THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE

École Doctorale MADIS-631

Spécialité : Mathématiques et leurs interactions

par

THOMAS GAUJAL

ÉTUDE DES REPRÉSENTATIONS GÉNÉRIQUES DES GROUPES LINÉAIRES EN INÉGALE CARACTÉRISTIQUE

Soutenue publiquement le 15/12/2022 devant le jury composé de :

ANTOINE TOUZÉ	Examinateur	Professeur des universités, Université de Lille
CHRISTINE VESPA	Examinatrice	Professeur des universités, Université d'Aix-Marseille
MARKUS SZYMIK	Rapporteur	Professor, University of Sheffield
GEOFFREY POWELL	Rapporteur/Président	Directeur de recherche, Université d'Angers
AURÉLIEN DJAMENT	Directeur de thèse	Chargé de recherche (HDR), Université de Lille

Résumé

On étudie les représentations génériques des groupes linéaires en caractéristique croisée, c'est-à-dire les foncteurs depuis les A-modules projectifs de type fini vers les k-espaces vectoriels, où k est un corps commutatif et A un anneau fini de cardinal inversible dans k. Dans cette catégorie qui ne comporte aucun foncteur polynomial non-constant, on introduit des foncteurs décalage et différence "modifiés", inspirés de constructions récentes de Nagpal, qui permettent de définir une stratification de la catégorie par des sous-catégories bilocalisantes avec de bonnes propriétés. Notre théorème de structure fondamental décrit les sous-quotients de cette stratification. En guise d'application nous démontrons une conjecture de Djament-Touzé-Vespa sur les dimensions prises par les foncteurs de type fini dans ce contexte.

Abstract

We study generic representations of linear groups in nondescribing characteristic, i.e. functors from finitely generated projective A-modules to k-vector spaces where k is a field and A a finite ring whose cardinality is invertible in k. In this category, where there is no non-constant polynomial functor, we introduce "modified" shift and difference functors, inspired by recent constructions of Nagpal, which allow to define a stratification of the category by bilocalizing subcategories with good properties. Our main structure theorem describes the subquotients of this stratification. As an application we prove a conjecture from Djament-Touzé-Vespa about the dimensions of the finitely generated functors in this context.

Remerciements

Je remercie les rapporteurs Markus Szymik et Geoffrey Powell, pour le temps qu'ils m'ont accordé dans la lecture de cette thèse, ainsi que les membres du jury. Je tiens plus particulièrement à remercier Aurélien, mon directeur de thèse, avec qui j'ai tant appris durant ces 4 années à ses côtés. Il a réussi à rendre agréable ces années difficiles. Je remercie également toute l'équipe de recherche de Topologie Algébrique pour l'organisation de séminaires hebdomadaires qui m'ont permis d'enrichir ma culture mathématique. Également, je me dois de remercier le personnel administratif, et plus particulièrement Ludivine, Aurélie, Sabine et Christelle, qui se montrent toujours aussi serviables lorsque l'on a besoin d'elles.

Une pensée me vient pour les professeurs qui ont contribué à ma formation mathématique : Alain Berthomieu, Pascal Ortiz et Thierry Montaut de l'université de Champollion, qui m'ont toujours poussé à m'améliorer ; Alexandru Oancea de Sorbonne Université pour sa bienveillance et sa pédagogie hors-pair et bien sûr Grégory Ginot de l'université Paris 13 qui, ayant cru en mes capacités, m'a permis de rencontrer mon directeur de thèse.

Je me dois bien sûr de dire quelques mots aux doctorants et post-doctorants du bureau 110 : Iacopo, Sophie et Kürşat qui ont supporté mes états d'âmes. Merci encore. Également à tous les doctorants de l'université de Lille, et très particulièrement Justine, Christopher, Thibaut, Nicola, Ivan, Gabriel, Tino, Julien et Imane, pour ces moments agréables autour d'un café ainsi qu'en dehors de l'université. À Étienne et Marie-Camille pour ces moments inoubliables passés ensemble à travers l'Europe lors de conférences. Je remercie mes amis de Sorbonne Université (Thibault A., Victor, Thibaut M., Dylan, Olivier et Pierre) pour ces moments de légèreté essentiels lors de nos échanges et rencontres. Vous m'avez aidé à tenir bon toutes ces années de thèse. Merci également à mes amies d'enfance Elsa, Pauline Martin et Pauline Eliot. Même si la distance géographique ne nous permet pas de nous voir aussi souvent que nous l'aurions souhaités, vous vous êtes montrées toujours disponibles pour moi. J'aimerai remercier Max, Brigitte, Blandine, Domi, Michel et Thalo pour le soutien permanent qu'ils m'ont apporté.

Maintenant viennent les personnes qui me sont les plus précieuses : Ma famille ! À ma mère, Maria José, qui a toujours cru en moi, m'a encouragé et soutenu, à ma soeur Christelle et son mari Maxime, à ma tante Kiki et mon oncle Cyril, à mes cousines Lucie et Claire, ainsi qu'à Granny et Daddy, merci pour votre soutien sans faille. Cette thèse n'aurait pas été possible sans vous ! Un mot également pour ma famille portugaise : Obrigado a todos pela vossa presença mesmo com tantos kilometros que nos separam !

Une pensée très spéciale à mon père parti trop tôt. Papa, je te dédie cette thèse !

Introduction

0.1 Mise en contexte

Le terme de **représentation générique** a été introduit par N. Kuhn au début des années 1990 en raison des liens profonds entre les foncteurs de $\mathcal{F}(A, k)$ (i.e. la catégorie des foncteurs des A-modules projectifs de type fini vers les k-espaces vectoriels avec A un anneau fini et k un corps) et les représentations k-linéaires des groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(A)$. Ils proviennent en premier lieu du fait que $F(A^n)$ est une telle représentation pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(A, k)$. Ce lien a été précisé de façon très profonde, au niveau cohomologique, pour les foncteurs polynomiaux (dont nous reparlerons bientôt), par les travaux non publiés de Scorichenko (2000). Les foncteurs de $\mathcal{F}(A, k)$ possèdent également des liens avec la théorie des représentations k-linéaires des groupes symétriques. Mais l'origine de l'attention systématique portée aux catégories $\mathcal{F}(A, k)$ (au moins lorsque $A = k$ est un corps fini) est topologique, en raison des liens profonds mis en évidence par Henn, Lannes et Schwartz ([HLS93]) entre ces représentations génériques et les modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

On a donc rapidement été amené à étudier les catégories $\mathcal{F}(A, k)$ avec la caractéristique de A divisible par la caractéristique de k : il s'agit de l'étude de la **caractéristique naturelle**. Les représentations k-linéaires irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, où k est un corps de caractéristique p, sont assez bien comprises ; les représentations k-linéaires de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ s'y ramènent, car le morphisme de groupes finis $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ induit par la réduction modulo p est surjectif et a pour noyaux un p-groupe. Dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, k)$ (où k est un corps de caractéristique p), de même, tous les foncteurs **simples** proviennent de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, k)$ via le foncteur $\mathcal{F}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, k) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, k)$ de précomposition par la réduction modulo p ; ces foncteurs simples sont polynomiaux (cf. [Kuh94]) et assez bien compris. Enfin la catégorie $\mathcal{F}(A, k)$ possède une stratification par les sous-catégories bilocalisantes des foncteurs polynomiaux dont on comprend bien les sous-quotients de la stratification.

Dans cette thèse, nous travaillons dans le cas où la caractéristique de A est inversible dans k : C'est la **caractéristique croisée**. Dans ce cas-ci, la catégorie $\mathcal{F}(A, k)$ ne possède aucun foncteur polynomial non constant. Donc la stratification par les foncteurs polynomiaux est inutile. On sera amené par la suite à construire une nouvelle stratification. Mais en 2015 N.Kuhn publie dans [Kuh15] un résultat surprenant dans l'étude de la caractéristique croisée. Il résout le cas où A est un corps fini de caractéristique inversible dans k. Ceci donne lieu au théorème suivant :

Théorème 0.1.1 (Kuhn, 2015)**.** *Si $\mathbb{F}$ est un corps fini de caractéristique $p \in k^\times$ alors il existe une équivalence de catégories :*

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}, k) \simeq \prod_{n=0}^{\infty} k[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})] - \mathbf{Mod}$$

Kuhn obtient le résultat précédent comme conséquence de travaux de Kovács [Kov92] sur les représentations des monoïdes de matrices. Nous obtenons dans ce mémoire une démonstration purement fonctorielle du théorème indépendante de celle de Kuhn. Ce théorème est encore vérifié dès lors que A est un anneau fini semi-simple (avec toujours la caractéristique de A inversible dans k). En revanche, lorsque A n'est pas semi-simple, le théorème 0.1.1 ne se généralise pas. En effet, $\mathcal{F}(A,k)$ n'est pas semi-simple (si A n'est pas semi-simple) tandis que la catégorie $\prod_{n=0}^{\infty} k[\mathrm{GL}_n(A)] - \mathbf{Mod}$ l'est si la k est de caractéristique nulle. Par ailleurs, si k n'est pas de caractéristique p, il existe des représentations k-linéaires irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ qui ne proviennent pas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. La classification pour tout entier n des représentations k-linéaires simples irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ sur le corps des nombres complexes est un problème sauvage d'après un théorème de Bondarenko-Nagornyi cité au paragraphe 4 de [VS11]. Autrement dit, en caractéristique croisée, l'étude des représentations (génériques ou pas), des groupes $\mathrm{GL}_n(A)$ est beaucoup plus difficile dans le cas d'un anneau fini A général que dans le cas où A est semi-simple, et nécessite l'introduction d'outils spécifiques. La présente thèse s'attache à en développer pour les représentations génériques.

0.2 Objet d'étude

L'objet d'étude de cette thèse est la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ des foncteurs de $\mathcal{A}$ vers les k-espaces vectoriels, où $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale, c'est-à-dire que pour toute paire d'objets (x,y) de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x,y)$ est fini et vérifie $\mathcal{A}(x,y)\otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$.
Dans le cas de la catéristique naturelle (c'est à dire, lorsque $\mathcal{A}(x,y)$ est un p-groupe où p est la caractéristique de k), il existe une stratification "polynomiale" de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ par des sous-catégories bilocalisante $\mathbf{Pol}_d(\mathcal{A};k) \subset \mathbf{Pol}_{d+1}(\mathcal{A};k)$ telles que tout foncteur simple de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ est dans $\mathbf{Pol}_d(\mathcal{A};k)$ pour un certain entier d ; et telles que l'on comprenne bien les catégories quotients $\mathbf{Pol}_d(A;k)/\mathbf{Pol}_{d-1}(\mathcal{A};k)$.
La catégorie $\mathbf{Pol}_d(\mathcal{A};k)$ est la catégorie des foncteurs polynomiaux (au sens d'Eilenberg-MacLane) de degré au plus d. Pour définir cette catégorie explicitement, on introduit les foncteurs de décalage :

Définition 0.2.1. *Soit $x\in\mathcal{A}$, nous définissions le foncteur de décalage $\tau_x : \mathcal{F}(\mathcal{A};k)\to\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ par*

$$\tau_x F = F(x\oplus -)$$

Le morphisme $0\to x$ induit alors un monomorphisme naturel $\tau_0 = \mathrm{Id}\hookrightarrow\tau_x$. Nous définissons alors le foncteur différence :

$$\delta_x := \mathrm{coker}(\mathrm{Id}\hookrightarrow\tau_x)$$

Définition 0.2.2. *$F\in\mathbf{Pol}_d(\mathcal{A};k)$ si, et seulement si, pour tous $d+1$ objets $x_0,\dots,x_d$ de $\mathcal{A}$, $\delta_{x_0}\dots\delta_{x_d}F=0$.*

Mais si la catégorie $\mathcal{A}$ est k-triviale, alors $\mathbf{Pol}_d(\mathcal{A};k)=\mathbf{Pol}_0(\mathcal{A};k)$ pour tout entier d. Autrement dit, les seuls foncteurs polynomiaux sont les foncteurs constants. Nous somment donc amené à construire une nouvelle stratification de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. Pour faire cela, nous allons "modifier" les foncteurs τ_x et δ_x.
Nous remarquons d'abord que le groupe $\mathrm{Hom}(x,y)$ agit sur $\tau_x F(y) = F(x\oplus y)$ par action des matrices triangulaires inférieures par blocs de la forme $\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & 1\end{pmatrix}$. On définit alors $\bar\tau_x : \mathcal{F}(\mathcal{A};k)\to\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ par :

$$\bar\tau_x F(y) = F(x\oplus y)_{\mathrm{Hom}(x,y)}$$

De manière générale $\bar\tau_x$ est un foncteur exact à droite, mais si la catégorie $\mathcal{A}$ est k-triviale alors il est exact. De plus la composée

$$\mathrm{Id}\hookrightarrow\tau_x\twoheadrightarrow\bar\tau_x$$

est alors un monomorphisme. Nous définissons alors le foncteur $\bar\delta_x := \mathrm{coker}(\mathrm{Id}\hookrightarrow\bar\tau_x)$. Il est également exact si $\mathcal{A}$ est k-triviale. Nous avons donc une stratification de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$:

$$\mathcal{F}_d := \left\{F\in\mathcal{F}(\mathcal{A};k)\mid\forall(a_0,\dots,a_d,x)\in\mathcal{A}^{d+2}, \bar\delta_{a_0}\dots\bar\delta_{a_d}\tau_x F = 0\right\}$$

$\mathcal{F}_d$ est une sous-catégorie bilocalisante (i.e. une sous-catégorie épaisse stable par limites et colimites arbitraires) car $\bar\delta_a$ et τ_x commutent aux limites. De plus, si $\mathbf{Add}(\mathcal{A};k)$ (la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ vers $k-\mathbf{Mod}$) est localement finie (par exemple si $\mathcal{A}=\mathbf{P}(A)$ avec A un anneau fini) alors tout foncteur de type fini, et en particulier tout foncteur simple, appartient à l'un des $\mathcal{F}_d$. Il ne nous reste plus qu'à comprendre la structure des sous-quotients $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$. Pour cela nous avons besoin de définir de nouveaux foncteurs : En prenant A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers les groupes abéliens on définit :

$$Q_A := \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{A_0 \subsetneq A} k[A_0] \to k[A]\right)$$

On constate que le groupe $\operatorname{Aut}(A)$ agit librement sur Q_A. Ce qui nous permet de définir, pour toute représentation M du groupe $\operatorname{Aut}(A)$, le foncteur :

$$Q_{A,M} := Q_A \otimes_{k[\operatorname{Aut}(A)]} M$$

Nous remarquons que lorsque la longueur de A (notée $l(A)$) est égale à d alors $Q_{A,M}$ appartient à la catégorie $\mathcal{F}_d$. Grâce à des calculs cohomologiques sur les foncteurs $Q_{A,M}$, et après avoir montré que, pour tout objet $x \in \mathcal{A}$, le foncteur $\bar{\tau}_x$ induit l'identité sur $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$, nous établirons dans le chapitre 4 le théorème de structure suivant :

Théorème 0.2.3. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie k-triviale telle que $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ soit localement finie. Soit $d \in \mathbb{N}$, la composée de :*

$$\prod_{\substack{A \in \mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})/\simeq \\ l(A)=d}} k[\operatorname{Aut}(A)] - \mathbf{Mod} \to \mathcal{F}_d$$

$$(M_A)_A \mapsto \bigoplus_{\substack{A \in \mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})/\simeq \\ l(A)=d}} Q_{A,M_A}$$

et du foncteur canonique de passage au quotient $T : \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$ est une équivalence de catégorie.

Remarque 0.2.4. *La condition $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ localement finie est raisonnable dans le sens qu'elle est vérifiée pour toute catégorie $\mathcal{F}(A,k)$ avec A un anneau fini de caractéristique inversible dans k d'après [PS17]. De plus, cela implique que la catégorie $\mathbf{Add}(\mathcal{A};k)$ est localement finie.*

Une conséquence de ce théorème de structure est la conjecture d'Aurélien Djament-Antoine Touzé- Christine Vespa, énoncée dans l'article [DTV21] et démontrée dans le chapitre 4 de cette thèse :

Théorème 0.2.5. *Si A est un p-anneau fini (i.e un anneau fini dont l'ordre est une puissance de p) tel que $p \in k^\times$ alors pour tout foncteur $F \in \mathcal{F}(A;k)$ de type fini, il existe un polynôme $P_F \in \mathbb{Q}[X]$ tel que pour tout entier naturel n :*

$$\dim_k F(A^n) = P_F(p^n)$$

Ce théorème impose une contrainte polynomiale sur la dimension des foncteurs de type fini, en particulier les foncteurs simples, évalués à A^n, ce qui est très restrictif dans la catégorie $\mathcal{F}(A,k)$.

Table des matières

Chapitre 1

Catégories de foncteurs

Dans ce chapitre on commencera par rappeler quelques notions générales sur les catégories abéliennes, notamment le quotient d'une catégorie abélienne par une sous-catégorie épaisse. Dans une deuxième partie on présente la notion de suites spectrales, très utiles pour des calculs homologiques. On présente deux exemples importants : la suite spectrale de Grothendieck et la suite spectrale d'hypercohomologie. Enfin on conclura le chapitre avec une première étude de la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ d'une petite catégorie additive $\mathcal{A}$ vers la catégorie des k-modules qui est l'objet d'étude de cette thèse. On présentera la notion de foncteurs polynomiaux et antipolynomiaux. On rappellera leurs liens avec les foncteurs simples puis on terminera avec les propriétés de finitudes de la catégorie de foncteurs.

1.1 Rappels sur les catégories abéliennes

Cette section s'inspire fortement des travaux de Gabriel. Le lecteur pourra trouver plus de détails dans [Gab62].

1.1.1 Quelques généralités

Les catégories abéliennes sont des objets qui apparaissent naturellement dans l'étude des représentations génériques. En effet, nous étudierons des catégories de foncteurs qui seront des catégories abéliennes (voire même de Grothendieck). Il est donc important de rappeler les définitions et propriétés des catégories abéliennes (il s'agit d'une catégorie additive avec quelques propriétés supplémentaires).

Définition 1.1.1. *Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **pré-additive** si elle possède un objet nul et si, pour tout couple d'objet (X, Y) de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ admet une structure de groupe abélien qui soit compatible avec la composition. On dit qu'elle est **additive** si elle est pré-additive et si tous les produits et coproduits finis existent.*

Définition 1.1.2. *Dans une catégorie pointée un monomorphisme est **normal** si il est le noyau d'un certain morphisme. De même un épimorphisme est **conormal** si il est le conoyau d'un certain morphisme.*

Définition 1.1.3. *Une catégorie est dite :*

1. ***normale** si tout ses monomorphismes sont normaux.*
2. ***conormale** si tout ses épimorphismes sont conormaux.*
3. ***binormale** si elle est normale et conormale.*

Définition 1.1.4. *Une catégorie est **pré-abélienne** si elle est additive et si toutes les limites et colimites finies existent. Une catégorie est **abélienne** si elle est pré-abélienne et binormale.*

Proposition 1.1.5. *Une catégorie est binormale si, et seulement si, pour tout morphisme f, le morphisme canonique de la coïmage de f vers l'image de f est un isomorphisme.*

On peut imposer des propriétés supplémentaires aux catégories abélienne. Nous allons en énumérer quelques-unes d'entre-elles dans la définition suivante.

Définition 1.1.6. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On dit qu'elle :*

1. ***AB3** si elle est cocomplète.*
2. ***AB4** si elle est AB3 et si tout coproduit d'une famille de monomorphismes est un monomorphisme.*
3. ***AB5** si elle est AB3 et si les colimites filtrantes de suites exactes sont exactes..*

Définition 1.1.7. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et G un objet de $\mathcal{C}$. On dit que G est un **générateur** (ou **séparateur**) si pour toute paire de morphisme $f, g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ et tout morphisme $e : G \to X$ tels que $f \circ e = g \circ e$ alors $f = g$.*

Définition 1.1.8. *Une catégorie abélienne $\mathcal{E}$ est dite de **Grothendieck** si elle est AB5 et si elle admet un générateur.*

Soit k un anneau, alors la catégorie $k-\mathbf{Mod}$ est une catégorie de Grothendieck. En effet, il est clair qu'elle est AB5, et on vérifie facilement que k est un générateur. De manière générale, une catégorie de foncteur, dont la catégorie but est une catégorie de modules sur un anneau, sera une catégorie de Grothendieck.

Proposition 1.1.9. *Dans toute catégorie de Grothendieck il y a assez d'injectifs.*

Démonstration. [Gab62] □

Proposition 1.1.10. *Dans une catégorie de Grothendieck, pour un objet projectif, il y a équivalence entre être petit et de type fini.*

Définition 1.1.11. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories additives. Un foncteur F de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ est dit additif si pour tout objets X, Y de $\mathcal{A}$ le morphisme $F(X) \oplus F(Y) \to F(X \oplus Y)$induit par les inclusions est un isomorphisme.*

Avoir suffisamment d'objets injectifs permet de calculer des foncteurs dérivés qui mesurent le défaut d'exactitude d'un foncteur. De manière plus explicite, par exemple si F est un foncteur exact à gauche mais pas à droite, on définit R^*F tel que pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$, la suite suivante soit exacte :

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \to R^2F(A) \to \dots$$

Lorsque l'on a suffisamment d'injectif on peut prendre pour tout objet X une résolution injective : $0 \to X \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$ où chaque I^j est injectif. En appliquant le foncteur F on obtient un complexe de cochaînes :

$$0 \to F(X) \to F(I^0) \to F(I^1) \to F(I^2) \to \dots$$

$R^iF(X)$ est alors le i-ème groupe de cohomologie de ce complexe. On peut vérifier aisément que $R^iF(X)$ ne dépend pas à isomorphisme canonique près de la résolution injective choisie. Ainsi R^iF est bien défini. Un exemple fondamental est le foncteur dérivé à droite du foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$ que l'on note $\mathrm{Ext}^*(X, -)$.

Lemme 1.1.12. *Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles d'objets d'une catégories abéliennes cocomplète. Soit $\varphi = (\varphi_{i,j})_{i,j} : \bigoplus_{i\in I} A_i \to \bigoplus_{j\in J} B_j$ où les composantes $\varphi_{i,j} : A_i \to B_j$ sont telles que $\forall i \in I, \{j | \varphi_{i,j} \neq 0\}$ est un ensemble fini. Alors l'image de $\varphi_{t,v}$ est un sous-quotient de l'image de φ.*

Démonstration. Si $J = \{*\}$, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[r, "\varphi"] & B \\ A_t \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\varphi_{t,v}"'] & \end{tikzcd}$$

qui nous montre que $\mathrm{Im}\varphi_{t,v}$ est un sous-objet de $\mathrm{Im}\varphi$.

Si maintenant $I = \{*\}$, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_{t,v}"'] & \bigoplus_{j\in J} B_j \arrow[d, two heads] \\
& \mathcal{B}_v
\end{tikzcd}$$

qui nous montre que $\mathrm{Im}\varphi_{t,v}$ est un quotient de $\mathrm{Im}\varphi$.

Traitons maintenant le cas général. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[r, "\varphi"] & \bigoplus_{j\in J} B_j \arrow[d, two heads] \\
A_t \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_{t,v}"] & B_v
\end{tikzcd}$$

Nous voyons que $\mathrm{Im}\varphi_{t,v}$ est un quotient de $\mathrm{Im}\left(A_t \to \bigoplus_i A_i \to \bigoplus_j B_j\right)$ qui est elle-même un sous-objet de $\mathrm{Im}\varphi$ $\square$

1.1.2 Catégories (localement) noethériennes/artiniennes/finies

Il existe des classes d'objets importantes : les objets noethériens, artiniens, les objets de longueur finie et ceux de type fini.

Définition 1.1.13. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Un objet X de $\mathcal{C}$ est dit :*

1. ***noethérien*** *si toute suite croissante de sous-objets de X est stationnaire.*
2. ***artinien*** *si toute suite décroissante de sous-objets de X est stationnaire.*
3. ***de longueur finie*** *si il est noethérien et artinien.*
4. ***de type fini*** *si pour tout ensemble I et tout épimorphisme $\bigoplus_{i\in I} T_i \twoheadrightarrow X$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que le morphisme $\bigoplus_{i\in J} T_i \twoheadrightarrow X$ soit encore un épimorphisme.*

Remarque 1.1.14. *Tout objet de longueur finie admet une filtration de Jordan-Hölder. Il s'agit d'une filtration du type :*

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$$

telle que X_i/X_{i-1} soit un objet simple pour tout i.

Définition 1.1.15. *Une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ essentiellement petite est dite :*

1. ***noethérienne*** *si tout objet de $\mathcal{C}$ est noethérien.*
2. ***artinienne*** *si tout objet de $\mathcal{C}$ est artinien.*
3. ***finie*** *si tout objet de $\mathcal{C}$ est de longueur finie.*

Définition 1.1.16. *Une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ avec un générateur est dite :*

1. ***localement noethérienne*** *si elle possède un ensemble de générateurs noethériens.*
2. ***localement artinienne*** *si elle possède un ensemble de générateurs artiniens.*
3. ***localement finie*** *si elle possède un ensemble de générateurs de longueur finie.*

1.1.3 Catégories quotients

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Définition 1.1.17. *$\mathcal{C}$ est dite **épaisse** si, pour toute suite exacte courte de la catégorie $\mathcal{A}$*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

M est un objet de $\mathcal{C}$ si, et seulement si, M' et M'' sont des objets de $\mathcal{C}$.

Nous pouvons dorénavant définir une nouvelle catégorie qui est le quotient de la catégorie $\mathcal{A}$ par la sous-catégorie épaisse $\mathcal{C}$, que l'on notera $\mathcal{A}/\mathcal{C}$:

1. Les **objets** de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ coïncident avec les objets de $\mathcal{A}$.
2. Si M et N sont deux objets de $\mathcal{A}$, M' et N' sont des sous-objets, respectivement, de M et N, alors les morphismes canonique $i^M_{M'} : M' \hookrightarrow M$ et $p^N_{N/N'} : N \twoheadrightarrow N/N'$ définissent une application linéaire :

   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i^M_{M'}, p^N_{N/N'}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$$

   Quand M' et N' parcourent les sous-objets de M et N tels que M/M' et N' soient des objets de $\mathcal{C}$, les groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$ forment de façon évidente un système inductif. Nous posons par définition :

   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, N) := \mathrm{colim}_{M',N'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$$

3. il reste à définir des **lois de composition bilinéaires** :

   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(N, P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, P)$$

   Soient $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, N)$ et $\bar{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(N, P)$. $\bar{f}$ est l'image d'un morphisme $f : M' \to N/N'$ où M/M' et N' sont des objets de $\mathcal{C}$. De même $\bar{g}$ est l'image d'un morphisme $g : N'' \to P/P'$ où N/N'' et P' sont des objets de $\mathcal{C}$.
   Si M'' désigne l'image réciproque $f^{-1}((N'' \oplus N')/N')$, il est facile de voir que M/M'' est un objet de $\mathcal{C}$. Notons f' le morphisme de M'' dans $(N'' \oplus N')/N'$ qui est induit par f. De même, $g(N'' \cap N')$ est un objet de $\mathcal{C}$. Si P'' désigne la somme $P' \oplus g(N'' \cap N')$, P'' est un objet de $\mathcal{C}$. Soit $g' : N''/(N'' \cap N') \to P/P''$ induit par g.
   Soit h la composée de f', de l'isomorphisme canonique de $(N'' \oplus N')/N'$ sur $N''/(N'' \cap N')$, et de g'. L'image $\bar{h}$ de h dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, P)$ dépend seulement de $\bar{f}$ et de $\bar{g}$ et non de f et g.
   Nous définissons alors les **lois de composition** dans $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ par l'égalité : $\bar{f} \circ \bar{g} = \bar{h}$. Ces lois sont bilinéaires, ce qui fait de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ une catégorie.

On peut définir un foncteur canonique $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ de la façon suivante : $TM = M$ pour tout objet M de $\mathcal{A}$; pour tout morphisme $u : M \to N$ de la catégorie $\mathcal{A}$, Tu est l'image de u dans $\mathrm{colim}_{M',N'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$. Il est clair que $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ est une catégorie additive, et que le foncteur T est un foncteur additif.

Lemme 1.1.18. *Soit $u : M \to N$ un morphisme de la catégorie $\mathcal{A}$. Tu est nul (resp. un monomorphisme, resp. un épimorphisme) si, et seulement si,* $\mathrm{Im}(u) \in \mathcal{C}$ *(resp.* $\ker(u) \in \mathcal{C}$*, resp.* $\mathrm{coker}(u) \in \mathcal{C}$*).*

Démonstration. Si $\mathrm{Im}\ u \in \mathcal{C}$, l'image de u dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N/\mathrm{Im}\ u)$ est nulle. Il en va de même dans $\mathrm{colim}_{M',N'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N$
On en déduit que $Tu = 0$.
Réciproquement, si $Tu = 0$, on peut choisir M' et N' de telle sorte que $M' \to N/N'$ induit par u soit nul. Donc $u(M') \subset N'$, on en déduit $u(M') \in \mathcal{C}$. On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to u(M') \to \mathrm{Im}\ u \to M/(M' + \ker\ u) \to 0$$

On en déduit que $\mathrm{Im}\ u \in \mathcal{C}$

Supposons que Tu soit un monomorphisme. Soit $i : \ker\ u \hookrightarrow M$ le monomorphisme canonique. Comme

$u \circ i = 0$, on a $Tu \circ Ti = 0$. Mais comme Tu est un monomorphisme, on a $Ti = 0$ et donc $\ker u = \mathrm{Im}\ i \in \mathcal{C}$. Réciproquement, supposons $\ker u \in \mathcal{C}$. Soit $\bar{f} : TP \to TM$ un morphisme non nul de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. $\bar{f}$ est l'image d'un morphisme $f : P' \to M/M'$ où P/P' et M' sont dans $\mathcal{C}$. Quitte à remplacer M' par $M' + \ker u$, on peut supposer $\ker u \subset M'$. u induit donc un monomorphisme $u' : M/M' \to N/u(M')$. Comme $\bar{f}$ est non nul, $\mathrm{Im}\ f$ et $\mathrm{Im}\ (u' \circ f)$ ne sont pas dans $\mathcal{C}$. Donc $(Tu) \circ \bar{f} \neq 0$. On conclut que Tu est monomorphisme.

La dernière assertion se montre de manière analogue. □

Lemme 1.1.19. *Soient $u : M \to N$ un morphisme de $\mathcal{A}$, $i : K \to M$ le noyau de u, et $p : N \to C$ le conoyau de u. Le morphisme Tu possède un noyau (resp. un conoyau) ; de plus, Ti (resp. Tp) induit un isomorphisme de TK sur le noyau de Tu (resp. du conoyau de Tu sur TC).*

Démonstration. Nous savons déjà que Ti est un monomorphisme. Soit $\bar{f} : TX \to TM$ tel que $Tu \circ \bar{f} = 0$. On doit prouver l'existence d'un morphisme $\bar{g} : TX \to TK$ tel qu'on ait $Ti \circ \bar{g} = \bar{f}$.
$\bar{f}$ est l'image d'un morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', M/M')$ tel que X/X' et M' soient dans $\mathcal{C}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[d, "r"] \\
0 \arrow[r] & K/(K \cap M') \arrow[r, "i'"] & M/M' \arrow[r, "u'"] & N/u(M')
\end{tikzcd}$$

où p, q, r sont les morphismes canoniques. Comme $Tu \circ \bar{f} = 0$, l'image de X' par $u' \circ f$ est dans $\mathcal{C}$. Posons $X'' = f^{-1}(\mathrm{Im}\ i')$. On a alors X'/X'' et X/X'' sont dans $\mathcal{C}$. On en déduit que la restriction de f à X'' est la composée d'un morphisme $g : X'' \to K/(K \cap M')$ et de i'. Si $\bar{g}$ est l'image de g dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(X, K)$, alors $Ti \circ \bar{g} = \bar{f}$.

La deuxième partie du lemme se montre de manière duale. □

Lemme 1.1.20. *Soit $u : M \to N$ un morphisme de $\mathcal{A}$. Tu est un isomorphisme si, et seulement si, $\ker u$ et $\mathrm{coker}\ u$ appartiennent à $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Si Tu est un isomorphisme, Tu est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. Alors, d'après le lemme 1.1.18, $\ker u$ et $\mathrm{coker}\ u$ appartiennent à $\mathcal{C}$.
Réciproquement, supposons $\ker u$ et $\mathrm{coker}\ u$ dans $\mathcal{C}$. Soient q l'épimorphisme canonique de M sur $\mathrm{coim}\ u$, j le monomorphisme canonique de $\mathrm{im}\ u$ dans N et $\mathfrak{I}$ l'isomorphisme canonique de $\mathrm{coim}\ u$ sur $\mathrm{im}\ u$.
En utilisant les notations du lemme 1.1.19, le morphisme identique de $\mathrm{coim}\ u$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{coim}\ u, M/i(K))$. Cet élément a une image $\bar{q}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(\mathrm{coim}\ u, M)$. Il est clair que $\bar{q}$ est un morphisme inverse de Tq ce qui prouve que Tq est un isomorphisme. De la même manière, Tj est un isomorphisme. On en déduit que $Tu = Tj \circ T\mathfrak{I} \circ Tq$ est un isomorphisme. □

Proposition 1.1.21. *La catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ est abélienne. De plus, le foncteur canonique $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ est exact.*

Démonstration. Soit $\bar{f} : TM \to TN$. Montrons que $\bar{f}$ possède noyau, conoyau, image, coimage, et que le morphisme canonique de la coimage dans l'image est un isomorphisme.
Or $\bar{f}$ est l'image d'un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N/N')$ où M/M' et N' sont des objets de $\mathcal{C}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "\bar{f}"] & TN \arrow[d, "Tq^N_{N/N'}"] \\
TM' \arrow[u, "Ti^M_{M'}"] \arrow[r, "Tf"] & T(N/N')
\end{tikzcd}$$

où $Ti^M_{M'}$ et $Tq^N_{N/N'}$ sont des isomorphismes. Ce diagramme montre que $\bar{f}$ a un noyau, conoyau, image, coimage et que le morphisme canonique de la coimage dans l'image est un isomorphisme, si il en va de même pour Tf. On ne perd donc pas en généralité si l'on suppose que $\bar{f}$ soit de la forme Tf.
Dans ce cas, le lemme 1.1.19 montre que $\bar{f}$ possède noyau, conoyau, image et coimage. Soient q l'épimorphisme

canonique de M dans coim f, j le monomorphisme de im f dans N et $\mathfrak{I}$ l'isomorphisme canonique de coim f dans im f. Le lemme 1.1.19 montre que Tq induit un isomorphisme q_1 de $\mathrm{coim}(Tf)$ sur $T(\mathrm{coim}\ f)$. De même, Tj induit un isomorphisme j_1 de $T(\mathrm{im}\ f)$ sur $\mathrm{im}(Tf)$. Enfin le morphisme canonique de $\mathrm{coim}(Tf)$ dans $\mathrm{im}(Tf)$ est $j_1 \circ T\mathfrak{I} \circ q_1$ qui est un isomorphisme.
La dernière assertion est une conséquence directe du lemme 1.1.19. □

Définition 1.1.22. *On dit que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}$ si le foncteur T admet un foncteur adjoint à droite S. On appelle foncteur de localisation, la composée $S \circ T$.*

1.2 Suites spectrales

Au cours de cette thèse, nous serons amener à calculer des Ext dans une catégorie de foncteurs. Un outil de calcul efficace étant les suites spectrales. Cette section s'appuie sur la présentation de Weibel dont le lecteur pourra trouver tous les détails dans le chapitre 2 de [Wei94].

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. *Une suite spectrale cohomologique (commençant à la page E_a,$a \in \mathbb{Z}$) dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ consiste en la donnée de :*

1. *une famille $\{E_r^{p,q}\}$ d'objets de $\mathcal{A}$ définie pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ et $r \geq a$.*
2. *morphismes $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ qui sont des différentielles dans le sens où $d_r \circ d_r = 0$.*
3. *isomorphismes $E_{r+1}^{p,q} \simeq \ker(d_r^{p,q})/\mathrm{im}(d_r^{p+r,q-r+1})$.*

On remarque que $E_{r+1}^{p,q}$ est un sous-quotient de $E_r^{p,q}$. Le degré total du terme $E_r^{p,q}$ est $n = p + q$ (il s'agit du degré dans le complexe total $(\bigoplus_{p+q=n} E_r^{p,q})_n$)et chaque différentielle $d_r^{p,q}$ augmente le degré total de 1.

Définition 1.2.2. *Une suite spectrale cohomologique est dite bornée si pour chaque n, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nul de degré total n dans E_a^{**}.*

Il est facile de voir que, dans ce cas, pour tout entier p et q il existe un entier r_0 tel que $E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}$ pour chaque $r \geq r_0$. On notera $E_\infty^{p,q}$ cette valeur stable de $E_r^{p,q}$.

Définition 1.2.3. *Une suite spectrale cohomologique bornée converge vers H^* si, pour chaque n, il existe une filtration finie :*

$$0 = F^t H^n \subseteq \cdots \subseteq F^{p+1} H^n \subseteq F^p H^n \subseteq \cdots \subseteq F^s H^n = H^n$$

tel que $E_\infty^{p,q} \simeq F^p H^{p+q}/F^{p+1} H^{p+q}$. On notera alors $E_a^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$.

Remarque 1.2.4. *Il n'y a pas unicité de l'objet vers lequel la suite spectrale converge (même à isomorphisme près). Mais il y a unicité à graduation près. On peut donc détecter l'objet nul.*

1.2.2 Exemples fondamentaux

Proposition 1.2.5 (Suite spectrale de Grothendieck)**.** *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories de Grothendieck et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur adjoint à gauche de $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Si F est exact alors,pour tout $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{B}$, on a une suite spectrale convergente :*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{A}}(X, R^q G(Y)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{B}}(F(X), Y)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 5.8.3 du chapitre 5 de [Wei94]. □

Proposition 1.2.6 (Suite spectrale d'hypercohomologie)**.** *Soit $C_* \to X$ un complexe de chaîne dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est une catégorie de Grothendieck. Alors il existe une suite spectrale convergente :*

$$E_1^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(C_q, X) \Rightarrow \mathbf{Ext}^{p+q}(C_*, X)$$

où **Ext** *désigne un foncteur d'hypercohomologie.*

Démonstration. Voir la section 5.7 du chapitre 5 de [Wei94]. □

Remarque 1.2.7. $\mathbf{Ext}^{p+q}(C_*, X)$ *est un foncteur d'hypercohomologie. Une façon de le calculer est de prendre une résolution de Cartan-Eilenberg du complexe C_* (voir détails dans [Wei94]). Sinon, on prend une résolution injective I^* de X et l'on se retrouve avec un double complexe* $\mathrm{Hom}(C_*, I^*)$. *Dans ce cas,* $\mathbf{Ext}^n(C_*, X)$ *est le nième groupe de cohomologie du complexe total.*

1.3 Catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$

Dans cette section nous allons répertorier quelques résultats connus sur la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ des foncteurs entre une catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}$ et la catégorie des k-modules, où k est un anneau.

1.3.1 Lemmes à la Yoneda

Commençons par rappeler le lemme fondamental de Yoneda :

Lemme 1.3.1 (Lemme de Yoneda)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie essentiellement petite.*
Alors pour tout foncteur $F : \mathcal{A} \to$ **Ens** *et pour tout objet X de $\mathcal{A}$, on a une bijection naturelle en X et en F :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fonc}(\mathcal{A};\mathbf{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -), F) \simeq F(X)$$

où $\mathbf{Fonc}(\mathcal{A};\mathbf{Ens})$ *est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{A}$ vers les ensembles.*

Nous pouvons donner une version linéarisée du lemme de Yoneda :

Lemme 1.3.2 (Lemme de Yoneda linéarisé)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie essentiellement petite.*
Alors, pour tout foncteur $F : \mathcal{A} \to k -$ **Mod** *et pour tout objet X de $\mathcal{A}$, on a un isomorphisme k-linéaire naturel en X et en F :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)], F) \simeq F(X)$$

Remarque 1.3.3. *Pour tout objet X de $\mathcal{A}$, $k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)]$ est un objet projectif de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ et, de plus, la famille $\{k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)]\}_{X\in\mathcal{A}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$.*

Remarque 1.3.4. *Si k est un anneau et si*

$$Z \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{p} X \to 0 \qquad (\text{resp. } 0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z)$$

est une suite exacte de groupes abéliens. Alors la suite de k- modules

$$k[Y \oplus Z] \xrightarrow{\alpha} k[Y] \xrightarrow{k[p]} k[X] \to 0 \qquad (\text{resp. } 0 \to k[X] \xrightarrow{k[u]} k[Y] \xrightarrow{\beta} k[Y \oplus Z])$$

où $\alpha([(y, z)]) = [y + q(z)] - [y]$ (resp. $\beta([y]) = [(y, v(y))] - [(y, 0)]$) *est exacte. Comme elle est naturelle en la suite exacte initiale, cela vaut également quand la suite de départ est une suite exacte de foncteurs vers les groupes abéliens.*

Lemme 1.3.5. *Soient $A, B : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ des foncteurs additifs et k un anneau. L'application*

$$\begin{array}{ccc} k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B)] & \xrightarrow{\gamma_{A,B}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[A],k[B]) \\ f & \longmapsto & k[f] \end{array}$$

est injective et elle est bijective si A est de type fini.

Démonstration. Voir lemme C.1 de l'article [DTV21].
• Soit $A \simeq \mathcal{A}(t,-)$ alors $\gamma_{A,B}$ est bijective par le lemme de Yoneda.
• Soit $A \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathcal{A}(t_i,-)$, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}\left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}(t_i,-),B\right) \simeq \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}\left(\mathcal{A}(t_i,-),B\right) \simeq \prod_{i\in I} B(t_i).$$

Donc :

$$k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B)] \simeq k\left[\prod_{i\in I} B(t_i)\right].$$

Soit x un élément non nul de $k\left[\prod_{i\in I} B(t_i)\right]$, alors $x = \sum_{n=1}^m \lambda_n[\xi_n]$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n \in k\backslash\{0\}$ et $\xi_n \in \prod_{i\in I} B(t_i)$ tels qu'ils soient deux à deux distincts.
Il existe une partie finie $J \subset I$ telle que les projections de ξ_n dans $\prod_{i\in J} B(t_i)$ soient deux à deux distinctes. On définit alors $A_J = \bigoplus_{i\in J}\mathcal{A}(t_i,-) \simeq \mathcal{A}\left(\bigoplus_{i\in J} t_i,-\right)$. L'image de x dans $k[\mathrm{Hom}(A_J,B)]$ induite par l'inclusion $A_J \hookrightarrow A$ est non nulle. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B)] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{A,B}"'] & k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A_J,B)] \arrow[d, "\gamma_{A_J,B}"', "\simeq"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[A],k[B]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[A_J],k[B]) \end{tikzcd}$$

L'application $k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B)] \to k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A_J,B)] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[A_J],k[B])$ est injective. On en déduit, par commutativité du diagramme, que $\gamma_{A,B}$ est injective.

• Soit $A \in \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$ quelconque, alors A est un quotient de $P_I = \bigoplus_{i\in I}\mathcal{A}(t_i,-)$. Donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(P_I,B)$. Or $k[-]$ préserve les monomorphismes, on obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B)] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma_{A,B}"] & k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(P_I,B)] \arrow[d, hook, "\gamma_{P_I,B}"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[A],k[B]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[P_I],k[B]) \end{tikzcd}$$

Par commutativité du diagramme, on en déduit que $\gamma_{A,B}$ est injective.

• Soit A de type fini. Il existe alors une suite exacte :

$$Q \to P \to A \to 0$$

telle que P soit un foncteur représentable. Par la remarque 1.3.4 on en déduit l'existence d'une suite exacte :

$$k[Q \oplus P] \to k[P] \to k[A] \to 0$$

. De plus on a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(P,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(Q,B)$$

Toujours par la remarque 1.3.4, on en déduit l'existence de la suite exacte :

$$0 \to k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B)] \to k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(P,B)] \to k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(Q \oplus P,B)]$$

On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(A,B)] \arrow[r] \arrow[d, hook, "\gamma_{A,B}"'] & k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(P,B)] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{P,B}"', "\simeq"] & k[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})}(Q \oplus P,B)] \arrow[d, hook, "\gamma_{Q\oplus P,B}"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[A],k[B]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[P],k[B]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(k[Q \oplus P],k[B])
\end{tikzcd}$$

Par une classique chasse aux diagrammes on montre que $\gamma_{A,B}$ est surjective, donc bijective. □

1.3.2 Dualité

Dans cette section, nous nous plaçons dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ où $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive et k est un corps.

Définition 1.3.6. *On définit le foncteur $D : \mathcal{F}(\mathcal{A};k)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};k)$ par :*

$$DF = \mathrm{Hom}_k(-,k) \circ F$$

Lemme 1.3.7. *Si F, G sont deux foncteurs à valeur de dimension finie alors :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},k)}(F,DG) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},k)}(G,DF)$$

Corollaire 1.3.8. *Si F et G sont deux foncteurs à valeur de dimension finie, alors :*

$$\mathrm{Ext}^i(F,DG) \simeq \mathrm{Ext}^i(G,DF)$$

Démonstration. D est un foncteur exact donc l'isomorphisme entre les Hom se transmet aux Ext. □

1.3.3 Foncteurs polynomiaux

Dans cette section nous allons présenter les foncteurs polynomiaux qui forment des briques élémentaires des foncteurs de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. Nous nous inspirons du chapitre 2 de l'article [EM54] d'Eilenberg-MacLane. Soit F un objet de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$, soit $X \in \mathcal{A}$. On définit le foncteur de décalage $\tau_X : \mathcal{F}(\mathcal{A};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$:

$$\tau_X F = F(X \oplus -)$$

Nous remarquons dans un premier temps que $\tau_0 \simeq \mathrm{Id}$. De plus il est clair que le morphisme $0 \to X$ induit un monomorphisme naturel $\mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_X$. On peut alors définir le foncteur différence $\delta_X := \mathrm{coker}(\mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_X)$.

Proposition 1.3.9. *les endofoncteurs τ_X et δ_X sont exacts.*

Démonstration. τ_X est exact car il s'agit d'un foncteur de précomposition.
Supposons qu'on ait une suite exacte courte $0 \to F \to G \to H \to 0$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. On a alors le diagramme

commuatatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] \arrow[d] & G(U) \arrow[r] \arrow[d] & H(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau_X(F)(U) \arrow[r] \arrow[d] & \tau_X(G)(U) \arrow[r] \arrow[d] & \tau_X(H)(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \delta_X(F)(U) \arrow[r] \arrow[d] & \delta_X(G)(U) \arrow[r] \arrow[d] & \delta_X(H)(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les trois colonnes et les deux premières lignes sont exactes donc, par le lemme des neuf, la troisième ligne est exacte. Ceci implique l'exactitude de δ_X. ☐

Définition 1.3.10. *Soit $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$. On dit que F est polynomial de degré au plus $d \in \mathbb{N}$ si pour tous $d+1$ objets $X_0, \dots X_d$ de $\mathcal{A}$, $\delta_{X_0} \dots \delta_{X_d} F = 0$.*

Exemple 1.3.11. *Si F est un foncteur constant, il est clair que $\forall U \in \mathcal{A}$, $\tau_0(F) \simeq \tau_X(F)$ et par conséquent $\delta_X(F) = 0$. Donc les foncteurs constants non nuls sont exactement les foncteurs polynomiaux de degré 0.*

Exemple 1.3.12. *Soit F un foncteur additif, alors nous avons $\forall U, V \in \mathcal{A}$ $\tau_V(F)(U) = F(U \oplus V) = F(U) \oplus F(V)$. Ainsi $\delta_V(F)(U) = (F(U) \oplus F(V))/F(U) = F(V)$ qui est un foncteur constant. Donc si on réitère δ on obtient le foncteur nul. Finalement les foncteurs additifs sont des foncteurs polynomiaux de degré au plus 1.*

Soit $\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ la sous catégorie pleine des foncteurs additifs de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$. Si on prend comme catégorie additive $\mathcal{A} = \mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini, où A est un anneau, alors on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.13. *Soient A et k des anneaux. L'évaluation en A induit une équivalence de catégories :*

$$\mathbf{Add}(\mathbf{P}(A), k) \xrightarrow{\simeq} (A^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Z}} k) - \mathbf{Mod}$$

dont un quasi-inverse est donné par la tensorisation au-dessus de A avec un (k, A)-bimodule.

Démonstration. Voir [Eil60] ☐

Ainsi, on constate que si $A \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$ alors il n'y a pas de foncteurs additifs et donc aucun foncteurs polynomiaux non constants.

1.3.4 Foncteurs antipolynomiaux

Il existe une classe de foncteurs, "orthogonaux" aux foncteurs polynomiaux, qui forment des "briques élémentaires" des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$: les foncteurs antipolynomiaux. Ils sont "orthogonaux" dans le sens où les seuls foncteurs polynomiaux et antipolynomiaux sont les foncteurs constants. Nous avons déjà le résultat suivant :

Proposition 1.3.14. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbf{Add}(\mathcal{A}; k)$ est réduite à 0.*
2. *Les seuls foncteurs polynomiaux de $\mathcal{A}$ à $k - \mathbf{Mod}$ sont les foncteurs constants.*

3. *$\mathcal{A}(x, y)$ est fini et $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$ pour tous les objets x et y de $\mathcal{A}$.*
4. *$\mathcal{A}(x, x)$ est fini et $\mathcal{A}(x, x) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$ pour tout objet x de $\mathcal{A}$*

Démonstration. Voir la proposition 1.10 de l'article [DTV21]. $\square$

Définition 1.3.15. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive essentiellement petite et k un corps. On dit qu'elle est k-triviale si, pour toute paire d'objets x, y de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x, y)$ est fini et si $\mathcal{A}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$.*

Définition 1.3.16. *Un idéal d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ est un sous-foncteur de $\mathcal{A}(-,-) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$.*

Exemple 1.3.17. *Si l'on prend $\mathbf{P}(A)$ (la catégorie des A-modules projectifs de type finis où A est un anneau) comme catégorie additive, alors les idéaux de $\mathbf{P}(A)$ s'identifient aux idéaux bilatères de A.*

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$, on définit une nouvelle catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ dont les objets sont les mêmes que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}/\mathcal{I}(x, y) = \mathcal{A}(x, y)/\mathcal{I}(x, y)$. On a alors un foncteur additif cannonique $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ qui est l'identité sur les objets.

Définition 1.3.18. *Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ est dit k-cotrivial si $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est k-triviale.*

On peut dorénavant définir la notion de foncteurs antipolynomiaux :

Définition 1.3.19. *Soit $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$. F est dit antipolynomial s'il existe un idéal k-cotrivial $\mathcal{I}$ tel que F se factorise par $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$.*

Soit $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ constituée des foncteurs à valeurs de dimension finie. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.3.20. *Soit F un foncteur de longueur finie de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; k)$. Il existe un unique, à isomorphisme près, foncteur $B \in \mathcal{F}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}; k)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *F est isomorphe à la composée de la diagonale $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ et de B.*
2. *B est polynomial par rapport à la deuxième variable : i.e. $B(x, -)$ est polynomial pour tout $x \in \mathcal{A}$.*
3. *il existe un idéal k-cotrivial $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tel que B se factorise par le foncteur additif canonique $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I} \times \mathcal{A}$. Autrement dit, B est antipolynomial par rapport à la première variable variable.*

Démonstration. Voir l'article [DTV21] $\square$

Corollaire 1.3.21. *Supposons que k contient toutes les racines de l'unité. Alors un foncteur de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; k)$ est simple si, et seulement si, il est isomorphe au produit tensoriel d'un foncteur simple polynomial et d'un foncteur simple antipolynomial. De plus cette décomposition est unique à isomorphisme près.*

Les foncteurs polynomiaux et antipolynomiaux permettent de construire tous les foncteurs de longueurs finies à valeurs de dimension finie. Les connaître nous permet d'avoir énormément d'informations sur la catégorie de foncteurs. Dans la suite on étudie des catégories de foncteurs où les seuls foncteurs polynomiaux sont les foncteurs constants.

Proposition 1.3.22. *Soit $G \in \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ réduit et de type fini, alors il existe $A \in \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbf{Ab})$ de type fini tel que $k[A] \twoheadrightarrow G$.*

Démonstration. Puisque G est réduit et de type fini, alors il existe (A_i) de type fini tels que :

$$k[\bigoplus_{i=1}^{n} A_i] \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \bar{k}[A_i] \twoheadrightarrow G$$

où $\bar{k}[A_i]$ désigne la partie réduite de $k[A_i]$ et où la première flèche est l'application $[x_1, \ldots, x_n] \mapsto ([x_1], \ldots, [x_n])$. $\square$

Proposition 1.3.23. *Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive k-triviale et $A \in \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbf{Ab})$ de type fini, alors :*

$$k[A] \simeq k^{A^{\#}}$$

où $A^{\#} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in \mathbf{Add}(\mathcal{A}^{op}; \mathbf{Ab})$.

Démonstration. Voir l'article [DTV21]. □

Corollaire 1.3.24. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive k-triviale. Si $G \in \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ est réduit et de type cofini, alors il existe $B \in \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbf{Ab})$ de type cofini tel que $G \hookrightarrow k[B]$.*

1.3.5 Propriétés de finitude de $\mathcal{F}(A, k)$

Soient A et k des anneaux, on désigne par $\mathcal{F}(A; k)$ la catégorie des foncteurs de $\mathbf{P}(A)$ vers $k - \mathbf{Mod}$ où $\mathbf{P}(A)$ désigne la catégorie des A-modules projectifs de type fini. Les foncteurs de $\mathcal{F}(A; k)$ on pour valeurs des représentations des groupes $\mathrm{GL}_n(A)$. C'est pour cette raison que Kuhn nomme pour la première fois, dans son article [Kuh94], ces foncteurs les **représentations génériques**.

Théorème 1.3.25 (Putman,Sam,Snowden ; 2017)**.** *Si A est un anneau fini alors la catégorie $\mathcal{F}(A; k)$ est localement noethérienne.*

Démonstration. Voir théorème C de l'article [PS17] □

Théorème 1.3.26. *Si A est fini et si $A \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$ alors la catégorie $\mathcal{F}(A; k)$ est localement finie.*

Démonstration. Voir proposition 8.26 de l'article [DTV21]. □

Si k est un corps on peut définir une fonction de dimension pour chaque foncteur $F \in \mathcal{F}(A; k)$ à valeurs de dimension finie :

$$d_F : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto \dim_k F(A^n) \end{cases}$$

Conjecture 1.3.27 (Djament, Touzé, Vespa ; 2021)**.** *Si A est un p-anneau fini et si k est un corps de caractéristique différente de p, alors, pour tout foncteur simple F de $\mathcal{F}(A; k)$, il existe une fonction polynomiale $f \in \mathbb{Q}[X]$ telle que $d_F(n) = f(p^n)$.*

Dans cette thèse on s'intéressera particulièrement à la catégorie $\mathcal{F}(A; k)$ où A est un anneau fini non semi-simple (par exemple $A = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$) tel que $A \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$. Le cas semi-simple est connu et fera l'objet du chapitre 2.

Chapitre 2

Cas d'un corps à la source

Dans ce chapitre, nous allons d'abord définir (dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$) des outils (les foncteurs $Q_{A,M}$) inspirés de travaux de G.Powell [Pow98] essentiels pour la suite de ce manuscrit. Il sera nécessaire par la suite de faire quelques calculs cohomologiques sur ces foncteurs dans le cas où $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale. Et dans une seconde partie nous allons donner une nouvelle démonstration (grâce à ces foncteurs) d'un théorème de Kuhn. Ce théorème est un résultat surprenant dans l'étude de la caractéristique croisée. Il repose lourdement sur les travaux Kovács. Il traite le cas des représentations génériques où la source est un corps fini de caractéristique inversible à l'arrivée. La démonstration originale de ce théorème se trouve dans l'article [Kuh15] publié dans *Advances in Mathematics* en 2015.

2.1 Définitions des foncteurs $Q_{A,M}$

On se place à présent dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ où $\mathcal{A}$ est une catégorie additive k-triviale essentiellement petite.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. *Soit A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers* **Ab***. On définit le foncteur :*

$$Q_A := \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{A_0 \subsetneq A} k[A_0] \to k[A]\right)$$

Une transformation naturelle $\eta : A \Rightarrow B$ induit un morphisme $Q_A \to Q_B$ si et seulement si pour tout sous-objets A' de A, $\eta(A') \subsetneq B$. On en déduit que $k[\operatorname{Aut}(A)]$ agit naturellement sur Q_A, ce qui permet de définir le foncteur suivant.

Définition 2.1.2. *Soient A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers* **Ab** *et M un $k[\operatorname{Aut}(A)]$-module. On définit le foncteur :*

$$Q_{A,M} := Q_A \otimes_{k[\operatorname{Aut}(A)]} M$$

Remarque 2.1.3. *Si A est de longueur finie alors l'ensemble de ses sous-foncteurs est fini.*

Remarque 2.1.4. *Ces foncteurs ont été introduit pour la première fois par Powell dans l'article [Pow98] dans le cadre de la caractéristique naturelle (i.e. en tant qu'un objet de $\mathcal{F}(A;k)$ où A est un anneau fini tel que sa caractéristique soit une puissance de la caractéristique de k).*

2.1.2 Calcul de Ext($Q_{B,M}, Q_{A,N}$)

Soient $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive k-triviale et $A, B : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ deux foncteurs additifs tels que A soit de longueur finie n et B de type fini.

Nous avons une suite exacte simpliciale suivante :

$$0 \to \bigoplus_{A_n \subsetneq \cdots \subsetneq A} k[A_n] \to \cdots \to \bigoplus_{A_0 \subsetneq A} k[A_0] \to k[A] \to Q_A \to 0 \tag{2.1}$$

Proposition 2.1.5. *Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale, alors $\mathrm{Ext}^{>0}(k[A], k[B]) = 0$ pour tous $A, B : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ additif de type fini.*

Démonstration. Comme B est à valeurs finies, nous avons $\mathrm{Ext}^i(k[A], k[B]) \simeq \mathrm{Tor}_i(k[B^\sharp], k[A])$ à dualité près. On conclut la preuve en se reportant au paragraphe 5 de l'article [DT21]. □

Lemme 2.1.6. *Soit $\mathcal{C} = \{X | \mathrm{Ext}^{>0}(k[B], X) = 0\}$. Pour tout $n \geq 2$ et pour toute suite exacte :*

$$0 \to X_0 \to \cdots \to X_n \to 0$$

si $X_i \in \mathcal{C}$ pour tout $i < n$, alors $X_n \in \mathcal{C}$.

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur n.
Soit $n = 2$, supposons que nous avons une suite exacte courte

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

avec $X, Y \in \mathcal{C}$. Alors on, pout tout $j > 0$, on a la suite exacte suivante :

$$\mathrm{Ext}^i(k[B], Y) \to \mathrm{Ext}^i(k[B], Z) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(k[B], X)$$

Or $X, Y \in \mathcal{C}$, donc $\mathrm{Ext}^{i+1}(k[B], X) = \mathrm{Ext}^i(k[B], Y) = 0$. On en déduit que $Z \in \mathcal{C}$.

Suposons maintenant que le lemme soit vérifié pour $n - 1$. Soient $X_0, \ldots, X_{n-1} \in \mathcal{C}$ et une suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_{n-1} \arrow[r] & X_n \arrow[r] & 0 \\
& & & & Y \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

où $Y = \mathrm{Im}(X_{n-2} \to X_{n-1})$.
La suite $0 \to X_0 \to \cdots \to X_{n-2} \to Y \to 0$ est exacte. Par hypothèse de récurrence, $Y \in \mathcal{C}$.
On a donc la suite exacte courte suivante :

$$0 \to Y \to X_{n-1} \to X_n \to 0$$

avec $Y, X_{n-1} \in \mathcal{C}$. On en déduit que $X_n \in \mathcal{C}$. □

Notation 2.1.7. *Soit $\mathrm{Surj}_*(B, -) : \mathbf{Add}(\mathcal{A}; \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ens}_*$ tel que $\mathrm{Surj}_*(B, A) = \mathrm{Surj}(B, A) \coprod \{*\}$ et qui envoie $B \twoheadrightarrow A \to A'$ sur la composée si c'est un épimorphisme et sur le point base sinon. On définit $k[\mathrm{Surj}(B, -)]$ la composée de ce foncteur avec :*

$$\mathbf{Ens}_* \longrightarrow k - \mathbf{Mod}$$

$$(E, *_E) \longmapsto k[E]/k[*_E]$$

On voit bien que $\mathrm{Aut}(A)$ agit naturellement sur $k[\mathrm{Surj}(B, A)]$. en effet un automorphisme est entre autre un épimorphisme.

Proposition 2.1.8.

$$\mathrm{Ext}^i(k[B], Q_A) \simeq \begin{cases} k[\mathrm{Surj}(B,A)] & si\ i = 0 \\ 0 & si\ i > 0 \end{cases}$$

Remarque 2.1.9. *$k[\mathrm{Surj}(B,A)]$ est contravariant en B. Si $f : B \to B'$ est un épi alors $k[\mathrm{Surj}(f,A)]$: $k[\mathrm{Surj}(B',A)] \to k[\mathrm{Surj}(B,A)]$ envoie $k[B' \twoheadrightarrow A]$ sur $k[B \xrightarrow{f} B' \twoheadrightarrow A]$ sinon sur 0.*

Démonstration. Soit $i > 0$, pour tout $0 \leq j \leq n$:

$$\mathrm{Ext}^i\left(k[B], \bigoplus_{A_j \subsetneq \cdots \subsetneq A} k[A_j]\right) \simeq \bigoplus_{A_j \subsetneq \cdots \subsetneq A} \mathrm{Ext}^i(k[B], k[A_j]) = 0$$

car la somme directe est finie. Donc, d'après le lemme précédent, $\mathrm{Ext}^i(k[B], Q_A) = 0$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bigoplus_{A_n \subsetneq \cdots \subsetneq A} k[A_n] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{A_0 \subsetneq A} k[A_0] \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & k[A] \arrow[r] & Q_A \arrow[r] & 0 \\ & & & & \mathrm{Im}\ d \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathrm{Im}\ d \to k[A] \to Q_A \to 0$$

On en déduit la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}(k[B], \mathrm{Im}\ d) \to \mathrm{Hom}(k[B], k[A]) \to \mathrm{Hom}(k[B], Q_A) \to \mathrm{Ext}^1(k[B], \mathrm{Im}\ d)$$

Or la suite suivante est exacte :

$$0 \to \bigoplus_{A_n \subsetneq \cdots \subsetneq A} k[A_n] \to \cdots \to \bigoplus_{A_0 \subsetneq A} k[A_0] \to \mathrm{Im}\ d \to 0$$

donc, d'après le lemme précédent ainsi que la proposition 2.1.5, $\mathrm{Ext}^1(k[B], \mathrm{Im}\ d) = 0$.
Finalement, on obtient :

$$\mathrm{Hom}(k[B], Q_A) \simeq \frac{\mathrm{Hom}(k[B], k[A])}{\mathrm{Hom}(k[B], \mathrm{Im}\ d)} \simeq \frac{k[\mathrm{Hom}(B,A)]}{\{[f] | \exists A' \subsetneq A, \mathrm{Im}\ f \subset A'\}} \simeq k[\mathrm{Surj}(B,A)]$$

□

Notation 2.1.10. *On note $l(A)$ la longueur du foncteur A.*

Proposition 2.1.11.

$$\mathrm{Ext}^{>0}(Q_B, Q_A) = 0 \ si\ l(B) \leq l(A)$$

$$\mathrm{Hom}(Q_B, Q_A) \simeq \begin{cases} 0 & si\ l(B) < l(A) \\ k[\mathrm{Iso}(B,A)] & si\ l(B) = l(A) \end{cases}$$

Démonstration. Nous avons la suite spectrale suivante :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i\left(\bigoplus_{B_j \subsetneq \cdots \subsetneq B_0 = B} k[B_j], Q_A\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(Q_B, Q_A)$$

$$\mathrm{Ext}^i\left(\bigoplus_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B} k[B_j],Q_A\right)\simeq\prod_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B}\mathrm{Ext}^i(k[B_j],Q_A)$$

Or, si $i>0$,$\mathrm{Ext}^i(k[B_j],Q_A)=0$. On en déduit que :

$$\mathrm{Ext}^j(Q_B,Q_A)\simeq\prod_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B}\mathrm{Hom}(k[B_j],Q_A)\simeq\prod_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B}k[\mathrm{Surj}(B_j,A)]$$

Or $l(B_j)<l(B)\leq l(A)$, donc $k[\mathrm{Surj}(B_j,A)]=0$. On en déduit donc que $\mathrm{Ext}^{>0}(Q_B,Q_A)=0$.

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B} k[B_j],Q_A\right)\simeq\prod_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B}\mathrm{Hom}(k[B_j],Q_A)\simeq\prod_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B}k[\mathrm{Surj}(B_j,A)]$$

Si $l(B)<l(A)$ alors, pour tout j, $k[\mathrm{Surj}(B_j,A)]=0$. Donc $\mathrm{Hom}(Q_B,Q_A)=0$.
Si $l(B)=l(A)$, alors :

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B} k[B_j],Q_A\right)\simeq\prod_{B_j\subsetneq\cdots\subsetneq B_0=B}k[\mathrm{Surj}(B_j,A)]\simeq k[\mathrm{Surj}(B,A)]\simeq k[\mathrm{Iso}(B,A)]$$

□

Proposition 2.1.12. *Soit M une représentation du groupe* $\mathrm{Aut}(B)$.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B\otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]}M,Q_A)\simeq\begin{cases}0 & si\ l(B)<l(A)\\ \begin{cases}0 & si\ i>0\\ \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M,k[\mathrm{Iso}(B,A)]) & si\ i=0\end{cases} & si\ l(B)=l(A)\end{cases}$$

Démonstration. Nous avons l'adjonction suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(A;k)}\left(Q_B\otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]}M,Q_A\right)\simeq\mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M,\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B,Q_A))$$

$Q_B\otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]}-$ est exact car Q_B est à valeurs libres sur $k[\mathrm{Aut}(B)]$. On en déduit la suite spectrale de Grothendieck de la proposition 1.2.5 :

$$E_2^{i,j}=\mathrm{Ext}^i_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M,\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B,Q_A))\Rightarrow\mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B\otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]}M,Q_A)$$

Si $l(B)<l(A)$, alors $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B,Q_A)=0$. On en déduit que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B\otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]}M,Q_A)=0$.
Si $l(B)=l(A)$, alors $\mathrm{Ext}^{>0}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B,Q_A)=0$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B,Q_A)\simeq k[\mathrm{Iso}(B,A)]$. On en déduit :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B\otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]}M,Q_A)\simeq\begin{cases}0 & \text{si } i>0\\ \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M,k[\mathrm{Iso}(B,A)]) & \text{si } i=0\end{cases}$$

□

Proposition 2.1.13. *Soit N une représentation du groupe* $\mathrm{Aut}(A)$.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B,Q_A\otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]}N)\simeq\begin{cases}0 & si\ l(B)<l(A)\ ou\ si\ l(B)=l(A)\ et\ B\not\simeq A\\ \begin{cases}0 & si\ i>0\\ N & si\ i=0\end{cases} & si\ B\simeq A\end{cases}$$

Démonstration. Nous avons l'adjonction suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(Q_A^\vee, N)) \simeq \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(Q_A^\vee \otimes_{\mathcal{A}} Q_B, N)$$

où $F^\vee(E) = \mathrm{Hom}(F(E), k)$. $\mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(Q_A^\vee, -)$ est exact, on en déduit la suite spectrale de Grothendieck de la proposition 1.2.5 :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(\mathrm{Tor}_j^{\mathbf{P}(\mathcal{A})}(Q_A^\vee, Q_B), N) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N)$$

Mais $\mathrm{Tor}_j^{\mathbf{P}(\mathcal{A})}(Q_A^\vee, Q_B) \simeq \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A)$ car Q_A est à valeurs libres. Si $l(B) < l(A)$ alors $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A) = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) = 0$.
Si $l(B) = l(A)$ alors :

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } j > 0 \\ k[\mathrm{Iso}(B, A)] & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) \simeq \mathrm{Ext}^i_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(k[\mathrm{Iso}(B, A)], N)$$

Au final, on obtient :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } i > 0 \\ \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(k[\mathrm{Aut}(A)], N) \simeq N & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

□

Proposition 2.1.14. *Soient M une représentation du groupe $\mathrm{Aut}(B)$ et N une représentation du groupe $\mathrm{Aut}(A)$.*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B \otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]} M, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) \simeq \begin{cases} 0 & \textit{si } l(B) < l(A) \textit{ ou si } l(B) = l(A) \textit{ et } B \not\simeq A \\ \mathrm{Ext}^i_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M, N) & \textit{si } B = A \end{cases}$$

Démonstration. Nous avons l'adjonction suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B \otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]} M, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) \simeq \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N)$$

Le foncteur $Q_B \otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]} -$ est exact. On en déduit la suite spectrale de Grothendieck de la proposition 1.2.5 :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M, \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B \otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]} M, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N)$$

Si $l(B) < l(A)$ ou si $l(B) = l(A)$ avec $B \not\simeq A$, alors $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) = 0$.
On en déduit que $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B \otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]} M, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) = 0$.
Si $l(B) = l(A)$ alors :

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } j > 0 \\ N & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(A;k)}(Q_B \otimes_{k[\mathrm{Aut}(B)]} M, Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} N) \simeq \mathrm{Ext}^i_{k[\mathrm{Aut}(B)]}(M, N)$. □

2.2 Cas d'un corps fini à la source : un théorème de Kuhn

Dans cette section $\mathbb{F}$ désignera un corps fini et k un corps.

2.2.1 Propriétés du foncteur Q_E

Notation 2.2.1. $P_E = k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E,-)]$

Notation 2.2.2. *Soit le foncteur* $\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}_*}(E,-) : \mathcal{V}(\mathbb{F}) \to \mathbf{Ens}_*$ *tel que* $\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}_*}(E,F) = \mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,F) \coprod \{*\}$ *qui envoie* $E \hookrightarrow F \to F'$ *sur la composée si elle est injective, sur le point base sinon.*
On définit le foncteur $k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,-)]$ *comme la composée de ce foncteur avec :*

$$\mathbf{Ens}_* \to k-\mathbf{Mod}$$
$$(X,*_X) \mapsto k[X]/k[*_X]$$

On voit bien que $\mathrm{Aut}(F)$ *agit naturellement sur* $k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,F)]$ *car un automorphisme est entre autre une injection. Ensuite* $k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,F)]$ *est contravariant en* E. *Soit* $E \xrightarrow{f} E'$, $k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(f,F)]$ *est le morphisme* $k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E',F)] \to k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,F)]$ *qui envoi* $k[E' \hookrightarrow F]$ *sur* $k[E \xrightarrow{f} E' \hookrightarrow F]$ *si la composée est injective, sur* 0 *sinon.*

Définition 2.2.3. *Soit* $E \in \mathcal{V}(\mathbb{F})$. *On définit* Q_E *comme suit :*

$$Q_E := \mathrm{coker}\left(\bigoplus_{0\neq W\subsetneq E} k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E/W,-)] \to k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E,-)]\right)$$

Lemme 2.2.4. *On a un isomorphisme naturel en* $E \in \mathcal{V}(\mathbb{F})$ *:* $Q_E \simeq k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,-)]$.

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{V}(\mathbb{F})$. On note $Q_E(V) = \mathrm{coker}\left(\bigoplus_{0\neq W\subsetneq E} k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E/W,V) \xrightarrow{f_V} k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E,V)]\right)$.
On voit que

$$\mathrm{Im}\, f_V = \prod_{0\neq W\subsetneq E} k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E/W,V)]$$

$$Q_E(V) = k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E,V)]/\left(\prod_{0\neq W\subsetneq E} k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E/W,V)]\right) \simeq k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,V)]$$

□

Lemme 2.2.5. *On a un isomorphisme naturel en l'objet* $F \in \mathcal{F}(\mathbb{F},k)$ *:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_E,F) \simeq \ker\left(F(E) \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E} F(E/W)\right)$$

Démonstration. On note $\eta : F(E) \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E} F(E/W)$. D'après le lemme de Yoneda, on sait que

$$F(E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E,-)],F)$$

Donc,

$$\ker\eta \simeq \ker\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E,-)],F) \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E/W,-)],F)\right)$$

Soit

$$(\eta_W(V))_{0\neq W\subseteq E} \in \bigoplus_{0\neq W\subseteq E} \mathrm{Hom}_k(k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E/W,V)],F(V)).$$
$$(\eta_W(V))_{0\neq W\subseteq E} = 0 \Leftrightarrow \eta_W(V)(\pi_W) = 0$$

où $\pi_W : E \to E/W$ est la projection canonique.

$$\Rightarrow \eta_W(V) \in \mathrm{Hom}_k(k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,V)],F(V)) = \mathrm{Hom}_k(Q_E(V),F(V))$$

Réciproquement, Soit $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_E, F)$

$$\xi(V) \in \bigoplus_{0 \neq W \subseteq E} \mathrm{Hom}_k(k[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E/W, V)], F(V)) \Rightarrow \xi(V) = 0$$
$$\Rightarrow \xi \in \ker \left(F(E) \to \bigoplus_{0 \neq W \subseteq E} F(E/W) \right)$$

Finalement $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_E, F) \simeq \ker \Big(F(E) \to \bigoplus_{0 \neq W \subseteq E} F(E/W) \Big)$ □

Proposition 2.2.6. *Si k contient A (le sous anneau de $\mathbb{C}$ engendré par p^{-1} et $e^{2i\pi/p}$) alors :*

$$DP_E \simeq P_{E^*} \tag{2.2}$$

Démonstration. On a l'isomorphisme de A-algèbres :

$$A[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)] \simeq A^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,U)}$$

En effet, pour tout p-groupe abélien élémentaire G, $A[G]$ est isomorphe, en tant que A-algèbre, à un produit de copies de k donné par :

$$(A - \mathbf{Alg})(A[G], A) \simeq \mathbf{Grp}(G, A^\times) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

On montre le résultat en posant $G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ puisque :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, U)$$

Ainsi, sur A, on obtient $DP_E \simeq P_{E^*}$.
On en déduit le cas général en appliquant le foncteur $- \otimes_A k$. □

Corollaire 2.2.7. *si $p \in k^\times$ et $F \in \mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ est à valeurs k-projectives, alors $\mathrm{Ext}^i(F, P_E) = 0$ pour $i > 0$.*

Démonstration. Le cas où on restreint à A découle de la proposition 2.2.6 et du corollaire 1.3.8.
Dans le cas général, on a un morphisme d'anneaux :

$$\varphi : k \to k[X]/(1 + X + \cdots + X^{p-1}) = L$$

On obtient alors l'adjonction suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathbb{F}, k) \arrow[r, bend left, "\mathrm{Ind}_\varphi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{F}(\mathbb{F}, L) \arrow[l, bend left, "\mathrm{Res}_\varphi"] \end{tikzcd}$$

Avec $\mathrm{Ind}_\varphi(F) = F \otimes_k L$ et $\mathrm{Res}_\varphi G = G$.
On obtient aisément l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(F, G) \otimes_k L \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbb{F},L)}(\mathrm{Ind}_\varphi F, \mathrm{Ind}_\varphi G)$$

En effet, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(F, G) \otimes_k L &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},L)}(F, G \otimes_k L) \text{ car } L \text{ est projectif de type fini} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},L)}(\mathrm{Ind}_\varphi F, \mathrm{Ind}_\varphi G) \text{ par adjonction} \end{aligned}$$

Cet isomorphisme se transmet aux foncteurs dérivés car les foncteurs Ind_φ et Res_φ sont exacts.
On pose $P_E^L = L[\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E,-)]$. On voit bien $\mathrm{Ind}_\varphi P_E = P_E^L$.
D'après ce qu'il précède, on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbb{F},L)}\left(\mathrm{Ind}_\varphi F, P_E^L\right) = 0 \\ \Longrightarrow\ &\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}\left(F, P_E\right) = 0 \end{aligned}$$

En effet, L est un k-espace vectoriel de dimension non nulle donc fidèlement plat. Ceci implique que le foncteur $-\otimes_k L$ est exact. □

Théorème 2.2.8. *Si $p \in k^\times$ alors Q_E est projectif.*

Démonstration. Le fait que Q_E soit projectif est équivalent à ce que $P_E \to Q_E$ soit scindé. Nous allons montrer par récurrence les résultats suivants sur $\dim E$:

1. $P_V \to Q_V$ est scindé si $\dim V \leq \dim E$

2. $P_V \simeq \bigoplus_{W\subseteq V} Q_W \simeq \bigoplus_{W\subseteq V} Q_{V/W}$ si $\dim V \leq \dim E$

Si $\dim E = 0$ la flèche est un isomorphisme. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tout $V, \dim V < \dim E$ et montrons qu'il est encore vrai pour E

Par définition de Q_E, on a la suite exacte suivante :

$$\bigoplus_{0\neq U\subseteq E} P_{E/U} \to P_E \to Q_E \to 0$$

On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \bigoplus_{0\neq U\subseteq E} Q_{E/U} \to P_E \to Q_E \to 0 \tag{2.3}$$

où la flèche $\bigoplus_{0\neq U\subseteq E} Q_{E/U} \to P_E$ est définie comme la composée des flèches :

$$\begin{aligned} &\bigoplus_{0\neq U\subseteq E} Q_{E/U} \to \bigoplus_{0\neq U\subseteq E} P_{E/U} \text{ et} \\ &\bigoplus_{0\neq U\subseteq E} P_{E/U} \to P_E \end{aligned}$$

dont la première flèche est obtenue grâce à des sections des projections $P_{E/U} \twoheadrightarrow Q_{E/U}$ données par l'hypothèse de récurrence.

On vérifie l'exactitude de la suite exacte (2.3) en l'évaluant en un $\mathbb{F}$-espace vectoriel W.

En effet, soit $f : E \to W$ non injectif. On note $0 \neq U = \ker f$, on définit $\tilde{f} : E/U \hookrightarrow W$ injectif telle que $\tilde{f} = f \circ \pi_U$. On va montrer que $[f] \in \mathrm{im}\left(\bigoplus_{0\neq U\subseteq E} Q_{E/U} \to P_E\right)$ par récurrence sur $\mathrm{codim} U$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Q_{E/U}(W) \arrow[rr] \arrow[dr, "s"'] & & P_E(W) \\ & P_{E/U}(W) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

où s est une section donnée par l'hypothèse d'hérédité, π est induit par $E \twoheadrightarrow E/U$.
La flèche horizontale est donnée par

$$[\tilde{f}] \mapsto [f] + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i [g_i]$$

avec $g_i : E \to W$, $U \subsetneq \ker g_i$ et $\lambda_i \in k$.
Par récurrence immédiate sur codim$U$ on montre que $[f] \in \mathrm{im}\left(\bigoplus_{0\neq U'\subseteq E} Q_{E/U'} \to P_E\right)$.
Il nous reste donc à montrer que la suite exacte courte (2.3) soit scindée, pour cela il suffit de montrer que $\mathrm{Ext}^1\left(Q_E, \bigoplus_{0\neq U\subseteq E} Q_{E/U}\right) = 0$. Mais ceci découle directement du corollaire 2.2.7, appliqué à Q_E, et également de l'hypothèse de récurence. □

On obtient le lemme suivant, utile par la suite :

Lemme 2.2.9. *Si $p \in k^\times$ alors $DQ_E \simeq Q_E$*

Démonstration. Nous allons montrer par récurrence sur $\dim E = n$.
Le résultat est clair pour $n = 0$.
Supposons qu'il est vrai pour tout $i < n$.
Pour tout entier n, on dispose d'un endofoncteur η_n de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ associant à un foncteur F son plus grand quotient nul sur les espaces vectoriels de dimension $< n$. Explicitement,

$$\eta_n(F) = \mathrm{coker}\left(P_i \otimes_k F(\mathbb{F}^{n-1}) \to F\right)$$

On constate que pour tout V de dimension $< n$, $\eta_n(P_V) = 0$, donc $\eta_n(Q_V) = 0$ (puisque Q_V est un quotient de P_V).
Maintenant si F est nul sur les espaces vectoriels de dim $< n$, $\eta_n(F) = F$. Cela s'applique en particulier à $F = Q_E$ (pour $\dim E = n$), mais aussi à DQ_E.
Notons $X = \bigoplus_{V\subsetneq E} Q_V$. la démonstration du théorème 2.2.8,ainsi que le lemme 2.2, implique l'existence d'un isomorphisme du type :

$$DQ_E \oplus X \simeq Q_E \oplus X (\simeq P_E \simeq DP_E)$$

On a donc $\eta_n(X) = 0$, mais $\eta_n(Q_E) = Q_E$ et $\eta_n(DQ_E) = DQ_E$. Par conséquent, en appliquant le foncteur η_n à l'isomorphisme précédent, on obtient que Q_E et DQ_E sont isomorphes. □

Pour conclure cette section, nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.2.10.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_E, Q_{E'}) \simeq \begin{cases} k[\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(E)] & \textit{si } E \simeq E' \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord traitons le cas simple $E \simeq E'$.
D'après le lemme 2.2.4, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_E, Q_E) &\simeq \ker\left(Q_E(E) \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E} Q_E(E/U)\right) \\
&\simeq \ker\left(k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,E)] \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E} k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,E/U)]\right) \\
&\simeq \ker\left(k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,E)] \to 0\right) \text{ car } \mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,E/U) = \emptyset \\
&= k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E,E)] = k[\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(E)] \text{ car } E \text{ est de dimension finie.}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que E et E' ne sont pas isomorphes. Dans ce cas, soit $\dim E < \dim E'$, soit $\dim E' <$

$\dim E$. Supposons la première inégalité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_E, Q_{E'}) &\simeq \ker\left(Q_{E'}(E) \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E'} Q_{E'}(E/U)\right) \\
&\simeq \ker\left(k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E', E)] \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E'} k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E', E/U)]\right) \\
&\simeq \ker\left(0 \to \bigoplus_{0\neq W\subseteq E'} k[\mathrm{Inj}_{\mathbb{F}}(E', E/U)]\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On montre le dernier cas en invoquant le lemme 2.2.9. En effet, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_E, Q_{E'}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(DQ_{E'}, DQ_E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q_{E'}, Q_E)$$

□

2.2.2 Théorème de Kuhn

Le théorème suivant est un premier résultat sur les représentations des groupes linéaires en inégale caractéristique. Le lecteur pourra le trouver dans l'article [Kuh15].

Théorème 2.2.11 (Kuhn, 2015)**.** *Si $p \in k^\times$ alors on a une équivalence de catégories entre catégories k-linéaires abéliennes :*

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}, k) \simeq \prod_{n=0}^{\infty} k[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})] - \mathbf{Mod}$$

Notation 2.2.12. *Nous noterons par la suite $\mathcal{Q}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ dont les objets sont exactements les foncteurs Q_E*

Définition 2.2.13. *On définit la catégorie $\mathcal{Q}$-**Mod** comme étant la catégorie des foncteurs k-linéaires contravariants de $\mathcal{Q}$ vers $k-\mathbf{Mod}$*

On peut définir le foncteur suivant $\Theta : \mathcal{F}(\mathbb{F}, k) \to \mathcal{Q}$-**Mod** comme suit : Étant donné un objet $F \in \mathcal{F}(\mathbb{F}, k)$ et un objet $Q \in \mathcal{Q}$, on pose

$$\Theta(F)(Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F},k)}(Q, F)$$

Ce foncteur Θ est toujours adjoint à droite. Le théorème suivant (dont le lecteur pourra trouver une preuve dans le paragrahe 3.6 du livre [Pop73]) nous assure que cette adjonction est en fait une équivalence de catégories. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne R-linéaire et S un ensemble d'objets de $\mathcal{A}$. On définit de manière similaire que précedemment la catégorie $\mathcal{S} - \mathbf{Mod}$ ainsi que le foncteur Θ.

Théorème 2.2.14. *Si S est un ensemble de générateurs projectifs petits, Alors Θ est une équivalence de catégories abéliennes R-linéaires.*

Nous nous trouvons dans les conditions de ce théorème. En effet, il est clair que Q_E est générateur. Ensuite la démonstration du théorème 2.2.8 nous montre que Q_E est de type fini (puisque P_E l'est). On en déduit, par la proposition 1.1.10 que la famille $(Q_E)_{E\in\mathcal{V}(\mathbb{F})}$ est projective génératrice petite.
On en déduit donc que $\mathcal{F}(\mathbb{F}, k) \simeq \mathcal{Q}$-**Mod**. Le théorème de Kuhn en découle en appliquant la proposition 2.2.10.

Remarque 2.2.15. *En adaptant les arguments de la preuve, nous pouvons montrer que ce théorème reste encore vrai même si k est un anneau où p est inversible.*

Chapitre 3

Foncteurs $\bar{\tau}_x$ et $\bar{\delta}_x$

Dans tout ce chapitre on se place dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ où k est un corps et $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive. Nous nous inspirons des constructions de Nagpal que l'on peut retrouver dans le paragraphe 4.2 de son article [Nag19]. Dans son article il considère les "VI-modules" c'est à dire les foncteurs de la catégorie **VI** vers $k-\mathbf{Mod}$ où la catégorie **VI** est celle des $\mathbb{F}_q$- espaces vectoriels de dimension finie munis des applications linéaires injectives. Dans son article il note Σ le foncteur τ . Dans la catégorie des **VI**-modules, on perd l'exactitude du foncteur δ.

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Bref rappel sur les foncteurs τ_x et δ_x

Définition 3.1.1. *Soient $x \in \mathcal{A}$ et $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. On définit $\tau_x F(-) := F(x \oplus -)$.*

On a vu dans la section 1.3.2, que le foncteur τ_x est exact et que le morphisme $0 \to x$ induit un monomorphisme naturel $\tau_0 = \mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_x$.

Définition 3.1.2. *On définit $\delta_x := \mathrm{coker}(\mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_x)$.*

Par le lemme des neuf et l'exactitude du foncteur τ_x on déduit que δ_x est exact.

Proposition 3.1.3. *Soit A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers* **Ab** *et $x \in \mathcal{A}$.*

$$\tau_x k[A] \simeq \bigoplus_{\zeta \in A(x)} k[A]$$

$$\delta_x k[A] \simeq \bigoplus_{\zeta \in A(x)\setminus\{0\}} k[A]$$

Démonstration.

$$\tau_x k[A] = k[A(x \oplus -)] \simeq k[A(x) \oplus A] \simeq \bigoplus_{\zeta \in A(x)} k[A]$$

$\tau_0 k[A]$ s'identifie dans la somme directe au terme d'indice $\zeta = 0$. Donc :

$$\delta_x k[A] = \mathrm{coker}\left(k[A] \hookrightarrow \bigoplus_{\zeta \in A(x)} k[A]\right) \simeq \left(\bigoplus_{\zeta \in A(x)} k[A]\right)/k[A] \simeq \bigoplus_{\zeta \in A(x)\setminus\{0\}} k[A]$$

□

Lemme 3.1.4. *Soient A, B des foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ vers* $\mathbf{Ab}$. *On suppose A de type fini.*
Soit $F := \mathrm{Im}\Gamma$ où $\Gamma : k[A] \to k[B]$ est égale à $\sum_{f:A\to B} \lambda_f[f]$ avec $\lambda_f \in k$ tous nuls sauf un nombre fini de termes. Il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\tau_\alpha F$ admet un sous-quotient isomorphe à $k[\mathrm{Im} f]$ où $\lambda_f \neq 0$.

Démonstration. Soit α tel que $\mathcal{A}(\alpha, -) \twoheadrightarrow A$. Un tel α existe car A est de type fini.
On a $\tau_\alpha F = \mathrm{Im}\,(k[A(-\oplus\alpha)] \to k[B(-\oplus\alpha)])$
Ceci implique que $\tau_\alpha F \simeq \mathrm{Im}(k[A \oplus A(\alpha)] \to k[B \oplus B(\alpha)])$ car A et B sont additifs. On en déduit :

$$\tau_\alpha F \simeq \mathrm{Im}\left(\bigoplus\nolimits_{\xi \in A(\alpha)} k[A] \xrightarrow{\Gamma_{\xi,\zeta}} \bigoplus\nolimits_{\zeta\in B(\alpha)} k[B] \right)$$

où

$$\Gamma_{\xi,\zeta} = \sum_{\substack{f:A\to B\\ f(\alpha)(\xi)=\zeta}} \lambda_f[f]$$

Nous savons par le lemme 1.1.12 que $\mathrm{Im}\Gamma_{\xi,\zeta}$ est un sous-quotient de $\tau_\alpha F$ pour tout $\xi \in A(\alpha)$ et $\zeta \in B(\alpha)$.
Prenons pour ξ l'image de id_α par $\mathcal{A}(\alpha,\alpha) \to A(\alpha)$
La composée suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\mathrm{ev}_\alpha} \mathrm{Hom}(A(\alpha),B(\alpha)) \longrightarrow B(\alpha) & \simeq & \mathrm{Hom}(\mathcal{A}(\alpha,-),B) \\ \\ u \longmapsto u(\xi) & & \end{array}$$

est un monomorphisme car $\mathcal{A}(\alpha,-) \twoheadrightarrow A$.
Soient $f : A \to B$ tel que $\lambda_f \neq 0$ et $\zeta = f(\alpha)(\xi)$, alors $\Gamma_{\xi,\zeta} = \lambda_f[f]$ et $\mathrm{Im}\Gamma_{\xi,\zeta} = k[\mathrm{Im} f]$ car $k[-]$ préserve les épimorphismes et les monomorphismes, donc les images. □

3.1.2 Foncteurs $\bar{\tau}_x$ et $\bar{\delta}_x$

Soient $x, y \in \mathcal{A}$ et $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. Il existe une action du groupe $\mathrm{Hom}(x,y)$ sur $\tau_x F(y) = F(x \oplus y)$ définie par les matrices triangulaires supérieures par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.1.5. *Soient $x, y \in \mathcal{A}$ et $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$. On définit $\bar{\tau}_x : \mathcal{F}(\mathcal{A};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ par :*

$$\bar{\tau}_x F(y) = F(x \oplus y)_{\mathrm{Hom}(x,y)}$$

Il s'agit des coinvariants de l'action de $\mathrm{Hom}(x,y)$ *sur* $F(x \oplus y)$.

$\bar{\tau}_x F$ est bien un foncteur quotient de $\tau_x F$. En effet, si on prend $f : y \to y'$ un morphisme de $\mathcal{A}$, alors pour tout $\varphi : x \to y$

$$F\left(\begin{pmatrix} 1_x & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_x & 0 \\ \varphi & 1_y \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} 1_x & 0 \\ f\circ\varphi & f \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} 1_x & 0 \\ f\circ\varphi & 1_{y'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_x & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right)$$

Donc si on note $\alpha : \mathrm{Hom}(x,y) \to \mathrm{Hom}(x,y')$, $\alpha(\varphi) = f\circ\varphi$; on constate que $\tau_x F(f)(\varphi.(a_x,a_y)) = \alpha(\varphi).\tau_x F(f)((a_x,a_y))$.
On en déduit que $\tau_x F(f)$ induit un morphisme $\bar{\tau}_x F(f)$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \tau_x F(y) \arrow[r, "\tau_x F(f)"] \arrow[d, two heads] & \tau_x F(y') \arrow[d, two heads] \\ \bar{\tau}_x F(y) \arrow[r, dotted, "\bar{\tau}_x F(f)"] & \bar{\tau}_x F(y') \end{tikzcd}$$

Remarque 3.1.6. *$\bar{\tau}_x$ n'est pas fonctoriel en x. En effet un morphisme $x \to x'$ n'induit pas forcément un morphisme $\bar{\tau}_x \to \bar{\tau}_{x'}$. C'est toutefois le cas si $x \to x'$ est un monomorphisme scindé. On en déduit que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(x)$ agit naturellement sur $\bar{\tau}_x$.*

Remarque 3.1.7. *Le foncteur $\bar{\tau}_x$ est exact à droite car il s'agit du passage aux coinvariants d'une action de groupes.*

Proposition 3.1.8. *Soit $x \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est k-triviale alors $\bar{\tau}_x$ est exact.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie additive k-triviale. Alors on a un isomorphisme :

$$\bar{\tau}_x F(y) = F(x \oplus y)_{\mathrm{Hom}(x,y)} \simeq F(x \oplus y)^{\mathrm{Hom}(x,y)}$$

Autrement dit les coinvariants et les invariants sont isomorphes. En effet $\mathrm{Hom}(x, y)$ est un groupe fini tel que $\mathrm{Hom}(x, y) \otimes_{\mathbb{Z}} k = 0$. Or le passage aux invariants est exact à gauche. Donc $\bar{\tau}_x$ est exact. □

Remarque 3.1.9. *Cet isomorphisme n'est pas vrai si la catégorie n'est pas k-triviale. Dans ce cas, le foncteur $\bar{\tau}_x$ n'est plus exact.*

Proposition 3.1.10. *Soit $x \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale, alors la composée suivante est un monomorphisme :*

$$\mathrm{Id} \hookrightarrow \tau_x \twoheadrightarrow \bar{\tau}_x$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathcal{A}$ et $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$. Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & F(x \oplus y)^{\mathrm{Hom}(y,x)} \arrow[d, hook] \arrow[dr, bend left, "\simeq"] & \\
F(y) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, hook] & F(x \oplus y) \arrow[r] & \bar{\tau}_x F(y)
\end{tikzcd}$$

La flèche $F(y) \hookrightarrow F(x \oplus y)$ induite par $y \hookrightarrow x \oplus y$ est invariante par l'action de $\mathrm{Hom}(x, y)$ ce qui implique l'existence de la flèche pointillée. Par commutativité du diagramme on conclut que la flèche $F(y) \to \bar{\tau}_x F(y)$ est un monomorphisme. □

Définition 3.1.11. *Soit $x \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale, on définit :*

$$\bar{\delta}_x := \mathrm{coker}(\mathrm{Id} \hookrightarrow \bar{\tau}_x)$$

Proposition 3.1.12. *Soit $x \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale, alors $\bar{\delta}_x$ est exact.*

Démonstration. Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale alors on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathrm{Id} \to \bar{\tau}_x \to \bar{\delta}_x \to 0$$

Par exactitude du foncteur $\bar{\tau}_x$ et le lemme des neuf, on en déduit l'exactitude du foncteur $\bar{\delta}_x$. □

Remarque 3.1.13. *Dans la catégorie des VI-modules, étudiée par Nagpal dans [Nag19], le foncteur δ_x n'est pas exact. Pareillement, même si l'on se trouve en caractéristique croisée, le foncteur $\bar{\delta}_x$ n'est toujours pas exact.*

3.2 Quelques exemples de calcul

Dans toute cette section on suppose que $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale.

3.2.1 Calculs de $\bar{\tau}_x k[A]$ et $\bar{\delta}_x k[A]$

Proposition 3.2.1. *Soit A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers* **Ab**. *Alors on a les isomorphismes naturels (en A) suivants :*

$$\bar{\tau}_x k[A] \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A/A_\xi]$$

$$\bar{\delta}_x k[A] \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)\setminus\{0\}} k[A/A_\xi]$$

où :

$$A_\xi(y) = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(x,y) & \to & \mathbf{Ab} \\ f & \mapsto & A(f).\xi \end{pmatrix}$$

Soit $\eta : A \Rightarrow B$

$$\bar{\tau}_x k[\eta] : \bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A/A_\xi] \to \bigoplus_{\zeta \in B(x)} k[B/B_\zeta]$$

$$\bar{\delta}_x k[\eta] : \bigoplus_{\xi \in A(x)\setminus\{0\}} k[A/A_\xi] \to \bigoplus_{\zeta \in B(x)\setminus\{0\}} k[B/B_\zeta]$$

où le facteur indicé par ξ s'envoit sur le facteur indicé par $\eta_x(\xi)$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathcal{A}$. $\tau_x k[A](y) \simeq k[A(x) \oplus A(y)]$. Soit $f \in \mathcal{A}(x,y)$, alors f agit sur $\tau_x k[A](y)$ par $f.[(a,b)] = [(a, A(f)a + b)]$. Les coinvariants sont l'ensemble des orbites donc :

$$\bar{\tau}_x k[A] \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A/A_\xi]$$

On vérifie maintenant la naturalité en A. Soit une transformation naturelle $\eta : A \Rightarrow B$. η induit une transformation naturelle $A_\xi \Rightarrow B_\zeta$ où $\zeta = \eta_x(\xi)$. Donc η induit une transformation naturelle $\eta_* : A/A_\xi \Rightarrow B/B_\zeta$.
On a alors le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\tau_x k[A] \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A] \arrow[r, "\tau_x k[\eta]"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \tau_x k[B] \simeq \bigoplus_{\zeta \in B(x)} k[B] \arrow[d] \\
\bar{\tau}_x k[A] \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A/A_\xi] \arrow[r, "\bar{\tau}_x k[\eta_*]"] & \bar{\tau}_x k[B] \simeq \bigoplus_{\zeta \in B(x)} k[B/B_\zeta]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par le passage au quotient. Ce diagramme est commutatif puisqu'il l'est composante par composante, on en déduit la naturalité.
La preuve pour $\bar{\delta}_x$ se déduit de $\bar{\tau}_x$. □

3.2.2 Calcul de $\bar{\delta}_x Q_A$

Proposition 3.2.2. *Soient $x \in \mathcal{A}$ et A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers* **Ab**.

$$\bar{\delta}_x Q_A \simeq \bigoplus_{\xi \in A(x)\setminus\{0\}} Q_{A/A_\xi}$$

Démonstration. $\bar{\delta}_x$, en tant que conoyau, commute avec les conoyaux et les sommes directes. On obtient alors :

$$\bar{\delta}_x Q_A = \mathrm{coker}\left(\bigoplus_{B \subsetneq A} \bar{\delta}_x k[B] \to \bar{\delta}_x k[A]\right)$$

$$\bar{\delta}_x Q_A \simeq \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{B\subsetneq A}\bigoplus_{\zeta\in B(x)\backslash\{0\}} k[B/B_\zeta] \to \bigoplus_{\xi\in A(x)\backslash\{0\}} k[A/A_\xi]\right)$$

$$\bar{\delta}_x Q_A \simeq \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{\xi\in A(x)\backslash\{0\}}\bigoplus_{A_\xi\subset B\subsetneq A} k[B/A_\xi] \to \bigoplus_{\xi\in A(x)\backslash\{0\}} k[A/A_\xi]\right)$$

car le morphisme envoie le facteur indicé par un $B \subsetneq A$ et un $\zeta \in B(x)\backslash\{0\}$ sur le facteur indicé par par ζ vu comme élément de $(B(x)\backslash\{0\}) \subset (A(x)\backslash\{0\})$ et il est induit par le monomorphisme $B/B_\zeta \hookrightarrow A/A_\zeta$.

$$\bar{\delta}_x Q_A \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)\backslash\{0\}} \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{A_\xi\subset B\subsetneq A} k[B/A_\xi] \to k[A/A_\xi]\right) \simeq \bigoplus_{\xi\in A(x)\backslash\{0\}} Q_{A/A_\xi}$$

□

3.2.3 Calcul de $\bar{\delta}_x Q_{A,M}$

Définition 3.2.3. *Soient A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers* **Ab** *et M une représentation k-linéaire de* $\operatorname{Aut}(A)$. *On définit le foncteur $Q_{A,M}$:*

$$Q_{A,M} = Q_A \otimes_{k[\operatorname{Aut}(A)]} M$$

Proposition 3.2.4. *Soient $x \in \mathcal{A}$, $A : \mathcal{A} \to$* **Ab** *additif et M une représentation k-linéaire de* $\operatorname{Aut}(A)$.

$$\bar{\delta}_x Q_{A,M} \simeq \bigoplus_{\bar{\xi}\in(A(x)\backslash\{0\})/\operatorname{Aut}(A)} \left(Q_{A/A_{\bar{\xi}}} \otimes_{k[\mathrm{St}_\xi]} M \downarrow^{\operatorname{Aut}(A)}_{\mathrm{St}_\xi}\right)$$

où $\mathrm{St}_\xi = \{\varphi \in \operatorname{Aut}(A) | \varphi(\xi) = \xi\}$.

Démonstration. $\bar{\delta}_x$ commute avec les colimites, on a donc :

$$\bar{\delta}_x Q_{A,M} = \bar{\delta}_x(Q_A) \otimes_{k[\operatorname{Aut}(A)]} M$$

$$\bar{\delta}_x Q_{A,M} \simeq \left(\bigoplus_{\xi\in A(x)\backslash\{0\}} Q_{A/A_\xi}\right) \otimes_{k[\operatorname{Aut}(A)]} M$$

On remarque facilement que si $\varphi \in \operatorname{Aut}(A)$ alors φ induit un isomorphisme $A_\xi \simeq A_{\varphi(\xi)}$.

$$\bar{\delta}_x Q_{A,M} \simeq \bigoplus_{\bar{\xi}\in(A(x)\backslash\{0\})/\operatorname{Aut}(A)} Q_{A/A_{\bar{\xi}}} \uparrow^{\operatorname{Aut}(A)}_{\mathrm{St}_\xi} \otimes_{k[\operatorname{Aut}(A)]} M$$

$$\bar{\delta}_x Q_{A,M} \simeq \bigoplus_{\bar{\xi}\in(A(x)\backslash\{0\})/\operatorname{Aut}(A)} Q_{A/A_{\bar{\xi}}} \otimes_{k[\mathrm{St}_\xi]} M \downarrow^{\operatorname{Aut}(A)}_{\mathrm{St}_\xi}$$

□

Chapitre 4

Résultats principaux

Nous allons définir une nouvelle stratification de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ où k est un corps et $\mathcal{A}$ est une petite catégorie additive k-triviale. Cette stratification $(\mathcal{F}_d)_{d\in\mathbb{N}}$ est constituée de sous-catégories bilocalisantes de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ telle que tout foncteur de type fini appartienne à $\mathcal{F}_d$ pour un certain entier d. Une fois cela fait, on énoncera et démontrera une équivalence de catégories entre les quotients $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$ et les représentations des groupes d'automorphisme des foncteurs additifs de longueur d à valeurs dans les groupes abéliens. Enfin on utilisera ce résultat pour démontrer une conjecture sur la fonction de dimension des foncteurs de type fini de $\mathcal{F}(A,k)$ où A est un p-anneau fini avec $p\in k^{\times}$.

4.1 Stratification fondamentale de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$

Définition 4.1.1. *Soit S une classe d'objets d'une catégorie abélienne. On définit $<S>$ comme la sous-catégorie localisante engendrée par S. Il s'agit de la plus petite sous-catégorie localisante contenant S.*

Soit $d\in\mathbb{N}$. On définit trois sous-catégories pleines de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$:

$$\mathcal{F}_d^1 :=< k[A] \mid A\in \mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab}); l(A)\leq d >$$

$$\mathcal{F}_d^2 := \left\{F\in\mathcal{F}(\mathcal{A};k) \mid \forall (a_0,\dots,a_d,x)\in\mathcal{A}^{d+2}, \bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}\tau_x F=0\right\}$$

$$\mathcal{F}_d^3 := \{F\in\mathcal{F}(\mathcal{A};k) \mid \forall G \text{ sous-foncteur de } F \text{ de type fini },$$
$$G=\mathrm{Im}\left(k[A]\xrightarrow{\sum_{f:A\to B}\lambda_f[f]} k[B]\right), A \text{ et } B \text{ de type fini }, l(\mathrm{Im} f)>d\Rightarrow \lambda_f=0\right\}$$

Lemme 4.1.2. *Soit $A\in\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})$, alors :*

$$\left(\forall a_0\dots a_d\in\mathcal{A}, \bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}k[A]=0\right)\Leftrightarrow l(A)\leq d$$

Démonstration. Démontrons ce résultat par récurrence sur d.
si $d=0$ alors on a, d'après la proposition 3.2.1 :

$$\bar{\delta}_a k[A]=\bigoplus_{\xi\in A(a)\setminus\{0\}} k[A/A_\xi]$$

donc $\forall a, \bar{\delta}_a k[A]=0\Leftrightarrow \forall a, A(a)=0\Leftrightarrow A=0$

Supposons que l'hypothèse de récurrence soit vraie pour d. Comme $\bar{\delta}_{a_{d+1}}$ commute aux colimites, on a :

$$\bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}\bar{\delta}_{a_{d+1}}k[A] = \bigoplus_{\xi\in A(a_{d+1})\backslash\{0\}} \bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}k[A/A_\xi]$$

$l(A)\leq d+1 \Leftrightarrow \forall\xi\neq 0, l(A/A_\xi)\leq d \Leftrightarrow \forall a_0\dots a_{d+1}, \bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}\bar{\delta}_{a_{d+1}}k[A]=0.$ □

Proposition 4.1.3. $\forall d\in\mathbb{N}, \mathcal{F}_d^1=\mathcal{F}_d^2=\mathcal{F}_d^3$.

Démonstration. $\bullet\mathcal{F}_d^1\subset\mathcal{F}_d^2$
Soit A un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers **Ab** de longueur inférieure ou égale à d. Alors, puisque $\bar{\delta}$ commute aux colimites, et d'après le lemme 4.1.2, on a :

$$\bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}\tau_x k[A] = \bigoplus_{\xi\in A(x)} \bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}k[A]=0$$

Finalement $k[A]\in\mathcal{F}_d^2$. Mais $\bar{\delta}_{a_i}$ et τ_x sont exacts donc $\mathcal{F}_d^2$ est stable par extension. De plus ils commutent aux colimites, on en déduit que $\mathcal{F}_d^2$ est localisante. Or $\mathcal{F}_d^1$ est la plus petite sous-catégorie localisante contenant les foncteurs $k[A]$ tels que la longueur de A soit inférieure à ou égale à d, donc on obtient $\mathcal{F}_d^1\subset\mathcal{F}_d^2$.

$\bullet\mathcal{F}_d^2\subset\mathcal{F}_d^3$
Soit $F\in\mathcal{F}_d^2$, soit G un sous-foncteur de F de type fini. Par les propositions 1.3.22 et 1.3.24, on en déduit qu'il existe A de type fini et B de type cofini tels que :

$$k[A]\twoheadrightarrow G\hookrightarrow k[B]$$

On en déduit, par le lemme 1.3.5, que :

$$G=\mathrm{Im}\left(k[A]\xrightarrow{\sum_{f:A\to B}\lambda_f[f]}k[B]\right)$$

D'après le lemme 3.1.4, si $\lambda_f\neq 0$ alors il existe un $x\in\mathcal{A}$ tel que $k[\mathrm{Im}\ f]$ sous un sous-quotient de $\tau_x G$. De plus, pour tout $a_0,\dots a_d$ dans $\mathcal{A}$, par exactitude de $\bar{\delta}$ et τ, on a $\bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}\tau_x F=0\Rightarrow\bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}\tau_x G=0$. Donc $\bar{\delta}_{a_0}\dots\bar{\delta}_{a_d}k[\mathrm{Im}\ f]=0$. On en déduit, par le lemme 4.1.2, que la longueur de $\mathrm{Im}\ f$ est inférieure ou égale à d. Donc $\mathcal{F}_d^2\subset\mathcal{F}_d^3$

$\bullet\mathcal{F}_d^3\subset\mathcal{F}_d^1$
Soit $F\in\mathcal{F}_d^3$, Soit G un sous-foncteur de type fini de F. Alors :

$$G=\mathrm{Im}\left(k[A]\xrightarrow{\sum_{f:A\to B}\lambda_f[f]}k[B]\right)\subset\sum_{\substack{T\subset B\\ l(T)\leq d}}k[T]$$

Donc $G\in\mathcal{F}_d^1$, ce qui implique que $F\in\mathcal{F}_d^1$ et donc $\mathcal{F}_d^3\subset\mathcal{F}_d^1$. □

Notation 4.1.4. *Par la suite on notera cette sous-catégorie localisante $\mathcal{F}_d$. Par convention $\mathcal{F}_{-1}=0$.*

Remarque 4.1.5. *Il est aisé de constater que les sous-catégories localisantes $\mathcal{F}_d$ forment une filtration. De plus, par la caractérisation $\mathcal{F}_d^2$, vu que $\bar{\delta}_a$ et τ_x commutent aux limites, que $\mathcal{F}_d$ est bilocalisante.*

Remarque 4.1.6. *Si $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ est localement finie alors* $\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})$ *est également localement finie. On en déduit que, pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{A};k)$ de type fini, il existe un entier d tel que $F\in\mathcal{F}_d$. En effet il existe (A_i) additifs de type fini (donc de longueur finie car* $\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})$ *est localement finie) tels que :*

$$\bigoplus_{i=0}^{n}k[A_i]\twoheadrightarrow F$$

Lemme 4.1.7. *Pour tout objet $x \in \mathcal{A}$, le foncteur $\bar{\tau}_x$ induit le foncteur identité sur le quotient $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$ pour tout entier d.*

Démonstration. Soient $x \in \mathcal{A}$ $A : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur additif de longueur au plus d, alors on obtient :

$$\bar{\delta}_x k[A] = \bigoplus_{\xi \in A\{0\}} k[A/A_\xi]$$

Or si A est de longueur au plus d, alors A/A_ξ est de longueur au plus $d-1$. De plus $\bar{\delta}_x$ est exact et commute aux colimites. On en déduit que $\bar{\delta}_x$ envoie $\mathcal{F}_d$ sur $\mathcal{F}_{d-1}$. Donc $\bar{\delta}_x$ induit le foncteur nul sur le quotient $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$. De plus, dans $\mathcal{F}_d$, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathrm{Id} \to \bar{\tau}_x \to \bar{\delta}_x \to 0$$

Or, d'après la proposition 1.1.21, on sait que le foncteur de passage au quotient $T : \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$ est exact. On en déduit finalement, en appliquant le foncteur T, que dans la catégorie $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$ on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathrm{Id} \to \bar{\tau}_x \to \bar{\delta}_x = 0 \to 0$$

Ainsi, le foncteur $\bar{\tau}_x$ est isomorphe, dans la catégorie $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$, au foncteur identité. □

4.2 Théorème de structure

Le but de cette section est de montrer l'équivalence de catégories suivante, valable pour tout entier d :

Théorème 4.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie k-triviale telle que $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ soit localement finie. Soit $d \in \mathbb{N}$, la composée de :*

$$\prod_{\substack{A \in \mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})/\simeq \\ l(A)=d}} k[\mathrm{Aut}(A)] - \mathbf{Mod} \to \mathcal{F}_d$$

$$(M_A)_A \mapsto \bigoplus_{\substack{A \in \mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})/\simeq \\ l(A)=d}} Q_{A,M_A}$$

et du foncteur canonique de passage au quotient $T : \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$ est une équivalence de catégorie.

Notation 4.2.2. *Notons φ_d cette composée.*

Dans un premier temps montrons que φ_d est essentiellement surjective pour tout entier d.
Soit $F \in \mathcal{F}_d$, réduit de type fini. Alors il existe des foncteurs additifs $(A_i)_{i=1\ldots n}$ et $(B_j)_{j=1\ldots m}$ de type fini tels que :

$$F = \mathrm{Im}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} k[A_i] \xrightarrow{g=(g_{i,j})} \bigoplus_{j=1}^{m} k[B_j]\right)$$

avec $g_{i,j} = \sum_{f_i^j : A_i \to B_j} \lambda_{f_i^j}[f_i^j]$ où $\lambda_{f_i^j} = 0$ si $l(\mathrm{Im}\ f_i^j) > d$. Vu que l'on va appliquer le foncteur canonique T à F, on peut supposer que $l(\mathrm{Im}\ f_i^j) \neq d \Rightarrow \lambda_{f_i^j} = 0$

• Si $l(B_j) = l(A_i) = d$ pour tout i, j alors $g_{i,j} = 0$ dès lors que A_i n'est pas isomorphe à B_j. On suppose alors que $A_i \simeq B_j$. En notant a_t et b_t le nombre de classes d'équivalences de A_t et B_t, nous avons :

$$F = \bigoplus_t \mathrm{Im}\left(k[A_t]^{\oplus a_t} \to k[A_t]^{\oplus b_t}\right)$$

On en déduit (puisque $T(k[A]) \simeq TQ_A$ et $M \mapsto Q_{A,M}$ est exact) que :

$$TF \simeq \bigoplus_t TQ_{A_t,M_t}$$

avec

$$M_t = \mathrm{Im}\ \left(k[\mathrm{Aut}(A_t)]^{\oplus a_t} \xrightarrow{(h_{i,j})} k[\mathrm{Aut}(A_t)]^{\oplus b_t}\right)$$

avec $h_{i,j} \in k[\mathrm{Aut}(A_t)]$

Notation 4.2.3. *Soit $F = Im\ (k[A] \xrightarrow{g} k[B])$, alors $\bar{\tau}_x F = Im\ \left(\bigoplus_{\xi \in A(x)} k[A/A_\xi] \xrightarrow{\bar{\tau}_x g} \bigoplus_{\zeta \in B(x)} k[B/B_\zeta]\right)$. On note g_ξ la composante de $\bar{\tau}_x g$ correspondant aux facteurs $\xi \in A(x)$ et $\zeta = 0$. On note également $\pi_{\alpha,\xi}$: $k[A/A_\alpha] \twoheadrightarrow k[A/A_\xi]$, le morphisme induit par $A_\xi \subset A_\alpha$.*

• Si $l(B_j) = d$ pour tout j sans hypothèse sur les A_i. Par le lemme 4.1.7, on sait que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\bar{\tau}_x$ induit l'identité sur $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$.
$\bar{\tau}_x$ étant exact, il commute avec l'image. Donc :

$$F \simeq \bar{\tau}_x F = \mathrm{Im}\ \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\xi \in A_i(x)} k[A_i/(A_i)_\xi] \xrightarrow{\bar{\tau}_x g} \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{\zeta \in B_j(x)} k[B_j/(B_j)_\zeta]\right)$$

dans la catégorie $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$. Pour tout $\zeta \neq 0$ $l(B_j/(B_j)_\zeta) < d$, donc $k[B_j/(B_j)_\zeta]$ devient nul dans le quotient $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$. Il ne reste donc le terme correspondant à $\zeta = 0$.

Lemme 4.2.4. *Soit $g : k[A] \to k[B]$. Il existe un objet $x \in \mathcal{A}$ tel que :*

$$g_\xi = \sum_{\substack{\alpha \in A(x) \\ A_\xi \subset A_\alpha \\ l(A/A_\alpha)=d}} g_\alpha \circ \pi_{\alpha,\xi}$$

Démonstration. Comme A est fini dans $\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})$, il existe un $x \in \mathcal{A}$ tel que tout sous-foncteur de A (il n'y a qu'un nombre fini) est un quotient de $\mathcal{A}(x,-)$. Autrement dit, tout $N \subset A$ est égal à A_α pour un certain $\alpha \in A(x)$ (il n'est pas unique en général). Choisissons un $\alpha(N) \in A(x)$ tel que $N = A_{\alpha(N)}$.
Pour $\xi \in A(x)$, on note $g_\xi : k[A/A_\xi] \to k[B]$, la composante de $\bar{\tau}_x g$ correspond à $\xi \in A(x)$ et à $\zeta = 0$. Par la proposition 3.2.1, on a :

$$g_\xi = \sum_{\substack{f:A\to B \\ f_*(\xi)=0}} \lambda_f[\bar{f}^\xi] = \sum_{\substack{f:A\to B \\ A_\xi \subset \ker\ f}} \lambda_f[\bar{f}^\xi]$$

où $\bar{f}^\xi : A/A_\xi \to B$ est le morphisme induit par $f : A \to B$ lorsque $f_*(\xi) = 0$.
Comme $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tel que $\lambda_f \neq 0$ vérfie $l(\mathrm{Im}\ f) = d$, on a :

$$g_\xi = \sum_{\substack{A_\xi \subset N \subset A \\ l(A/N)=d}} \sum_{\substack{f:A\to B \\ \ker\ f=N}} \lambda_f[\bar{f}^\xi] = \sum_{\substack{A_\xi \subset N \subset A \\ l(A/N)=d}} \sum_{\substack{f:A\to B \\ N\subset \ker\ f}} \lambda_f[\bar{f}^\xi]$$

Or $[\bar{f}^\xi] = [\bar{f}^{\alpha(N)}] \circ \pi_{\alpha(N),\xi}$ si $N \subset \ker\ f$, où $\pi_{\alpha(N),\xi} : k[A/A_\xi] \twoheadrightarrow k[A/A_{\alpha(N)}]$. On a alors :

$$g_\xi = \sum_{\substack{\alpha \in A(x) \\ A_\xi \subset A_\alpha \\ l(A/A_\alpha)=d}} g_\alpha \circ \pi_{\alpha,\xi}$$

□

On en déduit que :

$$\mathrm{Im}\ g_\xi \subset \sum_{\substack{\alpha \in A(x) \\ A_\xi \subset A_\alpha \\ l(A/A_\alpha)=d}} \mathrm{Im}\ g_\alpha$$

• Si $l(A_i) = d$ pour tout i sans hypothèses sur les B_j. On a pour tout $x \in \mathcal{A}$: Le foncteur $(-)^\sharp$: $\mathbf{Add}(\mathcal{A};\mathbf{Ab})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}};\mathbf{Ab})$, induit une équivalence de catégories entre les foncteurs de longueur finie. Donc, nous considérons le foncteur DF comme dans la définition 1.3.6 :

$$DF = \mathrm{Im}\ \left(\bigoplus_{j=1}^{m} k[B_j^\sharp] \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[A_i^\sharp]\right)$$

En effet, par la proposition 1.3.23, $Dk[A] \simeq k[A^\sharp]$ pour tout $A \in \mathbf{Add}(\mathcal{A},k)$. On se retrouve dans le cas précédent car $(-)^\sharp$ est exact et $l(A_i^\sharp) = l(A_i)$.
• Si $l(B_j), l(A_i) > d$, prenons $x \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}(x,-) \twoheadrightarrow A_i'$ pour tout sous-objet $A_i' \subset A_i$ (il n'y en a qu'un nombre fini).

$$F \simeq \bar{\tau}_x F = \mathrm{Im}\ \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\ \bigoplus_{\xi\in A_i(x)} k[A_i/(A_i)_\xi] \xrightarrow{\bar{\tau}_x g} \bigoplus_{j=1}^{m}\ \bigoplus_{\zeta\in B_j(x)} k[B_j/(B_j)_\zeta]\right)$$

dans la catégorie $\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}$. Soient $f : A_i \to B_j$ tel que $l(\mathrm{Im}\ f) = d$, $\xi \in A_i(x)$ et $\zeta = f_*\xi$. Alors $\tilde{f} : (A_i)_\xi \to (B_j)_\zeta$ est un épimorphisme. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\ \tilde{f} \arrow[r] & (A_i)_\xi \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook] & (B_j)_\zeta \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
& & A_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & B_j \arrow[d, two heads] & \\
& & A_i/(A_i)_\xi \arrow[r, dotted, "\bar{f}"] & B_j/(B_j)_\zeta &
\end{tikzcd}$$

Par le lemme du serpent, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \ker\ \tilde{f} \longrightarrow \ker\ f \longrightarrow \ker\ \bar{f} \longrightarrow 0$$

Or $d = l(\mathrm{Im}\ f) = l(A_i) - l(\ker\ f)$ donc :

$$d = l(\mathrm{Im}\ f) = l(\mathrm{Im}\ \tilde{f}) + l(\mathrm{Im}\ \bar{f})$$

Soit $l(\mathrm{Im}\ \tilde{f}) = 0$ et alors $\zeta = 0$. Soit $\zeta \neq 0$ et alors $l(\mathrm{Im}\ \bar{f}) < d$ et $k[\bar{f}]$ s'annule dans la catégorie quotient.

Soit g_ξ la composante de $\bar{\tau}_x g_{i,j}$. D'après le lemme 4.2.4, on retrouve alors :

$$g_\xi = \sum_{\substack{\alpha\in A_i(x)\\ (A_i)_\xi\subset(A_i)_\alpha\\ l(A_i/(A_i)_\alpha)=d}} g_\alpha \circ \pi_{\alpha,\xi}$$

Donc :

$$\mathrm{Im}\ g_\xi \subset \sum_{\substack{\alpha\in A_i(x)\\ (A_i)_\xi\subset(A_i)_\alpha\\ l(A_i/(A_i)_\alpha)=d}} \mathrm{Im}\ g_\alpha$$

On est donc dans le cas précédent. Finalement φ_d est essentiellement surjectif pour tout d. Montrons maintenant la pleine fidélité de φ_d.

Lemme 4.2.5. *Soient $A : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur additif de longueur d et M une représentation du groupe* $\mathrm{Aut}(A)$*, alors $\forall F \in \mathcal{F}_i, i < d$:*

$$\mathrm{Ext}^*(F, Q_{A,M}) = 0$$

Démonstration. Soit $F \in \mathcal{F}_i$, Nous savons que φ_i est essentiellement surjectif. On a alors la suite exacte longue suivante :

$$0 \to \ker \eta \to F \xrightarrow{\eta} \bigoplus_{l(B)=i} Q_{B,N_B} \to \mathrm{coker}\ \eta \to 0$$

avec $T(\eta)$ qui est un isomorphisme, donc d'après le lemme 1.1.20, $\ker \eta$ et $\mathrm{coker}\ \eta$ sont dans $\mathcal{F}_{i-1}$. Par récurrence sur $i < d$, ainsi que le lemme 2.1.14, on en déduit que $\mathrm{Ext}^*(F, Q_{A,M_A}) = 0$. □

D'après le lemme précédant, pour tout $F \in \mathcal{F}_d$ on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}(F, Q_{A,M}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_d}(F, Q_{A,M}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}}(F, Q_{A,M})$$

On déduit que, d'après le lemme 2.1.14 : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_d/\mathcal{F}_{d-1}}(Q_{A,M}, Q_{A,N}) \simeq \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{Aut}(A)]}(M, N)$. Ce qui montre que le foncteur φ_d est pleinement fidèle. Ceci conclut la preuve du théorème 4.2.1.

4.3 Application

Dans cette section, nous allons démontrer la conjecture 1.3.27. Il faut tout d'abord remarquer que tout foncteur de type fini de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ appartient à la sous-catégorie $\mathcal{F}_d$ pour un certain entier d. Posons alors $\mathcal{A} = \mathbf{P}(R)$ la catégorie des R-modules projectifs de type fini, où R est un p-anneau fini avec $p \in k^\times$. On définit alors la fonction de dimension pour tout foncteur $F \in \mathcal{F}(R, k)$ à valeurs finies :

$$d_F : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto \dim_k F(R^n) \end{cases}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit R un p-anneau fini avec $p \in k^\times$, alors pour tout foncteur de type fini $F \in \mathcal{F}(R, k)$ il existe une fonction polynomiale $f \in \mathbb{Q}[X]$ telle que $d_F(n) = f(p^n)$.*

Démonstration. Soit $F \in \mathcal{F}(R, k)$ de type fini. Il existe alors un entier d tel que $F \in \mathcal{F}_d$. Montrons ce théorème par récurrence sur d. Puisque $p \in k^\times$, on peut appliquer le théorème 4.2.1. Nous trouvons alors une suite exacte de la forme :

$$0 \to N \to F \to \bigoplus_{\substack{A \in \mathbf{Add}(R,\mathbb{Z})/\simeq \\ l(A)=d}} Q_{A,M_A} \to C \to 0$$

avec $N, C \in \mathcal{F}_{d-1}$. On en déduit donc :

$$d_F = \sum_{\substack{A \in \mathbf{Add}(R,\mathbb{Z})/\simeq \\ l(A)=d}} d_{Q_{A,M_A}} + d_N - d_C$$

Par hypothèse de récurrence $d_N(n) = h(p^n)$ et $d_C(n) = g(p^n)$ avec h et g des fonctions polynomiales. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $d_{Q_{A,M_A}}$. Or $Q_{A,M_A} = Q_A \otimes_{k[\mathrm{Aut}(A)]} M_A$ et l'action de $\mathrm{Aut}(A)$ étant libre, nous avons donc :

$$d_{Q_{A,M_A}} = d_{Q_A} \times \frac{\dim_k M}{\mid \mathrm{Aut}(A) \mid}$$

Nous nous retrouvons donc à démontrer le résultat pour Q_A. Grâce à la suite exacte (2.1), nous avons :

$$d_{Q_A} = d_{k[A]} - \sum_{i=1}^{d} \sum_{A_i \subsetneq \cdots \subsetneq A} (-1)^i d_{k[A_i]}$$

Or $A(R^n)$ est un R- module fini. Donc, il existe un certain $\alpha_A \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d_{k[A]}(n) = \dim_k k[A(R^n)] = \mid A(R^n) \mid = p^{\alpha_A n}$$

On en déduit qu'il existe une fonction polynomiale $f \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $d_F(n) = f(p^n)$. Ce qui termine la récurrence. $\square$

On peut remarquer que le calcul de $d_{Q_{A,M_A}}$ n'utilise pas l'hypothèse $p \in k^\times$. Cette hypothèse ne sert qu'au début de la preuve pour justifier l'existence de la première suite exacte.

Bibliographie

[DT21] A. Djament et A. Touzé. *Functor homology over an additive category*. 2021. doi : `10.48550/ARXIV.2111.09719`. url : `https://arxiv.org/abs/2111.09719`.

[DTV21] A. Djament, A. Touzé et C. Vespa. *Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive*. 2021. arXiv : `1904.09190 [math.RT]`.

[Eil60] S. Eilenberg. « Abstract description of some basic functors ». In : *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* 24 (1960), 231-234 (1961). issn : 0019-5839.

[EM54] S. Eilenberg et S. Mac Lane. « On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation ». In : *Ann. of Math. (2)* 60 (1954), p. 49-139. issn : 0003-486X. doi : `10.2307/1969702`. url : `https://doi.org/10.2307/1969702`.

[Gab62] P. Gabriel. « Des catégories abéliennes. » In : *Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448* (1962).

[HLS93] H.-W. Henn, J. Lannes et L. Schwartz. « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects ». In : *Amer. J. Math.* 115.5 (1993), p. 1053-1106. issn : 0002-9327. doi : `10.2307/2375065`. url : `https://doi.org/10.2307/2375065`.

[Kov92] L. G. Kovács. « Semigroup algebras of the full matrix semigroup over a finite field ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 116.4 (1992), p. 911-919. issn : 0002-9939. doi : `10.2307/2159467`. url : `https://doi.org/10.2307/2159467`.

[Kuh15] N. J. Kuhn. « Generic representation theory of finite fields in nondescribing characteristic ». In : *Adv. Math.* 272 (2015), p. 598-610. issn : 0001-8708. doi : `10.1016/j.aim.2014.12.012`. url : `https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.12.012`.

[Kuh94] N. J. Kuhn. « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I ». In : *Amer. J. Math.* 116.2 (1994), p. 327-360. issn : 0002-9327. doi : `10.2307/2374932`. url : `https://doi.org/10.2307/2374932`.

[Nag19] R. Nagpal. « VI-modules in nondescribing characteristic, part I ». In : *Algebra Number Theory* 13.9 (2019), p. 2151-2189. issn : 1937-0652. doi : `10.2140/ant.2019.13.2151`. url : `https://doi.org/10.2140/ant.2019.13.2151`.

[Pop73] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules*. London Mathematical Society Monographs, No. 3. Academic Press, London-New York, 1973, p. xii+467.

[Pow98] G. M. L. Powell. « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 350.10 (1998), p. 4167-4193. issn : 0002-9947. doi : `10.1090/S0002-9947-98-02125-4`. url : `https://doi.org/10.1090/S0002-9947-98-02125-4`.

[PS17] A. Putman et S. V. Sam. « Representation stability and finite linear groups ». In : *Duke Math. J.* 166.13 (2017), p. 2521-2598. issn : 0012-7094. doi : `10.1215/00127094-2017-0008`. url : `https://doi.org/10.1215/00127094-2017-0008`.

[VS11] N. A. Vavilov et A. V. Stepanov. « Linear groups over general rings. I. Generalities ». In : *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 394.Voprosy Teorii Predstavlenii Algebr i Grupp. 22 (2011), p. 33-139, 295. issn : 0373-2703. doi : 10.1007/s10958-013-1146-7. url : https://doi.org/10.1007/s10958-013-1146-7.

[Wei94] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* T. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.