Université de Lille

École doctorale « Mathématiques, sciences du numérique et de leurs interactions »

Thèse pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lille

dans la spécialité

Mathématiques et leurs interactions

présentée par

Arij Amiri

Ruptures, singularités : détection et estimation

Thèse soutenue le **2 décembre 2022** devant le jury composé de :

Mme	**Céline Duval**	Professeur Université de Lille	(Présidente du Jury)
M.	**Jean-Marc Bardet**	Professeur Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne	(Rapporteur)
M.	**Reinhard Höpfner**	Professeur Université Gutenberg de Mayence	(Rapporteur)
Mme	**Gabriela Ciuperca**	Maître de conférences Université Claude Bernard Lyon 1	(Examinatrice)
Mme	**Farida Enikeeva**	Maître de conférences Université de Poitiers	(Examinatrice)
M.	**Sergueï Dachian**	Professeur Université de Lille	(Directeur de Thèse)
M.	**Charles Suquet**	Professeur Université de Lille	(Directeur de Thèse)

Laboratoire Paul Painlevé

Bâtiment M2, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve-d'Ascq

France

Remerciement

Me
et Charle
miers pas en recherche dans le
probabilité

J'ex
Hö
nuscrit de thè
de l'améliorer. Je remercie également Gabriela Ciuperca, Céline Duval et Farida Enikeeva de me faire l'honneur de leur pré

Je tiens également à adre
laboratoire Paul Painlevé de l'Université de Lille, spécialement à ceux avec qui j'ai collaboré dans le cadre de me
scientifique. Je remercie notamment Viet Chi Tran pour le
nous avons partagée

Je suis trè
m'ont accompagnée tout au long de mon parcours scolaire et universitaire, spécialement à Sahbi Keraani.

J'ex
parent
thè

Je tiens enfin à remercier mon mari. Oussama, merci pour te
gement
choisi, je ne pourrais jamais assez te remercier. Le dernier remerciement e
pour mon fil
sage ce petit !

Résumé

Cette thèse regroupe quelques travaux concernant des problèmes de rupture pour des processus stochastiques.

Dans la partie I, nous nous intéressons au problème d'estimation, à partir de n observations indépendantes d'un processus de Poisson non-homogène, de la position de ce que nous appelons une rupture lisse (un endroit où la fonction d'intensité du processus passe d'un niveau à un autre d'une manière continue, mais sur un intervalle tellement petit, que sa longueur δ_n peut être considérée comme convergeant vers 0). Nous montrons que dans le cas où δ_n converge vers 0 moins vite que $1/n$ (cas lent), notre modèle est localement asymptotiquement normal (avec une vitesse non standard), et que dans le cas où δ_n converge vers 0 plus vite que $1/n$ (cas rapide), notre modèle est non régulier et se comporte comme un modèle de rupture classique. Tous ces résultats sont obtenus en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance de Ibragimov et Khasminskii, qui garantit également la convergence des moments des estimateurs considérés. Par contre, pour pouvoir appliquer cette méthode dans le cas rapide, nous avons dû d'abord l'adapter à la topologie M_1 sur l'espace de Skorokhod des fonctions càdlàg, ainsi que développer quelques outils pour l'étude de convergence des fonctions dans cette topologie.

La partie II traite de la détection de rupture dans la régularité höldérienne. Nous étudions la détection de rupture épidémique dans la régularité d'un n-échantillon de fonctions aléatoires i.i.d. de régularité höldérienne globale α sous l'hypothèse nulle. Sous l'hypothèse alternative, un segment d'échantillon de localisation et de longueur $l^\star < n$ inconnues subit une diminution de la régularité höldérienne à l'exposant $\beta < \alpha$. Nous utilisons ici une statistique de type CUSUM à pondération höldérienne d'exposant $0 < \gamma < 1/2$ construite sur les normes α-höldériennes d'interpolations affines des fonctions aléatoires observées. Le choix de γ, contraint par le degré d'intégrabilité des fonctions aléatoires, permet la détection de très courtes ruptures, typiquement avec $l^\star$ de l'ordre de n^δ où δ tend vers 0 quand γ tend vers $1/2$. Nous réinvestissons ensuite cette technique dans l'étude de la rupture de régularité höldérienne d'une seule fonction aléatoire ξ à trajectoires continues et accroissements indépendants et de carré intégrable. Ce problème se ramène à la détection de rupture épidémique pour le « paramètre » fonctionnel f dans le modèle $\xi(t) = W(f(t))$, $t \in [0, 1]$, où W est un mouvement brownien standard et f une fonction continue croissante. On aboutit ainsi à un problème de rupture épidémique dans la variance des accroissements de pas $1/n$ de ξ, et l'utilisation d'une statistique CUSUM à pondération höldérienne généralisée nous permet de détecter une très courte rupture. Tous ces résultats sont obtenus en utilisant le principe d'invariance höldérien.

Abstract

This Ph.D. thesis gathers some works concerning change-point problems for stochastic processes.

In Part I, we are interested in the problem of the estimation, from n independent observations of an inhomogeneous Poisson process, of the location of what we call a smooth change-point (a point in which the intensity function of the process switches from one level to another smoothly, but over such a small interval, that its length δ_n can be considered as converging to 0). We show that in the case where δ_n goes to zero slower than $1/n$ (slow case), our model is locally asymptotically normal (though with an unusual rate), and that in the case where δ_n goes to zero faster than $1/n$ (fast case), our model is non-regular and behaves like a classic change-point model. All these results are obtained using the likelihood ratio analysis method of Ibragimov and Khasminskii, which equally yields the convergence of moments of the considered estimators. However, in order to apply this method in the fast case, we first had to adapt it to the topology M_1 on the Skorokhod space of càdlàg functions, as well as to develop some tools for the study of convergence of functions in this topology.

The Part II deals with the detection of a change in the Hölder regularity. We study the detection of an epidemic change in the regularity of an n-sample of i.i.d. random functions with Hölder regularity α under null hypothesis. Under the alternative hypothesis, a segment of the sample of an unknown location and length $l^\star < n$ undergoes a decrease of the Hölder regularity to an exponent $\beta < \alpha$. We use a CUSUM-type statistic with a Hölderian weighting with exponent $0 < \gamma < 1/2$ constructed on the α-Hölderian norms of interpolations of the observed random functions. The choice of γ, constrained by the degree of integrability of the random functions, allows the detection of very short changes, typically with $l^\star$ of order of n^δ, where δ goes to 0 when γ goes to $1/2$. We then reinvest this technique in the study of the change of the Hölder regularity of a single square integrable random function ξ with continuous trajectories and independent increments. This problem is reduced to the detection of an epidemic change for the functional "parameter" f in the model $\xi(t) = W(f(t))$, $t \in [0, 1]$, where W is a Brownian motion and f is a non-decreasing continuous function. This leads to a problem of epidemic change in the variance of increments of mesh size $1/n$ of ξ, and the use of a CUSUM statistic with a generalized Hölderian weighting allows us to detect a very short epidemics. All these results are obtained using the Hölderian invariance principle.

Table des matières

Introduction **1**
Estimation de la position d'une rupture lisse pour un modèle poissonnien 2
Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne 7

I Estimation de la position d'une rupture lisse pour un modèle poissonnien **15**

1 Problème d'estimation de la rupture lisse **17**
1.1 Modèle poissonnien de rupture lisse 18
1.2 Vitesse de normalisation de la vraisemblance 24
1.3 Étude de l'EMV et des EB dans le cas lent 31
1.3.1 Résultats principaux 31
1.3.2 Preuves 33
1.4 Étude des EB dans le cas rapide 43
1.4.1 Résultats principaux 43
1.4.2 Preuves 45

2 Estimation de la rupture lisse et topologies de Skorokhod **51**
2.1 Convergences des fonctions càdlàg sur un intervalle compact 52
2.2 La topologie M_1 sur l'espace des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ nulles en $\pm\infty$ . . . 63
2.3 Méthode d'analyse de rapport de vraisemblance et l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ 67
2.4 Quelques outils pour l'étude du module de continuité associé à la topologie M_1 76
2.4.1 Modules de croissance et de décroissance 76
2.4.2 Croissance et décroissance lipschitziennes 79
2.5 Étude de l'EMV dans le cas rapide du modèle poissonnien rupture lisse . . 84

II Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne **95**

3 Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne d'un échantillon de fonctions aléatoires **97**

3.1 Préliminaires 99
3.2 Convergence en loi des statistiques T_n et Δ_n sous l'hypothèse nulle 102
3.2.1 Convergence en loi de la statistique T_n sous l'hypothèse nulle 102
3.2.2 Convergence en loi de la statistique Δ_n sous l'hypothèse nulle . . . 104
3.3 Convergence en loi des statistiques $T_{n,N}$ et $\Delta_{n,N}$ sous l'hypothèse nulle . . 110
3.4 Étude de T_n et $T_{n,N}$ sous différentes hypothèses alternatives 126
3.4.1 Étude de T_n et $T_{n,N}$ dans le cas de changement de l'espérance . . . 129
3.4.2 Étude de T_n et $T_{n,N}$ dans le cas de changement dans la régularité höldérienne 133
3.5 Étude de Δ_n et $\Delta_{n,N}$ sous différentes hypothèses alternatives 136
3.5.1 Étude de Δ_n et $\Delta_{n,N}$ dans le cas de changement de l'espérance . . . 136
3.5.2 Étude de $\Delta_{n,N}$ dans le cas de changement dans la régularité höldérienne 141

4 Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne d'un processus continu à accroissements indépendants 143
4.1 Détection d'une rupture ponctuelle de régularité 148
4.2 Rupture épidémique dans la régularité de ξ 151
4.2.1 Comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous (H_0) 154
4.2.2 Comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous (H_A) 156

Bibliographie 165

Introduction

La notion de rupture (de manière informelle, une rupture est un changement abrupt dans la loi statistique d'un phénomène) est d'une grande importance dans les études statistiques.

Dans le cadre de la théorie d'estimation paramétrique, le problème de rupture remonte à Chernoff et Rubin [19] (rupture dans la densité des observations i.i.d.). Plus tard, une étude complète de ce modèle a été menée par Ibragimov et Khasminskii dans [51, 52, 57]. Les problèmes de rupture pour des processus de Poisson ont été examinés par Kutoyants dans [64, 66, 68]. Les modèles de rupture ont également été considérés pour le modèle d'un signal discontinu dans un bruit blanc gaussien par Ibragimov et Khasminskii dans [55, 57] ; pour des systèmes dynamiques avec un petit bruit par Kutoyants dans [66, 67] ; pour des processus de diffusion ergodiques par Kutoyants dans [69] ; pour des équation différentielles stochastiques avec retard par Küchler et Kutoyants dans [62] ; pour un modèle i.i.d. de rupture par Deshayes et Picard [36] ; pour le modèle d'un signal discontinu périodique dans une diffusion non-homogène en temps par Höpfner et Kutoyants dans [50] ; pour des processus de diffusion à seuil par Kutoyants dans [70] ; pour le modèle de régression à deux régimes par Koul et Qian dans [61] et par Ciuperca dans [26] ; pour le modèle autorégressif à seuil (TAR model) par Chan dans [15], par Chan et Kutoyants dans [16, 17] et par Chigansky et Kutoyants dans [23, 24] ; etc.

La détection de ruptures est également une question importante dans de nombreux domaines : théorie du signal, imagerie, climat, finance, etc. Le problème basique du test d'un changement d'espérance dans une suite de variables aléatoires avec ses multiples applications est l'objet d'une riche littérature (cf., par exemple, Basseville et Nikiforov [9], Csörgo et Horváth [29], Brodsky et Darkhovsky [13], Chen et Gupta [18]). À l'intérieur de ce domaine, la détection de rupture épidémique concerne le cas de rupture dans la loi des variables aléatoires pour un segment de l'échantillon observé avec retour à la situation d'avant la rupture après ce segment. Après l'article initial de Levin et Kline [76], cette thématique s'est développée avec, entre autres, les travaux de Yao [100], Gombay [44], Avery et Henderson [4], Ramanayake et Gupta [90], Račkauskas et Suquet [86]. L'utilisation de statistiques de test de détection construites sur des accroissements pondérés de sommes partielles s'étend naturellement au cas d'observations vectorielles en grande dimension, voire en dimension infinie et l'on peut ainsi étudier la rupture dans la loi au travers de « paramètres » fonctionnels : fonction de répartition, fonction caractéristique, densité, matrice de covariance, etc. (cf. [88]).

Mentionnons ici la session « Change-point detection, segmentation, and related topics » [8] des Journées MAS 2018 qui contient une présentation de quelques développements récents par leurs auteurs, ainsi qu'une riche bibliographie sur le sujet.

La présente thèse regroupe des travaux concernant les processus stochastiques et les fonctions aléatoires avec un aspect paramétrique (rupture dans l'intensité d'un processus de Poisson) et non paramétrique (rupture dans la régularité höldérienne de fonctions aléatoires).

Comme on le verra, dans les deux parties apparaissent en filigrane des questions topologiques liées à la convergence faible des processus dans des espaces fonctionnels.

Estimation de la position d'une rupture lisse pour un modèle poissonnien

La première partie de ce manuscrit de thèse se situe dans le domaine de l'inférence statistique pour des processus de Poisson non-homogènes.

Le modèle de processus de Poisson (non-homogène) est à la fois suffisamment simple pour permettre son analyse statistique à l'aide de la vraisemblance, et suffisamment flexible (grâce aux choix de la fonction d'intensité) pour modéliser de nombreux phénomènes aléatoires dans divers domaines appliqués, tels que la biologie, la communication, la sismologie, l'astronomie, le traitement d'image, etc. (cf., par exemple, [14, 28, 92, 95–97]).

Rappelons tout d'abord la définition d'un processus de Poisson non-homogène. Soit $\lambda(t)$, $t \geq 0$, une fonction positive localement intégrable. On dit que $X = \big(X(t),\ t \geq 0\big)$ est un processus de Poisson (non-homogène) de fonction d'intensité λ si X est à trajectoires càdlàg (continues à droites et limitées à gauche) et à accroissements indépendants, s'il part de 0, et si pour tout $u, v \geq 0$ tels que $u < v$, son accroissement sur l'intervalle $[u, v]$ est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\int_u^v \lambda(t)\,\mathrm{d}t$.

Nous nous intéressons au problème d'estimation de la position d'un changement brusque dans la fonction d'intensité d'un processus de Poisson non-homogène. Notons que nous supposons que nous connaissons l'allure de cette fonction d'intensité et que, mis à part ce changement, elle est lisse. Plus précisément, nous cherchons à estimer la position θ, où la fonction d'intensité $\lambda = \lambda_\theta$ d'un processus de Poisson passe d'un niveau (disons λ_0) à un autre (disons $\lambda_0 + r$).

Cette transition peut se produire de plusieurs manières. La fonction d'intensité peut passer de λ_0 à $\lambda_0 + r$ instantanément (cas de rupture) comme, par exemple, dans

$$\lambda_\theta(t) = \lambda_0 + r\,\mathbb{1}_{\{t \geq \theta\}}.$$

Elle peut aussi passer de λ_0 à $\lambda_0 + r$ d'une manière continue (lisse) sur un petit intervalle de longueur fixe $\delta > 0$ (cas régulier) comme, par exemple, dans

$$\lambda_\theta(t) = \lambda_0 + \frac{r}{\delta}\,(t - \theta)\,\mathbb{1}_{\{\theta \leq t < \theta + \delta\}}(t) + r\,\mathbb{1}_{\{t \geq \theta + \delta\}}(t).$$

Comme cas intermédiaire, on peut citer le cas d'une singularité de type cusp, où la fonction d'intensité passe de λ_0 à $\lambda_0 + r$ d'une manière continue sur un petit intervalle de longueur fixe δ, mais tout en admettant une dérivée infinie en un point de cet intervalle comme, par exemple, dans

$$\lambda_\theta(t) = \lambda_0 + \frac{r}{\delta^\varkappa}\,(t-\theta)^\varkappa\,\mathbb{1}_{\{\theta \le t < \theta+\delta\}}(t) + r\,\mathbb{1}_{\{t \ge \theta+\delta\}}(t),$$

où $\varkappa \in]0, 1/2[$ est l'ordre du cusp.

Les trois fonctions d'intensité ci-dessus sont illustrées dans la figure 1.

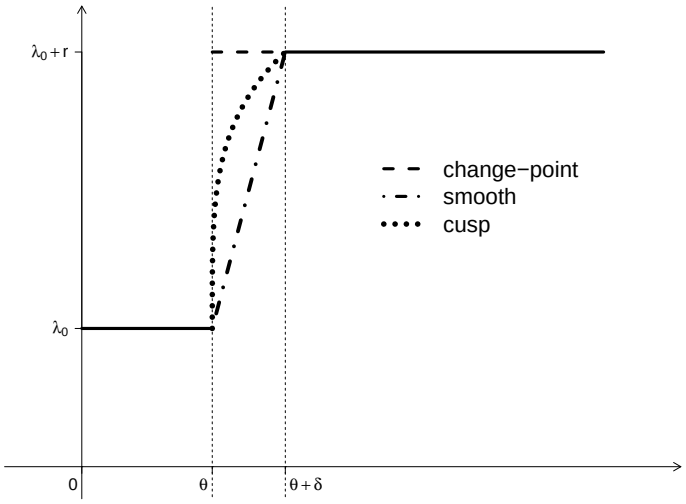

FIGURE 1 – Les cas de rupture, lisse et cusp (avec $\varkappa = 1/4$)

Dans tous ces cas, le problème d'estimation est considéré dans un cadre asymptotique comme, par exemple, celui où l'on observe $n \to +\infty$ réalisations indépendantes d'un processus de Poisson de fonction d'intensité λ_θ sur un intervalle fixe $[0, \tau]$ (asymptotique du grand nombre d'observations). Notons que ce modèle d'observation est équivalent à celui où l'on observe une seule réalisation sur l'intervalle $[0, n\tau]$ d'un processus de Poisson de fonction d'intensité τ-périodique égale à λ_θ sur la première période (asymptotique du temps d'observation long). Il est également équivalent au modèle où l'on observe une seule réalisation sur l'intervalle $[0, \tau]$ d'un processus de Poisson de fonction d'intensité $n\lambda_\theta$ (asymptotique de la grande intensité).

Notons également que dans tous ces différents problèmes d'estimation, nous nous intéressons à l'estimateur de maximum de vraisemblance et aux estimateurs bayésiens.

Dans le cas lisse, le modèle statistique est régulier. Les modèles réguliers pour des observations poissonniennes ont été étudiés par Kutoyants dans [63,65,66,68]. Il a été montré que ces modèles réguliers sont localement asymptotiquement normaux (LAN), et que l'estimateur de maximum de vraisemblance et les estimateurs bayésiens (pour toute densité *a priori* continue strictement positive) sont consistants, asymptotiquement normaux (avec une vitesse classique $1/\sqrt{n}$) et asymptotiquement efficaces (asymptotiquement localement

minimax, pour être plus précis). Il faudrait mentionner ici que les notions de la normalité asymptotique locale est de l'efficacité asymptotique sont dues à Le Cam et à Hájek. Nous pouvons, par exemple, citer les travaux [46–48, 72, 73, 75], ainsi que le livre [74] de Le Cam.

Le cas des modèles de rupture pour des observations poissonniennes a été étudié par Kutoyants dans [64, 66, 68]. Les propriétés des estimateurs dans ce cas sont sensiblement différentes. Il a été montré que l'estimateur de maximum de vraisemblance et les estimateurs bayésiens sont consistants, convergent à la vitesse $1/n$, leurs lois limites sont données par certaines fonctionnelles (différentes) d'un processus de Poisson, et seuls les estimateurs bayésiens sont asymptotiquement efficaces.

Enfin, le cas de cusp a été étudié par Dachian dans [30]. Dans ce cas, il a été montré que l'estimateur de maximum de vraisemblance et les estimateurs bayésiens sont consistants, convergent à la vitesse $1/n^{\frac{1}{2\varkappa+1}}$ (qui est plus rapide que $1/\sqrt{n}$ et plus lente que $1/n$), leurs lois limites sont données par certaines fonctionnelles (différentes) d'un mouvement brownien fractionnaire, et seuls les estimateurs bayésiens sont asymptotiquement efficaces.

Notons que des résultats similaires ont été obtenus pour les modèles i.i.d. par Ibragimov et Khasminskii (pour le cas régulier et le cas des singularités de type cusp, cf. [51, 53, 54, 56, 57], et pour le cas de rupture, cf. [51, 52, 57]).

Notons également que toutes les études citées ci-dessus ont été menées en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance introduite par Ibragimov et Khasminskii dans [57]. Cette méthode consiste à montrer, dans un premier temps, que le rapport de vraisemblance normalisé (avec une vitesse de normalisation bien choisie) converge vers une limite non-dégénérée (dite rapport de vraisemblance limite). Les propriétés des estimateurs (leur consistance, leur vitesse de convergence, qui est la même que celle de la normalisation, ainsi que leurs lois limites) sont ensuite déduites. De surcroît, cette méthode garantit la convergence des moments des estimateurs.

Notons finalement que récemment le problème de localisation d'une source d'émission de signaux par des observations poissonniennes provenant de plusieurs détecteurs situés dans le plan a été considéré dans les trois cas : le cas lisse, la cas de rupture et le cas de cusp (cf. [3, 20–22, 38]).

Dans la première partie de ce manuscrit de thèse, nous considérons le cas, que nous appelons *rupture lisse*, où la fonction d'intensité passe de λ_0 à $\lambda_0 + r$ d'une manière continue, mais sur un intervalle tellement petit que sa longueur peut être considérée comme décroissante vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Une telle fonction d'intensité peut, par exemple, être donnée par

$$\lambda_\theta^{(n)}(t) = \lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\,\mathbb{1}_{\{\theta \le t < \theta+\delta_n\}}(t) + r\,\mathbb{1}_{\{t \ge \theta+\delta_n\}}(t),$$

où $\delta_n \searrow 0$.

Nous montrons dans le chapitre 1 qu'il y a une « transition de phase » dans le comportement asymptotique des estimateurs en fonction de la vitesse de convergence de δ_n vers 0. Plus particulièrement, nous montrons que si δ_n tend vers 0 plus lentement que la vitesse « critique » $1/n$ (c'est-à-dire si $n\delta_n \to +\infty$), le comportement des estimateurs ressemble à celui du cas lisse, et si δ_n tend vers 0 plus rapidement que $1/n$ (c'est-à-dire si $n\delta_n \to 0$), le

comportement des estimateurs est exactement le même que dans le cas de rupture. Nous appelons ces deux situations respectivement *cas lent* et *cas rapide*.

Plus précisément, nous montrons que dans le cas lent notre modèle est localement asymptotiquement normal, et que l'estimateur de maximum de vraisemblance et les estimateurs bayésiens sont consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces dans ce cas. Notons ici que tous ces résultats asymptotiques utilisent une vitesse inhabituelle $\sqrt{\delta_n/n}$, qui est plus rapide que la vitesse $1/\sqrt{n}$ du cas lisse et plus lente que la vitesse $1/n$ du cas de rupture.

Nous montrons également dans ce chapitre que dans le cas rapide le comportement asymptotique des estimateurs bayésiens dans notre modèle est identique à leur comportement dans le modèle de rupture : ils sont consistants, convergent à la vitesse $1/n$, leur loi limite est donnée par une fonctionnelle d'un processus de Poisson, et ils sont asymptotiquement efficaces. L'étude du comportement asymptotique de l'estimateur de maximum de vraisemblance dans le cas rapide est ajournée au chapitre 2 pour des raisons qui seront expliquées ci-dessous.

Notons que tous ces résultats ont été obtenus en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance de Ibragimov et Khasminskii, qui garantit également la convergence des moments des estimateurs considérés. Notons également que le rapport de vraisemblance normalisé et le rapport de vraisemblance limite sont vus comme des processus stochastiques sur $\mathbb{R}$. Si pour obtenir les propriétés des estimateurs bayésiens il suffit d'avoir la convergence des lois fini-dimensionnelles de ces processus (complétée de deux inégalités sur leurs accroissements et sur leurs queues), l'étude de l'estimateur du maximum de vraisemblance, nécessite la convergence faible de ces processus dans un certain espace fonctionnel.

Pour autant que nous le sachions, jusqu'à présent la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance n'a été appliquée qu'en utilisant soit l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$ muni de la topologie uniforme (la topologie induite par la norme sup), soit l'espace de Skorokhod des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$ muni de la topologie usuelle de Skorokhod (introduite originellement, pour les fonctions càdlàg sur un intervalle compact, par Skorokhod dans [94] sous le nom de la topologie J_1). Cependant, nous verrons que dans le cas rapide de notre modèle, cette convergence ne peut avoir lieu sous aucune de ces deux topologies (puisqu'elles ne permettent pas la convergence de fonctions continues vers une limite discontinue). Par conséquent, afin d'étudier l'estimateur du maximum de vraisemblance dans ce cas, nous avons besoin d'adapter la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance pour utiliser une autre topologie (plus faible que la topologie usuelle de Skorokhod).

Nous réalisons cette adaptation dans le chapitre 2. Après avoir passé en revue les différentes topologies introduites par Skorokhod dans [94], nous nous concentrons sur la topologie M_1 (car c'est la topologie la plus forte permettant la convergence de fonctions continues vers une limite discontinue et dans laquelle la fonctionnelle « sup » est continue). Nous étendons la topologie M_1 (définie originellement pour les fonctions càdlàg sur un intervalle compact) aux fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$, après quoi nous montrons que les résultats obtenus par la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance

utilisant l'espace de Skorokhod des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$ muni de la topologie J_1 restent valable dans le cas où on munit cet espace de la topologie M_1.

Nous développons ensuite des outils permettant l'étude du module de continuité de la topologie M_1 en introduisant, notamment, des notions telles que celles des modules de croissance et de décroissance, ainsi que celles de croissance et de décroissance lipschitziennes des fonctions (notons qu'après avoir introduit les notions des modules de croissance et de décroissance, nous avons découvert que ces termes ont déjà été utilisés dans [2] et [7] pour désigner des objets légèrement différents, et que nous n'avons pas trouvé dans la littérature celles de croissance et de décroissance lipschitziennes).

Puis, en utilisant ces outils, nous montrons la convergence faible sous la topologie M_1 du rapport de vraisemblance normalisé de notre modèle de rupture lisse dans le cas rapide, ce qui nous permet de terminer l'étude du comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans ce cas (à l'aide de la « version M_1 » de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance). Plus précisément, nous montrons que dans ce cas le comportement asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans notre modèle est identique à son comportement dans le modèle de rupture : il est consistant, converge à la vitesse $1/n$, et sa loi limite est donnée par une fonctionnelle d'un processus de Poisson.

Notons finalement que l'adaptation de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance à la topologie M_1 permet également de simplifier, dans certains cas, les preuves existantes pour des modèles de rupture classiques.

À notre avis, les résultats que nous obtenons pour le modèle de rupture lisse justifient l'utilisation de modèles de rupture pour des applications réelles, malgré le fait que les systèmes physiques ne peuvent pas passer immédiatement (d'une manière discontinue) d'un niveau à un autre. En effet, si la transition se produit assez rapidement, il semble plus approprié d'utiliser le cas rapide de notre modèle de rupture lisse. Or, dans celui-ci, on obtient le même comportement asymptotique des estimateurs. D'un point de vue plus pratique, on peut dire que pour un (grand) nombre donné n d'observations et un signal donné (passant d'un niveau à un autre sur un intervalle de longueur donnée δ), l'approximation des erreurs d'estimation est donnée par le modèle régulier lorsque $n\delta$ est grand (et est donc gaussienne dans ce cas), et par le modèle de rupture lorsque $n\delta$ est petit.

Notons qu'une perspective possible de ce travail est d'étudier le comportement des estimateurs dans le cas critique $\delta_n = c/n$. Aussi, pour les modèles où le passage de la fonction d'intensité de λ_0 à $\lambda_0 + r$ se fait d'une manière continue sur un intervalle de longueur δ mais avec une singularité de type cusp d'ordre $\varkappa$ en un certain point de cet intervalle, il peut être intéressant d'étudier les cas (quelque peu similaires à notre modèle) où $\delta = \delta_n \searrow 0$ et/ou $\varkappa = \varkappa_n \searrow 0$.

Enfin, il peut être intéressant de considérer des problèmes de rupture lisse pour d'autres modèles d'observations, où nous pensons qu'il devrait être possible d'obtenir le même type de résultats. Il convient de mentionner ici qu'un résultat similaire pour le modèle d'un signal dans un bruit blanc gaussien serait cohérent avec les considérations heuristiques de la section 5.3.6 de [98], où les auteurs concluent que pour un signal lisse (mais proche d'un signal discontinu) donné, le modèle régulier est plus « adéquat » lorsque le rapport

signal/bruit est important, et le modèle de rupture l'est lorsque le rapport signal/bruit est modéré. En effet, le fait de considérer un signal donné correspond au fait de fixer la longueur de l'intervalle de transition δ, et comme les grandes valeurs du rapport signal/bruit dans le modèle d'un signal dans un bruit blanc gaussien correspondent aux grandes valeurs de n dans notre modèle, le cas du rapport signal/bruit grand est cohérent avec le cas où $n\delta$ est grand, et le cas du rapport signal/bruit modéré avec celui où $n\delta$ est petit (mais n est grand).

Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne

La deuxième partie de ce manuscrit de thèse se situe dans le domaine de la statistique non paramétrique où nous considérons un modèle de rupture (qui est, informellement, un changement brusque dans la loi statistique d'un phénomène). Le modèle basique est celui d'un changement dans *l'espérance* d'une suite de variables aléatoires. La portée de ce modèle va bien au delà du paramètre espérance d'une loi $\mathbf{P}_X$. On l'étend immédiatement aux moments de la loi $\mathbf{P}_X$ ($m_p(X) = \mathbf{E}X^p$), à la variance, à la matrice de covariance lorsque X est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. La plupart des paramètres fonctionnels d'une loi peuvent être aussi vus comme des paramètres infini-dimensionnels qui s'expriment comme une espérance : fonction de répartition ($F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t) = \mathbf{E}\mathbb{1}_{[-\infty,t]}(X)$, fonction caractéristique ($\varphi_X(t) = \mathbf{E}\exp(itX)$), transformée de Laplace, etc. La loi $\mathbf{P}_X$ elle même, peut-être vue comme l'espérance d'une fonction de X : pour tout B élément de la tribu équipant l'espace d'arrivée de X ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, espace de Banach, espace produit), $\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{E}\mathbb{1}_B(X)$. Remplaçant les variables aléatoires par des fonctions aléatoires, on peut généraliser ce modèle à une rupture dans la loi d'un processus stochastique. Nous focalisons notre attention dans ce travail sur les ruptures des propriétés de régularité höldérienne des trajectoires. Une idée naturelle est alors de prendre comme paramètre l'espérance d'une norme höldérienne de trajectoire du processus considéré.

Une question importante dans le vaste domaine des problèmes de rupture est de tester l'hypothèse nulle d'aucun changement de paramètre dans un échantillon par rapport à l'hypothèse alternative de changement de paramètres à un moment inconnu. Plus précisément, on considère l'échantillon de n observations $X_1, \dots, X_n$ de paramètre respectifs $\mu_1, \dots, \mu_n$. On dit que cet échantillon présente une rupture *épidémique* s'il existe $1 < k^\star < m^\star < n$ (dépendants de n) tels que

$$\begin{cases} \mu_1 = \cdots = \mu_{k^\star} = \mu_{m^\star+1} = \cdots = \mu_n, \\ \mu_{k^\star+1} = \mu_{k^\star+2} = \cdots = \mu_{m^\star} \neq \mu_1. \end{cases}$$

Notons que quand $m^\star = n$, nous avons une rupture simple.

Le problème de la rupture de manière générale a été traité dans différents cadres dans la littérature, nous pouvons citer [9,13,29,76,81,82]. Le problème de rupture dans l'espérance

a été traité dans la littérature pour plusieurs types de modèles, nous pouvons citer comme références [9, 18, 29, 45].

Notons que les modèles de rupture permettent de modéliser de nombreux phénomènes aléatoires dans divers domaines appliqués, tels qu'en neurophysiologie, dans le contexte des séquences d'ADN, en économétrie, etc. (cf., par exemple, [4, 27]).

Dans le chapitre 3, à partir de l'observation de n courbes aléatoires « journalières » supposées de même régularité höldérienne $\alpha \in]0,1[$, nous étudions la *rupture épidémique* de cette régularité globale. Plus précisément, nous considérons un échantillon de n éléments aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ de l'espace de Hölder $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$, $0 < \alpha < 1$, indépendants, identiquement distribués sous l'hypothèse nulle. Nous nous intéressons à la rupture épidémique dans la régularité höldérienne, sous l'hypothèse alternative, c'est-à-dire nous supposons que nos observations X_i sont de régularité höldérienne $\beta < \alpha$ (et pas mieux) pour $l^\star$ valeurs de i consécutives et qu'elles sont de régularité höldérienne α pour les autres i.

Pour cela nous traitons dans un premier temps le modèle plus simple d'une rupture épidémique dans l'espérance de la norme α-höldérienne $\|\cdot\|_\alpha$ de nos observations, c'est-à-dire que nous supposons que la norme α-höldérienne de nos observations est d'espérance μ_1 sur un ensemble d'observations de courbes aléatoires sur $l^\star$ journées consécutives et qu'elle est d'espérance $\mu_0 < \mu_1$ en dehors de cet ensemble et nous étudions la détection d'une telle rupture.

La rupture dans la régularité höldérienne, passage de l'exposant de régularité globale α à l'exposant $\beta < \alpha$, peut sembler un cas particulier trivial de ce modèle puisqu'alors la norme α-höldérienne et donc son espérance μ_1 deviennent infinies. Mais en pratique, on ne peut généralement pas calculer exactement les normes höldériennes à partir de l'observation des trajectoires et on a recours à des approximations par interpolation affine entre les observations consécutives aux points d'échantillonage d'une même trajectoire. La détection de rupture doit donc se faire à partir de ces approximations.

Dans ce travail, les espaces de Hölder interviennent à deux niveaux qu'il importe de ne pas confondre.

1. Ils permettent de modéliser la régularité globale des trajectoires observées ;
2. La statistique de test proposée pour détecter la rupture peut être vue comme une norme γ-Hölder discrète du processus de sommes partielles bâti sur les éléments aléatoires X_i de l'espace $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$ (ou $\mathcal{H}_\beta[0,1]$) pour un certain $0 < \gamma < 1/2$. La possibilité de choisir γ proche de $1/2$, liée au degré d'intégrabilité des v.a. $\|X_i\|_\alpha$, permet la détection d'épidémies « courtes », *i.e.* avec $l^\star(n) = o(n^{1/2})$.

Nous décrivons maintenant le cadre höldérien minimal utilisé dans notre travail. Pour plus d'information nous renvoyons à [25, 49, 84, 93].

Soit $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction poids ou module de continuité. Typiquement, ρ est nulle et continue en 0, strictement positive sur $]0,1]$ et croissante sur $[0,1]$. L'appartenance d'une fonction continue $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ à l'espace de Hölder $\mathcal{H}_\rho[0,1]$ (resp. $\mathcal{H}^o_\rho[0,1]$) signifie que $|x(t+h) - x(t)| = O(\rho(|h|))$ (resp. $o(\rho(|h|))$) uniformément en t sur $[0,1]$. Les espaces de Hölder les plus classiques sont construits à partir de la famille de poids $\rho(h) = h^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, et notés $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$ (resp. $\mathcal{H}^o_\alpha[0,1]$).

Nous explicitons maintenant la définition formelle des espaces $\mathcal{H}_\rho[0,1]$ et $\mathcal{H}^o_\rho[0,1]$ utilisés dans ce document. Nous notons $C[0,1]$ l'espace de Banach des fonctions continues $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la norme du supremum $\|x\|_\infty := \sup\{|x(t)|;\ t \in [0,1]\}$.

Définition. *Soit $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de poids telle que $\rho(0) = 0$, pour tout $h \in]0,1]$, $\rho(h) > 0$ et $\rho(h) = h^\alpha L(1/h)$ où $0 < \alpha < 1$ et L est à variation lente en $+\infty$. Nous notons $\mathcal{H}_\rho[0,1]$ ou $\mathcal{H}_\rho$ l'espace de Hölder*

$$\mathcal{H}_\rho[0,1] := \{x \in C[0,1];\ \omega_\rho(x,\delta) < +\infty\}$$

où

$$\omega_\rho(x,\delta) := \sup_{\substack{s,t\in[0,1],\\ 0<t-s<\delta}} \frac{|x(t)-x(s)|}{\rho(t-s)}$$

muni de la norme

$$\|x\|_\rho := |x(0)| + \omega_\rho(x,1).$$

On note $\mathcal{H}^o_\rho[0,1]$ ou $\mathcal{H}^o_\rho$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\rho$

$$\mathcal{H}^o_\rho[0,1] := \{x \in C[0,1];\ \lim_{\delta\to 0} \omega_\rho(x,\delta) = 0\}.$$

Muni de la norme $\|\ \|_\rho$, $\mathcal{H}_\rho$ est un espace de Banach non séparable. Son sous-espace fermé $\mathcal{H}^o_\rho$ est un espace de Banach séparable pour cette même norme.

Dans cette étude, nous utilisons essentiellement les espaces $\mathcal{H}_\rho$ et $\mathcal{H}^o_\rho$

— notés respectivement $\mathcal{H}_\alpha$ et $\mathcal{H}^o_\alpha$ lorsque $\rho(h) = h^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$

— notés respectivement $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ et $\mathcal{H}^o_{\alpha,\beta}$ lorsque $\rho(h) = \rho_{\alpha,\beta}(h) = h^\alpha |\ln h|^\beta$.

Rappelons maintenant la norme séquentielle $\|\ \|^{\text{seq}}_\rho$. Pour cela, nous commençons par les notations suivantes. Notons par D_j l'ensemble des dyadiques de niveau j sur $[0,1]$, *i.e.*,

$$D_0 = \{0,1\}, \qquad D_j = \{(2k-1)2^{-j}; 1 \le k \le 2^{j-1}\}, \quad j \ge 1.$$

Pour tout $r \in D_j$, $j \ge 0$, posons

$$r^- = r - 2^{-j}, \quad r^+ = r + 2^{-j},$$

et pour toute fonction f continue sur $[0,1]$,

$$\lambda_r(f) := f(r) - \frac{1}{2}\big(f(r^+) + f(r^-)\big)$$

pour $j \ge 1$ et $\lambda_r(f) := f(r)$ si $r \in D_0$.

La norme séquentielle sur l'espace $\mathcal{H}^o_\rho$ est donnée par

$$\|f\|^{\text{seq}}_\rho := \sup_{j\ge 0} \frac{1}{\rho(2^{-j})} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(f)|.$$

Notons que les normes $\|\ \|_\rho^{\mathrm{seq}}$ et $\|\ \|_\rho$ sont équivalentes sur $\mathcal{H}_\rho^o$ (pour la preuve de cette équivalence, nous pouvons citer [25, 93]).

Nous passons maintenant au principe d'invariance qui donne la convergence en loi du processus de sommes partielles noté ξ_n vers un mouvement brownien. Nous nous intéressons au principe d'invariance höldérien dans le cas des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), dont la première version est due à Lamperti [71]. Ce processus ξ_n est la ligne polygonale aléatoire de sommets $(\frac{k}{n}, \sum_{i=1}^k X_i)$, $0 \le k \le n$, où les X_i sont i.i.d. et centrées. Lamperti dans [71] a montré que si $\mathbf{E}|X_1|^p < +\infty$ pour un $p > 2$, alors $n^{-1/2}\xi_n$ converge en loi dans l'espace $\mathcal{H}_\alpha^o$ vers un mouvement brownien standard pour tout $0 < \alpha < 1/2 - 1/p$. Ensuite, Račkauskas et Suquet dans [85, 87] ont montré que pour tout $0 < \alpha < 1/2$, $n^{-1/2}\xi_n$ converge en loi dans l'espace $\mathcal{H}_\alpha^o$ vers un mouvement brownien standard si et seulement si $\lim_{t\to+\infty} t^p \mathbf{P}(|X_1| > t) = 0$, où $p = (1/2-\alpha)^{-1}$. Notons que cette restriction à $\alpha < 1/2$ est due à la régularité höldérienne du mouvement brownien. Plusieurs travaux ont traité la généralisation du principe d'invariance höldérien dans divers cas de dépendance pour les X_i, nous pouvons citer [37, 41–43, 49, 58–60, 79]. Le théorème limite central fonctionnel (ou principe d'invariance) dans $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$ requiert l'appartenance presque sûre du mouvement brownien standard à $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$. En raison du résultat classique de Lévy sur le module de continuité uniforme du mouvement brownien, ceci restreint l'échelle des $\mathcal{H}_\alpha$ utilisée pour le principe d'invariance à $0 < \alpha < 1/2$. Le même argument nous amène à accorder une importance particulière aux espaces $\mathcal{H}_{1/2,\beta}[0,1]$ bâtis sur les fonctions poids $\rho(h) = h^{1/2}\ln^\beta(c/h)$ pour $\beta > 1/2$.

Nous verrons et utiliserons au chapitre 4 une version générale du principe d'invariance dans les espaces $\mathcal{H}_\rho^o$.

Nous décrivons maintenant le principal résultat du chapitre 3. Comme mentionné ci-dessus l'observation des fonctions aléatoires X_k, $1 \le k \le n$ ne nous permet pas en général de calculer explicitement les $\|X_k\|_\alpha$, on doit se contenter d'approximations. Nous avons choisi des approximations par interpolation affine avec un pas de discrétisation de $\frac{1}{N}$ où $N = N(n)$ tend vers l'infini avec n. Nous notons $X_{k,N}$ la ligne polygonale de sommets

$$\left(\frac{i}{N}, X_k\left(\frac{i}{N}\right)\right), \quad 0 \le i \le N(n).$$

La vitesse de convergence de $X_{k,N}$ vers X_k est donnée par l'inégalité

$$\|X_{k,N} - X_k\|_\alpha \le 4\omega_\alpha\Big(X_k, \frac{1}{N}\Big).$$

On pose

$$S_{k,N} = \sum_{1\le j\le k} \|X_{j,N}\|_\alpha, \quad 1 \le k \le n,$$

et on définit la statistique

$$T_{n,N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1\le k<m\le n} \frac{\left|S_{m,N} - S_{k,N} - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)S_{n,N}\right|}{\left[\left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\right)\right]^\gamma}.$$

Le paramètre σ écart-type de $\|X_1\|_\alpha$ est ici supposé connu pour ne pas trop alourdir l'exposé. En pratique il faudra le remplacer par un estimateur consistant sous l'hypothèse nulle. Un candidat naturel est la racine carrée de la variance empirique des $\|X_{k,N}\|_\alpha$.

Nous obtenons alors le résultat suivant sous l'hypothèse nulle.

Théorème (Th. 3.20, p. 113)**.** *On suppose qu'il existe un réel $p > 2$ tel que*

$$\lim_{t\to+\infty} t^p \mathbf{P}(\|X_1\|_\alpha > t) = 0.$$

Alors, sous l'hypothèse nulle,

$$T_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} T,$$

où

$$T = \sup_{0<t-s<1} \frac{|W(t) - W(s) - (t-s)W(1)|}{\big((t-s)\big(1-(t-s)\big)\big)^\gamma}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Notons qu'ici la seule condition sur $N = N(n)$ est que $N(n)$ tende vers l'infini avec n. Sous l'hypothèse alternative, nous obtenons la divergence de $T_{n,N}$ au prix d'une condition plus restrictive sur le choix de N.

Théorème (Th. 3.37, p. 133)**.** *On pose*

$$h_n = \frac{l^\star}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

et qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} N^{(\alpha-\beta)(1-\delta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors sous l'hypothèse d'une rupture épidémique avec passage de la régularité d'exposant α à l'exposant $\beta < \alpha$ durant l'épidémie,

$$T_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

Dans le chapitre 4, au lieu de considérer l'observation de n trajectoires de processus stochastiques, on considère la trajectoire d'un seul processus ξ sur laquelle on se propose de détecter une éventuelle rupture de régularité. On suppose ξ à trajectoires continues et à accroissement indépendants. De plus, si on veut bénéficier du TLC, il est raisonnable de

supposer que ξ est du second ordre ($\mathbf{E}\xi(t)^2 < \infty$ pour tout $t \in [0,1]$). On sait alors depuis les travaux de P. Lévy que ξ peut se représenter comme

$$\xi(t) = W(f(t)), \quad t \in [0,1],$$

où W est un mouvement brownien standard (notamment à trajectoires continues) et $f(t) = \mathbf{E}\xi(t)^2$ est la variance de $\xi(t)$ que l'on supposera centré pour simplifier. On supposera de plus f continue et strictement croissante. La régularité höldérienne de ξ est alors complètement caractérisée par la régularité de f.

Ceci réduit le problème de la détection d'une rupture épidémique dans la régularité höldérienne de ξ à celui de la détection d'un changement du paramètre fonctionnel f pendant l'intervalle épidémique $[s^\star, t^\star] \subset [0,1]$. Si on découpe l'intervalle de temps $[0,1]$ en n tranches consécutives de longueur $1/n$, les accroissements de ξ génèrent les variables aléatoires

$$X_{n,k} = \frac{\xi(\frac{k}{n}) - \xi(\frac{k-1}{n})}{\big(f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})\big)^{1/2}}, \quad 1 \le k \le n,$$

qui sont i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ sous (H_0). On se ramène alors au modèle standard de rupture épidémique dans l'espérance d'un échantillon en introduisant les variables aléatoires centrées

$$Y_{n,i} := X_{n,i}^2 - 1, \quad 1 \le i \le n,$$

et leurs sommes partielles définies par

$$S_n(0) := 0, \quad S_n(A) := \sum_{i \in A} Y_{n,i}, \quad S_n(t) := S_n([0,t]) = \sum_{0 < i \le t} Y_{n,i}.$$

Nous utiliserons un poids höldérien à choisir convenablement dans la classe $\mathcal{R}$ des fonctions croissantes $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$, strictement positives sur $]0,1]$, telles que $\rho(0) = 0$ et vérifiant

i) il existe un $\alpha \in]0, 1/2]$ et une fonction L normalisée à variation lente en $+\infty$ tels que

$$\rho(h) = h^\alpha L(1/h), \quad 0 < h \le 1 \, ;$$

ii) $\theta(t) := t^{1/2}\rho(1/t)$ est C^1 sur $[1, \infty)$;

iii) il existe un $\beta > 1/2$ et un $a > 0$, tels que $\theta(t) \ln^{-\beta}(t)$ est croissante sur $[a, \infty)$.

La pertinence de ces conditions est discutée au chapitre 4.

Suivant la méthode générale exposée dans [86], nous définissons la famille de statistiques $\mathrm{UI}(n,\rho)$, $\rho \in \mathcal{R}$ par

$$\mathrm{UI}(n,\rho) := \max_{1 \le i < j \le n} \frac{\big|S_n(j) - S_n(i) - \frac{j-i}{n} S_n(n)\big|}{\rho\big(\big(\frac{j-i}{n}\big)\big(1 - \frac{j-i}{n}\big)\big)}.$$

Nous obtenons alors le résultat suivant sous l'hypothèse nulle.

Théorème (Th. 4.16, p. 155)**.** *Soit $\rho \in \mathcal{R}$ telle que*

$$\frac{\theta(u)}{\ln u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty.$$

Sous (H_0), la statistique $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n,\rho)$ converge en loi vers

$$\mathrm{UI}(W,\rho) := \sup_{\substack{s,t\in[0,1],\\ 0<t-s<1}} \frac{|W(t)-W(s)-(t-s)W(1)|}{\rho((t-s)(1-(t-s)))}.$$

Ceci s'applique en particulier avec les fonctions poids

- $\rho(h) = \rho_{1/2,\gamma}(h) := h^{1/2}|\ln h|^{\gamma}$, $\gamma > 1$,
- $\rho(h) = \rho_{1/2,1,\delta}(h) := h^{1/2}|\ln h||\ln|\ln h||^{\delta}$, $\delta > 0$.

Dans le but de détecter de courtes épidémies, nous introduisons une suite d'alternatives $(H_{A_n})_{n\geq n_0}$, où
$(H_{A_n}) : \xi(t) = W\big(g_n(t)\big)$, $t \in [0,1]$, où g_n est une perturbation épidémique inconnue de f, sur un intervalle $[s_n^\star, t_n^\star]$ inconnu.

Et nous nous intéressons plus particulièrement au cas où $t_n^\star - s_n^\star$ tend vers zéro avec ℓ^* tendant vers l'infini ($\ell^* = o(n)$), où ℓ^* est la longueur du sous-échantillon contaminé. En l'état actuel de notre travail, nous restreignons provisoirement cette étude au cas où f est l'identité sur $[0,1]$. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant.

Théorème (Th. 4.20, p. 159)**.** *Sous (H_{A_n}), on suppose que f est l'identité et que g_n vérifie les hypothèses supplémentaires suivantes.*

1. *Pour tout $n \geq n_0$, il existe des constantes a_n, b_n strictement positives telles que,*

$$g_n(t) - g_n(s^\star) \sim a_n(t-s^\star)^\beta, \quad t \downarrow s^\star$$
$$g_n(t^\star) - g_n(t) \sim b_n(t^\star - t)^\beta, \quad t \uparrow t^\star.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s^\star\leq t\leq s^\star+2/n} \frac{|g_n(t)-g_n(s^\star)-a_n(t-s^\star)^\beta|}{a_n(t-s^\star)^\beta} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t^\star-2/n\leq t\leq t^\star} \frac{|g_n(t^\star)-g_n(t)-b_n(t^\star-t)^\beta|}{b_n(t^\star-t)^\beta} = 0.$$

3. $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$ *et* $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$.

On choisit la famille de poids höldériens

$$\rho_{1/2,\gamma}(h) := h^{1/2}|\ln h|^{\gamma}, \quad \gamma > 1.$$

On suppose finalement que la longueur $\ell^* = \ell^*(n)$ de l'échantillon épidémique vérifie :

$$\ell^* = o(n^{1-\beta})$$

quand n tend vers l'infini. Sous ces conditions,

$$(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n, \rho_\gamma) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

Notons que ce travail est inachevé. Nous espérons que le théorème ci-dessus sera un point d'appui pour des progrès ultérieurs. Une généralisation de ce travail nous semble possible en considérant d'autres fonctions f que l'identité, avec une minoration convenable des $f((i+1)/n) - f(i/n)$ et des hypothèses adéquates sur les fonctions g_n.

Première partie

Estimation de la position d'une rupture lisse pour un modèle poissonnien

Chapitre 1

Problème d'estimation de la rupture lisse

Dans ce chapitre, nous entamons l'étude du problème d'estimation de la position de ce que nous appelons une rupture lisse à partir de n observations indépendantes d'un processus de Poisson non-homogène. La rupture lisse est une transition continue de la fonction d'intensité du processus d'un niveau à un autre sur un intervalle tellement court, que sa longueur δ_n est considérée comme décroissante vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Après avoir présenté dans la section 1.1 notre modèle poissonnien de rupture lisse (et l'avoir situé par rapport à d'autre modèles poissonniens réguliers et non-réguliers qui ont été étudiés dans la littérature), nous verrons dans la section 1.2 qu'il y a une « transition de phase » dans le comportement asymptotique du modèle en fonction de la vitesse à laquelle δ_n tend vers 0. Plus précisément, le modèle se comporte différemment selon que δ_n converge vers 0 plus lentement ou plus rapidement que la vitesse « critique » $1/n$ (c'est-à-dire selon que $n\delta_n \to +\infty$ ou $n\delta_n \to 0$). Nous appelons ces deux situations respectivement *cas lent* et *cas rapide*.

Dans la section 1.3, nous considérerons le cas lent et montrerons que dans ce cas le comportement de notre modèle poissonnien de rupture lisse ressemble à celui du cas régulier (lisse) : notamment, le modèle est localement asymptotiquement normal (LAN), bien qu'avec une vitesse inhabituelle $\sqrt{\delta_n/n}$, et l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et les estimateurs bayésiens (EB) sont consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces.

Finalement, dans la section 1.4, nous considérerons le cas rapide et montrerons que dans ce cas notre modèle poissonnien de rupture lisse est non régulier et se comporte plutôt comme un modèle de rupture classique : notamment, les EB sont consistants, convergent à la vitesse $1/n$ vers une limite non-gaussienne et sont asymptotiquement efficaces.

Notons que tous ces résultats seront obtenus en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance développée par Ibragimov et Khasminskii dans [57], qui garantit également la convergence des moments des estimateurs considérés. Cependant, lors de l'étude de l'EMV avec cette méthode, on a besoin de la convergence faible (dans un espace fonctionnel adapté muni d'une certaine topologie) de ce qu'on appelle processus de rap-

port de vraisemblance normalisé vers un certain processus limite. Or, on verra que dans le cas rapide de notre modèle de rupture lisse, cette convergence ne peut avoir lieu sous aucune des topologies utilisées habituellement par la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance. Ainsi, l'étude de l'EMV dans le cas rapide doit passer par l'adaptation de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance pour utiliser une topologie alternative et sera menée dans le chapitre 2.

Notons finalement que les résultats obtenus dans ce chapitre ont été publiés dans [1].

1.1 Modèle poissonnien de rupture lisse

Dans cette section, nous présentons le modèle poissonnien de rupture lisse et le situons par rapport à d'autre modèles poissonniens réguliers et non-réguliers qui ont été étudiés dans la littérature.

Rappelons tout d'abord la définition d'un processus de Poisson non-homogène. Soit $\lambda(t)$, $t \geq 0$, une fonction positive localement intégrable. On dit que $X = \big(X(t),\ t \geq 0\big)$ est un processus de Poisson (non-homogène) de fonction d'intensité λ si X est à trajectoires càdlàg (continues à droites et limitées à gauche) et à accroissements indépendants, s'il part de 0 (*i.e.*, $X(0) = 0$), et si pour tout $u, v \geq 0$ tels que $u < v$, son accroissement sur l'intervalle $[u, v]$ est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\int_u^v \lambda(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\mathbf{P}\big(X(v) - X(u) = k\big) = \frac{\big(\int_u^v \lambda(t)\,\mathrm{d}t\big)^k}{k!} \exp\bigg\{-\int_u^v \lambda(t)\,\mathrm{d}t\bigg\}$$

(on adopte ici la convention $0^0 = 1$ ou, autrement dit, on considère que la loi de Poisson de paramètre 0 est concentrée en 0). Notons que nous voyons ici le processus de Poisson comme un processus de comptage : pour tout $t \geq 0$, on a $X(t) = \mathrm{Card}\{i \in \mathbb{N}^* : t_i \leq t\}$, où $0 < t_1 < t_2 < \cdots$ sont les « événements » du processus X, c'est-à-dire les points (aléatoires) de discontinuité de sa trajectoire. Mais on peut également voir le processus de Poisson comme un processus ponctuel (ensemble de points aléatoire $\{t_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$), ou encore comme une mesure aléatoire (mesure de comptage sur $\{t_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$).

Rappelons également la définition de l'intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson X d'intensité λ, ainsi que ses propriétés de base (pour plus d'informations, on peut se référer, par exemple, au chapitre 1 de [68]). Soit $T > 0$ et $f(t)$, $t \in [0, T]$, une fonction telle que $\int_0^T |f(t)|\,\lambda(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$. L'intégrale stochastique de f par rapport à X peut être définie par

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}X(t) = \sum_{i=1}^{X(T)} f(t_i),$$

où t_i est le i-ème « événement » de X (avec la convention $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$). Son espérance est donnée par

$$\mathbf{E}\bigg[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}X(t)\bigg] = \int_0^T f(t)\,\lambda(t)\,\mathrm{d}t,$$

et sa fonction caractéristique par

$$\phi(u) = \mathbf{E}\exp\Big\{iu\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}X(t)\Big\} = \exp\Big\{\int_0^T \Big(\exp\big\{iuf(t)\big\} - 1\Big)\lambda(t)\,\mathrm{d}t\Big\}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Nous considérons le modèle d'observation de $n \in \mathbb{N}^*$ réalisations indépendantes d'un processus de Poisson non-homogène. Plus précisément, soit $0 < \alpha < \beta < \tau$ des constantes connues, ψ une fonction connue strictement positive et continue sur $[0, \tau]$, et $r \neq 0$ une constante connue vérifiant $r > -\min_{0\le t\le\tau}\psi(t)$. Soit également $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite connue décroissante vers 0. Soit finalement $\theta \in \Theta = (\alpha, \beta)$ un paramètre inconnu (unidimensionnel) qu'on cherche à estimer dans l'asymptotique $n \to +\infty$. On suppose que l'on observe $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$, où $X_j = \big(X_j(t),\ 0 \le t \le \tau\big)$, $j = 1, \ldots, n$, sont des processus de Poisson (sur l'intervalle $[0, \tau]$) indépendants de fonction d'intensité $\lambda_\theta = \lambda_\theta^{(n)}$, $\theta \in \Theta$, donnée par

$$\lambda_\theta^{(n)}(t) = \psi(t) + \frac{r}{\delta_n}\,(t - \theta)\,\mathbb{1}_{[\theta,\theta+\delta_n[}(t) + r\,\mathbb{1}_{[\theta+\delta_n,\tau]}(t), \qquad 0 \le t \le \tau. \tag{1.1}$$

Cette fonction d'intensité, dans un cas particulier important $\psi \equiv \lambda_0 > 0$, est présentée dans la figure 2 (avec $r > 0$).

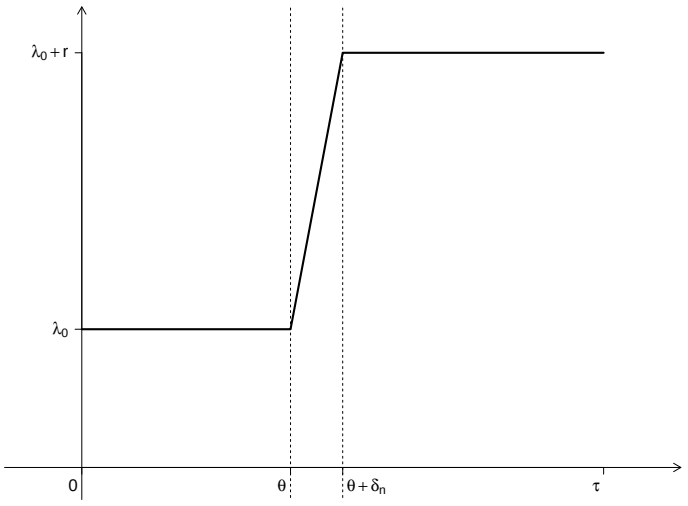

FIGURE 2 – fonction d'intensité $\lambda_\theta^{(n)}$, avec $\psi \equiv \lambda_0$

Notons que ce modèle d'observation est équivalent à celui où l'on observe une seule réalisation sur l'intervalle $[0, n\tau]$ d'un processus de Poisson $X = \big(X(t),\ 0 \le t \le n\tau\big)$ de fonction d'intensité τ-périodique égale à $\lambda_\theta^{(n)}$ sur la première période (asymptotique du temps d'observation long). Il est également équivalent au modèle où l'on observe une seule réalisation sur l'intervalle $[0, \tau]$ d'un processus de Poisson $Y^{(n)} = \big(Y^{(n)}(t),\ 0 \le t \le \tau\big)$ de fonction d'intensité $\Lambda_\theta^{(n)} = n\,\lambda_\theta^{(n)}$ (asymptotique de la grande intensité).

Rappelons que les modèles réguliers d'observations poissonniennes ont été traités précédemment par Kutoyants dans [63, 65, 66, 68] (cf. également [33], où le problème correspondant de test d'hypothèse a été considéré), et qu'il y a été montré que ces modèles sont localement asymptotiquement normaux (LAN). Un exemple d'un tel modèle régulier est le modèle avec une fonction d'intensité λ_θ définie comme $\lambda_\theta^{(n)}$ dans (1.1), mais en remplaçant δ_n par une constante strictement positive δ :

$$\lambda_\theta(t) = \psi(t) + \frac{r}{\delta}\,(t-\theta)\,\mathbb{1}_{[\theta,\theta+\delta[}(t) + r\,\mathbb{1}_{[\theta+\delta,\tau]}(t), \qquad 0 \le t \le \tau. \tag{1.2}$$

Notons que dans ce cas, la fonction d'intensité est continue et ne dépend pas de n.

Rappelons également que plusieurs modèles non réguliers d'observations poissonniennes ont déjà été traités dans la littérature. Le cas de rupture a été étudié par Kutoyants dans [64, 66, 68], le cas cusp a été considéré par Dachian dans [30], et les cas de singularité de type 0 et de singularité de type ∞ ont été examinés par Dachian dans [32] (cf. également [34], où le problème de test d'hypothèse a été considéré dans divers cas singuliers). Un exemple d'un modèle de rupture est le modèle avec une fonction d'intensité λ_θ définie comme $\lambda_\theta^{(n)}$ dans (1.1), mais en remplaçant δ_n par 0 :

$$\lambda_\theta(t) = \psi(t) + r\,\mathbb{1}_{\{t\ge\theta\}}, \qquad 0 \le t \le \tau. \tag{1.3}$$

Notons que dans ce cas, la fonction d'intensité est discontinue et ne dépend pas de n.

Pour notre modèle, la fonction d'intensité $\lambda_\theta^{(n)}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais sa limite quand $n \to +\infty$ est discontinue. C'est, dans un sens, l'inverse du cas traité dans [35], où les auteurs considèrent le cas d'une fonction d'intensité ayant une discontinuité qui disparaît lorsque $n \to +\infty$.

Nous notons $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\theta^{(n)}$ la mesure de probabilité correspondant à $X^{(n)}$. Nous notons également $\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_\theta^{(n)}$ l'espérance mathématique par rapport à cette mesure. La vraisemblance, par rapport à la mesure $\mathbf{P}_* = \mathbf{P}_*^{(n)}$ correspondant à n processus de Poisson homogènes d'intensité 1, est donnée (cf., par exemple, [78]) par

$$L\big(\theta, X^{(n)}\big) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta\big(X^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}_*} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^\tau \ln\big(\lambda_\theta(t)\big)\,\mathrm{d}X_j(t) - n\int_0^\tau \big(\lambda_\theta(t)-1\big)\,\mathrm{d}t\right\}, \qquad \theta \in \Theta.$$

Afin d'estimer le paramètre inconnu θ, nous considérons l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et les estimateurs bayésiens (EB).

Dans le cas où la vraisemblance L est continue, l'EMV $\hat\theta_n$ est défini comme une des solutions de l'équation

$$L\big(\hat\theta_n, X^{(n)}\big) = \sup_{\theta\in\Theta} L\big(\theta, X^{(n)}\big).$$

Lorsque la vraisemblance L est une fonction càdlàg discontinue, l'EMV $\hat\theta_n$ est plutôt défini comme une des solutions de l'équation

$$\max\big\{L\big(\hat\theta_n-, X^{(n)}\big); L\big(\hat\theta_n, X^{(n)}\big)\big\} = \sup_{\theta\in\Theta} L\big(\theta, X^{(n)}\big).$$

Dans la suite, l'ensemble des solutions (ou la solution, dans le cas où celle-ci est unique) de l'une ou l'autre de ces équations sera noté

$$\operatorname*{argsup}_{\theta\in\Theta} L\big(\theta, X^{(n)}\big).$$

Notons que dans le cas où il n'y a pas d'unicité, on choisit $\hat{\theta}_n$ comme un élément quelconque de l'ensemble $\operatorname*{argsup}_{\theta\in\Theta} L\big(\theta, X^{(n)}\big)$.

Quant à l'EB $\tilde{\theta}_n$, il est donné, pour la fonction de perte quadratique et une densité *a priori* q (sur Θ), par

$$\tilde{\theta}_n = \frac{\int_\alpha^\beta \theta\, q(\theta)\, L\big(\theta, X^{(n)}\big)\,\mathrm{d}\theta}{\int_\alpha^\beta q(\theta)\, L\big(\theta, X^{(n)}\big)\,\mathrm{d}\theta}\,.$$

Aussi bien dans le cas régulier que dans les cas non réguliers cités ci-dessus, l'étude de l'EMV et des EB a été menée en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance introduite par Ibragimov et Khasminskii dans [57]. Cette méthode consiste à étudier, dans un premier temps, le (processus de) rapport de vraisemblance normalisé donné par

$$\begin{aligned} Z_n(u) = Z_n^{(\theta)}(u) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\theta+u\varphi_n}\big(X^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta} = \frac{L\big(\theta+u\varphi_n, X^{(n)}\big)}{L\big(\theta, X^{(n)}\big)} \\ &= \exp\left\{\sum_{j=1}^n \int_0^\tau \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right)\mathrm{d}X_j(t) - n\int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)-\lambda_\theta(t)\big)\,\mathrm{d}t\right\}, \qquad u\in\mathbb{U}_n, \end{aligned}$$

où $\mathbb{U}_n = \,]\varphi_n^{-1}(\alpha-\theta), \varphi_n^{-1}(\beta-\theta)[$ et φ_n est une suite décroissante vers 0, dite vitesse de normalisation de la vraisemblance. Cette vitesse doit être choisie de sorte que le processus Z_n converge faiblement vers un processus limite non dégénéré (c'est-à-dire non identiquement égal à 1) défini sur tout $\mathbb{R}$ (notons que $\mathbb{U}_n \uparrow \mathbb{R}$), dit rapport de vraisemblance limite. Ensuite, les propriétés de l'EMV et des EB sont déduites.

Dans le cas régulier (cf. [63, 65, 66, 68]), la vitesse de normalisation de la vraisemblance peut être choisie comme

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Notons que dans ce cas les processus Z_n, $n\in\mathbb{N}^*$, peuvent être étendus à tout $\mathbb{R}$ de sorte que leurs trajectoires appartiennent presque sûrement à l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$. Le processus Z_n converge, dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie uniforme (cf. chapitre 2 pour plus de détails sur cet espace), vers le processus $Z^\circ_{I(\theta)}$, où

$$I(\theta) = \int_0^\tau \frac{\big(\dot{\lambda}_\theta(t)\big)^2}{\lambda_\theta(t)}\,\mathrm{d}t$$

(ici $\dot{\lambda}_\theta(t)$ désigne la dérivé de $\lambda_\theta(t)$ par rapport à θ) est l'information de Fisher, et pour tout $F\in\mathbb{R}$, le processus Z°_F est défini par

$$Z^\circ_F(u) = \exp\left\{u\,\xi_F - \frac{u^2}{2}\,F\right\}, \qquad u\in\mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Ici et dans la suite, $\xi_F \sim \mathcal{N}(0,F)$ est une variable aléatoire gaussienne (de variance F). En fait, dans ce cas le modèle est LAN (avec une vitesse classique $1/\sqrt{n}$). Bien entendu, nous aurions également pu choisir la vitesse $\varphi_n = 1/\sqrt{nI(\theta)}$, auquel cas le rapport de vraisemblance limite serait

$$Z_1^\circ(u) = \exp\left\{u\,\xi_1 - \frac{u^2}{2}\right\}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Alors, l'EMV et les EB (pour toute densité *a priori* continue strictement positive q) sont consistants, sont asymptotiquement normaux avec une vitesse $1/\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\big(\hat{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \xi_{\frac{1}{I(\theta)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\big(\tilde{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \xi_{\frac{1}{I(\theta)}},$$

nous avons la convergence des moments, et l'EMV et les EB sont tous les deux asymptotiquement efficaces. Ici et dans la suite, le symbole « $\Longrightarrow$ » désigne la convergence en loi (sous θ).

Notons également que dans le cas de la fonction d'intensité (1.2), en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{r(t-\theta)}{\delta},$$

on obtient que l'information de Fisher est donnée par

$$I(\theta) = \int_\theta^{\theta+\delta} \frac{\big(-\frac{r}{\delta}\big)^2}{\psi(t) + \frac{r}{\delta}(t-\theta)}\,\mathrm{d}t = \frac{r}{\delta}\int_0^r \frac{1}{\psi\big(\theta + \frac{\delta}{r}\,x\big) + x}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui, dans le cas particulier $\psi \equiv \lambda_0$, revient à

$$I(\theta) = \frac{r}{\delta}\,\ln\left(\frac{\lambda_0 + r}{\lambda_0}\right).$$

Quant au cas de rupture (cf. [64,66,68]), la vitesse de normalisation de la vraisemblance peut être choisie comme

$$\varphi_n = \frac{1}{n}.$$

Notons que dans ce cas les processus Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, peuvent être étendus à tout $\mathbb{R}$ de sorte que leurs trajectoires appartiennent presque sûrement à l'espace de Skorokhod $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ de fonctions càdlàg tendant vers zéro en $\pm\infty$. Le processus Z_n converge vers le processus $Z^\star_{a,b}$ donné par

$$Z^\star_{a,b}(u) = \begin{cases} \exp\Big\{\ln\big(\frac{a}{b}\big)Y^+(u) + (b-a)u\Big\}, & \text{si } u \in \mathbb{R}_+, \\ \exp\Big\{\ln\big(\frac{b}{a}\big)Y^-\big((-u)-\big) + (b-a)u\Big\}, & \text{si } u \in \mathbb{R}_-, \end{cases} \tag{1.5}$$

où $a, b > 0$ sont des constantes, et Y^+ et Y^- sont des processus de Poisson homogènes indépendants sur $\mathbb{R}_+$ d'intensités respectives b et a. Ici, la convergence a lieu dans l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle de Skorokhod (plus de détails sur cette topologie seront donnés dans le chapitre 2).

Alors, l'EMV et les EB (pour toute densité *a priori* continue strictement positive q) sont consistants, convergent à la vitesse $1/n$:

$$n\big(\hat{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b} \quad \text{et} \quad n\big(\tilde{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \zeta_{a,b},$$

où

$$\eta_{a,b} = \operatorname*{argsup}_{u\in\mathbb{R}} Z^\star_{a,b}(u)$$

et

$$\zeta_{a,b} = \frac{\int_{u\in\mathbb{R}} u Z^\star_{a,b}(u)\,\mathrm{d}u}{\int_{u\in\mathbb{R}} Z^\star_{a,b}(u)\,\mathrm{d}u}\,, \tag{1.6}$$

nous avons la convergence des moments, et les EB sont asymptotiquement efficaces.

Notons aussi que dans le cas de la fonction d'intensité (1.3), nous avons $a = \psi(\theta)$ et $b = \psi(\theta) + r$, ce qui, dans le cas particulier $\psi \equiv \lambda_0$, équivaut à $a = \lambda_0$ et $b = \lambda_0 + r$.

Notons ici que les variables aléatoires $\eta_{a,b}$ et $\zeta_{a,b}$ peuvent être récrites comme

$$\eta_{a,b} = \frac{\eta_\rho}{a-b} \quad \text{et} \quad \zeta_{a,b} = \frac{\zeta_\rho}{a-b}\,,$$

où $\rho = \big|\ln\big(\frac{a}{b}\big)\big|$ et les variables aléatoires η_ρ et ζ_ρ sont définies de la même manière que $\eta_{a,b}$ et $\zeta_{a,b}$, mais en utilisant le processus $Z^\star_\rho(u)$, $u \in \mathbb{R}$, donné par

$$Z^\star_\rho(x) = \begin{cases} \exp\big\{\rho\,\Pi^+(x) - x\big\}, & \text{si } x \geq 0, \\ \exp\big\{-\rho\,\Pi^-\big((-x)-\big) - x\big\}, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

avec Π^+ et Π^- des processus de Poisson homogènes indépendants sur $\mathbb{R}_+$ d'intensités respectives $1/(e^\rho - 1)$ et $1/(1 - e^{-\rho})$.

Les variables aléatoires η_ρ et ζ_ρ, ainsi que leurs moments d'ordre 2 (donnant les erreurs moyennes quadratiques limites des estimateurs), ont été étudiées par Dachian dans [31]. Il y a été montré que lorsque $\rho \to 0$, les variables aléatoires $\rho\,\eta_\rho$ et $\rho\,\zeta_\rho$ convergent en loi respectivement vers

$$\eta_0 = \operatorname*{argsup}_{u\in\mathbb{R}} Z^\star_0(u) \quad \text{et} \quad \zeta_0 = \frac{\int_{u\in\mathbb{R}} u Z^\star_0(u)\,\mathrm{d}u}{\int_{u\in\mathbb{R}} Z^\star_0(u)\,\mathrm{d}u}\,,$$

avec

$$Z^*_0(u) = \exp\left\{W(u) - \frac{|u|}{2}\right\}, \qquad u \in \mathbb{R},$$

où $W(u)$, $u \in \mathbb{R}$, est un mouvement brownien standard bilatéral. De plus, la convergence des moments a également lieu et, en particulier, lorsque ρ est petit, on a $\mathbf{E}\eta^2_\rho \sim \mathbf{E}\eta^2_0/\rho^2 = 26/\rho^2$ et $\mathbf{E}\zeta^2_\rho \sim \mathbf{E}\zeta^2_0/\rho^2 = 16\,\zeta(3)/\rho^2 \approx 19{,}2329/\rho^2$ (où ζ est la fonction zêta de Riemann). De même, lorsque $\rho \to +\infty$, les variables aléatoires $-\eta_\rho$ et $-\zeta_\rho$ convergent en loi respectivement vers η et $\eta - 1$, où η est une variable aléatoire exponentielle standard. De plus,

la convergence des moments a également lieu et, en particulier, lorsque ρ est grand, on a $\mathbf{E}\eta_\rho^2 \sim \mathbf{E}\eta^2 = 2$ et $\mathbf{E}\zeta_\rho^2 \sim \mathbf{E}(\eta-1)^2 = 1$. Les valeurs approchées de $\mathbf{E}\eta_\rho^2$ et de $\mathbf{E}\zeta_\rho^2$ (pour différentes valeurs de ρ) ont également été obtenues à l'aide des simulations numériques. Ces simulations semblent, notamment, indiquer que l'efficacité relative asymptotique $\mathbf{E}\zeta_\rho^2/\mathbf{E}\eta_\rho^2$ de l'EMV est décroissante (comme fonction de ρ) et reste donc toujours comprise entre ses valeurs limites en $+\infty$ et en 0, c'est-à-dire entre 0,5 et $8\,\zeta(3)/13 \approx 0{,}7397$.

Notons enfin que pour notre modèle, les trajectoires des processus Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, (étendus à tout $\mathbb{R}$) appartiennent presque sûrement à l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Nous verrons plus loin dans ce chapitre que dans le cas $n\delta_n \to +\infty$, les trajectoires du processus limite appartiennent aussi à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, et la convergence a lieu dans cet espace muni de la topologie uniforme. Cependant, ce n'est plus le cas lorsque $n\delta_n \to 0$. Dans ce cas, les trajectoires du processus limite doivent être discontinues (appartenir à $\mathscr{D}_0(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$), et donc la convergence ne peut pas avoir lieu ni sous la topologie uniforme ni sous la topologie usuelle de Skorokhod (cf. chapitre 2 pour plus de détails).

1.2 Vitesse de normalisation de la vraisemblance

Dans cette section, nous nous intéressons à la vitesse φ_n de normalisation de la vraisemblance de notre modèle. Nous montrons qu'il existe plusieurs cas (selon la vitesse de convergence de δ_n vers 0) qui seront traités séparément dans la suite. Notons que nous présentons ici la démarche que nous avions adoptée pour déterminer φ_n dans un intérêt purement historique et pédagogique, car nous aurions pu simplement énoncer les différents cas et directement passer à leur étude.

Afin de déterminer la vitesse de normalisation de la vraisemblance, nous étudions $\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u)$ en cherchant la bonne vitesse φ_n pour que cette espérance converge vers une limite finie non nulle (pour $u \neq 0$). Notons que pour des raisons de simplicité, nous présentons ceci dans le cas particulier $\psi \equiv \lambda_0$. Notons également qu'au signe près, $\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u)$ est la divergence de Kullback-Leibler de $\mathbf{P}_\theta$ par rapport à $\mathbf{P}_{\theta+u\varphi_n}$. En posant $\theta_u = \theta + u\varphi_n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u) &= \mathbf{E}_\theta \left[\sum_{j=1}^{n} \int_0^\tau \ln\!\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}X_j(t) - n \int_0^\tau \big(\lambda_{\theta_u}(t) - \lambda_\theta(t)\big)\,\mathrm{d}t \right] \\
&= n \int_0^\tau \lambda_\theta(t)\, \ln\!\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t - n \int_0^\tau \big(\lambda_{\theta_u}(t) - \lambda_\theta(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= nI - nJ
\end{aligned}$$

avec des notations évidentes.

On commence par la recherche de la bonne vitesse parmi les φ_n convergeant vers 0 plus vite que δ_n, *i.e.*, tels que

$$\frac{\varphi_n}{\delta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.7}$$

Nous considérons seulement le cas $u > 0$, le cas $u < 0$ se traitant de manière similaire.

Notons que grâce à (1.7), pour n suffisamment grand, nous avons $u\varphi_n < \delta_n$, et donc $\theta < \theta + u\varphi_n < \theta + \delta_n < \theta + u\varphi_n + \delta_n < \tau$. Par conséquent, dans ce cas, les fonctions λ_θ et λ_{θ_u} ont l'allure présentée dans la figure 3 (où on a pris $r > 0$).

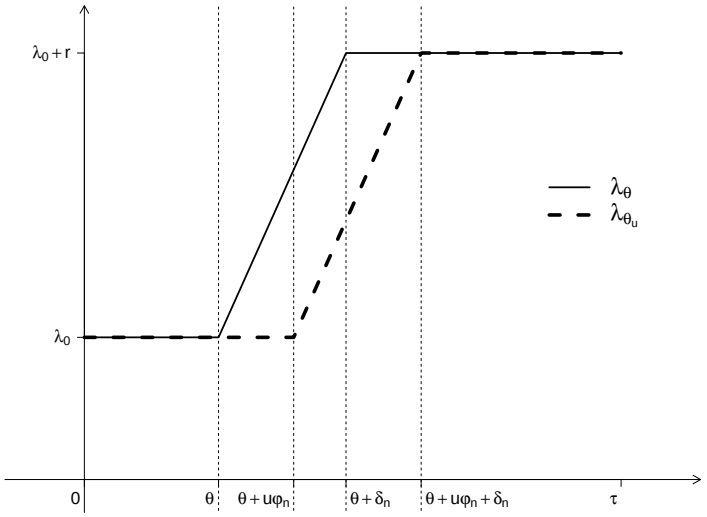

FIGURE 3 – λ_θ et λ_{θ_u} dans le cas $u\varphi_n < \delta_n$

Par un simple calcul d'aire, on a

$$J = -ru\varphi_n.$$

On note I_1, I_2 et I_3 les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_\theta^{\theta+u\varphi_n} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t,$$
$$I_2 = \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+\delta_n} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t$$

et

$$I_3 = \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n+\delta_n} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t.$$

Comme

$$\int_0^\theta \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t = \int_{\theta+u\varphi_n+\delta_n}^{\tau} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t = 0,$$

on a

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Pour I_1, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{t-\theta}{u\varphi_n}$$

et le développement limité à l'ordre 1 de $s \mapsto \ln(1+s)$ au voisinage de 0, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\theta^{\theta+u\varphi_n} \left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\right) \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right) \mathrm{d}t \\
&= -u\varphi_n \int_0^1 \left(\lambda_0 + ru\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x\right) \ln\left(1 + \frac{ru}{\lambda_0}\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x\right) \mathrm{d}x \\
&= -u\varphi_n \int_0^1 \left(\lambda_0 + ru\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x\right) \left(\frac{ru}{\lambda_0}\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x + o\Big(\frac{\varphi_n}{\delta_n}\Big)\right) \mathrm{d}x \\
&= -u\varphi_n \left[\int_0^1 ru\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x\,\mathrm{d}x + o\Big(\frac{\varphi_n}{\delta_n}\Big)\right] \\
&= -\frac{ru^2}{2}\,\frac{\varphi_n^2}{\delta_n} + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right).
\end{aligned}$$

Pour I_2, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{t-\theta}{\delta_n}$$

et le développement limité à l'ordre 2 de $s \mapsto \ln(1-s)$ au voisinage de 0, on trouve

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+\delta_n} \left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\right) \ln\left(\frac{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta-u\varphi_n)}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right) \mathrm{d}t \\
&= \delta_n \int_{u\frac{\varphi_n}{\delta_n}}^1 (\lambda_0 + rx)\, \ln\left(\frac{\lambda_0 + rx - ru\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}}{\lambda_0 + rx}\right) \mathrm{d}x \\
&= \delta_n \int_{u\frac{\varphi_n}{\delta_n}}^1 (\lambda_0 + rx)\, \ln\left(1 - \frac{ru}{\lambda_0 + rx}\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\right) \mathrm{d}x \\
&= \delta_n \int_{u\frac{\varphi_n}{\delta_n}}^1 \left[-ru\,\frac{\varphi_n}{\delta_n} - \frac{(ru)^2}{2(\lambda_0+rx)}\,\frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2}\right)\right] \mathrm{d}x \\
&= -ru\varphi_n\left(1 - u\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\right) - \frac{(ru)^2}{2}\,\frac{\varphi_n^2}{\delta_n} \int_{u\frac{\varphi_n}{\delta_n}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\lambda_0 + rx} + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right) \\
&= -ru\varphi_n\left(1 - u\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\right) - \frac{ru^2}{2}\,\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\left[\ln(\lambda_0 + r) - \ln\left(\lambda_0 + ru\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\right)\right] + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right) \\
&= -ru\varphi_n\left(1 - u\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\right) - \frac{ru^2}{2}\,\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\left[\ln(\lambda_0 + r) - \ln(\lambda_0) - \ln\left(1 + \frac{ru}{\lambda_0}\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\right)\right] + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right) \\
&= -ru\varphi_n + \frac{ru^2}{2}\left(2 + \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big)\right)\frac{\varphi_n^2}{\delta_n} + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right).
\end{aligned}$$

Pour I_3, en posant

$$x = \frac{t - \theta - \delta_n}{u\varphi_n},$$

on a

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+\delta_n+u\varphi_n} (\lambda_0 + r)\, \ln\left(\frac{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}\,(t - \theta - u\varphi_n)}{\lambda_0 + r}\right) \mathrm{d}t \\
&= (\lambda_0 + r)\, u\varphi_n \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{(x-1)\, ru}{\lambda_0 + r}\, \frac{\varphi_n}{\delta_n}\right) \mathrm{d}x \\
&= (\lambda_0 + r)\, u\varphi_n \int_0^1 \left[\frac{(x-1)\, ru}{\lambda_0 + r}\, \frac{\varphi_n}{\delta_n} + o\Big(\frac{\varphi_n}{\delta_n}\Big)\right] \mathrm{d}x \\
&= ru^2\, \frac{\varphi_n^2}{\delta_n} \int_0^1 (x-1)\, \mathrm{d}x + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right) \\
&= -\frac{ru^2}{2}\, \frac{\varphi_n^2}{\delta_n} + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 + I_3 \\
&= -\frac{ru^2}{2}\, \frac{\varphi_n^2}{\delta_n} - ru\varphi_n + \frac{ru^2}{2}\left(2 + \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big)\right)\frac{\varphi_n^2}{\delta_n} - \frac{ru^2}{2}\, \frac{\varphi_n^2}{\delta_n} + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right) \\
&= \left[-\frac{ru^2}{2} + \frac{ru^2}{2}\left(2 + \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big)\right) - \frac{ru^2}{2}\right]\frac{\varphi_n^2}{\delta_n} - ru\varphi_n + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right) \\
&= \frac{ru^2}{2}\, \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big)\, \frac{\varphi_n^2}{\delta_n} - ru\varphi_n + o\left(\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u) = nI - nJ = \frac{ru^2}{2}\, \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big)\, \frac{n\varphi_n^2}{\delta_n} + o\left(\frac{n\varphi_n^2}{\delta_n}\right),$$

et donc, pour que $\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u)$ converge vers une limite finie non nulle, il faut prendre

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{\delta_n}{n}}\,.$$

Or ce φ_n doit satisfaire (1.7), ce qui veut dire qu'on doit avoir

$$\frac{\sqrt{\delta_n}}{\sqrt{n}\delta_n} = \frac{1}{\sqrt{n\delta_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ou encore

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Dans ce cas, en prenant

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{\delta_n}{n}}\,,$$

on a bien

$$\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{ru^2}{2}\,\ln\Big(\frac{\lambda_0+r}{\lambda_0}\Big) < 0$$

pour tout $u > 0$.

Notons que dans le cas $u < 0$ on obtient la même condition et la même limite.

Maintenant, cherchons la bonne vitesse parmi les φ_n convergeant vers 0 moins vite que δ_n, *i.e.*, tels que

$$\frac{\varphi_n}{\delta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \tag{1.8}$$

Nous considérons de nouveau seulement le cas $u > 0$, le cas $u < 0$ se traitant de manière similaire.

Notons que grâce à (1.8), pour n suffisamment grand, nous avons $\delta_n < u\varphi_n$, et donc $\theta < \theta + \delta_n < \theta + u\varphi_n < \theta + u\varphi_n + \delta_n < \tau$. Par conséquent, dans ce cas, les fonctions λ_θ et λ_{θ_u} ont l'allure présentée dans la figure 4 (où on a encore pris $r > 0$).

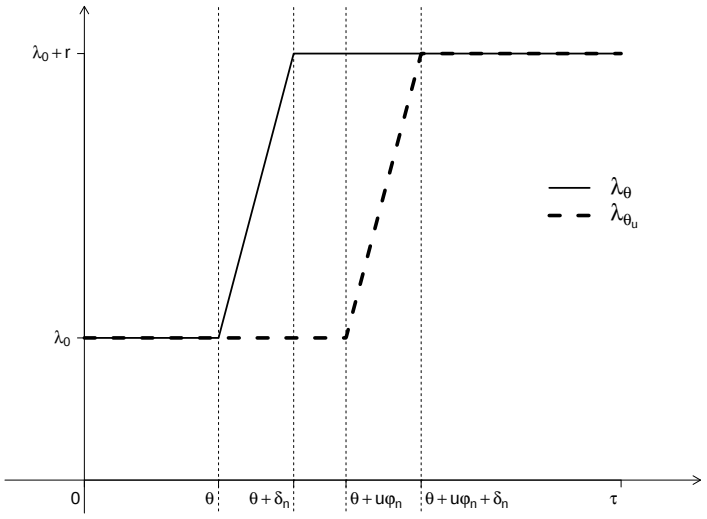

FIGURE 4 – λ_θ et λ_{θ_u} dans le cas $\delta_n < u\varphi_n$

Nous avons toujours

$$J = -ru\varphi_n.$$

On note I'_1, I'_2 et I'_3 les intégrales suivantes :

$$I'_1 = \int_{\theta}^{\theta+\delta_n} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t,$$
$$I'_2 = \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t$$

et

$$I'_3 = \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+u\varphi_n+\delta_n} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t.$$

Comme

$$\int_0^{\theta} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t = \int_{\theta+u\varphi_n+\delta_n}^{\tau} \lambda_\theta(t)\, \ln\left(\frac{\lambda_{\theta_u}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}t = 0,$$

on a

$$I = I'_1 + I'_2 + I'_3.$$

Pour I'_1, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{t-\theta}{\delta_n}\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_{\theta}^{\theta+\delta_n} \left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}\,(t-\theta)\right) \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}\,(t-\theta)}\right) \mathrm{d}t \\ &= \delta_n \int_0^1 (\lambda_0 + rx)\, \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big)\, \mathrm{d}x \\ &= C_1 \delta_n. \end{aligned}$$

Pour I'_2, on trouve

$$\begin{aligned} I'_2 &= \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n} (\lambda_0 + r)\, \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big)\, \mathrm{d}t \\ &= (u\varphi_n - \delta_n)\, (\lambda_0 + r)\, \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big) \\ &= (\lambda_0 + r)\, \ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r}\Big) u\varphi_n + C_2 \delta_n. \end{aligned}$$

Pour I'_3, en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{t-\theta-u\varphi_n}{\delta_n}\,,$$

on a

$$\begin{aligned} I_3' &= \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+u\varphi_n+\delta_n} (\lambda_0+r)\,\ln\!\left(\frac{\lambda_0+\frac{r}{\delta_n}\,(t-\theta-u\varphi_n)}{\lambda_0+r}\right)\mathrm{d}t \\ &= \delta_n \int_0^1 (\lambda_0+r)\,\ln\!\left(\frac{\lambda_0+rx}{\lambda_0+r}\right)\mathrm{d}x \\ &= C_3\delta_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$I = I_1' + I_2' + I_3' = (\lambda_0+r)\,\ln\!\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)u\varphi_n + C\delta_n,$$

où $C = C_1 + C_2 + C_3$ est une constante.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u) &= nI - nJ \\ &= (\lambda_0+r)\,\ln\!\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)un\varphi_n + Cn\delta_n + run\varphi_n \\ &= \left[r + (\lambda_0+r)\,\ln\!\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)\right]un\varphi_n + Cn\delta_n \\ &= \left[r + (\lambda_0+r)\,\ln\!\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)\right]un\varphi_n + o(n\varphi_n), \end{aligned}$$

et donc, pour que $\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u)$ converge vers une limite finie non nulle, il faut prendre

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\,.$$

Or ce φ_n doit satisfaire (1.8), ce qui veut dire qu'on doit avoir

$$\frac{1}{n\delta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ou encore

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Dans ce cas, en prenant

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\,,$$

on a bien

$$\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u\left[(\lambda_0+r)\,\ln\!\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right) + r\right] < 0$$

pour tout $u > 0$.

Notons que dans le cas $u < 0$ on obtient la même condition, mais une limite légèrement différente :

$$\mathbf{E}_\theta \ln Z_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -u\left[\lambda_0 \ln\Big(\frac{\lambda_0 + r}{\lambda_0}\Big) - r\right] < 0.$$

En résumé, nous avons montré que le comportement asymptotique de notre modèle dépend de la vitesse de convergence de δ_n vers zéro. Plus précisément, il existe trois régimes différents :

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \tag{1.9}$$

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{1.10}$$

et

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c > 0. \tag{1.11}$$

Dans ce chapitre, nous nous limitons à l'étude de l'EMV et des EB dans le cas (1.9), que nous appelons *cas lent*, et à l'étude des EB dans le cas (1.10), que nous appelons *cas rapide*.

L'étude de l'EMV dans le cas rapide est plus compliquée, puisque, comme nous l'avons déjà mentionné, dans ce cas la convergence du rapport de vraisemblance normalisé ne peut avoir lieu ni sous la topologie uniforme, ni sous le topologie usuelle de Skorokhod. Donc, l'EMV dans le cas rapide sera traité dans le chapitre 2 en adaptant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance pour utiliser une autre topologie (plus faible que la topologie usuelle de Skorokhod). Quant au cas (1.11), il sera considéré dans des travaux futurs.

1.3 Étude de l'EMV et des EB dans le cas lent

Dans cette section, nous considérons le cas lent et montrons que dans ce cas notre modèle poissonnien de rupture lisse est localement asymptotiquement normal (bien qu'avec une vitesse inhabituelle $\sqrt{\delta_n/n}$), et que l'estimateur du maximum de vraisemblance et les estimateurs bayésiens sont consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces. Nous montrons également la convergence des moments polynomiaux de tout ordre de ces estimateurs.

1.3.1 Résultats principaux

Afin d'étudier le comportement de l'EMV et des EB de θ dans le cas lent, nous considérons la vitesse de normalisation de la vraisemblance

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{\delta_n}{n}}$$

et nous notons

$$F = F(\theta) = r \ln\Big(\frac{\psi(\theta)+r}{\psi(\theta)}\Big).$$

Rappelons également le processus aléatoire Z_F° défini par (1.4) et notons que

$$\operatorname*{argsup}_{u\in\mathbb{R}} Z_F^\circ(u) = \frac{\int_{u\in\mathbb{R}} u Z_F^\circ(u)\,\mathrm{d}u}{\int_{u\in\mathbb{R}} Z_F^\circ(u)\,\mathrm{d}u} = \frac{\xi_F}{F} \sim \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{F}\Big).$$

On peut remarquer ici que φ_n tend vers zéro plus rapidement que $1/\sqrt{n}$ (la vitesse classique du cas régulier) et, compte tenu de (1.9), plus lentement que $1/n$ (la vitesse du cas de rupture).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant donnant une borne inférieure de Hàjek-Le Cam sur les erreurs moyennes quadratiques de tous les estimateurs.

Théorème 1.1. *Supposons que $n\delta_n \to +\infty$. Alors, pour tout $\theta_0 \in \Theta$, on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \varliminf_{n\to+\infty} \inf_{\bar\theta_n} \sup_{|\theta-\theta_0|<\epsilon} \varphi_n^{-2}\, \mathbf{E}_\theta\big(\bar\theta_n - \theta\big)^2 \geq \frac{1}{F(\theta_0)}\,,$$

où le inf *est pris sur tous les estimateurs $\bar\theta_n$ du paramètre θ.*

Ce théorème est une conséquence directe du fait que notre modèle est LAN (bien qu'avec une vitesse inhabituelle $\varphi_n = \sqrt{\delta_n/n}$). Plus précisément, on a le lemme suivant, qui sera démontré plus loin en appliquant le théorème 2.1 de [68], dont nous vérifierons les conditions.

Lemme 1.2. *Supposons que $n\delta_n \to +\infty$. Alors, le rapport de vraisemblance normalisé (défini par $Z_n(u) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\theta+u\varphi_n}(X^{(n)})}{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta}$, $u \in \mathbb{U}_n$, en utilisant la vitesse $\varphi_n = \sqrt{\delta_n/n}$) admet la représentation*

$$Z_n(u) = \exp\Big\{u\Delta_n - \frac{u^2}{2}\,F + \varepsilon_n(\theta,u)\Big\},$$

où $\Delta_n \Longrightarrow \xi_F$ est donné par

$$\Delta_n(\theta) = -\frac{r}{\sqrt{n\delta_n}} \sum_{j=1}^{n} \int_\theta^{\theta+\delta_n} \frac{1}{\psi(\theta) + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\; \mathrm{d}X_j(t) + r\sqrt{n\delta_n},$$

et $\varepsilon_n(\theta,u)$ converge en probabilité vers zéro.

Le théorème 1.1 nous permet d'introduire, comme on le fait d'habitude dans les modèles LAN, la définition suivante de l'efficacité de Hàjek-Le Cam.

Définition 1.3. *Supposons que $n\delta_n \to +\infty$. On dit qu'un estimateur θ_n^* du paramètre θ est asymptotiquement efficace, si on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\to+\infty} \sup_{|\theta-\theta_0|<\epsilon} \varphi_n^{-2}\, \mathbf{E}_\theta\big(\theta_n^* - \theta\big)^2 = \frac{1}{F(\theta_0)}$$

pour tout $\theta_0 \in \Theta$.

Enfin, les propriétés asymptotiques de l'EMV et des EB sont données par le théorème suivant.

Théorème 1.4. *Supposons que* $n\delta_n \to +\infty$. *Alors, l'EMV* $\hat{\theta}_n$ *et l'EB* $\tilde{\theta}_n$ *(pour toute densité* a priori *continue strictement positive* q*) possèdent, uniformément par rapport à* $\theta \in \mathbb{K}$ *pour tout compact* $\mathbb{K} \subset \Theta$, *les propriétés suivantes :*

- $\hat{\theta}_n$ *et* $\tilde{\theta}_n$ *sont consistants ;*
- $\hat{\theta}_n$ *et* $\tilde{\theta}_n$ *sont asymptotiquement normaux avec la vitesse* $\varphi_n = \sqrt{\delta_n/n}$ *et la variance limite* $1/F$, *c'est-à-dire*

$$\varphi_n^{-1}\big(\hat{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \xi_{1/F} \quad et \quad \varphi_n^{-1}\big(\tilde{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \xi_{1/F} \; ;$$

- *nous avons la convergence des moments polynomiaux de tout ordre, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n^{-p}\, \mathbf{E}_\theta \big|\hat{\theta}_n - \theta\big|^p = \mathbf{E}|\xi_{1/F}|^p \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n^{-p}\, \mathbf{E}_\theta \big|\tilde{\theta}_n - \theta\big|^p = \mathbf{E}|\xi_{1/F}|^p$$

  pour tout $p > 0$ *;*

- $\hat{\theta}_n$ *et* $\tilde{\theta}_n$ *sont asymptotiquement efficaces.*

Notons que la propriété LAN implique, en particulier, la convergence des lois finidimensionnelles du processus de rapport de vraisemblance normalisé Z_n vers celles du processus Z_F°. Donc, afin de montrer le théorème 1.4, il suffira de prouver deux lemmes (qui seront énoncés et prouvés ci-dessous) et d'appliquer les théorèmes 1.10.1 et 1.10.2 de [57].

1.3.2 Preuves

Afin de simplifier l'exposition et de rendre les idées des preuves plus compréhensibles, nous les présentons dans le cas particulier $\psi \equiv \lambda_0$. Notons que comme d'habitude dans les problèmes singuliers toutes les informations proviennent du voisinage de la singularité, ce n'est pas vraiment une perte de généralité. De plus, les preuves présentées peuvent facilement être étendues au cas général (quelques détails seront donnés lorsque nécessaire).

Comme nous l'avons déjà expliqué plus haut, le lemme 1.2 sera démontré en appliquant le théorème 2.1 de [68]. Il faut donc vérifier les conditions de ce théorème.

Pour cela, rappelons tout d'abord que notre modèle d'observation est équivalent à celui où l'on observe une seule réalisation sur l'intervalle $[0, \tau]$ d'un processus de Poisson $Y^{(n)} = \big(Y^{(n)}(t),\ 0 \le t \le \tau\big)$ de fonction d'intensité $\Lambda_\theta^{(n)} = n\,\lambda_\theta^{(n)}$. Le processus $Y^{(n)}$ peut être défini, par exemple, par $Y^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n X_j(t)$.

Posons également

$$S_n(\theta_1, \theta_2, t) = \frac{\Lambda_{\theta_1}^{(n)}(t)}{\Lambda_{\theta_2}^{(n)}(t)} = \frac{\lambda_{\theta_1}^{(n)}(t)}{\lambda_{\theta_2}^{(n)}(t)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0, \tau]$ et $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

Les conditions du théorème 2.1 de [68] sont maintenant les suivantes.

$\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les mesures d'intensité correspondant aux fonctions d'intensité $\Lambda_\theta^{(n)}$, $\theta \in \Theta$, (*i.e.*, les ayant pour dérivées de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue) sont équivalentes.

$\mathcal{B}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction q_n sur $\Theta \times [0, \tau]$ telle que

$$Q_n(\theta) = \int_0^\tau q_n(\theta, t)^2 \Lambda_\theta^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t$$

est strictement positive pour tout $\theta \in \Theta$ et, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\int_0^\tau \left| Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta, t) \right|^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta,t) \right| > \epsilon \right\}} \Lambda_\theta^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

$\mathcal{C}$. On note $\theta_u = \theta + u\, Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta)$ et $\mathbb{U}'_n = \{u : \theta_u \in \Theta\}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $u \in \mathbb{U}'_n$ pour n suffisamment grand, ainsi que

$$\int_0^\tau \left[\ln S_n(\theta_u, \theta, t) - u\, Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta, t) \right]^2 \Lambda_\theta^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{1.12}$$

et

$$\int_0^\tau \left[S_n(\theta_u, \theta, t) - 1 - \ln S_n(\theta_u, \theta, t) - \frac{1}{2} \Big(u\, Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta, t) \Big)^2 \right] \Lambda_\theta^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{1.13}$$

Puisque les fonctions d'intensité $\Lambda_\theta^{(n)}$, $\theta \in \Theta$, sont strictement positives, la condition $\mathcal{A}$ est trivialement vérifiée.

Maintenant, afin de montrer les conditions $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, nous posons

$$q_n(\theta, t) = \frac{-\frac{r}{\delta_n}}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t - \theta)} \mathbb{1}_{[\theta, \theta + \delta_n]}(t),$$

et donc

$$Q_n(\theta) = n \int_\theta^{\theta + \delta_n} \frac{\left(-\frac{r}{\delta_n}\right)^2}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t - \theta)}\, \mathrm{d}t = r\, \frac{n}{\delta_n} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + r} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = r \ln\Big(\frac{\lambda_0 + r}{\lambda_0} \Big) \frac{n}{\delta_n} = F \varphi_n^{-2},$$

où nous avons utilisé le changement de variable

$$x = \lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t - \theta).$$

Par conséquent, nous avons

$$Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{r \ln\left(\frac{\lambda_0 + r}{\lambda_0}\right)}} \sqrt{\frac{\delta_n}{n}} = \frac{\varphi_n}{\sqrt{F}} = \gamma \varphi_n,$$

où nous avons posé

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{F}}\,.$$

Preuve de la condition $\mathcal{B}$. Soit $\theta \in \Theta$ et $\epsilon > 0$. En notant

$$F_n = \int_0^\tau \left| Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta, t) \right|^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta,t) \right| > \epsilon \right\}} \Lambda_\theta^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t,$$

nous avons besoin de montrer que

$$F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{(r\gamma)^2}{\delta_n} \int_\theta^{\theta+\delta_n} \frac{1}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)} \mathbb{1}_{\left\{ \left| - \frac{1}{\sqrt{n\delta_n}} \frac{r\gamma}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)} \right| > \epsilon \right\}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\ln\left(\frac{\lambda_0+r}{\lambda_0}\right)} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+r} \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\left\{ \frac{|r|\gamma}{\epsilon\sqrt{n\delta_n}} > x \right\}} \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

où nous avons encore utilisé le changement de variable

$$x = \lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta).$$

Comme

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

on a

$$F_n = 0$$

pour n suffisamment grand, et donc la condition $\mathcal{B}$ est vérifiée. □

Preuve de la condition $\mathcal{C}$. Notons tout d'abord que $\mathbb{U}'_n =]\varphi_n^{-1}\gamma^{-1}(\alpha-\theta), \varphi_n^{-1}\gamma^{-1}(\beta-\theta)[$, et comme $\varphi_n \searrow 0$, on a $\mathbb{U}'_n \uparrow \mathbb{R}$. Donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $u \in \mathbb{U}'_n$ pour n suffisamment grand.

Dans la suite, nous considérons seulement le cas où $u > 0$ et $r > 0$ (les autres cas peuvent être traités de manière similaire).

Dans le but de faciliter la lecture de la preuve, nous présentons dans la figure 5 les fonctions λ_θ et λ_{θ_u}, où $\theta_u = \theta + u\, Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) = \theta + \gamma u \varphi_n$, avec $u, r > 0$ et $n \gg 1$. Notons que puisque nous sommes dans le cas lent, pour tout $u > 0$, nous avons $\gamma u \varphi_n < \delta_n$ pour n suffisamment grand.

Afin de montrer (1.12), on note

$$G_n = \int_0^\tau \left[\ln S_n(\theta_u, \theta, t) - u\, Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta, t) \right]^2 \Lambda_\theta^{(n)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

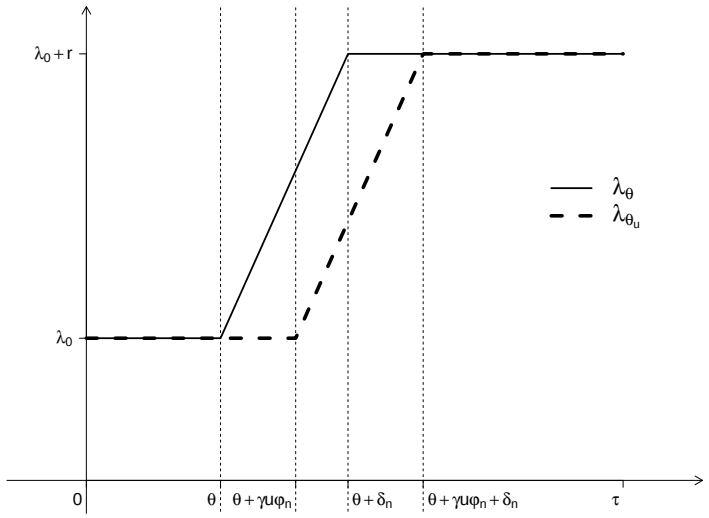

FIGURE 5 – λ_θ et λ_{θ_u} avec $u, r > 0$ et $n \gg 1$ (cas lent)

Alors,

$$\begin{aligned} G_n &= n \int_\theta^{\theta+\gamma u\varphi_n} \left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\right)\left[\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right) + \frac{\varphi_n}{\delta_n}\,\frac{\gamma r u}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right]^2 \mathrm{d}t \\ &\quad + n \int_{\theta+\gamma u\varphi_n}^{\theta+\delta_n} \left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\right)\left[\ln\left(\frac{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta-\gamma u\varphi_n)}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right) + \frac{\varphi_n}{\delta_n}\,\frac{\gamma r u}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right]^2 \mathrm{d}t \\ &\quad + n \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+\delta_n+\gamma u\varphi_n} (\lambda_0 + r)\,\ln^2\left(\frac{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta-\gamma u\varphi_n)}{\lambda_0 + r}\right) \mathrm{d}t \\ &= B_1 + B_2 + B_3 \end{aligned}$$

avec des notations évidentes, et il suffit donc de montrer que B_1, B_2 et B_3 convergent vers zéro.

Vérifions, par exemple, que

$$B_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En utilisant le changement de variable

$$x = \frac{t-\theta}{\gamma u\varphi_n},$$

nous pouvons écrire

$$B_1 = \gamma u n \varphi_n \int_0^1 \left(\lambda_0 + \gamma r u\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x\right)\left[\ln\left(1 + \frac{\gamma r u}{\lambda_0}\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x\right) - \frac{\varphi_n}{\delta_n}\,\frac{\gamma r u}{\lambda_0 + \gamma r u\,\frac{\varphi_n}{\delta_n}\,x}\right]^2 \mathrm{d}x.$$

Puisque, pour $0 \leq x \leq 1$, on a

$$\lambda_0 + \gamma r u \, \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, x \leq \lambda_0 + r$$

et

$$\begin{aligned}
\left[\ln\left(1 + \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \, \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, x\right) - \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, \frac{\gamma r u}{\lambda_0 + \gamma r u \, \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, x}\right]^2 &\leq \ln^2\left(1 + \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \, \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, x\right) + \left[\frac{\varphi_n}{\delta_n} \, \frac{\gamma r u}{\lambda_0 + \gamma r u \, \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, x}\right]^2 \\
&\leq \left[\frac{\gamma r u}{\lambda_0} \, \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, x\right]^2 + \left[\frac{\varphi_n}{\delta_n} \, \frac{\gamma r u}{\lambda_0 + \gamma r u \, \frac{\varphi_n}{\delta_n} \, x}\right]^2, \\
&\leq 2 \, \frac{(\gamma r u)^2}{\lambda_0^2} \, \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2},
\end{aligned}$$

on obtient

$$B_1 \leq 2 \, \frac{(\lambda_0 + r)(\gamma u)^3 r^2}{\lambda_0^2} \, \frac{n \varphi_n^3}{\delta_n^2}.$$

Par conséquent, comme

$$\frac{n \varphi_n^3}{\delta_n^2} = \frac{1}{\sqrt{n \delta_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

on a bien

$$B_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par un raisonnement similaire, il n'est pas difficile de vérifier que B_2 et B_3 convergent vers zéro, et on obtient donc (1.12).

Maintenant, afin de prouver (1.13), on note

$$H_n = \int_0^\tau h_n(t) \, \mathrm{d}t,$$

où

$$h_n(t) = \left[S_n(\theta_u, \theta, t) - 1 - \ln S_n(\theta_u, \theta, t) - \frac{1}{2}\Big(u \, Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) q_n(\theta, t)\Big)^2\right] \Lambda_\theta^{(n)}(t).$$

On a

$$\begin{aligned}
|H_n| &\leq \int_\theta^{\theta + \gamma u \varphi_n} \big|h_n(t)\big| \, \mathrm{d}t + \int_{\theta + \gamma u \varphi_n}^{\theta + \delta_n} \big|h_n(t)\big| \, \mathrm{d}t + \int_{\theta + \delta_n}^{\theta + \gamma u \varphi_n + \delta_n} \big|h_n(t)\big| \, \mathrm{d}t \\
&= D_1 + D_2 + D_3
\end{aligned}$$

avec des notations évidentes, et il suffit donc de montrer que D_1, D_2 et D_3 convergent vers zéro.

Vérifions, par exemple, que

$$D_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

En utilisant le changement de variable

$$x = \frac{t-\theta}{\gamma u \varphi_n},$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
D_1 &= n \int_\theta^{\theta+\gamma u \varphi_n} \left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\right) \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)} - 1 - \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(\gamma r u)^2}{2} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} \frac{1}{\left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\right)^2} \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \gamma u n \varphi_n \int_0^1 (\lambda_0 + r) \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x} - 1 + \ln\left(1 + \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(\gamma r u)^2}{2} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} \frac{1}{\left(\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right)^2} \right| \mathrm{d}x \\
&= \gamma u n \varphi_n \int_0^1 (\lambda_0 + r) \left| \ln\left(1 + \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right) - \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} \frac{x}{\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(\gamma r u)^2}{2} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} \frac{1}{\left(\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right)^2} \right| \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Puisque, pour $0 \leq x \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \ln\left(1 + \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right) - \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} \frac{x}{\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x} - \frac{(\gamma r u)^2}{2} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} \frac{1}{\left(\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right)^2} \right| \\
&\quad \leq \left| \ln\left(1 + \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right) - \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \frac{\varphi_n}{\delta_n} x \right| + \left| \frac{\gamma r u}{\lambda_0} \frac{\varphi_n}{\delta_n} x \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x}\right) \right| \\
&\qquad + \frac{(\gamma r u)^2}{2} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} \frac{1}{\left(\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right)^2} \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma r u}{\lambda_0} \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right)^2 + \frac{(\gamma r u)^2}{\lambda_0} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} \frac{x^2}{\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x} + \frac{(\gamma r u)^2}{2} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2} \frac{1}{\left(\lambda_0 + \gamma r u \frac{\varphi_n}{\delta_n} x\right)^2} \\
&\quad \leq 2 \frac{(\gamma r u)^2}{\lambda_0^2} \frac{\varphi_n^2}{\delta_n^2},
\end{aligned}$$

on obtient

$$D_1 \leq 2 \frac{(\lambda_0 + r)(\gamma u)^3 r^2}{\lambda_0^2} \frac{n \varphi_n^3}{\delta_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par un raisonnement similaire, il n'est pas difficile de vérifier que D_2 et D_3 convergent vers zéro, et on obtient donc (1.13). □

Maintenant, nous pouvons appliquer le théorème 2.1 de [68] et conclure que la famille $\{\mathbf{P}_\theta^{(n)},\ \theta \in \Theta\}$ est LAN avec la vitesse

$$\varphi'_n = Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta) = \gamma\varphi_n.$$

Plus précisément, pour tout $u \in \mathbb{U}'_n$, on a

$$Z'_n(u) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\theta+u\varphi'_n}\big(Y^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta} = \exp\Big\{u\Delta'_n(\theta) - \frac{u^2}{2} + \varepsilon'_n(\theta,u)\Big\},$$

où $\Delta'_n \Longrightarrow \xi_1$ est donné par

$$\begin{aligned}
\Delta'_n(\theta) &= Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta)\int_0^\tau q_n(\theta,t)\left[\mathrm{d}Y^{(n)}(t) - \Lambda_\theta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \gamma\sqrt{\frac{\delta_n}{n}}\int_\theta^{\theta+\delta_n} \frac{-\frac{r}{\delta_n}}{\lambda_\theta^{(n)}(t)}\left[\mathrm{d}Y^{(n)}(t) - n\lambda_\theta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= -\frac{r\gamma}{\sqrt{n\delta_n}}\int_\theta^{\theta+\delta_n} \frac{1}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\ \mathrm{d}Y^{(n)}(t) + r\gamma\sqrt{n\delta_n},
\end{aligned}$$

et $\varepsilon'_n(\theta,u)$ converge en probabilité vers zéro.

Il reste a noter que nous pouvons clairement reformuler la propriété LAN de manière équivalente en utilisant la vitesse

$$\varphi_n = \frac{Q_n^{-\frac{1}{2}}(\theta)}{\gamma} = \sqrt{\frac{\delta_n}{n}}$$

et les observations $X^{(n)}$. Dans ce cas, pour tout $u \in \mathbb{U}_n$, on a

$$Z_n(u) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\theta+u\varphi_n}\big(X^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta} = \exp\Big\{u\Delta_n(\theta) - \frac{u^2}{2}F + \varepsilon_n(\theta,u)\Big\},$$

où $\Delta_n \Longrightarrow \xi_F$ est donné par

$$\Delta_n(\theta) = \frac{\Delta'_n(\theta)}{\gamma} = -\frac{r}{\sqrt{n\delta_n}}\sum_{j=1}^n \int_\theta^{\theta+\delta_n} \frac{1}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\ \mathrm{d}X_j(t) + r\sqrt{n\delta_n},$$

et $\varepsilon_n(\theta,u) = \varepsilon'_n\big(\theta, \frac{u}{\gamma}\big)$ converge en probabilité vers zéro.

Pour finir cette partie, notons qu'il n'est pas difficile d'adapter les preuves des conditions $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ au cas où ψ est une fonction continue strictement positive (pas nécessairement constante) sur $[0,\tau]$. Dans ce cas, en prenant

$$q_n(\theta,t) = \frac{-\frac{r}{\delta_n}}{\psi(\theta) + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\,\mathbb{1}_{[\theta,\theta+\delta_n]}(t),$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
Q_n(\theta) &= \int_0^\tau q_n^2(\theta,t)\Lambda_\theta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{nr^2}{\delta_n^2}\int_\theta^{\theta+\delta_n} \frac{\psi(t)+\frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}{\Big(\psi(\theta)+\frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{nr}{\delta_n}\int_0^r \frac{\psi\big(\theta+\frac{\delta_n}{r}x\big)+x}{(\psi(\theta)+x)^2}\,\mathrm{d}x = F\varphi_n^{-2} + r\varphi_n^{-2}\int_0^r \frac{\psi\big(\theta+\frac{\delta_n}{r}x\big)-\psi(\theta)}{(\psi(\theta)+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= F\varphi_n^{-2}\big(1+o(1)\big).
\end{aligned}
$$

Notons aussi que puisque la fonction ψ est continue et strictement positive sur $[0,\tau]$, elle admet un minimum $m>0$ et un maximum $M>0$, qui peuvent remplacer λ_0 dans les différents majorations utilisées dans la preuves de la condition $\mathcal{C}$. Pour le cas $r<0$, il est également important de rappeler que nous avons supposé que $r>-m$, et donc $M+r>m+r>0$.

Alors, toutes les preuves peuvent être facilement adaptées, et nous obtenons ainsi le lemme 1.2 et, par conséquent, le théorème 1.1.

Passons maintenant à la preuve du théorème 1.4. Comme il a déjà été noté ci-dessus, ce théorème peut être prouvé en appliquant les théorèmes 1.10.1 et 1.10.2 de [57]. Il suffit donc de vérifier les conditions de ces théorèmes. Puisque la convergence (uniforme par rapport à $\theta\in\mathbb{K}$ pour tout compact $\mathbb{K}\subset\Theta$) des lois fini-dimensionnelles du processus de rapport de vraisemblance normalisé Z_n vers celles du processus Z_F° découle de la propriété LAN déjà établie, il reste à montrer les deux lemmes suivants.

Lemme 1.5. *Supposons que $n\delta_n\to+\infty$. Alors, il existe une constante $C>0$ telle que pour n suffisamment grand, on a*

$$
\mathbf{E}_\theta\big|Z_n^{1/2}(u)-Z_n^{1/2}(v)\big|^2 \le C|u-v|^2 \tag{1.14}
$$

pour tout $u,v\in\mathbb{U}_n$ et $\theta\in\Theta$.

Lemme 1.6. *Supposons que $n\delta_n\to+\infty$. Alors, il existe une constante $\kappa>0$ telle que pour n suffisamment grand, on a*

$$
\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \le \exp\big\{-\kappa\min\{|u|,u^2\}\big\} \tag{1.15}
$$

pour tout $u\in\mathbb{U}_n$ et $\theta\in\Theta$.

Preuve du lemme 1.5. Notons tout d'abord que comme pour $|u-v|\ge 1$ on a

$$
\mathbf{E}_\theta\big|Z_n^{1/2}(u)-Z_n^{1/2}(v)\big|^2 \le 4 \le 4|u-v|^2,
$$

il suffit de considérer le cas $|u-v|\le 1$. Aussi, sans perte de généralité, on peut supposer que $u<v$.

Dans la suite, nous considérons seulement le cas $r>0$, le cas $r<0$ se traitant de manière similaire.

D'après le lemme 1.5 de [68], on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta\big|Z_n^{1/2}(u)-Z_n^{1/2}(v)\big|^2 &\le n\int_0^\tau\Big(\sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}-\sqrt{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}\Big)^2\,\mathrm{d}t\\ &= n\int_0^\tau\frac{\big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)-\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)\big)^2}{\big(\sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}+\sqrt{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}\big)^2}\,\mathrm{d}t\\ &\le \frac{n}{4\lambda_0}\int_0^\tau\big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)-\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)\big)^2\,\mathrm{d}t=\frac{n}{4\lambda_0}\int_0^\tau f_n(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

où nous avons posé $f_n(t)=\big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)-\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)\big)^2$.

Comme $\delta_n/\varphi_n=\sqrt{n\delta_n}\to+\infty$, pour n suffisamment grand (tel que $n\delta_n\ge 1$) on a $(v-u)\varphi_n\le\varphi_n\le\delta_n$, et donc $v\varphi_n\le u\varphi_n+\delta_n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^\tau f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+v\varphi_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\theta+v\varphi_n}^{\theta+u\varphi_n+\delta_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\theta+u\varphi_n+\delta_n}^{\theta+v\varphi_n+\delta_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= E_1+E_2+E_3\end{aligned}$$

avec des notations évidentes.

Pour E_1, on a

$$E_1=\int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+v\varphi_n}\Big(\frac{r}{\delta_n}(t-\theta-u\varphi_n)\Big)^2\,\mathrm{d}t=\frac{r^2}{\delta_n^2}\,\frac{(v\varphi_n-u\varphi_n)^3}{3}=\frac{r^2}{3}\,\frac{\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,(v-u)^3,$$

et de la même manière, on trouve

$$E_2=r^2\,\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\,(v-u)^2-r^2\,\frac{\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,(v-u)^3\qquad\text{et}\qquad E_3=\frac{r^2}{3}\,\frac{\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,(v-u)^3.$$

Ainsi, puisque $n\varphi_n^2/\delta_n=1$, on obtient

$$\mathbf{E}_\theta\big|Z_n^{1/2}(u)-Z_n^{1/2}(v)\big|^2\le\frac{r^2}{4\lambda_0}\,\frac{n\varphi_n^2}{\delta_n}\,(v-u)^2-\frac{r^2}{12\lambda_0}\,\frac{n\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,(v-u)^3\le\frac{r^2}{4\lambda_0}\,(v-u)^2,$$

et donc l'inégalité (1.14) est vérifiée avec $C=\max\big\{4,\frac{r^2}{4\lambda_0}\big\}$. □

Preuve du lemme 1.6. Nous considérons seulement le cas où $u>0$ et $r>0$ (les autres cas peuvent être traités de manière similaire).

D'après le lemme 1.5 de [68], on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) &= \exp\Big\{-\frac{n}{2}\int_0^\tau\Big(\sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}-\sqrt{\lambda_\theta(t)}\Big)^2\,\mathrm{d}t\Big\}\\ &= \exp\Big\{-\frac{n}{2}\int_0^\tau\frac{\big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)-\lambda_\theta(t)\big)^2}{\big(\sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}+\sqrt{\lambda_\theta(t)}\big)^2}\,\mathrm{d}t\Big\}\end{aligned}$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{n}{8(\lambda_0+r)}\int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)-\lambda_\theta(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\right\}$$
$$= \exp\left\{-\frac{n}{8(\lambda_0+r)}\int_0^\tau g_n(t)\,\mathrm{d}t\right\},$$

où nous avons posé $g_n(t) = \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)-\lambda_\theta(t)\big)^2$.

Maintenant, nous étudions séparément deux cas : $u \leq \delta_n/\varphi_n$ et $u \geq \delta_n/\varphi_n$. Dans le premier cas, la situation est celle de la figure 3, et on peut donc écrire

$$\int_0^\tau g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\theta^{\theta+u\varphi_n} g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+\delta_n} g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n+\delta_n} g_n(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= J_1 + J_2 + J_2$$

avec des notations évidentes.

Pour J_1, on a

$$J_1 = \int_\theta^{\theta+u\varphi_n}\Big(\frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\Big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{r^2}{3}\,\frac{\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,u^3,$$

et de la même manière, on trouve

$$J_2 = r^2\,\frac{\varphi_n^2}{\delta_n}\,u^2 - r^2\,\frac{\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,u^3 \qquad \text{et} \qquad J_3 = \frac{r^2}{3}\,\frac{\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,u^3.$$

Ainsi, puisque $u \leq \delta_n/\varphi_n$, on obtient

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \leq \exp\left\{-\frac{r^2}{8(\lambda_0+r)}\,\frac{n\varphi_n^2}{\delta_n}\,u^2 + \frac{r^2}{24(\lambda_0+r)}\,\frac{n\varphi_n^3}{\delta_n^2}\,u^3\right\}$$
$$\leq \exp\left\{-\frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}\,\frac{n\varphi_n^2}{\delta_n}\,u^2\right\} \leq \exp\left\{-\frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}\,\frac{n\varphi_n^2}{\delta_n}\,\min\{u,u^2\}\right\}, \quad (1.16)$$

et comme $n\varphi_n^2/\delta_n = 1$, on conclut que

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \leq \exp\left\{-\frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}\,\min\{u,u^2\}\right\}.$$

Dans le deuxième cas ($u \geq \delta_n/\varphi_n$), la situation est celle de la figure 4, et on peut donc écrire

$$\int_0^\tau g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\theta^{\theta+\delta_n} g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n} g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+u\varphi_n+\delta_n} g_n(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= J_1' + J_2' + J_2'$$

avec des notations évidentes.

Pour J_1', on a

$$J_1' = \int_\theta^{\theta+\delta_n}\Big(\frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\Big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{r^2}{3}\,\delta_n,$$

et de la même manière, on trouve

$$J_2' = r^2 u\varphi_n - r^2\delta_n \qquad \text{et} \qquad J_3' = \frac{r^2}{3}\,\delta_n.$$

Ainsi, puisque $\delta_n \le u\varphi_n$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) &\le \exp\left\{-\frac{r^2}{8(\lambda_0+r)}\,n\varphi_n u + \frac{r^2}{24(\lambda_0+r)}\,n\delta_n\right\}\\ &\le \exp\left\{-\frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}\,n\varphi_n u\right\} \le \exp\left\{-\frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}\,n\varphi_n \min\{u,u^2\}\right\}, \qquad (1.17)\end{aligned}$$

et comme $n\varphi_n = \sqrt{n\delta_n} \to +\infty$, pour n suffisamment grand (tel que $n\delta_n \ge 1$) on conclut de nouveau que

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \le \exp\left\{-\frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}\,\min\{u,u^2\}\right\}.$$

Ainsi, l'inégalité (1.15) est vérifiée avec $\kappa = \frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}$. □

Notons que nous pouvons facilement adapter les preuves des lemmes 1.5 et 1.6 au cas où ψ est une fonction continue strictement positive (pas nécessairement constante) sur $[0,\tau]$, et donc le théorème 1.4 est démontré.

1.4 Étude des EB dans le cas rapide

Dans cette section, nous considérons le cas rapide et montrons que dans ce cas notre modèle poissonnien de rupture lisse est non régulier, et que les estimateurs bayésiens sont consistants, convergent à la vitesse $1/n$ vers une limite non-gaussienne (la même que dans les modèles poissonniens de rupture classique) et sont asymptotiquement efficaces. Nous montrons également la convergence des moments polynomiaux de tout ordre de ces estimateurs.

1.4.1 Résultats principaux

Afin d'étudier le comportement des estimateurs bayésiens de θ dans le cas rapide, nous considérons la vitesse de normalisation de la vraisemblance

$$\varphi_n = \frac{1}{n}$$

et nous notons

$$a = a(\theta) = \psi(\theta) \quad \text{et} \quad b = b(\theta) = \psi(\theta) + r.$$

Rappelons également le processus aléatoire $Z^\star_{a,b}$ défini par (1.5) et la variable aléatoire $\zeta_{a,b}$ définie par (1.6).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant donnant une borne inférieure de type Hàjek-Le Cam sur les erreurs moyennes quadratiques de tous les estimateurs.

Théorème 1.7. *Supposons que $n\delta_n \to 0$. Alors, pour tout $\theta_0 \in \Theta$, on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \varliminf_{n\to+\infty} \inf_{\bar\theta_n} \sup_{|\theta-\theta_0|<\epsilon} n^2\, \mathbf{E}_\theta(\bar\theta_n - \theta)^2 \geq \mathbf{E}\zeta^2_{a(\theta_0),b(\theta_0)},$$

où le inf *est pris sur tous les estimateurs $\bar\theta_n$ du paramètre θ.*

Ce théorème nous permet d'introduire la définition suivante.

Définition 1.8. *Supposons que $n\delta_n \to 0$. On dit qu'un estimateur θ^*_n du paramètre θ est asymptotiquement efficace, si on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\to+\infty} \sup_{|\theta-\theta_0|<\epsilon} n^2\, \mathbf{E}_\theta(\theta^*_n - \theta)^2 = \mathbf{E}\zeta^2_{a(\theta_0),b(\theta_0)}$$

pour tout $\theta_0 \in \Theta$.

Enfin, les propriétés asymptotiques des EB sont données par le théorème suivant.

Théorème 1.9. *Supposons que $n\delta_n \to 0$. Alors, l'EB $\tilde\theta_n$ (pour toute densité* a priori *continue strictement positive q) possède, uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$ pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$, les propriétés suivantes :*

- *$\tilde\theta_n$ est consistant ;*
- *$\tilde\theta_n$ converge à la vitesse $\varphi_n = 1/n$ et sa loi limite est celle de la variable aléatoire $\zeta_{a,b}$, c'est-à-dire*
$$n\big(\tilde\theta_n - \theta\big) \Longrightarrow \zeta_{a,b}\ ;$$
- *nous avons la convergence des moments polynomiaux de tout ordre, c'est-à-dire*
$$\lim_{n\to+\infty} n^p\, \mathbf{E}_\theta\big|\tilde\theta_n - \theta\big|^p = \mathbf{E}|\zeta_{a,b}|^p$$
pour tout $p > 0$;
- *$\tilde\theta_n$ est asymptotiquement efficace.*

Notons enfin que l'argument derrière les théorèmes 1.7 et 1.9 est la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance de Ibragimov et Khasminskii. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, dans ce cas la convergence du rapport de vraisemblance normalisé Z_n vers le rapport de vraisemblance limite $Z^\star_{a,b}$ ne peut avoir lieu ni dans l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie uniforme, ni dans l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle de Skorokhod. Néanmoins, la convergence dans un espace fonctionnel n'est utile que pour les propriétés de l'EMV ; afin d'obtenir la borne inférieure et les propriétés des EB, il suffit d'établir la convergence des lois fini-dimensionnelles (ainsi que deux lemmes supplémentaires) et d'appliquer les théorèmes 1.9.1 et 1.10.2 de [57]. Quant à l'EMV, il sera étudié dans le chapitre 2 en adaptant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance pour utiliser une autre topologie (plus faible que la topologie usuelle de Skorokhod).

1.4.2 Preuves

Comme nous venons de le dire, les théorèmes 1.7 et 1.9 peuvent être prouvés en appliquant les théorèmes 1.9.1 et 1.10.2 de [57]. Il suffit donc de vérifier les conditions de ces théorèmes, c'est-à-dire de prouver les trois lemmes suivants.

Lemme 1.10. *Supposons que $n\delta_n \to 0$. Alors, les lois fini-dimensionnelles du processus Z_n convergent, uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$ pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$, vers celles du processus $Z^\star_{a,b}$ avec $a = \psi(\theta)$ et $b = \psi(\theta) + r$.*

Lemme 1.11. *Supposons que $n\delta_n \to 0$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta \big| Z_n^{1/2}(u) - Z_n^{1/2}(v) \big|^2 \leq C|u - v| \tag{1.18}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathbb{U}_n$ et $\theta \in \Theta$.

Lemme 1.12. *Supposons que $n\delta_n \to 0$. Alors, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour n suffisamment grand, on a*

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \leq \exp\big\{-\kappa \min\{|u|, u^2\}\big\} \tag{1.19}$$

pour tout $u \in \mathbb{U}_n$ et $\theta \in \Theta$.

Comme dans le cas lent, afin de simplifier l'exposition et de rendre les idées plus compréhensibles, nous présentons les preuves de ces lemmes dans le cas particulier $\psi \equiv \lambda_0$.

Dans le but de faciliter la lecture et de mieux comprendre la différence avec le cas lent (cf. figure 5), nous présentons dans la figure 6 les fonctions λ_θ et λ_{θ_u}, où $\theta_u = \theta + u\varphi_n$, avec $u, r > 0$ et $n \gg 1$ dans le cas rapide (rappelons que dans ce cas, pour tout $u > 0$, nous avons $u\varphi_n > \delta_n$ pour n suffisamment grand).

Preuve du lemme 1.10. Nous étudions uniquement la convergence des lois bidimensionnelles (la convergence des lois d-dimensionnelles pour $d \geq 3$ peut être traitée de manière similaire). Pour cela, nous fixons $u, v \in \mathbb{R}$ quelconques et considérons la loi du vecteur aléatoire $\big(\ln Z_n(u), \ln Z_n(v)\big)$, où n est suffisamment grand pour que $u, v \in \mathbb{U}_n$. Sa fonction caractéristique est donnée, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned}
\phi_{\left(\ln Z_n(u), \ln Z_n(v)\right)}(x, y) &= \mathbf{E}_\theta \exp\big\{ix \ln Z_n(u) + iy \ln Z_n(v)\big\} \\
&= \mathbf{E}_\theta \exp\Bigg\{ix \sum_{j=1}^n \bigg[\int_0^\tau \ln\bigg(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\bigg)\, \mathrm{d}X_j(t) - \int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t) - \lambda_\theta(t)\big)\, \mathrm{d}t\bigg)\bigg] \\
&\qquad + iy \sum_{j=1}^n \bigg[\int_0^\tau \ln\bigg(\frac{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\bigg)\, \mathrm{d}X_j(t) - \int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t) - \lambda_\theta(t)\big)\, \mathrm{d}t\bigg)\bigg]\Bigg\} \\
&= \mathbf{E}_\theta \exp\Bigg\{ix \sum_{j=1}^n \bigg[\int_0^\tau \ln\bigg(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\bigg)\, \mathrm{d}X_j(t) + ru\varphi_n\bigg] \\
&\qquad + iy \sum_{j=1}^n \bigg[\int_0^\tau \ln\bigg(\frac{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\bigg)\, \mathrm{d}X_j(t) + rv\varphi_n\bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

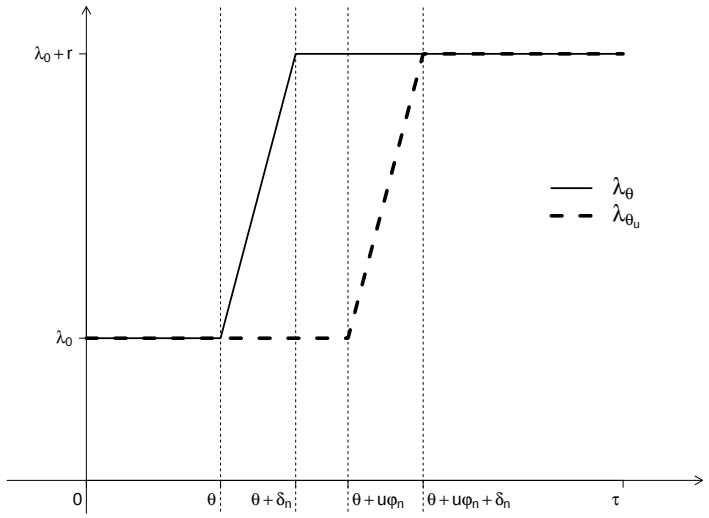

FIGURE 6 – λ_θ et λ_{θ_u} avec $u, r > 0$ et $n \gg 1$ (cas rapide)

$$
\begin{aligned}
&= \exp\{nir(ux+vy)\varphi_n\} \\
&\quad \times \mathbf{E}_\theta \exp\left\{ ix \sum_{j=1}^{n} \int_0^\tau \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}X_j(t) + iy \sum_{j=1}^{n} \int_0^\tau \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}X_j(t) \right\} \\
&= \exp\{ir(ux+vy)\} \\
&\quad \times \exp\left\{ n \int_0^\tau \left(\exp\left\{ ix \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) + iy \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \right\} - 1 \right) \lambda_\theta(t)\, \mathrm{d}t \right\} \\
&= \exp\{ir(ux+vy)\} \exp\left\{ n \int_0^\tau f_n(t)\, \mathrm{d}t \right\},
\end{aligned}
$$

où nous avons posé

$$
f_n(t) = \left(\exp\left\{ ix \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) + iy \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \right\} - 1 \right) \lambda_\theta(t).
$$

Nous considérons seulement le cas où $v > u \geq 0$ et $r > 0$ (les autres cas peuvent être traités de manière similaire). Dans ce cas, pour n suffisamment grand on a $\delta_n < u\varphi_n$ et

$u\varphi_n + \delta_n < v\varphi_n$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\tau f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\theta^{\theta+\delta_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\theta+u\varphi_n}^{\theta+u\varphi_n+\delta_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\theta+u\varphi_n+\delta_n}^{\theta+v\varphi_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\theta+v\varphi_n}^{\theta+v\varphi_n+\delta_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{5} I_j\end{aligned}$$

avec des notations évidentes.

Pour I_1, en utilisant le changement de variable

$$s = \frac{t-\theta}{\delta_n}\,,$$

on a

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\theta^{\theta+\delta_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\theta^{\theta+\delta_n} \left(\exp\left\{ix\ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) + iy\ln\left(\frac{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right)\right\} - 1\right)\lambda_\theta(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\theta^{\theta+\delta_n} \left(\exp\left\{i(x+y)\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)}\right)\right\} - 1\right)\left(\lambda_0 + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\right)\mathrm{d}t \\ &= \delta_n \int_0^1 \left(\exp\left\{i(x+y)\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + rs}\right)\right\} - 1\right)(\lambda_0 + rs)\,\mathrm{d}s = c_1\delta_n,\end{aligned}$$

où c_1 est une constante, et par un raisonnement similaire, on obtient $I_3 = c_2\delta_n$ et $I_5 = c_3\delta_n$.

Pour I_2, on a

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\theta+\delta_n}^{\theta+u\varphi_n} \left(\exp\left\{i(x+y)\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)\right\} - 1\right)(\lambda_0 + r)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\exp\left\{i(x+y)\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)\right\} - 1\right)(\lambda_0 + r)(u\varphi_n - \delta_n),\end{aligned}$$

et par un raisonnement similaire, on trouve

$$I_4 = \left(\exp\left\{iy\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)\right\} - 1\right)(\lambda_0 + r)\big((v-u)\varphi_n - \delta_n\big).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^\tau f_n(t)\,\mathrm{d}t = C\delta_n + \Bigg[(v-u)\left(\exp\left\{iy\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)\right\} - 1\right) \\ + u\left(\exp\left\{i(x+y)\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\right)\right\} - 1\right)\Bigg](\lambda_0 + r)\varphi_n,\end{aligned}$$

et donc, vu que $\varphi_n = 1/n$, on obtient

$$\exp\Big\{n\int_0^\tau f_n(t)\,\mathrm{d}t\Big\} = \exp\{Cn\delta_n\}\exp\Big\{u(\lambda_0+r)\Big(\exp\Big\{i(x+y)\ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\}$$
$$\times\exp\Big\{(v-u)(\lambda_0+r)\Big(\exp\Big\{iy\ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\}.$$

Comme

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

on conclut finalement que

$$\begin{aligned}\phi_{\left(\ln Z_n(u),\ln Z_n(v)\right)}(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} &\exp\{ir(ux+vy)\}\\ &\times\exp\Big\{u(\lambda_0+r)\Big(\exp\Big\{i(x+y)\ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\}\\ &\times\exp\Big\{(v-u)(\lambda_0+r)\Big(\exp\Big\{iy\ln\Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+r}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Maintenant, calculons (toujours pour $v>u\geq 0$) la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $\big(\ln Z^\star_{a,b}(u),\ln Z^\star_{a,b}(v)\big)$. Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\phi_{\left(\ln Z^\star_{a,b}(u),\ln Z^\star_{a,b}(v)\right)}(x,y) &= \mathbf{E}\exp\big\{ix\ln Z^\star_{a,b}(u)+iy\ln Z^\star_{a,b}(v)\big\}\\ &= \mathbf{E}\exp\left\{ix\left(\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)Y^+(u)+(b-a)u\right)+iy\left(\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)Y^+(v)+(b-a)v\right)\right\}\\ &= \exp\{i(b-a)(ux+vy)\}\,\mathbf{E}\exp\Big\{ix\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)Y^+(u)+iy\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)Y^+(v)\Big\}.\end{aligned}$$

Comme Y^+ est un processus de Poisson et $v>u\geq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\exp\Big\{ix\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)Y^+(u)+iy\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)Y^+(v)\Big\}\\ &\quad= \mathbf{E}\exp\Big\{i(x+y)\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)Y^+(u)\Big\}\;\mathbf{E}\exp\Big\{iy\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\big(Y^+(v)-Y^+(u)\big)\Big\}\\ &\quad= \exp\Big\{ub\Big(\exp\Big\{i(x+y)\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\}\exp\Big\{(v-u)b\Big(\exp\Big\{iy\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\phi_{\left(\ln Z^\star_{a,b}(u),\ln Z^\star_{a,b}(v)\right)}(x,y) = \exp\{i(b-a)(ux+vy)\}\exp\Big\{ub\Big(\exp\Big\{i(x+y)\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\}$$
$$\times\exp\Big\{(v-u)b\Big(\exp\Big\{iy\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big\}-1\Big)\Big\},$$

qui est, en prenant $a=\psi(\theta)=\lambda_0$ et $b=\psi(\theta)+r=\lambda_0+r$, identique au côté droit de (1.20). Cela montre que $\big(\ln Z_n(u),\ln Z_n(v)\big)$ converge en loi vers $\big(\ln Z^\star_{\lambda_0,\lambda_0+r}(u),\ln Z^\star_{\lambda_0,\lambda_0+r}(v)\big)$, et donc la convergence des lois bidimensionnelles de Z_n vers celle de $Z^\star_{\lambda_0,\lambda_0+r}$ est établie. □

Preuve du lemme 1.11. Nous considérons seulement le cas $r > 0$, le cas $r < 0$ se traitant de manière similaire. Aussi, sans perte de généralité, on peut supposer que $u < v$.

D'après le lemme 1.5 de [68], on a

$$\mathbf{E}_\theta \big| Z_n^{1/2}(u) - Z_n^{1/2}(v) \big|^2 \le n \int_0^\tau \Big(\sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)} - \sqrt{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)} \Big)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Comme

$$\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t) \ge \lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)$$

et

$$\sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)} - \sqrt{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)} \le \sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t) - \lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)}\,,$$

on obtient

$$\int_0^\tau \Big(\sqrt{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)} - \sqrt{\lambda_{\theta+v\varphi_n}(t)} \Big)^2 \, \mathrm{d}t \le \int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t) - \lambda_{\theta+v\varphi_n}(t) \big) \, \mathrm{d}t.$$

Par un simple calcul d'aire, on trouve

$$\int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t) - \lambda_{\theta+v\varphi_n}(t) \big) \, \mathrm{d}t = r(v-u)\varphi_n,$$

ce qui, en tenant compte de fait que $\varphi_n = 1/n$, implique l'inégalité (1.18) avec $C = r$. □

Preuve du lemme 1.12. Nous considérons seulement le cas où $u > 0$ et $r > 0$ (les autres cas peuvent être traités de manière similaire).

Comme dans la preuve du lemme 1.6, nous étudions séparément deux cas : $u \le \delta_n/\varphi_n$ et $u \ge \delta_n/\varphi_n$. Dans le premier cas, nous avons déjà montré (cf. (1.16), dont la preuve reste valable dans le cas rapide) que

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \le \exp\left\{ -\frac{r^2}{12(\lambda_0 + r)} \, \frac{n\varphi_n^2}{\delta_n} \, \min\{u, u^2\} \right\}.$$

Par conséquent, comme $\frac{n\varphi_n^2}{\delta_n} = \frac{1}{n\delta_n} \to +\infty$, pour n suffisamment grand (tel que $n\delta_n \le 1$) on obtient

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \le \exp\left\{ -\frac{r^2}{12(\lambda_0 + r)} \, \min\{u, u^2\} \right\}.$$

Dans le deuxième cas ($u\varphi_n \ge \delta_n$), nous avons déjà montré (cf. (1.17), dont la preuve reste valable dans le cas rapide) que

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \le \exp\left\{ -\frac{r^2}{12(\lambda_0 + r)} \, n\varphi_n \, \min\{u, u^2\} \right\}.$$

Par conséquent, vu que $\varphi_n = 1/n$, on obtient de nouveau

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \le \exp\left\{ -\frac{r^2}{12(\lambda_0 + r)} \, \min\{u, u^2\} \right\}.$$

Ainsi, l'inégalité (1.19) est vérifiée avec $\kappa = \frac{r^2}{12(\lambda_0+r)}$. □

Notons que nous pouvons facilement adapter les preuves des lemmes 1.10–1.12 au cas où ψ est une fonction continue strictement positive (pas nécessairement constante) sur $[0, \tau]$, et donc les théorèmes 1.7 et 1.9 sont démontrés.

Chapitre 2

Estimation de la rupture lisse et topologies de Skorokhod

Dans le chapitre précédent, nous avons commencé l'étude du problème d'estimation, dans un modèle d'observations poissonniennes, de la position de ce que nous avons appelé une rupture lisse, c'est-à-dire d'un endroit où la fonction d'intensité d'un processus de Poisson non-homogène passe rapidement d'un niveau à un autre d'une manière continue. Nous avons considéré l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et les estimateurs bayésiens (EB), que l'on étudie en appliquant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance développée par Ibragimov et Khasminskii dans [57].

Rappelons que cette méthode consiste, dans un premier temps, à montrer que le rapport de vraisemblance normalisé Z_n (vu comme un processus sur $\mathbb{R}$ à valeur dans un certain espace fonctionnel), converge faiblement vers un certain processus limite Z (dit rapport de vraisemblance limite). Pour autant que nous le sachions, jusqu'à présent cette méthode a toujours été appliquée soit en utilisant l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$ muni la topologie uniforme, soit en utilisant l'espace des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$ muni de la topologie usuelle de Skorokhod. Or, dans certaines situations (notamment, comme nous l'avons déjà vu, dans le cas rapide de notre modèle de rupture lisse), la convergence de Z_n vers Z ne peut avoir lieu sous aucune de ces deux topologies. Nous avons donc besoin d'adapter la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance pour utiliser une autre topologie (plus faible que la topologie usuelle de Skorokhod).

Rappelons également que dans son article originel [94], Skorokhod a introduit plusieurs topologies sur l'espace des fonctions càdlàg : la topologie J_1 (maintenant connue comme la topologie usuelle de Skorokhod), mais également les topologies plus faibles M_1, J_2 et M_2.

Nous commençons ce chapitre par une présentation dans la section 2.1 des différentes topologies de Skorokhod (ainsi que de la topologie uniforme) pour des fonctions définies sur un intervalle compact. Ensuite, nous verrons dans la section 2.2 comment ces topologies peuvent s'étendre aux fonctions sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$. Puis, nous montrerons dans la section 2.3 que les techniques utilisées dans la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance peuvent s'adapter à la topologie M_1. Nous développerons ensuite dans la

section 2.4 quelques outils adaptés à l'étude de la convergence sous la topologie M_1. Enfin, dans la section 2.5, nous terminerons l'étude de notre modèle poissonnien de rupture lisse en utilisant les résultats obtenus. Nous verrons également que ces résultats peuvent permettre, dans certains cas, de simplifier les preuves existant pour des modèles de rupture classiques.

2.1 Convergences des fonctions càdlàg sur un intervalle compact

Dans cette section, on présente l'espace des fonctions continues et l'espace des fonctions càdlàg sur un intervalle compact, ainsi que les différentes topologies relatives à ces espaces. Cette présentation est essentiellement basée sur l'article originel [94] de Skorokhod, mais on peut également mentionner les livres [10] de Billingsley et [99] de Whitt, ainsi que beaucoup d'autres travaux, dont, par exemple, [5, 6, 12, 80, 83]. Pour rester proche de [94], on considère des fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$, mais les résultats se généralisent directement à tout intervalle compact.

On introduit d'abord l'espace des fonctions continues muni de la topologie uniforme (induite par la norme sup).

Définition 2.1. *On note $\mathscr{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et on le munit de la topologie uniforme U, induite par la distance uniforme $d^{(U)}$, ou encore par la norme* sup $\|\cdot\|_\infty$ *:*

$$d^{(U)}(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{u\in[0,1]} |f(u)-g(u)|, \qquad f,g \in \mathscr{C}([0,1]).$$

Pour souligner la topologie utilisée, nous noterons parfois cet espace $\mathscr{C}^{(U)}([0,1])$. De manière générale, lorsqu'un espace $\mathscr{X}$ est muni d'une topologie S, nous utiliserons la notation $\mathscr{X}^{(S)}$.

Notons que l'espace $\mathscr{C}^{(U)}([0,1])$ est polonais (il est séparable et complet sous la distance $d^{(U)}$). C'est également un espace de Banach (il est complet pour la distance issue de la norme sup).

Le module de continuité associé à la topologie U est donné par

$$\omega_h^{(U)}(f) = \sup_{u,v\in[0,1]\,:\,|u-v|\le h} |f(u)-f(v)|$$

pour $f \in \mathscr{C}([0,1])$ et $h > 0$. En particulier, la convergence dans $\mathscr{C}^{(U)}([0,1])$ peut être caractérisée comme suit.

Théorème 2.2. *Soit f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et f des fonctions de $\mathscr{C}([0,1])$. Alors, f_n converge vers f dans $\mathscr{C}^{(U)}([0,1])$ si et seulement si :*

- *$f_n(u)$ converge vers $f(u)$ pour tout $u \in [0,1]$;*
- $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \omega_h^{(U)}(f_n) = 0.$

Un critère classique de convergence faible des processus à trajectoires dans $\mathscr{C}([0,1])$ est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soit Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et Y des processus stochastiques à trajectoires dans $\mathscr{C}([0,1])$. Alors, Y_n converge faiblement vers Y dans $\mathscr{C}^{(U)}([0,1])$ si et seulement si :*

- *les lois fini-dimensionnelles de Y_n convergent vers celles de Y ;*
- *pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to +\infty}} \mathbf{P}\big(\omega_h^{(U)}(Y_n) > \varepsilon\big) = 0.$$

Notons que la dernière condition (avec la convergence faible de $Y_n(0)$) garantit l'équitension de la famille des mesures de probabilité induites par les processus Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sur l'espace $\mathscr{C}^{(U)}([0,1])$, et donc (avec la convergence des lois fini-dimensionnelles) la convergence faible de Y_n.

Un espace contenant l'espace $\mathscr{C}([0,1])$ et permettant l'étude de la convergence des fonctions discontinues (qui est notamment utile pour l'étude des processus admettant des sauts comme, par exemple, les processus de Poisson) est l'espace des fonctions càdlàg.

Définition 2.4. *On note $\mathscr{D}([0,1])$ l'espace des fonctions càdlàg sur $[0,1]$ et continues en 1.*

Remarques 2.5.

1. Pour rester proche de l'article originel [94] de Skorokhod, nous utilisons ici la définition de l'espace $\mathscr{D}([0,1])$ imposant la continuité en 1 de ces éléments. Notons que Billingsley dans [10] et Whitt dans [99] n'imposent pas cette continuité dans la définition de l'espace $\mathscr{D}([0,1])$, ce qui les oblige à rajouter des hypothèses supplémentaires dans certains de leurs théorèmes.
2. Le fait de considérer des fonctions càdlàg (c'est-à-dire continues à droite et limitées à gauche) revient essentiellement à considérer les fonctions qui n'ont que des discontinuités de première espèce (c'est-à-dire limitées à gauche et à droite). La continuité à droite n'est qu'une convention commode (on aurait tout aussi bien pu supposer que les valeurs des fonctions aux points de discontinuité sont égales aux limites à gauche, aux moyennes des deux limites, etc.).

La première idée est de munir cet espace de la topologie uniforme U. Voici un exemple d'une suite de fonctions discontinues qui converge dans cette topologie.

Exemple 2.6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(u) = \big(1+\frac{1}{n}\big)\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(u)$, $u \in [0,1]$. Alors, f_n converge dans $\mathscr{D}^{(U)}([0,1])$ vers la fonction $f(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(u)$, $u \in [0,1]$. En effet,

$$d^{(U)}(f_n, f) = \sup_{u \in [0,1]} |f_n(u) - f(u)| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Notons que les discontinuités de f_n et de f dans l'exemple précédent ont lieu au même point (à savoir en $1/2$). Par ailleurs, comme le montre l'exemple suivant, si ces discontinuités

ne se produisent pas tout à fait au même endroit, la convergence ne peut pas avoir lieu dans $\mathscr{D}^{(U)}([0,1])$.

Exemple 2.7. Pour $n \geq 3$, on définit la fonction f_n par $f_n(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right]}(u)$, $u \in [0,1]$. Lorsque n augmente, la fonction f_n ressemble de plus en plus à la fonction $f(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(u)$, $u \in [0,1]$. Mais contrairement à ce que l'on pourrait attendre, f_n ne converge pas vers f dans $\mathscr{D}^{(U)}([0,1])$. En effet,

$$d^{(U)}(f_n, f) = \sup_{u\in[0,1]} |f_n(u) - f(u)| = 1.$$

En fait, pour que deux fonctions soient proches dans $\mathscr{D}^{(U)}([0,1])$, il faut que leurs « grandes » discontinuités se produisent exactement au même endroit ce qui rend la topologie U trop restrictive. Pour pallier cela, Skorokhod a introduit dans [94] quatre topologies plus faibles que la topologies uniforme.

Premièrement, pour permettre la convergence dans les cas similaires à l'exemple 2.7, on introduit la topologie J_1, dite également topologie usuelle de Skorokhod. Cette topologie peut être définie comme la topologie induite par la distance $d^{(J_1)}$ (dite parfois distance de Skorokhod) définie ci-dessous.

Définition 2.8. *La distance $d^{(J_1)}$ est définie par*

$$d^{(J_1)}(f,g) = \inf\left\{ \sup_{u\in[0,1]} \big|f(u) - g\big(\lambda(u)\big)\big| + \sup_{u\in[0,1]} |u - \lambda(u)| \right\}, \qquad f, g \in \mathscr{D}([0,1]),$$

où le inf *est pris sur toutes les bijections λ continues croissantes de $[0,1]$ dans lui même.*

Notons que Skorokhod dans [94] prend le inf sur les bijections λ continues (sans supposer la croissance), mais les deux définitions sont équivalentes. En fait, la continuité est plutôt équivalente à la monotonie, mais comme le inf ne peut pas être atteint pour une bijection λ décroissante (à cause du deuxième sup dans la définition de $d^{(J_1)}$), les deux définitions reviennent au même.

Intuitivement, deux fonctions seront proches s'il existe une petite « distorsion de temps » les rendant proches au sens de la norme sup (donc, en particulier, faisant coïncider leurs points de discontinuités).

En revenant sur l'exemple 2.7, notons que $d^{(J_1)}(f_n, f) = \frac{1}{n}$, et donc f_n converge bien vers f dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$. En effet, le inf est atteint (entre autres) sur le changement de temps linéaire par morceaux donné par $\lambda(0) = 0$, $\lambda\big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\big) = \frac{1}{2}$ et $\lambda(1) = 1$.

On remarque que $d^{(J_1)} \leq d^{(U)}$ (il suffit de prendre comme changement de temps la fonction identité), et donc la convergence sous la topologie U implique la convergence sous la topologie J_1 (la topologie J_1 est plus faible que la topologie U).

Le module de continuité associé à la topologie J_1 est donné par

$$\omega_h^{(J_1)}(f) = \sup_{u,u',u''\in[0,1]\,:\,u-h\leq u'\leq u\leq u''\leq u+h} \min\big\{|f(u) - f(u')|, |f(u) - f(u'')|\big\}$$

pour $f \in \mathscr{D}([0,1])$ et $h > 0$. En particulier, la convergence dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$ peut être caractérisée comme suit.

Théorème 2.9. *Soit f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et f des fonctions de $\mathscr{D}([0,1])$. Alors, f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$ si et seulement si :*

- *$f_n(u)$ converge vers $f(u)$ pour tout $u \in T$, où T est un sous-ensemble dense de $[0,1]$ contenant 0 et 1 ;*
- $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \omega_h^{(J_1)}(f_n) = 0.$

Remarque 2.10. Notons qu'en tant qu'ensemble T dans la première condition on peut prendre l'ensemble

$$T_f = \{u \in]0,1[\ : \ f(u-) = f(u)\} \cup \{0,1\}.$$

de points de continuité de f. À titre d'illustration, nous pouvons remarquer que dans l'exemple 2.7, f_n converge vers f pour tout $u \in [0,1]$, sauf pour $u = \frac{1}{2}$ (le point de discontinuité de f). Notons également qu'aux points de discontinuité de f, bien qu'elle ne soit pas garantie, la convergence reste possible. En effet, si on remplace $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ par $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ dans la définition de f_n de l'exemple 2.7, on aura bien $f_n\big(\frac{1}{2}\big) \to f\big(\frac{1}{2}\big)$.

Même si c'est sans importance pour nos considérations, notons que l'espace $\mathscr{D}([0,1])$ muni de la distance $d^{(J_1)}$ n'est pas complet. Par contre, il devient complet (et est donc polonais) si on le munit de la distance $d_0^{(J_1)}$ équivalente à $d^{(J_1)}$, dite distance de Prokhorov et donnée par

$$d_0^{(J_1)}(f,g) = \inf\left\{ \sup_{u\in[0,1]} \big|f(u) - g\big(\lambda(u)\big)\big| + \sup_{u,v\in[0,1]\,:\,u\neq v} \left|\ln \frac{\lambda(u)-\lambda(v)}{u-v}\right| \right\}, \qquad f,g \in \mathscr{D}([0,1]),$$

où le inf est pris sur toutes les bijections λ continues croissantes de $[0,1]$ dans lui même.

En revanche, notons que $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$ n'est pas un espace de Banach, puisqu'on ne peut pas le munir d'une norme (induisant la topologie J_1). En effet, comme le montre l'exemple suivant, l'addition n'est pas continue sur $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$.

Exemple 2.11. On définit les fonctions f et g, ainsi que les fonctions f_n et g_n pour $n \geq 3$, par $f_n(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},1\right]}(u)$, $g_n(u) = -\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right]}(u)$, $f(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(u)$ et $g(u) = -\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(u)$, $u \in [0,1]$. Nous avons bien la convergence de f_n vers f et de g_n vers g dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$. Cependant, comme

$$f_n(u) + g_n(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\,,\,\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]}(u), \qquad u \in [0,1],$$

et $f + g \equiv 0$, nous avons clairement $d^{(J_1)}(f_n + g_n, f + g) = 1$, et donc $f_n + g_n$ ne converge pas vers $f + g$ dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$.

Néanmoins, la proposition suivante présente le cas où l'addition est continue.

Proposition 2.12. *Soit f, g, f_n et g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions de $\mathscr{D}([0,1])$. Si f_n et g_n convergent respectivement vers f et g dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$, et si de plus f et g n'ont pas de points de discontinuité communs, alors $f_n + g_n$ converge vers $f + g$ dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$.*

Notons que $\mathscr{C}([0,1])$ est un sous ensemble fermé de $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$: une suite de fonctions continues ne peut pas converger dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$ vers une fonction discontinue. En fait, comme le montre l'exemple suivant, la topologie J_1 ne permet pas la « création » de sauts dans la limite.

Exemple 2.13. Pour $n \geq 3$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}\big(u - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\big), & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Lorsque n augmente, la fonction f_n ressemble de plus en plus à la fonction $f(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(u)$, $u \in [0,1]$. Mais contrairement à ce que l'on pourrait attendre, f_n ne converge pas vers f dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$. En effet, $d^{(J_1)}(f_n, f) = \frac{1}{2}$, le inf étant atteint (entre autres) sur le changement de temps donné par la fonction identité.

De la même manière, l'exemple suivant montre que J_1 ne permet pas non plus la « fusion » des sauts.

Exemple 2.14. Pour $n \geq 3$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq u < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq u < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Lorsque n augmente, la fonction f_n ressemble de plus en plus à la fonction $f(u) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(u)$, $u \in [0,1]$. Mais contrairement à ce que l'on pourrait attendre, f_n ne converge pas vers f dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$. En effet, $d^{(J_1)}(f_n, f) = \frac{1}{2}$, le inf étant atteint (entre autres) sur le changement de temps donné par la fonction identité.

Notons qu'il s'agit ici de la fusion de sauts dans le même sens (de même signe). La fusion des sauts de signes opposés n'est pas non plus permise, ce qui est (contrairement au cas des sauts de même signe) logique. En effet, en revenant sur l'exemple 2.11, nous pouvons constater que la fonction $f_n + g_n$ qui ne converge pas vers la fonction identiquement nulle, ne semble pas non plus ressembler à cette dernière pour n grand.

Pour permettre la convergence des fonctions dans les cas similaires aux exemples 2.13 et 2.14, on introduit la topologie M_1. Cette dernière peut être définie comme la topologie induite par une certaine distance $d^{(M_1)}$. Afin de définir cette distance, on commence par introduire les notions du graphe (on suit la terminologie utilisée par Skorokhod, même si on devrait plutôt parler ici d'un « graphe continu » ou d'un « graphe connexe ») d'une fonction de $\mathscr{D}([0,1])$, ainsi que de la représentation paramétrique de ce dernier.

Définition 2.15. *Soit f une fonction de $\mathscr{D}([0,1])$. On définit le graphe de f, noté Γ_f, comme le sous ensemble fermé de $[0,1] \times \mathbb{R}$ donné par*

$$\Gamma_f = \big\{(u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}\,; \quad u \in [0,1],\ v \in [f(u-), f(u)]\big\}.$$

Ici et dans la suite, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la notation $[a, b]$ désigne l'intervalle d'extrémités a et b, que l'on ait $a \leq b$ ou l'inverse.

Maintenant, afin de définir la représentation paramétrique d'un graphe, on introduit d'abord un ordre entre les points appartenant à un graphe d'une fonction. Soit $f \in \mathscr{D}([0,1])$ et $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \Gamma_f$. Nous dirons que $(u_1, v_1) \leq (u_2, v_2)$ si soit on a $u_1 < u_2$, soit on a $u_1 = u_2$ et $|f(u_1-) - v_1| \leq |f(u_1-) - v_2|$.

Définition 2.16. *Soit f une fonction de $\mathscr{D}([0,1])$ et Γ_f son graphe. Une représentation paramétrique de Γ_f est donnée par un couple de fonctions continues (t, y) définies sur $[0,1]$, telles que pour tout $(u, v) \in \Gamma_f$, il existe $s \in [0,1]$ vérifiant $u = t(s)$ et $v = y(s)$, et que l'application $s \mapsto \big(t(s), y(s)\big)$ est croissante dans le sens de l'ordre introduit ci-dessus,* i.e.*, si $s \leq s'$, alors $\big(t(s), y(s)\big) \leq \big(t(s'), y(s')\big)$.*

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour définir une distance induisant la topologie M_1. Pour rester fidèle à l'article originel de Skorokhod, nous munissons $\mathbb{R}^2$, de la distance de Manhattan

$$d_1\big((u_1, v_1), (u_2, v_2)\big) = |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|, \qquad (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2,$$

mais on obtiendrait la même topologie en le munissant de la distance euclidienne (ou de n'importe quelle autre distance équivalente à d_1).

Définition 2.17. *La topologie M_1 est la topologie induite par la distance $d^{(M_1)}$ définie par*

$$d^{(M_1)}(f, g) = \inf \sup_{s \in [0,1]} d_1\Big(\big(t_1(s), y_1(s)\big); \big(t_2(s), y_2(s)\big)\Big), \qquad f, g \in \mathscr{D}([0,1]),$$

où le inf *est pris sur toutes les représentations paramétriques (t_1, y_1) de Γ_f et (t_2, y_2) de Γ_g.*

Intuitivement, deux fonctions seront proches dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$ si on peut parcourir simultanément leurs graphes en restant proches (dans $[0,1] \times \mathbb{R}$).

Contrairement à la topologie J_1, la topologie M_1 permet la « création » de sauts dans la limite. En particulier, une fonction continue peut bien converger vers une fonction discontinue dans cette topologie (et qui sera utile pour nous dans l'étude de notre modèle de rupture lisse dans le cas rapide). En revenant sur l'exemple 2.13, il n'est pas difficile de voir que $d^{(M_1)}(f_n, f) = \frac{1}{n}$, et donc f_n converge bien vers f dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$. La topologie M_1 permet aussi la « fusion » des sauts qui sont dans le même sens comme dans l'exemple 2.14, où nous pouvons encore voir que $d^{(M_1)}(f_n, f) = \frac{1}{n}$.

Le module de continuité associé à la topologie M_1 est donné par

$$\omega_h^{(M_1)}(f) = \sup_{u, u', u'' \in [0,1] \,:\, u-h \leq u' \leq u \leq u'' \leq u+h} d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big)$$

pour $f \in \mathscr{D}([0,1])$ et $h > 0$. Ici et dans la suite, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, la notation $d(c; [a, b])$ désigne la distance entre c et $[a, b]$, c'est-à-dire

$$d(c; [a, b]) = \inf_{x \in [a,b]} |c - x| = \begin{cases} 0, & \text{si } c \in [a, b], \\ \min\{|c - a|, |c - b|\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, la convergence dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$ peut être caractérisée comme suit.

Théorème 2.18. *Soit f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et f des fonctions de $\mathscr{D}([0,1])$. Alors, f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$ si et seulement si :*

- *$f_n(u)$ converge vers $f(u)$ pour tout $u \in T$, où T est un sous-ensemble dense de $[0,1]$ contenant 0 et 1 ;*
- $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \omega_h^{(M_1)}(f_n) = 0$.

Notons que comme pour le cas de la topologie J_1, en tant qu'ensemble T on peut prendre l'ensemble T_f des points de continuité de f.

Remarquons que la topologie M_1 est plus faible que la topologie J_1. En effet, comme

$$d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big) \leq \min\big\{|f(u) - f(u')|, |f(u) - f(u'')|\big\}$$

pour tout $f \in \mathscr{D}([0,1])$ et $u, u', u'' \in [0,1]$, on obtient $\omega_h^{(M_1)}(f) \leq \omega_h^{(J_1)}(f)$ pour tout $h > 0$.

Remarquons également que si f est une fonction monotone, on a $\omega_h^{(M_1)}(f) = 0$, pour tout $h > 0$. En effet, dans ce cas, pour $u' \leq u \leq u''$, nous avons $f(u) \in [f(u'), f(u'')]$, et donc $d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big) = 0$.

À l'image du cas de la topologie J_1, l'espace $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$ est polonais (bien qu'il ne soit pas complet sous de distance $d^{(M_1)}$), mais n'est pas un espace de Banach, car l'exemple 2.11 de non-continuité de l'addition est toujours d'actualité ! Néanmoins, la proposition suivante présente le cas où l'addition est continue.

Proposition 2.19. *Soit f, g, f_n et g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions de $\mathscr{D}([0,1])$. Si f_n et g_n convergent respectivement vers f et g dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$, et si de plus f et g n'ont pas des points de discontinuité communs correspondant à des sauts de signes opposés, alors $f_n + g_n$ converge vers $f + g$ dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$.*

Même si nous allons pas nous en servir, pour des raisons de complétude, nous rappelons brièvement les deux autres topologies (J_2 et M_2) introduites par Skorokhod sur l'espace $\mathscr{D}([0,1])$.

La topologie J_2 est un affaiblissement de la topologie J_1, obtenue en remplaçant le inf sur les bijections continues croissantes dans la définition de la distance $d^{(J_1)}$ par un inf sur toutes les bijections. Plus précisément, on définit la topologie J_2 comme la topologie induite par la distance

$$d^{(J_2)}(f,g) = \inf\left\{ \sup_{u\in[0,1]} \big|f(u) - g\big(\lambda(u)\big)\big| + \sup_{u\in[0,1]} |u - \lambda(u)| \right\}, \qquad f, g \in \mathscr{D}([0,1]),$$

où le inf est pris sur toutes les bijections λ de $[0,1]$ dans lui même.

Voici un exemple d'une suite de fonction qui converge dans $\mathscr{D}^{(J_2)}([0,1])$, mais pas dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$.

Exemple 2.20. Pour $n \geq 3$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq u < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq u < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq u < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Alors, f_n converge vers la fonction $f(u) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(u)$, $u \in [0,1]$, dans $\mathscr{D}^{(J_2)}([0,1])$, car il n'est pas difficile de voir que $d^{(J_2)}(f_n, f) = \frac{1}{n}$. En même temps, nous avons clairement $d^{(J_1)}(f_n, f) = 1$, et donc f_n ne converge pas vers f dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$.

La convergence dans $\mathscr{D}^{(J_2)}([0,1])$ peut être caractérisée par un théorème similaire aux théorèmes 2.9 et 2.18 en utilisant un module de continuité adapté. Un tel module de continuité peut être défini de la même manière que le module de continuité $\omega_h^{(J_1)}$ associé à la topologie J_1, à ceci près que le sup est maintenant pris sur $u \in [0,1]$, $u' \in [u_h, u_h + h/2]$, $u'' \in [u_h^* - h/2, u_h^*]$, où $u_h = \max\{0, u-h\}$ et $u_h^* = \min\{1, u+h\}$. Pour comparaison, remarquons que dans le module de continuité $\omega_h^{(J_1)}$, le sup est en fait pris sur $u \in [0,1]$, $u' \in [u_h, u]$, $u'' \in [u, u_h^*]$.

La topologie M_2, quant à elle, est un affaiblissement de la topologie M_1, obtenue en considérant la distance de Hausdorff entre les graphes (plutôt qu'en comparant leurs représentations paramétriques). Plus précisément, on définit la topologie M_2 comme la topologie induite par la distance

$$d^{(M_2)}(f,g) = \left\{ \sup_{(u_1,v_1)\in\Gamma_f} d_1\big((u_1,v_1);\Gamma_g\big) \right\} \vee \left\{ \sup_{(u_2,v_2)\in\Gamma_g} d_1\big((u_2,v_2);\Gamma_f\big) \right\}, \qquad f,g \in \mathscr{D}([0,1]).$$

Ici, pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $A \subset \mathbb{R}^2$, la notation $d_1(a;A)$ désigne la distance de Manhattan entre le point a et l'ensemble A, c'est-à-dire

$$d_1(a;A) = \inf_{x\in A} d_1(a;x).$$

Voici un exemple d'une suite de fonction qui converge dans $\mathscr{D}^{(M_2)}([0,1])$, mais pas dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$.

Exemple 2.21. Pour $n \geq 7$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}, \\ \frac{n}{2}\big(u - \frac{1}{2} + \frac{3}{n}\big), & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq u \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ 1 - \frac{n}{2}\big(u - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\big), & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}\big(u - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\big), & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{n}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Alors, f_n converge vers la fonction $f(u) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(u)$, $u \in [0,1]$, dans $\mathscr{D}^{(M_2)}([0,1])$, car nous avons clairement $d^{(M_2)}(f_n, f) = \frac{3}{n}$. En même temps, il n'est pas difficile de voir que $d^{(M_1)}(f_n, f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, et donc f_n ne converge pas vers f dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$.

La convergence dans $\mathscr{D}^{(M_2)}([0,1])$ peut être caractérisée par un théorème similaire aux théorèmes 2.9 et 2.18 en utilisant un module de continuité adapté. Un tel module de continuité peut être défini de la même manière que le module de continuité $\omega_h^{(M_1)}$ associé à la topologie M_1, à ceci près qu'ici le sup est maintenant pris sur $u \in [0,1]$, $u' \in [u_h, u_h + h/2]$, $u'' \in [u_h^* - h/2, u_h^*]$, avec u_h et u_h^* définis comme précédemment. Pour comparaison, remarquons que dans le module de continuité $\omega_h^{(M_1)}$, le sup est en fait pris sur $u \in [0,1]$, $u' \in [u_h, u]$, $u'' \in [u, u_h^*]$.

Notons que les topologies de Skorokhod sont ordonnées comme suit :

$$J_1 \Rightarrow J_2 \Rightarrow M_2 \qquad \text{et} \qquad J_1 \Rightarrow M_1 \Rightarrow M_2,$$

où la notation $S \Rightarrow T$ désigne le fait qu'une topologie T est plus faible qu'une autre topologie S. Notons également que toutes ces « implications » sont strictes (nous avons déjà vu les exemples correspondants, sauf pour $J_2 \Rightarrow M_2$, pour laquelle on peut utiliser l'exemple 2.21), et que les topologies M_1 et J_2 ne sont pas comparables. En effet, dans l'exemple 2.13, f_n converge vers f sous M_1, mais pas sous J_2, et dans l'exemple 2.20, f_n converge vers f sous J_2, mais pas sous M_1.

Afin de mieux comprendre la nature de la convergences dans chacune des quatre topologies de Skorokhod, ainsi que les différences entre elles, citons d'abord la proposition suivante.

Proposition 2.22. *Soit S une des quatre topologies de Skorokhod (J_1, J_2, M_1 ou M_2), et soit f, g, f_n et g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions de $\mathscr{D}([0,1])$.*

1. *Si f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(S)}([0,1])$, alors $f_n(u)$ converge vers $f(u)$ pour tout u point de continuité de f. Pour les points de discontinuité de f, cette convergence n'est pas forcément garantie.*
2. *Si f_n converge dans $\mathscr{D}^{(S)}([0,1])$ vers une limite $f \in \mathscr{C}([0,1])$, alors f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(U)}([0,1])$.*

En fait, cette proposition montre que pour toutes les topologies de Skorokhod, la convergence de f_n vers f est uniforme « en dehors des points de discontinuité » de f. La différence entre les quatre topologies de Skorokhod, ainsi que la topologie uniforme sur $\mathscr{D}([0,1])$, se joue donc au voisinage des points de discontinuité de f ou, plus précisément, dans la manière dont f_n (pour n grand) peut passer d'environ $f(u_0-)$ à environ $f(u_0)$ au voisinage d'un point de discontinuité u_0 de f. Plus précisément :

1. pour la topologie uniforme U, ce passage doit se faire en un seul saut situé exactement en u_0 ;
2. pour la topologie usuelle de Skorokhod J_1, ce passage doit également se faire en un seul saut, mais qui peut être situé dans un petit voisinage de u_0 ;
3. pour la topologie J_2, la fonction f_n a droit de faire plusieurs sauts entre environ $f(u_0-)$ et environ $f(u_0)$ dans un petit voisinage de u_0 ;

4. pour la topologie M_1, la fonction f_n peut passer d'environ $f(u_0-)$ à environ $f(u_0)$ « en prenant des valeurs intermédiaires » (plus précisément, en restant toujours proche de $[f(u_0-), f(u_0)]$) et en avançant « presque tout le temps » (il peut y avoir des retours, mais ils doivent être petits) ;
5. pour la topologie M_2 aussi, la fonction f_n peut passer d'environ $f(u_0-)$ à environ $f(u_0)$ « en prenant des valeurs intermédiaires », mais maintenant elle a droit de faire des allers-retours (les retours ne doivent pas forcément être petits).

Notons également que chacune des quatre topologies de Skorokhod peut être décrite comme la topologie minimale pour laquelle certaines familles de fonctionnelles sont continues, ce qui permet de mieux comprendre la portée de chacune de ces topologies. Pour cela, nous définissons les fonctionnelles suivantes.

Définition 2.23. *Soient $f \in \mathscr{D}([0,1])$, $[u', u''] \subset [0,1]$ (avec $u' \neq u''$) et $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On note $\nu^{[a,b]}_{[u',u'']}(f)$ le nombre des fois que f « traverse » la bande $[a,b]$ sur l'intervalle $[u', u'']$. Plus précisément, en supposant que $a \leq b$, on a $\nu^{[a,b]}_{[u',u'']}(f) = k$ s'il existe $k+1$ points $u_0 < u_1 < \cdots < u_k$ de $[u', u'']$ vérifiant soit $f(u_0) \leq a$, $f(u_1) \geq b$, $f(u_2) \leq a$, ..., soit $f(u_0) \geq b$, $f(u_1) \leq a$, $f(u_2) \geq b$, ..., et s'il est impossible de trouver $k+2$ tels points.*

Définition 2.24. *Soient $f \in \mathscr{D}([0,1])$, $[u', u''] \subset [0,1]$ (avec $u' \neq u''$) et $a \in \mathbb{R}$. On note $\gamma^+_{[u',u''],a}(f)$ le premier « excès » de f au dessus du niveau a sur l'intervalle $[u', u'']$. Plus précisément, en supposant que $u' < u''$, on pose*

$$\gamma^+_{[u',u''],a}(f) = \gamma^+_{[0,1],a}(\bar{f}),$$

où

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(u'), & si\ u < u', \\ f(u), & si\ u' \leq u \leq u'', \\ f(u''-), & si\ u > u'', \end{cases}$$

$$\gamma^+_{[0,1],a}(f) = \begin{cases} f(\tau_a(f)) - a, & si\ \tau_a(f) < 1, \\ -1, & si\ \tau_a(f) = 1, \end{cases}$$

et

$$\tau_a(f) = \begin{cases} \inf\{u\ :\ f(u) \geq a\}, & si\ \{u\ :\ f(u) \geq a\} \neq \emptyset, \\ 1, & si\ \{u\ :\ f(u) \geq a\} = \emptyset. \end{cases}$$

Maintenant nous pouvons formuler la proposition suivante qui décrit les quatre topologie de Skorokhod en utilisant ces fonctionnelles.

Proposition 2.25. *Soient f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et f des fonctions de $\mathscr{D}([0,1])$. On note T_f l'ensemble des points de continuité de f. Alors :*

1. *la fonction f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(M_2)}([0,1])$ si et seulement si $\sup_{u\in[u',u'']} f_n(u)$ converge vers $\sup_{u\in[u',u'']} f(u)$ et $\inf_{u\in[u',u'']} f_n(u)$ converge vers $\inf_{u\in[u',u'']} f(u)$ pour tout $u', u'' \in T_f$ (avec $u' \neq u''$) ;*

2. *la fonction f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(M_1)}([0,1])$ si et seulement si $\nu^{[a,b]}_{[u',u'']}(f_n)$ converge vers $\nu^{[a,b]}_{[u',u'']}(f)$ pour tout $u', u'' \in T_f$ (avec $u' \neq u''$) et pour presque tout $a, b \in \mathbb{R}$;*
3. *la fonction f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(J_2)}([0,1])$ si et seulement si $\gamma^{+}_{[u',u''],a}(f_n)$ converge vers $\gamma^{+}_{[u',u''],a}(f)$ pour tout $u', u'' \in T_f$ (avec $u' \neq u''$) et pour presque tout $a \in \mathbb{R}$;*
4. *la fonction f_n converge vers f dans $\mathscr{D}^{(J_1)}([0,1])$ si et seulement si $\nu^{[a,b]}_{[u',u'']}(f_n)$ converge vers $\nu^{[a,b]}_{[u',u'']}(f)$ et $\gamma^{+}_{[u',u''],a}(f_n)$ converge vers $\gamma^{+}_{[u',u''],a}(f)$ pour tout $u', u'' \in T_f$ (avec $u' \neq u''$) et pour presque tout $a, b \in \mathbb{R}$.*

Comme corollaire évident de cette proposition notons que la convergence sous la topologie J_1 est équivalente à la convergence simultanée sous les topologies J_2 et M_1.

Nous énonçons enfin le résultat principal de cette section, qui est un critère de convergence faible des processus stochastiques à trajectoires dans $\mathscr{D}([0,1])$ sous les différentes topologies de Skorokhod.

Théorème 2.26. *Soit S une des quatre topologies de Skorokhod (J_1, J_2, M_1 ou M_2), et soient Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et Y des processus stochastiques à trajectoires dans $\mathscr{D}([0,1])$. Alors, Y_n converge faiblement vers Y dans $\mathscr{D}^{(S)}([0,1])$ si et seulement si :*

— *les lois fini-dimensionnelles de Y_n convergent vers celles de Y sur un sous-ensemble dense T de $[0,1]$ contenant 0 et 1 ;*

— *pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to +\infty}} \mathbf{P}\big(\omega_h^{(S)}(Y_n) > \varepsilon\big) = 0.$$

Notons qu'en présence de la convergence des lois fini-dimensionnelles de Y_n vers Y, la deuxième condition implique que la famille des mesures de probabilité induites par les processus Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sur l'espace $\mathscr{D}^{(S)}([0,1])$ est tendue, et garantit donc la convergence faible de Y_n vers Y dans cet espace. Notons également qu'en tant qu'ensemble T dans la première condition on peut prendre l'ensemble

$$T_Y = \big\{u \in]0,1[\,:\, \mathbf{P}\big(Y(u-) \neq Y(u)\big) = 0\big\} \cup \{0,1\}.$$

Remarque 2.27. Rappelons que la convergence faible des processus implique la convergence en loi des fonctionnelles continues. Par exemple, si Y_n converge faiblement vers Y dans une des quatre topologies de Skorokhod, alors $\sup_{u\in[0,1]} Y_n(u)$ converge en loi vers $\sup_{u\in[0,1]} Y(u)$. En fait, plus généralement, pour avoir la convergence en loi, il suffit que la fonctionnelle soit continue presque partout par rapport à la mesure induite par le processus limite. Nous pouvons donc affirmer, par exemple, la convergence en loi de $\sup_{u\in[u',u'']} Y_n(u)$ vers $\sup_{u\in[u',u'']} Y(u)$ si on sait que Y_n converge faiblement vers Y dans une des quatre topologies de Skorokhod et que $u', u'' \in T_Y$.

Nous finissons cette section par une discussion sur le choix, parmi les topologies de Skorokhod, de celle que nous utiliserons afin de terminer l'étude de notre problème d'estimation de la position d'une rupture lisse (plus précisément, afin d'étudier l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas rapide).

Rappelons que nous utilisons la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance qui consiste à montrer d'abord que le rapport de vraisemblance normalisé Z_n converge faiblement vers un certain processus limite Z. Bien évidement, cette convergence doit avoir lieu dans un certain espace fonctionnel muni d'une certaine topologie. Dans les différents cas traités dans la littérature (pour autant que nous le sachions), cette convergence a lieu soit sous la topologie uniforme U (dans le cas où Z_n et Z sont à trajectoires continues), soit sous la topologie usuelle de Skorokhod J_1 (dans le cas où Z_n et Z sont à trajectoires càdlàg et celles de Z_n admettent des discontinuités).

Cependant, nous avons déjà montré dans le chapitre précédent que dans le cas rapide de notre modèle les trajectoires de Z_n sont continues, et celles de sa limite potentielle Z sont discontinues. Ainsi, la convergence de Z_n vers Z n'est pas possible ni sous la topologie J_1 (qui, comme on l'a vu, ne permet pas la création des sauts dans la limite), ni, bien évidemment, sous la topologie U.

Ainsi, nous avons besoin d'une topologie (plus faible que J_1) sous laquelle une suite des fonctions continues f_n peut converger vers une limite discontinue f. En même temps, pour qu'on puisse terminer l'étude de l'estimateur du maximum de vraisemblance, cette topologie doit assurer la convergence de $\sup_u f_n(u)$ vers le $\sup_u f(u)$ (la fonctionnelle « sup » doit être continue pour cette topologie).

Ces deux propriétés sont garanties par les topologies M_1 et M_2 de Skorokhod. Nous avons fait le choix d'utiliser la topologie M_1, puisque d'une part la topologie M_1 est plus forte que la topologie M_2, et d'autre part le module de continuité de M_1 est plus simple que celui de M_2.

Enfin, rappelons qu'afin de rester fidèle à l'article originel [94] de Skorokhod ainsi qu'aux livres [10] de Billingsley et [99] de Whitt, nous avons considéré dans cette section des fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$, tout en sachant que tout ces résultats restent vrais en considérant des fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ quelconque. Cependant, les rapports de vraisemblance normalisés Z_n et leurs limites Z sont des processus stochastiques sur $\mathbb{R}$. Nous avons donc besoin d'étendre ces résultats aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Cette extension est possible grâce au fait que les trajectoires de Z_n et de Z ont la propriété d'être nulle en $\pm\infty$ et sera présente dans la section suivante.

2.2 La topologie M_1 sur l'espace des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ nulles en $\pm\infty$

Dans cette section, on présente une extension des résultats sur la convergence faible des processus sur un intervalle compact au cas des processus sur tout $\mathbb{R}$. Cette extension est nécessaire pour la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance développée par Ibragimov et Khasminskii dans [57]. En effet, pour un modèle paramétrique où on observe $X^{(n)}$ de loi $\mathbf{P}_\theta^{(n)}$ dépendant d'un paramètre inconnu (à estimer) $\theta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, cette

méthode consiste à étudier le rapport de vraisemblance normalisé

$$Z_n(u) = Z_n^{(\theta)}(u) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}^{(n)}_{\theta+u\varphi_n}\big(X^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}^{(n)}_{\theta}}, \qquad u \in \mathbb{U}_n,$$

où $\mathbb{U}_n =]\varphi_n^{-1}(\alpha-\theta), \varphi_n^{-1}(\beta-\theta)[$ et φ_n est une suite décroissante vers 0, dite vitesse de normalisation de la vraisemblance. Une étape clé dans la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance est la convergence faible (moyennant le bon choix de φ_n) de Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, vers un certain processus limite $Z = Z^{(\theta)}$ (non identiquement égal à 1), dit rapport de vraisemblance limite. Notons que, comme $\mathbb{U}_n \uparrow \mathbb{R}$, le rapport de vraisemblance limite doit être défini sur tout $\mathbb{R}$. Par conséquent, les rapports de vraisemblance normalisés Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ont aussi besoin d'être prolongés sur $\mathbb{R}$. Comme les valeurs de u telles que $|u|$ est grand correspondent aux valeurs de paramètre $\theta + u\varphi_n$ éloignées de la vraie valeur θ, il est naturel que $Z_n(u)$ soit petit pour ces valeurs de u. On étend donc le processus Z_n sur $\mathbb{R}$ en prolongeant ses trajectoires de sorte qu'elles décroissent vers 0 lorsque u s'éloigne de $\mathbb{U}_n$ (en les gardant continues ou càdlàg selon les cas), et on travaille soit dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en $\pm\infty$, soit dans l'espace des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ nulles en $\pm\infty$. Notons également que cette propriété d'être nulle en $\pm\infty$ permet, *grosso modo*, de « rester » dans le cadre des fonctions définies sur un compact (une compactification de $\mathbb{R}$) et étendre ainsi les résultats de la section précédente : si dans le cas d'un intervalle compact $[a, b]$, nous avions supposé la continuité aux bords (en a et en b), ici nous supposons encore la continuité aux bords (en $-\infty$ et en $+\infty$), mais en fixant les valeurs (en $-\infty$ et en $+\infty$) à 0 en plus.

Nous commençons par l'espace $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$ introduit par Ibragimov et Khasminskii pour traiter les cas où les rapports de vraisemblance normalisés et le rapport de vraisemblance limite sont des processus à trajectoires continues (comme, par exemple, dans les modèles réguliers ou dans les modèles avec des singularités de type cusp).

Définition 2.28. *On note $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro en $\pm\infty$ et on le munit de la topologie uniforme U, induite par la distance uniforme $d^{(U)}$, ou encore par la norme* sup $\|\cdot\|_\infty$ *:*

$$d^{(U)}(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{u\in\mathbb{R}} |f(u)-g(u)|, \qquad f, g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}).$$

Le module de continuité associé à la topologie U est donné par

$$\Delta_h^{(U)}(f) = \sup_{u,v\in\mathbb{R}\,:\,|u-v|\le h} |f(u)-f(v)| + \sup_{|u|>1/h} |f(u)|$$

pour $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ et $h > 0$. En particulier, la convergence dans $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$ peut être caractérisée par un théorème similaire au théorème 2.2.

Un critère de convergence faible des processus à trajectoires dans $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$ est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.29. *Soient Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et Y des processus stochastiques à trajectoires dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Alors, Y_n converge faiblement vers Y dans $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$ si et seulement si :*

— *les lois fini-dimensionnelles de Y_n convergent vers celles de Y ;*

— *pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbf{P}\big(\Delta_h^{(U)}(Y_n) > \varepsilon\big) = 0.$$

Nous rappelons maintenant l'espace $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ introduit par Ibragimov et Khasminskii pour traiter les cas où les rapports de vraisemblance normalisés sont discontinus (comme, par exemple, dans les modèles de rupture).

Définition 2.30. *On note* $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions càdlàg sur* $\mathbb{R}$ *tendant vers zéro en* $\pm\infty$ *et on le munit de la topologie* J_1 *induite par la distance*

$$d^{(J_1)}(f,g) = \inf\Big\{\sup_{u\in\mathbb{R}}\big|f(u) - g\big(\lambda(u)\big)\big| + \sup_{u\in\mathbb{R}}|u-\lambda(u)|\Big\}, \qquad f,g\in\mathscr{D}_0(\mathbb{R}),$$

où le inf *est pris sur toutes les bijections* λ *continues croissantes de* $\mathbb{R}$ *dans lui même.*

Le module de continuité associé à la topologie J_1 est donné par

$$\Delta_h^{(J_1)}(f) = \sup_{u,u',u''\in\mathbb{R}\,:\,u-h\le u'\le u\le u''\le u+h} \min\big\{|f(u)-f(u')|, |f(u)-f(u'')|\big\} + \sup_{|u|>1/h}|f(u)|$$

pour $f\in\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ et $h>0$. En particulier, la convergence dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ peut être caractérisée par un théorème similaire au théorème 2.9.

Un critère de convergence faible des processus à trajectoires dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.31. *Soient* Y_n, $n\in\mathbb{N}^*$, *et* Y *des processus stochastiques à trajectoires dans* $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$. *Alors,* Y_n *converge faiblement vers* Y *dans* $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ *si et seulement si :*

— *les lois fini-dimensionnelles de* Y_n *convergent vers celles de* Y *sur un sous-ensemble dense* T *de* $\mathbb{R}$ *;*

— *pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbf{P}\big(\Delta_h^{(J_1)}(Y_n) > \varepsilon\big) = 0.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, pour autant que nous le sachions, jusqu'à présent la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance n'a été appliquée qu'en utilisant soit l'espace $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$, soit l'espace $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$ a été utilisé, par exemple, pour les modèles i.i.d. par Ibragimov et Khasminskii dans le cas régulier et dans le cas des singularités de type cusp (cf. [51, 53, 54, 56, 57]), et pour les modèles poissonniens par Kutoyants dans le cas régulier (cf., par exemple, [63,65,66,68]), ainsi que par Dachian dans le cas des singularités de type cusp (cf. [30]). Quant à l'espace $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$, il a été utilisé, par exemple, pour les modèles de rupture i.i.d. par Ibragimov et Khasminskii (cf. [51,52,57]), et pour les modèles de rupture poissonniens par Kutoyants (cf. [64,66,68]). Notons que ces espaces ont également été utilisés pour une multitude d'autres modèles d'observations.

Cependant, nous ne pouvons utiliser aucun de ces deux espace pour l'étude de notre modèle de rupture lisse dans le cas rapide. En effet, rappelons que dans ce cas Z_n est à trajectoires continues et que Z est a trajectoires discontinues ; la convergence de Z_n vers Z ne peut donc avoir lieu ni dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$, ni dans $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$. Afin de pallier ce problème, nous munissons l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ de la topologie M_1 qui permet la convergence des fonctions continues vers des limites discontinues.

Comme dans le cas des fonctions définies sur un intervalle compact considéré dans la section précédente, afin de définir cette topologie, nous avons besoin des notions d'un graphe d'une fonction de $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ et de sa représentation paramétrique, qui se définissent de manière complètement analogue.

Définition 2.32. *Soit f une fonction de $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$.*

1. *Le graphe de f, noté Γ_f, est le sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$ donné par*
$$\Gamma_f = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,;\quad u \in \mathbb{R},\ v \in [f(u-), f(u)]\big\}.$$
2. *Soit $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in \Gamma_f$. Nous dirons que $(u_1,v_1) \le (u_2,v_2)$ si soit on a $u_1 < u_2$, soit on a $u_1 = u_2$ et $|f(u_1-) - v_1| \le |f(u_1-) - v_2|$.*
3. *Une représentation paramétrique de Γ_f est donnée par un couple de fonctions continues (t,y) définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout $(u,v) \in \Gamma_f$, il existe $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $u = t(s)$ et $v = y(s)$, et que l'application $s \mapsto \big(t(s), y(s)\big)$ est croissante dans le sens de l'ordre introduit ci-dessus,* i.e., *si $s \le s'$, alors $\big(t(s), y(s)\big) \le \big(t(s'), y(s')\big)$.*

Nous pouvons maintenant définir la topologie M_1 sur $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$.

Définition 2.33. *La topologie M_1 sur $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ est la topologie induite par la distance $d^{(M_1)}$ définie par*

$$d^{(M_1)}(f,g) = \inf \sup_{s\in\mathbb{R}} d_1\Big(\big(t_1(s), y_1(s)\big); \big(t_2(s), y_2(s)\big)\Big), \qquad f,g \in \mathscr{D}_0(\mathbb{R}),$$

où le inf *est pris sur toutes représentations paramétriques (t_1,y_1) de Γ_f et (t_2,y_2) de Γ_g.*

Le module de continuité associé à la topologie M_1 est donné par

$$\Delta_h^{(M_1)}(f) = \sup_{u,u',u'' \in \mathbb{R}\,:\, u-h \le u' \le u \le u'' \le u+h} d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big) + \sup_{|u|>1/h} |f(u)|$$

pour $f \in \mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ et $h > 0$. En particulier, la convergence dans $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ peut être caractérisée par un théorème similaire au théorème 2.18.

Un critère de convergence faible des processus à trajectoires dans $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.34. *Soient Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et Y des processus stochastiques à trajectoires dans $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$. Alors, Y_n converge faiblement vers Y dans $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ si et seulement si :*

— *les lois fini-dimensionnelles de Y_n convergent vers celles de Y sur un sous-ensemble dense T de $\mathbb{R}$;*

— *pour tout* $\varepsilon > 0$*, on a*

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbf{P}\big(\Delta_h^{(M_1)}(Y_n) > \varepsilon\big) = 0.$$

Notons que, comme dans le cas des processus sur un intervalle compact (et comme, d'ailleurs, pour les deux théorèmes précédents), en présence de la convergence des lois fini-dimensionnelles de Y_n vers Y, la deuxième condition implique que la famille des mesures de probabilité induites par les processus Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sur l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ est tendue, et garantit donc la convergence faible de Y_n vers Y dans cet espace.

Notons également qu'en tant qu'ensemble T dans la première condition (ici, comme dans le théorème précédent) on peut prendre l'ensemble

$$T_Y = \big\{u \in \mathbb{R} \,:\, \mathbf{P}\big(Y(u-) \neq Y(u)\big) = 0\big\}.$$

Notons finalement que la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance permet souvent d'obtenir les propriétés des estimateurs uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est un sous-ensemble compact (arbitraire) de Θ. Pour cela, la convergence faible de $Z_n = Z_n^{(\theta)}$ vers $Z = Z^{(\theta)}$ doit être obtenue uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$, et nous avons donc besoin des « versions uniformes » des critères de convergence faible donnés ci-dessus. Pour le cas de l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ une telle version peut être énoncée comme suit.

Théorème 2.35. *Soit* Σ *un ensemble, et soient* $Y_n^{(\varsigma)}$ *et* $Y^{(\varsigma)}$*,* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\varsigma \in \Sigma$*, des processus stochastiques à trajectoires dans* $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$*. On suppose que :*

— *les lois fini-dimensionnelles de* $Y_n^{(\varsigma)}$ *convergent vers celles de* $Y^{(\varsigma)}$ *uniformément par rapport à* $\varsigma \in \Sigma$ *;*

— *pour tout* $\varepsilon > 0$*, on a*

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sup_{\varsigma\in\mathbb{K}} \mathbf{P}\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Y_n^{(\varsigma)}\big) > \varepsilon\Big) = 0.$$

Alors, $Y_n^{(\varsigma)}$ *converge faiblement vers* $Y^{(\varsigma)}$ *dans* $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ *uniformément par rapport à* $\varsigma \in \Sigma$*.*

2.3 Méthode d'analyse de rapport de vraisemblance et l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$

Dans cette section, nous montrons comment les techniques utilisées dans la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance dans le cas de l'espace $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ s'adaptent au cas de l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$.

On se place toujours dans le cadre (décrit au début de la section précédente) d'un modèle paramétrique avec le rapport de vraisemblance normalisé $Z_n = Z_n^{(\theta)}$. Pour montrer que Z_n converge faiblement vers un rapport de vraisemblance limite $Z = Z^{(\theta)}$ dans un des espaces fonctionnels décrits dans la section précédente, nous avons besoin, en particulier, de vérifier

la deuxième condition (celle sur les modules de continuité) du critère de convergence faible correspondant. Dans le cadre de l'espace $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$, cette condition est vérifiée en contrôlant d'une part les « modules de continuité restreints » aux intervalles de longueur 1, et d'autre part les queues de Z_n (cf. la section 5.3 de Ibragimov et Khasminskii [57]). Le théorème suivant montre que cette technique est également valable dans le cadre de l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$. Avant de l'énoncer, rappelons que le module de continuité associé à la topologie M_1 est donné (en récrivant le sup un peu différemment) par

$$\Delta_h^{(M_1)}(f) = \sup_{u\in\mathbb{R}} \sup_{u-h\le u'\le u\le u''\le u+h} d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big) + \sup_{|u|>1/h} |f(u)| \tag{2.1}$$

pour $f \in \mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ et $h > 0$. Introduisons également le module de continuité restreint à un intervalle $[A, B] \subset \mathbb{R}$ défini par

$$\Delta_h^{(M_1)}(f; [A, B]) = \sup_{u\in[A,B]} \sup_{u-h\le u'\le u\le u''\le u+h} d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big)$$

pour $f \in \mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ et $h > 0$.

Théorème 2.36. *Soit un compact $\mathbb{K} \subset \Theta$. On suppose que :*

($\mathcal{A}$) *il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $h > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) > h^\gamma\Big) \le B(l)\, h^\gamma, \tag{2.2}$$

où $B(\cdot)$ est une fonction de croissance (au plus) polynomiale ;

($\mathcal{B}$) *il existe $\kappa > 0$ tel que*

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \le \exp\{-\kappa\,|u|\} \tag{2.3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{K}$.

Alors :

(*i*) *il existe $b, C > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n(u) > \exp\{-b\,|l|\}\Big) \le C\exp\{-b\,|l|\}\ ; \tag{2.4}$$

(*ii*) *il existe $b, C > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{|u|>A} Z_n(u) > \exp\{-b\,A\}\Big) \le C\exp\{-b\,A\}\ ; \tag{2.5}$$

(*iii*) *pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{h\to 0}\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \sup_{\theta\in\mathbb{K}} \mathbf{P}_\theta\big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n) > \varepsilon\big) = 0.$$

Avant de démontrer ce théorème, notons qu'en présence de la convergence (uniforme par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$) des lois fini-dimensionnelles de Z_n vers Z, l'affirmation *(iii)* permet d'appliquer le théorème 2.35 et d'obtenir ainsi la convergence faible (uniforme par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$) de Z_n vers Z dans $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$. La vitesse de convergence et la loi limite de l'EMV peuvent ensuite être déduits de cette convergence faible (plus de détails seront donnés dans la section 2.5).

Notons également que l'affirmation *(ii)* joue aussi un rôle important lors de l'étude de l'EMV. Elle permet, notamment, d'obtenir la convergence des moments de cet estimateur (cf. la section 5.4 de Ibragimov et Khasminskii [57]).

Preuve. Notons tout d'abord que pour montrer *(i)*, il suffit de montrer qu'il existe des constantes $b_1, b_2, C > 0$ tels que

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n(u) > \exp\{-b_1\,|l|\}\Big) \le C\exp\{-b_2\,|l|\}. \tag{2.6}$$

En effet, en prenant $b \le \min\{b_1, b_2\}$, on a $\exp\{-b_i\,|l|\} \le \exp\{-b\,|l|\}$, $i = 1, 2$, et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n(u) > \exp\{-b\,|l|\}\Big) &\le \mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n(u) > \exp\{-b_1\,|l|\}\Big)\\ &\le C\exp\{-b_2\,|l|\}\\ &\le C\exp\{-b\,|l|\}.\end{aligned}$$

Afin de montrer (2.6), on divise l'intervalle $[l, l+1]$ en m parties égales en utilisant les points $l = u_0 < u_1 < \cdots < u_m = l+1$, où on fixera m plus tard. Donc, pour tout $l \le u \le l+1$, il existe $1 \le k \le m$ tel que $u_{k-1} \le u \le u_k$, et on a

$$\begin{aligned}Z_n^{1/2}(u) &\le \max\big\{Z_n^{1/2}(u_{k-1}), Z_n^{1/2}(u_k)\big\} + d\big(Z_n^{1/2}(u); [Z_n^{1/2}(u_{k-1}), Z_n^{1/2}(u_k)]\big)\\ &\le \max\big\{Z_n^{1/2}(u_{k-1}), Z_n^{1/2}(u_k)\big\} + \Delta_{1/m}^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{l\le u\le l+1} Z_n^{1/2}(u) \le \max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) + \Delta_{1/m}^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big). \tag{2.7}$$

Ainsi, pour tout $b > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n^{1/2}(u) > \exp\{-b\,|l|\}\Big) &\le \mathbf{P}_\theta\Big(\max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{\exp\{-b\,|l|\}}{2}\Big)\\ &\quad + \mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_{1/m}^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) > \frac{\exp\{-b\,|l|\}}{2}\Big).\end{aligned}$$

Pour le premier terme, pour tout $b' > b$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\Big(\max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{\exp\{-b\,|l|\}}{2}\Big) &\le \mathbf{P}_\theta\Big(\max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{\exp\{-b'\,|l|\}}{2}\Big)\\ &\le \sum_{i=0}^{m} \mathbf{P}_\theta\Big(Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{\exp\{-b'\,|l|\}}{2}\Big).\end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité de Markov et (2.3), pour $0 \le l \le u \le l+1$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\left(Z_n^{1/2}(u) > \frac{\exp\{-b'\,|l|\}}{2}\right) &\le 2\exp\{b'\,|l|\}\,\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u)\\ &\le 2\exp\{b'\,|l|\}\exp\{-\kappa\,|u|\}\\ &\le 2\exp\{b'\,|l|\}\exp\{-\kappa\,|l|\}\\ &= 2\exp\{(b'-\kappa)|l|\},\end{aligned} \tag{2.8}$$

et pour $l \le u \le l+1 \le 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\left(Z_n^{1/2}(u) > \frac{\exp\{-b'\,|l|\}}{2}\right) &\le 2\exp\{b'\,|l|\}\exp\{-\kappa\,|u|\}\\ &\le 2\exp\{b'\,|l|\}\exp\{-\kappa\,(|l|-1)\}\\ &= 2e^{\kappa}\exp\{(b'-\kappa)|l|\}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\left(\max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{\exp\{-b\,|l|\}}{2}\right) &\le \sum_{i=0}^{m} 2e^{\kappa}\exp\{(b'-\kappa)|l|\}\\ &= 2e^{\kappa}(m+1)\exp\{(b'-\kappa)|l|\}.\end{aligned}$$

Pour majorer le deuxième terme, on choisit $m = \lfloor 2^{1/\gamma}\exp\{b\,|l|/\gamma\}\rfloor + 1$. Comme on a $m \ge 2^{1/\gamma}\exp\{b\,|l|/\gamma\}$, on obtient $(1/m)^\gamma \le \exp\{-b\,|l|\}/2$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\left(\Delta_{1/m}^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big) > \frac{\exp\{-b\,|l|\}}{2}\right) &\le \mathbf{P}_\theta\left(\Delta_{1/m}^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big) > \frac{1}{m^\gamma}\right)\\ &\le \frac{B(l)}{m^\gamma}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant b et b' tels que $b < b'$ et $(1/2+1/\gamma)b + b' < \kappa$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\left(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n(u) > \exp\{-b\,|l|\}\right) &\le \mathbf{P}_\theta\left(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n^{1/2}(u) > \exp\{-b\,|l|/2\}\right)\\ &\le \mathbf{P}_\theta\left(\sup_{l\le u\le l+1} Z_n^{1/2}(u) > \exp\{-b\,|l|\}\right)\\ &\le 2e^{\kappa}(m+1)\exp\{(b'-\kappa)|l|\} + \frac{B(l)}{m^\gamma}\\ &\le 2e^{\kappa}\big(2^{1/\gamma}\exp\{b\,|l|/\gamma\}+2\big)\exp\{(b'-\kappa)|l|\} + \frac{B(l)}{2}\exp\{-b\,|l|)\\ &= 2^{1/\gamma+1}e^{\kappa}\exp\{(b/\gamma+b'-\kappa\}|l|\} + 4e^{\kappa}\exp\{(b'-\kappa)|l|\} + \frac{B(l)}{2}\exp\{-b\,|l|\}\\ &= \exp\{-b\,|l|/2\}\Big[2^{1/\gamma+1}e^{\kappa}\exp\big\{\big((1/2+1/\gamma)b+b'-\kappa\big)|l|\big\}\\ &\qquad + 4e^{\kappa}\exp\{(b/2+b'-\kappa)|l|\} + \frac{B(l)}{2}\exp\{-b\,|l|/2\}\Big]\end{aligned}$$

$$\leq \exp\{-b\,|l|/2\}\left[2^{1/\gamma+1}e^{\kappa} + 4e^{\kappa} + \frac{B(l)}{2}\exp\{-b\,|l|/2\}\right]$$
$$\leq C\exp\{-b\,|l|/2\},$$

car $B(l)\exp\{-b\,|l|/2\}$ est borné. Comme on l'a déjà noté ci-dessus, ceci montre *(i)*.

Maintenant pour *(ii)*, on a

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{|u|>A} Z_n(u) > \exp\{-b\,A\}\Big) \leq \sum_{l\geq 0}\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{A+l\leq u\leq A+l+1} Z_n(u) > \exp\{-b\,A\}\Big) + \sum_{l\geq 0}\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{-A-l-1\leq u\leq -A-l} Z_n(u) > \exp\{-b\,A\}\Big).$$

Pour la première somme, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{l\geq 0}\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{A+l\leq u\leq A+l+1} Z_n(u) > \exp\{-b\,A\}\Big)\\
&\qquad\leq \sum_{l\geq 0}\mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{A+l\leq u\leq A+l+1} Z_n(u) > \exp\{-b(A+l)\}\Big)\\
&\qquad\leq C\sum_{l\geq 0}\exp\{-b(A+l)\}\\
&\qquad\leq C\exp\{-b\,A\}\sum_{l\geq 0}\big(e^{-b}\big)^l\\
&\qquad\leq C\exp\{-b\,A\}\,\frac{1}{1-e^{-b}}\\
&\qquad= C'\exp\{-b\,A\}.
\end{aligned}$$

La deuxième somme se traite de manière similaire, ce qui termine la preuve de *(ii)*.

Il reste à montrer *(iii)*. On commence par vérifier que l'inégalité suivante est valide dès que $h < 1/A$:

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n) > \varepsilon\Big) \leq \mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n;[-A,A]) > \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{|u|>A} Z_n(u) > \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{2.9}$$

Pour cela on montre l'inclusion

$$\Big\{\Delta_h^{(M_1)}(Z_n) > \varepsilon\Big\} \subset \Big\{\Delta_h^{(M_1)}(Z_n;[-A,A]) > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup \Big\{\sup_{|u|>A}(Z_n) > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}. \tag{2.10}$$

Par complémentaire, supposons que

$$\Delta_h^{(M_1)}(Z_n;[-A,A]) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{|u|>A}(Z_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et montrons que

$$\Delta_h^{(M_1)}(Z_n) \le \varepsilon.$$

Pour le deuxième terme de la définition (2.1) de $\Delta_h^{(M_1)}(Z_n)$, comme $1/h > A$, on a

$$\sup_{|u|>1/h}(Z_n) \le \sup_{|u|>A}(Z_n) \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Afin de majorer le premier terme de $\Delta_h^{(M_1)}(Z_n)$, que l'on note

$$\mathring{\Delta}_h^{(M_1)}(Z_n) = \sup_{u\in\mathbb{R}} \sup_{u-h\le u'\le u\le u''\le u+h} d\big(Z_n(u), [Z_n(u'), Z_n(u'')]\big),$$

on majore d'abord la distance $d\big(Z_n(u), [Z_n(u'), Z_n(u'')]\big)$.

1. Pour $u \in [-A, A]$, on a

$$d\big(Z_n(u), [Z_n(u'), Z_n(u'')]\big) \le \Delta_h^{(M_1)}(Z_n; [-A, A]) \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

2. Pour $u \notin [-A, A]$, on a soit $u' \notin [-A, A]$, soit $u'' \notin [-A, A]$ (supposons que c'est u'), et donc

$$Z_n(u), Z_n(u') \le \sup_{|u|>A} Z_n(u) \le \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

d'où

$$d\big(Z_n(u), [Z_n(u'), Z_n(u'')]\big) \le |Z_n(u) - Z_n(u')| \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ainsi, on obtient

$$\mathring{\Delta}_h^{(M_1)}(Z_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par conséquent, l'inclusion (2.10) et l'inégalité (2.9).

Pour le deuxième terme de (2.9), pour A assez grand (tel que $\varepsilon/2 > \exp\{-b\,A\}$), on a

$$\mathbf{P}_\theta\left(\sup_{|u|>A} Z_n(u) > \frac{\varepsilon}{2}\right) \le \mathbf{P}_\theta\left(\sup_{|u|>A} Z_n(u) > \exp\{-b\,A\}\right) \le C\exp\{-b\,A\}.$$

On peut donc rendre ce terme aussi petit que l'on veut en fixant un A suffisamment grand.

Maintenant, afin de majorer le premier terme de (2.9), on montre d'abord que

$$\Delta_h^{(M_1)}(Z_n; [-A, A]) \le 2M_n\Delta_h^{(M_1)}(Z_n^{1/2}; [-A, A]), \tag{2.11}$$

où $M_n = \sup_{|u|\le A+1} Z_n^{1/2}(u)$. On considère ici et dans la suite que $h < 1$. En utilisant l'inégalité élémentaire

$$|a^2 - b^2| = |a - b|\,(a + b) \le 2\,|a - b|\max\{a, b\}, \quad a, b \ge 0,$$

pour tout $-A \le u \le A$ et $u - h \le v \le u + h$ on obtient

$$\begin{aligned}|Z_n(u) - Z_n(v)| &= \big|(Z_n^{1/2}(u))^2 - (Z_n^{1/2}(v))^2\big| \\ &\le 2\,\big|Z_n^{1/2}(u) - Z_n^{1/2}(v)\big| \max\big\{Z_n^{1/2}(u), Z_n^{1/2}(v)\big\} \\ &\le 2\,\big|Z_n^{1/2}(u) - Z_n^{1/2}(v)\big| M_n,\end{aligned}$$

d'où (2.11).

Donc, pour tout $0 < h < 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n;[-A,A]) > h^{\gamma/2}\Big) &\le \mathbf{P}_\theta\Big(2M_n\Delta_h^{(M_1)}(Z_n^{1/2};[-A,A]) > h^{\gamma/2}\Big) \\ &\le \mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n^{1/2};[-A,A]) > h^{\gamma}\Big) + \mathbf{P}_\theta\big(2M_n > h^{-\gamma/2}\big) \\ &\le \sum_{l=-A}^{A-1} \mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n^{1/2};[l,l+1]) > h^{\gamma}\Big) + \mathbf{P}_\theta\big(2M_n > h^{-\gamma/2}\big) \\ &\le B'(A)\,h^{\gamma} + \mathbf{P}_\theta\big(2M_n > h^{-\gamma/2}\big),\end{aligned}$$

où $B'(A) = \sum_{l=-A}^{A-1} B(l)$.

Pour majorer la dernière probabilité, on divise l'intervalle $[-A-1, A+1]$ en $m = \lfloor h^{-\gamma/4} \rfloor$ parties égales en utilisant les points $u_0 = -A-1 < u_1 < \cdots < u_m = A+1$. Par un raisonnement similaire à celui qui a été fait pour montrer (2.7), on a

$$M_n \le \max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) + \Delta_{\frac{2A+2}{m}}^{(M_1)}(Z_n^{1/2};[-A-1,A+1]),$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\left(M_n > \frac{h^{-\gamma/2}}{2}\right) &\le \mathbf{P}_\theta\left(\max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{h^{-\gamma/2}}{4}\right) \\ &\quad + \mathbf{P}_\theta\left(\Delta_{\frac{2A+2}{m}}^{(M_1)}(Z_n^{1/2};[-A-1,A+1]) > \frac{h^{-\gamma/2}}{4}\right).\end{aligned}$$

Pour le premier terme, comme

$$\mathbf{E}Z_n^{1/2}(u) \le \exp\{-\kappa\,|u|\} \le 1,$$

$m \le h^{-\gamma/4}$ et $h < 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\left(\max_{0\le i\le m} Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{h^{-\gamma/2}}{4}\right) &\le \sum_{i=0}^{m} \mathbf{P}_\theta\left(Z_n^{1/2}(u_i) > \frac{h^{-\gamma/2}}{4}\right) \\ &\le \sum_{i=0}^{m} \frac{\mathbf{E}Z_n^{1/2}(u_i)}{\frac{h^{-\gamma/2}}{4}} \\ &\le \frac{4(m+1)}{h^{-\gamma/2}}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{8h^{-\gamma/4}}{h^{-\gamma/2}}$$
$$= 8h^{\gamma/4}.$$

Pour majorer le deuxième terme, notons d'abord que comme

$$\frac{h^{-\gamma/2}}{4} \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{2A+2}{m}\right)^{\gamma} = \left(\frac{2A+2}{\lfloor h^{-\gamma/4}\rfloor}\right)^{\gamma} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

pour h suffisamment petit on aura $h^{-\gamma/2}/4 > \big((2A+2)/m\big)^{\gamma}$. Par conséquent, et en notant que $m \geq h^{-\gamma/4}/2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_\theta\left(\Delta^{(M_1)}_{\frac{2A+2}{m}}(Z_n^{1/2};[-A-1,A+1]) > \frac{h^{-\gamma/2}}{4}\right)\\
&\qquad\leq \mathbf{P}_\theta\left(\Delta^{(M_1)}_{\frac{2A+2}{m}}(Z_n^{1/2};[-A-1,A+1]) > \left(\frac{2A+2}{m}\right)^{\gamma}\right)\\
&\qquad\leq \sum_{l=-A-1}^{A} B(l)\left(\frac{2A+2}{m}\right)^{\gamma}\\
&\qquad= B'(A+1)\left(\frac{2A+2}{m}\right)^{\gamma}\\
&\qquad\leq (4A+4)^{\gamma}\, B'(A+1)\, h^{\gamma^2/4},
\end{aligned}$$

et finalement

$$\mathbf{P}_\theta\big(2M_n > h^{-\gamma/2}\big) \leq 8h^{\gamma/4} + (4A+4)^{\gamma}\, B'(A+1)\, h^{\gamma^2/4}.$$

Ainsi, pour h suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n;[-A,A]) > \frac{\varepsilon}{2}\Big) &\leq \mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}(Z_n;[-A,A]) > h^{\gamma/2}\Big)\\
&\leq B'(A)\, h^{\gamma} + 8h^{\gamma/4} + (4A+4)^{-\gamma}\, B'(A+1)\, h^{\gamma^2/4},
\end{aligned}$$

et donc ce terme devient aussi petit que l'on veut lorsque $h \to 0$, ce qui termine la preuve de *(iii)*. □

Nous finissons cette section par quelques remarques qui permettent d'élargir le champ d'application du théorème 2.36.

Remarque 2.37. Le théorème 2.36 reste vrai si au lieu de $(\mathcal{A})$ on suppose :

$(\mathcal{A}')$ *il existe* $\gamma_1, \gamma_2, h_0 > 0$ *tels que pour tout* $0 < h < h_0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{Z}$ *et* $\theta \in \mathbb{K}$, *on a*

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big) > h^{\gamma_1}\Big) \leq B(l)\, h^{\gamma_2}, \tag{2.12}$$

où $B(\cdot)$ *est une fonction de croissance (au plus) polynomiale.*

En effet, en prenant $\gamma \leq \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, pour $0 < h < h_0$, on a

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) > h^\gamma\Big) \leq \mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) > h^{\gamma_1}\Big) \leq B(l)\, h^{\gamma_2} \leq B(l)\, h^\gamma,$$

et pour $h \geq h_0$, on a

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) > h^\gamma\Big) \leq 1 \leq \frac{1}{h_0^\gamma}\, h^\gamma.$$

Ainsi, pour tout $h > 0$, on obtient

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) > h^\gamma\Big) \leq B^\star(l)\, h^\gamma$$

avec $B^\star(l) = \max\{B(l), (1/h_0)^\gamma\}$, ce qui démontre $(\mathcal{A})$.

Remarque 2.38. Le théorème 2.36 reste vrai si au lieu de $(\mathcal{B})$ on suppose :

$(\mathcal{B}')$ *il existe* $\kappa > 0$ *et une fonction* g *positive et croissante sur* $[0, +\infty[$ *vérifiant* $g(l) \geq \kappa\, l$ *pour tout* $l \in \mathbb{N}$, *tels que*

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \leq \exp\{-g(|u|)\}, \tag{2.13}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{R}$ *et* $\theta \in \mathbb{K}$.

En effet, il suffit de faire des petites adaptations dans la preuve. Par exemple, l'enchaînement d'inégalités (2.8) devient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\theta\left(Z_n^{1/2}(u) > \frac{\exp\{-b'\,|l|\}}{2}\right) &\leq 2\exp\{b'\,|l|\}\,\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \\
&\leq 2\exp\{b'\,|l|\}\exp\{-g(|u|)\} \\
&\leq 2\exp\{b'\,|l|\}\exp\{-g(|l|)\} \\
&\leq 2\exp\{b'\,|l|\}\exp\{-\kappa\,|l|\} \\
&= 2\exp\{(b'-\kappa)|l|\}.
\end{aligned}$$

Notons que cette remarque permet, entre autres, d'appliquer le théorème dans le cas où $g(u) = \kappa \min\{u, u^2\}$ avec $\kappa > 0$.

Remarque 2.39. Si dans les hypothèses du théorème 2.36 on suppose que l'inégalité (2.2) n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (au lieu de l'être pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on aura évidemment les inégalités (2.4) et (2.5) à partir de ce même rang n_0, et l'affirmation *(iii)* restera vraie. Les mêmes considérations s'appliquent, bien entendu, aux inégalités (2.3), (2.12) et (2.13).

Remarque 2.40. On peut remplacer $A \in \mathbb{N}$ par $A \in [1, +\infty[$ dans l'affirmation *(ii)* du théorème 2.36. En effet, pour tout $A \geq 1$, on a $A/2 \leq \lfloor A \rfloor \leq A$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\theta\left(\sup_{|u|>A} Z_n(u) > \exp(-b\,A/2)\right) &\leq \mathbf{P}_\theta\left(\sup_{|u|>\lfloor A\rfloor} Z_n(u) > \exp(-b\lfloor A\rfloor)\right) \\
&\leq C\exp(-b\lfloor A\rfloor) \\
&\leq C\exp(-b\,A/2).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien l'inégalité (2.5) (avec $b/2$ à la place de b).

2.4 Quelques outils pour l'étude du module de continuité associé à la topologie M_1

Dans cette section, nous allons développer quelques outils pouvant faciliter l'étude des modules de continuité associés à la topologie M_1. Pour simplifier le cadre de l'exposition, nous considérons des fonctions définies sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et le module de continuité correspondant $\omega_h^{(M_1)}(f)$. Cependant, les résultats qu'on obtient se transposent directement aux modules de continuité restreints $\Delta_h^{(M_1)}(f;[A,B])$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (plus de détails seront donnés à la fin de la section). Notons également que toutes les notions qu'on introduit, ainsi que la plupart des résultats qu'on obtient, se transposent sans difficulté aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Par contre, ce n'est malheureusement pas le cas des résultats concernant le module de continuité $\omega_h^{(M_1)}(f)$ (ni de ceux concernant le module de continuité $\omega_h^{(U)}(f)$) à cause du deuxième terme de la définition (2.1) du module de continuité $\Delta_h^{(M_1)}(f)$. Néanmoins, comme on l'a vu dans la section précédente, dans le cadre de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance le module de continuité sur $\mathbb{R}$ est contrôlé grâce au théorème 2.36, dont la condition $(\mathcal{A})$ pourra être vérifiée en utilisant les résultats sur les modules de continuité restreints.

2.4.1 Modules de croissance et de décroissance

Nous introduisons les modules de croissance et de décroissance à l'aide de la définition suivante.

Définition 2.41. *Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $h > 0$.*

1. *On appelle module de croissance de f la quantité*

$$\omega_h^+(f) = \sup_{u,v\in[a,b]\,:\,u\le v\le u+h} \big(f(v)-f(u)\big)_+ .$$

2. *On appelle module de décroissance de f la quantité*

$$\omega_h^-(f) = \omega_h^+(-f) = \sup_{u,v\in[a,b]\,:\,u\le v\le u+h} \big(f(v)-f(u)\big)_- .$$

Rappelons que, pour $x \in \mathbb{R}$, les notations x_+ et x_- désignent respectivement la partie positive et la partie négative de x, données par

$$x_+ = \max\{x,0\} = \frac{|x|+x}{2} \qquad \text{et} \qquad x_- = (-x)_+ = -\min\{x,0\} = \frac{|x|-x}{2},$$

et que nous avons $x = x_+ - x_-$ et $|x| = x_+ + x_- = \max\{x_+, x_-\}$.

Notons qu'après avoir introduit les notions des modules de croissance et de décroissance, nous avons découvert que ces termes ont déjà été utilisé dans [2] et [7] pour désigner des objets très similaires. La différence est que dans leur définition $|x|+x$ et $|x|-x$ sont utilisés

au lieu de la partie positive et de la partie négative respectivement (et comme cela abouti à des quantités deux fois plus grandes, nous avons préféré garder notre définition initiale).

Notons également que si f est une fonction croissante, on a évidemment $\omega_h^-(f) = 0$ pour tout $h > 0$. De même, si f est une fonction décroissante, on a $\omega_h^+(f) = 0$ pour tout $h > 0$.

Les résultats suivants présentent des relations entre certains modules de continuité dans $\mathscr{D}([a,b])$ et les modules de croissance et de décroissance.

Proposition 2.42. *Soit $f \in \mathscr{D}([a,b])$ et $h > 0$. Alors,*

$$\omega_h^{(U)}(f) = \max\big\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\big\}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\omega_h^{(U)}(f) &= \sup_{u,u' \in [a,b]\,:\,|u-u'|\le h} |f(u) - f(u')| = \sup_{u,v\in[a,b]\,:\,u\le v\le u+h} |f(v) - f(u)| \\ &= \sup_{u,v\in[a,b]\,:\,u\le v\le u+h} \max\big\{\big(f(v)-f(u)\big)_+, \big(f(v)-f(u)\big)_-\big\} \\ &= \max\big\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\big\},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Théorème 2.43. *Soit $f \in \mathscr{D}([a,b])$ et $h > 0$. Alors,*

$$\omega_h^{(M_1)}(f) \le \min\big\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\big\}. \tag{2.14}$$

Preuve. Rappelons tout d'abord que

$$\omega_h^{(M_1)}(f) = \sup_{u,u',u'' \in [0,1]\,:\,u-h\le u'\le u\le u''\le u+h} d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big).$$

Si $f(u) \in [f(u'), f(u'')]$, nous avons $d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big) = 0 \le \min\big\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\big\}$.

Sinon, $f(u) - f(u')$ et $f(u) - f(u'')$ sont de même signe. Supposons qu'ils sont tous les deux positifs (le cas où ils sont négatifs se traite de la même manière). Alors, on a

$$\begin{aligned}d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big) &= \min\big\{f(u) - f(u')\,,\, f(u) - f(u'')\big\} \\ &= \min\big\{\big(f(u)-f(u')\big)_+, \big(f(u'')-f(u)\big)_-\big\} \\ &\le \min\big\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\big\}.\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas nous avons $d\big(f(u); [f(u'), f(u'')]\big) \le \min\big\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\big\}$, d'où le résultat. □

Comme corollaire immédiat de ce théorème, on retrouve le fait que si f est une fonction monotone, on a $\omega_h^{(M_1)}(f) = 0$ pour tout $h > 0$.

Notons également que, comme le montrent les deux exemples suivants, dans le théorème 2.43 l'inégalité (2.14) peut être stricte, même si pour certaines fonctions il peut y avoir égalité pour tout $h > 0$.

Exemple 2.44. Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ 1, & \text{si } 1 \leq u \leq 2, \\ 3-u, & \text{si } 2 \leq u \leq 3. \end{cases}$$

Nous avons clairement $\omega_h^+(f) = \omega_h^-(f) = \min\{h, 1\}$. D'autre part, il n'est pas difficile de voir que

$$\omega_h^{(M_1)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } h \leq \frac{1}{2}, \\ h - \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{3}{2}, \\ 1, & \text{si } h \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Nous voyons donc que $\omega_h^{(M_1)}(f) < \min\bigl\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\bigr\}$ pour $0 < h < 3/2$.

Exemple 2.45. Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par

$$f(u) = \begin{cases} 2u, & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ 3-u, & \text{si } 1 \leq u \leq 2. \end{cases}$$

Nous avons clairement $\omega_h^+(f) = \min\{2h, 2\}$ et $\omega_h^-(f) = \min\{h, 1\}$. D'autre part, il n'est pas difficile de voir que $\omega_h^{(M_1)}(f) = \min\{h, 1\}$. Par conséquent, nous avons bien l'égalité $\omega_h^{(M_1)}(f) = \min\bigl\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\bigr\}$ pour tout $h > 0$.

Les résultats précédents permettent, entre autres, de relier le module de continuité correspondant à la topologie M_1 d'une fonction dont tous les sauts sont de même signe au module de continuité uniforme de sa partie continue. Notons que nous avons également besoin de supposer la sommabilité des sauts pour garantir l'existence de la partie continue. Plus généralement, la décomposition d'une fonction càdlàg f quelconque en une partie continue et une partie « pur saut » est possible si et seulement si ses sauts sont (absolument) sommables :

$$\sum_{t \in T} |f(t) - f(t-)| < +\infty,$$

où T est l'ensemble (au plus dénombrable) des points de discontinuité de f. Notons enfin que la partie continue est définie à une constante additive près. Cependant, les divers modules de continuité (ainsi que ceux de croissance et de décroissance) sont bien définis, car ils ne font intervenir que les accroissements de la fonction.

Théorème 2.46. *Soit $h > 0$ et $f \in \mathscr{D}([a,b])$ une fonction dont les sauts sont de même signe et sommables. Alors, nous avons*

$$\omega_h^{(M_1)}(f) \leq \omega_h^{(U)}(f_{\mathrm{c.}}),$$

où $f_{\mathrm{c.}}$ est la partie continue de f.

Preuve. Soit $h > 0$ et $f \in \mathscr{D}([a,b])$.

Supposons que les sauts de f sont tous négatifs. Alors, pour tout $u, v \in [a,b]$ tels que $u \leq v \leq u+h$, on a

$$\big(f(v) - f(u)\big)_+ \leq \big(f_{\mathrm{c.}}(v) - f_{\mathrm{c.}}(u)\big)_+$$

et donc

$$\omega_h^+(f) \leq \omega_h^+(f_{\mathrm{c.}}).$$

Ainsi, par la proposition 2.42 et le théorème 2.43, on obtient

$$\begin{aligned}\omega_h^{(M_1)}(f) &\leq \min\big\{\omega_h^+(f), \omega_h^-(f)\big\} \leq \omega_h^+(f) \\ &\leq \omega_h^+(f_{\mathrm{c.}}) \leq \max\big\{\omega_h^+(f_{\mathrm{c.}}), \omega_h^-(f_{\mathrm{c.}})\big\} = \omega_h^{(U)}(f_{\mathrm{c.}}).\end{aligned}$$

Finalement, si les sauts de f sont tous positifs, il suffit d'appliquer le même raisonnement en majorant $\omega_h^-(f)$ plutôt que $\omega_h^+(f)$. □

2.4.2 Croissance et décroissance lipschitziennes

Nous introduisons maintenant les notions de croissance et de décroissance lipschitziennes et montrons comment celles-ci sont reliées aux modules de croissance et de décroissance.

Définition 2.47. *Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est de croissance lipschitzienne, s'il existe une constante $L \geq 0$ telle que*
$$\big(f(v) - f(u)\big)_+ \leq L(v-u)$$
pour tout $u, v \in [a,b]$ tels que $u \leq v$. Dans ce cas, on dit également que f est de croissance L–lipschitzienne.
2. *On dit que f est de décroissance lipschitzienne, si la fonction $-f$ est de croissance lipschitzienne, c'est-à-dire s'il existe une constante $L \geq 0$ telle que*
$$\big(f(v) - f(u)\big)_- \leq L(v-u)$$
pour tout $u, v \in [a,b]$ tels que $u \leq v$. Dans ce cas, on dit également que f est de décroissance L–lipschitzienne.

Notons que dans la définition de la croissance L–lipschitzienne, d'une manière équivalente, on pourrait utiliser $f(v) - f(u)$ à la place de $\big(f(v) - f(u)\big)_+$, ou encore demander simplement que le rapport

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \tag{2.15}$$

soit majoré par L pour tout $u, v \in [a,b]$ tels que $u \neq v$. De même, pour la décroissance L–lipschitzienne, on pourrait utiliser $-\big(f(v) - f(u)\big)$ à la place de $\big(f(v) - f(u)\big)_-$, ou encore demander que le rapport (2.15) soit minoré par L.

Notons également que la proposition suivante est trivialement vérifiée.

Proposition 2.48. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

1. *Si f est L–lipschitzienne (avec un certain $L \geq 0$), alors f est à la fois de croissance L–lipschitzienne et de décroissance L–lipschitzienne.*
2. *Si f est à la fois de croissance L_1–lipschitzienne et de décroissance L_2–lipschitzienne (avec $L_1, L_2 \geq 0$), alors f est L–lipschitzienne, avec $L = \max\{L_1, L_2\}$.*

Le théorème suivant montre le lien entre la croissance (resp. la décroissance) lipschitzienne et le module de croissance (resp. de décroissance).

Théorème 2.49. *Soit $L \geq 0$ et f une fonction définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

1. *La fonction f est de croissance L–lipschitzienne si est seulement si $\omega_h^+(f) \leq Lh$, pour tout $h > 0$.*
2. *La fonction f est de décroissance L–lipschitzienne si est seulement si $\omega_h^-(f) \leq Lh$, pour tout $h > 0$.*

Preuve. Il suffit de montrer la première assertion du théorème (car la deuxième se ramène à la première en considérant la fonction $-f$).

Soit f une fonction sur $[a,b]$ de croissance L–lipschitzienne et $h > 0$. Alors, pour tout $u, v \in [a,b]$ tels que $u \leq v \leq u + h$, on a

$$\big(f(v) - f(u)\big)_+ \leq L(v-u) \leq Lh,$$

et donc

$$\omega_h^+(f) \leq Lh.$$

Soit maintenant f une fonction sur $[a,b]$ telle que $\omega_h^+(f) \leq Lh$ pour tout $h > 0$. Alors, pour tout $u, v \in [a,b]$ tels que $u \leq v$, nous avons

$$\big(f(v) - f(u)\big)_+ \leq \omega_{v-u}^+(f) \leq L(v-u),$$

ce qui termine la preuve. □

Le théorème suivant montre qu'une fonction dérivable dont la dérivée est bornée supérieurement (resp. inférieurement) est forcément de croissance (resp. de décroissance) lipschitzienne.

Théorème 2.50. *Soit $L \geq 0$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}([a,b])$. On suppose de plus que f est dérivable sur $]a,b[$.*

1. *La fonction f est de croissance L–lipschitzienne si et seulement si $f'(t) \leq L$ pour tout $t \in]a,b[$.*
2. *La fonction f est de décroissance L–lipschitzienne si et seulement si $f'(t) \geq -L$ pour tout $t \in]a,b[$.*

À titre de comparaison, rappelons que sous les conditions de ce théorème, la fonction f est L–lipschitzienne si et seulement si $|f'(t)| \leq L$ pour tout $t \in]a,b[$, ce qui, d'ailleurs, peut se déduire directement du théorème (en tenant compte de la proposition 2.48).

Preuve. De nouveau, il suffit de montrer la première assertion du théorème (car la deuxième se ramène à la première en considérant la fonction $-f$).

On suppose d'abord que $f'(t) \leq L$ pour tout $t \in]a,b[$. Alors, par le théorème des accroissements finis, pour tout $u, v \in [a,b]$ tels que $u < v$, il existe $x \in]u,v[$ vérifiant

$$f(v) - f(u) = f'(x)(v-u),$$

d'où

$$f(v) - f(u) \leq L(v-u),$$

c'est-à-dire f est de croissance L–lipschitzienne.

Supposons maintenant qu'il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u) > L$. Alors, au voisinage du point u, on peut trouver un point v tel que

$$\frac{f(v) - f(u)}{v-u} > L,$$

ce qui contredit le fait que f est de croissance L–lipschitzienne. □

En fait, ce théorème se généralise aux fonctions de $\mathscr{C}([a,b])$ « dérivables par morceaux ». Plus précisément, il se généralise aux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables partout sur $]a,b[$ sauf en un nombre fini de points ou, autrement dit, aux fonctions $f \in \mathscr{C}([a,b])$ telles que $\mathrm{Card}\big(]a,b[\setminus D_f\big) < +\infty$, où l'on a noté

$$D_f = \{u \in]a,b[\ : \ f \text{ est dérivable au point } u\}$$

l'ensemble de points de dérivabilité de f.

Théorème 2.51. *Soit $L \geq 0$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}([a,b])$ telle que $\mathrm{Card}\big(]a,b[\setminus D_f\big) < +\infty$.*

1. *La fonction f est de croissance L–lipschitzienne si et seulement si $f'(t) \leq L$ pour tout $t \in D_f$.*
2. *La fonction f est de décroissance L–lipschitzienne si et seulement si $f'(t) \geq -L$ pour tout $t \in D_f$.*

Preuve. Nous montrons toujours seulement la première assertion du théorème (car la deuxième se ramène à la première en considérant la fonction $-f$). De plus, comme la preuve de la nécessité faite dans le théorème précédent reste valable dans ce cas, nous montrons uniquement la suffisance.

On suppose donc que $f'(t) \leq L$ pour tout $t \in D_f$, on fixe $u, v \in [a,b]$ avec $u < v$, on pose $m = \mathrm{Card}\big(]a,b[\setminus D_f\big)$, et on note $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b$, où $\{a_1, \ldots, a_m\} =]a,b[\setminus D_f$.

S'il existe $i \in \{0, \dots, m\}$ tel que $u, v \in [a_i, a_{i+1}]$, alors on peut utiliser le même raisonnement que dans la preuve du théorème précédent pour conclure que

$$f(v) - f(u) \leq L(v - u).$$

Maintenant, on suppose qu'il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $u \in [a_{i-1}, a_i[$ et $v \in]a_i, a_{i+1}]$. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[u, a_i]$ et sur $[a_i, v]$, on obtient encore

$$f(v) - f(u) = \big(f(v) - f(a_i)\big) + \big(f(a_i) - f(u)\big) \leq L(v - a_i) + L(a_i - u) = L(u - v).$$

Ce raisonnement se généralise facilement au cas où il y a plusieurs points de non-dérivabilité de f entre u et v. En effet, supposons qu'il existe $i, j \in \{0, \dots, m\}$ avec $j - i > 1$, tels que $u \in [a_i, a_{i+1}[$ et $v \in]a_j, a_{j+1}]$. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis sur chacun des intervalles $[u, a_{i+1}], [a_{i+1}, a_{i+2}], \dots, [a_{j-1}, a_j], [a_j, v]$, on obtient toujours

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= \big(f(v) - f(a_j)\big) + \big(f(a_j) - f(a_{j-1})\big) \\ &\quad + \dots + \big(f(a_{i+2}) - f(a_{i+1})\big) + \big(f(a_{i+1}) - f(u)\big) \\ &\leq L(v - a_j) + L(a_j - a_{j-1}) + \dots + L(a_{i+2} - a_{i+1}) + L(a_{i+1} - u) \\ &= L(v - u). \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien de croissance L–lipschitzienne. □

Notons que ce théorème n'est pas valable si au lieu des fonctions de $\mathscr{C}([a, b])$ dérivables par morceaux, on considère les fonctions de $\mathscr{D}([a, b])$ dérivables par morceaux. En effet, la fonction $f(u) = \mathbb{1}_{\{u \geq 1\}}$, $u \in [0, 2]$, est dérivable sur $D_f =]0, 2[\setminus \{1\}$ avec $f'(u) = 0$ sur D_f. Or, elle n'est pas de croissance lipschitzienne (notons qu'elle est de décroissance L–lipschitzienne pour tout $L \geq 0$). Cependant, si on considère qu'au point 1 cette fonction admet une dérivée égale à $+\infty$, le théorème « restera vrai » : la dérivée est minorée par $-L$ pour tout $L \geq 0$, et n'est majorée par aucun $L \geq 0$.

Une manière de généraliser le théorème précédent aux fonctions de $\mathscr{D}([a, b])$ dérivables par morceaux passe par l'extension suivante de la notion de la dérivée. Pour une fonction $f \in \mathscr{D}([a, b])$, on note $\widetilde{D}_f$ l'ensemble des points $u \in]a, b[$ tels que

$$\frac{f(u + \delta) - f(u - \delta')}{\delta + \delta'}$$

admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque $\delta \searrow 0$ et $\delta' \searrow 0$ simultanément. Pour $u \in \widetilde{D}_f$, on appelle cette limite « dérivée étendue » de f au point u, et on la note $f^\circ(u)$. Notons que $f^\circ(u) = f'(u)$ si f est dérivable en u, et que $f^\circ(u) = +\infty$ si f admet un saut positif au point u, et $f^\circ(u) = -\infty$ si f admet un saut négatif au point u. En particulier, $\widetilde{D}_f$ contient D_f, ainsi que l'ensemble T_f^{c} des points de discontinuités de f (mais il peut également contenir d'autres points comme, par exemple, des points au voisinage desquels la fonction f se comporte comme la fonction $u \mapsto \operatorname{sign}(u)\sqrt{|u|}$ le fait au voisinage

de 0). Notons que pour la validité du théorème suivant il aurait suffi d'étendre la dérivée à l'ensemble $D_f \cup T_f^{\mathrm{c}}$, mais nous trouvons l'extension proposée ci-dessus plus élégante.

Théorème 2.52. *Soit $L \geq 0$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{D}([a,b])$ telle que $\mathrm{Card}\big(]a,b[\setminus D_f\big) < +\infty$.*

1. *La fonction f est de croissance L–lipschitzienne si et seulement si $f^\circ(t) \leq L$ pour tout $t \in \widetilde{D}_f$.*
2. *La fonction f est de décroissance L–lipschitzienne si et seulement si $f^\circ(t) \geq -L$ pour tout $t \in \widetilde{D}_f$.*

Preuve. Nous montrons, encore une fois, seulement la première assertion du théorème (car la deuxième se ramène à la première en considérant la fonction $-f$).

La preuve de la suffisance suit le même schéma que celle du théorème précédent. On suppose que $f^\circ(t) \leq L$ pour tout $t \in \widetilde{D}_f$ et, comme avant, on fixe $u, v \in [a,b]$ avec $u < v$, on pose $m = \mathrm{Card}\big(]a,b[\setminus D_f\big)$, et on note $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b$, où $\{a_1, \ldots, a_m\} =]a,b[\setminus D_f$.

Nous traitons uniquement le cas où il y a plusieurs points de non-dérivabilité de f entre u et v (le cas où il y en a un seul s'adapte de la même manière, et le cas où il n'y en a pas est le même qu'avant). On suppose donc qu'il existe $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ avec $j - i > 1$, tels que $u \in [a_i, a_{i+1}[$ et $v \in]a_j, a_{j+1}]$.

Notons que, comme $f^\circ(t) \leq L < +\infty$, les sauts de la fonction f sont tous négatifs, et donc, en particulier, $f(a_i) - f(a_i-) \leq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Introduisons également, pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, la fonction

$$f_i(u) = \begin{cases} f(u), & \text{si } u \in [a_i, a_{i+1}[, \\ f(a_{i+1}-), & \text{si } u = a_{i+1}, \end{cases}$$

qui est, en fait, le prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$ de la restriction sur $]a_i, a_{i+1}[$ de f.

En appliquant le théorème des accroissements finis aux fonctions $f_i, f_{i+1}, \ldots, f_{j-1}, f_j$ sur les intervalles $[u, a_{i+1}], [a_{i+1}, a_{i+2}], \ldots, [a_{j-1}, a_j], [a_j, v]$ respectivement, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= \big(f(v) - f(a_j)\big) + \big(f(a_j) - f(a_j-)\big) + \big(f(a_j-) - f(a_{j-1})\big) \\ &\quad + \cdots + \big(f(a_{i+2}-) - f(a_{i+1})\big) + \big(f(a_{i+1}) - f(a_{i+1}-)\big) + \big(f(a_{i+1}-) - f(u)\big) \\ &\leq \big(f(v) - f(a_j)\big) + \big(f(a_j-) - f(a_{j-1})\big) \\ &\quad + \cdots + \big(f(a_{i+2}-) - f(a_{i+1})\big) + \big(f(a_{i+1}-) - f(u)\big) \\ &= \big(f_j(v) - f_j(a_j)\big) + \big(f_{j-1}(a_j) - f_{j-1}(a_{j-1})\big) \\ &\quad + \cdots + \big(f_{i+1}(a_{i+2}) - f_{i+1}(a_{i+1})\big) + \big(f_i(a_{i+1}) - f_i(u)\big) \\ &\leq L(v - a_j) + L(a_j - a_{j-1}) + \cdots + L(a_{i+2} - a_{i+1}) + L(a_{i+1} - u) \\ &= L(v - u). \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien de croissance L–lipschitzienne.

Supposons maintenant qu'il existe $u \in \widetilde{D}_f$ tel que $f^\circ(u) > L$. Alors, au voisinage du point u, on peut trouver des points u' et u'' tels que

$$\frac{f(u') - f(u'')}{u' - u''} > L,$$

ce qui contredit le fait que f est de croissance L–lipschitzienne. □

Pour conclure cette section, précisons que les résultats présentés se transposent aux modules de continuité restreints

$$\Delta_h^{(M_1)}(f;[A,B]) = \sup_{u\in[A,B]} \sup_{u-h\le u'\le u\le u''\le u+h} d\big(f(u);[f(u'),f(u'')]\big)$$

et

$$\Delta_h^{(U)}(f;[A,B]) = \sup_{u\in[A,B]} \sup_{u-h\le v\le u+h} |f(u)-f(v)|,$$

en utilisant les modules de croissance et de décroissance restreints

$$\Delta_h^{\pm}(f;[A,B]) = \sup\big(f(v)-f(u)\big)_{\pm},$$

où le sup est maintenant pris sur tous les réels u, v tels que (au moins) un des deux appartient à $[A,B]$ et $u \le v \le u+h$.

2.5 Étude de l'EMV dans le cas rapide du modèle poissonnien rupture lisse

Dans cette section, nous terminons l'étude du modèle poissonnien de rupture lisse entamée dans le chapitre 1, en établissant les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas rapide. Pour cela, nous utilisons la « version M_1 » de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance développée dans les sections 2.2 et 2.3, ainsi que les outils élaborés dans la section 2.4 pour l'étude des modules de continuité correspondant à la topologie M_1. Nous verrons également comment l'utilisation de la version M_1 de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance (au lieu de sa version classique utilisant la topologie J_1) peut permettre, dans certains cas, de simplifier l'étude de l'EMV dans des modèles de rupture considérés auparavant.

Rappelons tout d'abord brièvement le modèle poissonnien de rupture lisse, ainsi que les résultats obtenus pour ce modèle dans le chapitre 1. Soit $0 < \alpha < \beta < \tau$ des constantes connues, ψ une fonction continue strictement positive connue sur $[0,\tau]$, et $r \neq 0$ une constante connue vérifiant $r > -\min_{0\le t\le\tau}\psi(t)$. Soit également $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite connue décroissante vers 0. On observe $X^{(n)} = (X_1,\dots,X_n)$, où les $X_j = \big(X_j(t),\ 0\le t\le\tau\big)$, $j = 1,\dots,n$, sont des processus de Poisson (sur l'intervalle $[0,\tau]$) indépendants, de fonction d'intensité $\lambda_\theta = \lambda_\theta^{(n)}$ donnée par

$$\lambda_\theta^{(n)}(t) = \psi(t) + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\,\mathbb{1}_{[\theta,\theta+\delta_n[}(t) + r\,\mathbb{1}_{[\theta+\delta_n,\tau]}(t), \qquad 0\le t\le\tau,$$

où $\theta \in \Theta = (\alpha, \beta)$ est un paramètre unidimensionnel inconnu que nous cherchons à estimer dans l'asymptotique $n \to +\infty$. Pour cela, nous considérons l'estimateur du maximum de vraisemblance et les estimateurs bayésiens, et nous les étudions en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance. Notons que le rapport de vraisemblance normalisé de ce modèle est donné par

$$Z_n(u) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_0^\tau \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)} \right) \mathrm{d}X_j(t) - n \int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t) - \lambda_\theta(t) \big) \, \mathrm{d}t \right\}, \qquad u \in \mathbb{U}_n,$$

où $\mathbb{U}_n =]\varphi_n^{-1}(\alpha - \theta), \varphi_n^{-1}(\beta - \theta)[$ et $\varphi_n \searrow 0$ est la vitesse de normalisation de la vraisemblance.

Nous avons montré dans le chapitre 1 que le comportement asymptotique de notre modèle (ainsi que les propriétés de l'EMV et des EB) dépend de la vitesse de convergence de δ_n vers zéro. Plus précisément, nous avons établi que dans le cas $n\delta_n \to +\infty$ (que nous appelons le cas lent), le modèle est localement asymptotiquement normal (LAN) — avec une vitesse de normalisation de la vraisemblance $\varphi_n = \sqrt{\delta_n / n}$ — et, par conséquent, les EMV et les EB sont consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces (la convergence des moments des estimateurs a également lieu). Quant au cas $n\delta_n \to 0$ (que nous appelons le cas rapide), en prenant comme vitesse de normalisation de la vraisemblance $\varphi_n = 1/n$, nous avons montré que :

— les lois fini-dimensionnelles du rapport de vraisemblance normalisé Z_n convergent (uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$ pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$) vers celles de $Z^\star_{a,b}$, où $a = \psi(\theta)$, $b = \psi(\theta) + r$, et le processus $Z^\star_{a,b}$ est défini par

$$Z^\star_{a,b}(u) = \begin{cases} \exp\Big\{ \ln\big(\frac{a}{b}\big) Y^+(u) + (b-a)u \Big\}, & \text{si } u \in \mathbb{R}_+, \\ \exp\Big\{ \ln\big(\frac{b}{a}\big) Y^-\big((-u)-\big) + (b-a)u \Big\}, & \text{si } u \in \mathbb{R}_-, \end{cases}$$

avec Y^+ et Y^- des processus de Poisson indépendants sur $\mathbb{R}_+$ d'intensités respectives b et a (cf. lemme 1.10) ;

— il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbf{E}_\theta \big| Z_n^{1/2}(u) - Z_n^{1/2}(v) \big|^2 \leq C|u - v|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathbb{U}_n$ et $\theta \in \Theta$ (cf. lemme 1.11) ;

— il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour n suffisamment grand, on a

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \leq \exp\big\{ -\kappa \min\{|u|, u^2\} \big\}$$

pour tout $u \in \mathbb{U}_n$ et $\theta \in \Theta$ (cf. lemme 1.12).

Ensuite, grâce à la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance, nous avons pu en déduire les propriétés des EB.

Par contre, afin d'étudier l'EMV nous avions besoin de la convergence faible du rapport de vraisemblance normalisé Z_n vers le rapport de vraisemblance limite $Z^\star_{a,b}$. Or, nous voyons que dans le cas rapide, Z_n est un processus à trajectoires continues et $Z^\star_{a,b}$ est un processus à trajectoires càdlàg discontinues, ce qui implique que cette convergence ne peut pas avoir lieu dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ (ni, bien sûr, dans $\mathscr{C}_0^{(U)}(\mathbb{R})$). Pour établir les propriétés de l'EMV (énoncées dans le théorème suivant), nous allons donc recourir à la version M_1 de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance, c'est-à-dire établir la convergence faible de Z_n vers $Z^\star_{a,b}$ dans l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ et en déduire ensuite les propriétés suivantes de l'EMV.

Théorème 2.53. *Supposons que $n\delta_n \to 0$. Alors, l'EMV $\hat\theta_n$ possède, uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$ pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$, les propriétés suivantes :*

— *$\hat\theta_n$ est consistant ;*

— *$\hat\theta_n$ converge à la vitesse $\varphi_n = 1/n$ et sa loi limite est celle de la variable aléatoire*

$$\eta_{a,b} = \operatorname*{argsup}_{u\in\mathbb{R}} Z^\star_{a,b}(u),$$

c'est-à-dire

$$n\big(\hat\theta_n - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b}\ ;$$

— *nous avons la convergence des moments polynomiaux de tout ordre, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to+\infty} n^p\, \mathbf{E}_\theta\big|\hat\theta_n - \theta\big|^p = \mathbf{E}|\eta_{a,b}|^p$$

pour tout $p > 0$.

Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, nous allons démontrer ce théorème en utilisant la version M_1 de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance. Pour cela, nous allons utiliser le théorème 2.36 (rappelons que l'affirmation *(iii)* de ce théorème avec le lemme 1.10 garantissent la convergence faible de Z_n vers $Z^\star_{a,b}$ dans l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$).

Avant de vérifier les hypothèses du théorème 2.36, nous avons besoin de préciser la manière dont on étend sur $\mathbb{R}$ le processus $Z_n(u)$, $u \in \mathbb{U}_n$. Nous aurions, bien sûr, pu le poser tout simplement égal à 0 à l'extérieur de l'intervalle $\mathbb{U}_n$ (en mettant les bonnes valeurs sur les bords de $\mathbb{U}_n$ pour que les trajectoires appartiennent à l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$). Mais pour faciliter l'étude du module de continuité nous allons procéder différemment.

Tout d'abord, nous notons u_n^- et u_n^+ respectivement les bords gauche et droit de l'intervalle $\mathbb{U}_n$, et nous prolongeons les trajectoires de Z_n à ces deux points par continuité. Ensuite, à l'extérieur de $\mathbb{U}_n$, nous faisons décroître (lorsque u s'éloigne de $\mathbb{U}_n$) les trajectoires de $\ln Z_n$ linéairement avec une pente égale à $|r|$. Plus précisément, nous posons $Z_n(u) = Z_n(u_n^+)\exp\{-|r|(u-u_n^+)\}$ pour $u > u_n^+$, et $Z_n(u) = Z_n(u_n^-)\exp\{-|r|(u_n^- - u)\}$ pour $u < u_n^-$. Notons que le processus ainsi obtenu est bien à trajectoires dans l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}_0(\mathbb{R})$, et que nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.54. *La fonction $\ln Z_n(u)$, $u \in \mathbb{R}$, est de croissance r-lipschitzienne dans le cas $r > 0$ et de décroissance $|r|$-lipschitzienne dans le cas $r < 0$.*

Preuve. Nous considérons seulement le cas $r > 0$, le cas $r < 0$ se traitant de manière similaire. Nous allons montrer le lemme en appliquant le théorème 2.51. Pour cela, notons que pour $u \in \mathbb{U}_n$, on a

$$\begin{aligned}\ln Z_n(u) &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^\tau \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right) \mathrm{d}X_j(t) - n\int_0^\tau \left(\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t) - \lambda_\theta(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{X_j(T)} \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j})}{\lambda_\theta(t_{i,j})}\right) + ru,\end{aligned}$$

où $t_{i,j}$ est le i-ème « événement » (point de discontinuité) du processus X_j.

Comme

$$\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j}) = \psi(t_{i,j}) + \frac{r}{\delta_n}\left(t_{i,j} - \theta - \frac{u}{n}\right) \mathbb{1}_{[\theta+\frac{u}{n},\theta+\frac{u}{n}+\delta_n[}(t_{i,j}) + r\,\mathbb{1}_{[\theta+\frac{u}{n}+\delta_n,\tau]}(t_{i,j}),$$

chaque terme de la dernière somme est dérivable par rapport à u partout, sauf (au maximum) en deux points : $n(t_{i,j}-\theta)$ et $n(t_{i,j}-\theta)-n\delta_n$ (selon s'ils appartiennent ou pas à $\mathbb{U}_n$). La fonction $\ln Z_n$ est donc bien dérivable par morceaux.

De plus, pour tout $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, X_j(T)$ et $u \in \mathbb{U}_n$ un point de dérivabilité de $\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j})$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j})}{\lambda_\theta(t_{i,j})}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln\left(\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j})\right) = \frac{1}{\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j})} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j}) \leq 0.$$

En effet, $\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j}) \geq 0$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j}) \leq 0$, car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j}) = \begin{cases} -\frac{r}{n\delta_n}, & \text{si } u \in]n(t_{i,j}-\theta) - n\delta_n, n(t_{i,j}-\theta)[\cap \mathbb{U}_n, \\ 0, & \text{si } u \in [n(t_{i,j}-\theta) - n\delta_n, n(t_{i,j}-\theta)]^{\mathrm{c}} \cap \mathbb{U}_n. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln Z_n(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{X_j(T)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+\frac{u}{n}}(t_{i,j})}{\lambda_\theta(t_{i,j})}\right) + r \leq r$$

pour tout point de dérivabilité $u \in \mathbb{U}_n$ de $\ln Z_n$.

Finalement, comme pour $u > u_n^+$ on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln Z_n(u) = -r$, et pour $u < u_n^-$ on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln Z_n(u) = r$, on obtient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln Z_n(u) \leq r$ pour tout point de dérivabilité $u \in \mathbb{R}$ de $\ln Z_n$. Par conséquent, d'après le théorème 2.51, la fonction $\ln Z_n(u)$, $u \in \mathbb{R}$, est de croissance r-lipschitzienne. □

Il est intéressant de noter que ce lemme va permettre de contrôler les modules de continuité restreintes de la fonction $\ln Z_n$ dans la preuve du lemme suivant. En effet, dans le cas $r > 0$ par exemple, ce lemme garanti que $\ln Z_n$ est de croissance r-lipschitzienne, et même si elle est seulement de décroissance $\frac{r}{n\delta_n}$-lipschitzienne (rappelons qu'on est dans

le cas rapide, et qu'on a donc $\frac{r}{n\delta_n} \gg r$), grâce au théorème 2.43, la plus petite des deux quantités prévaut.

Pour vérifier la condition $(\mathcal{A})$ du théorème 2.36, il suffit, grâce à la remarque 2.37, de vérifier la condition $(\mathcal{A}')$. Or, celle-ci est remplie d'après le lemme suivant.

Lemme 2.55. *Soit un compact $\mathbb{K} \subset \Theta$. Alors, il existe $\gamma > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $0 < h < h_0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{K}$, on a*

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) > h^\gamma\Big) \leq C\, h^{2\gamma}, \tag{2.16}$$

où C est une constante positive.

Preuve. Nous considérons seulement le cas $r > 0$, le cas $r < 0$ se traitant de manière similaire. Pour tout $u, u' \in [l, l+1]$, par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction exponentielle entre $\ln Z_n^{1/2}(u)$ et $\ln Z_n^{1/2}(u')$, on a

$$\begin{aligned}
\big|Z_n^{1/2}(u) - Z_n^{1/2}(u')\big| &= \big|\exp\big\{\ln Z_n^{1/2}(u)\big\} - \exp\big\{\ln Z_n^{1/2}(u')\big\}\big| \\
&\leq \big|\ln Z_n^{1/2}(u) - \ln Z_n^{1/2}(u')\big| \max\{Z_n^{1/2}(u), Z_n^{1/2}(u')\} \\
&\leq \frac{1}{2}\big|\ln Z_n(u) - \ln Z_n(u')\big| \sup_{v\in[l,l+1]} Z_n^{1/2}(v),
\end{aligned}$$

ce qui implique (en notant que la fonction $x \mapsto \exp\{x/2\}$ est monotone) que

$$\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) \leq \frac{1}{2}\,\Delta_h^{(M_1)}\big(\ln Z_n; [l, l+1]\big) \sup_{v\in[l,l+1]} Z_n^{1/2}(v).$$

Comme la fonction $\ln Z_n$ est de croissance r-lipschitzienne, on a

$$\ln Z_n(u) \leq \ln Z_n(l) + r$$

pour tout $u \in [l, l+1]$, ce qui implique

$$Z_n^{1/2}(u) \leq e^{r/2}\, Z_n^{1/2}(l).$$

Ainsi, on obtient

$$\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2}; [l, l+1]\big) \leq \frac{1}{2}\,\Delta_h^{(M_1)}\big(\ln Z_n; [l, l+1]\big)\, e^{r/2}\, Z_n^{1/2}(l).$$

En utilisant les théorèmes 2.43 et 2.49, nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{(M_1)}\big(\ln Z_n; [l, l+1]\big) &\leq \min\big\{\Delta_h^+\big(\ln Z_n; [l, l+1]\big), \Delta_h^-\big(\ln Z_n; [l, l+1]\big)\big\} \\
&\leq \Delta_h^+\big(\ln Z_n; [l, l+1]\big) \\
&\leq rh,
\end{aligned}$$

et nous pouvons donc écrire

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big)>h^\gamma\Big)\le \mathbf{P}_\theta\bigg(\frac{1}{2}\,\Delta_h^{(M_1)}\big(\ln Z_n;[l,l+1]\big)\,e^{r/2}\,Z_n^{1/2}(l)>h^\gamma\bigg)$$
$$\le \mathbf{P}_\theta\big(rh>h^{2\gamma}\big)+\mathbf{P}_\theta\bigg(\frac{1}{2}\,e^{r/2}\,Z_n^{1/2}(l)>h^{-\gamma}\bigg).$$

Pour le premier terme, en prenant $\gamma<1/2$ et en posant $h_0=r^{\frac{1}{2\gamma-1}}$, on obtient

$$\mathbf{P}_\theta\big(rh>h^{2\gamma}\big)=\mathbf{P}_\theta\big(r>h^{2\gamma-1}\big)=\mathbf{P}_\theta(h_0<h)=0$$

pour tout $0<h<h_0$.

Pour le deuxième terme, par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbf{P}_\theta\bigg(\frac{1}{2}\,e^{r/2}\,Z_n^{1/2}(l)>h^{-\gamma}\bigg)=\mathbf{P}_\theta\Big(Z_n(l)>4e^{-r}h^{-2\gamma}\Big)\le\frac{\mathbf{E}_\theta Z_n(l)}{4e^{-r}h^{-2\gamma}}\,,$$

et comme $\mathbf{E}_\theta Z_n(l)\le 1$ (en fait, on a $\mathbf{E}_\theta Z_n(l)=1$ si $l\in\mathbb{U}_n$, et on peut majorer $\mathbf{E}_\theta Z_n(l)$ par $\mathbf{E}_\theta Z_n(u_n^+)$ ou par $\mathbf{E}_\theta Z_n(u_n^-)$ sinon), on obtient

$$\mathbf{P}_\theta\bigg(\frac{1}{2}\,e^{r/2}\,Z_n^{1/2}(l)>h^{-\gamma}\bigg)\le\frac{e^r}{4}\,h^{2\gamma}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big)>h^\gamma\Big)\le\frac{e^r}{4}\,h^{2\gamma},$$

d'où l'inégalité (2.16) avec $C=e^r/4$. □

Il nous reste à vérifier la condition $(\mathcal{B})$ du théorème 2.36. Plus précisément, compte tenu des remarques 2.38 et 2.39, nous allons plutôt montrer le lemme suivant.

Lemme 2.56. *Soit un compact $\mathbb{K}\subset\Theta$. Alors, il existe une constante $\kappa'>0$ et un rang $n_0\in\mathbb{N}^*$ tels que pour $n\ge n_0$, on a*

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u)\le\exp\big\{-\kappa'\min\{|u|,u^2\}\big\}$$

pour tout $u\in\mathbb{R}$ et $\theta\in\mathbb{K}$.

Preuve. Notons tout d'abord que si $u\in\mathbb{U}_n$, d'après le lemme 1.12 nous avons déjà le résultat (et il est valable pour tout $\kappa'\le\kappa$).

Maintenant si $u\ge u_n^+$, en posant $\kappa'=\min\{\kappa,|r|/2\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u)&=\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u_n^+)\exp\big\{-|r|(u-u_n^+)/2\big\}\\&\le\exp\{-\kappa u_n^+\}\exp\big\{-|r|(u-u_n^+)/2\big\}\\&\le\exp\{-\kappa' u_n^+\}\exp\big\{-\kappa'(u-u_n^+)\big\}\\&=\exp\big\{-\kappa' u\big\}.\end{aligned}$$

Ici, sans perte de généralité, nous avons supposé $u_n^+\ge 1$ (en effet, il suffit d'ajuster n_0).

Le cas $u\le u_n^-$ se traite de la même manière, et on obtient ainsi le résultat pour tout $u\in\mathbb{R}$. □

Ainsi, toutes les conditions sont réunies, et nous pouvons donc déduire les affirmations *(i)*–*(iii)* du théorème 2.36 (avec, dans les deux premières, les inégalités (2.4) et (2.5) valables à partir du rang n_0). En particulier, la convergence faible (uniforme par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$) de Z_n vers $Z^\star_{a,b}$ dans l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ est établie car, comme on l'a déjà dit, elle découle du lemme 1.10 et de l'affirmation *(iii)*.

Maintenant, nous allons montrer comment la vitesse de convergence et la loi limite de l'EMV peuvent se déduire de la convergence de Z_n vers $Z^\star_{a,b}$ dans l'espace $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$. Le raisonnement est exactement le même que celui développé dans [57] par Ibragimov et Khasminskii dans le cadre de la convergence dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$.

Soit

$$\hat\theta_n^+ = \sup\Big\{\operatorname*{argsup}_{t\in\Theta} L\big(t, X^{(n)}\big)\Big\} \qquad \text{et} \qquad \hat\theta_n^- = \inf\Big\{\operatorname*{argsup}_{t\in\Theta} L\big(t, X^{(n)}\big)\Big\}$$

respectivement la plus grande et la plus petite « valeurs possibles » de l'EMV. Pour montrer que $\varphi_n^{-1}\big(\hat\theta_n - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b}$, il suffit de montrer que $\varphi_n^{-1}\big(\hat\theta_n^+ - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b}$ et $\varphi_n^{-1}\big(\hat\theta_n^- - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b}$. Nous traitons seulement la première convergence, la deuxième se montrant de manière similaire.

Tout d'abord, en utilisant le changement de variable $t = \theta + u\varphi_n$ (et donc $u = \varphi_n^{-1}(t-\theta)$), on peut écrire

$$\varphi_n^{-1}(\hat\theta_n^+ - \theta) = \sup\Big\{\operatorname*{argsup}_{u\in\mathbb{U}_n} L\big(\theta + u\varphi_n, X^{(n)}\big)\Big\} = \sup\Big\{\operatorname*{argsup}_{u\in\mathbb{U}_n} Z_n(u)\Big\}.$$

Par conséquent, comme Z_n est à trajectoires continues, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\{\varphi_n^{-1}(\hat\theta_n^+ - \theta) < x\} = \Big\{\sup_{u\le x} Z_n(u) > \sup_{u>x} Z_n(u)\Big\},$$

d'où

$$\mathbf{P}_\theta\big(\varphi_n^{-1}(\hat\theta_n^+ - \theta) < x\big) = \mathbf{P}_\theta\Big(\sup_{u\le x} Z_n(u) > \sup_{u>x} Z_n(u)\Big).$$

Bien que les trajectoires du processus $Z^\star_{a,b}$ ne soient pas continues, on a également

$$\mathbf{P}(\eta_{a,b} < x) = \mathbf{P}\Big(\sup_{u\le x} Z^\star_{a,b}(u) > \sup_{u>x} Z^\star_{a,b}(u)\Big).$$

En effet, en notant $A_x = \big\{Z^\star_{a,b}(x-) = Z^\star_{a,b}(x)\big\}$, on a

$$\{\eta_{a,b} < x\} \cap A_x = \Big\{\sup_{u\le x} Z^\star_{a,b}(u) > \sup_{u>x} Z^\star_{a,b}(u)\Big\} \cap A_x,$$

et il reste à remarquer que $\mathbf{P}(A_x) = 1$.

Une autre conséquence du fait que A_x est un événement de probabilité 1 est que

$$T_{Z^\star_{a,b}} = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, \mathbf{P}\big(Z^\star_{a,b}(x-) \neq Z^\star_{a,b}(x)\big) = 0\big\} = \mathbb{R}.$$

Donc, en tenant compte de la remarque 2.27, nous obtenons la convergence en loi

$$\sup_{u\leq x} Z_n(u) - \sup_{u>x} Z_n(u) \Longrightarrow \sup_{u\leq x} Z^\star_{a,b}(u) - \sup_{u>x} Z^\star_{a,b}(u).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}_\theta\left(\sup_{u\leq x} Z_n(u) > \sup_{u>x} Z_n(u)\right) \longrightarrow \mathbf{P}\left(\sup_{u\leq x} Z^\star_{a,b}(u) > \sup_{u>x} Z^\star_{a,b}(u)\right)$$

à condition que

$$\mathbf{P}\left(\sup_{u\leq x} Z^\star_{a,b}(u) = \sup_{u>x} Z^\star_{a,b}(u)\right) = 0.$$

Or, en tenant compte du fait que l'argsup de $Z^\star_{a,b}$ est unique, on a

$$\mathbf{P}\left(\sup_{u\leq x} Z^\star_{a,b}(u) = \sup_{u>x} Z^\star_{a,b}(u)\right) = \mathbf{P}(\eta_{a,b} = x)$$

(notons que, comme ci-dessus, cette égalité entre probabilités est vraie non pas par égalité des évènements concernés, mais par celle de leurs intersections avec A_x).

Ainsi, nous avons montré que

$$\mathbf{P}_\theta\big(\varphi_n^{-1}(\hat\theta_n^+ - \theta) < x\big) \longrightarrow \mathbf{P}(\eta_{a,b} < x)$$

à condition que

$$\mathbf{P}(\eta_{a,b} = x) = 0.$$

La convergence en loi $\varphi_n^{-1}\big(\hat\theta_n^+ - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b}$ est donc établie, et comme on l'a déjà dit, avec $\varphi_n^{-1}\big(\hat\theta_n^- - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b}$, on en déduit la vitesse de convergence et la loi limite de $\hat\theta_n$:

$$\varphi_n^{-1}\big(\hat\theta_n - \theta\big) \Longrightarrow \eta_{a,b}.$$

Notons enfin que, la convergence des moments s'établit exactement de la même manière que dans [57] en se servant de l'affirmation *(ii)* du théorème 2.36, ce qui termine la preuve du théorème 2.53.

Pour terminer ce chapitre, voyons comment l'utilisation de la version M_1 de la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance (au lieu de sa version classique utilisant la topologie J_1) peut permettre de simplifier l'étude de l'EMV dans le cas particulier des modèles de rupture ayant des rapports de vraisemblance normalisés Z_n dont les sauts sont de même signe (pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$). Cette hypothèse est, notamment, vérifiée aussi bien pour les modèles de rupture i.i.d. considérés dans [57], que pour les modèles de rupture poissonniens considérés dans [66], lorsque ceux-ci ne présentent qu'un seul point de rupture (c'est-à-dire lorsque respectivement la densité ou la fonction d'intensité admet une seule discontinuité).

Aussi bien dans [57] que dans [66], la convergence faible du rapport de vraisemblance normalisé Z_n vers un rapport de vraisemblance limite Z dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ est démontrée en

vérifiant les conditions du théorème 5.4.2 de [66] (qui, de fait, est déjà présent implicitement dans [57] sans y être énoncé), dont nous donnons ici une reformulation adaptée.

Théorème 2.57. *Soit Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des rapports de vraisemblance normalisés tels que :*

1. *les lois fini-dimensionnelles de Z_n convergent (uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{K}$ pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$) vers celles de Z ;*
2. *il existe une constante $\kappa > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta Z_n^{1/2}(u) \leq \exp\{-\kappa|u|\}$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{U}_n$ et $\theta \in \mathbb{K}$;
3. *il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta \big| Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(u) - Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(v) \big|^2 \leq C|u-v|^2$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathbb{U}_n$ et $\theta \in \mathbb{K}$, où $Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}$ désigne la partie absolument continue de $Z_n^{1/2}$;
4. *il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, en notant $A_i = A_i^{(n)}(u, u+h)$ l'événement $\big\{Z_n$ admet au moins i points de discontinuité sur l'intervalle $]u, u+h[\big\}$, on a*

$$\mathbf{P}_\theta(A_i) \leq C_i h^i, \qquad i = 1, 2,$$

   pour tout $h > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathbb{U}_n$ et $\theta \in \mathbb{K}$.

Alors, Z_n converge vers Z dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$.

Notons que nous parlons ici de la partie absolument continue (car les trajectoires de $Z_n^{1/2}$ sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux), mais ce n'est rien d'autre que la partie continue utilisée dans le théorème 2.46.

La simplification que nous proposons consiste à utiliser à la place de ce théorème le théorème suivant.

Théorème 2.58. *Soit Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des rapports de vraisemblance normalisés dont les sauts sont de même signe (pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$) tels que les conditions 1–3 du théorème précédent sont vérifiées. Alors, Z_n converge vers Z dans $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$.*

Non seulement l'utilisation de ce théorème est considérablement plus facile (car il n'y a plus besoin de vérifier la condition 4), mais aussi sa preuve est beaucoup plus simple grâce aux outils développés dans ce chapitre. Remarquons également que la conclusion de ce théorème est la convergence faible de Z_n vers Z dans $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$ (plutôt que dans $\mathscr{D}_0^{(J_1)}(\mathbb{R})$ comme dans le théorème 2.57). Mais, comme on l'a déjà vu ci-dessus, celle-ci est suffisante pour l'étude de l'EMV.

Pour montrer le théorème 2.58, nous appliquons le théorème 2.36. La condition $(\mathcal{B})$ n'étant rien d'autre que la condition 2, il nous reste à vérifier la condition $(\mathcal{A})$. Or, celle-ci est remplie d'après le lemme suivant.

Lemme 2.59. *Sous la condition 3, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big) > h^{1/4}\Big) \leq C\,h^{1/2}$$

pour tout $0 < h < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{K}$.

Preuve. Notons tout d'abord que dans la preuve du théorème 5.4.2 de [66], il a été montré que la condition 3 implique (grâce au lemme 5.3.2 de [66]) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbf{P}_\theta\Bigg(\sup_{u,u'\in[l,l+1]\,:\,|u-u'|<h}\big|Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(u) - Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(u')\big| > h^{1/4}\Bigg) \leq C\,h^{1/2} \tag{2.17}$$

pour tout $h > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{K}$. En appliquant le même raisonnement sur l'intervalle $[l-1, l+2]$ (à la place de l'intervalle $[l, l+1]$), nous obtenons plutôt l'inégalité

$$\mathbf{P}_\theta\Bigg(\sup_{u,u'\in[l-1,l+2]\,:\,|u-u'|<h}\big|Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(u) - Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(u')\big| > h^{1/4}\Bigg) \leq C\,h^{1/2}.$$

Par ailleurs, comme les sauts de Z_n sont de même signe, d'après le théorème 2.46, nous avons

$$\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big) \leq \Delta_h^{(U)}\big(Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2};[l,l+1]\big) \leq \sup_{u,u'\in[l-1,l+2]\,:\,|u-u'|<h}\big|Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(u) - Z_{n,\text{a.c.}}^{1/2}(u')\big|$$

pour tout $0 < h < 1$.

Par conséquent,

$$\mathbf{P}_\theta\Big(\Delta_h^{(M_1)}\big(Z_n^{1/2};[l,l+1]\big) > h^{1/4}\Big) \leq C\,h^{1/2},$$

ce qui termine la preuve. □

Notons que la preuve du théorème 5.4.2 de [66] est considérablement plus complexe, car elle se base, en plus du contrôle de la partie absolument continue de $Z_n^{1/2}$ grâce à l'inégalité (2.17), sur le fait de contrôler la probabilité d'avoir deux saut rapprochés. C'est précisément pour obtenir ce dernier contrôle qu'est utilisé la quatrième condition du théorème, dont nous avons pu nous passer.

Notons également que la simplification qu'on propose peut s'appliquer, plus généralement, aux modèles de ruptures i.i.d. et poissonniens présentant plusieurs ruptures « allant dans le même sens » (c'est-à-dire lorsque les sauts de la densité ou de la fonction d'intensité sont de même signe). Cependant, elle ne s'applique pas aux modèles présentant des ruptures allant dans des sens opposés (qui rentrent dans le champs d'application du théorème 5.4.2 de [66]). De même, les résultats que nous avons obtenus pour le modèle

poissonnien de rupture lisse se généralisent directement aux modèles présentant plusieurs ruptures lisses allant dans le même sens. Par contre, leur généralisation aux modèles présentant des ruptures lisses allant dans des sens opposés n'est pas triviale (notamment en ce qui concerne la convergence faible du rapport de vraisemblance normalisé dans $\mathscr{D}_0^{(M_1)}(\mathbb{R})$) et reste ouvert pour l'instant.

Deuxième partie

Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne

Chapitre 3

Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne d'un échantillon de fonctions aléatoires

Une rupture est un changement brusque dans la loi statistique d'un phénomène. Une question courante dans les problèmes de rupture consiste à tester l'hypothèse nulle d'aucun changement dans la loi d'un phénomène contre l'hypothèse alternative de changement à un moment inconnu. Dans ce chapitre, nous considérons le problème d'une rupture épidémique (ainsi que le problème d'une rupture simple) dans la régularité höldérienne d'une suite de fonctions aléatoires. Plus précisément, à partir de l'observation observation de n courbes aléatoires « journalières », $X_k : [k-1, k] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto X_k(t)$, nous testons l'hypothèse nulle

(H_0) $X_1, \ldots, X_n$ sont des éléments aléatoires dans $\mathcal{H}^o_\alpha([0,1], \mathbb{R})$, indépendants, identiquement distribués, de régularité höldérienne α et de carré intégrable ($\mathbf{E}\|X_k\|^2_\alpha < +\infty$), où $0 < \alpha < 1$,

contre l'hypothèse alternative

(H_1) il existe $1 < k^\star < m^\star < n$ dépendants de n tels qu'en notant $I_n = [k^\star + 1, m^\star]$ et $\bar{I}_n = [1, n] \backslash I_n$, chacune des deux sous-suites $(X_k)_{k \in I_n}$ et $(X_k)_{k \in \bar{I}_n}$ a ses termes indépendants et identiquement distribués mais sur $\bar{I}_n$ les X_k sont de régularité höldérienne α et de carré intégrable (*i.e.*, $\mathbf{E}\|X_k\|^2_\alpha < +\infty$) et sur I_n, avec une probabilité non nulle, ils sont de régularité höldérienne β et pas mieux (c'est-à-dire, pour $k \in I_n$, $X_k \in \mathcal{H}_\beta([0,1], \mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\alpha([0,1], \mathbb{R})$, avec une probabilité non nulle) et de carré intégrable (*i.e.*, $\mathbf{E}\|X_k\|^2_\beta < +\infty$), avec $0 < \beta < \alpha < 1$.

Remarque 3.1. Sous (H_1), pour $k \in I_n$, l'évènement $\{X_k \in \mathcal{H}_\beta \setminus \mathcal{H}_\alpha\}$ a une probabilité strictement positive et comme sur cet évènement $\|X_k\|_\alpha = +\infty$, il est clair que $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha = +\infty$. Nous n'incluons pas dans la formulation de l' hypothèse alternative (H_1), le cas plus complexe où $\mathbf{P}(X_k \in \mathcal{H}_\alpha \backslash \mathcal{H}^o_\alpha) = 1$ pour lequel $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha$ peut être finie ou infinie. Néanmoins nous ferons une étude préalable de la rupture dans l'espérance finie de $X_k \in \mathcal{H}^o_\alpha$.

Pour traiter ce problème de rupture, nous remplaçons, au moins théoriquement, les observations X_k par leurs normes α höldériennes. On se ramène ainsi à un problème de

rupture en dimension 1. Théoriquement, en regardant le problème posé ici, on remarque qu'en considérant n'importe quelle statistique construite sur les normes α höldériennes des X_k qui devienne infinie lorsqu'au moins une de ces normes l'est, le problème est résolu (puisque, sous l'hypothèse alternative, la norme α höldérienne des X_k est égale à $+\infty$, pour $k^\star < k \leq m^\star$). Mais ceci reste théorique, puisqu'en pratique nous ne pouvons en général pas calculer la norme höldérienne des X_k et on n'a accès qu'à ses approximations qui sont toujours finies (pour tout α) et donc le problème est plus complexe.

Notons que le changement de régularité peut être moins brutal en supposant qu'il se produit dans la valeur (finie) de l'espérance de la norme höldérienne des X_k. Pour traiter ce cas, on considère l'hypothèse alternative

(H_1') $X_1, \ldots, X_n$ sont des éléments aléatoires de régularité höldérienne α et de carré intégrable (*i.e.*, $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha^2 < +\infty$) et il existe $1 < k^\star < m^\star < n$ dépendants de n tels que chacune des deux sous-suites $(X_k)_{k\in I_n}$ et $(X_k)_{k\in \bar{I}_n}$ a ses termes indépendants et identiquement distribués, mais $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha = \mu_0$ sur $\bar{I}_n$ et $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha = \mu_1$ sur I_n, avec $\mu_0 \neq \mu_1$.

Notons que sous cette hypothèse alternative les X_k, $k = 1, \ldots, n$, sont tous de même régularité höldérienne α.

Dans ce chapitre, nous considérons, dans un premier temps, une statistique construite sur les $\|X_k\|_\alpha$ et nous montrons sa divergence sous les hypothèses alternatives (H_1) et (H_1') ainsi que sa convergence en loi sous l'hypothèse nulle (H_0). Dans un deuxième temps, puisque nous n'avons pas accès aux $\|X_k\|_\alpha$, nous considérons une statistique construite sur des approximations des $\|X_k\|_\alpha$ et nous montrons sa divergence sous (H_1) et (H_1') ainsi que sa convergence en loi sous (H_0).

Nous étudions aussi le problème d'une rupture simple (ou d'un seul point de rupture), *i.e.*, le cas particulier $m^\star = n$. Dans le cas de changement dans la régularité höldérienne, nous testons l'hypothèse nulle (H_0), donnée ci-dessus, contre l'hypothèse alternative

$(\tilde{H}_1)$ il existe $1 < k^\star < n$ dépendant de n tel que chacune des deux sous-suites $(X_k)_{k<k^\star}$ et $(X_k)_{k\geq k^\star}$ a ses termes indépendants et identiquement distribués mais pour $k < k^\star$ les X_k sont de régularité höldérienne α et de carré intégrable (*i.e.*, $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha^2 < +\infty$) et pour $k \geq k^\star$, avec une probabilité non nulle, ils sont de régularité höldérienne β et pas mieux (c'est-à-dire, pour $k \geq k^\star$, $X_k \in \mathcal{H}_\beta([0,1],\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\alpha([0,1],\mathbb{R})$, avec une probabilité non nulle), avec $0 < \beta < \alpha < 1$.

Nous étudions également le problème d'une rupture simple dans l'espérance. Dans ce cas, nous testons l'hypothèse nulle (H_0) contre l'hypothèse alternative

$(\tilde{H}_1')$ $X_1, \ldots, X_n$ sont des éléments aléatoires de régularité höldérienne α et de carré intégrable (*i.e.*, $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha^2 < +\infty$) et il existe $1 < k^\star < n$ dépendants de n tels que chacune des deux sous-suites $(X_k)_{k<k^\star}$ et $(X_k)_{k\geq k^\star}$ a ses termes indépendants et identiquement distribués, mais $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha = \mu_0$ pour $k < k^\star$ et $\mathbf{E}\|X_k\|_\alpha = \mu_1$ pour $k \geq k^\star$, avec $\mu_0 \neq \mu_1$.

Afin d'étudier ceci, nous considérons une statistique construite sur les $\|X_k\|_\alpha$ et nous montrons sa divergence sous $(\tilde{H}_1)$ et $(\tilde{H}_1')$ ainsi que sa convergence en loi sous (H_0). Comme

nous n'avons pas accès aux $\|X_k\|_\alpha$, nous considérons une statistique construite sur des approximations des $\|X_k\|_\alpha$ et nous montrons sa divergence sous $(\tilde{H}_1)$ et $(\tilde{H}_1')$ ainsi que sa convergence en loi sous (H_0).

Les statistiques considérées dans ce chapitre permettent de détecter, essentiellement, la rupture épidémique (mais aussi la rupture simple). Elles permettent également la détection des « petits changements » grâce à un facteur de pénalité dans leurs définitions.

3.1 Préliminaires

Pour simplifier les notations, on ramène $[k-1,k]$ sur $[0,1]$, et on considère des éléments aléatoires de l'espace $\mathcal{H}_\alpha^o = \mathcal{H}_\alpha^o([0,1],\mathbb{R})$. On pose

$$Y_k := \|X_k\|_\alpha, \quad k \geq 1.$$

On suppose que les Y_k sont de carré intégrable (et même davantage, pour des raisons qui apparaîtront plus tard, $\mathbf{E}Y_k^p < +\infty$ pour un certain $p > 2$) et on note

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}Y_1 = \mathbf{Var}(\|X_1\|_\alpha).$$

Pour $1 \leq a \leq b \leq n$, a et b pas forcément entiers et $A \subset [1,n]$, on note

$$S(A) = \sum_{k\in A} Y_k, \quad S(a,b) = \sum_{a\leq k\leq b} Y_k, \quad S_a = S(1,a), \quad S_0 = 0.$$

On note ξ_n le processus polygonal de sommes partielles bâti sur les S_k, $0 \leq k \leq n$. C'est la ligne polygonale aléatoire de sommets $(\frac{k}{n}, S_k)$, $0 \leq k \leq n$:

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])Y_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1].$$

Pour toute fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ nulle en 0, on note x^{br} la fonction « pont » associée :

$$x^{\mathrm{br}}(t) = x(t) - tx(1), \quad t \in [0,1].$$

Ainsi,

$$\xi_n^{\mathrm{br}}(t) = \xi_n(t) - t\xi_n(1), \quad t \in [0,1],$$

est un processus nul en $t = 0$ et en $t = 1$. C'est la ligne polygonale aléatoire de sommets

$$\left(\frac{k}{n}, S_k - \frac{k}{n}S_n\right), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Lorsque x est le mouvement brownien standard W, le processus $B = W^{\mathrm{br}}$ est appelé pont brownien.

Remarque 3.2. Notons que les Y_k ne sont pas centrées, sinon toutes les fonctions aléatoires X_k seraient identiquement nulles, ce qui évidemment est à écarter.

On note

$$\mathring{Y}_k = Y_k - \mathbf{E}Y_k = \|X_k\|_\alpha - \mathbf{E}\|X_k\|_\alpha, \quad \mathring{S}_{a,b} = \sum_{a\le i\le b} \mathring{Y}_i, \text{etc.}$$

Remarque 3.3. Notons $\mathring{\xi}_n$ et $\mathring{\xi}_n^{\mathrm{br}}$ les processus construits comme ξ_n et ξ_n^{br} sur les sommes partielles des $\mathring{Y}_k$ au lieu de celles des Y_k. Alors

$$\mathring{\xi}_n^{\mathrm{br}} = \xi_n^{\mathrm{br}}.$$

En effet pour tout $0 \le k \le n$,

$$\mathring{S}_k - \frac{k}{n}\mathring{S}_n = S_k - k\mathbf{E}Y_1 - \frac{k}{n}(S_n - n\mathbf{E}Y_1) = S_k - \frac{k}{n}S_n.$$

Par conséquent, les lignes polygonales $\mathring{\xi}_n^{\mathrm{br}}$ et ξ_n^{br} ayant mêmes sommets sont égales sur tout $[0,1]$.

Dans ce chapitre, afin d'étudier la rupture épidémique, nous considérons la statistique

$$T_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1\le k<m\le n} \frac{\left|S_m - S_k - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)S_n\right|}{\left[\left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\right)\right]^\gamma},$$

où $\gamma \in [0, 1/2[$. Notons que ce paramètre sera choisi plus tard en fonction d'une hypothèse d'intégrabilité sur $\|X_1\|_\alpha$.

Pour motiver le choix de cette statistique, nous expliquons heuristiquement l'utilité de chacun de ses termes. Comme nous considérons un problème de rupture et nous cherchons à détecter un changement dans la régularité höldérienne, et donc dans les Y_k, nous construisons une statistique sur les Y_k. Puisque chacune des deux sous-suites $(X_k)_{k\in I_n}$ et $(X_k)_{k\in \bar{I}_n}$ a ses termes i.i.d., on applique ainsi une sorte de théorème central limite pour chacune en estimant l'espérance des Y_k par la moyenne empirique. Si la différence est « petite », on accepte l'hypothèse nulle (puisqu'il n'y aura pas de changement sous (H_0) et donc la différence va être petite) et si cette différence est « grande », on rejette l'hypothèse nulle (on s'attend à ce que ça tende vers $+\infty$ sous (H_1) avec une certaine vitesse qu'on fixera plus tard). Pour cela, on suppose que $k^\star$ et $m^\star$ sont connus et afin de simplifier le calcul on suppose aussi que $\sigma = 1$. Comme $|I_n| = l^\star$ et $|\bar{I}_n| = n - l^\star$, où $l^\star = m^\star - k^\star$ désigne la longueur de l'épidémie, et comme $S(\bar{I}_n) = S_n - S(I_n)$ et $S(I_n) = S_{m^\star} - S_{k^\star}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{S(I_n) - l^\star\frac{S_n}{n}}{\sqrt{l^\star}} - \frac{S(\bar{I}_n) - (n-l^\star)\frac{S_n}{n}}{\sqrt{n-l^\star}} &= \sqrt{l^\star}\left(\frac{S(I_n)}{l^\star} - \frac{S_n}{n}\right) - \sqrt{n-l^\star}\left(\frac{S(\bar{I}_n)}{n-l^\star} - \frac{S_n}{n}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{l^\star}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n-l^\star}}\right)S(I_n) - \left(\frac{\sqrt{l^\star}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n-l^\star}} - \frac{\sqrt{n-l^\star}}{n}\right)S_n \\
&= \frac{\sqrt{l^\star} + \sqrt{n-l^\star}}{\sqrt{l^\star(n-l^\star)}}S(I_n) - \left(\frac{1}{\sqrt{l^\star}} + \frac{n}{l^\star\sqrt{n-l^\star}} - \frac{\sqrt{n-l^\star}}{l^\star}\right)\frac{l^\star}{n}S_n
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{l^\star} + \sqrt{n-l^\star}}{\sqrt{l^\star(n-l^\star)}} S(I_n) - \frac{\sqrt{l^\star(n-l^\star)} + n - (n-l^\star)}{l^\star\sqrt{n-l^\star}} \frac{l^\star}{n} S_n$$

$$= \frac{\sqrt{l^\star} + \sqrt{n-l^\star}}{\sqrt{l^\star(n-l^\star)}} S(I_n) - \frac{\sqrt{n-l^\star} + \sqrt{l^\star}}{\sqrt{l^\star(n-l^\star)}} \frac{l^\star}{n} S_n$$

$$= \frac{\sqrt{n-l^\star} + \sqrt{l^\star}}{\sqrt{l^\star(n-l^\star)}} \left(S(I_n) - \frac{l^\star}{n} S_n \right)$$

$$= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{l^\star}{n}} + \sqrt{\frac{l^\star}{n}}\right)}{\sqrt{l^\star(n-l^\star)}} \left(S(I_n) - \frac{l^\star}{n} S_n \right)$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{l^\star}{n}} + \sqrt{\frac{l^\star}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{l^\star}{n}(1-\frac{l^\star}{n})}} \left(S(I_n) - \frac{l^\star}{n} S_n \right)$$

$$= \frac{A_n \left(S_{m^\star} - S_{k^\star} - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right) S_n \right)}{\sqrt{n}\sqrt{\left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\right)}}$$

avec $A_n = \sqrt{1-\frac{l^\star}{n}} + \sqrt{\frac{l^\star}{n}}$. Or

$$A_n^2 = 1 - \frac{l^\star}{n} + \frac{l^\star}{n} + 2\sqrt{\frac{l^\star}{n}\left(1-\frac{l^\star}{n}\right)} = 1 + 2\sqrt{\frac{l^\star}{n}\left(1-\frac{l^\star}{n}\right)},$$

et la fonction $t \mapsto \sqrt{t(1-t)}$ atteint son maximum $\frac{1}{4}$ en $t = \frac{1}{2}$. Ainsi $1 \leq A_n \leq \sqrt{2}$. Puisque ce terme est borné, nous pouvons ne pas le prendre en compte dans notre statistique et nous considérons la statistique

$$\frac{S_{m^\star} - S_{k^\star} - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right) S_n}{\sqrt{n}\sqrt{\left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\right)}}.$$

Par ailleurs, à cause d'une condition de continuité de fonctionnelle qui permettra la convergence de cette statistique et du fait que le principe d'invariance dans les espaces de Hölder $\mathcal{H}_\gamma^o$ ne peut avoir lieu que pour $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, nous remplaçons le dénominateur par le terme $\left[\left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\right)\right]^\gamma$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. En plus, ce dernier terme permet de détecter les courtes épidémies telles que $n^{\frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}} = o(m^\star - k^\star)$ ou $n^{\frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}} = o(n - (m^\star - k^\star))$, plus de détails sur ce terme seront donnés dans la remarque 3.38. Nous prenons ensuite le max puisque $m^\star$ et $k^\star$ sont inconnus et on obtient ainsi la statistique T_n.

Sous l'hypothèse nulle nous exprimons T_n comme une fonctionnelle des trajectoires d'un processus convergeant en loi dans l'espace de Hölder $\mathcal{H}_\gamma^o$.

Maintenant afin de détecter une rupture simple dans la régularité höldérienne, pour les même raisons que pour T_n, nous considérons la statistique

$$\Delta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{0<k<n} \frac{\left|S_k - \frac{k}{n} S_n\right|}{\left(\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^\gamma},$$

où le paramètre $\gamma \in [0, 1/2[$ sera choisi en fonction d'une hypothèse d'intégrabilité sur $\|X_1\|_\alpha$.

Notons enfin que la notation $\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{H}^o_\gamma}$ désigne la convergence en loi dans l'espace de Hölder $\mathcal{H}^o_\gamma$ muni de sa topologie forte.

3.2 Convergence en loi des statistiques T_n et Δ_n sous l'hypothèse nulle

Dans cette section, nous montrons la convergence en loi des statistiques T_n et Δ_n dans $\mathbb{R}_+$, en les exprimant comme des fonctionnelles des trajectoires de processus convergeant en loi dans l'espace de Hölder $\mathcal{H}^o_\gamma$.

Notons que dans un premier temps, on suppose que σ est connu.

3.2.1 Convergence en loi de la statistique T_n sous l'hypothèse nulle

Dans cette partie, nous montrons la convergence en loi de la statistique T_n sous l'hypothèse nulle. Pour cela, nous exprimons T_n comme l'image des trajectoires du processus ξ_n par la fonctionnelle g_n définie sur $\mathcal{H}^o_\gamma$ par

$$g_n(x) = \max_{1\le i<j\le n} I\left(x, \frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right),$$

où

$$I(x,s,t) = \frac{\big|x(t) - x(s) - (t-s)x(1)\big|}{\big((t-s)(1-(t-s))\big)^\gamma}, \qquad 0 < t-s < 1.$$

Ensuite, nous montrons que $g_n(\xi_n)$ converge en loi vers $g(W)$, où

$$g(x) = \sup_{0<s<t<1} I(x,s,t).$$

Pour cela, nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.4. *Soient $(\eta_n)_n$ une suite d'éléments aléatoires équitendus dans un espace de Banach séparable B et g_n, $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctionnelles continues. On suppose en plus que g_n converge ponctuellement vers g dans B et que $(g_n)_n$ est équicontinue. Alors*

$$g_n(\eta_n) = g(\eta_n) + o_{\mathbf{P}}(1).$$

Lemme 3.5. *Soient $(B, \|\|)$ un espace vectoriel normé et $q : B \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *q est sous-additive : $q(x+y) \le q(x) + q(y), \quad x, y \in B$,*
2. *q est symétrique : $q(-x) = q(x), \quad x \in B$,*
3. *il existe une constante c telle que $q(x) \le c\|x\|, \quad \forall x \in B$.*

Alors q est lipschitzienne.

Preuve. Pour la preuve de ces deux lemmes, cf. [86]. □

Maintenant, la convergence de la statistique T_n est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.6. *On suppose qu'il existe un réel $p > 2$ tel que*

$$\lim_{t\to+\infty} t^p \mathbf{P}(Y_1 > t) = 0. \tag{3.1}$$

Alors, sous l'hypothèse nulle,

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} T, \tag{3.2}$$

où

$$T = \sup_{0<t-s<1} \frac{|W(t) - W(s) - (t-s)W(1)|}{\big((t-s)\big(1-(t-s)\big)\big)^{\gamma}}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}. \tag{3.3}$$

Remarque 3.7. Sous l'hypothèse (3.1) et pour γ comme dans (3.3), $\frac{\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers le mouvement brownien standard W dans l'espace de Hölder $\mathcal{H}^o_\gamma$. Cette convergence est donnée par le principe d'invariance dans les espaces de Hölder (pour plus de détails sur le principe de variance dans les espaces de Hölder cf. [71, 85, 87]).

Remarque 3.8. Notons que les espaces höldériens $\mathcal{H}^o_\alpha$ et $\mathcal{H}^o_\gamma$ ne jouent absolument pas le même rôle. En effet, $\mathcal{H}^o_\alpha$ sert à quantifier la régularité höldérienne des X_k, tandis que $\mathcal{H}^o_\gamma$ fournit un cadre fonctionnel pour la convergence en loi du processus ξ_n. Notons également qu'avec ce théorème, l'hypothèse d'intégrabilité choisie nous limite à $\gamma < \frac{1}{2}$. Si on veut aller jusqu'à la valeur critique $\gamma = \frac{1}{2}$, modulo une correction logarithmique pour le poids höldérien, il faudra utiliser le FCLT höldérien plus général démontré dans [87].

Remarque 3.9. Si la variable aléatoire Y_1 a un moment d'ordre p, elle vérifie (3.1). En effet,

$$0 \le t^p \mathbb{1}_{\{Y_1>t\}} \le Y_1^p \mathbb{1}_{\{Y>t\}},$$

et comme $\mathbf{E}Y_1^p < +\infty$, obtient (3.1) par le théorème de convergence dominée.

Preuve du théorème 3.6. Les détails de cette preuve sont donnés dans la preuve du théorème 3 de [86]. On a

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\big|S_j - S_i - \big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)S_n\big|}{\big[\big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)\big(1 - \big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)\big)\big]^{\gamma}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\big|\xi_n\big(\frac{i}{n}\big) - \xi_n\big(\frac{j}{n}\big) - \big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)\xi_n(1)\big|}{\big[\big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)\big(1 - \big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)\big)\big]^{\gamma}} = I\Big(\eta_n, \frac{i}{n}, \frac{j}{n}\Big),$$

en posant

$$\eta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_n.$$

Donc

$$T_n = \max_{1\le i<j\le n} I\Big(\eta_n, \frac{i}{n}, \frac{j}{n}\Big) = g_n\big(\eta_n\big).$$

et

$$T = \sup_{0<t-s<1} \frac{|W(t) - W(s) - (t-s)W(1)|}{\big((t-s)\big(1-(t-s)\big)\big)^{\gamma}} = \sup_{0<t-s<1} I(W, s, t) = g(W).$$

Donc, le fait de montrer la convergence (3.2) est équivalent à montrer que

$$g_n(\eta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} g(W) \tag{3.4}$$

et pour cela on applique le même raisonnement que la preuve du théorème 3 de [86] où il a été montré que $I(., s, t)$ est lipschitzienne sur $\mathcal{G}_\gamma^0 = \{x \in \mathcal{H}_\gamma^o\,;\, x(0) = x(1) = 0\}$, grâce au lemme 3.5, et donc g et g_n le sont aussi. En plus $(g_n)_{n\ge1}$ est équicontinue sur $\mathcal{G}_\gamma^0$. Il a été montré aussi que g_n converge simplement vers g sur $\mathcal{G}_\gamma^0$. Comme

$$\eta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{H}_\gamma^o} W,$$

$(\eta_n)_{n\ge1}$ est équitendue, on obtient par le lemme 3.4

$$g_n\big(\eta_n\big) = g\big(\eta_n\big) + o_{\mathbf{P}}(1)$$

et donc la convergence (3.4). Ce qui prouve le théorème 3.6. □

Remarque 3.10. Dans le théorème 3.6, σ est supposé *connu*. S'il ne l'est pas, on le remplace par un estimateur consistant.

3.2.2 Convergence en loi de la statistique Δ_n sous l'hypothèse nulle

Dans cette partie, nous montrons la convergence en loi de la statistique Δ_n sous l'hypothèse nulle. Pour cela nous considérons la fonctionnelle

$$\tau_\gamma(x) = \sup_{0<t<1} \frac{|x(t)|}{(t(1-t))^{\gamma}}\,,$$

pour tout $x : [0,1] \to \mathbb{R}$. Ensuite nous montrons que $\Delta_n = \tau_\gamma\big(\frac{\xi_n^{\text{br}}}{\sigma\sqrt{n}}\big)$ et que $x \mapsto x^{\text{br}} \mapsto \tau_\gamma(x^{\text{br}})$ est continue [1] sur un sous-espace vectoriel fermé adéquat de $\mathcal{H}_\gamma^o$. Enfin, comme

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{H}_\gamma^o} W.$$

on obtient la convergence, par image continue, de la statistique Δ_n vers $\tau_\gamma(B)$.

Afin de montrer ceci, nous aurons besoin des résultats suivants.

Proposition 3.11. *Pour toute ligne polygonale f sur $[0,1]$ nulle en 0 et en 1, de sommets $(t_k, f(t_k))$, où $t_k = \frac{k}{n}$, $0 \le k \le n$,*

$$\tau_\gamma(f) = \max_{0<k<n} \big(t_k\big(1-t_k\big)\big)^{-\gamma} |f(t_k)|.$$

1. continue pour la topologie induite par la norme $\|\ \|_\gamma$ sur l'espace $\mathcal{H}_\gamma^o$

Afin démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.12. *Si f est affine sur $[a,b]$ et r concave et strictement positive sur $[a,b]$,*

$$\sup_{t\in[a,b]} \frac{|f(t)|}{r(t)} = \max\left(\frac{|f(a)|}{r(a)}; \frac{|f(b)|}{r(b)}\right).$$

Preuve. Soit f une fonction affine sur $[a,b]$ et r une fonction concave et strictement positive sur $[a,b]$, montrons que

$$\sup_{t\in[a,b]} \frac{|f(t)|}{r(t)} = \max\left(\frac{|f(a)|}{r(a)}; \frac{|f(b)|}{r(b)}\right).$$

Comme

$$\sup_{t\in[a,b]} \frac{|f(t)|}{r(t)} \geq \max\left(\frac{|f(a)|}{r(a)}; \frac{|f(b)|}{r(b)}\right),$$

il reste à montrer que

$$\sup_{t\in[a,b]} \frac{|f(t)|}{r(t)} \leq \max\left(\frac{|f(a)|}{r(a)}; \frac{|f(b)|}{r(b)}\right).$$

On paramétrise le segment $[a,b]$ par

$$t = ua + (1-u)b, \quad u \in [0,1].$$

Comme f est affine sur $[a,b]$,

$$f(t) = f(ua + (1-u)b) = uf(a) + (1-u)f(b), \quad u \in [0,1].$$

Par l'inégalité triangulaire et la concavité de la fonction r sur $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\frac{|f(t)|}{r(t)} &= \frac{|uf(a) + (1-u)f(b)|}{r(t)} \\
&\leq \frac{u|f(a)| + (1-u)|f(b)|}{r(t)} \\
&= \frac{u|f(a)| + (1-u)|f(b)|}{r(ua + (1-u)b)} \\
&\leq \frac{u|f(a)| + (1-u)|f(b)|}{ur(a) + (1-u)r(b)} = G_{a,b}(u).
\end{aligned}$$

Pour tout $u \in [0,1]$,

$$G'_{a,b}(u) = \frac{\big(|f(a)| - |f(b)|\big)(ur(a) + (1-u)r(b)\big) - \big(r(a) - r(b)\big)\big(u|f(a)| + (1-u)|f(b)|\big)}{\big(ur(a) + (1-u)r(b)\big)^2}$$

$$= \frac{|f(a)|r(b) - |f(b)|r(b) - |f(b)|r(a) + |f(b)|r(b)}{\big(ur(a) + (1-u)r(b)\big)^2}$$
$$= \frac{|f(a)|r(b) - |f(b)|r(a)}{\big(ur(a) + (1-u)r(b)\big)^2}\,.$$

Donc $G'_{a,b}$ a un signe constant sur tout l'intervalle $[0,1]$, alors la fonction $G_{a,b}$ est monotone sur $[a,b]$. Ainsi, elle atteint son maximum en 0 ou en 1. D'où

$$G_{a,b}(u) \leq \max\big(G_{a,b}(0); G_{a,b}(1)\big) = \max\left(\frac{|f(b)|}{r(b)}; \frac{|f(a)|}{r(a)}\right), \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$\frac{|f(t)|}{r(t)} \leq \max\left(\frac{|f(b)|}{r(b)}; \frac{|f(a)|}{r(a)}\right), \quad \forall t \in [a,b],$$

ceci implique que

$$\sup_{t\in[a,b]} \frac{|f(t)|}{r(t)} \leq \max\left(\frac{|f(a)|}{r(a)}; \frac{|f(b)|}{r(b)}\right).$$

Conclusion :

$$\sup_{t\in[a,b]} \frac{|f(t)|}{r(t)} = \max\left(\frac{|f(a)|}{r(a)}; \frac{|f(b)|}{r(b)}\right).$$

□

Preuve de la proposition 3.11. La fonction f est une ligne polygonale sur $[0,1]$ de sommets $(t_k, f(t_k))$, donc sur chaque segment $[t_k, t_{k+1}]$ f est affine et la fonction $t \mapsto \big(t(1-t)\big)^\gamma$ est concave, on peut alors appliquer le lemme 3.12 sur chaque segment $[t_k, t_{k+1}]$. Donc pour tout $0 < k < n$,

$$\sup_{t_k\leq t\leq t_{k+1}} \frac{|f(t)|}{\big(t(1-t)\big)^\gamma} = \max\left(\frac{|f(t_k)|}{\big(t_k(1-t_k)\big)^\gamma}; \frac{|f(t_{k+1})|}{\big(t_{k+1}(1-t_{k+1})\big)^\gamma}\right).$$

Ainsi

$$\tau_\gamma(f) = \max_{0<k<n} \big(t_k(1-t_k)\big)^{-\gamma} |f(t_k)|.$$

□

Théorème 3.13. *On suppose qu'il existe un réel $p > 2$ tel que*

$$\lim_{t\to+\infty} t^p \mathbf{P}(Y_1 > t) = 0. \tag{3.5}$$

Alors

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_n^{\mathrm{br}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{H}^o_\gamma} B, \tag{3.6}$$

où

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Preuve. On rappelle que l'opérateur br est défini par

$$\mathrm{br} : \mathcal{H}^o_\gamma \to \mathcal{H}^o_\gamma,\ f \mapsto f^{\mathrm{br}} : t \mapsto f(t) - tf(1).$$

Comme, sous l'hypothèse du théorème 3.13,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{H}^o_\gamma} W.$$

Donc, pour montrer la convergence (3.6), il suffit de vérifier la continuité de l'opérateur br sur $\mathcal{H}^o_\gamma$. Il est facile de vérifier la linéarité de br. En effet, pour tout $f, g \in \mathcal{H}^o_\gamma$, $t \in [0,1]$ et $c \in \mathbb{R}$,

$$(f+cg)^{\mathrm{br}}(t) = (f+cg)(t) - t(f+cg)(1) = f(t) - tf(1) + c\big(g(t) - tg(1)\big) = \big(f^{\mathrm{br}} + cg^{\mathrm{br}}\big)(t).$$

Pour établir la continuité de br sur $\mathcal{H}^o_\gamma$, il suffit donc de montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|f^{\mathrm{br}}\|_\gamma \le c\|f\|_\gamma, \quad \forall f \in \mathcal{H}^o_\gamma. \tag{3.7}$$

Pour cela, soit $f \in \mathcal{H}^o_\gamma$,

$$\begin{aligned}
\frac{\big|f^{\mathrm{br}}(t) - f^{\mathrm{br}}(s)\big|}{|t-s|^\gamma} &= \frac{|f(t) - tf(1) - f(s) + sf(1)|}{|t-s|^\gamma} \\
&\le \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\gamma} + \frac{|sf(1) - tf(1)|}{|t-s|^\gamma} \\
&\le \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\gamma} + |t-s|^{1-\gamma}|f(1)| \\
&\le \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\gamma} + |t-s|^{1-\gamma}|f(1) - f(0)| + |t-s|^{1-\gamma}|f(0)|.
\end{aligned}$$

Donc, puisque $1-\gamma > 0$ et $|t-s| \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\sup_{0<|t-s|<1} \frac{\big|f^{\mathrm{br}}(t) - f^{\mathrm{br}}(s)\big|}{|t-s|^\gamma} &\le \sup_{0<|t-s|<1} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\gamma} + |f(1)-f(0)| + |f(0)| \\
&\le 2 \sup_{0<|t-s|<1} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\gamma} + |f(0)|.
\end{aligned}$$

Par suite, puisque $f^{\mathrm{br}}(0) = f(0)$,

$$\sup_{0<|t-s|<1} \frac{\big|f^{\mathrm{br}}(t) - f^{\mathrm{br}}(s)\big|}{|t-s|^\gamma} + |f^{\mathrm{br}}(0)| \le 2\left(\sup_{0<|t-s|<1} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\gamma} + |f(0)|\right),$$

on obtient donc l'inégalité (3.7) avec $c = 2$, ce qui prouve la continuité de br et donc la convergence (3.6). □

Remarque 3.14. Sans hypothèse supplémentaire sur x, τ_γ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Par exemple si x est continue sur $[0,1]$ nulle en 0 et 1 et localement höldérienne d'exposant $\beta \geq \gamma$ en 0 et 1, $\tau_\gamma(x)$ est fini (pour $\gamma < 1$).

Notons $\mathcal{G}_\gamma^0 = \{x \in \mathcal{H}_\gamma^o \,;\, x(0) = x(1) = 0\}$. Nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.15. *La restriction de τ_γ à $\mathcal{G}_\gamma^0$ est continue pour la norme $\| \ \|_\gamma$.*

Preuve. Afin de prouver la continuité de τ_γ sur $\mathcal{G}_\gamma^0$, montrons que sa restriction à $\mathcal{G}_\gamma^0$ est lipschitzienne pour la norme $\| \ \|_\gamma$. Pour cela, nous commençons par démontrer l'inégalité suivante.

$$\tau_\gamma(f) \leq 2^\gamma \|f\|_\gamma \quad \forall f \in \mathcal{G}_\gamma^0,$$

en effet, comme $f(0) = f(1) = 0$, si $1/2 \leq t < 1$ alors

$$\begin{aligned}
\frac{|f(t)|}{(t(1-t))^\gamma} &\leq 2^\gamma \frac{|f(t)|}{(1-t)^\gamma} \\
&= 2^\gamma \frac{|f(1) - f(t)|}{|1-t|^\gamma} \\
&\leq 2^\gamma \sup_{0<|t-s|<1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\gamma} \\
&= 2^\gamma \|f\|_\gamma
\end{aligned}$$

et si $0 < t < 1/2$ alors $1/2 \leq 1 - t < 1$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{|f(t)|}{(t(1-t))^\gamma} &\leq 2^\gamma \frac{|f(t)|}{t^\gamma} \\
&= 2^\gamma \frac{|f(t) - f(0)|}{t^\gamma} \\
&\leq 2^\gamma \sup_{0<|t-s|<1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\gamma} \\
&= 2^\gamma \|f\|_\gamma.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{|f(t)|}{(t(1-t))^\gamma} \leq 2^\gamma \|f\|_\gamma, \quad \forall 0 < t < 1$$

et donc

$$\tau_\gamma(f) = \sup_{0<t<1} \frac{|f(t)|}{(t(1-t))^\gamma} \leq 2^\gamma \|f\|_\gamma.$$

Maintenant pour $f, g \in \mathcal{G}_\gamma^0$, on a

$$\frac{|f(t)+g(t)|}{(t(1-t))^\gamma} \leq \frac{|f(t)|}{(t(1-t))^\gamma} + \frac{|g(t)|}{(t(1-t))^\gamma} \leq \sup_{0<t<1} \frac{|f(t)|}{(t(1-t))^\gamma} + \sup_{0<t<1} \frac{|g(t)|}{(t(1-t))^\gamma}$$

et donc

$$\tau_\gamma(f+g) \leq \tau_\gamma(f) + \tau_\gamma(g).$$

Par cette dernière inégalité, on obtient

$$\tau_\gamma(f) = \tau_\gamma(g + (f-g)) \leq \tau_\gamma(g) + \tau_\gamma(f-g)$$

ce qui implique que

$$\tau_\gamma(f) - \tau_\gamma(g) \leq \tau_\gamma(f-g).$$

On obtient aussi

$$\tau_\gamma(g) = \tau_\gamma(f + (g-f)) \leq \tau_\gamma(f) + \tau_\gamma(g-f)$$

ce qui implique que

$$\tau_\gamma(g) - \tau_\gamma(f) \leq \tau_\gamma(g-f) = \tau_\gamma(f-g).$$

Par conséquent

$$|\tau_\gamma(f) - \tau_\gamma(g)| \leq 2^\gamma \|f-g\|_\gamma, \quad \forall f, g \in \mathcal{G}^0_\gamma,$$

et donc la restriction de τ_γ à $\mathcal{G}^0_\gamma$ est lipschitzienne et donc continue. □

Grâce à ce lemme nous pouvons établir le corollaire suivant du Théorème 3.13.

Corollaire 3.16. *On suppose qu'il existe un réel $p > 2$ tel que*

$$\lim_{t \to +\infty} t^p \mathbf{P}(Y_1 > t) = 0.$$

Alors, sous l'hypothèse nulle,

$$\Delta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{loi}} \Delta,$$

où

$$\Delta = \sup_{0<t<1} \frac{|W(t) - tW(1)|}{(t(1-t))^\gamma}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Preuve. Comme $\Delta_n = \tau_\gamma\left(\frac{\xi_n^{\text{br}}}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ et

$$\Delta = \sup_{0<t<1} \frac{|W(t) - tW(1)|}{(t(1-t))^\gamma} = \sup_{0<t<1} \frac{|B(t)|}{(t(1-t))^\gamma} = \tau_\gamma(B),$$

par le théorème 3.13 et la continuité de τ_γ sur $\mathcal{G}^0_\gamma$, on obtient la convergence en loi de Δ_n vers Δ. □

3.3 Convergence en loi des statistiques $T_{n,N}$ et $\Delta_{n,N}$ sous l'hypothèse nulle

D'un point de vue pratique, le problème c'est qu'on ne sait pas en général calculer exactement les $\|X_k\|_\alpha$ et donc ni T_n ni Δ_n. De plus, si on ne connaît pas σ, on ne pourra pas l'estimer directement par la variance empirique construite sur les Y_k.

On n'a accès qu'à des approximations de $\|X_k\|_\alpha$. Nous utiliserons ici des approximations par interpolation affine avec un pas de discrétisation de $\frac{1}{N}$ où $N = N(n)$ tend vers l'infini avec n. Pour ce faire on notera $X_{k,N}$ la ligne polygonale de sommets

$$\left(\frac{i}{N}, X_k\left(\frac{i}{N}\right)\right), \quad 0 \leq i \leq N(n).$$

C'est un élément aléatoire de $\mathcal{H}^o_\alpha$ de norme

$$\|X_{k,N}\|_\alpha = \left|X_{k,N}(0)\right| + \max_{0\leq i<j\leq N(n)} \frac{\left|X_k\left(\frac{j}{N}\right) - X_k\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^\alpha}. \tag{3.8}$$

En effet, comme les $X_{k,N}$ sont des lignes polygonales de sommets aux points d'abscisse $\frac{i}{N}$, pour $0 \leq i \leq N(n)$, par un raisonnement similaire à la preuve de la proposition 3.11, on obtient

$$\sup_{0\leq t<s\leq 1} \frac{\left|X_{k,N}(t) - X_{k,N}(s)\right|}{|t-s|^\alpha} = \max_{0\leq i<j\leq N(n)} \frac{\left|X_{k,N}\left(\frac{j}{N}\right) - X_{k,N}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^\alpha}.$$

Ainsi, comme $X_{k,N}\left(\frac{i}{N}\right) = X_k\left(\frac{i}{N}\right)$, pour $0 \leq i \leq N$, on obtient

$$\omega_\alpha\left(X_k, \frac{1}{N}\right) = \max_{0\leq i<j\leq N(n)} \frac{\left|X_k\left(\frac{j}{N}\right) - X_k\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^\alpha}$$

et donc l'égalité (3.8).

Remarque 3.17. On a $0 \leq \|X_{k,N}\|_\alpha \leq \|X_k\|_\alpha$ et $\lim_{n\to+\infty} \|X_{k,N}\|_\alpha = \|X_k\|_\alpha$ ponctuellement sur Ω. Plus précisément, la vitesse de cette convergence est reliée à la régularité de X_k par

$$\|X_{k,N} - X_k\|_\alpha \leq 4\omega_\alpha\left(X_k, \frac{1}{N}\right). \tag{3.9}$$

Preuve de (3.9). On note $Z_{k,N} = X_{k,N} - X_k$. Comme $Z_{k,N}(0) = X_{k,N}(0) - X_k(0) = 0$, donc il suffit de montrer que

$$\omega_\alpha\left(Z_{k,N}, 1\right) \leq 4\omega_\alpha\left(X_k, \frac{1}{N}\right).$$

Pour cela, soit $f \in \mathcal{H}^o_\alpha$ et f_N la ligne polygonale de sommets $\left(\frac{i}{N}, f\left(\frac{i}{N}\right)\right)$, pour $0 \leq i \leq N$. On note $g_n = f_n - f$. Afin de montrer (3.17), montrons que

$$\omega_\alpha(g_N, 1) \leq 4\omega_\alpha\left(f, \frac{1}{N}\right). \tag{3.10}$$

Fixons N quelconque et soient $0 \leq s < t \leq 1$, alors il existe un unique i tel que $\frac{i}{N} \leq s < \frac{i+1}{N}$ et un unique $j \geq i$ tel que $\frac{j}{N} \leq t < \frac{j+1}{N}$.

1. Si $i = j$, alors $s, t \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$. Puisque $|t-s| \leq 1/N$,

$$\begin{aligned}\frac{|g_N(t) - g_N(s)|}{|t-s|^\alpha} &= \frac{|f_N(t) - f(t) - f_N(s) + f(s)|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} + \frac{|f_N(t) - f_N(s)|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq \omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{N}\Big) + \frac{|f_N(t) - f_N(s)|}{|t-s|^\alpha},\end{aligned}$$

et comme f_N est la ligne polygonale de sommets $\left(\frac{i}{N}, f\left(\frac{i}{N}\right)\right)$, donc affine sur chaque $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$, $f_N\left(\frac{i}{N}\right) = f\left(\frac{i}{N}\right)$ et $f_N\left(\frac{i+1}{N}\right) = f\left(\frac{i+1}{N}\right)$,

$$\begin{aligned}|f_N(t) - f_N(s)| &= \frac{\left|f_N\left(\frac{i+1}{N}\right) - f_N\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\frac{1}{N}}|t-s| \\ &= \frac{\left|f\left(\frac{i+1}{N}\right) - f\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\frac{1}{N}}|t-s|.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\left|f_N(t) - f_N(s)\right|}{|t-s|^\alpha} &= \frac{\left|f\left(\frac{i+1}{N}\right) - f\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left(\frac{1}{N}\right)^\alpha}\left(\frac{|t-s|}{\frac{1}{N}}\right)^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{\left|f\left(\frac{i+1}{N}\right) - f\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left(\frac{1}{N}\right)^\alpha} \\ &\leq \omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{N}\Big).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{|g_N(t) - g_N(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq 2\omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{N}\Big).$$

2. Maintenant si $\frac{i}{N} \leq s < \frac{i+1}{N} \leq \frac{j}{N} < t < \frac{j+1}{N}$, alors, puisque $g_N\Big(\frac{j}{N}\Big) = g_N\Big(\frac{i+1}{N}\Big) = 0$,

$$|g_N(t) - g_N(s)| \leq \Big|g_N(t) - g_N\Big(\frac{j}{N}\Big)\Big| + \Big|g_N\Big(\frac{i+1}{N}\Big) - g_N(s)\Big|.$$

On peut ensuite appliquer le même raisonnement que dans le premier cas sur les intervalles $[t, \frac{j}{N}]$ et $[s, \frac{i+1}{N}]$ pour obtenir

$$\frac{|g_N(t) - g_N(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq 4\omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{N}\Big).$$

Notons aussi que si $t = \frac{j}{N}$, alors

$$\frac{|g_N(t) - g_N(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq 2\omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{N}\Big).$$

Par suite, pour tout $0 < |t-s| < 1$,

$$\frac{|g_N(t) - g_N(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq 4\omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{N}\Big),$$

et donc l'inégalité (3.10), ce qui implique l'inégalité (3.9).

□

Notons $\xi_{n,N}$ le processus polygonal des sommes partielles des $\|X_{k,N}\|_\alpha$:

$$\xi_{n,N}(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \|X_{k,N}\|_\alpha + (nt - [nt])\|X_{[nt]+1,N}\|_\alpha, \quad t \in [0,1].$$

On définit aussi $S_{k,N} = \sum_{i \leq k} \|X_{i,N}\|_\alpha$.

Remarque 3.18. Pour l'instant on suppose encore σ connu. On pourra ultérieurement le remplacer par un estimateur construit sur les observations $\|X_{k,N}\|_\alpha$. Un candidat naturel étant fourni par la racine carrée de la variance empirique des $\|X_{k,N}\|_\alpha$.

Maintenant, on définit les statistiques $T_{n,N}$ et $\Delta_{n,N}$ construites sur les $\|X_{i,N}\|_\alpha$ détectant la rupture épidémique et la rupture simple respectivement. Dans le cas de la rupture épidémique, on remplace la statistique T_n par la statistique $T_{n,N}$ donnée par

$$T_{n,N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1 \leq k < m \leq n} \frac{\big|S_{m,N} - S_{k,N} - \big(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\big)S_{n,N}\big|}{\big[\big(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\big)\big(1 - \big(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\big)\big)\big]^\gamma}.$$

Dans le cas d'un seul point de rupture, on remplace la statistique Δ_n par la statistique $\Delta_{n,N}$ donnée par

$$\Delta_{n,N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1 \leq k < n} \left(\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right)^{-\gamma} \left|S_{k,N} - \frac{k}{n}S_{n,N}\right|.$$

Un résultat fondamental pour montrer la convergence de ces statistiques sous l'hypothèse nulle est le suivant.

Proposition 3.19. *On suppose que $N = N(n) \to +\infty$ et on se place dans le cadre du théorème 3.13. Alors*

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}}\xi^{\mathrm{br}}_{n,N} - \frac{1}{\sqrt{n}}\xi^{\mathrm{br}}_n \right\|_\gamma \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Nous admettrons provisoirement cette proposition pour ne pas interrompre le flux principal de l'argumentation. Une preuve détaillée est fournie à partir de la page 115.

La convergence de ces statistiques sous l'hypothèse nulle est donnée par les théorèmes suivants.

Théorème 3.20. *On suppose qu'il existe un réel $p > 2$ tel que*

$$\lim_{t\to+\infty} t^p \mathbf{P}(Y_1 > t) = 0.$$

Alors, sous l'hypothèse nulle,

$$T_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} T,$$

où

$$T = \sup_{0<t-s<1} \frac{|W(t) - W(s) - (t-s)W(1)|}{\big((t-s)\big(1-(t-s)\big)\big)^\gamma}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Preuve. On souhaite montrer que quand $N = N(n)$ tend vers l'infini avec n,

$$T_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} T.$$

Par le théorème 3.6, on sait déjà que

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} T,$$

donc par le lemme de Slutsky, il suffit de prouver que

$$|T_{n,N} - T_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} 0. \tag{3.11}$$

Or $T_n = g_n\big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_n^{\text{br}}\big)$ et $T_{n,N} = g_n\big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{n,N}^{\text{br}}\big)$ et afin de montrer cette convergence, on considère les fonctionnelles

$$\tilde{g}_n(x) = \max_{1\le i<j\le n} \tilde{I}(x, i/n, j/n)$$

où

$$\tilde{I}(x,s,t) = \frac{\big|x(t) - x(s)\big|}{\big((t-s)(1-(t-s))\big)^\gamma}.$$

Or

$$\tilde{I}\big(\xi_n^{\text{br}}, i/n, j/n\big) = \frac{\big|\xi_n^{\text{br}}(\frac{i}{n}) - \xi_n^{\text{br}}(\frac{j}{n})\big|}{\big[\big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)\big(1 - \big(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\big)\big)\big]^\gamma}$$

$$= \frac{\left|\xi_n(\frac{i}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n}) - \left(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\right)\xi_n(1)\right|}{\left[\left(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{j}{n} - \frac{i}{n}\right)\right)\right]^\gamma}$$
$$= I(\xi_n, i/n, j/n),$$

et

$$\tilde{I}\left(\xi_{n,N}^{\mathrm{br}}, i/n, j/n\right) = I(\xi_{n,N}, i/n, j/n)$$

et donc

$$\tilde{g}_n\left(\xi_n^{\mathrm{br}}\right) = g_n(\xi_n) \quad \text{et} \quad \tilde{g}_n\left(\xi_{n,N}^{\mathrm{br}}\right) = g_n(\xi_{n,N}).$$

Maintenant , comme

$$|T_{n,N} - T_n| \leq \tilde{g}_n\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\xi_n^{\mathrm{br}} - \xi_{n,N}^{\mathrm{br}}\right)\right) \leq 2^\gamma \left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\xi_n^{\mathrm{br}} - \xi_{n,N}^{\mathrm{br}}\right)\right\|_\gamma,$$

afin de montrer la convergence (3.11), il suffit de montrer que

$$\left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{n,N}^{\mathrm{br}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_n^{\mathrm{br}}\right\|_\gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

ce qui est garanti par la proposition 3.19. □

Théorème 3.21. *On suppose qu'il existe un réel $p > 2$ tel que*

$$\lim_{t\to+\infty} t^p \mathbf{P}(Y_1 > t) = 0.$$

Alors, sous l'hypothèse nulle,

$$\Delta_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \Delta,$$

où

$$\Delta = \sup_{0<t<1} \frac{|W(t) - tW(1)|}{(t(1-t))^\gamma}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Preuve. On souhaite montrer que quand $N = N(n)$ tend vers l'infini avec n,

$$\Delta_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \Delta.$$

Par le corollaire 3.16, on sait déjà que

$$\Delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \Delta,$$

donc par le lemme de Slutsky, il suffit de prouver que

$$|\Delta_{n,N} - \Delta_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} 0.$$

Or $\Delta_n = \tau_\gamma\big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_n^{\mathrm{br}}\big)$ et $\Delta_{n,N} = \tau_\gamma\big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{n,N}^{\mathrm{br}}\big)$ et comme

$$|\Delta_{n,N} - \Delta_n| \leq \tau_\gamma\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\big(\xi_n^{\mathrm{br}} - \xi_{n,N}^{\mathrm{br}}\big)\right) \leq 2^\gamma \left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\big(\xi_n^{\mathrm{br}} - \xi_{n,N}^{\mathrm{br}}\big)\right\|_\gamma,$$

on obtient ainsi le résultat par la proposition 3.19. □

Remarque 3.22. On s'attendrait à une normalisation en $\sigma_{n,N}^{-1}$ avec

$$\sigma_{n,N}^2 = \mathbf{Var}(\|X_{1,N}\|_\alpha^2)$$

pour $\xi_{n,N}^{\mathrm{br}}$, mais c'est plus simple de conserver σ au lieu de $\sigma_{n,N}$ dans la définition de $\Delta_{n,N}$. Noter que l'on ne cherche pas ici à prouver la convergence en loi dans $\mathcal{H}_\gamma^o$ de $\sigma^{-1}n^{-1/2}\xi_n^{\mathrm{br}}$ vers B, même si cette dernière devrait découler de la convergence de $\sigma_{n,N}$ vers σ.

Dans le reste de cette section, nous montrons la proposition 3.19. Pour cela, nous aurons besoin d'introduire quelques notations et résultats. Notons

$$\zeta_n = \xi_n - \xi_{n,N}.$$

Il est clair que ζ_n est le processus polygonal de sommes partielles des variables aléatoires

$$\varepsilon_{n,k} = \|X_k\|_\alpha - \|X_{k,N}\|_\alpha, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ces variables n'étant pas centrées, on définit aussi les

$$\mathring{\varepsilon}_{n,k} = \varepsilon_{n,k} - \mathbf{E}\varepsilon_{n,k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

et le processus polygonal de sommes partielles $\mathring{\zeta}_n$ associé.

Comme

$$\left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{n,N}^{\mathrm{br}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_n^{\mathrm{br}}\right\|_\gamma = \left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\zeta_n^{\mathrm{br}}\right\|_\gamma = \left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathring{\zeta}_n^{\mathrm{br}}\right\|_\gamma \leq 2\left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathring{\zeta}_n\right\|_\gamma,$$

afin de montrer la proposition 3.19, il suffit de montrer la proposition suivante

Proposition 3.23. *On suppose que $N = N(n) \to +\infty$ et on se place dans le cadre du théorème 3.13. Alors*

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\mathring{\zeta}_n\right\|_\gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} 0. \tag{3.12}$$

Afin de montrer cette dernière proposition, nous aurons besoin des lemmes suivants

Lemme 3.24. *Soit X une variable aléatoire. Pour tout $a > 0$,*

$$\mathbf{E}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>a\}}\big) = a\mathbf{P}\big(|X| > a\big) + \int_a^\infty \mathbf{P}\big(|X| > s\big)\,\mathrm{d}s.$$

Preuve. Il est facile à vérifier que

$$\big\{|X|\mathbb{1}_{\{|X|>a\}} > s\big\} = \{|X| > \max(a,s)\},$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>a\}}\big) &= \int_0^\infty \mathbf{P}\big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>a\}} > s\big)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \mathbf{P}\big(|X| > \max(a,s)\big)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^a \mathbf{P}\big(|X| > a\big)\,\mathrm{d}s + \int_a^\infty \mathbf{P}\big(|X| > s\big)\,\mathrm{d}s \\
&= a\mathbf{P}\big(|X| > a\big) + \int_a^\infty \mathbf{P}\big(|X| > s\big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.25. *Soient X une variable aléatoire positive et f une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\infty[$ telle que $f(0) = 0$, alors pour toute constante $c > 0$,*

$$\mathbf{E}\big(f(X)\mathbb{1}_{\{X\le c\}}\big) = \int_0^c f'(x)\mathbf{P}(s \le X \le c)\,\mathrm{d}s.$$

Preuve. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(x) = \int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u$$

et par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(f(X)\mathbb{1}_{\{X\le c\}}\big) &= \int_0^\infty f(x)\mathbb{1}_{\{x\le c\}}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathbb{1}_{\{x\le c\}}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f'(u)\mathbb{1}_{\{u<x\}}\,\mathrm{d}u\right)\mathbb{1}_{\{x\le c\}}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\
&= \int_0^\infty f'(u)\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{u<x\le c\}}\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x)\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^c f'(u)\mathbf{P}(u < X \le c))\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.26. *Soient $(Y_n)_n$ et Z des variables aléatoires positives. On suppose que*

$$\begin{cases}
Y_n \le Z \\
Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0 \\
\exists p > 0;\ s^p\mathbf{P}(Z > s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.
\end{cases}$$

Alors

$$\sup_{s>0} s^p \mathbf{P}(Y_n > s) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On note $s_0 = \varepsilon^{1/p}$, donc pour tout $s \le s_0$,

$$s^p \mathbf{P}(Y_n > s) \le \varepsilon.$$

Comme

$$s^p \mathbf{P}(Z > s) \xrightarrow[s\to\infty]{\mathbf{P}} 0,$$

il existe $s_1 > s_0$ tel que pour tout $s \ge s_1$

$$s^p \mathbf{P}(Z > s) < \varepsilon$$

et puisque $Y_n \le Z$, on obtient

$$s^p \mathbf{P}(Y_n > s) < \varepsilon, \quad \forall s \ge s_1.$$

Comme

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} 0,$$

il existe $n_0 \ge 0$ tel que pour tout $n \ge n_0$

$$\mathbf{P}(Y_n > s_0) < \frac{\varepsilon}{s_1^p}$$

et donc pour tout $s_0 \le s \le s_1$

$$s^p \mathbf{P}(Y_n > s) < \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0.$$

Ainsi

$$\sup_{s>0} s^p \mathbf{P}(Y_n > s) < \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0.$$

□

Lemme 3.27. *Soit X une variable aléatoire positive telle $\mathbf{E}X^q$ existe. Alors*

$$\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^q \le 2^q \mathbf{E}X^q, \quad \forall q > 1.$$

Preuve. Comme $x \mapsto x^q$, $q > 1$, est convexe

$$\Big(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\Big)^q \le \frac{x^q}{2} + \frac{y^q}{2}, \quad x, y \ge 0,$$

et comme en plus $\mathbf{E}X^q$ existe, par l'inégalité de Jensen

$$\big(\mathbf{E}X\big)^q \le \mathbf{E}\big(X^q\big).$$

Donc

$$|X - \mathbf{E}X|^q \le (|X| + |\mathbf{E}X|)^q = 2^q \left(\frac{|X|}{2} + \frac{\mathbf{E}|X|}{2}\right)^q \le 2^q \left(\frac{|X|^q}{2} + \frac{|\mathbf{E}X|^q}{2}\right) \le 2^{q-1}\big(|X|^q + \mathbf{E}|X|^q\big).$$

Ainsi

$$\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^q \le 2^{q-1}\mathbf{E}\big(|X|^q + \mathbf{E}|X|^q\big) = 2^q \mathbf{E}|X|^q.$$

□

Preuve de la proposition 3.23. La preuve suivante suit la méthode de troncature utilisée dans [89] pour un problème de convergence de moments. Il est commode d'utiliser ici l'équivalence entre $\|.\|_\gamma$ et la norme séquentielle basée sur les différences secondes dyadiques définie par

$$\|f\|_\gamma^{\mathrm{seq}} := \max\left(|f(0)|, |f(1)|, \sup_{j\geq 1} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^{j-1}} \left| f\Big(\frac{2k+1}{2^j}\Big) - \frac{1}{2}\Big(f\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) + f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\right|\right).$$

L'équivalence de ces deux normes est prouvée dans Ciesielski [25]. Remplaçant donc $\|.\|_\gamma$ par $\|.\|_\gamma^{\mathrm{seq}}$, nous allons prouver la proposition 3.23 en établissant que pour tout $t > 0$,

$$P(n,t) := \mathbf{P}\left(\left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathring{\zeta}_n\right\|_\gamma^{\mathrm{seq}} > t\right)$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

En remarquant que pour toute f dans $\mathcal{H}_\gamma^o$ nulle en 0,

$$\|f\|_\gamma^{\mathrm{seq}} \leq \sup_{j\geq 0} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \left| f\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\right|,$$

on a

$$P(n,t) \leq \mathbf{P}\left(\sup_{j\geq 0} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \left|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\right| > \sigma\sqrt{n}t\right) \leq P_1(n,t) + P_2(n,t),$$

où

$$P_1(n,t) = \mathbf{P}\left(\sup_{0\leq j\leq \log(n)} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \left|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\right| > \sigma\sqrt{n}t\right)$$

et

$$P_2(n,t) = \mathbf{P}\left(\sup_{j>\log(n)} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \left|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\right| > \sigma\sqrt{n}t\right).$$

Dans ces formules et pour tout le chapitre, $\log(\cdot)$ désigne le logarithme de base 2 (ainsi $\log(2^n) = n$).

1. *Traitement de $P_2(n,t)$.* Si $j > \log n$ alors $(k+1)/2^j - k/2^j = 1/2^j < 1/n$. Donc si $k/2^j \in \big[i/n, (i+1)/n\big)$, avec $1 \leq i = i_{k,j} \leq n-2$, alors $(k+1)/2^j \in \big(i/n, (i+1)/n\big]$ ou $\big((i+1)/n, (i+2)/n\big]$.
   (a) Si $k/2^j, (k+1)/2^j \in \big[i/n, (i+1)/n\big)$ alors

$$\begin{aligned}\left|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\right| &= \frac{\left|\mathring{\zeta}_n\big(\frac{i+1}{n}\big) - \mathring{\zeta}_n\big(\frac{i}{n}\big)\right|}{\left|\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right|}\left|\frac{k+1}{2^j} - \frac{k}{2^j}\right| \\ &= \frac{n}{2^j}\left|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{i}{n}\Big)\right|.\end{aligned}$$

   Or $\mathring{\zeta}_n\big(\frac{i}{n}\big) = \mathring{S}_i$, $\mathring{\zeta}_n\big(\frac{i+1}{n}\big) = \mathring{S}_{i+1}$ et $\left|\mathring{\zeta}_n\big(\frac{i+1}{n}\big) - \mathring{\zeta}_n\big(\frac{i}{n}\big)\right| = \left|\mathring{S}_{i+1} - \mathring{S}_i\right| = \left|\mathring{\varepsilon}_{n,i+1}\right|$, en notant par $\mathring{S}_i$ la somme jusqu'à i des $\mathring{\varepsilon}_{n,i}$. Donc

$$\left|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\right| = \frac{n}{2^j}\left|\mathring{\varepsilon}_{n,i+1}\right| \leq \frac{n}{2^j}\max_{1\leq i\leq n}\left|\mathring{\varepsilon}_{n,i}\right|.$$

(b) Si $k/2^j \in \big[i/n, (i+1)/n\big)$ et $(k+1)/2^j \in \big((i+1)/n, (i+2)/n\big]$ alors

$$\begin{aligned}
\Big|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Big| &\le \Big|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{i+1}{n}\Big)\Big| + \Big|\mathring{\zeta}_n\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - \mathring{\zeta}_n\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Big| \\
&= \frac{\big|\mathring{\zeta}_n\big(\frac{i+2}{n}\big) - \mathring{\zeta}_n\big(\frac{i+1}{n}\big)\big|}{\big|\frac{i+2}{n} - \frac{i+1}{n}\big|}\Big|\frac{k+1}{2^j} - \frac{i+1}{n}\Big| \\
&\quad + \frac{\big|\mathring{\zeta}_n\big(\frac{i+1}{n}\big) - \mathring{\zeta}_n\big(\frac{i}{n}\big)\big|}{\big|\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\big|}\Big|\frac{i+1}{n} - \frac{k}{2^j}\Big| \\
&= n\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i+2}\big|\Big|\frac{k+1}{2^j} - \frac{i+1}{n}\Big| + n\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i+1}\big|\Big|\frac{k+1}{2^j} - \frac{i+1}{n}\Big| \\
&\le \frac{n}{2^j}\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i+2}\big| + \frac{n}{2^j}\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i+1}\big| \\
&\le 2\frac{n}{2^j}\max_{1\le i\le n}\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i}\big|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P_2(n,t) \le \mathbf{P}\bigg(\sup_{j>\log(n)} 2^{j(\gamma-1)}\sqrt{n}\max_{1\le i\le n}\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i}\big| > \frac{t\sigma}{2}\bigg).$$

Comme $j > \log(n)$ et $\gamma = 1/2 - 1/p < 1$, on a $2^{j(\gamma-1)} < n^{\gamma-1}$ donc $\sqrt{n}2^{j(\gamma-1)} < n^{\gamma-1/2} = n^{-1/p}$. Ainsi, par la remarque 3.17, on obtient

$$\begin{aligned}
P_2(n,t) &\le \mathbf{P}\bigg(\sup_{j>\log(n)} 2^{j(\gamma-1)}\sqrt{n}\max_{1\le i\le n}\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i}\big| > \frac{t\sigma}{2}\bigg) \\
&\le \mathbf{P}\bigg(\max_{1\le i\le n}\big|\mathring{\varepsilon}_{n,i}\big| > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{2}\bigg) \\
&\le n\mathbf{P}\bigg(\big|\mathring{\varepsilon}_{n,1}\big| > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{2}\bigg) \\
&= n\mathbf{P}\bigg(|\varepsilon_{n,1} - \mathbf{E}\varepsilon_{n,1}| > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{2}\bigg) \\
&\le n\mathbf{P}\bigg(|\varepsilon_{n,1}| + \mathbf{E}|\varepsilon_{n,1}| > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{2}\bigg) \\
&\le n\mathbf{P}\bigg(|\varepsilon_{n,1}| > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{4}\bigg) + n\mathbf{P}\bigg(\mathbf{E}|\varepsilon_{n,1}| > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{4}\bigg) \\
&\le n\mathbf{P}\bigg(\|X_1\|_\alpha > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{4}\bigg) + n\mathbf{P}\bigg(\mathbf{E}4\omega_\alpha\Big(X_1, \frac{1}{N}\Big) > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{4}\bigg) \\
&= n\mathbf{P}\bigg(\|X_1\|_\alpha > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{4}\bigg) + n\mathbf{P}\bigg(n < \bigg(\frac{16\mathbf{E}\omega_\alpha\big(X_k, \frac{1}{N}\big)}{t\sigma}\bigg)^p\bigg).
\end{aligned}$$

On prend n assez grand tel que

$$n \ge \bigg(\frac{16\mathbf{E}\omega_\alpha\big(X_k, \frac{1}{N}\big)}{t\sigma}\bigg)^p,$$

donc

$$P_2(n,t) \leq n\mathbf{P}\left(\|X_1\|_\alpha > \frac{t\sigma n^{\frac{1}{p}}}{4} \right).$$

Par la condition (3.5) du théorème 3.13,

$$P_2(n,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. *Traitement de* $P_1(n,t)$. On note $u_k = [\frac{nk}{2^j}]$, donc $u_k \leq \frac{nk}{2^j} \leq 1 + u_k \leq u_{k+1} \leq \frac{n(k+1)}{2^j} \leq 1 + u_{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\left|\mathring{\zeta}_n\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - \mathring{\zeta}_n\left(\frac{k}{2^j}\right)\right| &\leq \left|\mathring{\zeta}_n\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - \mathring{S}_{u_{k+1}}\right| + \left|\mathring{S}_{u_{k+1}} - \mathring{S}_{u_k}\right| + \left|\mathring{S}_{u_k} - \mathring{\zeta}_n\left(\frac{k}{2^j}\right)\right| \\
&\leq \left|\mathring{\varepsilon}_{n,1+u_{k+1}}\right| + \left|\mathring{S}_{u_{k+1}} - \mathring{S}_{u_k}\right| + \left|\mathring{\varepsilon}_{n,1+u_k}\right| \\
&\leq 2 \max_{1\leq i\leq n} \left|\mathring{\varepsilon}_{n,i}\right| + \left|\mathring{S}_{u_{k+1}} - \mathring{S}_{u_k}\right|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
P_1(n,t) &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{0\leq j\leq \log n} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \left|\mathring{S}_{u_{k+1}} - \mathring{S}_{u_k}\right| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{2} \right) \\
&\quad + \mathbf{P}\left(\max_{0\leq j\leq \log n} 2^{j\gamma} \max_{1\leq i\leq n} |\mathring{\varepsilon}_{n,i}| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{4} \right) \\
&= P_{1,1}(n,t) + P_{1,2}(n,t).
\end{aligned}$$

(a) Pour $P_{1,2}(n,t)$, comme $\max_{0\leq j\leq \log n} 2^{j\gamma} \leq n^\gamma$ et $1/2 - \gamma = 1/p$,

$$P_{1,2}(n,t) \leq \mathbf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |\mathring{\varepsilon}_{n,i}| > \frac{\sigma t n^{1/p}}{4} \right) \leq n\mathbf{P}\left(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| > \frac{\sigma t n^{1/p}}{4} \right).$$

Par le même raisonnement que pour $P_2(n,t)$, on en déduit que

$$P_{1,2}(n,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Pour $P_{1,1}(n,t)$, on utilise la méthode de troncature qui permet de travailler avec des variables aléatoires bornées. Pour cela, soit $t > 0$, on note

$$\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i} = \mathring{\varepsilon}_{n,i} \mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,i}| \leq tn^{1/p}\}}$$

et $\tilde{S}_k$ est la somme jusqu'à k des $\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}$. On a

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(n,t) &= \mathbf{P}\left(\sup_{0\leq j\leq \log n} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \left|\mathring{S}_{u_{k+1}} - \mathring{S}_{u_k}\right| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{2} \right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sup_{0\leq j\leq \log n} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \left|\mathring{S}_{u_{k+1}} - \mathring{S}_{u_k}\right| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{2} \ , \ \max_{1\leq i\leq n} |\mathring{\varepsilon}_{n,i}| \leq tn^{1/p} \right)
\end{aligned}$$

$$+\mathbf{P}\Big(\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\big|\mathring{S}_{u_{k+1}}-\mathring{S}_{u_k}\big|>\frac{\sigma\sqrt{n}t}{2}\ ,\ \max_{1\le i\le n}|\mathring{\varepsilon}_{n,i}|>tn^{1/p}\Big)$$
$$\le\mathbf{P}\Big(\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\big|\mathring{S}_{u_{k+1}}-\mathring{S}_{u_k}\big|>\frac{\sigma\sqrt{n}t}{2}\ ,\ \max_{1\le i\le n}|\mathring{\varepsilon}_{n,i}|\le tn^{1/p}\Big)$$
$$+\mathbf{P}\Big(\max_{1\le i\le n}|\mathring{\varepsilon}_{n,i}|>tn^{1/p}\Big).$$

Or sur l'événement $\{\max_{1\le i\le n}|\mathring{\varepsilon}_{n,i}|\le tn^{1/p}\}$, on a $\mathring{\varepsilon}_{n,i}=\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}$ et donc $\mathring{S}_k=\tilde{S}_k$. Donc, si on note

$$\tilde{P}_{1,1}(n,t)=\mathbf{P}\Big(\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\big|\tilde{\mathring{S}}_{u_{k+1}}-\tilde{\mathring{S}}_{u_k}\big|>\frac{\sigma\sqrt{n}t}{2}\Big),$$

on obtient

$$P_{1,1}(n,t)\le\tilde{P}_{1,1}(n,t)+\mathbf{P}\Big(\max_{1\le i\le n}|\mathring{\varepsilon}_{n,i}|>tn^{1/p}\Big).$$

Maintenant on note

$$\mathring{\varepsilon}'_{n,i}=\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}-\mathbf{E}\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i},$$

les $\mathring{S}'_k$ sont les sommes jusqu'à k des $\mathring{\varepsilon}'_{n,i}$ et

$$P'_{1,1}(n,t)=\mathbf{P}\Big(\max_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}}-\mathring{S}'_{u_k}\big|>\frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\Big).$$

Or

$$\begin{aligned}\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\big|\tilde{\mathring{S}}_{u_{k+1}}-\tilde{\mathring{S}}_{u_k}\big|&=\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\Big|\sum_{1+u_k}^{u_{k+1}}\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}\Big|\\&=\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\Big|\sum_{1+u_k}^{u_{k+1}}\big(\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}-\mathbf{E}\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}+\mathbf{E}\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}\big)\Big|\\&\le\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}}-\mathring{S}'_{u_k}\big|\\&\quad+\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\sum_{1+u_k}^{u_{k+1}}\mathbf{E}\big|\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}\big|,\end{aligned}$$

donc

$$\tilde{P}_{1,1}(n,t)\le P'_{1,1}(n,t)+\mathbf{P}\Big(\sup_{0\le j\le\log n}2^{j\gamma}\max_{0\le k<2^j}\sum_{1+u_k}^{u_{k+1}}\mathbf{E}\big|\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,i}\big|>\frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\Big).$$

Comme $2^j\le n$,

$$u_{k+1}-u_k=\Big[\frac{n(k+1)}{2^j}\Big]-\Big[\frac{nk}{2^j}\Big]<\frac{n(k+1)}{2^j}+1-\frac{nk}{2^j}=\frac{n}{2^j}+1\le\frac{2n}{2^j}\,,$$

et $\gamma - 1 < 0$, on obtient

$$\sup_{0\le j\le \log n} 2^{j\gamma} \max_{0\le k<2^j} \sum_{1+u_k}^{u_{k+1}} \mathbf{E}\big|\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,i}\big| \le \sup_{0\le j\le \log n} 2^{j(\gamma-1)} 2n\mathbf{E}\big|\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,1}\big| \le 2n\mathbf{E}\big|\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,1}\big|.$$

D'où

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le j\le \log n} 2^{j\gamma} \max_{0\le k<2^j} \sum_{1+u_k}^{u_{k+1}} \mathbf{E}\big|\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,i}\big| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\right) \le \mathbf{P}\left(\mathbf{E}\big|\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,i}\big| > \frac{\sigma t}{8\sqrt{n}}\right).$$

Or

$$0 = \mathbf{E}(\mathring{\varepsilon}_{n,1}) = \mathbf{E}\big(\mathring{\varepsilon}_{n,1}\mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|\le tn^{1/p}\}} + \mathring{\varepsilon}_{n,1}\mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|> tn^{1/p}\}}\big),$$

alors

$$\big|\mathbf{E}(\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,1})\big| = \big|-\mathbf{E}\big(\mathring{\varepsilon}_{n,1}\mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|> tn^{1/p}\}}\big)\big| \le \mathbf{E}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|\mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|> tn^{1/p}\}}\big).$$

Or, par le lemme 3.24,

$$\mathbf{E}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|\mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|> tn^{1/p}\}}\big) = tn^{1/p}\mathbf{P}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| > tn^{1/p}\big) + \int_{tn^{1/p}}^{\infty} \mathbf{P}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| > s\big)\,\mathrm{d}s$$

et par la condition (3.5) du théorème 3.13, pour t assez grand et uniformément par rapport à n,

$$(tn^{1/p})^p\mathbf{P}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| > tn^{1/p}\big) \le K, \quad K > 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|\mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|> tn^{1/p}\}}\big) &\le tn^{1/p}K(tn^{1/p})^{-p} + K\int_{tn^{1/p}}^{\infty} s^{-p}\,\mathrm{d}s \\ &= Kt^{1-p}n^{1/p-1}\Big(1 + \frac{1}{p-1}\Big).\end{aligned}$$

On note

$$t_0 = \Big(\frac{8Kp}{\sigma(p-1)}\Big)^{1/p},$$

pour tout $t \ge t_0$ et uniformément par rapport à n,

$$\mathbf{E}\big|\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,i}\big| \le \frac{\sigma t}{8\sqrt{n}}$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le j\le \log n} 2^{j\gamma} \max_{0\le k<2^j} \sum_{1+u_k}^{u_{k+1}} \mathbf{E}\big|\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{n,i}\big| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\right) = 0.$$

Ainsi

$$\tilde{P}_{1,1}(n,t) \leq P'_{1,1}(n,t).$$

Or

$$\begin{aligned} P'_{1,1}(n,t) &= \mathbf{P}\bigg(\max_{0\leq j\leq \log n} 2^{j\gamma} \max_{0\leq k<2^j} \big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\bigg) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\log(n)} \sum_{k=0}^{2^j} \mathbf{P}\bigg(\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\bigg). \end{aligned}$$

Puisque

$$\mathbf{E}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big|^q = \mathbf{E}\bigg|\sum_{u_k+1}^{u_{k+1}} \mathring{\varepsilon}'_{n,i}\bigg|^q < \infty,$$

l'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbf{P}\bigg(\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big| > \frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\bigg) \leq \frac{\mathbf{E}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big|^q}{\left(\frac{\sigma\sqrt{n}t}{4}\right)^q}.$$

Par conséquent,

$$P'_{1,1}(n,t) \leq \frac{4^q}{t^q n^{q/2}} \sum_{j=0}^{\log(n)} 2^{j\gamma q} \sum_{k=0}^{2^j} \mathbf{E}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big|^q.$$

Maintenant, afin de contrôler $\mathbf{E}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big|^q$ nous appliquons l'inégalité de Rosenthal : comme les $\mathring{\varepsilon}'_{n,i}$, $i \geq 1$, sont indépendantes et centrées, il existe une constante $c_q > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big|^q &= \mathbf{E}\bigg|\sum_{i=1+u_k}^{u_{k+1}} \mathring{\varepsilon}'_{n,i}\bigg|^q \\ &\leq c_q\bigg[\bigg(\sum_{i=1+u_k}^{u_{k+1}} \mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,i}\bigg)^{q/2} + \sum_{i=1+u_k}^{u_{k+1}} \mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,i}|^q\bigg] \\ &\leq c_q\bigg[(u_{k+1}-u_k)^{q/2}\Big(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\Big)^{q/2} + (u_{k+1}-u_k)\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q\bigg] \\ &\leq c_q\bigg[(u_{k+1}-u_k)^{q/2}\Big(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\Big)^{q/2} + (u_{k+1}-u_k)\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q\bigg]. \end{aligned}$$

Puisque $2^j \leq n$ et $u_{k+1} - u_k \leq 2n/2^j$, on obtient

$$\mathbf{E}\big|\mathring{S}'_{u_{k+1}} - \mathring{S}'_{u_k}\big|^q \leq c_q\bigg[\Big(\frac{2n}{2^j}\Big)^{q/2}\Big(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\Big)^{q/2} + \frac{2n}{2^j}\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q\bigg].$$

Par suite,

$$P'_{1,1}(n,t) \le \frac{4^q c_q}{\sigma^q t^q n^{q/2}} \sum_{j=0}^{\log(n)} 2^{j\gamma q} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left[\left(\frac{2n}{2^j}\right)^{q/2} \left(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\right)^{q/2} + \frac{2n}{2^j}\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q \right]$$

$$= \frac{4^q c_q}{\sigma^q t^q n^{q/2}} \sum_{j=0}^{\log(n)} 2^{j(\gamma q+1)} \left[\left(\frac{2n}{2^j}\right)^{q/2} \left(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\right)^{q/2} + \frac{2n}{2^j}\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q \right]$$

$$= \frac{4^q c_q}{\sigma^q t^q n^{q/2}} \left[(2n)^{q/2} \left(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\right)^{q/2} \sum_{j=0}^{\log(n)} 2^{j(\gamma q+1-q/2)} \right.$$

$$\left. + 2n\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q \sum_{j=0}^{\log(n)} 2^{j\gamma q} \right].$$

Or

$$\sum_{j=0}^{\log(n)} 2^{j\gamma q} \le \frac{2^{\gamma q(\log(n)+1)} - 1}{2^{\gamma q} - 1} = \frac{n^{\gamma q}\, 2^{\gamma q} - 1}{2^{\gamma q} - 1} \le \frac{n^{\gamma q}\, 2^{\gamma q}}{2^{\gamma q} - 1}$$

et, comme $\gamma - 1/2 = -1/p$, on a

$$\sum_{j=0}^{\log(n)} 2^{j(\gamma q+1-q/2)} \le \frac{1 - 2^{(\gamma q+1-q/2)(\log(n)+1)}}{1 - 2^{\gamma q+1-q/2}} < \frac{1}{1 - 2^{\gamma q+1-q/2}} = \frac{1}{1 - 2^{1-q/p}}\,.$$

Ainsi

$$P'_{1,1}(n,t) \le \frac{4^q c_q}{\sigma^q t^q n^{q/2}} \left[\frac{(2n)^{q/2}}{1 - 2^{1-q/p}} \left(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\right)^{q/2} + \frac{(2n)^{\gamma q}}{2^{q\gamma} - 1}\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q \right]$$

$$= \frac{c_1(p,q)}{\sigma^q t^q} \left(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\right)^{q/2} + \frac{c_2(p,q) n^{1-q/p}}{\sigma^q t^q}\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q$$

où

$$c_1(p,q) = \frac{2^{3q/2}\, c_q}{1 - 2^{1-q/p}} \quad \text{et} \quad c_2(p,q) = \frac{2^{\gamma q+1-q/2}\, c_q}{2^{\gamma q} - 1}\,.$$

i. Montrons que $\left(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\right)^{q/2}$ tend vers 0 : on remarque que

$$\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1} = \mathbf{E}\big(\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1} - \mathbf{E}\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1}\big)^2 = \mathbf{Var}(\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1}) \le \mathbf{E}\tilde{\mathring{\varepsilon}}^2_{n,1} \le \mathbf{E}\mathring{\varepsilon}^2_{n,1}$$

et

$$\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}^2_{n,1} = \mathbf{E}\big(\varepsilon_{n,1} - \mathbf{E}\varepsilon_{n,1}\big)^2 = \mathbf{Var}\varepsilon_{n,1} \le \mathbf{E}\varepsilon^2_{n,1}.$$

Par la Remarque 3.17,

$$\varepsilon_{n,1} = \|X_1\|_\alpha - \|X_{1,N}\|_\alpha \le \|X_{1,N}\|_\alpha - X_1 \le 4\omega_\alpha\Big(X_1, \frac{1}{N}\Big),$$

et donc

$$\mathbf{E}\varepsilon_{n,1}^2 \leq 16\mathbf{E}\omega_\alpha^2\Big(X_1, \frac{1}{N}\Big).$$

Par conséquent,

$$\Big(\mathbf{E}\mathring{\varepsilon}'^2_{n,1}\Big)^{q/2} \leq 4^q\Big(\mathbf{E}\omega_\alpha^2\Big(X_1, \frac{1}{N}\Big)\Big)^{q/2},$$

et puisque $X_k \in \mathcal{H}_\alpha^o[0,1]$,

$$\omega_\alpha^2\Big(X_1, \frac{1}{N}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'autre part, comme $\omega_\alpha^2(X_1, 1/N) \leq \|X_1\|_\alpha^2$ et $\mathbf{E}\|X_1\|_\alpha^2 < +\infty$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir le résultat annoncé.

ii. Montrons que $\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q$ tend vers 0 : par le lemme 3.27,

$$\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q = \mathbf{E}|\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1} - \mathbf{E}\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1}|^q \leq 2^q\mathbf{E}|\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1}|^q.$$

Par le lemme 3.25,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1}|^q &= \mathbf{E}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}|^q \mathbb{1}_{\{|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| \leq tn^{1/p}\}}\big) \\
&= \int_0^{tn^{1/p}} qs^{q-1}\mathbf{P}\big(s < |\mathring{\varepsilon}_{n,1}| \leq tn^{1/p}\big)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^{tn^{1/p}} qs^{q-1}\mathbf{P}\big(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| > s\big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On note

$$K_n = \sup_{s>0} s^p\mathbf{P}(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| > s),$$

on a

$$\mathbf{E}|\tilde{\mathring{\varepsilon}}_{n,1}|^q \leq qK_n\int_0^{tn^{1/p}} s^{q-1-p}\,\mathrm{d}s = \frac{q}{q-p}K_n t^{q-p}n^{q/p-1}$$

et donc

$$\frac{c_2(p,q)n^{1-q/p}}{\sigma^q t^q}\mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q \leq \frac{c_2'(p,q)}{\sigma^q t^p}K_n.$$

Maintenant, par le même raisonnement que pour $P_2(n,t)$, pour n assez grand, on a

$$\mathbf{P}(|\mathring{\varepsilon}_{n,1}| > s) \leq \mathbf{P}(|\varepsilon_{n,1}| > s)$$

et afin de contrôler K_n, on applique le lemme 3.26 avec $Y_n = |\varepsilon_{n,1}|$ et $Z = \|X_1\|_\alpha$, en effet

$$0 \leq |\varepsilon_{n,1}| = |\|X_1\|_\alpha - \|X_{1,N}\|_\alpha| \leq \|X_1\|_\alpha + \|X_{1,N}\|_\alpha \leq 2\|X_1\|_\alpha,$$

par la condition (3.5) du théorème 3.13, on sait que

$$s^p \mathbf{P}(\|X_1\|_\alpha > s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0,$$

et par la remarque 3.17,

$$\mathbf{P}(|\varepsilon_{n,1}| > s) = \mathbf{P}(\big|\|X_1\|_\alpha - \|X_{1,N}\|_\alpha\big| > s) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi

$$\sup_{s>0} \mathbf{P}(|\varepsilon_{n,1}| > s) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par conséquent,

$$K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et donc

$$\frac{c_2(p,q)n^{1-q/p}}{\sigma^q t^p} \mathbf{E}|\mathring{\varepsilon}'_{n,1}|^q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par suite, on obtient l'inégalité (3.12) et ce qui prouve la proposition 3.23. □

3.4 Étude de T_n et $T_{n,N}$ sous différentes hypothèses alternatives

Dans cette section, nous étudions les statistiques T_n et $T_{n,N}$ sous différentes hypothèses alternatives. Nous commençons par étudier la statistique T_n, ensuite on en déduit le comportement de la statistique $T_{n,N}$. Pour ce faire, nous aurons besoin des résultats suivants.

Lemme 3.28. *Soit X un élément aléatoire dans $\mathcal{H}^o_\alpha([0,1],\mathbb{R})$, $0 < \alpha < 1$, et X_N son approximation par interpolation affine avec un pas de discrétisation de $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathbf{E}\|X\|_\alpha = \mu \in \mathbb{R}_+$. Alors*

$$\mathbf{E}\|X_N\|_\alpha \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mu. \tag{3.13}$$

Preuve. Par la remarque 3.17, $\lim_{N\to+\infty} \|X_N\|_\alpha = \|X\|_\alpha$ ponctuellement sur Ω et $0 \leq \|X_N\|_\alpha \leq \|X\|_\alpha$. Donc par le théorème de convergence dominée on obtient la convergence (3.13). □

Pour les deux lemmes suivants, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 3.29. *Soit E un ensemble et $E_\delta \subset E$, pour tout $\delta > 0$. On dit que E_δ croît vers E quand δ décroît vers 0 et on note $E_\delta \uparrow E$ quand $\delta \downarrow 0$ si*

- *$E_\delta \subset E_{\delta'}$ pour $0 < \delta' < \delta$;*
- *$E = \cup_{\delta>0} E_\delta$.*

Lemme 3.30. *Soit f une fonction définie sur un ensemble E et à valeurs positives. Si $E_\delta \uparrow E$ quand $\delta \downarrow 0$ alors $\sup_{t\in E_\delta} f(t) \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} \sup_{t\in E} f(t)$.*

Preuve. On pose $M = \sup_{t\in E} f(t)$. Si $M < +\infty$ alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $t_\varepsilon \in E$ tel que $f(t_\varepsilon) > M - \varepsilon$. Comme $E = \cup_{\delta>0} E_\delta$, il existe au moins un $\delta_0 > 0$ tel que $t_\varepsilon \in E_{\delta_0}$. Donc

$$M \geq \sup_{t\in E_{\delta_0}} f(t) \geq f(t_\varepsilon) \geq M - \varepsilon$$

et pour tout $\delta < \delta_0$, on a

$$\sup_{t\in E_\delta} f(t) \geq \sup_{t\in E_{\delta_0}} f(t) \geq M - \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $0 < \delta < \delta_0$

$$M \geq \sup_{t\in E_\delta} f(t) \geq \sup_{t\in E_{\delta_0}} f(t) \geq M - \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\sup_{t\in E_\delta} f(t) \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} \sup_{t\in E} f(t).$$

Maintenant, si $M = +\infty$ alors pour tout $A > 0$, il existe $t_A \in E$ tel que $f(t_A) \geq A$. Comme $E = \cup_{\delta>0} E_\delta$, il existe au moins un $\delta_0 > 0$ tel que $t_A \in E_{\delta_0}$. Donc

$$\sup_{t\in E_{\delta_0}} f(t) \geq f(t_A) \geq A.$$

Ainsi, pour tout $0 < \delta < \delta_0$

$$\sup_{t\in E_\delta} f(t) \geq \sup_{t\in E_{\delta_0}} f(t) \geq f(t_A) \geq A.$$

Par conséquent,

$$\sup_{t\in E_\delta} f(t) \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

□

Lemme 3.31. *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que pour un $\alpha \in]0,1[$, $\|f\|_\alpha = +\infty$. Soit f_N l'approximation par interpolation affine de f avec un pas de discrétisation de $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\|f_N\|_\alpha \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Preuve. Notons tout d'abord que

$$\begin{aligned}\|f_N\|_\alpha \geq \sup_{0<t<s<1} \frac{|f_N(t) - f_N(s)|}{|t-s|^\alpha} &= \max_{0\leq i<j\leq N} \frac{\left|f_N\left(\frac{j}{N}\right) - f_N\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^\alpha} \\ &= \max_{0\leq i<j\leq N} \frac{\left|f\left(\frac{j}{N}\right) - f\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^\alpha}.\end{aligned}$$

On prend maintenant

$$g : (s,t) \mapsto \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha},$$

fonction définie sur l'ensemble $A = [0,1]^2 \setminus \{(s,t) \in [0,1]^2 \ : \ s = t\}$. Pour tout $\delta \in]0,1]$, on pose $E_\delta = \{(s,t) \in [0,1]^2 \ : \ |s-t| \geq \delta\}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_{\delta,N} = \left\{\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) \in [0,1]^2 \ : \ \left|\frac{i}{N} - \frac{j}{N}\right| \geq \delta\right\}$. On vérifie facilement que $D_\delta = \cup_{N \geq 1} D_{\delta,N}$ est dense dans E_δ. Il est clair que

$$\|f_N\|_\alpha \geq \sup_{(s,t) \in D_\delta} g(s,t).$$

Comme g est continue sur le compact E_δ alors elle atteint sa borne sup, il existe alors $(s_\delta, t_\delta) \in E_\delta$ tel que

$$\sup_{(s,t) \in E_\delta} g(s,t) = g(s_\delta, t_\delta).$$

Comme D_δ est dense dans E_δ, il existe une suite $\big((s_N, t_N)\big)_N \subset D_\delta$ telle que

$$(s_N, t_N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} (s_\delta, t_\delta)$$

et par continuité de la fonction g on a $g(s_N, t_N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} g(s_\delta, t_\delta)$. Puisque $g(s_N, t_N) \leq \sup_{(s,t) \in D_\delta} g(s,t)$, on obtient

$$\liminf_{N \to +\infty} g(s_N, t_N) \leq \liminf_{N \to +\infty} \sup_{(s,t) \in D_\delta} g(s,t) \leq \liminf_{N \to +\infty} \|f_N\|_\alpha.$$

Ainsi

$$\sup_{(s,t) \in E_\delta} g(s,t) = g(s_\delta, t_\delta) = \liminf_{N \to +\infty} g(s_N, t_N) \leq \liminf_{N \to +\infty} \|f_N\|_\alpha, \qquad \forall 0 < \delta < 1.$$

Donc afin d'étudier ce dernier terme, nous commençons par montrer que $E_\delta \uparrow A$ quand $\delta \downarrow 0$. Comme $E_\delta \subset A$, pour tout $0 < \delta \leq 1$, il suffit de montrer que $A \subset \bigcup_{\delta > 0} E_\delta$. Pour cela, si on prend $(s,t) \in A$, avec $\delta' := |t-s|$, alors $(s,t) \in E_\delta$ pour tout $0 < \delta < \delta' \leq 1$. D'où $A \subset \bigcup_{\delta > 0} E_\delta$ et $E_\delta \uparrow A$ quand $\delta \downarrow 0$.

Par conséquent, par le lemme 3.30, on obtient

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{(s,t) \in E_\delta} g(s,t) = \sup_{(s,t) \in A} g(s,t) = \|f\|_\alpha,$$

ce qui implique que

$$\|f\|_\alpha \leq \liminf_{N \to +\infty} \|f_N\|_\alpha.$$

Comme $\|f\|_\alpha = +\infty$ par hypothèse, on obtient $\lim_{N \to +\infty} \|f_N\|_\alpha = +\infty$. □

Lemme 3.32. *Soit X un élément aléatoire continu et X_N son approximation par interpolation affine avec un pas de discrétisation de $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathbf{E}\|X\|_\alpha = +\infty$. Alors*

$$\mathbf{E}\|X_N\|_\alpha \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty.$$

Preuve. Par le lemme de Fatou et la remarque 3.17,

$$\liminf_{N\to+\infty} \mathbf{E}\|X_N\|_\alpha \geq \mathbf{E}\Big(\liminf_{N\to+\infty} \|X_N\|_\alpha\Big) = \mathbf{E}\Big(\lim_{N\to+\infty} \|X_N\|_\alpha\Big) = \mathbf{E}\|X\|_\alpha = +\infty$$

et donc $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}\|X_N\|_\alpha = +\infty$. □

3.4.1 Étude de T_n et $T_{n,N}$ dans le cas de changement de l'espérance

Dans cette partie, nous considérons l'hypothèse alternative (H_1'), *i.e.*, nous supposons un changement dans la valeur de l'espérance des Y_k, en distinguant deux cas : celui où la différence entre l'espérance pendant et en dehors de l'épidémie est fixe et celui où elle tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Pour cela, on note

$$\mathbf{E}Y_i = \begin{cases} \mu_0, & \text{si } i \in \bar{I}_n, \\ \mu_1, & \text{si } i \in I_n, \end{cases}$$

$$\mathring{Y}_i = \begin{cases} Y_i - \mu_0 & \text{si } i \in \bar{I}_n, \\ Y_i - \mu_1 & \text{si } i \in I_n \end{cases}$$

et

$$\mathbf{Var}Y_i = \begin{cases} \sigma_0^2, & \text{si } i \in \bar{I}_n, \\ \sigma_1^2, & \text{si } i \in I_n, \end{cases}$$

où $\sigma_0^2 = \sigma^2$ (pas forcément égale à σ_1^2).

Le cas $\mu_0 \neq \mu_1 \in \mathbb{R}_+$

La divergence de la statistique T_n sous cette hypothèse alternative est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.33. *On pose*

$$h_n = \frac{l^\star}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty. \tag{3.14}$$

Preuve. Le point clé de cette preuve est de montrer que

$$T_n \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\, h_n^{1-\gamma}|\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\Big(h_n^{\frac{1}{p}}\Big)$$

et que sous les hypothèses du théorème, ce minorant tend vers $+\infty$ en probabilité avec n. Pour cela, nous allons utiliser la décomposition suivante

$$S_{m^\star} - S_{k^\star} - \frac{l^\star}{n} S_n = l^\star\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big)(\mu_0 - \mu_1) + R_n, \tag{3.15}$$

où

$$R_n = \Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big) \sum_{i \in I_n} \mathring{Y}_i - \frac{l^\star}{n} \sum_{i \in \bar{I}_n} \mathring{Y}_i.$$

Vérification de (3.15). En notant que $S_n = S(I_n) + S(\bar{I}_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_{m^\star} - S_{k^\star} - \Big(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\Big) S_n &= S_{m^\star} - S_{k^\star} - \frac{l^\star}{n} S_n \\
&= \Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big) S(I_n) - \frac{l^\star}{n} S(\bar{I}_n) \\
&= \Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big) \sum_{i \in I_n} \big(\mathring{Y}_i + \mu_1\big) - \frac{l^\star}{n} \sum_{i \in \bar{I}_n} \big(\mathring{Y}_i + \mu_0\big) \\
&= l^\star\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big)\mu_1 + \Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big) \sum_{i \in I_n} \mathring{Y}_i + \frac{l^\star}{n}(n - l^\star)\mu_0 - \frac{l^\star}{n} \sum_{i \in \bar{I}_n} \mathring{Y}_i \\
&= l^\star\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big)(\mu_1 - \mu_0) + R_n.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} R_n\Big) &= \mathbf{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big) \sum_{i \in I_n} \mathring{Y}_i - \frac{l^\star}{n} \sum_{i \in \bar{I}_n} \mathring{Y}_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big)^2 l^\star \sigma_1^2 + \frac{1}{n}\Big(\frac{l^\star}{n}\Big)^2 (n - l^\star)\sigma_0^2 \\
&\leq \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big)^2 l^\star \varsigma^2 + \frac{1}{n}\Big(\frac{l^\star}{n}\Big)^2 (n - l^\star)\varsigma^2 \\
&= \varsigma^2 \frac{l^\star}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big)\Big(1 - \frac{l^\star}{n} + \frac{l^\star}{n}\Big) \\
&= \varsigma^2 h_n,
\end{aligned}$$

où

$$\varsigma^2 = \max\big\{\sigma_0^2, \sigma_1^2\big\}.$$

Puisque les $\mathring{Y}_i$ sont centrées, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\, R_n = O_{\mathbf{P}}\big(\sqrt{h_n}\big).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1\le k<m\le n} \frac{\left|S_m - S_k - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right) S_n\right|}{\left[\left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\right)\right]^{\gamma}} \\
&\ge \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\left|S_{m^\star} - S_{k^\star} - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right) S_n\right|}{\left[\left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\right)\right]^{\gamma}} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} h_n^{-\gamma} \left| l^\star \left(1 - \frac{l^\star}{n}\right)(\mu_0 - \mu_1) + R_n \right| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} h_n^{-\gamma} |n h_n (\mu_0 - \mu_1) + R_n| \\
&\ge \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} h_n^{-\gamma} (|n h_n (\mu_0 - \mu_1)| - |R_n|) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{-\gamma} h_n |\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} h_n^{-\gamma} |R_n| \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| - \frac{h_n^{-\gamma}}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\left(\sqrt{h_n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\left(h_n^{\frac{1}{2}-\gamma}\right) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\left(h_n^{\frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$T_n \ge \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\left(h_n^{\frac{1}{p}}\right).$$

Sous les hypothèse du théorème 3.33, on obtient (3.14). □

Maintenant, afin d'étudier $T_{n,N}$ sous l'hypothèse alternative, notons

$$\mathbf{E}Y_{i,N} = \begin{cases} \mu_{0,N}, & \text{si } i \in \bar{I}_n, \\ \mu_{1,N}, & \text{si } i \in I_n. \end{cases}$$

Théorème 3.34. *On pose*

$$h_n = \frac{l^\star}{n}\left(1 - \frac{l^\star}{n}\right).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} T_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

Preuve. Comme $\mu_{0,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_0$ et $\mu_{1,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_1$, et sous cette hypothèse alternative, $\mu_0 \neq \mu_1$, donc à partir d'un certain rang n_0, $\mu_{0,N} \neq \mu_{1,N}$. On obtient ainsi le résultat par le même raisonnement que dans la preuve du théorème 3.33. □

Le cas $|\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On suppose que $\mu_0 = \mu_0(n)$ et $\mu_1 = \mu_1(n)$ et que $|\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Notons que ce cas nous permet de déterminer les plus petits changements que la statistique T_n peut détecter.

Théorème 3.35. *On pose*

$$h_n = \frac{l^\star}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

Preuve. Par le même raisonnement que dans la preuve du théorème 3.33, on montre que

$$T_n \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\Big(h_n^{\frac{1}{p}}\Big)$$

et comme

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

on aura le résultat. □

Maintenant pour $T_{n,N}$, par un raisonnement similaire à la démonstration du théorème 3.34, on montre le théorème suivant.

Théorème 3.36. *On pose*

$$h_n = \frac{l^\star}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} |\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$T_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

3.4.2 Étude de T_n et $T_{n,N}$ dans le cas de changement dans la régularité höldérienne

Dans cette partie, nous considérons l'hypothèse alternative (H_1), *i.e.*, nous supposons un changement de régularité höldérienne. En fait, sous cette hypothèse alternative on a $\mathbf{P}(Y_i = \|X_i\|_\alpha = +\infty) > 0$ pour tout $i \in I_n$. Ainsi $\mathbf{P}(S_n = \sum_{i=1}^n Y_i = +\infty) > 0$ et il n'est alors même pas clair que le calcul explicite de T_n soit toujours possible à partir des Y_i à cause des différences « $\infty - \infty$ » et donc que T_n soit définie sur un évènement Ω' de probabilité 1. En supposant que l'observateur ait accès aux valeurs exactes des Y_i, dès qu'il constate que l'une d'elles est infinie, il n'a plus de raison de tester l'existence d'une rupture dans la régularité höldérienne puisque qu'il est alors sûr que pour le i correspondant, $\mathbf{P}(X_i \notin \mathcal{H}_\alpha) > 0$. On pourrait prendre cela en compte en modifiant la définition de T_n en convenant que, par exception, T_n vaut $+\infty$ lorsque l'un au moins des Y_i est infini. Nous n'explorerons pas davantage cette voie car l'utilisation de $T_{n,N}$ est bien plus réaliste.

Avec $T_{n,N}$, le problème des observations ayant une valeur infinie disparaît puisque $Y_{i,N} = \|X_{i,N}\|_\alpha$ reste fini pour tout $1 \leq i \leq n$. En effet, les $X_{i,N}$ sont des lignes polygonales et donc appartiennent à $\mathcal{H}_\alpha^o([0,1], \mathbb{R})$ pour tout $0 < \alpha < 1$.

Théorème 3.37. *On pose*

$$h_n = \frac{l^\star}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

et qu'il existe $0 < \delta < 1$ *tel que*

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} N^{(\alpha-\beta)(1-\delta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$T_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty. \tag{3.16}$$

Preuve. Par le même raisonnement que dans la preuve du théorème 3.33, on a

$$T_{n,N} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{1-\gamma} |\mu_{0,N} - \mu_{1,N}| - \frac{1}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\Big(h_n^{\frac{1}{p}}\Big).$$

Il suffit alors de montrer que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n^{1-\gamma} |\mu_{0,N} - \mu_{1,N}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \tag{3.17}$$

Pour cela, on commence par minorer $\mu_{1,N}$:

$$\|X_{m^*,N}\|_\alpha = \big|X_{m^*,N}(0)\big| + \max_{0\leq i<j\leq N} \frac{\big|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right) - X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\big|}{\big|\frac{j-i}{N}\big|^\alpha}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \max_{0\leq i<j\leq N} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\alpha}} \\
&\geq \max_{\substack{0\leq i<j\leq N,\\ 0<j-i\leq N^{\delta}}} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta}} \left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta-\alpha} \\
&\geq \max_{\substack{0\leq i<j\leq N,\\ 0<j-i\leq N^{\delta}}} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta}} \min_{0<j-i\leq N^{\delta}} \left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta-\alpha} \\
&= N^{(\alpha-\beta)(1-\delta)} \max_{\substack{0\leq i<j\leq N,\\ 0<j-i\leq N^{\delta}}} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta}},
\end{aligned}
$$

par suite

$$
\mu_{1,N} = \mathbf{E}\|X_{m^*,N}\|_{\alpha} \geq N^{(\alpha-\beta)(1-\delta)}\mathbf{E}\left(\max_{\substack{0\leq i<j\leq N,\\ 0<j-i\leq N^{\delta}}} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta}}\right).
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n}}{\sigma}h_n^{1-\gamma}|\mu_{0,N}-\mu_{1,N}| &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}h_n^{1-\gamma}(\mu_{1,N}-\mu_{0,N}) \\
&\geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}h_n^{1-\gamma}\left(N^{(\alpha-\beta)(1-\delta)}\mathbf{E}\left(\max_{\substack{0\leq i<j\leq N,\\ 0<j-i\leq N^{\delta}}} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta}}\right)-\mu_{0,N}\right) \\
&\geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}h_n^{1-\gamma}N^{(\alpha-\beta)(1-\delta)}\left(\mathbf{E}\left(\max_{\substack{0\leq i<j\leq N,\\ 0<j-i\leq N^{\delta}}} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta}}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - N^{(\alpha-\beta)(\delta-1)}\mu_{0,N}\right).
\end{aligned}
$$

Remarquons maintenant que

$$
\liminf_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\max_{\substack{0\leq i<j\leq N,\\ 0<j-i\leq N^{\delta}}} \frac{\left|X_{m^*}\left(\frac{j}{N}\right)-X_{m^*}\left(\frac{i}{N}\right)\right|}{\left|\frac{j-i}{N}\right|^{\beta}}\right) > 0.
$$

Sinon il y aurait une sous-suite infinie strictement croissante d'indices n_l pour lesquels cette espérance serait nulle, ce qui entraînerait la nullité presque sûre de chaque terme du max, donc en particulier de tous les accroissements $X_{m^*}((i+1)/N(n_l)) - X_{m^*}(i/N(n_l))$, $0 \leq i \leq N(n_l) - N(n_l)^{\delta}$. Il en irait de même pour un élément aléatoire X fixé de même loi que X_{m^*}. Par continuité de X et densité de $\{i/N(n_l), 0 \leq i \leq N(n_l) - N(n_l)^{\delta}, l \in \mathbb{N}^*\}$ dans $[0,1]$ on en déduirait que les trajectoires de X sont presque sûrement des fonctions constantes

sur $[0,1]$ d'où $\mathbf{P}(X \in \mathcal{H}_\alpha^o) = 1$ et comme $X_{m^\star}$ a même loi que X, $\mathbf{P}(X_{m^\star} \in \mathcal{H}_\alpha^o) = 1$, en contradiction avec l'hypothèse (H_1) qui précise que $\mathbf{P}(X_{m^\star} \in \mathcal{H}_\beta \setminus \mathcal{H}_\alpha)$ n'est pas nulle.

On peut maintenant déduire, puisque $N^{(\alpha-\beta)(\delta-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mu_{0,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_0$, (3.17) et donc (3.16). □

Remarque 3.38. Nous pouvons maintenant mieux voir l'utilité de facteur de pénalité $\left[\left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\right)\right]^{-\gamma}$ dans la définition de T_n (ainsi que dans celle de $T_{n,N}$). Nous montrons que ce facteur permet à la statistique la détection d'une « très courte épidémie », c'est-à-dire pour $l^\star/n$ proche de 0 ou d'une « très longue épidémie », c'est-à-dire pour $l^\star/n$ proche de 1.

1. Afin de mieux voir son utilité, commençons par supposer que ce facteur n'existe pas dans la définition de T_n, c'est-à-dire $\gamma = 0$ et donc T_n est donnée par

$$T_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1\le k<m\le n} \left| S_m - S_k - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right) S_n \right|.$$

   Dans ce cas, cette statistique ne peut détecter que le changement de régularité tel que $\sqrt{n} = o(l^\star)$ ou bien $\sqrt{n} = o(n - l^\star)$. En effet, en suivant le même raisonnement, par exemple, que la preuve du théorème 3.33, nous aurons

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1\le k<m\le n} \left| S_m - S_k - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right) S_n \right| \\ &\ge \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left| S_{m^\star} - S_{k^\star} - \frac{l^\star}{n} S_n \right| \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left| l^\star \left(1 - \frac{l^\star}{n}\right)(\mu_0 - \mu_1) + R_n \right| \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n |\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |R_n| \\ &\ge \frac{\sqrt{n}}{\sigma} h_n |\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma} O_{\mathbf{P}}\left(\sqrt{h_n}\right). \end{aligned}$$

   Ensuite, on peut rendre le deuxième terme de ce dernier majorant aussi petit qu'on veut dès que $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour avoir la divergence du premier, en supposant que $l^\star/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, $c \in [0,1]$, il suffit que $\sqrt{n}h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et pour avoir ceci, il faut que soit $\sqrt{n} = o(l^\star)$ soit $\sqrt{n} = o(n - l^\star)$.

2. Maintenant, nous prenons $0 < \gamma < 1/2$. Par la preuve du théorème 3.33,

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1\le k<m\le n} \frac{\left| S_m - S_k - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right) S_n \right|}{\left[\left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)\right)\right]^\gamma} \\ &\ge \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{\left| S_{m^\star} - S_{k^\star} - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right) S_n \right|}{\left[\left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\left(1 - \left(\frac{m^\star}{n} - \frac{k^\star}{n}\right)\right)\right]^\gamma} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\, h_n^{1-\gamma}|\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma}\, O_{\mathbf{P}}\Big(h_n^{\frac{1}{p}}\Big).$$

Donc pour avoir la divergence de la statistique T_n vers $+\infty$, il suffit que

$$h_n = \frac{l^\star}{n}\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{3.18}$$

et que

$$\sqrt{n} h_n^{1-\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \tag{3.19}$$

Pour cela, en supposant que $l^\star/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, $c \in [0,1]$, afin d'avoir (3.18), il faut que soit $c = 0$ (et donc $(l^\star) = o(n)$) soit $c = 1$ (et donc $n - l^\star = o(n)$). Maintenant pour avoir (3.19), il faut que soit

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = o\bigg(\Big(\frac{l^\star}{n}\Big)^{1-\gamma}\bigg),$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = o\bigg(\Big(1 - \frac{l^\star}{n}\Big)^{1-\gamma}\bigg)$$

et donc soit $n^{\frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}} = o(l^\star)$ soit $n^{\frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}} = o(n - l^\star)$. Notons que $(1-2\gamma)/2(1-\gamma) < 1/2$, pour tout $0 < \gamma < 1/2$.

Par exemple, pour $l^\star \sim n^\delta$:

1. Si $\gamma = 0$, $\sqrt{n} = o(l^\star)$ et donc $\sqrt{n} = o(n^\delta)$, il faut alors que $\delta > 1/2$.
2. Maintenant dans le cas $\gamma \neq 0$, $n^{\frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}} = o(n^\delta)$, il faut alors que $\delta > \frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}$. Or la fonction $\gamma \mapsto \frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)}$, $0 < \gamma < 1/2$, est décroissante et bornée par 0 et $1/2$. Donc en augmentant γ, on diminue δ pour être de en plus en plus proche de 0 lorsque γ est proche de $1/2$.

3.5 Étude de Δ_n et $\Delta_{n,N}$ sous différentes hypothèses alternatives

Dans cette section, nous étudions les statistiques Δ_n et $\Delta_{n,N}$ sous les différentes hypothèses alternatives.

3.5.1 Étude de Δ_n et $\Delta_{n,N}$ dans le cas de changement de l'espérance

Dans cette partie, nous considérons l'hypothèse alternative $(\tilde{H}_1)$, *i.e.*, nous supposons un changement dans la valeur de l'espérance des Y_k, en distinguant les cas où la différence

entre l'espérance avant et après $k^\star$ est finie ou infinie. Pour cela, on note

$$\mathbf{E}Y_i = \begin{cases} \mu_0, & \text{si } i \leq k^\star, \\ \mu_1, & \text{si } i > k^\star, \end{cases}$$

$$\mathring{Y}_i = \begin{cases} Y_i - \mu_0 & \text{si } i \leq k^\star, \\ Y_i - \mu_1 & \text{si } i > k^\star \end{cases}$$

et

$$\mathbf{Var}Y_i = \begin{cases} \sigma_0^2, & \text{si } i \leq k^\star, \\ \sigma_1^2, & \text{si } i > k^\star, \end{cases}$$

où $\sigma_0^2 = \sigma^2$ (pas forcément égale à σ_1^2).

Le cas $\mu_0 \neq \mu_1 \in \mathbb{R}_+$

La divergence de la statistique Δ_n sous cette hypothèse alternative est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.39. *On pose*

$$h_n = \frac{k^\star}{n}\Big(1 - \frac{k^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que

$$\sqrt{n}h_n^{1-\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$\Delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty. \tag{3.20}$$

Preuve. Par le même raisonnement que la preuve du théorème 3.33, nous montrons que

$$S_{k^\star} - \frac{k^\star}{n} S_n = k^\star\Big(1 - \frac{k^\star}{n}\Big)(\mu_0 - \mu_1) + R_n, \tag{3.21}$$

où

$$R_n = \Big(1 - \frac{k^\star}{n}\Big) \sum_{i=1}^{k^\star} \mathring{Y}_i - \frac{k^\star}{n} \sum_{i=k^\star+1}^{n} \mathring{Y}_i.$$

Vérification de (3.21).

$$S_{k^\star} - \frac{k^\star}{n} S_n = \sum_{i=1}^{k^\star} Y_i - \frac{k^\star}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k^\star} Y_i - \frac{k^\star}{n}\left(\sum_{i=1}^{k^\star} Y_i + \sum_{i=k^\star+1}^{n} Y_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k^\star} \big(\mathring{Y}_i + \mu_0\big) - \frac{k^\star}{n}\left(\sum_{i=1}^{k^\star} \big(\mathring{Y}_i + \mu_0\big) + \sum_{i=k^\star+1}^{n} \big(\mathring{Y}_i + \mu_1\big)\right)\\
&= k^\star\mu_0 + \sum_{i=1}^{k^\star} \mathring{Y}_i - \frac{k^\star}{n}\left(k^\star\mu_0 + \sum_{i=1}^{k^\star} \mathring{Y}_i + \big(n-k^\star\big)\mu_1 + \sum_{i=k^\star+1}^{n} \mathring{Y}_i\right)\\
&= \left(k^\star - \frac{(k^\star)^2}{n}\right)\mu_0 - \frac{k^\star(n-k^\star)}{n}\,\mu_1 + \Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k^\star} \mathring{Y}_i - \frac{k^\star}{n}\sum_{i=k^\star+1}^{n} \mathring{Y}_i\\
&= k^\star\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\mu_0 - k^\star\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\mu_1 + \Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k^\star} \mathring{Y}_i - \frac{k^\star}{n}\sum_{i=k^\star+1}^{n} \mathring{Y}_i\\
&= k^\star\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)(\mu_0-\mu_1) + \Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k^\star} \mathring{Y}_i - \frac{k^\star}{n}\sum_{i=k^\star+1}^{n} \mathring{Y}_i\\
&= k^\star\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)(\mu_0-\mu_1) + R_n.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Var}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}R_n\Big) &= \mathbf{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\sum_{i=1}^{k^\star} \mathring{Y}_i - \frac{k^\star}{n}\sum_{i=k^\star+1}^{n} \mathring{Y}_i\right]\right)\\
&= \frac{1}{n}\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)^2 k^\star\sigma_0^2 + \frac{1}{n}\Big(\frac{k^\star}{n}\Big)^2(n-k^\star)\sigma_1^2\\
&\le \frac{1}{n}\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)^2 k^\star\varsigma^2 + \frac{1}{n}\Big(\frac{k^\star}{n}\Big)^2(n-k^\star)\varsigma^2\\
&= \varsigma^2\frac{k^\star}{n}\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\Big[1-\frac{k^\star}{n}+\frac{k^\star}{n}\Big]\\
&= \varsigma^2 h_n,
\end{aligned}
$$

où

$$\varsigma^2 = \max\big\{\sigma_0^2, \sigma_1^2\big\}.$$

Puisque les $\mathring{Y}_i$ sont centrées, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n}}R_n = O_{\mathbf{P}}(\sqrt{h_n}).$$

Ainsi

$$\Delta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\max_{0<k<n}\Big(\frac{k}{n}\Big(1-\frac{k}{n}\Big)\Big)^{-\gamma}\Big|S_k - \frac{k}{n}S_n\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big(\frac{k^\star}{n}\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)\Big)^{-\gamma}\Big|S_{k^\star}-\frac{k^\star}{n}\,S_n\Big| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\,h_n^{-\gamma}\Big|k^\star\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)(\mu_0-\mu_1)+R_n\Big| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\,h_n^{-\gamma}|nh_n(\mu_0-\mu_1)+R_n| \\
&\geq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\,h_n^{-\gamma}(|nh_n(\mu_0-\mu_1)|-|R_n|) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,h_n^{-\gamma}h_n|\mu_0-\mu_1|-\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\,h_n^{-\gamma}|R_n| \\
&\geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,h_n^{-\gamma}h_n|\mu_0-\mu_1|-\frac{1}{\sigma}\,h_n^{-\gamma}|R_n| \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,h_n^{1-\gamma}|\mu_0-\mu_1|-\frac{h_n^{-\gamma}}{\sigma}\,O_{\mathbf{P}}\big(\sqrt{h_n}\big) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,h_n^{1-\gamma}|\mu_0-\mu_1|-\frac{1}{\sigma}\,O_{\mathbf{P}}\Big(h_n^{\frac{1}{2}-\gamma}\Big) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,h_n^{1-\gamma}|\mu_0-\mu_1|-\frac{1}{\sigma}\,O_{\mathbf{P}}\Big(h_n^{\frac{1}{p}}\Big).
\end{aligned}
$$

Sous les hypothèses du théorème 3.39, on obtient la convergence de ce dernier terme vers $+\infty$ et donc (3.20). □

Maintenant, afin d'étudier $\Delta_{n,N}$ sous l'hypothèse alternative, notons

$$
\mathbf{E}Y_{i,N} = \begin{cases} \mu_{0,N}, & \text{si } i \leq k^\star, \\ \mu_{1,N}, & \text{si } i > k^\star. \end{cases}
$$

Théorème 3.40. *On pose*

$$
h_n = \frac{k^\star}{n}\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big).
$$

On suppose que

$$
h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
$$

et que

$$
\sqrt{n}h_n^{1-\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.
$$

Alors

$$
\Delta_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.
$$

Preuve. Par le même calcul que pour Δ_n, on obtient

$$
S_{k^\star,N}-\frac{k^\star}{n}S_{n,N} = k^\star\Big(1-\frac{k^\star}{n}\Big)(\mu_{0,N}-\mu_{1,N})+R_{n,N}
$$

où

$$\frac{1}{\sqrt{n}}R_n = O_{\mathbf{P}}(\sqrt{h_n}).$$

Donc

$$\Delta_{n,N} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}h_n^{1-\gamma}|\mu_{0,N} - \mu_{1,N}| - \frac{1}{\sigma}O_{\mathbf{P}}\left(h_n^{\frac{1}{p}}\right).$$

Donc sous les hypothèses du théorème 3.40 et comme

$$\mu_{0,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_0, \quad \mu_{1,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_1 \quad \text{et} \quad \mu_0 \neq \mu_1,$$

on aura

$$\Delta_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

□

Le cas $|\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On suppose que $\mu_0 = \mu_0(n)$ et $\mu_1 = \mu_1(n)$ et que $|\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Notons que ce cas nous permet de déterminer les plus petits changements que la statistique Δ_n peut détecter.

Théorème 3.41. *On pose*

$$h_n = \frac{k^\star}{n}\left(1 - \frac{k^\star}{n}\right).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que

$$\sqrt{n}h_n^{1-\gamma}|\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$\Delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

Preuve. Par le même raisonnement que dans la preuve du théorème 3.39, on montre que

$$\Delta_n \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}h_n^{1-\gamma}|\mu_0 - \mu_1| - \frac{1}{\sigma}O_{\mathbf{P}}\left(h_n^{\frac{1}{p}}\right)$$

et comme

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\sqrt{n}h_n^{1-\gamma}|\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

on aura le résultat. □

Maintenant pour $\Delta_{n,N}$, par un raisonnement similaire à la démonstration du théorème 3.40, on montre le théorème suivant.

Théorème 3.42. *On pose*

$$h_n = \frac{k^\star}{n}\Big(1 - \frac{k^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et que

$$\sqrt{n}h_n^{1-\gamma}|\mu_0 - \mu_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$\Delta_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

3.5.2 Étude de $\Delta_{n,N}$ dans le cas de changement dans la régularité höldérienne

Pour la même raison qu'à la sous-section 3.4.2, nous nous limitons à l'étude du comportement de $\Delta_{n,N}$ sous (H_1).

Théorème 3.43. *On pose*

$$h_n = \frac{k^\star}{n}\Big(1 - \frac{k^\star}{n}\Big).$$

On suppose que

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

et qu'il existe $0 < \delta < 1$ *tel que*

$$\sqrt{n}h_n^{1-\gamma}N^{(\alpha-\beta)(1-\delta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors

$$\Delta_{n,N} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, consulter la preuve du théorème 3.37. □

Chapitre 4

Détection de rupture épidémique dans la régularité höldérienne d'un processus continu à accroissements indépendants

Après avoir étudié la détection de rupture épidémique de la régularité höldérienne dans une suite de n fonctions aléatoires, il est assez naturel d'essayer de réinvestir la méthode utilisée pour détecter une rupture épidémique de régularité höldérienne pour *une seule* fonction aléatoire $\xi = (\xi(t), t \in [0,1])$. En effet, en découpant $[0,1]$ en n segments consécutifs de longueur $1/n$, les restrictions $\xi_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, de ξ à chacun de ces segments jouent le rôle des « données journalières » du chapitre précédent. Bien sûr cette approche impose quelques restrictions que nous examinons maintenant.

D'abord, on souhaite que les fonctions aléatoires $\xi_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, soient indépendantes. Ce n'est visiblement pas le cas ici puisque ξ étant supposée à trajectoires continues, on a les conditions de raccordement $\xi_{n,k}(k/n) = \xi(k/n) = \xi_{n,k+1}(k/n)$, $1 \leq k \leq n$. En effet, pour $x < y$ et $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\xi_{n,k}(k/n) \leq x, \xi_{n,k+1}(k/n) \leq y\big) &= \mathbf{P}\big(\xi(k/n) \leq x, \xi(k/n) \leq y\big) \\ &= \mathbf{P}\big(\xi(k/n) \leq x\big) \neq \mathbf{P}\big(\xi(k/n) \leq x\big)\mathbf{P}\big(\xi(k/n) \leq y\big).\end{aligned}$$

Pour effacer cette dépendance, on considère plutôt les $\tilde{\xi}_{n,k} = \xi_{n,k} - \xi((k-1)/n)$. Dans le modèle des courbes « journalières » du chapitre précédent, cela revient à considérer que $X_k(k-1) = 0$ pour tout k, ce qui dans l'exemple de la consommation journalière d'électricité correspond à une remise à zéro du compteur à chaque changement de date. En ramenant $[k-1, k]$ sur $[0,1]$, cela revient à imposer la condition $X_k(0) = 0$ dans les hypothèses du chapitre précédent, ce qui est juste un cas particulier dans les hypothèses posées, sans influence sur les résultats obtenus. Revenant à ξ, ceci suppose que pour toute suite $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que pour chaque i, $(k-1)/n \leq t_i < k/n$, les n variables aléatoires réelles $\xi(t_i) - \xi((i-1)/n)$ soient indépendantes. Comme ceci doit en outre être vérifié pour tout n, on est naturellement conduit à supposer que ξ est *à accroissements indépendants.*

Supposons donc ξ à trajectoires continues et à accroissements indépendants. On ne changera pas ces propriétés en imposant $\xi(0) = 0$ pour alléger les écritures. De plus si on

veut utiliser des techniques reposant sur le TLC, il est raisonnable de supposer que ξ est du second ordre, *i.e.* $\mathbf{E}\xi(t)^2 < \infty$ pour tout $t \in [0,1]$. Dans ce cas, $\mathbf{E}\xi(t)$ existe pour tout t. Il convient ici de remarquer qu'une rupture épidémique dans la régularité des trajectoires de ξ peut entraîner une rupture sur la régularité de la fonction déterministe $t \mapsto \mathbf{E}\xi(t)$. Nous n'aborderons pas cette question dans cette première étude et nous contenterons de supposer que $\xi(t)$ est centrée pour tout t.

Regardons maintenant ce que ces hypothèses impliquent pour la variance de $\xi(t)$. Nous posons désormais

$$f(t) := \mathbf{E}\xi(t)^2, \quad t \in [0,1]. \tag{4.1}$$

On remarque alors que

$$\mathbf{E}\big(\xi(t) - \xi(s)\big)^2 = f(t) - f(s), \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(\xi(t) - \xi(s)\big)^2 &= \mathbf{E}\big(\xi(t)^2 + \xi(s)^2 - 2\xi(t)\xi(s)\big) \\
&= \mathbf{E}\xi(t)^2 + \mathbf{E}\xi(s)^2 - 2\mathbf{E}\xi(t)\xi(s) \\
&= f(t) + f(s) - 2\mathbf{E}\xi(t)\xi(s) \\
&= f(t) + f(s) - 2\mathbf{E}\big(\xi(s)(\xi(s) + \xi(t) - \xi(s))\big) \\
&= f(t) + f(s) - 2\big[\mathbf{E}\xi(s)^2 + \mathbf{E}\big(\xi(s)(\xi(t) - \xi(s))\big)\big] \\
&= f(t) + f(s) - 2\big[f(s) + \mathbf{E}\big(\xi(s)(\xi(t) - \xi(s))\big)\big] \\
&= f(t) - f(s) - 2\mathbf{E}\big(\xi(s)(\xi(t) - \xi(s))\big) \\
&= f(t) - f(s)
\end{aligned}$$

car $\xi(s)$ est centrée et $\xi(s)$ et $(\xi(t) - \xi(s))$ sont indépendants puisque ξ est supposé à accroissements indépendants. Ainsi $f(t) - f(s) \ge 0$, donc f est croissante sur $[0,1]$.

Cette fonction f est-elle continue ? C'est clairement le cas dans les deux situations suivantes :

— le processus ξ est continu en moyenne quadratique (c'est-à-dire, si $s_n \to s$ alors $\mathbf{E}\big(\xi(s_n) - \xi(s)\big)^2 \to 0$ quand $n \to +\infty$). En effet, supposons que $t_n \to t$, montrons que $f(t_n) \to f(t)$. Comme $\mathbf{E}\big(\xi(t)(\xi(t_n) - \xi(t))\big) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(\xi(t_n) - \xi(t)\big)^2 &= \mathbf{E}\big(\xi(t_n) - \xi(t)\big)^2 + 2\mathbf{E}\big(\xi(t)(\xi(t_n) - \xi(t))\big) \\
&= \mathbf{E}\big[\big(\xi(t_n) - \xi(t)\big)^2 + 2\xi(t)(\xi(t_n) - \xi(t))\big] \\
&= \mathbf{E}\big[\xi(t_n)^2 + \xi(t)^2 - 2\xi(t_n)\xi(t) \\
&\quad + 2\xi(t_n)\xi(t) - 2\xi(t)^2\big] \\
&= \mathbf{E}\xi(t_n)^2 - \mathbf{E}\xi(t)^2 \\
&= f(t_n) - f(t).
\end{aligned}$$

Comme ξ est continu en moyenne quadratique, on obtient

$$f(t_n) \to f(t)$$

quand $t_n \to t$ et donc f est continue.

— $\mathbf{E}\|\xi\|_\infty^2 < \infty$. En effet, comme ξ est à trajectoires continues et $\xi(t_n)^2 \leq \|\xi\|_\infty^2$, par le théorème de convergence dominée on obtient

$$f(t_n) = \mathbf{E}\xi(t_n)^2 \to \mathbf{E}\xi(t)^2 = f(t) \quad \text{quand } t_n \to t$$

et donc f est continue.

Nous supposons désormais f continue. Pour tout $u \in [f(0), f(1)]$, posons

$$f^{-1}(\{u\}) := \{t \in [0,1] : f(t) = u\}.$$

Alors cet inverse ensembliste $f^{-1}(\{u\})$ est soit un singleton soit un sous-intervalle fermé $[a,b]$ $(a < b)$ de $[0,1]$.

En effet, comme f est continue sur $[0,1]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $u \in [f(0), f(1)]$ il existe au moins un réel $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = u$ (et donc $a \in f^{-1}(\{u\})$). Si ce réel a est unique, $f^{-1}(\{u\})$ est le singleton $\{a\} = [a,a]$. Sinon, il existe au moins deux points distincts dans $f^{-1}(\{u\})$ et pour montrer que $f^{-1}(\{u\})$ est un intervalle, il suffit de vérifier que pour toute paire d'éléments c, d $(c < d)$ de $f^{-1}(\{u\})$, l'intervalle $[c,d]$ est inclus dans $f^{-1}(\{u\})$. Comme f est croissante, on a pour tout $t \in [c,d]$ $u = f(c) \leq f(t) \leq f(d) = u$ et donc $f(t) = u$ d'où $t \in f^{-1}(\{u\})$, ce qui prouve l'inclusion $[c,d] \subset f^{-1}(\{u\})$ pour tous c, d $(c < d)$ dans $f^{-1}(\{u\})$. Donc $f^{-1}(\{u\})$ est bien un intervalle. D'autre part, comme f est continue et $\{u\}$ est un fermé, $f^{-1}(\{u\})$ est un fermé. Finalement $f^{-1}(\{u\})$ est un intervalle fermé dans $[0,1]$, donc de la forme $[a,b]$ avec $a = \inf\{t \in [0,1]\,; f(t) = u\}$ et $b = \sup\{t \in [0,1]\,; f(t) = u\}$.

Définition 4.1. *Si $f^{-1}(\{u\}) = [a,b]$ avec $a < b$, nous dirons que f admet un palier de hauteur u sur $[a,b]$.*

Proposition 4.2. *On suppose que $\xi = (\xi(t), t \in [0,1])$ est un processus à accroissements indépendants et à trajectoires continues. On suppose de plus que f définie par (4.1) est continue sur $[0,1]$. Alors*

1. *f admet au plus une famille dénombrable de paliers ;*
2. *si f admet un palier sur $[a,b]$ et $t \in [a,b]$, $\xi_a = \xi_t = \xi_b$ p.s. ;*
3. *$\mathbf{P}(\forall t \in [a,b], \xi_t = \xi_a) = 1$.*

Preuve. 1. Soit U l'ensemble des hauteurs des paliers de f et notons pour tout $u \in U$, $f^{-1}(\{u\}) = [a_u, b_u]$. Il suffit de vérifier que U est au plus dénombrable. Ces paliers sont 2 à 2 disjoints car si f a un palier de hauteur u sur $[a,b]$ et un palier de hauteur $u' \neq u$ sur $[a',b']$, $f(t) = u$ pour tout $t \in [a,b]$ et $f(t) = u' \neq u$ pour tout $t \in [a',b']$ donc $[a,b] \cap [a',b'] = \emptyset$. Maintenant, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel q_u dans chaque palier $[a_u, b_u]$ et comme ces intervalles sont 2 à 2 disjoints, $q_u \neq q_{u'}$ pour tout $u \neq u' \in U$. On a donc une injection de U dans $\mathbb{Q}$, et donc U est au plus dénombrable. Ainsi f admet au plus une famille dénombrable de paliers.

2. Soit $t \in [a,b]$ un palier de f. Montrons que $\mathbf{P}(|\xi_t - \xi_a| = 0) = 1$, ceci est équivalent à montrer que $\mathbf{P}(|\xi_t - \xi_a| > 0) = 0$. Pour cela, on pose $A_n = \{|\xi_t - \xi_a| \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $A = \{|\xi_t - \xi_a| > 0\}$. Comme A_n est une suite croissante de réunion A, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$. Or, par l'inégalité de Markov

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\Big(|\xi_t - \xi_a| \geq \frac{1}{n}\Big) \leq n^2 \mathbf{E}(\xi_t - \xi_a)^2 = n^2(f(t) - f(a)) = 0,$$

puisque f admet un palier sur $[a,b]$ et $t \in [a,b]$ (et donc $f(t) = f(a)$). Par conséquent, $\mathbf{P}(A_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $\mathbf{P}(|\xi_t - \xi_a| > 0) = \mathbf{P}(A) = 0$, ce qui permet de déduire que $\mathbf{P}(|\xi_t - \xi_a| = 0) = 1$ et donc $\xi_a = \xi_t$ p.s. Par le même raisonnement, nous montrons que $\xi_t = \xi_b$, pour tout $t \in [a,b]$, d'où le résultat.

3. Notons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ l'espace probabilisé sur lequel est défini le processus ξ. L'écriture « $\forall t \in [a,b], \xi_t = \xi_a$ » correspond au sous-ensemble A de Ω défini par :

$$A := \bigcap_{t\in[a,b]} \{\omega \in \Omega\,; \xi_t(\omega) = \xi_a(\omega)\} = \bigcap_{t\in[a,b]} \{\xi_t = \xi_a\}.$$

Les ensembles $\{\xi_t = \xi_a\}$ sont bien des évènements, *i.e.* appartiennent à la tribu $\mathcal{F}$, car les projections $\xi \mapsto \xi_s$, $s \in [0,1]$ sont mesurables de par la définition d'un processus stochastique. Mais comme l'intersection définissant A est indexée par l'ensemble non dénombrable $[a,b]$, l'appartenance de A à $\mathcal{F}$ n'est pas garantie de même que la définition de $\mathbf{P}(A)$. Ceci nous amène à introduire

$$A' := \bigcap_{r\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega\,; \xi_r(\omega) = \xi_a(\omega)\}.$$

A' est une intersection dénombrable d'évènements $\{\xi_r = \xi_a\}$, donc $A' \in \mathcal{F}$. Comme tous ces $\{\xi_r = \xi_a\}$ ont pour probabilité 1 par ii), il en va de même pour A'. Pour obtenir iii), il nous suffit donc de justifier l'égalité $A = A'$. L'inclusion $A \subset A'$ est évidente. Pour établir l'inclusion inverse, on commence par noter que A' n'est pas vide puisque $\mathbf{P}(A') = 1$. On remarque ensuite que pour tout $\omega \in A'$ et tout $r \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$, $\xi_r(\omega) = \xi_a(\omega)$. Fixons t arbitraire dans $[a,b]$. Il existe une suite $(r_n)_{n\geq1}$ de rationnels de $[a,b]$ qui converge vers t (si t est rationnel on peut prendre $r_n = t$ pour tout $n \geq 1$, sinon on invoque la densité de $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ dans $[a,b]$). Comme observé ci-dessus, $\xi_{r_n}(\omega) = \xi_a(\omega)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in A'$. Par continuité des trajectoires de ξ, $\xi_{r_n}(\omega)$ tend vers $\xi_t(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. En particulier pour $\omega \in A'$, ceci implique que $\xi_a(\omega) = \xi_t(\omega)$. On vient ainsi de prouver que $A' \subset \{\xi_a = \xi_t\}$ pour tout $t \in [a,b]$. Comme A' ne dépend pas de t, en prenant l'intersection pour $t \in [a,b]$, on obtient $A' \subset A$, ce qui termine la preuve.

□

Ceci montre qu'aux paliers de f correspondent des intervalles de constance presque sûre de ξ. Du point de vue de l'analyse statistique de la régularité de ξ, ces intervalles de constance ne sont pas très intéressants (surtout si on arrive à les expliquer par une cause

extérieure) et on peut les retirer de façon à récupérer par recollage une nouvelle fonction f *strictement* croissante définie sur $[0, c]$ avec $c < 1$. En pratique, seul un nombre fini de paliers seront détectables à n fixé.

À partir de maintenant, nous simplifions le problème en nous limitant au cas où f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Les hypothèses introduites jusqu'ici ont une importante conséquence : le processus ξ est forcément *gaussien* et plus précisément ξ est un processus de la forme $\{W(f(t)), t \in [0, 1]\}$ où W est un mouvement brownien standard sur $[f(0), f(1)]$, en rappelant que $f(0) = 0$.

Justifions cette affirmation. Comme f est supposée maintenant continue strictement croissante, elle réalise une bijection bicontinue entre $[0, 1]$ et $[f(0), f(1)]$ et nous noterons encore f^{-1} son inverse ponctuel sans craindre la confusion avec l'inverse ensembliste employé ci-dessus. Ainsi pour tout $u \in [f(0), f(1)]$, $f^{-1}(u)$ est l'unique réel $t \in [0, 1]$ tel que $f(t) = u$. En particulier,

$$\mathbf{E}\xi(f^{-1}(u))^2 = f(f^{-1}(u)) = u.$$

De plus il est immédiat de vérifier que le processus $\{\xi(f^{-1}(u)), u \in [f(0), f(1)]\}$ est à accroissements indépendants, à trajectoires continues et centré. D'après le théorème 19.1, p. 154, de Billingsley [10], voir aussi Feller [40], p. 304, ce processus est *gaussien*. Il en résulte que $\xi \circ f^{-1}$ est un mouvement brownien standard sur $[f(0), f(1)]$ que nous notons W. Pour finir, les lois fini-dimensionnelles de ξ, c'est-à-dire les lois des vecteurs aléatoires $\big(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_m)\big)$, $m \geq 1$, $(t_1, \ldots, t_m) \in [0, 1]^m$, sont en posant $u_i := f(t_i)$, $1 \leq i \leq m$, les lois des vecteurs $\big(\xi(f^{-1}(u_1)), \ldots, \xi(f^{-1}(u_m))\big) = \big(W(u_1), \ldots, W(u_m)\big)$ qui sont gaussiennes. Donc ξ est un processus gaussien.

Nous avons ainsi réduit la détection du changement de régularité de ξ au même problème pour le processus $W \circ f$. La régularité höldérienne de W étant bien connue depuis le théorème de Lévy sur le module de continuité uniforme du mouvement brownien, la régularité höldérienne de ξ est déterminée par celle de la fonction f. Notons que la régularité höldérienne d'un processus gaussien centré est contrôlée par la variance des accroissements cf. par exemple le corollaire 4 de [84].

La réduction du problème que nous venons d'effectuer montre qu'il est naturel d'explorer le changement « épidémique » de régularité höldérienne de ξ via le remplacement de f par une autre fonction croissante g pendant l'intervalle d'épidémie. Autrement dit, au lieu de tester le passage d'une régularité höldérienne d'exposant α à une régularité höldérienne d'exposant β, on teste une rupture épidémique dans le paramètre fonctionnel f.

Avant d'adopter ce modèle général, essayons quand même de préciser ce que pourrait être une rupture épidémique de régularité faisant passer l'exposant de Hölder « global » de α à $\beta < \alpha$ sur l'intervalle d'épidémie. Notons $\xi_{a,b}$ la restriction de la fonction aléatoire ξ à l'intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$. La formulation d'une rupture épidémique sur l'exposant de Hölder global de ξ nous amènerait à adopter pour hypothèse nulle $\xi \in \mathcal{H}_\alpha[0, 1]$ et pour hypothèse alternative : les restrictions de ξ à $[0, s^\star]$ et $[t^\star, 1]$ sont dans $\mathcal{H}_\alpha[0, s^\star]$ et $\mathcal{H}_\alpha[t^\star, 1]$, tandis que la restriction de ξ à $[s^\star, t^\star]$ est dans $\mathcal{H}_\beta[s^\star, t^\star]$ en définissant

$$s^\star := \sup\{s \in [0, 1] : \mathbf{P}(\xi_{0,s} \in \mathcal{H}_\alpha[0, s]) = 1\}, \quad t^\star := \inf\{t \in [0, 1] : \mathbf{P}(\xi_{t,1} \in \mathcal{H}_\alpha[t, 1]) = 1\}.$$

Il faudrait aussi supposer que $[s^\star, t^\star]$ n'est pas vide, ce qui implique $s^\star \leq t^\star$. Le cas particulier $s^\star = t^\star$ correspond à un changement de régularité höldérienne au seul point s^* avec retour immédiat à la régularité α en tout $s \neq s^\star$. Ce cas est étudié en préliminaire à la section 4.1

La situation générale où $s^\star < t^\star$ est beaucoup plus riche en possibilités de variation de la régularité Hölder et sera étudiée dans les sections suivantes comme une rupture épidémique sur le paramètre fonctionnel f.

4.1 Détection d'une rupture ponctuelle de régularité

Nous traitons en préliminaire le problème particulier suivant. Ayant observé *une* trajectoire du processus $\xi = \big(\xi(t)\big)_{t\in[0,1]}$, de la forme $\xi(t) = W\big(f(t)\big)$ où W est un mouvement brownien standard et $t \mapsto f(t)$ est le changement de temps, nous testons l'hypothèse nulle

(H_0) $\xi(t) = W\big(f(t)\big)$, $t \in [0,1]$, où f est une fonction connue, continue, strictement croissante, concave et de régularité höldérienne α, $0 < \alpha < 1$, sur $[0,1]$,

contre l'hypothèse alternative

(H_1) $\xi(t) = W\big(g(t)\big)$, $t \in [0,1]$, où g est une fonction continue, croissante sur $[0,1]$ et il existe $0 < \theta < 1$ telle que

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } 0 \leq t \leq \theta, \\ f(\theta) + (t-\theta)^\beta L(t-\theta), & \text{si } \theta < t \leq 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\beta < \alpha$ et L est une fonction à variation lente en 0 et monotone sur un voisinage à droite de 0 (pour plus d'information sur les fonctions à variation lente cf. [91]). Nous supposons en plus que g est concave et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage à droite de θ. Remarquons qu'alors la régularité globale de la restriction de g à $[\theta, 1]$ ne peut être meilleure que la régularité Hölder d'exposant β.

Afin d'étudier ce problème, nous considérons la statistique

$$T_n = \max_{0\leq i<n} \frac{|\xi(\frac{i+1}{n}) - \xi(\frac{i}{n})|}{\sqrt{f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})}}\,.$$

Notons que cette statistique est bien définie, puisque $f(\frac{i+1}{n}) > f(\frac{i}{n})$, $\forall 0 \leq i < n$. Sous l'hypothèse nulle, nous pouvons déterminer la loi exacte de la statistique T_n donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Sous (H_0), pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbf{P}(T_n \leq x) = \mathbf{P}\big(|X| \leq x\big)^n,$$

où X suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque 4.4. Sous l'hypothèse nulle (H_0), pour tout $i = 0, \dots, n-1$,

$$\frac{|\xi(\frac{i+1}{n}) - \xi(\frac{i}{n})|}{\sqrt{f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})}} = \frac{\left|W\big(f(\frac{i+1}{n})\big) - W\big(f(\frac{i}{n})\big)\right|}{\sqrt{f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})}} =: |X_{n,i}|,$$

où $(X_{n,i})_{0\le i<n}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite. En effet, comme W est un mouvement brownien standard, alors d'une part, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, les accroissements $W(f(\frac{i+1}{n})) - W(f(\frac{i}{n}))$ sont indépendants en raison de la croissance stricte de f, puisque $f(\frac{i+1}{n}) > f(\frac{i}{n})$, (et donc les $X_{n,i}$ le sont aussi) et d'autre part les accroissements $W(f(\frac{i+1}{n})) - W(f(\frac{i}{n}))$, $i = 0, \dots, n-1$, sont des variables aléatoires normales de moyenne nulle et de variance $f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})$. Ainsi les $X_{n,i}$ sont des variables aléatoires de loi normale de moyenne nulle et de variance

$$\mathbf{Var}(X_{n,i}) = \mathbf{Var}\left(\frac{W\big(f(\frac{i+1}{n})\big) - W\big(f(\frac{i}{n})\big)}{\sqrt{f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})}}\right) = \frac{f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})}{f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})} = 1$$

pour tout $i = 0, \dots, n-1$.

Preuve de la proposition 4.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_n \le x) &= \mathbf{P}\left(\max_{0\le i<n} \frac{|\xi(\frac{i+1}{n}) - \xi(\frac{i}{n})|}{\sqrt{f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})}} \le x\right) \\
&= \mathbf{P}\Big(\max_{0\le i<n} |X_{n,i}| \le x\Big) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{0\le i<n} \{|X_{n,i}| \le x\}\right) \\
&= \mathbf{P}\big(|X_1| \le x\big)^n,
\end{aligned}$$

où X_1 suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$, grâce à l'indépendance et à l'équidistribution des $X_{n,i}$. □

p \ n	100	200	300	400	1000
0,9	5,149695	5,551763	5,777375	5,933560	6,411635
0,95	5,566815	5,947889	6,162543	6,311462	6,768795
0,99	6,435521	6,778759	6,973383	7,108913	7,527541

TABLE 1 – Seuils de rejet aux niveaux $p = 0{,}9\,;\, 0{,}95\,;\, 0{,}99$ pour $n = 100, 200, 300, 400, 1000$

Maintenant, pour l'hypothèse alternative, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 4.5. *Sous l'hypothèse alternative* (H_1)*,*

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty. \tag{4.3}$$

Preuve. Afin de montrer (4.3) sous (H_1), notons par $(k_n)_n$ la suite donnée par

$$k_n = [n\theta] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
T_n &= \max_{0\le i<n} \frac{\left|\xi\left(\frac{i+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{i}{n}\right)\right|}{\sqrt{f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)}} \\
&\ge \frac{\left|\xi\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k_n}{n}\right)\right|}{\sqrt{f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_n}{n}\right)}} \\
&= \frac{\left|\xi\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k_n}{n}\right)\right|}{\sqrt{g\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - g\left(\frac{k_n}{n}\right)}} \sqrt{\frac{g\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - g\left(\frac{k_n}{n}\right)}{f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_n}{n}\right)}} \\
&= \frac{\left|W\left(g\left(\frac{k_n+1}{n}\right)\right) - W\left(g\left(\frac{k_n}{n}\right)\right)\right|}{\sqrt{g\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - g\left(\frac{k_n}{n}\right)}} \sqrt{\frac{g\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - g\left(\frac{k_n}{n}\right)}{f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_n}{n}\right)}} \\
&= |X| \sqrt{\frac{g\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - g\left(\frac{k_n}{n}\right)}{f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_n}{n}\right)}}
\end{aligned}$$

où X est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Notons que cette dernière égalité est seulement en loi. Maintenant, par les propriétés de f et g on a, sous réserve des justifications fournies après le calcul,

$$\begin{aligned}
\frac{g\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - g\left(\frac{k_n}{n}\right)}{f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_n}{n}\right)} &= \frac{\int_{\frac{k_n}{n}}^{\frac{k_n+1}{n}} g'(t)\,\mathrm{d}t}{f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_n}{n}\right)} \\
&\ge \frac{\int_{\frac{k_n}{n}}^{\frac{k_n+1}{n}} g'(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{k_n+1}{n} - \frac{k_n}{n}\right)^{\alpha} \|f\|_{\alpha}} \qquad (4.4) \\
&\ge \frac{\left(\frac{k_n+1}{n} - \frac{k_n}{n}\right) g'\left(\frac{k_n+1}{n}\right)}{\left(\frac{k_n+1}{n} - \frac{k_n}{n}\right)^{\alpha} \|f\|_{\alpha}} \qquad (4.5) \\
&= \frac{g'\left(\frac{k_n+1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \|f\|_{\alpha}} \\
&= \frac{\beta\, c(\beta) \left(\frac{k_n+1}{n} - \theta\right)^{\beta-1} L\left(\frac{k_n+1}{n} - \theta\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \|f\|_{\alpha}} \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{\beta\, c(\beta)\big(\frac{2}{n}\big)^{\beta-1} L\big(\frac{k_n+1}{n}-\theta\big)}{\big(\frac{1}{n}\big)^{\alpha-1}\|f\|_\alpha} \tag{4.7}$$

$$= C(\alpha,\beta) n^{\alpha-\beta} L\big(\frac{k_n+1}{n}-\theta\big). \tag{4.8}$$

Justification de (4.4)–(4.7) :

(4.4) f est de régularité höldérienne α sur $[0,1]$;

(4.5) g est concave et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage à droite de θ donc à dérivée décroissante sur ce voisinage ;

(4.6) Comme g est sous la forme (4.2), alors g' est sous la forme donnée ci-dessus, où $c(\beta)$ est une constante qui dépend de β (pour la justification, cf. [91, proposition 0.7b)]) ;

(4.7) $\frac{k_n+1}{n}-\theta \leq \frac{[n\theta]+2}{n}-\theta \leq \frac{n\theta+2}{n}-\theta = \frac{2}{n}$ et $\beta<1$;

(4.8) où $C(\alpha,\beta) = \frac{\beta\, c(\beta) 2^{\beta-1}}{\|f\|_\alpha}$.

Maintenant, comme L est monotone au voisinage de 0^+, $\alpha>\beta$ et $\frac{1}{n} \leq \frac{k_n+1}{n}-\theta \leq \frac{2}{n}$, on a pour n suffisamment grand :

- si L est décroissante, alors

  $$L\Big(\frac{k_n+1}{n}-\theta\Big) \geq L\Big(\frac{2}{n}\Big),$$

  et comme

  $$n^{\alpha-\beta} L\Big(\frac{2}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

  on aura le résultat ;

- si L est croissante, alors comme $[n\theta]-n\theta > -1$ d'où

  $$\frac{k_n+1}{n}-\theta = \frac{[n\theta]-n\theta+2}{n} = \frac{[n\theta]-n\theta+1}{n}+\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

  d'où

  $$L\Big(\frac{k_n+1}{n}-\theta\Big) \geq L\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

  Comme

  $$n^{\alpha-\beta} L\Big(\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

  on aura le résultat.

On obtient ainsi (4.3) sous l'hypothèse alternative. □

4.2 Rupture épidémique dans la régularité de ξ

Revenons à la situation générale de ce chapitre. On observe *une* trajectoire du processus $\xi = \big(\xi(t)\big)_{t\in[0,1]}$, avec $\xi(t) = W\big(f(t)\big)$ où W est un mouvement brownien standard et f une

fonction supposée connue, continue, strictement croissante sur $[0,1]$ et telle que $f(0)=0$. Pour formuler l'hypothèse alternative, il est commode d'introduire la définition suivante.

Définition 4.6. *Soit f une fonction à valeurs réelles, continue, strictement croissante sur $[0,1]$ et telle que $f(0)=0$. Soient $s^\star$ et $t^\star$ deux réels tels que $0 \le s^\star < t^\star \le 1$. On appelle perturbation épidémique de f sur $[s^\star,t^\star]$ toute fonction g réelle, continue et strictement croissante sur $[0,1]$ telle que $g=f$ sur $[0,s^\star]\cup[t^\star,1]$ et*

$$\sup\{s\in[0,1] : f=g \text{ sur } [0,s]\} = s^\star, \quad \inf\{t\in[0,1] : f=g \text{ sur } [t,1]\} = t^\star. \tag{4.9}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que $g(s^\star)=f(s^\star)$, $g(t^\star)=f(s^\star)$ et

$$\forall \delta>0, \exists s\in]s^\star, s^\star+\delta[,\ f(s)\neq g(s), \quad \forall \delta>0, \exists t\in]t^\star-\delta, t^\star[,\ f(t)\neq g(t). \tag{4.10}$$

Nous testons l'hypothèse nulle

(H_0) $\xi(t) = W\big(f(t)\big)$, $t\in[0,1]$, contre l'alternative

(H_A) $\xi(t) = W\big(g(t)\big)$, $t\in[0,1]$, où g est une perturbation épidémique inconnue de f sur un intervalle $[s^\star,t^\star]$ inconnu.

Pour construire la statistique de test, nous utilisons la statistique $\mathrm{UI}(n,\rho)$ introduite dans [86] conjuguée avec la méthode de détection de rupture épidémique pour une matrice de covariance exposée dans [88], adaptée en dimension 1 pour détecter la rupture épidémique dans la variance d'un échantillon.

En effet, sous (H_0), les variables aléatoires

$$X_{n,k} = \frac{\xi(\frac{k}{n}) - \xi(\frac{k-1}{n})}{\big(f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})\big)^{1/2}}, \quad 1\le k\le n,$$

sont i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. On se ramène alors au modèle standard de rupture épidémique dans l'espérance d'un échantillon en introduisant les variables aléatoires centrées

$$Y_{n,i} := X_{n,i}^2 - 1, \quad 1\le i\le n,$$

et leurs sommes partielles définies par

$$S_n(0) := 0, \quad S_n(A) := \sum_{i\in A} Y_{n,i}, \quad S_n(t) := S_n([0,t]) = \sum_{0<i\le t} Y_{n,i}. \tag{4.11}$$

Nous utiliserons un poids ρ höldérien à choisir convenablement dans la classe $\mathcal{R}$ définie comme suit.

Définition 4.7. *On note $\mathcal{R}$ la classe des fonctions croissantes $\rho:[0,1]\to\mathbb{R}$, strictement positives sur $]0,1]$, telles que $\rho(0)=0$ et vérifiant*

i) il existe un $\alpha\in]0,1/2]$ et une fonction L normalisée à variation lente en $+\infty$ tels que

$$\rho(h) = h^\alpha L(1/h), \quad 0<h\le 1\ ; \tag{4.12}$$

ii) $\theta(t) := t^{1/2}\rho(1/t)$ *est* C^1 *sur* $[1,\infty[$ *;*

iii) il existe un $\beta > 1/2$ *et un* $a > 0$*, tels que* $\theta(t)\ln^{-\beta}(t)$ *est croissante sur* $[a,\infty[$*.*

Rappelons que toute fonction ℓ à variation lente en $+\infty$ admet une représentation

$$\ell(u) = c(u)\exp\left(\int_a^u \frac{\varepsilon(v)}{v}\,\mathrm{d}v\right), \quad u \geq a$$

pour a suffisamment grand, où $c(u)$ est une fonction mesurable strictement positive ayant une limite finie strictement positive en $+\infty$ et ε une fonction tendant vers 0 en $+\infty$. On dit que ℓ est *normalisée* si dans la représentation ci-dessus on peut remplacer (quitte à modifier ε) $c(u)$ par une constante $c \in]0,+\infty[$, voir (1.3.4), p. 15, dans [11]. On sait aussi que toute fonction ℓ à variation lente en $+\infty$ est équivalente en $+\infty$ à une fonction à variation lente normalisée, voir le théorème 1.3.1, p. 12, dans [11], et que toute ℓ normalisée à variation lente en $+\infty$ appartient à la classe de Zygmund, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$, $u^\delta\ell(u)$ est strictement croissante sur un voisinage de $+\infty$ et que $u^{-\delta}\ell(u)$ est strictement décroissante sur un voisinage de $+\infty$, voir le théorème 1.5.5, p. 24, dans [11].

Remarque 4.8. La condition iii) ci-dessus est superflue lorsque $\alpha < 1/2$ dans (4.12). Pour le voir, on note que $\theta(u) = u^{1/2-\alpha}L(u)$, d'où $\theta(u)/\ln^\beta u = u^{1/2-\alpha}L(u)/\ln^\beta u$. Comme $\delta := 1/2-\alpha > 0$, il nous suffit de vérifier que la fonction $L/\ln^\beta$ est normalisée à variation lente. C'est clairement une fonction à variation lente comme quotient de deux telles fonctions. Il nous suffit donc de vérifier que $\ln^\beta$ est normalisée, ce qui résulte du calcul élémentaire suivant :

$$\exp\left(\int_{\mathrm{e}}^u \frac{\beta}{v\ln v}\,\mathrm{d}v\right) = \exp\left([\beta\ln\ln v]_{\mathrm{e}}^u\right) = \exp(\beta\ln\ln u) = \ln^\beta u, \quad u \geq \mathrm{e}.$$

la condition iii) n'est donc une restriction que pour $\alpha = 1/2$. Si on la teste sur la famille des poids ρ de la forme $\rho(h) = h^{1/2}|\ln h|^\gamma$, on voit qu'elle est vérifiée pour tout $\gamma > 1/2$ mais pas pour $\gamma \leq 1/2$.

Nous définissons maintenant la famille de statistiques $\mathrm{UI}(n,\rho)$, $\rho \in \mathcal{R}$ par

$$\mathrm{UI}(n,\rho) := \max_{1\leq i<j\leq n} \frac{\left|S_n(j) - S_n(i) - \frac{j-i}{n}S_n(n)\right|}{\rho\left(\left(\frac{j-i}{n}\right)\left(1-\frac{j-i}{n}\right)\right)}. \tag{4.13}$$

Remarquons que sous (H_0), $\mathrm{UI}(n,\rho)$ est invariante par décentrage de *toutes* les variables de l'échantillon. En particulier pour calculer $\mathrm{UI}(n,\rho)$, on peut remplacer les $Y_{n,k} = X_{n,k}^2 - 1$ par les $X_{n,k}^2$.

Pour l'étude du comportement asymptotique de la statistique $\mathrm{UI}(n,\rho)$, il est commode de noter

$$\varrho(h) = \rho(h(1-h)),\ h \in [0,1]$$

et d'introduire les fonctionnelles suivantes définies au moins pour $x \in \mathcal{H}_\rho^o$.

$$I(x,s,t) := \frac{|x(t) - x(s) - (t-s)x(1)|}{\varrho(t-s)}, \quad 0 < t-s < 1.$$

$$\mathrm{UI}(x,n,\rho) = \max_{1\le i<j\le n} I(x,i/n,j/n).$$

$$\mathrm{UI}(x,\rho) := \sup_{0\le s<t\le 1} I(x,s,t) = \sup_{0\le s<t\le 1} \frac{|x(t)-x(s)-(x(1)-x(0))(t-s)|}{\varrho(t-s)}.$$

On note enfin ζ_n le processus de sommes partielles qu'est la ligne polygonale de sommets $\big(k/n, S_n(k)\big)$, $0 \le k \le n$:

$$\zeta_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])\, Y_{n,[nt]+1}, \quad t \in [0,1]. \tag{4.14}$$

La statistique $\mathrm{UI}(n,\rho)$ définie par (4.13) apparaît alors comme fonctionnelle des trajectoires de ζ_n :

$$\mathrm{UI}(n,\rho) = \mathrm{UI}(\zeta_n, n, \rho).$$

Nous rappelons maintenant les deux théorèmes qui vont nous fournir le comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous (H_0). On part du comportement asymptotique en loi de ζ_n dans $\mathcal{H}^o_\rho$. Il s'agit du théorème limite central höldérien dans $\mathcal{H}^o_\rho([0,1],\mathbb{R})$. On se donne une suite i.i.d. $(Y_i)_{i\ge1}$ où les Y_i ont tous même loi que X^2-1 où X est gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. On définit les sommes partielles $\tilde{S}_n$ comme les S_n, mais en remplaçant chaque $Y_{n,k}$ par Y_k. On définit le processus de somme partielles $\tilde{\zeta}_n$ comme la ligne polygonale de sommets $(k/n, \tilde{S}_n(k))$, $k = 0,1,\dots,n$.

Remarque 4.9. Au vu de cette construction, pour chaque $n \ge 1$, les vecteurs aléatoires $(Y_1,\dots,Y_n)$ et $(Y_{n,1},\dots,Y_{n,n})$ ont la même loi. Ceci implique :

1. que $\mathrm{UI}(\zeta_n,n,\rho)$ et $\mathrm{UI}(\tilde{\zeta}_n,n,\rho)$ ont aussi même loi en tant que variables aléatoires réelles ;
2. que les lignes polygonales aléatoires ζ_n et $\tilde{\zeta}_n$ ont même loi en tant qu'éléments aléatoires de $\mathcal{H}^o_\rho$ (on vérifie facilement au passage que si $\rho \in \mathcal{R}$, l'espace $\mathcal{H}^o_\rho$ contient toutes les fonctions lignes polygonales (*i.e.* continues affines par morceaux avec raccords continus) définies sur $[0,1]$).

4.2.1 Comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous (H_0)

Nous énonçons maintenant le théorème limite central fonctionnel höldérien utilisé sous (H_0) qui est simplement le cas particulier où les fonctions aléatoires concernées sont à valeurs dans l'espace de Banach $B = \mathbb{R}$ du théorème 8 dans [87], réécrit ici sous une forme adaptée à notre contexte et aux notations fixées ci-dessus

Théorème 4.10. *Soit $\rho \in \mathcal{R}$. Avec les notations ci-dessus, la suite $((2n)^{-1/2}\tilde{\zeta}_n)_{n\ge1}$ converge en loi vers le mouvement brownien standard W dans l'espace $\mathcal{H}^o_\rho$ si et seulement si pour tout $A>0$,*

$$\lim_{u\to\infty} u\mathbf{P}(X^2 \ge A\theta(u)) = 0, \tag{4.15}$$

où $\theta(u) := u^{1/2}\rho(1/u)$, $u \ge 1$ et X est gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque 4.11. La normalisation par $(2n)^{-1/2}$ de $\tilde{\zeta}_n$ prend en compte la variance de (X^2-1).

Remarque 4.12. Une adaptation automatique du théorème 8 dans [87] aurait du nous conduire à remplacer X^2 par $|X^2-1|$ dans (4.15), mais comme dans les deux cas celle-ci ne peut se réaliser que si $\theta(u)$ tend vers zéro en $+\infty$, les deux versions de (4.15) sont équivalentes.

Remarque 4.13. Par le résultat de Lévy [77, théorème 52,2] sur le module de continuité uniforme du brownien, une condition nécessaire pour la convergence en loi dans $\mathcal{H}_\rho^o$ de $(n^{-1/2}\tilde{\zeta}_n)_{n\geq 1}$ vers W est

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\theta(u)}{\ln^{1/2} u} = \infty. \tag{4.16}$$

Pour une justification détaillée, nous renvoyons à [87]. En fait cette condition nous fournit une barrière naturelle pour l'application du théorème limite central fonctionnel dans $\mathcal{H}_\rho^o$. Comme les lignes polygonales et donc les trajectoires des fonctions aléatoires $n^{-1/2}\tilde{\zeta}_n$ sont dans *tous* les $\mathcal{H}_\rho^o$ pour $\rho\in\mathcal{R}$, seule la régularité höldérienne de W impose cette barrière. On constate en effet que pour $\rho(h)=\rho_\gamma(h):=h^{1/2}|\ln h|^\gamma$, $\theta(u)=\ln^\gamma u$ donc (4.16) est vérifiée pour $\gamma>1/2$ mais pas pour $\gamma\leq 1/2$. Ceci est en accord avec le fait que pour $\gamma=1/2$, W a une version dans $\mathcal{H}_\rho$ mais pas dans $\mathcal{H}_\rho^o$.

Corollaire 4.14. *Soit $\rho\in\mathcal{R}$. Avec les notations du théorème 4.10, la suite $(n^{-1/2}\zeta_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers le mouvement brownien standard W dans l'espace $\mathcal{H}_\rho^o$ si et seulement si pour tout $A>0$, (4.15) est vérifiée.*

En effet par la remarque 4.9-b), les éléments aléatoires $n^{-1/2}\zeta_n$ et $n^{-1/2}\tilde{\zeta}_n$ dans $\mathcal{H}_\rho^o$ ont même loi.

Passons au deuxième théorème sous-jacent au comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous (H_0). Il s'agit du théorème 3 dans [86] réécrit ici sous une forme adaptée à notre contexte et aux notations adoptées ci-dessus.

Théorème 4.15. *Soit $\rho\in\mathcal{R}$ telle que (4.15) soit vérifiée. Alors $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(\tilde{\zeta}_n,n,\rho)$ converge en loi vers $\mathrm{UI}(W,\rho)$.*

Ces préliminaires nous permettent d'obtenir le comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous l'hypothèse nulle.

Théorème 4.16. *Soit $\rho\in\mathcal{R}$ telle que*

$$\frac{\theta(u)}{\ln u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty. \tag{4.17}$$

Sous (H_0), la statistique $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n,\rho)$ converge en loi vers

$$\mathrm{UI}(W,\rho) = \sup_{\substack{s,t\in[0,1],\\ 0<t-s<1}} \frac{|W(t)-W(s)-(t-s)W(1)|}{\rho((t-s)(1-(t-s)))}.$$

Preuve. Par le théorème 4.15 et la remarque 4.9-a), $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n,\rho)$ converge en loi vers $\mathrm{UI}(W,\rho)$ pourvu que (4.15) soit vérifiée. Il nous suffit donc de montrer que (4.17) implique (4.15). Pour cela, nous rappelons un encadrement classique de la queue de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall y>0,\quad \left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)<\mathbf{P}(X>y)<\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right),$$

voir par exemple le lemme 2, p. 166, dans [39]. Par symétrie et continuité de la loi de X, il en résulte que

$$\forall v>0,\quad \mathbf{P}(X^2\geq v)=\mathbf{P}(|X|\geq v^{1/2})=2\mathbf{P}(X>v^{1/2})\sim\frac{2}{\sqrt{2\pi}}v^{-1/2}\exp\left(-\frac{v}{2}\right). \quad (4.18)$$

Posons

$$R(A,u):=(A\pi/2)^{1/2}u\mathbf{P}(X^2\geq A\theta(u)),\quad q(u):=\frac{\theta(u)}{\ln u}.$$

En utilisant (4.18), nous obtenons

$$R(A,u)\sim u(q(u)\ln u)^{-1/2}\exp\left(-\frac{A}{2}q(u)\ln u\right)$$

et il nous reste à vérifier que $\ln R(A,u)$ tend vers $-\infty$ quand u tend vers $+\infty$. Or

$$\ln R(A,u)=\left(1-\frac{A}{2}q(u)\right)\ln u-\frac{\ln(q(u))}{2}-\frac{\ln\ln u}{2}.$$

Par l'hypothèse (4.17), $q(u)$ tend vers $+\infty$, par conséquent $\ln R(A,u)$ tend vers $-\infty$ pour tout $A>0$, ce qui termine la preuve. □

Remarque 4.17. La condition (4.17) est optimale pour obtenir la convergence en loi de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ *via* le théorème limite central höldérien. En effet, si $\kappa:=\liminf_{u\to+\infty}q(u)<+\infty$, il existe une suite $(u_n)_{n\geq1}$ tendant vers $+\infty$ telle que $q(u_n)$ tende vers κ. Si $\kappa>-\infty$, $(1-A\kappa/2)$ est strictement positif pour $A<2/\kappa$ et dans ce cas $\ln R(A,u_n)\sim(1-A\kappa/2)\ln u_n$ donc $\ln R(A,u_n)$ tend vers l'infini de même que $u_n\mathbf{P}(X^2\geq A\theta(u_n))$ donc (4.15) n'est pas vérifiée et par le théorème 4.10 $((2n)^{-1/2}\tilde{\zeta}_n)_{n\geq1}$ ne converge pas en loi dans $\mathcal{H}^o_\rho$ vers W. Il en va de même si $\kappa=-\infty$, puisqu'alors $\ln R(A,u_n)$ tend encore vers $+\infty$.

Corollaire 4.18. *Si* $\rho(h)=\rho_{1/2,\gamma}(h):=h^{1/2}|\ln h|^\gamma$ *et* $\gamma>1$, *ou si* $\rho(h)=\rho_{1/2,1,\delta}(h):=h^{1/2}|\ln h||\ln|\ln h||^\delta$ *et* $\delta>0$, $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n,\rho)$ *converge en loi vers* $\mathrm{UI}(W,\rho)$ *sous* (H_0)).

4.2.2 Comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous (H_A)

Pour étudier le comportement asymptotique en loi de $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n,\rho)$ sous (H_A), nous nous appuierons sur une décomposition du type

$$\zeta_n=\zeta'_n+\zeta''_n,\quad n\geq1,$$

où les processus ζ'_n et ζ''_n sont des lignes polygonales de sommes partielles vérifiant :

— la loi de ζ'_n sous (H_A) est la même que celle de ζ_n sous (H_0) ;

— ζ_n'' « capture » le changement épidémique.

Ces processus seront explicitement construits ci-dessous.

Sous réserve de cette construction, la sous-additivité de la fonctionnelle $x \mapsto \mathrm{UI}(x, n, \rho)$ nous fournit la minoration

$$\begin{aligned}(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n,\rho) &= (2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(\zeta_n, n, \rho)\\ &\geq (2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(\zeta_n'', n, \rho) - (2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(\zeta_n', n, \rho).\end{aligned}$$

Par le théorème 4.16, pour $\rho \in \mathcal{R}$ et vérifiant (4.15), $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(\zeta_n', n, \rho) = O_{\mathbf{P}}(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Pour prouver que sous (H_A), $(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(n, \rho)$ tend en probabilité vers l'infini, il nous suffira donc de vérifier que

$$(2n)^{-1/2}\mathrm{UI}(\zeta_n'', n, \rho) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty. \tag{4.19}$$

Nous construisons maintenant les processus ζ_n' et ζ_n''. On définit d'abord pour chaque n les extrémités $k^* = k^*(n)$ et $m^* = m^*(n)$ et la longueur $\ell^* = \ell^*(n)$ du sous-échantillon contaminé par

$$\frac{k^*}{n} \leq s^\star < \frac{k^*+1}{n}, \quad \frac{m^*-1}{n} < t^\star \leq \frac{m^*}{n}, \quad \ell^* = m^* - k^*.$$

Afin d'alléger les écritures, posons pour n fixé,

$$\Delta_i\varphi = \varphi\Big(\frac{i}{n}\Big) - \varphi\Big(\frac{i-1}{n}\Big), \quad i = 1, \ldots, n,$$

où φ désigne une fonction à valeurs réelles, déterministe ou aléatoire définie sur $[0,1]$. Avec cette notation,

$$Y_{n,i} = \frac{(\Delta_i\xi)^2}{\Delta_i f} - 1 = \frac{(\Delta_i\xi)^2}{\Delta_i g}\frac{\Delta_i g}{\Delta_i f} - 1 = (Y'_{n,i}+1)\frac{\Delta_i g}{\Delta_i f} - 1$$

en posant

$$Y'_{n,i} := \frac{\left(\xi\left(\frac{i}{n}\right) - \xi\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)^2}{g\left(\frac{i}{n}\right) - g\left(\frac{i-1}{n}\right)} - 1.$$

Il est clair que la loi de $Y'_{n,i}$ sous (H_A) est la même que celle de $Y_{n,i}$ sous (H_0), à savoir $\mathcal{N}(0,1)$. Ceci étant vrai pour $i = 1, \ldots, n$, les vecteurs aléatoires $(Y'_{n,1}, \ldots, Y'_{n,n})$ et $(Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n})$ ont même loi par indépendance de leurs composantes en raison de l'indépendance des accroissements de ξ. Il en résulte que le processus ζ_n' défini comme ζ_n, voir (4.11) et (4.14), en remplaçant les $Y_{n,i}$ par les $Y'_{n,i}$, a sous (H_A) la même loi que ζ_n sous (H_0).

On définit maintenant $Y''_{n,i} := Y_{n,i} - Y'_{n,i}$, ce qui donne explicitement

$$Y''_{n,i} = \left(\frac{(\Delta_i\xi)^2}{\Delta_i f} - 1\right) - \left(\frac{(\Delta_i\xi)^2}{\Delta_i g} - 1\right)$$

$$= \frac{\Delta_i(g-f)}{\Delta_i f \Delta_i g}(\Delta_i\xi)^2$$
$$= \frac{(g-f)\left(\frac{i}{n}\right) - (g-f)\left(\frac{i-1}{n}\right)}{f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right)} \times \frac{\left(\xi\left(\frac{i}{n}\right) - \xi\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)^2}{g\left(\frac{i}{n}\right) - g\left(\frac{i-1}{n}\right)}.$$

Notons ζ_n'' la ligne polygonale construite sur les sommes partielles de $(Y_{n,1}'', \ldots, Y_{n,n}'')$. Les processus ζ_n, ζ_n' et ζ_n'' étant obtenus par interpolation affine entre deux sommets consécutifs, les égalités $Y_{n,i} = Y_{n,i}' + Y_{n,i}''$ impliquent

$$\zeta_n = \zeta_n' + \zeta_n''.$$

On remarque que $Y_{n,i}''$ est nul pour $i/n \leq s^\star$ ou $(i-1)/n \geq t^\star$. On en déduit l'expression explicite suivante :

$$\mathrm{UI}(\zeta_n'', n, \rho) = \max_{k^* \leq k < k+\ell \leq m^*} \frac{1}{\varrho(\ell/n)} \left| \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{\Delta_i(g-f)}{\Delta_i f} \frac{(\Delta_i\xi)^2}{\Delta_i g} - \frac{\ell}{n} \sum_{i=k^*+1}^{m^*} \frac{\Delta_i(g-f)}{\Delta_i f} \frac{(\Delta_i\xi)^2}{\Delta_i g} \right|$$

En notant $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, on voit que $\mathrm{UI}(\zeta_n'', n, \rho)$ a même loi sous (H_A) que

$$\widetilde{\mathrm{UI}}(\zeta_n'', n, \rho) := \max_{k^* \leq k < k+\ell \leq m^*} \frac{1}{\varrho(\ell/n)} \left| \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{\Delta_i(g-f)}{\Delta_i f} X_i^2 - \frac{\ell}{n} \sum_{i=k^*+1}^{m^*} \frac{\Delta_i(g-f)}{\Delta_i f} X_i^2 \right| \tag{4.20}$$

Même si à première vue cette formule semble difficilement exploitable, notamment en raison de possibles changements de signe des $\Delta_i(g-f)$ et de la possibilité que f ait en certains points de $[s^\star, t^\star]$ une dérivée nulle on peut quand même en tirer quelques résultats au prix d'hypothèses supplémentaires sur f et g. Nous nous contenterons dans un premier temps d'examiner le cas où f est l'identité sur $[0,1]$.

Plutôt que l'alternative (H_A) définie page 152 avec $s^\star$, $t^\star$ et g naturellement indépendants de n, qui nous limiterait aux longueurs d'épidémie $\ell^* \sim (t^\star - s^\star)n$, nous considérons une suite d'alternatives $(H_{A_n})_{n\geq n_0}$, où

(H_{A_n}) $\xi(t) = W\big(g_n(t)\big)$, $t \in [0,1]$, où g_n est une perturbation épidémique inconnue de l'identité sur $[0,1]$, sur un intervalle $[s_n^\star, t_n^\star]$ inconnu.

Et nous nous intéressons plus particulièrement au cas où $t_n^\star - s_n^\star$ tend vers zéro avec ℓ^* tendant vers l'infini ($\ell^* = o(n)$).

Remarque 4.19. Il peut paraître incongru de supposer que l'intervalle de perturbation épidémique $[s^\star, t^\star]$ dépend de n alors que l'on n'observe qu'une seule trajectoire du processus ξ. Mais si l'on veut étudier la capacité du test à détecter des perturbations de très courte durée, il faut bien en passer par là. En effet comment donner un sens à cette notion de « courte durée » ? Intuitivement, plus l'échantillon de valeurs ponctuelles $\xi(i/n)$ déduit de la trajectoire est grand, plus il sera possible de détecter un intervalle épidémique de courte

durée. Ceci amène à prendre comme unité de temps la fréquence d'échantillonage $1/n$. Le résultat théorique ci-dessous peut guider le praticien dans le choix d'une fréquence d'échantillonage de ξ pour pouvoir détecter avec une forte probabilité une éventuelle perturbation d'une durée donnée.

Théorème 4.20. *Sous (H_{A_n}), on suppose que g_n vérifie les hypothèses supplémentaires suivantes.*

i) Pour tout $n \geq n_0$, il existe des constantes a_n, b_n strictement positives telles que,

$$g_n(t) - g_n(s_n^\star) \sim a_n(t - s_n^\star)^\beta, \quad t \downarrow s_n^\star \tag{4.21}$$

$$g_n(t_n^\star) - g_n(t) \sim b_n(t_n^\star - t)^\beta, \quad t \uparrow t_n^\star. \tag{4.22}$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s_n^\star \leq t \leq s_n^\star + 2/n} \frac{|g_n(t) - g_n(s_n^\star) - a_n(t - s_n^\star)^\beta|}{a_n(t - s_n^\star)^\beta} = 0 \tag{4.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t_n^\star - 2/n \leq t \leq t_n^\star} \frac{|g_n(t_n^\star) - g_n(t) - b_n(t_n^\star - t)^\beta|}{b_n(t_n^\star - t)^\beta} = 0. \tag{4.24}$$

iii) $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$ *et* $\liminf_{n\to\infty} b_n > 0$.

On choisit la famille de poids höldériens

$$\rho_{1/2,\gamma}(h) := h^{1/2} |\ln h|^\gamma, \quad \gamma > 1.$$

On suppose finalement que la longueur $\ell^* = \ell^*(n)$ de l'échantillon épidémique vérifie :

$$\ell^* = o(n^{1-\beta}) \tag{4.25}$$

quand n tend vers l'infini. Sous ces conditions,

$$(2n)^{-1/2} \mathrm{UI}(n, \rho_\gamma) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbf{P}} +\infty.$$

Notons que par *i)*, la restriction de g_n à $[s_n^\star, t_n^\star]$ a au mieux, une régularité globale höldérienne $0 < \beta < 1$. La condition *ii)* sert à généraliser le résultat du théorème que l'on pourrait obtenir avec le modèle plus simple suivant. On note ε et $\tilde{\varepsilon}$ deux fonctions définies sur $[0, 1]$, nulles en zéro et continues à droite en zéro. On fixe des constantes $\theta, \tilde{\theta} \in]0, 1/2[$, $a, b > 0$. On définit alors g_n à droite de $s^\star$ et à gauche de $t^\star$ par respectivement

$$g_n(t) = g_n(s^\star) + a(t - s^\star)^\beta \big(1 + \varepsilon(t - s^\star)\big), \qquad s^\star \leq t \leq s^\star + \theta(t^\star - s^\star),$$

$$g_n(t) = g_n(t^\star) - b(t^\star - t)^\beta \big(1 + \tilde{\varepsilon}(t^\star - t)\big), \qquad t^\star - \tilde{\theta}(t^\star - s^\star) \leq t \leq t^\star.$$

On complète avec un raccord continu et croissant sur $[s^\star + \theta(t^\star - s^\star), t^\star - \tilde{\theta}(t^\star - s^\star)]$. Pour que cette construction soit possible, on impose les contraintes supplémentaires suivantes :

— $s^\star + \theta(t^\star - s^\star) \leq t^\star - \tilde{\theta}(t^\star - s^\star)$;

— la fonction $u \mapsto u^\beta(1+\varepsilon(u))$ est croissante et continue sur $[0, \theta(t^\star - s^\star)]$ et la fonction $u \mapsto u^\beta(1+\tilde{\varepsilon}(u))$ est décroissante et continue sur $[0, \tilde{\theta}(t^\star - s^\star)]$;

— $g_n(s^\star + \theta(t^\star - s^\star)) \leq g_n(t^\star - \tilde{\theta}(t^\star - s^\star))$.

L'idée sous-jacente à la preuve du théorème est que les contributions des deux singularités aux extrémités de l'intervalle de rupture vont jouer un rôle prépondérant dans le comportement asymptotique de $\mathrm{UI}(\zeta_n'', \rho_\gamma, n)$ pourvu que ℓ^* ne soit pas « trop grand ». Ceci nous amène à prouver en préliminaire le lemme suivant.

Lemme 4.21. *Les hypothèses du théorème 4.20 relatives à g_n entraînent l'existence d'un entier n_1 et d'une constante $c > 0$ tels que pour tout $n \geq n_1$,*

$$g_n\left(\frac{k^*+2}{n}\right) - g_n\left(\frac{k^*+1}{n}\right) \geq cn^{-\beta}, \quad g_n\left(\frac{m^*-1}{n}\right) - g_n\left(\frac{m^*-2}{n}\right) \geq cn^{-\beta}. \tag{4.26}$$

Preuve. On se contente de justifier la première inégalité dans (4.26), la seconde étant analogue. En posant

$$\varepsilon_n(u) := \frac{g_n(s^\star+u) - g_n(s^\star) - a_n u^\beta}{a_n u^\beta}, \quad 0 \leq u \leq t^\star - s^\star,$$

on voit par i) que $\varepsilon_n(u)$ tend vers zéro quand u tend vers zéro à droite et que

$$g_n(t) = g_n(s^\star) + a_n(t-s^\star)^\beta\big(1+\varepsilon_n(t-s^\star)\big), \quad s^\star \leq t \leq t^\star.$$

On en déduit que

$$g_n\left(\frac{k^*+2}{n}\right) - g_n\left(\frac{k^*+1}{n}\right) = a_n\left(\frac{k^*+2}{n} - s^\star\right)^\beta - a_n\left(\frac{k^*+1}{n} - s^\star\right)^\beta + R_n \tag{4.27}$$

où

$$R_n := a_n\left(\frac{k^*+2}{n} - s^\star\right)^\beta \varepsilon_n\left(\frac{k^*+2}{n} - s^\star\right) - a_n\left(\frac{k^*+1}{n} - s^\star\right)^\beta \varepsilon_n\left(\frac{k^*+1}{n} - s^\star\right).$$

Par un argument de décroissance de pente due à la concavité de la fonction $t \mapsto (t-s^\star)^\beta$, on voit que l'accroissement de cette fonction entre $(k^*+2)/n$ et $(k^*+1)/n$ est minimal pour la configuration où $s^* = k^*/n$, ce qui nous donne

$$\left(\frac{k^*+2}{n} - s^\star\right)^\beta - \left(\frac{k^*+1}{n} - s^\star\right)^\beta \geq \left(\frac{2}{n}\right)^\beta - \left(\frac{1}{n}\right)^\beta = (2^\beta - 1)n^{-\beta}. \tag{4.28}$$

D'autre part on peut majorer le terme résiduel dans (4.27) par

$$|R_n| \leq a_n\left(\left(\frac{2}{n}\right)^\beta + \left(\frac{1}{n}\right)^\beta\right) \max\left(\left|\varepsilon_n\left(\frac{k^*+1}{n} - s^\star\right)\right|, \left|\varepsilon_n\left(\frac{k^*+2}{n} - s^\star\right)\right|\right)$$

$$=: a_n(2^\beta+1)n^{-\beta}\delta_n. \tag{4.29}$$

En combinant (4.27), (4.28) et (4.29), on obtient

$$g_n\left(\frac{k^*+2}{n}\right)-g_n\left(\frac{k^*+1}{n}\right)\geq a_n\big(2^\beta-1-(2^\beta+1)\delta_n\big).$$

En relisant la définition de ε_n et la condition ii), on voit que δ_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On en déduit que pour n assez grand,

$$g_n\left(\frac{k^*+2}{n}\right)-g_n\left(\frac{k^*+1}{n}\right)\geq \frac{2^\beta-1}{2}a_n n^{-\beta}.$$

Par la même méthode, on obtient une minoration analogue avec b_n au lieu de a_n pour l'accroissement de g_n entre $(m^*-2)/n$ et $(m^*-1)/n$ et il ne reste plus qu'à utiliser iii) pour en déduire (4.26). □

Preuve du théorème 4.20. Compte-tenu du corollaire 4.18 appliqué avec $\rho=\rho_{1/2,\gamma}$, $\gamma>1$, il reste à vérifier (4.19). Comme $\mathrm{UI}(\zeta_n'',n,\rho)$ a même loi que $\widetilde{\mathrm{UI}}(\zeta_n'',n,\rho)$, cela revient à prouver que

$$(2n)^{-1/2}\widetilde{\mathrm{UI}}(\zeta_n'',n,\rho)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}}+\infty.$$

Pour cela, on commence à minorer le max dans la définition (4.20) de $\widetilde{\mathrm{UI}}(\zeta_n'',n,\rho)$ par l'unique terme correspondant à $\ell=\ell^*$. Comme f est l'identité, tous les dénominateurs $\Delta_i f$ dans cette formule valent $1/n$ et l'on obtient ainsi

$$(2n)^{-1/2}\widetilde{\mathrm{UI}}(\zeta_n'',n,\rho)\geq\frac{n^{-1/2}}{\sqrt{2}\varrho(\frac{\ell^*}{n})}\left(1-\frac{\ell^*}{n}\right)n\left|\sum_{i=k^*+1}^{m^*}X_i^2\Delta_i(g_n-f)\right|. \tag{4.30}$$

Puisque $\ell^*=o(n)$, on peut procéder aux simplifications suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{n^{-1/2}}{\varrho(\frac{\ell^*}{n})}\left(1-\frac{\ell^*}{n}\right)&=\frac{\left(1-\frac{\ell^*}{n}\right)}{n^{1/2}(\frac{\ell^*}{n})^{1/2}(1-\frac{\ell^*}{n})^{1/2}\left|\ln(\frac{\ell^*}{n}(1-\frac{\ell^*}{n}))\right|^\gamma}\\&\sim\frac{\left(1-\frac{\ell^*}{n}\right)^{1/2}}{\ell^{*1/2}\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma}\sim\frac{1}{\ell^{*1/2}\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma}\end{aligned}$$

En reportant ceci dans (4.30), on obtient

$$(2n)^{-1/2}\widetilde{\mathrm{UI}}(\zeta_n'',n,\rho_{1/2,\gamma})\geq\frac{q_n}{\sqrt{2}}\frac{1}{\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma}\frac{n}{\ell^{*1/2}}\left|\sum_{i=k^*+1}^{m^*}X_i^2\Delta_i(g_n-f)\right|, \tag{4.31}$$

où $(q_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de réels strictement positifs convergente vers 1.

Passons maintenant au traitement de la partie aléatoire dans le minorant (4.30).

$$\left|\sum_{i=k^*+1}^{m^*} X_i^2 \Delta_i(g_n - f)\right| \geq \sum_{i=k^*+1}^{m^*} X_i^2 \Delta_i(g_n - f)$$
$$= \sum_{\Delta_i(g_n-f)>0} X_i^2 \Delta_i(g_n - f) + \sum_{\Delta_i(g_n-f)<0} X_i^2 \Delta_i(g_n - f). \tag{4.32}$$

Le lemme 4.21 nous garantit que la première somme ci-dessus contient au moins les termes d'indices $i = k^*+2$ et $i = m^*-1$. De plus comme ℓ^* tend vers l'infini avec n, $m^*-1 > k^*+2$ pour n assez grand. En ne retenant que ces deux termes on en déduit que

$$\sum_{\Delta_i(g_n-f)>0} X_i^2 \Delta_i(g_n - f) \geq cn^{-\beta}(X_{k^*+2}^2 + X_{m^*-1}^2). \tag{4.33}$$

Pour traiter la deuxième somme où les $\Delta_i(g_n - f)$ sont tous strictement négatifs, on note que dans ce cas,

$$0 \leq g_n\left(\frac{i+1}{n}\right) - g_n\left(\frac{i}{n}\right) < f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

et donc, pour tout i tel que $\Delta_i(g_n - f) < 0$, $\Delta_i(g_n - f) \geq \frac{-1}{n}$. Par conséquent,

$$\sum_{\Delta_i(g_n-f)<0} X_i^2 \Delta_i(g_n - f) \geq \frac{-1}{n} \sum_{\Delta_i(g_n-f)<0} X_i^2 \geq \frac{-1}{n} \sum_{i=k^*+1}^{m^*} X_i^2. \tag{4.34}$$

En reportant les minorations (4.32), (4.33) et (4.34) dans (4.31), il vient

$$(2n)^{-1/2}\widetilde{\mathrm{UI}}(\zeta_n'', n, \rho_{1/2,\gamma}) \geq \frac{q_n}{\sqrt{2}}\left(\frac{cn^{1-\beta}}{\ell^{*1/2}\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma}(X_{k^*+2}^2 + X_{m^*-1}^2) - \frac{1}{\ell^{*1/2}\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma}\sum_{i=k^*+1}^{m^*} X_i^2\right)$$
$$=: \frac{q_n}{\sqrt{2}}(M_n - L_n).$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathbf{E}L_n = \frac{\ell^{*1/2}}{\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma}, \quad \mathbf{Var}L_n = \frac{2}{\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^{2\gamma}}.$$

Maintenant, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $u > 0$, on a

$$\mathbf{P}\left(L_n - \frac{\ell^{*1/2}}{\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma} > u\right) \leq \frac{2}{u^2\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^{2\gamma}}$$

ce qui permet de déduire que

$$L_n = \ell^{*1/2}\big(\ln(n/\ell^*)\big)^{-\gamma} + O_{\mathbf{P}}\left(\big(\ln(n/\ell^*)\big)^{-\gamma}\right). \tag{4.35}$$

Le facteur déterministe dans M_n tend vers l'infini avec n grâce à l'hypothèse (4.25) car

$$\frac{cn^{1-\beta}}{{\ell^*}^{1/2}\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma} = c\frac{n^{1/2-\beta/2}}{{\ell^*}^{1/2}}\frac{n^{1/2-\beta/2}}{(\ln n - \ln \ell^*)^\gamma} > c\frac{n^{1/2-\beta/2}}{{\ell^*}^{1/2}}\frac{n^{1/2-\beta/2}}{(\ln n)^\gamma}.$$

Le facteur aléatoire $(X^2_{k^*+2} + X^2_{m^*-1})$ dépend de n à cause de indices k^* et m^*, mais sa loi est constante, c'est la loi $\chi^2(2)$. Cette loi étant à support $[0, +\infty[$ sans masse au point 0, il est clair que M_n tend vers l'infini en probabilité. Compte tenu de (4.35), il ne nous reste plus pour achever la preuve qu'à vérifier que

$$Q_n := \frac{\frac{cn^{1-\beta}}{{\ell^*}^{1/2}\left|\ln\frac{\ell^*}{n}\right|^\gamma}}{{\ell^*}^{1/2}\big(\ln(n/\ell^*)\big)^{-\gamma}} = \frac{cn^{1-\beta}}{\ell^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qui se réduit à (4.25) après simplifications. □

Notons qu'une généralisation de ce travail peut être faite en ajoutant des hypothèses supplémentaires sur la fonction f (autre que l'identité sur $[0, 1]$). Notons également que sous l'hypothèse alternative la fonction g_n peut être « presque » confondue avec la fonction f sur « presque » tout l'intervalle de l'épidémie, il faut ainsi avoir des hypothèses raisonnables sur g_n pour pouvoir conclure sous (H_{A_n}).

Remarquons qu'ici on suppose que ℓ^* ne soit pas « trop petit » (plus précisément $\ell^* = o(n^{1-\beta})$) ce qui est en quelque sorte l'inverse de ce qu'on suppose en général. Ceci est dû au rôle prépondérant attribué aux singularités aux deux extrémités de l'intervalle de rupture.

Bibliographie

[1] A. Amiri and S. Dachian. On smooth change-point location estimation for Poisson processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 24(3):499–524, 2021.

[2] J. Appell, J. Banaś, and N. Merentes. Some quantities related to monotonicity and bounded variation of functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 367(2):476–485, 2010.

[3] N. V. Arakelyan and Yu. A. Kutoyants. On the identification of the source of emission on the plane. *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, 53(2):75–81, 2019.

[4] P. J. Avery and D. A. Henderson. Detecting a changed segment in DNA sequences. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. C*, 48(4):489–503, 1999.

[5] F. Avram and M. S. Taqqu. Probability bounds for M-Skorokhod oscillations. *Stochastic Process. Appl.*, 33(1):63–72, 1989.

[6] F. Avram and M. S. Taqqu. Weak convergence of sums of moving averages in the α-stable domain of attraction. *Ann. Probab.*, 20(1):483–503, 1992.

[7] J. Banaś and K. Sadarangani. On some measures of noncompactness in the space of continuous functions. *Nonlinear Anal.*, 68(2):377–383, 2008.

[8] J.-M. Bardet, V. Brault, S. Dachian, F. Enikeeva, and B. Saussereau. Change-point detection, segmentation, and related topics. In *Journées MAS 2018 — Sampling and Processes*, volume 68 of *ESAIM: Proceedings and Surveys*, pages 97–122. EDP Sciences, Les Ulis, 2020.

[9] M. Basseville and I. V. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[10] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1968.

[11] N. H. Bingham, Ch. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular Variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[12] B. Böttcher. Embedded Markov chain approximations in Skorokhod topologies. *Probab. Math. Statist.*, 39(2):259–277, 2019.

[13] B. E. Brodsky and B. S. Darkhovsky. *Non Parametric Methods in Change Point Problems*, volume 243 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[14] J. H. Cha and M. Finkelstein. *Point Processes for Reliability Analysis: Shocks and Repairable Systems*. Springer Series in Reliability Engineering. Springer-Verlag, London, 2018.

[15] K.-S. Chan. Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model. *Ann. Statist.*, 21(1):520–533, 1993.

[16] N. H. Chan and Yu. A. Kutoyants. Recent developments of threshold estimation for nonlinear time series. *J. Japan Statist. Soc.*, 40(2):277–303, 2010.

[17] N. H. Chan and Yu. A. Kutoyants. On parameter estimation of threshold autoregressive models. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 15(1):81–104, 2012.

[18] J. Chen and A. K. Gupta. *Parametric Statistical Change Point Analysis*. Birkhäuser, Boston, MA, 2000.

[19] H. Chernoff and H. Rubin. The estimation of the location of a discontinuity in density. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. I*, pages 19–37. University of California Press, Berkeley-Los Angeles, CA, 1956.

[20] O. V. Chernoyarov, S. Dachian, C. Farinetto, and Yu. A. Kutoyants. Estimation of the position and time of emission of a source. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 25(1):61–82, 2022.

[21] O. V. Chernoyarov, S. Dachian, and Yu. A. Kutoyants. Poisson source localization on the plane: cusp case. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 72(5):1137–1157, 2020.

[22] O. V. Chernoyarov and Yu. A. Kutoyants. Poisson source localization on the plane: the smooth case. *Metrika*, 83(4):411–435, 2020.

[23] P. Chigansky and Yu. A. Kutoyants. On nonlinear TAR processes and threshold estimation. *Math. Methods Statist.*, 21(2):142–152, 2012.

[24] P. Chigansky and Yu. A. Kutoyants. Estimation in threshold autoregressive models with correlated innovations. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 65(5):959–992, 2013.

[25] Z. Ciesielski. On the isomorphisms of the spaces H_α and m. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 8:217–222, 1960.

[26] G. Ciuperca. Maximum likelihood estimator in a two-phase nonlinear random regression model. *Statist. Decisions*, 22(4):335–349, 2004.

[27] D. Commenges, J. Seal, and F. Pinatel. Inference about a change point in experimental neurophysiology. *Math. Biosci.*, 80(1):81–108, 1986.

[28] D. R. Cox and P. A. W. Lewis. *The Statistical Analysis of Series of Events*. Methuen & Co., London; John Wiley & Sons, New York, 1966.

[29] M. Csörgő and L. Horváth. *Limit Theorems in Change-Point Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1997.

[30] S. Dachian. Estimation of cusp location by Poisson observations. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 6(1):1–14, 2003.

[31] S. Dachian. On limiting likelihood ratio processes of some change-point type statistical models. *J. Statist. Plann. Inference*, 140(9):2682–2692, 2010.

[32] S. Dachian. Estimation of the location of a 0-type or ∞-type singularity by Poisson observations. *Statistics*, 45(5):509–523, 2011.

[33] S. Dachian, Yu. A. Kutoyants, and L. Yang. On hypothesis testing for Poisson processes: regular case. *Comm. Statist. Theory Methods*, 45(23):6816–6832, 2016.

[34] S. Dachian, Yu. A. Kutoyants, and L. Yang. On hypothesis testing for Poisson processes: singular cases. *Comm. Statist. Theory Methods*, 45(23):6833–6859, 2016.

[35] S. Dachian and L. Yang. On a Poissonian change-point model with variable jump size. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 18(2):127–150, 2015.

[36] J. Deshayes and D. Picard. Lois asymptotiques des tests et estimateurs de rupture dans un modèle statistique classique. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 20(4):309–327, 1984.

[37] R. V. Erickson. Lipschitz smoothness and convergence with applications to the central limit theorem for summation processes. *Ann. Probab.*, 9(5):831–851, 1981.

[38] C. Farinetto, Yu. A. Kutoyants, and A. Top. Poisson source localization on the plane: change-point case. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 72(3):675–698, 2020.

[39] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I.* John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London, second edition, 1957.

[40] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, second edition, 1971.

[41] D. Giraudo. Hölderian weak invariance principle under a Hannan type condition. *Stochastic Process. Appl.*, 126(1):290–311, 2016.

[42] D. Giraudo. Hölderian weak invariance principle for stationary mixing sequences. *J. Theoret. Probab.*, 30(1):196–211, 2017.

[43] D. Giraudo. Hölderian weak invariance principle under Maxwell and Woodroofe condition. *Braz. J. Probab. Stat.*, 32(1):172–187, 2018.

[44] E. Gombay. Testing for change-points with rank and sign statistics. *Statist. Probab. Lett.*, 20(1):49–55, 1994.

[45] J. Gudan, A. Račkauskas, and Ch. Suquet. Testing mean changes by maximal ratio statistics. *Extremes*, 25(2):257–298, 2022.

[46] J. Hájek. A characterization of limiting distributions of regular estimates. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 14:323–330, 1969/70.

[47] J. Hájek. Limiting properties of likelihoods and inference. In *Foundations of statistical inference (Proc. Sympos., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1970)*, pages 142–162. Holt, Rinehart and Winston of Canada, Toronto, Ont., 1971.

[48] J. Hájek. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. I: Theory of statistics*, pages 175–194. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.

[49] D. Hamadouche. Invariance principles in Hölder spaces. *Port. Math.*, 57(2):127–151, 2000.

[50] R. Höpfner and Yu. A. Kutoyants. Estimating discontinuous periodic signals in a time inhomogeneous diffusion. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 13(3):193–230, 2010.

[51] I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii. Asymptotic behavior of generalized Bayes estimates. *Sov. Math., Dokl.*, 11:1181–1185, 1970.

[52] I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii. Asymptotic behavior of statistical estimates for samples with a discontinuous density. *Math. USSR-Sb.*, 16(4):573–606, 1972.

[53] I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii. Asymptotic analysis of statistical estimators for the "almost smooth" case. *Theory Probab. Appl.*, 18(2):241–252, 1973.

[54] I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii. Asymptotic behavior of statistical estimators in the smooth case. I. Study of the likelihood ratio. *Theory Probab. Appl.*, 17(3):445–462, 1973. Russian version published in 1972.

[55] I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii. Parameter estimation for a discontinuous signal in white Gaussian noise. *Probl. Inf. Transm.*, 11(3):203–212, 1975.

[56] I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii. Asymptotic behavior of statistical estimators of the location parameter for samples with continuous density with singularities. *J. Sov. Math.*, 9(1):50–72, 1978. Russian version published in 1974.

[57] I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii. *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*, volume 16 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Translated from Russian edition of 1979.

[58] M. Juodis and A. Račkauskas. A central limit theorem for self-normalized sums of a linear process. *Statist. Probab. Lett.*, 77(15):1535–1541, 2007.

[59] M. Juodis, A. Račkauskas, and Ch. Suquet. Hölderian functional central limit theorems for linear processes. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 5:47–64, 2009.

[60] G. Kerkyacharian and B. Roynette. Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Ito-Nisio. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(11):877–882, 1991.

[61] H. L. Koul and L. Qian. Asymptotics of maximum likelihood estimator in a two-phase linear regression model. *J. Statist. Plann. Inference*, 108(1–2):99–119, 2002.

[62] U. Küchler and Yu. A. Kutoyants. Delay estimation for some stationary diffusion-type processes. *Scand. J. Statist.*, 27(3):405–414, 2000.

[63] Yu. A. Kutoyants. Asymptotic properties of estimators of intensity parameter for non homogeneous Poisson processes. In *Abstracts of Second Vilnius Conference on Theory of Probability and Mathematical Statistics*, volume 1, pages 220–221, Vilnius, 1977. In Russian.

[64] Yu. A. Kutoyants. Estimation of parameter of discontinuous intensity of non homogeneous Poisson processes. In *Reports of Seventh Vilnius Conference on Coding Theory and Information Transmission, Part VI*, pages 60–64, Vilnius, 1978. In Russian.

[65] Yu. A. Kutoyants. Intensity parameter estimation of an inhomogeneous Poisson process. *Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform.*, 8(2):137–149, 1979.

[66] Yu. A. Kutoyants. *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, volume 6 of *Research and Exposition in Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, 1984. Translated from Russian edition of 1980.

[67] Yu. A. Kutoyants. *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*, volume 300 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

[68] Yu. A. Kutoyants. *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*, volume 134 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[69] Yu. A. Kutoyants. *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, London, 2004.

[70] Yu. A. Kutoyants. On identification of the threshold diffusion processes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 64(2):383–413, 2012.

[71] J. Lamperti. On convergence of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104(3):430–435, 1962.

[72] L. Le Cam. On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Bayes' estimates. *Univ. California Publ. Statist.*, 1:277–329, 1953.

[73] L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions. Certain approximations to families of distributions and their use in the theory of estimation and testing hypotheses. *Univ. California Publ. Statist.*, 3:37–98, 1960.

[74] L. Le Cam. *Théorie asymptotique de la décision statistique*, volume 33 of *Séminaire de Mathématiques Supérieures (Été 1968)*. Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1969.

[75] L. Le Cam. On the assumptions used to prove asymptotic normality of maximum likelihood estimates. *Ann. Math. Statist.*, 41:802–828, 1970.

[76] B. Levin and J. Kline. CUSUM tests of homogeneity. *Stat. Med.*, 4(4):469–488, 1985.

[77] P. Lévy. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris, second edition, 1954.

[78] R. S. Liptser and A. N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes. II. Applications*, volume 6 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second expanded edition, 2001.

[79] J. Markevičiūtė, A. Račkauskas, and Ch. Suquet. Functional central limit theorems for sums of nearly nonstationary processes. *Lithuanian Math. J.*, 52(3):282–296, 2012.

[80] I. Melbourne and P. Varandas. Convergence to a Lévy process in the Skorokhod M_1 and M_2 topologies for nonuniformly hyperbolic systems, including billiards with cusps. *Comm. Math. Phys.*, 375(1):653–678, 2020.

[81] E. Parzen. Comparison change analysis. In *Nonparametric Statistics and Related Topics (Ottawa, ON, 1991)*, pages 3–15. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[82] E. Parzen. Comparison change analysis approach to changepoint estimation. *J. Appl. Statist. Sci.*, 1(4):379–401, 1994.

[83] J.-M. L. Pomarede. *A Unified Approach via Graphs to Skorokhod's Topologies on the Function Space D*. Ph.D. Thesis, Yale University, 1976.

[84] A. Račkauskas and Ch. Suquet. Hölder versions of Banach spaces valued random fields. *Georgian Math. J.*, 8(2):347–362, 2001.

[85] A. Račkauskas and Ch. Suquet. Necessary and sufficient condition for the Lamperti invariance principle. *Theory Probab. Math. Statist.*, 68:115–124, 2003.

[86] A. Račkauskas and Ch. Suquet. Hölder norm test statistics for epidemic change. *J. Statist. Plann. Inference*, 126(2):495–520, 2004.

[87] A. Račkauskas and Ch. Suquet. Necessary and sufficient condition for the functional central limit theorem in Hölder spaces. *J. Theoret. Probab.*, 17(1):221–243, 2004.

[88] A. Račkauskas and Ch. Suquet. Testing epidemic changes of infinite dimensional parameters. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 9(2):111–134, 2006.

[89] A. Račkauskas and Ch. Suquet. On Bernstein-Kantorovich invariance principle in Hölder spaces and weighted scan statistics. *ESAIM Probab. Stat.*, 24:186–206, 2020.

[90] A. Ramanayake and A. K. Gupta. Tests for an epidemic change in a sequence of exponentially distributed random variables. *Biom. J.*, 45(8):946–958, 2003.

[91] S. I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer-Verlag, New York, 2008. Reprint of the 1987 original.

[92] S. K. Sarkar. *Single Molecule Biophysics and Poisson Process Approach to Statistical Mechanics*. Morgan & Claypool, San Rafael, CA, 2016.

[93] Z. Semadeni. *Schauder Bases in Banach Spaces of Continuous Functions*, volume 918 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[94] A. V. Skorokhod. Limit theorems for stochastic processes. *Theory Probab. Appl.*, 1(3):261–290, 1956.

[95] D. L. Snyder and M. I. Miller. *Random Point Processes in Time and Space*. Springer Texts in Electrical Engineering. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[96] R. L. Streit. *Poisson Point Processes: Imaging, Tracking, and Sensing*. Springer-Verlag, New York, 2010.

[97] W. A. Thompson. *Point Process Models with Applications to Safety and Reliability*. Chapman & Hall, New York, 1988.

[98] A. P. Trifonov and Yu. S. Shinakov. *Joint Discrimination of Signals and Estimation of their Parameters against the Background of Interference*, volume 26 of *Statistical Theory of Communications*. Radio i Svyaz', Moscow, 1986. in Russian.

[99] W. Whitt. *Stochastic-Process Limits.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2002.

[100] Q. W. Yao. Tests for change-points with epidemic alternatives. *Biometrika*, 80(1):179–191, 1993.