}\int_{\mathbb{R}} f(u)dZ_u^{(q,H)}\int_{\mathbb{R}} g(u)dZ_u^{(q,H)} = H(2H-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudvf(u)f(v)|u-v|^{2H-2} := \|f\|^2_{\mathcal{H}_H}. \qquad (8.9)$$

From the definition of the generalized Hermite process and by the expression of the Wiener-Hermite integral, we obtain the following simple, but important result.

Proposition 8 *Let $X^{(q,H,\beta)}$ be given by (8.3) and $Z^{(q,H)}$ by (8.1). Then for every $t > 0$,*

$$X_t^{(q,H,\beta)} = \frac{d(q,H,\beta)}{d(q,H)}\int_{\mathbb{R}} g_t^{\beta}(u)dZ_u^{(q,H)}. \qquad (8.10)$$

Proof : Let us show first that the integral from the right-hand side above is well-defined. We need to check that for every $t \geq 0$

$$I_t := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudvg_t^{\beta}(u)g_t^{\beta}(v)|u-v|^{2H-2} < \infty.$$

This quantity can be written as

$$I_t = 2\int_{\mathbb{R}} dv g_t^{\beta}(v)\int_v^{\infty} du g_t^{\beta}(u)(u-v)^{2H-2} = 2\int_{\mathbb{R}} dv g_t^{\beta}(v)\int_0^{\infty} dx g_t^{\beta}(v+x)x^{2H-2}$$

and it follows from Proposition 3.25 in [9] that the above integral is finite under condition (8.6). The equality (8.10) is a direct consequence of the definition of the Wiener-Hermite integral (8.7). ■

If $q = 1$, we retrieve a result in [97], which is called a transformation formula for the fractional Brownian motion. That is, it has been shown in Corollary 5.7 in [97] that for every H,β such that $H \in (0,1)$ and $0 < H+\beta < 1$, the stochastic process

$$B_t^{H+\beta} := A(H,\beta)\int_{\mathbb{R}} g_t^{\beta}(u)dB_u^H \tag{8.11}$$

is a fBm with Hurst parameter $H+\beta$. Here

$$A(H,\beta)^2 = \left[H(2H-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv\left((1+u)_+^{\beta}-u_+^{\beta}\right)\left((1+v)_+^{\beta}-v_+^{\beta}\right)|u-v|^{2H-2}\right]^{-1}. \tag{8.12}$$

The fact that the right-hand side of (8.11) is a fBm with index $H+\beta$ can be also prove directly. Indeed, $\left(A(H,\beta)\int_{\mathbb{R}} g_t^{\beta}(u)dB_u^H\right)_{t\geq 0}$ is a Gaussian process and for every $0 \leq s \leq t$, due to the isometry (8.9),

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(A(H,\beta)\int_{\mathbb{R}}(g_t^{\beta}(u)-g_s^{\beta}(u))dB_u^H\right)^2 \\
=\ & A(H,\beta)^2 H(2H-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv\left[(t-u)_+^{\beta}-(s-u)_+^{\beta}\right]\left[(t-v)_+^{\beta}-(s-v)_+^{\beta}\right]|u-v|^{2H-2} \\
=\ & A(H,\beta)^2 H(2H-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv\left[(t-s+u)_+^{\beta}-u_+^{\beta}\right]\left[(t-s+v)_+^{\beta}-v_+^{\beta}\right]|u-v|^{2H-2} \\
=\ & A(H,\beta)^2 H(2H-1)|t-s|^{2H+2\beta}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv\left((1+u)_+^{\beta}-u_+^{\beta}\right)\left((1+v)_+^{\beta}-v_+^{\beta}\right)|u-v|^{2H-2} \\
=\ & |t-s|^{2H+2\beta}
\end{aligned}$$

where we used (8.12).

Remark 8 *There are various ways to express the constant $A(H,\beta)$. For instasnce, from relation (2.4) in [97] we have*

$$A(H,\beta)^2 = \frac{\Gamma(2H+2\beta+1)\sin(\pi(H+\beta))}{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)\Gamma(1+\beta)^2} = \frac{\Gamma(2H+2\beta+1)\Gamma(H)\Gamma(1-H)}{\Gamma(H+\beta)\Gamma(1-H-\beta)\Gamma(2H+1)\Gamma(1+\beta)^2}. \tag{8.13}$$

In particular, the constant $A(H,\beta)$ is finite.

From (8.11) we will deduce the expression of the constant $d(q,H,\beta)$ which appears in the definition of the generalized Hermite process. Actually

$$d(q,H,\beta)^2 = d(q,H)^2 A(H,\beta)^2 = \frac{H(2H-1)A^2(H,\beta)}{q!B\left(\frac{1}{2}-\frac{1-H}{q},\frac{2-2H}{q}\right)^q}. \tag{8.14}$$

This can be deduced by using the Wiener isometry (8.9) in (8.10) and (8.11). On one hand in (8.10)

$$\begin{aligned} R^{H+\beta}(t,s) &= \frac{d(q,H,\beta)^2}{d(q,H)^2}\langle g_t^\beta(u), g_s^\beta(u)\rangle_{\mathcal{H}_H} \\ &= \frac{d(q,H,\beta)^2}{d(q,H)^2} H(2H-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv g_t^\beta(u) g_s^\beta(v)|u-v|^{2H-2} \end{aligned}$$

while in (8.11), for every $s,t \geq 0$,

$$R^{H+\beta}(t,s) = A(H,\beta)^2\langle g_t^\beta(u), g_s^\beta(u)\rangle_{\mathcal{H}_H} = A(H,\beta)^2 H(2H-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv g_t^\beta(u) g_s^\beta(v)|u-v|^{2H-2}. \tag{8.15}$$

Assume $\beta > 0$ and recall that H is fixed in the interval $\left(\frac{1}{2},1\right)$. We have (see relation (3.16) in [97])

$$\left(\mathcal{I}_-^\beta 1_{[0,t]}\right)(u) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} g_t^\beta(u) \tag{8.16}$$

(here $\mathcal{I}_-^\beta$ is the right-sided Riemann-Liouville fractional integral, see (8.44)), so (8.11) can be read as

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,t]}(u) dB_u^{H+\beta} = A(H,\beta)\Gamma(\beta+1)\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{I}_-^\beta 1_{[0,t]}\right)(u) dB_u^H. \tag{8.17}$$

Let us give an extension of relation (8.17) to more general functions.

Proposition 9 *Assume $\beta > 0$ and $H \in \left(\frac{1}{2},1\right)$. If $f \in L^1(\mathbb{R})$ such that $\mathcal{I}_-^\beta f \in \mathcal{H}_H$ then $f \in \mathcal{H}_{H+\beta}$ and*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) dB_u^{H+\beta} = A(H,\beta)\Gamma(\beta+1)\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{I}_-^\beta f\right)(u) dB_u^H \tag{8.18}$$

with $B^{H+\beta}$ from (8.11).

Proof : Take $f \in L^1(\mathbb{R})$ with $\mathcal{I}_-^\beta f \in \mathcal{H}_H$ and let us show that $f \in \mathcal{H}_{H+\beta}$. Notice that $H+\beta > \frac{1}{2}$.
We claim that, for every $s,t \geq 0$,

$$(H+\beta)(2(H+\beta)-1)|t-s|^{2(H+\beta)-2} = A(H,\beta)^2 H(2H-1)\beta^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv (t-u)_+^{\beta-1}(s-v)_+^{\beta-1}|u-v|^{2H-2}. \tag{8.19}$$

This can be seen by differentiating $\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}$ in (8.15) but it can be also proved directly, via the change of variables $u = s-|t-s|\left(\frac{1}{z}-1\right)$, $v = s-|t-s|\left(\frac{1}{y}-1\right)$ (to get the right-constant in (8.19), we need to use the expression (8.13) of the constant $A(H,\beta)$ and various properties of the gamma function).

We can write (the norm in $\mathcal{H}_{H+\beta}$ is defined in (8.9))

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}+\beta} = (H+\beta)(2(H+\beta)-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv|u-v|^{2(H+\beta)-2}f(u)f(v)$$

and by plugging (8.19) into the above relation,

$$\begin{aligned}
&\|f\|^2_{\mathcal{H}+\beta}\\
=\ & A(H,\beta)^2H(2H-1)\beta^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudvf(u)f(v)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dsds'(u-s)_+^{\beta-1}(v-s')_+^{\beta-1}|s-s'|^{2H-2}\\
=\ & H(2H-1)A(H,\beta)^2\Gamma(\beta)^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dsds'|s-s'|^{2H-2}(\mathcal{I}^\beta_- f)(s)(\mathcal{I}^\beta_- f)(s')\\
=\ & A(H,\beta)^2\Gamma(\beta+1)^2\|\mathcal{I}^\beta_- f\|^2_{\mathcal{H}_H} < \infty
\end{aligned} \tag{8.20}$$

where we used the definition of the fractional integral (8.44). Now, relation (8.18) is true for simple functions due to (8.17). Since the set of simple functions $\mathcal{E}$ is dense in $\mathcal{H}_{H+\beta}$, we take $(f_n)_{n\geq 1}\subset\mathcal{E}$ such that $\|f_n-f\|_{\mathcal{H}_{H+\beta}}\to_{n\to\infty} 0$. We have for every $n\geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(u)dB_u^{H+\beta} = A(H,\beta)\Gamma(\beta+1)\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{I}^\beta_- f_n\right)(u)dB_u^H. \tag{8.21}$$

The left-hand side converges in $L^2(\Omega)$ as $n\to\infty$ to $\int_{\mathbb{R}} f(u)dB_u^{H+\beta}$ from the properties of the Wiener integral with respect to the fBm (see e.g. [149]) while the right-hand side converges in $L^2(\Omega)$ as $n\to\infty$ to $A(H,\beta)\Gamma(\beta+1)\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{I}^\beta_- f\right)(u)dB_u^H$ because

$$\begin{aligned}
&A(H,\beta)^2\Gamma(\beta+1)^2\mathbf{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{I}^\beta_- f_n\right)(u)dB_u^H - \int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{I}^\beta_- f\right)(u)dB_u^H\right]^2\\
&= A(H,\beta)^2\Gamma(\beta+1)^2\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{I}^\beta_-(f_n-f)\right)(u)dB_u^H\right)^2 = A(H,\beta)^2\Gamma(\beta+1)^2\|\mathcal{I}^\beta_-(f_n-f)\|^2_{\mathcal{H}_H}\\
&= \|f_n-f\|^2_{\mathcal{H}_{H+\beta}}\to_{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

where for the last equality we used (8.20).

■

Remark 9 *With $B^{H+\beta}$ from (8.11), the equality (8.18) is pathwise. If one considers an arbitrary fBm with Hurst parameter $H+\beta$ in the right-hand side of (8.18), we get equality in distribution.*

An immediate consequence of the above result is the following identity, which uses the isometry of the fractional Wiener integrals.

Corollary 4 *Assume $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \beta > 0$ and $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ with $\mathcal{I}_-^\beta f, \mathcal{I}_-^\beta g \in \mathcal{H}_H$. Then*

$$\begin{aligned}&(H+\beta)(2(H+\beta)-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv f(u)g(v)|u-v|^{2(H+\beta)-2}\\&= A(H,\beta)^2\Gamma(\beta+1)^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv(\mathcal{I}_-^\beta f)(u)(\mathcal{I}_-^\beta g)(v)|u-v|^{2H-2}.\end{aligned}$$

We will use Proposition 9 and Corollary 4 in order to define and to analyze the properties of the Wiener integral with respect to the generalized Hermite process $X^{(q,H,\beta)}$ and in particular to study the Ornstein-Uhlenbeck process associated to $X^{(q,H,\beta)}$.

Let us make a short discussion for the case $\beta < 0$. In this case the counterpart of the relation (8.16) is, if $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ (see Lemma 3.1 in [149])

$$g_t^\beta(u) = \Gamma(\beta+1)(\mathbf{D}_-^{-\beta} 1_{[0,t]}(u)) \tag{8.22}$$

for any $t > 0$ and $u \in \mathbb{R}$. Therefore, the relation (8.11) can be written in this case ($\mathbf{D}$ being the Marchaud fractional derivative recalled in Section 8.4.1)

$$B_t^{H+\beta} = A(H,\beta)\Gamma(\beta+1)\int_{\mathbb{R}} (\mathbf{D}_-^{-\beta} 1_{[0,t]}(u))dB_u^H.$$

It is possible to extend the above relation by replacing the indicator function by a regular enough function f in a bigger class as in Proposition 9 (for instance, if $\mathbf{D}_-^{-\beta} f$ exists and belongs to $\mathcal{H}_H$). On the other hand, these conditions are hardly satisfied by usual functions (in particular for the exponential function that appears in the expression of the Ornstein-Uhlenbeck process in Section 8.36). Therefore, for $\beta < 0$, we will construct the Wiener integral with respect to the generalized Hermite process via a pathwise approach instead of using Proposition 9 and Corollary 4.

8.3 Wiener integral with respect to the generalized Hermite process

We define here the generalized Wiener-Hermite integral. We start with a short discuss which motivates the definition of the integral and we give several properies of this Wiener integral.

8.3.1 The definition : the motivation

In order to motivate the definition of the Wiener integral with respect to the generalized Hermite process, let us start with a simple case. Consider f a step function written as

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i 1_{[t_i, t_{i+1})}(t) \tag{8.23}$$

with $\lambda_i \in \mathbb{R}, N \geq 1$ and $0 < t_1 < \ldots t_N$. For such a step function, it is natural to set

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \left(X_{t_{i+1}}^{(q,H,\beta)} - X_{t_i}^{(q,H,\beta)} \right). \tag{8.24}$$

We can also observe that the integral defined above defines an isometry between the set of step functions and $L^2(\Omega)$. Indeed,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)} \right)^2 &= \sum_{i,j=0}^{N-1} \lambda_i\lambda_j \mathbf{E}\left(X_{t_{i+1}}^{(q,H,\beta)} - X_{t_i}^{(q,H,\beta)} \right)\left(X_{t_{j+1}}^{(q,H,\beta)} - X_{t_j}^{(q,H,\beta)} \right) \\
= & \sum_{i,j=0}^{N-1} \lambda_i\lambda_j \left(R^{H+\beta}(t_{i+1}, t_{j+1}) - R^{H+\beta}(t_{i+1}, t_j) - R^{H+\beta}(t_i, t_{j+1}) + R^{H+\beta}(t_i, t_j) \right) \\
= & \langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_{H+\beta}}.
\end{aligned}$$

Note that the above definition holds for functions f defined on $\mathbb{R}_+$ onto $\mathbb{R}$. This is due to the fact that the generalized Hermite process (as the standard Hermite process too) is defined only for the time variable $t \in \mathbb{R}_+$. (If we work only with functions defined on $\mathbb{R}_+$, we can define the Wiener integral $\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)}$ by isometry, using the fact that the step functions are dense in $\mathcal{H}_{H+\beta}$ on $\mathbb{R}_+$.)

In order to find a more explicit expression of the integral $\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)}$, let us notice for f as above in (8.23), for $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)} \\
= \; & d(q,H,\beta) \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \int_{\mathbb{R}^q} dB(y_1 \dots dB(y_q) \int_{\mathbb{R}} (g_{t_{i+1}}^{\beta}(u) - (g_{t_i}^{\beta}(u)) \prod_{j=1}^{q} (u - y_j)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}\right)} du \\
= \; & d(q,H,\beta) \int_{\mathbb{R}^q} dB(y_1 \dots dB(y_q) \int_{\mathbb{R}} du \left(\int_{\mathbb{R}} f(s) d_s g_s^{\beta}(u) \right) \prod_{j=1}^{q} (u - y_j)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}\right)} \\
= \; & d(q,H,\beta) \int_{\mathbb{R}^q} dB(y_1 \dots dB(y_q) \left(\int_{\mathbb{R}} du \beta \int_{\mathbb{R}} f(s)(s-u)_+^{\beta-1} ds \right) \prod_{j=1}^{q} (u - y_j)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}\right)} \\
= \; & d(q,H,\beta)\beta\Gamma(\beta) \int_{\mathbb{R}^q} dB(y_1 \dots dB(y_q) \int_{\mathbb{R}} du (\mathcal{I}_-^{\beta} f)(u) \prod_{j=1}^{q} (u - y_j)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}\right)}.
\end{aligned}$$

We used the definition of the fractional operator (8.44) and the notation $d_s g_s^{\beta}(u)$ means the integral with respect to the function $s \to g_s^{\beta}(u)$.

By the expression (8.7) of the Wiener integral with respect to the standard Hermite process, we can also write

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)} \quad = \quad \frac{d(q,H,\beta)}{d(q,H)} \Gamma(\beta+1) \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{I}_-^{\beta} f)(u) dZ_u^{(q,H)}$$

$$= \quad A(H,\beta)\Gamma(\beta+1)\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{-}^{\beta}f)(u)dZ_u^{(q,H)}$$

with $A(H,\beta), d(q,H), d(q,H,\beta)$ given by (8.12), (8.2), (8.14) respectively.

This motivates the definition of the Wiener integral with respect to the generalized Hermite process.

Definition 10 *Let $\beta > 0$ and $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. For $f \in L^1(\mathbb{R})$ such that $\mathcal{I}_{-}^{\beta} f \in \mathcal{H}_H$ we define,*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)} = A(H,\beta)\Gamma(\beta+1)\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{-}^{\beta}f)(u)dZ_u^{(q,H)}. \tag{8.25}$$

where the right-hand side is a Wiener integral with respect to the (standard) Hermite process (see (8.7)) and $A(H,\beta)$ is given by (8.12).

By Proposition 9, the Wiener integral in the right-hand side of (8.25) is well-defined, since $f \in \mathcal{H}_{H+\beta}$. We will call the integral defined above *the generalized Wiener-Hermite integral*.

8.3.2 The isometry

This integral satisfies the following property.

Proposition 10 *Let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the assumption in Proposition 9. Then we have*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)}\int_{\mathbb{R}} g(u)dX_u^{(q,H,\beta)} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_{H+\beta}} \\ = \quad &(H+\beta)(2(H+\beta)-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv f(u)g(v)|u-v|^{2(H+\beta)-2}. \end{aligned}$$

Proof : Notice that $\beta > 0$ implies $H+\beta > 0$. We will Proposition 9 and Corollary 4 to get by the isometry of the Wiener-Hermite integral

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\int_{\mathbb{R}} f(u)dX_u^{(q,H,\beta)}\int_{\mathbb{R}} g(u)dX_u^{(q,H,\beta)} \\ = \quad &(A(H,\beta)\Gamma(\beta+1))^2\, H(2H-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv(\mathcal{I}_{-}^{\beta}f)(u)(\mathcal{I}_{-}^{\beta}g)(v)|u-v|^{2H-2} \\ = \quad &(H+\beta)(2(H+\beta)-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dudv f(u)g(v)|u-v|^{2(H+\beta)-2}. \end{aligned}$$

■

8.3.3 Spectral representation

Let $\widehat{W}$ be a complex-valued Gaussian random spectral measure that satisfies $\mathbf{E}\widehat{W}(A) = 0, \mathbf{E}\left[\widehat{W}(A)\overline{\widehat{W}(B)}\right] = \lambda(A \cap B), \widehat{W}(A) = \overline{\widehat{W}(-A)}$ and $\widehat{W}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{W}(A_i)$, for disjoint Borel sets that have finite Lebesgue measure, denoted by λ. The real and imaginary parts of $\widehat{W}(A)$ are independent Gaussian random variables with mean 0 and variance $\frac{\lambda(A)}{2}$.
Let $\overline{L}^2 := L^2(\mathbb{R}^q; \mathbb{C})$ be the set of complex-valued functions on $\mathbb{R}^q$ such that

$$g(-x_1, ..., -x_q) = \overline{g(x_1, ..., x_q)}$$

for every $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..q$ and

$$\|g\|_{\overline{L}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^q} |g(x_1, ..., x_q)|^2 dx_1 ... dx_q < \infty.$$

For $g \in L^2(\mathbb{R}^q; \mathbb{C})$, the multiple stochastic integral $\widehat{I_q}(g)$ with respect to the Gaussian measure $\widehat{W}$ is defined via (as the standard multiple stochastic integral, see the Appendix) an isometry between $L^2(\mathbb{R}^q; \mathbb{C})$ and $L^2(\Omega)$, i.e.

$$\mathbf{E}\left[\widehat{I_p}(f)\widehat{I_q}(g)\right] = \begin{cases} q! < \widetilde{f}, \widetilde{g} >_{\overline{L}^2} & ,\text{if} \quad q = p. \\ 0 & ,\text{if} \quad q \neq p. \end{cases} . \tag{8.26}$$

The integral $\widehat{I_q}(g)$ will be called in the sequel *multiple stochastic integral of spectral type* or *of Fourier type*). We refer also to [114] for more details.

We have the following connection between the two types of multiple integral (see [179], Lemma 6.1) : if $f \in L^2(\mathbb{R}^q)$, then

$$I_q(f) \overset{(d)}{=} (2\pi)^{-\frac{q}{2}} \widehat{I_q}(\widehat{f}) \tag{8.27}$$

where $\overset{(d)}{=}$ means equality in distribution and $\widehat{f}$ denotes the Fourier transform of f, i.e.

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{i\lambda y} dy, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

The Wiener integral with respect to the standard Hermite process admits the following spectral representation (see [170]). Assume $f \in \mathcal{H}_H$. Then

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(s) dZ_s^{(q,H)} \overset{(d)}{=} C_{0,q} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} d\widehat{W}(z_1) \dots d\widehat{W}(z_q) \widehat{f}(z_1 + \dots + z_q) |z_1|^{-\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}} \dots |z_q|^{-\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}} \tag{8.28}$$

with

$$C_{0,q} = (2\pi)^{\frac{-q}{2}} d(q, H) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-H}{q}\right)^q . \tag{8.29}$$

From the above result we deduce immediately the spectral representation for the generalized Wiener-Hermite integral.

Proposition 11 *Let $X^{(q,H,\beta)}$ be a generalized Hermite process given by (8.3). Assume $\beta > 0$ and $f \in L^1(\mathbb{R})$ such that $\mathcal{I}_-^\beta f \in \mathcal{H}_H$. Then*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) dX_u^{(q,H,\beta)} \overset{(d)}{=} C_{0,q} A(H,\beta) \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} c_\beta$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(z_1 + \ldots + z_q) |z_1 + \ldots z_q|^{-\beta} |z_1|^{-\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}} \ldots |z_q|^{-\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}} \right) d\widehat{W}(z_1) \ldots d\widehat{W}(z_q)$$

with $c_\beta = \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-i\lambda u} du$.

Proof : Let us compute the Fourier transform of the function $\mathcal{I}_-^\beta f$ where $f \in L^1(\mathbb{R})$ such that $\mathcal{I}_-^\beta f \in \mathcal{H}_H$. For every $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathcal{I}_-^\beta f}\right)(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}} du e^{i\lambda u} \left(\int_u^\infty ds f(s)(s-u)^{\beta-1} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}} ds f(s) e^{i\lambda s} \int_0^\infty du e^{-i\lambda u} u^{\beta-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}} ds f(s) e^{i\lambda s} c_\beta |\lambda|^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} c_\beta |\lambda|^{-\beta} \widehat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

The conclusion then follows from (8.28) and the definition of the generalized Hermite Wiener integral (8.25). ∎

8.3.4 Wiener integral in the Riemann-Stieltjes sense

It is possible to give a pathwise definition of the Wiener-Hermite integral by using the Hölder regularity of the simple paths of the generalized Hermite process. The definition follows the steps from the fBm case in [40].

Let us first consider $a, b \in \mathbb{R}$ such that $-\infty < a < b < \infty$ and $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Then (see, e.g, Section 2.3 in [196]) the Riemann-Stieltjes integral of f with respect to $X^{(q,H,\beta)}$ (denoted in the sequel as $\int_a^b f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)}$) exists ans it is given by

$$\int_a^b f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)} = f(b) X_b^{(q,H,\beta)} - f(a)_a^{(q,H,\beta)} - \int_a^b X_u^{(q,H,\beta)} df(u) \tag{8.30}$$

where $df(u)$ stands for the integral with respect to the bounded variation function f (see, e.g. [164, 18, Chapter 6]). The construction of such a Riemann-Stieltjes integral with respect to the generalized Hermite process can also be done on intevrals of the form $(-\infty, b]$.

Let $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ be a function of bounded variation on any interval $[a', b'] \subset (-\infty, b]$, and assume that

$$\lim_{a \to -\infty} f(a) X_a^{(q,H,\beta)} + \int_a^b X_u^{(q,H,\beta)} df(u) := \tilde{L}_a \in \mathbb{R}. \tag{8.31}$$

Set

$$\int_{-\infty}^{b} f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)} = lim_{a\to\infty} \int_{a}^{b} f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)} \tag{8.32}$$

Then (see [, section 2.3] $\int_{-\infty}^{b} f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)}$ is well-defined and

$$\int_{-\infty}^{b} f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta} = f(a) X_b^{(q,H,\beta)} - \tilde{L}_a \tag{8.33}$$

In particular, if $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b < \infty$) is continuously differentiable, we have

$$\int_{a}^{b} f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)} = f(b) X_b^{(q,H,\beta)} - L_a - \int_{a}^{b} f^{'}(u) X_u^{(q,H,\beta)} du \tag{8.34}$$

with $L_a = lim_{u\to a} f(u) X_u^{(q,H,\beta)}$

Proposition 12 *Assume $\beta > 0$. Assume $\beta > 0$, $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ such that $H + \beta < 1$. Let $f \in \mathcal{H}_{H+\beta}$ such that $\int_a^b f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)}$ is well defined. Then*

$$\int_{a}^{b} f(u) dX_u^{(q,H,\beta)} = \int_{a}^{b} f(u) d_{RS} X_u^{(q,H,\beta)}. \tag{8.35}$$

Proof : By hypothesis, the integrals in both sides of (8.35) are well-defined by assumption on the right side and and they clearly coincide if f is a simple function, their expression being given by (8.24). Then it suffices to approximate f in $\mathcal{H}_{H+\beta}$ as in the proof of Proposition 9. ■

In particular, equality 8.35 holds true if $f \in \mathcal{H}_{H+\beta}$ is with bounded variation and satisfies 8.31.

8.4 Generalized Hermite Ornstein-Uhlenbeck process

We define the generalized Hermite Ornstein-Uhlenbeck process as the solution to the Langevin equation

$$dY_t = -\alpha(Y_t - m)dt + \sigma dX_t^{(q,H,\beta)}, \quad t \geq 0 \tag{8.36}$$

with initial value $Y_0 \in L^0(\mathbb{R})$ and $\alpha, \sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$. The above equation can be solved in the Riemann-Stieltjes sense and it admits the explicit solution

$$Y_t = Y_0 e^{-\alpha t} + m(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_{0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} d_{RS} X_s^{(q,H,\beta)}.$$

When $Y_0 = \sigma \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s} d_{RS} X_s^{(q,H,\beta)}$, then

$$Y_t = m(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} d_{RS} X_s^{(q,H,\beta)}. \tag{8.37}$$

The process $(Y_t)_{t\geq 0}$ given by (8.37) will be called the *generalized Hermite Ornstein-Uhlenbeck process.* For $\beta = 0$, this stochastic process has been considered in several works, see e.g. [76], [137], [171] or [180].

For every β satisfying (8.6), the above integral is well-defined in the Riemann-Stieltjes sense. This follows from Proposition A1 in [40] as in the case when the noise of the Langevin equation is the fBm with Hurst index $H \in (0,1)$. Indeed, the proof only uses the fact that the trajectories of the driving noise are Hölder continuous of any order $\delta \in (0, H+\beta)$. It also follows from Proposition A1 in [40] that the process (8.37) verifies (8.36).

Let us notice that, when $\beta > 0$, the solution $(Y_t)_{t\geq 0}$ also admits the following Wiener-Hermite integral representation, for every $t \geq 0$

$$Y_t = m(1-e^{-\alpha t}) + \sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} dX_s^{(q,H,\beta)}. \tag{8.38}$$

Indeed, the Wiener integral $\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} dX_s^{(q,H,\beta)}$ is well-defined since for every $t \geq 0$, the function $f(u) = e^{\alpha u} 1_{(-\infty,t)}(u)$ belongs to $L^1(\mathbb{R})$, and by a standard argument, it also belongs to $\mathcal{H}_{H+\beta}$ because

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{t}\int_{\infty} dudv f(u)f(v)|u-v|^{2(H+\beta)-2} = 2\int_{-\infty}^{t} du e^{\alpha u}\int_{-\infty}^{u} dv e^{\alpha v}(u-v)^{2(H+\beta)-2} \\ = \;& 2\int_{0}^{\infty} dv e^{-\alpha v} v^{2(H+\beta)-2}\int_{-\infty}^{t} du e^{2\alpha u} = \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha t}\int_{0}^{\infty} dv e^{-\alpha v} v^{2(H+\beta)-2} < \infty. \end{aligned}$$

Relation (8.20) also implies that $\mathcal{I}_{-}^{\beta} f \in \mathcal{H}_H$. Then, the representations (8.37) and (8.38) coincide due to Proposition 12.

Let us list some properties of the generalized Hermite Ornstein-Uhlenbeck process, which follows directly from [40].

Proposition 13 *Let $(Y_t)_{t\geq 0}$ be given by (8.37). Then*

1. *If $m = 0$, the process $(Y_t)_{t\geq 0}$ is stationary, i.e. for every $h > 0$, the processes $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_{t+h})_{t\geq 0}$ have the same finite-dimensional distributions.*
2. *For fixed $t > 0$, $Cov(Y_{t+h}, Y_t)$ behaves, when $h \to \infty$, as $h^{2(H+\beta)}$.*
3. *The sample paths of $(Y_t)_{t\geq 0}$ are Hölder continuous of order δ for every $\delta \in (0, H+\beta)$.*

Proof : Point 1. is an immediate consequence of the stationarity of the increments of $X^{(q,H,\beta)}$ since for $t, h > 0$,

$$\begin{aligned} Y_{t+h} &= \sigma \int_{-\infty}^{t+h} e^{\alpha(t+h-s)} d_{RS} X_s^{(q,H,\beta)} = \sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} d_{RS} X_{s-h}^{(q,H,\beta)} \\ &\equiv^{(d)} \sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} d_{RS} X_s^{(q,H,\beta)} = Y_t \end{aligned}$$

where $\equiv^{(d)}$ stands for the equivalence of finite -dimensional distributions. Point 2. is proved in Theorem 2.3 in [40] while point 3. can be deduced easily from (8.36). ∎

In the case when the driving noise in (8.36) is the fractional Brownian motion (i.e. $\beta = 0$ and $q = 1$), the corresponding Ornstein-Uhlenbeck process is taken as a proxi for the log-volatility is financial applications. It is showed in [78] that when the drift parameter α in (8.36) is close to zero, then the fractional Ornstein -Uhlenbeck process behaves as the fBm. The next property shows that, when α is small, the generalized Hermite Ornstein-Uhlenbeck process also behaves as the driving noise of the Langevin equation (8.36).

Proposition 14 *For every $T > 0$ and $p \geq 1$,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E} \left| Y_t - Y_0 - \sigma X_t^{(q,H,\beta)} \right|^p \to_{\alpha\to 0} 0. \tag{8.39}$$

Proof : We have by (8.37),

$$Y_t - Y_0 = m(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d_{RS} X_s^{(q,H,\beta)}$$

and via the integration by parts formula (8.33) we get

$$Y_t - Y_0 = m(1 - e^{-\alpha t}) - \alpha\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} X_s^{(q,H,\beta)} ds + \sigma X_s^{(q,H,\beta)} \tag{8.40}$$

Now, for $p \geq 1$,

$$\mathbf{E} \left| Y_t - Y_0 - \sigma X_t^{(q,H,\beta)} \right|^p \leq C_p \left| m(1 - e^{-\alpha t}) \right|^p + C_p \alpha\sigma \mathbf{E} \left| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} X_s^{(q,H,\beta)} ds \right|^p.$$

Clearly for every $t \in [0,T]$, $\left|(1 - e^{-\alpha t})\right|^p \leq \left|(1 - e^{-\alpha T})\right|^p \to 0$ as $\alpha \to 0$ and notice that the random variable $\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} X_u^{(q,H,\beta)} du$ belongs to the qth Wiener chaos. Since for every $p \geq 1$ we have by hypercontractivity (relation (10)

$$\mathbf{E} \left| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} X_s^{(q,H,\beta)} ds \right|^p \leq C_p \left[\mathbf{E} \left| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} X_s^{(q,H,\beta)} ds \right|^2 \right]^{\frac{p}{2}}$$

to obtain (8.39) it suffices to show that

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E} \left| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} X_s^{(q,H,\beta)} ds \right|^2 < C_T. \tag{8.41}$$

Now,

$$\mathbf{E} \left| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} X_s^{(q,H,\beta)} ds \right|^2 = \int_0^t \int_0^t dudv e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha(t-v)} \mathbf{E} X_u^{(q,H,\beta)} X_v^{(q,H,\beta)}$$

$$= \int_0^t \int_0^t dudv e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha(t-v)} R^{H+\beta}(u,v) \leq \int_0^T \int_0^T dudv e^{-\alpha u} e^{-\alpha v} R^{H+\beta}(t+u, t+v)$$

$$\leq \quad 3T^{2H}\int_0^T\int_0^T dudve^{-\alpha u}e^{-\alpha v} = C_T.$$

■

The GROU process also keeps (asymptotically when the drift parameter α tends to zero) the scaling property of the generalized Hermite process $X^{(q,H,\beta)}$.

Corollary 5 *For every $t > 0, 0 < \Delta < T$ and $p \geq 1$,*

$$\mathbf{E}\,|Y_{t+\Delta} - Y_t|^p \rightarrow_{\alpha\to 0} \sigma^p \mathbf{E}|X_1^{(q,H,\beta)}|^p \Delta^{p(H+\beta)}.$$

Proof : Fix $t > 0, 0 < \Delta < T$. By relation (8.40), we can write

$$\begin{aligned} Y_{t+\Delta} - Y_t &= -me^{-\alpha t}(1-e^{\alpha\Delta}) - \alpha\sigma\int_0^t \left(e^{-\alpha(t-s+\Delta)} - e^{-\alpha(t-s)}\right)X_s^{(q,H,\beta)}ds \\ &\quad -\alpha\sigma\int_t^{t+\Delta} e^{-\alpha(t-s+\Delta)}X_s^{(q,H,\beta)}ds + \sigma(X_{t+\Delta}^{(q,H,\beta)} - X_t^{(q,H,\beta)}). \end{aligned}$$

For every $p \geq 1$, $|me^{-\alpha t}(1-e^{\alpha\Delta})|^p$ converges to zero as α tends to zero. Now we prove that show that

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\left|\int_0^t \left(e^{-\alpha(t-s+\Delta)} - e^{-\alpha(t-s)}\right)X_s^{(q,H,\beta)}ds\right|^p < C_T$$

and

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\left|\int_t^{t+\Delta} e^{-\alpha(t-s+\Delta)}X_s^{(q,H,\beta)}ds\right|^p < C_T.$$

This follows easily as in the proof of Proposition 14 and by (10), since

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left|\int_0^t \left(e^{-\alpha(t-s+\Delta)} - e^{-\alpha(t-s)}\right)X_s^{(q,H,\beta)}ds\right|^2 \\ = &\int_0^t\int_0^t dudv\left(e^{-\alpha(t-u+\Delta)} - e^{-\alpha(t-u)}\right)\left(e^{-\alpha(t-v+\Delta)} - e^{-\alpha(t-v)}\right)\mathbf{E}X_u^{(q,H,\beta)}X_v^{(q,H,\beta)} \\ = &\int_0^t\int_0^t dudv\left(e^{-\alpha(t-u+\Delta)} - e^{-\alpha(t-u)}\right)\left(e^{-\alpha(t-v+\Delta)} - e^{-\alpha(t-v)}\right)R_{H+\beta}(u,v) \\ \leq &\int_0^T\int_0^T dudv(e^{-\alpha(u+\Delta)} - e^{-\alpha u})(e^{-\alpha(v+\Delta)} - e^{-\alpha v})R_{H+\beta}(t-u,t-v) \leq C_T \end{aligned} \tag{8.42}$$

and

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left|\int_t^{t+\Delta} e^{-\alpha(t-s+\Delta)}X_s^{(q,H,\beta)}ds\right|^2 = \int_t^{t+\Delta}\int_t^{t+\Delta} e^{-\alpha(t-u+\Delta)}e^{-\alpha(t-v+\Delta)}R^{H+\beta}(u,v) \\ = &\int_0^\Delta\int_0^\Delta dudve^{-\alpha(\Delta-u)}e^{-\alpha(\Delta-v)}R^{H+\beta}(t+u,t+v) \leq C_T. \end{aligned} \tag{8.43}$$

The estimates (8.42) and (8.43) indicate that for t, Δ as above, the random variable $Y_{t+\Delta} - T_t$ converges in $L^p(\Omega)$ (and so in law) to $\sigma(X^{(q,H,\beta)}_{t+\Delta} - X^{(q,H,\beta)}_t)$. Since this variable belongs to the qth Wiener chaos we have directly the convergence of moments and to finish we use the scaling property of $X^{(q,H,\beta)}$ ■

8.4.1 Fractional calculus

If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ belongs to $L^1(\mathbb{R})$, we define the right-sided Riemann-Liouville fractional integral operator of order $\alpha > 0$ by

$$(\mathcal{I}^{\alpha}_{-} f)(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_s^{\infty} f(u)(u-s)^{\alpha-1} du \text{ for } s \in \mathbb{R}. \tag{8.44}$$

The above fractional integral is well-defined for $f \in L^1(\mathbb{R})$, see e.g. [97].

If $0 < \alpha < 1$, we define the right-sided Marchaud fractional derivative operator of $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{-} f)(s) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\mathbf{D}^{\alpha}_{-,\varepsilon} f)(s), \qquad s \in \mathbb{R} \tag{8.45}$$

where

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{-,\varepsilon} f)(s) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} (f(s) - f(u+s)) u^{-\alpha-1} du.$$

Troisième partie

Calcul de malliavin libre et approximation semicirculaire

Chapitre 9

Multidimensional semicircular approximations via free Malliavin-Stein method

Abstract : We combine the notion of free Stein kernel and free Malliavin calculus to provide quantitative bounds under the Wasserstein distance in the multivariate semicircular approximations for self-adjoint vector-valued multiple Wigner integrals. On the way, we deduce an HSI inequality for a modified non-microstates free entropy with respect to the potential associated with these semicircular families in the case of non-degeneracy of the covariance matrix. The strategy of the proofs is based on functional inequalities involving the free Stein discrepancy. We obtain a bound which depends on the second and fourth free cumulant of each component. We then apply these results to some examples such as the convergence of marginals in the free functional Breuer-Major CLT, and we provide a bound for the free Stein discrepancy with respect to semicircular potentials for *q-semicirculars operators*.

9.1 Introduction

Stein's method, invented by Charles Stein in 1972, is a powerful tool to prove the central limit theorem and to obtain bounds for distances between probability measures. In the classical case, a lot has been discovered on this topic using various techniques such as exchangeable pairs or Malliavin calculus. The rate of convergence under numerous distances and conditions of convergence in the univariate and multidimensional cases to reference measures are well known (see e.g. [102]). Transportation cost inequalities and functional inequalities between quantities such as Wasserstein distance, entropy or Fisher information were proved using various branches of Mathematics : PDE techniques, semigroup approach or Gamma-calculus. These results have been very useful in many applications, for example, in the topic of concentration of measure (see e.g [82]). It is still a topic of interest for many researchers in the commutative and free case, which try to improve these inequalities. One can mention the remarkable and recent paper [106] of Ledoux, Nourdin and Peccati (2015) which improves respectively the log-Sobolev and Talagrand transportation cost inequalities by two new inequalities called *"HSI" and "WSH"*, which links a new quantity called the Stein discrepancy.

Motivated by deep problems related to von Neumann algebras (with a particular interest for von Neumann algebra generated by free groups) such as the existence of prime property or Cartan subalgebras for Π_1 factors, Voiculescu, in a series of breakthrough papers, have developed powerful techniques to have a deeper understanding of their structure via the idea of free probability. In fact, he discovered an analog of classical independence called free independence, he introduced the notion of free convolution which led to a free central limit theorem and show that the large N limit of $N \times N$ Gaussian random matrices behave as semicircular systems. Voiculescu in [194] was also able to define analogues in the context of free probability of some quantities well understood in the classical case : free Fisher information, free entropy (microstates and non-microstates), non-commutative Hilbert transform... Voiculescu has shown they behave as well as in the commutative case and are very useful to prove results for the von Neumann algebras $W^*(X_1, \ldots, X_n)$ generated by $X_1, \ldots, X_n$ elements of a finite von Neumann algebra equipped with a faithful normal tracial state. For example, under finite microstates entropy, these von Neumann algebras does not have Cartan subalgebras and are primes.

Unfortunately, two notions of entropy have appeared and, it remains an open problem to prove that the two quantities are equal. One has an important inequality due to Biane, Guionnet and Capitaine which shows by that the non-microstate entropy is greater than or equal to the microstate entropy (see [18]). Recently, Dabrowski in [54] was able to show the equality between the two entropies for tuples satisfying a Schwinger-Dyson equation with a subquadratic bounded from below strictly convex potentials with Lipschitz derivative sufficiently approximable by non-commutative polynomials. In light of these results, one could also point out that the associated free energy/relative entropy appears as the large deviations rate function for the empirical spectrum of large random matrices. It also detects freeness : a tuple of non-commutative random variables are free if and only if the entropy of the tuple is the sum of entropy of each one. Numerous inequalities which hold true in the commutative case have been proved to hold true in the context of free probability : *Free Stam* inequality, *Cramer-Rao bound*, *log-Sobolev* inequality and more recently the free *HSI* inequality proved by Fathi and Nelson in [70] (where "H" stands for the free entropy, "S" for the free Stein discrepancy and "I" for the free Fisher information). We will focus on the last one, whose proof relies on the study of free Stein kernels. In fact, surprisingly and contrary to the commutative case where their existence is not always ensured, Cébron, Fathi and Mai showed that the existence of free Stein kernels relative to a potential is always ensured provided a moment condition relative to the cyclic derivative potential is fulfilled (see [73] for details and construction by two different methods).

Considering analogies between Wigner and Wiener chaos, Kemp, Nourdin, Peccati and Speicher in their remarkable work [100], have studied the convergence of self-adjoint random variable living Wigner chaos toward a free $(0, 1)$ semicircular variable and were able to provide a fourth moment theorem for homogeneous Wigner chaos. They also obtained a quantitative bound under a distance d_{C_2} (different from the Wasserstein distance) for second order chaos under a fully-symmetry assumption by means of free stochastic analysis and especially free Malliavin Calculus introduced by Biane, Speicher in [20]. These objects are respectively the analogue in the context of free probability of the well-known Wiener chaos and Gaussian random variable. In 2017, Bourguin and Campese, by using a new product formula for bi-integrals, obtained a more general bound for the distance d_{C_2} and fully-symmetric multiple Wigner integral of any order, with a constant which grows linearly with the order of the chaos. In 2018, Cébron have extended the results by constructing a free Stein kernel (with respect to the potential associated with a free $(0, 1)$ semicircular variable) for all (centered) self-adjoint elements in Wigner chaos. In particular, in his proofs, the fully-symmetry assumption is no longer required. He was also able to get a quantitative bound for the Wasserstein distance (introduced by Biane and Voiculescu in [21]) between a self-adjoint element in some homogeneous Wigner chaos and a free $(0, 1)$ semicircular variable which involves again the fourth free cumulant to the pow $\frac{1}{4}$ instead of the usual square root with a constant dependent on the order of chaos to the pow $\frac{3}{4}$. He has also shown that the distance d_{C_2} is weaker than the Wasserstein distance.

Following the ideas of Cébron in [35]. We extend here the results to the multivariate semicircular approximation for semicircular family with covariance C ($C > 0$, a symmetric positive definite matrix) by constructing a free Stein kernel with respect to their associated potential for all self-adjoint tuple belonging to Wigner chaos, and we also obtain a quantitative estimation for the Wasserstein distance, which will allow us to prove in an easier way the theorem 1.3 of [132]. This last result is in fact the free analog of the famous multivariate fourth moment theorem on Wiener chaos which was proved by Peccati and Tudor (2005), and where several years later the powerful tools of Malliavin-Stein method (2008) has allowed to obtain quantitative bounds for usual Wasserstein distance between functionals of a centered Gaussian isonormal process and centered Gaussian vector with strictly positive covariance matrix. In the construction, we especially see the importance of the Ornstein-Uhlenbeck operator (the infinite dimensional Laplacian on the Wiener space), the key lemma to obtain this theorem being a multivariate counterpart of the Stein's identity for multivariate Gaussian vectors.

Contrary to the classical case, our strategy is based on functional inequalities, especially on the links between the Wassertein distance and free Stein discrepancy with respect to strictly convex semicircular potentials. A starting point of our investigations is related to the notion of conjugate variables with respect to a potential, which will be specified later in the paper. An inequality between the free Fisher information associated with these potential along the flow of a free stochastic differential equation and free Stein Discrepancy for the potential associated with our target will be provided. The methods to find these bounds are generalized ideas of excellent papers such as : Dabrowski in [50] for the notion of non-commutative path space to construct stationary solutions of free stochastic differential equations which lead to functional inequalities, and on the other side, a construction of free Stein kernel for self-adjoint element of homogeneous Wigner chaos by Cébron in [35] which allows relaxing the assumption of fully symmetry necessary to compute the discrepancy (which was a necessary condition for the free Stein kernel constructed in [100] or [27]). In contrast to the Gaussian case, we have to avoid the use of the free Ornstein-Uhlenbeck operator, and use better the properties of operators of free Malliavin and Ito calculus.

9.2 Definitions and notations

Let us denote $\mathcal{M}$ a von Neumann algebra equipped with φ a faithful normal state. Let $\mathbb{P} = \mathbb{C}\langle t_1, ..., t_n\rangle$ be the algebra of non-commutative polynomials in n variables $t_1, ..., t_n$.

Definition 11 *A free Stein kernel for a n-tuple X with respect to a potential $V \in \mathbb{P}$ is an element of $L^2(M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}), (\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr)$ such that for any $P \in \mathbb{P}^n$:*

$$\langle [DV](X), P(X)\rangle_\tau = \langle A, [\mathcal{J}P](X)\rangle_{\tau\otimes\tau^{op}} \tag{9.1}$$

The Stein discrepancy of X relative to V is then defined as

$$\Sigma^*(X|V) = \inf_A \|A - (1 \otimes 1^{op}) \otimes I_n\|_{L^2(M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}),(\tau\otimes\tau^{op})\circ Tr))} \tag{9.2}$$

where the infinimum is taken over all admissible Stein kernel A of X relative to V.

Here DV is a cyclic gradient and $\mathcal{J}P$ is the Jacobian matrix of P.

Recall by the GNS construction, τ defines an inner product on $\mathcal{M}$ by setting for all $x, y \in \mathcal{M}$

$$\langle x, y\rangle_\tau = \tau(y^* x)$$

The completion of M with respect to the induced norm $\|.\|_\tau$ is denoted $L^2(\mathcal{M}, \tau)$. We will omit to denote the state when its clearly defined and denote $\|.\|_\tau$ as $\|.\|_2$ and $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ as $L^2(\mathcal{M})$. We can also define in the same way the spaces $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ for $1 \leq p \leq \infty$ by taking the completion with respect to the norm :

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{9.3}$$

where $|x| = x^* x$ and $L^\infty(\mathcal{M}, \tau)$ is $\mathcal{M}$ equipped with the operator norm $\|.\|$.

One also have (more generally for every unital C^* algebra) for a faithful state τ and $x \in M$:

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \tau((x^* x)^n)^{\frac{1}{2n}} \tag{9.4}$$

From the von Neumann tensor product $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}$ equipped with operator norm : $\|.\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}}$, and the faithful normal state $\tau \otimes \tau^{op}$, we can consider the Hilbert space $L^2(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}, \tau \otimes \tau^{op})$. This space can be identified with $HS(L^2(\mathcal{M}))$ which is the space of Hilbert–Schmidt operators on $L^2(M)$ via the following map.

$$x \otimes y \mapsto \langle y, .\rangle_2 x$$

For a n-tuple X we define $\|X\| = \max_j \|x_j\|$.

We will also write $C^*(X)$ and $W^*(X)$ for the C^*-algebra and von Neumann algebra generated by $X = (x_1, ..., x_n)$.

Let $\mathcal{A}_1, .., \mathcal{A}_n$ be von Neumann subalgebras of $\mathcal{M}$. These subalgebras are called $free$ if for all $n \in \mathbb{N}$ and all indices $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$ such as $\tau(A_j) = 0$ and $A_j \in \mathcal{A}_{i_j}$, then $\tau(A_1 \ldots A_n) = 0$.

We will say that a family $A_1, \ldots A_n$ are free from another family $B_1, ..., B_n$ if $W^*(A_1, \ldots, A_n)$ and $W^*(B_1, \ldots, B_n)$ are free.

Given another n-tuple $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathcal{M}^n$, we write $\langle X, Y\rangle_\tau = \sum_{j=1}^n \langle x_j, y_j\rangle_\tau$ and when τ is cleared we will denote it just by $\langle X, Y\rangle_2$.

Remark 10 *In the sequel, we will often use linear transformation of an element in $\mathcal{M}^n$: for a vector $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}^n$ by C a matrix in $M_n(\mathbb{C})$, we will denote CX an element of $\mathcal{M}^n$ as :*

$$CX = \left(\sum_{j=1}^n C_{i,j} x_j\right)_{i=1}^n \tag{9.5}$$

We will be mainly concerned with C a real symmetric positive definite matrix which allows us to deduce the following but useful result (also true in the case where C is hermitian).

$$\langle CX, Y\rangle_2 = \langle X, CY\rangle_2 \tag{9.6}$$

Indeed, we have by linearity on :

$$\langle CX, Y\rangle_2 = \sum_{i=1}^n \langle (CX)_i, Y_i\rangle_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle C_{i,j} x_j, y_i\rangle_2 \quad = \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{i,j} \langle x_j, y_i\rangle_2$$

and one can conclude, since C is symmetric in the real case and hermitian in the complex case.

We easily notice that $M_n(\mathbb{C})$ embeds in $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$ as $M_n(\mathbb{C}) \otimes 1$ and thus can be seen as von Neumann subalgebra of $M_n(\mathcal{M})$ equipped with the usual matrix operations (addition, multiplication and involution) and endowed with the operator norm $\|.\|_{M_n(\mathcal{M})}$.

If one allows usual matrix multiplications notations, one can also write for $X, Y \in M_{1,n}(\mathcal{M})$ (identified as $\mathcal{M}^n$) :

$$\langle CX, Y\rangle_2 = Y^* CX \tag{9.7}$$

We recall the following inequality which can be easily deduced from the positivity of τ.

For $x, y \in \mathcal{M}$, we have :

$$\|xy\|_2 \leq \|x\| \|y\|_2 \tag{9.8}$$

We can also deduce for $C \in M_n(\mathbb{C})$ and $X, Y \in L^2(\mathcal{M}^n)$:

$$|\langle CX, Y\rangle_2| \leq \|C\|_{op} \|X\|_2 \|Y\|_2 \tag{9.9}$$

We now remind some properties of non-commutative differential calculus. A complete monograph of all the theory and even further results is contained in [111] of Mai and Speicher.

Formally, we define the cyclic derivative on monomials $m \in \mathbb{P}$ as :

$$Dp = (D_1 p, ..., D_n p)$$

where

$$D_j m = \sum_{m = a t_j b} ba$$

and then we extend linearly to $\mathbb{P}$.

The j-free difference quotient is defined as :

$$\partial_j p = \sum_{m = a t_j b} a \otimes b^{op}$$

and then extended linearly to $\mathbb{P}$.

It's now obvious that the free difference quotients and cyclic derivatives are related by the following equations :

$$D_j = m \circ flip(\partial_j) \tag{9.10}$$

where for $A = a \otimes b, B = c \otimes d \in M \otimes M^{op}$, $flip(A) = b \otimes a$ and $m(B) = cd$

For $A, B \in M_n(\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}^{op}), (\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr)$ (identified with $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{op}) \otimes M_n(\mathbb{C})$), we define the inner product :

$$\langle A, B \rangle_{(\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle [A_{j,k}], [B_{j,k}] \rangle_{\tau \otimes \tau^{op}} = (\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr(B^*.A)$$

where "." stands the multiplication in $M_n(\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}^{op})$. Note that the trace $(\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr$ in non-normalized).

One also can take the completion of $M_n(\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}^{op})$ with respect to this inner product and denote the completion as $L^2(M_n(\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}^{op}), (\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr)$. And when the state is clearly fixed, we will denote it simply as $\langle A, B \rangle_{HS}$.

The space $M_n(\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}^{op})$ is a von Neumann algebra equipped again with the usual operations (addition, multiplication and involution) and endowed with the operator norm which will be denoted as $\|.\|_{M_n(\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}^{op})}$ to avoid confusion. One can obtain the unique norm making $M_n(\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{M}^{op})$ a C^*-algebra by using the GNS construction $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. It implies it particular that the norm is independent of the choice of such representation, since one-to-one $*$-isomorphism between C^*-algebras is isometric. Note that in full generality, we don't have a closed formula to compute this operator norm, however we have the following bounds (see e.g [151]) :

For $T = (T_{i,j}) \in M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})$

$$||T_{i,j}||_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}} \leq ||(T_{i,j})||_{M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})} \leq \sum_{i,j=1}^{n} ||T_{i,j}||_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}} \tag{9.11}$$

For an element $C \in M_n(\mathbb{C})$, we will write the element $(1 \otimes 1^{op}) \otimes C$ the element of $M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})$ (this element can also be identified with $\sum_{i,j=1}^{n} (C_{i,j}.1 \otimes 1^{op}) \otimes E_{i,j}$ where $\left(E_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ is the usual basis of $M_n(\mathbb{C})$:

$$((1 \otimes 1^{op}) \otimes C) = \left(C_{i,j}.1 \otimes 1^{op}\right)_{i,j=1}^{n}$$

It is known that it is very difficult to compute the norm $||.||_{M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}}$, fortunately we can actually prove that for the following type of matrices, we have :

$$||(1 \otimes 1) \otimes C||_{M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})} = ||C||_{op}$$

Where, as usual, $||.||_{op}$ stands for the usual matrix operator norm which is the largest singular value of C : $\sqrt{\rho(CC^*)}$ where ρ is the spectral radius in $M_n(\mathbb{C})$. It it simply achieved using the cross norm property of the tensor norm in $M_n(\mathbb{C}) \otimes (\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})$.

Remark 11 *It is then easily checked for $C, D \in M_n(\mathbb{C})$:*

$$((1 \otimes 1^{op}) \otimes C) . ((1 \otimes 1^{op}) \otimes D) = (1 \otimes 1^{op}) \otimes CD$$

This also preserve the commutation relations between two matrices and, indeed for $C, D \in M_n(\mathbb{C})$ which commutes, we have :

$$((1 \otimes 1^{op}) \otimes C) . ((1 \otimes 1^{op}) \otimes D) = (1 \otimes 1^{op}) \otimes CD = (1 \otimes 1^{op}) \otimes DC$$

and for $K \in GL_n(\mathbb{C})$, $(1 \otimes 1^{op}) \otimes K$ is invertible in $M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})$ with inverse : $(1 \otimes 1^{op}) \otimes K^{-1}$.

One also has the same type of inequalities for a product of two elements $A, B \in M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})$.

$$||AB||_{HS} \leq ||A||_{M_n(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}^{op})} ||B||_{HS}$$

Indeed for $A, B \in M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})$

$$||AB||_{HS}^2 = (\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr(B^* A^* AB) \leq ||A||_{M_n(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}^{op})}^2 (\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr(B^* B)$$

Where we used the positivity assumption of $(\tau \otimes \tau^{op}) \circ Tr$ and the fact that, $||A||_{M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op})}^2 - A^* A \geq 0$.

If the state τ is also a trace, then we have :

$$||AB||_{HS} \leq ||B||_{op} ||A||_{HS}$$

For $P = (p_1, ..., p_n)$, we define the non-commutative Jacobian as :

$$\mathcal{J}P = \begin{pmatrix} \partial_1 p_1 & \partial_2 p_1 & \cdots & \partial_n p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 p_n & \partial_2 p_n & \cdots & \partial_n p_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}^{op})$$

Fortunately, the Jacobian enjoys a fundamental chain rule properties (up to natural operations). In the following, we will be concerned with the particular case of linear transformation of polynomials.

Let $t_1, ..., t_n$ be non-commutating self-adjoint indeterminates, collected as the n-tuple $T = (t_1, ..., t_n)$. We let $\mathbb{P}$ denote the set of polynomials in these indeterminates. For a polynomial $p \in \mathbb{P}$ and a monomial m, we let $c_{m(p)} \in \mathbb{C}$ which denotes the coefficient of m in p. After [18], for each $R > 0$ we define the following norm

$$||P||_R = \sum_m c_m(p) R^{deg(m)}$$

where the (finite) sum is running over all monomials appearing in p. We can then take the completion of $\mathbb{P}$ with respect to this norm and we will denote the space as $\mathbb{P}^{(R)}$, this can be interpreted as the formal power series of radius of convergence at least R.

Remark 12 *We could extend all the previous definitions to the formal power series setting by a simple argument of polynomials approximation.*

We recall here the definition of free Fisher information, which is defined via conjugate variables.

Definition 12 *We say that $X = (x_1, \ldots, x_n)$ admits conjugate variables $\xi_{x_1}, ..., \xi_{x_n} \in L^2(W^*(X), \tau)$, if the following relation holds true for every $p \in \mathbb{P}$:*

$$\langle \xi_{x_j}, p(x) \rangle_2 = \langle 1 \otimes 1^{op}, [\partial_j p](X) \rangle_{\tau \otimes \tau^{op}} \tag{9.12}$$

Definition 13 *The free Fisher information of X relative to a potential $V \in \mathbb{P}^{(R)}$ (with $R > ||X||$) is the quantity :*

$$\Phi^*(X|V) = \sum_{j=1}^{n} ||\xi_{x_j} - [D_j V](X)||_2^2 = ||\xi_X - [DV](X)||_2^2 \tag{9.13}$$

where

$$\xi_X = (\xi_{x_1}, ..., \xi_{x_n}) \tag{9.14}$$

and

$$[DV](X) = ([D_i V](X), ..., [D_n V](X)) \tag{9.15}$$

if such conjugate variables for X exists and $+\infty$ otherwise.

For $V \in \mathbb{P}^{(R)}, R > ||X||$, we say that the joint law of X with respect to φ is a free Gibbs state with potential V if for each $j = 1, ..., n$ and each $p \in \mathbb{P}$:

$$\langle [D_j V](X), p(X) \rangle_2 = \langle 1 \otimes 1^{op}, [\partial_j p](X) \rangle_{HS} \tag{9.16}$$

That is, if the conjugate variables to X are given by $[D_1 V](X), ..., [D_n V](X)$. Equivalently, the following equation holds for all $P \in \mathbb{P}^n$:

$$\langle [DV](X), P(X) \rangle_2 = \langle (1 \otimes 1^{op}) \otimes I_n, [\mathcal{J}P](X) \rangle_{HS} \tag{9.17}$$

Where $p(X) := ev_X(p)$ is the image of p through the canonical evaluation homomorpism (always surjective but may fail to be injective).

$$ev_X : \mathbb{P} \to \mathcal{M}$$

which sends $ev_X(1) = 1$ and $ev_X(t_i) = x_i$.

In the same vein, the Jacobian defined in the section 2 is formally defined on indeterminates $t_1, \ldots, t_n$, and then specified through a matricial canonical evaluation homomorphism :

$$M_n(ev_Y \otimes ev_Y) : M_n(\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}^{op}) \to M_n(\mathbb{C}\langle X\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X\rangle^{op})$$

It is important to recall that we can actually replace the formal indeterminates $T = (t_1, \ldots, t_n)$ by $X = (x_1, \ldots, x_n)$ and write $\partial_i = \partial_{X_i}$ and J_X defined on polynomials acting onto the variable X, provided that the tuple X does satisfy no algebraic relations.

This can rephrased in an algebraic formulation, by saying that the two-sided ideal :

$$I_X = \{P \in \mathbb{P}^n, P(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \tag{9.18}$$

is the zero ideal of $\mathbb{P}$. Equivalently, it means that the evaluation homomorphism ev_X is in fact an isomorphism.

There exists a powerful characterization of the absence of algebraic relations due to Mai, Speicher and Weber. Indeed, this condition is always ensured under finite free Fisher information (details could be found in [112]).

This implies in particular that we can see the Jacobian J_X as a densely-defined closable operator on $L^2(W^*(X))^n$ with codomain $M_n(L^2(W^*(X)\bar{\otimes}W^*(X)))$.

We will denote respectively the adjoint the free difference quotient and Jacobian respectively as : ∂_i^* for each $i = 1, \ldots, n$ and J_X^*.

Remark 13 *The previous proposition could also be reformulated in the following way : when $\Phi^*(X) < \infty$, then $(1 \otimes 1^{op}) \otimes I_n$ belongs to dom$(\mathcal{J}_X^*)$, $\mathcal{J}_X^*$ acts on $B \in M_n(\mathbb{C}\langle X\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X\rangle^{op})$ as :*

$$\mathcal{J}_X^*(B) = \left(\sum_{i=1}^n \partial_i^*(B_{j,i})\right)_{j=1}^n := \left(J_{X,1}^*(B), \ldots, J_{X,k}^*(B)\right) \tag{9.19}$$

Note also that we denote for $Q \in M_n(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{op})$ and $X = (X_i)_{i=1}^n$, the action of Q on X, $Q\sharp X$ by :

$$Q\sharp X = \left(\sum_{i=1}^n Q_{i,j}\sharp X_i\right)_{j=1}^n \tag{9.20}$$

where for $q = a \otimes b \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{op}$ and $x \in \mathcal{M}$,

$$q \sharp x = axb \tag{9.21}$$

It is also easy to deduce for $A \in M_n(\mathbb{C})$, and $B \in dom(J_X^*)$, that $((1 \otimes 1^{op}) \otimes A).B$ belongs to $dom(J_X^*)$ and :

$$J_X^*\left(((1 \otimes 1^{op}) \otimes A).B\right) = AJ_X^*(B) \tag{9.22}$$

Proof: Firstly, one can see that $dom(J_X^*)$ admits a left $M_n(\mathbb{C}\langle X\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X\rangle^{op})$-action (section 2.2 in [38]).

Then a simple computation shows that :

$$\begin{aligned}
J_X^*\Big(((1 \otimes 1^{op}) \otimes A).B\Big) &= \left(\sum_{i=1}^n \partial_i^*(((1 \otimes 1^{op}) \otimes A).B)_{j,i}\right)_{j=1}^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \partial_i^*\left(\sum_{k=1}^n (A_{j,k}.1 \otimes 1^{op})\sharp B_{k,i}\right)\right)_{j=1}^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \partial_i^*\left(\sum_{k=1}^n A_{j,k}.B_{k,i}\right)\right)_{j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n A_{j,k}\left(\sum_{i=1}^n \partial_i^*(B_{k,i})\right)\right)_{j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n A_{j,k} J_{X,k}^*(B)\right)_{j=1}^n \\
&= AJ_X^*(B) \qquad (9.23)
\end{aligned}$$

Where in the fourth line we used the linearity of the adjoint of free difference quotient (which is well-defined as a unbounded and densely defined closable operator) since the free Fisher information is finite. This formula is a particular case of the multidimensional extension of Voiculescu formula (section 4.1 in [194]).

In the sequel, we will denote V_C the following potential defined for all $C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ symmetric positive definite real matrix by and denote this class of potential $V_{SC}^{++} = \{V_C, C \in S_n^{++}(\mathbb{R})\}$ where "SC" stands for semicircular and "++" for the positive definite aspect :

$$V_C = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n C_{i,j}^{-1} t_i t_j \tag{9.24}$$

Remark 14 *We can see that V_{SC}^{++} is a convex set of self-adjoint potential $V_{sa} = \{V = V^*, V \in \mathbb{P}^n\}$ since $S_n^{++}(\mathbb{R})$ is a convex set and we have for every positive scalars $\lambda, \mu \geq 0$ and $C, C' \in S_n(\mathbb{R}^{++})$, $\lambda V_C + \mu V_{C'} = V_{\lambda C + \mu C'}$.*

Note that, as will we see it further in the paper, this potential is the potential associated with a n-semicircular family with covariance C. In fact, by taking C diagonal with $\rho > 0$ we find the potential V_ρ which characterize a free $(0, \rho^{-1})$ semicircular n-tuple.

Definition 14 *Relative non-microstates free entropy. Let $S = (s_1, \ldots, s_n)$ be a free (0, 1)-semicircular n-tuple, free from $x_1, \ldots, x_n$. Then the non-microstates free entropy of $x_1, ..., x_n$ is defined in [194] to be the quantity*

$$\chi^*(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{n}{1+t} - \Phi^*(X + \sqrt{t}S) \right) dt + \frac{n}{2} log(2\pi e), \tag{9.25}$$

which we also denote by $\chi^*(X)$. If X is a free $(0, \rho^{-1})$-semicircular family, then $X + \sqrt{t}S$ therefore $\Phi^*(X + \sqrt{t}S) = n(\rho^{-1} + t)^{-1}$. From this it is easy to compute $\chi^*(X) = \frac{n}{2} log(2\pi e \rho^{-1})$.

Definition 15 *For $X = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, let $V \in P^{(R)}$ for $R \geq \|X\|$, we define the non-microstates free entropy of $x_1, \ldots, x_n$ relative to V to be the quantity*

$$\chi^*(x_1, \ldots, x_n | V) := \varphi(V(X)) - \chi^*(x_1, ..., x_n) \tag{9.26}$$

which we will also denote by $\chi^*(X|V)$. In this context, we refer to V as a potential. Since $\chi^*(.)$ is maximized (for fixed variance) by an n-tuple of free semicircular operators, it is easy to see that $\chi^*(.|V_\rho)$ is minimized by a free $(0, \rho^{-1})$-semicircular n-tuple.

In the sequel, we will only moreover assume that the state is also a trace and repressed the notation op for the trace. We also will work in $(\mathcal{A}, \tau)$ a tracial W^*-probability space, which is a von Neumann algebra equipped with a faithful normal tracial state.

9.3 Stein method and semicircular families

From now, we will focus on multidimensional semicircular approximations for semicircular family with a given covariance matrix C (suppose to be symmetric definite positive). We will see in the sequel that our approach seems different for the original one on Gaussian case. Indeed, this one focus on minimizing the discrepancy between a Stein kernel and the matrix C defined by the usual Gaussian integration by parts, which involves a second order differential operator : the Hessian. In free probability, the context is a bit different. Indeed it is better to understand the tuple of conjugate variables for a potential V (suppose to be a convex potential to ensure uniqueness of the Free Gibbs State : [53] for technical requirements). An approach which would follow the original proof will lead to an estimation for a weaker distance (not yet defined and studied in the multivariate case) by linking the tuple and the target via a bridge (this idea taken from proofs of smart path methods) and use usual Malliavin operators don't seem optimal as pointed out by Cébron because it leads to an estimation for a weaker distance and the fully-symmetry assumption.

That's why, we adapt the original proofs of Cébron ([35]) which is based on transport inequality (links between quantities such as Wasserstein distance, and non-microstate free entropy or free Stein discrepancy). As a concluding remark, we point out that our strategy of is closed to the ideas from Ledoux, Nourdin Peccati which states such inequalities in the classical case for larger classes of random variables, with a particular focus on multivariate normal, gamma, beta and even more general measures. They use in fact the semigroup interpolation and powerful tools of iterated gradient of Markov operators and Gamma calculus to get various inequalities (*LSI, HSI, WSH*) for invariant measure of diffusion process (second order differential operators, see [106] for details).

Let us introduce the fundamental distribution in free probability, which is the semicircular distribution :

Definition 16 *The centered semicircular distribution of variance σ^2 is the probability distribution :*

$$S(0,\sigma^2)(dx) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}dx, \ |x| \leq 2\sigma \tag{9.27}$$

This distribution has all his odd moments which vanish by the symmetry of the distribution around 0. *Its odd moments can be expressed by the help of the Catalan numbers through the following relation for all non-negative integers m :*

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} x^{2m} S(0,\sigma^2)(dx) = C_m t^m \tag{9.28}$$

Where $C_m = \frac{1}{m+1}\binom{m}{2m}$ is the mth Catalan number.

Definition 17 *Let $n \geq 2$ be an integer, and let $C = (C_{i,j})_{i,j=1}^n$ be a positive definite symmetric matrix. A n-dimensional vector $(S_1, ..., S_n)$ of random variables in $(\mathcal{A}, \tau)$ is said to be a semicircular family with covariance C, if $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i_1, ..., i_n) \in [n] = \{1, \dots, n\}$:*

$$\varphi(S_{i_1} S_{i_2} ... S_{i_n}) = \sum_{\pi \in NC_2[n]} \prod_{\{a,b\}\in\pi} C_{i_a, i_b} \tag{9.29}$$

where $NC_2(n)$ is the set of pairings of $\{1, \dots, n\}$ which have no crossing

Lemma 15 *Let $C^{\frac{1}{2}}$, the unique non-singular symmetric matrix such as $\left(C^{\frac{1}{2}}\right)^2 = C$, then given a free (0, 1)-semicircular family $(X_1, ..., X_n)$,*

$$C^{\frac{1}{2}} X = \left(\sum_{j=1}^n C^{\frac{1}{2}}_{i,j} X_j \right)_{i=1}^n \tag{9.30}$$

is a semicircular family with covariance C.

Proof: *This can be deduce knowing that semicircular families are stable by linear transformation :*

For $k, n \geq 1$, let $S = (S_1, ..., S_n)$ a centered semircircular family in some tracial W^*-probability space and let $M \in M_{k,n}(\mathbb{R})$, then $Y := MX$ is a semicircular family. In particular with $M \in M_{1,n}(\mathbb{R}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a column vector we have that $Y = \lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_n S_n$ is semicircular. This last result ensure that any semicircular family in a tracial W^*-probability space are only determined by their covariance matrix $\left\{\tau(X_i X_j)/i, j \in [n]\right\}$ (lemma 1.4 in [62] and section 2.9 in [136]) :

It is then easy to deduce that the covariance matrix of the semicircular vector $C^{\frac{1}{2}}X$ is given by :

$$\begin{aligned}
\tau\left(\left(C^{\frac{1}{2}}X\right)_i\left(C^{\frac{1}{2}}X\right)_j\right) &= \sum_{k,l=1}^{n} C^{\frac{1}{2}}_{i,k}C^{\frac{1}{2}}_{j,l}\tau(X_k X_l) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} C^{\frac{1}{2}}_{i,k}C^{\frac{1}{2}}_{j,l}\delta_{k,l} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C^{\frac{1}{2}}_{i,k}C^{\frac{1}{2}}_{k,j} \\
&= C_{i,j} \qquad (9.31)
\end{aligned}$$

Where we have used the freeness of X and and symmetry of the matrix C.

The proof is also contained in different books as exercises of Roland Speicher, for example in Speicher and Mingo book (see e.g [118], section 2.2, exercises 5 and 6), and it is obtained by computing the joint moments and the use of the freeness of X.

Now, we would like to be able to compute the conjugate variables (solution of Schwinger-Dyson equations), to have a natural guess for our construction of free Stein Kernel. It turns out, as in the classical Gaussian case, there is a simple expression for the conjugate system of semicircular family with covariance C (see [133] for details in the commutative case).

Lemma 16 *Let S a n-semicircular family with covariance C, then the conjugate system of S, is given by :*

$$C^{-1}S = \left(\sum_{j=1}^{n} C^{-1}_{i,j} S_j\right)_{i=1}^{n} \qquad (9.32)$$

Proof: *The proof can be deduced from Voiculescu formula (corollary 6.8 in [194] and the previous remark or as the same type of exercises as mentioned just before). Indeed, take $S := C^{\frac{1}{2}}X$, where X is a free (0,1) semicircular system, since $\Phi^*(X) = n < \infty$, we have (by corollary 6.8) :*

$$J^*_S\left((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes I_n\right) = C^{-\frac{1}{2}} J^*_X\left((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes I_n\right) = C^{-\frac{1}{2}}X = C^{-1}S \qquad (9.33)$$

It is important to notice that given a semicircular family S of covariance matrix C (in a tracial noncommutative probability space to ensure the symmetry of the matrix), one can always express $S = C^{\frac{1}{2}}X$, with $X = C^{-\frac{1}{2}}S$ a free semicircular system (the proof is obtained in the same way, by computing the covariance matrix of this vector which turns out to be equal to I_n).

Remark 15 *In fact it's now obvious that the potential V_C defined before, which satisfies $[D_i V_C] = \sum_{j=1}^n C_{i,j}^{-1} t_j$ is the potential associates with a n-semicircular family with covariance C. Moreover, it characterizes completely a semicircircular with symmetric positive definite covariance C. Indeed, a self-adjoint vector $X = (x_1, \dots, x_n)$ satisfies the following Schwinger-Dyson equation for all $P \in \mathbb{P}^n$:*

$$\langle C^{-1}X, P(X)\rangle_2 = \langle (1 \otimes 1) \otimes I_n, [\mathcal{J}P](X)\rangle_{HS} \tag{9.34}$$

if and if only X is a semicircular family with covariance C.

Let us consider the following free stochastic differential equation, where C^{-1} is the inverse of the covariance matrix which does exist by the positive definite assumption on C, with $(X_0^1, \dots, X_0^n)$ free from $(S_t^i)_{i=1}^n$:

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t C^{-1}X_t dt + S_t$$

in vector notations or equivalently for all $i = 1, \dots, n$:

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t (C^{-1}X_t)_i dt + S_t^i$$

where

$$(C^{-1}X_t)_i = \sum_{j=1}^n C_{i,j}^{-1} X_t^j \tag{9.35}$$

for all $i = 1, \dots, n$.

Remark 16 *The existence of such a free SDE is ensured, by a classical Picard fixed point argument, since the drift and the volatility are linear functions, the existence and uniqueness turns out to be well understood (see [50], theorem 25 or [19]).*

9.4 An infinitesimal estimate for free SDE

In this section, we will be interested in infinitesimal estimations of Wasserstein distance between two close points of the free stochastic differential equations. Before stating our results, we introduced the non-commutative Wasserstein distance, which is the free counterpart of the usual Wasserstein distance.

Remark 17 *The following theorem is a powerful result of Dabrowski ([50]), We don't expose all the theory invented by Dabrowski which is rather complex, and we send the reader to the paper to have a complete exposure of all the results. We will only remind a part of the proof to show what type of computations we will use in the sequel.*

Theorem 17 *(Dabrowski, [50]) Assume that we are given a process of the following form where $S_t = (S_t^1, ..., S_t^n)$ is a free Brownian motion on some filtered W^*-probability space $(\mathcal{A}, \tau)$ with self-adjoint initial conditions :*

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_t dt + S_t$$

in vectors notations or equivalently :

$$X_t^i = X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_t^i dt + S_t^i$$

We suppose that $\Theta_s = (\Theta_1, ..., \Theta_n)$ is continuous to the right for $\|.\|_2$ and belongs to the von Neumann algebra $W^*(X_s^1, ..., X_s^1)$, we also assume that conjugate variables for this tuple exists :

$$\partial_{i,s}^*(1 \otimes 1) = \xi_s^i \tag{9.36}$$

Then we have the following estimation of the Wasserstein distance between two close points (see [50] for the precise definition), i.e for $t \geq s$:

$$d_W(X_t, X_s) \leq \frac{t-s}{2}\|\Theta_s - \xi_s\|_2 + o(t-s) \tag{9.37}$$

Our interest will be focused on the case of self-adjoint convex polynomial potential and time independent. This can be understood as a homogeneous time case. In fact Dabrowski proved the existence and provide more general formulas for conjugate variables of a free SDE with polynomial drift, which is not necessarily the cyclic derivative of polynomial potential, but which satisfies some type of co-associativity relation and boundedness conditions in a projective tensor product at any time (in particular the cyclic derivative always satisfies these conditions).

Remark 18 *As a previous remark of Dabrowski ([50]), the crucial step in estimating the Wasserstein distance between two close points, is to see that our equation starting at X_t satisfies also a stationary free SDE defined on another space, and also driven by a Free Brownian motion, with conjugate variables as drift. Thus, since the Wasserstein distance compares (only the) distributions which can live in different spaces. That's why we have to construct a bigger space where both processes live in. It is precisely the idea used by Dabrowski, which allows to compare only the drift in L^2-norms between these two free SDE's.*

Heuristic proof The theorem 23 of Dabrowski in [50] allows getting the existence of a free Brownian motion satisfying which is not defined on the same von Neumann algebra (here we denote Φ is the evolution with respect to time).

$$\Phi_u(X_s) = X_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi(\xi_s)ds + S_t \tag{9.38}$$

We also have the existence of a von Neumann algebra $\tilde{M} = W^*(X_t, t \geq 0)$ (equipped with the natural filtration of the algebraic path space) containing our solution, another space M' containing the solution $(X_t, t \geq s)$ and a copy of M_S where $M_S = W^*(X_t^1, ..., X_t^n, \{S_t\})$. To compute the difference between evolution and the process, since they live in distinct spaces, it's natural to take the free-amalgamated product to have both solutions defined on the same space : $\mathbb{M} = \tilde{M} *_{M_S} M'$.

Once we have done this, we are only left to evaluate the drift since both free SDE's are driven by a free Brownian motion (on this bigger space) and thus they give non contribution in our estimation of the Wasserstein distance.

In $\mathbb{M}$, we have for $t \geq s$:

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{t-s}(X_s) - X_s\|_2 &\leq \frac{1}{2}\int_0^{t-s} \|\Phi_v(\Xi_s)ds - \Theta_{s+v}\|_2 dv \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{t-s} \|\Phi_v(\xi_s - \Theta_v)\|_2 dv + \frac{1}{2}\int_0^{t-s} \|\Phi(\xi_s) - \xi_s\|_2 dv + \|\Theta_s - \Theta_{s+v}\|_2 \\
&\leq \frac{t-s}{2}\|\Theta_s - \xi_s\|_2 + o(t-s) \qquad (9.39)
\end{aligned}$$

Since $\|\Phi_u(\xi_s) - \xi_s\|_2 \leq 2\|\xi_s\|_2\|(\Phi_v - Id)(\xi_s)\| \rightarrow_{v\rightarrow 0} 0$ We get the desired conclusion.

We would like to apply the theorem before to obtain quantitative bounds for the Wasserstein distance between a n-tuple of self-adjoint random variables and a n-semicircular family with covariance C. Intuitively, we have to connect them through an appropriate Ornstein-Uhlenbeck process, the idea to make appear the conjugate variables is to see that if the tuple is close to be a n-semicircular family with covariance C, and thus the conjugate variables of X should be close to $C^{-1}X$, its then natural to consider a free SDE with that potential, in fact for a n-$(0,1)$ free semicircular system, we get that the conjugate variables should be close to the tuple itself (this characterized for centered normalized semicircular system, see [50] proof of free Talagrand inequality). We will see in the following that Fisher information is closely related to the Stein discrepancy.

We consider the following approach. Following Dabrowski's ideas : the drift,i.e the convex potential V of the free SDE carries all the information.

The other one is based on a linear transformation of a free SDE : the information is contained in the volatility process and not anymore in the drift.

Theorem 18 *Let's consider as before the following free differential equation, with the initial conditions X_0 free from $(S_t)_{t\geq 0}$:*

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t C^{-1}X_t dt + S_t$$

This equation admits a solution which turns out to be equal in distribution to

$$\begin{aligned}
X_t &\simeq e^{-\frac{t}{2}C^{-1}}X_0 + \left(I_n - e^{-tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}S' \qquad (9.40)\\
&\simeq e^{-\frac{t}{2}C^{-1}}X_0 + \left(I_n - e^{-tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} S_C \qquad (9.41)
\end{aligned}$$

with S' a free $(0,1)$ $n-$semicircular system and S_C a n-semicircular family with covariance $C > 0$.

Since the transformation is linear, the potential is again valued in the Von-Neumann algebra $W^*(X_s^1, ..., X_s^n)$ and thus all hypothesis of our previous theorem are fulfilled, especially the right continuity of the process for the 2-norm.

From all of these conditions, we get that

$$\frac{d^+}{dt} d_W(X_t, S_C) \leq \frac{1}{2}\Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}} \tag{9.42}$$

Proof: By the previous theorem, we get that $d_W(X_t, X_s) \leq \frac{1}{2}\|C^{-1}X_s - \xi_s\|_2 + o(t-s)$. Now it is essentially the same idea of [50], which is a triangle inequality and the estimation given in the Theorem 17 for the Wassertein distance, to get $\overline{\lim}_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}|d_W(X_{t+\epsilon}, S) - d_W(X_t, S)| \leq \frac{1}{2}\Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}}$. ■

Remark 19 *Note that we have the equality in distribution by a simple Ito formula with the usual variation of constant method with integrating factor : $e^{tC^{-1}}$, which is the semigroup generated by C^{-1} (understand as the usual matrix exponential).*

The following process $(e^{tC^{-1}}X_t)_{t\geq 0}$ is then well-defined because it is a simple linear transformation of the process $(X_t)_{t\geq 0}$, and moreover, we get by integration by parts for all $t \geq 0$:

$$e^{tC^{-1}}X_t = X_0 + \int_0^t e^{vC^{-1}} dS_v \tag{9.43}$$

where for an adapted process $(U_t)_{t\geq 0}$ valued in $M_n(\mathcal{A})$ (to the filtration generated by the free Brownian motion : $W^*(S_t^1 \ldots, S_t^n)$), we denote, as in the preliminaries (where the integral is constructed for step process and then extended to the class of matricial adapted processes by density and Ito isometry) :

$$\int_0^t U dS_v = \left(\sum_{j=1}^n \int_0^t U_{i,j} dS_v^j\right)_{i=1}^n \tag{9.44}$$

From that we deduce :

$$X_t = e^{-\frac{t}{2}C^{-1}}X_0 + e^{-\frac{t}{2}C^{-1}}\int_0^t e^{\frac{v}{2}C^{-1}} dS_v \tag{9.45}$$

From this, it is easy to remark that the last part of the member : the stochastic integral, is a (multivariate) semicircular process, with centered mean, and moreover we can deduce that :

For all $t \geq 0$,

$$\tau(X_t) = e^{-\frac{t}{2}C^{-1}}\begin{pmatrix} \tau(X_0^1) \\ \tau(X_0^2) \\ \vdots \\ \tau(X_0^n) \end{pmatrix} \tag{9.46}$$

Note moreover, that if we assume that X_0 is a semicircular family with covariance C, by freeness between X_0 and $(S_t)_{t\geq 0}$, then X_t is stationary (in distribution).

The cross covariance matrix of the process $(V_t)_{t\geq 0} = \left(e^{-\frac{t}{2}C^{-1}} \int_0^t e^{\frac{v}{2}C^{-1}} dS_v\right)_{t\geq 0}$ *is simply obtained by Ito isometry (with the commutativity between the two exponential matrix since they are functions of the matrix C) :*

$$cov(V_t, V_s) = e^{-\frac{(t+s)}{2}C^{-1}} \int_0^{t\wedge s} e^{vC^{-1}} dv \tag{9.47}$$

Now, it is well known that the last integral could be computed explicitly, since for $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *:*

$$\int_0^t e^{sA} ds = \left(e^{tA} - I_n\right) A^{-1} \tag{9.48}$$

which gives for the covariance matrix of X_t *(here t is fixed) :*

$$cov(V_t) = \left(I_n - e^{-tC^{-1}}\right) C \tag{9.49}$$

And finally we get in distribution, for all $t \geq 0$ *:*

$$X_t \simeq e^{-\frac{t}{2}C^{-1}} X_0 + \left(I_n - e^{-tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} S' \tag{9.50}$$

With S' *a free* $(0,1)$ *semicircular system.*

This provides a useful interpolation between the tuple X and the semicircular family of covariance C (analog of the Ornstein-Ulhenbeck semigroup with drift in the classical case). It is easily seen that if the matrix $C = \rho I_n$*, we find the usual interpolation given by the Ornstein-Uhlenbeck semigroup and already used in [70] (with a simple time change in this case* $t \mapsto \rho t$*) or in [35]. It seems rather convenient to work with the interpolation (9.40) compared to the following theorem 19 which computes explicitly the conjugate variable of a free SDE with polynomial drift, in order to deduce a bound of free Fisher information along the path of the Ornstein-Uhlenbeck process by means of free Stein discrepancy. Note that we will work with* $(X_{2t})_{t\geq 0}$ *to avoid the factor* $\frac{1}{2}$ *in the exponentials.*

As in the commutative case, our previous results will provide some inequalities relating free Fisher information and a quantity which is slightly modification (gaussian variant) of non-microstates free entropy. This is the price to pay to deduce such inequality since there is still an unknown change of variables for the non-microstate free entropy χ^*, this type of inequality is known as Logarithmic Sobolev inequality (*LSI* in abbreviation). Before that, we have to introduce some notations and theorems of Dabrowski.

Theorem 19 *(theorem 25 in [50]) For a free SDE with self-adjoint initial conditions*

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t D_i V(X_t) dt + S_t^i \tag{9.51}$$

with V a self-adjoint polynomial convex potential as in [50] (one can solve this equation in a strong sense. In the sequel, we will only suppose that we are given a solution), then $X_t^i, \dots X_t^n$ *have conjugate variable* ξ_t^i *for* $t > 0$*, and if they also does for* $t = 0$*, we have* $\tilde{\xi}_{V,t} = (\tilde{\xi}_{V,t}^i, \dots, \tilde{\xi}_{V,t}^n)$ *with for each* $i = 1, \dots, n$ *:*

$$\tilde{\xi}_{V,t}^i = \tilde{\xi}_t^i - D_i V(X_t)$$

solutions of the following free SDE :

$$\tilde{\xi}_{V,t}^i = \tilde{\xi}_{V,0}^i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_0^t \partial_j([D_i V](X_s))\sharp\tilde{\xi}_{V,s}^i ds$$

Moreover $\xi_s^i = \tau(\tilde{\xi}_s^i | X_s)$ *where* $\tau(.|X_s)$ *is the (only trace preserving) conditional expectation on* $W^*(X_s)$*.*

Two notions of convexity have been studied, the first one due do Guionnet and Shlyakhtenko in [86], precisely one says that V is (c, M)*-convex if for all* X, Y *with* $\|X\|, \|Y\| \leq M$*, we have the existence of a constant* $c > 0$*, such that :*

$$[DV(X) - DV(Y)].(X - Y) \geq c(X - Y).(X - Y) \tag{9.52}$$

where $X.Y = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n X_i.Y_i + Y_i X_i$ *stands for the anti-commutator of X and Y (if* X, Y *are self-adjoint and* $\|X\|, \|Y\| \leq M$*).*

As mentioned by Guionnet and Shlyakhtenko, when the underlying non-commutative probability space is the space of complex matrices equipped with natural operations (with in particular the transconjugate as involution and operator norm), a potential V is self-adjoint (c, M) *convex if the map* $\left((X_{i,j})_{i,j=1}^n\right) \to Tr(V(X)$ *is strictly convex on the set of Hermitian matrices with spectral radius less or equal than* M*.*

The other one, which have been recently studied, imposes that the trace of Hessian of V is bounded below. Since, this last one lives on tensor product and one knows that the topology of tensor product is sensitive to the norm equipped with, one has to choose a topology with good properties. Dabrowski, Guionnet and Shlyakhtenko have proved in [53] that the extended Haagerup tensor product allows obtaining powerful results. For example quartic convex potential are allowed in this one. It's seems really powerful, because only subquadratic potential were studied before.

We can also obtain the following exponential decay of the free Fisher information if the potential V satisfies the following (different) convexity assumption, i.e there exist $c > 0$ *(uniform in* i, j*) :*

$$(\partial_j D_i V)_{i,j} \geq c(1 \otimes 1\delta_{i,j})_{i,j} \tag{9.53}$$

for all $i, j = 1, \dots, n$*, where the inequality holds in* $M_n(\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}^{op})$*.*

$$\Phi^*(X_t^1, \dots, X_t^n | V) \leq e^{-c(t-s)}\Phi^*(X_s^1, \dots, X_s^n | V) \tag{9.54}$$

We will give a short proof of the last statement, we can already notice that if $X_1, \ldots, X_n$ *and* $V = V^*$, *then* $\theta(X) = JDV(X)$ *is self-adjoint :*

Proof: *From (9.51), we are left to prove the exponential decay of the* L^2*-norms of each* $\tilde{\xi}^i_{V,u}$ *for* $i = 1, \ldots, n$.

Now, for $s \leq t$, *a simple integration by parts shows that :*

$$e^{c\frac{t}{2}}\tilde{\xi}^i_{V,u} = e^{c\frac{s}{2}}\tilde{\xi}^i_{V,s} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_s^t \left(c.1 \otimes 1^{op}\delta_{i,j} - \partial_j[D_iV](X_u)\right)\sharp\left(e^{c\frac{u}{2}}\tilde{\xi}^i_{V,u}\right)du \tag{9.55}$$

Taking the L^2 *norms and applying Grownall lemma, since the semigroup* $e^{\frac{ct}{2}.(1\otimes 1^{op})\otimes I_n - \frac{t}{2}\mathcal{J}DV}$ *(where the exponential is defined as the usual exponential in Banach algebra) generated by*

$$Q = \left(\frac{c}{2}.(1 \otimes 1^{op}\delta_{i,j}) - \frac{1}{2}\partial_j D_i V\right)^n_{i,j=1} \in M_n(\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}^{op}) \tag{9.56}$$

is contractive by the previous assumption (9.53) as well as (in another context) the conditional expectation for the L^2*-norm, we finally get the result.*

We remind to the reader that such estimates have been obtained by Fathi and Nelson in [70] for semicircular systems with (strictly positive) homothety covariance matrices, by computing conjugate variables with another method which is based on the equality in distribution of the free Ornstein-Uhlenbeck process. Note that this method will be used in the sequel to compute an inequality between Free Fisher information and Free Stein discrepancy along the path of an Ornstein-Uhlenbeck with positive linear drift.

Remark 20 *In our case, a simple computation shows that this condition holds for* V_C *defined before. In fact, the first condition which implies that one can solve the free SDE in a strong sense, and the last one to get exponential decay of the Free Fisher information holds true for* $c = \|C\|^{-1}_{op}$.

Definition 18 *For a free SDE with* $V \in \mathbb{C}\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ *(we assume that we are given a strong solution, it is always ensured if the first convexity assumption is fulfilled) :*

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t DV(X_t)dt + S_t$$

where use vector notations and $X_0 = \left(X^i_0\right)^n_{i=1}$.

We define the modified non-microstates free entropy relative to a potential V by :

$$\chi^*_V(X^1_0, ..., X^n_0) = -\int_0^\infty \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\|\xi^i_t - D_iV(X_t)\|_2^2 dt = -\int_0^\infty \frac{1}{2}\|\xi_t - DV(X_t)\|_2^2 dt \tag{9.57}$$

again with the usual conventions we used for vectors.

This allows us to obtain the Log-Sobolev inequality for self-adjoint convex potential V, since we have the following De Bruijn's formula which holds true.

Theorem 20 *Let V a self-adjoint convex potential as in [50], and χ_V^*, the modified non-microstates free entropy defined previously, then by definition, we have :*

$$\chi_V^*(X_0^1, ..., X_0^n) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi^*(X_t^1, \ldots, X_t^n|V)dt \tag{9.58}$$

And the following Log-Sobolev inequality holds :

$$-\chi_V^*(X_0^1, ..., X_0^n) \leq \frac{1}{2c}\Phi^*(X_0^1, \ldots, X_0^n|V) \tag{9.59}$$

Proof: The first part follows easily from the definition and for the other one we use the exponential decay of the free Fisher information, to get :

$$\begin{aligned} -\chi_V^*(X_0^1, ..., X_0^n) &\leq \frac{1}{2}\Phi^*(X_0^1, \ldots, X_0^n|V)\int_0^\infty e^{-cs}ds \\ &= \frac{1}{2c}\Phi^*(X_0^1, \ldots, X_0^n|V) \end{aligned} \tag{9.60}$$

which leads to the desired conclusion. ■

The following lemma allows us to obtain an inequality between Free Fisher information relative to a potential and the free Stein discrepancy and also a bound for the Wassertein distance (WS) between a tuple and a semicircular family of covariance $C > 0$. Moreover, it will also lead to an *HSI* inequality for the class of potential V_C. It was already obtained by Fathi and Nelson in [70] for semicircular family of covariance $C = \rho^{-1}I_n$ and for $\chi^*(.|V_C)$, we will obtain it for the modified non-microstates free entropy χ_V^*.

It seems really important to notice that in the case of [70], we have in fact the equality between the two non-microstates free entropy : $\chi^*(.|V_{\rho^{-1}I_n}) - \chi^*(S_\rho|V_\rho^{-1}I_n) = \chi^*_{V_{\rho^{-1}I_n}}(.)$ and it remains an open conjecture to prove the following formula which is a change of variable for χ_V^* :

$$\chi_V^*(.) = \chi^*(.|V) - K \tag{9.61}$$

for every convex potential where K is an unknown constant.

First approach

For the first approach, consider X a n-tuple of self-adjoint non commutative random variables. We note for S' a standard semicircular family and a covariance matrix $C > 0$, and S a semicircular family with covariance $C > 0$. $X_t = e^{-2t} + \sqrt{1 - e^{-2t}}C^{\frac{1}{2}}S$.

Then it is easy to remark that for the first equality is evident since $S \overset{(d)}{=} C^{\frac{1}{2}}S'$ (where (d) denotes the equality in distribution) and that the free Wasserstein distance compares only the distributions :

$$\frac{d^+}{dt}d_W(X_t, X) \leq \|C\|_{op}^{\frac{1}{2}}\Phi^*(C^{-\frac{1}{2}}X|V_{I_n})^{\frac{1}{2}} \tag{9.62}$$

Now it is essentially equivalent to prove an estimate for $\Phi^*(C^{-\frac{1}{2}}X_t|V_{I_n})^{\frac{1}{2}}$ by a quantity involving a different Stein discrepancy. Indeed, in this approach, one have to in a different free Stein discrepancy.

By Cébron result (lemma 2.6 in [35]) , one has :

$$\Phi^*(C^{-\frac{1}{2}}X_t|V_{I_n})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\Sigma^*(C^{-\frac{1}{2}}X|V_{I_n}) \tag{9.63}$$

Now the trick to pursue the computations, is to remark that when A is a free Stein kernel with respect to the potential V_{I_n}, then for any invertible matrix B, $(1\otimes 1)\otimes B.A.(1\otimes 1)\otimes B^T$ is a free Stein kernel for BX with respect to the potential V_{I_n}.

Indeed, denote A a free Stein kernel for X with respect to V_{I_n}. By the chain rule for the non-commutative Jacobian, one has :

$$\begin{aligned}
\langle BX, P(BX)\rangle_2 &= \langle X, B^T P(BX)\rangle_2 \\
&= \langle A, [J(B^T P)](BX)\rangle_2 \\
&= \langle A, (1\otimes 1)\otimes B^T.J_X(BX)\rangle_{HS}. \\
&= \langle A, (1\otimes 1)\otimes B^T.J_{BX}(BX).(1\otimes 1)\otimes B\rangle_{HS}. \\
&= \langle (1\otimes 1)\otimes B.A.(1\otimes 1)\otimes B^T, [JP](BX)\rangle_{HS}.
\end{aligned} \tag{9.64}$$

where for $P \in \mathbb{P}^n$, $B^T P$ is the linear transformation of P by B^T.

Now we define the following modified Stein discrepancy, called the

Définition 95 *The free Gaussian Stein discrepancy with respect to the potential V_C (where $C > 0$ and C is symmetric) is defined as :*

$$\widetilde{\Sigma}^*(X|V_C) = \inf_A \left\|(1\otimes 1)\otimes C^{-\frac{1}{2}}.A.(1\otimes 1)\otimes C^{-\frac{1}{2}} - (1\otimes 1^{op})\otimes I_n\right\|_{L^2(M_n(\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}^{op}),(\tau\otimes\tau^{op})\circ Tr))} \tag{9.65}$$

where A is a free Stein kernel with respect to V_{I_n}.

And we can conclude that :

Proposition 33 *For any self adjoint vector X of non-commutative random variables, one has :*

$$d_W(X,S) \leq \|C\|_{op}^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Sigma}(X|V_C) \tag{9.66}$$

Note that this approach contributes to nothing, in other functionnal inequalities. Indeed, this one can only be useful for probabilistic approximations.

Second approach

The following lemma is dedicated to the second approach which is more adapted to the free setting, and this one will connect better quantites with respect to the potential V_c. In fact, to prove more general inequalities involving the Dabrowski's variant of non-microstates free entropy, the free fisher information the free Wasserstein distance and the free Stein discrepancy with respect to the potential V, one have to choose this approach. First, to lighten the notations, we will work directly with S a semicircular family with covariance C which will be supposed to be free from X, rather than suppose that X and S' (a centered normalized semicircular system) and then consider $C^{\frac{1}{2}}S'$.

Lemma 17 *Let X be a n-tuple of self-adjoint element of $(\mathcal{A},\tau)$ a W^*-probability space and let S be a n semicircular family of covariance C living also in the same space $(\mathcal{A},\tau)$ (one always can construct such space with the help of the free product) suppose definite positive (it implies in particular that C^{-1} is bounded from below by cI_n in the usual operator sense).*

Denote for all $t \geq 0$, $X_t = e^{-tC^{-1}}X + \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} S$, then we have :

$$\Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}}{\sqrt{1-e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}}}\|C^{-1}\|_{op}^{\frac{1}{2}}\Sigma(X|V_C) \tag{9.67}$$

Proof: We follow carefully the original proof of Cébron with some adaptations. In fact, by Voiculescu formulas, since we have freeness between X and S (corollary 3.9 and corollary 6.8 in [194]), we get :

$$\xi_t = \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tau\left(C^{-1}S|X_t\right)$$

With

$$\tau(C^{-1}S|X_t) = \left(\tau((C^{-1}S)_i)|X_t)\right)_{i=1}^n \tag{9.68}$$

where we use vector notations in order to avoid heavy ones. In particular the conditional expectation has to be taken componentwise, i.e

$$\xi_t = (\xi_t^1, ..., \xi_t^1) \tag{9.69}$$

And since we have a linear transformation of S, we can also see that $\tau(C^{-1}S|X_t) = C^{-1}\tau(S|X_t)$. Note that using one or the other, it will lead to the same conclusion.

$$\tau(C^{-1}S|X_t) = \left(\tau((C^{-1}S)_i)|X_t)\right)_{i=1}^n \tag{9.70}$$

We can also assume that the free Stein discrepancy is finite : $\Sigma(X|V_C) < \infty$ (if not we have nothing to prove, moreover as seen in [73], it always exists, provided that the evaluation of the tuple by the cyclic derivative potential vanishes) and we denote by A, a free Stein kernel with respect to V_C.

Then because X is supposed free from S, and since the orthogonal projection of Stein kernel onto the subspace $L^2(M_n(W^*(F) \otimes W^*(F)), (\tau \otimes \tau) \circ Tr)$ is also a free Stein kernel, we can assume that A belongs to this subspace.

Now, we can consider the map for each $i = 1 \ldots, n$:

$$\partial_{S_i} : L^2(W^*(X, S)) \to L^2(W^*(X, S)) \otimes L^2(W^*(X, S)) \tag{9.71}$$

$$\partial_{S_i} = \sum_{M = P_1 S_i P_2} P_1 \otimes P_2$$

already defined before and the non commutative Jacobian associated to this n-tuple of semicircular family with covariance C (which is an unbounded closable operator since conjugate variables does exist).

On $\mathbb{C}\langle X\rangle^{\otimes^2}$, we easily deduce by the freeness between F and S, that :

$$\partial^*_{S_i}(P_1 \otimes P_2) = P_1 (C^{-1}S)_i P_2$$

which implies for all $D \in \mathbb{C}\langle X\rangle^{\otimes^2}$

$$\|\partial^*_{S_i}(D)\|_2^2 = \langle \partial_{S_i}\partial^*_{S_i}(D), D\rangle = C^{-1}_{i,i}\|D\|^2$$

The absolute value is not needed for $C^{-1}_{i,i}$, since all diagonal elements of a positive definite matrix are positive.

We can then deduce that the norm of the adjoint of the non-commutative Jacobian is given for all $B \in M_n(W^*(X) \otimes W^*(X))$ by using the freeness between B and S

$$\|\mathcal{J}^*_S(B)\|_2^2 = \|B \sharp (C^{-1}S)\|^2_{HS} \leq \|C^{-1}\|_{op}\|B\|^2_{HS}$$

Where $(C^{-1}S)_i = \sum_{j=1}^n C^{-1}_{i,j} S_j$ for all $i = 1, \ldots n$.

Note also that the free Fisher information of the n-semicircular family S with covariance C is equal to :

$$\Phi^*(S) = tr(C^{-1}) \tag{9.72}$$

As pointed out previously in some papers of Cébron or Fathi, it could be very difficult to compute $J^*_S(A)$, however, under the conditional expectation $\tau(.|X_t)$, this term could be handled more easily.

To have a nicer exposure, because the following computations involve a lot of notations, we set for all $t > 0$:

$$\begin{aligned} B_t &= (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A})} \otimes \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-tC^{-1}} \\ D_t &= (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-tC^{-1}} \\ E_t &= (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes e^{-tC^{-1}} \end{aligned} \tag{9.73}$$

Indeed, one can show that :

$$\tau(C^{-1}X|X_t) = \tau\Big(\mathcal{J}_S^*(A.D_t)|X_t\Big) \tag{9.74}$$

To see that, we use the existence of free Stein kernel A, the freeness between X and S, the fact that the matrices are self-adjoint and finally the chain-rule for the non-commutative Jacobian (details can be found in [194]).

Finally, we introduce the two following Jacobian J_X and J_{X_t} defined with respect to X and X_t in the same way of 9.71 :

We now remind that on $\mathbb{C}\langle X_t\rangle$, we can invert the conditional expectation and the free difference quotient (by the freeness between X and S). Then, we have the following proposition which is nothing but a chain rule for the Jacobian of a linear transformation $X \mapsto AX$ with $A \in GL_n(\mathbb{C})$: $J_{AX} = J_X.(1 \otimes 1) \otimes A^{-1}$

$$\mathcal{J}_X.\Big((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes e^{tC^{-1}}\Big) = \mathcal{J}_{X_t} = J_S.\Big((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\Big) \tag{9.75}$$

We can then compute for all $P \in \mathbb{P}^n$:

$$\begin{aligned} \Big\langle P(X_t), C^{-1}X\Big\rangle_2 &= \langle \mathcal{J}_{X_t}(P(X_t)).E_t, A\rangle_{HS} \\ &= \langle \mathcal{J}_S(P(X_t)), A.D_t\rangle_{HS} \\ &= \Big\langle P(X_t), \mathcal{J}_S^*[A.D_t]\Big\rangle_2 \end{aligned} \tag{9.76}$$

Where we used the remark 13 in the first line. In the second one, we used the equation (9.75). In the fifth line we used the chain rule satisfied by the Jacobian. Finally, using the property (9.23), we may obtain the desired conclusion.

When the covariance matrix is a homothety, it is easier to achieve the proof because in the proposition 9.75, we have that for D, a homothety in $M_n(\mathbb{C})$, $(1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes D$ belongs to the center of $M_n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op})$, and thus one can simplify formula (9.74). From all these computations, we evaluate the free Fisher information with respect to the potential V_C by and we note for $t > 0$, $\psi_t = \xi_t - C^{-1}X_t$:

$$
\begin{aligned}
\Phi^*(X_t|V_C) &= \left\langle \xi_t - C^{-1}X_t, \xi_t - C^{-1}X_t \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \xi_t - C^{-1}\left(e^{-tC^{-1}}X + \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} S\right), \xi_t - C^{-1}X_t \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} C^{-1}S - e^{-tC^{-1}}C^{-1}X - C^{-1}\left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} S, \xi_t - C^{-1}X_t \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(C^{-1}S - \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-tC^{-1}}C^{-1}X - \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)C^{-1}S\right), \psi_t \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-2tC^{-1}}C^{-1}S - \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-tC^{-1}}C^{-1}X\right), \psi_t \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-2tC^{-1}} J_S^*\left[(1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes I_n\right] - \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-tC^{-1}} \mathcal{J}_S^*(A.D_t)\right), \psi_t \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathcal{J}_S^*\left[E_{2t}\right] - \mathcal{J}_S^*\left[B_{2t}.A.D_{2t}\right]\right), \psi_t \right\rangle_2 \\
&= \left\langle \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathcal{J}_S^*\left[E_{2t} - B_{2t}.A.D_{2t}\right]\right), \psi_t \right\rangle_2 \\
&\leq \left\| \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{op} \left\| \mathcal{J}_S^*\left[E_{2t} - B_{2t}.A.D_{2t}\right] \right\|_2 \Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\| \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{op} \|C^{-1}\|_{op}^{\frac{1}{2}} \left\| E_{2t} - B_{2t}.A.D_{2t} \right\|_{HS} \Phi^*(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}} \qquad (9.77)
\end{aligned}
$$

Now we use that $\left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ is symmetric (because C is symmetric). Moreover, it is straightforward to see that the operator norm of this matrix is equal to :

$$
\left\| \left(I_n - e^{-2tC^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{op} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}}} \qquad (9.78)
$$

And that

$$
\left\| E_{2t} - B_{2t}.A.D_{2t} \right\|_{HS} \leq \left\| e^{-2tC^{-1}} \right\|_{op} \left\| (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes I_n - A \right\|_{HS} \qquad (9.79)
$$

Since for all $t > 0$, B_t, D_t, E_t commutes, we see that :

$$
B_{2t}^{-1} E_{2t} D_{2t}^{-1} = (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes I_n \qquad (9.80)
$$

By using that for $t > 0$: $\|e^{-2tC^{-1}}\|_{op} = e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}$, the conclusion follows directly by minimizing over A. ■

Theorem 21 *For a potential V_C where the matrix C is symmetric definite positive, we have the following HSI inequality.*

Let $X = (X_1, \dots, X_n)$ a n-tuple of non-commutative random variables (self-adjoint operator in $(\mathcal{A}, \tau)$, then

$$-\chi^*_{V_C}(X_1, ..., X_n) \leq \frac{||C||_{op}||C^{-1}||_{op}}{2}\Sigma^*(X|V_C)^2 log\left(1 + \frac{\Phi^*(X|V_C)}{||C^{-1}||_{op}\Sigma^*(X|V_C)^2}\right) \tag{9.81}$$

Proof: The proof is obtained by the same arguments as in [70] Theorem 2.6. Indeed, we begin with the following de-Bruijn´s identity, we assume that $\Phi^*(X|V_C) < \infty$ (if not there is nothing to prove). We denote also X_t the interpolation given in lemma 17 where X is the vector of initial conditions :

$$\begin{aligned}
-\chi^*_{V_C}(X_1, ..., X_n) &= \int_0^\infty \Phi^*(X_{2t}|V_C)dt \\
&\leq \frac{1}{2}\Phi^*(X|V_C)\int_0^u e^{-2t||C||^{-1}_{op}}dt + ||C^{-1}||_{op}\Sigma^*(X|V_C)^2\int_u^\infty \frac{e^{-4t||C||^{-1}_{op}}}{1 - e^{-2t||C||^{-1}_{op}}}dt \\
&\leq \frac{||C||_{op}}{2}\Phi^*(X|V_C)(1 - e^{-2u||C||^{-1}_{op}}) \\
&+ \frac{||C||_{op}||C^{-1}||_{op}}{2}\Sigma^*(X|V_C)^2\left(-e^{-2u||C||^{-1}_{op}} - log\left(1 - e^{-2u||C||^{-1}_{op}}\right)\right)
\end{aligned} \tag{9.82}$$

Then by optimizing in $r = 1 - e^{-2u||C||^{-1}_{op}}$, we get :

$$1 - e^{-2u||C||^{-1}_{op}} = \frac{||C^{-1}||_{op}\Sigma^*(X|V_C)^2}{\Phi^*(X|V_C) + ||C^{-1}||_{op}\Sigma^*(X|V_C)^2} \tag{9.83}$$

By replacing this value in the previous inequality, we get the desired conclusion. ■

Which improves *LSI*. This last one gives exactly the same *HSI* inequality found in [70], because the product of the operator norm vanishes since the covariance matrix is a positive homothety and moreover the two entropies relative to the potential $V_{\rho^{-1}I_n}$ aggres. We also remark that we have the appearance of a quantity usually called condition number $k(A) = ||A||_{op}||A^{-1}||_{op}$ in numerical analysis. This should be compared to the results exposed in [106], where a modified Stein discrepancy is defined in another way and not directly linked to the usual Stein discrepancy for approximations.

Now, we finish the section by stating a transport inequality between the non commutative Wasserstein distance and the free Stein discrepancy.

Lemma 18 *For any self-adjoint vector $X = (x_1, \dots, x_n)$ in $(\mathcal{A}, \tau)$, we have :*

$$d_W(X, S) \leq ||C||_{op}||C^{-1}||^{\frac{1}{2}}_{op}\Sigma(X|V_C) \tag{9.84}$$

Proof: By the previous Theorem 18 where $(X_t)_{t\geq 0}$ is the interpolation given in lemma 17, we obtain that $\frac{d^+}{dt}W(X_t, S) \leq \Phi(X_t|V_C)^{\frac{1}{2}}$, then by using the previous inequality between free Fisher information and Stein discrepancy, it follows by a simple integration :

Where we have used that :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}}{\sqrt{1-e^{-2t\|C\|_{op}^{-1}}}} = \|C\|_{op} \tag{9.85}$$

■

Remark 21 *One can actually prove a Talagrand transport inequality for a convex potential V bounded from below in the sense of (9.53) by $c(1 \otimes 1) \otimes I_n$ for χ_V^* by the same arguments, it is done by Dabrowski (in his PhD Thesis [51]) and it leads to the following inequality where we denote the (only) free Gibbs state with convex potential V with law τ_V :*

$$d_W(X, \tau_V) \leq \sqrt{-\frac{2}{c}\chi_V^*(X)} \tag{9.86}$$

A shorter way to reach the conclusion is to consider $g(\epsilon) = d_W(X(t+\epsilon), \tau_V) - (-\frac{2}{c}\chi_V^*(X))^{\frac{1}{2}}$, by using LSI, one can show that $\frac{d}{d\epsilon}g(\epsilon) \leq 0$, and then achieved the proof.

Remark 22 *Note that the two approchs will fournish exactly the same bounds for the for the multidimensionnal semicircular approximations on the Wigner space. In fact, we only want here to obtain a bound involving the two and fourth free cumulants.*

9.5 Wigner-Itô chaoses

In this section, we will describe the main tools to prove quantitative limit theorem for a tuple whose belongs to Wigner chaos.

In the sequel, we will denote S, a family of joint centered semicircular variables in some tracial W^*-probability space $(\mathcal{A}, \tau)$ equipped with a faithful normal tracial state. For any integer $n \geq 0$, we denote by $\mathcal{P}_n$ the Wigner chaos of order n, that is to say the Hilbert space in $L^2(\mathcal{A}, \tau)$ generated by the set $\{1_{\mathcal{A}}\} \bigcup \{S_1 \ldots S_k : 1 \leq k \leq n, S_1, ..., S_k \in S\}$.

We also define the homogeneous Wigner chaos of order n by :

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_{n-1}^{\perp} \tag{9.87}$$

and we have obviously :

$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k \tag{9.88}$$

Note here that the homogeneous chaos of order "0" is the complex linear span of $1_{\mathcal{A}}$ and the chaos of order "1" is the Hilbert Space generated by S, which is assumed to be an infinite separable Hilbert space. Now by the classification of such infinite dimensional separable real Hilbert space, we know that it is isometrically isomorphic to $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$. We then deduce that $S = \left\{S(h) : h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)\right\}$, and that the map : $h \mapsto S(h)$ is an isomorphism from $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ to S.

It turns out that the construction of Wigner chaos could be done efficiently by using an isomorphism between the free Fock space and the Wigner space : such a construction is usually done via the Wick map or multiple Wigner-Itô integral. We refer to the article [20] for a complete exposure.

In fact, if we denote $\mathcal{H}$, the complexified of $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$ to S, by setting $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$, and the projection π_n from $L^2(\mathcal{A}, \tau)$ to $\mathcal{H}_n)$:

$$I_n : h_1 \otimes ... \otimes h_n \mapsto \pi_n(S(h_1)...S(h_n)) \tag{9.89}$$

which can be extended to a linear isometry between $\mathcal{H}^{\otimes n}$ to $\mathcal{H}_n$.

An important lemma is the following, called the *Haagerup* inequality, which implies that our multiple integrals constructed to be in $L^2(\mathcal{A}, \tau)$ are in fact $\mathcal{A}$ and more precisely they belong to the C^*-algebra generated by $\{S_t\}_{t\geq 0}$ (theorem 5.3.4 of [20]) :

Theorem 22 *Let $n \geq 0$, then for all $F \in \mathcal{H}_n$, we have :*

$$\|F\|_{\mathcal{A}} \leq (n+1)\|F\|_{L^2(\mathcal{A},\tau)} \tag{9.90}$$

The following proposition ensures that the multiple Wiener-Itô integral behaves well with respect to the product. Indeed elements in some homogeneous Wigner chaos are bounded operators by the previous lemma, and so, we are allowed to multiply them and obtain an element in $\mathcal{A}$. In fact, this formula provides a linearization property for the product of two Wigner chaos.

Before stating the result, we begin with the definition of contraction.

Definition 19 *Let $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ and $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$, for every $0 \leq p \leq n \wedge m$, we define the contraction of order p of f and g as the element of $L^2(\mathbb{R}_+^{n+m-2p})$ by :*

$$f \overset{p}{\frown} g(t_1, ..., t_{n+m-2p}) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(t_1, ..., t_{n-p}, s_p, ..., s_1) g(s_1, ..., s_p, t_{n-p+1} ..., t_{n+m-2p}) d_{s_1} ... d_{s_p} \tag{9.91}$$

Proposition 15 *For all $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ and $g \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$, we have :*

$$I_n(f) I_m(g) = \sum_{p=0}^{n\wedge m} I_{n+m-2p}(f \overset{p}{\frown} g) \tag{9.92}$$

In particular for all $n, m \geq 0$:

$$\tau(I_n(f)^* I_m(g)) = \delta_{n,m} \langle g, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \tag{9.93}$$

Remark 23 *Given a function $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, the adjoint of this function is defined by :*

$$f^*(t_1, ..., t_n) = \overline{f(t_n, ..., t_1)}$$

such as $I_n(f)^* = I_n(f^*)$. We deduce easily that $I_n(f)$ is self-adjoint if and if only $f = f^*$. Such functions are called mirror-symmetric.

The contractions are really important in the context of Wigner chaos and Wiener chaos since they appear in the computation of moments of a chaotic random variable.

Lemma 19 *The following lemma is a simple adaptation of Theorem 1.6 of [100]*
Let $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, then :

$$\tau(|I_n(f)|^4) = 2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{p=1}^{n-1} \|f \overset{p}{\frown} f^*\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{n+m-2p})} \tag{9.94}$$

A generalized notion of contractions exist also trough the context of pairings, we denote $\mathcal{P}_2(n_1 \otimes \ldots \otimes n_r)$ the set of pairings $\pi \in \mathcal{P}_2(n_1 + ... + n_r)$ such that no blocs of π contains more than one element from each interval set :

$$\{1 \ldots n_r\}, \{n_1 + 1 \ldots n_1 + n_2\}, \ldots, \{n_1 + \ldots + n_{r-1}, \ldots, n_1 + \ldots + n_r\}$$

An integral relative to such pairings is constructed by setting for all $f_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^{n_1}), \ldots f_r, \in L^2(\mathbb{R}_+^{n_r})$:

$$\int_\pi f_1 \otimes \ldots \otimes f_r = \int_{\mathbb{R}^{\frac{n_1+\ldots n_r}{2}}} (f_1 \otimes \ldots \otimes f_r)(t_1, ..., t_{n_1+\ldots+n_r}) \prod_{\{i,j\}\in\pi} d_{t_i}$$

We finish this section with following proposition which is found in [100] :

Proposition 16 *(Lemma 2.1 of [100]) For all $f_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^{n_1}), \ldots f_r \in L^2(\mathbb{R}_+^{n_r})$, we have :*

$$\left| \int_\pi f_1 \otimes \ldots \otimes f_r \right| \leq \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{n_1})} \cdots \|f_r\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{n_r})} \tag{9.95}$$

9.6 The free Malliavin calculus

The classical Malliavin operators have a free counterpart in the context of free probability. This construction could be done efficiently in the Free Fock space (Biane and Speicher in [20]) and then transferred onto the algebra of field operator by the isomorphism between the free Fock space and the $*$-unital algebra of the field operator.

Definition 20 *The free Malliavin gradient is the unique unbounded closable operator such as :*

$$\begin{aligned} \nabla \quad : \quad & L^2(\mathcal{A},\tau) \to L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathcal{A},\tau)\otimes L^2(\mathcal{A},\tau)) \\ & A \mapsto \nabla A = (\nabla_t A)_{t\geq 0} \end{aligned} \tag{9.96}$$

such as for all $h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$, $\nabla(S(h)) = h.1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}$, and that, for all $A, B \in S_{alg}$ (where S_{alg} is the $*$-algebra generated by $\left\{S(h), h \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)\right\}$, we have $\nabla(AB) = A.\nabla B + \nabla A.B$ where the left and right actions are given by the multiplication on the left leg and opposite multiplication on the right leg.

Proposition 17 *(Proposition 5.3.10 of [20]) The domain of ∇ contains $\mathcal{P}_n$, and the restriction of ∇ to this space is a bounded linear operator.*

We can also explicit the action of ∇ on $\mathcal{P}_n$. First, we note that for any $n, m \geq 0$, the map $I_n \otimes I_m$ from $L^2(\mathbb{R}^n_+) \otimes L^2(\mathbb{R}^m_+)$ to $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$. By the isomorphism between $L^2(\mathbb{R}^{n+m}_+)$ and $L^2(\mathbb{R}^n_+) \otimes L^2(\mathbb{R}^m_+)$, we can see the linear extension of the map :

$$\begin{aligned} I_n \otimes I_m \quad : \quad & L^2(\mathbb{R}^{n+m}_+) \to \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n \\ & h_1 \otimes ... \otimes h_{n+m} \mapsto \pi_n(S(h_1)...S(h_n)) \otimes \pi_m(S(h_{n+1})...S(h_m)) \end{aligned} \tag{9.97}$$

For all $A \otimes B \in \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n$ and $B \otimes C \in \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n$,we denote : $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ and $(A \otimes B)\sharp(C \otimes D) = AC \otimes DB$, and we extend them by linearity for the first map which turns out to provide a map from $(\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)$ to $\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n$, and by bilinearity and continuity for the second one which gives a map from $(\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)^2$ to $P_{2n} \otimes P_{2n}$.

Since the state is tracial, it implies moreover (the proof is checked on elementary tensors of the form $A_1 \otimes A_2$ and $B_1 \otimes B_2$ and then extend by linearity and density) : for all $A, B \in (\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)^2$:

$$\langle A, B\rangle_{L^2(\mathcal{A},\tau)\otimes L^2(\mathcal{A},\tau)} = \tau \otimes \tau(B\sharp A^*)$$

We define for all $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, the function $f^k_t \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}_+)$ by the equality for almost all $t \geq 0$:

$$f(t_1, ..., t, t_{k+1}, ..., t_n) = f^k_t(t_1, .., t_{k-1}, t_{k+1}, ..., t_n)$$

Proposition 18 *(Proposition 5.3.9 of [20]) The Malliavin gradient maps $\mathcal{P}_n$ into $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n)$, indeed for $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, then for almost all $t \geq 0$:*

$$\nabla_t(I_n(f)) = \sum_{k=1}^{n} I_{k-1} \otimes I_{n-k}(f^k_t) \tag{9.98}$$

We finish this section by stating the chain rule of the free Malliavin Gradient :

Proposition 19 *For all $F \in \mathcal{P}_n$, and for all $P \in \mathbb{C}[X]$*

$$\nabla_t(P(F)) = (\partial P(F))\sharp\nabla_t(F) \tag{9.99}$$

and for the multivariate case, we have for all $(F_1, ..., F_d)$ with each $F_i \in \mathcal{P}_n$ and $P \in \mathbb{P}$:

$$\nabla_t(P(F)) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k P(F))\sharp\nabla_t F_k \tag{9.100}$$

9.7 Discrepancy for Wigner chaos

In this section, we will construct a Stein kernel with the help of two linear maps. For all $n \geq 0$, we denote $\tau \otimes id : \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ and $id \otimes \tau : \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ and we define them by : $\tau \otimes id(A \otimes B) = \tau(A).B$ and $id \otimes \tau(A \otimes B) = \tau(B).A$, for all $A, B \in \mathcal{P}_n$.

Lemma 20 *The following lemma (lemma 3.9 of [35]), is the crucial idea is to avoid the use of the Ornstein-Ulhenbeck operator. For all $A, B \in \mathcal{P}_n$, such as $\tau(A) = 0$ or $\tau(B) = 0$:*

$$\tau(AB) = \tau\left(\int_{\mathbb{R}_+} id \otimes \tau(\nabla_t A).(\tau \otimes id(\nabla_t B))dt\right) \tag{9.101}$$

In particular, we can obtain a new corollary which is the following :

Lemma 21 *Consider a n-tuple $F = (F_1, ..., F_n)$ of centered self-adjoint element in some $\mathcal{P}_d$ (with d fixed). For each $P \in \mathbb{P}$ and for each $i = 1, ..., n$ we have :*

$$\tau(P(F)F_i) = \sum_{k=1}^{n} \tau \otimes \tau\left(\partial_k(P(F))\sharp \int_0^{\infty} \nabla_t F_k \sharp(\tau \otimes id(\nabla_t F_i) \otimes 1_{\mathcal{A}})dt\right) \tag{9.102}$$

Proof: *The proof follows exactly the arguments of Cébron in addition to the Chain-rule of Malliavin derivative for evaluation of non-commutative polynomials in several variables, i.e for all $P \in \mathbb{P}$, $\nabla_t P(F) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k(P(F))\sharp\nabla_t F_k$.*

This lemma will be extremely useful to compute a Stein kernel in our setting.

Theorem 23 *Let $F = (F_1, ..., F_n)$ be a n-tuple of self-adjoint element in $\mathcal{P}_d$, such as $\tau(F) = (0, \dots, 0)$ (this can also be weakened by the assumption $\tau([DV_C](F) = \tau(C^{-1}F) = (0, \dots, 0))$), then*

$$A = \left(\sum_{j=1}^{n} C_{i,j}^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} (id \otimes \tau(\nabla_t F_j)).(\nabla_t F_k)^* dt\right)_{i,k=1}^{n} \tag{9.103}$$

is a free Stein kernel of F with respect to the potential V_C and it belongs to $M_n(\mathcal{P}_{2d} \otimes \mathcal{P}_{2d})$.

Proof: By the previous lemma, it suffice to compute for all $P \in \mathbb{P}$ $\tau(P(F)(C^{-1}F)_i)$ for each $i = 1, ..., n$, by linearity (of the linear operator $X \mapsto C^{-1}X$, we easily see that it is equal to :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tau \otimes \tau\left(\partial_k(P(F))\sharp \int_{\mathbb{R}_+} C_{i,j}^{-1} \nabla_t F_k \sharp(\tau \otimes id(\nabla_t F_j) \otimes 1_{\mathcal{A}})dt\right)$$

then by the definition of the inner product on $M_n(L^2(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, (\tau \otimes \tau) \circ Tr)$, we obtain the desired conclusion. It could also be achieved via the use of the Skorohod operator. Indeed, it is simply obtained by using that for any G in some $\mathcal{P}_d$: $\delta((id \otimes \tau(\nabla G)) \otimes 1_{\mathcal{A}}) = G$, and then again the use of linearity of the Skorohod integral. ■

The free Stein kernel constructed A is related to the following object : the free Stein Malliavin matrix which is the free counterpart of the well known Malliavin-Stein matrix defined in the classical case for a n-tuple $(F_1, ..., F_n)$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ where the filtration $\mathcal{F}$ is generated by a isonormal Gaussian process over a real separable Hilbert space $\mathcal{H}$ by : $\Gamma(F) = \left(\langle DF_j, -DL^{-1}F_i\rangle_{\mathcal{H}}\right)_{i,j=1}^{n}$ and where L^{-1} is the pseudo-inverse of the Ornstein-Ulhenbeck operator.

Definition 21 *We define the free Malliavin-Stein matrix valued in $M_n(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$ of a n-tuple $(F_1, ..., F_n)$ in $\mathcal{P}_d$ with d an bounded integer (in particular, they belong to the domain of $Dom(\nabla)$) as :*

$$\Gamma(F) = \left(\int_{\mathbb{R}_+} (id \otimes \tau(\nabla_t F_i)).(\nabla_t F_j)^* dt\right)_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathcal{P}_{2d} \otimes \mathcal{P}_{2d}) \tag{9.104}$$

Note that we will view it in the following as an element of $M_n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op})$

From this definition, we can see that our free Stein kernel A could be expressed as :

$$A = \left((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes C^{-1}\right).\Gamma(F)$$

where F is a n-tuple of elements in the non-homogeneous Wiener chaos of any bounded order and "." is the usual matrix product for element in $M_n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op})$.

Remark 24 *We would like to insist on the previous definition of Malliavin-Stein matrix, since it is well known in the classical case that the almost sure invertibility of the Malliavin matrix ensure the absolute continuity with respect to the Lebesgue measure of a random vector belonging to the Malliavin derivative domain. In free probability, a recent and deep result of Mai in [113] shows that the distribution of non-trivial Wigner chaos (and more generally finite sum) cannot have atoms. These results were provided by analyzing the problem in an algebraic setting : the absence of atoms is equivalent to the absence of zero-divisors which should "survive" under certain operations build on directional gradients which are the link between free Malliavin calculus and the theory of noncommutative derivatives (especially the ones which satisfies a coassociatity relation), and thus giving it the contraction by iterating the procedure (see [113] for complete exposure). We see in particular that the Malliavin derivative and the operator $\tau \otimes Id$ (which is crucial to lowers the degree of a polynomial evaluation) play an important role to deduce the result. It might be of independent interest to study this object, to maybe deduce regularity properties of distributions.*

Another potential application, which is well known in the classical case, is the possibility to compute recursively the cumulants of a vector of random variables which are Malliavin differentiable via the Malliavin-Stein matrix. It would be very interesting to study this free counterpart.

The goal is now to compute a sharp bound for the discrepancy for a tuple with elements living in homogeneous Wigner chaos, one can see that we have the following bound :

$$\left\|A - (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes I_n\right\|_{HS} = \left\|\left((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes C^{-1}\right).\Gamma(F) - (1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \otimes I_n\right\|_{HS}$$

$$\begin{aligned} &= \left\|(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\otimes C^{-1}.\Big(\Gamma(F)-(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\otimes C\Big)\right\|_{HS} \\ &\leq \|C^{-1}\|_{op}\left\|\Gamma(F)-(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\otimes C\right\|_{HS} \end{aligned} \tag{9.105}$$

In fact, consider a n-tuple $F=(F_1,...,F_n)=(I_{q_1}(f_1),...,I_{q_n}(f_n))$ of self-adjoint element in $(\mathcal{A},\tau)$, with $f_i\in L^2(\mathbb{R}_+^{q_i})$. Let C be a symmetric definite positive matrice $\in M_d(\mathbb{R})$, which is such as $C_{i,j}=\tau(F_iF_j)$ (note that the definite positive assumption is essential here), and denote $d=\max_i(q_i)$

We Set :

$$M(F)=\psi(\tau(F_1^4)-2\tau(F_1^2)^2,\tau(F_1^2),...,\tau(F_n^4)-2\tau(F_n^2)^2,\tau(F_n^2)) \tag{9.106}$$

with $\psi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)^d\to\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \psi(x_1,y_1,...,x_n,y_n) &= \sum_{j,k=1}^{n}\mathbb{1}_{q_k=q_j}q_k^{\frac{3}{4}}min\left(|x_k|^{\frac14}y_j^{\frac12},|x_j|^{\frac14}y_k^{\frac12}\right) \\ &+\sum_{j,k=1}^{n}\mathbb{1}_{q_k\neq q_j}(q_k\vee q_j)^{\frac34}min\left(|x_k|^{\frac14}y_j^{\frac12},|x_j|^{\frac14}x_k^{\frac12}\right) \end{aligned} \tag{9.107}$$

Theorem 24 *With the notations from above, we have that the non-commutative Wasserstein distance between F and S is bounded as follows :*

$$d_W(F,S)\leq\|C\|_{op}^{\frac12}\|C^{-1}\|_{op}M(F) \tag{9.108}$$

Before giving the proof, we begin with a lemma which is the free counterpart of the classical commutative case (see section 6.2 of [129]) :

Lemma 22 *Let $F=I_p(f)\in(\mathcal{A},\tau)$ and $G=I_q(g)\in(\mathcal{A},\tau)$ with $f\in L^2(\mathbb{R}_+^p)$ and $g\in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ assumed to be mirror-symmetric functions and let $a\in\mathbb{R}$.*

If $p=q$,we have :

$$\begin{aligned} \left\|\int_{\mathbb{R}_+}(id\otimes\tau)(\nabla_tI_p(f)).(\nabla_tI_q(g))^*dt-a.1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}}\right\|^2_{L^2(\mathcal{A},\tau)\otimes L^2(\mathcal{A},\tau)} &\leq (a-\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^p)})^2 \\ &+\left(\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{l=0}^{m-1}min\left(A_{f,g}^{p,l},A_{g,f}^{p+1,m}\right)\right) \\ &+\left(\sum_{l=0}^{p-2}min(A_{f,g}^{p,l},A_{g,f}^{p+1,p})\right) \end{aligned}$$

If $p < q$, we have :

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}_+}((id\otimes\tau)(\nabla_t I_p(f)).(\nabla_t I_q(g))^* - a.1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}}\right\|^2_{L^2(\mathcal{A},\tau)\otimes L^2(\mathcal{A},\tau)} &\leq a^2 + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^p)}\|g \overset{q-p}{\frown} g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p})}\\ &+ \left(\sum_{m=1,m\neq p}^{q}\sum_{l=0}^{p\wedge m-1} min\left(A^{p,l}_{f,g}, A^{q+1,m}_{g,f}\right)\right)\\ &+ \left(\sum_{l=0}^{p-2} min\left(A^{p,l}_{f,g}, A^{q+1,p}_{g,f}\right)\right)\end{aligned}$$

Where we have defined for every $p, q \geq 1$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^p)$ $g \in L^2(\mathbb{R}_+^q)$ and for each $l \leq p\wedge q$, the quantity :

$$A^{p,l}_{f,g} = \left\|f \overset{p-l-1}{\frown} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2l+2})} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^q)} \tag{9.109}$$

Before giving the proof of this lemma, let us introduce some notations. Indeed, for $F = I_n(f)$ with $f = f^*$, we define $\tilde{f}^k_t \in L^2(\mathbb{R}_+^{n-1})$ (for almost all $t \geq 0$) by :

$$\overline{f(t_1,...,t_{k-1},t,t_{k+1},...,t_n)} = \tilde{f}^k_t(t_{k-1},t_{k-2},...,t_1,t_n,...,t_{k+1})$$

and we remark that the following equality holds true for almost all $t \geq 0$ and $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ (firstly on elementary functions, then by linearity and a density argument, it extends to the whole space),

$$\left(I_{k-1}\otimes I_{n-k}(f^k_t)\right)^* = I_{k-1}\otimes I_{n-k}(\tilde{f}^k_t)$$

Proof:

$$\begin{aligned}(id\otimes\tau)(\nabla_t I_p(f)).(\nabla_t I_q(g))^* &= \left(id\otimes\tau\left(\sum_{n=1}^{p} I_{n-1}\otimes I_{p-n}(f^n_t)\right)\right).\left(\sum_{m=1}^{p} I_{m-1}\otimes I_{q-m}(g^m_t)\right)^*\\ &= I_{p-1}(f^p_t).\left(\sum_{m=1}^{q} I_{m-1}\otimes I_{q-m}(\tilde{g}^m_t)\right)\\ &= \left(\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=0}^{p\wedge m-1} I_{p-1+m-1-2l}\otimes I_{q-m}(f^p_t \overset{l}{\frown} \tilde{g}^m_t)\right)\end{aligned} \tag{9.110}$$

Where the last inequality is verified for elementary tensors $f = f_1\otimes...\otimes f_p$ and $f = g_1\otimes...\otimes g_q$, and then extended by linearity and density.

We can then distinguish the two cases of our lemma, in the first one, the two chaos have the same order, we get :

$$\left(\sum_{m=1}^{p}\sum_{l=0}^{m-1} I_{p-1+m-1-2l}\otimes I_{p-m}(f^n_t \overset{l}{\frown} \tilde{g}^m_t)\right) = \left(\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{l=0}^{m-1} I_{p-1+m-1-2l}\otimes I_{p-m}(f^p_t \overset{l}{\frown} \tilde{g}^m_t)\right)$$

$$+ \quad \left(\sum_{l=0}^{p-2} I_{2p-2l-2} \otimes 1_{\mathcal{A}}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^p)\right)$$
$$+ \quad f_t^p \overset{p-1}{\frown} \tilde{g}_t^p .1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}} \tag{9.111}$$

Where we separated the sum for $m = p$ and $l = p-1$, because it leads to the constant $f_t^p \overset{p-1}{\frown} \tilde{g}_t^p$:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{p-1}} f(t_1, ..., t_{n-1}, t) g(t, t_{p-1}, ..., t_1) dt_1 ... dt_{p-1}$$

by assumption of the mirror symmetries of f, g, then by integrating over t, we have :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} .1_A \otimes 1_A = \tau(FG).1_A \otimes 1_A$$

Now we use the Wigner bi-isometry to get :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (id \otimes \tau)(\nabla_t I_p(f)).(\nabla_t I_q(g))^* dt - a.1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}} \right\|^2_{L^2(A,\tau) \otimes L^2(A,\tau)}$$
$$= \left\| \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}_+} I_{p-1+m-1-2l} \otimes I_{p-m}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m) dt + \sum_{l=0}^{p-2} \int_{\mathbb{R}_+} I_{2p-2l-2} \otimes 1_{\mathcal{A}}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^p) dt \right.$$
$$\left. + (\tau(I_p(f) I_p(g)) - a).1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}} \right\|^2_{L^2(A,\tau) \otimes L^2(A,\tau)}$$
$$= (\tau(I_p(f) I_p(g)) - a)^2 + \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{l=0}^{m-1} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p-2l-2})} + \sum_{l=0}^{p-2} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^p) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p-2l-2})}$$

Now we compute at m, l fixed

$$f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m (t_1, ..., t_{p-l-1}, r_1, ..., r_{p-l-1})$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^l} f_t^p (t_1, ..., t_{p-l-1}, s_l, ..., s_1) \tilde{g}_t^m (s_1, ..., s_l, r_1, ..., r_{p-l-1}) ds_1 ... ds_l$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^l} f(t_1, ..., t_{p-l-1}, s_l, ..., s_1, t) \overline{g(r_{m-l-1}, ..., r_1, s_l, ..., s_1, t, r_{p-l-1}, ..., r_{m-l})} ds_1 ... ds_l$$

We can then infer that :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p-2l-2})}$$
$$= \int_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p})} f(t_1, ..., t_{p-l-1}, s_l, ..., s_1, t) \overline{g(r_{m-l-1}, ..., r_1, s_l, ..., s_1, t, r_{p-l-1}, ..., r_{m-l})}$$
$$\overline{f(t_1, ..., t_{p-l-1}, s_l^{'}, ..., s_1^{'}, t^{'})} g(r_{m-l-1}, ..., r_1, s_l^{'}, ..., s_1^{'}, t, r_{p-l-1}, ..., r_{m-l}) ds_1 ... ds_l dt ds_1^{'} ... ds_l^{'}$$

$$dt^{'} dt_1 ... dt_{p-l-1} dr_1 ... dr_{p-l-1}$$

Remind that the functions f, g are mirror-symmetric, and thus we obtain :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p-2l-2})}$$

$$= \int_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p})} f(t_1, ..., t_{p-l-1}, s_l, ..., s_1, t) g(r_{m-l}, ..., r_{p-l-1}, t, s_1, ..., s_l, r_1, , ..., r_{m-l-1})$$

$$f(t^{'}, ..., s_1^{'}, ..., s_l^{'}, t_{p-l-1}, ..., t_1) g(r_{m-l-1}, ..., r_1, s_l^{'}, ..., s_1^{'}, t^{'}, r_{p-l-1}, ..., r_{m-l}) ds_1 ... ds_l d_t ds_1^{'} ... ds_l^{'}$$

$$dt^{'} dt_1 ... dt_{p-l-1} dr_1 ... dt_{r-l-1}$$

This expression seems complicated to be handled, to deduce the result, the idea is to integrate over $dt_1, ..., dt_{p-l-1}$ or $dr_{m-l}, ..., dr_{p-l-1}$ to make appear a contraction of f and itself or g and itself (modulo a product of norms of f, g).

Indeed, when we integrate over $dt_1, ..., dt_{p-l-1}$, it is equal to the quantity :

$$\int_\pi (f \overset{p-l-1}{\frown} f) \otimes g \otimes g$$

for some pairing $\pi \in \mathcal{P}_2((2l+2) \otimes p \otimes p)$.

Now we use the Proposition 18, to get :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p-2l-2})} &\leq \left| \int_\pi (f \overset{p-l-1}{\frown} f) \otimes g \otimes g \right| \\
&\leq \|f \overset{p-l-1}{\frown} f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2l+2})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^p)}
\end{aligned}$$

And when we integrate over $dr_{m-l}, ..., dr_{p-l-1}$, we have :

$$\int_\pi (g \overset{p-m}{\frown} g) \otimes f \otimes f$$

for some pairing $\pi \in \mathcal{P}_2(2m \otimes p \otimes p)$ and we deduce that :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p-2l-2})} &\leq \left| \int_\pi (g \overset{p-m}{\frown} g) \otimes f \otimes f \right| \\
&\leq \|g \overset{p-m}{\frown} g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2l+2})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} \qquad (9.112)
\end{aligned}$$

For the other case, when the order of chaos are distinct (we can always suppose that $p < q$), we have separated the sum when $m = p$ and $l = p - 1$, to get :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=0}^{p\wedge m-1} I_{p-1+m-1-2l}\otimes I_{q-m}(f_t^n \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m)\right) &= \left(\sum_{m=1,m\neq p}^{q}\sum_{l=0}^{p\wedge m-1} I_{p-1+m-1-2l}\otimes I_{q-m}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m)\right)\\
&+ \left(\sum_{l=0}^{p-2} I_{2p-2l-2}\otimes I_{q-p}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m)\right)\\
&+ 1_{\mathcal{A}}\otimes I_{q-p}(f_t^p \overset{p-1}{\frown} \tilde{g}_t^p) \qquad (9.113)
\end{aligned}$$

From that, we infer again by using the Wigner bi-isometry that :

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mathbb{R}_+}(id\otimes\tau)(\nabla_t I_p(f)).(\nabla_t I_q(g))^* dt - a.1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}}\right\|^2_{L^2(A,\tau)\otimes L^2(A,\tau)}\\
&= \left\|\sum_{m=1,m\neq p}^{q}\sum_{l=0}^{p\wedge m-1}\int_{\mathbb{R}_+} I_{p-1+m-1-2l}\otimes I_{q-m}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m)dt + \sum_{l=0}^{p-2}\int_{\mathbb{R}_+} I_{2p-2l-2}\otimes I_{q-p}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^p)dt\right.\\
&\qquad\left. + \int_{\mathbb{R}_+} 1_{\mathcal{A}}\otimes I_{q-p}(f_t^p \overset{p-1}{\frown} \tilde{g}_t^p)dt - a.1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}}\right\|^2_{L^2(A,\tau)\otimes L^2(A,\tau)}\\
&= a^2 + \left\|\int_{\mathbb{R}_+}(f_t^p \overset{p-1}{\frown} \tilde{g}_t^p)dt\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{p-q})} + \sum_{m=1,m\neq p}^{q}\sum_{l=0}^{p\wedge m-1}\left\|\int_{\mathbb{R}_+}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m)dt\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{p+q-2l-2})}\\
&\qquad + \sum_{l=0}^{p-2}\left\|\int_{\mathbb{R}_+}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^p)dt\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{p+q-2l-2})} \qquad (9.114)
\end{aligned}$$

We are left to analyse the following terms when l, m are fixed :

$$\begin{aligned}
&f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m(t_1,...,t_{p-l-1},r_1,...,r_{q-l-1})\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^l} f_t^p(t_1,...,t_{p-l-1},s_l,...,s_1)\tilde{g}_t^m(s_1,...,s_l,r_1,...,r_{p-l-1})ds_1...ds_l\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^l} f(t_1,...,t_{p-l-1},s_l,...,s_1,t)\overline{g(r_{m-l-1},...,r_1,s_l,...,s_1,t,r_{q-l-1},...,r_{m-l})}ds_1...ds_l \qquad (9.115)
\end{aligned}$$

and then compute the following quantity :

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mathbb{R}_+}(f_t^p \overset{l}{\frown} \tilde{g}_t^m)dt\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{p+q-2l-2})}\\
&= \int_{L^2(\mathbb{R}_+^{p+q})} f(t_1,...,t_{p-l-1},s_l,...,s_1,t)\overline{g(r_{m-l-1},...,r_1,s_l,...,s_1,t,r_{q-l-1},...,r_{m-l})}\\
&\overline{f(t_1,...,t_{p-l-1},s_l',...,s_1',t')}g(r_{m-l-1},...,r_1,s_l',...,s_1',t,r_{q-l-1},...,r_{m-l})ds_1...ds_l dt ds_1'...ds_l'
\end{aligned}$$

$$dt^{'} dt_1 ... dt^{'}_{p-l-1} dr_1 ... dr_{q-l-1} \quad (9.116)$$

When $l \neq p-1$, the same bounds provided before holds.

And for $m = p$ and $l = p-1$, we are left to the quantity :

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{p-1}{\frown} \tilde{g}_t^p) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{q-p})} \\
&= \int_{L^2(\mathbb{R}_+^{p+q})} f(s_{p-1}, ..., s_1, t) g(s_{p-1}, ..., s_1, t, r_{q-p}, ..., r_1) \\
&f(t^{'}, s^{'}_1, ..., s^{'}_{p-1}) g(r_1, ..., r_{q-p}, t^{'}, s^{'}_{p-1}, ..., s^{'}_1) ds_1 ... ds_{p-1} dt ds^{'}_1 ... ds^{'}_{p-1} \\
&dt^{'} dr_1 ... dr_{q-p} \qquad (9.117)
\end{aligned}$$

which is equal by integrating over $dr_1, ..., dr_{q-p}$, to :

$$\int_\pi (g \overset{q-p}{\frown} g) \otimes f \otimes f \qquad (9.118)$$

for some pairing $\pi \in \mathcal{P}_2(2p \otimes p \otimes p)$

We then deduce that :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (f_t^p \overset{p-1}{\frown} \tilde{g}_t^p) dt \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{p+q-2l-2})} &\leq \left| \int_\pi (g \overset{q-p}{\frown} g) \otimes f \otimes f \right| \\
&\leq \|g \overset{q-p}{\frown} g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2p})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^p)} \qquad (9.119)
\end{aligned}$$

■

Remark 25 *As predicted ,the crucial part of the proof is to use the product and bi-product formula for Wigner and bi-Wigner chaos to deduce the bounds. Cébron (in section 3.5 of [35]) already made similar computations when two chaos in the lemma 22 are the same, we extend it here for different orders of chaos.*

From the lemma 8, to compute carefully the discrepancy, we will distinguish two cases : when the order of the two chaos is equal or different. This idea is similar from the original one of Nourdin and Peccati. Indeed, the starting point of our investigations is that $\int_0^\infty (id \otimes \tau(\nabla_t F_j)).(\nabla_t F_i)^* dt$ should be close to $C_{i,j}.1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}$ in $L^2(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \tau \otimes \tau)$ in terms of two and fourth free cumulants.

We are now in a position to give the proof of theorem 24.

Proof:

We know that

$$\|\Gamma(F)-(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\otimes C\|_{HS}^{2} = \sum_{i,j=1}^{n}\|\Gamma(F)_{i,j}-C_{i,j}.(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\|_{L^{2}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\tau\otimes\tau)}^{2}$$

We analyse the term inside the sum by distinguishing when the order of chaos are equals or different :

$$\begin{aligned}
\Gamma(F)_{i,j}-C_{i,j}.(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}}) &= \left(\int_{\mathbb{R}_+}(id\otimes\tau)(\nabla_t I_{q_i}(f_i)).(\nabla_t I_{q_j}(f_j))^{*}dt\right)-C_{i,j}.(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\\
&= \mathbb{1}_{q_i=q_j}\left(\int_{\mathbb{R}_+}(id\otimes\tau)(\nabla_t I_{q_i}(f_j)).(\nabla_t I_{q_j}(f_j))^{*}dt-C_{i,j}(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\right)\\
&+ \mathbb{1}_{q_i\neq q_j}\left(\int_{\mathbb{R}_+}(id\otimes\tau)(\nabla_t I_{q_i}(f_i)).(\nabla_t I_{q_j}(f_j))^{*}dt-C_{i,j}(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\right)\\
&= \mathbb{1}_{q_i=q_j}\left(\int_{\mathbb{R}_+}(id\otimes\tau)(\nabla_t I_{q_i}(f_i)).(\nabla_t I_{q_j}(f_j))^{*}dt-C_{i,j}(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})\right)\\
&+ \mathbb{1}_{q_i\neq q_j}\left(\int_{\mathbb{R}_+}(id\otimes\tau)(\nabla_t I_{q_i}(f_i)).(\nabla_t I_{q_j}(f_j))^{*}dt\right)
\end{aligned} \tag{9.120}$$

Where we have used that in the second sum the correlation between $I_{q_i}$and I_{q_j} vanishes since two Wigner-Itô multiple integral of different orders are orthogonal (with respect to $L^2(\tau)$, when the orders are different, i.e necessarily : $C_{i,j}=0$ when $q_i\neq q_j$.

We could have been more specific by distinguishing the second terms when $q_i<q_j$ and $q_i>q_j$, however in this second case is straightforward to adapt the lemma 22, to obtain a same type of bound.

Now, we recall by the Lemma 19, that for an homogeneous sel-adjoint variable $X=I_n(f)$, we have :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\|f\overset{i}{\frown}f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2n-2i})}^{2}\leq\tau(F^4)-2\tau(F^2)^2 \tag{9.121}$$

And by using a simple Cauchy-Scharwz inequality, we get :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\|f\overset{i}{\frown}f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{2n-2i})}\leq \sqrt{n}\left(\tau(F^4)-2\tau(F^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Remark 26 *We can see that the right leg is positive and it is a corollary of [100] which shows that the inequality (9.121) is an equality only and if only the random variable is semicircular. In particular, any variable living in some homogeneous Wigner chaos of any order strictly greater than one cannot have a semicircular distribution. We may notice that for now, it is still an open question to know that two noncommutative random variables living in different homogeneous Wigner chaos can have or not the same distribution.*

Remark 27 *Note that in the followings computations, we will only set I_{q_i} instead of $I_{q_i}(f_{q_i})$, for readers convenience.*

Then, we can use the previous bound obtained in the lemma 22 to obtain :

$$
\begin{aligned}
&\|\Gamma(F)_{i,j} - C_{i,j}.(1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}})\|^2_{L^2(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\tau\otimes\tau)} \\
&\leq 2\Bigg[\mathbb{1}_{q_i=q_j}\Bigg(\sum_{m=1}^{q_i-1} \sqrt{q_i} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_j}), (\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_i})\right) \\
&\quad + \sqrt{q_i} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_j}), \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_j})\right)\Bigg) \\
&\quad + \mathbb{1}_{q_i\neq q_j} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_i}), \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_i})\right) \\
&\quad + \mathbb{1}_{q_i\neq q_j} \sum_{m=1, m\neq q_i\wedge q_j}^{q_i\vee q_j-1} \sqrt{q_i\vee q_j} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_j}), \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_i})\right) \\
&\quad + \mathbb{1}_{q_i\neq q_j} \sum_{l=0}^{q_i\wedge q_j-2} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_j}), \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_i})\right)\Bigg] \\
&\leq \mathbb{1}_{q_i=q_j} q_i^{\frac{3}{2}} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_j}), \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_i})\right)\Bigg) \\
&\quad + \mathbb{1}_{q_i\neq q_j}(q_i\vee q_j)^{\frac{3}{2}} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_j}), \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{2}}\tau(I^2_{q_i})\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

It is important to notice that only one of the terms is non-zero since we have the indicators.

Now to have a bound for the discrepancy, it remains to sum over i, j, use the inequality 9.105 and take the square root of the quantity.

And by using the inequality : $\sqrt{x_1 + ... + x_n} \leq \sqrt{x_1} + ... + \sqrt{x_n}$, we have :

$$
\begin{aligned}
\Sigma(X|V_C) \quad \leq \quad & \|C^{-1}\|_{op}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{1}_{q_i=q_j} q_j^{\frac{3}{4}} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{4}}\tau(I^2_{q_j})^{\frac{1}{2}}, \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{4}}\tau(I^2_{q_i})^{\frac{1}{2}}\right) \\
+ \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{1}_{q_i\neq q_j}(q_i\vee q_j)^{\frac{3}{4}} min\left(\left(\tau(I^4_{q_i}) - 2\tau(I^2_{q_i})^2\right)^{\frac{1}{4}}\tau(I^2_{q_j})^{\frac{1}{2}}, \left(\tau(I^4_{q_j}) - 2\tau(I^2_{q_j})^2\right)^{\frac{1}{4}}\tau(I^2_{q_i})^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

■

Now, we return to the equivalence between componentwise convergence and joint convergence for sequence of self-adjoint vectors of multiple Wigner-Itô integral. Our previous result will allow us to prove in an easier way the following theorem, whose was first proved by Nourdin, Pecatti and Speicher and, it is done by analyzing carefully the contractions, which does appear in pairing integrals :

Theorem 25 *(Theorem 1.3 in [132]) Let $d \geq 2$ and $q_1, ..., q_d$ be some fixed integers, and consider a positive definite symmetric matrix $C = \left\{C_{i,j}\right\}_{i,j=1}^{d}$. Let $(S_1, ..., S_d)$ be a semicircular family with covariance C.*

For each $i = 1, \ldots, d$, we consider a sequence $(f_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ of mirror-symmetric function in $L^2(\mathbb{R}_+^{q_i})$, such for all $i, j = 1, \ldots, d$

$$\lim_{k\to\infty} \tau(I_{q_i} I_{q_j}) = C_{i,j} \tag{9.122}$$

then as $k \to \infty$ the following conditions are equivalent :

1. *The vector $(I_{q_1}(f_k^{(1)}), ..., I_{q_d}(f_k^{(d)}))$ converges in distribution to $(S_1, ..., S_d)$.*
2. *For each $i = 1, \ldots, d$, the random variable $I_{q_i}(f_k^{(i)})$ converges in distribution to S_i.*

Proof: The first implication is trivial, and the reverse follows directly by our theorem 6, since it implies for every $i = 1, \ldots, d$, $\lim_{k\to\infty} \tau(I_{q_i}(f_k^{(i)})^4) = 2C_{i,i}^2$ and therefore $M(F_k) \to 0$.

9.8 Rate of Convergence in the multivariate free Breuer-Major CLT

The main result in this section provides a quantitative bound for the Wasserstein distance in the multivariate Breuer-Major free central limit theorem for free fractional Brownian motion, which was studied in section 5.1 in [136] (see also section 4 of [27] for the Berry-Essen bounds in the univariate case). The last result is stated for the weaker distance d_{C_2}, which turns out to be less or equal than the non-commutative Wasserstein distance (see Cébron [35]). We will actually prove the theorem by analyzing carefully the contractions, which is fortunately done by previous authors : see [130] section 4.1. Contrary to previous results, one indeed has two options which gives both the same bound. For the first one, we won't express the non-commutative fractional Brownian motion as a Wigner integral with respect to the free Brownian motion, we'd rather see it as an analogue of centered isonormal process : a centered semicircular process which exists for a large class of covariance functions. The construction is done via the free Fock Space (see [30] for further details and further properties). This approach seems interesting for the reason that there is a few references which developp free Malliavin calculus with respect to a general semicircular process, and that usual results in Malliavin calculus, and especially the probabilstic approximation part can easily be extended for more general setting than the the usual Brownian motion case, as many result which don't invoke stochastic integration can be easily adapted in this more general context. For reader's convenience, one also state the other approach base on the representation of the non-commutative fractionnal Brownian-motion as a Wigner integral with respect to a free Brownian motion.

We remind some results about the non-commutative fractional Brownian motion with index $H \in (0, 1]$ which is defined as the centered semicircular process with covariance given by :

$$\tau(S_t^H S_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \tag{9.123}$$

The orthogonal polynomials associated with the semicircular distribution are the Chebyshev polynomials (of the second kind) $(U_n)_{n\geq 0}$ which are defined for $x \in [-2, 2]$ by the following recursive relation : $U_0(x) = 1, U_1(x) = x$ and for $n \geq 2$:

$$U_{n+1}(x) = xU_n(x) - U_{n-1}(x) \tag{9.124}$$

We define the discrete increment sequence of $(S_t)_{t\geq 0}$ by $\left\{X_k = S^H_{k+1} - S^H_k, k \geq 0\right\}$. We also define the covariance function of the stationary sequence $(X_k)_{k\geq 0}$ is given by :

$$\rho_H(x) = \frac{1}{2}(|x+1|^{2H} + |x-1|^{2H} - 2|x|^{2H}) \tag{9.125}$$

We define also the sequence $\{V_n, n \geq 1\}$ by :

$$V_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} U_q(X_k) \tag{9.126}$$

Where $\sigma = \sqrt{\sum_{r\in\mathbb{Z}} \rho^2(r)}$.

Note also that the well-known construction of the Hilbert space associated with a centered isonormal process in the commutative case, have a noncommutative counterpart. Indeed, we can construct an Hilbert space $\mathcal{H}$ associated with the free Fractional Brownian motion, that is $\mathcal{H}$ is the completion of the space of elementary functions with respect to the following inner product where $X = \{X(h), h \in \mathcal{H}\}$ is a centered semicircular process.

$$\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = \tau(X(\mathbb{1}_{[0,t]})X(\mathbb{1}_{[0,s]})) \tag{9.127}$$

It is important to notice that we can again construct a non-commutative Malliavin calculus with respect to that process. All the details could be found in [62], and it implies in particular that all the setting that we used before is true in a more general setting and based on a semicircular process (like the usual Malliavin calculus with respect to a isonormal process). The Malliavin-gradient operator, with respect to this process, will be denoted as ∇^X

This implies, that we can in particular write $S^H_t = X(\mathbb{1}_{[0,t]})$ rather than writing the Fractional Brownian motion as a Wigner integral with respect to a free Brownian motion. We also supposed constructed, in the same way, the Wigner-Ito chaos with respect to the non-commutative fractional Brownian motion.

Theorem 26 *Let $H < 1 - \frac{1}{2q}$, then for any fixed $d \geq 1$ and $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_d$, there exists a constant c, (depending only on d, H and $(t_0, t_1, ..., t_d)$, and not on n) such that, for every $n \geq 1$:*

$$d_W\left(\frac{V_n(t_i) - V_n(t_{i-1})}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}, S\right) \leq c \times \begin{cases} n^{-\frac{1}{4}} \text{ if } H \in (0, \frac{1}{2}] \\ n^{\frac{H-1}{2}}, \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2q-3}{2q-2}\right] \\ n^{\frac{2qH-2q+1}{4}} \text{ if } H \in \left(\frac{2q-3}{2q-2}, \frac{2q-1}{2q}\right) \end{cases} \tag{9.128}$$

Proof: Let $d \geq 1$ and $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_d$ and a constant c which can change from one line to another, it is easily seen that we can write (complete analogy with the gaussian case). If one choose to use directly the free Malliavin calculus with respect to the non-commutative fractionnal Brownian motion (*ncfBm*), one can write :

$$F_i = \frac{V_n(t_i) - V_n(t_{i-1})}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} = I_q^{S^H}(f_i^{(n)}) \tag{9.129}$$

where

$$f_i^{(n)} = \frac{1}{\sigma \sqrt{n} \sqrt{t_{i+1} - t_i}} \sum_{k=\lfloor nt_{i-1} \rfloor}^{\lfloor nt_i \rfloor - 1} \mathbb{1}_{[k,k+1]}^{\otimes q} \tag{9.130}$$

Now, it suffices to remark that in this setting, the free Stein kernel with respect to the normalized semicircular potential has also a nice form. The case of Wigner integrals with respect to the free Brownian motion being a particular case of this more general setting ($\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$) :

$$A = \left(\left\langle \tau \otimes id(\nabla^X(F_i)).\nabla^X(F_j) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right)_{i,j=1}^{n} \tag{9.131}$$

where for for a process $U = h.u$ with $u \in (\mathcal{A}, \tau)$, $h \in \mathcal{H}$ and a biprocess : $V = v \otimes g \otimes w$ with $v, w \in (\mathcal{A}, \tau)$, and $g \in \mathcal{H}$, we have used the following linear extension of the pairing :

$$\langle h.u, g.v \otimes w \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}}.uv \otimes w \tag{9.132}$$

Otherwise, one writes as usual, the *ncfBm* as a Wigner integral with respect to a free Brownian motion.
Indeed, it is well know that one can write for S a free Brownian motion :

$$S_t^H = \int_0^t K^H(t,u) dS_u \tag{9.133}$$

where K^H is a covariance function whose expression can be found in [56].

All Wigner-Ito integrals are of the same order q, it is then necessary to evaluate the difference between the fourth moment and two, since we have $\tau(I_q(f_i^n)^2) = 1$, for all $i = 1, \ldots, n$, we only have to estimate the difference between fourth moment and two, which turns out to be related to the contractions by Lemma 5,and this is fortunately done for the fractional Brownian motion (here it is exactly the same by fully-symmetry) in [130].

We have

$$\|f_i^{(n)} \otimes f_i^{(n)}\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2(q-r)}} \leq c \begin{cases} n^{-\frac{1}{2}} \text{ if } H \in (0, \frac{1}{2}] \\ n^{H-1}, \text{ if } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2q-3}{2q-2}\right] \\ n^{\frac{2qH-2q+1}{2}} \text{ if } H \in \left(\frac{2q-3}{2q-2}, \frac{2q-1}{2q}\right) \end{cases} \tag{9.134}$$

9.9 Further examples

In this section, we will study the case of *q-Gaussian algebras* with $q \in (-1, 1)$ discovered by Boszjeko, Kümmerer and Speicher, and which are a continuous interpolation between fermionic, free and standard Brownian motion Indeed, taking $q = 0$, we find the usual Free Fock space and letting q close to 1, we retrieve the usual Brownian motion. Several properties of these algebras were studied, especially the factoriality, non-Γ property or strong solidity...

It is important to notice that we can actually construct a q-stochastic integration with respect to this process. Indeed, Donati-Martin in the beautiful work [65] focused on *q-stochastic analysis* and proved several important results in the infinite dimensional setting : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, such as Ito integration for biprocesses, chaos decomposition and representation theorem. Recently, a non-commutative rough integration with respect to that process were constructed by [62] and shows that unless the free case where the freeness allows deducing Burkhölder-David-Gundy inequalities for stochastic integral of biprocesses, we are unable for now to obtain such results.

In another context, when the Fock space is built onto the finite dimensional Hilbert space, several authors such as Dabrowski, Shlyakhtenko, Nelson, Zeng in [52], [169] or [124] were able to construct derivations which allow them to obtain conjugate variables of q-semicircular families with respect to the standard semicircular potential "V_{I_n}" provided that an operator is Hilbert-Schmidt. One can even obtain a more powerful result concerning the free transport. Indeed, Guionnet and Shlyakhtenko obtained the isomorphism between the von Neumann algebras generated by *q-semicircular system* with N generators and the free group factor with N generators. This last result being true for q small enough.

Nelson and Zeng in [125] were able to generalize free monotone transport results in the infinite dimensional setting, but no longer for *q-Gaussian algebras*, rather for a deformation called *mixed q-Gaussian algebras* which depend on a infinite array with coefficients $q_{i,j} \in (-1, 1)$. They proved that the *mixed q-von Neumann algebras* with infinite generators are isomorphic to the von Neumann algebra of the countably free group factor with infinite generators : $L(\mathbb{F}_\infty)$, if the entries of the array are uniformly small with a rapid decay.

We note that, contrary to the free Fock space and symmetric Fock space, constructing a *q-Malliavin calculus* is rather difficult. In fact, in a previous version of this work, we had the idea to construct it, however we encounter the real difficulty to build it, which is the appearance of a crucial operator denoted Ξ_q which is never Hilbert-Schmidt in an infinite dimensional setting ($\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$) unless $q = 0$ and so it reduces to the Free Fock space. It would be rather interesting to be able to construct such Malliavin calculus for the *q-Fock space* to deduce further properties of the distributions of *q-Brownian chaos*, especially to prove analogues of powerful Mai´s result ([113]), which states that the spectral measure does not have atom. It is also of interest to show that the support of the distribution is connected. We leave it here for further investigations.

Let $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ be a real Hilbert Space and $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ its complexification (in the sequel we will only focus on the finite dimensional case).

We define $\mathcal{F}_q$ the q-Fock space as the completion of

$$\mathcal{F}_{alg} := \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n} \tag{9.135}$$

where Ω is a vacuum vector (separating)

with respect to the inner product :

$$\langle g_1 \otimes ... \otimes g_n, h_1 \otimes ... \otimes h_m \rangle_q = \delta_{n,m} \sum_{\sigma \in S_n} q^{inv(\sigma)} \langle g_1, h_{\sigma(1)} \rangle ... \langle g_n, h_{\sigma(n)} \rangle \tag{9.136}$$

where *inv* denotes the number of inversions of a permutation.

We will take $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$, and we will denote the following operators with are respectively the *left q-creation* and *left q-annihilation* operators associated with $h \in \mathcal{H}$ by :

$$l(h) = h \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \tag{9.137}$$

and

$$l^*(h)\Omega = 0 \tag{9.138}$$

$$l^*(h) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \langle h, g_1 \rangle g_2 \otimes \ldots \otimes \hat{g}_k \otimes g_n \tag{9.139}$$

where $\hat{.}$ denote the omission.

One can define a state on $\Gamma_q(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}) := vN\{l(h) + l^*(h), h \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}\}$, by setting :

$$\tau(X) = \langle X\Omega, \Omega \rangle \tag{9.140}$$

Then $x(h) := l(h) + l^*(h)$ is called a *q-semicircular operator*, the interpolation between a fermionic, $(0, 1)$ semicircular and the standard gaussian.

There also exist the q-counterpart of semicircular families. We will denote a *q-semicircular family*, as a family of element in $\Gamma_q(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ such as :

Definition 22 *Let $n \geq 2$ be an integer, and let $C = (C_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ be a positive definite symmetric matrix. A n-dimensional vector $(S_1, ..., S_n)$ of random variables in $(\mathcal{A}, \tau)$ is said to be a q-semicircular family with covariance C, if $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i_1, ..., i_n) \in [n] = \{1, \ldots, n\}$:*

$$\varphi(S_{i_1} S_{i_2} ... S_{i_n}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2[n]} q^{cr(\pi)} \prod_{\{a,b\} \in \pi} C_{i_a, i_b} \tag{9.141}$$

Where $\mathcal{P}_2[n]$ is the set of all the pairings of $\{1, \ldots, n\}$.

As seen previously, these (centered) families are only determined by the set of covariance : $\left\{\tau(X_i X_j)/i, j \in [n]\right\}$.

Let's denote : $\Xi_q \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_q(\mathcal{H}))$

$$\Xi_q = \sum_{n\geq 0} q^N P_N \tag{9.142}$$

where P_n is the orthogonal projection on the tensors of rank N.

We can remark that Ξ_q is in fact an Hilbert-Schmidt operator when $q^2 n < 1$.

In the following, we will fix a covariance matrix C supposed to be symmetric definite positive and we let $(e_i)_{i=1}^n$ a set of $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ such as $\langle e_i, e_j\rangle_{\mathcal{H}} := C_{i,j}$ and we will denote $\{x(e_i)\}_{i=1}^n$ a set of *q-semicircular operator*.

We see that

$$\tau(X_i X_j) = \langle X_i X_j \Omega, \Omega\rangle = \langle X_j \Omega, X_i \Omega\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = C_{i,j} \tag{9.143}$$

And it readily checked that this family is a *q-semicircular* family with covariance C.

Using the identification mentioned previously, when $q^2 n < 1$:

$$L^2(W^*(X) \otimes W^*(X)^{op}) \quad \rightarrow \quad HS(\mathcal{F}_q) \tag{9.144}$$
$$a \otimes b^{op} \quad \mapsto \quad \langle ., b^*\Omega\rangle_{\mathcal{F}_q} a\Omega \tag{9.145}$$

This means that one can identify Ξ_q as an element of $L^2(W^*(X) \otimes W^*(X)^{op})$.

We can construct a free Stein kernel with respect to the potential V_C. It turns out that this construction was already done by Shlyakhtenko in [169] with respect to the potential V_{I_n}.

In fact, we show that :

$$A = \Xi_q \otimes I_n \tag{9.146}$$

is a Free Stein kernel for X with respect to the potential V_C which is not surprising, since letting $q = 0$, we would find the Schwinger-Dyson equation of a semicircular family of covariance C which is : $\langle C^{-1}S, S\rangle_2 = \langle (1 \otimes 1) \otimes I_n, [\mathcal{J}P](S)\rangle_{HS}$

Proof: We recall by lemma 3.1 in [169], for $|q| < 1$, and $g, h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$$[l(h), r(g)] = 0 \tag{9.147}$$

and

$$[l(h)^*, r(g)] = \langle g, h\rangle \Xi_q \tag{9.148}$$

Now we deduce that

$$\begin{aligned}\left[\left(C^{-1}X\right)_i, r(e_j)\right] &= \left[\sum_{k=1}^{n} C^{-1}_{i,k} X(e_k), r(e_j)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} C^{-1}_{i,k} \left[X(e_k), r(e_j)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} C^{-1}_{i,k} \langle e_k, e_j\rangle \Xi_q \\ &= \sum_{k=1}^{n} C^{-1}_{i,k} C_{k,j} \Xi_q \\ &= \delta_{i,j}\Xi_q \end{aligned} \tag{9.149}$$

Then we apply the proposition 2.6 in [169] to get the result.

Thus, we are left to evaluate the free Stein discrepancy $\Sigma^*(X|V_C)$ by :

$$\Sigma^*(X|V_C) = ||\Xi_q - (1 \otimes 1^{op}) \otimes I_n|| \leq \sqrt{n}||\Xi_q - 1 \otimes 1^{op}||_{L^2(\tau\otimes\tau^{op})} = \frac{|q|n}{\sqrt{1 - q^2 n}} \tag{9.150}$$

Since $||\Xi_q - P_0||^2_{HS} = \frac{q^2n^2}{1-q^2n}$ ■

Fathi and Nelson already obtained this type of estimates in section 3 of [70], but only for the potential V_{I_n}.

We can also obtain similar estimates for *mixed q-Gaussian algebras* and *q deformed Araki-Woods algebras*. We left the details to the reader.

9.10 Conclusion and open problems

In this paper, we have been able to extend previous work on semicircular approximations on Wigner chaos in a multidimensional setting via powerful ideas of free Stochastic calculus, especially for free SDE with self-adjoint convex potentials (which allows in full generality to obtain LSI inequality for the Gaussian variant of the non-microstates free entropy). Moreover, we have been able to obtain a bound for the free Fisher information along the flow of an Ornstein-Uhlenbeck semigroup for the class of potentials V_C, which turns out to lead to an inequality between the Wasserstein distance and the free Stein discrepancy. On the road we've been able to deduce an extension of the famous and recent *HSI* inequality for all semicircular family with covariance C (first proved by Ledoux, Nourdin and Peccati in the commutative case and which have been proved by Fathi and Nelson in free probability for special homothety covariance matrix).

In a second part, we have constructed a free Stein kernel for this class of potential by extending the very important construction in one dimension of Cébron. We especially saw, how this construction seems more appropriated in the setting of Wigner chaos compared to the previous free Stein kernel constructed via free Malliavin calculus and which are expressed by means of the pseudo-inverse of the free Ornstein-Ulhenbeck operator (also known as the inverse of the number operator on Fock spaces).

We would like to finish this paper with some open questions which are the following ones :

1. Is it possible to obtain the *HSI* inequality for all the class of self-adjoint convex potentials, in particular does the convexity assumption : $\mathcal{J}DV \geq c(1 \otimes 1) \otimes I_n$ implies a good control of the Free Fisher information along the path of the free Ornstein-Uhlenbeck with self-adjoint convex potential by the free Stein discrepancy (one knows for now that the second convexity assumption implies a good control to deduce *LSI*, by the exponential decay of the norm of the semigroup generated by $Q = \left(\partial_j D_i V\right)_{i,j=1}^n$ and it's not clear for now if we don't have to suppose an additional unknown condition on the potential. Precisely, we used the equality in distribution of a free Langevin diffusion (Ornstein-Uhlenbeck case with non identity drift) with cyclic derivatives as drift, to get to the result. Unfortunately, this won't be possible for the general case, and so we would have to use Dabrowski formulas for conjugate variables and link them with a free Stein kernel.

2. Is it possible to construct a free Stein kernel in the same way of this paper and Cébron for all self-adjoint convex potentials and self-adjoint vector belonging to Wigner chaos. We conjecture that convergence in distribution of vector-valued multiple Wigner integrals X towards the free Gibbs state associated with a convex polynomial potential which is such that $[JDV](X)$ is invertible in $M_n(W^*(X) \otimes W^*(X)^{op})$ is in fact equivalent to the convergence of some moments (here it's a two and fourth moments conditions).

3. What can be said in the case of the non-invertibility of the covariance matrix. In our approach, the positive definite aspect plays an important role, and we think it might be possible to obtain a bound for a weaker distance (such distances have not been yet defined). Indeed, we are still unable to define properly the distribution $\mu_{x_1,\dots,x_n}$ as a non-commutative probability measure, and we have for now no idea of what it means.

4. Ledoux, Nourdin and Peccati have been able to obtain *HSI* inequality for families of invariant measures of second-order differential operator by the Triple Markov approach and Gamma calculus, especially by criterion over Γ_2 (which provides *LSI* inequality in the commutative case), and Γ_3 (which combined with the previous criterion over Γ_2 leads to the *HSI* inequality). Is it possible in our setting to deduce an *HSI* inequality via an appropriate non commutative gradient operator ?

Bibliographie

[1] P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu and D. Veitch (2003) : *Self-similarity and long range dependence through the wavelet lens.* In P. Doukhan, G. Oppenheim, M.S. Taqqu editors, Long-range dependence : Theory and Applications, Birhäuser.

[2] M. Alfeus and C. Nikitopoulos (2020) : Forecasting commodity markets volatility : HAR or Rough ? Preprint.

[3] H. Araya and C. A. Tudor (2021) : *Asymptotic expansion for the quadratic variations of the solution to the heat equation with additive white noise.* Stoch. Dyn. 21 (2), 2150010, 23 pp.

[4] B. C. Arnold and J. A. Villasenor (1998) : *The asymptotic distribution of sums of records.* Extremes, 1(3), 351-363.

[5] Obayda Assaad :*Solutions des équations différentielles stochastiques : analyse asymptotique par la méthode de Malliavin-Stein et estimation statistique*`https://pepite-depot.univ-lille.fr/LIBRE/EDMADIS/2021/2021LILUB020.pdf`

[6] Obayda Assaad, Charles-Philippe Diez, Ciprian Tudor : *Generalized Wiener–Hermite integrals and rough non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck process.* Sochastics, Volume 34, Number 3, May 2022 `https://doi.org/10.1080/17442508.2022.2068955`.

[7] Antoine Ayache : *Lower bound for local oscillations of Hermite processes.* Stochastic Processes and their Applications, Volume 130, Issue 8 August 2020, PAges 4593-4607.

[8] Ehsan Azmoodeh, Giovanni Peccati, Xiaochuan Yang : *Malliavin–Stein method : a survey of some recent developments.* Modern Stochastics : Theory and Applications., Volume 8, Issue 2 (2021), pp. 141–177.

[9] S. Bai and M. Taqqu (2014) : *Generalized Hermite processes, discrete chaos and limit theorems.* Stochastic Process. Appl. 124 (4), 1710-1739.

[10] Dominique Bakry, Ivan Gentil, Michel Ledoux : *Analysis and Geomtry of Markov diffusion operators* Springer, `https://doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9`

[11] D. Bakry. *Functional inequalities for Markov semigroups.* In Probability measures on groups : recent directions and trends, pages 91–147. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2006.

[12] D. Bakry and M. Emery :. *Diffusions hypercontractives.* In ´ Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, volume 1123 of Lecture Notes in Math., pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.

[13] Marwa Banna and Tobias Mai :*Hölder Continuity of Cumulative Distribution Functions for Noncommutative Polynomials under Finite Free Fisher Information* Journal of Functional Analysis, Volume 279, Issue 8, 1 November 2020.

[14] J-M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, Georges, A. Philippe, S. Stoev and M. S.Taqqu, Murad (2003) : *Semi-parametric estimation of the long-range dependence parameter : a survey.* Theory and applications of long-range dependence, 557-577, Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[15] J-M. Bardet et C. A. Tudor (2010) : *A wavelet analysis of the Rosenblatt process : chaos expansion and estimation of the self-similarity parameter.* Stochastic Process. Appl. 120 (120), 2331-2362.

[16] Z. Bao, G. Pan and W. Zhou (2015) :*The logarithmic law of random determinant.* Bernoulli 21(3), 1600-1628.

[17] Lorenzo Bergomi :*Stochastic Volatility Modeling* , 2016 by Chapman and Hall/CRC 1600-1628

[18] Philippe Biane, Mireille Capitaine, Alice Guionnet : *Large deviation bounds for matrix Brownian motion* , Invent.Math.152, 433-459 (2003).

[19] Philippe Biane, Roland Speicher : *Free diffusions, free entropy and free Fisher information* .Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques, Tome 37 (2001) no. 5, pp. 581-606.

[20] P. Biane and R. Speicher (1998) : *Stochastic calculus with respect to free Brownian motion and analysis on Wigner space* Prob. Theory Rel. Fields 112, 373–409.

[21] Philippe Biane, Dan Voiculescu : *A Free Probability Analogue of the Wasserstein Metric on the Trace-State Space* GAFA, Geom. funct. anal. 11, 1125–1138 (2001).

[22] A. N Bishop, P. Del Moral and A. Niclas (2018) : A Introduction to Wishart Matrix Moments. Founations and Trends of Machine Learning 11 :2. NOW publishers.

[23] V. Bogachev. *Measure Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[24] S. Bonaccorsi and C. A. Tudor (2011) : *Dissipative stochastic evolution equations driven by general Gaussian and non-Gaussian noise.* J. Dynam. Differential Equations 23(4), 791-816.

[25] Jean-Philippe Bouchaud, Marc Potters :*Financial Applications of Random Matrix Theory : a short review* The Oxford Handbook of Random Matrix Theory Edited by Gernot Akemann, Jinho Baik, and Philippe Di Francesco.

[26] P. Bourgade and K. Mody (2019) : *Gaussian fluctuations of the determinant of Wigner matrices.* Electron. J. Probab. 24, Paper No. 96, 28 pp.

[27] Solesne Bourguin, Simon Campese : *Free quantitative fourth moment theorems on Wigner space*, International Mathematics Research Notices (IMRN), vol. 2018, no. 16, 4969-4990, 2018.

[28] S. Bourguin, Ch-Ph. Diez and C.A. Tudor (2020) : *Limiting behavior of large correlated Wishart matrices with chaotic entries.* Bernoulli, 27(2) : 1077-1102 (May 2021). DOI : 10.3150/20-BEJ1266.

[29] Bourguin, S. and Tudor, C.A. *Cramér theorem for gamma random variables. Electron. Commun. Probab.* **16**, 365–378.

[30] Marek Bozejko, Roland Speicher, Burkhard Kümmerer : *q-Gaussian Processes : Non-commutative and Classical Aspects*, April 1996 Communications in Mathematical Physics 185(1) DOI :10.1007/s002200050084.

[31] Breton, J-C. and Nourdin, I.2008] *Error bounds on the non-normal approximation of Hermite power variations of fractional Brownian motion. Electron. Commun. Probab.*, **13**, 482–493.

[32] S. Bubeck, J. Ding, R. Eldan and M.Z. Rácz (2016) : *Testing high-dimensional geometry in random graphs.* Random Structures and Algorithms 49 (3), 503-532.

[33] S. Bubeck, S. Ganguly (2016) : *Entropic CLT and phase transition in high dimensional Wishart matrices.* Int. Math. Research Not., 1-19.

[34] P. Breuer and P. Major (1983) : *Central limit theorem for non-linear functionals of Gaussian fields.* J. Mult. Anal. 13, 425-441.

[35] Guilaume Cébron : *A quantitative fourth moment theorem in free probability theory.* Advances in Mathematics, Volume 380, 2021, 107579.

[36] Djalil Chafaï : *Introduction aux matrices aléatoires* `http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups13-03.pdf`.

[37] Patrick Cheridito, Hideyuki Kawaguchi :*Fractional Ornstein-Uhlenbeck*. Electronic Journal of Probability, 8(3), 2003, p. 1–14.

[38] Ian Charlesworth, Brent Nelson : *Free Stein Irregularity and Dimension*, Journal of operator theory, Volume 85, Issue : 1, ISSN : 0379-4024.

[39] Ian Charlesworth, Dima Shlyakhtenko*Free entropy dimension and regularity of non-commutative polynomials.* Journal of Functional Analysis Volume 271, Issue 8, 15 October 2016, Pages 2274-2292.

[40] P. Cheridito, H. Kawaguchi and M. Maejima (2003) : *Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes.* Electronic Journal of Probability 8, 1-14.

[41] A. Chronopoulou, C. A. Tudor and F. G. Viens : *Self-similarity parameter estimation and reproduction property for non-Gaussian Hermite processes.* Commun. Stoch. Anal. 5 (1), 161-185.

[42] Clausel, M., Roueff, F., Taqqu : *Asymptotic behavior of the quadratic variation of the sum of two Hermite processes of consecutive orders. Stochastic Process. Appl.*, **124**, 2517–2541.

[43] J. Clarke De la Cerda, C.A. Tudor (2014) : *Hitting probabilities for the stochastic wave equation with fractional colored noise*. Rev. Mat. Iberoam. 30 (2), 685-709.

[44] Alain Connes : *Une classification des facteurs de type III.* Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 6, no 2 (1973), p. 133-252

[45] P. Coupek (2018) : *Limiting measure and stationarity of solutions to stochastic evolution equations with Volterra noise.* Stoch. Anal. Appl. 36, no. 3, 393-412.

[46] P. Coupek and B. Maslowski (2017) : *Stochastic evolution equations with Volterra noise.* Stoch. Proc. Appl., 127, 877-900.

[47] P. Coupek, B. Maslowski and M. Ondrejat (2018) : *Lp-valued stochastic convolution integral driven by Volterra noise.* Stochastics and Dynamics, 18 (6), 1850048.

[48] Thomas Courtade, Max Fathi, Ashwin Pananjady *Existence of Stein Kernels under a Spectral Gap, and Discrepancy Bounds*. Annales de l'IHP : Probabilites et Statistiques, Volume 55, Number 2, 2019.

[49] Yoann Dabrowski : *A note about proving non-*Γ *under a finite non-microstates free Fisher information assumption*. Journal of Functional Analysis Volume 258, Issue 11, June 2010, Pages 3662-3674.

[50] Yoann Dabrowski : *A non-commutative Path Space approach to stationary free Stochastic Differential Equations.* Arxiv preprint https ://arxiv.org/abs/1006.4351.

[51] Yoann Dabrowski : *Free entropies, free Fisher information, free stochastic differential equations, with applications to Von Neumann algebras*. PhD Thesis.

[52] Yoann Dabrowski : *A free stochastic partial differential equation.* Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques, Tome 50 (2014) no. 4, pp. 1404-1455.

[53] Yoann Dabrowski, Alice Guionnet and Dima Shlyakhtenko : *Free transport for convex potentials.* Arxiv :1701.00132.

[54] Yoann Dabrowski : *A Laplace Principle for Hermitian Brownian Motion and Free Entropy I : the convex functional case,* arxiv.org/abs/1604.06420.

[55] Laurent Decreusefond : *Perturbation analysis and Malliavin calculus.* Annals of Applied Probability, 1998/5/1, Pages 496-523.

[56] Laurent Decreusefond : *Stochastic integration with respect to fractionnal Brownian motion*. Theory and applications of long-range dependence. Birkhäuser Boston.

[57] Laurent Decreusefond : *Stochastic integration with respect to Volterra processes* Annales de l'IHP Probabilités et statistiques,Volume 41, Numéro 2,Pages 123-149.

[58] Laurent Decreusefond : *The Stein-Dirichlet-Malliavin method.* ESAIM : proceedings and surveys, October 2015, Vol. 51, p. 49-59.

[59] Laurent Decreusefond, Ali Suleyman Üstünel : *Fractional Brownian motion : theory and applications* ESAIM : proceedings, Volume 5,Pages 75-86.

[60] Laurent Decreusefond, Ali Suleyman Üstünel : *Simplicial Homology of Random Configurations* Advances in Applied Probability , Volume 46 , Issue 2 , June 2014 , pp. 325 - 347.

[61] Aurélien Deya, René Schott :*Integration with respect to the non-commutative fractional Brownian motion.* Bernoulli 25(3) : 2137-2162 (August 2019). DOI : 10.3150/18-BEJ1048.

[62] Aurélien Deya, René Schott : *Integration with respect to the non-commutative fractional Brownian motion*, Bernoulli 25(3) : 2137-2162 (August 2019). DOI : 10.3150/18-BEJ1048.

[63] Ch-Ph. Diez and C. A. Tudor (2021) : *Non-central limit theorem for large Wishart matrices with Hermite entries.* Journal of Stochastic Analysis : Vol. 2 : No. 1 , Article 2.

[64] Ch-Ph. Diez and C. A. Tudor (2021) : *Limiting Behavior for Wishart matrix with Skorohod integrals.* LEA, Lat. Am. J.Probab. Math. Stat. 18. 1625-1641 (2021). DOI : 10.30757/ALEA.v18-59.

[65] Catherine Donati-Martin : *Stochastic integration with respect to q Brownian motion*. Probab. Theory Relat. Fields, 125(1) :77-95.

[66] Catherine Donati-Martin : *Large deviations for the largest eigenvalue of an Hermitian Brownian motion.* ALEA : Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics 9, 2 (2012) 501-530

[67] J. L. Doob : *The Brownian Movement and Stochastic Equations.* Annals of Mathematics. Second Series, Vol. 43, No. 2 (Apr., 1942), pp. 351-369 (19 pages).

[68] Bruno Dupire. *Pricing with a Smile.* Risk, 1994.

[69] X.Fang, Y.Koike (2020) New error bounds in multivariate normal approximations via exchangeable pairs with applications to Wishart matrices and fourth moment theorems Preprint.

[70] Max Fathi, Brent Nelson : *Free Stein kernels and an improvment of the free logarithmic Sobolev inequality.* Advances in Mathematics 317 (2017) pp. 193-223

[71] Max Fathi : *Higher-order Stein kernels for Gaussian approximation.* to appear in Studia Mathematica 256 (2021),no.3 ,241-258

[72] Max Fathi : *Higher-order Stein kernels for Gaussian approximation.* to appear in Studia Mathematica 256 (2021),no.3 ,241-258

[73] Max Fathi, Guillaume Cébron, Tobias Mai : *A note on existence of Free Stein kernels.* Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), no. 4, 1583-1594.

[74] G. E. Forsythe and J.W. Tukey (1952) : *The extent of n random unit vectors.* Bull. Amer. Math. Sot. 58, 502.

[75] J. Gairing, P. Imkeller, R. Shevchebko and C. A. Tudor (2019) : *Hurst index estimation in stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion.* To appear in *Journal of Theoretical Probability.*

[76] V. Garino, I. Nourdin, D. Nualart and M. Salamat (2020) : *Limit theorems for integral functionals of Hermite-driven processes.* Bernoulli 27(3) : 1764-1788 (August 2021). DOI : 10.3150/20-BEJ1291.

[77] J. Gatheral (2006) : *The volatility surface : A practitioner's guide, volume 357.* John Wiley and Sons, 2006.

[78] J. Gatheral, T. Jaisson and M. Rosenbaum (2018) : *Volatility is rough.* Quantitative Finance 18 (6).

[79] V. L. Girko (1990) : Theory of random determinants, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 45, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[80] V. L. Girko (1997) : *A refinement of the central limit theorem for random determinants.* Teor. Veroyatnost. i Primenen. 42 (1), 63-73.

[81] N. R. Goodman (1963). *The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix.* Ann. Math. Statist. 34 178-180.

[82] Nathael Gozlan : *Transport inequalities and concentration of measure.* ESAIM : Proc. Volume 51, October 2015

[83] L.Gross : *Logarithmic Sobolev inequalities* Amer.J.Math. 1975 ; 97 (4), 1061-1083.

[84] M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski (2016) : *A Fourier analytic approach to pathwise stochastic integration.* Electron. J. Probab. 21, Paper No. 2, 37 pp.

[85] Alice Guionnet, Dima Shlyakhtenko : *On Classical Analogues of Free Entropy Dimension* Journal of Functional Analysis 251(2) :738-771. 18(6) :1875-1916.

[86] Alice Guionnet, Dima Shlyakhtenko : *Free diffusion and matrix models* March 2009, Geometric and Functional Analysis 18(6) :1875-1916

[87] Alice Guionnet, Dima Shlyakhtenko : *Free monotone transport* Inventiones mathematicae volume 197, pages613–661 (2014) ;

[88] Huang J., Nualart D. and Viitasaari L. (2020) : A central limit theorem for the stochastic heat equation. Stochastic Processes and Their Applications. 130, Issue 12, 7170-7184.

[89] J. Huang, D. Nualart, L. Viitasaari and G. Zheng (2020) : Gaussian fluctuations for the stochastic heat equation with colored noise. Stochastics and Partial Differential Equations : Analysis and Computations volume 8, pages 402–421.

[90] J. Huang, D. Nualart and L. Viitasaari (2020) : *A central limit theorem for the stochastic heat equation.* Stochastic Process. Appl. 130 (12), 7170-7184.

[91] B. Horvath, A. Jacquier and P. Tankov (2020) : *Volatility options in rough volatility models.* SIAM J. Financial Math. 11 (2), 437–469.

[92] J. Huang, D. Nualart and L. Viitasaari. *A central limit theorem for the stochastic heat equation. Stochastic Process. Appl.*, 130 : 7170-7184, 2020.

[93] Adrian Ioana : *An introduction to II_1 factors* `http://perso.ens-lyon.fr/gaboriau/evenements/IHP-trimester/IHP-CIRM/Notes=Cyril=finite-vonNeumann.pdf`

[94] Svante Janson : *Gaussian Hilbert Spaces.* Cambridge University Press, 12 juin 1997.

[95] David Jekel, Wuchen Li, Dimitri Shlyakhtenko : *Tracial smooth functions of non-commuting variables and the free Wasserstein manifold* arXiv :2101.06572.

[96] T. Jiang and D. Li (2015) : *Approximation of rectangular beta-Laguerre ensembles and large deviations.* J. Theoret. Probab., 28 (3), 804-847.

[97] C. Jost (2006) : *Transformation formulas for fractional Brownian motion.* Stochastic Process. Appl. 116, 1341-1357.

[98] I. M. Johnstone (2006) : High Dimensional Statistical Inference and Random Matrices. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain.

[99] Vaughan Jones : *Von Neumann algebras.* `https://math.berkeley.edu/~vfr/VonNeumann2009.pdf`

[100] Todd Kemp, Ivan Nourdin, Giovanni Peccati, Roland Speicher : *Wigner chaos and fourth moment theorems* , Ann. Probab., 2012.

[101] M. Kleptsyna and A. Le Breton (2002) : *Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type process.* Statistical Inference for Stochastic Processes, 5, 229-241.

[102] Seiichiro Kusuoka, Ciprian Tudor : *Characterization of the convergence in total variation and extension of the Fourth Moment Theorem to invariant measures of diffusions* Bernoulli 24(2), 2018, 1463–1496 DOI : 10.3150/16-BEJ904.

[103] M. Kwasnicki : *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*. Fractional Calculus and Applied Analysis. 20, pages 7–51 (2017).

[104] Pierre-Henry Labordère : Analysis, Geometry, and Modeling in Finance, 2008 by Chapman and Hall/CRC.

[105] Michel Ledoux : *Chaos of a Markov operators and fourth moment conditions*. The Annals of Probability, 2012, Vol. 40, No. 6, 2439–2459, DOI : 10.1214/11-AOP685.

[106] Michel Ledoux, Ivan Nourdin, Giovanni Peccati : *Stein's method, logarithmic Sobolev and transport inequalities*, Geometric and Functional Analysis, 2015 - Springer.

[107] A. J. Lee (1990) : U-Statistics, Statistics : Textbooks and Monographs, Theory and Practice, 110, , Marcel Dekker, New York.

[108] W. Ma (2017) : *Heavy -tailed distributions, Volatility Clustering and Asset Price of the Precious Metal.* International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences, 7(7), 686-692.

[109] Makoto Maejima et Ciprian A. Tudor : Wiener integrals with respect to the Hermite process and a Non-Central Limit Theorem.

[110] M. Maejima and C. A. Tudor (2007) : *Wiener Integrals with respect to the Hermite process and a Non-Central Limit Theorem.* Stoch. Anal. Appl. 25 (5), 1043-1056.

[111] Tobias Mai, Roland Speicher : *A note on the free and cyclic differential calculus* Journal of Operator Theory, Volume 85, Issue 1, Winter 2021 pp. 183-215

[112] Tobias Mai, Roland Speicher, Moritz Weber : *Absence of algebraic relations and of zero divisors under the assumption of finite non-microstates free Fisher information.* arXiv :1407.5715 [math.OA] (2014)

[113] Tobias Mai : *Regularity of distributions of Wigner integrals*. Arxiv preprint,arXiv :1512.07593.

[114] P. Major (1981) : *Multiple Wiener-Itô integrals.* Lecture Notes in Mathematics, 849, Springer, Berlin.

[115] Marcenko, V.A. and Pastur,L.A : *Distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices.* Mat. Sb., 72, 507–536.

[116] D. Mikulincer (2020) : *A CLT in Stein's distance for generalized Wishart matrices and higher order tensors* International Mathematics Research Notices (2020).

[117] D. Mikulincer (2020) : *Universality of High-Dimensional Systems* `https://www.wisdom.weizmann.ac.il/~danmi/slides/Thesis%20-%20Complete.pdf`.

[118] James A. Mingo, Roland Speicher : *Free Probability and Random Matrices*, Bernoulli 25(3) : 2137-2162 (August 2019). Springer, New York, NY https ://doi.org/10.1007/978-1-4939-6942-5.

[119] Yuliva Mishura : *Sotchastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes.* Lecture Notes in Mathematics. Springer. Number 1929.

[120] F. Murray, J. Neumann *On rings of operators. I* Annals of Mathematics Second Series, Vol. 37, No. 1 (Jan., 1936), pp. 116-229 (114 pages)

[121] F. Murray, J. Neumann *On rings of operators. II* Published 1 February 1937 Transactions of the American Mathematical Society

[122] F. Murray, J. Neumann *On Rings of Operators. III* Published 1940, Annals of Mathematics

[123] Brent Nelson : *Free Monotone Transport Without a Trace.*Communications in Mathematical Physics volume 334, pages 1245–1298 (2015).

[124] Brent Nelson Qiang Zeng : *An application of free transport to mixed q-Gaussian algebras.* Proc. Amer. Math. Soc., 144 (2016), no. 10, 4357-4366.

[125] Brent Nelson, Qiang Zeng : *Free Monotone Transport for Infinite Variables* International Mathematics Research Notices, Volume 2018, Issue 17, September 2018, Pages 5486–5535, `https://doi.org/10.1093/imrn/rnx060`

[126] H. H. Nguyen and V. Vu (2014) : *Random matrices : law of the determinant.* The Annals of Probability, 42(1), 146-167.

[127] S. Noreddine and I. Nourdin.*On the Gaussian approximation of vector-valued multiple integrals. J. Multiv. Anal. 102, no. 6, 1008-1017.*

[128] I. Nourdin and G. Peccati. Stein's method on Wiener chaos. *Probab. Theory Rel.*, 145(1) :75-118, 2009.

[129] I. Nourdin and G. Peccati (2012) : *Normal Approximations with Malliavin Calculus From Stein's Method to Universality* Cambridge University Press.

[130] Ivan Nourdin, Giovanni Peccati, Anthony Réveillac : *Multivariate normal approximation using Stein's method and Malliavin calculus* , Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques 2010, Vol. 46, No. 1, 45–58.

[131] Ivan Nourdin, Giovanni Peccati, Gésine Reinert : *Invariance principles for homogeneous sums : Universality of Gaussian Wiener chaos.*Annals of Probability 2010, Vol. 38, No. 5, 1947-1985.

[132] Ivan Nourdin, Giovanni Peccati, Roland Speicher : *Multidimensional semicircular limits on the free Wigner chaos. 2011.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 46(1) : 45-58 (February 2010).

[133] Ivan Nourdin, Giovanni Peccati and Ywick Swan : *Entropy and the fourth moment phenomenon* Proceedings of the American Mathematical Society 143 (7), 3123-3133, 2015. 65, 2015. 373–409.

[134] Ivan Nourdin, Fei Pu : *Gaussian fluctuation for Gaussian Wishart matrices of overall correlation* Statistics and Probability Letters Volume 181, February 2022, 109269.

[135] Ivan Nourdin : Selected Aspects of Fractional Brownian Motion. Bocconi and Springer Series. 373–409.

[136] Ivan Nourdin and Murad S. Taqqu : *Central and non-central limit theorems in a free probability setting.*arXiv :1110.2703 (math).

[137] I. Nourdin and T. T. Diu Tran (2019) : *Statistical inference for Vasicek-type model driven by Hermite processes.* Stochastic Process. Appl. 129 (10), 3774-3791.

[138] Nourdin, I. and Zheng, G. *Asymptotic behavior of large Gaussian correlated Wishart matrices.* Journal of Theoretical Probability (2021).

[139] D. Nualart (2006) : *Malliavin Calculus and Related Topics. Second Edition.* Springer.

[140] D. Nualart and E. Nualart. *Introduction to Malliavin Calculus*. IMS Textbooks, Cambridge University Press, 2018.

[141] D. Nualart and S. Ortiz-Latorre (2009) : *Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus*. Stoch. Proc. Appl. 118 (4), 614-628.

[142] D. Nualart and E. Pardoux : *Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Theory Related Fields*, 78 : 535-581, 1988.

[143] D. Nualart and G. Peccati (2005) : *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals.* Ann. Probab. 33, 177-193.

[144] D. Nualart and H. Zhou : *Total variation estimates in the Breuer-Major theorem.* To appear in *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2018.

[145] H. Nyquist, S.O. Rice and J. Riordan (1954) : *The distribution of random determinants.* Quart. Appl. Math. 12 97–104.

[146] F. Otto, C.Villani : *Generalization of an Inequality by Talagrand and Links with the Logarithmic Sobolev Inequality.* Journal of Functional Analysis 173, 361-400 (2000) .

[147] G. Peccati and C.A. Tudor (2004) : *Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals.* Séminaire de Probabilités, XXXIV, 247-262.

[148] Giovanni Peccati, Matthias Reitzner : *Stochastic Analysis for Poisson Point Processes : Malliavin Calculus, Wiener* Bocconi and Springer Series (BS, volume 7) 2016, 978-3-319-05233-5.

[149] V. Pipiras and M. S. Taqqu (2000) : *Integration questions related to fractional Brownian motion.* Probab. Theory Relat. Fields, 118, 251-291.

[150] V. Pipiras and M. Taqqu (2017) : Long-range dependence and self-similarity. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press.

[151] Gilles Pisier :*Introduction to Operator Space theory.* Cambridge University Press, October 2013.

[152] G. Pisier, Quanhua Xu*Non-Commutative Martingale Inequalities*Published 4 April 1997, Mathematics, Communications in Mathematical Physics.

[153] G. Pisier, Quanhua Xu*Non-commutative Lp-spaces.* Handbook of the Geometry of Banach Spaces volume II : 1459–1517, 2003.

[154] J. Pospisil and R. Tribe (2007) : *Parameter estimates and exact variations for stochastic heat equation s driven by space-time white noise.* Stoch. Anal. Appl. 25(3), 593–611.

[155] A. Prékopa (1967) : *On random determinants. I.* Studia Sci. Math. Hungar. 2 125– 132.

[156] Nguyen Van Quang, Do The Son, Le Hong Son : *Some Kinds of Uniform Integrability and Laws of Large Numbers in Noncommutative Probability*. Journal of Theoretical Probability volume 31, pages1212–1234 (2018).

[157] Racz, M.Z. and Richey, J : *A smooth transition from Wishart to GOE.* J. Theoret. Probab. 32, 898–906.

[158] B.L. S. Praksa Rao (1999) : *Semimartingales and their Statistical Inference.* Chapman and Hall.

[159] B. L. S. Prakasa Rao (2010) : *Statistical inference for fractional diffusion processes.* Wiley Series in Probability and Statistics, Chichester, John Wiley & Sons.

[160] Rasmussen, C.E. and Williams, C.K.*Gaussian processes for machine learning*, Adaptive Computation and Machine Learning, MIT Press, Cambridge, MA.

[161] Revuz et Yor *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer Berlin, Heidelberg, 1999.

[162] G. Rempala and J. Wesolowski (2005) : *Asymptotics for products of independent sums with an application to Wishart determinants.* Statist. Probab. Lett., 77, 129-138.

[163] G. Rempala and J. Wesolowski (2002) : *Asymptotics for products of sums and U-statistics.* Elect. Comm. in Probab. 7, 47-54.

[164] H.L Royden and P.Fitzpatrick *Real Analysis.* Vol.32, Macmillan, New-York, 1988

[165] G. Samorodnitsky (2016) :*Stochastic processes and long range dependence.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, Cham.

[166] Isao Sauzedde *Quantum gaussian processes Isao Sauzedde* `http://perso.ens-lyon.fr/isao.sauzedde/quantum_gaussian.pdf`.

[167] Schreiber, M.*Fermeture en probabilité de certains sous-espaces d'un espace L^2* Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete 14, 36–48 (1969).

[168] R. Shevchenko, M. Slaoui and C. A. Tudor (2020) : *Generalized k-variations and Hurst parameter estimation for the fractional wave equation via Malliavin calculus.* J. Statist. Plann. Inference 207, 155-180.

[169] Dima Shlyakhtenko : *Some estimates for non-microstates free entropy dimension with applications to q-semicircular families.* September 2003, International Mathematics Research Notices 2004(51) 1404-1455.

[170] M. Slaoui and C. A. Tudor : *Behavior with respect to the Hurst index of the Wiener Hermite integrals and application to SPDEs.* J. Math. Anal. Appl. 479(1) (2019), pp. 350–383.

[171] M. Slaoui and C. A. Tudor : *The linear stochastic heat equation with Hermite noise* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 22(3) (2020), p. 1950022.

[172] N. C. Snaith *Riemann zeros and random matrix theory* `https://people.maths.bris.ac.uk/~mancs/papers/SnaithRiemann.pdf#:~:text=The%20connection%20with%20random%20matrix%20theory%20is%20through,line%20with%20a%20real%20part%20equal%20to%201%2F2.`.

[173] Daniel.W Stroock :*Homogeneous chaos revisited*. Séminaires de Probabilités XXI, Lectures notes in Math. 1247 (1987) 1-8.

[174] Szekeres, G., Turán, P. : *On an extremal problem in the theory of determinants* Math. Naturwiss. Am. Ungar. Akad. Wiss 56, 796–806 (1937)

[175] T. Takaishi (2020) : *Rough volatility of Bitcoin.* Finance Research Letters, 32, 101379.

[176] Masamichi Takesaki :*Conditional expectations in von Neumann algebras :* Journal of Functional Analysis Volume 9, Issue 3, March 1972, Pages 306-321.

[177] M. Talagrand :*Transportation cost for Gaussian and other product measures*. Geometric and Functional Analysis GAFA volume 6, pages587–600 (1996).

[178] T. Tao and V. Vu (2012) : *A central limit theorem for the determinant of a Wigner matrix.* Adv. Math. 231(1), 74-101.

[179] M. S. Taqqu (1979) : *Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank.* Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 50, 53-83.

[180] T. T. Diu Tran (2018) : *Non-central limit theorems for quadratic functionals of Hermite-driven long memory moving average processes.* Stoch. Dyn. 18 (4), 1850028, 18 pp.

[181] C. A. Tudor . *Analysis of the Rosenblatt process*, ESAIM Probability and Statistics 12 (2008) 230-257.

[182] C. A. Tudor and F. G. Viens (2007). *Statistical aspects of the fractional stochastic calculus*, Ann. Statist. 35 (3) 1183-1212.

[183] C.A. Tudor and F. Viens (2008) : *Variations and estimators through Malliavin calculus.* Ann. Probab. 37 (6), 2093-2134.

[184] C.A. Tudor and N. Yoshida (2018) : *High order asymptotic expansion for Wiener functionals.* Preprint.

[185] Tudor, C.A. *Analysis of variations for self-similar processes*, Probability and its Applications, Springer, New-York.

[186] P. Turań (1955) : *On a problem in the theory of determinants.* Acta Math. Sinica 5 411–423.

[187] Ustunel, A.S. and Zakai, M. *(1989) On Independence and Conditioning On Wiener Space.* Ann. Probab., 4, 1441-1453.

[188] Ustunel, A.S. *A sophisticated proof of the multiplication formula for multiple Wiener integrals*, `https://arxiv.org/abs/1411.4877v1`.

[189] Cédric Villani : *Topics in optimal transportation* , American Mathematical Society 2003.

[190] Dan Voiculescu : *Limit laws for random matrices and free products* Inventiones mathematicae,vol. 104, no. 1, pp. 201–220, 1991.

[191] Dan Voiculescu, *The analogues of entropy and of fisher's information measure in free probability theory.* II, Invent. Math., 118 (1994), 411–440.

[192] Dan Voicuelscu, *The analogues of entropy and of fisher's information measure in free probability theory III : The absence of cartan subalgebras.* Geometric and Functional Analysis GAFA volume 6, pages 172–199 (1996)

[193] Dan Voiculescu, *Strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy.* Internat. Math. Res. Notices, 1 (1998), 41–63.

[194] Dan Voiculescu : *The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory V. Noncommutative Hilbert Transforms* Invent. math. 132, 189±227 (1998).

[195] Eugène Wigner : *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions.* Ann. of Math. 62 (1955), 548-564.

[196] R. L. Wheeden and A. Zygmund (1977) : *Measure and Integral*. Marcel Dekker, New York-Basel.

[197] J. Wishart (1928) : *The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population.* Biometrika 20A, 32-52.