Université de Lille

Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lille

dans la spécialité

« Mathématiques et leurs interactions »

par

Romain Lebreton

Opérateurs sur des espaces de fonctions analytiques du disque unité : cyclicité et plongement dans des semi-groupes

---

Thèse soutenue le 31 janvier 2025 devant le jury composé de

Mme.	Sandrine Grellier	Professeure, Université d'Orléans	(Présidente du Jury)
Mme.	Sophie Grivaux	Directrice CNRS, Université de Lille	(Examinatrice)
M.	Karl Grosse-Erdmann	Associate Professor, Université de Mons	(Rapporteur)
M.	Karim Kellay	Professeur, Université de Bordeaux	(Rapporteur)
Mme.	Isabelle Chalendar	Professeure, Université Gustave Eiffel	(Co-Directrice de Thèse)
M.	Emmanuel Fricain	Professeur, Université de Lille	(Directeur de Thèse)

Laboratoire Paul Painlevé

Cité scientifique, 59650 Villeneuve d'Ascq, France

REMERCIEMENTS

Les remerciements, après y avoir longuement réfléchi, sont enfin formulés à travers ces quelques mots pour mettre en lumière l'ensemble des différents acteurs ayant été présents, de près comme de loin, tout au long de cette expérience de recherche.

Tout d'abord, si je devais choisir un mot pour qualifier cette thèse, je choisirais "reconnaissance". Reconnaissant envers mes directeurs de thèse de m'avoir accompagné durant ces trois dernières années, de m'avoir aidé en toutes circonstances et d'avoir porté et soutenu mes projets en faisant toujours passer mes intérêts avant les leurs. Reconnaissant de la liberté et de la confiance qui m'ont été accordées et des rencontres et voyages qui m'ont été offerts. Reconnaissant pour le temps précieux qu'ils m'ont consacré et de la patience dont ils ont fait preuve, puis de leur disponibilité sans faille. Reconnaissant, plus globalement, envers mes collègues et amis, de m'avoir supporté, de m'avoir épaulé et d'avoir fait de cette thèse des années qui ne ressembleront à aucune autre et qui ne pourront être oubliées. Reconnaissant également envers ma famille de m'avoir donné les moyens de réussir et d'avoir été présente durant toutes ces années, d'autant plus qu'elle l'a été bien évidemment avant et le sera sans aucun doute encore après. Enfin, reconnaissant envers moi-même et une nouvelle fois envers chacun de ces acteurs pour avoir porté jusqu'au bout mon ambition, celle de devenir docteur en mathématiques.

Je ne me serais jamais douté à l'époque, lors de mon arrivée en première année de cursus universitaire, que je parviendrais à arriver jusqu'ici et je prends conscience enfin réellement aujourd'hui de toutes les épreuves surmontées et de tous les moments vécus.

Isabelle

Après une rencontre en première année de licence, je peux enfin proclamer aujourd'hui en écrivant ces quelques lignes que, oui, sans elle, je n'en serais jamais arrivé là. Sa bienveillance et sa gentillesse à toute épreuve, que ce soit par ses paroles ou ses actes, m'ont réellement touché et me convainquent à chaque instant de la chance que j'ai eue de l'avoir à mes côtés. Toutes ces années auront été plus qu'un simple accompagnement dans le cadre professionnel, allant de discussions mathématiques au bureau (et pas seulement !) à des temps passés en salle de conférence, en passant par des expériences toutes plus folles les unes que les autres. Des surprises en musique pour les collègues à des balades, randonnées et visites de la Corse à l'île de Porquerolles, sans oublier une course de rosalie le long d'un port en Grèce, une excursion sur l'un des plus grands volcans du monde sur les îles Canaris et des repas partagés dans chacun de ces lieux magnifiques. J'essaie d'exprimer ici, à travers ces quelques mots, toute ma gratitude à l'égard d'Isabelle, qui ne m'a jamais lâché et à qui je dois en partie mon parcours et ma réussite, de par notamment sa motivation débordante et son optimisme communicatif que j'ai tant adoré. Je ne saurais jamais réellement comment la remercier, mais je témoigne aujourd'hui qu'Isabelle a été un véritable coup de cœur et que ce manuscrit recèle de précieux souvenirs que je ne pourrai jamais oublier.

Emmanuel

Emmanuel, comment le remercier alors que je sais que, sans sa bienveillance et sa gentillesse, je n'aurais probablement pas pu accéder à de telles responsabilités. Cette thèse et ce grade de docteur lui sont essentiellement dus, dès lors qu'il a accepté sans grande hésitation de m'encadrer en son nom malgré les diverses circonstances et conditions. Sa patience, sa disponibilité et sa réactivité m'ont beaucoup touché et je témoigne aujourd'hui chaleureusement de la chance que j'ai eue de l'avoir à mes côtés. Il n'a jamais manqué de m'orienter et de me guider dans mes différents travaux, d'autant que sa grande rigueur m'a beaucoup apporté, afin que je sois en capacité d'être légitime à soutenir cette thèse. Son duo avec Isabelle, au-delà de leur accompagnement à toute épreuve, m'aura permis de vivre toutes les expériences d'un enseignant chercheur et je garderai en mémoire, en ma posture de DJ et de vidéaste, leur proposition d'une danse au son de la carioca dans notre salle de conférence lilloise !

Membres du Jury

Je tiens à remercier sincérement l'ensemble des membres de mon jury de thèse. Tout d'abord, un grand merci à mes deux rapporteurs, Karl Grosse-Erdmann et Karim Kellay, pour le temps qu'ils ont pu consacrer à la lecture attentive de ce manuscrit et leurs précieux retours dont j'ai pris le soin de prendre en compte. Un grand merci à Sandrine Grellier pour avoir accepté sans hésitation et avec enthousiasme de faire partie de ce jury et d'endosser le rôle de présidente, d'autant plus que sa présence me tenait particulièrement à cœur. Enfin, un grand merci également à Sophie Grivaux pour avoir accepté de faire partie de l'aventure et d'être témoin de la présentation de mes travaux, dans la continuité du suivi qu'elle a effectué depuis mes débuts lillois. Un jury de thèse sympathique, à l'image de ce que je souhaitais, avec une parité remarquable que je recherchais tant.

Amis et collègues

Ces quelques lignes aussi pour remercier un bon nombre de mes collègues et amis, qui m'ont accompagné dans la réalisation de cette thèse et pour beaucoup même avant cela.

En premier lieu, je ne peux oublier Claire qui depuis maintenant la licence est à mes côtés et m'a suivi tout au long de mon parcours. Un merci pour tous les temps que nous avons passés ensemble, du travail aux discussions de nos projets et de nos ambitions, dont notre amitié à depuis longtemps dépassé le cadre universitaire. Je serais peut-être encore bloqué en L1 ou L2 aujourd'hui sans ses précieux conseils et son aide permanente, notamment en informatique n'est-ce pas ! Un merci également pour tout le temps qu'elle a passé à relire mes diverses productions et ses commentaires toujours pertinents.

Un merci à Aurélie et Lucas, compatriotes d'université, qui m'ont grandement supporté et avec qui j'ai pu vivre quelques aventures puis surmonter un bon nombre d'épreuves liées à la thèse, mathématiques ou non.

Lucas, que je côtoie depuis mes débuts universitaires, avec qui j'ai partagé également de nombreux voyages et rencontres mathématiques, et un merci pour son aide et ses explications toujours rigoureuses, de la licence au master puis essentiellement durant ce doctorat.

Aurélie, que j'ai eu le plaisir de retrouver en deuxième année de master, avec qui j'ai partagé pendant cette dernière année le bureau 4B074 et avec qui j'ai pu discuter de tout et de rien, du travail à la vie personnelle, et que je remercie pour sa précieuse expertise en rédaction LaTeX !

Un mot pour mon grand frère de thèse, Benjamin, qui aura su être présent et être d'une oreille attentive, que ce soit quand il travaillait encore avec nous à l'UGE ou dans un bar parisien lors de nos quelques soirées entre collègues. Il a su se montrer rassurant face à tous les doutes et questionnements que j'ai pu avoir du début jusqu'à la fin, que ce soit pour la thèse elle-même ou pour ma poursuite de carrière.

Je n'oublie pas également mes collègues du LAMA et mes camarades doctorants, Clément, Jean, Martin, Nikiforos, Patrick puis Élise, Kacem et Valentin, et évidemment nos parties de coinche du midi ou encore nos pique-niques printaniers qui ont évidemment contribué à la bonne ambiance de nos temps de repas et de pauses.

Je remercie également mes collègues du LPP pour leur accueil et mes camarades doctorants de Lille, et plus particulièrement Maëva, Valentin et Vincent, avec qui j'ai partagé le grand bureau 318 les vendredis ou encore Marvin avec qui j'ai partagé plusieurs organisations d'événements mathématiques. Aussi, Pascal Lefèvre pour sa grande gentillesse et sa bonne humeur constante, que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant cette thèse.

Un merci supplémentaire à Claire et Vincent qui ont passé du temps à lire ce manuscrit et leurs remarques constructives afin que je propose aujourd'hui un écrit de plus grande qualité.

Un mot pour Audrey, notre responsable administrative adorée du LAMA, qui s'est toujours souciée de notre satisfaction pour nos demandes en tout genre, puis pour nos discussions et moments professionnels ou personnels partagés, toujours plaisants. Brigitte, que je n'oublie pas non plus, notre secrétaire de licence-master, qui a toujours répondu présente quand j'en avais le besoin.

Un mot enfin pour mes meilleures amies, Léa et Loïse, qui m'ont suivi depuis mes débuts au collège et/ou au lycée et leurs précieux soutiens, parfois loin des yeux mais près du cœur, au quotidien. Un merci également à mes amis et collègues tant provinois que parisiens, qui sauront se reconnaître.

Puis, un mot pour mon professeur de maths de terminale Frédéric Boure qui a su me communiquer cette envie de faire des mathématiques et m'encourager en ce sens ainsi que pour ses paroles motivantes et bienveillantes tout au long de mon parcours.

Famille

Enfin, j'en arrive à ceux qui m'ont tant donné pour ma réussite, et dont la fierté à mon égard me comble de bonheur chaque jour. À travers ces quelques mots, je tiens à adresser un remerciement à mes parents, mes grands-parents, mes frères et ma sœur ainsi qu'à mon neveu (et ma future nièce), à qui je dédie en partie ce travail de thèse, qui me remplit bien évidemment de fierté également.

RÉSUMÉ

Cette thèse, située en analyse fonctionnelle, est centrée autour de l'étude des opérateurs sur des espaces de fonctions analytiques du disque unité. Celle-ci est constituée de deux parties relativement distinctes, l'une concernant la question de cyclicité et l'autre concernant la question de plongement dans des semi-groupes.

Cyclicité de l'opérateur du shift

Tandis que la question de la cyclicité de l'opérateur du shift a été résolue de manière complète dès 1949 par A. Beurling dans les espaces de Hardy H^2, il est naturel de se poser la même question pour d'autres espaces proches de ce dernier. Bien que des travaux aient été initiés par D. Sarason par la suite dans les espaces de De Branges-Rovnyak, sous-espaces de H^2 non nécessairement fermés notés $\mathcal{H}(b)$, cette question reste alors un problème intéressant et stimulant pour plusieurs auteurs à ce jour. Une des problématiques de ce sujet de thèse est alors de caractériser la cyclicité du shift, tant sur les espaces de De Branges-Rovnyak que plus généralement sur des espaces de fonctions analytiques du disque unité. Nous pourrons ainsi utiliser une approche via les noyaux reproduisants ou bien un théorème de type théorème de la couronne de Carleson.

Plongement dans des semi-groupes

Il est très naturel de se demander quels systèmes dynamiques discrets proviennent de systèmes dynamiques continus. La propriété au cœur de cette deuxième partie de la thèse est de déterminer des classes d'opérateurs linéaires et continus sur des espaces de Banach que nous pouvons plonger dans des semi-groupes fortement continus. En particulier, cette propriété de plongement implique l'existence de racines n-ièmes pour tout entier n, au sens de la composition pour l'opérateur considéré. Le fait que le spectre de l'opérateur soit contenu dans un domaine simplement connexe ne contenant pas 0 est une condition suffisante de plongement, comme on peut le voir via le calcul fonctionnel de Dunford-Riesz. Mais obtenir une condition nécessaire et suffisante pour un opérateur quelconque semble difficilement imaginable. Cette thèse se concentre donc sur l'obtention de critères pour des classes d'opérateurs particuliers mais largement étudiés comme les opérateurs intégraux (avec l'opérateur de Volterra qui constituera un exemple de base) ou encore les opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes. Nous pourrons ainsi utiliser des outils de dynamique holomorphe comme les modèles pour les semi-flots analytiques du disque unité.

Mots-clefs : cyclicité, shift, plongement, semi-groupe, opérateur de composition, opérateur de Toeplitz, espace de Hardy, espace de De Branges-Rovnyak

ABSTRACT

This thesis, situated in functional analysis, focuses on the study of operators on spaces of analytic functions in the unit disc. It is composed of two relatively distinct parts : one concerning the question of cyclicity and the other concerning the question of embedding in semigroups.

Cyclicity of the shift operator

While the question of the cyclicity of the shift operator was fully resolved as early as 1949 by A. Beurling in Hardy spaces H^2, it is natural to ask the same question for other spaces closely related to it. Although work was initiated by D. Sarason later on in De Branges-Rovnyak spaces, subspaces of H^2 that are not necessarily closed, denoted $\mathcal{H}(b)$, this question remains an interesting and challenging problem for several authors to this day. One of the issues addressed in this thesis is to characterize the cyclicity of the shift operator, both in De Branges-Rovnyak spaces and, more generally, in spaces of analytic functions in the unit disc. One can thus use an approach based on reproducing kernels or a theorem of the Carleson corona type.

Embedding into semigroups

It is very natural to wonder which discrete dynamical systems come from continuous dynamical systems. The key property of this second part of the thesis is to determine classes of linear and continuous operators on Banach spaces that can be embedded into strongly continuous semigroups. In particular, this embedding property implies the existence of nth roots for any integer n. When the operator's spectrum is contained in a simply connected domain not containing 0, a sufficient condition clearly appears thanks to the Dunford-Riesz functional calculus. However, obtaining a necessary and sufficient condition for any operator seems out of space. This thesis will therefore focus on establishing criteria for particular but widely studied classes of operators (such as integral operators with the Volterra operator as a fundamental example) as well as composition operators on spaces of holomorphic functions. One can thus use tools of holomorphic dynamics such as models for analytical semiflows on the unit disc.

Key-words : cyclicicy, shift, embedding, semigroup, composition operator, Toeplitz operator, Hardy space, De Branges-Rovnyak space

INTRODUCTION

Les travaux de cette thèse ont donné lieu à trois articles, correspondant principalement aux chapitres 2, 3 et 5 respectivement.

1. [54] *Cyclicity of the shift operator and a related completeness problem in De Branges-Rovnyak spaces* en collaboration avec Emmanuel Fricain accepté pour publication dans le livre "Operator Theory", Springer Verlag.
2. [55] *Cyclicity of the shift operator through Bezout identities* en collaboration avec Emmanuel Fricain accepté pour publication dans la revue "Canadian Mathematical Bulletin".
3. [32] *Embedding of some classes of operators into strongly continuous semigroups* en collaboration avec Isabelle Chalendar accepté pour publication dans la revue "Canadian Mathematical Bulletin".

Dans cette introduction, les contributions originales que nous retrouverons dans les chapitres de ce manuscrit de thèse sont énumérées avec la désignation "**Résultat**".

Ce manuscrit est divisé en deux parties qui, bien que distinctes, sont en lien avec un problème commun : le **Problème du Sous-espace Invariant**, l'un des problèmes les plus célèbres en analyse fonctionnelle que nous formulons de la façon suivante.

Soient E un espace de Banach réel ou complexe, $T : E \longrightarrow E$ une application linéaire continue. Existe-t-il toujours un sous-espace vectoriel fermé non trivial $M \subset E$ tel que $T(M) \subset M$?

Bien que de nombreux auteurs comme P. Enflo, C. Read ou bien V. Lomonosov ont contribué à l'avancée de ce problème, les questions de cyclicité et de plongement dans des semi-groupes de certains opérateurs peuvent se révéler être des outils utiles pour répondre à ce dernier. C'est ce que nous allons essayer de motiver par la suite et nous pouvons nous référer par exemple à [33, 34, 87] pour les résultats généraux. Notons tout de même que les cas d'un espace de Hilbert et d'un espace de Banach séparable réflexif sont encore ouverts à ce jour.

Notons tout d'abord que le chapitre 1 permet d'introduire l'ensemble des outils nécessaires à la compréhension des différents résultats de ce manuscrit, et en particulier :

1. des espaces fonctionnels tels que les espaces de Hardy H^2, de Bergman $\mathcal{A}^2$ et de Dirichlet $\mathcal{D}$ ou bien les espaces de De Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$;
2. des opérateurs tels que les opérateurs du shift ou les opérateurs de Toeplitz puis quelques propriétés sur les opérateurs cycliques.

L'un des premiers espaces de fonctions analytiques du disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ que nous considérerons est H^2, qui nous sera d'une importance fondamentale concernant les questions de cyclicité du shift dans des espaces de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans la partie I et les questions de plongement d'opérateurs dans des semi-groupes dans la partie II. Notons pour la suite $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité, qui correspond aussi à $\partial\mathbb{D}$ la frontière de $\mathbb{D}$.

0.1 A propos de la cyclicité

Une des parties de la thèse est consacrée à l'étude de la cyclicité de l'opérateur du shift S. Pour rappel, l'opérateur *shift à droite* $S : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ ou bien opérateur de *décalage à droite* est défini pour tout $x = (x_0, x_1, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ par

$$S(x) = (0, x_0, x_1, \dots) \text{ i.e. } \forall n \geq 0, \quad (S(x))_n = x_{n-1} \text{ avec la convention } x_{-1} = 0.$$

Nous verrons celui-ci comme un opérateur de multiplication M_z par z sur certains espaces de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$, que nous noterons sans ambiguïté également S.

Cette notion de cyclicité est intimement liée à la théorie des systèmes dynamiques puis à la dynamique linéaire. Pour un ensemble X modélisant l'ensemble des états d'un système (aux applications concrètes et réelles) que nous pouvons noté x_n au temps n, nous notons $T : X \longrightarrow X$ l'application qui décrit l'évolution du système en question. Fixons un état $x_0 \in X$, considéré comme l'état initial du système, et intéressons-nous à l'évolution de ce dernier par rapport à T. Autrement dit, nous nous intéressons aux différents états $T^n x_0$ pour $n > 0$ où $T^n = T \circ \dots \circ T$ i.e. nous souhaitons décrire l'ensemble $\mathrm{Orb}_{x_0}(T) := \{T^n x_0 : n \geq 0\}$ appelé *orbite de x_0 sous l'action de T*. Quantifier les changements d'états du système, c'est en quelque sorte mesurer la différence de x_n à x_{n+1} pour $n \geq 0$: considérons alors que X est un espace métrique et que $T : X \longrightarrow X$ est continue.

Définition. Un *système dynamique* est la donnée d'un espace métrique X et d'une application continue $T : X \longrightarrow X$.

Une des questions typiques de cette théorie, et que nous garderons précieusement en tête, est la suivante.

$$\text{Existe-t-il un point } x_0 \in X \text{ tel que } \mathrm{Orb}_{x_0}(T) \text{ est dense dans } X \text{ (i.e. } \overline{\mathrm{Orb}_{x_0}(T)} = X) \,?$$

En d'autres termes, cela voudrait dire qu'il est possible d'approcher tout élément de X par un élément de l'orbite de x_0 sous l'action de T. Nous considérerons dans la suite que X est un espace de Banach ou de Hilbert, et nous nous demanderons sous quelles conditions sur T est-il possible de répondre à la question précédente, ou bien si $\mathrm{Orb}_{x_0}(T)$ engendre un sous-espace dense. Ces questions ont donné lieu à la notion d'*opérateurs cycliques* et *hypercycliques* dont nous retrouverons certaines propriétés en section 1.2.1. Nous pouvons nous référer à [15, 67] pour de plus amples détails sur cette théorie.

Définition. Un opérateur $T : X \longrightarrow X$ est *cyclique* s'il existe $x \in X$, $x \neq 0$, tel que

$$\mathrm{span}_X(T^n x : n \geq 0) := \overline{\mathrm{Vect}}^X \mathrm{Orb}_x(T) = X, \quad \mathrm{Orb}_x(T) = \{T^n x : n \geq 0\}.$$

Dans ce cas, on dit que x est un vecteur *cyclique* pour T.

Ces questions peuvent se retrouver dans le problème du sous-espace invariant. En effet, un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ (l'ensemble des opérateurs linéaires et continus sur X) n'a pas de sous-espace invariant non trivial si et seulement si tout élément $x \in X$, $x \neq 0$, est cyclique pour T. L'un des premiers travaux fondateurs a été initié par A. Beurling en 1949 dans [18] qui a d'une part complètement décrit les sous-espaces invariants de l'opérateur du shift S sur l'espace de Hardy H^2 (et donc par équivalence unitaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$) et d'autre part qui a caractérisé l'ensemble des vecteurs cycliques de ce dernier. Voir les théorèmes 1.19 et 1.21.

Théorème 0.1 (Beurling)**.**

1. *Les sous-espaces invariants de S sur $H^2(\mathbb{D})$ sont de la forme $\Theta H^2(\mathbb{D})$ où Θ est une fonction intérieure.*
2. *Les vecteurs cycliques pour le shift S sur $H^2(\mathbb{D})$ sont les fonctions extérieures.*

Ces sous-espaces invariants ont notamment permis à B. Sz.-Nagy et C. Foias dans les années 60 d'introduire la théorie du modèle fonctionnel en lien avec les contractions d'un espace de Hilbert (voir par exemple [101, 102]) : il s'agit d'utiliser l'adjoint du shift S^* défini sur les espaces modèles $\mathcal{K}_\theta$ qui correspondent aux complémentaires orthogonaux des sous-espaces de Beurling ΘH^2 pour Θ une fonction intérieure. Nous retrouverons quelques résultats associés aux espaces modèles dans le chapitre 1 en section 1.1.2. Puis, en 1966, L. De Branges et J. Rovnyak ont introduit les espaces éponymes concernant la théorie des modèles, la théorie des sous-espaces invariants ou encore certaines applications liées aux théories de perturbations (voir par exemple [23, 24]). Comme plusieurs auteurs peuvent le mentionner ([12, 58, 93, 94]), nous pouvons notamment définir ces espaces en faisant intervenir l'opérateur de défaut $I - T_b T_b^*$ pour b un élément non constant de la boule unité fermée de H^∞,

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}((I - T_b T_b^*)^{\frac{1}{2}}) := (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} H^2,$$

où $T_b : f \in H^2 \longmapsto P_+(bf) = bf \in H^2$ est l'opérateur de Toeplitz défini par (1.10). Son étude ainsi que le détail de tous les outils nécessaires à sa compréhension ont été donnés dans les ouvrages d'E. Fricain et J. Mashreghi [57, 58] et nous retrouverons une partie de ces derniers dans le chapitre 1 en section 1.3.

Dans les espaces de Hardy, Bergman et Dirichlet

Nous venons de voir précédemment que la réponse à la caractérisation des vecteurs cycliques de S a été donnée dans le cadre des espaces de Hardy H^2 par A. Beurling de façon complète. Ces travaux fondateurs ont ouvert la voie à plusieurs contributions dans le cadre par exemple des espaces de Bergman et Dirichlet.

Pour $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ vérifiant $\liminf_{n\to\infty} (\beta_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$, introduisons les *espaces de Hardy de poids* β définis par

$$H^2(\beta) := \left\{ f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_\beta := \sqrt{\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \beta_n^2} < \infty \right\}. \tag{1}$$

Nous retrouvons en considérant $\beta_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'espace de Hardy H^2, puis également les espaces de Bergman $\mathcal{A}^2$ et Dirichlet $\mathcal{D}$ en considérant respectivement $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $\beta_n = \sqrt{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'une manière générale, lorsque X est un espace de Hilbert dans lequel $S : X \longrightarrow X$ est borné et tel que les évaluations $f \longmapsto f(\lambda)$ sont continues pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, alors f n'a pas de zéros dans le cercle unité $\mathbb{T}$ si f est cyclique pour S dans X. Ce phénomène provient principalement de la définition de la cyclicité de f pour S dans X :

$$\mathrm{span}_X(S^n f : n \geq 0) = \overline{\{pf : p \in \mathcal{P}\}} = X,$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Reprenons alors une question soulevée par A. L. Shields dans [98], permettant de caractériser les vecteurs cycliques pour le shift S, vu comme opérateur de multiplication par z sur $H^2(\beta)$:

$$S = M_z : f \in H^2(\beta) \longmapsto zf(z) \in H^2(\beta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Question 0.2. *Existe-t-il β tel que $f \in H^2(\beta)$ est cyclique pour S si et seulement si f n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$?*

Tout d'abord, sur l'espace de Bergman que nous retrouverons dans le chapitre 1 en section 1.1.3, nous pouvons noter qu'il existe une condition nécessaire et suffisante vraie sur $\mathcal{A}^p$ pour tout $0 < p < \infty$ donnée par [70, Theorem 7.2]. Nous pouvons également noter que toute fonction intérieure singulière associée à une mesure notée ν est cyclique pour S dans $\mathcal{A}^p$ pour $p > 0$ si et seulement si $\nu(E) = 0$ pour tout ensemble de Carleson E i.e. pour tout ensemble $E \subset \mathbb{T}$ vérifiant $m(E) = 0$ et $\sum_{n\geq 0} m(I_n) \log\left(\frac{2\pi}{m(I_n)}\right) < \infty$ où m est la mesure de Lebesgue et I_n sont les composantes de $\mathbb{T}\backslash E$ ([76]). Ce résultat diffère largement du résultat sur l'espace de Hardy H^2. Par exemple, dans [98], A. L. Shields étudie les vecteurs cycliques pour S sur l'espace de Bergman $\mathcal{A}^2$ et relève notamment que la fonction intérieure singulière $\Phi \in \mathcal{A}^2$ définie par $\phi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ (qui n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$) n'est pas cyclique pour S, donnant ainsi une réponse négative à la question 0.2 pour cet espace.

Maintenant, sur les différents espaces de Dirichlet que nous retrouverons dans le chapitre 1 en section 1.1.3, nous pouvons noter que plusieurs travaux ont été initiés sur le sujet ([26, 28, 47, 48, 75, 82]). Les vecteurs cycliques pour S dans $\mathcal{D}$ ont initialement été étudiés par L. Carleson dans [28] et ensuite par L. Brown et A. Shields dans [26]. Tout d'abord, bien que $\mathcal{D}$ soit inclus dans l'espace de Hardy H^2, nous savons qu'il existe des fonctions extérieures non cycliques dans $\mathcal{D}$ (voir [28]), ce qui donne notamment une réponse négative à la question 0.2 dans cet espace. L'un des principaux résultats que nous pouvons relever donne les deux conditions nécessaires suivantes.

Si $f \in \mathcal{D}$ est cyclique pour S, alors f est une fonction extérieure et l'ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T} : f^*(\zeta) := \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta) = 0\}$ est de capacité logarithmique nulle.

La conjecture de Brown-Shields affirme que la réciproque est aussi vraie. Cette conjecture est toujours ouverte même si diverses avancées significatives ont été obtenues depuis l'énoncé de cette dernière. Parmi elles, nous pouvons retenir le résultat suivant qui introduit la notion d'*ensemble exceptionnel de Bergman-Smirnov* : un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ est un ensemble de Bergman-Smirnov lorsque

$$\left\{\phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}\backslash E) : \phi_{|\mathbb{D}} \in \mathcal{N}^+, \phi_{|\mathbb{D}_e} \in \mathcal{B}_e\right\} = \{0\},$$

où $\mathcal{N}^+$ est la classe de Smirnov et $\mathcal{B}_e$ est l'espace de Bergman défini sur le disque extérieur par

$$\mathcal{B}_e := \left\{\phi : z \longmapsto \sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{z^{k+1}} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}_e) : \sum_{k\geq 0} \frac{|b_k|^2}{k+1} < \infty\right\}, \quad \mathbb{D}_e = (\mathbb{C} \cup \{\infty\})\backslash\overline{\mathbb{D}}.$$

Donnons alors le résultat suivant, qui est à ce jour l'un des plus proches de la conjecture.

Si $f \in \mathcal{D}$ est une fonction extérieure et que l'ensemble $\underline{\mathcal{Z}(f)} := \left\{\zeta \in \mathbb{T} : \liminf_{z\to\zeta} |f(z)| = 0\right\}$ est un ensemble exceptionnel de Bergman-Smirnov, alors f est cyclique pour S.

En utilisant le fait que tout sous-ensemble fermé dénombrable de $\mathbb{T}$ est de ce type et que ces derniers sont de capacité logarithmique nulle, nous obtenons la cyclicité en supposant $\underline{\mathcal{Z}(f)}$ dénombrable. Nous pouvons retrouver les détails dans [47, 48, 71]. Ce dernier résultat a été aussi obtenu par K. Kellay, F. Le Manach et M. Zarrabi dans [75] dans les espaces de Dirichlet-Besov $\mathcal{D}^p_\alpha$ définis par (3.11) pour $\alpha > -1$ et $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$.

Nous avons aussi quelques résultats sur les espaces pondérés $\mathcal{D}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ définis par (1.8).

- Pour $\alpha > 1$, f est cyclique pour S si et seulement si f n'a pas de zéros dans $\overline{\mathbb{D}}$. Ceci donne notamment une réponse positive à la question 0.2 pour $\beta = ((n+1)^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette condition devient simplement suffisante pour $\alpha \leq 0$ ou $\alpha = 1$.
- Pour $\alpha < 0$, nous retrouvons le même résultat que sur l'espace $\mathcal{A}^p$ pour $p > 1$ sur les fonctions intérieures singulières cycliques.
- Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, si f est cyclique pour S alors f est une fonction extérieure.

Voir [26] pour plus de détails. De nombreuses questions, dont certaines issues de [98], ont été posées par Brown et Shields dans [26] notamment autour de l'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}$ et des espaces de Dirichlet pondérés $\mathcal{D}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous ne les considérerons pas toutes dans ce manuscrit mais nous notons que cela a ouvert la voie à de nombreux travaux sur ces derniers et sur les espaces de type Dirichlet et/ou harmoniques. Introduisons en revanche la question suivante qui sera le cœur d'une des parties de ce sujet de thèse concernant les vecteurs cycliques pour S dans un espace de Banach général, vérifiant plusieurs hypothèses standards que nous expliciterons ultérieurement en chapitre 3.

Question 0.3. *Soit E un espace de Banach de fonctions analytiques sur G un domaine de $\mathbb{C}$. Supposons que pour tout $f, g \in E$, $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in G$ et que g est cyclique pour S. Alors f est-il cyclique pour S ?*

En particulier, Brown et Shields ont montré que la réponse est positive si l'espace $\mathfrak{M}(E)$ des multiplicateurs de E coïncide avec $H^\infty(G)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes et bornées sur G) où

$$\mathfrak{M}(E) = \{f \in \mathrm{Hol}(G) : f\varphi \in E,\ \forall \varphi \in E\} \subset E \cap H^\infty(G).$$

Ils ont aussi montré que le résultat est vrai dans le cas de l'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}$ ou encore dans les espaces de Dirichlet pondérés $\mathcal{D}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash]0,1]$. Enfin, nous pouvons relever que si $f \in \mathcal{D}_2 = H^2(\beta)$ pour $\beta = \left((n+1)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction extérieure avec un nombre au plus dénombrable de zéros sur $\mathbb{T}$, alors f est cyclique pour S sur $\mathcal{D}$. La question 0.3 a été également étudiée dans [41] pour les espaces de Dirichlet-Besov $\mathcal{D}^p_\alpha$ pour $\alpha > -1$ et $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$, définis par (3.11), et a trouvé une réponse positive. Enfin, notons aussi que [88] donne une réponse positive dans le cas des espaces de Dirichlet harmoniques $\mathcal{D}_\mu$ définis par (1.9), pour μ une mesure de Borel positive et finie sur $\mathbb{T}$.

Dans les espaces de De Branges-Rovnyak

Étant donné le lien entre $\mathcal{H}(b)$ et H^2, la question de la cyclicité du shift se pose naturellement sur les espaces de De Branges-Rovnyak. Nous pouvons tout d'abord expliciter plusieurs faits qui nous seront véritablement utiles pour la suite et dont les détails seront à retrouver dans le chapitre 1 en section 1.3.

1. $\mathcal{H}(b)$ est contractivement inclus dans H^2, mais n'est pas nécessairement fermé.
2. $\mathcal{H}(b)$ est un sous-espace fermé de H^2 héritant de sa structure d'espace de Hilbert si et seulement si b est une fonction intérieure.
3. $\mathcal{H}(b)$ est dense dans H^2 si et seulement si b n'est pas une fonction intérieure.
4. $\mathcal{H}(b)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant avec, pour $\lambda \in \mathbb{D}$, $k^b_\lambda = (1 - \overline{b(\lambda)}b)k_\lambda$ où k_λ est le noyau reproduisant de H^2.
5. L'ensemble des polynômes analytiques $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si b est un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞.
6. Le shift S est borné sur $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si b est un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞.

Rappelons que b est un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞ si et seulement si $\log(1-|b|) \in L^1(\mathbb{T})$. Les questions qui vont suivre concernent la cyclicité des opérateurs du shift dans ces espaces $\mathcal{H}(b)$ que nous notons

$$S_b := S_{|\mathcal{H}(b)} \text{ et } X_b := (S^*)_{|\mathcal{H}(b)}.$$

Par définition, $f \in \mathcal{H}(b)$ est cyclique pour S_b si

$$\operatorname{span}_{\mathcal{H}(b)}(S_b^n f : n \geq 0) = \operatorname{span}_{\mathcal{H}(b)}(z^n f : n \geq 0) = \mathcal{H}(b).$$

Concernant la théorie des sous-espaces invariants, les premiers travaux sur ces espaces remontent en 1986 par D. Sarason dans [93] qui a montré notamment que les sous-espaces invariants de X_b sont les intersections avec $\mathcal{H}(b)$ des sous-espaces invariants de S^* sur H^2 i.e. de la forme $\mathcal{H}(b) \cap (uH^2)^\perp$ avec u une fonction intérieure.

En utilisant ce résultat, E. Fricain, J. Mashreghi et D. Seco ont montré dans [59] que les vecteurs cycliques de X_b sont précisément les vecteurs cycliques de S^* appartenant à $\mathcal{H}(b)$. Signalons que les vecteurs cycliques de S^* sur H^2 ont été caractérisés par Douglas-Shapiro-Shields dans [40] dès les années 70. Dans le cas où $b(z) = \frac{1+z}{2}$, ils donnent une condition nécessaire et suffisante pour les vecteurs cycliques de S_b.

Enfin, E. Fricain et S. Grivaux dans [52] généralisent entre autres certains résultats de [59] et donnent notamment une caractérisation des vecteurs cycliques de S_b lorsque b est une fonction rationnelle mais n'est pas un produit de Blaschke fini. Ils donnent également une condition suffisante dans le cas où $b = \frac{1+I}{2}$ avec I une fonction intérieure (non constante).

En parallèle, A. Bergman dans [16] donne plusieurs résultats profonds qui reposent essentiellement sur une description des sous-espaces invariants de S_b par A. Aleman et B. Malman dans [5]. Il a notamment résolu complètement le cas où $b = \frac{1+I}{2}$ où I est une fonction intérieure (non constante) en donnant une caractérisation des vecteurs cycliques en termes des mesures d'Aleksandrov-Clark du symbole b. Certains résultats de ces deux derniers articles [16, 52] seront rappelés et utilisés ultérieurement dans le chapitre 2.

Le chapitre 2 sera consacré à l'étude de la cyclicité de l'opérateur du shift S_b sur les espaces de De Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$. Quelques propriétés importantes de ces espaces seront rappelées dans le chapitre 1 dans la section 1.3 et nous nous concentrerons sur les espaces de De Branges-Rovnyak non-extrêmes. Nous verrons qu'il n'est pas facile de calculer la norme d'une fonction de $\mathcal{H}(b)$ qui malgré sa proximité avec H^2 n'est pas donnée directement par une intégrale. Nous serons alors amené à considérer l'équation $T_{\overline{b}} f = T_{\overline{a}} f^+$ pour $f \in \mathcal{H}(b)$ et (a, b) une paire Pythagoricienne. Cette dernière nous permettra en particulier d'obtenir aisément une formule pour $(fk_{\lambda_n})^+$ et de remplacer l'expression de la cyclicité dépendant de $(z^n f)_{n\geq 0}$ par $(k_\lambda f)_{|\lambda|<\|S_b\|^{-1}}$ (voir le corollaire 2.23) où nous remarquerons que $\|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} > 1$ (voir la proposition 1.36).

Résultat 0.4. *Soient b un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $f \in \mathcal{H}(b)$. Alors*

$$\mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}(z^n f : n \geq 0) = \mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}\left(k_\mu f : |\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right).$$

En utilisant la famille $\{fk_{\lambda_n} : n \geq 1\}$ où $f \in \mathcal{H}(b)$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite qui ne vérifie pas la condition de Blaschke et k_{λ_n} est le noyau reproduisant de H^2 au point λ_n, nous expliciterons une condition nécessaire et suffisante de cyclicité pour S_b qui n'est autre qu'un problème de complétude dans $\mathcal{H}(b)$ (voir le corollaire 2.25).

Résultat 0.5. *Soient b un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $f \in \mathcal{H}(b)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La fonction f est cyclique pour S_b.

(ii) Pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$, on a

$$\mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b).$$

Le résultat principal de ce chapitre est la condition nécessaire, mais non suffisante, suivante reposant essentiellement sur l'équivalence précédente (voir le théorème 2.26).

Résultat 0.6. *Soient b un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $f \in \mathcal{H}(b)$ une fonction extérieure. Si $\frac{b}{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$ pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$. En particulier, f est cyclique pour S_b.*

Dans les espaces de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ (cadre général)

Le chapitre 3 sera consacré à l'étude de la cyclicité de l'opérateur du shift S sur des espaces de Banach de fonctions analytiques du disque unité $\mathbb{D}$. L'idée est de développer un cadre général dans lequel la réponse à la question 0.3 posée par Brown et Shields est positive. Pour obtenir la cyclicité, nous allons utiliser une méthode basée sur un théorème de la couronne, dont nous rappelons tout d'abord la version classique et bien connue de L. Carleson ([29]) : si $\varphi, \psi \in H^\infty$ vérifient

$$0 < \delta \leq |\varphi(z)| + |\psi(z)| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

alors il existe $g, h \in H^\infty$ telles que

$$\varphi(z)g(z) + \psi(z)h(z) = 1, \quad z \in \mathbb{D}.$$

De plus, nous pouvons avoir un contrôle des normes des solutions obtenues g et h. En effet, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|g\|_\infty, \|h\|_\infty \leq \frac{C}{\delta^2} \log\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Cette estimation, la meilleure connue jusqu'à ce jour, est due à Uchiyama dans [107]. Voir aussi [104]. De plus, cette estimation est quasiment optimale comme le montre l'exemple donné par S. Treil dans [106]. Dans un certain sens, nous pouvons dire que le résultat de Carleson peut être vu comme un théorème de Bézout pour H^∞, théorème bien connu dû à E. Bézout disant que si $A, B \in \mathbb{C}[z]$ n'ont pas de racines en commun, alors il existe $R, S \in \mathbb{C}[z]$ avec $\deg(R) \leq \deg(B) - 1$ et $\deg(S) \leq \deg(A) - 1$ tels que

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Notons qu'une version avec une estimation des solutions dans le cadre polynomial a été donnée dans [60, 61]. Dans [49], ce résultat de la couronne est utilisé pour obtenir des résultats sur la cyclicité des fonctions intérieures singulières dans des espaces de type Bergman pondérés du disque unité. Une version de ce théorème appliquée aux espaces $\mathcal{D}^p_\alpha \cap A(\mathbb{D})$ donnée par [105] est utilisée dans [41, 82] pour donner une réponse positive à la question 0.3 dans $\mathcal{D}^p_\alpha$ pour $\alpha > -1$ et $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Nous pouvons également nous référer à [19, 20, 90] pour diverses autres applications de ce théorème.

Notre idée est d'introduire un cadre général dans lequel nous pouvons obtenir des résultats de cyclicité via un théorème de la couronne avec contrôle des solutions, et en particulier obtenir une réponse positive à la question 0.3. Nous considérons $\mathcal{X}$ un espace de Banach de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ vérifiant les trois hypothèses (H1), (H2) et (H3) (introduites dans le chapitre 3 en section 3.1) et $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative et unitaire vérifiant les trois hypothèses (H4), (H5) et (H6) (en particulier, $\mathcal{A}$ vérifie un théorème de la couronne avec contrôle des solutions).

Après avoir introduit ce cadre général avec ces hypothèses et les premières propriétés associées, le premier résultat est le suivant (voir le théorème 3.14).

Résultat 0.7. *Soit $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H6). *Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $f, g \in \mathcal{A}$ vérifiant $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $[g^N]_{\mathcal{X}} \subset [f]_{\mathcal{X}}$.*

Nous avons noté
$$[f]_{\mathcal{X}} := \overline{\{pf : p \in \mathcal{P}\}}^{\mathcal{X}}, \quad f \in \mathcal{X}.$$
En particulier, f est cyclique pour le shift S dans $\mathcal{X}$ si $[f]_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$.

Comme corollaire, nous obtenons ainsi une réponse positive à la question de Brown-Shields (0.3) reposant essentiellement sur l'hypothèse portant sur le théorème de la couronne de type Carleson (voir le corollaire 3.16). Nous pourrons alors retrouver et/ou compléter les divers résultats mentionnés précédemment.

Résultat 0.8. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H6). *Soient $f \in \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ vérifiant que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| \leq |f(z)|$. Supposons que g est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. Alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$.*

Rappelons aussi le théorème bien connu dû à A. Atzmon ([11]), qui se révélera être un outil intéressant et utile pour la suite.

Théorème 0.9. *Soient X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\sigma(T) = \{\zeta_0\}$ pour un certain $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que*
$$\|T^n\| \underset{n\to\infty}{=} O(n^k) \text{ et } \log \left\|T^{-n}\right\| \underset{n\to\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$
Alors $(T - \zeta_0 I)^k = 0$.

Celui-ci permettra en particulier, combiné avec l'approche du théorème de la couronne, de prouver le résultat suivant (voir le théorème 3.20) où nous considérons que $\mathcal{A}$ vérifie de plus les hypothèses (H7) et (H8). Rappelons que $A(\mathbb{D})$, l'algèbre du disque, correspond à l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. Pour $f \in A(\mathbb{D})$, nous notons par $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble des zéros de f sur le bord i.e.
$$\mathcal{Z}(f) := \{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) = 0\} = \left\{\zeta \in \mathbb{T} : \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta) = 0\right\}.$$

Résultat 0.10. *Soit $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H8). *Supposons qu'il existe $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ tel que $z - \zeta_0$ est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. Soit $f \in \mathcal{A} \cap A(\mathbb{D})$ une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f) = \{\zeta_0\}$. Alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$.*

Le cas de l'espace classique de Dirichlet a été étudié par H. Hedenmalm et A. Shields dans [71] à travers l'étude de sous-espaces invariants et la notion d'ensemble exceptionnel de Bergman-Smirnov, qui intervient dans les travaux concernant la réciproque de Brown-Shields. Par la suite, S. Richter et C. Sundberg ont généralisé ces idées dans [89] avec divers autres résultats concernant la cyclicité de f et le comportement de l'ensemble de ses zéros $\mathcal{Z}(f)$.

L'ensemble de ces résultats nous permet de donner quelques applications avant de faire l'étude de quelques cas particuliers notamment avec les espaces de De Branges-Rovnyak, ou encore les espaces de Dirichlet-Besov et les espaces de type Dirichlet.

0.2 A propos du plongement dans des semi-groupes

La théorie des semi-groupes, comme présentée par exemple par K.-J. Engel et R. Nagel dans [44, 45], a trouvé son origine dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, source d'interprétations mathématiques de systèmes dynamiques : pour $(T(t))_{t\geq 0}$ une famille d'applications sur E vérifiant $T(0) = Id$ et $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$ pour $t, s \geq 0$ avec

1. E l'ensemble des états du système ;
2. $t \in [0, +\infty[$ le temps ;
3. $T(t)$ une application décrivant le changement d'état d'un élément de 0 à t.

Rappelons que nous obtenons un C_0*-semi-groupe* ou *semi-groupe fortement continu* en ajoutant à ces hypothèses un effort de continuité i.e. pour tout $x \in E$, $\|T(t)x - x\|_E \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ pour, dans ce cas, $(T(t))_{t\geq 0}$ une famille de $\mathcal{L}(E)$ où E est un espace de Banach.

Définition. Une famille $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ est un *semi-groupe fortement continu* ou C_0*-semi-groupe* sur E si

$$T_0 = Id_E, \quad T_{t+s} = T_t \circ T_s, \quad \forall t, s \geq 0,$$

et

$$\forall x \in E, \quad t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto T_t x \text{ est continue i.e. } \|T_t x - x\|_E \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci provient principalement de l'étude du flot d'une équation différentielle ordinaire autonome en dimension finie, avec comme racine l'*exponentielle d'opérateur*. Pour $A \in X = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{L}(E)$, $\left(e^{tA} := \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!}\right)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur X et satisfait les équations

$$(FE) : \begin{cases} e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \text{ pour } t, s \geq 0 \\ e^{0A} = I \end{cases} \text{ et } (DE) : \begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = AU(t) \text{ pour } t \geq 0 \\ U(0) = I \end{cases}.$$

Nous devons alors les premiers résultats à E. Hille et K. Yosida dès 1948 à travers des théorèmes de génération de C_0-semi-groupes notamment de contractions [44, 45, Section II.3] pour répondre à la problématique suivante, que nous ne considérerons pas dans cette thèse.

Caractériser les opérateurs linéaires qui sont des générateurs de semi-groupes fortement continus, et décrire de quelle façon le semi-groupe est généré.

L'étude des propriétés de ces objets, avec l'existence d'un générateur et d'une résolvante associée, a été entrepris dans [45].

Définition. Le *générateur* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ d'un semi-groupe fortement continu $(T_t)_{t\geq 0}$ sur E est l'opérateur défini sur son *domaine* $D(A)$ par

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T_t x - x), \quad x \in D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T_t x - x) \text{ existe} \right\}.$$

La *résolvante* de A associée à $(T_t)_{t\geq 0}$ est donnée, pour $\lambda \in \mathcal{R}(A) := \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$, par

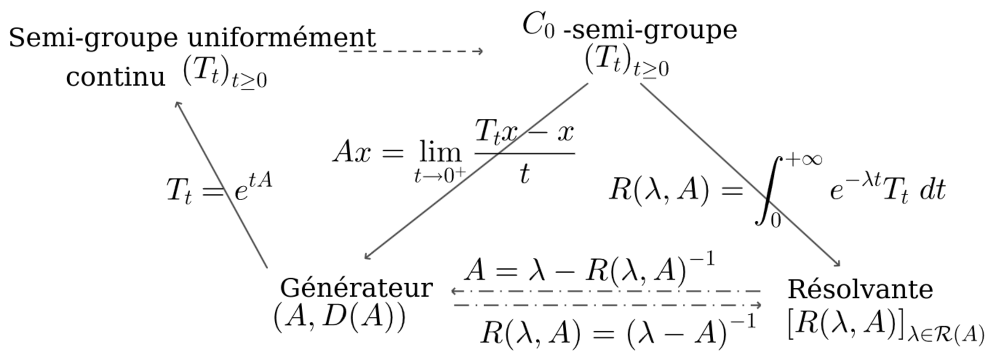
$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

Nous pouvons d'ailleurs recenser que, pour un semi-groupe fortement continu $(T_t)_{t\geq 0}$ de générateur $(A, D(A))$:

1. A est un opérateur linéaire fermé de domaine dense, qui détermine de façon unique $(T_t)_{t\geq 0}$ (voir [45, Theorem II.1.4]).

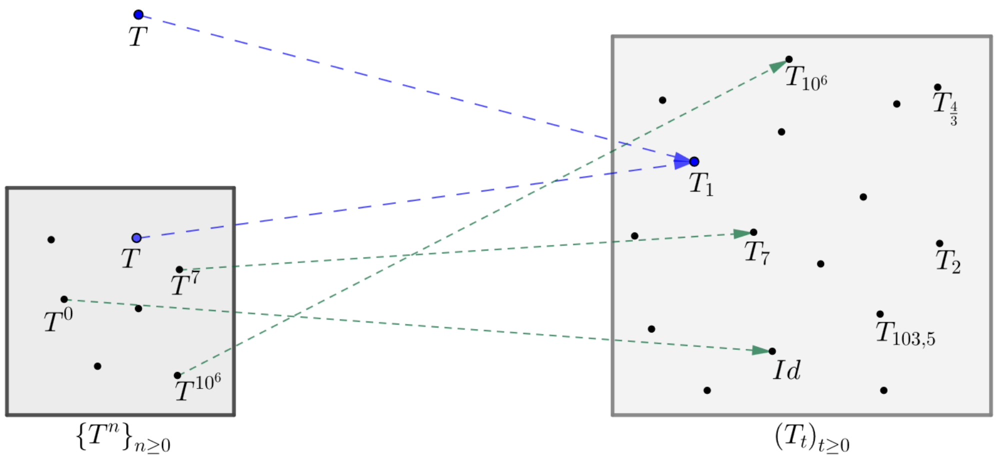
2. $(T_t)_{t\geq 0}$ sera dit *uniformément continu* si et seulement si A est borné, si et seulement si $D(A) = E$. Dans ce cas, le semi-groupe est donné par $T_t = e^{tA}$ pour tout $t \geq 0$ (voir [45, Theorem I.2.12 et Corollary II.1.5]).
3. Si, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $R(\lambda)x := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt$ existe pour tout $x \in E$, alors $\lambda \in \mathcal{R}(A)$ et $R(\lambda, A) = R(\lambda)$ (voir [45, Theorem II.1.10]).

Nous pouvons nous référer au diagramme suivant qui récapitule les différents liens entre le semi-groupe, son générateur et sa résolvante.



Il est maintenant naturel de se demander quels systèmes dynamiques discrets proviennent de systèmes dynamiques continus, d'où la question du plongement et la vision fonctionnelle de l'objet. Une partie de ce sujet de thèse consiste à essayer de répondre à la question du plongement d'un opérateur continu dans un semi-groupe fortement continu.

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace de Banach. Existe-t-il $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu tel que $T = T_1$?



Cette question permet automatiquement de répondre à la question du plongement d'un semi-groupe d'opérateurs discret dans un semi-groupe d'opérateurs continu. En effet, si T est plongeable dans un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$, noté aussi $T \hookrightarrow (T_t)_{t\geq 0}$, alors $T = T_1$ et

$$T^n = T \circ \cdots \circ T = T_1 \circ \cdots \circ T_1 = T_n$$

par les propriétés algébriques du semi-groupe. Dans ce sens, les itérés de T correspondent ainsi respectivement aux termes entiers du semi-groupe.

Cette question a suscité un intérêt particulier chez T. Eisner qui a développé dans [42, 43] plusieurs résultats dès les années 2000. En effet, bien que l'on ne connaisse pas de condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur quelconque $T \in \mathcal{L}(E)$ soit plongeable dans un

C_0-semi-groupe, il est possible d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour certaines classes comme par exemple les isométries sur un espace de Hilbert. Le tableau suivant permet notamment d'expliciter les différentes conditions existantes sur le sujet.

T plongeable dans un C_0-semi-groupe			
Nature de T	quelconque	normal	isométrique
Conditions N et/ou S	CS : $\sigma(T) \subset \Omega$ ouvert simplement connexe avec $0 \notin \Omega$ CN : $\dim(\ker(T)) \in \{0, \infty\}$ et $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(T)) \in \{0, \infty\}$	CNS : T injectif ou $\dim(\ker(T)) = \infty$	CNS : T unitaire ou $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(T)) = \infty$

Notons également que, pour $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur plongeable dans un C_0-semi-groupe, nous avons l'existence de racines (au sens de la composition) dans le sens suivant :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } S \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } S^n = T.$$

Nous regarderons de plus près quelques conditions et leurs preuves qui s'avéreront utiles pour nos applications futures dans l'introduction du chapitre 5. Nous regarderons dans un premier temps les fonctions holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ qui nous permettront par la suite de préciser certains résultats sur les opérateurs de composition sur H^2 notamment. Dans un second temps, nous regarderons les opérateurs définis sur des espaces de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$, des opérateurs de composition aux opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2.

Les fonctions holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$

Définition. Une famille $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ d'applications holomorphes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ est un *semi-flot holomorphe de* $\mathbb{D}$ si

$$\varphi_0 = Id_{\mathbb{D}}, \quad \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t \quad \forall s, t \geq 0$$

et

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \varphi_t(z) \text{ est continue i.e. } \lim_{t\to 0^+} \varphi_t(z) = z.$$

L'utilisation des semi-flots holomorphes s'est montrée utile pour E. Gallardo-Gutiérrez et C. Cowen dans [38] en 2016 pour la simplification d'une preuve donnée par Nordgren-Rosenthal-Wintrobe dans [85] en 1987 à propos de l'universalité de l'opérateur $C_{\varphi_r} - Id$ où $\varphi_r : z \longmapsto \frac{z+r}{1+rz}$ pour $r \in]0,1[$ est un automorphisme hyperbolique de $\mathbb{D}$ ($\varphi_r(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi_r(1) = 1$ et $\varphi_r(-1) = -1$). En effet, en considérant

$$\psi_{t_0} : z \longmapsto \frac{(1+e^{-t_0})z + (1-e^{-t_0})}{(1-e^{-t_0})z + (1+e^{-t_0})}, \quad t_0 \geq 0,$$

nous pouvons alors vérifier que $(\psi_{t_0})_{t_0\geq 0}$ forme un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ et que $\varphi_r = \psi_1$ avec $r = \frac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}} \in]0,1[$. Autrement dit, φ_r est plongeable dans $(\psi_{t_0})_{t_0\geq 0}$. Dans ce contexte, nous déduisons alors le plongement naturel de l'opérateur C_{φ_r} dans le C_0-semi-groupe $(C_{\psi_{t_0}})_{t_0\geq 0}$ sur H^2. En effet,

si φ est plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ noté $(\varphi_t)_{t\geq 0}$, alors C_φ est plongeable dans le semi-groupe fortement continu d'opérateurs de composition $(C_{\varphi_t})_{t\geq 0}$ sur H^2.

Rappelons que la notion d'opérateur universel, qui peut se montrer d'une importance considérable dans la résolution du problème du sous-espace invariant, a été introduite par G.-C. Rota en 1959 dans [91] : $U \in \mathcal{L}(E)$ est dit *universel* si pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et un sous-espace fermé $\mathcal{M} \subset E$ invariant par U tels que $U_{|\mathcal{M}}$ soit similaire à λT i.e. $U_{|\mathcal{M}} = J^{-1}(\lambda T)J$ avec $J : \mathcal{M} \longrightarrow E$ un isomorphisme. Par suite, S. R. Caradus a introduit une condition suffisante pour être un tel opérateur en 1969 dans [27] : pour $U \in \mathcal{L}(H)$, avec H un espace de Hilbert séparable, si $\ker(U)$ est de dimension infinie et que U est surjectif, alors U est un opérateur universel. Enfin, si nous pouvions décrire les sous-espaces invariants non triviaux minimaux d'un opérateur universel, nous aurions la réponse au problème du sous-espace invariant via le phénomène suivant. Soit $U \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur universel.

1. Si tous les sous-espaces invariants non triviaux minimaux (pour l'inclusion) de U sont de dimension finie, alors tout $T \in \mathcal{L}(H)$ a un sous-espace invariant non trivial.
2. S'il existe un sous-espace invariant minimal non trivial de dimension infinie de U, alors il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ sans sous-espace invariant non trivial.

En particulier, dans ce contexte, résoudre le problème du sous-espace invariant est équivalent à décrire tous les sous-espaces invariants minimaux de C_{φ_r} ! Notons bien que nous ne considérerons pas cette question dans cette thèse.

Le chapitre 4 sera dédié à l'approche holomorphe de la question de plongement, en considérant ceux de certaines applications analytiques du disque unité $\mathbb{D}$ dans des semi-flots holomorphes de $\mathbb{D}$. Il permettra de rappeler des résultats bien connus autour des automorphismes et des fractions linéaires de $\mathbb{D}$, puis en particulier de tenter de répondre à la question suivante posée par C. Cowen.

Question 0.11. *Soit $\varphi_C : z \in \mathbb{D} \longmapsto \left(\frac{z+1}{2}\right)^2$. Est-ce que φ_C est plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$?*

La dernière partie sera consacrée à des résultats concernant les fonctions génératrices de probabilité $\mathcal{B}^+$ définies par (4.11) où une caractérisation complète du plongement a été explicitée pour les polynômes $\mathcal{P}(\mathcal{B}^+)$ définis par (4.12) (voir le théorème 4.11).

Résultat 0.12. *Soit $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{B}^+)$. Alors φ est plongeable dans un semi-groupe de fonctions génératrices de probabilité si et seulement si φ est de degré* 1.

Celui-ci repose notamment sur le lemme 4.10, qui concerne le degré des polynômes générateurs de probabilité lorsque ceux-ci admettent une racine d'un ordre quelconque. Enfin, la section 4.4 concerne la caractérisation des fractions linéaires génératrices de probabilité et leurs plongements dans des semi-groupes du même type, inspirée de celle des fractions linéaires classiques par [21].

Ensuite, le chapitre 5 sera dédié à l'étude du plongement de certaines classes d'opérateurs dans des semi-groupes fortement continus. De plus, il sera l'occasion de tenter de répondre à la question de la forme explicite des semi-groupes dans lesquels ces dernières seront plongeables.

Le semi-groupe est-il du même type que l'opérateur plongé ? Le semi-groupe conserve-t-il les mêmes propriétés que l'opérateur plongé ?

Dans le cas isométrique, nous pourrons utiliser en particulier la forme (5.3) déduite de la décomposition de Wold 5.2 et de la preuve de la condition nécessaire et suffisante isométrique 5.6. Nous considérerons notamment deux classes d'opérateurs bien connues dont nous discutons ci-dessous, où en particulier la caractérisation des isométries est possible et manipulable.

Les opérateurs de composition

La première classe d'opérateurs que nous allons considérer est celle des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy H^2. Pour φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, nous considérons l'opérateur de composition C_φ de symbole φ défini par

$$C_\varphi : f \longmapsto f \circ \varphi(z), \quad f \in H^2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En effet, outre les symboles où le plongement de C_φ sera naturel (par exemple avec les automorphismes de $\mathbb{D}$ ou certaines fractions linéaires), l'objectif est de caractériser ces plongements en utilisant notamment le théorème 5.6. L'un des points clés est que l'on connaît les opérateurs de composition sur H^2 qui sont des isométries ou qui sont semblables à des isométries. Nous obtenons ainsi le résultat suivant sur la caractérisation du plongement de tels opérateurs (voir le théorème 5.9).

Résultat 0.13. *Tout opérateur de composition similaire à une isométrie sur H^2 est plongeable dans un semi-groupe fortement continu sur H^2 qui n'est pas constitué d'opérateurs de composition, à moins que son symbole soit un automorphisme de $\mathbb{D}$.*

À travers une description des ensembles (5.1) de la décomposition de Wold 5.2, nous pouvons décrire les opérateurs du semi-groupe dans lequel C_φ similaire à une isométrie sur H^2 est plongeable. C'est l'objet du résultat suivant (voir le corollaire 5.11).

Résultat 0.14. *Soient φ une fonction intérieure telle que $\varphi(\alpha) = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{D}$ et ψ l'application définie de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ par $\psi = \tau_\alpha \circ \varphi \circ \tau_\alpha$. Alors C_φ est plongeable dans le C_0-semi-groupe sur $H^2 = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus H^2_0$ donné par*

$$(M_{e^{it\theta}} \oplus C_{\tau_\alpha} U^* S_t U C_{\tau_\alpha})_{t \geq 0}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$, $U : H^2_0 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+, Im(C_\psi)^\perp)$ est un opérateur unitaire et $(S_t)_{t\geq 0}$ est le semi-groupe défini sur $L^2(\mathbb{R}^+, Im(C_\psi)^\perp)$ par (5.2).

Naturellement, nous pouvons également regarder les opérateurs de composition à poids et obtenir une condition de plongement (voir le théorème 5.12). Pour φ une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et $w \in H^2$, nous considérons l'opérateur de composition de symbole φ et de poids w par

$$C_{w,\varphi} : f \longmapsto (M_w C_\varphi f)(z) = w(z)(f \circ \varphi)(z), \quad f \in H^2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Résultat 0.15. *Soit φ une fonction intérieure. Alors il existe un poids $w \in H^2$ tel que $C_{w,\varphi}$ est plongeable dans un semi-groupe fortement continu sur H^2.*

Les opérateurs de Toeplitz

La seconde classe d'opérateurs que nous allons considérer est celle des opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2. Pour $\varphi \in H^\infty$, nous considérons l'opérateur de Toeplitz T_φ de symbole φ défini par

$$T_\varphi : f \longmapsto (\varphi f)(z) = \varphi(z) f(z), \quad f \in H^2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En effet, l'identification des isométries est simple et il est alors facile d'utiliser la condition 5.6. Puis, d'autre part, la décomposition d'une fonction de H^∞, donnée par le théorème 1.1, justifie l'expression de la question suivante.

Question 0.16. *Soit $\varphi = BS_\mu F \in H^\infty$ avec B un produit de Blaschke quelconque, S_μ une fonction intérieure singulière et F une fonction extérieure. A quelles conditions sur φ, T_φ est-il plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 ?*

L'objectif sera donc de répondre à celle-ci en regardant les différentes propriétés inhérentes à la forme du symbole φ, ce qui sera l'objet du résultat suivant (voir les résultats 5.14, 5.15 et 5.16).

Résultat 0.17. *Soit $\varphi \in H^\infty$. L'opérateur de Toeplitz analytique T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 si on a l'un des cas suivants :*

- *φ ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ (φ est extérieure ou $\varphi = S_\mu F$). Dans ce cas, T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique.*

- *φ est une fonction intérieure mais n'est pas un produit de Blaschke fini. Dans ce cas, T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique si et seulement si φ ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$.*

Ces derniers résultats nous permettent alors de simplifier la question 0.16, où nous verrons l'intérêt et la difficulté directement dans la section correspondante du chapitre 5 et qui reste ouverte dans ce manuscrit.

Question 0.18. *Soit $\varphi = B\phi \in H^\infty$ avec B un produit de Blaschke non constant et ϕ une application analytique non constante qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ et qui n'est pas une fonction intérieure. A-t-on le plongement de T_φ dans un C_0-semi-groupe sur H^2 ?*

Nous finissons cette introduction avec la citation suivante, utilisée également par T. Eisner dans son livre [43], qui mesure bien l'intérêt porté à cette partie de la thèse.

> "The real understanding involves, I believe, a synthesis of the discrete and continuous ..."
> *L.Lovasz, Discrete and Continuous : two sides of the same ?*

Le diagramme ci-dessous représente les différents objets mathématiques intervenant dans la thèse ainsi que leurs différents liens.

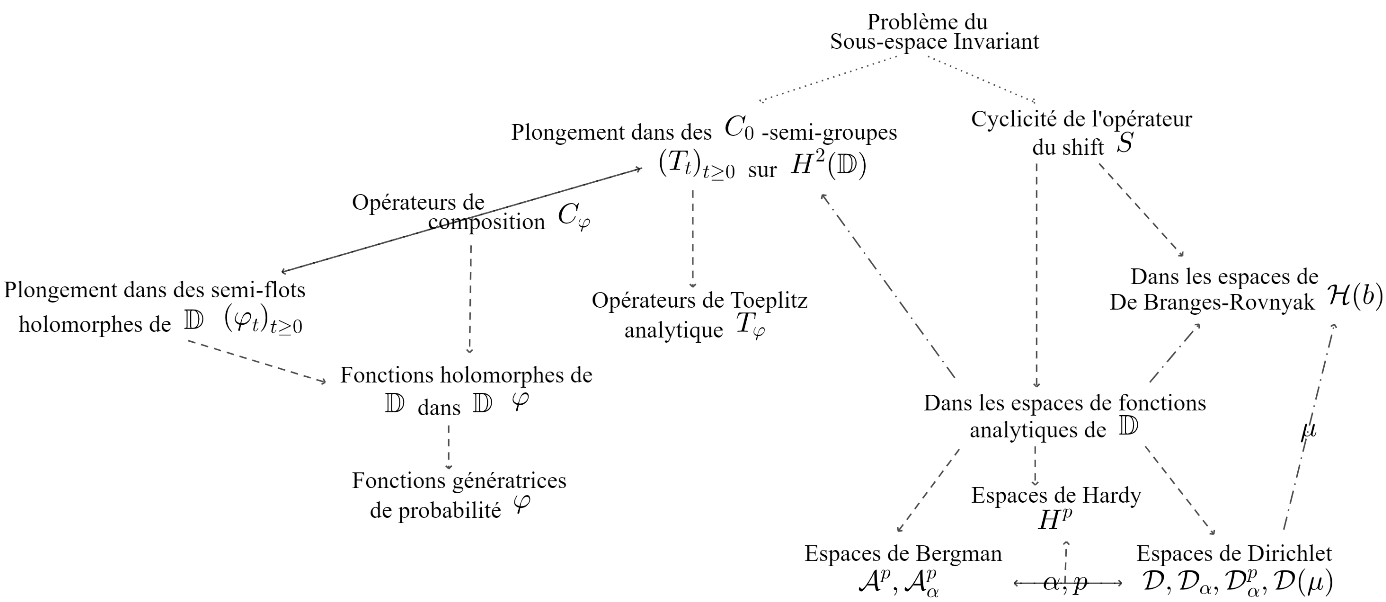


TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ESPACES, OPÉRATEURS ET OUTILS FONCTIONNELS

Le but de ce chapitre est de donner tous les outils nécessaires à la bonne compréhension des différents résultats de ce manuscrit. Nous y retrouverons les propriétés fondamentales des espaces et des opérateurs que nous considérerons tout au long de celui-ci. Seul le lemme 1.4 semble réellement nouveau et est une contribution originale.

1.1 Autour de quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Hardy

Les *espaces de Hardy* $H^p := H^p(\mathbb{D})$, pour $0 < p \leq \infty$, sont définis par

$$H^p(\mathbb{D}) := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} M_p(f, r) < \infty \right\},$$

où pour $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ et $0 \leq r < 1$,

$$M_p(f, r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{it}) \right|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty, \text{ et } M_\infty(f, r) := \sup_{t \in [0, 2\pi[} \left| f(re^{it}) \right|.$$

Notons que, pour $1 \leq p \leq \infty$, H^p est un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|_p$. Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'espace H^2 défini par

$$H^2 := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} M_2(f, r) < \infty \right\}, \quad M_2(f, r) := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt}.$$

Notons que, pour $f : z \longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, $f \in H^2$ si et seulement si $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$. En effet, pour $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ avec $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(re^{it}) = \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{int}$ et, par identification avec les coefficients de Fourier de f, nous obtenons d'après le théorème de Plancherel-Parseval que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \, dt = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

De plus, par positivité du terme général de la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$, d'après le théorème de convergence monotone discret,

$$\|f\|_2^2 = \sup_{0 \leq r < 1} M_2(f, r)^2 = \sup_{0 \leq r < 1} \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2.$$

Ainsi, il vient que $f \in H^2$ si et seulement si $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et par suite

$$H^2 = \left\{ f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Nous pouvons montrer que H^2 est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$, et que $(H^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert, où nous pouvons dans ce cas définir $\|\cdot\|_2$ par $\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{n\geq 0} |a_n|^2}$.

Plus précisément, il s'agit d'un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur $\mathbb{D}$ i.e. pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'application linéaire $f \in H^2 \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est continue. De plus, son noyau reproduisant (appelé *noyau de Szegö*) est donné par

$$k_w(z) := k(z, w) = \frac{1}{1 - \overline{w}z}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

En effet, pour $w \in \mathbb{D}$ et $f : w \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n w^n \in H^2$, nous obtenons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(w)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n w^n| \leq \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\geq 0} |w^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_2 \sqrt{\frac{1}{1 - |w|^2}}.$$

L'application linéaire $f \in H^2 \longmapsto f(w) \in \mathbb{C}$ est ainsi continue. De plus, d'après le théorème de représentation de Riesz, pour tout $w \in \mathbb{D}$, il existe une unique fonction $k_w \in H^2$ telle que

$$f(w) = \langle f \mid k_w \rangle_2, \quad f \in H^2.$$

D'où, par sesquilinéarité et continuité du produit scalaire,

$$\langle f \mid k_w \rangle_2 = f(w) = \sum_{n\geq 0} a_n w^n = \left\langle \sum_{n\geq 0} a_n z^n \mid \sum_{n\geq 0} \overline{w}^n z^n \right\rangle_2 = \left\langle f \mid \frac{1}{1 - \overline{w}z} \right\rangle_2.$$

Par identification, le noyau reproduisant de H^2 est donc bien défini par $k_w(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z}$ pour $z \in \mathbb{D}$. Aussi, nous pouvons montrer facilement que les polynômes sont denses dans H^2. En effet, si $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in H^2$, alors, pour $N \geq 1$, par les propriétés du reste d'une série convergente,

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \right\|_2 = \sum_{n\geq N+1} |a_n|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Introduisons enfin les classes de Nevanlinna et de Smirnov définies respectivement par

$$\mathcal{N} := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{it}) \right| \, dt < \infty \right\} = \left\{ \frac{g}{h} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : g, h \in H^\infty \right\},$$

où ici $\log^+(x) = \max(\log x, 0)$ pour $x > 0$, et

$$\mathcal{N}^+ := \left\{ \frac{g}{h} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : g, h \in \bigcup_{p>0} H^p, \; h \text{ extérieure} \right\},$$

où nous pouvons montrer que

$$H^\infty \subset H^2 \subset H^1 \subset \mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N}.$$

Rappelons la définition des espaces de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. Ces derniers sont définis par

$$L^p(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable } : \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p := \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p \ dm(\zeta) < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

où m est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ et

$$L^\infty(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable } : \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} := \underset{\zeta \in \mathbb{T}}{\text{supp ess}} |f(\zeta)| < \infty \right\}.$$

Nous effectuons comme usuellement l'identification classique suivante : $f \equiv 0$ dans $L^p(\mathbb{T})$ si $\{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) = 0\}$ est de mesure nulle. Avec cette identification, pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ est un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|_p$. De plus, pour $p = 2$, $L^2(\mathbb{T})$ est plus précisément un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} \ dm(\zeta).$$

Nous pouvons identifier H^p, pour $1 \leq p \leq \infty$, avec un sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{T})$ via le théorème de Fatou [92, Theorem 17.11] indiquant que pour $f \in H^p$, les *limites radiales* f^* définies par $f^*(e^{it}) := \lim_{r \to 1^-} f(re^{it})$ existent presque partout (p.p.) sur $\mathbb{T}$. De plus, $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ et

$$\|f\|_p = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f^*(\zeta)|^p \ dm(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous pouvons par suite définir H^p, pour $1 \leq p \leq \infty$, sur $\mathbb{T}$ en termes de coefficients de Fourier, c'est-à-dire d'après [57, Theorem 4.3] :

$$H^p(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \quad n < 0 \right\}.$$

Sans ambiguïté, H^p sera regardé soit sur le disque soit sur le cercle unité, avec identification des limites radiales dans ce dernier cas, quitte à considérer l'isomorphisme isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$. Nous pouvons alors identifier $(a_n)_{n \geq 0}$ de l'expression $f = \sum_{n \geq 0} a_n \chi_n \in H^2$ avec les coefficients $(\widehat{f}(n))_{n \geq 0}$ où $\chi_n : z \longmapsto z^n$.

Enfin, considérons l'ensemble $H_0^p(\mathbb{D}) = \{f \in H^p(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$ où nous avons la correspondance sur le cercle donnée par

$$H_0^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \quad n \leq 0 \right\} \text{ et } \overline{H_0^p(\mathbb{T})} = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \quad n \geq 0 \right\}. \tag{1.1}$$

Alors, nous avons d'après [57, Corollary 4.7], pour $1 < p < \infty$, $L^p(\mathbb{T}) = H^p \oplus \overline{H_0^p}$ et en particulier $H^p \cap \overline{H_0^p} = \{0\}$. Remarquons plus précisément que $\overline{H_0^2} = \ker(P_+)$ d'après [57, Lemma 4.10] où

$$P_+ : f \longmapsto P_+ f = \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^n \in H^2, \quad f : z \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) z^n \in L^2(\mathbb{T}), \tag{1.2}$$

est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2, que nous retrouverons ultérieurement dans la section 5.2.

Notons que, pour $f \in H^p$ pour $0 < p \leq \infty$, et $f \not\equiv 0$, on a $\log |f| \in L^1(\mathbb{T})$ et en particulier $f \neq 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$ d'après [92, Theorem 17.18]. Notons aussi le résultat suivant sur les zéros d'une fonction de la classe de Nevanlinna, et donc de la classe de Smirnov et de H^p pour $0 < p \leq \infty$: pour $f \in \mathcal{N}$, $f \not\equiv 0$, et $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ la suite des zéros de f, comptés avec multiplicités, nous avons $\sum_{i \geq 1} (1 - |\alpha_i|) < \infty$ d'après [92, Theorem 15.23].

Enfin, rappelons que pour $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite qui n'est pas de Blaschke i.e. $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$, alors la suite $(k_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète dans H^2 i.e.

$$\operatorname{span}_{H^2}(k_{\lambda_n} : n \geq 1) = H^2, \tag{1.3}$$

où $\operatorname{span}_{\mathcal{H}}(A)$ correspond à la fermeture de l'ensemble des combinaisons linéaires finies $\bigvee(A)$ d'éléments de A dans $\mathcal{H}$. Il s'agit même d'une équivalence d'après [7, Lemme 1.67] ou [83].

Regardons maintenant quelques fonctions particulières sur ces espaces de Hardy.

- Un *produit de Blaschke* B s'exprime de la façon suivante : pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$B(z) = e^{i\lambda} z^k \prod_{n\geq 1} \left(\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.4}$$

  où $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite finie ou infinie de points de $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ vérifiant la *condition de Blaschke* $\sum_{n\geq 1}(1-|\alpha_n|) < \infty$. L'ensemble $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ ou $((\alpha_n)_{n\geq 1} \cup \{0\}$ si $k \geq 1)$ correspond aux zéros de B, comptés avec multiplicités.
- Une fonction $\Phi \in H^\infty$ vérifiant $\left|\Phi^*(e^{it})\right| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ est appelée *fonction intérieure.* Toute fonction intérieure s'écrit sous la forme

$$\Phi(z) = B(z) S_\nu(z) := B(z) \exp\left(- \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, d\nu(e^{it}) \right), \quad z \in \mathbb{D},$$

  où ν est une mesure de Borel positive et finie sur $\mathbb{T}$ singulière par rapport à la mesure de Lebesgue ($\nu \perp m$), et S_ν est appelée *fonction intérieure singulière.* En particulier, B est une fonction intérieure et dans le cas d'un produit de Blaschke fini, B est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$.
- Une fonction $F \in H^p$ est dite *extérieure* si elle s'écrit de la manière suivante :

$$F(z) = c \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log(\varphi(e^{it})) \, dt \right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

  où $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, et φ est une fonction mesurable positive telle que $\log(\varphi) \in L^1(\mathbb{T})$ et $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. De plus, $|F| = \varphi$ p.p. sur $\mathbb{T}$.

Théorème 1.1 (Factorisation des fonctions de H^p, [92])**.** *Soient $0 < p \leq \infty$ et $f \in H^p$, $f \not\equiv 0$. Alors il existe une fonction intérieure ϕ et une fonction extérieure F telles que $f = \phi F$, unique à une constante multiplicative près. Autrement dit, il existe*

- *une constante c unimodulaire ($|c| = 1$) ;*
- *un produit de Blaschke B associé aux zéros de f notés $(\alpha_n)_{n\geq 0}$;*
- *une mesure de Borel positive et finie sur $\mathbb{T}$ notée ν telle que $\nu \perp m$,*

tels que, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = cB(z) \exp\left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\nu(\zeta) \right) \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log|f^*(\zeta)| \, dm(\zeta) \right). \tag{1.5}$$

La proposition suivante donne quelques résultats permettant d'obtenir des fonctions extérieures.

Proposition 1.2 ([57, 84])**.**

1. *Soient $p, q, r \in]0, \infty]$ et $f \in H^p$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *f est une fonction extérieure.*
   (b) *Si $g \in H^q$ et $\frac{g}{f} \in L^r(\mathbb{T})$, alors $\frac{g}{f} \in H^r$.*

2. *Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$ vérifiant $Re(f(z)) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors $f \in H^p$ pour tout $0 < p < 1$ et f est une fonction extérieure.*
3. *Soit $f \in H^p$, pour $p \geq 1$, vérifiant $\inf_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| > 0$. Alors f est une fonction extérieure.*

Regardons de plus près la propriété n-to-1 des produits de Blaschke finis, c'est-à-dire le fait que tout élément de $\mathbb{D}$ admet exactement n pré-images, en considérant sans perte de généralité un produit de Blaschke fini de la forme

$$B(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha_k} z}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.6}$$

où N est le degré de B. Nous notons que

$$B(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}, \quad B(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T} \text{ et } B(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}.$$

Théorème 1.3 ([64, Theorem 3.6 et Corollary 7.6])**.** *Soit B un produit de Blaschke fini de degré N. Alors, pour tout $w \in \mathbb{C}$, l'équation $B(z) = w$ admet exactement N solutions, comptées avec multiplicités. De plus, si $w \in \mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{T}$), les solutions sont dans $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{T}$). Dans le cas de $\mathbb{T}$, celles-ci sont distinctes.*

Le lemme suivant, contribution originale, va nous permettre de distinguer celles-ci.

Lemme 1.4. *Soit $\beta \in \mathbb{D}\backslash B(\mathrm{Zero}(B'))$. Alors l'équation $B(z) = \beta$ admet exactement N solutions distinctes dans $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soit $\beta \in \mathbb{D}\backslash B(\mathrm{Zero}(B'))$. On sait que $B(z) = \beta$ admet exactement N solutions comptées avec multiplicités dans $\mathbb{D}$ d'après le théorème 1.3. De plus, si l'une de ces solutions notée $z_0 \in \mathbb{D}$ est de multiplicité strictement plus grande que 1, alors $B'(z_0) = 0$. Mais alors $\beta = B(z_0) \in B(\mathrm{Zero}(B'))$, ce qui est absurde. Finalement, pour $\beta \in \mathbb{D}\backslash B(\mathrm{Zero}(B'))$, l'équation $B(z) = \beta$ admet exactement N solutions distinctes dans $\mathbb{D}$. $\square$

Intéressons-nous maintenant à l'étude des zéros de B'. Le prochain théorème va nous donner le nombre exact de zéros de B' dans $\mathbb{D}$. Nous pouvons noter tout d'abord que G. Cassier et I. Chalendar ont montré dans [30] que les zéros de B' sont contenus dans l'enveloppe convexe des zéros de $B \cup \{0\}$. Ensuite, dans [56], E. Fricain et J. Mashreghi ont montré que ce résultat était vrai seulement pour l'enveloppe convexe des zéros de B.

Théorème 1.5 ([64, Theorem 8.2])**.** *Soit B un produit de Blaschke fini de degré N. Alors B' admet exactement $N - 1$ zéros dans $\mathbb{D}$.*

Regardons maintenant un résultat d'une grande importance permettant d'obtenir des produits de Blaschke à zéros distincts. Pour θ une fonction intérieure et $\lambda \in \mathbb{D}$, nous appelons *transformée de Frostman* la fonction intérieure θ_λ définie par

$$\theta_\lambda := \frac{\lambda - \theta}{1 - \overline{\lambda}\theta} = \tau_\lambda \circ \theta, \quad \tau_\lambda : z \longmapsto \frac{\lambda - z}{1 - \overline{\lambda} z}.$$

Définissons aussi l'*ensemble exceptionnel* de θ par

$$\mathcal{E}(\theta) := \{\lambda \in \mathbb{D} : \theta_\lambda \text{ n'est pas un produit de Blaschke}\}.$$

Remarque 1.6. L'application τ_λ défini précédemment est un automorphisme de $\mathbb{D}$, et vérifie que $\tau_\lambda^{-1} = \tau_\lambda$. De plus, puisque $\tau_\lambda(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$, nous pouvons vérifier que θ_λ est une fonction intérieure.

Théorème 1.7 (Frostman, [62]). *Soient θ une fonction intérieure non constante et $0 < \rho < 1$. Alors l'ensemble exceptionnel de θ suivant*

$$\mathcal{E}_\rho(\theta) := \{\xi \in \mathbb{T} : \theta_{\rho\xi} \text{ n'est pas un produit de Blaschke}\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle.

Remarque 1.8. Nous pouvons reformuler ce théorème de la façon suivante : il existe un ensemble $\Omega \subset \mathbb{D}$ de mesure nulle (qui est en fait $\mathcal{E}(\theta)$) tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}\backslash\Omega$, la transformée de Frostman θ_λ est un produit de Blaschke.

Le théorème suivant présente une version améliorée de celui-ci caractérisant les zéros du produit de Blaschke.

Théorème 1.9 (Frostman, [51]). *Soit θ une fonction intérieure. Alors il existe un ensemble $\Omega \subset \mathbb{D}$ de mesure nulle tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}\backslash\Omega$, la transformée de Frostman θ_λ est un produit de Blaschke à zéros simples.*

Démonstration. D'après le théorème de Frostman classique 1.7, il existe $\Omega_0 \subset \mathbb{D}$ de mesure nulle tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}\backslash\Omega_0$, θ_λ est un produit de Blaschke. Remarquons que $\theta'_\lambda = \frac{(|\lambda|^2-1)\theta'}{(1-\overline{\lambda}\theta)^2}$. Posons alors $\Omega = \Omega_0 \cup \theta(\theta'^{-1}(0))$. Comme θ' est analytique, $\theta'^{-1}(0)$ est dénombrable et donc $\theta(\theta'^{-1}(0))$ est de mesure nulle. Par suite, il vient que Ω est également de mesure nulle. De plus, si $\lambda \in \mathbb{D}\backslash\Omega$, alors θ_λ est un produit de Blaschke. Notons $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ les zéros de θ_λ et montrons qu'il s'agit exclusivement de zéros simples. Comme $\lambda \in \theta(\theta'^{-1}(0))^c$, il vient que $\theta'(\lambda_n) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. En effet, dans le cas contraire, s'il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\theta'(\lambda_{n_0}) = 0$ alors en prenant $\lambda = \theta(\lambda_{n_0}) \in \mathbb{D}$, on obtient l'absurdité $\lambda \in \theta(\theta'^{-1}(0))$. Finalement, on déduit que pour tout $n \geq 1$, $\theta'_\lambda(\lambda_n) \neq 0$ et λ_n est un zéro simple de θ_λ. □

1.1.2 Espaces modèles de H^2

Nous pouvons retrouver dans [62] une introduction à la théorie des espaces modèles. Nous verrons par la suite son importance pour certaines applications à l'espace de De Branges-Rovnyak ou à l'étude des opérateurs de Toeplitz.

Soit u une fonction intérieure. L'espace modèle associé à u est défini par

$$\mathcal{K}_u := (uH^2)^\perp = \{f \in H^2 : \langle f \mid uh\rangle_2 = 0, \quad \forall h \in H^2\}.$$

L'espace de Hardy H^2 étant un espace de Hilbert à noyau reproduisant, il vient que $\mathcal{K}_u$, sous-espace fermé de H^2, en est également un. En effet, pour $f \in \mathcal{K}_u$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \langle f \mid k_\lambda\rangle_2 &= \langle f \mid k_\lambda\rangle_2 - u(\lambda)\langle f \mid uk_\lambda\rangle_2 \text{ puisque par définition de } \mathcal{K}_u,\ \langle f \mid uk_\lambda\rangle_2 = 0 \\ &= \left\langle f \mid (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\right\rangle_2 \text{ avec } (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \in \mathcal{K}_u. \end{aligned}$$

Donc, en notant pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $k_\lambda^u := (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda$, il vient que k_λ^u est le noyau reproduisant de l'espace modèle $\mathcal{K}_u$, donné plus précisément par

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\overline{\lambda}z}, \quad \lambda \in \mathbb{D}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nous pouvons introduire une autre représentation de ces espaces : $\mathcal{K}_u = H^2 \cap \left(u\overline{H_0^2}\right)$. En effet, pour $f \in H^2$, $f \in (uH^2)^\perp$ si et seulement si, pour tout $h \in H^2$, $\langle f \mid uh\rangle_2 = 0$. Autrement dit, puisque $|u| = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$, $f \in (uH^2)^\perp$ si et seulement si pour tout $h \in H^2$, $\langle \overline{u}f \mid h\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ i.e. $\overline{u}f \in \overline{H_0^2}$ et $f \in u\overline{H_0^2}$.

Le résultat principal porte sur la dimension de ces espaces modèles, que nous utiliserons pour déduire des résultats de plongement d'opérateurs de Toeplitz dans des semi-groupes sur H^2 dans le chapitre 5.

Proposition 1.10 ([62, Proposition 5.19])**.** *On a* $\dim(\mathcal{K}_u) < \infty$ *si et seulement si* u *est un produit de Blaschke fini.*

1.1.3 Espaces de Bergman et Dirichlet

Espace de Bergman, [70]

Les espaces de Bergman sur $\mathbb{D}$, pour $0 < p < \infty$, sont définis par

$$A^p := A^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \ dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

où dA est la mesure d'aire normalisée sur $\mathbb{D}$. Remarquons que $A^p = \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D})$, et que $(A^p, \|\cdot\|_{A^p})$ est un espace de Banach. En particulier, pour $p = 2$ et $f : z \longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, on a d'après le théorème de Parseval et le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \|f\|_{A^2}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \ dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 r \ dtdr \\ &= 2 \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \left(\int_0^1 r^{2n+1} \ dr \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{n+1}. \end{aligned}$$

Autrement dit, A^2 est isométriquement isomorphe à $\ell^2_{\frac{1}{n+1}}(\mathbb{N})$. De plus, A^2 est un espace de Hilbert à noyau reproduisant, dont le noyau est donné par

$$k_z^{A^2}(w) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - \overline{z}w)^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Notons que les polynômes sont également denses dans A^2.

Introduisons également l'espace de Bergman à poids : pour $\beta \geq -1$ et $p \geq 1$,

$$A^p_\beta := A^p_\beta(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{A^p_\beta} := (\beta + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \,(1 - |z|^2)^\beta \ dA(z) < \infty \right\}. \tag{1.7}$$

Celui-ci est, pour $1 \leq p < \infty$, un espace de Banach muni de $\|\cdot\|_{A^p_\beta}$. En particulier, nous retrouvons A^p lorsque $\beta = 0$ et H^p lorsque $\beta = -1$.

Espace de Dirichlet, [50]

L'espace de Dirichlet (classique) est défini par

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \mathcal{D}(f) := \int_{\mathbb{D}} \left| f'(z) \right|^2 \ dA(z) < \infty \right\}.$$

Remarque 1.11. L'intégrale de Dirichlet $\mathcal{D}(f)$ définit une semi-norme. En effet, $\mathcal{D}(f) = 0$ si et seulement si f est constante. De la même manière, nous définissons une forme sesquilinéaire, symétrique hermitienne et positive en posant

$$\mathcal{D}(f, g) := \int_{\mathbb{D}} f'(z) \overline{g'(z)} \ dA(z).$$

Nous définissons un produit scalaire et une norme sur $\mathcal{D}$ en posant

$$\langle f \mid g\rangle_{\mathcal{D}} := \langle f \mid g\rangle_2 + \mathcal{D}(f,g) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, dm(\zeta) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)}\, dz, \quad f,g\in\mathcal{D},$$

et

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_2^2 + \mathcal{D}(f), \quad f\in\mathcal{D}.$$

Remarque 1.12. Notons que nous obtenons toujours une norme sur $\mathcal{D}$ si nous remplaçons le terme $\|f\|_2^2$ par $|f(0)|^2$, pour $f\in\mathcal{D}$.

En particulier, pour $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, on a d'après le théorème de Parseval et le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f) = \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2\, dA(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \left|f'(re^{it})\right|^2 r\, dtdr\\ &= 2\sum_{n\geq 1} n^2 |a_n|^2 \left(\int_0^1 r^{2n-1}\, dr\right) = \sum_{n\geq 1} n\,|a_n|^2.\end{aligned}$$

En utilisant que $\|f\|_2^2 = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2$, on obtient que

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_2^2 + \mathcal{D}(f) = \sum_{n\geq 0}|a_n|^2 + \sum_{n\geq 1} n\,|a_n|^2 = \sum_{n\geq 0}(n+1)\,|a_n|^2.$$

Ainsi, le produit scalaire induit sera donné par

$$\langle f \mid g\rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_n\overline{b_n} \text{ avec } f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ et } g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n, \quad z\in\mathbb{D}.$$

Nous avons plus précisément que $\mathcal{D}$ est isométriquement isomorphe à $\ell^2_{n+1}(\mathbb{N})$ et

$$\mathcal{B}' := \{f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f' \text{ bornée sur } \mathbb{D}\} \subset \mathcal{D} \subset H^2.$$

De plus, $\mathcal{D}$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant, dont le noyau est donné par

$$k_z^{\mathcal{D}}(w) := \begin{cases} \dfrac{1}{w\overline{z}}\log\left(\dfrac{1}{1-w\overline{z}}\right), & w\in\mathbb{D}\backslash\{0\} \\ 1, & w=0 \end{cases}, \quad z\in\mathbb{D}.$$

Nous pouvons aussi définir les espaces $\mathcal{D}_\alpha$, pour $\alpha\in\mathbb{R}$, par

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_\alpha^2 := \sum_{n\geq 0}(n+1)^\alpha |a_n|^2 < \infty \right\}. \tag{1.8}$$

En prenant respectivement $\alpha = -1, 0, 1$, nous retrouvons l'espace de Bergman $\mathcal{A}^2$, l'espace de Hardy H^2 et l'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}$. C'est en particulier un espace de Hilbert à noyau reproduisant. Nous pouvons par exemple nous référer à [26, 103]. Notons que les espaces $\mathcal{D}_\alpha$ correspondent aux espaces de Hardy à poids $H^2(\beta)$ pour $\beta = ((n+1)^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par (1).

Introduisons finalement les espaces de Dirichlet harmoniques. Pour μ une mesure de Borel positive et finie sur $\mathbb{T}$,

$$\mathcal{D}_\mu = \left\{ f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \mathcal{D}_\mu(f) := \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 P\mu(z)\, dA(z) < \infty \right\}, \quad P\mu(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}\, d\mu(\zeta), \tag{1.9}$$

où $P\mu =: w$ est *l'intégrale de Poisson* associée à une fonction harmonique positive w sur $\mathbb{D}$ via [57, Corollary 3.7]. Dans ce cas, $\mathcal{D}_\mu$ est un espace de Hilbert et $\|f\|_{\mathcal{D}_\mu}^2 = \|f\|_2^2 + \mathcal{D}_\mu(f)$ pour $f\in\mathcal{D}_\mu$. Nous verrons par la suite que nous pourrons exprimer certains espaces de De Branges-Rovnyak en termes d'espaces de Dirichlet harmoniques, pour des mesures bien choisies.

1.2 Autour de quelques opérateurs

1.2.1 Les opérateurs cycliques, supercycliques et hypercycliques

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable (il existe un sous-ensemble dénombrable et dense dans $\mathcal{H}$).

1. L'opérateur T est *cyclique* s'il existe $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, tel que
$$\operatorname{span}_{\mathcal{H}}\{T^n x : n \geq 0\} = \overline{\bigvee \mathcal{O}(x,T)} = \mathcal{H}, \quad \mathcal{O}(x,T) := \operatorname{Orb}_x(T) = \{T^n x : n \geq 0\}.$$
Dans ce cas, on dit que x est un vecteur cyclique pour T.
2. L'opérateur T est *hypercyclique* s'il existe $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, tel que
$$\overline{\mathcal{O}(x,T)} = \overline{\{T^n x : n \geq 0\}} = \mathcal{H}.$$
3. L'opérateur T est *supercyclique* s'il existe $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, tel que
$$\overline{\mathcal{O}(\mathbb{C}x,T)} = \mathcal{H}.$$

Remarque 1.13.

1. La condition de séparabilité est importante pour les notions de supercyclicité et hypercyclicité : aucun opérateur supercyclique ou hypercyclique ne peut exister sur un espace non séparable par définition, l'orbite étant un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{H}$.
2. L'hypercyclicité implique la supercyclicité qui implique nécessairement la cyclicité. En effet, en considérant $c = 1$ dans la définition, on obtient
$$\{T^n f : n \geq 0\} \subset \{cT^n f : n \geq 0, c \in \mathbb{C}\}.$$
Ensuite, il s'agit simplement d'utiliser la linéarité de l'opérateur en question.

Notons qu'un opérateur contractant ne pourra jamais être hypercyclique, c'est l'objet du résultat suivant.

Lemme 1.14. *Si $\|T\| \leq 1$, alors T n'est pas hypercyclique.*

Démonstration. Si $\|T\| \leq 1$, alors pour tout $n \geq 1$, $\|T^n\| \leq \|T\|^n \leq 1$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\|T^n x\| \leq \|x\|$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi la suite $(T^n x)_{n\geq 1}$ est bornée par $\|x\|$. Ainsi, si $y \in \mathcal{H}$ tel que $\|y\| > \|x\|$, il n'est pas possible d'approcher y par des éléments de $\mathcal{O}(x,T) = \{T^n x : n \geq 0\}$ et donc l'orbite de x pour T n'est pas dense dans $\mathcal{H}$ et T n'est pas hypercyclique. □

Rappelons que le *spectre ponctuel* d'un opérateur linéaire borné T est défini par
$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\}.$$
Les conditions suivantes, nécessaires, portent sur le comportement de celui de son adjoint T^*.

Lemme 1.15 ([15, Propositions 1.17 et 1.26])**.**

1. *Si T est un opérateur hypercyclique, alors son adjoint T^* n'a pas de valeurs propres (le spectre ponctuel de T^* est vide).*
2. *Si T est un opérateur supercyclique sur un espace localement convexe, alors T^* n'a au plus qu'une valeur propre non nulle (le spectre ponctuel de T^* est soit vide soit un singleton de $\mathbb{C}^*$).*

1.2.2 Les opérateurs shift

Rappelons que le shift à droite $S : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ est défini pour tout $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ par

$$S(x) = (0, x_0, x_1, \ldots) \text{ i.e. } \forall n \geq 0, \quad (S(x))_n = x_{n-1} \text{ avec la convention } x_{-1} = 0.$$

Son adjoint S^* est le shift à gauche défini pour tout $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ par

$$S^*(x) = (x_1, x_2, \ldots) \text{ i.e. } \forall n \geq 0, \quad (S^*(x))_n = x_{n+1}.$$

Le shift S sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est un opérateur de Fredholm injectif, non surjectif, isométrique et non compact. Son adjoint S^* est un opérateur de Fredholm surjectif, non injectif et non compact. Nous rappelons qu'un *opérateur de Fredholm* T est un opérateur borné entre espaces de Banach vérifiant $\dim(\ker(T)) < \infty$ et $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(T)) < \infty$.

Nous pouvons définir le shift sur H^2 en remarquant, d'après la section 1.1.1, que H^2 est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$ via l'application unitaire $\varphi : H^2 \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ définie par

$$\varphi(f) = (a_n)_{n \geq 0} \text{ si } f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors, S est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication $M_z := \varphi^{-1} \circ S \circ \varphi : H^2 \longrightarrow H^2$ défini par

$$M_z(f)(z) = zf(z), \quad f \in H^2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Par abus de notation, nous noterons cet opérateur S sur H^2. Nous pouvons avoir une expression différente de S et S^* en utilisant la représentation analytique de f dans H^2. En effet, pour $f : z \in \mathbb{D} \longmapsto \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^n \in H^2$, alors

$$(Sf)(z) = zf(z) = \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \widehat{f}(n-1) z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

et

$$(S^* f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} = \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n+1) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Rappelons que le *spectre* d'un opérateur linéaire borné T est défini par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda Id - T \text{ est non inversible}\}.$$

Théorème 1.16 ([57, Lemmas 8.6 et 8.7])**.** *Le spectre ponctuel σ_p et le spectre σ de S et B sont respectivement donnés par*

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_p(S^*) = \mathbb{D} \text{ et } \sigma(S) = \sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}}.$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $\ker(S^* - \overline{\lambda} I) = \mathbb{C} k_\lambda$ et $\ker(S^{*k}) = \mathcal{P}_{\leq k-1}$ pour tout $k \geq 1$ où $\mathcal{P}_{\leq k-1}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $k-1$.

Remarque 1.17.

1. Comme les opérateurs S et S^* sont contractants sur H^2, il vient d'après le lemme 1.14 qu'ils ne sont pas hypercycliques sur H^2.
2. Comme $\sigma_P(S^*) = \mathbb{D}$, il vient que S n'est pas supercyclique sur H^2 (nous retrouvons également la non hypercyclicité) d'après le lemme 1.15. En revanche, S^* l'est d'après [15, Example 1.15].

Néanmoins, nous avons le résultat suivant qui repose sur le critère d'hypercyclicité [96] ou [15, Theorem 1.6].

Théorème 1.18 (Rolewicz, [15, 65, 96]). *Pour $|\lambda| > 1$, λS^* est hypercyclique sur H^2.*

Donnons maintenant les deux travaux fondateurs de Beurling concernant les sous-espaces invariants et la cyclicité du shift dans H^2 qui ont suscité par la suite des travaux dans des espaces proches de H^2, tels que l'espace de Dirichlet ou plus récemment les espaces de De Branges-Rovnyak.

Théorème 1.19 (Beurling, [18, 84]). *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé non trivial de H^2. Alors*

$$S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \Longleftrightarrow \mathcal{M} = \Theta H^2, \quad \Theta \textit{ fonction intérieure.}$$

Remarque 1.20. Notons que l'ensemble $\Theta H^2 = \{\Theta h : h \in H^2\}$, où Θ est une fonction intérieure, est un sous-espace fermé de H^2. En effet, en utilisant le fait que $\left|\Theta^*(e^{it})\right| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et $\|g\|_2 = \|g^*\|_{L^2(\mathbb{T})}$ pour $g \in H^2$, l'application $\Phi : f \in H^2 \longmapsto \Theta f \in \Theta H^2$ est isométrique dans H^2 :

$$\begin{aligned}\|\Phi f\|_2^2 = \|\Theta f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|(\Theta f)^*(e^{it})\right|^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\Theta^*(e^{it})\right|^2 \left|f^*(e^{it})\right|^2 \, dt = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|f\|_2^2 .\end{aligned}$$

Théorème 1.21 (Beurling, [18, 84]). *Une fonction $f \in H^2$ est cyclique pour S si et seulement si f est extérieure.*

Démonstration. Notons $\mathcal{F} = \operatorname{span}_{H^2}\{S^n f : n \geq 0\}$.

$\Longrightarrow$: Supposons que $f \in H^2$ est cyclique pour S i.e. $\mathcal{F} = H^2$. D'après le théorème 1.1, il existe une fonction intérieure φ et une fonction extérieure Q telles que $f = \varphi Q$. Soit $g \in \mathcal{F}$. Alors par définition de $\mathcal{F}$, il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 1}$ dans H^2 telle que $fp_n = \varphi Q p_n$ converge vers g dans H^2. Comme φ est une fonction intérieure, $|\varphi| = 1$ m-p.p sur $\mathbb{T}$ et donc on obtient que $(Qp_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans H^2. En effet, on a

$$\|Qp_n - Qp_m\|_2 = \|\varphi Q p_n - \varphi Q p_m\|_2 = \|fp_n - fp_m\|_2 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par complétude de H^2, $(Qp_n)_{n\geq 1}$ converge vers un élément de H^2 noté h. Par unicité de la limite, il vient que $g = \varphi h \in \varphi H^2$. Finalement, $\mathcal{F} = H^2 \subset \varphi H^2$. On obtient ainsi que $H^2 = \varphi H^2$ et par conséquent la fonction constante égale à 1 appartient à φH^2 et $\varphi \equiv 1$. Donc $f = Q$ est une fonction extérieure.

$\Longleftarrow$: Supposons que $f \in H^2$ est extérieure. Puisque $\mathcal{F}$ est un sous-espace fermé invariant par S de H^2, alors d'après le théorème 1.19, il existe une fonction intérieure Θ telle que $\mathcal{F} = \Theta H^2$. Par définition de $\mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}$ et donc $f \in \Theta H^2$. Or f est extérieure donc nécessairement Θ est une constante unimodulaire sur $\mathbb{D}$ (nous pouvons le voir d'après le théorème 1.1). Ainsi $\mathcal{F} = H^2$ et f est cyclique pour S. $\square$

Nous venons de voir, d'après le théorème de Beurling, que les espaces uH^2, pour u une fonction intérieure, constituent l'ensemble des sous-espaces invariants fermés non triviaux de H^2 pour l'opérateur du shift S. On peut alors aussi décrire explicitement les sous-espaces fermés de H^2 invariants par S^*.

Proposition 1.22. *Les espaces modèles $\mathcal{K}_u$ sont les sous-espaces invariants fermés non triviaux de H^2 pour l'opérateur S^*.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{M}$ est un sous-espace fermé non trivial S^*-invariant de H^2. Alors

$$\forall f \in \mathcal{M}, \quad \forall g \in \mathcal{M}^\perp, \quad \langle f \mid Sg \rangle_2 = \langle S^* f \mid g \rangle_2 = 0.$$

D'où $Sg \in \mathcal{M}^\perp$ et $S(\mathcal{M}^\perp) \subset \mathcal{M}^\perp$. Par suite, d'après le théorème 1.19, il vient que $\mathcal{M}^\perp = uH^2$ avec u une fonction intérieure. Finalement, puisque $H^2 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, on obtient que $\mathcal{M} = \mathcal{K}_u$. De plus, on peut vérifier aisément que $\mathcal{K}_u$ est bien un sous-espace fermé S^*-invariant de H^2. $\square$

Terminons cette section avec un résultat dû à Halmos dans [69] montrant qu'il n'existe aucune racine carrée pour S.

Théorème 1.23 (Halmos, [69]). *L'opérateur du shift S n'admet pas de racine carrée.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que c'est le cas i.e. il existe $T \in \mathcal{L}(H^2)$ tel que $T^2 = S$. D'où $T^{*2} = S^*$ et en posant $D = T^*$, on a $D^2 = S^*$. Regardons le lemme suivant, qui nous permettra de conclure.

Lemme 1.24. *L'opérateur D est surjectif et* $\ker D = \ker S^* = \mathbb{C}k_0$.

Démonstration. Par surjectivité de S^* (via le fait que pour tout $f \in H^2$, $S^*Sf = f$), pour tout $g \in H^2$, il existe $f \in H^2$ telle que $g = S^*f = D^2f = D(Df)$ avec $Df \in H^2$, d'où la surjectivité de D. L'inclusion $\ker D \subset \ker S^* = \mathbb{C}k_0$ est immédiate, et donc soit $\ker D = \{0\}$ soit $\ker D = \ker S^*$. Or, si $\ker D = \{0\}$, alors D est injectif et par ce qui précède inversible. Dans ce cas, on a alors que $D^2 = S^*$ est inversible, une absurdité. Donc $\ker D \neq \{0\}$. Finalement, $\ker D = \ker S^*$. □

Puisque D est surjectif, il existe en particulier $g \in H^2$ telle que $\chi_0 = Dg$ où $\chi_0 : z \longmapsto 1$. De plus, on a nécessairement que $g \notin \ker S^*$ (sinon $g \in \ker D$ et $\chi_0 = Dg = 0$ ce qui n'est pas le cas). Finalement, puisque $\chi_0 \in \ker S^* = \ker D$,

$$S^*g = D^2g = D(Dg) = D\chi_0 = 0.$$

C'est absurde puisque $g \notin \ker S^*$, et donc $D^2 \neq S^*$ et S n'admet pas de racine carrée. □

1.2.3 Les opérateurs de Toeplitz

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'opérateur de Toeplitz T_φ de symbole φ est défini par

$$T_\varphi : f \in H^2 \longmapsto P_+(M_\varphi f) = P_+(\varphi f) \in H^2, \tag{1.10}$$

où P_+ est la projection de $L^2(\mathbb{T})$ dans H^2 définie par (1.2).

Alors T_φ est un opérateur borné sur H^2 et vérifie $\|T_\varphi\|_{\mathcal{L}(H^2)} = \|\varphi\|_\infty$. Il vient aisément que l'application $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) \longmapsto T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$ est linéaire isométrique. En particulier, celle-ci est injective et, pour $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$T_\varphi = T_\psi \Longleftrightarrow \varphi = \psi.$$

Proposition 1.25 ([57, Theorem 12.18]). *Soit $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$. Alors T_φ est une isométrie si et seulement si φ est une fonction intérieure.*

Nous avons vu que l'application $\varphi \in L^\infty \longmapsto T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2)$ était injective mais l'injectivité de T_φ n'est pas tout le temps vérifiée. C'est ce que montre le résultat suivant.

Proposition 1.26. *Soit $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$. Alors T_φ est injective. De plus, en notant u la partie intérieure de φ, on a*

$$\ker T_{\overline{\varphi}} = \mathcal{K}_u.$$

En particulier, si φ est une fonction extérieure, alors T_φ et $T_{\overline{\varphi}}$ sont injectives.

Démonstration. Soit $f \in \ker(T_\varphi)$. Alors, puisque $\varphi \in H^\infty$, $T_\varphi f = P_+(\varphi f) = \varphi f = 0$. Or $\varphi \neq 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$ donc nécessairement $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Par suite, $\ker(T_\varphi) = \{0\}$ et T_φ est injective.

Montrons maintenant tout d'abord l'injectivité dans le cas des fonctions extérieures. Supposons que φ est une fonction extérieure. Soit $f \in \ker(T_{\overline{\varphi}})$. Alors $T_{\overline{\varphi}}f = P_+(\overline{\varphi}f) = 0$ et donc $\overline{\varphi}f \in \overline{H_0^2}$. Par suite, $\varphi\overline{f} \in H_0^2$ et on a $\overline{f} \in H_0^2$ d'après la proposition 1.2. Finalement, $f \in H^2 \cap \overline{H_0^2} = \{0\}$ et

$T_{\overline{\varphi}}$ est injective. Revenons au cas général. D'après le théorème 1.5, $\varphi = uF$ avec u une fonction intérieure et F une fonction extérieure. D'où

$$\begin{aligned} \ker T_{\overline{\varphi}} &= \{f \in H^2 : T_{\overline{\varphi}} f = T_{\overline{uF}} f = T_{\overline{F}} T_{\overline{u}} f = 0\} \\ &= \{f \in H^2 : T_{\overline{u}} f = 0\} \\ &= \{f \in H^2 : \overline{u} f \in \overline{H_0^2}\} = H^2 \cap u\overline{zH^2} = \mathcal{K}_u. \end{aligned} \qquad \square$$

Terminons cette partie par une caractérisation du commutant $\{S\}'$ de l'opérateur du shift S dans H^2 défini comme l'ensemble des opérateurs linéaires continus A de H^2 vérifiant $AS = SA$.

Proposition 1.27. *On a* $\{S\}' = \{T_\varphi : \varphi \in H^\infty\}$.

Démonstration. D'une part, l'inclusion $\supset$ est claire car $S = T_z$ puis, pour $\varphi \in H^\infty$, on a l'égalité $ST_\varphi = T_z T_\varphi = T_\varphi T_z = T_\varphi S$. D'autre part, nous allons montrer que pour $A \in \{S\}'$, il existe $\varphi \in H^\infty$ telle que $A = T_\varphi$. En effet, on a $S^* k_\lambda = \overline{\lambda} k_\lambda$ et donc on obtient

$$S^* A^* k_\lambda = A^* S^* k_\lambda = \overline{\lambda} A^* k_\lambda.$$

D'où, via le théorème 1.16, $A^* k_\lambda \in \ker(S^* - \overline{\lambda} I) = \mathbb{C} k_\lambda$. Considérons maintenant l'application $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par la relation $A^* k_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{D}$. Pour $f \in H^2$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$(Af)(\lambda) = \langle Af \mid k_\lambda \rangle_2 = \langle f \mid A^* k_\lambda \rangle_2 = \varphi(\lambda) \langle f \mid k_\lambda \rangle_2 = \varphi(\lambda) f(\lambda).$$

Ainsi $\varphi f = Af \in H^2$. D'où $\varphi \in \mathfrak{M}(H^2) := \left\{ f \in H^2 : fg \in H^2, \ \forall g \in H^2 \right\} = H^\infty$ et $A = T_\varphi$. $\square$

1.3 Autour des espaces de De Branges-Rovnyak non-extrêmes

Soit $b \in H^\infty$ une application non constante vérifiant $\|b\|_\infty \leq 1$. *L'espace de De Branges-Rovnyak* est défini par

$$\boxed{\mathcal{H}(b) = (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} H^2.}$$

L'espace $\mathcal{H}(b)$ est un espace de Hilbert si on le munit de la norme et du produit scalaire respectivement données par

$$\|f\|_b = \left\| (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} f_1 \right\|_b := \left\| P_{(\ker(I - T_b T_{\overline{b}}))^\perp} f_1 \right\|_2, \quad f = (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} f_1 \in \mathcal{H}(b),$$

et

$$\langle f \mid g \rangle_b = \left\langle (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} f_1 \mid (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} g_1 \right\rangle_b = \langle f_1 \mid g_1 \rangle_2 \text{ si } g_1 \in (\ker(I - T_b T_{\overline{b}}))^\perp.$$

Remarque 1.28. En considérant l'opérateur de Toeplitz associé à b, $T_b : H^2 \longrightarrow H^2$ est une contraction et nous avons d'après le théorème de Lotto-Sarason [58, Theorem 16.18] : pour $f \in H^2$,

$$f \in \mathcal{H}(b) \iff T_{\overline{b}} f \in \mathcal{H}(\overline{b}), \text{ et dans ce cas, } \|f\|_b^2 = \|f\|_2^2 + \left\| T_{\overline{b}} f \right\|_{\overline{b}}^2. \tag{1.11}$$

Nous obtenons alors aisément que $\mathcal{H}(b)$ est contractivement contenu dans H^2.

D'après le théorème de Douglas [58, Theorem 16.7] et le fait que $I - T_{\overline{b}} T_b \leq I - T_b T_{\overline{b}}$ via [57, Theorem 12.10], nous déduisons que $\mathcal{H}(\overline{b})$ est contractivement inclus dans $\mathcal{H}(b)$.

Nous considérerons dans la suite, pour un élément $a \in H^\infty$, $a \not\equiv 0$, l'espace image associé à T_a donné par

$$\mathcal{M}(a) := \mathcal{M}(T_a) = T_a H^2 = aH^2,$$

muni de la norme,

$$\|T_a f\|_{\mathcal{M}(a)} = \|af\|_{\mathcal{M}(a)} := \left\| P_{\ker(T_a)^\perp} f \right\|_2 = \|f\|_2, \quad f \in H^2.$$

Remarque 1.29. Dans le cas où $b = u$ est une fonction intérieure, nous pouvons faire un lien avec les espaces modèles de H^2. En effet, puisque $u \in H^\infty$ et $|u| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, il vient que T_u est une isométrie d'après le théorème 1.25 et pour tout $f \in H^2$,

$$\|T_u f\|_{\mathcal{M}(u)} = \|uf\|_{\mathcal{M}(u)} = \|f\|_2 = \|uf\|_2 .$$

Autrement dit, nous avons que pour tout $g \in \mathcal{M}(u)$, $\|g\|_{\mathcal{M}(u)} = \|g\|_2$. Par suite, uH^2 est un sous-espace fermé de H^2 et nous avons $\mathcal{M}(u) \doteq uH^2$ où $\doteq$ signifie l'égalité en tant qu'espace hilbertien. Le théorème suivant indique alors que, dans ce cas,

$$\mathcal{H}(u) \doteq (uH^2)^\perp = \mathcal{K}_u \text{ et } \|f\|_u = \|f\|_2 , \quad f \in \mathcal{H}(u).$$

Théorème 1.30 ([58, Theorem 18.1])**.** *L'espace $\mathcal{H}(b)$ est un sous-espace fermé de H^2 et hérite de sa structure d'espace de Hilbert si et seulement si b est une fonction intérieure ou $b \equiv 0$. De plus, on a alors*

$$\mathcal{M}(b) \doteq bH^2 \textit{ et } \mathcal{H}(b) \doteq H^2 \ominus bH^2 = (bH^2)^\perp.$$

Le résultat suivant montre que la densité de $\mathcal{H}(b)$ dans H^2 n'est pas tout le temps vérifiée.

Théorème 1.31 ([58, Theorem 18.3])**.** *L'espace $\mathcal{H}(b)$ est dense dans H^2 (relativement à $\|\cdot\|_2$) si et seulement si b n'est pas une fonction intérieure.*

Le théorème suivant donne la caractérisation d'espace de Hilbert à noyau reproduisant de $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 1.32. *Le noyau reproduisant de $\mathcal{H}(b)$ est donné, pour $z, w \in \mathbb{D}$, par*

$$k_z^b = (I - T_b T_{\overline{b}})k_z = (1 - \overline{b(z)}b)k_z \textit{ i.e. } k_z^b(w) = \frac{1 - \overline{b(z)}b(w)}{1 - \overline{z}w}.$$

De plus

$$\left\|k_z^b\right\|_b = \sqrt{k_z^b(z)} = \sqrt{\frac{1 - |b(z)|^2}{1 - |z|^2}}.$$

Remarque 1.33. Le noyau reproduisant de $\mathcal{H}(b)$ dépendant fortement de celui de H^2, le fait suivant nous sera utile pour son expression : pour $\varphi \in H^\infty$, $T_{\overline{\varphi}} k_z = \overline{\varphi(z)} k_z$ pour $z \in \mathbb{D}$. En effet, pour $f \in H^2$,

$$\langle T_{\overline{\varphi}} k_z \mid f \rangle_2 = \langle k_z \mid T_\varphi f \rangle_2 = \langle k_z \mid \varphi f \rangle_2 = \overline{\varphi(z) f(z)} = \overline{\varphi(z)} \langle k_z \mid f \rangle_2 = \left\langle \overline{\varphi(z)} k_z \mid f \right\rangle_2 .$$

D'autres résultats sur ce noyau seront explicités dans le cas non-extrême, traité dans la partie suivante.

Démonstration. Puisque $\mathcal{H}(b)$ est contractivement contenu dans H^2, et que H^2 est à noyau reproduisant, il vient que l'évaluation $f \in \mathcal{H}(b) \longmapsto f(\lambda) \in \mathbb{C}$ est continue pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$. Donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $k_\lambda^b \in \mathcal{H}(b)$ tel que $f(\lambda) = \langle f \mid k_\lambda^b \rangle_b$. Alors, puisque $f \in \mathcal{H}(b) = (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} H^2$, il existe $g \in H^2 \ominus \ker(I - T_b T_{\overline{b}})$ telle que $f = (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} g$ et donc

$$f(\lambda) = \left\langle (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} g \mid k_\lambda \right\rangle_2 = \left\langle g \mid (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} k_\lambda \right\rangle_2 .$$

Par définition du produit scalaire de $\mathcal{H}(b)$, on a

$$f(\lambda) = \left\langle (I - T_b T_{\overline{b}})^{\frac{1}{2}} g \mid (I - T_b T_{\overline{b}}) k_\lambda \right\rangle_b = \langle f \mid (I - T_b T_{\overline{b}}) k_\lambda \rangle_b .$$

Par unicité de la représentation, on déduit que

$$k_\lambda^b := (I - T_b T_{\overline{b}})k_\lambda = k_\lambda - b\overline{b(\lambda)}k_\lambda = (1 - \overline{b(\lambda)}b)k_\lambda.$$

Finalement, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$k_\lambda^b(z) = \frac{1 - \overline{b(\lambda)}b(z)}{1 - \overline{\lambda}z} \quad \text{et} \quad \left\| k_\lambda^b \right\|_b^2 = \left\langle k_\lambda^b \mid k_\lambda^b \right\rangle_b = k_\lambda^b(\lambda) = \frac{1 - |b(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2}. \qquad \square$$

Regardons dorénavant l'exemple du shift S et de son adjoint S^* de plus près sur $\mathcal{H}(b)$. Comme cas particulier de [58, Theorem 18.12], $\mathcal{H}(b)$ est invariant par $T_{\overline{z}} = S^*$ et sa restriction à $\mathcal{H}(b)$ notée $X_b : f \in \mathcal{H}(b) \longmapsto S^*f \in \mathcal{H}(b)$ est une contraction. Notons que, d'après [58, Theorem 18.22], l'adjoint de X_b n'est pas S : pour $f \in \mathcal{H}(b)$,

$$X_b^* f = Sf - \langle f \mid S^*b \rangle_b \, b. \tag{1.12}$$

Notons enfin que certains espaces de De Branges-Rovnyak peuvent être vus comme des espaces de Dirichlet harmoniques, avec des mesures bien choisies. Il a été montré que si $\mathcal{D}_\mu = \mathcal{H}(b)$, alors $\log(1 - |b|^2) \in L^1(\mathbb{T})$ et donc b est nécessairement un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞ (détaillé juste ci-dessous). De plus, en choisissant $\mu = \delta_\zeta$ pour $\zeta \in \mathbb{T}$, alors il existe un b tel que $\mathcal{H}(b) = \mathcal{D}_\mu$, avec équivalence des normes. Néanmoins, si $\mathcal{D}_\mu \mathrel{=\!\!=} \mathcal{H}(b)$, alors en particulier $\mu = c\delta_\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{T}$ et $c \geq 0$. Nous pouvons nous référer à [37] pour plus de détails et exemples.

Puis, finissons cette section en remarquant que d'après [58, Theorem 18.2 et Corollary 18.6], on a

- $\mathcal{H}(b) \mathrel{=\!\!=} \mathcal{H}(\overline{b}) \mathrel{=\!\!=} H^2$ si et seulement si $b \equiv 0$;
- $\mathcal{H}(b) = \{0\}$ si et seulement si b est une constante unimodulaire et $\mathcal{H}(\overline{b}) = \{0\}$ si et seulement si b est intérieure ;
- $\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(\overline{b}) = H^2$ (avec une norme équivalente) si et seulement si $\|b\|_\infty < 1$.

Dans la suite, nous considérerons alors que b **est non constante et que** $\|b\|_\infty = 1$.

Plaçons nous dans le cas où b est un **point non-extrême de la boule unité fermée de** H^∞. Un théorème dû à Arens-Buck-Carleson-Hoffman-Royden et repris par De Leeuw-Rudin ([78], [57, Theorem 6.7]) exprime que c'est le cas si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - \left|b^*(e^{it})\right|) \, dt > -\infty,$$

où nous rappelons que $b^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} b(re^{it})$ est la limite radiale de b, définie presque partout sur $\mathbb{T}$. Considérons donc b vérifiant $\log(1 - |b^*|) \in L^1(\mathbb{T})$. Alors il existe une unique fonction extérieure $a \in H^\infty$ vérifiant $a(0) > 0$ et $|a^*|^2 + |b^*|^2 = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$. La fonction a est donnée explicitement par la formule

$$a(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log(1 - |b^*(\zeta)|^2)^{\frac{1}{2}} \, dm(\zeta) \right), \quad |z| < 1.$$

Nous dirons dans ce cas que (a, b) forme une *paire Pythagoricienne*. Nous dirons de plus que $(a, b) \in$ (HCR) si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|a(z)| + |b(z)| \geq \delta, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.13}$$

Nous pouvons nous référer à [58, Theorem 5.20] pour plus de détails, ainsi que le lien avec le théorème de la couronne.

Dans le cas où (a, b) forme une paire Pythagoricienne, il vient alors une simplification étonnante de l'espace $\mathcal{H}(\bar{b})$. En effet, puisque $I - T_{\bar{b}}T_b = I - T_{\bar{b}b} = T_1 - T_{|b|^2} = T_{1-|b|^2} = T_{|a|^2} = T_{\bar{a}}T_a$, en notant $A = (I - T_{\bar{b}}T_b)^{\frac{1}{2}}$ et $B = T_{\bar{a}}$, nous obtenons d'après [58, Theorem 16.7] que

$$\mathcal{H}(\bar{b}) = \mathcal{M}(T_{\bar{a}}) = T_{\bar{a}}H^2.$$

Remarquons de plus que $T_{\bar{a}}$ est injectif d'après la proposition 1.26 puisque a est une fonction extérieure. Il existe ainsi une (unique) fonction $f^+ \in H^2$ telle que $T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}f^+$.

En ré-écrivant (1.11) et en remarquant que, par injectivité de $T_{\bar{a}}$,

$$\left\|T_{\bar{b}}f\right\|_{\bar{b}}^2 = \left\|T_{\bar{a}}f^+\right\|_{\bar{b}}^2 = \left\|T_{\bar{a}}f^+\right\|_{\mathcal{M}(\bar{a})}^2 = \left\|P_{(\ker(T_{\bar{a}}))^\perp}f^+\right\|_2^2 = \left\|f^+\right\|_2^2,$$

nous obtenons la caractérisation suivante des éléments de $\mathcal{H}(b)$: pour $f \in H^2$,

$$f \in \mathcal{H}(b) \iff \exists f^+ \in H^2, \quad T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}f^+, \tag{1.14}$$

et, dans ce cas,

$$\|f\|_b^2 = \|f\|_2^2 + \left\|f^+\right\|_2^2. \tag{1.15}$$

Avec cette caractérisation, on peut expliciter quelques éléments classiques de $\mathcal{H}(b)$. Notons néanmoins que nous avons déjà que $S^*b \in \mathcal{H}(b)$ par l'expression (1.12).

Lemme 1.34. *Les applications $\chi_0 : z \longmapsto 1$, b et S^*b sont des éléments de $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Nous allons utiliser la caractérisation donnée par (1.14).
Pour $f \in H^2$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(e^{it}) = \sum_{k\geq 0}\hat{f}(k)e^{ikt}$ d'où $\overline{f(e^{it})} = \sum_{k\geq 0}\overline{\hat{f}(k)}e^{-ikt}$ et $P_+(\overline{f}) = \overline{\hat{f}(0)}$. Alors

$$T_{\bar{b}}\chi_0 = P_+(\bar{b}) = \overline{\hat{b}(0)} = \frac{\overline{\hat{b}(0)}}{\overline{\hat{a}(0)}}P_+(\bar{a}) = T_{\bar{a}}\left(\frac{\overline{\hat{b}(0)}}{\overline{\hat{a}(0)}}\right) \in \mathcal{M}(\bar{a}),$$

et

$$T_{\bar{b}}b = P_+(|b|^2) = P_+(1 - |a|^2) = 1 - T_{\bar{a}}(a) = T_{\bar{a}}\left(\frac{1}{\overline{\hat{a}(0)}}\right) - T_{\bar{a}}(a) \in \mathcal{M}(\bar{a}).$$

Enfin, d'après [58, Theorem 18.12], puisque $b \in \mathcal{H}(b)$, alors $T_{\bar{z}}(b) = S^*b \in \mathcal{H}(b)$. $\square$

Remarque 1.35. Le lemme précédent 1.34 montre que $b^+ = \frac{1}{\overline{a(0)}} - a$. Nous avons alors que $\|b^+\|_2^2 = \|a\|_2^2 + \frac{1}{|a(0)|^2} - 2$ et donc

$$\|b\|_b^2 = \|b\|_2^2 + \left\|b^+\right\|_2^2 = \|b\|_2^2 + \|a\|_2^2 + \frac{1}{|a(0)|^2} - 2 = \frac{1}{|a(0)|^2} - 1,$$

en utilisant le fait que $\|a\|_2^2 + \|b\|_2^2 = 1$.
En utilisant que, pour $f \in \mathcal{H}(b)$ et $\varphi \in H^\infty$, $(T_{\overline{\varphi}}f)^+ = T_{\overline{\varphi}}f^+$, nous obtenons que $(S^*b)^+ = -S^*a$ et donc

$$\|S^*b\|_b^2 = \|S^*b\|_2^2 + \|S^*a\|_2^2 = \|b\|_2^2 - |b(0)|^2 + \|a\|_2^2 - |a(0)|^2 = 1 - |b(0)|^2 - |a(0)|^2,$$

puisque $\|S^*f\|_2^2 = \sum_{n\geq 1}\left|\widehat{f}(n)\right|^2$ pour tout $f \in H^2$ (voir section 1.2.2).

D'après [58, Theorem 23.23], il est aussi bien connu que pour $\lambda \in \mathbb{D}$, k_λ et bk_λ sont des éléments de $\mathcal{H}(b)$, et pour $f \in \mathcal{H}(b)$, nous avons les décompositions suivantes :

$$\langle f \mid k_\lambda \rangle_b = f(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} f^+(\lambda) \quad \text{et} \quad \langle f \mid bk_\lambda \rangle_b = \frac{f^+(\lambda)}{a(\lambda)}. \tag{1.16}$$

Notons, pour tout élément f de $\mathcal{H}(b)$, l'existence d'une application $g \in H^2$ vérifiant

$$\bar{b} f = \bar{a} f^+ + \overline{zg} \text{ p.p. sur } \mathbb{T}. \tag{1.17}$$

En effet, $P_+(\bar{b}f) = T_{\bar{b}} f = T_{\bar{a}} f^+ = P_+(\bar{a} f^+)$. D'où $P_+(\bar{b}f - \bar{a}f^+) = 0$ et $\bar{b}f - \bar{a}f^+ \in \ker(P_+) = \overline{H_0^2}$. Autrement dit, il existe une fonction $g \in H^2$ telle que $\bar{b}f - \bar{a}f^+ = \overline{zg}$ p.p. sur $\mathbb{T}$.

Au même titre que (1.3), nous avons le même phénomène dans les espaces $\mathcal{H}(b)$: si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{D}$, alors $\{k_{\lambda_n} : n \geq 1\}$ est complète dans $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$ (i.e. $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ne vérifie pas la condition de Blaschke) d'après [7, Théorème 4.2].

Rappelons maintenant que l'opérateur du shift sur H^2 est défini par

$$Sf(z) = (M_z f)(z) = zf(z), \quad f \in H^2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

De plus, on a d'après (1.12) que pour $f \in \mathcal{H}(b)$, $Sf = X_b^* f + \langle f \mid S^* b \rangle_b b$. Comme $b \in \mathcal{H}(b)$ d'après le lemme 1.34, on en déduit que pour tout $f \in \mathcal{H}(b)$, $Sf \in \mathcal{H}(b)$. Autrement dit, lorsque b est un point non-extrême, l'espace $\mathcal{H}(b)$ est invariant par S. Pour ne pas se tromper dans les notations, nous noterons la restriction de S sur $\mathcal{H}(b)$ par S_b i.e. $S_b : f \in \mathcal{H}(b) \longmapsto Sf \in \mathcal{H}(b)$.

Proposition 1.36. *Soit (a, b) une paire Pythagoricienne. Alors $S_b : \mathcal{H}(b) \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ est bornée et de plus*

$$\|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} = \frac{\sqrt{1 - |b(0)|^2}}{|a(0)|} > 1.$$

Démonstration. Le fait que $S_b : \mathcal{H}(b) \longrightarrow \mathcal{H}(b)$ est borné découle immédiatement de (1.12) car pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, on a $S_b f = X_b^* f + \langle f \mid S^* b \rangle_b b$. On a, pour $f \in \mathcal{H}(b)$,

$$S_b^* S_b f = S_b^*(X_b^* f + \langle f \mid S^* b \rangle_b b) = f + \langle f \mid S^* b \rangle_b S_b^* b.$$

Or, d'après (1.12), pour $f \in \mathcal{H}(b)$, on a aussi que $S_b^* f = X_b f + \langle f \mid b \rangle_b S^* b$ d'où

$$S_b^* b = X_b b + \langle b \mid b \rangle_b S^* b = S^* b + \|b\|_b^2 S^* b = (1 + \|b\|_b^2) S^* b.$$

D'après la remarque 1.35, on a

$$\|b\|_b^2 = \frac{1}{|a(0)|^2} - 1 \text{ et } \|S^* b\|_b^2 = 1 - |b(0)|^2 - |a(0)|^2.$$

Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. On a

$$\begin{aligned} \|S_b f\|_b^2 = \langle S_b^* S_b f \mid f \rangle_b &= \|f\|_b^2 + |a(0)|^{-2} |\langle f \mid S^* b \rangle_b|^2 \\ &\leq \|f\|_b^2 + |a(0)|^{-2} \|f\|_b^2 \|S^* b\|_b^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \leq \sqrt{1 + |a(0)|^{-2} \|S^* b\|_b^2} = \frac{\sqrt{1 - |b(0)|^2}}{|a(0)|}.$$

En considérant maintenant $f = S^*b \in \mathcal{H}(b)$, on obtient en particulier

$$\|S_b S^* b\|_b^2 = \|S^* b\|_b^2 + |a(0)|^{-2} \|S^* b\|_b^4 .$$

Puisque $\|S_b S^* b\|_b^2 \leq \|S_b\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \|S^* b\|_b^2$, on obtient en divisant par $\|S^* b\|_b^2 \neq 0$ que

$$\|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \geq \sqrt{1 + |a(0)|^{-2} \|S^* b\|_b^2} = \frac{\sqrt{1 - |b(0)|^2}}{|a(0)|}.$$

Le résultat en découle immédiatement. De plus, comme $|b(0)|^2 + |a(0)|^2 = 1 - \|S^* b\|_b^2 < 1$, on en déduit que $|a(0)|^2 < 1 - |b(0)|^2$ d'où $|a(0)| \leq \sqrt{1 - |b(0)|^2}$ et $\|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} > 1$. $\square$

Nous avons caractérisé par le théorème 1.16 le spectre ponctuel et le spectre de S et S^* sur H^2. Nous allons voir que nous retrouvons quasiment les mêmes propriétés pour S_b et $S_b^* \neq X_b$ sur $\mathcal{H}(b)$, bien que cela soit bien plus délicat à prouver.

Théorème 1.37 ([58, Theorems 24.4 et 24.5])**.** *Le spectre ponctuel et le spectre de S_b et S_b^* sont respectivement donnés par*

$$\sigma_P(S_b) = \emptyset, \quad \sigma(S_b) = \overline{\mathbb{D}},$$

et

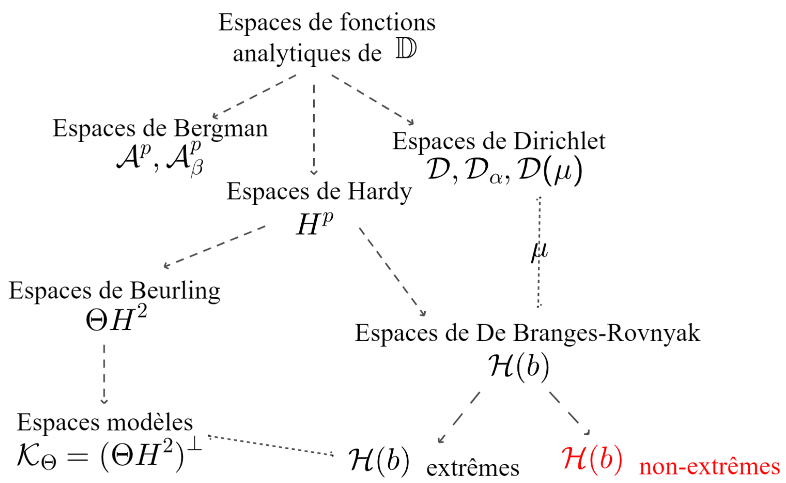
$$\mathbb{D} \subset \sigma_P(S_b^*), \quad \sigma(S_b^*) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Comme $\chi_0 : z \longmapsto 1 \in \mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(b)$ est invariant par S, il suit que les polynômes appartiennent à $\mathcal{H}(b)$. Nous avons même mieux que cela puisque le résultat suivant montre la densité des polynômes dans $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 1.38 ([58, Theorem 23.13])**.** *L'ensemble des polynômes analytiques $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{H}(b)$.*

Enfin, finissons cette partie en rappelant que dans le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ (i.e. $\int_{\mathbb{T}} \log(1 - |b|)\, dm = -\infty$), par exemple dans le cas où b est une fonction intérieure et $\mathcal{H}(b) = \mathcal{K}_b$ est l'espace modèle associé, alors $\mathcal{H}(b)$ n'est pas invariant par S et en particulier $b \notin \mathcal{H}(b)$. La question de la cyclicité de S_b dans $\mathcal{H}(b)$ n'a alors pas de sens dans ces espaces, que nous ne considérerons donc pas dans les travaux de cette thèse.

Le diagramme ci-dessous représente les différents espaces étudiés dans ce chapitre et leurs différents liens.



Première partie

Cyclicité de l'opérateur du shift à droite

CHAPITRE 2

CYCLICITÉ ET PROBLÈME DE COMPLÉTUDE DANS LES ESPACES DE DE BRANGES-ROVNYAK

L'objectif de ce chapitre est de trouver une caractérisation des vecteurs cycliques pour S_b dans $\mathcal{H}(b)$. Précisons dès maintenant que le cas où b est un point extrême de la boule unité fermée de H^∞ (i.e. $\log(1-|b|) \notin L^1(\mathbb{T})$) n'est pas à considérer puisque la question de la cyclicité pour le shift S n'a alors pas de sens comme vu précédemment. Ainsi, l'ensemble des résultats qui vont suivre sont **considérés dans les espaces de De Branges-Rovnyak non-extrêmes** dont certaines propriétés ont été rappelées dans la section 1.3.

Tout d'abord, puisque $\sigma_P(S_b^*) \supset \mathbb{D}$ d'après le théorème 1.37, nous obtenons que S_b n'est ni hypercyclique ni supercyclique d'après le lemme 1.15. En revanche, d'après le théorème 1.38, la fonction $\chi_0 : z \longmapsto 1$ est cyclique pour S_b.

Remarquons que X_b est une contraction sur $\mathcal{H}(b)$ donc n'est pas hypercyclique d'après le lemme 1.14. Cependant, de façon similaire au résultat de Rolewicz pour S^* (théorème 1.18), R. Alhajj a montré dans [6] que λX_b est hypercyclique si et seulement si $|\lambda| > 1$. Plus généralement, elle a montré que si b est un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞ et $\varphi \in H^\infty$, alors l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\varphi}}^b : f \in \mathcal{H}(b) \longmapsto P_+(\overline{\varphi} f) \in \mathcal{H}(b)$ est hypercyclique si et seulement si φ est non constante et $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ (voir [6, Theorem 4.2]).

Commençons par quelques résultats simples sur la cyclicité de S_b.

Lemme 2.1 ([52, Lemma 3.1])**.** *Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Alors f est cyclique pour S_b si et seulement s'il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\|1 - p_n f\|_b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Supposons que f est cyclique pour S_b. Alors

$$\operatorname{span}_{\mathcal{H}(b)}(S_b^n f : n \geq 0) = \overline{\{pf : p \in \mathcal{P}\}} = \mathcal{H}(b).$$

Soit $g \in \mathcal{H}(b)$. Puisque $1 \in \mathcal{H}(b)$, il vient par définition qu'il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\|p_n f - 1\|_b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Réciproquement, supposons maintenant qu'il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que $\|p_n f - 1\|_b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $p \in \mathcal{P}$. Alors l'application $M_p : g \in \mathcal{H}(b) \longmapsto pg \in \mathcal{H}(b)$ est bornée. En effet, pour $p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k \in \mathcal{P}$, on a $M_p g(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k g(z) = \sum_{k=0}^N a_k S_b^k g(z)$ et

$$\|M_p g\|_b \leq \sum_{k=0}^N |a_k| \, \|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}^k \, \|g\|_b \, .$$

Donc on obtient

$$\|p(p_n f) - p\|_b \le \|M_p\| \, \|p_n f - 1\|_b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $g \in \mathcal{H}(b)$. Par densité de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{H}(b)$ (voir le théorème 1.38), il existe une suite de polynômes $(q_n)_{n\ge 0}$ telle que $\|q_n - g\|_b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit, pour $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \ge N,\ \|p(p_n f) - p\|_b \le \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1}$$

et il existe $q \in \mathcal{P}$ telle que

$$\|q - g\|_b \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, la propriété (2.1) étant vraie pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a en particulier avec $p = q$,

$$\forall n \ge N,\ \|qp_n f - g\|_b \le \|qp_n f - q\|_b + \|q - g\|_b \le \varepsilon.$$

Ainsi, $g \in \overline{\{pf : p \in \mathcal{P}\}} = \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(S_b^n f : n \ge 0)$ et f est cyclique pour S_b. $\square$

Lemme 2.2. *Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que f est cyclique pour S_b. Alors f est extérieure.*

Démonstration. D'après le lemme 2.1, puisque f est cyclique pour S_b, il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\ge 0}$ telle que $\|p_n f - 1\|_b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où, comme $\mathcal{H}(b)$ est contractivement contenu dans H^2, il vient que $\|p_n f - 1\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi f est un vecteur cyclique pour S dans H^2 et d'après le théorème 1.21, f est une fonction extérieure. $\square$

La cyclicité de S_b a été initiée par S. Grivaux et E. Fricain dans [52] puis largement étudiée par A. Bergman dans [16]. En particulier, il a été montré que si $(a, b) \in$ (HCR) et b est extérieure, alors b est un vecteur cyclique pour S_b (voir [52, Proposition 5.7]). Nous pouvons en fait nous passer de l'hypothèse (HCR). Nous avons pour cela besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit $n \ge 0$. Il existe un unique polynôme $P_n \in \mathcal{P}_n$, l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à n, tel que $T_{\overline{a}} P_n = z^n$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{P}_{\le n}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Alors, comme $a(0) \ne 0$, on vérifie aisément que $T_{\overline{a}} \in \mathcal{P}_{\le n}$ et que $T_{\overline{a}} : \mathcal{P}_{\le n} \longrightarrow \mathcal{P}_{\le n}$ est donc bien défini. De plus, comme a est une fonction extérieure, $T_{\overline{a}}$ est injective d'après la proposition 1.26 et donc $T_{\overline{a}}$ est une bijection de $\mathcal{P}_{\le n}$ dans $\mathcal{P}_{\le n}$. En particulier, il existe un unique $P_n \in \mathcal{P}_{\le n}$ tel que $T_{\overline{a}} P_n = z^n$. Enfin, si $P_n \in \mathcal{P}_{\le k}$ pour $k < n$, alors $T_{\overline{a}} P_n \in \mathcal{P}_{\le k}$ et donc $T_{\overline{a}} P_n \ne z^n$. Ainsi, on obtient nécessairement que $P_n \in \mathcal{P}_n$. $\square$

Corollaire 2.4. *Supposons que b est extérieure. L'élément $b \in \mathcal{H}(b)$ est cyclique pour S_b.*

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{H}(b)$ telle que $h \perp bz^n$ pour tout $n \ge 0$. Alors, d'après l'expression (1.15),

$$0 = \langle h \mid bz^n \rangle_b = \langle h \mid bz^n \rangle_2 + \left\langle h^+ \mid (bz^n)^+ \right\rangle_2.$$

Or, via les propriétés de la paire Pythagoricienne et le lemme 2.3, on a que

$$T_{\overline{b}}(bz^n) = P_+(|b|^2 z^n) = P_+((1 - |a|^2) z^n) = z^n - T_{\overline{a}}(az^n) = T_{\overline{a}}(P_n - az^n) \in \mathcal{M}(\overline{a}).$$

D'où, par identification et unicité de la représentation, $(bz^n)^+ = P_n - az^n$ et

$$\left\langle h^+ \mid (bz^n)^+ \right\rangle_2 = \left\langle h^+ \mid P_n \right\rangle_2 - \left\langle T_{\overline{b}} h \mid z^n \right\rangle_2 = \left\langle h^+ \mid P_n \right\rangle_2 - \langle h \mid bz^n \rangle_2.$$

On obtient que $0 = \langle h^+ \mid P_n \rangle_2$. Comme $P_n \in \mathcal{P}_n$, on a que $\bigvee(P_n : n \ge 0) = \mathcal{P}$ et par densité des polynômes dans H^2, $h^+ \equiv 0$. Par suite, par la relation $T_{\overline{b}} h = T_{\overline{a}} h^+ \equiv 0$, nous déduisons que $h \equiv 0$ puisque b est supposée extérieure et donc b est bien un vecteur cyclique pour S_b. $\square$

2.1 Préliminaires et outils fonctionnels

2.1.1 Quelques détails sur les espaces $\mathcal{H}(b)$ et la cyclicité de S_b

Un outil important lors de l'étude d'un espace à noyau reproduisant est l'algèbre des multiplicateurs associée. Considérons alors l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{H}(b)$ définie par

$$\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b)) := \{\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \varphi f \in \mathcal{H}(b),\, \forall f \in \mathcal{H}(b)\}. \tag{2.2}$$

En utilisant le théorème du graphe fermé, nous pouvons voir que si $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$, alors l'opérateur de multiplication M_φ par φ est borné sur $\mathcal{H}(b)$. Si nous posons $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} = \|M_\varphi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$, alors $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ est une algèbre de Banach, où $\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))$ est l'ensemble des applications linéaires continues sur $\mathcal{H}(b)$ muni de sa norme usuelle. Nous pouvons remarquer que $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b)) \subseteq H^\infty \cap \mathcal{H}(b)$, où l'inclusion est en général stricte. De plus, lorsque $\log(1-|b|) \in L^1(\mathbb{T})$, il est connu que cet algèbre possède beaucoup d'éléments : $\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ d'après [58, Theorem 24.6]. En particulier, pour tous $\lambda \in \mathbb{D}$ et $p \in \mathcal{P}$, les fonctions k_λ et p sont des multiplicateurs de $\mathcal{H}(b)$.

Nous déduisons le résultat suivant, portant sur le noyau reproduisant k_λ dans $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$.

Lemme 2.5. *Soit $|\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$. Alors*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} \overline{\mu}^n z^n - k_\mu \right\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Soient $z \in \mathbb{D}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ telle que $|\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$.
Par développement en série entière de $k_\mu : z \longmapsto (1-\overline{\mu}z)^{-1} \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, $k_\mu(z) = \sum_{n\geq 0} \overline{\mu}^n z^n$ et $k_\mu(z) - \sum_{n=0}^N \overline{\mu}^n z^n = \sum_{n\geq N+1} \overline{\mu}^n z^n$. D'où, en remarquant que $|\mu|\,\|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} < 1$, on obtient par les propriétés du reste d'une série (géométrique) convergente,

$$\begin{aligned}\left\| k_\mu(z) - \sum_{n=0}^{N} \overline{\mu}^n z^n \right\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} &\leq \sum_{n\geq N+1} |\mu|^n \,\|z^n\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} = \sum_{n\geq N+1} |\mu|^n \,\|S_b^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \\ &\leq \sum_{n\geq N+1} |\mu|^n \,\|S_b\|^n_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

□

Il a été montré dans [52] que si $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$, alors $f_1 f_2$ est cyclique pour S_b si et seulement si f_1 et f_2 sont cycliques pour S_b. Nous pouvons très légèrement améliorer ce résultat dans un sens, c'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.6. *Soient $f_1 \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ et $f_2 \in \mathcal{H}(b)$. Si f_1 et f_2 sont cycliques pour S_b, alors $f_1 f_2$ est cyclique pour S_b.*

Démonstration. Supposons que $f_1 \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ et $f_2 \in \mathcal{H}(b)$ sont cycliques pour S_b. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un polynôme p tel que $\|pf_1 - 1\|_b \leq \varepsilon$ et il existe un polynôme q tel que

$$\|qf_2 - 1\|_b \leq \frac{\varepsilon}{\|pf_1\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))}}.$$

Ainsi $f_1 f_2$ est cyclique pour S_b :

$$\|pqf_1f_2 - 1\|_b \leq \|pqf_1f_2 - pf_1\|_b + \|pf_1 - 1\|_b \leq \|pf_1\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} \|qf_2 - 1\|_b + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

□

Ce résultat nous permet de répondre à une question posée dans [52]. En effet, il a été remarqué que si $(a,b) \in$ (HCR) et b extérieure, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, bk_λ est cyclique pour S_b. Les auteurs ont posé la question de savoir si ce résultat est vraie sans l'hypothèse (HCR). Nous pouvons répondre positivement à cette question.

Corollaire 2.7. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, bk_λ est cyclique pour S_b.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.4, b est cyclique pour S_b. De plus, $k_\lambda \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ et k_λ est aussi cyclique pour S_b. En effet, il suffit de considérer la suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ constante définie par $p_n(z) = 1 - \overline{\lambda} z$ qui donne que $\|p_n k_\lambda - 1\|_b = 0$ dans le lemme 2.1. Ainsi, d'après le lemme 2.6, bk_λ est cyclique pour S_b. $\square$

Le résultat suivant est une très légère généralisation d'un résultat de densité qui apparaît dans [52, Lemma 2.1].

Lemme 2.8. *Soient $F \subset \mathbb{D}$ un ensemble avec un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que $|c| < 1$. Alors*

$$\mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}(k_\mu - cbk_\mu : \mu \in F) = \mathcal{H}(b).$$

Démonstration. Adaptons la preuve de [52, Lemma 2.1], valable sur $\mathbb{D}$. Soient $\mu \in F$ et $h \in \mathcal{H}(b)$ telle que $h \perp_b (k_\mu - cbk_\mu)$. D'après les égalités (1.16), on a

$$0 = \langle h \mid k_\mu - cbk_\mu \rangle_b = h(\mu) + \frac{b(\mu)}{a(\mu)} h^+(\mu) - \overline{c}\frac{h^+(\mu)}{a(\mu)}.$$

Autrement dit, on a $(ah)(\mu) = -(bh^+)(\mu) + \overline{c}h^+(\mu) = (-b(\mu) + \overline{c})h^+(\mu)$.
L'application $z \longmapsto [ah - (\overline{c} - b)h^+](z)$ étant analytique sur $\mathbb{D}$ et F étant un sous-ensemble de $\mathbb{D}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, on déduit que

$$ah = (-b + \overline{c})h^+ \text{ sur } \mathbb{D}. \tag{$\star$}$$

En multipliant par $\overline{b}$, on obtient $\overline{b}ah = (-|b|^2 + \overline{c}\overline{b})h^+ = -(|b|^2 - \overline{c}\overline{b})h^+$ sur $\mathbb{D}$. En utilisant la relation de la paire Pythagoricienne (a, b), $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$, on déduit via un passage aux limites radiales que

$$a(\overline{b}h - \overline{a}h^+) = -(1 - \overline{c}\overline{b})h^+ \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Par suite, puisque $\left|1 - \overline{c}\overline{b}\right| \geq |1 - |c|\,|b|| > 1 - |c| > 0$ et $a \neq 0$ p.p. sur $\mathbb{T}$, on a

$$\frac{\overline{b}h - \overline{a}h^+}{1 - \overline{c}\overline{b}} = -\frac{h^+}{a} \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Remarquons alors que $\frac{h^+}{a} \in H^2$ d'après la proposition 1.2 puisque $\frac{h^+}{a} \in L^2(\mathbb{T})$ avec a une fonction extérieure et $h^+ \in H^2$. De plus, puisque $P_+(\overline{b}h - \overline{a}h^+) = P_+(\overline{b}h) - P_+(\overline{a}h^+) = T_{\overline{b}}h - T_{\overline{a}}h^+ = 0$, $\overline{b}h - \overline{a}h^+ \in \overline{H^2_0}$ et, comme $(1 - \overline{c}\overline{b})^{-1} \in \overline{H^\infty}$, on a $\frac{h^+}{a} \in \overline{H^2_0}$. Finalement, $\frac{h^+}{a} \in H^2 \cap \overline{H^2_0} = \{0\}$ et $h^+ \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$. Ainsi $h \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ d'après $(\star)$ d'où

$$\operatorname{span}_{\mathcal{H}(b)}(k_\mu - cbk_\mu : \mu \in F) = \mathcal{H}(b). \qquad \square$$

Ce dernier résultat est utile en particulier pour obtenir de nouveaux exemples de vecteurs cycliques pour S_b. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.9. *Soit $c \in \mathbb{C}$ vérifiant $|c| < 1$. Alors $1 - cb$ est cyclique pour S_b.*

Démonstration. Prenons $h \in \mathcal{H}(b)$ telle que $h \perp_b (1 - cb)z^n$ pour tout $n \geq 0$. Dans ce cas, on obtient

$$\langle h \mid (1 - cb)z^n \rangle_b = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considérons $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} < 1$. Alors en particulier

$$\mu^n \langle h \mid (1 - cb)z^n \rangle_b = \langle h \mid (1 - cb)\overline{\mu}^n z^n \rangle_b = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par linéarité, on obtient également que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\langle h \mid (1-cb)\sum_{k=0}^{N} \overline{\mu}^k z^k \right\rangle_b = 0. \tag{$\star$}$$

Or, d'après le lemme 2.5, on a que

$$\left\| \sum_{k=0}^{N} \overline{\mu}^k z^k - k_\mu \right\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, par passage à la limite dans ($\star$), on déduit que $\langle h \mid (1-cb)k_\mu\rangle_b = 0$. Ainsi, on déduit que $h \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ en considérant $D\left(0, \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right)$ dans le lemme 2.8. Finalement,

$$\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(S_b^n(1-cb) : n \geq 0) = \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}((1-cb)z^n : n \geq 0) = \mathcal{H}(b),$$

d'où la cyclicité de $1 - cb$ pour S_b. □

Exemple 1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, k_λ^b est cyclique pour S_b. En effet, pour $\lambda \in \mathbb{D}$, remarquons que $k_\lambda^b = (1 - \overline{b(\lambda)}b)k_\lambda$. Puisque $\left|\overline{b(\lambda)}\right| < 1$, alors $(1 - \overline{b(\lambda)}b)$ est cyclique pour S_b d'après le lemme 2.9. De plus, $k_\lambda \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ est cyclique pour S_b donc nous obtenons que k_λ^b est cyclique pour S_b en utilisant le lemme 2.6. On obtient ainsi une généralisation de [52, Proposition 5.7] qui a été prouvé avec l'hypothèse $(a, b) \in$ (HCR).

Dans la théorie des espaces de De Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$, la famille des mesures d'Alexandrov-Clark associée au symbole b se révèle être un autre outil important. Rappelons que pour b dans la boule unité fermée de H^∞ et pour $\alpha \in \mathbb{T}$, il existe une unique mesure de Borel finie et positive μ_α sur $\mathbb{T}$ telle que

$$\frac{1 - |b(z)|^2}{|1 - \overline{\alpha}b(z)|^2} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2}\, d\mu_\alpha(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{2.3}$$

La famille $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{T}}$ est appelée *la famille des mesures d'Aleksandrov-Clark* de b, dont l'existence est donnée par le théorème d'Herglotz [57, Corollary 3.7] puisque $z \longmapsto \frac{1-|b(z)|^2}{|1-\overline{\alpha}b(z)|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+\overline{\alpha}b}{1-\overline{\alpha}b}\right)$ est une fonction harmonique (étant la partie réelle d'une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$) et positive sur $\mathbb{D}$. En utilisant les propriétés classiques de l'intégrale de Poisson, on voit que si on fait tendre z radialement vers $\zeta \in \mathbb{T}$ dans (2.3), on obtient que

$$F_\alpha = \frac{a}{1 - \overline{\alpha}b} \text{ et } |F_\alpha(\zeta)|^2 = \frac{d\mu_\alpha^{(a)}}{dm}(\zeta), \quad \text{p.p. } \zeta \in \mathbb{T}, \tag{2.4}$$

où $\mu_\alpha^{(a)}$ est la partie absolument continue de la mesure μ_α et $d\mu_\alpha^{(a)}/dm$ correspond à la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue m. En particulier, $F_\alpha \in H^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$. Nous pouvons nous référer à [58, Section 24.5] pour de plus amples détails. Nous avons également, pour $\alpha \in \mathbb{T}$, l'égalité suivante :

$$T_{1-\overline{\alpha}b}T_{\overline{F_\alpha}}k_\lambda = (1 - \overline{\alpha}b)\overline{F_\alpha(\lambda)}k_\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Alors $T_{1-\overline{\alpha}b}T_{\overline{F_\alpha}}$ est un opérateur défini sur un domaine dense de H^2. Le résultat suivant rassemble quelques propriétés utiles pour la suite sur cet opérateur $T_{1-\overline{\alpha}b}T_{\overline{F_\alpha}}$.

Lemme 2.10 ([58, Theorems 24.23 et 29.16])**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{T}$. Alors*

(i) On a $T_{1-\overline{\alpha}b}T_{\overline{F_\alpha}}$ est une isométrie de H^2 dans $\mathcal{H}(b)$ et

$$\mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}((1-\overline{\alpha}b)z^n : n \geq 0) = T_{1-\overline{\alpha}b}T_{\overline{F_\alpha}}H^2.$$

(ii) On a $T_{1-\overline{\alpha}b}T_{\overline{F_\alpha}}$ est surjective si et seulement si la mesure μ_α est absolument continue par rapport à m.

Comme déjà vu en section 1.3, un important sous-espace de $\mathcal{H}(b)$ est $\mathcal{M}(a) = aH^2$ muni de la norme image définie par

$$\|af\|_{\mathcal{M}(a)} = \|f\|_2, \qquad f \in H^2.$$

Il est connu que $\mathcal{M}(a)$ est contractivement contenu dans $\mathcal{H}(b)$ (voir [58, Theorem 23.2]), signifiant alors que pour tout $f \in H^2$, $af \in \mathcal{H}(b)$ et

$$\|af\|_b \leq \|af\|_{\mathcal{M}(a)} = \|f\|_2. \tag{2.5}$$

De plus, nous pouvons caractériser la densité de aH^2 dans $\mathcal{H}(b)$ en termes de fonctions dites rigides. Rappelons à ce titre qu'une fonction $f \in H^1$, $f \not\equiv 0$, est dite *rigide* si, pour toute fonction $g \in H^1$, $g \not\equiv 0$, l'hypothèse que

$$\arg(g) = \arg(f), \qquad \text{p.p. sur } \mathbb{T},$$

implique l'existence d'une constante réelle et positive λ telle que $g = \lambda f$. Il vient alors que les fonctions rigides de H^1, de norme égale à 1, coïncident avec les points exposés de la boule unité fermée de H^1 (voir [58, Theorem 6.15]). Remarquons que si $b(0) = 0$ et si la mesure d'Alexandrov-Clark μ_α de b est absolument continue par rapport à m pour $\alpha \in \mathbb{T}$, alors d'après (2.3) et (2.4), la fonction $F_\alpha = a/(1-\overline{\alpha}b)$ est de norme égale à 1 dans H^2. Rappelons aussi que pour presque tout $\alpha \in \mathbb{T}$, μ_α est absolument continue par rapport à m d'après [58, Theorem 24.19]. Le résultat suivant permet donc de caractériser la densité de aH^2 via cette notion de fonction rigide.

Théorème 2.11 ([58, Corollary 29.4])**.** *Soit b un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞. Supposons que $b(0) = 0$ et prenons $\alpha \in \mathbb{T}$ telle que μ_α est absolument continue par rapport à m. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) Le sous-espace aH^2 est dense dans $\mathcal{H}(b)$.

(ii) La fonction F_α^2 est rigide.

Nous terminons cette partie par le calcul de g^+ pour certains $g \in \mathcal{H}(b)$. Celui-ci nous sera utile dans l'étude du problème de complétude relatif à la cyclicité.

Lemme 2.12. *Soient $f \in \mathcal{H}(b)$ et $\lambda \in \mathbb{D}$. Alors $fk_\lambda \in \mathcal{H}(b)$ et*

$$(fk_\lambda)^+ = f^+k_\lambda + \frac{\overline{\lambda g(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)}}k_\lambda, \tag{2.6}$$

où $g \in H^2$ est définie par la relation (1.17).

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que $k_\lambda \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ et donc $fk_\lambda \in \mathcal{H}(b)$. D'après la relation (1.17), on a

$$T_{\overline{b}}(fk_\lambda) = P_+(\overline{b}fk_\lambda) = P_+(\overline{a}f^+k_\lambda + \overline{zg}k_\lambda) = P_+(\overline{a}f^+k_\lambda) + P_+(\overline{zg}k_\lambda).$$

Notons que $k_\lambda \in H^\infty$ et $P_+(\overline{zg}k_\lambda) = \overline{\lambda g(\lambda)}k_\lambda$. En effet, pour $h \in H^\infty$, on a les égalités suivantes :

$$\langle h \mid P_+(\overline{zg}k_\lambda)\rangle_2 = \langle h \mid \overline{zg}k_\lambda\rangle_2 = \langle zgh \mid k_\lambda\rangle_2 = \lambda g(\lambda)h(\lambda) = \lambda g(\lambda)\langle h \mid k_\lambda\rangle_2 = \left\langle h \mid \overline{\lambda g(\lambda)}k_\lambda \right\rangle_2.$$

On conclut par densité de H^∞ dans H^2. Enfin, en utilisant que $k_\lambda = T_{\overline{a}}\left(\frac{k_\lambda}{\overline{a(\lambda)}}\right)$, on a

$$T_{\overline{b}}(fk_\lambda) = T_{\overline{a}}(f^+k_\lambda) + T_{\overline{a}}\left(\frac{\overline{\lambda g(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)}}k_\lambda\right) = T_{\overline{a}}\left(f^+k_\lambda + \frac{\overline{\lambda g(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)}}k_\lambda\right).$$

L'égalité suit par identification dans la caractérisation (1.14). $\square$

2.1.2 Transformée de Cauchy et fonction de distribution

Introduisons ici la transformée de Cauchy définie pour une fonction f de $L^1(\mathbb{T})$ par

$$Cf(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z}\, dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}.$$

Remarquons que $Cf \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{T})$ et, plus précisément, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$Cf(z) = \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n) z^n, \quad \widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta}^n\, dm(\zeta), \quad n \geq 0.$$

Celle-ci est bien définie et vérifie plusieurs propriétés qui nous seront utiles pour la suite. Nous pouvons nous référer à [36, 57] pour certains détails sur ces transformées. Notamment, pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, nous avons les quatre propriétés suivantes.

1. On a $Cf \in \bigcap_{0<p<1} H^p$ et, si $f \geq 0$ m-p.p., Cf est extérieure. En effet, via la décomposition de Jordan de la mesure réelle $d\mu = f dm$, $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4) \in L^1(\mathbb{T})$ avec $f_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 4$. Par linéarité, $Cf = Cf_1 - Cf_2 + i(Cf_3 - Cf_4)$. Considérons alors $g \geq 0$ m-p.p.. On a, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[Cg(z)] = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\zeta)}{1-z\overline{\zeta}}\, dm(\zeta)\right) &= \int_{\mathbb{T}} g(\zeta)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z\overline{\zeta}}\right)\, dm(\zeta)\\ &= \int_{\mathbb{T}} g(\zeta)\frac{1-\mathrm{Re}(\overline{z}\zeta)}{\left|1-z\overline{\zeta}\right|^2}\, dm(\zeta) \geq 0.\end{aligned}$$

   D'après le deuxième point de la proposition 1.2, Cg est une fonction extérieure de H^p pour $0 < p < 1$. On déduit finalement que Cf_i, pour $i = 1, \ldots, 4$, est une fonction extérieure de H^p pour $0 < p < 1$. Par somme, $Cf \in H^p$ pour tout $0 < p < 1$ et si de plus $f \geq 0$ m-p.p., Cf est extérieure.

2. On a $Cf \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ si et seulement si $f \in \overline{H_0^1}$. En effet, avec l'écriture en série sur $\mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned}Cf \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{D} &\Longleftrightarrow \widehat{f}(n) = 0 \quad \forall n \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta}^n\, dm(\zeta) = 0 \quad \forall n \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \int_{\mathbb{T}} \overline{f(\zeta)}\zeta^n\, dm(\zeta) = 0 \quad \forall n \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \widehat{\overline{f}}(n) = 0 \quad \forall n \geq 0.\end{aligned}$$

   Le résultat suit d'après le théorème des frères F. et M. Riesz [36, Theorem 3.1].

3. On a $C(f) - f = \widehat{f}(0) - \overline{C(\overline{f})}$ p.p. sur $\mathbb{T}$. En effet, soient $\zeta \in \mathbb{T}$ et $z \in \mathbb{D}$. Alors

$$-1 + \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

   et on obtient

$$-\int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\, dm(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta - z}\, dm(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\, dm(\zeta) = (Pf)(z).$$

   Autrement dit, on a

$$-\widehat{f}(0) + \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z}\, dm(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}\, dm(\zeta) = (Pf)(z),$$

et donc

$$-\widehat{f}(0)+(Cf)(z)+\overline{C(\overline{f})}(z)=(Pf)(z).$$

Le premier point implique que, pour $f\in L^1(\mathbb{T})$, Cf a des limites radiales presque partout. De plus, $(Pf)(z)\underset{z\to\zeta}{\longrightarrow} f(\zeta)$ lorsque z tend radialement vers ζ (pour presque tout $\zeta\in\mathbb{T}$). On conclut finalement que presque partout sur $\mathbb{T}$,

$$-\widehat{f}(0)+Cf+\overline{C(\overline{f})}=f \text{ et } Cf-f=\widehat{f}(0)-\overline{C(\overline{f})}.$$

4. Si de plus $f,g\in H^2$, alors $\langle f\mid gk_\lambda\rangle_2=C(f\overline{g})(\lambda)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{D}$. En effet, pour $f,g\in H^2$ et $\lambda\in\mathbb{D}$, on a

$$\langle f\mid gk_\lambda\rangle_2=\int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\frac{\overline{g(\zeta)}}{1-\lambda\overline{\zeta}}\,dm(\zeta)=C(f\overline{g})(\lambda).$$

Il suit du premier point qu'en particulier $Cf\in\mathcal{N}^+$ la classe de Smirnov. En général, $Cf\notin L^1(\mathbb{T})$ mais nous avons une version plus faible due à Kolmogorov ([36, Proposition 3.4.11]). Pour ce faire, rappelons que $L^{1,\infty}_0(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions mesurables $h:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{C}$ telles que

$$\lambda_h(t)=o\left(\frac{1}{t}\right),\qquad \text{lorsque } t\longrightarrow\infty,$$

où, pour $t>0$, $\lambda_h(t)=m\left(\{\zeta\in\mathbb{T}:|h(\zeta)|>t\}\right)$ est la fonction distribution de h. Notons que cet espace contient les fonctions de $L^1(\mathbb{T})$ et qu'il est stable par $L^\infty(\mathbb{T})$.

1. On a $L^1(\mathbb{T})\subset L^{1,\infty}_0(\mathbb{T})$. En effet, pour $h\in L^1(\mathbb{T})$ et $t>0$,

$$t\lambda_h(t)=t\left(\int_{|h(\zeta)|>t} dm(\zeta)\right)=\int_{\mathbb{T}} t\mathbb{1}_{|h(\zeta)|>t}\,dm(\zeta)\leq\int_{|h(\zeta)|>t}|h(\zeta)|\,\,dm(\zeta)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

par le théorème de convergence dominée puisque $h\in L^1(\mathbb{T})$.

2. Stabilité par $L^\infty(\mathbb{T})$: si $h\in L^{1,\infty}_0(\mathbb{T})$ et $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $\varphi h\in L^{1,\infty}_0(\mathbb{T})$. En effet, si $\varphi\equiv 0$, le résultat est trivial. Sinon, en supposant $\varphi\not\equiv 0$, puisque

$$\{\zeta\in\mathbb{T}:|\varphi(\zeta)h(\zeta)|>t\}\subset\left\{\zeta\in\mathbb{T}:|h(\zeta)|>\frac{t}{\|\varphi\|_\infty}\right\},$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} tm\left(\{\zeta\in\mathbb{T}:|\varphi(\zeta)h(\zeta)|>t\}\right)&\leq tm\left(\left\{\zeta\in\mathbb{T}:|h(\zeta)|>\frac{t}{\|\varphi\|_\infty}\right\}\right)\\ &=\|\varphi\|_\infty\frac{t}{\|\varphi\|_\infty}\lambda_h\left(\frac{t}{\|\varphi\|_\infty}\right)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0,\end{aligned}$$

puisque $h\in L^{1,\infty}_0(\mathbb{T})$.

Théorème 2.13 (Kolmogorov)**.** *Soit $f\in L^1(\mathbb{T})$. Alors $Cf\in L^{1,\infty}_0(\mathbb{T})$.*

En particulier, la transformée de Cauchy C envoie $L^1(\mathbb{T})$ dans $H^{1,\infty}_0:=L^{1,\infty}_0(\mathbb{T})\cap\mathcal{N}^+$. Nous avons deux représentations des fonctions de $H^{1,\infty}_0$ dues à Aleksandrov ([2, 36, 63]), données par le théorème suivant.

Théorème 2.14 (Aleksandrov)**.** *Soit $f\in H^{1,\infty}_0$. Alors, pour tout $z\in\mathbb{D}$, on a*

$$f(z)=\lim_{A\to+\infty}\int_{|f|\leq A}\frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z}\,dm(\zeta),\tag{2.7}$$

et

$$f(0)=\lim_{A\to+\infty}\int_{|f|\leq A}\frac{f(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}\,dm(\zeta).\tag{2.8}$$

En utilisant ce théorème d'Aleksandrov à deux reprises, nous déduisons le corollaire suivant caractérisant les fonctions constantes dans $H_0^{1,\infty}$.

Corollaire 2.15. *Soient $f, \overline{f} \in H_0^{1,\infty}$. Alors f est une fonction constante.*

Démonstration. D'après (2.7), puisque $\overline{f} \in H_0^{1,\infty}$, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\overline{f(z)} = \lim_{A\to+\infty} \int_{|\overline{f}|\leq A} \frac{\overline{f(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}z}\, dm(\zeta) = \overline{\lim_{A\to+\infty} \int_{|f|\leq A} \frac{f(\zeta)}{1-\zeta\overline{z}}\, dm(\zeta)}.$$

Or, puisque $f \in H_0^{1,\infty}$, (2.8) donne

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{|f|\leq A} \frac{f(\zeta)}{1-\zeta\overline{z}}\, dm(\zeta) = f(0).$$

On conclut que $\overline{f(z)} = \overline{f(0)}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et par suite que f est une fonction constante. □

2.2 Un problème de complétude en lien avec la cyclicité

Nous allons montrer une intéressante connexion entre les vecteurs cycliques de S_b et un problème de complétude. Ce lien va nous permettre d'utiliser le lemme 2.12 afin d'obtenir plusieurs conditions suffisantes pour la cyclicité dans la section prochaine. Nous commençons en premier lieu par nous placer dans l'espace de Hardy H^2 afin de motiver nos résultats dans $\mathcal{H}(b)$.

2.2.1 Problème de complétude dans l'espace de Hardy H^2

Lemme 2.16. *Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ et $f \in H^2$ une fonction extérieure. Alors*

$$\mathit{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = H^2.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in H^2$ telle que $\varphi \perp_2 fk_{\lambda_n}$ pour tout $n \geq 1$. Alors

$$0 = \langle \varphi \mid fk_{\lambda_n}\rangle_2 = C(\varphi\overline{f})(\lambda_n).$$

Puisque $C(\varphi\overline{f}) \in \mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N}$ s'annule en $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$, on a $C(\varphi\overline{f}) \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$. En particulier, il existe $\psi \in H_0^1$ telle que $\varphi\overline{f} = \overline{\psi}$ et par suite $\varphi = \frac{\overline{\psi}}{\overline{f}}$. On déduit que $\varphi \in H^2 \cap \overline{H_0^2} = \{0\}$ puisque $\overline{\varphi} = \frac{\psi}{f} \in \mathcal{N}^+ \cap L^2(\mathbb{T}) = H^2$. □

Lemme 2.17. *Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ et $f \in H^2$ avec $f = \theta f_e$ où θ et f_e sont respectivement les parties intérieure et extérieure de f. Alors*

$$\mathit{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \theta H^2.$$

Démonstration. Puisque $f_e \in H^2$ et $k_{\lambda_n} \in H^\infty$, l'inclusion $\subset$ est claire. Il nous reste seulement à considérer l'inclusion $\supset$: soient $h \in H^2$ et $p \in \bigvee(k_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Alors, puisque θ est une fonction intérieure,

$$\|\theta h - pf\|_2 = \|\theta h - p\theta f_e\|_2 = \|h - pf_e\|_2 .$$

Comme f_e est une fonction extérieure, d'après le lemme 2.16, il existe $q \in \bigvee(k_{\lambda_n} : n \geq 1)$ tel que $\|h - qf_e\|_2 \leq \varepsilon$. En prenant $p = q$, on obtient que $\|\theta h - pf\|_2 = \|h - pf_e\|_2 \leq \varepsilon$ et donc $\theta h \in \mathrm{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. □

Les deux lemmes précédents 2.16 et 2.17 permettent de déduire trivialement le corollaire suivant.

Corollaire 2.18. *Soient* $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ *vérifiant* $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ *et* $f \in H^2$*. Alors*

$$\mathit{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = H^2 \iff f \text{ est extérieure.}$$

Remarque 2.19. Justifions dès maintenant ce choix de considérer des suites qui ne vérifient pas la condition de Blaschke. Le but étant d'énoncer des résultats globaux sur des fonctions extérieures de H^2 et $\mathcal{H}(b)$, il arrive qu'il existe alors des familles $(fk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ non complètes dans H^2 pour $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{D}$ vérifiant la condition de Blaschke $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) < \infty$. En effet, considérons par exemple la fonction extérieure $f : z \longmapsto 1+z$ et supposons alors que $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ est une suite de Blaschke. Posons maintenant $\varphi = Bz \in H^2$ où B est un produit de Blaschke associé à la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned}\langle \varphi \mid fk_{\lambda_n}\rangle_2 = \langle Bz \mid (1+z)k_{\lambda_n}\rangle_2 &= \langle Bz \mid k_{\lambda_n}\rangle_2 + \langle Bz \mid zk_{\lambda_n}\rangle_2 \\ &= \lambda_n B(\lambda_n) + \langle B \mid k_{\lambda_n}\rangle_2 = \lambda_n B(\lambda_n) + B(\lambda_n) = 0.\end{aligned}$$

D'où $\varphi \perp \mathrm{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$ et $\mathrm{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) \neq H^2$, bien que f soit une fonction extérieure.
Cet exemple met aussi en lumière le fait bien connu suivant (1.3), qui suffit aussi à justifier ce choix : si B est le produit de Blaschke associé à la même suite de Blaschke $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, alors

$$\mathrm{span}_{H^2}(k_{\lambda_n} : n \geq 1) = H^2 \ominus BH^2 \neq H^2.$$

2.2.2 Problème de complétude dans $\mathcal{H}(b)$

Dans cette partie, nous allons discuter du problème de complétude de la suite $(fk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{H}(b)$, où $f \in \mathcal{H}(b)$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifie $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$. Commençons par une première observation.

Lemme 2.20. *Soient* $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ *vérifiant* $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ *et* $f \in \mathcal{H}(b)$*. Si*

$$\mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b),$$

alors f *est une fonction extérieure.*

Démonstration. Soient $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction $g \in \bigvee(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$ telle que $\|p-g\|_b \leq \varepsilon$. D'après (1.15), on a que $\|p-g\|_2 \leq \varepsilon$, et donc $p \in \mathrm{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Or, $\mathcal{P}$ est dense dans H^2, d'où

$$\mathrm{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = H^2.$$

On conclut avec le corollaire 2.18, impliquant que f est extérieure. $\square$

Remarque 2.21. Nous pouvons donner une seconde preuve de ce résultat. En effet, en supposant que $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$, et en remarquant que $1 \in \mathcal{H}(b) \subset H^2$, on a alors que $1 \in \mathrm{span}_{H^2}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \theta H^2$ où θ est la partie intérieure de f d'après le lemme 2.17. Donc $1 \in \theta H^2$, et il vient que θ est une constante unimodulaire par unicité de la décomposition 1.5. Autrement dit, f est une fonction extérieure.

Ainsi, lors de l'étude de la complétude de $(fk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{H}(b)$, nous supposerons sans perte de généralité que f **est une fonction extérieure**. Rappelons que la cyclicité de S_b fait intervenir l'espace fermé engendré par $z^n f$, $n \geq 1$, où $f \in \mathcal{H}(b)$. Nous allons faire un lien avec l'espace fermé engendré par $k_\lambda f$, $|\lambda| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$. C'est l'objet de ce prochain lemme, inspiré par [57, Theorem 5.5].

Lemme 2.22. *On a*

$$\mathit{span}_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))}(z^n : n \geq 0) = \mathit{span}_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))}\left(k_\mu : |\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right). \tag{2.9}$$

Démonstration. Procédons par double inclusion.

- $\supset$: Le lemme 2.5 implique que $k_\mu \in \text{span}_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))}(z^n : n \geq 0)$ en considérant la suite de fonctions $\left(\sum_{n=0}^{N} \overline{\mu}^n z^n\right)_{N\geq 0}$. L'inclusion découle par linéarité et passage à l'adhérence dans $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$.
- $\subset$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que, pour $n = 0$, on obtient l'inclusion souhaitée puisque $z^0 = k_0 \in \bigvee \left(k_\mu : |\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right)$. La suite est inspirée de [57, Theorem 5.5].

  Pour $n \geq 1$, considérons $\zeta := e^{\frac{2i\pi}{n}}$, une racine n-ième de l'unité. Considérons aussi, pour $0 < r < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$, la fonction

$$g_r := \frac{k_r + k_{r\zeta} + \cdots + k_{r\zeta^{n-1}} - nk_0}{nr^n} \in \bigvee \left(k_\mu : |\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right).$$

  Montrons alors que $g_r(z) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} z^n$ dans $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$. En effet, tout d'abord, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} g_r(z) &= \frac{1}{nr^n}\left(\sum_{k\geq 0} r^k z^k + \sum_{k\geq 0} r^k \zeta^k z^k + \cdots + \sum_{k\geq 0} r^k \zeta^{(n-1)k} z^k - n\right) \\ &= \frac{1}{nr^n} \sum_{k\geq 1} r^k z^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{ik}\right). \end{aligned}$$

  Remarquons maintenant que, pour $\zeta^k \neq 1$, $\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{ik} = \frac{1-\zeta^{kn}}{1-\zeta^k} = 0$. De plus, par propriété de l'exponentielle complexe, $\zeta^k \neq 1$ si et seulement si $n \nmid k$. Autrement dit, on obtient que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{ik} = \begin{cases} n & \text{si } k = nl,\ l \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{1-\zeta^{nk}}{1-\zeta^k} = 0 & \text{si } k \notin n\mathbb{N} \end{cases}.$$

  Ainsi, en sommant sur les multiples de n, on obtient

$$g_r(z) = \frac{1}{r^n} \sum_{l\geq 1} r^{ln} z^{ln} = \sum_{l\geq 1} r^{(l-1)n} z^{ln} \text{ et } g_r(z) - z^n = \sum_{l\geq 2} r^{(l-1)n} z^{ln},$$

  d'où

$$\begin{aligned} \|g_r(z) - z^n\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} &\leq \sum_{l\geq 2} r^{(l-1)n} \|S_b\|^{ln}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} = \sum_{l\geq 1} r^{ln} \|S_b\|^{(l+1)n}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \\ &= \|S_b\|^n_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))} \sum_{l\geq 1} \left[\left(r \|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right)^n\right]^l = \frac{r^n \|S_b\|^{2n}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}}{1 - r\|S_b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, on obtient que $z^n \in \text{span}_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))}\left(k_\mu : |\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right)$ en considérant la suite de fonctions $(g_r)_{0<r<\|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}}$. L'inclusion découle par linéarité et passage à l'adhérence dans $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$. □

Nous déduisons immédiatement le résultat suivant qui propose une nouvelle approche de la cyclicité pour le shift dans l'espace $\mathcal{H}(b)$.

Corollaire 2.23. *Soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Alors*

$$\mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}(z^n f : n \geq 0) = \mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}\left(k_\mu f : |\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right).$$

En particulier, f est cyclique pour $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si

$$\mathit{span}_{\mathcal{H}(b)}\left(k_\mu f : |\mu| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right) = \mathcal{H}(b).$$

Le lemme suivant exhibe un sous-espace fermé invariant par S_b. Notons que dans [5] une description "similaire" à celle de Beurling des sous-espaces invariants par S_b est donnée.

Lemme 2.24. *Soient $f \in \mathcal{H}(b)$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}\backslash\{0\}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$. Alors $span_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$ est un sous-espace fermé invariant par S_b.*

Démonstration. Observons tout d'abord que, puisque $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$S_b(fk_{\lambda_n}) = zf\frac{1}{1-\overline{\lambda_n}z} = -\frac{1}{\overline{\lambda_n}}f\frac{1-\overline{\lambda_n}z-1}{1-\overline{\lambda_n}z} = -\frac{1}{\overline{\lambda_n}}(f+fk_{\lambda_n}).$$

Il est alors suffisant de prouver que $f \in \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Supposons le contraire et procédons par l'absurde : $f \notin \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Alors il existe $h \in \mathcal{H}(b)$ telle que $h \perp_b fk_{\lambda_n}$ pour $n \geq 1$ et $\langle h \mid f\rangle_b \neq 0$. D'où, d'après les décompositions et expressions (1.15) et (2.6),

$$\begin{aligned}
0 = \langle h \mid fk_{\lambda_n}\rangle_b &= \langle h \mid fk_{\lambda_n}\rangle_2 + \left\langle h^+ \mid (fk_{\lambda_n})^+\right\rangle_2 \\
&= \langle h \mid fk_{\lambda_n}\rangle_2 + \left\langle h^+ \mid f^+k_{\lambda_n}\right\rangle_2 + \frac{\lambda_n g(\lambda_n)}{a(\lambda_n)}h^+(\lambda_n) \\
&= C(h\overline{f})(\lambda_n) + C(h^+\overline{f^+})(\lambda_n) + \frac{\lambda_n g(\lambda_n)}{a(\lambda_n)}h^+(\lambda_n).
\end{aligned}$$

En multipliant par $a(\lambda_n)$, on obtient que

$$0 = a(\lambda_n)C(h\overline{f})(\lambda_n) + a(\lambda_n)C(h^+\overline{f^+})(\lambda_n) + \lambda_n g(\lambda_n)h^+(\lambda_n).$$

Puisque $C(h\overline{f}), C(h^+\overline{f^+}) \in \mathcal{N}^+$, l'application $z \longmapsto aC(h\overline{f}) + aC(h^+\overline{f^+}) + zgh^+ \in \mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N}$ s'annule en $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ donc $aC(h\overline{f}) + aC(h^+\overline{f}^+) + zgh^+ \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$. En particulier,

$$a(0)C(h\overline{f})(0) + a(0)C(h^+\overline{f^+})(0) = 0,$$

et puisque $a(0) \neq 0$, on obtient la contradiction suivante :

$$0 = C(h\overline{f})(0) + C(h^+\overline{f^+})(0) = \langle h \mid f\rangle_2 + \left\langle h^+ \mid f^+\right\rangle_2 = \langle h \mid f\rangle_b.$$

Donc $f \in \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$ et on déduit finalement la stabilité de $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$ par S_b par linéarité et passage à l'adhérence dans $\mathcal{H}(b)$. □

Ce dernier corollaire, déduit du lemme 2.24 et du corollaire 2.23, permet de donner enfin une caractérisation des vecteurs cycliques pour S_b en faisant le lien avec notre problème de complétude.

Corollaire 2.25. *Soit $f \in \mathcal{H}(b)$ une fonction extérieure. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La fonction f est cyclique pour S_b.

(ii) Pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$, on a

$$span_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b).$$

Démonstration.
(i) $\Longrightarrow$ *(ii)* : Considérons $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ et prenons $f \in \mathcal{H}(b)$ cyclique pour S_b. Sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout $n \geq 1$, $\lambda_n \neq 0$. D'après le lemme 2.24, $S_b\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) \subset \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. En particulier, pour tout $p \in \mathcal{P}$, $pf \in \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$ et donc

$$\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(pf : p \in \mathcal{P}) \subset \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1).$$

Or, puisque f est cyclique pour S_b, on déduit que $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$.

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)* : Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset D\left(0, \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right)$. On déduit que $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ et alors $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$ par hypothèse. L'implication est vérifiée avec le corollaire 2.23. □

2.3 Résultat principal : une condition suffisante

Théorème 2.26. *Soit $f \in \mathcal{H}(b)$ une fonction extérieure.*
Si $\frac{b}{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$ pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$. En particulier, f est cyclique pour S_b.

Démonstration. Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ une suite vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ et $h \in \mathcal{H}(b)$ telle que $h \perp_b fk_{\lambda_n}$ pour $n \geq 1$. En suivant les mêmes calculs que dans la preuve du lemme 2.24, on obtient directement que

$$aC(h\overline{f}) + aC(h^+\overline{f^+}) + zgh^+ \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{D}. \tag{$\star$}$$

En passant aux limites radiales, on obtient que

$$aC(h\overline{f}) + aC(h^+\overline{f^+}) + zgh^+ = 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Rappelons que $g \in H^2$ vérifie $\overline{b}f = \overline{a}f^+ + \overline{zg}$ p.p. sur $\mathbb{T}$ d'après (1.17), d'où l'égalité

$$aC(h\overline{f}) + aC(h^+\overline{f^+}) - a\overline{f^+}h^+ + b\overline{f}h^+ = 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

En multipliant par $\overline{b}$ et en utilisant la relation $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$, on obtient que

$$a\left(\overline{b}C(h\overline{f}) + \overline{b}C(h^+\overline{f^+}) - \overline{b}\overline{f^+}h^+\right) + (1-|a|^2)\overline{f}h^+ = 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Puisque $a \neq 0$ et $f \neq 0$ p.p. sur $\mathbb{T}$, on déduit que

$$\frac{1}{\overline{f}}\left(\overline{b}C(h\overline{f}) + \overline{b}C(h^+\overline{f^+}) - \overline{b}\overline{f^+}h^+ - \overline{a}\overline{f}h^+\right) = -\frac{h^+}{a} \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Or, puisque $h \in \mathcal{H}(b)$, il existe $h_1 \in H^2$ telle que $\overline{b}h = \overline{a}h^+ + \overline{z}\overline{h_1}$ p.p. sur $\mathbb{T}$ d'après (1.17) d'où

$$\frac{1}{\overline{f}}\left(\overline{b}C(h\overline{f}) + \overline{b}C(h^+\overline{f^+}) - \overline{b}\overline{f^+}h^+ - \overline{b}h\overline{f} + \overline{z}\overline{h_1}\overline{f}\right) = -\frac{h^+}{a} \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Posons maintenant $\varphi = h\overline{f} + h^+\overline{f^+} \in L^1(\mathbb{T})$. Alors on a que

$$\frac{h^+}{a} = -\frac{\overline{b}(C(\varphi)-\varphi) + \overline{z}\overline{h_1}\overline{f}}{\overline{f}} = -\frac{\overline{b}}{\overline{f}}(C(\varphi)-\varphi) - \overline{z}\overline{h_1} \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

Par suite, $\frac{h^+}{a} \in \mathcal{N}^+ \cap L_0^{1,\infty}(\mathbb{T}) = H_0^{1,\infty}$ puisque

- $\frac{h^+}{a} \in \mathcal{N}^+$ car $h^+ \in H^2 \subset \mathcal{N}^+$ et $a \in H^\infty$ est extérieure ;
- $C(\varphi) - \varphi \in L_0^{1,\infty}(\mathbb{T})$ d'après l'inclusion $L^1(\mathbb{T}) \subset L_0^{1,\infty}(\mathbb{T})$ et le théorème de Kolmogorov 2.13 ;
- $\frac{\overline{b}}{\overline{f}} \in L^\infty(\mathbb{T})$ par hypothèse et d'après la propriété de stabilité, $\frac{\overline{b}}{\overline{f}}(C(\varphi)-\varphi) \in L_0^{1,\infty}(\mathbb{T})$;
- $\overline{z}\overline{h_1} \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}) \subset L_0^{1,\infty}(\mathbb{T})$.

De plus, on a également que $\overline{\frac{h^+}{a}} \in \mathcal{N}^+ \cap L_0^{1,\infty}(\mathbb{T}) = H_0^{1,\infty}$ puisque

$$\overline{\frac{h^+}{a}} = -\frac{b}{f}\overline{(C(\varphi)-\varphi)} - zh_1 = -\frac{b}{f}(\overline{\widehat{\varphi}(0)} - C(\overline{\varphi})) - zh_1 \text{ p.p. sur } \mathbb{T}.$$

D'après le corollaire 2.15, on a alors que $\frac{h^+}{a}$ est une constante que nous notons $c \in \mathbb{C}$. D'après le théorème d'Aleksandrov 2.14, on déduit que

$$-\frac{b(z)}{f(z)}\left(\overline{\widehat{\varphi}(0)} - C(\overline{\varphi})(z)\right) - zh_1(z) = \overline{c}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

En évaluant cette égalité en $z = 0$, et en remarquant que $C(\varphi)(0) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(\zeta)\, dm(\zeta) = \widehat{\varphi}(0)$, on obtient que

$$\overline{c} = -\frac{b(0)}{f(0)} \left(\overline{\widehat{\varphi}(0)} - C(\overline{\varphi})(0) \right) = 0.$$

Ainsi $h^+ \equiv 0$ et on conclut que $aC(h\overline{f}) \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ i.e. $C(h\overline{f}) \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ d'après $(\star)$. Enfin, il existe alors $\psi \in H_0^1$ telle que $h\overline{f} = \overline{\psi}$ sur $\mathbb{D}$ i.e. $h = \frac{\overline{\psi}}{\overline{f}} \in H^2 \cap \overline{H_0^2} = \{0\}$, puisque l'on a $\overline{h} = \frac{\psi}{f} \in \mathcal{N}^+ \cap L^2(\mathbb{T}) = H^2$. □

Remarque 2.27.

1. Notons que la condition suffisante que $\frac{b}{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$ pour avoir la cyclicité n'est pas nécessaire. En effet, considérons $b(z) = \frac{1+z}{2}$ et $f(z) = z - i$ pour $z \in \mathbb{D}$. Alors $f \in \mathcal{H}(b)$ et $f(1) = 1 - i \neq 0$. Dans ce cas, f est cyclique pour S_b d'après [52, Corollary 4.2] et nous avons bien $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$ pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$ d'après le corollaire 2.25. Cependant, $\frac{b}{f} \notin L^\infty(\mathbb{T})$.
2. La condition suffisante $\frac{b}{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$ implique en particulier que l'ensemble

$$\underline{\mathcal{Z}(f)} := \left\{ \zeta \in \mathbb{T} : \liminf_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \mathbb{D}}} |f(z)| = 0 \right\} \subset \sigma(b) := \left\{ \zeta \in \mathbb{T} : \liminf_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \mathbb{D}}} |b(z)| < 1 \right\},$$

où $\sigma(b)$ est le *spectre au bord* de b. En effet, supposons qu'il existe $\zeta \in \mathbb{T}$ tel que $\zeta \in \underline{\mathcal{Z}(f)}$ et $\zeta \notin \sigma(b)$. Alors d'une part, il vient qu'il existe une suite $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $z_n \longrightarrow \zeta$ et $|f(z_n)| \longrightarrow 0$. D'une autre part, puisque $\zeta \notin \sigma(b)$, nous avons $\lim_{z\to\zeta} |b(z)| = 1$ et donc $|b(z_n)| \longrightarrow 1$. Nous obtenons donc une contradiction avec $\frac{b}{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Finalement, nous déduisons ce corollaire donnant à la fois une dernière condition suffisante simple à vérifier et une caractérisation de la cyclicité de l'élément $b \in \mathcal{H}(b)$.

Corollaire 2.28.

1. *Soit* $f \in \mathcal{H}(b)$ *vérifiant* $\inf_{\mathbb{D}} |f| > 0$. *Alors* f *est cyclique pour* S_b.
2. *La fonction* b *est cyclique pour* S_b *si et seulement si* b *est extérieure.*

Démonstration.

1. Puisque $\inf_{\mathbb{D}} |f| > 0$, alors d'une part f est extérieure d'après la proposition 1.2 et d'autre part $\frac{1}{f} \in H^\infty$. Puisque $b \in H^\infty$, on a en particulier que $\frac{b}{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$. On obtient finalement la cyclicité de f d'après le théorème 2.26.
2. Tout d'abord, d'après le corollaire 2.25, b est cyclique pour S_b si et seulement si pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$, $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(bk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$. Or, puisque $1 \in L^\infty(\mathbb{T})$, on obtient cette égalité par le théorème 2.26 si b est extérieure. De plus, si b est cyclique pour S_b, alors b est extérieure d'après le lemme 2.2. □

Exemple 2. On peut alors retrouver l'exemple 1 et le corollaire 2.7.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Alors $k_\lambda^b \in \mathcal{H}(b)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|k_\lambda^b(z)| = \left| \frac{1 - \overline{b(\lambda)}b(z)}{1 - \overline{\lambda}z} \right| \geq \frac{1 - |b(\lambda)|}{2} > 0.$$

Donc, il suit d'après le corollaire 2.28 que k_λ^b est cyclique pour S_b.
2. Si b est extérieure et $\lambda \in \mathbb{D}$, alors bk_λ est extérieure comme produit de deux fonctions extérieures. De plus, $b/bk_\lambda = 1/k_\lambda = 1 - \overline{\lambda}z \in L^\infty(\mathbb{T})$. Ainsi, le théorème 2.26 implique que bk_λ est cyclique pour S_b.

Dans la proposition 2.9, nous avons montré que si $|c| < 1$, la fonction $1 - cb$ est cyclique pour S_b. Nous allons retrouver ce résultat avec le corollaire 2.28 et caractériser complètement la cyclicité de $1 - cb$ en fonction du paramètre c.

Corollaire 2.29. *Soit $c \in \mathbb{C}$. La fonction $1-cb$ est cyclique pour S_b si et seulement si on a l'un des trois cas suivants :*

- $|c| < 1$.
- $|c| = 1$ *et* $\mu_{\overline{c}} \ll m$.
- $|c| > 1$ *et* $1 - cb$ *est extérieure.*

Démonstration. Nous allons traiter les 3 cas correspondant respectivement à $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$ et $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$.

1. Pour $|c| < 1$, $\inf_{\mathbb{D}} |1 - cb| \geq 1 - |c| > 0$. Donc $1-cb$ est cyclique pour S_b d'après le corollaire 2.28.
2. Pour $|c| = 1$, notons $\xi = \overline{c}$. D'après le lemme 2.10 (ii), on a
$$\operatorname{span}_{\mathcal{H}(b)}((1 - cb)z^n : n \geq 0) = T_{1-\overline{\xi}b}T_{\overline{F_\xi}}H^2,$$
où F_ξ est la fonction extérieure de H^2 définie par $F_\xi = \frac{a}{1-\overline{\xi}b}$. D'où, $1 - cb$ est cyclique pour S_b si et seulement si $T_{1-\overline{\xi}b}T_{\overline{F_\xi}}H^2 = \mathcal{H}(b)$. Or, il vient d'après le lemme 2.10 (i) que cela est équivalent au fait que μ_ξ est absolument continue par rapport à m i.e. $\mu_{\overline{c}} \ll m$.
3. Pour $|c| > 1$, supposons que $1 - cb$ est extérieure. Rappelons que d'après le corollaire 2.23, $1 - cb$ est cyclique pour S_b si et seulement si
$$\operatorname{span}_{\mathcal{H}(b)}\left((1 - cb)k_\lambda : |\lambda| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right) = \mathcal{H}(b).$$
Soit $f \in \mathcal{H}(b)$ telle que $f \perp_b (1 - cb)k_\lambda$ avec $|\lambda| < \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}$. D'après (1.16), on a
$$0 = \langle f \mid (1 - cb)k_\lambda\rangle_b = \langle f \mid k_\lambda\rangle_b - \overline{c}\,\langle f \mid bk_\lambda\rangle_b = f(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}f^+(\lambda) - \overline{c}\frac{f^+(\lambda)}{a(\lambda)}.$$
D'où $a(\lambda)f(\lambda) + b(\lambda)f^+(\lambda) - \overline{c}f^+(\lambda) = 0$. Or, l'application $z \longmapsto (af + bf^+ - \overline{c}f^+)(z)$ étant analytique sur $\mathbb{D}$, on a $af + bf^+ - \overline{c}f^+ \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ d'après le principe du prolongement analytique appliqué à $D\left(0, \|S_b\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(b))}\right)$. En multipliant par $\overline{a}$, on déduit que
$$|a|^2 f + \overline{a}(b - \overline{c})f^+ = (1 - |b|^2)f + \overline{a}(b - \overline{c})f^+ = 0.$$
Or, puisque $f \in \mathcal{H}(b)$, il existe $g \in H^2$ vérifiant $\overline{b}f = \overline{a}f^+ + \overline{zg}$ p.p. sur $\mathbb{T}$ d'après (1.17) et on a, p.p. sur $\mathbb{T}$,
$$0 = (1 - |b|^2)f + (b - \overline{c})(\overline{b}f - \overline{zg}) = f - \overline{c}\overline{b}f - (b - \overline{c})\overline{zg}.$$
On obtient ainsi presque partout sur $\mathbb{T}$ que
$$(b - \overline{c})\overline{zg} = (1 - \overline{c}\overline{b})f \text{ et } \frac{f}{b - \overline{c}} = \frac{\overline{zg}}{1 - \overline{c}\overline{b}}.$$
D'une part, on a $\frac{f}{b-\overline{c}} \in H^2$ car $f \in H^2$ et $|b - \overline{c}| \geq |c| - |b| \geq |c| - 1 > 0$. D'autre part, on a $\frac{\overline{f}}{\overline{b}-c} = \frac{zg}{1-cb} \in L^2(\mathbb{T}) \cap \mathcal{N}^+ = H^2$ car $1 - cb$ est extérieure et $zg \in H^2$. Donc, en remarquant que $\left(\frac{zg}{1-cb}\right)(0) = 0$, $\frac{f}{b-\overline{c}} \in H^2 \cap \overline{H^2_0} = \{0\}$ et $f \equiv 0$ d'où la cyclicité de $1 - cb$. $\square$

2.4 Quelques caractérisations et applications

Le but de cette dernière section est de caractériser les fonctions f et les suites $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)=\infty$ telles que $\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1)=\mathcal{H}(b)$. C'est l'objet des résultats suivants, qui s'appuient aussi sur des résultats de A. Bergman de [16].

Ce premier résultat se déduit instantanément de [16, Theorem 2] et du corollaire 2.25.

Corollaire 2.30. *Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)=\infty$ et $f\in\mathcal{H}(b)$ une fonction extérieure. Supposons de plus qu'il existe deux ensembles $E,F\subset\mathbb{T}$ tels que*

(i) $E\cup F=\mathbb{T}$;

(ii) $a^{-1}\chi_E\in L^2(\mathbb{T})$ et $f^{-1}\chi_F\in L^\infty(\mathbb{T})$.

Alors span$_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1)=\mathcal{H}(b)$.

On peut alors retrouver le résultat suivant, que nous avons déjà avec les corollaires 2.25 et 2.28.

Corollaire 2.31. *Si b est une fonction extérieure, alors span$_{\mathcal{H}(b)}(bk_{\lambda_n} : n\geq 1)=\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Considérons les ensembles

$$E=\left\{\zeta\in\mathbb{T} : |a(\zeta)|\geq\frac{1}{2}\right\}\text{ et }F=\left\{\zeta\in\mathbb{T} : |a(\zeta)|<\frac{1}{2}\right\}.$$

Alors on a $E\cup F=\mathbb{T}$ et $a^{-1}\chi_E\in L^\infty(\mathbb{T})\subset L^2(\mathbb{T})$ et $b^{-1}\chi_F\in L^\infty(\mathbb{T})$ puisque

$$\frac{1}{|a(\zeta)|}\leq 2\text{ sur }E\text{ et }\frac{1}{|b(\zeta)|}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ sur }F.$$ □

A. Aleman et B. Malmann ont montré par [5, Theorem 5.11] que si $\mathcal{E}$ est un sous-espace fermé invariant de S_b, alors $\dim(\mathcal{E}\ominus S_b\mathcal{E})=1$ et si $\psi\in\mathcal{E}\ominus S_b\mathcal{E}$, alors

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_\psi:=\left\{g\in\mathcal{H}(b) : \frac{g}{\psi}\in H^2, \frac{g}{\psi}\psi^+\in H^2\right\}. \tag{2.10}$$

Avec cette description, nous pouvons donner une caractérisation des espaces $\mathcal{H}(b)$ pour lesquelles la suite $(fk_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ est complète pour toute fonction extérieure $f\in\mathcal{H}(b)$.

Théorème 2.32. *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)=\infty$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour toute fonction extérieure $f\in\mathcal{H}(b)$, span$_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1)=\mathcal{H}(b)$.

(ii) Le sous-espace aH^2 est dense dans $\mathcal{H}(b)$.

Démonstration.
$(ii)\implies(i)$: Supposons sans perte de généralité que pour tout $n\geq 1$, $\lambda_n\neq 0$. Puisque f est extérieure, on a d'après le lemme 2.24 que

$$S_b\,\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1)\subset\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1).$$

D'après (2.10), il existe alors $\psi\in\mathcal{H}(b)$ telle que

$$\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1)=\left\{g\in\mathcal{H}(b) : \frac{g}{\psi}\in H^2, \frac{g}{\psi}\psi^+\in H^2\right\}=:\mathcal{E}_\psi.$$

De plus, comme $a\mathcal{H}(b)\subset aH^2\subset\mathcal{H}(b)$, $a\in\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ et on déduit que $a\mathcal{E}_\psi\subset\mathcal{E}_\psi$. D'où

$$a\,\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1)\subset\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n\geq 1). \tag{2.11}$$

Montrons maintenant que $aH^2 \subset \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Soient $h \in H^2$ et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 2.16, il existe $q \in \bigvee(k_{\lambda_n} : n \geq 1)$ tel que $\|h - qf\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Aussi, d'après (2.11), on voit que $aqf \in \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$ donc il existe $p \in \bigvee(k_{\lambda_n} : n \geq 1)$ tel que $\|aqf - pf\|_b \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On déduit alors, d'après (2.5), que

$$\|ah - pf\|_b \leq \|ah - aqf\|_b + \|aqf - pf\|_b \leq \|h - qf\|_2 + \|aqf - pf\|_b \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $aH^2 \subset \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Par hypothèse (ii), aH^2 étant dense dans $\mathcal{H}(b)$, on déduit que $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Remarquons que

$$\bigvee(ak_{\lambda_n} : n \geq 1) \subset aH^2 \subset \mathcal{H}(b).$$

Or, en particulier, d'après (i), on a $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(ak_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$ puisque a est extérieure, d'où la densité de aH^2 dans $\mathcal{H}(b)$. □

Corollaire 2.33. *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$. Supposons que $b(0) = 0$ et prenons $\alpha \in \mathbb{T}$ telle que μ_α est absolument continue par rapport à m. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) On a $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(ak_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$.

(ii) La fonction F_α^2 est rigide.

Démonstration.
$(i) \Longrightarrow (ii)$: Puisque

$$\bigvee(ak_{\lambda_n} : n \geq 1) \subset aH^2 \subset \mathcal{H}(b),$$

il vient d'après (i) que aH^2 est dense dans $\mathcal{H}(b)$. Ainsi, d'après le théorème 2.11, F_α^2 est une fonction rigide.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Supposons maintenant que F_α^2 est rigide. Alors, d'après le théorème 2.11, aH^2 est dense dans $\mathcal{H}(b)$. Ainsi, le théorème 2.32 implique que $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(ak_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$. □

Enfin, en combinant nos résultats avec ceux de Bergman de [16], nous pouvons, dans deux cas particuliers, caractériser notre problème de complétude.

Corollaire 2.34. *Soit μ_1 la mesure d'Aleksandrov-Clark de b associée au point 1 et qu'on suppose absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Supposons que $\phi = \frac{a}{1-b} = Fp$ où F^2 est un point exposé de H^1 et p un polynôme s'annulant en $\zeta_1, \ldots, \zeta_s \in \mathbb{T}$, $s \geq 1$. Soient de plus $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) = \infty$ et $f \in \mathcal{H}(b)$ une fonction extérieure. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) On a $\mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$.

(ii) Pour tout $1 \leq i \leq s$, $f(\zeta_i) \neq 0$.

Démonstration.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: [16, Theorem 1] montre que (ii) implique la cyclicité de f pour S_b. On conclut alors avec le corollaire 2.25, f étant supposée extérieure.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Remarquons que $1 \in \mathcal{H}(b) = \mathrm{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $q \in \bigvee(k_{\lambda_n} : n \geq 1)$ tel que $\|1 - fq\|_b \leq \varepsilon$. Pour $1 \leq i \leq s$, on a

$$|1 - f(\zeta_i)q(\zeta_i)| \leq C_{\zeta_i} \|1 - fq\|_b \leq C_{\zeta_i}\varepsilon.$$

D'où $f(\zeta_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq s$ puisque ε est choisi suffisamment petit. □

Remarque 2.35. Les hypothèses du corollaire 2.34 sont vérifiées lorsque b est une fonction rationnelle de la boule unité fermée de H^∞ et qui n'est pas un produit de Blaschke fini. Dans ce cas, a est aussi une fonction rationnelle et les points ζ_i qui interviennent dans la condition (ii) correspondant aux zéros de a sur $\mathbb{T}$.

Le cas où $b = \frac{1+I}{2}$ avec I une fonction intérieure non constante a été étudié par Fricain-Grivaux par [52, Theorem 5.1], et repris par Bergman avec [16, Proposition 12].

Corollaire 2.36. *Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|) = \infty$ et $f \in \mathcal{H}(b)$ une fonction extérieure. Soient $b = \frac{1+I}{2}$ et σ_1 la mesure d'Aleksandrov-Clark associée à I. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) On a $\text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1) = \mathcal{H}(b)$.

(ii) On a $f_{|\sigma_1} \neq 0$ σ_1-p.p.

Démonstration.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: [16, Proposition 12] montre que (ii) implique la cyclicité de f pour S_b. On conclut alors avec le corollaire 2.25, f étant supposée extérieure.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Remarquons que $1 \in \mathcal{H}(b) = \text{span}_{\mathcal{H}(b)}(fk_{\lambda_n} : n \geq 1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $q \in \bigvee(k_{\lambda_n} : n \geq 1)$ tel que $\|1 - fq\|_b \leq \varepsilon$. Pour $\zeta \in \text{supp}(\sigma_1)$, on a

$$|1 - f(\zeta)q(\zeta)| \leq C_\zeta \|1 - fq\|_b \leq C_\zeta \varepsilon.$$

D'où $f(\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \text{supp}(\sigma_1)$ puisque ε est choisi suffisamment petit. $\square$

CHAPITRE 3

CYCLICITÉ ET IDENTITÉS DE BÉZOUT

Rappelons que ce chapitre est consacré à l'étude de la cyclicité de l'opérateur du shift sur des espaces de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$, dans un cadre beaucoup plus général que les applications précédentes. La méthode est basée sur deux outils :

1. un théorème de la couronne avec contrôle des solutions ;
2. le théorème taubérien d'Atzmon 0.9.

Cette méthode pour étudier la cyclicité via un théorème de la couronne a été initiée par J. Roberts dans [90] puis reprise par O. El-Fallah, K. Kellay et K. Seip dans [49] et récemment dans [41]. Notre cadre général va nous permettre de retrouver certains résultats bien connus dans certains espaces, tels que les espaces de De Branges-Rovnyak ou les espaces de Dirichlet-Besov et les espaces de type Dirichlet.

3.1 Présentation du contexte et résultats préliminaires

3.1.1 Cadre général

Notons dans la suite $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ la norme associée à un espace vectoriel normé $\mathcal{X}$, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{X}$ et son dual topologique $\mathcal{X}^*$ et notons l'application $\chi_n : z \in \mathbb{D} \longmapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifiant les trois hypothèses classiques suivantes :

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{D},\ \text{l'application } E_\lambda : f \in \mathcal{X} \longmapsto f(\lambda) \in \mathbb{C} \text{ est continue.} \tag{H1}$$

$$\text{Pour tout } f \in \mathcal{X}, \quad \chi_1 f \in \mathcal{X}. \tag{H2}$$

$$\text{L'ensemble des polynômes } \mathcal{P} := \bigvee (\chi_n : n \geq 0) \text{ est dense dans } \mathcal{X}. \tag{H3}$$

Notons que (H1) signifie que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $E_\lambda \in \mathcal{X}^*$. Autrement dit, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\text{pour tout } f \in \mathcal{X}, \quad |f(\lambda)| \leq c \, \|f\|_{\mathcal{X}} \, .$$

En particulier, la convergence dans $\mathcal{X}$ implique donc la convergence ponctuelle dans $\mathbb{D}$. L'hypothèse (H2) signifie que $\chi_1 \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{X}$ dont nous rappelons la définition

$$\mathfrak{M}(\mathcal{X}) := \{\varphi \in \mathcal{X} : \varphi f \in \mathcal{X},\ \forall f \in \mathcal{X}\} \, .$$

Le lemme suivant nous permettra de considérer la question de la cyclicité pour le shift dans $\mathcal{X}$.

Lemme 3.1. *Soit $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$. Alors $M_f : g \in \mathcal{X} \longmapsto fg \in \mathcal{X}$ est borné.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{X}$. Utilisons le théorème du graphe fermé : soient $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{X}$ telle que $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $M_f g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ dans $\mathcal{X}$. D'après (H1), on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $g_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(M_f g_n)(\lambda) = f(\lambda) g_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\lambda)$. Or, si $g_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f(\lambda)g_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par unicité de la limite, $g(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ d'où $g \equiv 0$. Ainsi, $M_f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est borné. $\square$

En posant $\|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} = \|M_f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$, nous obtenons que $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ est une algèbre de Banach. En particulier, via (H2), nous en déduisons que le shift $S : f \in \mathcal{X} \longmapsto \chi_1 f \in \mathcal{X}$ est borné. Notons aussi que $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$.

Introduisons maintenant une algèbre de Banach $\mathcal{A}$, commutative et unitaire, satisfaisant les trois hypothèses suivantes :

$$\text{On a l'une des deux conditions :} \tag{H4}$$
$$\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X}). \tag{H4a}$$
$$\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \text{ et } \mathcal{P} \text{ est dense dans } \mathcal{A}. \tag{H4b}$$

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{D},\ \text{l'application } f \in \mathcal{A} \longmapsto f(\lambda) \in \mathbb{C} \text{ est continue.} \tag{H5}$$

$$\begin{gathered}\text{Il existe } C > 0 \text{ et } A \geq 1 \text{ telles que pour tous } f_1, f_2 \in \mathcal{A} \text{ vérifiant}\\ 0 < \delta \leq |f_1| + |f_2| \ \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \ \|f_1\|_{\mathcal{A}} + \|f_2\|_{\mathcal{A}} \leq 1,\\ \text{il existe } g_1, g_2 \in \mathcal{A} \text{ telles que } f_1 g_1 + f_2 g_2 \equiv 1 \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \ \|g_1\|_{\mathcal{A}}, \|g_2\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{C}{\delta^A}.\end{gathered} \tag{H6}$$

Notons que l'hypothèse (H6) signifie que $\mathcal{A}$ vérifie un théorème de la couronne avec contrôle des solutions. Il est bien connu que cette hypothèse (H6) est satisfaite pour $\mathcal{A} = H^\infty$ avec $A > 2$ dans [29, 104, 107]. V. Tolokonnikov a aussi montré que $\mathcal{A} = \mathcal{D}_\alpha^p \cap A(\mathbb{D})$ pour $1 < p \leq \alpha + 2$ satisfait (H6) avec $A \geq 4$ dans [105]. Enfin, S. Luo a montré que (H6) est satisfaite pour $\mathcal{A} = \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ pour μ une mesure de Borel positive et finie sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec $A \geq 4$ dans [79]. Le cas des espaces de De Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ où b est rationnel mais n'est pas un produit de Blaschke fini a été étudié dans [60]. Nous reviendrons sur l'ensemble de ces exemples en dernière section 3.3.

3.1.2 Préliminaires et divers faits techniques

Le but de cette section est de rassembler quelques conséquences directes des hypothèses précédentes et de déduire quelques propriétés utiles pour la suite.

Lemme 3.2. *Soit $\mathcal{X}$ vérifiant* (H1) *à* (H3)*. Alors*

1. *On a $\mathfrak{M}(\mathcal{X}) \subset H^\infty \cap \mathcal{X}$ et il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, on a*
$$\|f\|_{\mathcal{X}} + \|f\|_\infty \leq c_1 \|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}.$$
2. *Si on suppose de plus que $\mathfrak{M}(\mathcal{X}) = H^\infty \cap \mathcal{X}$, alors il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, on a*
$$c_2 \|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{\mathcal{X}} + \|f\|_\infty.$$

Démonstration.

1. Soit $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$. Comme $\chi_0 = 1 \in \mathcal{X}$, on a $f = f\chi_0 \in \mathcal{X}$ et
$$\|f\|_{\mathcal{X}} = \|f\chi_0\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \|\chi_0\|_{\mathcal{X}} .$$
D'autre part, notons que l'application $M_f^* : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$ est bien définie et, d'après (H1), pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $E_\lambda \in \mathcal{X}^*$. Alors, pour tout $g \in \mathcal{X}$ et tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a
$$\left\langle g \mid M_f^* E_\lambda \right\rangle = \langle M_f g \mid E_\lambda \rangle = \langle fg \mid E_\lambda \rangle = f(\lambda)g(\lambda) = f(\lambda) \langle g \mid E_\lambda \rangle = \langle g \mid f(\lambda)E_\lambda \rangle .$$
On déduit par dualité que $M_f^* E_\lambda = f(\lambda)E_\lambda$ et donc
$$|f(\lambda)| \, \|E_\lambda\|_{\mathcal{X}^*} \leq \|M_f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|E_\lambda\|_{\mathcal{X}^*} .$$
Remarquons que $\langle \chi_0 \mid E_\lambda \rangle = 1$, d'où $E_\lambda \not\equiv 0$ et, en divisant par $\|E_\lambda\|_{\mathcal{X}^*} \neq 0$, on obtient $|f(\lambda)| \leq \|M_f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = \|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}$. Autrement dit, f est bornée sur $\mathbb{D}$ et $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}$. De plus, puisque $f \in \mathcal{X} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, $f \in H^\infty$ et
$$\|f\|_{\mathcal{X}} + \|f\|_\infty \leq (\|\chi_0\|_{\mathcal{X}} + 1) \|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} .$$
Le résultat vient en posant $c_1 = \|\chi_0\|_{\mathcal{X}} + 1 > 0$.
2. Équipons $H^\infty \cap \mathcal{X}$ avec la norme suivante
$$\|f\|_{\infty,\mathcal{X}} = \|f\|_{\mathcal{X}} + \|f\|_\infty , \quad f \in H^\infty \cap \mathcal{X}.$$
On vérifie aisément que $(H^\infty \cap \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{X}})$ est un espace de Banach. Considérons maintenant l'application identité
$$i : f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X}) \longmapsto f \in H^\infty \cap \mathcal{X}.$$
Alors, d'après le premier point, i est continue et on obtient l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que $c_2 \|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{\infty,\mathcal{X}}$ d'après le théorème d'isomorphisme de Banach. □

Le but de ce chapitre est d'étudier les vecteurs cycliques pour l'opérateur du shift S dans $\mathcal{X}$. Adoptons alors pour ce faire la notation suivante
$$[f]_{\mathcal{X}} := \overline{\{pf : p \in \mathcal{P}\}}^{\mathcal{X}}, \quad f \in \mathcal{X}.$$
Il est alors clair que f est *cyclique* pour S dans $\mathcal{X}$ si et seulement si $[f]_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$.

Remarque 3.3. Il n'est pas difficile de voir que f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$ si et seulement si $1 \in [f]_{\mathcal{X}}$. En effet,

- si f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$, alors $[f]_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$, et puisque $1 \in \mathcal{X}$, $1 \in [f]_{\mathcal{X}}$;
- soient $g \in \mathcal{X}$ et $\varepsilon > 0$. D'après (H3), il existe un polynôme $q \in \mathcal{P}$ tel que $\|q - g\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, si $1 \in [f]_{\mathcal{X}}$, alors il existe un polynôme $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|pf - 1\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2\|q\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}}$. Ainsi $pq \in \mathcal{P}$ et
$$\begin{aligned}\|pqf - g\|_{\mathcal{X}} \leq \|pqf - q\|_{\mathcal{X}} + \|q - g\|_{\mathcal{X}} &\leq \|q\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \|pf - 1\|_{\mathcal{X}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \|q\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \frac{\varepsilon}{2\|q\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$
d'où la cyclicité de f pour S dans $\mathcal{X}$.

Remarque 3.4. D'après (H1) et la remarque précédente 3.3, il vient que si f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$ alors $f(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$. En effet, puisque $1 \in [f]_{\mathcal{X}}$, il existe une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que $p_n f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc, d'après (H1), on a que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $p_n(\lambda)f(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. On obtient ainsi que $f(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$.

Lemme 3.5. *Soit* $\mathcal{X}$ *vérifiant* (H1) *à* (H3)*. Soient* $f \in \mathcal{X}$ *et* $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ *deux vecteurs cycliques pour* S *dans* $\mathcal{X}$*. Alors* $f\varphi$ *est cyclique pour* S *dans* $\mathcal{X}$*.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque φ est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que

$$\|p\varphi - 1\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, d'après (H2), $p \in \mathcal{P} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, et $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ d'où $p\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$. Maintenant, puisque f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$, il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que

$$\|qf - 1\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2\,\|p\varphi\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}}.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\|f\varphi pq - 1\|_{\mathcal{X}} &\leq \|f\varphi pq - p\varphi\|_{\mathcal{X}} + \|p\varphi - 1\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \|\varphi p(qf - 1)\|_{\mathcal{X}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \|p\varphi\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}\,\|qf - 1\|_{\mathcal{X}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \|p\varphi\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}\,\frac{\varepsilon}{2\,\|p\varphi\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où la cyclicité de $f\varphi$ pour S dans $\mathcal{X}$ d'après la remarque 3.3. □

Corollaire 3.6. *Soit* $\mathcal{X}$ *vérifiant* (H1) *à* (H3)*. Soit* $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ *un vecteur cyclique pour* S *dans* $\mathcal{X}$*. Alors, pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$*, la fonction* f^N *est cyclique pour* S *dans* $\mathcal{X}$*.*

Démonstration. On procède par récurrence. Supposons que f^N est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après le lemme 3.5, on obtient que f^{N+1} est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$ puisque $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ l'est également. □

Le lemme suivant permet quelque soit la condition (H4) vérifiée d'obtenir un contrôle de la norme de f dans $\mathcal{X}$ par rapport à celle de f dans $\mathcal{A}$.

Lemme 3.7. *Soient* $\mathcal{X}$ *vérifiant* (H1) *et* $\mathcal{A}$ *vérifiant* (H4) *et* (H5)*. Alors il existe une constante* $c_4 > 0$ *telle que pour tout* $f \in \mathcal{A}$*, on a*

$$\|f\|_{\mathcal{X}} \leq c_4\,\|f\|_{\mathcal{A}}.$$

Démonstration. Il s'agit de vérifier que quelque soit la condition (H4), on a bien le résultat.

- Si (H4a) est vérifiée, alors $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$. Considérons $i : f \in \mathcal{A} \longmapsto f \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ l'injection canonique. Nous allons montrer la continuité de i en appliquant le théorème du graphe fermé : soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $\mathcal{A}$ et $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ dans $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$. D'après (H5), pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a $f_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\lambda)$. De plus, d'après le lemme 3.2, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

  $$|f_n(\lambda) - g(\lambda)| \leq \|f_n - g\|_\infty \leq c_1\,\|f_n - g\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $f_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\lambda)$. Par unicité de la limite, $f(\lambda) = g(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$. On obtient alors $f \equiv g$ et par suite la continuité de i. Dans ce cas, il existe une constante $c_3 > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{A}$, on a

  $$\|f\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \leq c_3\,\|f\|_{\mathcal{A}}. \tag{3.1}$$

  On conclut avec le lemme 3.2.

- Si (H4b) est vérifiée, alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ et on obtient le résultat directement en appliquant le théorème du graphe fermé à l'injection canonique $i : f \in \mathcal{A} \longmapsto f \in \mathcal{X}$ en combinant (H1) et (H5). $\square$

Pour un élément $f \in \mathcal{A}$, notons par $\mathcal{I}_f$ l'idéal fermé de $\mathcal{A}$ engendré par f i.e.

$$\mathcal{I}_f := \overline{\{gf : g \in \mathcal{A}\}}^{\mathcal{A}}. \tag{3.2}$$

Lemme 3.8. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant* (H4) *et* (H5). *Alors pour tout $f \in \mathcal{A}$, on a $\mathcal{I}_f \subset [f]_{\mathcal{X}}$.*

Démonstration. Montrons en premier lieu que pour $g \in \mathcal{A}$, $gf \in [f]_{\mathcal{X}}$. Soit $g \in \mathcal{A}$.
Supposons que (H4a) est vérifiée. Alors $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ et il suit d'après le lemme 3.2 que $g \in \mathcal{X}$. Il existe donc par (H3) une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que $\|p_n - g\|_{\mathcal{X}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $f \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, on obtient alors $\|p_n f - gf\|_{\mathcal{X}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $gf \in [f]_{\mathcal{X}}$.
Supposons maintenant que (H4b) est vérifiée. Alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{A}$. Il existe donc une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que $\|p_n - g\|_{\mathcal{A}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach et que $f \in \mathcal{A}$, on a

$$\|p_n f - gf\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}} \|p_n - g\|_{\mathcal{A}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On obtient alors d'après le lemme 3.7 que $\|p_n f - gf\|_{\mathcal{X}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $gf \in [f]_{\mathcal{X}}$.
Considérons maintenant $\varphi \in \mathcal{I}_f$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\|\varphi_n f - \varphi\|_{\mathcal{A}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Or, d'après le lemme 3.7, on déduit que $\|\varphi_n f - \varphi\|_{\mathcal{X}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\varphi_n f \in [f]_{\mathcal{X}}$, qui est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{X}$, donc on conclut que $\varphi \in [f]_{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{I}_f \subset [f]_{\mathcal{X}}$. $\square$

3.1.3 Quelques outils fonctionnels

Introduisons maintenant deux hypothèses supplémentaires utiles pour appliquer le théorème d'Atzmon, et qui viennent compléter (H1) à (H6).

$$\chi_1 \in \mathcal{A}. \tag{H7}$$

$$\text{Il existe } C > 0 \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ tels que pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \|\chi_n\|_{\mathcal{A}} \leq Cn^p. \tag{H8}$$

Nous allons utiliser de temps à autre jusqu'à la fin de ce chapitre la notation $A \lesssim B$ signifiant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $A \leq CB$.

Lemme 3.9. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H5), (H7) *et* (H8). *On a*

1. *$\sigma(\chi_1) = \overline{\mathbb{D}}$, où $\sigma(\chi_1)$ correspond au spectre de χ_1 dans $\mathcal{A}$.*
2. *$Hol(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{A}$.*
3. *Pour tout $|\lambda| > 1$, on a*

$$\left\|(z-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{A}} \lesssim \frac{|\lambda|^{p+1}}{(|\lambda|-1)^{p+1}}.$$

Démonstration.

1. D'après (H8), il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|\chi_1^n\|_{\mathcal{A}} = \|\chi_n\|_{\mathcal{A}} \leq Cn^p.$$

On obtient alors que le rayon spectral de χ_1 vérifie $r(\chi_1) \leq 1$, et donc par définition $\sigma(\chi_1) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Maintenant, prenons $\lambda \in \mathbb{D}$ et supposons que $\lambda - \chi_1$ est inversible dans $\mathcal{A}$. Il vient alors qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $(\lambda - \chi_1)f = 1$. On obtient une contradiction en évaluant cette expression en λ. Ainsi $\mathbb{D} \subset \sigma(\chi_1)$ et $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(\chi_1)$, le spectre étant un fermé.

2. Soit $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $|z| \leq 1$. D'après [57, Theorem 5.7], il existe alors une constante $c > 0$ telle que $a_n = O(e^{-cn})$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Donc, d'après (H8), on a
$$|a_n| \, \|\chi_n\|_{\mathcal{A}} \lesssim n^p e^{-cn}.$$
L'application $g = \sum_{n\geq 0} a_n \chi_n$ définit donc une fonction de $\mathcal{A}$. D'après (H5), puisque la convergence dans $\mathcal{A}$ implique la convergence ponctuelle dans $\mathbb{D}$, on déduit que $f \equiv g$ et donc $f \in \mathcal{A}$.
3. On a, pour $|\lambda| > 1$, $z \longmapsto \frac{1}{z-\lambda} \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ et
$$\frac{1}{z-\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}} = -\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{\lambda^{n+1}}.$$
Ainsi, d'après (H8), pour $|\lambda| > 1$,
$$\left\|(z-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{n\geq 0}\frac{\|\chi_n\|_{\mathcal{A}}}{|\lambda|^{n+1}} \leq C\sum_{n\geq 0}\frac{n^p}{|\lambda|^n}.$$
De plus, pour $0 < x < 1$ et $p \in \mathbb{N}$, on peut vérifier que
$$\sum_{k\geq 0} k^p x^k \leq \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$
En effet, en posant $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$ pour $0 < x < 1$, on prouve par récurrence que pour tout $p \geq 0$,
$$f^{(p)}(x) = \sum_{k\geq 0}(k+1)(k+2)\cdots(k+p)x^k = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$
D'où
$$\sum_{k\geq 0} k^p x^k \leq \sum_{k\geq 0}(k+1)(k+2)\cdots(k+p)x^k = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$
Finalement, on conclut que
$$\left\|(z-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{A}} \lesssim \frac{p!}{\left(1-\frac{1}{|\lambda|}\right)^{p+1}} \lesssim \frac{|\lambda|^{p+1}}{(|\lambda|-1)^{p+1}}.$$ □

Remarque 3.10. De la même manière que pour le spectre de χ_1 dans le lemme précédent, nous pouvons montrer que lorsque $\mathcal{X}$ vérifie (H1) à (H3) et $\mathcal{A}$ vérifie (H4) à (H8), nous avons $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$. En effet, d'après (3.1) et (H8), nous avons en particulier
$$\|S^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = \|\chi_n\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{X})} \leq c_2 C n^p.$$

Le prochain lemme, purement calculatoire, nous sera utile pour donner une version du théorème d'Atzmon en termes de croissance de la résolvante.

Lemme 3.11. *Pour $k \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on a*
$$\inf_{0<r<1}\frac{1}{(1-r)^k r^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^k}{k^k}n^k \quad et \quad \inf_{0<r<1} r^{-n}e^{\frac{\varepsilon}{1-r}} \leq e^{3\sqrt{\varepsilon}\sqrt{n}}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Démonstration.

1. Introduisons la fonction f définie par $f(r) = (1-r)^{-k}r^{-n}$ pour $0 < r < 1$. Après étude, on obtient que
$$\inf_{0<r<1} f(r) = f\left(1-\frac{k}{n+k}\right) = \frac{(n+k)^k}{k^k}e^{-n\ln(1-\frac{k}{n+k})} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^k}{k^k}n^k.$$

2. Introduisons la fonction g définie par $g(r) = r^{-n} e^{\frac{\varepsilon}{1-r}}$ pour $0 < r < 1$. Après étude, on obtient que
$$\inf_{0<r<1} g(r) = g(r_2), \quad r_2 = \frac{\varepsilon + 2n - \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon n}}{2n}.$$
Par suite, $r_2 = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ d'où
$$e^{\frac{\varepsilon}{1-r_2}} = e^{\sqrt{\varepsilon n}(1+o(1))} \text{ et } r_2^{-n} = e^{\sqrt{\varepsilon n}(1+o(1))}.$$
Finalement,
$$\inf_{0<r<1} g(r) = g(r_2) = e^{2\sqrt{\varepsilon n}(1+o(1))} \leq e^{3\sqrt{\varepsilon n}}, \quad n \longrightarrow \infty. \qquad \square$$

Le résultat suivant est une version du théorème d'Atzmon 0.9 dans lequel nous avons remplacé les hypothèses sur la croissance des itérées de T par des hypothèses sur la croissance de la résolvante. Notons que ce résultat apparaît déjà dans [82].

Corollaire 3.12. *Soient X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\sigma(T) = \{\zeta_0\}$ pour un certain $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Supposons qu'il existe $k \geq 0$ et $c > 0$ tels que*
$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{c\,|\lambda|^k}{(|\lambda| - 1)^k}, \quad |\lambda| > 1,$$
et que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon > 0$ telle que
$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leq K_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}}, \quad |\lambda| < 1.$$
Alors $(T - \zeta_0 I)^k = 0$.

Démonstration. Vérifions que T satisfait bien les hypothèses du théorème d'Atzmon 0.9. On a déjà que $\sigma(T) = \{\zeta_0\}$ avec $|\zeta_0| = 1$. Il reste donc à montrer que
$$\|T^n\| \underset{n\to\infty}{=} O(n^k) \text{ et } \log\left\|T^{-n}\right\| \underset{n\to\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$
Considérons alors, pour $x \in \mathcal{X}$ et $\ell \in \mathcal{X}^*$, l'application
$$\Psi(z) = \left\langle (zI - T)^{-1} x \mid \ell \right\rangle, \quad z \neq \zeta_0.$$
Puisque $\sigma(T) = \{\zeta_0\}$, $\Psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}\backslash\{\zeta_0\})$ et $r(T) := \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = 1$. On obtient alors en particulier que $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi $1 \leq \|T\| < |z|$ et pour $|z| > \|T\|$, on a
$$\Psi(z) = z^{-1}\left\langle \left(I - \frac{T}{z}\right)^{-1} x \mid \ell \right\rangle = z^{-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^n} \langle T^n x \mid \ell\rangle = \sum_{n\geq 0} z^{-(n+1)} \langle T^n x \mid \ell\rangle .$$
L'application $z \longmapsto \sum_{n\geq 0} z^{-(n+1)} \langle T^n x \mid \ell\rangle$ étant analytique sur $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$, on déduit par prolongement analytique que
$$\Psi(z) = \sum_{n\geq 0} z^{-(n+1)} \langle T^n x \mid \ell\rangle, \quad |z| > 1.$$
Considérons maintenant l'application
$$h(z) = \Psi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 1} z^n \left\langle T^{n-1} x \mid \ell\right\rangle, \quad 0 < |z| < 1.$$
Alors h est holomorphe sur $\mathbb{D}\backslash\{0\}$, et se prolonge en 0 en posant $h(0) = 0$. Or, d'après les inégalités de Cauchy,
$$\left|\left\langle T^{n-1} x \mid \ell\right\rangle\right| = \left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \inf_{0<r<1} \frac{M(r)}{r^n},$$

avec

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |h(z)| = \sup_{|z|=r} \left|\Psi\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \sup_{|z|=r} \left|\left\langle \left(\frac{1}{z}I - T\right)^{-1} x \mid \ell \right\rangle\right|$$
$$\leq \sup_{|z|=r} \left\|\left(\frac{1}{z}I - T\right)^{-1}\right\| \|x\|_{\mathcal{X}} \|\ell\|_{\mathcal{X}^*}.$$

Or, pour $|z| = r < 1$, $\frac{1}{|z|} > 1$ et par hypothèse, il existe $k \geq 0$ et $c > 0$ tels que

$$\left\|\left(\frac{1}{z}I - T\right)^{-1}\right\| \leq c\frac{\frac{1}{r^k}}{(\frac{1}{r}-1)^k} = \frac{c}{(1-r)^k}.$$

On obtient finalement

$$\left|\left\langle T^{n-1}x \mid \ell\right\rangle\right| \leq c \inf_{0<r<1} \frac{1}{(1-r)^k r^n} \|x\|_{\mathcal{X}} \|\ell\|_{\mathcal{X}^*} \text{ et } \left\|T^{n-1}\right\| \lesssim \inf_{0<r<1} (1-r)^{-k} r^{-n}.$$

De même, pour $|z| < \left\|T^{-1}\right\|^{-1}$, on a

$$\Psi(z) = \left\langle \left(zT^{-1} - Id\right)^{-1} T^{-1}x \mid \ell \right\rangle = \sum_{n\geq 0} z^n \left\langle T^{-n-1}x \mid \ell\right\rangle.$$

De plus, comme $\sigma(T^{-1}) = \left\{\overline{\zeta_0}\right\}$, on a $r(T^{-1}) = 1$ et donc $\left\|T^{-n-1}\right\|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. L'application $z \longmapsto \sum_{n\geq 0} z^n \left\langle T^{-n-1}x \mid \ell\right\rangle$ étant analytique sur $\mathbb{D}$, on déduit par prolongement analytique que

$$\Psi(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \left\langle T^{-n-1}x \mid \ell\right\rangle, \quad |z| < 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. De la même manière que précédemment, en utilisant les inégalités de Cauchy, on obtient qu'il existe $K_\varepsilon > 0$ telle que

$$\left|\left\langle T^{-n-1}x \mid \ell\right\rangle\right| = \left|\frac{\Psi^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq K_\varepsilon \inf_{0<r<1} r^{-n} e^{\frac{\varepsilon}{1-r}} \|x\|_{\mathcal{X}} \|\ell\|_{\mathcal{X}^*},$$

et par suite

$$\left\|T^{-n-1}\right\| \lesssim \inf_{0<r<1} r^{-n} e^{\frac{\varepsilon}{1-r}}.$$

D'après le lemme 3.11, on obtient alors $\left\|T^{n-1}\right\| \lesssim n^k$ et $\left\|T^{-n-1}\right\| \lesssim e^{3\sqrt{\varepsilon}\sqrt{n}}$ pour $n \longrightarrow \infty$ d'où

$$\|T^n\| = O(n^k) \text{ et } \log\left\|T^{-n}\right\| = o(\sqrt{n}), \quad n \longrightarrow \infty.$$

Finalement, d'après le théorème d'Atzmon 0.9, on conclut que $(T - \zeta_0 I)^k = 0$. □

3.2 Résultats de cyclicité

3.2.1 Cyclicité et lien avec le théorème de la Couronne

Rappelons ici la question 0.3 soulevée par Brown et Shields dans [26], dont nous savons que la réponse est positive dans certains espaces tels que l'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}$ ou certains espaces de Dirichlet pondérés $\mathcal{D}_\alpha$, de Dirichlet-Besov $\mathcal{D}_\alpha^p$ et de Dirichlet harmoniques $\mathcal{D}_\mu$.

Question 3.13. *Soit E un espace de Banach de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Soient $f, g \in E$ avec g un vecteur cyclique pour S et vérifiant $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors f est-il cyclique pour S ?*

Théorème 3.14. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H6). *Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $f, g \in \mathcal{A}$ vérifiant $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $[g^N]_{\mathcal{X}} \subset [f]_{\mathcal{X}}$.*

Démonstration. La preuve s'inspire largement de [41, Theorem 2.5]. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Définissons

$$\delta_\lambda := \inf_{z\in\mathbb{D}} \{|1 - \lambda g(z)| + |f(z)|\}.$$

Soit $z \in \mathbb{D}$. Remarquons alors que, si $|g(z)| \leq \frac{1}{2|\lambda|}$, on a $|1 - \lambda g(z)| \geq 1 - |\lambda|\,|g(z)| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. D'autre part, si $|g(z)| \geq \frac{1}{2|\lambda|}$, alors par hypothèse $|f(z)| \geq |g(z)| \geq \frac{1}{2|\lambda|}$. Ainsi, on obtient

$$\delta_\lambda \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\,|\lambda|}\right) > 0.$$

Posons maintenant $M_\lambda = \|1 - \lambda g\|_{\mathcal{A}} + \|f\|_{\mathcal{A}}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$0 < \frac{\delta_\lambda}{M_\lambda} \leq \frac{|1 - \lambda g(z)| + |f(z)|}{M_\lambda} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{1-\lambda g}{M_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{f}{M_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}} = 1.$$

D'après (H6), il existe des constantes $C > 0$ et $A \geq 1$ et des fonctions $\tilde{G_\lambda}, \tilde{F_\lambda} \in \mathcal{A}$ telles que

$$(1-\lambda g)\frac{\tilde{G_\lambda}}{M_\lambda} + f\frac{\tilde{F_\lambda}}{M_\lambda} \equiv 1 \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \left\|\tilde{G_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}}, \left\|\tilde{F_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{CM_\lambda^A}{\delta_\lambda^A}.$$

En posant $G_\lambda = \frac{\tilde{G_\lambda}}{M_\lambda} \in \mathcal{A}$ et $F_\lambda = \frac{\tilde{F_\lambda}}{M_\lambda} \in \mathcal{A}$, on obtient

$$(1-\lambda g)G_\lambda + fF_\lambda \equiv 1 \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \|G_\lambda\|_{\mathcal{A}}, \|F_\lambda\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{CM_\lambda^{A-1}}{\delta_\lambda^A}. \tag{3.3}$$

Supposons tout d'abord, sans perte de généralité, que l'idéal fermé $\mathcal{I}_f$ de $\mathcal{A}$ défini par (3.2) est un idéal propre de $\mathcal{A}$ (sinon, d'après le lemme 3.8, le résultat est trivial). Introduisons alors l'application quotient $\Pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}_f$ où l'espace quotient

$$\mathcal{A}/\mathcal{I}_f := \{\Pi(g) = g + \mathcal{I}_f : g \in \mathcal{A}\}$$

est muni de la norme usuelle quotient

$$\|\Pi(g)\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f} := \operatorname{dist}(g, \mathcal{I}_f) = \inf_{h\in\mathcal{I}_f} \|g - h\|_{\mathcal{A}}, \quad g \in \mathcal{A}.$$

Rappelons que $\left(\mathcal{A}/\mathcal{I}_f, \|\cdot\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f}\right)$ est une algèbre de Banach. D'après (3.3) et en utilisant que $fF_\lambda \in \mathcal{I}_f$, on a $\Pi(1-\lambda g)\Pi(G_\lambda) = \Pi(1)$. Par suite, $\Pi(1-\lambda g)$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et on a $\Pi(1-\lambda g)^{-1} = \Pi(G_\lambda)$. En particulier, on obtient que

$$\left\|\Pi(1-\lambda g)^{-1}\right\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f} = \|\Pi(G_\lambda)\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f} \leq \|G_\lambda\|_{\mathcal{A}} \lesssim \frac{M_\lambda^{A-1}}{\delta_\lambda^A}.$$

Soit $\ell \in (\mathcal{A}/\mathcal{I}_f)^*$, $\ell \not\equiv 0$, et définissons $\varphi(\lambda) = \left\langle \Pi(1-\lambda g)^{-1} \mid \ell \right\rangle$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors que φ est une fonction entière i.e. $\varphi \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C})$. De plus, si $|\lambda| > 1$, alors $\delta_\lambda \geq \frac{1}{2|\lambda|}$ et

$$|\varphi(\lambda)| \lesssim \left\|\Pi(1-\lambda g)^{-1}\right\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f} \lesssim M_\lambda^{A-1}\,|\lambda|^A.$$

Puisque $M_\lambda \leq 1 + |\lambda|\,\|g\|_{\mathcal{A}} + \|f\|_{\mathcal{A}}$, on obtient

$$|\varphi(\lambda)| = O(|\lambda|^{2A-1}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty. \tag{3.4}$$

On peut supposer sans perte de généralité que $g \not\equiv 0$, car sinon le résultat est trivial. Pour $|\lambda| < \|g\|_{\mathcal{A}}^{-1}$, on a

$$(1-\lambda g)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \lambda^n g^n,$$

et

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n \langle \Pi(g^n) \mid \ell \rangle .$$

D'après (3.4) et le théorème de Liouville, il vient que pour tout $n > 2A-1$, on a $\langle \Pi(g^n) \mid \ell \rangle = 0$. En particulier, pour $N = [2A] > 0$, on obtient $\left\langle \Pi(g^N) \mid \ell \right\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $\ell \in (\mathcal{A}/\mathcal{I}_f)^*$, $\ell \not\equiv 0$, on déduit en particulier que $\Pi(g^N) = 0$ et $g^N \in \mathcal{I}_f$. On conclut enfin avec le lemme 3.8 que $g^N \in [f]_{\mathcal{X}}$ et finalement $[g^N]_{\mathcal{X}} \subset [f]_{\mathcal{X}}$. □

Remarque 3.15. Notons que nous pouvons choisir $N = [2A]$ dans le théorème précédent, où $A \geq 1$ est la constante donnée dans le contrôle des solutions du théorème de la couronne (H6).

Corollaire 3.16. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H6)*. Soient $f \in \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ vérifiant que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| \leq |f(z)|$. Supposons que g est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. Alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Puisque $g \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$, on obtient que g^m est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ d'après le corollaire 3.6. De plus, d'après le théorème 3.14, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $[g^N]_{\mathcal{X}} \subset [f]_{\mathcal{X}}$. Or, en particulier, g^N est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$, donc $[g^N]_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$ et $[f]_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$. Ainsi, f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. □

Corollaire 3.17. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H6)*. Soit $f \in \mathcal{A}$ telle que $\inf_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| > 0$. Alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Notons $\delta = \inf_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| > 0$. Puisque $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{X}$ d'après (H3), la fonction constante $g = \delta\chi_0$ est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. De plus, $g \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$. On obtient donc la cyclicité de f pour S dans $\mathcal{X}$ d'après le corollaire 3.16. □

Le résultat suivant permet d'obtenir le même résultat que le théorème 3.14 avec une hypothèse plus faible que l'estimation $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Théorème 3.18. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H6)*. Soient $f, g \in \mathcal{A}$ telles que $Re(g) \geq 0$ et telles qu'il existe $\gamma > 1$ tel que*

$$|g(z)| \leq \left(\log \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}}{|f(z)|}\right)^{-\gamma}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors on a $[g]_{\mathcal{X}} \subset [f]_{\mathcal{X}}$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 3.14 en remplaçant le théorème de Liouville par un principe de Phragmén-Lindelöf pour un secteur angulaire, qui permet de contrôler le module d'une fonction analytique sur un ouvert non borné sous contrainte. □

Remarque 3.19. Notons que ce dernier théorème apparaît dans [41] dans le cas où $\mathcal{X} = \mathcal{D}_\alpha^p$ et $\mathcal{A} = \mathcal{D}_\alpha^p \cap A(\mathbb{D})$, et la preuve s'adapte à notre contexte plus général.

3.2.2 Cyclicité et lien avec le théorème d'Atzmon

Le théorème suivant, second résultat principal de ce chapitre, correspond à un analogue dans $\mathcal{A}$ de celui de Kellay-Le Manach-Zarrabi dans $\mathcal{D}^p_\alpha$ donné par [75].

Théorème 3.20. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (H4) *à* (H8). *Supposons qu'il existe $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ tel que $z - \zeta_0$ est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. Soit $f \in \mathcal{A} \cap A(\mathbb{D})$ une fonction extérieure telle que l'ensemble de ses zéros $\mathcal{Z}(f) = \{\zeta_0\}$. Alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$.*

Démonstration. La preuve s'inspire largement de [41, Theorem 1.1]. Tout d'abord, puisque f est extérieure, on a $(1-|z|)\log|f(z)| \underset{|z|\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ d'après [97]. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|f(z)| \geq c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2(1-|z|)}\right). \tag{3.5}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$. Définissons

$$\delta_\lambda := \inf_{z\in\mathbb{D}} \{|z-\lambda| + |f(z)|\}.$$

Alors, si $|z-\lambda| \leq \frac{|1-|\lambda||}{2}$, on a

$$\frac{|1-|\lambda||}{2} \geq ||z| - |\lambda|| = |1 - |\lambda| + |z| - 1| \geq |1-|\lambda|| - |1-|z||,$$

d'où $1 - |z| \geq \frac{|1-|\lambda||}{2}$. Par suite, pour $|z-\lambda| \leq \frac{|1-|\lambda||}{2}$, d'après (3.5), on a

$$|f(z)| \geq c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2(1-|z|)}\right) \geq c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{|1-|\lambda||}\right).$$

On déduit donc en particulier que

$$\delta_\lambda \geq \min\left(c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{|1-|\lambda||}\right), \frac{|1-|\lambda||}{2}\right) > 0. \tag{3.6}$$

Posons maintenant $M_\lambda = \|\chi_1 - \lambda\|_{\mathcal{A}} + \|f\|_{\mathcal{A}}$, où d'après (H7), $\chi_1 - \lambda \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$0 < \frac{\delta_\lambda}{M_\lambda} \leq \left|\frac{z-\lambda}{M_\lambda}\right| + \left|\frac{f(z)}{M_\lambda}\right| \text{ et } \left\|\frac{\chi_1-\lambda}{M_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{f}{M_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}} = 1.$$

D'après (H6), il existe des constantes $C > 0$ et $A \geq 1$ et des fonctions $\tilde{G_\lambda}, \tilde{F_\lambda} \in \mathcal{A}$ telles que

$$\frac{(z-\lambda)}{M_\lambda}\tilde{G_\lambda} + \frac{f}{M_\lambda}\tilde{F_\lambda} \equiv 1 \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \left\|\tilde{G_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}}, \left\|\tilde{F_\lambda}\right\|_{\mathcal{A}} \leq C\frac{M_\lambda^A}{\delta_\lambda^A}.$$

Posons maintenant $G_\lambda := \frac{\tilde{G_\lambda}}{M_\lambda} \in \mathcal{A}$ et $F_\lambda := \frac{\tilde{F_\lambda}}{M_\lambda} \in \mathcal{A}$. On obtient donc

$$(z-\lambda)G_\lambda + fF_\lambda \equiv 1 \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \|G_\lambda\|_{\mathcal{A}}, \|F_\lambda\|_{\mathcal{A}} \leq C\frac{M_\lambda^{A-1}}{\delta_\lambda^A}. \tag{3.7}$$

Supposons tout d'abord, sans perte de généralité, que l'idéal fermé $\mathcal{I}_f$ de $\mathcal{A}$ défini par (3.2) est un idéal propre de $\mathcal{A}$ (sinon, d'après le lemme 3.8 et (H7), on obtient immédiatement la cyclicité de f). Considérons alors l'application quotient $\Pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}_f$ et l'opérateur

$$T : \Pi(g) \in \mathcal{A}/\mathcal{I}_f \longmapsto \Pi(z)\Pi(g) \in \mathcal{A}/\mathcal{I}_f.$$

L'idée est alors d'appliquer à T le corollaire 3.12, en montrant notamment que T vérifie les trois conditions suivantes.

1. $\sigma(T) = \{\zeta_0\}$;
2. Il existe $k \geq 0$ et $c > 0$ tels que

$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{c\,|\lambda|^k}{(|\lambda| - 1)^k}, \quad |\lambda| > 1;$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon > 0$ telle que

$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leq K_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}}, \quad |\lambda| < 1.$$

Procédons alors étape par étape.

1. Puisque T est l'opérateur de multiplication par $\Pi(z)$ sur l'algèbre de Banach $\mathcal{A}/\mathcal{I}_f$, vérifions tout d'abord que $\sigma(T) \subset \sigma(\Pi(z))$. Rappelons que

$$\sigma(\Pi(z)) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Pi(z) - \lambda\Pi(1) \text{ non inversible dans } \mathcal{A}/\mathcal{I}_f\}.$$

   Pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\Pi(z))$, il existe alors $a \in \mathcal{A}/\mathcal{I}_f$ tel que

$$(\Pi(z) - \lambda\Pi(1))a = a(\Pi(z) - \lambda\Pi(1)) = \Pi(1).$$

   Or $T = M_{\Pi(z)}$ et $Id_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f} = M_{\Pi(1)}$ d'où $(T - \lambda Id)M_a = M_a(T - \lambda Id) = Id$ et donc $\lambda \notin \sigma(T)$. Puisque $\sigma(T) \neq \emptyset$, il reste donc à montrer que $\sigma(\Pi(z)) \subset \{\zeta_0\}$. Prenons $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{\zeta_0\}$. Puisque $z \longmapsto |z - \mu| + |f(z)|$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, on déduit qu'il existe $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tel que

$$\inf_{z \in \mathbb{D}}\{|z - \mu| + |f(z)|\} = |z_0 - \mu| + |f(z_0)| =: \delta.$$

   De plus, en utilisant que $\mu \neq \zeta_0$ et $\mathcal{Z}(f) = \{\zeta_0\}$, on obtient alors $\delta > 0$. D'après (H6), il existe des fonctions $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$ telles que $(z - \mu)g_1 + fg_2 \equiv 1$ sur $\mathbb{D}$. En particulier, on obtient $(\Pi(z) - \mu\Pi(1))\Pi(g_1) = \Pi(1)$ et on a que $\Pi(z) - \mu\Pi(1)$ est inversible dans $\mathcal{A}/\mathcal{I}_f$. Finalement, $\mu \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\Pi(z))$ puis $\mathbb{C}\backslash\{\zeta_0\} \subset \mathbb{C}\backslash\sigma(\Pi(z))$ et $\sigma(\Pi(z)) \subset \{\zeta_0\}$. Ainsi, $\sigma(T) \subset \{\zeta_0\}$ et nécessairement $\sigma(T) = \{\zeta_0\}$.

Puisque $(T - \lambda I)^{-1}$ est l'opérateur de multiplication par $(\Pi(z) - \lambda\Pi(1))^{-1}$ sur $\mathcal{A}/\mathcal{I}_f$, on a

$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \left\|(\Pi(z) - \lambda\Pi(1))^{-1}\right\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f} = \left\|\Pi((z - \lambda)^{-1})\right\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f}.$$

2. Soit $|\lambda| > 1$. D'après le lemme 3.9, on a $(z - \lambda)^{-1} \in \mathcal{A}$ et donc

$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \left\|(z - \lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{A}} \lesssim \frac{|\lambda|^{p+1}}{(|\lambda| - 1)^{p+1}}.$$

3. Soit $|\lambda| < 1$. D'après (3.7), on a $\Pi(z - \lambda)\Pi(G_\lambda) = \Pi(1)$. Donc $(\Pi(z) - \lambda\Pi(1))^{-1} = \Pi(G_\lambda)$ et

$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \|\Pi(G_\lambda)\|_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_f} \leq \|G_\lambda\|_{\mathcal{A}} \leq C\frac{M_\lambda^{A-1}}{\delta_\lambda^A}.$$

   Or, pour $|\lambda| < 1$, on a $\|f\|_{\mathcal{A}} \leq M_\lambda \leq 1 + \|\chi_1\|_{\mathcal{A}} + \|f\|_{\mathcal{A}}$ ce qui donne

$$\left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \lesssim \frac{1}{\delta_\lambda^A}.$$

   En remarquant maintenant que

$$\frac{2c_\varepsilon}{1 - |\lambda|}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{1 - |\lambda|}\right) \underset{|\lambda| \to 1^-}{\longrightarrow} 0,$$

on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K'_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$\frac{2c_\varepsilon}{1-|\lambda|}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}\right) \leq K'_\varepsilon,$$

et ainsi

$$\frac{c_\varepsilon}{K'_\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}\right) \leq \frac{1-|\lambda|}{2}.$$

Ainsi, d'après (3.6), on obtient que

$$\delta_\lambda \geq K''_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}\right), \quad K''_\varepsilon = \min\left(c_\varepsilon, \frac{c_\varepsilon}{K'_\varepsilon}\right) > 0.$$

Finalement, on déduit que

$$\left\|(T-\lambda I)^{-1}\right\| \lesssim \frac{1}{K''^{A}_\varepsilon}\exp\left(\frac{A\varepsilon}{1-|\lambda|}\right).$$

En remplaçant sans perte de généralité ε par $\frac{\varepsilon}{A}$, on obtient le résultat souhaité. Ainsi, T vérifie les hypothèses du corollaire 3.12 d'où $(T-\zeta_0 I)^{p+1} = 0$. Autrement dit,

$$(\Pi(z) - \zeta_0\Pi(1))^{p+1} = \Pi((z-\zeta_0)^{p+1}) = 0,$$

et donc $(z-\zeta_0)^{p+1} \in \mathcal{I}_f \subset [f]_{\mathcal{X}}$ d'après le lemme 3.8. Or, puisque $z-\zeta_0$ est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$, on obtient la cyclicité de $(z-\zeta_0)^{p+1}$ par le corollaire 3.6. Finalement, $[f]_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$ et f est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. □

Pour finir cette partie, remarquons que l'hypothèse de cyclicité de $z-\zeta_0$ pour $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ est liée au spectre ponctuel $\sigma_P(S^*)$ de S^*, adjoint de $S : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$, et également à la propriété de *bornitude de l'évaluation en* ζ_0 : un point $\zeta \in \mathbb{T}$ est un *point d'évaluation borné* pour $\mathcal{X}$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in \mathcal{P}$,

$$|p(\zeta)| \leq C\,\|p\|_{\mathcal{X}}.$$

Puisque les polynômes sont denses dans $\mathcal{X}$ d'après (H3), cette inégalité signifie que la fonctionnelle $p \longmapsto p(\zeta)$ s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{X}$.

Lemme 3.21. *Soient $\mathcal{X}$ vérifiant les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\zeta \in \mathbb{T}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le point $\zeta \in \sigma_P(S^*)$.*
2. *Le point ζ est un point d'évaluation borné pour $\mathcal{X}$.*
3. *La fonction $z-\zeta$ n'est pas cyclique pour S dans $\mathcal{X}$.*

Démonstration.
$1 \Longrightarrow 2$: Soit $\zeta \in \sigma_P(S^*)$. Alors il existe $k_\zeta \in \mathcal{X}^*$, $k_\zeta \not\equiv 0$, tel que $S^* k_\zeta = \zeta k_\zeta$. En particulier, pour tout $k \geq 0$, on a d'une part

$$\left\langle z^k \mid S^* k_\zeta \right\rangle = \left\langle z^{k+1} \mid k_\zeta \right\rangle,$$

et d'autre part, on a

$$\left\langle z^k \mid S^* k_\zeta \right\rangle = \left\langle z^k \mid \zeta k_\zeta \right\rangle = \zeta \left\langle z^k \mid k_\zeta \right\rangle.$$

D'où, pour tout $k \geq 0$, $\left\langle z^{k+1} \mid k_\zeta \right\rangle = \zeta \left\langle z^k \mid k_\zeta \right\rangle$ et par récurrence, on a que

$$\left\langle z^k \mid k_\zeta \right\rangle = \zeta^k \left\langle 1 \mid k_\zeta \right\rangle.$$

Remarquons que $\langle 1 \mid k_\zeta \rangle \neq 0$. En effet, si c'était le cas, alors $\left\langle z^k \mid k_\zeta \right\rangle = 0$ et par densité de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{X}$ par (H3), $k_\zeta = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\langle 1 \mid k_\zeta \rangle = 1$ et on obtient donc que

$$\left\langle z^k \mid k_\zeta \right\rangle = \zeta^k, \quad k \geq 0.$$

Finalement, par linéarité, on obtient que pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\langle p \mid k_\zeta \rangle = p(\zeta)$ d'où

$$|p(\zeta)| \leq \|k_\zeta\|_{\mathcal{X}^*} \|p\|_X .$$

$2 \Longrightarrow 3$: Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a $|p(\zeta)| \leq C \|p\|_{\mathcal{X}}$. Supposons de plus que $z - \zeta$ est cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un polynôme q tel que $\|(z-\zeta)q - 1\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$. Considérons le polynôme $p = (z-\zeta)q - 1$ et remarquons que $p(\zeta) = -1$. Ainsi, il vient que

$$|p(\zeta)| = 1 \leq C\varepsilon,$$

ce qui est une contradiction lorsque ε est suffisamment petit. Donc $z - \zeta$ n'est pas cyclique pour S dans $\mathcal{X}$.
$3 \Longrightarrow 1$: Supposons que $z - \zeta$ n'est pas cyclique pour S dans $\mathcal{X}$. Alors d'après un théorème de Hahn-Banach, il existe $\varphi \in \mathcal{X}^*$, $\varphi \not\equiv 0$, tel que φ s'annule sur $[z-\zeta]_{\mathcal{X}}$. En particulier, pour tout $k \geq 0$, on a

$$\left\langle z^k \mid S^*\varphi - \zeta\varphi \right\rangle = \left\langle z^k(z-\zeta) \mid \varphi \right\rangle = 0.$$

Par linéarité, on obtient que pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\langle p \mid S^*\varphi - \zeta\varphi \rangle = 0.$$

Puisque $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{X}$, on obtient $S^*\varphi = \zeta\varphi$. Finalement, comme $\varphi \not\equiv 0$, on en déduit que $\zeta \in \sigma_P(S^*)$. □

3.3 Quelques exemples concrets

Le but de cette dernière section, en guise d'applications, est d'expliciter quelques exemples importants d'espaces vérifiant les différentes hypothèses (H1) à (H8) et d'en déduire quelques résultats de cyclicité propres à ces espaces.

3.3.1 Espaces de De Branges-Rovnyak

Soit $\mathcal{X} = \mathcal{H}(b)$ l'espace de De Branges-Rovnyak associé à b un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞ (voir le chapitre 1 section 1.3). Le chapitre 2 était consacré à l'étude de la cyclicité de l'opérateur du shift S restreint à $\mathcal{H}(b)$ noté S_b. L'idée est ici d'appliquer les résultats précédents dans ce contexte particulier et formuler ainsi d'autres conditions de cyclicité pour S_b. Tout d'abord, nous avons déjà vu que lorsque b est non-extrême, $\mathcal{H}(b)$ vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H3). Considérons maintenant $\mathcal{A} = \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b)) \subset H^\infty \cap \mathcal{H}(b)$, l'algèbre de Banach des multiplicateurs de $\mathcal{H}(b)$. Alors $\mathcal{A}$ vérifie évidemment (H4a) (et donc (H4)), (H5) d'après le lemme 3.2 et (H7).

Nous obtenons directement, avec le théorème 3.14 et le corollaire 3.16, le résultat suivant.

Théorème 3.22. *Soit b un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞. Supposons que $\mathcal{H}(b)$ vérifie l'hypothèse* (H6). *Soient $f, g \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ vérifiant $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors*

1. *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $[g^N]_{\mathcal{H}(b)} \subset [f]_{\mathcal{H}(b)}$.*
2. *De plus, si g est cyclique pour S_b dans $\mathcal{H}(b)$, alors f est cyclique pour S_b dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{H}(b)$ vérifie les hypothèses (H1) à (H3) et $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ vérifie les hypothèses (H4) à (H6), il suffit d'appliquer respectivement le théorème 3.14 et le corollaire 3.16. $\square$

Il vient alors la question naturelle suivante, portant sur l'espace $\mathcal{H}(b)$ et son espace de multiplicateurs.

Question 3.23. *Peut-on caractériser les points non-extrêmes b de la boule unité fermée de H^∞ tels que $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ vérifie* (H6) *?*

Dans [60], E. Fricain, A. Hartmann, W.T. Ross et D. Timotin ont montré que lorsque b est une fraction rationnelle de la boule unité fermée de H^∞ (mais n'est pas un produit de Blaschke fini), la réponse à la question est positive. Plus précisément, si b est une fraction rationnelle de la boule unité fermée de H^∞ (mais n'est pas un produit de Blaschke fini), alors la fonction a associée à b est aussi une fraction rationnelle (sans zéros dans $\mathbb{D}$). On peut alors décomposer a sous la forme $a = a_1 a_1^{\#}$ avec a_1 un polynôme qui contient les zéros distincts de a sur $\mathbb{T}$ notés $(\zeta_k)_{1\le k\le n}$ et de multiplicités associées $(m_k)_{1\le k\le n}$:

$$a_1(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-\zeta_k)^{m_k}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.8}$$

et $a_1^{\#}, (a_1^{\#})^{-1} \in A(\mathbb{D})$. Comme $\|b\|_\infty = 1$, on a nécessairement que $\{\zeta_k : 1 \le k \le n\} \ne \emptyset$. Rappelons également que dans ce cas, $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b)) = H^\infty \cap \mathcal{H}(b)$ (voir [53]). Il a été montré dans [60] que $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ vérifie (H6) avec $A = 2 + N + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ et $N = \sum_{k=1}^{n} m_k$.

Revenons au cas général, et rappelons la notion de dérivée angulaire qui nous sera utile pour le résultat suivant. Nous dirons que b a une *dérivée angulaire au sens de Carathéodory* en $\zeta \in \mathbb{T}$ si b et b' ont une limite non-tangentielle en ζ et $|b(\zeta)| = 1$. Notons par $E_0(b)$ l'ensemble de tous ces points :

$$E_0(b) := \{\zeta \in \mathbb{T} : b \text{ a une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en } \zeta\}.$$

Rappelons ici à juste titre que f admet L comme limite non-tangentielle au point $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ si, pour $C \ge 1$ fixé,

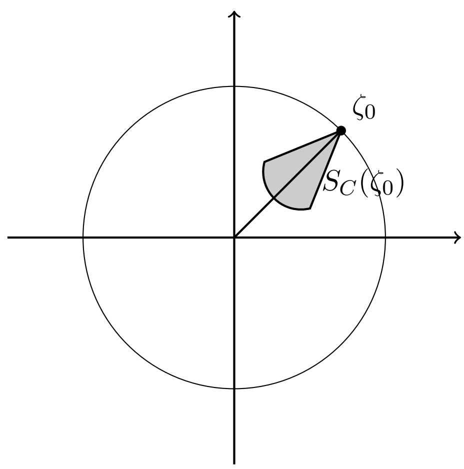
$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0 \\ z\in S_C(\zeta_0)}} f(z) = L,$$

où la région de Stolz $S_C(\zeta_0)$ de sommet $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ et d'amplitude $C \ge 1$ est définie par

$$S_C(\zeta_0) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|z-\zeta_0|}{1-|z|} \le C \right\}.$$

Si tel est le cas, on notera $L = f(\zeta_0)$ la *valeur au bord* et

$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0 \\ \sphericalangle}} f(z) := f(\zeta_0).$$



Il est connu que pour $\zeta \in \mathbb{T}$, toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ a une limite non-tangentielle en ζ si et seulement si $\zeta \in E_0(b)$. Aussi, d'après [58, Theorem 21.1], si $\zeta \in E_0(b)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(\zeta)| \le C \|f\|_b, \quad f \in \mathcal{H}(b). \tag{3.9}$$

Enfin, d'après [58, Theorem 28.37], pour $\zeta \in \mathbb{T}$, nous avons aussi (où ici S_b^* désigne l'adjoint banachique de S_b) que

$$\zeta \in \sigma_P(S_b^*) \text{ si et seulement si } \zeta \in E_0(b). \tag{3.10}$$

Nous obtenons alors, avec le théorème 3.20, le résultat suivant.

Corollaire 3.24. *Soit b un point non-extrême de la boule unité fermée de H^∞. Supposons que $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ vérifie les hypothèses* (H6) *et* (H8)*. Soit $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{H}(b)) \cap A(\mathbb{D})$ et supposons que, pour un certain $\zeta_0 \in \mathbb{T}$, $\mathcal{Z}(f) = \{\zeta_0\}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f est cyclique pour S_b.*
2. *La fonction f est extérieure et $\zeta_0 \notin E_0(b)$.*

Démonstration.
$1 \Longrightarrow 2$: On a déjà vu que si f est cyclique dans $\mathcal{H}(b)$, alors f est une fonction extérieure d'après le lemme 2.2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|pf - 1\|_b \leq \varepsilon$. Supposons par l'absurde que $\zeta_0 \in E_0(b)$. Alors, d'après (3.9), on obtient

$$|p(\zeta_0)f(\zeta_0) - 1| \leq C\,\|pf - 1\|_b \leq C\varepsilon.$$

Or, par hypothèse, $f(\zeta_0) = 0$ et on obtient $1 \leq C\varepsilon$, une absurdité pour un ε suffisamment petit.
$2 \Longrightarrow 1$: Supposons que f est une fonction extérieure avec $\mathcal{Z}(f) = \{\zeta_0\}$ où $\zeta_0 \notin E_0(b)$. Alors, on a $\zeta_0 \notin \sigma_P(S_b^*)$ d'après (3.10). Donc la fonction $z - \zeta_0$ est cyclique pour S_b d'après le lemme 3.21. Puisque $\mathcal{H}(b)$ vérifie (H1) à (H3) et $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ vérifie (H4) à (H8), on a la cyclicité de f pour S_b d'après le théorème 3.20. □

Il vient alors la question naturelle suivante, portant sur l'espace $\mathcal{H}(b)$ et l'hypothèse (H8).

Question 3.25. *Peut-on caractériser les points non-extrêmes b de la boule unité fermée de H^∞ tels que $\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))$ vérifie* (H8) *?*

Encore une fois, nous pouvons donner une réponse positive dans le cas où b est une fraction rationnelle (mais n'est pas une fonction intérieure).

Proposition 3.26. *Soit b une fraction rationnelle (qui n'est pas une fonction intérieure) dans la boule unité fermée de H^∞. Alors il existe une constante $C > 0$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|\chi_n\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} \leq Cn^p.$$

Démonstration. Remarquons que d'après le lemme 3.2, on a

$$\|\chi_n\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{H}(b))} \lesssim \|\chi_n\|_\infty + \|\chi_n\|_b = 1 + \|\chi_n\|_b\,.$$

Il est alors suffisant de montrer que $\|\chi_n\|_b \lesssim n^p$. Considérons pour ce faire $\frac{b}{a} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ et son développement en série entière donné par

$$\frac{b(z)}{a(z)} = \sum_{j \geq 0} c_j z^j, \quad |z| < 1.$$

Alors, d'après [58, Theorem 24.12], on a

$$\|\chi_n\|_b^2 = 1 + \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2\,,$$

et les inégalités de Cauchy donnent

$$|c_j| = \left|\frac{(\frac{b}{a})^{(j)}(0)}{j!}\right| \leq \inf_{0<r<1} \frac{M(r)}{r^j},$$

où, pour $0 < r < 1$,

$$M(r) = \sup_{|z|=r} \left| \frac{b(z)}{a(z)} \right|.$$

D'après la factorisation de a donnée par (3.8), pour $|z| = r < 1$, on a

$$|a(z)| \gtrsim |a_1(z)| = \prod_{i=1}^{n} |z - \zeta_i|^{m_i} \geq \prod_{i=1}^{n} (|\zeta_i| - |z|)^{m_i} = (1-r)^N.$$

D'où $M(r) \lesssim (1-r)^{-N}$. Ainsi, d'après le lemme 3.11,

$$|c_j| \lesssim \inf_{0<r<1} (1-r)^{-N} r^{-j} \lesssim j^N, \quad j \longrightarrow \infty.$$

On obtient que

$$\sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \lesssim \sum_{j=0}^{n} j^{2N} \leq n^{2N+1} \text{ et } \|\chi_n\|_b \lesssim \sqrt{1 + n^{2N+1}} \lesssim n^{N+1}. \qquad \square$$

3.3.2 Espaces de Dirichlet-Besov

Soit $\mathcal{X} = \mathcal{D}^p_\alpha$ avec $p \geq 1$ et $\alpha > -1$ l'espace de Dirichlet-Besov défini, pour $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy$, par

$$\mathcal{D}^p_\alpha := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{\mathcal{D}^p_\alpha} := |f(0)|^p + (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} \left| f'(z) \right|^p (1 - |z|^2)^\alpha \, dA(z) < \infty \right\}. \tag{3.11}$$

Remarquons que pour $p = 2$ et $\alpha = 1$, $\mathcal{D}^p_\alpha = H^2$ et pour $p = 2$ et $\alpha = 0$, $\mathcal{D}^p_\alpha = \mathcal{D}$. Rappelons que

- si $1 < p < \alpha + 1$, alors H^p est continûment inclus dans $\mathcal{D}^p_\alpha$ et toute fonction extérieure est cyclique pour le shift dans $\mathcal{D}^p_\alpha$ d'après [75, Proposition 3.1]. Notons qu'ici $\mathcal{D}^p_\alpha = \mathcal{A}^p_{\alpha-p}(\mathbb{D})$ où $\mathcal{A}^\alpha_p(\mathbb{D})$ désigne l'espace de Bergman pondéré défini par (1.7).
- si $p > \alpha + 2$, alors $\mathcal{D}^p_\alpha$ est continûment inclus dans H^∞ et plus précisément $\mathcal{D}^p_\alpha \subset A(\mathbb{D})$, l'algèbre du disque. Il suit alors que $\mathcal{D}^p_\alpha$ devient une algèbre de Banach et que les seules fonctions extérieures cycliques pour S sont les fonctions inversibles. En particulier, toute fonction qui s'annule au moins une fois dans $\overline{\mathbb{D}}$ n'est donc pas cyclique pour S dans $\mathcal{D}^p_\alpha$ (voir [48, 75]).

Nous allons donc supposer dans la suite que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Considérons $\mathcal{A} := \mathcal{D}^p_\alpha \cap A(\mathbb{D})$ munit de la norme

$$\|f\|^p_{\mathcal{A}} := \|f\|^p_\infty + \int_{\mathbb{D}} \left| f'(z) \right|^p (1 - |z|^2)^\alpha \, dA(z).$$

On vérifie facilement que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach. Le résultat suivant montre la convergence des sommes de Féjer associées à $f \in \mathcal{A}$ vers f dans $\mathcal{A}$, et en particulier dans $\mathcal{D}^p_\alpha$. Nous pouvons nous référer aussi à [72], mais nous donnons ici une preuve claire et complète.

Lemme 3.27. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{A}$, on a*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{\mathcal{A}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $(\sigma_n(f))_{n\geq 1}$ est la suite des sommes de Fejér associées à f définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \quad S_k(f)(t) = \sum_{\ell=-k}^{k} c_l(f) e^{ilt}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{A} = \mathcal{D}^p_\alpha \cap A(\mathbb{D})$. Pour $r \in]0,1[$, notons f_r la fonction définie par $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ pour $\theta \in]0, 2\pi]$. Alors $f_r \in C^\infty(\mathbb{T})$ et $f_r' \in C(\mathbb{T})$. En particulier, $f_r' \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $f_r' \in L^p(\mathbb{T})$ pour tout $p \geq 1$. D'après le théorème de convergence de Féjer, pour $0 < r < 1$, on a

$$\left\|\sigma_n(f_r') - f_r'\right\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \left\|\sigma_n(f_r')\right\|_p \leq \left\|f_r'\right\|_p . \tag{3.12}$$

Ce dernier théorème indique aussi que $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Il suffit alors de montrer que $\|\sigma_n(f) - f\|^p_{\mathcal{D}^p_\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On a

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f) - f\|^p_{\mathcal{D}^p_\alpha} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|(\sigma_n(f) - f)'\right|^p (re^{i\theta})(1-r^2)^\alpha r \, drd\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|\sigma_n(f)' - f'\right|^p (re^{i\theta})(1-r^2)^\alpha r \, drd\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|\sigma_n(f_r)' - f_r'\right|^p (e^{i\theta})(1-r^2)^\alpha r \, drd\theta.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, et en utilisant que $\sigma_n(f_r)' = \sigma_n(f_r')$, on obtient que

$$\|\sigma_n(f) - f\|^p_{\mathcal{D}^p_\alpha} = \int_0^1 r(1-r^2)^\alpha \left\|\sigma_n(f_r') - f_r'\right\|^p_p \, dr.$$

Posons maintenant l'application h_n définie par $h_n(r) = r(1-r^2)^\alpha \left\|\sigma_n(f_r') - f_r'\right\|^p_p$ pour $0 < r < 1$. Alors, d'après (3.12), $|h_n(r)| = h_n(r) \leq r(1-r^2)^\alpha 2^p \left\|f_r'\right\|^p_p =: h(r)$. Dans ce cas,

$$\int_0^1 |h(r)| \, dr = \int_0^1 r(1-r^2)^\alpha 2^p \left(\int_0^{2\pi} \left|f'(re^{i\theta})\right|^p \, d\theta\right) \, dr \asymp 2^p \left\|f\right\|^p_{\mathcal{D}^p_\alpha} .$$

Donc $h \in L^1([0,1])$ et d'après le théorème de convergence dominée, on obtient d'après (3.12) que

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|^p_{\mathcal{D}^p_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(r) \, dr = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} h_n(r) \, dr = 0.$$

Le résultat suit par définition de la norme de f dans $\mathcal{A}$. □

Lemme 3.28. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Alors $\mathcal{D}^p_\alpha$ vérifie les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A}$ vérifie les hypothèses* (H4) *à* (H8).

Démonstration. Il est bien connu que $\mathcal{D}^p_\alpha$ vérifie (H1) à (H3) ([8, 70, 105, 109]). Vérifions maintenant que $\mathcal{A}$ satisfait les points (H4) à (H8). Tout d'abord, $\mathcal{A}$ vérifie (H4) et en particulier (H4b) car on a évidemment que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^p_\alpha$ et on déduit la densité des polynômes dans $\mathcal{A}$ d'après le lemme 3.27. Il est clair que (H5) est vérifiée puisque pour tous $f \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$|f(\lambda)| \leq \|f\|_\infty = \|f\|_{A(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{\mathcal{A}} .$$

Le fait que $\mathcal{A}$ vérifie (H6) avec la constante $A \geq 4$ est un résultat profond de Tolokonnikov dans [105]. Montrons enfin que (H7) et (H8) sont également vérifiées. Remarquons que (H7) est claire puisque $\|\chi_1\|_\infty = 1$ et $1 \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|\chi_n\|^p_{\mathcal{A}} &= \|\chi_n\|^p_\infty + \int_{\mathbb{D}} \left|\chi_n'(z)\right|^p (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) \\
&= 1 + n^p \int_{\mathbb{D}} |z|^{(n-1)p} (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) \\
&\leq 1 + n^p \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^\alpha r \, dr \, \frac{d\theta}{2\pi} \\
&\leq 1 + n^p \int_0^1 (1-r)^\alpha \, dr \leq 1 + \frac{n^p}{\alpha+1},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la dernière hypothèse (H8) est vérifiée. □

Remarque 3.29. Sans les majorations brutes effectuées dans la preuve précédente de (H8), nous avons en particulier que

$$\int_{\mathbb{D}} |z|^{(n-1)p} (1-|z|^2)^{\alpha}\, dA(z) \asymp 2B(x_n, y),$$

avec B la fonction Bêta d'Euler et $x_n = (n-1)p + 2$ et $y = \alpha + 1$. En utilisant le lien avec la fonction Gamma d'Euler Γ donné par $B(x_n, y) = \frac{\Gamma(x_n)\Gamma(y)}{\Gamma(x_n+y)}$ et l'équivalent par la formule de Stirling $\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^z \sqrt{2\pi}$ pour $|\arg z| < \pi$, nous obtenons que

$$\|\chi_n\|_{\mathcal{A}}^p \lesssim 1 + n^p \frac{1}{n^{\alpha+1}} \lesssim n^{p-\alpha-1}.$$

En effet, nous avons que

$$B(x_n, y) \sim \frac{(x_n^{x_n-\frac{1}{2}} e^{x_n} \sqrt{2\pi})(y^{y-\frac{1}{2}} e^y \sqrt{2\pi})}{(x_n+y)^{x_n+y-\frac{1}{2}} e^{x_n+y} \sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi} \frac{x_n^{x_n-\frac{1}{2}} y^{y-\frac{1}{2}}}{(x_n+y)^{x_n+y-\frac{1}{2}}}.$$

Or, il vient que $y^{y-\frac{1}{2}} = \exp\left(y \ln(y - \frac{1}{2})\right) = \exp\left((\alpha+1)\ln(\alpha + \frac{1}{2})\right) > 0$ ne dépend pas de n et

$$\begin{aligned}
\frac{x_n^{x_n-\frac{1}{2}}}{(x_n+y)^{x_n+y-\frac{1}{2}}} &= \exp\left((x_n - \frac{1}{2})\ln(x_n) - (x_n + y - \frac{1}{2})\ln(x_n+y)\right) \\
&= \exp\left((x_n - \frac{1}{2})\ln(x_n) - (x_n + y - \frac{1}{2})\left[\ln(x_n) + \ln\left(1 + \frac{y}{x_n}\right)\right]\right) \\
&= \exp\left(-y\ln(x_n)\right) \exp\left(-(x_n + y - \frac{1}{2})\ln\left(1 + \frac{y}{x_n}\right)\right) \\
&\lesssim \frac{1}{x_n^y} \sim \frac{1}{(np)^y} \lesssim \frac{1}{n^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une autre borne supérieure de $\|\chi_n\|_{\mathcal{A}}$, prouvant d'une autre manière (H8).

Finalement, en utilisant respectivement le théorème 3.14 avec le corollaire 3.16 et le théorème 3.20, nous retrouvons deux résultats de Egueh-Kellay-Zarrabi de [41], grâce au lemme 3.28.

Théorème 3.30 (Egueh-Kellay-Zarrabi)**.** *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Supposons que $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap A(\mathbb{D})$ vérifient $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors*

1. *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $[g^N]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$.*
2. *De plus, si g est cyclique pour S dans $\mathcal{D}_\alpha^p$, alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{D}_\alpha^p$.*

Remarque 3.31. Notons que ce dernier résultat est une extension d'un résultat de Brown-Shields de [26], qui ont fait l'étude pour l'espace classique de Dirichlet $\mathcal{D}$ et l'espace de Dirichlet pondéré $\mathcal{D}_\alpha$. Nous pouvons également nous référer à [3] pour l'application de ce résultat aux espaces H_w définis, pour $w \in C^2([0,1[)$ une fonction positive et intégrable, par

$$H_w := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_w^2 := |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 w(|z|)\, dA(z) < \infty \right\},$$

qui généralisent le cas de $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}_\alpha$ (avec des hypothèses supplémentaires sur w).

Théorème 3.32 (Egueh-Kellay-Zarrabi)**.** *Soit $p > 1$ tel que $\alpha+1 \leq p \leq \alpha+2$. Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap A(\mathbb{D})$ une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f) = \{\zeta_0\}$ pour un certain $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{D}_\alpha^p$.*

Démonstration. Il est connu que pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$, $z - \zeta$ est cyclique pour S dans $\mathcal{D}_\alpha^p$ d'après [82, Proposition 4.3.8]. Alors, d'après le lemme 3.28, on obtient le résultat avec le théorème 3.20. □

Remarque 3.33. Notons que ce dernier résultat a également été obtenu par Kellay-Le Manach-Zarrabi dans [75] pour $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$ avec une toute autre méthode, issue des techniques utilisées par Hedenmalm et Shields dans [71] dans le cadre de l'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}$. Notons que ce théorème reste vrai en supposant que $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble dénombrable de points de $\mathbb{T}$ (voir [71]).

3.3.3 Espaces de type Dirichlet

Soit μ une mesure de Borel positive et finie sur $\overline{\mathbb{D}}$. Définissons

$$U_\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} \left(\log \left| \frac{1 - \overline{w}z}{z - w} \right| \right) \frac{d\mu(w)}{1 - |w|^2} + \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors U_μ est une fonction superharmonique (i.e. pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\partial\overline{\partial}U_\mu(z) \leq 0$) positive sur $\mathbb{D}$. L'espace de type Dirichlet $\mathcal{D}(\mu)$ associé à μ est défini comme l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{D}} \left| f'(z) \right|^2 U_\mu(z) \, dA(z) < \infty.$$

Nous avons que $\mathcal{D}(\mu) \subset H^2$ et si on pose

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}(\mu)} := \|f\|_2^2 + \int_{\mathbb{D}} \left| f'(z) \right|^2 U_\mu(z) \, dA(z), \quad f \in \mathcal{D}(\mu),$$

alors $\mathcal{D}(\mu)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant. Remarquons que si μ est supportée par $\mathbb{T}$, alors $U_\mu = P_\mu$ et nous obtenons que $\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}_\mu$ l'espace de Dirichlet harmonique défini par (1.9). Ces espaces ont notamment été étudiés par A. Aleman dans [4]. Nous allons voir que $\mathcal{X} = \mathcal{D}(\mu)$ et $\mathcal{A} = \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ entrent également dans notre cadre général, c'est-à-dire qu'ils satisfont les hypothèses (H1) à (H8). Rappelons d'abord un théorème essentiellement du à S. Luo de [79], bien qu'il n'est pas exactement écrit sous cette forme. Pour déduire cette version, rappelons le théorème de la couronne version Toeplitz.

Théorème 3.34 (Ball-Trent-Vinnikov, [13])**.** *Soit H un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et supposons que H satisfait la propriété de Nevanlinna-Pick complète. Soit $\delta > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Si $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(H)$ et*
$$0 < \delta \leq |f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 \leq 1, \quad z \in \Omega,$$
alors il existe $g_1, g_2 \in H$ telles que
$$g_1 f_1 + g_2 f_2 \equiv h \text{ sur } \Omega$$
et $\|g_\ell\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|h\|_H$ pour $\ell = 1, 2$.
2. *Si $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(H)$ et*
$$0 < \delta \leq |f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 \leq 1, \quad z \in \Omega,$$
alors il existe $g_1, g_2 \in \mathfrak{M}(H)$ telles que
$$g_1 f_1 + g_2 f_2 \equiv 1 \text{ sur } \Omega$$
et $\|g_\ell\|_{\mathfrak{M}(H)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ pour $\ell = 1, 2$.

La dénomination théorème de la couronne "version Toeplitz" provient du fait que si $H = H^2$, alors le point 1 du théorème est équivalent au fait que $T_f T_f^* \geq \delta Id_{H^2}$ où

$$T_f : \begin{cases} H^2 \oplus H^2 \longrightarrow H^2 \\ \quad (g_1, g_2) \longmapsto f_1 g_1 + f_2 g_2 \end{cases} \qquad \text{et } T_f^* h = (T_{\overline{f_1}} h, T_{\overline{f_2}} h), \quad h \in H^2.$$

Nous pouvons nous référer aussi à [108].

Théorème 3.35 (S.Luo, [79]). *Soit μ une mesure positive et finie sur $\overline{\mathbb{D}}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ vérifiant*

$$0 < \delta \leq |f_1| + |f_2| \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \|f_1\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))} + \|f_2\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))} \leq 1,$$

il existe des fonctions $g_1, g_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ telles que $f_1g_1 + f_2g_2 \equiv 1$ sur $\mathbb{D}$ et

$$\|g_\ell\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))} \leq \frac{C}{\delta^4}, \quad \ell = 1, 2.$$

Démonstration. Soient $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ vérifiant

$$0 < \delta \leq |f_1| + |f_2| \text{ sur } \mathbb{D} \text{ et } \|f_1\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))} + \|f_2\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))} \leq 1.$$

Alors, il vient d'après [79] que, pour tout $h \in \mathcal{D}(\mu)$, il existe des fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mu)$ telles que $f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 \equiv h$ sur $\mathbb{D}$ et

$$\|\varphi_\ell\|_{\mathcal{D}(\mu)} \lesssim \delta^{-4} \|h\|_{\mathcal{D}(\mu)}, \quad \ell = 1, 2.$$

Puisque $\mathcal{D}(\mu)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant avec un noyau de Nevanlinna-Pick complet d'après [99], il vérifie alors le théorème de la couronne Toeplitz 3.34. Ainsi, il vient l'existence de deux fonctions $g_1, g_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ telles que $f_1g_1 + f_2g_2 \equiv 1$ sur $\mathbb{D}$ et

$$\|g_\ell\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))} \lesssim \delta^{-4}, \quad \ell = 1, 2.$$

□

Lemme 3.36. *Soit μ une mesure de Borel positive et finie sur $\overline{\mathbb{D}}$. Alors $\mathcal{X} = \mathcal{D}(\mu)$ vérifie les hypothèses* (H1) *à* (H3) *et $\mathcal{A} = \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ vérifie les hypothèses* (H4) *à* (H8).

Démonstration. Il est bien connu que $\mathcal{D}(\mu)$ vérifie les hypothèses (H1) à (H3) (voir par exemple [4]). Par définition de $\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$, $\mathcal{A}$ vérifie évidemment (H4a) (et donc (H4)), et les hypothèses (H5) d'après le lemme 3.2 et (H7). De plus, $\mathcal{A}$ vérifie (H6) avec $A \geq 4$ d'après le théorème 3.35. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ vérifie (H8). Remarquons pour ce faire que, d'après [4, Theorem IV.1.9], pour tout $g \in \mathcal{D}(\mu)$, on a

$$\int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 U_\mu(z)\, dA(z) = \int_{\overline{\mathbb{D}}} D_z(g)\, d\mu(z), \quad D_z(g) = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta} \right|^2 dm(\zeta),$$

avec m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mu)$. On a

$$\begin{aligned} \|\chi_n f\|_{\mathcal{D}(\mu)}^2 &= \|\chi_n f\|_2^2 + \int_{\mathbb{D}} |(\chi_n f)'(z)|^2 U_\mu(z)\, dA(z) \\ &= \|f\|_2^2 + \int_{\overline{\mathbb{D}}} D_z(\chi_n f)\, d\mu(z). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$D_z(\chi_n f) = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{z^n f(z) - \zeta^n f(\zeta)}{z - \zeta} \right|^2 dm(\zeta).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^n f(z) - \zeta^n f(\zeta)}{z - \zeta} \right|^2 &= \left| \zeta^n \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} + f(z) \frac{z^n - \zeta^n}{z - \zeta} \right|^2 \\ &\leq 2\, |f(z)|^2 \left| \frac{z^n - \zeta^n}{z - \zeta} \right|^2 + 2 \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right|^2 \\ &\leq 2n^2\, |f(z)|^2 + 2 \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right|^2. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$D_z(\chi_n f) \lesssim 2n^2 \|f\|_2^2 + 2D_z(f),$$

et par suite

$$\begin{aligned}\|\chi_n f\|_{\mathcal{D}(\mu)}^2 &\le \|f\|_2^2 + 2n^2\mu(\overline{\mathbb{D}}) \|f\|_2^2 + 2\int_{\overline{\mathbb{D}}} D_z(f)\, d\mu(z) \\ &\le 2\|f\|_{\mathcal{D}(\mu)}^2 + 2n^2\mu(\overline{\mathbb{D}}) \|f\|_{\mathcal{D}(\mu)}^2 \lesssim n^2 \|f\|_{\mathcal{D}(\mu)}^2 .\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que $\|\chi_n\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))} \lesssim n$ et $\mathcal{A}$ vérifie (H8). □

En utilisant le théorème 3.14 et le corollaire 3.16, nous retrouvons alors partiellement les résultats de Richter-Sundberg [88, Corollary 5.5] et Aleman [4, Corollary 4.4] grâce au lemme 3.36.

Théorème 3.37. *Soit μ une mesure positive et finie sur $\overline{\mathbb{D}}$. Supposons que $f, g \in \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu))$ vérifient $|g(z)| \le |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors*

1. *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $[g^N]_{\mathcal{D}(\mu)} \subset [f]_{\mathcal{D}(\mu)}$.*
2. *De plus, si g est cyclique pour S dans $\mathcal{D}(\mu)$, alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{D}(\mu)$.*

Remarque 3.38. Ce dernier théorème a été montré dans [88] avec $N = 1$ et avec des hypothèses plus faibles : $f, g \in \mathcal{D}(\mu)$ et μ une mesure sur $\mathbb{T}$. Le cas avec une mesure sur $\overline{\mathbb{D}}$ est obtenu dans [4] avec également $N = 1$.

En utilisant le théorème 3.20, nous pouvons aussi formuler l'application suivante.

Théorème 3.39. *Soient μ une mesure positive et finie sur $\overline{\mathbb{D}}$ et $f \in \mathfrak{M}(\mathcal{D}(\mu)) \cap A(\mathbb{D})$ une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f) = \{\zeta_0\}$ pour un certain $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ qui n'est pas un point d'évaluation borné pour $\mathcal{D}(\mu)$. Alors f est cyclique pour S dans $\mathcal{D}(\mu)$.*

Démonstration. Puisque ζ_0 n'est pas un point d'évaluation borné pour $\mathcal{D}(\mu)$, il vient que $z - \zeta_0$ est cyclique pour S dans $\mathcal{D}(\mu)$ d'après le lemme 3.21. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.20 avec le lemme 3.36. □

Remarque 3.40. Dans le cas où μ est une mesure positive et finie sur $\mathbb{T}$, notons que O. El-Fallah, Y. Elmadani et K. Kellay ont montré dans [46] que ζ est un point d'évaluation borné pour $\mathcal{D}(\mu)$ si et seulement si $c_\mu(\zeta) > 0$ où c_μ est la capacité de Choquet associée à $\mathcal{D}(\mu)$. De plus, ils ont aussi montré que pour $f \in \mathcal{D}(\mu)$ telle que $\operatorname{supp}(\mu) \cap \underline{\mathcal{Z}}(f)$ est dénombrable,

f est cyclique pour S dans $\mathcal{D}(\mu)$ si et seulement si f est une fonction extérieure et $c_\mu(\mathcal{Z}(f)) = 0$.

Ceci atteste donc que, dans ces espaces, la conjecture de Brown-Shields est vraie si le support de μ est dénombrable.

Deuxième partie

Plongement dans des semi-groupes d'opérateurs et de fonctions analytiques du disque unité

CHAPITRE 4

AUTOUR DES FONCTIONS ANALYTIQUES DU DISQUE UNITÉ

4.1 Théorie de Denjoy-Wolff et automorphismes de $\mathbb{D}$

Nous renvoyons le lecteur à [22, 39, 96] pour une présentation détaillée de la théorie des fonctions holomorphes du disque unité dans lui même et de la théorie de Denjoy-Wolff.

Notons $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ l'ensemble des applications holomorphes et bijectives de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Ces automorphismes de $\mathbb{D}$ sont exactement décrits par (les *transformations de Möbius*)

$$\tau_{\zeta,a} : z \in \mathbb{D} \longmapsto \zeta \frac{a-z}{1-\overline{a}z}, \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad a \in \mathbb{D}. \tag{4.1}$$

Celle-ci vérifie $\tau_{\zeta,a}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$, $\tau_{\zeta,a}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $\tau_{\zeta,a}^{-1} = \tau_{\overline{\zeta},\zeta a}$. Dans le cas où $\zeta = 1$, nous noterons $\tau_a := \tau_{1,a}$ où ici $\tau_a^{-1} = \tau_a$.

Notons que, pour $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, il existe $\zeta \in \mathbb{T}$ et $a \in \mathbb{D}$ tels que $\varphi = \tau_{\zeta,a}$ d'après [22, Proposition 1.2.2]. De plus, remarquons que $\varphi = \tau_{\zeta,a} \in \mathrm{Hol}\left(D\left(0, \frac{1}{\overline{a}}\right)\right)$ avec $\overline{\mathbb{D}} \subset D\left(0, \frac{1}{\overline{a}}\right)$. D'après [22, Lemma 1.8.1], pour $\varphi \not\equiv Id_{\mathbb{D}}$, φ a au moins un point fixe dans $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, si φ n'a pas de point fixe dans $\mathbb{D}$, il existe alors deux points fixes $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, possiblement égaux, tels que $\varphi'(\alpha)\varphi'(\beta) = 1$. En effet, l'équation $\varphi(z) = \tau_{\zeta,a}(z) = z$ est équivalente à $\overline{a}z^2 - (1+\zeta)z + \zeta a = 0$. Nous avons alors

1. si $a = 0$, $\varphi(z) = z$ si et seulement si $(1+\zeta)z = 0$ si et seulement si $z = 0$ car $\zeta \neq -1$ puisque $\varphi \not\equiv Id_{\mathbb{D}}$;
2. si $a \neq 0$, l'équation $\varphi(z) = z$ admet deux solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ éventuellement égales vérifiant $z_1 z_2 = \zeta \frac{a}{\overline{a}} \in \mathbb{T}$ et $z_1 + z_2 = \frac{1+\zeta}{\overline{a}}$. Si φ n'a pas de point fixe dans $\mathbb{D}$, alors nécessairement $|z_1| = |z_2| = 1$ et nous pouvons alors noter $z_1 = \alpha \in \mathbb{T}$ et $z_2 = \beta \in \mathbb{T}$. De plus, puisque pour tout $z \in \mathbb{D}$,
$$\varphi'(z) = \zeta \frac{-(1-\overline{a}z) + \overline{a}(a-z)}{(1-\overline{a}z)^2} = \zeta \frac{|a|^2 - 1}{(1-\overline{a}z)^2},$$
nous obtenons finalement
$$\varphi'(\alpha)\varphi'(\beta) = \zeta^2 \frac{(1-|a|^2)^2}{(1-\overline{a}\alpha)^2(1-\overline{a}\beta)^2} = \zeta^2 \frac{(1-|a|^2)^2}{(1-\overline{a}(\alpha+\beta)+\overline{a}^2\alpha\beta)^2} = 1.$$

Le positionnement du/des point(s) fixe(s) permet de catégoriser les automorphismes de $\mathbb{D}$:

- φ est *elliptique* si l'un des points fixes est dans $\mathbb{D}$.
- φ est *hyperbolique* si les deux points fixes sont distincts et sont dans $\mathbb{T}$.
- φ est *parabolique* si l'unique point fixe est dans $\mathbb{T}$.

Théorème 4.1 (Denjoy-Wolff)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique. Supposons que φ ne s'étend pas en un automorphisme elliptique du plan complexe. Alors il existe un point $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, appelé point de Denjoy-Wolff, tel que la suite des fonctions itérées $(\varphi^{[n]} := \varphi \circ \cdots \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers α, c'est-à-dire que pour tout $K \subset \mathbb{D}$ compact,*

$$\left\|\varphi^{[n]} - \alpha\right\|_{\infty,K} := \sup_{z\in K} \left|\varphi^{[n]}(z) - \alpha\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. La preuve se décompose en plusieurs étapes, et fait donc appel à différents outils.

1. Le cas des automorphismes : $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et on effectue une disjonction de cas via la nature de φ et la position de son/ses point(s) fixe(s).
2. Le cas des non-automorphismes : $\varphi \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.
   - Si φ a un point fixe dans $\mathbb{D}$: on utilise la preuve du lemme de Schwarz [22, Theorem 1.2.1].
   - Si φ n'a pas de point fixe dans $\mathbb{D}$: on utilise le théorème de Wolff [96, Section 5.3] et le lemme de Schwarz-Pick [22, Theorem 1.2.3]. □

Rappelons que $(\varphi_t)_{t\geq 0}$, une famille d'applications analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, est un *semi-flot holomorphe du disque unité* si pour tout $z \in \mathbb{D}$, pour tous $s, t \geq 0$,

$$\varphi_0(z) = z, \quad \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \varphi_t(z) \text{ est continue.}$$

Cette dernière hypothèse de continuité est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$ en utilisant le théorème de Montel [92, Theorem 14.6]. En termes de générateurs, nous avons l'existence d'une application $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique telle que pour tous $t \geq 0$, $z \in \mathbb{D}$, $\frac{\partial\varphi(t,z)}{\partial t} = G(\varphi(t, z))$, résultat profond dû à Berkson et Porta où l'on note ici $\varphi(t, z) = \varphi_t(z)$ ([17] ou [22, Theorem 10.1.4]). De plus, comme corollaire, nous notons que pour tout $t \geq 0$, φ_t est injective ([22, Theorem 8.1.17] avec la théorie de Cauchy-Lipschitz ou [31, Theorem 2]). La question qui nous intéresse dans ce chapitre est la suivante.

Question 4.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ analytique et injective. Existe-t-il un semi-flot holomorphe $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ de $\mathbb{D}$ tel que $\varphi_1 = \varphi$?*

Le premier exemple simple est celui des *automorphismes* de $\mathbb{D}$. Nous obtenons la caractérisation suivante selon la répartition du/des point(s) fixe(s).

(a) Si φ est *elliptique* avec un point fixe $\alpha \in \mathbb{D}$, φ est conjuguée à une rotation i.e. il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi = \tau_\alpha \circ R_\theta \circ \tau_\alpha, \quad R_\theta : z \in \mathbb{D} \longmapsto e^{i\theta} z \in \mathbb{D}. \tag{4.2}$$

Nous obtenons alors que φ est plongeable dans le semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ suivant :

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_t = \tau_\alpha \circ R_{\theta t} \circ \tau_\alpha, \quad R_{\theta t} : z \longmapsto e^{it\theta} z.$$

Plus précisément, nous pouvons distinguer deux cas (hors le cas trivial où $\varphi_t \equiv Id_{\mathbb{D}}$ pour tout $t \geq 0$) :

- Le cas elliptique neutre : pour tout $t > 0$, $\varphi_t \not\equiv Id_{\mathbb{D}}$ et

$$\varphi_t(\alpha) = \alpha \text{ et } \left|\varphi_t'(\alpha)\right| = 1.$$

- Le cas elliptique attractif : pour tout $t > 0$, $\varphi_t \not\equiv Id_{\mathbb{D}}$ et

$$\varphi_t(\alpha) = \alpha \text{ et } \left|\varphi_t'(\alpha)\right| < 1.$$

Notons pour la suite $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ le demi-plan droit de $\mathbb{C}$.

(b) Si φ est *hyperbolique* avec deux points fixes distincts $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ où α est le point de Denjoy-Wolff, φ est conjuguée à une homothétie i.e. il existe un automorphisme $T_{\alpha,\beta} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}^+$ vérifiant $T_{\alpha,\beta}(\alpha) = \infty$ et $T_{\alpha,\beta}(\beta) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\varphi = T_{\alpha,\beta}^{-1} \circ H_\lambda \circ T_{\alpha,\beta}, \quad H_\lambda : z \in \mathbb{H}^+ \longmapsto e^\lambda z \in \mathbb{H}^+. \tag{4.3}$$

Nous obtenons alors que φ est plongeable dans le semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ suivant :

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_t = T_{\alpha,\beta}^{-1} \circ H_{\lambda t} \circ T_{\alpha,\beta}, \quad H_{\lambda t} : z \longmapsto e^{\lambda t} z.$$

En particulier, pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{r \to 1^-} \varphi_t(r\alpha) = \alpha$ et $\lim\limits_{r \to 1^-} \varphi_t'(r\alpha) < 1$.

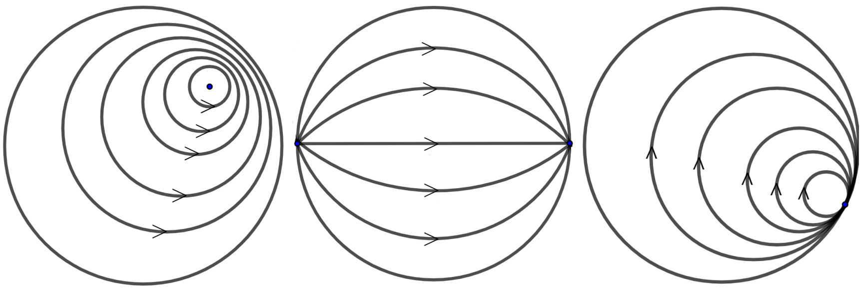
(c) Si φ est *parabolique* avec un unique point fixe $\xi \in \mathbb{T}$, φ est conjuguée à une translation i.e. il existe un automorphisme $C_\xi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\varphi = C_\xi^{-1} \circ T_\lambda \circ C_\xi, \quad T_\lambda : z \in \mathbb{H}^+ \longmapsto z + i\lambda \in \mathbb{H}^+. \tag{4.4}$$

Nous obtenons alors que φ est plongeable dans le semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ suivant :

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_t = C_\xi^{-1} \circ T_{\lambda t} \circ C_\xi, \quad T_{\lambda t} : z \longmapsto z + it\lambda.$$

En particulier, pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{r \to 1^-} \varphi_t(r\xi) = \xi$ et $\lim\limits_{r \to 1^-} \varphi_t'(r\xi) = 1$.



(a) Elliptique (b) Hyperbolique (c) Parabolique

FIGURE 4.1 – Lignes de niveau et comportements des automorphismes de $\mathbb{D}$

Remarque 4.3. Nous pouvons nous référer à [22] pour de plus amples détails, notamment sur la construction des automorphismes considérés dans les différentes conjugaisons. Par exemple, dans le cas des automorphismes paraboliques, il s'agit en fait de la *transformée de Cayley* (associée à l'unique point fixe $\tau \in \mathbb{T}$) $C_\tau : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}^+$ définie par

$$C_\tau(z) = \frac{\tau + z}{\tau - z}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.5}$$

Son inverse est donné par

$$C_\tau^{-1}(w) = \tau \frac{w - 1}{w + 1}, \quad w \in \mathbb{H}.$$

Le théorème suivant introduit finalement les différents *modèles canoniques* de semi-flots qui permettent notamment de les regrouper dans une seule classe de fonctions selon la position de leur point de Denjoy-Wolff. Il permet aussi d'introduire la fonction modèle associée, notée h et appelée *fonction de Koenigs* (voir [100] ou [22, Theorem 9.3.5]).

Théorème 4.4. *Soit $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ de générateur noté G.*

- *Modèle sans point fixe : si $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est un semi-flot sans point fixe, c'est-à-dire dont le point de Denjoy-Wolff $\alpha \in \mathbb{T}$, alors il existe une application bijective h de $\mathbb{D}$ sur $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C}$ stable par translation verticale (i.e. $h(\mathbb{D}) + it \subset h(\mathbb{D})$ pour tout $t \geq 0$) telle que $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est de la forme*
$$\varphi_t(z) = h^{-1}(h(z) + G(0)t), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.6}$$
- *Modèle avec point fixe : si $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est un semi-flot avec point fixe, c'est-à-dire dont le point de Denjoy-Wolff $\alpha \in \mathbb{D}$, alors il existe une application bijective h de $\mathbb{D}$ sur $h(\mathbb{D})$ qui est c-spiralée (stable par multiplication par e^{-ct} pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ i.e. $e^{-ct}h(\mathbb{D}) \subset h(\mathbb{D})$ pour tout $t \geq 0$) telle que $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est de la forme*
$$\varphi_t(z) = h^{-1}(e^{G'(0)t}h(z)), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.7}$$

4.2 Les fractions linéaires

Bracci, Contreras et Diaz-Madrigal ont obtenu dans [21, 22] une caractérisation complète du plongement des *fractions linéaires*

$$\mathrm{LFM}(\mathbb{D}) := \left\{ f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty : f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0, \quad f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \right\}, \tag{4.8}$$

où $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère de Riemann. Remarquons que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$.

Le plongement des fonctions de $\mathrm{LFM}(\mathbb{D})$ est caractérisé selon la nature de φ d'après [21, Proposition 3.4]. Soit $\varphi \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$.

1. Si φ est trivial, elliptique neutre, hyperbolique ou parabolique, alors φ est plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$.
2. Si φ est elliptique attractive, φ est plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ si et seulement si
$$\left|\overline{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right| l \leq |\varphi'(\alpha)| \left|1 - \frac{\alpha}{\beta}\right|, \tag{4.9}$$
où $\alpha \in \mathbb{D}$ est le point de Denjoy-Wolff, $\beta \in \mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{D}$ est le point fixe répulsif et $l = l(\gamma_{\varphi'(\alpha)})$ est la longueur de la spirale canonique $\gamma_{\varphi'(\alpha)}$ associée à $\varphi'(\alpha) \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$.

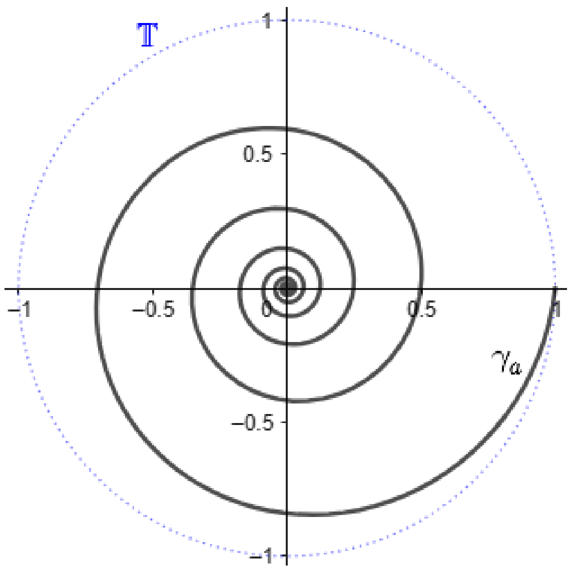
Remarque 4.5. Soit $a \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$.
Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ et $\mathrm{Im}(\lambda) \in]-\pi, \pi]$ tel que $e^\lambda = a$. Nous appelons *spirale canonique* associée à a la courbe γ_a définie par

$$\gamma_a : t \in [1, +\infty[\longmapsto e^{\lambda t}.$$

Rappelons que sa longueur $l(\gamma_a)$, finie, est définie par

$$l(\gamma_a) := \int_1^{+\infty} |\gamma_a'(t)| \, dt = \frac{|\lambda a|}{\mathrm{Re}(-\lambda)}. \tag{4.10}$$

En particulier, nous avons $l(\gamma_a) \geq |a|$.



Notons de plus que φ est plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ si et seulement si φ est plongeable dans un semi-flot d'éléments de $\mathrm{LFM}(\mathbb{D})$ d'après [21, Theorem 3.3]. Ceci provient du fait que pour $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$, s'il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi_{t_0} \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$, alors $\varphi_t \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$ pour tout $t \geq 0$ (voir [21, Theorem 3.2]). C'est dans le même esprit que les deux résultats suivants.

- Si α est un point fixe de φ, alors α est un point fixe de φ_t pour tout $t \geq 0$.
- Si α est le point de Denjoy-Wolff de φ, alors α est le point de Denjoy-Wolff de φ_t pour tout $t \geq 0$.

Les exemples suivants montrent qu'il existe bien des fractions linéaires elliptiques attractives plongeables et non plongeables dans des semi-flots holomorphes de $\mathbb{D}$.

Exemple 3.

1. Soit $\varphi : z \longmapsto \frac{z}{2-z}$. Alors $\varphi \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$, et φ a deux points fixes 0 et 1. Son point de Denjoy-Wolff est en particulier 0, et φ est elliptique attractive puisque $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$. Puisque $l = l(\varphi'(0)) = \frac{1}{2}$ (avec $\lambda = -\ln(2)$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ dans la définition (4.10)), nous avons d'après la condition (4.9) le plongement de φ dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. Cela montre bien en particulier que lorsque $\varphi'(\alpha) \in]0,1[$, $l = \varphi'(\alpha)$ et (4.9) est toujours vraie.
2. Soit $\varphi : z \longmapsto \frac{z}{z-2}$. Alors $\varphi \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$, et φ a deux points fixes 0 et 3. Son point de Denjoy-Wolff est en particulier 0, et φ est elliptique attractive puisque $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$. Puisque $l = l(\varphi'(0)) = \frac{\frac{|\lambda|}{2}}{\ln(2)}$ (avec $\lambda = -\ln(2) + i\pi$, $\alpha = 0$ et $\beta = 3$ dans la définition (4.10)), nous obtenons le plongement de φ si et seulement si $\frac{1}{3}l \leq \frac{1}{2}$ i.e. $|\lambda| = \sqrt{\ln(2)^2 + \pi^2} \leq 3\ln(2)$ d'après la condition (4.9). Ceci n'étant pas vrai, φ n'est pas plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. Cela montre bien en particulier que lorsque $\varphi'(\alpha) \in]-1,0[$, $l > |\varphi'(\alpha)|$ et (4.9) n'est pas toujours vraie.

4.3 Les fonctions génératrices de probabilité

Considérons l'application $\varphi_C : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par

$$\varphi_C(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors φ_C est une fonction polynomiale du second degré à valeurs dans $\mathbb{D}$, et est donc holomorphe sur $\mathbb{D}$. De plus, φ_C est injective sur $\mathbb{D}$ et 1 est son point de Denjoy-Wolff. En particulier, φ est parabolique puisque $\varphi_C(1) = \varphi_C'(1) = 1$.

Nous nous posons la question de son plongement dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. L'idée est d'abord de regarder l'existence éventuelle d'une racine carrée au sens de la composition, qui est une condition nécessaire de plongement. Supposons alors que c'est le cas, et donc que φ est plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. Alors, d'après le modèle sans point fixe donné par le théorème 4.4, il existe une application $h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D} \to \Omega)$ bijective telle que $\Omega + it \subset \Omega$ et une constante $c \in \mathbb{C}$ telles que

$$\varphi_t(z) = h^{-1}(h(z) + ct), \quad z \in \mathbb{D}.$$

En particulier, nous obtenons $h(\varphi_C(z)) = h(z) + c$. Or, l'idée de résoudre cette équation fonctionnelle en h de façon analytique semble compliquée. C'est ce que nous allons motiver avec l'exemple suivant. Considérons alors l'application $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par

$$\varphi(z) = \frac{z+1}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

D'après la classification des semi-flots due à Siskakis dans [100], nous savons que φ est plongeable dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. En fait, si nous considérons le semi-flot $(\psi_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$\psi_t(z) = e^{-t}z + 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

alors $\psi_{\ln(2)} = \varphi$. Pour que φ soit plongeable, nous aimerions que ce soit le cas pour $t = 1$. Considérons alors $(\varphi_t)_{t\geq 0} = (\psi_{\ln(2)t})_{t\geq 0}$ correspondant à une homothétie de $\ln(2)$ de $(\psi_t)_{t\geq 0}$. Alors, nous vérifions aisément que $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est bien un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ et puisque $\varphi = \varphi_1$, φ est plongeable dans $(\varphi_t)_{t\geq 0}$.

Remarque 4.6. L'article [100] donne de plus des informations sur les semi-flots considérés. Pour le semi-flot $(\psi_t)_{t\geq 0} = (e^{-t}z + 1 - e^{-t})_{t\geq 0}$ utilisé précédemment, nous savons que le générateur et l'application modèle de Koenigs sont respectivement donnés pour tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$G(z) = 1 - z \text{ et } h(z) = \log\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Ainsi, nous obtenons le générateur et l'application modèle de Koenigs associés à $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ (via l'homothétie considérée plus haut) respectivement donnés pour tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$\tilde{G}(z) = \ln(2)\,(1 - z) \text{ et } \tilde{h}(z) = \frac{1}{\ln(2)}\log\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Sous cette approche, la question de plongement de φ_C est difficile et reste encore ouverte à ce jour. Cependant, remarquons que la somme des coefficients de φ_C est égale à 1. Ceci donne un lien intéressant avec la théorie des semi-groupes de fonctions dites génératrices de probabilité. Nous notons $\mathcal{B}^+$ la classe des fonctions dites *génératrices de probabilité* i.e. les fonctions f de la forme

$$f : z \in \mathbb{D} \longmapsto \sum_{k\geq 0} p_k z^k, \quad p_k \geq 0, \quad k \geq 0 \text{ et } \sum_{k\geq 0} p_k = 1. \tag{4.11}$$

Nous dirons que $f \in \mathcal{B}^+$ est plongeable dans un semi-groupe de fonctions génératrices de probabilité s'il existe un semi-flot holomorphe $(f_t)_{t\geq 0}$ de $\mathbb{D}$ telle que $f_t \in \mathcal{B}^+$ pour tout $t \geq 0$ et $f_1 = f$. Nous noterons $\mathcal{E}(\mathcal{B}^+)$ la classe des fonctions génératrices de probabilité plongeables dans un tel semi-groupe. L'application $z \longmapsto \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ introduite précédemment donne un premier exemple. Le plongement de telles applications a été étudié dans [66, 73, 74].

Remarque 4.7. Une fonction $f \in \mathcal{B}^+$ est holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et si $f, g \in \mathcal{B}^+$, alors $f \circ g \in \mathcal{B}^+$.

L'idée de cette section est d'introduire un résultat de plongement, qu'il soit nécessaire ou suffisant, autour de ces fonctions génératrices de probabilité. Le théorème suivant donne une première condition nécessaire (voir [66, Theorem 22] ou [73, Theorem 7]). Considérons q la plus petite racine positive de l'équation $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$ (l'ensemble $\{a \in [0, 1] : f(a) = a\}$ est un borné non vide (puisque $f(1) = 1$) de $\mathbb{R}$ donc admet un minimum).

Théorème 4.8. *Supposons que $f \in \mathcal{B}^+$ vérifie $f^{(4)}(q) < \infty$. Alors*

$$\text{si } 3(f''(q))^2 - 2f'(q)f^{(3)}(q) > 0, \text{ alors } f \notin \mathcal{E}(\mathcal{B}^+).$$

Dans le cadre de ces semi-groupes de fonctions génératrices de probabilité, l'existence de racines n-ièmes, pour tout entier n, pour la composition est une condition suffisante pour le plongement (ce qui n'est pas vrai en toute généralité). Une notion utile ici est celle d'application infiniment divisible (voir [66]).

Définition. Une application $f \in \mathcal{B}^+$ est dite *infiniment divisible* dans $\mathcal{B}^+$ si pour tout $n \geq 2$, il existe $f_n \in \mathcal{B}^+$ telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = f_n \circ \cdots \circ f_n(z) = f_n^{[n]}(z).$$

Autrement dit, f est infiniment divisible dans $\mathcal{B}^+$ si f admet une racine n-ième au sens de la composition dans $\mathcal{B}^+$ pour tout $n \geq 2$.

Proposition 4.9 ([66, Theorem 33])**.** *Soit $f \in \mathcal{B}^+$, $f \not\equiv 1$, et supposons que f est infiniment divisible dans $\mathcal{B}^+$. Alors $f \in \mathcal{E}(\mathcal{B}^+)$.*

Nous avons vu que l'existence de racines n-ièmes au sens de la composition était une condition nécessaire pour le plongement dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. Puisqu'un semi-groupe générateur de probabilité est un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$, nous obtenons donc une condition nécessaire et suffisante de plongement dans $\mathcal{B}^+$. Autrement dit, $f \in \mathcal{E}(\mathcal{B}^+)$ si et seulement si f est infiniment divisible dans $\mathcal{B}^+$.

Notons maintenant que $\varphi_C \in \mathcal{B}^+$. En appliquant le théorème 4.8 à φ_C avec $q = 1$, nous avons $\varphi_C^{(4)}(1) = 0 < \infty$ et $3(\varphi_C''(1))^2 - 2\varphi_C'(1)\varphi_C^{(3)}(1) = \frac{3}{4} > 0$ d'où $\varphi_C \notin \mathcal{E}(\mathcal{B}^+)$.

Nous avons vu la difficulté de trouver une racine carrée précédemment. Nous pouvons alors à juste titre nous demander si l'existence d'une racine carrée au sens de la composition dans l'espace $\mathcal{B}^+$ est plus accessible ou non. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{B}^+) = \left\{ f : z \in \mathbb{D} \longmapsto \sum_{k \geq 0} p_k z^k \in \mathcal{B}^+ : p_n \neq 0, \quad p_k = 0,\ k \geq n+1 \right\}. \tag{4.12}$$

Dans cette veine, le résultat suivant donne une condition nécessaire sur le degré d'une telle application pour l'existence d'une racine carrée et plus généralement pour l'existence d'une racine de tout ordre.

Lemme 4.10. *Soient $n \geq 2$ et $\varphi \in \mathcal{P}_n(\mathcal{B}^+)$ admettant une racine carrée dans $\mathcal{B}^+$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = N^2$ i.e. le degré de φ est un carré parfait. Autrement dit,*

$$\left\{\varphi \in \mathcal{B}^+ : \exists \psi \in \mathcal{B}^+, \quad \varphi = \psi \circ \psi\right\} \subset \left\{\varphi \in \mathcal{B}^+ : \exists k \in \mathbb{N}^*, \quad deg(\varphi) = k^2\right\}.$$

Plus généralement, pour $N_0 \geq 2$, s'il existe $\psi \in \mathcal{B}^+$ telle que $\varphi = \psi^{[N_0]}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = N^{N_0}$.

Démonstration. Considérons l'application $\varphi : z \in \mathbb{D} \longmapsto \sum_{l=0}^n a_l z^l$ avec $\sum_{l=0}^n a_l = 1$, $a_l \in [0,1]$ et $a_n \neq 0$. Supposons alors qu'il existe une application $\psi \in \mathcal{B}^+$ telle que

$$\varphi = \psi \circ \psi, \quad \psi : z \in \mathbb{D} \longmapsto \sum_{l \geq 0} b_l z^l, \quad \sum_{l \geq 0} b_l = 1, \quad b_l \in [0,1].$$

D'après la formule de Faà di Bruno, pour tout $k \geq 1$, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a que

$$\frac{d^k}{dz^k}\psi \circ \psi(z) = \sum_{(m_1,\dots,m_k), \sum_{i=1}^k i m_i = k} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \psi^{(\sum_{i=1}^k m_i)}(\psi(z)) \prod_{j=1}^k \left(\frac{\psi^{(j)}(z)}{j!}\right)^{m_j}.$$

En particulier, en identifiant avec $\psi \circ \psi = \varphi$, on obtient un système à $n+1$ équations donné par, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{(m_1,\dots,m_k), \sum_{i=1}^k i m_i = k} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \psi^{(\sum_{i=1}^k m_i)}(\psi(z)) \prod_{j=1}^k \left(\frac{\psi^{(j)}(z)}{j!}\right)^{m_j} = \varphi^{(k)}(z), \quad 1 \leq k \leq n \\ \displaystyle\sum_{(m_1,\dots,m_{n+1}), \sum_{i=1}^{n+1} i m_i = n+1} \frac{(n+1)!}{m_1! \dots m_{n+1}!} \psi^{(\sum_{i=1}^{n+1} m_i)}(\psi(z)) \prod_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\psi^{(j)}(z)}{j!}\right)^{m_j} = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

avec

$$\varphi^{(k)}(z) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l z^{l-k}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Notons $\Psi := \psi_{|[0,1[}$. Dans ce cas, puisque $\psi \in \mathcal{B}^+$, $\Psi([0,1[) \subset [0,1[$. Également, pour $k \geq 1$, puisque $\psi^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} b_n z^{n-k}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $\Psi^{(k)}([0,1[) \subset \mathbb{R}^+$. La dernière équation de (4.13) implique alors que, pour tout $(m_1, \ldots, m_{n+1})$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} i m_i = n+1$, et pour tout $z \in [0,1[$,

$$\Psi^{(\sum_{i=1}^{n+1} m_i)}(\Psi(z)) \prod_{j=1}^{n+1} \Psi^{(j)}(z)^{m_j} = 0. \tag{$\star$}$$

On déduit alors que Ψ est un polynôme et

$$\deg(\Psi) \leq \max\left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i - 1, \; j \mathbb{1}_{m_j \neq 0} - 1 \right).$$

En effet, par le principe du prolongement analytique, l'identité ($\star$) se prolonge à $\mathbb{D}$ tout entier. Or Hol($\mathbb{D}$) est un anneau intègre, donc

- soit $\Psi^{(\sum_{i=1}^{n+1} m_i)} \circ \Psi \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$. Alors $\Psi^{(\sum_{i=1}^{n+1} m_i)}$ s'annule sur $\Psi(\mathbb{D})$ qui est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ par le théorème de l'application ouverte, et donc $\Psi^{(\sum_{i=1}^{n+1} m_i)} \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$ par une nouvelle application du principe du prolongement analytique. On a alors que $\deg(\Psi) \leq \sum_{i=1}^{n+1} m_i - 1$.
- soit il existe $1 \leq j \leq n+1$ avec $m_j \geq 1$ tel que $\Psi^{(j)} \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$. Alors on a $\deg(\Psi) \leq j-1 \leq n$.

Posons alors $\deg(\Psi) = N \in \{0, \ldots, \max(n, \sum_{i=1}^{n+1} m_i - 1)\}$. Dans ce cas, puisque $\Psi \circ \Psi = \varphi$, on déduit finalement que $n = \deg(\varphi) = \deg(\Psi)^2 = N^2$ est un carré parfait.

Regardons maintenant le cas général : soit $N_0 \geq 2$.
D'après la formule de Faà di Bruno, pour tout $k \geq 1$, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a que

$$\frac{d^k}{dz^k} \psi^{[N_0]}(z) = \sum_{(m_1, \ldots, m_k), \sum_{i=1}^{k} i m_i = k} \frac{k!}{m_1! \ldots m_k!} \psi^{(\sum_{i=1}^{k} m_i)}(\psi^{[N_0-1]}(z)) \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\psi^{(j)}(\psi^{[N_0-2]}(z))}{j!} \right)^{m_j}.$$

En procédant exactement de la même manière et en utilisant les mêmes notations que précédemment, on a $\Psi^{[N_0]}([0,1[) \subset [0,1[$ et on obtient alors que, pour tout $(m_1, \ldots, m_{n+1})$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} i m_i = n+1$, et pour tout $z \in [0,1[$,

$$\Psi^{(\sum_{i=1}^{n+1} m_i)}(\Psi^{[N_0-1]}(z)) \prod_{j=1}^{n+1} \Psi^{(j)}(\Psi^{[N_0-2]}(z))^{m_j} = 0.$$

On déduit alors que

$$\deg(\Psi) \leq \max\left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i - 1, \; j \mathbb{1}_{m_j \neq 0} - 1 \right).$$

En posant $\deg(\Psi) = N \in \{0, \ldots, \max(n, \sum_{i=1}^{n+1} m_i - 1)\}$, on déduit finalement que

$$n = \deg(\varphi) = \deg(\Psi)^{N_0} = N^{N_0}. \qquad \square$$

Avec la propriété d'infiniment divisible, et le lemme précédent 4.10, le résultat suivant donne ainsi une caractérisation du plongement des polynômes générateurs de probabilité.

Théorème 4.11. *Soit $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{B}^+)$. Alors $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{B}^+)$ si et seulement si φ est de degré* 1.

Démonstration. La preuve va essentiellement reposer sur le lemme 4.10.

- Supposons que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{B}^+)$. Alors, en particulier, φ est infiniment divisible. Dans ce cas, pour tout $N \geq 2$, il existe $\psi \in \mathcal{B}^+$ telle que $\varphi = \psi^{[N]}$. Donc, d'après le lemme 4.10, pour tout $N \geq 2$, il existe $k_N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\deg(\varphi) = k_N^N$. Si $\deg(\varphi) = n \geq 2$, on a $n = k_N^N$ avec $k_N \geq 2$ pour tout $N \geq 2$. Par suite, pour tout $N \geq 2$, $n = k_N^N \geq 2^N$, une absurdité par passage à la limite. Finalement, $\deg(\varphi) = n = 1$.
- Soit $\varphi \in \mathcal{B}^+$ de degré 1. Écrivons φ de la forme suivante : $\varphi(z) = az + (1-a)$ avec $a \in]0,1]$. Sans perte de généralité, on peut considérer que $a \in]0,1[$ puisque si $a = 1$, $\varphi \equiv Id_{\mathbb{D}}$ et φ est plongeable dans le semi-groupe trivial. Considérons ainsi le semi-groupe générateur de probabilité
$$\left(\varphi_t : z \longmapsto \left(e^{t\ln a}z + \left(1 - e^{t\ln a}\right)\right)\right)_{t\geq 0}.$$
Alors $\varphi \hookrightarrow (\varphi_t)_{t\geq 0}$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{B}^+)$. □

Remarque 4.12. Nous retrouvons alors via ce théorème que $\varphi_C \in \mathcal{B}^+$ n'est pas plongeable dans un semi-groupe générateur de probabilité et en particulier n'est donc pas infiniment divisible dans $\mathcal{B}^+$. Nous pouvons alors affirmer qu'il existe au moins un $N_0 \geq 2$ tel que φ_C n'admet pas de racine N_0-ième dans $\mathcal{B}^+$. Remarquons néanmoins que nous savons que φ_C n'admet pas de racine carrée dans $\mathcal{B}^+$. En effet, si tel était le cas, nous aurions d'après le lemme 4.10 qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 = N^2$, ce qui est absurde.

4.4 Les fractions linéaires génératrices de probabilité

Faisons maintenant le lien entre les fractions linéaires de $\mathbb{D}$ et les applications de $\mathcal{B}^+$. Définissons
$$\mathrm{LFM}^+(\mathbb{D}) = \mathrm{LFM}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{B}^+.$$

Notons aussi $\mathcal{E}(\mathrm{LFM}^+(\mathbb{D}))$ l'ensemble des applications plongeables dans un semi-groupe d'éléments de $\mathrm{LFM}^+(\mathbb{D})$. Reprenons, au même titre que (4.8), la nature de $\varphi \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$ et regardons s'il est possible dans un premier temps que φ soit un élément de $\mathcal{B}^+$ puis, dans un second temps, si tel est le cas, si φ est plongeable dans un tel semi-groupe. C'est l'objet du résultat suivant, inspiré de [21, Proposition 3.4].

Théorème 4.13. *Soit $\varphi \in LFM(\mathbb{D})$, $\varphi \not\equiv Id_{\mathbb{D}}$. Alors*

1. *Si φ est elliptique neutre, $\varphi \notin \mathcal{E}(LFM^+(\mathbb{D}))$.*
2. *Si φ est hyperbolique ou parabolique, $\varphi \in LFM^+(\mathbb{D})$ si et seulement si φ s'écrit sous la forme*
$$\varphi(z) = \frac{(\alpha+1-\beta)z + (\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1-\beta)z + (\alpha+\beta+1)}, \quad z \in \mathbb{D},$$
avec $\alpha \geq 1$ et $\beta \in [\alpha-1, \alpha+1]$. De plus,
   (a) *si φ est hyperbolique, $\varphi \in \mathcal{E}(LFM^+(\mathbb{D}))$ si et seulement si $\beta = \alpha - 1$;*
   (b) *si φ est parabolique, $\varphi \notin \mathcal{E}(LFM^+(\mathbb{D}))$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$, $\varphi \not\equiv Id_{\mathbb{D}}$. Nous avons les différents cas suivants.

1. Supposons que φ est elliptique neutre. Alors, pour α son point fixe dans $\mathbb{D}$, $\varphi = \tau_\alpha \circ \psi \circ \tau_\alpha$ avec, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\psi : z \longmapsto e^{i\theta}z$. On a que ψ est plongeable dans le semi-flot holomorphe $(\psi_t : z \longmapsto e^{it\theta}z)_{t\geq 0}$ de $\mathbb{D}$, mais $\psi \notin \mathcal{B}^+$. En effet, si $\psi \in \mathcal{B}^+$, alors $\psi(1) = 1$. Or
$$\psi(1) = 1 \iff e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Dans ce cas, on aurait $\psi(z) = z$ et $\varphi \equiv Id_{\mathbb{D}}$, une absurdité. Donc $\varphi \notin \mathcal{B}^+$ et on déduit finalement que $\varphi \notin \mathcal{E}(\mathrm{LFM}^+(\mathbb{D}))$.

2. Supposons que φ est soit hyperbolique, soit parabolique. Reprenons, pour un élément $\tau \in \mathbb{T}$, l'application C_τ définie par (4.5). Remarquons que
   (a) si φ est hyperbolique, alors pour $\tau \in \mathbb{T}$ l'un des deux points fixes de φ, $\varphi = C_\tau^{-1} \circ \psi \circ C_\tau$ avec $\psi : w \in \mathbb{H}^+ \longmapsto e^{\gamma} w + \beta$ où $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\mathrm{Re}(\beta) \geq 0$;
   (b) si φ est parabolique, alors pour $\tau \in \mathbb{T}$ l'unique point fixe de φ, $\varphi = C_\tau^{-1} \circ \psi \circ C_\tau$ avec $\psi : w \in \mathbb{H}^+ \longmapsto w + \beta$ où $\mathrm{Re}(\beta) \geq 0$.

   Prenons alors $\alpha \geq 1$ et $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(\beta) \geq 0$ tels que $\psi(w) = \alpha w + \beta$ pour $w \in \mathbb{H}^+$. Dans ce cas, on a
$$\varphi(z) = C_\tau^{-1} \circ \psi \circ C_\tau(z) = \tau \frac{(\alpha - \beta + 1)z + \tau(\alpha + \beta - 1)}{(\alpha - \beta - 1)z + \tau(\alpha + \beta + 1)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$
   Pour avoir $\varphi \in \mathcal{B}^+$, il faudrait que
   - $\varphi(1) = 1$. Or
$$\varphi(1) = \tau \frac{(\alpha - \beta + 1) + \tau(\alpha + \beta - 1)}{(\alpha - \beta - 1) + \tau(\alpha + \beta + 1)} = \frac{(\alpha - \beta + 1)\tau + \tau^2(\alpha + \beta - 1)}{(\alpha - \beta - 1) + \tau(\alpha + \beta + 1)}.$$
     Autrement dit,
$$\begin{aligned} \varphi(1) = 1 &\iff \tau^2(\alpha + \beta - 1) - 2\beta\tau + (\beta - \alpha + 1) = 0 \\ &\iff \tau = 1 \text{ ou } \tau = \frac{\beta - \alpha + 1}{\alpha + \beta + 1}. \end{aligned}$$
     Puisque $\tau \in \mathbb{T}$, on obtient que $\tau = 1$ ou $\mathrm{Re}(\beta) = 0$.
   - tous les coefficients soient dans $[0,1]$. Or, en particulier,
$$\varphi(0) = \tau \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha + \beta + 1} \in [0,1] \iff \tau = \pm 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^+.$$
     En effet, pour $\beta = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x \geq 0$ et $y \neq 0$ et $\tau = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, on a
$$\mathrm{Im}\left(\tau \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha + \beta + 1}\right) = \sin(\theta) \frac{(\alpha + x - 1)(\alpha + x + 1) + y^2}{|(\alpha + x + 1) + iy|^2} + \frac{2y\cos(\theta)}{|(\alpha + x + 1) + iy|^2} \neq 0.$$
     Ainsi, si $\beta \notin \mathbb{R}^+$ ou $\tau \neq \pm 1$, on a $\varphi(0) \notin [0,1]$.

   Considérons alors pour la suite $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $\tau = 1$. On a donc, pour tout $z \in \mathbb{D}$,
$$\varphi(z) = \frac{(\alpha + 1 - \beta)z + (\alpha + \beta - 1)}{(\alpha + \beta + 1)\left(1 - \frac{1 + \beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1} z\right)} = \frac{(\alpha + 1 - \beta)z + (\alpha + \beta - 1)}{(\alpha + \beta + 1)} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1 + \beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1} z\right)^n.$$
   On déduit ainsi que $\varphi \in \mathcal{B}^+$ si et seulement si
$$\alpha + 1 - \beta \geq 0 \text{ et } 1 + \beta - \alpha \geq 0.$$
   Autrement dit, $\varphi \in \mathcal{B}^+$ si et seulement si $\beta \leq \alpha + 1$ et $\beta \geq \alpha - 1$. Finalement, $\varphi \in \mathrm{LFM}^+(\mathbb{D})$ si et seulement si φ s'écrit sous la forme
$$\varphi(z) = \frac{(\alpha - \beta + 1)z + (\alpha + \beta - 1)}{(\alpha - \beta - 1)z + (\alpha + \beta + 1)}, \quad z \in \mathbb{D},$$
   avec $\alpha \geq 1$ et $\beta \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$. Notons que l'application ψ est respectivement plongeable, dans le cas hyperbolique et parabolique, dans les semi-flots holomorphes de $\mathbb{H}^+$
$$\left(\psi_t : w \in \mathbb{H}^+ \longmapsto e^{\gamma t} w + \frac{\beta}{e^{\gamma} - 1}(e^{\gamma t} - 1)\right)_{t \geq 0} \quad \text{et} \quad \left(\psi_t : w \in \mathbb{H}^+ \longmapsto w + \beta t\right)_{t \geq 0}.$$
   Ainsi, φ est respectivement plongeable dans le semi-flot holomorphe $(\varphi_t = C_1^{-1} \circ \psi_t \circ C_1)_{t \geq 0}$ de $\mathbb{D}$ où pour tout $t \geq 0$, on a

(a) en posant $\lambda = \frac{\beta}{e^{\gamma}-1}$,

$$\varphi_t(z) = \frac{(e^{\gamma t} - \lambda(e^{\gamma t}-1)+1)z + (e^{\gamma t} + \lambda(e^{\gamma t}-1)-1)}{(e^{\gamma t} - \lambda(e^{\gamma t}-1)-1)z + (e^{\gamma t} + \lambda(e^{\gamma t}-1)+1)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Notons, pour tout $t \geq 0$,

$$\alpha_t = e^{\gamma t} \geq 1 \text{ et } \beta_t = \lambda(\alpha_t - 1) \geq 0.$$

Puisque l'on à déjà $\varphi_t(1) = 1$ pour tout $t \geq 0$, $\varphi_t \in \mathcal{B}^+$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si

$$\alpha_t - 1 \leq \beta_t \leq \alpha_t + 1 \Longleftrightarrow e^{\gamma_t} - 1 \leq \frac{\beta}{e^{\gamma}-1}(e^{\gamma t}-1) \leq e^{\gamma t} + 1.$$

On doit alors avoir, puisqu'ici $\gamma > 0$, d'un côté $\lambda \geq 1$ et d'un autre côté $\lambda \leq \frac{e^{\gamma t}+1}{e^{\gamma t}-1}$ pour tout $t \geq 0$. Cette propriété devant être vérifiée pour tout $t \geq 0$ arbitraire, on remarque alors par passage à la limite lorsque $t \longrightarrow +\infty$, que $\lambda \leq 1$ d'où $\lambda = 1$. Autrement dit, $\beta = e^{\gamma} - 1 = \alpha - 1$. On déduit ainsi que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathrm{LFM}^+(\mathbb{D}))$ si et seulement si $\beta = \alpha - 1$.

(b)

$$\varphi_t(z) = \frac{(2-\beta t)z + \beta t}{-\beta t z + (2+\beta t)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

On déduit que $\varphi \notin \mathcal{E}(\mathrm{LFM}^+(\mathbb{D}))$ puisque, en notant pour tout $t \geq 0$, $\alpha_t = 1$ et $\beta_t = \beta t$, on a $\varphi_t \in \mathcal{B}^+$ si et seulement si

$$\alpha_t - 1 \leq \beta_t \leq \alpha_t + 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \beta t \leq 2 \Longleftrightarrow t \leq \frac{2}{\beta},\ \beta \neq 0. \qquad \square$$

Remarque 4.14. Dans le cas où φ est elliptique attractive et sous la condition (4.9), la situation est plus compliquée. En effet, on a $\varphi = \tau_\alpha \circ \psi \circ \tau_\alpha$ avec

$$\psi \hookrightarrow \left(\psi_t : z \in \mathbb{D} \longmapsto \frac{e^{\lambda t} z}{\mu(1-e^{\lambda t})z + 1}\right)_{t \geq 0},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $e^{\lambda} = \varphi'(\alpha) = \psi'(0)$ avec $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ et $\mathrm{Im}(\lambda) \in]-\pi, \pi]$ et $\mu = \frac{1}{\beta} \in \mathbb{C}$. En supposant que $\psi \in \mathcal{B}^+$, on a en particulier que $\psi(1) = 1$ et

$$\psi(1) = 1 \Longleftrightarrow \frac{e^{\lambda}}{\mu(1-e^{\lambda})+1} = 1 \Longleftrightarrow e^{\lambda} = \mu(1-e^{\lambda}) + 1 \Longleftrightarrow (e^{\lambda} = 1 \text{ ou } \mu = -1).$$

Puisque $|\varphi'(\alpha)| < 1$, on a $e^{\lambda} \neq 1$ et donc nécessairement $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\psi(z) = \psi_1(z) = \frac{e^{\lambda} z}{1-(1-e^{\lambda})z} = e^{\lambda} z \sum_{n \geq 0} ((1-e^{\lambda})z)^n.$$

On déduit ainsi que $\psi \in \mathcal{B}^+$ si et seulement si $1 - e^{\lambda} \geq 0$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda < 0$. Considérons alors maintenant $\mu = -1$ et $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Puisque $\tau_\alpha \notin \mathcal{B}^+$, on ne peut pas conclure de cette façon. Or, comme $\varphi = \tau_\alpha \circ \psi \circ \tau_\alpha$, on a

$$\varphi(z) = \frac{\left[(1-\alpha)e^{\lambda} + \alpha(1-\overline{\alpha})\right] z + \alpha(1-\alpha)(1-e^{\lambda})}{(1-\overline{\alpha})(1-e^{\lambda})z + \left[(1-\overline{\alpha})\alpha e^{\lambda} + 1 - \alpha\right]}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

La question est alors difficile pour montrer que $\varphi \in \mathcal{B}^+$, et par suite que $(\varphi_t = \tau_\alpha \circ \psi_t \circ \tau_\alpha)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe générateur de probabilité.

CHAPITRE 5

AUTOUR DES OPÉRATEURS DE COMPOSITION ET DE TOEPLITZ

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'étude du plongement de certaines classes d'opérateurs particuliers. Nous avons vu qu'il n'existait pas de condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur quelconque soit plongeable dans un C_0-semi-groupe. Nous allons ainsi nous pencher sur la condition nécessaire qui nous permettra d'écarter le plongement de certains opérateurs et utiliser à bon escient la condition nécessaire et suffisante dans le cadre isométrique. Ces deux résultats sont rappelés ci-après.

Théorème 5.1 ([43, Theorem V.1.7]). *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Si T est plongeable dans un C_0-semi-groupe, alors*

$$\dim(\ker(T)) \in \{0, \infty\} \text{ et } \operatorname{codim}(\overline{\operatorname{Im}(T)}) \in \{0, \infty\}.$$

Démonstration. Supposons que T est plongeable dans un C_0-semi-groupe noté $(T_t)_{t\geq 0}$ et procédons par l'absurde en supposant de plus que $0 < \dim(\ker(T)) < \infty$.
Comme $T = T_1 = T_{\frac{1}{2}} \circ T_{\frac{1}{2}}$ est non injectif, $T_{\frac{1}{2}}$ ne l'est pas non plus. Par suite, pour tout $n \geq 1$, $T_{\frac{1}{2^n}}$ est non injectif. Prenons alors $x_n \in \ker\left(T_{\frac{1}{2^n}}\right)$ tel que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \geq 1$. Il vient que $(x_n)_{n\geq 1} \subset \ker(T)$ avec $\dim(\ker(T)) < \infty$. La boule unité fermée étant ainsi compacte, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ avec $\|x_0\| = 1$. Puisque $\ker\left(T_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) \subset \ker\left(T_{\frac{1}{2^n}}\right)$, on a en particulier

$$T_{\frac{1}{2^n}} x_{n_k} = 0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} T_{\frac{1}{2^n}} x_0,$$

et il vient que, par unicité de la limite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{\frac{1}{2^n}} x_0 = 0$ ce qui est en contradiction avec la forte continuité de $(T_t)_{t\geq 0}$. En effet, on devrait avoir $T_{\frac{1}{2^n}} x_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \neq 0$.
De la même manière, comme $\operatorname{codim}(\overline{\operatorname{Im}(T)}) = \dim(\ker(T^*))$, on obtient une contradiction en supposant que $0 < \dim(\ker(T^*)) < \infty$, avec les propriétés de continuité faible-* de T^*. En effet, si T est plongeable dans $(T_t)_{t\geq 0}$ alors T^* est plongeable dans $(T_t^*)_{t\geq 0}$ sur E^* d'après [45, Example I.1.13]. □

Introduisons maintenant une décomposition classique d'un opérateur isométrique en somme directe d'un opérateur unitaire et d'un opérateur de "type shift". Les propriétés de plongement émanant de ces deux nouveaux opérateurs permettront de déduire celui de l'isométrie concernée.

Théorème 5.2 (Décomposition de Wold, [102]). *Soient H un espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H$ une isométrie. Alors il existe F et G deux sous-espaces de H vérifiant $H = F \oplus^\perp G$ avec $T(F) \subset F$ et $T(G) \subset G$ et tels que $T_{|F}$ est un opérateur unitaire et $T_{|G}$ est un shift unilatéral. De plus, cette décomposition est uniquement déterminée par les ensembles*

$$F = \bigcap_{n\geq 0} T^n H \text{ et } G = \bigoplus_{n\geq 0} T^n (H \ominus TH). \tag{5.1}$$

Remarque 5.3. Ici, une isométrie $V : H \longrightarrow H$ est un *shift unilatéral* s'il existe un sous-espace $\mathcal{L}$ de H tel que pour tout $n \geq 1$, $V^n\mathcal{L} \perp \mathcal{L}$ et que $\bigoplus_{n\geq 0} V^n\mathcal{L} = H$. Notons de plus que G ou F peuvent être réduit à $\{0\}$. Dans ce cas, V sera unitaire ou bien complètement non unitaire (i.e. il n'existe pas de sous-espaces non triviaux de H sur lesquels V est unitaire). Une décomposition plus générale sur les contractions d'un espace de Hilbert avec une partie complètement non unitaire est donnée dans [101] par Sz.-Nagy-Foias.

Nous pouvons tout de même nous demander si certains opérateurs classiques comme le shift par exemple sont plongeables dans un C_0-semi-groupe. Le résultat suivant montre alors que le shift S sur $\ell^2(\mathbb{N}, F)$ avec F un espace de Hilbert de dimension infinie est plongeable dans un C_0-semi-groupe. En revanche, le shift $S \simeq M_z$ sur H^2 ne l'est pas puisqu'il n'admet pas de racine carrée d'après le théorème 1.23. D'une manière générale, S^k pour tout $k \geq 1$ ne l'est pas non plus puisque $\ker(S^{*k}) = \mathcal{P}_{\leq k-1}$ d'après le théorème 1.16. Aussi, nous pouvons montrer que $S \oplus S$ n'est pas plongeable dans un C_0-semi-groupe sur $H_2 \oplus H_2$ via l'identité, donnée par [81], $W^*(S \oplus S)W = S^2$ avec

$$W : g = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \in H^2 \longmapsto (Wg)(z) = \begin{pmatrix} \sum_{k\geq 0} a_{2k} z^k \\ \sum_{k\geq 0} a_{2k+1} z^k \end{pmatrix} \in H^2 \oplus H^2 \text{ unitaire.}$$

En effet, si c'était le cas, alors S^2 le serait aussi par isomorphisme unitaire, ce qui est absurde. Nous pouvons ainsi formuler la question naturelle suivante.

Question 5.4. *Pour $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, notons $S_N = \bigoplus_{i=0}^N S$ sur $\bigoplus_{i=0}^N H^2$. Est-il vrai que S_N est plongeable dans un C_0-semi-groupe si et seulement si $N = +\infty$?*

Proposition 5.5 ([43, Proposition V.1.18])**.** *Le shift à droite sur $\ell^2(\mathbb{N}, F)$ avec F un espace de Hilbert de dimension infinie est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur $\ell^2(\mathbb{N}, F)$.*

Démonstration. Puisque F est unitairement équivalent à $L^2([0,1], F)$, il existe alors un opérateur unitaire $J : \ell^2(\mathbb{N}, F) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, L^2([0,1], F))$ tel que JSJ^{-1} est le shift sur $\ell^2(\mathbb{N}, L^2([0,1], F))$. De plus, via la décomposition $L^2(\mathbb{R}^+, F) = \bigoplus_{n\geq 0} L^2([n, n+1], F)$, on note que l'on peut identifier l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, L^2([0,1], F))$ avec $L^2(\mathbb{R}^+, F)$ via l'application

$$\begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}, L^2([0,1], F)) \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^+, F) \\ (f_n)_{n\geq 1} \longmapsto & \begin{cases} [n, n+1] \longrightarrow & F \\ s \longmapsto & f_n(s-n) \end{cases} \end{cases}.$$

Il existe ainsi un opérateur unitaire $K : \ell^2(\mathbb{N}, L^2([0,1], F)) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+, F)$ tel que $K(JSJ^{-1})K^{-1}$ est l'opérateur de translation

$$\begin{cases} L^2(\mathbb{R}^+, F) \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^+, F) \\ f \longmapsto & \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow & F \\ s \longmapsto & f(s-1)\mathbb{1}_{s\geq 1} \end{cases} \end{cases}.$$

Cet opérateur est plongeable dans le semi-groupe isométrique $(S_t)_{t\geq 0}$ sur $L^2(\mathbb{R}^+, F)$ défini par

$$(S_t f)(s) := \begin{cases} f(s-t) \ , & 0 \leq s-t \\ 0 \ , & 0 > s-t \end{cases}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^+, F), \quad s \in \mathbb{R}^+. \tag{5.2}$$

On conclut que S sur $\ell^2(\mathbb{N}, F)$ est plongeable dans le C_0-semi-groupe isométrique sur $\ell^2(\mathbb{N}, F)$ défini par $(J^{-1}K^{-1}S_tKJ)_{t\geq 0}$. □

Ces deux derniers résultats sont des outils importants pour la preuve de la condition nécessaire et suffisante de plongement dans le cas d'un opérateur isométrique.

Théorème 5.6 ([43, Theorem V.1.19]). *Soit $V : H \longrightarrow H$ une isométrie. Alors V est plongeable dans un C_0-semi-groupe si et seulement si V est unitaire ou codim(Im(V)) $= \infty$.*

Démonstration. D'après la décomposition de Wold 5.2, comme $V : H \longrightarrow H$ est isométrique, il existe alors F et G deux sous-espaces invariants de V tels que $H = F \oplus^{\perp} G$ et tels que $V_{|F}$ est un opérateur unitaire et $V_{|G}$ est un opérateur unitairement équivalent à S sur $\ell^2(\mathbb{N}, I)$ avec $I = \mathrm{Im}(V)^{\perp}$. D'après la condition nécessaire 5.1, il y a deux cas à traiter (puisque l'on a déjà $\dim(\ker(V)) = 0$).

- Si $\dim(I) = 0$, $V = V_{|F}$ est unitaire et V est plongeable dans un C_0-semi-groupe unitaire d'après [43, Corollary V.1.15].
- Si $\dim(F) = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(V)) = \infty$, alors $V_{|G}$ est plongeable dans un C_0-semi-groupe isométrique d'après la proposition 5.5 et, d'après le premier point, V est plongeable comme somme directe d'opérateurs plongeables.

Finalement, V est plongeable dans un C_0-semi-groupe si et seulement si V est unitaire ou $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(V)) = \infty$. □

Cette preuve nous indique la forme potentielle d'un semi-groupe dans lequel $V : H \longrightarrow H$ un opérateur isométrique est plongeable.

1. Si V est unitaire, alors d'après la preuve de [43, Theorem V.1.14], il existe une mesure de Borel μ, une application mesurable $m \in L^{\infty}(\sigma(V), \mu)$ et $Z : H \longrightarrow L^2(\sigma(V), \mu)$ un opérateur unitaire tels que
$$V \hookrightarrow \left(V_t = Z^* \left(e^{tLog(m)}\right) Z\right)_{t \geq 0}.$$
2. Si $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(V)) = \dim(\mathrm{Im}(V)^{\perp}) = \infty$, alors il existe, en posant $I = \mathrm{Im}(V)^{\perp}$,
   (a) des sous-espaces F et G définis par (5.1) de H stables par V tels que $H = F \oplus^{\perp} G$;
   (b) une mesure de Borel μ et une application mesurable $m \in L^{\infty}(\sigma(V_{|F}), \mu)$;
   (c) des opérateurs unitaires $Z : F \longrightarrow L^2(\sigma(V_{|F}), \mu)$ et $W : G \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, I)$, puis $J : \ell^2(\mathbb{N}, I) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, L^2([0,1], I))$ et $K : \ell^2(\mathbb{N}, L^2([0,1], I)) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+, I)$

   tels que
$$V \hookrightarrow \left(V_t = [Z^* \left(e^{tLog(m)}\right) Z] \oplus [U^* S_t U]\right)_{t \geq 0}, \tag{5.3}$$
   où $(S_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe sur $L^2(\mathbb{R}^+, I)$ défini par (5.2) et $U = KJW : G \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+, I)$ est un opérateur unitaire.

Pour ce qui est des autres conditions, nous avons regroupé ci-après l'ensemble des outils permettant de les prouver qui mêlent des techniques d'analyse hilbertienne et complexe.

1. Une condition suffisante pour un opérateur quelconque lorsque $\sigma(T) \subset \Omega$ avec Ω un ouvert simplement connexe ne contenant pas 0. Il s'agit d'utiliser le calcul fonctionnel holomorphe de Dunford-Riesz appliqué à $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ et la fonction $f = \log$ puis d'utiliser le fait que pour $A \in \mathcal{L}(E)$, $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu avec $A = \log(T)$.
2. Une condition nécessaire et suffisante dans le cas d'un opérateur normal. Il s'agit d'utiliser le théorème spectral pour les opérateurs normaux pour définir une fonction mesurable $m \in L^{\infty}(\sigma(T), \mu)$ et μ une mesure de Borel. Et, si
   (a) T injectif, il s'agit d'utiliser $(T_t = M_{e^{t\mathrm{Log}(m)}})_{t \geq 0}$ C_0-semi-groupe sur $L^2(\sigma(T), \mu)$ via l'exemple de la multiplication sur $L^p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ par [45, Proposition I.3.11] ;

(b) $\dim(\ker(T)) = \infty$, il s'agit d'utiliser la décomposition $H = \ker(T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(T)}$ et le plongement de $T_{|\overline{\mathrm{Im}(T)}}$ et $T_{|\ker(T)}$ respectivement par injectivité et plongement de l'opérateur zéro dans le semi-groupe nilpotent $(T_t)_{t\geq 0}$ sur $L^2([0,1],H)$ défini (par morceaux) par $T_t = 0$ si $t \geq 1$ et, pour $t \in [0,1[$,

$$(T_t f)(s) = \begin{cases} f(s-t) \ , & 0 \leq s-t \\ 0 \quad\quad\ , & 0 > s-t \end{cases}, \quad f \in L^2([0,1],H), \quad s \in [0,1].$$

3. Le cas d'un opérateur unitaire est clair puisqu'un opérateur unitaire est normal et injectif.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement dans ce chapitre à cette dernière condition, et à la question de plongement pour les opérateurs de composition isométriques et les opérateurs de Toeplitz analytique (isométriques) sur l'espace de Hardy H^2.

Enfin, avant cela, un autre exemple classique est celui de l'opérateur intégral de Volterra. Considérons l'opérateur $V : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ défini par

$$Vf(x) := \int_0^x f(s)\ ds, \quad x \in [0,1].$$

Alors V est plongeable dans le C_0-semi-groupe de Riemann-Liouville $(V_t)_{t\geq 0}$ défini par $V_0 = Id$ et pour tout $t > 0$, pour tout $f \in L^2([0,1])$,

$$V_t f(x) := \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^x f(s)(x-s)^{t-1}\ ds, \quad x \in [0,1].$$

Par la suite, nous déduisons en considérant les itérées V^n de V que $\{V^n\}_{n\geq 0} \hookrightarrow (V_t)_{t\geq 0}$, dans le sens où pour tout $t \in \mathbb{N}$, $V_t = V^t$ en terme d'applications de $L^2([0,1])$. Pour pousser la réflexion, le générateur A_V et le domaine $D(A_V)$ de $(V_t)_{t\geq 0}$ sont respectivement donnés par

$$A_V f(x) = -\int_0^x \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\ du - f(x)(\ln(x)+\gamma), \quad x \in [0,1],$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni, et

$$D(A_V) = \left\{ f \in L^2([0,1]) : \int_0^x \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\ du \text{ existe et est finie} \right\}.$$

D'une manière beaucoup plus générale, I. Alam, I. Chalendar, F. El Chami, E. Fricain et P. Lefèvre ont montré dans [1] le plongement de V dans le semi-groupe de Riemann-Liouville $(V_t)_{t\geq 0}$ sur $L^p([0,1])$ avec $1 \leq p < \infty$. Ils exposent diverses propriétés sur V et $(V_t)_{t\geq 0}$, d'appartenance à différentes classes d'opérateurs et d'idéaux, que nous ne considérons pas ici. Aussi, W. Arendt et ses co-auteurs en font également mention dans [10]. Les deux dernières références considèrent surtout la théorie des semi-groupes analytiques qui consiste à remplacer l'indice $t \in \mathbb{R}^+$ par un indice complexe $\zeta \in \mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, et donc utilisent différents outils holomorphes.

5.1 Les opérateurs de composition sur H^2

Soit X un espace de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Pour $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique, l'opérateur de composition C_φ sur X est défini par

$$C_\varphi : f \in X \longmapsto (C_\varphi f)(z) = f \circ \varphi(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Quand celui-ci est borné (au sens où $C_\varphi(X) \subset X$), étudier le plongement de l'opérateur de composition C_φ dans un C_0-semi-groupe est intimement lié à celui de son symbole φ dans un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. C'est l'objet de la remarque suivante, permettant de passer de la théorie des opérateurs à la théorie des fonctions holomorphes.

Remarque 5.7.
Si $\varphi \hookrightarrow (\varphi_t)_{t\geq 0}$, où $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$, alors $C_\varphi \hookrightarrow (C_{\varphi_t})_{t\geq 0}$ où $(C_{\varphi_t})_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur H^2.
Réciproquement, si $C_\varphi \hookrightarrow (T_t)_{t\geq 0}$ où $(T_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs de composition sur H^2, alors il existe $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$ tel que $T_t = C_{\varphi_t}$. En effet, puisque $(T_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs de composition sur H^2, alors $T_t = C_{\varphi_t}$ où $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est une famille d'applications analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Il reste à vérifier que $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$. En appliquant $e_1(z) := z$ à T_t, nous obtenons dans un premier temps que $\varphi_0 = Id_{\mathbb{D}}$ et $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ pour tous $t, s \geq 0$. Dans un second temps, en utilisant que la convergence dans H^2 implique la convergence ponctuelle (puisque H^2 est un espace de Hilbert à noyau reproduisant), nous obtenons que

$$|\varphi_t(z) - z| = |T_t e_1(z) - e_1(z)| \leq \|T_t e_1 - e_1\|_2 \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

D'après [9], nous remarquons que H^2 est un choix particulièrement intéressant par rapport à d'autres espaces de Hilbert de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$. En effet, W. Arendt, I. Chalendar, M. Kumar and S. Srivastava ont montré que

- sur $X = \mathcal{A}^2$ l'espace de Bergman (et de manière plus générale sur sa version pondérée $\mathcal{A}^2_\beta$ pour $\beta > -1$), C_φ est similaire à une isométrie si et seulement si φ est un automorphisme elliptique de $\mathbb{D}$. Cela amène donc au plongement naturel de C_φ d'après la remarque 5.7.
- sur $X = \mathcal{D}$ l'espace de Dirichlet classique, C_φ est similaire à une isométrie si et seulement si
  - φ est *presque bijective* i.e. φ est injective et $A(\mathbb{D}\backslash\varphi(\mathbb{D})) = 0$ (où A représente la mesure planaire définie par $dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy$ pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$), et il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$;
  - la fonction de comptage n_φ associée à φ, définie par $n_\varphi(w) = \#\{z \in \mathbb{D} : \varphi(z) = w\}$ pour $w \in \mathbb{D}$, est *essentiellement radiale* i.e. pour presque tout $r \in [0, 1[$, pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi[$, $n_\varphi(re^{i\theta}) = n_\varphi(r)$.

  Remarquons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que C_φ soit borné sur $\mathcal{D}$ est que

  $$\int_{S(\xi,h)} n_\varphi dA \leq C \int_{S(\xi,h)} dA, \quad \xi \in \mathbb{T}, \quad h \in]0, 1[,$$

  où $S(\xi, h) := \{z \in \mathbb{D} : |z - \xi| < h\}$ est un ensemble typique de Carleson. Cela représente donc un cas où l'opérateur de composition n'est pas aisément borné et dont la similitude à une isométrie n'est également pas aisément caractérisée.

Plaçons-nous maintenant sur l'espace de Hardy H^2. Pour $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ analytique, l'opérateur de composition C_φ de symbole φ est défini par

$$C_\varphi : f \in H^2 \longmapsto (C_\varphi f)(z) = f \circ \varphi(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dans le cas où $\varphi(0) = 0$, le principe de subordination de Littlewood indique que C_φ est bien défini, à valeurs dans H^2 et est une contraction. De plus, nous avons même que $\|C_\varphi\| = 1$ si et seulement si $\varphi(0) = 0$. Sinon, le théorème de Littlewood indique tout de même que C_φ est bien défini et borné sur H^2. Aussi, C_φ est inversible sur H^2 si et seulement si $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, et dans ce cas $(C_\varphi)^{-1} = C_{\varphi^{-1}}$. Nous pouvons nous référer à [86, 96].

Remarquons dès lors que

1. si $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est un automorphisme de $\mathbb{D}$, comme détaillé dans le chapitre 4 en section 4.1, nous obtenons le plongement naturel de C_φ d'après la remarque 5.7. En effet, nous avons le plongement de φ elliptique, parabolique et hyperbolique dans des semi-flots holomorphes de $\mathbb{D}$ respectivement (4.2), (4.3) et (4.4).

2. si $\varphi \in \mathrm{LFM}(\mathbb{D})$ est une fraction linéaire, comme détaillé dans le chapitre 4 en section 4.2, nous obtenons le plongement naturel de C_φ d'après la remarque 5.7 (en vérifiant (4.9) pour le cas elliptique attractif). Néanmoins, l'exemple 3 montre que C_φ avec $\varphi : z \longmapsto \frac{z}{z-2}$ n'est pas plongeable dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de composition. Nous ne savons pas ce qu'il en est dans le cas général.

Nous considérerons alors dans la suite que φ **n'est pas un automorphisme de** $\mathbb{D}$ et **n'est pas non plus une fraction linéaire de** $\mathbb{D}$ (hors éventuellement le cas d'une fraction linéaire elliptique attractive ne vérifiant pas (4.9)).

5.1.1 Le cas des isométries

Les opérateurs de composition sur l'espace de Hardy Hilbertien H^2 sont une classe d'opérateurs où nous pouvons complètement identifier les isométries, de la façon suivante.

1. L'opérateur C_φ est une isométrie sur H^2 si et seulement si φ est une fonction intérieure et $\varphi(0) = 0$.
2. L'opérateur C_φ est similaire à une isométrie si et seulement si φ est une fonction intérieure et il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$ (voir [14, 86]).

La structure d'espace de Hilbert à noyau reproduisant de H^2 nous a permis d'expliciter une nouvelle condition suffisante pour le plongement de C_φ.

Lemme 5.8. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction intérieure telle que $\varphi(0) = 0$. Supposons qu'il existe une suite $(z_k)_{k\geq 0}$ de points distincts de $\mathbb{D}$ telle que chaque z_k, pour $k \geq 0$, possède au moins deux près-images par φ. Alors C_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2.*

Démonstration. Comme φ est une fonction intérieure vérifiant $\varphi(0) = 0$, il vient que C_φ est une isométrie sur H^2. De plus, par hypothèse, il existe alors des vecteurs $(w_1, \ldots, w_K)$ et $(w'_1, \ldots, w'_K) \in \mathbb{D}^K$ pour K arbitrairement grand tels que

$$w_i \neq w'_i \text{ et } \varphi(w_i) = \varphi(w'_i) = z_i, \quad 1 \leq i \leq K.$$

Pour tout $1 \leq i \leq K$, considérons la fonction $f_i \in H^2$ définie par $f_i = k_{w_i} - k_{w'_i}$. Alors, pour tous $f \in H^2$ et $1 \leq i \leq K$,

$$\langle C_\varphi f \mid f_i \rangle_2 = \langle f \circ \varphi \mid f_i \rangle_2 = \langle f \circ \varphi \mid k_{w_i} \rangle_2 - \left\langle f \circ \varphi \mid k_{w'_i} \right\rangle_2 = f \circ \varphi(w_i) - f \circ \varphi(w'_i) = 0.$$

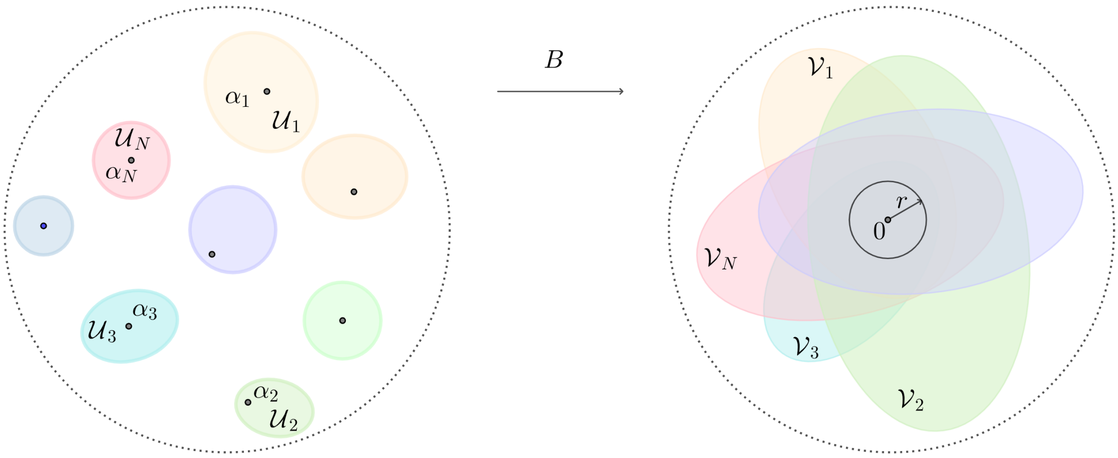
On obtient ainsi que $(f_i)_{1\leq i\leq K} \subset \mathrm{Im}(C_\varphi)^\perp$. Par suite, la famille $(f_i)_{1\leq i\leq K}$ étant libre et K étant arbitraire, on déduit que

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(C_\varphi)) = \dim(\mathrm{Im}(C_\varphi)^\perp) = \infty.$$

Finalement, le plongement de C_φ dans un C_0-semi-groupe sur H^2 découle du théorème 5.6. ☐

Nous pouvons commencer par les deux exemples suivants, avec l'application du lemme 5.8.

1. Soient $N \geq 2$ et $\varphi : z \in \mathbb{D} \longmapsto z^N \in \mathbb{D}$. Alors l'opérateur de composition C_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2. En effet, par existence des racines N-ièmes de l'unité, pour tout point $z \in \mathbb{D}$, en posant $w = z^{\frac{1}{N}} e^{\frac{2i\pi}{N}} \in \mathbb{D}$ et $w' = z^{\frac{1}{N}} e^{\frac{4i\pi}{N}} \in \mathbb{D}$, $w \neq w'$ et on obtient $\varphi(w) = \varphi(w') = z$, d'où l'existence d'au moins deux pré-images.
2. Soit B un produit de Blaschke fini de degré N tel que $\mathrm{Zero}(B) = \{\alpha_i : 1 \leq i \leq N\}$ est l'ensemble de ses zéros tous distincts contenant 0. Alors $B(z) = 0$ si et seulement si $z \in \mathrm{Zero}(B)$ et, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$ étant la suite des zéros simples de B, $B'(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Ainsi, d'après les théorèmes d'inversion locale et de l'image ouverte, il existe $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V}_i$ respectivement des voisinages ouverts de α_i et 0 tels que $B : \mathcal{U}_i \longrightarrow B(\mathcal{U}_i) = \mathcal{V}_i$ est un homéomorphisme. En restreignant $\mathcal{U}_i$ à $\tilde{\mathcal{U}}_i$ telle que $(\tilde{\mathcal{U}}_i)_{1\leq i\leq N}$ soit deux à deux disjoints, nous pouvons supposer que c'est le cas pour $(\mathcal{U}_i)_{1\leq i\leq N}$. Prenons maintenant $r > 0$ tel que $D(0, r) \subset \mathcal{V}_i$ pour tout $1 \leq i \leq N$ et $w \in D(0, r)$.



Alors il existe $z_1, \dots, z_N$ tels que $z_i \in \mathcal{U}_i$ et $B(z_i) = w$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Comme de plus B est une fonction intérieure vérifiant $B(0) = 0$, C_B est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2.

Le théorème principal de cette partie est le suivant, utilisant quelques résultats sur les produits de Blaschke détaillés dans le chapitre 1 en section 1.1.1 et généralisant les deux exemples ci-dessus.

Théorème 5.9. *Tout opérateur de composition similaire à une isométrie sur H^2 est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 qui n'est pas constitué d'opérateurs de composition, à moins que son symbole soit un automorphisme de $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une application analytique. Alors C_φ est similaire à une isométrie si et seulement si φ est une fonction intérieure et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$. Notons tout d'abord que si φ est un automorphisme (elliptique ici) de $\mathbb{D}$, alors C_φ est plongeable d'après la remarque 5.7. Supposons maintenant que φ est une fonction intérieure qui n'est pas un automorphisme de $\mathbb{D}$ et qui admet un point fixe noté α dans $\mathbb{D}$. Remarquons alors que φ n'est pas injective. En effet,

- si φ est un produit de Blaschke, alors φ est non injective puisque 0 admet au moins deux pré-images par φ.
- si φ n'est pas un produit de Blaschke, d'après le théorème de Frostman 1.9, l'application $\tau_a \circ \varphi = \frac{a-\varphi}{1-\bar{a}\varphi}$ est un produit de Blaschke à zéros simples noté B pour presque tout $a \in \mathbb{D}$. Par suite, $\varphi = \tau_a^{-1}(B) = \tau_a(B)$ est non injective puisque B ne l'est pas d'après le premier point.

Dans ce cas, il n'existe pas de semi-flot dans lequel φ est plongeable. Par conséquent, C_φ n'est pas plongeable dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de composition d'après la remarque 5.7.

Considérons l'application $\psi := \tau_\alpha \circ \varphi \circ \tau_\alpha$. Alors ψ est une fonction intérieure et $\psi(0) = 0$, d'où C_ψ est une isométrie de H^2. En particulier, on a $C_\psi = C_{\tau_\alpha} \circ C_\varphi \circ C_{\tau_\alpha}$ et $C_\varphi = C_{\tau_\alpha} \circ C_\psi \circ C_{\tau_\alpha}$. Puisque C_{τ_α} est un isomorphisme de H^2, il reste donc à montrer que C_ψ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2. La preuve va reposer sur deux étapes permettant de construire notre réflexion sur les produits de Blaschke.

- Si ψ est un produit de Blaschke fini quelconque B, alors C_ψ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 d'après le lemme 1.4 et le lemme 5.8. En effet, il s'agit de considérer une suite $(z_k)_{k\geq 0}$ de points de $\mathbb{D}\backslash B(\text{Zero}(B'))$, où $\text{Zero}(B')$ est un ensemble fini d'après le théorème 1.5 et, dans ce cas, chaque z_k admet alors au moins deux pré-images par ψ.
- Si ψ est une fonction intérieure, qui n'est pas un produit de Blaschke fini, alors d'après le théorème de Frostman 1.9, l'application $\tau_\gamma \circ \psi =: B$ est un produit de Blaschke à zéros simples pour presque tout $\gamma \in \mathbb{D}$.

Dans ce cas, on a

$$C_\psi H^2 = \{f \circ \psi : f \in H^2\} = \{(f \circ \tau_\gamma) \circ (\tau_\gamma \circ \psi) : f \in H^2\} \qquad (5.4)$$
$$= \{g \circ B : g \in H^2\} = C_B H^2.$$

Notons par $(w_k)_{k\geq 1}$ la suite de ces zéros simples. En considérant $\left(k_{w_i} - k_{w_j}\right)_{i,j\geq 1, i\neq j}$ famille libre de H^2, on obtient donc d'après (5.4) que

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(C_\psi)) = \dim(\operatorname{Im}(C_B)^\perp) = \infty.$$

On obtient le plongement de C_ψ dans un C_0-semi-groupe de H^2 noté $(T_t)_{t\geq 0}$. Finalement, on conclut que C_φ est plongeable dans le C_0-semi-groupe $(C_{\tau_\alpha} T_t C_{\tau_\alpha})_{t\geq 0}$ sur H^2, qui n'est pas constitué d'opérateurs de composition. □

L'idée est maintenant de décrire le semi-groupe dans lequel l'opérateur de composition similaire à une isométrie sur H^2 est plongeable. Pour ce faire, nous allons utiliser la forme donnée par (5.3). Ce premier lemme nous permet d'identifier les ensembles (5.1) dans la décomposition utilisée. Nous pouvons nous référer à [86], mais nous donnons une preuve quelque peu différente et plus appropriée à notre contexte.

Lemme 5.10. *Soit ψ une fonction intérieure telle que $\psi(0) = 0$. Alors on a*

$$\bigcap_{n\geq 0} C_\psi^n H_0^2 = \{0\} \;\; et \;\; \bigcap_{n\geq 0} C_\psi^n H^2 = \mathbb{C}\mathbb{1}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on considère la décomposition $H^2 = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus H_0^2$ de H^2 où H_0^2 est défini par (1.1). Soit $g \in \bigcap_{n\geq 0} C_\psi^n H_0^2$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $f_n \in H_0^2$ telle que $g(z) = f_n(\psi^{[n]}(z))$ pour $z \in \mathbb{D}$. De plus, C_ψ étant une isométrie, on obtient que $\|g\|_2 = \|f_n\|_2$. Notons que si $g \not\equiv 0$, alors il existe un certain $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$, tel que $|g(z_0)| > 0$. Puisque $f_n \in H_0^2$, $f_n(0) = 0$ et il existe $g_n \in H^2$ telle que $f_n(z) = z g_n(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $\|g_n\|_2 = \|g\|_2$. Finalement, on obtient

$$\left|f_n(\psi^{[n]}(z_0))\right| = \left|\psi^{[n]}(z_0)\right| \left|g_n(\psi^{[n]}(z_0))\right| \leq \left|\psi^{[n]}(z_0)\right| \left|\left\langle g_n \mid k_{\psi^{[n]}(z_0)}\right\rangle_2\right|$$
$$\leq \left|\psi^{[n]}(z_0)\right| \|g\|_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left|\psi^{[n]}(z_0)\right|^2}}.$$

Puisque 0 est le point de Denjoy-Wolff de ψ, on a $\psi^{[n]}(z_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $\left|f_n(\psi^{[n]}(z_0))\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient alors que $g(z_0) = 0$, une contradiction. On déduit ainsi que $g \equiv 0$. Dans ce cas, $\bigcap_{n\geq 0} C_\psi^n H_0^2 = \{0\}$.
On déduit la seconde égalité avec le fait que si $f \in \bigcap_{n\geq 0} C_\psi^n H^2$, alors $f - f(0)\mathbb{1} \in \bigcap_{n\geq 0} C_\psi^n H_0^2$. En effet, dans ce cas, pour tout $n \geq 1$, il existe $h_n \in H^2$ telle que $f = C_\psi^n h_n$. On obtient donc, puisque $f(0) = h_n(\psi^{[n]}(0)) = h_n(0)$, l'égalité

$$f - f(0)\mathbb{1} = C_\psi^n(h_n - f(0)\mathbb{1}) = C_\psi^n(h_n - h_n(0)\mathbb{1}),$$

avec $h_n - h_n(0)\mathbb{1} \in H_0^2$. Finalement, $f - f(0)\mathbb{1} \in C_\psi^n H_0^2$ pour tout $n \geq 0$ d'où le résultat. □

Corollaire 5.11. *Soient φ une fonction intérieure telle que $\varphi(\alpha) = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{D}$ et ψ l'application définie de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ par $\psi = \tau_\alpha \circ \varphi \circ \tau_\alpha$. Alors C_φ est plongeable dans le C_0-semi-groupe sur $H^2 = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus H_0^2$ donné par*

$$(M_{e^{it\theta}} \oplus C_{\tau_\alpha} U^* S_t U C_{\tau_\alpha})_{t\geq 0}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$, $U : H_0^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+, Im(C_\psi)^\perp)$ est un opérateur unitaire et $(S_t)_{t\geq 0}$ est le semi-groupe défini sur $L^2(\mathbb{R}^+, Im(C_\psi)^\perp)$ par (5.2).

Démonstration. Puisque C_φ est similaire à une isométrie sur H^2, on a vu d'après la preuve du théorème 5.9 que

$$C_\varphi \hookrightarrow (C_{\tau_\alpha} T_t C_{\tau_\alpha})_{t\geq 0}$$

avec $\tau_\alpha : z \longmapsto \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha} z} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ et $(T_t)_{t\geq 0}$ est le C_0-semi-groupe sur H^2 dans lequel C_ψ, isométrie sur H^2 avec $\psi = \tau_\alpha \circ \varphi \circ \tau_\alpha$, est plongeable.
Reprenons alors les espaces F et G définis par (5.1) dans la décomposition de Wold. Dans ce cas, puisque ψ est une fonction intérieure telle que $\psi(0) = 0$, on obtient d'après le lemme 5.10 que $F := \bigcap_{n\geq 0} C_\psi^n H^2 = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Aussi, on obtient que $G := \bigoplus_{n\geq 0} C_\psi^n (H^2 \ominus C_\psi H^2) = H_0^2$ puisque $H^2 = F \oplus^\perp G$. On a alors $H^2 = F \oplus^\perp G = \mathbb{C}\mathbb{1} \oplus^\perp H_0^2$, avec $(C_\psi)_{|F}$ un opérateur unitaire et $(C_\psi)_{|G}$ un opérateur unitairement équivalent au shift sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathrm{Im}(C_\psi)^\perp)$. D'après la caractérisation des opérateurs unitaires sur un espace de Hilbert de dimension finie, on obtient que $(C_\psi)_{|F} = M_{e^{i\theta}}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Par (5.3), on obtient donc le plongement de C_ψ dans le C_0-semi-groupe $(M_{e^{it\theta}} \oplus U^* S_t U)_{t\geq 0}$ où $U : H_0^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{Im}(C_\psi)^\perp)$ est un opérateur unitaire, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(S_t)_{t\geq 0}$ est défini sur $L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{Im}(C_\psi)^\perp)$ par (5.2). Par ce qui précède, C_φ est donc plongeable dans le C_0-semi-groupe sur H^2 donné par

$$(M_{e^{it\theta}} \oplus C_{\tau_\alpha} U^* S_t U C_{\tau_\alpha})_{t\geq 0}\,. \qquad \square$$

5.1.2 Les opérateurs de composition à poids

Tandis qu'une caractérisation complète du plongement des isométries a été trouvée pour les opérateurs de composition, il est maintenant naturel de s'intéresser aux opérateurs de composition à poids. Pour $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ analytique et $w \in H^2$, l'opérateur de composition de symbole φ et de poids w est défini par

$$C_{w,\varphi} : f \in H^2 \longmapsto (M_w C_\varphi f)(z) = w(z)(f \circ \varphi(z)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

De la même façon que pour l'opérateur de composition usuel, nous pouvons nous demander quand est-ce que cet opérateur est borné sur H^2 et nous relevons les différentes conditions suivantes.

1. Si $w \in H^\infty$, alors $C_{w,\varphi}$ est borné sur H^2 d'après le principe de subordination de Littlewood.
2. Si $C_{w,\varphi}$ est borné sur H^2, alors $w \in H^2$.
3. Soit φ un produit de Blaschke fini. Alors $C_{w,\varphi}$ est borné sur H^2 si et seulement si $w \in H^\infty$.
4. Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ analytique telle que $\|\varphi\|_\infty < 1$. Alors $C_{w,\varphi}$ est borné sur H^2 si et seulement si $w \in H^2$.

Au même titre, nous notons également que $C_{w,\varphi}$ est inversible sur H^2 si et seulement si w est borné inférieurement dans $\mathbb{D}$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Dans ce cas, son inverse est donné par l'opérateur de composition à poids $C_{w,\varphi}^{-1} = C_{\frac{1}{w}\circ\varphi^{-1},\varphi^{-1}}$. Nous pouvons nous référer à [35, 68, 77].

Les différents résultats concernant les opérateurs de composition à poids isométriques sont les suivants.

1. Dans [77], R. Kumar et J. Partington ont montré que pour $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ analytique et $w \in H^2$, $C_{w,\varphi}$ est une isométrie sur H^2 si et seulement si φ est une fonction intérieure, $\|w\|_2 = 1$ et $\langle w \mid w\varphi^n \rangle_2 = 0$ pour tout $n \geq 1$.
2. Dans [35], I. Chalendar et J. Partington ont montré que pour φ une fonction intérieure, il existe $w \in H^2$ telle que $C_{w,\varphi}$ est une isométrie sur H^2.

À travers ces deux résultats, et la condition de plongement isométrique du théorème 5.6, nous avons abouti à l'existence d'un poids permettant le plongement de ces opérateurs sur H^2.

Théorème 5.12. *Soit φ une fonction intérieure. Alors il existe un poids $w \in H^2$ tel que $C_{w,\varphi}$ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2.*

Démonstration. Puisque φ est intérieure, il existe un poids $w \in H^2$ tel que $C_{w,\varphi}$ est une isométrie sur H^2 vérifiant $\|w\|_2 = 1$ et $\langle w \mid w\varphi^n \rangle_2 = 0$ pour tout $n \geq 1$. Montrons maintenant que $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(C_{w,\varphi})) = \infty$. En considérant le noyau reproduisant de H^2, on a alors, pour $f \in H^2$ et $\lambda \in \mathbb{D}$,

$$\langle C_{w,\varphi} f \mid k_\lambda \rangle_2 = w(\lambda) C_\varphi f(\lambda) = w(\lambda)(f \circ \varphi(\lambda)).$$

On déduit alors que $\langle C_{w,\varphi} f \mid k_\lambda \rangle_2 = 0$ si et seulement si $w(\lambda) = 0$ ou $f \circ \varphi(\lambda) = 0$. Posons dans ce cas $w = Bm$ avec B un produit de Blaschke infini associé à une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) < \infty$ et $m \in H^2$ vérifiant $\|m\|_2 = 1$ et $\langle m \mid m\varphi^n \rangle_2 = 0$ pour tout $n \geq 1$. On vérifie facilement que, puisque B est une fonction intérieure, $\|w\|_2 = 1$ et $\langle w \mid w\varphi^n \rangle_2 = 0$ pour tout $n \geq 1$. Il vient que $C_{w,\varphi}$ est donc toujours une isométrie de H^2 avec, de plus,

$$\langle C_{w,\varphi} f \mid k_\lambda \rangle_2 = B(\lambda) m(\lambda) C_\varphi f(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{D}.$$

On déduit donc que $\operatorname{span}_{H^2}(k_\lambda : \lambda \in \operatorname{Zero}(B)) \subset \operatorname{Im}(C_{w,\varphi})^\perp$. Par suite, on a finalement que $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(C_{w,\varphi})) = \dim(\operatorname{Im}(C_{w,\varphi})^\perp) = \infty$ et, pour un tel $w \in H^2$, $C_{w,\varphi}$ est donc plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 d'après le théorème 5.6. $\square$

Remarque 5.13. Nous pouvons nous poser la même question que pour les plongements précédents sur la forme du semi-groupe dans lequel $C_{w,\varphi}$ est plongeable sur H^2. Tout d'abord, pour obtenir un semi-groupe d'opérateurs de composition à poids, le symbole et le poids associés doivent vérifier les propriétés suivantes.

- La famille $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ est un semi-flot holomorphe de $\mathbb{D}$.
- La famille $(w_t)_{t\geq 0}$ est un *cocyle associé à* $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ i.e. une famille de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ vérifiant que pour tous $z \in \mathbb{D}$ et $t, s \geq 0$, $w_0(z) = 1$ et $w_{t+s}(z) = w_t(z) w_s(\varphi_t(z))$ puis que l'application $t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto w_t(z)$ est continue.

Nous pouvons vérifier qu'avec ces conditions $(C_{w_t,\varphi_t} := w_t C_{\varphi_t})_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur H^2. Néanmoins, la forme du semi-groupe dans lequel $C_{w,\varphi}$ est plongeable avec le théorème 5.12 est moins explicite que dans le cas usuel par le corollaire 5.11. En effet, ici nous avons d'après (5.3) que

$$C_{w,\varphi} \hookrightarrow \Big(Z^*(e^{tLog(m)})Z \oplus U^* S_t U\Big)_{t\geq 0},$$

où μ est une mesure de Borel, $m \in L^\infty(\sigma((C_{w,\varphi})_{|F}), \mu)$ est mesurable et

$$Z : F \longrightarrow L^2(\sigma((C_{w,\varphi})_{|F}), \mu), \quad U : G \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+, \operatorname{Im}(C_{w,\varphi})^\perp)$$

sont des opérateurs unitaires avec F et G définis par (5.1).

5.2 Les opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2

Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, nous rappelons d'après la section 1.2.3 du chapitre 1 que l'opérateur de Toeplitz T_φ de symbole φ est défini par

$$T_\varphi : f \in H^2 \longmapsto P_+(M_\varphi f) = P_+(\varphi f) \in H^2,$$

où $P_+ : f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int} \in L^2(\mathbb{T}) \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n e^{int} \in H^2$ correspond à la projection de Riesz.

Nous allons alors nous intéresser ici aux opérateurs de Toeplitz analytique en considérant un symbole $\varphi \in H^\infty$ i.e. $T_\varphi : f \in H^2 \longmapsto \varphi f = M_\varphi f$ est l'opérateur de multiplication par φ. D'après la proposition 1.26, pour $\varphi \in H^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$,

$$\ker T_\varphi = \{0\} \text{ et } \ker T_\varphi^* = \ker T_{\overline{\varphi}} = \mathcal{K}_\theta = (\theta H^2)^\perp,$$

où θ est la partie intérieure de φ dans la décomposition 1.5 et $\mathcal{K}_\theta$ est l'espace modèle associé, dont certains détails sont donnés en chapitre 1 dans la section 1.1.2.

Nous pourrions alors nous demander quelles sont les conditions sur θ et φ_e pour avoir le plongement de T_φ dans un C_0-semi-groupe sur H^2, et le cas échéant, si celui-ci est un semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique. Remarquons alors que la condition nécessaire 5.1 implique en particulier que $\dim(\mathcal{K}_\theta) \in \{0, \infty\}$. Or, d'après le théorème 1.10, $\dim(\mathcal{K}_u) < \infty$ si et seulement si u est un produit de Blaschke fini, d'où

- $\dim(\mathcal{K}_\theta) = \infty$ si et seulement si θ n'est pas un produit de Blaschke fini ;
- $\dim(\mathcal{K}_\theta) = 0$ si et seulement si φ est une fonction extérieure.

De plus, rappelons que T_φ est une isométrie de H^2 si et seulement si φ est une fonction intérieure d'après la proposition 1.25.

Théorème 5.14. *Soit φ une fonction intérieure non constante. Alors T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 si et seulement si φ n'est pas un produit de Blaschke fini. De plus, celui-ci est un semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique si et seulement si φ ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soit φ une fonction intérieure non constante. Alors T_φ est isométrique sur H^2. D'après le théorème 5.6, on a que T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 si et seulement si $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(T_\varphi)) = \dim(\mathcal{K}_\varphi) = \infty$. On déduit alors que T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 si et seulement si φ n'est pas un produit de Blaschke fini. Notons $(R_t)_{t\geq 0}$ le C_0-semi-groupe où T_φ est plongeable. Rappelons que, d'après la proposition 1.27, le commutant de S sur H^2 est donné par

$$\{S\}' = \{T_\psi : \psi \in H^\infty\}.$$

Dans ce cas, $(R_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique si et seulement s'il existe $C \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ vérifiant $\sup\{\operatorname{Re}(C(z)) : z \in \mathbb{D}\} < \infty$ et telle que $R_t = T_{e^{tC}}$ pour tout $t \geq 0$ d'après [95]. En particulier, on a donc $R_1 = T_\varphi = T_{e^C}$ et $\varphi = e^C$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Réciproquement, si φ ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, alors φ est intérieure singulière et s'écrit sous la forme, pour μ une mesure de Borel positive et finie sur $\mathbb{T}$ et $\mu \perp m$,

$$\varphi(z) = \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)\right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En considérant, pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi_t(z) = \exp\left\{-t\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)\right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

on déduit que T_φ est plongeable dans le C_0-semi-groupe $(M_{\varphi_t} = T_{\varphi_t})_{t\geq 0}$ d'opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2, puisque $\varphi_t \in H^\infty$ pour tout $t \geq 0$. □

Lemme 5.15. *Soit φ une fonction extérieure. Alors T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2.*

Démonstration. Puisque φ est une fonction extérieure, φ s'écrit sous la forme

$$\varphi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} \log\left|\varphi^*(e^{is})\right|\, ds\right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En considérant, pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi_t(z) = \exp\left\{\frac{t}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} \log\left|\varphi^*(e^{is})\right|\, ds\right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

on déduit que $T_\varphi \hookrightarrow (M_{\varphi_t} = T_{\varphi_t})_{t\geq 0}$ C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2 puisque $\varphi_t \in H^\infty$ pour tout $t \geq 0$. □

Plus généralement, à travers la décomposition du symbole $\varphi \in H^\infty$ donnée par (1.5), nous pouvons aussi étudier le plongement de T_φ hors du cas isométrique.

Proposition 5.16. *Soient $\varphi = \theta\varphi_e = (BS_\mu)\varphi_e \in H^\infty$ avec B une produit de Blaschke, S_μ une fonction intérieure singulière et φ_e une fonction extérieure. Supposons de plus que φ n'est ni une fonction intérieure, ni une fonction extérieure. Alors*

- *si $B \equiv 1$, T_φ est plongeable dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2.*
- *si $S_\mu \equiv 1$ et si B est un produit de Blaschke fini non constant, T_φ n'est pas plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2.*

Démonstration.

- Prenons $B \equiv 1$. Alors $\varphi = S_\mu\varphi_e$ ne s'annule donc pas sur $\mathbb{D}$. Notons que l'opérateur de Toeplitz associé est $T_\varphi = T_{S_\mu\varphi_e} = M_{S_\mu}M_{\varphi_e}$. D'après le théorème 5.14 et le lemme 5.15, M_{φ_e} et M_{S_μ} sont respectivement plongeables dans des C_0-semi-groupes d'opérateurs de Toeplitz analytique notés $(U_t)_{t\geq 0}$ et $(V_t)_{t\geq 0}$. Ainsi, T_φ est plongeable dans le C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique $(U_tV_t)_{t\geq 0}$ par commutativité de ces deux derniers.
- Prenons $S_\mu \equiv 1$, et B un produit de Blaschke fini non constant. Alors

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(T_\varphi)) = \dim(\mathcal{K}_B) \notin \{0, \infty\},$$

  d'où le non plongement de T_φ dans un C_0-semi-groupe sur H^2 d'après le théorème 5.1. $\square$

Un dernier cas reste encore à étudier, et est formulé avec la question suivante.

Question 5.17. *Soit $\varphi = B\phi \in H^\infty$ avec B un produit de Blaschke non constant et ϕ une application analytique non constante qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ et qui n'est pas une fonction intérieure. A-t-on le plongement de T_φ dans un C_0-semi-groupe sur H^2 ?*

Remarque 5.18. La difficulté de cette question réside dans le fait que :

(a) chacun des termes de la décomposition peut être plongeable dans un C_0-semi-groupe, tandis que le produit de ceux-ci ne forme pas un C_0-semi-groupe ;

(b) le produit peut être plongeable dans un C_0-semi-groupe tandis qu'un des termes ne l'est pas.

En effet, rappelons en premier lieu que d'après [45, Example I.1.14], pour deux C_0-semi-groupes $(A_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t)_{t\geq 0}$,

$(A_tB_t)_{t\geq 0}$ forme un C_0-semi-groupe si et seulement si $(A_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ commutent.

Aussi, remarquons qu'avec le théorème 5.14 et la proposition 5.16, $T_\varphi = T_{B\phi} = T_BT_\phi$ avec T_B plongeable si et seulement si B est un produit de Blaschke infini et T_ϕ plongeable. Néanmoins, rappelons que si T_B est plongeable, il ne l'est pas dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique d'après le théorème 5.14. Les deux prochains exemples montrent la difficulté et l'intérêt porté à cette question.

(a) Soient B un produit de Blaschke infini et S_μ une fonction intérieure singulière non constante. Alors T_B est plongeable dans un C_0-semi-groupe noté $(T_t)_{t\geq 0}$, T_{S_μ} est plongeable dans un C_0-semi-groupe noté $(U_t)_{t\geq 0}$ et T_{BS_μ} est plongeable dans un C_0-semi-groupe noté $(V_t)_{t\geq 0}$. Dans ce cas, nous savons que $V_t \neq T_tU_t$ pour tout $t > 0$, tandis que T_B et T_{S_μ} commutent. Cela donne un exemple d'un produit plongeable, mais pas dans le produit des semi-groupes dans lesquels les deux termes sont plongeables.

(b) Soient B_1 un produit de Blaschke fini et B_2 un produit de Blaschke infini. Alors T_{B_1} n'est pas plongeable et T_{B_2} est plongeable tandis que $T_{B_1B_2}$ est plongeable. Cela donne un exemple d'un produit plongeable tandis qu'un des termes ne l'est pas.

Comme cas particuliers, nous pouvons déduire un résultat sur le plongement des Toeplitz associés à un symbole polynomial.

Corollaire 5.19. *Soient $n \geq 1$ et $P \in \mathcal{P}_n$. Alors T_P est plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2 si et seulement si P n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soient $n \geq 1$ et $P \in \mathcal{P}_n$ de la forme

$$P(z) = a \sum_{k=0}^{n} (z - \alpha_k) \sum_{j=0}^{m} (z - \beta_j)$$

où $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $|\alpha_k| < 1$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $|\beta_j| \geq 1$ pour tout $1 \leq j \leq m$. En particulier, il vient que $P(z) = B(z)F(z)$ avec B le produit de Blaschke associé à la suite $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ et F la fonction intérieure définie par $F(z) = a \sum_{k=1}^{n} (1 - \overline{\alpha_k} z) \sum_{j=1}^{m} (z - \beta_j)$. Alors

- Si P n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$ i.e. $\alpha_k \notin \mathbb{D}$ pour tout $1 \leq k \leq n$, alors $B \equiv 1$ et P est une fonction extérieure. Par suite, T_P est plongeable dans un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz analytique sur H^2 d'après le lemme 5.15.
- Si P a au moins un zéro dans $\mathbb{D}$, alors $B \not\equiv 1$. D'après la proposition 5.16 (ii), T_P n'est pas plongeable dans un C_0-semi-groupe sur H^2. □

5.3 Isométries et propriétés des semi-groupes

Nous avons étudié, dans les sections précédentes, le plongement de C_φ, $C_{w,\varphi}$ et T_φ sur H^2 en utilisant en particulier le caractère isométrique de ces derniers. Nous avons vu que les semi-groupes n'étaient en général pas constitués d'opérateurs de composition ou de Toeplitz analytique respectivement. Nous nous intéressons alors dans cette section aux propriétés qui sont préservées ou non par le plongement d'un opérateur dans un semi-groupe fortement continu. De manière générale, nous pourrions nous demander si le semi-groupe dans lequel l'opérateur isométrique est plongeable est un semi-groupe d'opérateurs isométriques et faire de même avec d'autres propriétés, au regard de celles des opérateurs que l'on souhaite plonger.

5.3.1 Contraction et isométrie

Le résultat suivant montre qu'un semi-groupe de contractions où l'élément plongé est de plus isométrique est un semi-groupe d'opérateurs isométriques.

Lemme 5.20. *Soit $V \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur isométrique. Si $V \hookrightarrow (V_t)_{t \geq 0}$ C_0-semi-groupe de contractions, alors V_t est un opérateur isométrique pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Remarquons que puisque V est une isométrie, $V^n = V_n$ l'est également pour tout $n \in \mathbb{N}$. Procédons par l'absurde et supposons maintenant qu'il existe $t_0 > 0$ tel que V_{t_0} n'est pas isométrique. Dans ce cas, puisque V_{t_0} est une contraction, il existe un élément $x_0 \in H$ avec $\|x_0\| = 1$ tel que $\|V_{t_0} x_0\| < 1$. Or, pour tout entier $N > t_0$, on a d'une part via la propriété algébrique de semi-groupe

$$\|V_{N-t_0} V_{t_0} x_0\| = \|V_N x_0\| = 1,$$

et d'autre part via le caractère contractant

$$\|V_{N-t_0} V_{t_0} x_0\| \leq \|V_{t_0} x_0\| < 1.$$

Cette contradiction indique alors que V_t est isométrique pour tout $t > 0$. Puisque $V_0 = Id$ est isométrique, le semi-groupe dans lequel V est plongeable l'est. □

5.3.2 Compacité et isométrie

Le résultat suivant permet de mettre en avant l'incompatibilité entre opérateur isométrique et semi-groupe d'opérateurs compacts. Tout d'abord, regardons les différents exemples suivants autour de la compacité des opérateurs considérés jusqu'à maintenant.

1. L'opérateur intégral de Volterra $V : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ est compact d'après le théorème de Fréchet-Kolmogorov ([25]) et plongeable dans le C_0-semi-groupe de Riemann-Liouville $(V_t)_{t\geq 0}$. Alors, d'après la propriété d'idéal bilatère de l'ensemble des opérateurs compacts, $(V_t)_{t\geq 1}$ est un semi-groupe compact. Par suite, $(V_t)_{t\geq 1}$ est ainsi un semi-groupe uniformément continu d'après [45, Lemma II.5.5] et il existe un certain $A \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ tel que $V_t = e^{tA}$ pour tout $t \geq 1$.
2. D'après le critère [80, Theorem 5.1.17], si C_φ est compact, alors $\left|\varphi^*(e^{it})\right| < 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Ici, nous considérons φ une fonction intérieure, donc $\left|\varphi^*(e^{it})\right| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et C_φ n'est donc pas compact.
3. Le seul opérateur de Toeplitz compact est 0 donc cette question appliquée aux opérateurs de Toeplitz n'est pas à considérer.

Lemme 5.21. *Soit $V \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur isométrique plongeable dans un C_0-semi-groupe $(V_t)_{t\geq 0}$ sur H. Alors, pour tout $t \geq 0$, V_t n'est pas un opérateur compact.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que V_{t_0} est compact. Puisque $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère, il vient que V_t est un opérateur compact pour tout $t \geq t_0$ d'après la propriété algébrique du semi-groupe. Il vient alors que, pour toute suite orthonormale $(e_n)_{n\geq 0}$ de H, $\|V_t e_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $t \geq t_0$. Or, puisque V est isométrique, $V_N = V^N$ l'est pour tout $N \in \mathbb{N}$ et on a

$$\|V_N e_n\| = \|e_n\| = 1.$$

Pour N assez grand ($N \geq t_0$), on aboutit donc à une contradiction qui indique alors par suite que pour tout $t > 0$, V_t n'est pas compact. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Alam et al. « Eventual Ideal Properties of the Riemann-Liouville Analytic Semigroup ». 2024. arXiv : 2404.19540.

[2] A. B. Aleksandrov. « A-integrability of boundary values of harmonic functions ». In : *Mat. Zametki* 30.1 (1981), p. 59-72, 154. issn : 0025-567X.

[3] A. Aleman. « Hilbert spaces of analytic functions between the Hardy and the Dirichlet space ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 115.1 (1992), p. 97-104. issn : 0002-9939,1088-6826. doi : 10.2307/2159570.

[4] A. Aleman. « The Multiplication Operator on Hilbert Spaces of Analytic Functions ». Habilitation. Fernuniversitaet hagen, 1993.

[5] A. Aleman et B. Malman. « Hilbert spaces of analytic functions with a contractive backward shift ». In : *J. Funct. Anal.* 277.1 (2019), p. 157-199. issn : 0022-1236,1096-0783. doi : 10.1016/j.jfa.2018.08.019.

[6] R. Alhajj. « Compactness and hypercyclicity of co-analytic Toeplitz operators on de Branges–Rovnyak spaces ». In : *Concr. Oper.* 7.1 (2020), p. 55-68. issn : 2299-3282. doi : 10.1515/conop-2020-0004.

[7] R. Alhajj. « Opérateurs de Toeplitz et opérateurs de composition sur les espaces de de Branges-Rovnyak ». Theses. Université de Lille, juin 2021. url : https://theses.hal.science/tel-03474180.

[8] J. Arazy, S. D. Fisher et J. Peetre. « Möbius invariant function spaces ». In : *J. Reine Angew. Math.* 363 (1985), p. 110-145. issn : 0075-4102,1435-5345. doi : 10.1007/BFb0078341.

[9] W. Arendt et al. « Powers of composition operators : asymptotic behaviour on Bergman, Dirichlet and Bloch spaces ». In : *J. Aust. Math. Soc.* 108.3 (2020), p. 289-320. issn : 1446-7887,1446-8107. doi : 10.1017/s1446788719000235.

[10] W. Arendt et al. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* T. 96. Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, p. xii+523. isbn : 3-7643-6549-8. doi : 10.1007/978-3-0348-5075-9.

[11] A. Atzmon. « Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces ». In : *Acta Math.* 144.1-2 (1980), p. 27-63. issn : 0001-5962,1871-2509. doi : 10.1007/BF02392120.

[12] J. A. Ball et V. Bolotnikov. « De Branges-Rovnyak spaces : basics and theory ». English. In : *Operator theory. With 51 figures and 2 tables. In 2 volumes.* Basel : Springer, 2015, p. 631-679. isbn : 978-3-0348-0666-4. doi : 10.1007/978-3-0348-0667-1_6.

[13] J. A. Ball, T. T. Trent et V. Vinnikov. « Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces ». In : *Operator theory and analysis (Amsterdam, 1997).* T. 122. Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser, Basel, 2001, p. 89-138. isbn : 3-7643-6499-8.

[14] F. Bayart. « Similarity to an isometry of a composition operator ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 131.6 (2003), p. 1789-1791. issn : 0002-9939,1088-6826. doi : 10.1090/S0002-9939-02-06759-X.

[15] F. Bayart et É. Matheron. *Dynamics of linear operators.* T. 179. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009, p. xiv+337. ISBN : 978-0-521-51496-5. DOI : 10.1017/CBO9780511581113.

[16] A. Bergman. *On cyclicity in de Branges-Rovnyak spaces.* 2023. arXiv : 2309.09601 [math.FA].

[17] E. Berkson et H. Porta. « Semigroups of analytic functions and composition operators. » In : *Michigan Mathematical Journal* 25.1 (1978), p. 101-115. DOI : 10.1307/mmj/1029002009.

[18] A. Beurling. « On two problems concerning linear transformations in Hilbert space ». In : *Acta Math.* 81 (1948), p. 239-255. ISSN : 0001-5962,1871-2509. DOI : 10.1007/BF02395019.

[19] A. Bourhim, O. El-Fallah et K. Kellay. « Boundary behaviour of functions of Nevanlinna class ». In : *Indiana Univ. Math. J.* 53.2 (2004), p. 347-395. ISSN : 0022-2518,1943-5258. DOI : 10.1512/iumj.2004.53.2370.

[20] B. Bouya, O. El-Fallah et K. Kellay. « Idéaux fermés d'algèbres de Beurling analytiques sur le bidisque ». In : *Bull. Sci. Math.* 134.6 (2010), p. 588-604. ISSN : 0007-4497,1952-4773. DOI : 10.1016/j.bulsci.2010.01.005.

[21] F. Bracci, M. D. Contreras et S. Díaz-Madrigal. « Infinitesimal generators associated with semigroups of linear fractional maps ». In : *J. Anal. Math.* 102 (2007), p. 119-142. ISSN : 0021-7670,1565-8538. DOI : 10.1007/s11854-007-0018-9.

[22] F. Bracci, M. D. Contreras et S. Díaz-Madrigal. *Continuous semigroups of holomorphic self-maps of the unit disc.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2020, p. xxvii+566. ISBN : 978-3-030-36781-7. DOI : 10.1007/978-3-030-36782-4.

[23] L. de Branges et J. Rovnyak. « Canonical models in quantum scattering theory ». In : *Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics (Proc. Adv. Sem. Math. Res. Center, U.S. Army, Theoret. Chem. Inst., Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1965).* Wiley, New York-London-Sydney, 1966, p. 295-392.

[24] L. de Branges et J. Rovnyak. *Square summable power series.* Holt, Rinehart et Winston, New York-Toronto-London, 1966, p. viii+104.

[25] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Théorie et applications. [Theory and applications]. Masson, Paris, 1983, p. xiv+234. ISBN : 2-225-77198-7.

[26] L. Brown et A. L. Shields. « Cyclic vectors in the Dirichlet space ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 285.1 (1984), p. 269-303. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10.2307/1999483.

[27] S. R. Caradus. « Universal operators and invariant subspaces ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 23 (1969), p. 526-527. ISSN : 0002-9939,1088-6826. DOI : 10.2307/2036577.

[28] L. Carleson. « Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle ». In : *Acta Math.* 87 (1952), p. 325-345. ISSN : 0001-5962,1871-2509. DOI : 10.1007/BF02392289.

[29] L. Carleson. « Interpolations by bounded analytic functions and the Corona problem ». In : *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962).* Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, p. 314-316.

[30] G. Cassier et I. Chalendar. « The group of the invariants of a finite Blaschke product ». In : *Complex Variables Theory Appl.* 42.3 (2000), p. 193-206. ISSN : 0278-1077,1563-5066. DOI : 10.1080/17476930008815283.

[31] B. Celariès et I. Chalendar. « Three-lines proofs on semigroups of composition operators ». In : *Ulmer Seminare (vol.20)* (2017).

[32] I. Chalendar et R. Lebreton. « Embedding of some classes of operators into strongly continuous semigroups ». In : *Canadian Mathematical Bulletin* (2025), p. 1-13. DOI : 10.4153/S0008439524000560.

[33] I. Chalendar et J. R. Partington. *Modern approaches to the invariant-subspace problem.* T. 188. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2011, p. xii+285. ISBN : 978-1-107-01051-2. DOI : 10.1017/CBO9780511862434.

[34] I. Chalendar et J. R. Partington. « An overview of some recent developments on the invariant subspace problem ». In : *Concr. Oper.* 1 (2013), p. 1-10. ISSN : 2299-3282. DOI : 10.2478/conop-2012-0001.

[35] I. Chalendar et J. R. Partington. « Weighted composition operators : isometries and asymptotic behaviour ». In : *J. Operator Theory* 86.1 (2021), p. 189-201. issn : 0379-4024,1841-7744. doi : 10.7900/jot.

[36] J. A. Cima, A. L. Matheson et W. T. Ross. *The Cauchy transform*. T. 125. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, p. x+272. isbn : 0-8218-3871-7. doi : 10.1090/surv/125.

[37] C. Costara et T. Ransford. « Which de Branges-Rovnyak spaces are Dirichlet spaces (and vice versa) ? » In : *J. Funct. Anal.* 265.12 (2013), p. 3204-3218. issn : 0022-1236,1096-0783. doi : 10.1016/j.jfa.2013.08.015.

[38] C. C. Cowen et E. A. Gallardo-Gutiérrez. « A new proof of a Nordgren, Rosenthal and Wintrobe theorem on universal operators ». In : *Problems and recent methods in operator theory*. T. 687. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, p. 97-102. isbn : 978-1-4704-2772-6.

[39] C. C. Cowen et B. D. MacCluer. *Composition operators on spaces of analytic functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, p. xii+388. isbn : 0-8493-8492-3.

[40] R. G. Douglas, H. S. Shapiro et A. L. Shields. « Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 20 (1970), p. 37-76. issn : 0373-0956,1777-5310. url : http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_37_0.

[41] Y. M. Egueh, K. Kellay et M. Zarrabi. *Cyclicity in Besov-Dirichlet spaces from the Corona Theorem*. 2024. arXiv : 2405.09921 [math.CA].

[42] T. Eisner. « Embedding operators into strongly continuous semigroups ». In : Arch. Math. (Basel) (2009), 92(5) :451-460.

[43] T. Eisner. *Stability of operators and operator semigroups*. T. 209. Operator Theory : Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, p. viii+204. isbn : 978-3-0346-0194-8.

[44] K.-J. Engel et R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. T. 194. Graduate Texts in Mathematics. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt. Springer-Verlag, New York, 2000, p. xxii+586. isbn : 0-387-98463-1.

[45] K.-J. Engel et R. Nagel. *A short course on operator semigroups*. Universitext. Springer, New York, 2006, p. x+247. isbn : 978-0387-31341-2.

[46] O. El-Fallah, Y. Elmadani et K. Kellay. « Cyclicity and invariant subspaces in Dirichlet spaces ». In : *J. Funct. Anal.* 270.9 (2016), p. 3262-3279. issn : 0022-1236,1096-0783. doi : 10.1016/j.jfa.2016.02.027.

[47] O. El-Fallah, K. Kellay et T. Ransford. « Cyclicity in the Dirichlet space ». In : *Ark. Mat.* 44.1 (2006), p. 61-86. issn : 0004-2080,1871-2487. doi : 10.1007/s11512-005-0008-z.

[48] O. El-Fallah, K. Kellay et T. Ransford. « On the Brown-Shields conjecture for cyclicity in the Dirichlet space ». In : *Adv. Math.* 222.6 (2009), p. 2196-2214. issn : 0001-8708,1090-2082. doi : 10.1016/j.aim.2009.07.011.

[49] O. El-Fallah, K. Kellay et K. Seip. « Cyclicity of singular inner functions from the corona theorem ». In : *J. Inst. Math. Jussieu* 11.4 (2012), p. 815-824. issn : 1474-7480,1475-3030. doi : 10.1017/S1474748012000035.

[50] O. El-Fallah et al. *A primer on the Dirichlet space*. T. 203. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, p. xiv+211. isbn : 978-1-107-04752-5.

[51] E. Fricain. « Complétude des noyaux reproduisants dans les espaces modèles ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 52.2 (2002), p. 661-686. issn : 0373-0956,1777-5310. url : http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_2_661_0.

[52] E. Fricain et S. Grivaux. « Cyclicity in de Branges-Rovnyak spaces ». In : *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis* (2023). url : https://hal.science/hal-03832727.

[53] E. Fricain, A. Hartmann et W. T. Ross. « Multipliers between range spaces of co-analytic Toeplitz operators ». In : *Acta Sci. Math. (Szeged)* 85.1-2 (2019), p. 215-230. issn : 0001-6969,2064-8316.

[54] E. Fricain et R. Lebreton. *Cyclicity of the shift operator and a related completeness problem in de Branges-Rovnyak spaces*. 2024. arXiv : 2403.04335 [math.CV].

[55] E. Fricain et R. Lebreton. « Cyclicity of the shift operator through Bezout identities ». working paper or preprint. Juin 2024. URL : https://hal.science/hal-04605882.

[56] E. Fricain et J. Mashreghi. « On a characterization of finite Blaschke products ». In : *Complex Var. Elliptic Equ.* 59.3 (2014), p. 362-368. ISSN : 1747-6933,1747-6941. DOI : 10.1080/17476933.2012.725165.

[57] E. Fricain et J. Mashreghi. *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 1*. T. 20. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 2016, p. xix+681. ISBN : 978-1-107-02777-0. DOI : 10.1017/CBO9781139226752.

[58] E. Fricain et J. Mashreghi. *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 2*. T. 21. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 2016, p. xix+619. ISBN : 978-1-107-02778-7.

[59] E. Fricain, J. Mashreghi et D. Seco. « Cyclicity in non-extreme de Branges–Rovnyak spaces ». In : *Invariant subspaces of the shift operator*. T. 638. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, p. 131-136. ISBN : 978-1-4704-1045-2. DOI : 10.1090/conm/638/12807.

[60] E. Fricain et al. « Sharp estimates of the solutions to Bézout's polynomial equation and a Corona theorem ». In : *J. Geom. Anal.* 33.8 (2023), Paper No. 256, 25. ISSN : 1050-6926,1559-002X. DOI : 10.1007/s12220-023-01315-9.

[61] E. Fricain et al. *An analytic approach to estimating the solutions of Bézout's polynomial identity*. 2024. arXiv : 2310.12734 [math.CV]. URL : https://arxiv.org/abs/2310.12734.

[62] S. R. Garcia, J. Mashreghi et W. T. Ross. *Introduction to model spaces and their operators*. T. 148. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2016, p. xv+322. ISBN : 978-1-107-10874-5. DOI : 10.1017/CBO9781316258231.

[63] S. R. Garcia, J. Mashreghi et W. T. Ross. « Real complex functions ». In : *Recent progress on operator theory and approximation in spaces of analytic functions*. T. 679. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, p. 91-128. ISBN : 978-1-4704-2305-6. DOI : 10.1090/conm/679.

[64] S. R. Garcia, J. Mashreghi et W. T. Ross. « Finite Blaschke products : a survey ». In : *Harmonic analysis, function theory, operator theory, and their applications*. T. 19. Theta Ser. Adv. Math. Theta, Bucharest, 2017, p. 133-158. ISBN : 978-606-8443-08-9.

[65] G. Godefroy et J. H. Shapiro. « Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds ». In : *J. Funct. Anal.* 98.2 (1991), p. 229-269. ISSN : 0022-1236,1096-0783. DOI : 10.1016/0022-1236(91)90078-J.

[66] V. V. Goryainov. « Semigroups of analytic functions in analysis and applications ». In : *Uspekhi Mat. Nauk* 67.6(408) (2012), p. 5-52. ISSN : 0042-1316,2305-2872. DOI : 10.1070/RM2012v067n06ABEH004816.

[67] K.-G. Grosse-Erdmann et A. Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011, p. xii+386. ISBN : 978-1-4471-2169-5. DOI : 10.1007/978-1-4471-2170-1.

[68] G. Gunatillake. « Invertible weighted composition operators ». In : *J. Funct. Anal.* 261.3 (2011), p. 831-860. ISSN : 0022-1236,1096-0783. DOI : 10.1016/j.jfa.2011.04.001.

[69] P. R. Halmos. « Ten problems in Hilbert space ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1970), p. 887-933. ISSN : 0002-9904. DOI : 10.1090/S0002-9904-1970-12502-2.

[70] H. Hedenmalm, B. Korenblum et K. Zhu. *Theory of Bergman spaces*. T. 199. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000, p. x+286. ISBN : 0-387-98791-6. DOI : 10.1007/978-1-4612-0497-8.

[71] H. Hedenmalm et A. Shields. « Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions ». In : *Michigan Math. J.* 37.1 (1990), p. 91-104. ISSN : 0026-2285,1945-2365. DOI : 10.1307/mmj/1029004068.

[72] F. Holland et D. Walsh. « Criteria for membership of the Besov spaces B^s_{pq} ». In : *Math. Ann.* 285.4 (1989), p. 571-592. ISSN : 0025-5831,1432-1807. DOI : 10.1007/BF01452048.

[73] S. Karlin et J. McGregor. « Embeddability of discrete time simple branching processes into continuous time branching processes ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 132 (1968), p. 115-136. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10.2307/1994885.

[74] S. Karlin et J. McGregor. « Embedding iterates of analytic functions with two fixed points into continuous groups ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 132 (1968), p. 137-145. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10.2307/1994886.

[75] K. Kellay, F. Le Manach et M. Zarrabi. « Cyclicity in Dirichlet type spaces ». In : *Complex analysis and spectral theory*. T. 743. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., [Providence], RI, 2020, p. 181-193. ISBN : 978-1-4704-4692-5. DOI : 10.1090/conm/743/14960.

[76] B. Korenblum. « Cyclic elements in some spaces of analytic functions ». In : *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 5.3 (1981), p. 317-318. ISSN : 0273-0979,1088-9485. DOI : 10.1090/S0273-0979-1981-14943-0.

[77] R. Kumar et J. R. Partington. « Weighted composition operators on Hardy and Bergman spaces ». In : *Recent advances in operator theory, operator algebras, and their applications*. T. 153. Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser, Basel, 2005, p. 157-167. ISBN : 3-7643-7127-7. DOI : 10.1007/3-7643-7314-8_9.

[78] K. de Leeuw et W. Rudin. « Extreme points and extremum problems in H_1 ». In : *Pacific J. Math.* 8 (1958), p. 467-485. ISSN : 0030-8730,1945-5844. URL : http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1103039893.

[79] S. Luo. « Corona theorem for the Dirichlet-type space ». In : *J. Geom. Anal.* 32.3 (2022), Paper No. 74, 20. ISSN : 1050-6926,1559-002X. DOI : 10.1007/s12220-021-00814-x.

[80] R. A. Martínez-Avendaño et P. Rosenthal. *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*. T. 237. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007, p. xii+220. ISBN : 978-0-387-35418-7.

[81] J. Mashreghi, M. Ptak et W. T. Ross. « The square roots of some classical operators ». In : *Studia Math.* 269.1 (2023), p. 83-106. ISSN : 0039-3223,1730-6337. DOI : 10.4064/sm210928-19-9.

[82] Y. Mohamed Egueh. « Vecteurs cycliques dans certains espaces de fonctions analytiques ». Theses. Université de Bordeaux, oct. 2023. URL : https://theses.hal.science/tel-04269761.

[83] N. K. Nikolski. *Treatise on the shift operator*. T. 273. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Spectral function theory, With an appendix by S. V. Hruščev [S. V. Khrushchëv] and V. V. Peller, Translated from the Russian by Jaak Peetre. Springer-Verlag, Berlin, 1986, p. xii+491. ISBN : 3-540-15021-8. DOI : 10.1007/978-3-642-70151-1.

[84] N. K. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1*. T. 92. Mathematical Surveys and Monographs. Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, p. xiv+461. ISBN : 0-8218-1083-9.

[85] E. Nordgren, P. Rosenthal et F. S. Wintrobe. « Invertible composition operators on H^p ». In : *J. Funct. Anal.* 73.2 (1987), p. 324-344. ISSN : 0022-1236. DOI : 10.1016/0022-1236(87)90071-1.

[86] E. A. Nordgren. « Composition operators ». In : *Canadian J. Math.* 20 (1968), p. 442-449. ISSN : 0008-414X,1496-4279. DOI : 10.4153/CJM-1968-040-4.

[87] H. Radjavi et P. Rosenthal. *Invariant subspaces*. Second. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003, p. xii+248. ISBN : 0-486-42822-2.

[88] S. Richter et C. Sundberg. « A formula for the local Dirichlet integral ». In : *Michigan Math. J.* 38.3 (1991), p. 355-379. ISSN : 0026-2285,1945-2365. DOI : 10.1307/mmj/1029004388.

[89] S. Richter et C. Sundberg. « Invariant subspaces of the Dirichlet shift and pseudocontinuations ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 341.2 (1994), p. 863-879. ISSN : 0002-9947,1088-6850. DOI : 10.2307/2154587.

[90] J. W. Roberts. « Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p, $0 < p < 1$ ». In : *Illinois J. Math.* 29.1 (1985), p. 25-38. ISSN : 0019-2082,1945-6581. URL : http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256045839.

[91] G. C. Rota. « Note on the invariant subspaces of linear operators ». In : *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* 8 (1959), p. 182-184. issn : 0009-725X. doi : 10.1007/BF02851030.

[92] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* English. Third printing. Masson, Paris, 1980, p. x+397. isbn : 2-225-48400-7.

[93] D. Sarason. « Doubly shift-invariant spaces in H^2 ». In : *J. Operator Theory* 16.1 (1986), p. 75-97. issn : 0379-4024.

[94] D. Sarason. *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk.* T. 10. University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, p. xvi+95. isbn : 0-471-04897-6.

[95] S. M. Seubert. « Semigroups of analytic Toeplitz operators on H^2 ». In : *Houston J. Math.* 30.1 (2004), p. 137-145. issn : 0362-1588.

[96] J. H. Shapiro. *Composition operators and classical function theory.* Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993, p. xvi+223. isbn : 0-387-94067-7. doi : 10.1007/978-1-4612-0887-7.

[97] J. H. Shapiro et A. L. Shields. « Unusual topological properties of the Nevanlinna class ». In : *Amer. J. Math.* 97.4 (1975), p. 915-936. issn : 0002-9327,1080-6377. doi : 10.2307/2373681.

[98] A. L. Shields. « Weighted shift operators and analytic function theory ». In : *Topics in operator theory.* T. No. 13. Math. Surveys. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, p. 49-128.

[99] S. Shimorin. « Complete Nevanlinna-Pick property of Dirichlet-type spaces ». In : *J. Funct. Anal.* 191.2 (2002), p. 276-296. issn : 0022-1236,1096-0783. doi : 10.1006/jfan.2001.3871.

[100] A. G. Siskakis. « Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review ». In : *Studies on composition operators (Laramie, WY, 1996).* T. 213. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 229-252. isbn : 0-8218-0768-4. doi : 10.1090/conm/213/02862.

[101] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş. « Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV ». In : *Acta Sci. Math. (Szeged)* 21 (1960), p. 251-259. issn : 0001-6969.

[102] B. Sz.-Nagy et al. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* enlarged. Universitext. Springer, New York, 2010, p. xiv+474. isbn : 978-1-4419-6093-1. doi : 10.1007/978-1-4419-6094-8.

[103] G. D. Taylor. « Multipliers on D_α ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966), p. 229-240. issn : 0002-9947,1088-6850. doi : 10.2307/1994621.

[104] V. A. Tolokonnikov. « Estimates in the Carleson corona theorem, ideals of the algebra H^∞, a problem of Sz.-Nagy ». In : *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 113 (1981). Investigations on linear operators and the theory of functions, XI, p. 178-198, 267. issn : 0373-2703.

[105] V. A. Tolokonnikov. « The corona theorem in algebras of bounded analytic functions ». English. In : *Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc.* 149 (1991), p. 61-95. issn : 0065-9290. doi : 10.1090/trans2/149/07.

[106] S. Treil. « Estimates in the corona theorem and ideals of H^∞ : a problem of T. Wolff ». In : t. 87. Dedicated to the memory of Thomas H. Wolff. 2002, p. 481-495. doi : 10.1007/BF02868486.

[107] A. Uchiyama. « Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions ». Preprint, UCLA. 1980.

[108] B. Wick. *Lecture 11 : The corona theorem for the multiplier algebra of $\mathcal{D}$.* 2011. url : https://internetanalysisseminar.gatech.edu/lectures_dirichlet.html.

[109] K. H. Zhu. « Analytic Besov spaces ». In : *J. Math. Anal. Appl.* 157.2 (1991), p. 318-336. issn : 0022-247X,1096-0813. doi : 10.1016/0022-247X(91)90091-D.