

Université de Lille

École doctorale MADIS-631

Unité de recherche Laboratoire Paul Painlevé

Thèse présentée par **Jérémy Zurcher**

Soutenue le **10 juin 2025**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Mathématiques**

Sur l'étude de certaines fonctionnelles d'EDPS et l'indépendance asymptotique avec la méthode de Stein–Malliavin

Thèse dirigée par Ciprian TUDOR

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Ivan NOURDIN	professeur à l'Université du Luxembourg	
	Guillaume POLY	MCF à l'Université de Rennes	
<i>Examineurs</i>	Mylène MAÏDA	professeure à l'Université de Lille	
	Christian HOUDRÉ	professeur au School of Mathematics of Georgia Institute of Technology	président du jury
<i>Directeur de thèse</i>	Ciprian TUDOR	professeur à l'Université de Lille	

Résumé

L'objectif de ce travail est l'utilisation et l'enrichissement de la méthode dite de NOURDIN–PECCATI, qui permet d'estimer des distances entre mesures de probabilités à l'aide du calcul de MALLIAVIN et de la méthode de STEIN.

D'abord, nous étudions *via* cette méthode des fonctionnelles liées à des solutions d'équations aux dérivées partielles stochastiques. Le premier travail dans cette direction est l'étude du temps de séjour spatial de l'équation des ondes stochastique additive unidimensionnelle, avec dépendance polynomiale entre le temps et la fenêtre d'observation. Nous établissons des Théorèmes Centraux Limites lorsque le temps d'observation est petit par rapport à la fenêtre, et observons un phénomène de saturation pour des temps grands, en établissant un Théorème Limite vers une loi de RADEMACHER. Le deuxième travail dans cette direction est l'étude des variations quadratiques de la solution de l'équation des ondes multiplicative. Ces variations quadratiques ont déjà été étudiées pour d'autres équations, où on observe une convergence au moins en probabilité. Nous montrons que les variations quadratiques convergent en probabilité. Cette convergence permet de construire un estimateur pour le paramètre de diffusion de cette équation.

Dans un deuxième temps, nous enrichissons la méthode. Suivant une idée de PIMENTEL, nous développons une méthode de STEIN pour l'étude d'un couple de variables aléatoires, dont on compare sa loi à celle du même couple, mais supposé indépendant. Nous détaillons des bornes de STEIN dans le cas où l'une des composantes est une variable gaussienne, ou un vecteur gaussien, ou une variable suivant une loi Gamma. Nous appliquons cette théorie à l'étude de l'indépendance asymptotique entre la moyenne spatiale de solutions de certaines ÉDPS et une évaluation de la solution, lorsque le domaine où on effectue la moyenne remplit tout l'espace.

Abstract

The goal of this work is about using and extending the so-called Nourdin–Peccati method, allowing to estimate distances between probability measures, by using the Malliavin calculus and Stein's method.

First, we study thanks to this method some functionals linked to some solutions of stochastic partial differential equations. The first work in this direction is the study of the spatial sojourn time of the additive one-dimensional stochastic wave equation, with polynomial dependence between the time and the window observation. We establish some Central Limit Theorems when the time of observation is small with respect to the window and we observe a saturation phenomenon for big times, by proving a Limit Theorem toward a Rademacher law. The second work in this direction is the study of quadratic variations of the solution of the multiplicative stochastic wave equation. Those quadratic variations were studied for other equations in the past, where each time, a convergence, at least in probability, were proved. We show here that the quadratic variations converges in probability, leading to the construction of an estimator of the diffusion parameter of this equation.

In the second part, we enriches this method. Following an idea from Pimentel, we expand a Stein method for the study of couple of random variables, from which we compare its law with the law of the same couple but supposed independent. We exhibit some Stein bounds in the case where one of the components is a Gaussian variable, or a Gaussian vector, or a variable following a Gamma distribution. We apply this theory to the study of asymptotic independence between the spatial average of the solution of some SPDEs and an evaluation of the solution, where the domain where we compute the average is covering the whole space.

Remerciements

Je fais partie des personnes qui adorent lire une thèse avant tout pour lire les remerciements. Avant de lire des mathématiques de pointe développées pendant approximativement trois ans, il me semble toujours nécessaire de comprendre la trajectoire et l'état d'esprit de l'auteur. Il me semble que rien n'est plus concret que d'imaginer l'être humain qui écrit sa thèse, au delà de son simple statut de doctorant-e. Alors, quand il est à mon tour d'écrire mes remerciements, je me rends vite compte de la vaste liste de personnes qui ont façonné mon parcours, et qui, toutes, m'ont appris des leçons qui façonnent l'homme qui rédige ces quelques lignes.

Je suis né à Fourmies. Mes parents n'étaient pas chercheurs, ni ingénieurs, ni enseignants. Je n'étais pas programmé à devenir docteur en mathématiques. Depuis tout petit, malgré un parcours scolaire relativement satisfaisant, jamais on ne m'a dit que je serai à ce stade, aux portes d'un métier si inconnu quand on est loin de tout. En rédigeant ces mots, je me rends compte de la chance que j'ai de faire de mon métier la recherche et l'enseignement en mathématiques. J'espère que ce manuscrit de thèse permet de donner un exemple de réussite à tout ceux dont la vie semble leur ôter toute chance d'ambition. Mon ambition, quant à elle, consiste à donner mes remerciements et ma gratitude à toutes les personnes listées dans la suite, avec des oublis hélas inévitables bien qu'involontaires.

À Ciprian, mon directeur de thèse. Il a fallu à peine dix minutes en visio, pendant que je recherchais une bourse de thèse pendant mon M2 à Rennes, pour me rendre compte que j'avais réussi à contacter l'encadrant parfait. J'ai pu apprendre beaucoup, suivre ses projets, mais tout en gardant une autonomie qui m'est si précieuse. Je n'oublie pas les différents repas qu'on a pu faire au tour de quelques pintes dans les différentes villes auxquelles nous avons voyagé, en débattant si Messi mérite encore une fois le ballon d'or ou non.

Aux membres de mon jury, par ordre alphabétique, Christian HOUDRÉ avec qui je m'apprête à partir pour une nouvelle aventure singulière à Atlanta, Mylène MAÏDA qui m'a aidé à m'intégrer au sein de l'équipe de Probabilités et Statistiques du laboratoire, Ivan NOURDIN pour son travail de rapporteur sur ce document, et Guillaume POLY, que je remercie aussi pour son investissement dans son travail de rapporteur, mais aussi pour ses enseignements en Probabilités à l'Université de Rennes qui ont été décisifs pour mon choix de parcours professionnel. Je tiens par ailleurs à remercier Jean-Christophe BRETON, qui n'est pas dans mon jury, mais qui a été membre extérieur pour mon comité de suivi individuel de thèse, et qui a toujours été disponible pour m'aider pour trouver un post-doc et discuter avec moi de maths ou d'autres sujets.

À Didier POTVIN et Serge VARJABÉDIAN, respectivement professeurs pendant mon lycée à Fourmies, et pendant ma troisième année de prépa au lycée FAIDHERBE. Didier a su tout de suite me guider vers la bonne direction, toujours avec pédagogie et humilité. Serge a su me redonner une confiance que j'avais totalement perdu à ce moment de ma vie, m'envoyant ainsi à l'ENS à Rennes. Merci à vous deux, vous êtes des modèles d'enseignement, de pédagogie, de confiance donnée aux étudiants que je poursuivrai toute ma vie.

À Yassine NACHIT, qui a su jouer son rôle de grand frère de thèse à merveille. J'ai appris beaucoup grâce à nos discussions. Merci pour les références qui m'ont aidé à rédiger ce manuscrit. Ta gentillesse est une qualité inspirante, et je sais que je pourrais compter sur toi dès que possible.

Je souhaite aussi remercier Charles-Phillippe DIEZ et Solesne BOURGUIN. Pour Solesne, nos quelques rencontres à Bucarest et à Paris m'ont été bénéfiques pour comprendre les rouages du métier, au moment où je prépare mes bagages pour les États-Unis. Pour Charles, son soutien durant mon stage de M2 peu avant sa soutenance m'a été nécessaire pour bien cerner mon domaine de recherche actuel. Je suis reconnaissant d'avoir pu rencontrer vos deux brillants esprits.

À mon ami François BACHER, qui n'a cessé, même après son départ pour Dijon, de me questionner, et de répondre de lui-même sur les nombreux sujets autour desquels il gravite. Au delà de ces interactions, je retiens son soutien, et son aide sans condition dès qu'on la lui demande, avec ses blagues dont il a le charme, surtout lorsqu'elles concernent certaines heures de la journée.

À ma grande sœur de thèse Julie GAMAIN, qui est la première personne que j'ai rencontré après

mon directeur de thèse, et qui a tout de suite su m'aiguiller au sein du laboratoire. Notre amitié a dépassé le simple stade d'échanges mathématiques, et nous sommes désormais commentateurs officiels des matchs de l'équipe de France. Merci pour ton temps pris pour relire ma thèse.

À mon très grand ami Jérôme MILOT, pour qui un paragraphe de remerciement ne suffirait pas pour comprendre son impact dans ma vie de thésard. Il y aura toujours un matelas chez moi pour toi pour une soirée snooker, et une place dans ma voiture pour aller à Ostende. Par contre, une réclamation est à faire : au moment où je rédige ces lignes, l'OM n'a systématiquement jamais gagné quand on l'a regardé à deux.

À ma chère Emma WESCHLER, future patronne du bureau 12. J'espère que tu continueras de faire rayonner le bureau avec ton esprit fin, et ta manière si particulière de t'exprimer qui te rend unique. Le dinosaure restera toujours près de moi, où que je sois, de sorte que tu fasses partie du voyage, même s'il m'emmène à l'autre bout du monde. Merci de m'avoir appris à mettre mes pieds dans certains plats.

Au chef du bureau quantique Théo DETURCK, spécialiste des pauses stratégiques. Je te souhaite de rester près de chez toi dans la suite, même si j'ambitionne toujours que tu m'accompagnes à Atlanta.

À Ivan DOUBOVIK, grand maître de l'escalade. Je te souhaite de poursuivre les mathématiques que tu aimes. J'ai appris grâce à ton esprit brillant beaucoup de choses, même si tu ne t'en es pas toujours rendu compte. Je n'ai aucun doute sur les succès que tu obtiendras dans ta carrière.

À mon camarade Antonin ASSOUN, militant de première heure pour les causes les plus justes. Je n'aime pas vraiment les catégories, mais j'ai toujours apprécié ta pédagogie pour différents sujets de la vie. J'espère encore reprendre beaucoup de pintes en ta compagnie.

À Matthew CELLOT, dont le flegme et l'élégance m'ont toujours impressionné. J'ai hâte de te raconter les États-Unis et de comparer nos visions sur ce pays.

À Rodrigo THOMAZ DA SILVA, le plus polyglotte de notre groupe. J'attends déjà notre prochaine discussion à propos de nos avancées sur nos jeux vidéos respectifs.

À Paul POTTIER, dont nos rencontres furent de courtes de durées, mais toujours saupoudrées de jeux de mots et blagues dont tu as le secret. Cela a été un plaisir de partager nos routes respectives.

À tout le groupe 1236, ne doutez jamais de mon amour le plus sincère.

À mon acolyte depuis tant d'années Christopher LANGRENEZ. La prépa ne fut pas toujours simple, mais elle aurait été encore plus difficile sans ta présence. Même si tu as sans doute ressenti une sorte d'exil durant tes trois années rennaises, sache que j'ai apprécié le fait qu'on soit presque voisins. J'ai toujours dans ma tête tes gauffres dont tu as le secret. Je ne le sais pas encore au moment où j'écris ces mots, mais j'espère en avoir pour le pot ! Je te souhaite de poursuivre dans la direction qui te rendra heureux, que cela soit en mathématiques où ton esprit éclairant serait à sa place, ou non, et dans tous les cas, près de ta famille.

À mon ami Paul MAURER, avec qui j'ai la grande chance de pouvoir travailler sur un super projet. Je n'oublierai pas la semaine à Nice, dont l'élaboration de la très réussie galette des rois (et la présence de tes voisins). Tes recettes de cuisine m'inspirent quotidiennement, et mes rares succès culinaires te sont dus.

À tous les doctorants du laboratoire. J'ai adoré vous réunir toutes les semaines, avec Christopher, pour une séance de goûter toujours très appréciée (mais pas toujours pour les personnes des bureaux environnants) ((et parfois pour des exposés)). J'aimerais aussi remercier les personnes présentes pour faire des foots !

Aux sites Internet LibGen et SciHub, qui m'ont permis d'une part d'avoir l'Agrégation il y a un moment désormais, et pour mon métier de recherche actuellement.

À mes amis Antoine DEQUAY et Charles PINÇON, qui m'ont été très précieux à des moments où j'en avais besoin. Je n'ai pas toujours exprimé ma gratitude de manière explicite, sachez que je ne vous remercierai jamais assez. Cela a été un plaisir de vous écouter, et de discuter avec vous, j'espère sincèrement reprendre ces discussions dans l'avenir.

À ma mère Sylvie et mon frère Stéphane. Je n'oublierai jamais d'où je viens, et vous avez joué un rôle majeur dans la personne que je suis actuellement. À Kévin, qui peut décomposer chaque étape

de ma vie sous la forme d'une frise chronologique précise. Tu ne seras jamais très loin, même en partant à l'autre bout de la planète, il est inconcevable d'imaginer ma vie sans toi. À ma grande sœur Claudine, son mari Yahya, à mes nièces (par âge décroissant) Maryam, Assia, Sarah, Hafza et à mon neveu Zakaria. Je souhaite sincèrement ne jamais vous perdre de vue, malgré mon avenir qui semble serpenter entre différents coins du globe.

Je dédie enfin ce manuscrit à mon père Jacques ZURCHER, qui me disait régulièrement que mes maths étaient du chinois, toujours avec une pointe de fierté à me voir réussir mes projets. J'aimerais aussi le dédier à mon grand-père Jean ZURCHER, qui restera un exemple à suivre dans ma vie. Il était aimé, gentil, serviable, et très intelligent. J'aurais aimé avoir la chance de discuter encore maintenant que j'ai un peu grandi dans la vie. Je ne doute pas que vous auriez été présents pour ma soutenance, et qu'on aurait bien rigolé sur tous les protocoles que cela exige.

Table des matières

Introduction	xiii
La méthode de Nourdin–Peccati ou la renaissance d’un calcul différentiel	xiii
Étude de fonctionnelles d’équations aux dérivées partielles stochastiques	xx
Méthode de Nourdin–Peccati indépendante	xxiv
 Première partie : Méthode de Stein–Malliavin	 1
I Calcul de Malliavin	3
1 Mouvement brownien et espace canonique	3
2 Intégrales stochastiques de Wiener	7
2.1 Processus isonormal	7
2.2 Intégrales stochastiques multiples	7
2.3 Polynômes d’Hermite	10
3 Dérivée de Malliavin et intégrale de Skorohod	14
3.1 Dérivée de Malliavin	14
3.2 Opérateur de divergence	18
4 Opérateurs d’Ornstein–Uhlenbeck	21
II Méthode de Stein	25
1 Approximation gaussienne	25
2 Approximation par une loi Gamma	28
2.1 Motivations	28
2.2 Lemme et équation de Stein	28
2.3 Historique de l’estimation de la solution	33
2.4 Estimation en distance de Wasserstein	35
3 Approximation gaussienne multidimensionnelle	36
4 Applications de la méthode de Stein dans différents domaines	38
4.1 Mathématiques appliquées : Approximation de lois liées au modèles des deux îles de Wright–Fisher	38
4.2 Statistiques : Estimation paramétrique de la loi de Fisher–Bingham	39
4.3 Réseaux de neurones : Approximation de champs aléatoires par des champs gaussiens	40
III L’idée de Nourdin et Peccati : fusion des deux concepts	43
1 Théorème du Quatrième Moment	43
1.1 Historique du Théorème du Quatrième Moment	44
1.2 Première démonstration	44
1.3 L’apport du calcul de Malliavin	45
2 Extensions du Théorème du Quatrième Moment	46
2.1 Cas multidimensionnel	46
2.2 Cas Gamma	47
2.3 Chaos de Markov et sommes homogènes	49
3 Quelques résultats récents autour de cette méthode	51
3.1 Surconvergence dans les chaos de Wiener	51
3.2 Théorème de Donsker en distance de Wasserstein	53
3.3 Ergodicité et TCL pour la moyenne spatiale de l’équation des ondes en grande dimension	55

Deuxième partie : Étude de fonctionnelles d'équations aux dérivées partielles stochastiques	59
IV Petit guide des ÉDPS	61
1 Bruits et solution au sens évolutif	62
1.1 Noyau de Green	62
1.2 Drap brownien	62
1.3 Solution au sens évolutif (<i>mild</i>) dans le cas du bruit blanc	63
1.4 Cas non additif (ou non linéaire)	64
1.5 Bruit coloré	65
2 Équation de la chaleur stochastique	66
2.1 Cas linéaire, blanc et à domaine libre	66
2.2 Cas d'un bruit multiplicatif	67
2.3 Comment traiter les dimensions supérieures?	68
3 Équation des ondes stochastique	69
V Temps de séjour des ondes	71
1 Résultat principal	72
1.1 Équation des ondes et temps de séjour	72
1.2 Temps de séjour spatial avec temps variable	73
2 Décomposition en chaos et normalisations	74
2.1 Temps long	76
2.2 Temps moyen	76
2.3 Temps court	76
2.4 Résumé de la discussion	77
3 Cas du temps long : Théorème Limite vers une loi de Rademacher	78
4 Temps court : Théorème Central Limite	80
4.1 Convergence des restes du développement en chaos	80
4.2 Convergence des sommes tronquées	81
4.3 Convergence des écarts-types	85
4.4 Démonstration du Théorème V.1.3	87
VI Estimation du paramètre de diffusion dans l'équation des ondes multipli-	89
cative	
1 Préliminaire sur l'équation des ondes stochastique	90
2 Variation quadratique temporelle	94
2.1 Convergence en moyenne des termes avec des petits intervalles temporels	96
2.2 Convergence quadratique provenant de l'orthogonalité	97
2.3 Convergence quadratique provenant de l'adaptabilité	99
2.4 Convergence du terme principal	102
2.5 Démonstration du Théorème VI.2.3	104
3 Application à l'estimation du paramètre de diffusion	105
4 Quelques résultats liés au calcul de Malliavin	106
Troisième partie : Méthode de Nourdin–Peccati indépendante	109
VII Méthode de Nourdin–Peccati pour les lois normales unidimensionnelles	111
1 Méthode de Stein indépendante	112
1.1 Lemme de Stein indépendant	112
1.2 Équation différentielle associée	113
1.3 Bornes en distance de Wasserstein	114

2	Étude dans le cas dérivable	115
3	Cas particulier des chaos de Wiener.	116
3.1	Pour un chaos fixe.	116
3.2	Cadre d'un développement en chaos infini	120
3.3	Comparaison avec le résultat de Nualart, Nourdin et Peccati	124
4	Application au Théorème de Breuer–Major.	126
4.1	Contexte	126
4.2	Théorème Limite indépendant	127
	VIII Théorèmes limites de la loi jointe entre solutions d'ÉDPS et leurs moyennes spatiales	133
1	Préliminaires et buts de ce chapitre.	135
1.1	Bruit gaussien et intégrale de Walsh.	135
1.2	Convergence des moyennes spatiales dans les équations de la chaleur et des ondes	136
1.3	Résultats	138
2	Une borne de Stein fondamentale	139
3	Démonstrations.	140
3.1	Démonstration du Théorème VIII.1.5.	140
3.2	Démonstration du Théorème VIII.1.6.	142
4	Perspectives	148
4.1	Convergence avec un nombre fini d'évaluations	149
4.2	Convergence des processus sur un ensemble fixe	149
4.3	Convergence des processus sur un ensemble dépendant de la variable d'observation	149
	IX Méthode de Nourdin–Peccati pour les lois normales multidimensionnelles 151	
1	Méthode de Stein indépendante pour la loi normale multidimensionnelle	152
1.1	Lemme de Stein indépendant	152
1.2	Étude de la solution de l'équation de Stein	154
1.3	Borne de Stein.	156
2	Application au cas dérivable.	157
3	Théorèmes Limites associés	158
3.1	Chaos de Wiener.	159
3.2	Somme finie de chaos	162
3.3	Cas général	165
4	Application au Théorème de Breuer–Major.	167
4.1	Contexte	167
4.2	Théorème Limite indépendant multidimensionnel	169
5	Application à un problème de matrices aléatoires	170
5.1	Contexte	170
5.2	Influence des données sur la matrice de Wishart	171
6	Application à l'estimation de paramètres dans l'équation des ondes stochastique	176
6.1	Contexte	176
6.2	Influence du nombre de données.	177
	X Méthode de Nourdin–Peccati indépendante pour la loi Gamma.	181
1	Lemme de Stein indépendant pour la loi Gamma	182
2	Équation de Stein associée	183
3	Bornes dans le cas dérivable.	185
4	Cas particulier des chaos de Wiener.	186
5	Deux illustrations du Théorème X.4.3	190
5.1	Moyenne asymptotique d'un produit tensoriel	190
5.2	Orthogonalité asymptotique en moyenne	193

Annexes	197
A Sur la notion d'indépendance asymptotique	199
B Une preuve combinatoire de la formule de linéarisation des polynômes d'Hermite	205
1 Appariement dans le graphe complet	206
2 Lien entre appariement et polynômes d'Hermite	207
2.1 Démonstration en comptant des chemins	207
2.2 Démonstration <i>via</i> les espèces combinatoires	211
3 Démonstration de la formule produit	214

Introduction

Cette thèse a été l'occasion de développer de nouveaux résultats dans le domaine des Probabilités qu'on nomme *méthode de STEIN–MALLIAVIN*, ou nommée comme dans le reste de cette thèse *méthode de NOURDIN–PECCATI*. Le lecteur désireux de comprendre les rouages de ce domaine pourra se diriger vers la première partie. Résumons en quoi consiste cette méthode.

La méthode de Nourdin–Peccati ou la renaissance d'un calcul différentiel

Le Théorème Central Limite et ses nombreuses questions

La méthode de NOURDIN–PECCATI s'inscrit dans le domaine des Théorèmes Limites. Le plus célèbre d'entre eux est bien entendu le *Théorème Central Limite*. On invite les lecteurs spécialistes ou non à regarder l'excellent [Fis12] pour une vision globale de l'historique de ce Théorème, qui navigue entre Pierre-Simon LAPLACE avec ses 97 mesures de facilités d'inclinaison d'orbites (regarder [Lap10]), entre la formalisation de la loi des grands nombres par Andreï KOLMOGOROV (regarder [Kol30]), l'introduction de la fonction caractéristique de Paul LÉVY et son théorème d'inversion (regarder [Lév22]), permettant une preuve concise et simple du Théorème, sans oublier bien entendu la théorie des erreurs de Carl Friedrich GAUSS ([Gau09]). L'énoncé le plus célèbre est le suivant.

Théorème i : (Le Théorème Central Limite) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ indépendante, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On note $\bar{X}_n \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ la moyenne empirique des $(X_n)_n$. Alors

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]}{\sigma[\bar{X}_n]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

L'évocation du Théorème Central Limite fait alors référence à l'énoncé précédent. Néanmoins, pour une suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ quelconque, on dit qu'elle vérifie un Théorème Central Limite si $\frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sigma[X_n]}$ converge en loi vers une gaussienne lorsque $[n \rightarrow \infty]$. On étudie, dans le cas des processus réels $(X_t, t \geq 0)$, la limite lorsque t tend par exemple vers ∞ . On étudie aussi des cas multidimensionnels, c'est-à-dire qu'on considère une famille de vecteurs aléatoires. On peut même faire encore plus fort en considérant non pas des convergences de variables aléatoires réelles, mais des convergences de variables aléatoires à valeurs dans des espaces de fonctions, c'est-à-dire des convergences de processus stochastiques. Un exemple célèbre qu'on évoque comme un équivalent fonctionnel du Théorème Central Limite est le Théorème de DONSKER, énoncé en 1952 par Monroe D. DONSKER dans [Don52].

Théorème ii : (Théorème de DONSKER, 1952) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Considérons une suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Pour $\delta > 0$, on considère $S_\delta = (S_\delta(t), t \geq 0)$ le processus défini comme prolongement affine par morceaux de la marche aléatoire de pas δ et de hauteur donnée par la suite $(X_n)_{n \geq 0}$, c'est-à-dire que $S_\delta(0) = 0$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement et pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement

$$S_\delta(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} X_k + \left(\frac{t}{\delta} - \left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor \right) X_{\lfloor t/\delta \rfloor + 1}.$$

Alors, au sens de la norme de la convergence uniforme sur tout compact dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$,

$$\left(\frac{S_\delta(t) - \mathbb{E}[S_\delta(t)]}{\sigma[S_\delta(t)]}, t \geq 0 \right) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0^+]{\text{loi}} (B_t, t \geq 0),$$

où B est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}_+$.

Ce Théorème peut-être vu comme le Théorème Central Limite fonctionnel. De manière générale, pour une famille de processus $(X_n, n \geq 1)$, on dit qu'il vérifie un Théorème Central Limite fonctionnel s'il existe un espace de fonction ainsi qu'une topologie sur laquelle on a convergence en loi de la suite de processus $(X_n, n \geq 1)$ vers un processus gaussien, non nécessairement un mouvement brownien. La démonstration proposée par [KS98] du Théorème de DONSKEER utilise d'ailleurs un couplage utilisé très souvent encore actuellement puisqu'il s'agit de montrer d'une part la convergence des lois finies-dimensionnelles, qui est principalement une conséquence du Théorème Central Limite multi-dimensionnel et de la propriété d'étroitesse (ou de tension, ces deux mots sont synonymes dans ce contexte) vérifiée par la famille de processus $(S_\delta, \delta > 0)$. On peut établir cette tension *via* le critère de KOLMOGOROV, statuant qu'une famille de processus $(X_i, i \in I)$ est tendue dès lors qu'il existe $a, b > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $i \in I$ et $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\left| X_i(t) - X_i(s) \right|^a \right] \leq C |t - s|^{1+b}.$$

Revenons au Théorème Central Limite classique. Une question naturelle dès qu'on cherche à s'intéresser aux Théorèmes Limites consiste à se demander si on dispose d'une éventuelle vitesse de convergence. Dans le cadre d'une convergence en loi comme présentée ici, déterminer la vitesse de convergence dans le TCL consiste à mesurer à quel point la loi de la suite de variables considérées est proche de la loi normale standard. On peut imaginer bien des façons de mesurer l'écart entre deux mesures de probabilités : on peut regarder l'écart entre fonctions de répartition, l'écart entre fonctions caractéristiques, l'écart entre les moments, l'écart entre toutes les valeurs prises par ces mesures, ou uniquement sur une partie qui engendre la tribu. Cela n'est pas exhaustif. Toutes ces façons de mesurer l'écart entre deux mesures donnent naissance à différentes distances non nécessairement équivalentes. Une réponse à la question de la vitesse de convergence est donnée par le Théorème de BERRY–ESSEEN (énoncé indépendamment par Andrew C. BERRY en 1941 dans [Ber41] et en 1942 par Karl ESSEEN dans [Ess42]), qui répond à la question en distance dite de KOLMOGOROV.

Théorème iii : (Théorème de BERRY–ESSEEN, 1941-1942) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère sur cet espace une suite de variables aléatoires réelles $(X_n, n \geq 1)$ indépendantes et identiquement distribuées, telle que $\mathbb{E}[|X_1|^3] < \infty$. On note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique de la suite $(X_n, n \geq 1)$. Alors il existe une constante $C > 0$ universelle (ne dépendant pas de la suite $(X_n, n \geq 1)$) telle que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]}{\sigma[\bar{X}_n]} \leq t \right) - \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{C \mathbb{E}[|X_1|^3]}{\sqrt{n}}.$$

Avec les exemples que nous venons d'évoquer, nous venons de décrire les principaux enjeux dans le domaine des Théorèmes Limites. Si on dispose d'une famille de variables aléatoires, ou de processus, étudier un comportement asymptotique de cette famille consiste d'abord en l'étude d'une loi des grands nombres (dans notre exemple, cela signifie montrer que la moyenne empirique converge vers l'espérance), puis s'il existe un Théorème Central Limite (les variables centrées réduites convergent vers une loi limite, souvent gaussienne, parfois autre chose), et si on dispose d'une vitesse de convergence (en comparant par exemple des fonctions de répartition entre la loi de la famille de variables et la loi limite). On peut aussi se demander l'existence d'une limite dans le sens des processus, par exemple en considérant une marche aléatoire de pas de plus en plus petit composée de la famille de variables qu'on se donne.

La méthode de Stein : une technique pour démontrer les TCL

Ces questions peuvent être traitées grâce à la méthode de STEIN. Cette méthode permet d'estimer des distances entre mesures de probabilités, lorsqu'elles sont définies de manière fonctionnelle. Si on considère $\mathcal{A}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{A}$ est *séparante* si toutes mesures μ et ν réelles boréliennes telles que pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu$ sont égales. Dans ce cas, la méthode de STEIN permet d'établir une borne entre deux lois pour une distance $\mathbf{d}$ définies sur l'ensemble des couples de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ ou plus généralement $\mathbb{R}^d$ (et même sur des variétés encore plus généralement) par

$$\mathbf{d}(\mu, \nu) \triangleq \sup_{h \in \mathcal{A}} \left| \int_{\mathbb{R}} h \, d\mu - \int_{\mathbb{R}} h \, d\nu \right|.$$

Il s'agit bien d'une distance sur l'ensemble des mesures de probabilités dès lors que $\mathcal{A}$ est une classe séparante, et que les intégrales sont bien définies pour tout h dans $\mathcal{A}$.

Détaillons un peu les rouages de cette méthode. Considérons une loi cible μ_0 . Il s'agit souvent de la loi normale standard uni ou multi dimensionnelle, ou d'une loi Gamma, ou d'une loi de POISSON, ou d'autres types de loi usuelle. L'exemple originel est la loi normale (regarder [Ste86]). Pour cette loi, on dispose d'une caractérisation fonctionnelle simple qu'on appelle *lemme de STEIN*. Une mesure de probabilité μ suit la loi normale si et seulement si pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que les intégrales suivantes existent

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, \mu(dx).$$

Notons $\mathcal{L}^\circ$ l'opérateur différentiel donné par $\mathcal{L}^\circ f = f' - xf$. Le lemme de STEIN statue qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi normale standard si et seulement si pour tout f telle que l'espérance suivante existe, $\mathbb{E}[\mathcal{L}^\circ f(X)] = 0$. Pour beaucoup de lois usuelles, on peut déterminer un opérateur $\mathcal{L}$ semblable caractérisant la loi de la même manière. Pour une loi cible μ_0 , supposons qu'on dispose d'un opérateur $\mathcal{L}$ tel que X suit μ si et seulement si pour toute fonction f assez régulière, $\mathbb{E}[\mathcal{L}f(X)] = 0$. Le principe de la méthode de STEIN est le suivant. Soit $h \in \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une classe séparante induisant une distance $\mathbf{d}$ sur l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$. On considère alors l'équation différentielle suivante, d'inconnue f .

$$\mathcal{L}f(x) = h(x) - \int_{\mathbb{R}} h(y) \, \mu_0(dy).$$

Cela signifie alors que pour toute mesure de probabilité μ telle que tout $h \in \mathcal{A}$ y est intégrable, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) \, \mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} h(x) \, \mu_0(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(h(x) - \int_{\mathbb{R}} h(y) \, \mu_0(dy) \right) \, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(x) \, \mu(dx).$$

Ainsi, si on suppose que toute solution de l'équation différentielle appartient à un autre espace de fonction $\mathcal{B}$, cela signifie qu'on dispose de la borne suivante pour $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}(\mu, \mu_0) \leq \sup_{f \in \mathcal{B}} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(x) \, \mu(dx) \right|.$$

Cette estimation est le cœur de cette méthode. L'enjeu est donc de déterminer un opérateur différentiel (discret ou continu, avec un « ou » non exclusif) $\mathcal{L}$ qui caractérise la loi cible de manière fonctionnelle, puis de déterminer une classe $\mathcal{B}$ de solutions de l'équation de STEIN qui soit la plus précise possible afin de manipuler la borne obtenue. Tout cela dépend bien entendu de la classe séparante $\mathcal{A}$ choisie initialement, donc de la distance $\mathbf{d}$ avec laquelle on souhaite travailler.

Le Théorème de BERRY–ESSEEN peut se démontrer grâce à la méthode de STEIN. Regardez [NP12a] pour une démonstration complète. Le théorème est énoncé en distance de KOLMOGOROV, c'est-à-dire que la classe séparante est l'ensemble des fonctions indicatrices de la forme $\mathbf{1}_{(-\infty, t)}$, avec $t \in \mathbb{R}$. On résout l'équation différentielle

$$f'(x) - xf(x) = \mathbf{1}_{(-\infty, t)}(x) - \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}}.$$

Hélas, les solutions de cette équation différentielle n'ont pas un comportement facilement manipulable (entendre par-là fonction bornée, tout comme leurs dérivées). On fait alors une approximation de $\mathbf{1}_{(-\infty, t)}$ par des fonctions continues pour la norme $L^1(\text{Leb})$ (donnée pour f intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de LEBESGUE par $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$), où l'équation de STEIN donne cette fois-ci des bornes intéressantes. Le reste du travail consiste bien sûr à montrer que cette approximation de la fonction indicatrice permet une bonne approximation de la distance de KOLMOGOROV.

La méthode de STEIN est l'objet du Chapitre II. On formalise dans ce chapitre tout ce qu'on vient de développer. On étudie les bornes classiques pour la gaussienne en distance dite de WASSERSTEIN, en dimension quelconque. On propose aussi une présentation complète de l'étude d'une borne de STEIN pour la loi Gamma, en distance de WASSERSTEIN. On développe le lemme associé, tout comme l'équation différentielle. On verra que la résolution complète de ce problème est en fait récent, puisque c'est seulement en 2018 dans [DP18] qu'on dispose d'une borne vraiment satisfaisante. Enfin, on justifie l'intérêt actuel de cette méthode avec une sélection de quelques articles de 2023 et 2024, non relié aux sujets que nous traitons dans cette thèse.

Polynômes de variables gaussiennes : chaos de Wiener

Focalisons-nous sur une étude particulière. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une suite variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(W_n, n \geq 1)$ de gaussiennes centrées réduites. On s'intéresse aux polynômes en ces variables. Pour $n \geq 1$, notons $\mathfrak{P}_n$ l'ensemble des polynômes à plusieurs variables de degré n évalués en les W_n , c'est-à-dire l'espace vectoriel réel engendré par les $\prod_{k \geq 1} W_k^{\alpha_k}$ avec pour tout $k \geq 1$, $\alpha_k \in \mathbb{N}$ vérifiant $\sum_{k \geq 1} \alpha_k = n$. Notons $\mathfrak{P}$ l'union de tous les $\mathfrak{P}_n$. Par une méthode de GRAM-SCHMIDT, on peut décomposer $\mathfrak{P}$ comme somme directe d'espaces $\mathfrak{H}_n^0$, qui sont les espaces vectoriels engendrés par l'ensemble des variables aléatoires de $\mathfrak{P}$ de la forme $\prod_{k \geq 1} H_{\alpha_k}(W_k)$, où les α_k sont des entiers naturels vérifiant $\sum_{k \geq 1} \alpha_k = 1$ et pour $p \geq 1$, H_p désigne le p -ème polynôme d'HERMITE. La suite des polynômes d'HERMITE constitue une base orthonormée de $L^2(\mathcal{N}(0, 1))$. Enfin, en tant que sous-ensemble de $L^2(\mathbb{P})$, considérons $\mathfrak{H}_n$ la fermeture pour la norme $L^2(\mathbb{P})$ de $\mathfrak{H}_n^0$. À partir de la décomposition de toute fonction de $L^2(\mathcal{N}(0, 1))$ dans la base hilbertienne des polynômes $(H_p, p \in \mathbb{N})$, on dispose en fait d'une décomposition remarquable dans $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par la suite $(W_n)_{n \geq 1}$, puisqu'en fait $L^2(\mathcal{G})$ est somme hilbertienne de tous les $\mathfrak{H}_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Les espaces $(\mathfrak{H}_n, n \in \mathbb{N})$ constituent des briques élémentaires pour construire des variables dans $L^2(\mathcal{G})$, et sont nommées *chaos de WIENER*.

On cherche à étudier des Théorèmes Centraux Limites dans les chaos de WIENER. Plus précisément, étant donnée $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires dans un chaos $\mathfrak{H}_q$ fixé, quelles sont les conditions pour que la suite $(X_n, n \geq 1)$ vérifie un Théorème Central Limite ? Au risque de divulguer la suite au lecteur non initié, le Théorème du Quatrième Moment répond à cette question. Le nom du Théorème lui-même divulgue la condition phare pour avoir un TCL. En effet, dans $\mathfrak{H}_q$, si nous savons déjà que la suite des moments d'ordre 2 de $(X_n, n \geq 1)$ converge vers 1, alors la suite $(X_n, n \geq 1)$ converge vers la loi normale standard *si et seulement si* la suite de ses moments d'ordre 4 converge vers 3, c'est-à-dire le moment d'ordre 4 de $\mathcal{N}(0, 1)$. Les trois noms associés à ce Théorème sont David NUALART, Giovanni PECCATI (qui ont démontré ce Théorème avec des méthodes d'analyse stochastique, regarder [NP05]) et Ivan NOURDIN (qui, avec PECCATI, ont démontré ce Théorème grâce à la méthode de STEIN, regarder [NP09b]). Ce Théorème est l'objet du Chapitre III. Il est encore aujourd'hui assez difficile de saisir les détails de ce Théorème. On explique dans ce Chapitre les évolutions qui lui sont liées.

Néanmoins, si l'énoncé est en lui-même est surprenant, la méthode employée par NOURDIN et PECCATI à partir de la méthode de STEIN est celle qui bouleverse le domaine. Cette présente thèse n'est qu'une planète, voire un satellite ou un astéroïde, au sein du Big Bang qu'a été cette démonstration. Pour la comprendre, nous devons expliquer comment exprimer autrement les éléments d'un chaos de WIENER. Il s'agit de l'intégrale stochastique de WIENER, qui permet de donner une isométrie entre $\mathfrak{H}_q$ et l'ensemble des fonctions (déterministes) de $L^2(0, 1)^q$ qui sont invariantes par permutation des coordonnées. En fait, si $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ est un mouvement brownien standard, défini sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ alors tout

élément de $\mathfrak{H}_q$ s'écrit $\mathbb{P}$ -presque sûrement comme l'intégrale itérée suivante

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{q-1}} f(t_1, \dots, t_q) dB_{t_q} \cdots dB_{t_2} dB_{t_1} \triangleq I_q(f),$$

où $f \in L^2(0, 1)^q$ est symétrique, c'est-à-dire qu'elle vérifie que pour presque tout $x_1, \dots, x_q \in (0, 1)$ et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_q$, $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q)}) = f(x_1, \dots, x_q)$. Les intégrales écrites ici sont des intégrales stochastiques de WIENER par rapport au mouvement brownien $(B_t, t \in (0, 1))$. Cette intégrale ne prend en entrée que des fonctions déterministes L^2 , et donne une variable aléatoire mesurable par rapport aux incréments du mouvement brownien dans $(0, 1)$. Enfin, cette intégrale définit une isométrie entre $\mathfrak{H}_q \subset L^2(\mathbb{P})$ et $L^2_S(0, 1)^q$ (les fonctions de $L^2(0, 1)^q$ symétriques) *via* la formule suivante : pour tout $q, q' \in \mathbb{N}$, pour tout $f \in L^2_S(0, 1)^q$ et $g \in L^2_S(0, 1)^{q'}$,

$$\mathbb{E}[I_q(f)I_{q'}(g)] = \delta_{q,q'} q! \langle f, g \rangle_{L^2(0,1)^q}.$$

Cette notion d'intégration possède deux aspects intéressants. La première, à travers sa relation d'isométrie, permet de passer d'un objet probabiliste (une variable aléatoire dans $\mathfrak{H}_q$) à un objet d'analyse déterministe (les fonctions symétriques réelles à q variables). Deuxième aspect : il dépend d'un mouvement brownien. On introduit un opérateur D sur $\mathfrak{H}_q$ de la façon suivante : pour tout $t \in (0, 1)$ et $f \in L^2_S(0, 1)^q$

$$\begin{aligned} D_t \left(\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{q-1}} f(t_1, \dots, t_q) dB_{t_q} \cdots dB_{t_2} dB_{t_1} \right) \\ \triangleq q \left(\int_0^1 \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{q-1}} f(t, t_2, \dots, t_q) dB_{t_q} \cdots dB_{t_3} dB_{t_2} \right). \end{aligned}$$

Cet opérateur est la *dérivée de MALLIAVIN*, qui est à l'origine du calcul du même nom. Il s'agit d'une théorie de calcul différentiel par rapport à un mouvement brownien, ou plus précisément par rapport à un *processus isonormal*. On l'étudie plus en profondeur dans le Chapitre I. On peut étendre cet opérateur de dérivation sur un sous-ensemble dense de $L^2(\mathcal{G})$, noté $\mathbb{D}^{1,2}$, formellement en décomposant une variable en chaos de WIENER et en permutant somme et dérivation. Cette extension de la dérivée sur $\mathbb{D}^{1,2}$ implique alors par dualité une extension de l'intégrale de WIENER, il s'agit de l'intégrale de SKOROHOD. Cette intégrale permet d'intégrer des processus stochastiques, et non uniquement des fonctions déterministes. On perd cependant le caractère isométrique de l'intégrale stochastique. L'un des grands intérêt de l'intégrale de SKOROHOD réside dans le fait qu'elle étend l'intégrale d'ITÔ. Cette dernière intègre contre un mouvement brownien des processus L^2 adaptés à la filtration canonique associée au mouvement brownien. Elle dispose d'ailleurs encore d'une propriété d'isométrie L^2 .

Un processus stochastique $u = (u(t), t \in (0, 1))$ qui est L^2 sur $\mathbb{P} \otimes \text{Leb}|_{(0,1)}$ est *intégrable au sens de SKOROHOD* dès lors que la forme linéaire

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ F & \longmapsto & \int_0^1 u_t D_t F dt \end{array} \right)$$

est continue pour la norme L^2 . Dans ce cas, l'intégrale de SKOROHOD, notée $\delta(u)$, est définie par la relation de dualité suivante : $\delta(u) \in L^2(\mathcal{G})$ est l'unique variable aléatoire telle que

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \mathbb{E} \left[\int_0^1 u_t D_t F dt \right] = \mathbb{E}[F \delta(u)].$$

On note aussi $\delta(u) = \int_0^1 u_t \delta B_t$. Si u est un processus déterministe, alors δ coïncide avec I_1 , l'intégrale de WIENER d'ordre 1. Il est aussi intéressant de noter que si $f \in L^2_S(0, 1)^{q+1}$ alors pour presque tout $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{q-1}} f(t, t_1, \dots, t_q) dB_{t_q} \cdots dB_{t_2} dB_{t_1} \right\} \delta B_t \\ &= \int_0^1 \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{q-1}} f(t, t_1, \dots, t_q) dB_{t_q} \cdots dB_{t_2} dB_{t_1} dB_t. \end{aligned}$$

Cette égalité se réécrit $\delta((I_q(f(t, \cdot)), t \in (0, 1)) = I_{q+1}(\tilde{f})$. On constate alors qu'à partir des calculs sur les briques élémentaires que sont les chaos de WIENER, $\delta \circ D$ n'est pas exactement l'identité. En fait, pour tout $X \in \mathfrak{H}_q$, $\delta \circ DX = qX$. On définit alors l'opérateur $L : L^2(\mathcal{G}) \rightarrow L^2(\mathcal{G})$ par la relation fondamentale suivante : $-L \triangleq \delta D$. Une autre façon de le définir est à partir des chaos : pour tout $X \in \mathfrak{H}_q$, $LX \triangleq -qX$. L'opérateur L admet comme vecteurs propres les éléments des chaos de WIENER avec comme valeurs propres les entiers négatifs ou nuls. On l'appelle *générateur d'ORNSTEIN-UHLENBECK*. Il s'agit bien d'un générateur, puisqu'il provient d'un semi-groupe, portant le même nom, défini sur $\mathfrak{H}_q$ par $P_t X = e^{-nt} X$, qu'on étend sur tout $L^2(\mathcal{G})$. C'est à cause de ce signe $-$ dans l'exponentielle qu'on définit L par la relation $LX = -qX$, signe qui semble tomber comme un cheveu sur la soupe. Pour $q \geq 1$, on peut inverser L , et on étend son inverse sur $L^2(\mathcal{G})$, qu'on appelle alors *pseudo-inverse* puisqu'en fait, l'extension sur $L^2(\mathcal{G})$ provoque la relation suivante pour tout $X \in L^2(\mathcal{G})$

$$LL^{-1}X = L^{-1}LX = X - \mathbb{E}[X].$$

Les opérateurs D , δ et L sont les pièces maîtresses du calcul de MALLIAVIN.

L'apogée de cette méthode : le Théorème du Quatrième Moment

Récapitulons. Nous avons pour objectif d'établir des Théorèmes Centraux Limites pour la fermeture dans L^2 de l'ensemble des polynômes en des gaussiennes standards et indépendantes. On cherche plus précisément à construire une condition pour avoir convergence en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ dans un chaos de WIENER $\mathfrak{H}_q$. Pour cela, on peut comprendre tout élément de $\mathfrak{H}_q$ comme une intégrale stochastique de WIENER d'une fonction déterministe. Grâce à cette interprétation, il est possible de définir lisiblement les opérateurs d'une théorie de calcul différentiel par rapport à un mouvement brownien, ce sont les opérateurs D , L et δ .

C'est enfin ici qu'on peut comprendre le génie de la démonstration de NOURDIN et PECCATI, aboutissant au Théorème du Quatrième Moment *quantitatif*, et au sous-domaine des Théorèmes Limites qu'est la méthode de NOURDIN-PECCATI. Pour cela, on se donne $X \in \mathfrak{H}_q$, et on exploite la borne de STEIN suivante

$$d(X, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sup_{f \in \mathcal{B}} \left| \mathbb{E} \left[f'(X) - X f(X) \right] \right|.$$

C'est à ce moment-là que tout se joue. Ce qui va tout faire marcher est la relation $X = \delta D(-L)^{-1}X$. En effet, pour $f \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{E} \left[f'(X) - X f(X) \right] = \mathbb{E} \left[f'(X) \right] - \mathbb{E} \left[\delta D(-L)^{-1}X \cdot f(X) \right].$$

Or, l'intégrale de SKOROHOD est définie par une relation de dualité, qui donne ici

$$\mathbb{E} \left[f'(X) - X f(X) \right] = \mathbb{E} \left[f'(X) \right] - \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}X, Df(X) \rangle_{L^2(0,1)} \right].$$

La dérivation introduite ici vérifie la règle de la chaîne. Cela donne ici

$$\mathbb{E} \left[f'(X) - X f(X) \right] = \mathbb{E} \left[f'(X) \right] - \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}X, f'(X) DX \rangle_{L^2(0,1)} \right].$$

Enfin, en rassemblant tous les termes, on obtient

$$\mathbb{E} \left[f'(X) - X f(X) \right] = \mathbb{E} \left[f'(X) \left(1 - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{L^2(0,1)} \right) \right].$$

Puisque $X \in \mathfrak{H}_q$, cela donne

$$\mathbb{E} \left[f'(X) - X f(X) \right] = \mathbb{E} \left[f'(X) \left(1 - \frac{1}{q} \|DX\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \right].$$

Enfin, en supposant que le tout est bien défini, l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ permet alors de conclure en la borne suivante

$$d(X, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sup_{f \in \mathcal{B}} \{\|f'\|_\infty\} \mathbb{E} \left[\left(1 - \frac{1}{q} \|DX\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^2 \right]^{1/2} = \sup_{f \in \mathcal{B}} \{\|f'\|_\infty\} \text{Var} \left[\|DX\|_{L^2(0,1)}^2 \right]^{1/2}.$$

Cette inégalité nous informe en fait déjà d'un fait remarquable. Si la norme de la dérivée de X est proche d'être déterministe (uniquement sa norme, pas la dérivée elle-même) alors X est proche d'être gaussienne, pour un grand nombre de distances, dès lors qu'elles aboutissent à des solutions d'équation de STEIN admettant des dérivées uniformément bornées.

Si on souhaite conclure sur le côté *Quatrième Moment* du Théorème éponyme, il s'agit de calculer explicitement $\mathbb{E}[X^4]$ et de comparer le tout à la variance exprimée plus haut, à l'aide de la formule produit. Le Chapitre III est entièrement consacré à ce Théorème. Nous étudions d'abord un historique de ce Théorème, dont la genèse remonte à 2005 avec NUALART et PECCATI dans [NP05], jusqu'au papier fondateur [NP09b] de NOURDIN et PECCATI, où nous décrivons en précision les bornes démontrées en distance de WSSERTSEIN. On étudie quelques extensions de ce Théorème, et les tentatives d'explication du phénomène dit du Quatrième Moment, notamment par le prisme des chaos de MARKOV comme décrit dans [Led12]. Nous concluons ce chapitre avec des applications récentes de la méthode de NOURDIN–PECCATI dans des sujets que nous ne traitons pas dans cette présente thèse afin de percevoir l'aspect actif de cette méthode encore aujourd'hui.

Organisation de la suite

Nous venons de décrire l'intégralité de la première partie de cette thèse, qui explore les fondations de la méthode de NOURDIN–PECCATI. Les Théorèmes présentés seront omniprésents dans les sujets que nous traitons dans la suite. Nos travaux, en collaboration avec Ciprian A. TUDOR, durant ces deux ans et demi de thèse se divisent en deux grandes parties, avec une intersection non vide entre les deux thèmes traités. Dans un premier temps, nous évoquerons quelques Théorèmes Limites liés à des fonctionnelles de solutions d'équations aux dérivées partielles stochastiques dirigés par des bruits gaussiens. Nous avons étudié le temps de séjour spatial de l'équation des ondes stochastique additif, dans un cadre de couplage polynomial entre le temps où la solution est évaluée et la taille de la fenêtre d'observation. Nous avons aussi étudié les variations quadratiques de la solution de l'équation des ondes avec bruit multiplicatif, ce qui permet de conclure en un estimateur pour le paramètre de diffusion. Dans un deuxième temps, nous développons une méthode de NOURDIN–PECCATI dite *indépendante*. Cette méthode permet des estimations en distance définie de manière fonctionnelle entre la loi d'un couple de variables aléatoires et la loi produit entre les deux marginales lorsque l'une des variables en jeu suit une loi spécifique. Il s'agit d'une borne quantitative mesurant l'indépendance entre deux variables aléatoires. Nous en déduisons des Théorèmes Limites particulièrement faciles à appliquer dans le cadre où les deux variables sont dans des chaos de WIENER. Nous avons étudié le cas où l'une des deux variables est gaussienne unidimensionnelle, puis gaussienne multidimensionnelle et le cas Gamma. Enfin, nous avons pu appliquer cette théorie sur un problème lié une fois de plus à des fonctionnelles d'équations aux dérivées partielles stochastiques, puisqu'on étudie le comportement asymptotique entre la moyenne spatiale d'une solution d'une ÉDPS et l'évaluation en un certain nombre de points de cette même solution. On montre que, sous renormalisation, le couple composé de la moyenne spatiale et de l'évaluation de la solution converge en loi vers le produit indépendant de la gaussienne et de la loi de l'évaluation. Les Théorèmes Limites que nous décrivons dans l'entièreté de cette partie peuvent s'interpréter comme de l'*indépendance asymptotique*. Cependant, nous avertissons dès à présent le lecteur à propos du caractère mal défini de cette notion. Il existe en fait plusieurs définitions de l'indépendance asymptotique qu'on peut considérer comme naturelles qui ne sont pas équivalentes. C'est l'objet de l'Annexe A. Expliquons désormais en détail le contenu des deux parties que nous venons d'introduire.

Étude de fonctionnelles d'équations aux dérivées partielles stochastiques

Chapitre V : Temps de séjour de l'équation des ondes stochastique

On considère l'équation des ondes additive unidimensionnelle suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \dot{W}(t, x),$$

où $u(t = 0, x) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = 0$. On suppose que W est un bruit blanc en temps et en espace. La solution, prise au sens évolutive (*mild*), est un processus gaussien donné pour presque tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) W(ds, dy),$$

où W est le processus isonormal sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ issu du bruit blanc W , et G est le noyau de GREEN associé à l'équation, donné par $G(t, x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x| < t\}}$. Sa fonction de covariance spatiale est donnée pour $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{E}[u(t, x)u(t, y)] = \frac{1}{4}(|x-y| - 2t) \mathbf{1}_{\{|x-y| < 2t\}}.$$

On s'intéresse à son *temps de séjour spatial*, c'est-à-dire le processus suivant : à un niveau $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, un temps $t \geq 0$ et une fenêtre d'observation $A > 0$, on définit

$$S_{\lambda, t}(A) = \text{Leb}\left(\{x \in [-A, A], u(t, x) \geq \lambda\}\right) = \int_{-A}^A \mathbf{1}_{\{u(t, x) \geq \lambda\}} dx. \quad [1]$$

Il est connu, en utilisant un résultat de [Pha13], que ce processus vérifie un TCL lorsque A grandit : pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{A}}(S_{\lambda, t}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda, t}(A)]) \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

On s'intéresse au problème suivant : et si t dépend de A ? On suppose une relation polynomiale : $t = A^\alpha$, avec $\alpha > 0$. Le Théorème suivant répond à cette question, c'est l'objet de ce chapitre.

Théorème iv : Soit $S_{\lambda, t}(A)$ donné par [1]. On considère $\alpha > 0$, et on prend $t = A^\alpha$.

1. Si $\alpha \geq 1$, alors

$$\frac{1}{A}(S_{\lambda, A^\alpha}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda, A^\alpha}(A)]) \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{\text{loi}} \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}.$$

2. Si $\alpha \leq 1$, alors

$$d_W\left(\frac{1}{\sqrt{A^{1+\alpha}}}(S_{\lambda, A^\alpha}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda, A^\alpha}(A)]), \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right) \leq \frac{C_{\lambda, \alpha}}{(\ln A)^{1/2}},$$

où σ ne dépend d'aucun paramètre.

Le plan de démonstration est le suivant.

1. On cherche à déterminer la normalisation, c'est-à-dire déterminer un développement asymptotique de la variance $\mathbb{E}[S_{\lambda, A^\alpha}(A)^2]$ lorsque A tend vers ∞ . Pour cela, on développe $S_{\lambda, A^\alpha}(A)$ en chaos de WIENER (où le processus isonormal sous-jacent est induit par le bruit blanc W), et on étudie ce développement chaos par chaos. Le développement se passe comme suit : on développe $x \mapsto \mathbf{1}_{\{x > \ell\}}$, pour ℓ réel dans la base hilbertienne des polynômes d'HILBERT. Puis, on utilise la formule de conversion d'ITÔ :

$$H_q\left(\frac{1}{\sigma[u(t, x)]}u(t, x)\right) = \frac{1}{\sigma[u(t, x)]^q}I_q(g_{t, x}^{\otimes q}),$$

où on écrit $u(t, x) = I_1(g_{t, x})$, avec $g_{t, x}$ donné par

$$g_{t, x}(s, y) = G(t-s, x-y)\mathbf{1}_{[0, t]}(s).$$

Ainsi,

$$S_{\lambda,t}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,t}(A)] = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{H_{q-1}\left(\frac{2\lambda}{t}\right) \varphi\left(\frac{2\lambda}{t}\right)}{q!} \int_{-A}^A I_q\left(g_{t,x}^{\otimes q}\right) dx \triangleq \sum_{q=1}^{+\infty} X_{\lambda,t}^{(q)}(A).$$

2. On étudie pour tout $q \geq 1$ une expression asymptotique de $\mathbb{E}[X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2]$ lorsque A tend vers ∞ . Il suffit d'utiliser des formules de TAYLOR, et de calculer des intégrales doubles. On remarque alors que les développements asymptotiques diffèrent selon la parité de q , et selon la valeur de α . En effet, on observe une compétition entre les temps d'observation A^α et la taille de la fenêtre à travers l'intégrale suivante :

$$\int_{-A}^A \int_{-A}^A \mathbb{E}\left[I_q\left(g_{t,x}^{\otimes q}\right) I_q\left(g_{t,y}^{\otimes q}\right)\right] dx dy = C_{\lambda,q} \int_{-A}^A \int_{-A}^A (|x-y| - 2A^\alpha)^{2q} \mathbf{1}_{\{|x-y| < 2A^\alpha\}} dy dx.$$

On résume les ordres obtenus (c'est-à-dire la puissance de A dans le premier terme du développement asymptotique de $\mathbb{E}[X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2]$).

Premier ordre			
$\alpha \backslash q$	$\alpha < 1$ Temps court	$\alpha = 1$ Temps moyen	$\alpha > 1$ Temps long
q impair	$A^{1+\alpha}$	A^2	A^2
q pair	$A^{1-\alpha}$	1	$A^{-2(\alpha-1)}$

On constate alors que les termes impairs prédominent toujours. On adopte la normalisation liée à ces termes, et on montre alors que si, pour q impair, $\mathbb{E}[X_{\lambda,A^\alpha}^{(q)}(A)^2] = \sigma(q)^2 A^{\text{ordre}}$, alors

$$\frac{1}{A^{\text{ordre}}} \sigma[S_{\lambda,A^\alpha}(A)]^2 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \sum_{q \text{ impair}} \sigma(q)^2.$$

3. On étudie le cas $\alpha \geq 1$. Cela consiste en fait à utiliser la caractéristique 1-similaire du processus u :

$$\forall c > 0, (u(ct, cx), t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \stackrel{\text{loi}}{=} (cu(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}),$$

au sens des lois finies dimensionnelles. En effet, par exemple pour $\alpha > 1$,

$$\frac{1}{A} \int_{-A}^A \mathbf{1}_{\{u(A^\alpha, x) \geq \lambda\}} dx \stackrel{\text{loi}}{=} \int_{-1}^1 \mathbf{1}_{\{u(1, \frac{x}{A^{\alpha-1}}) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} dx.$$

Le membre de droite converge presque sûrement vers $\mathbf{1}_{\{u(1,0) \geq 0\}}$, qui vaut 0 ou 1 avec proba 1/2. En soustrayant par l'espérance, on en déduit la convergence vers la loi de RADEMACHER annoncée. On conclut de la même manière pour $\alpha = 1$.

4. On s'occupe désormais du cas $\alpha < 1$, où, tout comme le cas $\alpha = 0$ traité précédemment, on observe un TCL. L'idée est la suivante : on se donne $A \mapsto M_A$ une application croissante à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui croît vers ∞ . Le terme M_A sera un terme de troncature dans le développement en chaos de $S_{\lambda,A^\alpha}(A)$. On découpe la distance de WASSERSTEIN comme suite :

$$\begin{aligned} & d_W \left(\frac{1}{\sqrt{A^{1+\alpha}}} (S_{\lambda,A^\alpha}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,A^\alpha}(A)]), \mathcal{N} \left(0, \sum_{q \text{ impair}} \sigma(q)^2 \right) \right) \\ & \leq d_W(X_{\lambda,A^\alpha}(A), X_{\lambda,A^\alpha}^{M_A}(A)) + d_W \left(X_{\lambda,A^\alpha}^{M_A}(A), \mathcal{N} \left(0, \sum_{\substack{q \text{ impair} \\ q \leq M_A}} \sigma(q)^2 \right) \right) \\ & \quad + d_W \left(\mathcal{N} \left(0, \sum_{\substack{q \text{ impair} \\ q \leq M_A}} \sigma(q)^2 \right), \mathcal{N} \left(0, \sum_{q \text{ impair}} \sigma(q)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

On a noté

$$X_{\lambda, A^\alpha}(A) = \frac{1}{\sqrt{A^{1+\alpha}}} \left(S_{\lambda, A^\alpha}(A) - \mathbb{E} [S_{\lambda, A^\alpha}(A)] \right),$$

qu'on développe en chaos, et on note

$$X_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A) = \sum_{q=1}^{M_A} J_q \left(X_{\lambda, A^\alpha}(A) \right)$$

le développement en chaos de $X_{\lambda, A^\alpha}(A)$ jusqu'à l'ordre M_A . Le premier terme estime la vitesse de convergence L^2 de ce développement en chaos. Les calculs asymptotiques faits en point **2**. permettent de l'estimer. Le deuxième terme exprime la distance de WASSERSTEIN entre un processus dérivable, admettant un développement fini en chaos, et une gaussienne. La méthode de NOURDIN-PECCATI classique permet de l'estimer. Enfin, le dernier terme estime la distance entre deux gaussiennes centrées, donc il s'agit de connaître la vitesse de convergence de la série de terme général $\sigma(q)^2$. On va en fait constater qu'indépendamment du choix de M_A , tous les termes tendent vers 0, sauf un, provenant précisément de l'étude du terme central, de l'ordre d'un polynôme en A soustrait par un terme de l'ordre de 3^{M_A} . Il ne reste qu'à choisir M_A de sorte que 3^{M_A} croisse moins vite que le polynôme pour conclure.

Chapitre VI : Variations quadratiques temporelles de l'équation des ondes stochastique non linéaire

Pour $\gamma > 0$ un paramètre dit de *diffusion*, on considère l'équation des ondes multiplicative suivante

$$\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x^2}(t, x) + \gamma \sigma(u_\gamma(t, x)) \dot{W}(t, x),$$

où W est un bruit blanc en espace et en temps, et σ est suffisamment régulière pour qu'on puisse disposer d'une solution au sens évolutif (*mild*), c'est-à-dire un processus u_γ solution de l'équation intégrale au sens de WALSH suivante

$$u_\gamma(t, x) = \gamma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) \sigma(u_\gamma(s, y)) W(ds, dy),$$

où G_1 est le noyau de GREEN associé à l'équation des ondes, qu'on a introduit dans le chapitre précédent.

Cette étude intervient après de nombreuses autres pour d'autres équations, sous d'autres hypothèses. On s'intéresse à l'étude des variations quadratiques de u_γ , qui permet très souvent dans les cas précédents d'en déduire des estimateurs (fortement) consistants de γ . On démontre le théorème suivant.

Théorème v : Soient $T > 0$, et $(D_n, n \geq 1)$ une suite de subdivisions de $[0, T]$. On suppose que $D_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{\#D_n-1}^n < t_{\#D_n}^n = T\}$ vérifie que son pas tend vers 0 :

$$\delta_n \triangleq \max_{0 \leq i \leq \#D_n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On définit les variations quadratiques temporelles de u_γ associées à $(D_n, n \geq 1)$: pour $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$V_{D_n}^\gamma(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(u(t_{i+1}^n, x) - u(t_i^n, x) \right)^2.$$

Alors

$$V_{D_n}^\gamma(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{\gamma^2}{4} \int_0^T \int_0^t \left(\sigma(u_\gamma(t-s, x-s))^2 + \sigma(u_\gamma(t-s, x+s))^2 \right) ds dt,$$

où $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ désigne la convergence en probabilité.

On peut appliquer ce Théorème pour faire l'estimation de γ . Supposons que nous connaissons σ , et que nous disposons d'une suite d'observations (continues en espace) $(u_\gamma(t_i, x), 0 \leq i \leq \sharp D, x \in \mathbb{R})$, où $D = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{\sharp D} = T\}$. On cherche à déterminer γ , qui est inconnu. Il suffit pour cela, grâce au théorème précédent, de définir l'estimateur suivant

$$\hat{\gamma}_D(x) = \sqrt{\frac{4V_D^\gamma(x)}{\sum_{i=0}^{\sharp D-1} \Delta t_i \left[\sum_{j=0}^{i-1} \left\{ \Delta t_j \left(\sigma(u_\gamma(t_i - t_j, x - t_j))^2 + \sigma(u_\gamma(t_i - t_j, x + t_j))^2 \right) \right\} \right]}}.$$

La somme au dénominateur est une approximation de RIEMANN de l'intégrale limite à travers la partition D . On a noté $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Cet estimateur est consistant d'après nos investigations.

Donnons nos pistes pour démontrer le Théorème. La démonstration repose uniquement sur des considérations liées au calcul de MALLIAVIN. Quitte à renommer σ , on suppose que $\gamma = 1$. Nous commençons par mettre l'emphase sur le fait que $u(t, x)$ est dérivable par rapport au processus isonormal W issu du bruit blanc ambiant. Bien que ce résultat est connu, il n'avait pas été démontré jusque là. La technique de démonstration est très bien connue : on utilise une itération de PICARD, on montre par récurrence que cette itérée est dérivable pour tout entier, et on passe à la limite par les théorèmes classiques de passage à la limite pour cette dérivée.

La différence entre $u(t_{i+1}^n, x)$ et $u(t_i^n, x)$, développée au carré, donne par relation de CHASLES pour l'intégrale de WALSH un terme intégrale pris entre 0 et t_i^n , et deux autres termes faisant intervenir t_i^n et t_{i+1}^n , dont la longueur est inférieure à δ_n qui tend vers 0. Ainsi, nous avons déjà

$$V_{D_n}(x) = \sum_{i=0}^{\sharp D_n-1} \left(\int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} (G_1(t_{i+1}^n - s, x - z) - G_1(t_i^n - s, x - z)) \sigma(u(s, z)) W(ds, dz) \right)^2 + o(1).$$

L'intégrale au sein de la somme s'interprète comme une intégrale de SKOROHOD, notée $\delta(v_{D_n, x, i})$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} V_{D_n}(x) &= \sum_{i=0}^{\sharp D_n-1} \delta \left((G_1(t_{i+1}^n - s, x - z) - G_1(t_i^n - s, x - z)) \mathbf{1}_{[0, t_i]}(s) \sigma(u(s, z)) \right)^2 + o(1) \\ &= \sum_{i=0}^{\sharp D_n-1} \delta(v_{D_n, x, i})^2 + o(1). \end{aligned}$$

En employant les formules usuelles du calcul de MALLIAVIN, on obtient

$$\begin{aligned} \delta(v_{D_n, x, i})^2 &= \delta(v_{D_n, x, i} \delta(v_{D_n, x, i})) + \langle D\delta(v_{D_n, x, i}), v_{D_n, x, i} \rangle \\ &= \delta(v_{D_n, x, i} \delta(v_{D_n, x, i})) + \langle \delta(D_\bullet v_{D_n, x, i}), v_{D_n, x, i}(\bullet) \rangle + \|v_{D_n, x, i}\|^2. \end{aligned}$$

Le premier terme est une double intégrale stochastique qui s'avère être de WALSH. On la traite *via* l'isométrie associée. On obtient alors une double intégrale par rapport à la mesure de LEBESGUE avec des termes du type $v_{D_n, x, i}(s, z) v_{D_n, x, j}(s, z)$, avec i, j des indices entre 0 et $\sharp D_n - 1$. Or, d'après l'expression du noyau de GREEN G_1 , les fonctions $v_{D_n, x, i}$ et $v_{D_n, x, j}$ sont à supports disjoints dès lors que $i \neq j$. Il suit que la somme ne comporte que peu de termes, donc que ce premier terme est petit dans L^2 .

Le deuxième terme sera quand à lui petit à cause des supports, mais aussi à cause du caractère adapté du processus $v_{D_n, x, i}$, qui va rendre la dérivée nulle sur un ensemble assez gros, et va lui donner un support disjoint de tous les $v_{D_n, x, j}$, avec $j \neq i$. Ce terme tend par conséquent vers 0 dans L^2 .

On arrive alors à la conclusion suivante :

$$V_{D_n}(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\sharp D_n-1} \int_0^{t_i} \int_{s-t_i < |z-x| < t_{i+1}-s} \sigma(u(s, z))^2 dz ds + o(1),$$

où le petit o est dans L^1 . D'après une sommation de RIEMANN, on en déduit que le terme principal converge presque sûrement vers l'intégrale annoncée dans le Théorème. Ainsi, $V_{D_n}(x)$ est somme d'un terme qui converge presque sûrement vers une quantité finie et de termes qui tendent vers 0 dans L^1 . On en déduit la convergence en probabilité annoncée.

Méthode de Nourdin–Peccati indépendante

Comme nous l'avons présentée au début de cette introduction, la méthode de NOURDIN–PECCATI permet d'établir des bornes pour certaines distances $\mathbf{d}$ entre une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ éventuellement) et une loi cible, prescrite dès le début de l'étude, en termes d'opérateurs de dérivation. Les lois cibles *standards* sont les lois normales (unidimensionnelle ou multidimensionnelle) et les lois Gamma (dont les lois du χ^2 font parties).

Cette partie de la thèse exprime une extension de cette méthode pour de nouvelles lois, qui seront toujours multidimensionnelles. Notre objectif est d'obtenir des bornes similaires aux résultats standards lorsqu'on cherche à comparer la loi d'un couple de variables aléatoires par rapport à un produit indépendant de deux autres lois. Il s'agit d'une quantification de l'indépendance entre les deux variables si les lois cibles sont les lois des marginales. Ces estimations permettraient d'établir des Théorèmes Limites exprimant ce qu'on pourrait interpréter comme de l'*indépendance asymptotique*, notamment dans les chaos de WIENER.

L'étude de cette notion d'indépendance asymptotique dans les chaos n'est pas nouvelle, puisqu'elle fait déjà l'objet en 2014 d'un Théorème dans [NR14]. Ce Théorème a été amélioré dans [NNP16] en 2016. Énonçons ce dernier Théorème.

Théorème vi : (*Théorème 1.3 de [NNP16]*) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, W un processus isonormal sur un espace de HILBERT $\mathcal{H}$ réel séparable, à partir duquel on définit les chaos de WIENER. On considère une suite de vecteurs aléatoires $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$, dont on note $X_n(j)$ la j -ème coordonnée, pour $1 \leq j \leq d$ et $n \geq 1$.

On suppose qu'il existe une suite ordonnée de manière décroissante d'entiers $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_d$ tels que pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq d$, $X_n(j) \in \mathfrak{H}_{q_j}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) Pour tout $1 \leq i \neq j \leq d$,

$$\text{Cov}(X_n(i)^2, X_n(j)^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

(2) Notons pour $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq d$: $X_n(j) = I_{q_j}(\phi_n(j))$, avec $\phi_n(j) \in \mathcal{H}^{\otimes q_j}$. Pour tout $1 \leq i \neq j \leq d$ et $1 \leq r \leq q_i \wedge q_j$,

$$\|\phi_n(i) \otimes_r \phi_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q_i + q_j - 2r)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(3) Pour tout $\psi_1, \dots, \psi_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ admettant des dérivées bornées jusqu'à l'ordre q_1 ,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^d \psi_j(X_n(j)) \right] - \prod_{j=1}^d \mathbb{E} [\psi_j(X_n(j))] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce Théorème nous indique alors que pour avoir une forme d'indépendance asymptotique, représentée ici avec le point (3), il suffit de calculer deux à deux la covariance des carrés de chaque marginale du vecteur aléatoire, et de montrer que cette covariance tend vers 0. Cette condition sur la covariance est une reformulation du critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI, exprimant que deux variables aléatoires $X = I_p(f)$ et $Y = I_q(g)$ sont indépendantes si et seulement si $f \otimes_1 g = 0$ presque partout. On dispose d'une formulation en termes de Théorème Limite.

Théorème vii : (*Théorème 1.4 de [NNP16]*) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, W un processus isonormal sur un espace de HILBERT $\mathcal{H}$ réel séparable, à partir duquel on définit les chaos de WIENER. On considère une suite de vecteurs aléatoires $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$, dont on note $X_n(j)$ la j -ème coordonnée, pour $1 \leq j \leq d$ et $n \geq 1$.

On suppose qu'il existe une suite ordonnée de manière décroissante d'entiers $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_d$ tels que pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq d$, $X_n(j) \in \mathfrak{H}_{q_j}$. On suppose les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $1 \leq j \leq d$, $X_n(j)$ converge en loi vers une variable $U(j)$;

(ii) Les variables $U(1), \dots, U(d)$ sont indépendantes ;

(iii) La condition (3) est vérifiée (ou l'une des conditions équivalentes).

Alors la suite de vecteurs aléatoires $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers le vecteur $\mathbf{U} = (U(1), \dots, U(d))$.

Il s'agit d'un Théorème extrêmement intéressant, permettant de conclure en une convergence en loi vers un vecteur à marginales indépendantes. Il exprime que, sous hypothèse d'appartenance à un chaos, pour observer une convergence en loi vers un tel vecteur, il suffit que chaque marginale converge vers la marginale correspondante et qu'on observe une forme de décorrélation asymptotique, sous la forme de décorrélation des carrés de chaque variable. On peut aussi remarquer son caractère général dans les limites possibles, puisqu'aucune hypothèse sur $\mathbf{U}$ n'est mentionnée.

La poursuite de cette étude est alors de se questionner sur une éventuelle vitesse de convergence, pour les distances usuelles liées à la méthode de STEIN. La technique générale ressemble à ce qui suit. On suppose que μ est une loi pour laquelle il existe un opérateur différentiel $\mathcal{L}$ satisfaisant un lemme de STEIN : une variable X suit la loi μ si et seulement si $\mathbb{E}[\mathcal{L}f(X)] = 0$ pour un grand nombre de fonctions tests f . On démontre le lemme de STEIN suivant pour certains cas particuliers de μ . Un couple (X, Y) suit la loi $\mu \otimes \mathbf{p}$ (c'est-à-dire que X suit la loi μ , Y suit la loi $\mathbf{p}$ et X et Y sont indépendantes), avec $\mathbf{p}$ une loi quelconque si et seulement si $\mathbb{E}[\mathcal{L}_x f(X, Y)] = 0$, où $\mathcal{L}_x f(x, y) = \mathcal{L}(f(\cdot, y))(x)$. On aboutit à une équation de STEIN sous la forme

$$\mathcal{L}_x f(x, y) = h(x, y) - \mathbb{E}[h(Z, y)],$$

où Z suit μ . L'objectif est de résoudre cette équation, et d'étudier le comportement d'une solution bien choisie (souvent bornée, avec ses dérivées). La nouvelle contribution de cette étude provient en fait de l'étude de $y \mapsto f(x, y)$. Par règle de la chaîne du calcul de MALLIAVIN, on a en effet

$$Df(X, Y) = \frac{\partial f}{\partial x}(X, Y)DX + \frac{\partial f}{\partial y}(X, Y)DY.$$

Une fois cette étude faite, on peut disposer de Théorèmes Limites, dont l'étude est similaire aux cas standards développés par NOURDIN et PECCATI. Cette étude est nommée dans la suite *méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante*.

Le premier chapitre de cette partie présente cette méthode en détail dans le cas où la loi cible μ est une loi gaussienne unidimensionnelle (non dégénérée). La borne associée permet des applications dans une étude de convergence dans le Théorème de BREUER–MAJOR. Le deuxième chapitre est une application de cette méthode dans le cas de moyenne spatiale de solutions d'ÉDPS. Il a été démontré que la moyenne spatiale de certaines de ces solutions converge, après normalisation, vers $\mathcal{N}(0, 1)$, lorsque la fenêtre de moyennisation est de plus en plus grande. On démontre un Théorème Limite exprimant la convergence du couple composé de la moyenne normalisée, et d'une évaluation de la solution, vers le produit indépendant de $\mathcal{N}(0, 1)$ et de la loi de l'évaluation. Le troisième chapitre est une nouvelle exposition de la méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante, où la loi cible est cette fois-ci une loi normale multidimensionnelle. La différence avec le cas unidimensionnel provient du calcul différentiel, et du fait que l'opérateur $\mathcal{L}$ est cette fois-ci d'ordre 2. On applique ce résultat à un problème de matrices aléatoires (convergence vers le GOE), et plus particulièrement à l'influence des données dans la pseudo-convergence de matrices de WISHART vers une GOE dans le cas de coefficients chaotiques. On applique cette méthode aussi dans le cadre d'estimateurs d'ÉDPS, et encore une fois de l'influence des données dans la convergence normale de l'estimateur. On conclut cette partie avec le dernier chapitre portant sur la méthode de NOURDIN–PECCATI appliquée aux lois Gamma (centrées). Les techniques sont similaires, mais l'équation différentielle obtenue mérite une étude à elle-seule, ce qui justifie ce chapitre. De plus, ce dernier chapitre est un pas supplémentaire vers un travail plus ambitieux demandant certainement plus d'expertise dans ce domaine : peut-on quantifier le critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI en termes de distances de WASSERSTEIN, variation totale, ou KOLMOGOROV ? L'étude de la loi Gamma permet l'étude de certains cas dans le chaos d'ordre 2.

Chapitre VII : Méthode de Nourdin–Peccati indépendante pour la loi gaussienne unidimensionnelle

Ce chapitre est inspiré de [Tud23], et pose les premières pierres de la méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante. La suite de ce travail est inspirée par un travail préliminaire de Leandro

PIMENTEL, dans la section 5 de [Pim22]. Il s'agit de comparer la loi d'un couple (X, Y) avec $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathfrak{p}$, c'est-à-dire la loi des couples (Z, Y') , avec Z suivant $\mathcal{N}(0, 1)$, Y' suivant $\mathfrak{p}$ et Z indépendant de Y' , en termes de distance de WASSERSTEIN. On peut même supposer que Y n'est pas simplement une variable réelle, mais aussi un vecteur aléatoire. La borne générale obtenue permet par la suite d'écrire des Théorèmes Limites qu'on interprète comme de l'indépendance asymptotique dans des chaos de WIENER.

Borne de Stein

Le début des investigations est bien entendu un lemme de STEIN. Considérons X et Y deux variables aléatoires. Alors le couple (X, Y) suit la loi $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)$ si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances suivantes soient définies

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) - Xf(X, Y) \right] = 0.$$

La démonstration est usuelle. Pour le sens direct, il s'agit d'utiliser l'indépendance et le lemme de STEIN classique pour conclure en l'égalité. Pour le sens réciproque, on considère $f(x, y) = e^{itx+isy}$, ce qui donne une équation différentielle vérifiée par la fonction caractéristique de (X, Y) , dont l'unique solution est précisément la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)$.

On propose une étude d'une estimation de WASSERSTEIN entre un couple (X, Y) et la loi $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)$. On étudie pour cela l'équation de STEIN suivante

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - xf(x, y) = h(x, y) - \mathbb{E}[h(Z, y)],$$

où Z suit $\mathcal{N}(0, 1)$ et est indépendante de Y . On note f_h la solution de cette équation différentielle. On montre que pour h suffisamment régulière, la famille de fonctions f_h associée admet des dérivées en x et en y bornées. Pour cela, on exhibe la solution suivante

$$f_h(x, y) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[Zh \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, y \right) \right] dt.$$

Cette solution n'est pas surprenante si on connaît la théorie initiale de NOURDIN-PECCATI, puisqu'à y fixé, $x \mapsto f_h(x, y)$ est une solution de $f' - xf = h_y - \mathbb{E}[h_y(Z)]$, avec $h_y(x) = h(x, y)$. Ainsi, pour h de classe C^1 lipschitzienne, il n'y a aucune surprise d'apprendre que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, y) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'_y(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right|,$$

donc que $\|\partial_x f_h\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|\partial_x h\|_\infty$. Par contre, il s'agit aussi d'étudier la dérivée partielle de f_h par rapport à y , qui est une nouvelle étude dans le cadre de la méthode indépendante. Ici, on s'en sort en permutant dérivée et intégrale, donnant ici

$$\frac{\partial f_h}{\partial y} = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[Z \frac{\partial h}{\partial y} \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, y \right) \right] dt.$$

On en déduit que $\|\partial_y f_h\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\partial_y h\|_\infty$. On en déduit la borne attendue : si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\|\partial_x f\|_\infty \leq \sqrt{2/\pi}$ et $\|\partial_y f\|_\infty \leq \sqrt{\pi/2}$ alors

$$\mathbf{d}_W((X, Y), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}} \left| \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) - Xf(X, Y) \right] \right|.$$

Hypothèse de dérivabilité supplémentaire

Supposons que X et Y soient dérivables et que $\mathbb{E}[X] = 0$. Pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) - Xf(X, Y) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) - \delta D(-L)^{-1} Xf(X, Y) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) - \left\langle D(-L)^{-1} X, Df(X, Y) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) \left(1 - \left\langle D(-L)^{-1} X, DX \right\rangle_{\mathcal{H}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y}(X, Y) \left\langle D(-L)^{-1} X, DY \right\rangle_{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned}$$

D'où la borne suivante

$$\begin{aligned} d_W((X, Y), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)) \\ \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbb{E} \left[\left| 1 - \left\langle D(-L)^{-1} X, DX \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \right] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E} \left[\left| \left\langle D(-L)^{-1} X, DY \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \right]. \end{aligned}$$

Ou encore, à partir de l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P})$

$$\begin{aligned} d_W((X, Y), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)) \\ \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(1 - \left\langle D(-L)^{-1} X, DX \right\rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left\langle D(-L)^{-1} X, DY \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]}. \quad [2] \end{aligned}$$

Cette borne fondamentale est le point d'orgue de ce chapitre. Constatons qu'elle est composée de deux termes. Le premier terme est très bien connu dans le domaine, puisqu'il s'agit précisément de la borne de NOURDIN–PECCATI démontrée dans [NP09b], exprimant la distance entre X et $\mathcal{N}(0, 1)$. Le deuxième terme est quand à lui nouveau. Il fait intervenir le produit scalaire des dérivées de X et Y . De plus, puisqu'on dispose de l'égalité $\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} X, DY \rangle_{\mathcal{H}}] = \mathbb{E}[XY] = \text{Cov}(X, Y)$, on peut imaginer que le deuxième terme est une mesure de la décorrélation entre X et Y .

Théorèmes Limites dans les chaos de Wiener

Cette borne donne naissance à des Théorèmes Limites particulièrement exploitables lorsqu'on considère une suite $(X_n, n \geq 1)$ appartenant à un chaos de WIENER, et d'une suite $(Y_n, n \geq 1)$ convergeant en loi, ou plus fortement dans L^2 . Énonçons les Théorèmes, sous différentes hypothèses. On commence avec le Théorème le plus faible, celui où on suppose que $(Y_n, n \geq 1)$ appartient à une somme de chaos fixée, d'ordre maximal inférieur à celui de $(X_n, n \geq 1)$ et converge en loi.

Théorème viii : Soient $(X_n, n \geq 1)$ et $(Y_n, n \geq 1)$ deux suites de variables aléatoires. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) Il existe $q \geq q' \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \mathfrak{H}_q$ et $Y_n \in \bigoplus_{k=0}^{q'} \mathfrak{H}_k$;
- (ii) La suite $(X_n, n \geq 1)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$;
- (iii) La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathbf{p}$, une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$;
- (iv) On a décorrélation asymptotique : $\mathbb{E}[X_n Y_n] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbf{p}$. Si de plus, la convergence de $(Y_n, n \geq 1)$ vers $\mathbf{p}$ est vérifiée au sens de WASSERSTEIN, alors la convergence du couple est aussi dans ce sens. On dispose de plus de la majoration suivante

$$\begin{aligned} d_W((X_n, Y_n), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbf{p}) \\ \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(1 - \left\langle D(-L)^{-1} X_n, DX_n \right\rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_n \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} + d_W(Y_n, \mathbf{p}). \quad [3] \end{aligned}$$

La démonstration de ce fait repose sur l'utilisation de la borne fondamentale [2], puisque

$$\mathbf{d}_W((X_n, Y_n), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbf{p}) \leq \mathbf{d}_W((X_n, Y_n), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y_n)) + \mathbf{d}_W(Y_n, \mathbf{p}).$$

D'une part, le premier terme tend vers 0, puisqu'il s'agit d'un terme connu dans le cadre du Théorème du Quatrième Moment. On s'intéresse au deuxième terme. Puisque la dérivée de X et Y se calcule explicitement, dès lors qu'on note $X = I_q(\phi)$ et $Y = I_{q'}(g)$, la formule produit permet d'expliciter un développement en chaos de $\langle D(-L)^{-1}X, DY \rangle_{\mathcal{H}}^2$. En prenant l'espérance, on aboutit à une somme du type

$$\mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}X, DY \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] = \sum_{r=1}^{q \wedge q'} b_{q, q', r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2.$$

Or, lorsque $q' < q$, la convergence en loi de X_n vers $\mathcal{N}(0, 1)$ implique l'écrasement de toutes les contractions de ϕ_n et g_n , puisque

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2 \leq \|\phi_n \otimes_{q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \|g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q_j}}^2.$$

Le Théorème du Quatrième Moment stipule que toutes les contractions $\phi_n \otimes_r \phi_n$ tendent vers 0 en norme associée à $\mathcal{H}^{\otimes 2(q-r)}$, pour tout $1 \leq r \leq q-1$. Lorsque $q = q'$, le Théorème du Quatrième Moment ne nous permet plus de conclure avec cette inégalité. Le cas $r = q = q'$ est en fait celui qui justifie l'hypothèse de décorrélation, puisqu'en fait

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 0}}^2 = \langle \phi_n, g_n \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{q!} \mathbb{E}[X_n J_q Y_n] = \frac{1}{q!} \mathbb{E}[X_n Y_n],$$

où on a noté $J_q Y$ la projection sur le q -ème chaos de WIENER. Cela conclut la démonstration.

Évoquons désormais un Théorème Limite plus fort, où l'hypothèse de convergence en loi de $(Y_n, n \geq 1)$ est remplacé par une convergence L^2 , ce qui permet d'oublier l'hypothèse de comparaison des ordres des chaos. De plus, Y_n peut désormais admettre un développement en chaos infini, modulo une hypothèse de convergence uniforme dans L^2 des restes de développements en chaos.

Théorème ix : Soient $(X_n, n \geq 1)$ et $(Y_n, n \geq 1)$ deux suites de variables aléatoires. On fait les hypothèses suivantes.

- (i) Il existe $q \geq 1$ tel que $(X_n, n \geq 1) \subset \mathfrak{H}_q$;
- (ii) La suite $(X_n, n \geq 1)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$;
- (iii) La suite $(Y_n, n \geq 1)$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers une variable Y_∞ suivant une loi $\mathbf{p}$;
- (iv) Le reste des développements en chaos de $(Y_n, n \geq 1)$ converge uniformément vers 0 dans $L^2(\mathbb{P})$

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{q'=M+1}^{+\infty} \mathbb{E} [J_{q'} Y_n^2] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0;$$

- (v) On a décorrélation asymptotique : $\mathbb{E}[X_n Y_n] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors la suite de couples $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ converge au sens de WASSERSTEIN vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbf{p}$ (c'est-à-dire que la distance de WASSERSTEIN tend vers 0). L'estimation [3] est de plus valable.

Ce Théorème est en fait conséquence d'un lemme démontré encore une fois grâce au Théorème du Quatrième Moment. En effet, si on a compris la démonstration du Théorème précédent, il suffit de comprendre pourquoi la convergence L^2 permet de s'affranchir de l'hypothèse $q' \leq q$. Ainsi, il suffit d'expliquer le fait que $\mathbb{E}[\langle DX_n, DG_n \rangle_{\mathcal{H}}^2]$ tende vers 0, où $G_n \in \mathfrak{H}_{q'}$, avec $q' > q$, tend dans L^2 vers une variable G_∞ . Toujours par la formule produit, la convergence en loi de X_n vers la normale écrase tous les termes du développement en chaos de $\langle DX_n, DG_n \rangle_{\mathcal{H}}^2$, sauf lorsqu'on considère le cas $r = q$. Si, pour $n \geq 1$ ou $n = \infty$, on note $G_n = I_{q'}(g_n)$, alors

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} \leq \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_\infty\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} + \|g_n - g_\infty\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}} \sup_{n \geq 1} \|\phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}.$$

Le lemme stipule alors que lorsque $(X_n, n \geq 1)$ converge vers $\mathcal{N}(0, 1)$, alors pour tout $g \in \mathcal{H}^{\otimes q'}$, $\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}}$ tend vers 0. Il s'agit encore une fois d'une conséquence du Théorème du Quatrième Moment. En effet, sur le cas particulier où $g = \bigotimes_{k=1}^n e_{i_k}$, où $(e_i, i \geq 1)$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, on a en fait

$$\begin{aligned} \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} &\leq \|\phi_n \otimes_q g\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} = \left| \left\langle \phi_n, \bigotimes_{k=1}^q e_{i_k} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q}} \right| \left\| \bigotimes_{k=q+1}^{q'} e_{i_k} \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}}^2 \\ &= \left| \left\langle \phi_n \otimes_1 e_{i_1}, \bigotimes_{k=2}^q e_{i_k} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(q-1)}} \right| = \|\phi_n \otimes_{q-1} \phi_n\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 par ce dernier Théorème. L'hypothèse de convergence uniforme des restes permet de montrer que ce calcul permet en fait de conclure au Théorème Limite souhaité par approximations L^2 (on tronque le développement de Y_n et Y_∞).

Si on résume ces Théorèmes Limites, le Théorème du Quatrième Moment est en fait à l'origine de toutes les convergences vers 0 des termes apparaissant dans le développement à partir des chaos de $\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1}X, DY \rangle_{\mathcal{H}}^2]$, sauf précisément celui d'ordre q lorsque ce dernier existe. Dans ce cas, on doit préciser qu'on souhaite de plus avoir une décorrélation asymptotique, ce qui semble être le minimum à demander pour espérer avoir une convergence qu'on interprète comme de l'indépendance asymptotique.

Application à un Théorème de Breuer–Major

Présentons une application de tout ce qu'on vient de présenter. Plus précisément, on se place dans un contexte de Théorème de BREUER–MAJOR. Ce dernier cherche à étudier des Théorèmes Centraux Limites pour des variables de la forme $f(X_k)$, où $f \in L^2(\mathcal{N}(0, 1))$ (c'est-à-dire que $\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 e^{-x^2/2} dx < \infty$), et $(X_k, k \geq 0)$ est un processus gaussien qu'on suppose stationnaire, c'est-à-dire que les $(X_k, k \geq 1)$ sont identiquement distribuées (souvent $\mathcal{N}(0, 1)$ après normalisation). Un cas particulier est de prendre $f = H_q$, le q -ème polynôme d'HERMITE, puisque cette famille de polynômes définit une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{N}(0, 1))$. On considère le cas où X est donnée par des accroissements d'un mouvement brownien fractionnaire : on considère $(X(k), k \in \mathbb{N})$ donné par

$$X(k) \triangleq B_H(k+1) - B_H(k),$$

où B_H est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de HURST $H \in (0, 1)$. La famille $(X(k), k \in \mathbb{N})$ est bien stationnaire, où la loi commune est $\mathcal{N}(0, 1)$, et admet comme fonction de covariance

$$\rho_H(k) \triangleq \mathbb{E}[X_k X_0] = \frac{1}{2} \left((k+1)^{2H} + |k-1|^{2H} - 2k^{2H} \right).$$

L'objet d'étude est ce qu'on nomme *variations d'HERMITE du mouvement brownien fractionnaire*. On étudie le comportement asymptotique d'une normalisation de $V_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{n-1} H_q(B_H(k+1) - B_H(k))$. Il est connu (regarder par exemple [BN08]) qu'on peut distinguer trois régimes selon la valeur de H où le comportement de ces variations est différent. Lorsque $0 < H < 1 - 1/2q$, la suite $\frac{1}{\sigma_{q,H}\sqrt{n}} V_n^{(q)}$ converge vers $\mathcal{N}(0, 1)$. Lorsque $H = 1 - 1/2q$, $\frac{1}{\sigma_{q,H}\sqrt{n \ln n}} V_n^{(q)}$ converge vers $\mathcal{N}(0, 1)$. Lorsque $1 - 1/2q < H < 1$, $\frac{1}{n^{1-q(1-H)}} V_n^{(q)}$ converge vers une loi dite d'HERMITE. Ces convergences sont quantifiées en distance en variations totales dans [BN08], et peuvent aussi s'exprimer en distance de WASSERSTEIN.

On s'intéresse de notre côté à l'étude d'une convergence simultanée de deux variations d'HERMITE d'ordre différent. Plus précisément, on s'intéresse à la convergence jointe de $(V_n^{(q)}, V_n^{(2)})$. On considère de plus une valeur de H de sorte que $V_n^{(q)}$ converge vers $\mathcal{N}(0, 1)$ et $V_n^{(2)}$ converge vers une loi d'HERMITE pour $q = 2$, ce qu'on nomme une loi de ROSENBLATT. La méthode que nous venons de développer nous indique qu'il suffit d'étudier $\mathbb{E}[\langle DV_n^{(2)}, DV_n^{(q)} \rangle_{\mathcal{H}}^2]$ pour obtenir une vitesse de convergence. La dérivée

ici est prise par rapport à B_H , cela signifie qu'on se place sur un espace de HILBERT $\mathcal{H} \subset L^2(0, \infty)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)g(s) \frac{dt ds}{|t-s|^{2(H-1)}}.$$

Après calculs (assez usants), on distingue deux régimes distincts pour $H \in (3/4, 1 - 1/2q)$. Le premier, pour $H \in (3/4, H^*(q))$, avec $3/4 < H^*(q) < 1 - 1/2q$ explicite, affirme que la mesure de décorrélation converge plus lentement que celle de la convergence de $V_n^{(q)}$ vers la gaussienne. Le deuxième, pour $H \in (H^*(q), 1 - 1/2q)$, montre que la décorrélation se passe plus rapidement.

Chapitre VIII : Indépendance asymptotique entre solutions d'ÉDP stochastiques et leurs moyennes spatiales

On s'intéresse dans ce chapitre à une application de la méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante que nous avons développé précédemment. Le cadre est le suivant : à partir d'une ÉDPS linéaire à bruit multiplicatif, on peut étudier la moyenne spatiale de sa solution. Plus précisément, si on considère $\mathcal{L}u = \sigma(u)\dot{W}$ une ÉDPS sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, et qu'on suppose qu'un véritable processus u est solution, alors on étudie à $t \geq 0$ fixé sa moyenne spatiale

$$M_R(t) = \frac{1}{|\mathbf{B}_R|} \int_{\mathbf{B}_R} u(t, x) dx,$$

où $R > 0$ et $\mathbf{B}_R$ la boule euclidienne de rayon R dans $\mathbb{R}^d$.

Dans différents cas, il a été montré qu'une normalisation de $M_R(t)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous étudions le cas d'un bruit gaussien, et de deux ÉDPS particulières, à savoir l'équation de la chaleur et celle des ondes. Récemment, à partir des années 2020, dans les cas où W est blanc, ou fractionnaire, des Théorèmes Limites vers une gaussienne ont été démontré par NUALART, HUANG, ZHENG et al.

Nous nous intéressons à une potentielle indépendance asymptotique entre une normalisation de $M_R(t)$, dans les cas décrits dans le paragraphe précédent, et une évaluation de la solution $u(\bar{t}, \bar{x})$, au sens suivant : si $F_R(t) = \frac{1}{\sigma[M_R(t)]} (M_R(t) - \mathbb{E}[M_R(t)])$ est la normalisation de $M_R(t)$ alors a-t-on convergence en loi du couple $(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x}))$ vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))$ lorsque R tend vers $+\infty$?

Théorème x : *Soit u solution de l'équation de la chaleur stochastique ou u solution de l'équation des ondes stochastique, au sens évolutif (mild), sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$ tel qu'un tel u existe. On considère $T > 0$, $t, \bar{t} \in [0, T]$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$.*

1. *Pour le cas de l'équation de la chaleur :*

- a.** *Si W est un bruit blanc en espace et en temps, alors $(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x}))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))$. De plus, la vitesse de convergence en distance de WASSERSTEIN est de l'ordre de $1/\sqrt{R}$.*
- b.** *Si W est un bruit blanc en temps et un bruit de RIESZ de paramètre β , alors $(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x}))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))$. De plus, la vitesse de convergence en distance de WASSERSTEIN est de l'ordre de $1/R^{\beta/2}$.*

2. *Pour le cas de l'équation des ondes en dimension 1 :*

- a.** *Si W est un bruit blanc en espace et en temps, alors $(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x}))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))$. De plus, la vitesse de convergence en distance de WASSERSTEIN est de l'ordre de $1/\sqrt{R}$.*
- b.** *Si W est un bruit blanc en temps et un bruit de RIESZ de paramètre β , alors $(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x}))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))$. De plus, la vitesse de convergence en distance de WASSERSTEIN est de l'ordre de $1/R^{\beta/2}$.*

Un bruit de RIESZ de paramètre β est un processus gaussien centré $W_\beta = (W_\beta(t, A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d))$ admettant la fonction de covariance suivante

$$\mathbb{E}[W_\beta(t, A)W_\beta(s, B)] = (s \wedge t) \int_A \int_B \frac{dx \, dy}{|x - y|^\beta}.$$

La démonstration de ce Théorème repose sur une méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante. Cette méthode nous fournit pour deux variables aléatoires $X = \delta(v)$ (δ désigne l'intégrale de SKOROHOD) et Y une estimation de la distance de WASSERSTEIN entre la loi du couple (X, Y) et $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)$. On obtient ici

$$d_W((X, Y), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbb{P}_Y) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\text{Var}[\langle DX, v \rangle_{\mathcal{H}}]} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathbb{E}[\langle v, DY \rangle_{\mathcal{H}}^2]}. \quad [4]$$

Le premier terme exprime la proximité de la loi de X par rapport à $\mathcal{N}(0, 1)$. Il est donc connu, et déjà étudié. Notre contribution consiste à calculer le deuxième terme pour chacun des quatre cas que le Théorème propose. À chaque fois, l'opérateur de dérivation est pris par rapport au bruit gaussien envisagé dans l'ÉDPS.

Par définition, le processus u résout l'équation intégrale suivante (prise au sens de WALSH)

$$u(t, x) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy),$$

où G est le noyau de GREEN associé à l'équation différentielle considérée. Cela signifie qu'on peut écrire $F_R(t)$ comme une intégrale de WALSH, donc comme une intégrale de SKOROHOD comme suit : $F_R(t) = \delta(v_{R,t})$, où

$$v_{R,t} = \frac{1}{\sigma[M_R(t)]} \left(\int_{\mathbf{B}_R} G(t - s, x - y) \, dx \right) \sigma(u(s, y)) \mathbf{1}_{[0,t]}(s).$$

Le but du jeu à chaque fois est donc de donner une estimation de $\mathbb{E}[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2]$.

Un Lemme central est déterminant pour démontrer ces résultats, comme ils l'ont été pour établir les Théorèmes Limites vers des gaussiennes. Celui-ci affirme que pour tout $p \geq 2$, il existe une constante C dépendant de p , de T et du bruit tel que

$$\mathbb{E} \left[\left| D_{s,y} u(t, x) \right|^p \right]^{1/p} \leq C G(t - s, x - y).$$

Grâce à ce Lemme, avec des inégalités de CAUCHY–SCHWARZ et en exploitant des hypothèses de régularité sur σ , on en déduit que

$$\mathbb{E} \left[\left\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{\sigma[M_R(t)]} \left(\int_{\mathbf{B}_R} \int_0^t \left\langle G(t - s, x - \bullet), G(\bar{t} - s, \bar{x} - \bullet) \right\rangle_{\mathcal{H}} \, ds \, dx \right)^2.$$

Les chemins entre chaque démonstration se séparent à ce moment précis. Pour le cas de l'équation de la chaleur, avec bruit blanc, il suffit d'utiliser la propriété de semi-groupe que vérifie G . Pour le cas à bruit coloré, l'expression du produit scalaire exige une formulation du produit scalaire interne comme une espérance de vecteurs gaussiens indépendants. Pour le cas des ondes en dimension 1, puisque G est donné par une indicatrice d'un intervalle, les calculs intégraux sont explicites, bien qu'assez fastidieux.

Chapitre IX : Méthode de Nourdin–Peccati indépendante pour la loi gaussienne multidimensionnelle

Nous présentons dans ce chapitre la méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante lorsque la loi cible de la première marginale est une loi gaussienne multidimensionnelle. La démarche est identique au cas unidimensionnel, au calcul différentiel près. L'objectif est de donner une borne de la distance de WASSERSTEIN entre la loi d'un couple de vecteurs aléatoires et le produit indépendant d'une gaussienne multidimensionnelle avec la loi de la deuxième marginale. Cette borne est exprimée en termes d'opérateurs de dérivation, puisqu'on supposera que les variables considérées sont mesurables par rapport à un processus isonormal sous-jacent.

Borne de Stein

Le Lemme de STEIN dans ce cas nous indique qu'un couple $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ suit $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})$ (on note $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$ la loi normale d -dimensionnelle centrée et de matrice de covariance C), avec $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive, si et seulement si pour toute fonction test $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[\langle C, \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_{\text{HS}}],$$

où ∇_x désigne la gradient par rapport à $\mathbf{x}$, $\text{Hess}_{x,x}(f)$ est la matrice des dérivées partielles secondes de f par rapport à $\mathbf{x}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{HS}}$ désigne la norme de HILBERT–SCHMIDT, c'est-à-dire le produit scalaire euclidien avec l'identification $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{d^2}$. Ce Lemme est très proche du Lemme de STEIN multidimensionnel classique, puisque l'unique différence entre ces deux Lemmes provient des fonctions tests f incorporant une variable de $\mathbb{R}^p$ en plus. Cet ajout permet de caractériser l'indépendance d'un vecteur $\mathbf{Y}$ avec un vecteur aléatoire suivant une loi normale.

L'équation différentielle associée s'écrit dans ce cas

$$\langle C, \text{Hess}_{x,x} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{y})], \quad [5]$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière pour que l'espérance existe, $\mathbf{Z}$ vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ suivant $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$ indépendant de $\mathbf{Y}$ et $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dans le rôle de l'inconnue. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles, faisant intervenir uniquement les dérivées de x . Ainsi, on dispose d'une expression de la solution à partir des travaux déjà réalisés précédemment dans [NPR10]. En effet, si on fixe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ et qu'on définit $h_{\mathbf{y}}(x) = h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, alors l'ÉDP [5] est équivalente à une ÉDP connue, et qui donne une solution $U_0 h_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dont on sait déjà qu'elle admet des dérivées d'ordre 1 et 2 bornées. Ainsi, une solution de [5] est donnée par $f_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_0 h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. On notera par souci d'uniformisation des notations $f_h = U h$ afin de garder en tête les calculs effectués dans [NPR10]. Ces mêmes travaux nous donnent alors la borne suivante

$$\sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,x}(U h)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h\|_{\text{Lip}}.$$

Nous avons noté $\|\cdot\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur, et $\|h\|_{\text{Lip}}$ la meilleure constante de LIPSCHITZ de h . Dans notre nouveau contexte, nous devons déterminer de plus une borne pour les dérivées croisées entre x et y . Plus précisément, on cherche une borne pour la norme de HILBERT–SCHMIDT de $\text{Hess}_{x,y}(U h)$. Il s'agit pour cela d'utiliser l'expression de $U h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et de dériver par rapport à $\mathbf{x}$ puis à $\mathbf{y}$, en supposant que h est de classe C^2 . Cela donne

$$\frac{\partial^2 U h}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial y_j} \left(e^{-t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1 - e^{-2t}} \mathbf{Z}, \mathbf{y} \right) \right] dt.$$

On utilise le fait que $\|M\|_{\text{HS}} = \sup_{A \in \mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\langle A, M \rangle_{\text{HS}}}{\|A\|_{\text{HS}}}$ pour estimer la norme HS de $\text{Hess}_{x,y}(U h)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Traitons d'abord le cas où $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et $C = I_d$. Dans ce cas, en utilisant deux inégalités de CAUCHY–SCHWARZ, l'une dans $\mathbb{R}^p$ et l'autre dans $L^2(\mathbb{P})$, et $\|h\|_{\text{Lip}} = \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} |\nabla h(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$, on en déduit l'inégalité suivante

$$\langle \text{Hess}_{x,y} U h(\mathbf{x}, \mathbf{y}), A \rangle_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|h\|_{\text{Lip}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^d A_{i,j} Z(i) \right)^2 \right]} = \frac{\pi}{2} \|h\|_{\text{Lip}} \|A\|_{\text{HS}}.$$

Ensuite, pour traiter le cas $\boldsymbol{\mu}$ et C quelconques, il suffit d'utiliser le fait que si $U^\circ h$ désigne la solution choisie de l'équation [5] dans le cas centré réduit alors

$$U h = U^\circ (h \circ t_{\boldsymbol{\mu}, C}) \circ t_{\boldsymbol{\mu}, C}^{-1},$$

où $t_{\mu,C}$ est l'opération de translation et de dilatation de sorte que si $(\mathbf{Z}^\circ, \mathbf{Y})$ suit $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})$, $t_{\mu,C}(\mathbf{Z}^\circ, \mathbf{Y})$ suit $\mathcal{N}_d(\mu, C) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})$. On en déduit la borne recherchée pour les dérivées croisées de x et y

$$\sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,y}(Uh)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h\|_{\text{Lip}}.$$

On en déduit la première borne suivante : si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,x}f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} & \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \\ \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,y}f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} & \leq \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2}. \end{cases}$$

alors

$$d_W\left((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\mu, C) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})\right) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}} \left| \mathbb{E} \left[\langle C, \text{Hess}_{x,x}f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \mu) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \right|.$$

Hypothèse de dérivabilité

Pour $f \in \mathcal{C}$, les manipulations usuelles de la méthode donnent

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle C, \text{Hess}_{x,x}f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \mu) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \left(C_{i,j} - \langle D(-L)^{-1}X(i), DX(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right) \right] \\ & \quad - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \langle D(-L)^{-1}X(i), DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned}$$

Puisque $f \in \mathcal{C}$, on en déduit la borne fondamentale suivante

$$\begin{aligned} d_W\left((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\mu, C) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})\right) & \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[\left(C_{i,j} - \langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ & \quad + \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\langle DY(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} \quad [6] \end{aligned}$$

Notons que si $\mathbf{Y}$ était lui-même gaussien, la méthode usuelle de NOURDIN–PECCATI donnerait la même borne, aux constantes près. De manière générale, il n'y a aucune raison pour que l'une des bornes soit meilleure que l'autre.

On constate, une fois de plus, que la distance est divisée en deux termes. Le premier traduit la convergence de $\mathbf{X}$ vers une gaussienne, et est souvent déjà connu quand on utilise la méthode indépendante. Le deuxième est le terme clé qui traduit une forme de décorrélation asymptotique entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Dans les applications qui suivront, seul ce deuxième terme sera calculé puisque le premier est déjà connu.

Théorèmes Limites dans les chaos de Wiener

De la même manière que dans le cas unidimensionnel, on peut écrire des Théorèmes Limites lorsque $\mathbf{X}$ appartient à un produit fini de chaos. Les énoncés sont proches de ceux soulevés dans le cas unidimensionnel, et, de fait, les généralisent. Le premier concerne les variables $\mathbf{Y}$ appartenant eux aussi à un chaos. On peut conclure en une convergence en loi du couple dès lors qu'on a décorrélation asymptotique, et une hypothèse sur les ordres.

Théorème xi : Soient $d, p \geq 1$, $(\mathbf{X}_n, n \geq 1)$ et $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ deux suites de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$. On suppose que $(\mathbf{X}_n, n \geq 1) \subset \prod_{i=1}^d \mathfrak{H}_{q(i)}$, avec $q(i) \geq 1$ et $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1) \subset \prod_{j=1}^p \mathfrak{H}_{q'(j)}$. On suppose aussi les hypothèses suivantes.

- (i) La suite $(\mathbf{X}_n, n \geq 1)$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$;
- (ii) La suite $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une probabilité $\mathbf{p}$ sur $\mathbb{R}^p$;
- (iii) Les ordres de $\mathbf{Y}_n$ sont inférieurs à ceux de $\mathbf{X}_n$: $\max_{1 \leq j \leq p} q'(j) \leq \min_{1 \leq i \leq d} q(i)$;
- (iv) On a décorrélation asymptotique : $\mathbb{E}[X_n(i)Y_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$, pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$.

Alors la suite $((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), n \geq 1)$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}$. Si $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ converge au sens de WASSERSTEIN vers $\mathbf{p}$ alors la précédente convergence se fait aussi dans ce sens. On dispose de plus de la borne suivante

$$\begin{aligned} d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C) \otimes \mathbf{p}) &\leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[\left(C_{i,j} - \langle D X_n(i), D(-L)^{-1} X_n(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[\langle D Y_n(i), D(-L)^{-1} X_n(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} + d_W(\mathbf{Y}_n, \mathbf{p}). \quad [7] \end{aligned}$$

La démonstration est identique au cas unidimensionnel. On reprend la borne [6], on applique la formule produit pour calculer les espérances des carrés de $\langle D Y(j), D(-L)^{-1} X(i) \rangle_{\mathcal{H}}$. Cela donne une somme de terme pour $1 \leq r \leq q(i) \wedge q'(j)$ qui tendent tous vers 0 par Théorème du Quatrième Moment, sauf en cas d'égalité entre $q(i)$ et $q'(j)$, et pour $r = q(i)$, où l'hypothèse de décorrélation asymptotique permet de conclure sur la convergence souhaitée.

Le deuxième Théorème concerne cette fois-ci le cas où $\mathbf{Y}_n$ admet un développement en chaos infini. On suppose une convergence L^2 , au lieu d'une simple convergence en loi pour assurer la convergence du couple.

Théorème xii : Soient $d, p \geq 1$, $(\mathbf{X}_n, n \geq 1)$ et $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ deux suites de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$. On suppose que $(\mathbf{X}_n, n \geq 1) \subset \prod_{i=1}^d \mathfrak{H}_{q(i)}$, avec $q(i) \geq 1$ et $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1) \subset L^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^p)$. On suppose aussi les hypothèses suivantes.

- (i) La suite $(\mathbf{X}_n, n \geq 1)$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$;
- (ii) La suite $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ converge dans $L^2(\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^p)$ vers une variable $\mathbf{Y}_\infty$ admettant comme loi une probabilité $\mathbf{p}$ sur $\mathbb{R}^p$;
- (iii) Le reste des développements en chaos de $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ converge uniformément vers 0 dans $L^2(\mathbb{P})$: pour tout $1 \leq j \leq p$

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{q'=M+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[J_{q'} Y_n(j)^2 \right] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0;$$

- (iv) On a décorrélation asymptotique : $\mathbb{E}[X_n(i)Y_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$, pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$.

Alors la suite $((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), n \geq 1)$ converge au sens de WASSERSTEIN vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}$. Si $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1) \subset \mathbb{D}^{1,4}$, on dispose de plus de la borne [7].

Application à un Théorème de Breuer-Major fonctionnel

Une idée possible d'application de la théorie que nous venons de développer est de montrer des convergences de lois finies-dimensionnelles de processus stochastiques. C'est ce que nous présentons ici dans un contexte de BREUER–MAJOR. Soient $q \geq 1$ et H_q le q -ème polynôme d'HERMITE. Si on considère B_H un mouvement brownien fractionnaire d'indice de HURST H , on note $X(k) = B_H(k+1) - B_H(k)$ ses incréments pour $k \in \mathbb{N}$. La famille $(X(k), k \geq 0)$ est gaussienne stationnaire, de loi commune $\mathcal{N}(0, 1)$. On considère $V_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{n-1} H_q(X(k))$ les q -variations d'HERMITE de X . Comme nous l'avons déjà expliqué, les comportements asymptotiques en loi des $V_n^{(q)}$ lorsque n tend vers ∞ sont connus.

Pour H petit, ces variations vérifient une convergence vers une gaussienne (sous normalisation) tandis que pour H proche de 1, on a convergence vers ce qu'on nomme une variable d'HERMITE.

L'étape supérieure après avoir démontré un Théorème Limite est souvent d'étudier un Théorème Central Limite fonctionnel. On considère une approximation affine par morceaux de la marche aléatoire suivante, de pas $1/N$, dirigée par $V_n^{(q)}$

$$\mathbf{S}_N^{(q)}(t) = V_{\lfloor Nt \rfloor}^{(q)} + (Nt - \lfloor Nt \rfloor)H_q(X(\lfloor Nt \rfloor)).$$

Il est connu qu'au sens des lois finies-dimensionnelles, pour H petit et sous normalisation, cette marche aléatoire converge en loi vers un mouvement brownien. De plus, grâce aux travaux dans [NPR10], on dispose d'une estimation entre un vecteur composé d'incrémentes normalisés de $\mathbf{S}_N^{(q)}$ et une loi normale standard de dimension d .

Nous avons étudié dans le cas unidimensionnel une convergence asymptotique de $(V_n^{(q)}, V_n^{(2)})$, pour H de sorte que $V_n^{(q)}$ converge vers une gaussienne et $V_n^{(2)}$ vers une loi de ROSENBLATT, vers le couple indépendant dont la première marginale est gaussienne et la deuxième suit une loi de ROSENBLATT. On s'intéresse cette fois-ci à étudier la convergence du couple

$$\left(\left(\frac{\mathbf{S}_N^{(q)}(t_i) - \mathbf{S}_N^{(q)}(t_{i-1})}{\sigma_{q,H} \sqrt{N(t_i - t_{i-1})}} \right)_{1 \leq i \leq d}, \frac{1}{N^{2H-1}} \mathbf{S}_N^{(2)}(1) \right)$$

lorsque $[N \rightarrow \infty]$ vers $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I_d) \otimes \mathcal{R}$. On a noté $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_d$, $\sigma_{q,H} > 0$ une constante de normalisation, et $\mathcal{R}$ la loi limite de $V_n^{(2)}$. Notez aussi que $\mathbf{S}_N^{(2)}(1) = V_N^{(2)}$. D'après la borne fondamentale [6], puisque la convergence de la première marginale a été étudié par ces mêmes moyens, il suffit d'étudier pour $1 \leq i \leq d$

$$\mathbb{E} \left[\left\langle \mathbf{D}(\mathbf{S}_N^{(q)}(t_i) - \mathbf{S}_N^{(q)}(t_{i-1})), \mathbf{D}V_N^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right].$$

Or, nous avons déjà étudié ce terme dans le Chapitre VII. La conclusion de cette étude est qu'on a toujours convergence vers le produit indépendant des lois limites. On peut l'interpréter comme de l'indépendance asymptotique : la connaissance des valeurs prises par l'un n'a aucune influence pour N grand sur les valeurs prises par l'autre. Il s'agit d'un fait non trivial, il peut sembler étrange qu'à partir des mêmes données des incréments d'un même brownien fractionnaire, le fait d'étudier les 2-variations ou les q -variations d'HERMITE donnent naissance à des variables indépendantes sur un temps long.

Application à un problème de matrices de Wishart

Supposons qu'on dispose de données sous la forme de matrices. On note $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ la matrice composées de ces données. Dans un but statistique, il est intéressant de s'intéresser à la matrice de WISHART associée : il s'agit de la matrice $\mathbf{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{W} = \sqrt{d} \left(\frac{1}{d} \mathbf{X} \mathbf{X}^t - \mathbf{I}_n \right),$$

où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité. Supposons que les coefficients de $\mathbf{X}$ soient aléatoires. On s'intéresse au comportement asymptotique en loi de $\mathbf{W}$ lorsque n tend vers ∞ . On interprète cette convergence comme la donnée de beaucoup d'informations.

On se place dans le cas où chaque coefficient de $\mathbf{X}$, noté $\mathbf{X}(i, j)$, est donné par une intégrale stochastique multiple au sens de WIENER. Autrement dit, on suppose que les coefficients sont chaotiques. De plus, on suppose que les variables d'une même ligne sont dans le même chaos : $\mathbf{X}(i, j) = I_{q(i)}(f(i, j))$. On suppose aussi que tous les ordres des chaos qui apparaissent sont bornées : pour tout $i \geq 1$, $q(i) \leq q^*$. Enfin, on suppose que ces variables sont toutes indépendantes. La matrice $\mathbf{W}$ associée a été étudiée dans [BDT21], et son comportement asymptotique est donné en distance de WASSERSTEIN par

$$\mathbf{d}_W(\mathbf{W}_{n,d}, \text{GOE}(n)) \leq C(q^*) \sqrt{\frac{n^3}{d}}.$$

Une matrice aléatoire Z carrée de taille n est de loi (ou appartient à) $\text{GOE}(n)$ si la famille $(Z(i, j), 1 \leq i \leq j \leq n)$ est indépendante, si $\mathbb{P}$ -presque sûrement $Z(i, j) = Z(j, i)$ et enfin, si pour $1 \leq i \neq j \leq n$, $Z(i, i)$ suit $\mathcal{N}(0, m_4^2 - 1)$, avec $m_4 > 0$ prescrit à l'avance, et $Z(i, j)$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$.

On s'intéresse au problème suivant. Quelle est l'influence d'un bloc de donnée de taille dépendant de n sur les valeurs possibles asymptotique de la matrice W ? Plus précisément, considérons J_n un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$, K_d un sous-ensemble de $\llbracket 1, d \rrbracket$, on considère le vecteur aléatoire suivant

$$\mathbf{Y} = (X(a, b), a \in J_n, b \in K_d).$$

On cherche à évaluer la distance de WASSERSTEIN entre le couple $(W, \mathbf{Y})$ et la loi de couple $(Z, \mathbf{Y})$, où Z est une matrice du $\text{GOE}(n)$ indépendante du vecteur $\mathbf{Y}$.

Théorème xiii : *Il existe $C > 0$ dépendant de q^* tel que pour tout $n, d \geq 1$,*

$$d_W((W, \mathbf{Y}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})) \leq C \left(\sqrt{\frac{n^3}{d}} + \sqrt{\frac{n \# J_n \# K_d}{d}} \right).$$

Notons que si Z_n est vu comme un vecteur gaussien de taille n^2 , sa loi est dégénérée à cause de sa symétrie. On considère son vecteur réduit, noté Z^{half} , de taille $\frac{n(n+1)}{2}$ et donné par

$$Z^{\text{half}} = (Z(i, j), 1 \leq i \leq j \leq n).$$

La matrice de covariance d'un tel vecteur est alors diagonale, sa norme d'opérateur est connue, et vaut 2, tandis que celle de son inverse vaut 1. De plus, on dispose de l'inégalité suivante

$$d_W((W, \mathbf{Y}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})) \leq \sqrt{2} d_W((W^{\text{half}}, \mathbf{Y}), (Z_n^{\text{half}}, \mathbf{Y})).$$

D'après la borne fondamentale [6], pour avoir l'inégalité recherchée, il suffit d'étudier l'espérance du carré de $\langle DX(a, b), D(-L)^{-1}W(i, j) \rangle_{\mathcal{H}}$, pour $a \in J_n, b \in K_d$ et $i \leq j$. Si $i < j$, alors $W(i, j)$ est dans le chaos d'ordre $q(i) + q(j)$. En exploitant l'indépendance des variables $X(i, j)$ via le critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI, il suit que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle DX(a, b), D(-L)^{-1}W(i, j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\ &= \frac{1}{d(q_i + q_j)^2} \left(\delta_{j,a} \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^4 X(i, b)^2 \right] + \delta_{i,a} \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^4 X(j, b)^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Par hypercontractivité, et en utilisant le fait que les variables $X(i, j)$ partagent même moment d'ordre 2, il suit que

$$\mathbb{E} \left[\langle DX(a, b), D(-L)^{-1}W(i, j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{c(q_a)}{d} (\delta_{i,a} + \delta_{j,a}).$$

Pour $i = j$, $W(i, i)$ n'est plus dans un seul chaos, et se développe en chaos. Néanmoins, le même type de raisonnement que précédemment permet de conclure que

$$\mathbb{E} \left[\langle DX(a, b), D(-L)^{-1}W(i, i) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{\delta_{i,a} c(q_a)}{d}.$$

On en déduit en sommant ces deux inégalités que

$$\sum_{a \in J_n} \sum_{b \in K_d} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathbb{E} \left[\langle DX(a, b), D(-L)^{-1}W(i, j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{c(q^*)}{d} \sum_{a \in J_n} \sum_{b \in K_d} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\delta_{i,a} + \delta_{j,a}),$$

d'où la borne annoncée dans le Théorème.

Supposons que $d = d_n = n^{3+\varepsilon}$, avec $\varepsilon > 0$, de sorte que la distance de WASSERSTEIN entre W et la loi GOE tende vers 0. Supposons de plus que $\#J_n \sim n^\gamma$ et que $\#K_d \sim d^\beta$ lorsque ces deux paramètres tendent vers ∞ . Alors, on obtient cette fois-ci

$$d_W((W, \mathbf{Y}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})) \leq C \left(\frac{1}{n^{\varepsilon/2}} + \left(\frac{n^{\gamma+(3+\varepsilon)\beta}}{n^{2+\varepsilon}} \right)^{1/2} \right).$$

Le terme de droite tend vers 0 si et seulement si $\varepsilon > \frac{3\beta-2+\gamma}{1-\beta}$. Le cas extrême où $\beta = 1$, c'est-à-dire que $\mathbf{Y}$ couvre toutes les colonnes, n'implique alors pas nécessairement d'indépendance asymptotique (au sens de WASSERSTEIN). Cela signifie que $\mathbf{Y}$ possède trop de données pour avoir indépendance asymptotique par rapport à W . Sinon, pour tout $0 \leq \gamma \leq 1$ et $0 \leq \beta < 1$, il existe un seuil ε_0 pour lequel pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, l'indépendance asymptotique au sens de WASSERSTEIN est automatique entre $\mathbf{Y}$ et W .

Application à un problème d'estimateur d'une ÉDPS

On considère l'équation des ondes stochastiques en dimension 1, additive avec bruit blanc en espace et en temps suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}(t, x) = \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(t, x) + \dot{W}(t, x), & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u_\theta(t = 0, x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(t = 0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ici, $\theta > 0$ est un paramètre, qu'on peut interpréter comme une vitesse de propagation (plus exactement son carré) de l'onde. On considère une solution au sens évolutif du terme (au sens *mild*). Il s'agit d'un processus gaussien, qu'on note u_θ , dont la fonction de covariance est connue. L'étude de ses variations quadratiques temporelles sur un pas de temps uniforme a été étudiée dans [AGT22], et il a été démontré que

$$V_N(x) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \left(u_\theta \left(\frac{i+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{i}{N}, x \right) \right)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^2} \frac{\sqrt{\theta}}{4}.$$

On a de plus un Théorème Limite associé : il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$U_N(x) \triangleq \sqrt{\frac{N}{\sigma^2}} \left(V_N(x) - \frac{\sqrt{\theta}}{4} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

On en déduit un estimateur $\hat{\theta}_N(x) = 16V_N(x)^2$, dont on sait qu'il est fortement consistant (il converge presque sûrement vers θ), et qu'il est asymptotiquement normal.

Comme dans l'application précédente, on s'intéresse à l'influence d'un certain nombre de données sur les valeurs possibles prises par l'estimateur $\hat{\theta}$. On considère pour cela J_N un sous-ensemble de $\llbracket 1, N \rrbracket$ et le vecteur aléatoire suivant

$$\mathbf{Y}_N(x) = \left(u_\theta \left(\frac{i+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{i}{N}, x \right), i \in J_N \right).$$

Théorème xiv : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $\hat{\Theta}_N$ une normalisation de $\hat{\theta}_N$ par

$$\hat{\Theta}_N(x) \triangleq \sqrt{\frac{N}{64\sigma^2}} \left(\hat{\theta}_N(x) - \theta \right).$$

Il existe une constante ne dépendant pas de x telle que

$$d_W \left(\text{Loi}(\hat{\Theta}_N(x), \mathbf{Y}_N(x)), \text{Loi}(\hat{\Theta}_N(x)) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N(x)) \right) \leq C \left(\frac{1}{N} + \sqrt{\frac{m^+(N)^4 \#J_N}{m^-(N)N^5}} \right),$$

où $m^-(N) = \min J_N$ et $m^+(N) = \max J_N$.

Considérons le cas extrême où $J_N = \llbracket 1, N \rrbracket$. Alors $\frac{m^+(N)^4 \#J_N}{m^-(N)N^5} = 1$ ne converge pas vers 0. On ne peut pas conclure sur de l'indépendance asymptotique au sens de WASSERSTEIN dans ce cas. Dans le cas où $\#J_N \sim N^\gamma$, avec $0 < \gamma < 1$, alors la borne est équivalente à $\left(\frac{1}{N} [N^\gamma] \right)^{5/2}$, qui tend vers 0. Dans ce cas, on a bien indépendance asymptotique du vecteur $\mathbf{Y}_N$ et de la variable $\hat{\Theta}_N$.

Chapitre X : Méthode de Nourdin–Peccati indépendante pour la loi Gamma

On construit dans ce chapitre une méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante par rapport à une loi Gamma. Plus précisément, étant donnée une probabilité μ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, on cherche à estimer une borne en distance de WASSERSTEIN entre μ et $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu_1$, où μ_1 est une marginale de μ sur $\mathbb{R}^p$. Il s'agit de la poursuite des investigations entamées dans les chapitres précédents où on avait traité les cas gaussiens unidimensionnels et multidimensionnels. On note p_ν la densité de $\bar{\Gamma}(\nu)$, donnée par

$$p_\nu(x) \triangleq \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} (x + \nu)^{\nu/2-1} e^{-\frac{1}{2}(x+\nu)} \mathbf{1}_{(-\nu, +\infty)}(x).$$

Ici, $\nu > 0$ est un paramètre réel. Si ν est un entier pair, on se retrouve avec une loi du χ^2 centrée. Notez que p_ν vérifie l'équation différentielle $2(x + \nu)p_\nu(x) = -\int_{-\nu}^x up_\nu(u) du$.

Borne de Stein

À partir du Lemme de STEIN pour la loi Gamma, on en déduit le Lemme de STEIN *indépendant* pour la loi Gamma suivant. Un couple de variable (Z, Y) suit la loi $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \text{Loi}(Y)$ si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances suivantes existent,

$$\mathbb{E} \left[2(Z + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(Z, Y) \right] = \mathbb{E}[Zf(Z, Y)].$$

L'équation différentielle associée est la suivante : pour $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances existent,

$$2(x + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - xf(x, y) = h(x, y) - \mathbb{E}[h(Z_\nu, y)],$$

où Z_ν suit $\bar{\Gamma}(\nu)$ et est indépendante de Y . À l'aide du précieux travail de DÖBBLER et PECCATI dans [DP18] (dans le cas unidimensionnel), on est capable d'exhiber une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entier (et non pas uniquement sur $(-\nu, +\infty) \times \mathbb{R}$ et en ne tronquant pas la solution), admettant des dérivées partielles bornées. Plus précisément, on exhibe une solution f_h vérifiant

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, y) \right| \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right|,$$

et

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f_h}{\partial y}(x, y) \right| \leq \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} up_\nu(u) du} \right\} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right|,$$

où x_ν est la médiane de $\bar{\Gamma}(\nu)$. Si la première borne n'est pas surprenante au vu de [DP18], la deuxième est nouvelle. Une idée pour montrer l'inégalité est la suivante. On se rend en fait compte lorsque h admet une dérivée partielle par rapport à y que $\frac{\partial f_h}{\partial y} = f_{\frac{\partial h}{\partial y}}$, si bien qu'on doit étudier f_ϕ , pour $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (disons qu'elle est continue), c'est-à-dire étudier $\|f_\phi\|_\infty$ en fonction de $\|\phi\|_\infty$. Or, f_ϕ est donnée par morceaux, avec une expression intégrale en fonction de p_ν sur $(-\nu, +\infty)$ et une autre expression intégrale en fonction de q_ν , une fonction voisine de p_ν (bien qu'elle ne définisse pas une densité de probabilité) sur $(-\infty, -\nu)$. Le maximum apparaissant dans l'inégalité provient de l'étude sur chacun des deux intervalles.

On en déduit la borne de STEIN suivante. Si on note $\mathcal{C}_\nu$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables vérifiant

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\}$$

et

$$\max_{1 \leq j \leq p} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) \right| \leq \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} up_\nu(u) du} \right\}.$$

Alors si $X, Y \in L^1(\mathbb{P})$, on a

$$d_W((X, Y), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \text{Loi}(Y)) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) - X f(X, Y) \right] \right|.$$

Borne avec l'opérateur de dérivation

Supposons désormais que X et Y sont de plus dérivables. On en déduit que pour $f \in \mathcal{C}_\nu$, avec les manipulations usuelles de la méthode de NOURDIN–PECCATI que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) - X f(X, Y) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) \left(2(X + \nu) - \langle DX, D(-L)^{-1} X \rangle_{\mathcal{H}} \right) \right] - \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(X, Y) \langle DY, D(-L)^{-1} X \rangle_{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned}$$

On en déduit la borne fondamentale suivante

$$\begin{aligned} d_W((X, Y), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \text{Loi}(Y)) &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(2(X + \nu) - \langle DX, D(-L)^{-1} X \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ &\quad + \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) du} \right\} \sqrt{\mathbb{E} [\langle DY, D(-L)^{-1} X \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \quad [8] \end{aligned}$$

Théorèmes Limites dans les chaos de Wiener

Comme dans les études précédentes, la borne fondamentale mène à des Théorèmes Limites intéressants dans le cas où la première marginale, supposée convergente vers une loi Gamma, est dans un chaos de WIENER. Le Théorème des Troisième et Quatrième Moments Gamma permettent de conclure, en plus de la borne obtenue précédemment.

Théorème xv : Soient $\nu > 0$, $(X_n, n \geq 1)$ et $(Y_n, n \geq 1)$ deux suites de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe $q \geq 1$ tel que $(X_n, n \geq 1) \subset \mathfrak{H}_{2q}$ et $q' \geq 1$ tel que $(Y_n, n \geq 1) \subset \mathfrak{H}_{q'}$. On suppose les hypothèses suivantes.

- (i) $(X_n, n \geq 1)$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(\nu)$;
- (ii) $(Y_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une probabilité $\mathbf{p}$ de $\mathbb{R}$;
- (iii) Les chaos sont ordonnés : $2q \geq q'$;
- (iv) La projection sur le q -ème chaos de $X_n Y_n$ tend vers 0 dans L^2 : $\mathbb{E}[J_{q'}(X_n Y_n)^2] \rightarrow 0$;
- (v) On a décorrélation asymptotique : $\mathbb{E}[X_n Y_n] \rightarrow 0$.

Alors le couple $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbf{p}$. Si de plus $(Y_n, n \geq 1)$ converge au sens de WASSERSTEIN alors la convergence se précédente se fait aussi en ce sens, avec de plus l'estimation suivante

$$\begin{aligned} d_W((X_n, Y_n), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbf{p}) &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(2(X_n + \nu) - \langle DX_n, D(-L)^{-1} X_n \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ &\quad + \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) du} \right\} \sqrt{\mathbb{E} [\langle DY_n, D(-L)^{-1} X_n \rangle_{\mathcal{H}}^2]} + d_W(Y_n, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Remarquons une hypothèse nouvelle, qui est absente des cas gaussien, il s'agit de l'hypothèse (iv). Elle se traduit aussi avec des contractions : si $X = I_{2q}(\phi)$ et $Y = I_{q'}(g)$, avec $2q \geq q'$, alors d'après la formule produit

$$J_{q'}(XY) = q! \binom{2q}{q} \binom{q'}{q} I_{q'}(\phi \otimes_q g).$$

Ainsi, la convergence L^2 requise par **(iv)** se traduit par la convergence de $\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}$ vers 0.

Le Théorèmes des Troisième et Quatrième Moments Gamma permettent en fait de montrer que lorsque n tend vers ∞ , $\|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}$ tend vers 0, pour $1 \leq r \leq q'$, avec $r \neq q$, avec l'argument usuel

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes (2q+q'-2r)}} \leq \|\phi_n \otimes_{2q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \sup_{n \geq 1} \|g_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}^2.$$

Or, la convergence de X_n vers la loi Gamma centrée n'implique uniquement que la convergence de $\|\phi_n \otimes_{2q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}}$ pour $2q - r \neq q$, soit $r \neq q$. Par conséquent, à cause de cette restriction, les arguments usuels qu'on a appliqué avec les lois gaussiennes ne permettent pas de conclure sur la convergence souhaitée, à cause du seul terme d'ordre q . On peut de plus montrer que cette hypothèse est nécessaire pour avoir la conclusion. Prenez le cas $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$, muni du processus isonormal provenant d'un mouvement brownien. Si on considère les suites constantes $X = I_2(\mathbf{1}_{(-3/4, 1/4)}^{\otimes 2})$ et $Y = I_1(\mathbf{1}_{(-1/4, 3/4)})$, alors toutes les hypothèses sauf **(iv)** sont vérifiées. De plus, par le critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI, on constate que X et Y ne sont pas indépendantes. Le Théorème est bien mis en défaut.

Quelques exemples

Proposons deux illustrations de la méthode que nous venons de décrire. Plaçons-nous dans le cas $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$, muni du processus isonormal sous-jacent à un mouvement brownien. Une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ est donnée par les fonctions trigonométriques $s_n(x) = \sqrt{2} \sin(2\pi n x)$ et $c_n(x) = \sqrt{2} \cos(2\pi n x)$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Pour $N \geq 2$, considérons la suite de variables aléatoires suivantes

$$U_N \triangleq \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} \int_0^1 \int_0^t (\cos(2\pi n t) \cos(2\pi m s) + \cos(2\pi n s) \cos(2\pi m t)) dB_s dB_t,$$

où $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ est le mouvement brownien défini plus tôt. On peut interpréter U_N comme un élément du chaos d'ordre 2 : $U_N = I_2(\phi_N)$, avec

$$\phi_N = \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} c_n \tilde{\otimes} c_m.$$

Une application du Théorème des Troisième et Quatrième Moments Gamma montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$d_W(U_N, \bar{\Gamma}(1)) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

On interprète U_N comme une moyenne empirique des intégrales d'ordre 2 de $c_n \tilde{\otimes} c_m$ (pas tout à fait, à cause du fait qu'il y ait $N(N-1)$ termes dans la somme, et qu'on ne divise que par $N-1$, mais cela est dû à une normalisation liée au calcul de la variance de U_N). On s'intéresse à l'influence du nombre de données sur cette convergence. Plus précisément, si on se donne K_N un sous-ensemble de $\llbracket 1, N \rrbracket$ et un vecteur aléatoire $\mathbf{G}_N = (I_2(c_n \tilde{\otimes} c_m), n, m \in K_N, n \neq m)$ contenant des termes de la somme définissant U_N , à quelle condition sur $\sharp K_N$ a-t-on $d_W((U_N, \mathbf{G}_N), \bar{\Gamma}(1) \otimes \text{Loi}(\mathbf{G}_N)) \rightarrow 0$ lorsque N tend vers ∞ ? Cela signifie que la connaissance des valeurs prises par ces termes n'influent pas beaucoup sur celle de la moyenne U_N . En particulier, les valeurs extrêmes de ces termes ne donnent pas nécessairement naissance à une valeur extrême pour les moyennes.

Il suffit d'après la borne fondamentale [6] (en version multidimensionnelle pour Y) de calculer

$$\sum_{\substack{k, l \in K_N \\ k \neq l}} \sqrt{\mathbb{E}[\langle DU_N, DG_N(k, l) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \leq C \frac{\sharp K_N}{\sqrt{N}}.$$

On en déduit que si les données dans K_N sont de l'ordre de $N^{1/2-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1/2$, alors en distance de WASSERSTEIN, $(U_N, \mathbf{G}_N)$ est de loi approximative $\bar{\Gamma}(1) \otimes \text{Loi}(\mathbf{G}_N)$, qu'on interprète comme de l'indépendance asymptotique.

Le deuxième exemple qu'on propose est une étude de moyenne d'intégrales stochastiques. On se place sur $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$. Une famille orthonormale sur $\mathcal{H}$ est donnée pour $n \geq 0$ par $e_n = \mathbf{1}_{[2n, 2n+1]}$. On définit pour $N \geq 2$

$$U_N \triangleq \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} I_2(e_i \tilde{\otimes} e_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} (B_{2i+1} - B_{2i})(B_{2j+1} - B_{2j}).$$

Cette fois-ci, au lieu de s'intéresser à l'influence d'un certain nombre de données, on considère une famille $(g_n^{(a)}, n \geq 1)$ orthogonale, paramétrée par $a > 0$, et qui se rapproche de plus en plus d'une famille orthogonale au $(e_n, n \geq 0)$:

$$g_n^{(a)} \triangleq \mathbf{1}_{[2n-1+\frac{1}{n}, 2n+\frac{1}{n^a}]}.$$

On considère la moyenne d'intégrales doubles associée

$$V_N^{(a)} = \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} I_2(g_i^{(a)} \tilde{\otimes} g_j^{(a)}) = \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \left(B_{2i+\frac{1}{i^a}} - B_{2i-1+\frac{1}{i}} \right) \left(B_{2j+\frac{1}{j^a}} - B_{2j-1+\frac{1}{j}} \right).$$

On montre, comme pour U_N , que $V_N^{(a)}$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(1)$, avec $d_W(V_N^{(a)}, \bar{\Gamma}(1)) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$. On démontre alors que

$$d_W\left((U_n, V_n^{(a)}), \bar{\Gamma}(1) \otimes \bar{\Gamma}(1)\right) \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^a} \right) \leq C \begin{cases} 1/\sqrt{N} & \text{si } a \geq 1/2 \\ 1/N^a & \text{si } a < 1/2 \end{cases}.$$

Pour cela, il suffit de calculer $\mathbb{E}[\langle DU_N, DV_N^{(a)} \rangle_{\mathcal{H}}^2]$ pour obtenir le deuxième terme. Il est intéressant de noter que puisque la famille $(g_n^{(a)}, n \geq 1)$ est asymptotiquement orthogonale à $(e_n, n \geq 0)$, les intégrales stochastiques doubles associées sont décorréélées asymptotiquement (et pas indépendant *a priori*). Et d'après ce que nous venons de montrer, les moyennes associées de leurs intégrales stochastiques doubles sont quand à elles asymptotiquement indépendantes, dans le sens où le couple dont les marginales sont les moyennes considérées converge en loi vers le produit indépendant de deux lois Gamma.

Notations et conventions

Les numérotations sont les suivantes : les parties seront nommées littéralement (première partie, deuxième, etc), les chapitres seront en romain (Chapitre I, II, etc), les sections seront en arabe (Section 1, 2, etc), les sous-sections et sous-sous-sections de la forme section.sous-section(.sous-sous-section). Chaque Définition, Proposition, Théorème, Corollaire et Remarque sont numérotées par un même compteur, et sera de la forme « **chapitre.section.compteur.** » Une remarque sera délimitée par le symbole ♣. Une démonstration sera toujours rédigée en **sans sérif** afin de distinguer rapidement les phases de démonstration des explications externes qui gravitent autour du sujet. Elle se conclura toujours par $\square$. Toutes les équations numérotées le seront sous la forme « [chapitre.numéro] ». Les références situées en fin de document seront de la forme « [Noms-année] » ([NP05] par exemple), et classées par ordre alphabétique d'auteur.

Symbole	Signification	Symbole	Signification	Symbole	Signification
$\triangleq$	Égal par définition à	$\mathbf{x}$ v.s. x	Vecteur v.s. réel	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$
$\mathbf{0}$	Vecteur nul de $\mathbb{R}^d$	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Si non précisé, espace probabilisé ambiant	$L^p(\Omega),$ $L^p(\mathcal{F}),$ L^p , pour $p \in [1, \infty]$	Espace de LEBESGUE $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\mathbb{E}[X]$	Espérance d'une variable aléatoire numérique X	$\varphi_X(t)$	Fonction caractéristique de X évaluée en $t \in \mathbb{R}$	$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ prise en $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Loi normale unidimensionnelle de moyenne μ et de variance σ^2	$\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$	Loi normale d -dimensionnelle de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance C	$\mathbb{E}[X \mathcal{G}]$	Espérance conditionnelle de X sachant la tribu $\mathcal{G}$
$\sigma(E)$, avec $E \subset \Omega$	Tribu engendrée par E	$\mathcal{B}(E)$	Tribu borélienne engendrée par un espace topologique E	$\llbracket a, b \rrbracket$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$	L'ensemble des entiers compris entre a (inclus) et b (inclus)
$\lfloor x \rfloor$, pour $x \in \mathbb{R}$	Partie entière de x par défaut (l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k + 1$)	« Soit $\mathbf{x} \geq 1$ »	Si $\mathbf{x}$ est une lettre parmi $n, m, k, l, q, i, j, d, N$, désigne un entier plus grand ou égal que 1. Sinon, désigne un réel plus grand ou égal que 1	$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers positifs, contenant 0
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers positifs, excluant 0	$\delta_{i,j}$, pour $i, j \in \mathbb{Z}$	Symbole de KRONECKER, vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon	Pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$, $d \geq 1$, $ \boldsymbol{\alpha} $	Longueur de $\boldsymbol{\alpha}$, i.e. la somme de tous les coefficients

$\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices réelles de taille d symétriques positives	$\mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices réelles de taille d symétriques définies positives	E ensemble, $A \subset E$. $\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$	Fonction indicatrice de A , qui renvoie 1 si la variable d'entrée est dans A , et 0 sinon
i	Un complexe tel que $i^2 = -1$	Γ	Fonction spéciale Gamma donnée pour $\nu > 0$ par $\Gamma(\nu) \triangleq \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-1} du$	$C(E, F)$	Espace des fonctions continues de E dans F
$C(E)$	Espace des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$	Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, f' ou $\frac{df}{dx}$	Dérivée de f	$f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ ou $\left. \frac{d}{dx}[f(x)] \right _{x=a}$	Dérivée de f évaluée en a
$f^{(k)}(a)$ ou $\left. \frac{df}{dx}(x) \right _{x=a}$	Dérivée k -ème de f en a	$\nabla f(\mathbf{x})$	Gradient de f par rapport à la base canonique évalué en $\mathbf{x}$	$\text{Hess}(f)(\mathbf{x})$	Matrice Hessienne de f appliquée à $\mathbf{x}$

Première partie

Méthode de Stein–Malliavin

Calcul de Malliavin

« On devient pas chef parce qu'on le mérite, andouille! On devient chef par un concours de circonstances, on le mérite après. »

César à Arthur, *Kaamelott Livre VI*, 2009.

Considérons un phénomène aléatoire, et supposons qu'il soit gouverné par un processus stochastique sous-jacent, du type mouvement brownien si on observe un phénomène continu, ou du type processus de POISSON s'il y a des sauts, ou de LÉVY, de RADEMACHER (voir [RNP10]), voire même des martingales de AZÉMA (voir [AY89]). Le calcul de MALLIAVIN introduit une notion de *dérivation* par rapport à ces processus. Afin de ne pas trop être hors sujet par rapport au reste de cette thèse, nous introduirons uniquement le calcul de MALLIAVIN par rapport à un ou plusieurs mouvements browniens, ou de manière équivalente, par rapport à un (resp. plusieurs) processus isonormal (resp. isonormaux). Pour une introduction du calcul de MALLIAVIN par rapport aux processus de POISSON (qui fait donc intervenir une dérivée *discrète*), regarder l'ensemble d'articles [PR16].

L'introduction du calcul de MALLIAVIN provient de la volonté de prouver un résultat probabiliste sur les équations différentielles stochastiques (ÉDS dans la suite) avec des outils probabilistes, dans [Mal78]. Le critère de HÖRMANDER permet de déterminer si la solution d'une ÉDS admet une densité, et sa régularité. Néanmoins, la preuve de HÖRMANDER reposait sur des résultats analytiques. Le calcul de MALLIAVIN, à travers sa relation d'intégration par parties, permet d'en déterminer une preuve probabiliste. Voir [Hai11] pour une présentation plus complète de ce propos.

Un exemple d'utilisation de calcul de MALLIAVIN en mécanique quantique peut être lu dans [Mey86], notamment dans la section 4 à propos d'espaces de FOCK. L'opérateur N de cette référence est en fait ce qu'on nommera l'opérateur L . On peut aussi retrouver une discussion sur la formule produit pour les intégrales stochastiques multiples de WIENER qu'on détaillera après.

Dans cette section, on commencera par voir en quoi le calcul de MALLIAVIN est une théorie de calcul différentiel sur l'espace de WIENER, et comprendre la relation d'intégration par parties. Cela est l'approche *variationnelle*, en travaillant directement sur un espace *canonique*. Ensuite, nous resterons dans un aspect moins trajectorien, puisqu'on se placera sur un espace probabilisé quelconque. Nous évoquerons la notion de chaos de WIENER, centrale dans tous nos résultats. On en déduira deux définitions équivalentes de la dérivée de MALLIAVIN, l'une *via* les chaos, et l'autre *via* la fermeture d'un espace de variables aléatoires dites *lisses*. On conclura cette partie en évoquant les opérateurs d'ORNSTEIN–UHLENBECK, qui sont extrêmement pertinents dès lors qu'on voudra appliquer la méthode de STEIN qu'on évoquera dans le prochain chapitre.

1. Mouvement brownien et espace canonique

Soit $\Omega_0 \triangleq \{\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \omega(0) = 0\}$. On munit Ω_0 de la norme suivante (associée à la convergence uniforme sur tout compact) : pour tout $\omega \in \Omega_0$,

$$\|\omega\|_{\Omega_0} \triangleq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min \left\{ 1, \sup_{t \in [0, n]} |\omega(t)| \right\}.$$

Soit $\mathcal{F}_0$ la tribu borélienne associée à cette distance. On peut montrer que $\mathcal{F}_0$ est engendrée par les cylindres, c'est-à-dire engendrée par des intersections finies d'ensembles du type $\{\omega \in \Omega_0, \omega(t) \in A\}$, avec $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, on considère $B_t(\omega) \triangleq \omega(t)$. La famille d'applications $(B_t)_{t \geq 0}$ est nommée *mouvement brownien*. Notez bien que sur ce choix précis d'espace Ω_0 , $(B_t)_{t \geq 0} = \text{id}_{\Omega_0}$. Il s'agit en particulier d'une famille d'applications $\mathcal{F}_0$ -mesurable. Soit $\mathbb{W}$ la mesure de WIENER sur $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$. C'est l'unique mesure de probabilité qui vérifie les deux propriétés suivantes :

i. Pour tout $t \geq 0$, B_t suit la loi normale centrée de variance t :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{W}[B_t \leq x] \left(\triangleq \mathbb{W}[\{\omega \in \Omega, \omega(t) \leq x\}] \right) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2t}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}};$$

ii. Pour tout $d \geq 1$, pour tous $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_d$, et pour tous $A_0, \dots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{W} \left[\{B_{t_0} \in A_0\} \cap \left(\bigcap_{k=0}^{d-1} \{B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \in A_k\} \right) \right] = \mathbb{W}[B_{t_0} \in A_0] \cdot \prod_{k=0}^{d-1} \mathbb{W}[B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \in A_k].$$

La mesure $\mathbb{W}$ est aussi caractérisée par ses valeurs pour des ensembles cylindriques : pour tout $d \geq 1$, $0 \leq t_1 < \dots < t_d$ et $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{W} \left[\bigcap_{k=1}^d \{B_{t_k} \in A_k\} \right] = \int_{A_1 \times \dots \times A_d} \prod_{k=0}^{d-1} \frac{e^{-\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2(t_{k+1} - t_k)}}}{\sqrt{2\pi(t_{k+1} - t_k)}} dx_1 \dots dx_d,$$

où $t_0 = 0$ et $x_0 = 0$. On dit alors aussi que la mesure de WIENER $\mathbb{W}$ est la *loi du mouvement brownien*. L'espace probabilisé $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{W})$ est alors appelé *espace canonique du mouvement brownien* ou *espace de WIENER*. Pour une construction de la mesure de WIENER comme limite en loi d'une marche aléatoire, regarder l'incontournable [KS98]. Sur cet espace, on cherche à définir une notion de dérivation d'une application $F : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$, qui s'avèrera être (à peu de choses près) la dérivée au sens de MALLIAVIN.

Pour définir une dérivation pour des fonctionnelles sur Ω_0 , on utilise la notion de dérivée directionnelle. Il faut pour cela un espace de HILBERT. On définit l'espace de CAMERON–MARTIN par :

$$\mathbf{H} \triangleq \left\{ \omega \in \Omega_0 \mid \exists \dot{\omega} \in L^2(\mathbb{R}_+), \forall t \geq 0, \quad \omega(t) = \int_0^t \dot{\omega}(s) ds \right\}.$$

Il s'agit d'un espace de HILBERT pour la norme

$$\forall \omega \in \mathbf{H}, \|\omega\|_{\mathbf{H}}^2 \triangleq \int_0^{+\infty} \dot{\omega}(s)^2 ds.$$

On a de plus les injections continues suivantes pour les normes associées : $\Omega'_0 \hookrightarrow \mathbf{H}' \simeq \mathbf{H} \hookrightarrow \Omega_0$, où Ω'_0 et $\mathbf{H}'$ sont les duals topologiques de Ω_0 et $\mathbf{H}$, munis de la norme subordonnée respectivement aux normes $\|\cdot\|_{\Omega_0}$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$. De plus, toutes les injections sont denses (autrement dit, $\mathbf{H}$ est dense dans Ω_0 pour la norme $\|\cdot\|_{\Omega_0}$). Définissons alors la dérivée au sens de GATEAUX de directions admissibles l'espace de CAMERON–MARTIN : une application $F : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable dans les directions de $\mathbf{H}$ si pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe $\nabla F(\omega) \in \mathbf{H}$ telle que pour tout $h \in \mathbf{H}$, on dispose du développement limité à l'ordre 1 suivant :

$$F(\omega + \delta h) \underset{\delta \rightarrow 0}{=} F(\omega) + \delta \langle \nabla F(\omega), h \rangle_{\mathbf{H}} + o(\delta).$$

Ou encore pour tout $\omega \in \Omega_0$, $\nabla F(\omega)$ est défini de manière unique *via* la relation

$$\forall h \in \mathbf{H}, \langle \nabla F(\omega), h \rangle_{\mathbf{H}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(\omega + \delta h) - F(\omega)}{\delta} = \frac{d}{d\delta} [F(\omega + \delta h)] \Big|_{\delta=0}.$$

On peut alors exprimer $\nabla F(\omega)$ pour des applications dites *cylindriques*.

Proposition I.1.1 : Soient $d \geq 1$, $\ell_1, \dots, \ell_d \in \Omega'_0$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f admet des dérivées partielles dans toutes les directions. Alors si on définit

$$\forall \omega \in \Omega_0, F(\omega) \triangleq f(\ell_1(\omega), \dots, \ell_d(\omega)),$$

alors F est dérivable dans les directions de H avec

$$\forall \omega \in \Omega_0, \nabla F(\omega) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\ell_1(\omega), \dots, \ell_d(\omega)) \ell_k \in \Omega' \hookrightarrow H.$$

Remarque I.1.2. Notez bien que l'identification $H \simeq H'$ signifie que, dans le cadre de cette Proposition, pour tout $h \in H$:

$$\langle \nabla F(\omega), h \rangle_H = \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_k}(\ell_1(\omega), \dots, \ell_d(\omega)) \ell_k(h).$$

De manière générale, une forme linéaire continue (pour $\|\cdot\|_{\Omega_0}$) $\ell \in \Omega' \hookrightarrow H'$ peut être vue comme un élément de H via le théorème de représentation RIESZ : $\ell(h) = \langle \ell, h \rangle_H$.

Dans le cas de B_t , à $t \geq 0$ fixé, distinguons un instant la forme linéaire B_t de sa fonction duale $b_t \in H$. Pour $h \in H$, puisque

$$h(t) = B_t(h) = \langle b_t, h \rangle_H = \int_0^{+\infty} \dot{b}_t(s) \dot{h}(s) \, ds,$$

il suit que $\dot{b}_t = \mathbf{1}_{[0,t]}$, donc que pour tout $s \geq 0$, $b_t(s) = s$ pour $s < t$ et $b_t(s) = t$ pour $s \geq t$. On dit que $(b_t)_t$ est un noyau reproduisant de H . Il suit alors que l'espace vectoriel engendré par $(b_t)_t$ est dense dans H , donc que l'espace vectoriel engendré par $(B_t)_{t \geq 0}$ est dense dans H' . ♣

Remarque I.1.3. Il est intéressant de noter que pour $F = B_t$, avec $t \geq 0$ fixé, on obtient pour tout $\omega \in \Omega_0$, $\nabla B_t(\omega) = B_t$, donc ne dépend pas du choix de ω . Il faut comprendre cette égalité comme « B_t est une direction donnée, donc la dérivée de celle-ci pointe dans la même direction ». Le calcul différentiel sur $\mathbb{R}^d$ traite de dérivées partielles par rapport à d directions libres. Ici, on dispose d'une infinité non dénombrable de directions libres vers où dériver. La Proposition I.1.1 n'a donc rien de surprenant puisqu'on ne dérive qu'une fonctionnelle ne dépendant que d'un nombre fini de directions, donc on se retrouve avec un résultat usuel. L'intérêt de notre construction réside dans l'étude où les fonctionnelles dépendent d'une infinité de directions, c'est-à-dire d'une trajectoire brownienne. ♣

L'expression qu'on vient d'obtenir dans la Proposition I.1.1 sera le point de départ pour définir la dérivée de MALLIAVIN dans la suite. Pour conclure cette section introductive, évoquons la formule d'intégration par parties sur l'espace de WIENER. Rappelons dans ce cadre le théorème de GIRSANOV, ou plus précisément, celui de CAMERON–MARTIN. Définissons d'abord ce qu'est une intégrale de WIENER sur Ω_0 . Pour $\ell \in \Omega'_0$ et $\omega \in \Omega_0$, on définit $I_1(\ell)(\omega) \triangleq \ell(\omega)$. La notation I_1 est à relier avec les intégrales stochastiques de WIENER étudiées dans la suite. Alors on dispose de l'isométrie entre $\Omega'_0 \hookrightarrow H'$ et $L^2(\mathbb{W})$ suivante :

$$\forall \ell \in \Omega'_0, \int_{\Omega_0} I_1(\ell)(\omega)^2 \, d\mathbb{W}(\omega) = \|\ell\|_{H'}^2.$$

On le montre en observant que $I_1(\ell)$ suit la loi (sous $\mathbb{W}$) normale centrée de variance $\|\ell\|_{H'}^2$ en approchant ℓ par une suite d'éléments dans l'espace vectoriel engendré par les $(B_t)_{t \geq 0}$, regarder la Remarque I.1.2 (exercice niveau licence proposé au lecteur : montrer qu'à $t \geq 0$ fixé, $\|B_t\|_{H'} = \sqrt{t}$). L'isométrie permet d'étendre I_1 à $H' \simeq H$ (ce qui n'est pas évident car pour $\ell \in H'$ et $\omega \in \Omega_0 \setminus H$, $\ell(\omega)$ n'est pas défini).

Théorème I.1.4 : (Théorème de CAMERON–MARTIN). Soient $F : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, et $h \in H$. Alors

$$\int_{\Omega_0} F(\omega + h) \, d\mathbb{W}(\omega) = \int_{\Omega_0} F(\omega) \exp \left(I_1(h)(\omega) - \frac{\|h\|_H^2}{2} \right) \, d\mathbb{W}(\omega).$$

Autrement dit, si $\tau_h : \omega \in \Omega_0 \mapsto \omega + h$ est la translation par h alors $\mathbb{W} \circ \tau_h^{-1}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{W}$.

De manière équivalente, si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors pour $h \in \mathbf{H}$, $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_h)$ où pour tous $t \geq 0$ et $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$:

$$\tilde{B}_t(\omega) \triangleq B_t(\omega) - h(t)$$

et pour tout $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{Q}_h(A) \triangleq \int_A \exp \left(I_1(h)(\omega) - \frac{1}{2} \|h\|_{\mathbf{H}}^2 \right) d\mathbb{P}(\omega).$$

Remarque I.1.5. Le Théorème nous dit encore plus. Si $h \in \Omega_0 \setminus \mathbf{H}$ (qui est d'intérieur vide pour la norme $\|\cdot\|_{\Omega_0}$), et si $\tau_h : \omega \mapsto \omega + h$ est la translation par h , alors la mesure $\mathbb{W} \circ \tau_h^{-1}$ est étrangère à la mesure $\mathbb{W}$, *id est* il existe $E \in \mathcal{F}_0$ telle que pour tout $A \in \mathcal{F}_0$, $\mathbb{W}(A) = \mathbb{W}(A \cap E)$ et $\mathbb{W} \circ \tau_h^{-1}(A) = \mathbb{W} \circ \tau_h^{-1}(A \cap E^c)$. Autrement dit, ces mesures sont supportées sur des ensembles disjoints, donc on se situe dans un cadre complètement opposé au résultat du théorème qui donne une absolue continuité entre ces deux mesures pour $h \in \mathbf{H}$. Cela permet de justifier que l'espace de CAMERON–MARTIN $\mathbf{H}$ semble approprié pour le cadre dans lequel on souhaite travailler, puisque dans le cadre du théorème éponyme. ♣

Concluons alors avec la formule d'intégration par parties sur l'espace de WIENER.

Proposition I.1.6 : (Intégration par parties) Soient $h \in \mathbf{H}$, $F, G : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour $\mathbf{H}$ et de carrés intégrables pour $\mathbb{W}$. Alors

$$\int_{\Omega_0} F(\omega) \langle \nabla G(\omega), h \rangle_{\mathbf{H}} d\mathbb{W}(\omega) = \int_{\Omega_0} I_1(h)(\omega) F(\omega) G(\omega) d\mathbb{W}(\omega) - \int_{\Omega_0} G(\omega) \langle \nabla F(\omega), h \rangle_{\mathbf{H}} d\mathbb{W}(\omega).$$

Démonstration : Les deux ingrédients clés sont la définition du gradient *via* la limite de la dérivée et le Théorème de CAMERON–MARTIN. Pour $\delta \neq 0$, le Théorème I.1.4 affirme que

$$\int_{\Omega_0} F(\omega + \delta h) G(\omega + \delta h) d\mathbb{W}(\omega) = \int_{\Omega_0} F(\omega) G(\omega) \exp \left(\delta I_1(h)(\omega) - \frac{\delta^2}{2} \|h\|_{\mathbf{H}}^2 \right) d\mathbb{W}(\omega).$$

On dérive par rapport à δ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} F(\omega + \delta h) \frac{d}{d\delta} [G(\omega + \delta h)] d\mathbb{W}(\omega) + \int_{\Omega_0} G(\omega + \delta h) \frac{d}{d\delta} [F(\omega + \delta h)] d\mathbb{W}(\omega) \\ &= \int_{\Omega_0} \left(I_1(h)(\omega) - \delta \|h\|_{\mathbf{H}}^2 \right) F(\omega) G(\omega) \exp \left(\delta I_1(h)(\omega) - \frac{\delta^2}{2} \|h\|_{\mathbf{H}}^2 \right) d\mathbb{W}(\omega). \end{aligned}$$

On conclut en évaluant en $\delta = 0$ (plus précisément on applique un théorème de dérivation sous une intégrale ponctuellement en 0). $\square$

Cela conclut cette section qui introduit la dérivée de MALLIAVIN comme dérivée directionnelle sur un espace canonique. On définit cette notion de manière plus pragmatique dans la suite, telle qu'on la manipulera dans la suite de la thèse et utilisée dans la plupart des articles et des livres à ce propos. Le fait saillant qui permet de raccrocher les wagons entre cette vision trajectorielle (*i.e.* sur l'espace de WIENER) et les deux visions qu'on développe après est la formule d'intégration par parties qu'on vient juste de mentionner. À l'instar de la théorie des distributions, cette formule d'intégration par parties donne un sens à la dérivée et à l'usage qu'on en fait.

De nombreux aspects n'ont pas été évoqués dans cette rapide introspection : pourquoi utiliser cette notion de dérivation faible ? Quelles sont précisément les fonctionnelles qu'on peut dériver ? Et peut-être le plus important : à quoi sert cette notion de dérivation ? On étudie souvent une dérivée pour déterminer des variations, des comportements locaux, ou au moins, déterminer des *extrema* quand on en cherche les zéros. En fait, l'idée derrière cette dérivée est la notion d'approximation affine, et quand il s'agira d'étudier des convergences de variables aléatoires, on constatera que pour certaines classes desdites variables aléatoires, il suffit que la dérivée se comporte bien pour que la variable (ou du moins sa loi) se comporte bien aussi.

2. Intégrales stochastiques de Wiener

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle $\mathbb{E}$ l'espérance associée à $\mathbb{P}$.

2.1. Processus isonormal

Définition I.2.1 : Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ un espace de HILBERT réel séparable. Un *processus isonormal* sur $\mathcal{H}$ est une application $W : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{P})$ telle que :

- (i) La famille $(W(h), h \in \mathcal{H})$ est une famille gaussienne centrée ;
- (ii) Pour tous $h, g \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}[W(h) W(g)] = \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}}$.

Remarque I.2.2. Supposons que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$. Alors se donner un mouvement brownien est équivalent à se donner un processus isonormal, en définissant pour $0 \leq s < t$, $W(\mathbf{1}_{[s,t]}) = B_t - B_s$, puis en étendant W par densité des fonctions étagées sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Si on suppose connue l'intégrale d'ITÔ, on peut aussi bien sûr directement définir $W(h) = \int_0^{+\infty} h(s) dB_s$. On verra dans la suite qu'il n'est pas nécessaire de connaître cette intégrale stochastique pour s'aventurer dans le calcul de MALLIAVIN. ♣

Remarque I.2.3. L'espace de HILBERT $\mathcal{H}$ dépend du contexte dans lequel on souhaite résoudre nos problèmes. Par exemple, si on cherche à étudier une ÉDS dirigée par un mouvement brownien, l'espace $L^2(\mathbb{R}_+)$ est tout indiqué. Dans le cadre d'un mouvement brownien fractionnaire, on considérera par exemple le complété de l'ensemble des fonctions en escalier pour une norme particulière. On dispose de même type d'exemples pour les ÉDPS, on aura l'occasion d'en rencontrer le long de cette thèse. ♣

2.2. Intégrales stochastiques multiples

Cette sous-section est vouée à construire les intégrales multiples de WIENER et à établir la formule d'isométrie associée. Avant de construire proprement ces intégrales, proposons une approche pour comprendre leur intérêt. Considérons $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et l'ÉDS suivante (on suppose construite l'intégrale d'ITÔ ici), où $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et de condition initiale $X_0 = 1$:

$$dX_t = f(t)X_t dB_t,$$

La solution est donnée par l'exponentielle stochastique associée, ici :

$$X_t = \exp \left(\int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds \right).$$

À l'instar des équations différentielles ordinaires, on peut aussi exprimer la solution sous forme d'intégrales multiples. Tous les calculs qui suivent sont purement formels, et ne sont là qu'à titre introductifs. Par définition même de l'ÉDS, on a

$$\begin{aligned} X_t &= 1 + \int_0^t X_s f(s) dB_s = 1 + \int_0^t \left(1 + \int_0^s X_u f(u) dB_u \right) f(s) dB_s \\ &= 1 + \int_0^t f(s) dB_s + \int_0^t \left(\int_0^s X_u f(u) dB_u \right) f(s) dB_s. \end{aligned}$$

En itérant, on a alors pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned} X_t &= 1 + \int_0^t f(s) dB_s + \sum_{k=2}^n \int_0^t \left(\int_0^{t_1} \cdots \left(\int_0^{t_{k-1}} f(t_k) \cdots f(t_1) dB_{t_k} \right) \cdots dB_{t_2} \right) dB_{t_1} \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_n} X_{t_{n+1}} f(t_{n+1}) f(t_n) \cdots f(t_1) dB_{t_{n+1}} \cdots dB_{t_1}. \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $f^{\otimes n}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1) \cdots f(t_n)$, on en déduit que

$$X_t = 1 + \sum_{k=1}^n I_k(f^{\otimes k} \mathbf{1}_{[0,t]^k}) + \text{Reste},$$

où on a noté

$$I_k(g) = \int_0^{+\infty} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} g(t_1, \dots, t_k) dB_{t_k} \cdots dB_{t_1}.$$

On peut alors montrer que le reste tend vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$ dans $L^2(\mathbb{P})$ et aboutir à la décomposition suivante (la somme converge dans $L^2(\mathbb{P})$)

$$X_t = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} I_n((f \mathbf{1}_{[0,t]})^{\otimes n}).$$

On en déduit que pour $[t \rightarrow \infty]$ (toujours dans L^2)

$$X_\infty = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(f^{\otimes n}).$$

On vient d'exprimer certaines variables aléatoires comme sommes de séries convergentes dans $L^2(\mathbb{P})$ d'intégrales multiples. On verra que les intégrales multiples sont des briques élémentaires dans le sens où on pourra développer un certain nombre de variables aléatoires comme somme de ces intégrales multiples. Ces briques élémentaires vérifient des propriétés remarquables qui font l'objet de nombreux articles, dont certains présents dans cette thèse.

Construisons désormais ces intégrales de WIENER, sans utiliser l'intégrale d'ITÔ cette fois.

Définition I.2.4 : Soient $q \geq 1$, $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et W un processus isonormal associé à $L^2(\mu)$. On appelle $\mathcal{E}_q$ les fonctions dites *élémentaires*, qui sont composées d'applications $f : T^q \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$f(t_1, \dots, t_q) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_q=1}^{N_q} f_{i_1, \dots, i_q} \mathbf{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_q}}(t_1, \dots, t_q),$$

où $f_{i_1, \dots, i_q} \in \mathbb{R}$ est nul dès que deux indices parmi les i_k sont égaux, $N_1, \dots, N_q \geq 1$ et $A_{i_1}, \dots, A_{i_q} \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints et sont de mesure finie. Pour $f \in \mathcal{E}_q$ de cette forme, on définit alors son *intégrale de WIENER* par

$$I_q(f) \triangleq \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_q=1}^{N_q} f_{i_1, \dots, i_q} \prod_{k=1}^q W(\mathbf{1}_{A_{i_k}}).$$

De plus, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on définit $I_0(c) \triangleq c$.

Il s'agit là de la première pierre pour construire cette intégrale. On cherche à étendre cette intégrale sur $L^2(\mu)$ entier en approchant chaque fonction de $L^2(\mu)$ par des fonctions élémentaires.

Lemme I.2.5 : Pour $q \geq 1$, si $(T, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré non-atomique alors $\mathcal{E}_q$ est dense dans $L^2(\mu^{\otimes q})$ pour la norme associée au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mu^{\otimes q})}$.

Démonstration : Afin de limiter la technique, on va considérer le cas $T = \mathbb{R}$, et μ est la mesure de LEBESGUE. Toute application $f \in L^2(\mathbb{R}^q)$ peut s'approcher par des fonctions étagées. Il suffit alors de montrer que toute application du type $\mathbf{1}_{A_1 \times \cdots \times A_q}$, où les $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ne sont *a priori* pas disjoints peut s'approcher par des éléments de $\mathcal{E}_q$. Afin de simplifier encore le propos, montrons qu'on peut approcher $\mathbf{1}_{[0,1]^2}$ par des éléments de $\mathcal{E}_2$. L'idée est de découper $[0, 1]$ en des partitions de petite taille, et de ne garder que des produits tensoriels d'éléments de la partition qui sont disjoints. Faisons simple : pour $n \geq 1$,

$$[0, 1[= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[.$$

Ainsi

$$\mathbf{1}_{[0,1]^2} = \sum_{k,l=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \otimes [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]} = \sum_{0 \leq k \neq l \leq n-1} \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \otimes [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}]} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]^{\otimes 2}}.$$

Le premier terme appartient à $\mathcal{E}_2$, et le deuxième tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ car de carré de norme égal à $\frac{1}{n}$. Pour le cas général, regarder [Itô51] : l'idée de preuve est la même, elle utilise le fait que μ soit non-atomique pour créer une partition qui permet l'écriture en somme comme ci-dessus. $\square$

Si $f : T^q \rightarrow \mathbb{R}$, on définit son *symétrisé* pour tout $t_1, \dots, t_q \in T$ par

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_q) \triangleq \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(q)}),$$

où $\mathfrak{S}_q$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, q\}$.

Proposition 1.2.6 : (Isométrie de l'intégrale de WIENER) Soient $q, q' \in \mathbb{N}$, $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré non-atomique, $f \in \mathcal{E}_q$ et $g \in \mathcal{E}_{q'}$. Alors

$$\mathbb{E}[I_q(f)I_{q'}(g)] = \delta_{q,q'} q! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(T^q)},$$

où $\delta_{q,q'}$ est le symbole de KRONECKER entre q et q' . Ainsi, I_q se prolonge par densité sur $L^2(T^q)$ en application linéaire continue de $L^2(T^q)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{P})$.

Démonstration : On tâche de comprendre sur trois exemples les trois points cruciaux de cette formule : l'orthogonalité entre les ordres représenté par $\delta_{q,q'}$, l'apparition des symétrisés et du produit scalaire. Dans tous les cas, on se placera sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ et celle du produit scalaire qui donne une isométrie.

1. Comprendre l'orthogonalité. Considérons

$$f = \mathbf{1}_{[0,1/2]} \otimes \mathbf{1}_{[1/2,1]} \text{ et } g = \mathbf{1}_{[0,1/4]} \otimes \mathbf{1}_{[1/4,1/2]} \otimes \mathbf{1}_{[1/2,3/4]} \otimes \mathbf{1}_{[3/4,1]}.$$

Si $F = I_2(f)$ et $G = I_4(g)$ alors

$$\begin{aligned} FG &= (W(\mathbf{1}_{[0,1/4]}) + W(\mathbf{1}_{[1/4,1/2]})) (W(\mathbf{1}_{[1/2,3/4]}) + W(\mathbf{1}_{[3/4,1]})) \\ &\quad \cdot W(\mathbf{1}_{[0,1/4]}) W(\mathbf{1}_{[1/4,1/2]}) W(\mathbf{1}_{[1/2,3/4]}) W(\mathbf{1}_{[3/4,1]}). \end{aligned}$$

Lorsqu'on développe, on se retrouve avec des termes qui ressemblent à

$$W(\mathbf{1}_{[0,1/4]})^2 W(\mathbf{1}_{[1/4,1/2]}) W(\mathbf{1}_{[1/2,3/4]})^2 W(\mathbf{1}_{[3/4,1]}),$$

d'espérance nulle à cause des termes qui ne sont pas au carré. En fait, la différence d'ordre isole au moins un terme indépendant des autres qui annule l'entière de l'espérance du produit.

2. Comprendre la symétrisation. Il est immédiat que les intégrales stochastiques d'une fonction et de son symétrisé sont les mêmes. Dans le cadre de fonctions de $\mathcal{E}_q$, le produit scalaire entre une fonction et une permutation des coordonnées de cette fonction est nul (sauf si la permutation est l'identité). Ainsi, il est impossible de se séparer des symétrisés dans le calcul de (co)variance entre intégrales stochastiques de fonctions ayant même symétrisé. Prenons un cas concret. Soient $f = \mathbf{1}_{[0,1]} \otimes \mathbf{1}_{[1,2]}$ et $g = \mathbf{1}_{[1,2]} \otimes \mathbf{1}_{[0,1]}$, de sorte que f et g admette même symétrisé. Ces deux fonctions sont orthogonales, et vérifient bien sûr $I_2(f) = I_2(g) = W(\mathbf{1}_{[0,1]})W(\mathbf{1}_{[1,2]})$. Il suit que $\mathbb{E}[I_2(f)I_2(g)] = 1$, donc ne vaut pas 0 = $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}$. Dans ce cas précis, le symétrisé admet une norme au carré égale à $\frac{1}{2}$, donc donne dans ce cas précis la formule donnée.

3. Comprendre le produit scalaire. Il s'agit en fait que d'une conséquence du caractère isométrique du processus isonormal W . En effet, si $f = \mathbf{1}_A \otimes \mathbf{1}_{A'}$ et $g = \mathbf{1}_B \otimes \mathbf{1}_{B'}$, avec A disjoint de A' et B' , et B disjoint de B' et A' alors on aboutit à

$$\mathbb{E}[I_2(f)I_2(g)] = \mathbb{E}[W(\mathbf{1}_A)W(\mathbf{1}_B)] \cdot \mathbb{E}[W(\mathbf{1}_{A'})W(\mathbf{1}_{B'})],$$

d'où l'apparition du produit scalaire.

La démonstration complète de cette Proposition réside en un découpage qui fait intervenir ces trois faits, mais dilués dans des considérations techniques qui peuvent faire perdre de vue les vraies raisons de ce résultat. $\square$

Remarque 1.2.7. La formule proposée dans la Proposition précédente semble étendre I_q seulement sur les éléments symétriques de $L^2(T^q)$. On l'étend en fait en une application continue sur tout $L^2(T^q)$ en

prolongeant l'égalité $I_q(\tilde{f}) = I_q(f)$ vraie pour $f \in \mathcal{E}_q$. Néanmoins, attention, I_q n'est pas une isométrie sur $L^2(T^q)$, mais uniquement sur $L^2_S(T^q)$, l'ensemble des éléments symétriques de $L^2(T^q)$. Ainsi, il est bien plus sage de ne manipuler que des fonctions symétriques, quitte à alourdir les notations. ♣

Remarque I.2.8. Ainsi, I_1 et le processus isonormal W coïncident car égaux sur $\mathcal{E}_q$ et tous les deux continues en tant qu'application linéaire de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mathbb{P})$. On en déduit que $(I_1(h), h \in \mathcal{H})$ est une famille gaussienne centrée. Attention, toutes les variables aléatoires gaussiennes ne s'écrivent pas comme $I_1(h)$. Un contre-exemple est donné par l'intégrale stochastique au sens d'ITÔ $X = \int_0^1 \text{sgn}(B_s) dB_s$, avec $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ et W donné par le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$. La variable X est gaussienne en utilisant le critère de LÉVY pour les mouvements browniens, mais ne s'écrit pas comme une intégrale stochastique d'ordre 1. En effet, on peut montrer que

$$\int_0^1 \text{sgn}(B_s) dB_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{2n}(0)}{\sqrt{2\pi}(2n+1)!} I_{2n+2}(g_n), \quad [\text{I.1}]$$

où la somme converge dans $L^2(\mathbb{P})$, H_{2n} est le polynôme d'HERMITE d'ordre $2n$ défini par [I.2] dans la sous-section suivante, et $g_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini pour presque tout $(s, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{2n+1}$ par

$$g_n(s, \mathbf{t}) = \frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{1}_{[0,s]}^{\otimes(2n+1)}(\mathbf{t}) \mathbf{1}_{[0,1]}(s).$$

La Proposition I.2.6 implique alors que X ne peut pas s'écrire comme une intégrale stochastique d'ordre 1. Avec le vocabulaire proposé dans la suite, on dira que X n'appartient pas au premier chaos de WIENER, bien que X soit gaussienne. ♣

Remarque I.2.9. La construction de l'intégrale de WIENER est bien plus facile que celle d'ITÔ. Cette intégrale est suffisante pour pas mal de résultats, mais elle est tout de même limitée par le fait qu'on intègre des fonctions déterministes. En particulier, on ne définit pas des intégrales itérées par récurrence, on doit le faire pour chaque ordre. Les outils liés au calcul de MALLIAVIN permettront par contre de construire une nouvelle intégrale stochastique, celle de SKOROHOD, qui prolonge l'intégrale d'ITÔ, et donc celle de WIENER, mais qui perd pas mal de propriétés comme celle d'isométrie. ♣

Remarque I.2.10. À partir de maintenant, à moins d'une contre-indication, on considérera toujours $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{A}, \mu)$, où μ n'admet pas d'atomes, et W un processus isonormal sur $\mathcal{H}$. Les intégrales stochastiques I_n sont alors associées à ces objets. ♣

2.3. Polynômes d'Hermite

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ le n -ème polynôme d'HERMITE donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) \triangleq (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]. \quad [\text{I.2}]$$

Notez bien la convention : dans [Nua06] par exemple, il y a un facteur $\frac{1}{n!}$ devant l'expression. La raison de cette normalisation est donnée par le théorème suivant, bien connu et classique quand on prépare l'Agrégation.

Théorème I.2.11 : La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \right)_{n \geq 0}$ forme une base hilbertienne de $L^2 \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right)$.

Ainsi, notre convention est dictée par le fait que les coefficients des polynômes d'HERMITE sont entiers. Cette famille de polynôme est en fait liée aux intégrales stochastiques de WIENER. Le Théorème suivant explique comment les polynômes d'HERMITE éclairent les relations entre intégrales stochastiques.

Théorème I.2.12 : (ITÔ, 1951) 1. Soient $q \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathcal{H}$ non nulle. Alors

$$I_q(h^{\otimes q}) = \|h\|_{\mathcal{H}}^q H_q \left(\frac{I_1(h)}{\|h\|_{\mathcal{H}}} \right).$$

2. Plus généralement, si $h_1, \dots, h_p \in \mathcal{H}$ sont non nulles et si on se donne $q_1, \dots, q_p \in \mathbb{N}$ alors en notant $Q = q_1 + \dots + q_p$, on a

$$I_Q \left(h_1^{\otimes q_1} \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} h_p^{\otimes q_p} \right) = \prod_{k=1}^p \|h_k\|_{\mathcal{H}}^{q_k} H_{q_k} \left(\frac{W(h_k)}{\|h_k\|_{\mathcal{H}}} \right),$$

où $h_1^{\otimes q_1} \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} h_p^{\otimes q_p}$ désigne le symétrisé de $h_1^{\otimes q_1} \otimes \dots \otimes h_p^{\otimes q_p}$.

Cette conversion entre intégrale stochastique et polynôme d'HERMITE permet de voir chaque intégrale stochastique comme une variante infinie-dimensionnelle de ces polynômes. Ainsi, pour imaginer les théorèmes énoncés plus tard, on peut en dresser un parallèle unidimensionnel.

Démonstration du Théorème I.2.12 : On pourrait procéder par récurrence (c'est l'idée originale d'ITÔ) et conclure en utilisant le fait que les relations de récurrence entre intégrales stochastiques sont très semblables à celles entre polynômes d'HERMITE. Puisqu'il s'agit dans ce chapitre de ne donner qu'une idée de démonstration, on se propose un calcul sur un exemple pour expliquer comment on pourrait prouver ce résultat. Prenons l'exemple suivant : $h = \mathbf{1}_{[0,2]} \in L^2(\mathbb{R})$ et calculons $I_3(h^{\otimes 3})$. Pour cela, on écrit une décomposition de $h^{\otimes 3}$ comme dans le Lemme I.2.5 :

$$\mathbf{1}_{[0,2]}^{\otimes 3} = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_3} \mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right]} + \sum_{(i,j,k) \notin \Delta_3} \mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right]},$$

où Δ_3 est l'ensemble des triplets (i, j, k) de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket^3$ tous avec i, j, k distincts. Le deuxième terme tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ car sa norme au carré est équivalente quand $[n \rightarrow \infty]$ à $\frac{3}{2n}$ (pour s'en convaincre, découper le complémentaire de Δ_3 par l'ensemble des triplets constants, et des triplets qui admettent deux et seulement deux composantes égales). Par isométrie, cela sera aussi le cas de I_3 évalué en ce deuxième terme dans $L^2(\mathbb{P})$. Étudions le premier terme. Puisque les supports des fonctions de la décomposition sont disjoints,

$$\begin{aligned} I_3 \left(\sum_{(i,j,k) \in \Delta_3} \mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right]} \right) \\ = \sum_{i=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \right) \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right]} \right). \end{aligned}$$

En faisant apparaître $I_1(\mathbf{1}_{[0,2]})$ dans la dernière somme, on obtient

$$\begin{aligned} I_3 \left(\sum_{(i,j,k) \in \Delta_3} \mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right]} \right) \\ = \sum_{i=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \right) \left(I_1(\mathbf{1}_{[0,2]}) - I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right) - I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \right) \right) \end{aligned}$$

Même procédure pour la somme sur j .

$$\begin{aligned} I_3 \left(\sum_{(i,j,k) \in \Delta_3} \mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \otimes \mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{n}, \frac{2(k+1)}{n}\right]} \right) \\ = I_1(\mathbf{1}_{[0,2]}) \sum_{i=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right) \left(I_1(\mathbf{1}_{[0,2]}) - I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right) \right) \\ - \sum_{i=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \right)^2 - I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right)^2 \right) \\ - \sum_{i=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right)^2 \left(I_1(\mathbf{1}_{[0,2]}) - I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right) \right) \\ = I_1(\mathbf{1}_{[0,2]})^3 - 3I_1(\mathbf{1}_{[0,2]}) \sum_{j=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2j}{n}, \frac{2(j+1)}{n}\right]} \right)^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} I_1 \left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2i}{n}, \frac{2(i+1)}{n}\right]} \right)^3. \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{P})$ et la somme apparaissant dans le terme du milieu vers 2 (calculer sa variance pour s'en convaincre), la longueur de l'intervalle $[0, 2[$. Il suit en passant à la limite quand $[n \rightarrow \infty]$ dans $L^2(\mathbb{P})$ que

$$I_3(h^{\otimes 3}) = I_1(h)^3 - 3 \cdot 2I_1(h) = 2\sqrt{2}H_3\left(\frac{I_1(h)}{\sqrt{2}}\right),$$

ce qui est le résultat attendu, puisque h est de norme $\sqrt{2}$. □

Une conséquence de cette conversion est la formule produit.

Proposition I.2.13 : (Formule produit) Soient $p, j \in \mathbb{N}$.

1. Les polynômes d'HERMITE satisfont la formule de linéarisation suivante

$$H_p H_{p+j} = \sum_{r=0}^p r! \binom{p}{r} \binom{p+j}{r} H_{2(p-r)+j}.$$

2. Soient $f \in L^2_{\mathbb{S}}(T^p)$ et $g \in L^2_{\mathbb{S}}(T^{p+j})$ symétriques. Alors les intégrales stochastiques vérifient

$$I_p(f) I_{p+j}(g) = \sum_{r=0}^p r! \binom{p}{r} \binom{p+j}{r} I_{2(p-r)+j}(f \otimes_r g),$$

où $f \otimes_0 g = f \otimes g \in L^2(T^{2p+j})$, et pour tout $1 \leq r \leq p$, $f \otimes_r g \in L^2(T^{p-r} \times T^{p+j-r})$ est défini pour $\mu^{\otimes(p-r)}$ -presque tout $\mathbf{x} \in T^{p-r}$ et $\mu^{\otimes(p+j-r)}$ -presque tout $\mathbf{y} \in T^{p+j-r}$ par

$$f \otimes_r g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \int_{T^r} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) g(\mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mu^{\otimes r}(\mathbf{z}).$$

Démonstration de la Proposition I.2.13 : Une preuve purement combinatoire de 1. est dédiée en annexe. Elle utilise la notion d'espèces, et permet de prouver élégamment (en toute objectivité de l'auteur) cette égalité manifestement de nature combinatoire. Une preuve plus directe, mais plus rugueuse, consiste à utiliser le Théorème I.2.11 en développant dans la base hilbertienne des polynômes d'HERMITE normalisés la fonction $H_p H_{p+j}$ et de calculer les coefficients intégraux. Regarder [NP12a].

Pour 2., on propose le calcul suivant afin d'éclairer la formule : considérons $f = \mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes p}$ et $g = \mathbf{1}_{[0,2]}^{\otimes(p+j)}$. Le but est de décomposer le support de g selon le support de f (attention au fait que la formule du binôme ne marche que dans un cas commutatif, donc on doit utiliser dès maintenant les symétrisés) :

$$\mathbf{1}_{[0,2]}^{\otimes(p+j)} = (\mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[1,2]})^{\otimes(p+j)} = \sum_{k=0}^{p+j} \binom{p+j}{k} \mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes k} \tilde{\otimes} \mathbf{1}_{[1,2]}^{\otimes(p+j-k)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & I_p \left(\mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes p} \right) I_{p+j} \left(\mathbf{1}_{[0,2]}^{\otimes(p+j)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p+j} \binom{p+j}{k} I_p \left(\mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes p} \right) I_k \left(\mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes k} \right) I_{p+j-k} \left(\mathbf{1}_{[1,2]}^{\otimes(p+j-k)} \right) \\ &\stackrel{\text{Thm I.2.12}}{=} \sum_{k=0}^{p+j} \binom{p+j}{k} H_p(I_1(\mathbf{1}_{[0,1]})) H_k(I_1(\mathbf{1}_{[0,1]})) I_{p+j-k} \left(\mathbf{1}_{[1,2]}^{\otimes(p+j-k)} \right) \\ &\stackrel{1.}{=} \sum_{k=0}^{p+j} \binom{p+j}{k} \left[\sum_{r=0}^{\min\{k,p\}} r! \binom{p}{r} \binom{k}{r} H_{p+k-2r}(I_1(\mathbf{1}_{[0,1]})) \right] I_{p+j-k} \left(\mathbf{1}_{[1,2]}^{\otimes(p+j-k)} \right) \\ &\stackrel{\text{Thm I.2.12}}{=} \sum_{k=0}^{p+j} \binom{p+j}{k} \left[\sum_{r=0}^{\min\{k,p\}} r! \binom{p}{r} \binom{k}{r} I_{p+k-2r} \left(\mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes(p+k-2r)} \right) \right] I_{p+j-k} \left(\mathbf{1}_{[1,2]}^{\otimes(p+j-k)} \right). \end{aligned}$$

On permute les sommes, on utilise l'identité $\binom{p+j}{k} \binom{k}{r} = \binom{p+j}{r} \binom{p+j-r}{p+j-k}$, l'identité $I_q(f)I_{q'}(g) = I_{q+q'}(f \otimes g)$ lorsque f et g sont à support disjoints, et la linéarité de l'intégrale stochastique pour obtenir :

$$\begin{aligned} I_p \left(\mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes p} \right) I_{p+j} \left(\mathbf{1}_{[0,2]}^{\otimes(p+j)} \right) &= \sum_{r=0}^p r! \binom{p+j}{r} \binom{p}{r} I_{2(p-r)+j} \left(\sum_{k=r}^{p+j} \binom{p+j-r}{p+j-k} \mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes(p+k-2r)} \otimes \mathbf{1}_{[1,2]}^{\otimes(p+j-k)} \right) \\ &= \sum_{r=0}^p r! \binom{p+j}{r} \binom{p}{r} I_{2(p-r)+j} \left(\mathbf{1}_{[0,1]}^{\otimes(p-r)} \otimes \mathbf{1}_{[0,2]}^{\otimes(p+j-r)} \right). \end{aligned}$$

C'est exactement le résultat attendu dans ce cas-là. On peut en fait voir la formule produit comme une mesure de non-disjonction des supports des deux fonctions protagonistes. $\square$

Voyons désormais l'équivalent du Théorème de développement en polynômes d'HERMITE I.2.11 pour les intégrales stochastiques. Il s'agit du développement en *chaos de WIENER* qui est fondateur pour la suite de cette thèse.

Théorème I.2.14 : (Développement en chaos de WIENER) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et W un processus isonormal associé à $\mathcal{H} = L^2(\mu)$ où μ est non-atomique. Soit $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par $(W(h), h \in \mathcal{H})$. Alors toute variable aléatoire de carré intégrable et $\mathcal{G}$ -mesurable se décompose en chaos de WIENER :

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{\perp} \mathfrak{H}_n,$$

où la somme est hilbertienne, $\mathfrak{H}_n \triangleq I_n(\mathcal{H}^{\otimes n})$ et $\mathfrak{H}_0 \triangleq \mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \geq 1$, une base hilbertienne de $\mathfrak{H}_n$ est donnée par $\left\{ \prod_{i \in \mathbb{N}} H_{\alpha_i}(W(e_i)) \mid \alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, |\alpha| = n \right\}$, où $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.

Démonstration : La base hilbertienne est en fait donnée par le Théorème I.2.12, en utilisant la densité des fonctions élémentaires $\mathcal{E}_n$ introduites dans la sous-section précédente. L'orthogonalité provient de l'isométrie entre les intégrales multiples (Proposition I.2.6). Il reste à montrer que $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{H}_n \subset L^2(\mathcal{G})$. Soit $F \in L^2(\mathcal{G})$ orthogonal à $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{\perp} \mathfrak{H}_n$. Il s'agit de montrer que $F = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^2(T^n)$, $\mathbb{E}[F I_n(f)] = 0$. Or, pour $n \geq 1$, si $\mathcal{G}_n$ est la tribu engendrée par $W(e_1), \dots, W(e_n)$ alors par le Théorème de conversion I.2.12, et par la base hilbertienne qu'on vient d'exhiber, $\mathbb{E}[F | \mathcal{G}_n] = 0$. En effet, toute intégrale stochastique $I_k(g)$, avec $1 \leq k \leq n$ s'approche par des intégrales stochastiques des fonctions élémentaires appartenant à $\mathcal{E}_k$. Le Théorème de conversion d'ITÔ I.2.12 exprime alors que ces intégrales stochastiques sont $\mathcal{G}_n$ -mesurable, donc c'est aussi le cas de $I_k(g)$.

Or d'après le théorème de convergence des martingales, $(\mathbb{E}[F | \mathcal{G}_n])_{n \geq 1}$ converge quand n tend vers $+\infty$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement vers $\mathbb{E}[F | \mathcal{G}]$ qui se retrouve être nul. On conclut que $F = 0$ puisque F est $\mathcal{G}$ -mesurable. $\square$

Remarque I.2.15. On aurait aussi pu définir $\mathfrak{H}_n$ directement à partir des polynômes d'HERMITE de la sorte :

$$\mathfrak{H}_n = \overline{\text{Vect} \left(H_n(W(h)), h \in L^2(\mu), \|h\|_{L^2(\mu)} = 1 \right)},$$

où la fermeture est prise dans $L^2(\mu)$. C'est la conversion HERMITE/intégrale stochastique du Théorème I.2.12 qui permet encore une fois de comprendre cette égalité, en lien avec le développement en polynômes d'HERMITE sur $\mathbb{R}$.

De manière générale, le retour en dimension 1 se fait souvent en considérant des variables du type $W(h)$, avec h de norme 1. $\clubsuit$

Remarque I.2.16. Dorénavant, sauf contre-indication, si on décompose une variable F de manière générale $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n)$, il est sous-entendu que les fonctions f_n sont symétriques. $\clubsuit$

Concluons cette section avec un développement explicite en chaos. On avait entamé cette section en considérant la variable

$$X_{\infty} \triangleq \exp \left(\int_0^{+\infty} f(t) \, dB_t - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(t)^2 \, dt \right),$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Développons proprement X_∞ en chaos, sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Pour cela, observons que $\int_0^{+\infty} f(t) dB_t = I_1(f)$. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on peut développer dans la base hilbertienne des polynômes d'HERMITE l'application $x \mapsto e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda \cdot} = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n.$$

Ainsi,

$$X_\infty = e^{-\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2} \exp\left(\|f\|_{L^2} I_1\left(\frac{f}{\|f\|_{L^2}}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|f\|_{L^2}^n}{n!} H_n\left(\frac{I_1(f)}{\|f\|_{L^2}}\right).$$

On conclut alors avec le Théorème de conversion I.2.12 que

$$X_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} I_n(f^{\otimes n}).$$

Remarquez que la technique utilisée est hélas peu généralisable, et qu'il est communément difficile de déterminer un développement explicite en chaos de WIENER. Un autre exemple de développement est traité dans le Chapitre V de la même manière. Un exercice laissé au lecteur est le suivant : adapter ce qu'on vient de faire pour démontrer l'égalité [I.1]. Utiliser le Théorème I.3.15 qui suit pour conclure que l'intégrale stochastique sous-jacente augmente l'ordre des intégrales stochastiques qui interviennent dans le développement.

3. Dérivée de Malliavin et intégrale de Skorohod

3.1. Dérivée de Malliavin

Dans la section 1, nous avons introduit un opérateur gradient sur l'espace canonique du mouvement brownien. On propose ici une présentation *via* les variables aléatoires dites *lisses*. Il y a en fait une troisième présentation qu'on détaillera un peu ici à partir des chaos de WIENER. Il est notable que les trois notions soient les mêmes. Par exemple, dans le cadre de calcul de MALLIAVIN par rapport à une mesure de POISSON ou par rapport à un processus de LÉVY, il est moins évident que cela soit le cas. C'est tout de même le cas pour ce dernier : regarder par exemple [SUV07] pour une définition dite variationnelle d'une dérivée dans un espace canonique, regarder [Itô56] pour une approche chaotique *via* les intégrales stochastiques et regarder par exemple [GE11] pour une approche par les variables lisses. L'ingrédient clé qui permet de coller toutes ces notions est la formule d'intégration par parties, déjà introduite dans la Proposition I.1.6 dans le cadre variationnel. C'est ce que résume la figure I.1.

Nous restons ici dans le cadre gaussien, où tout est très bien établi, la suite n'est que rappel pour les lecteurs initiés.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et W un processus isonormal associé à un espace de HILBERT $\mathcal{H} = L^2(\mu)$, où μ est une mesure sans atome définie sur un espace mesuré $(T, \mathcal{A})$. Dans la suite, la tribu ambiante est la tribu engendrée par W , on la note $\mathcal{G}$. En clair, toutes les occurrences de « $L^2(\mathbb{P})$ » signifient « $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ».

Définition I.3.1 : Soit F une variable aléatoire réelle. On dit que F est une *variable aléatoire lisse* s'il existe un entier $d \geq 1$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞ aux dérivées à croissance au plus polynomiale, et des éléments $\phi_1, \dots, \phi_d \in L^2(\mu)$ tels que $\mathbb{P}$ -presque sûrement

$$F = f(W(\phi_1), \dots, W(\phi_d)). \quad [\text{I.3}]$$

On dit aussi que F est une variable aléatoire *cylindrique*. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces variables aléatoires.

L'ensemble de ces variables est en fait assez gros dans le sens du Lemme suivant qui reviendra fréquemment dans les prochaines discussions.

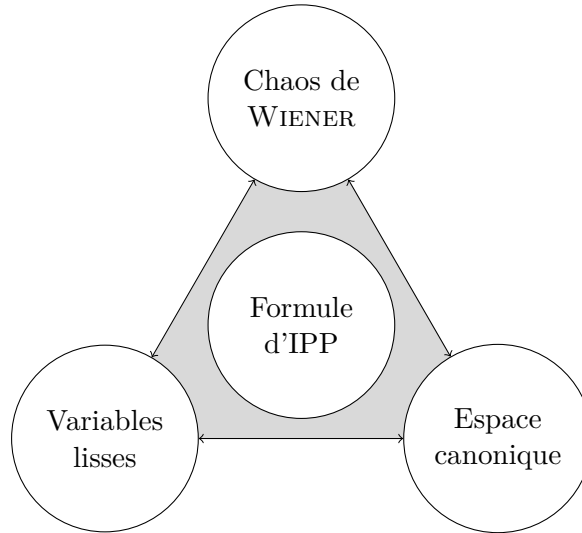


FIGURE I.1 – Les trois aspects pour appréhender la dérivée de MALLIAVIN.

Lemme I.3.2 : *L'ensemble des variables lisses $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(\mathbb{P})$.*

Démonstration : On le prouve par un critère d'orthogonalité. Soit $F \in L^2(\mathbb{P})$ telle que pour tout $G \in \mathcal{S}$, $\mathbb{E}[FG] = 0$. L'espace $\mathcal{S}$ contient tous les polynômes trigonométriques. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, pour tout $\phi_1, \dots, \phi_n \in L^2(\mu)$ et $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E} \left[F e^{i\xi_1 W(\phi_1)} \dots e^{i\xi_n W(\phi_n)} \right] = 0.$$

Cela signifie que la mesure signée finie ν définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\nu(B) \triangleq \mathbb{E} \left[F \mathbf{1}_{\{(W(\phi_1), \dots, W(\phi_n)) \in B\}} \right]$$

admet une transformée de FOURIER nulle. On en déduit que ν est la mesure nulle. Il suit que $\mathbb{E}[F \mathbf{1}_A] = 0$ pour tout $A \in \mathcal{G}$, donc que $\mathbb{E}[F|\mathcal{G}] = 0$, donc $F = 0$. $\square$

Sur ces variables lisses, il est alors aisé de définir une dérivée par rapport à W . Voyez ces variables aléatoires comme des briques de référence, qui donnent un nombre fini de directions vers où dériver. Un analogue à la Définition qui suit serait de regarder sur $\mathbb{R}^d$ l'application $f_\alpha : x \mapsto \langle x, \alpha \rangle$, où le produit scalaire est le produit scalaire canonique et $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Dans ce cas, il est facile de voir que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\nabla f_\alpha(x) = \alpha$. Autrement dit, le gradient ne dépend pas de x . Il s'agit du même phénomène dans ce qui suit.

Définition I.3.3 : 1. Pour tout $\phi \in L^2(\mu)$, on définit

$$D(W(\phi)) \triangleq \phi.$$

2. Soit $F \in \mathcal{S}$, comme dans la Définition I.3.1. Alors on définit sa *dérivée de MALLIAVIN* comme extension par règle de la chaîne du point précédent :

$$DF \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(W(\phi_1), \dots, W(\phi_n)) \phi_k.$$

Pour μ -presque tout $t \in T$, on note alors

$$D_t F \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(W(\phi_1), \dots, W(\phi_n)) \phi_k(t).$$

Remarque I.3.4. Le lecteur attentif sera peut-être surpris de la différence entre cette Définition et le gradient introduit dans la section 1, au vu de la Proposition I.1.1. Reprenons dans le cadre de cette

Remarque les notations de l'espace canonique. La définition du gradient sur Ω donne $\nabla B_t(\omega) = B_t$ alors que dans notre cas, $DB_t = \mathbf{1}_{[0,t]}$. On avait en fait vu que $B_t \in H'$ avait comme fonction duale $b_t \in H$, qui vérifie par définition $\langle b_t, h \rangle_H = h(t)$ pour tout $h \in H$. Or, par définition même de l'espace de CAMERON–MARTIN H , on a alors

$$\langle b_t, h \rangle_H = \langle \dot{b}_t, \dot{h} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \dot{h} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

En fait, la différence entre les deux opérateurs ∇ et D est la suivante : pour $\omega \in \Omega_0$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $\nabla_t F(\omega) = \int_0^t D_t F(\omega) dt$. ♣

Remarque I.3.5. Observons alors qu'avec cette Définition, on voit que la dérivée de MALLIAVIN joue bien son rôle de dérivée. En effet, si une dérivée est nulle sur un ensemble suffisamment gros, l'objet dérivé ne dépend pas de la variable de dérivation. Dans notre cadre, on l'interprète comme suit. Supposons que tous les ϕ_k de la Définition précédente soit à support dans un ensemble $K \subsetneq T$. Alors $D_t F = 0$ pour presque tout $t \in T \setminus K$ et $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Cela signifie que si F ne dépend de W que par ses fonctions à support dans K , alors sa dérivée sera nulle en dehors de K . La Proposition I.3.11 est plus précise à ce sujet. ♣

Proposition I.3.6 : (Intégration par parties) 1. Pour tout $F \in \mathcal{S}$ et $\phi \in L^2(\mu)$,

$$\mathbb{E}[FW(\phi)] = \mathbb{E}[\langle DF, \phi \rangle_{L^2(\mu)}].$$

2. Pour tous $F, G \in \mathcal{S}$ et $\phi \in L^2(\mu)$,

$$\mathbb{E}[F \langle DG, \phi \rangle_{L^2(\mu)}] = \mathbb{E}[FGW(\phi)] - \mathbb{E}[G \langle DF, \phi \rangle_{L^2(\mu)}].$$

Démonstration : La caractère gaussien du processus isonormal est crucial. Démontrons d'abord **1.** On se donne $F \in \mathcal{S}$ et $\phi \in L^2(\mu)$. Si $\phi = 0$, la proposition est réduite à l'égalité triviale $0 = 0$. Supposons ϕ non nulle. Quitte à ajouter une variable et à pratiquer une orthonormalisation de GRAM–SCHMIDT, on peut supposer que $\|\phi\|_{L^2(\mu)} = 1$ et que F est de la forme $F = f(W(\phi), W(\phi_1), \dots, W(\phi_d))$, où $(\phi, \phi_1, \dots, \phi_d)$ est une famille orthonormée de $L^2(\mu)$. Dans ce cas, il est aisé de voir que

$$\langle DF, \phi \rangle_{L^2(\mu)} = \frac{\partial f}{\partial x_0}(W(\phi), W(\phi_1), \dots, W(\phi_d)),$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ désigne la dérivée partielle par rapport à la première coordonnée, remplie ici par $W(\phi)$. On conclut alors la démonstration en prenant l'espérance, en utilisant l'indépendance et le lemme de STEIN (Lemme II.1.1) qui n'est rien d'autre qu'une transcription de l'intégration par parties gaussienne pour conclure. Pour démontrer **2.**, il suffit d'utiliser la formule de dérivation d'un produit pour conclure. □

La prochaine Proposition est à propos de l'extension de la Définition de la dérivée de MALLIAVIN, plus précisément de sa fermabilité.

Proposition I.3.7 : L'application $D : \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{P}) \longrightarrow L^2(\Omega \times T)$ est fermable. Cela signifie que les deux points équivalents sont vérifiés.

1. Il existe un sous-espace vectoriel $\mathbb{D}^{1,2}$ de $L^2(\mathbb{P})$ et une application $\overline{D} : \mathbb{D}^{1,2} \longrightarrow L^2(\Omega \times T)$ tels que $\overline{D}|_{\mathcal{S}} = D$, et si $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{1,2}}$ est la norme du graphe associée : pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{1,2}}^2 \triangleq \mathbb{E}[F^2] + \mathbb{E}\left[\|\overline{D}F\|_{L^2(\mu)}^2\right],$$

alors $\mathbb{D}^{1,2}$ est la fermeture de $\mathcal{S}$ pour cette norme.

2. Si $(F_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{S}$ qui tend vers 0 pour la norme L^2 et si la suite $(DF_n)_{n \geq 1}$ converge dans $L^2(\Omega \times T)$ vers un processus $u \in L^2(\Omega \times T)$, alors $u = 0$.

On notera dans la suite D la dérivée étendue, au lieu de $\overline{D}$.

Remarque I.3.8. On peut de même définir $\mathbb{D}^{1,p}$ si on ferme la dérivée pour la norme L^p , et même définir $\mathbb{D}^{n,p}$, avec $n \geq 1$ pour définir une dérivée n -ème. L'intérêt réside dans le fait que $\mathbb{D}^\infty \triangleq \bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{p \geq 1} \mathbb{D}^{n,p}$ est une algèbre : c'est un espace stable par produit. ♣

Démonstration : Il suffit de prouver le point 2., qui est une conséquence de la formule d'intégration par parties (Proposition I.3.6). Soient $G \in \mathcal{S}$ et $\phi \in L^2(\mu)$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E} [F_n \langle DG, \phi \rangle_{L^2(\mu)}] = \mathbb{E} [F_n GW(\phi)] - \mathbb{E} [G \langle DF_n, \phi \rangle_{L^2(\mu)}].$$

Il suit en passant à la limite quand $[n \rightarrow \infty]$ que pour tout $G \in \mathcal{S}$ et $\phi \in L^2(\mu)$, $\mathbb{E} [G \langle u, \phi \rangle_{L^2(\mu)}] = 0$. Par orthogonalité dans $L^2(\mathbb{P})$ et par densité de $\mathcal{S}$ (Lemme I.3.2), on en déduit que $\mathbb{P}$ -presque sûrement, pour tout $\phi \in L^2(\mu)$, $\langle u, \phi \rangle_{L^2(\mu)} = 0$, donc encore par orthogonalité que $\mathbb{P}$ -presque sûrement et μ -presque partout, $u = 0$ (on a omis le point suivant : les "presque sûrement" dépendent du choix de ϕ , mais la séparabilité de $L^2(\mu)$ permet de ne pas s'en soucier). Le fait que les points 1. et 2. sont équivalents est détaillé dans [CR22]. □

On dispose alors des règles usuelles de dérivations : linéarité, dérivée d'un produit (lorsque cela a un sens), et règle de la chaîne (dans le cas où f qui apparaît dans la Définition I.3.1 est lipschitzienne principalement). Ainsi, on sait dériver pas mal de variables dès qu'on connaît la dérivée de variables plus élémentaires. La question est alors : jusqu'où peut-on élémentariser la dérivation ? Une réponse possible ici est de dériver les intégrales stochastiques.

Théorème I.3.9 : Soient $n \geq 1$ et $f \in L^2_{\mathcal{S}}(T^n)$. Alors $I_n(f) \in \mathbb{D}^{1,2}$ avec pour presque tout $t \in T$

$$D_t I_n(f) = n I_{n-1}(f(t, \cdot)).$$

Démonstration : L'égalité est vraie pour toute combinaison linéaire de variables lisses du type $\prod_{i \in \mathbb{N}} H_{\alpha_i}(W(e_i))$, où $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, et $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est de longueur n . Ces variables forment une base hilbertienne de $\mathfrak{H}_n$, d'après le Théorème I.2.14. La fermabilité de l'opérateur D permet de conclure par densité. □

Remarque I.3.10. En fait, c'est même encore mieux, puisque les chaos sont inclus dans $\mathbb{D}^\infty$. On peut dériver un produit d'intégrales stochastiques sans soucis. Cela explique leur statut de variables de base dès qu'on souhaite calculer des dérivées en pratique (avec le Théorème du Quatrième Moment détaillé en Chapitre III). ♣

Ce Théorème permet en fait de caractériser en termes de chaos l'appartenance ou non à $\mathbb{D}^{1,2}$:

$$\mathbb{D}^{1,2} = \left\{ F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \in L^2(\mathbb{P}) \left| \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot n! \|f_n\|_{L^2(T^n)}^2 < \infty \right. \right\}.$$

Cette égalité est remarquable puisqu'elle permet d'affirmer que les définitions en termes de variables lisses et en termes de chaos de la dérivée coïncident. Dans d'autres cadres de dérivation (espace de POISSON), la dérivée est par définition chaotique, et ne s'exprime pas si simplement que dans ce cadre *via* des variables lisses. Concluons cette sous-section avec la Proposition suivante qui justifie en quoi l'opérateur D est un opérateur de dérivation, au delà de l'aspect algébrique.

Proposition I.3.11 : Soient $A \in \mathcal{A}$ (cf Remarque I.2.10) et

$$\mathcal{F}_A \triangleq \sigma \left(W(\mathbf{1}_{A'}), \begin{array}{l} A' \in \mathcal{A} \\ A' \subset A, \mu(A') < \infty \end{array} \right).$$

Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ est $\mathcal{F}_A$ -mesurable, alors pour presque tout $t \in T \setminus A$, $D_t F = 0$ presque sûrement. Plus précisément, pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_A] \in \mathbb{D}^{1,2}$ et pour μ -presque tout $t \in T$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement

$$D_t \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_A] = \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_A] \mathbf{1}_A(t).$$

3.2. Opérateur de divergence

En géométrie différentielle, dès lors qu'on dispose d'un gradient, on dispose d'une divergence qu'on peut définir par dualité (bien que cela ne soit pas du tout sa définition dans ce cadre). Dans le cas $\mathbb{R}^d$, on a par simple intégration par parties $\langle \nabla f, v \rangle_{\mathbb{R}^d} = -\langle f, \nabla \cdot v \rangle_{\mathbb{R}}$ (où bien sûr le produit scalaire sur $\mathbb{R}$ n'est rien d'autre que la multiplication).

Nous allons définir l'opérateur de divergence comme adjoint de la dérivée de MALLIAVIN, au sens des opérateurs non bornés. Ainsi, pour s'assurer de l'existence de cet adjoint, une hypothèse de continuité du produit scalaire associé à la dérivée de MALLIAVIN est nécessaire. Cela explique la Définition suivante.

Définition I.3.12 : Soit $u \in L^2(\Omega \times T)$ un processus stochastique. On dit que u est dans le domaine de l'opérateur de divergence δ , ou plus succinctement $u \in \text{Dom}(\delta)$ s'il existe $C \geq 0$ telle que pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\left| \mathbb{E} \left[\langle u, DF \rangle_{L^2(\mu)} \right] \right| \leq C \mathbb{E}[F^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce cas, on définit $\delta(u) \in L^2(\mathbb{P})$ comme l'unique, presque sûrement, variable aléatoire L^2 telle que pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E} \left[\langle DF, u \rangle_{L^2(\mu)} \right]. \quad [\text{I.4}]$$

Cette égalité est appelée *relation de dualité*.

Remarque I.3.13. Par densité des variables lisses, toutes les occurrences « $\mathbb{D}^{1,2}$ » peuvent être remplacées par des « $\mathcal{S}$ ». ♣

Remarque I.3.14. La valeur absolue pour définir le domaine n'est pas nécessaire, et on trouve très couramment la définition du domaine sans celle-ci. Cela permet simplement d'appuyer sur le fait qu'on souhaite prouver une continuité d'une certaine forme linéaire, donc n'est là que dans un but pédagogique. ♣

Il est possible de caractériser le domaine de δ à partir de son développement en chaos de WIENER, comme le prouve le Théorème suivant.

Théorème I.3.15 : Soit $u \in L^2(\Omega \times T)$ un processus stochastique. On suppose que pour presque tout $t \in T$, u_t se développe en chaos de WIENER sous la forme $u_t = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n(t, \cdot))$, avec pour tout $n \geq 0$, $f_n(t, \cdot) \in L^2_{\mathbb{S}}(T^n)$. Supposons en addition que pour tout $n \geq 1$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto f_n(t, \mathbf{x}) \in L^2(T \times T^n)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Le processus u est dans le domaine de δ .
2. La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)! \left\| \tilde{f}_n \right\|_{L^2(T^{n+1})}^2$ converge.

Dans ce cas, on a alors le développement en chaos de $\delta(u)$:

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n).$$

Démonstration : Encore une fois, on se contente de le faire sur un exemple parmi des fonctions « simples » mais généralisable et permettant de conclure par densité. On considère $T = \mathbb{R}$ muni de la mesure de LEBESGUE et prenons $u_t \triangleq h(t)I_p(g^{\otimes p})$, avec $p \geq 1$ et $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ non nulles. Par le Théorème I.2.12, ce processus s'écrit aussi

$$u_t = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^p h(t) H_p \left(\frac{I_1(g)}{\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}} \right).$$

Par linéarité de δ , on peut supposer que $\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Ce qui va débloquent les choses est le fait que $I_1(\phi)$ pour $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ est gaussienne, donc on est toujours ramené à calculer des espérances de fonctions de gaussiennes, tout est relativement simple. Soit $F \in \mathcal{S}$. Par un procédé de GRAM-SCHMIDT, on peut écrire F comme

$$F = f(I_1(g), I_1(\phi_2), \dots, I_1(\phi_n)),$$

où la famille $(g, \phi_2, \dots, \phi_n)$ est orthonormée. On note $\phi_1 = g$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})}] = \sum_{k=1}^n \langle \phi_k, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} (I_1(g), I_1(\phi_2), \dots, I_1(\phi_n)) H_p(I_1(g)) \right].$$

Puisqu'on traite des variables gaussiennes, et de plus indépendantes, on a alors d'une part, au vu des liens entre polynômes d'HERMITE et variables gaussiennes :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (I_1(g), I_1(\phi_2), \dots, I_1(\phi_n)) H_p(I_1(g)) \right] = \mathbb{E} [FH_{p+1}(I_1(g))].$$

D'autre part, pour $k \geq 2$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} (I_1(g), I_1(\phi_2), \dots, I_1(\phi_n)) H_p(I_1(g)) \right] = \mathbb{E} [I_1(\phi_k) FH_p(I_1(g))].$$

Ainsi,

$$\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})}] = \langle \phi_1, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [FH_{p+1}(I_1(g))] + \sum_{k=2}^n \langle \phi_k, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [I_1(\phi_k) FH_p(I_1(g))].$$

Raffinons tout cela pour montrer que u est dans le domaine de δ et donner l'expression de $\delta(u)$. Pour cela, on étend la famille orthonormée $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ en une base orthonormée $(\phi_j)_{j \geq 1}$. Alors $FH_p(\phi_1)$ est indépendant de tous les $I_1(\phi_j)$ dès lors que $j \geq n+1$, si bien qu'on a en fait

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})}] \\ &= \langle \phi_1, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [FH_{p+1}(I_1(g))] + \sum_{k=2}^{+\infty} \langle \phi_k, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [I_1(\phi_k) FH_p(I_1(g))] \\ &= \langle \phi_1, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [FH_{p+1}(I_1(g))] + \mathbb{E} \left[I_1 \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \langle \phi_k, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \phi_k \right) FH_p(I_1(g)) \right] \\ &= \langle \phi_1, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [FH_{p+1}(I_1(g))] + \mathbb{E} [I_1(h) FH_p(I_1(g))] - \langle h, \phi_1 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [I_1(g) FH_p(I_1(g))]. \end{aligned}$$

En utilisant la relation polynomiale $H_{p+1} = XH_p - pH_{p-1}$, cela se réduit à

$$\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})}] = -p \langle g, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathbb{E} [FH_{p-1}(I_1(g))] + \mathbb{E} [I_1(h) H_p(I_1(g)) F].$$

Or, en utilisant de nouveau le Théorème I.2.12 et en utilisant la formule produit, on a

$$I_1(h) H_p(I_1(g)) = I_1(h) I_p(g^{\otimes p}) = I_{p+1}(h \otimes g^{\otimes p}) + p I_{p-1}(h \otimes_1 g^{\otimes p}).$$

Soit encore, en explicitant la contraction d'ordre 1 :

$$I_1(h) H_p(I_1(g)) = I_{p+1}(h \otimes g^{\otimes p}) + p \langle h, g \rangle I_{p-1}(g^{\otimes(p-1)}).$$

Par le Théorème de conversion I.2.12

$$I_1(h) H_p(I_1(g)) = I_{p+1}(h \otimes g^{\otimes p}) + p \langle h, g \rangle H_{p-1}(I_1(g)).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})}] = \mathbb{E} [I_{p+1}(h \otimes g^{\otimes p}) F].$$

On conclut que $u \in \text{Dom}(\delta)$, puisqu'on a alors

$$|\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})}]| \leq \mathbb{E} [I_{p+1}(h \otimes g^{\otimes p})^2]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} [F^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(p+1)!} \|h \otimes g^{\otimes p}\|_{L^2(\mathbb{R}^{p+1})} \mathbb{E} [F^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Et de plus, $\delta(u) = I_{p+1}(h \otimes g)$. Cela conclut l'idée derrière le Théorème dans ce cas particulier. Notez qu'encore une fois, tout cela n'est que conséquence de faits valables en dimension finie, puisque pour aboutir à une démonstration complète, il suffit seulement d'un argument de densité. $\square$

Concluons cette partie avec le lien entre opérateur de divergence et intégrale de SKOROHOD, plus précisément sur le fait qu'il s'agisse exactement du même objet. La construction originelle effectuée par A. SKOROHOD en 1956, dont la version anglaise [Sko76] paraît en 1975, consiste effectivement à

passer par les chaos. On peut en fait interpréter $\delta(u)$ comme une intégrale de processus non adaptés contre un mouvement brownien. L'idée est de suivre la même construction que les intégrales d'ITô, mais en forçant le caractère adapté du processus intégré (et en considérant une approximation du processus). Ainsi, si les intégrales d'ITô peuvent s'interpréter comme limite en probabilité de sommes de RIEMANN, faisons de même en remplaçant le processus évalué en un point par son approximation adapté, à savoir son espérance conditionnelle sachant les incréments du mouvement brownien jusqu'au temps d'évaluation. On suit la construction de [NP88].

Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, $(u_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique et $T > 0$. On note, pour $t \in [0, T]$, $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $(B_u)_{0 \leq u \leq t}$ et $\mathcal{F}^t$ la tribu engendrée par $(B_u - B_t)_{t \leq u \leq T}$. On considère pour $N \geq 2$ et $1 \leq k \leq N$ l'approximation suivante de u

$$\bar{u}_N \triangleq \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\frac{1}{t_k^N - t_{k-1}^N} \int_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} u_s \, ds \middle| \mathcal{F}_{t_{k-1}^N} \vee \mathcal{F}^{t_k^N} \right] \mathbf{1}_{[t_{k-1}^N, t_k^N]}.$$

Remarquez qu'il s'agit d'étudier les incréments de u , en ajoutant comme information additionnelle les données des incréments en dehors des intervalles de temps considérés. En comparaison, l'intégrale d'ITô ne considère que des évaluations ponctuelles (des incréments de taille nulle), sous la forme $\sum_k u_k \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k]}$. Le processus qu'on considère n'étant pas forcément adapté, l'espérance conditionnelle permet de forcer en quelque sorte un caractère adapté, permettant une convergence ressemblant à une application du théorème de convergence des martingales. On peut montrer que cette approximation converge vers u dans le sens suivant. D'abord, pour tout $N \geq 2$, et presque tout $s \in [0, T]$ $\bar{u}_N(s) \in \mathbb{D}^{1,2}$. De plus, $\int_0^T \mathbb{E}[(\bar{u}_N(s) - u(s))^2] \, ds$ tend vers 0, et finalement

$$\int_0^T \int_0^T \mathbb{E} \left[\left(D_t \bar{u}_N(s) - D_t u(s) \right)^2 \right] \, ds \, dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

On considère la suite d'intégrales de $\bar{u}_n$ suivante

$$\bar{I}_N \triangleq \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\frac{1}{t_k^N - t_{k-1}^N} \int_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} u_s \, ds \middle| \mathcal{F}_{t_{k-1}^N} \vee \mathcal{F}^{t_k^N} \right] (B_{t_k^N} - B_{t_{k-1}^N}).$$

Alors, pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\bar{I}_N \bar{I}_{N+p}] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbb{E}[u(s)^2] \, ds + \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[D_t u(s) D_s u(t)] \, dt \, ds.$$

Autrement dit, nous venons de construire une suite $\bar{I}_N$ telle que $\mathbb{E}[\bar{I}_N \bar{I}_{N+p}]$ vers $\mathbb{E}[\delta(u)^2]$. Si u est adapté, on retrouve en fait l'isométrie d'ITô. Le résultat impressionnant est par conséquent que cette construction coïncide avec l'opérateur de divergence δ . On dira alors de manière équivalente que u est dans le domaine de δ ou que u est intégrable au sens de SKOROHOD. Regarder le chapitre 3 de [Nua06].

L'objet de la Proposition suivante est d'éclairer cette appellation d'« intégrale stochastique de SKOROHOD » en montrant que δ est une extension de l'intégrale d'ITô.

Proposition I.3.16 : *Dans le cas où $T = \mathbb{R}$, si $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par les variables $W(\mathbf{1}_{[0,s]})$, où $s \leq t$, alors tout processus adapté à cette filtration est dans le domaine de δ , et dans ce cas $\delta(u)$ n'est rien d'autre que l'intégrale d'ITô de u .*

Démonstration : L'ensemble des processus adaptés est l'adhérence des processus étagés adaptés, c'est-à-dire des processus de la forme $\sum_{k=1}^n F_k \mathbf{1}_{[s_k, t_k]}$, où $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$ et F_k est $\mathcal{G}_{s_k}$ -mesurable. Or, pour $0 \leq s \leq t$, si $F \in \mathcal{S}$ est $\mathcal{G}_s$ -mesurable, la formule d'intégration par parties (Proposition I.3.6) affirme que $F \mathbf{1}_{[s,t]} \in \text{Dom}(\delta)$ avec $\delta(F \mathbf{1}_{[s,t]}) = FW(\mathbf{1}_{[s,t]})$, qui n'est rien d'autre que l'intégrale d'ITô de $F \mathbf{1}_{[s,t]}$. On conclut que c'est aussi le cas pour tout $F \in L^2(\mathcal{G}_s)$ par densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 . Par linéarité, cela reste vrai pour tous les processus élémentaires adaptés, et encore par densité (des fonctions élémentaires, et aussi de $\mathcal{S}$ dans $L^2(\mathbb{P})$), vrai pour tout processus adapté. $\square$

Pour tout $u \in \text{Dom}(\delta)$, on notera alors

$$\delta(u) \triangleq \int_T u_s \, \delta W_s \triangleq \int_T u_s W(\delta s).$$

Bien que cette définition semble bien ficelée, on doit néanmoins faire attention au fait qu'on ne dispose pas de toutes les propriétés qu'on pourrait exiger d'une intégrale stochastique. En voici une liste non exhaustive.

1. Si $u \in \text{Dom}(\delta)$ alors on n'a pas *a priori* que $u\mathbf{1}_A \in \text{Dom}(\delta)$, où $A \in \mathcal{A}$. Un contre-exemple est le suivant : plaçons-nous sur $T = \mathbb{R}$, et considérons $u_t = \mathbf{1}_{\{W_1 > 0\}} \left(\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]} \right)$. Alors $u \in \text{Dom}(\delta)$ (développer en chaos et utiliser le critère du Théorème I.3.15 pour s'en convaincre), mais ce n'est pas le cas de $u\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}$. Cela implique en particulier qu'on ne dispose pas d'une relation de CHASLES pour ces intégrales.

2. Si $u \in \text{Dom}(\delta)$ et F est une variable aléatoire telle que $uF \in \text{Dom}(\delta)$ alors on n'a pas $\int_T F u_t \delta W_t = F \int_T u_t \delta W_t$. On a en fait un terme additionnel lorsque $F \in \mathbb{D}^{1,2}$:

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_{L^2(\mu)}.$$

3. On ne dispose plus d'une isométrie de l'intégrale stochastique. On a en fait un terme en plus qui fait intervenir la dérivée de MALLIAVIN :

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \mathbb{E}[\|u\|_{L^2(\mu)}^2] + \mathbb{E}\left[\int_T \int_T D_s u_t D_t u_s dt ds\right].$$

Remarque I.3.17. Nous n'avons pas du tout été exhaustifs à propos de ces deux objets que sont la dérivée de MALLIAVIN et l'opérateur de divergence δ . La suite de cette thèse nous permettra de revenir sur certaines propriétés, qu'on développera à ce moment-là, mais nous resterons quoi qu'il en soit lacunaires. Si le lecteur veut plus de détails à ce propos, regarder [Nua06] pour un aperçu détaillé dans le cadre gaussien. ♣

4. Opérateurs d'Ornstein–Uhlenbeck

Définition I.4.1 : On définit le *semi-groupe d'ORNSTEIN–UHLENBECK* comme la famille d'opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$ de $L^2(\mathbb{P})$ telle que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \in L^2(\mathbb{P})$:

$$P_t F \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} I_n(f_n).$$

Défini de la sorte, il est immédiat que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe, dans le sens où $P_0 = \text{id}_{L^2(\mathbb{P})}$ et pour tout $s, t \geq 0$, $P_{t+s} = P_t \circ P_s = P_s \circ P_t$.

Remarque I.4.2. L'opérateur P_0 est l'identité tandis que P_∞ est l'espérance. Ainsi, une vision possible du semi-groupe d'ORNSTEIN–UHLENBECK consiste à y voir un chemin lisse indexé sur $\mathbb{R}_+$ reliant F à son espérance. Ainsi, on a l'égalité suivante

$$F - \mathbb{E}[F] = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial P_t F}{\partial t} dt.$$

Cette égalité est beaucoup exploitée dans [NP12a] pour prouver des résultats du type inégalité de POINCARÉ dans le cadre de la dérivée de MALLIAVIN. ♣

Intéressons-nous à son générateur infinitésimal, qu'on notera L . Par définition, il s'agit de l'opérateur (unique) de $L^2(\mathbb{P})$ qui s'écrit comme limite L^2 de $\frac{1}{t} (P_t - \text{id}_{L^2(\mathbb{P})})$ lorsque $[t \rightarrow 0^+]$. Ce générateur infinitésimal peut aussi s'exprimer sous forme chaotique. C'est l'objet des Définition et Proposition suivantes.

Définition I.4.3 : On appelle *domaine de L* , noté $\text{Dom}(L)$ l'ensemble des variables aléatoires $F \in L^2(\mathbb{P})$ telle que la limite dans L^2 de $\frac{P_t F - F}{t}$ lorsque t tend vers 0^+ existe. Dans ce cas, on définit

$$LF \triangleq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_t F - F}{t},$$

où la limite est prise dans $L^2(\mathbb{P})$.

Remarque I.4.4. Dans la théorie des semi-groupes et des générateurs infinitésimaux, on peut aussi caractériser L comme l'unique opérateur tel que l'équation différentielle $x' = Lx$, pour toute fonction $x \in C^0(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{P})) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*, L^2(\mathbb{P}))$, avec $x(0) = x_0 \in L^2(\mathbb{P})$, admette pour solution $x(t) = P_t x_0$. ♣

Proposition I.4.5 : *Le domaine de L se caractérise par les chaos de WIENER :*

$$\text{Dom}(L) = \left\{ F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \left| \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 n! \|f_n\|_{L^2(T^n)}^2 < \infty \right. \right\}.$$

Dans ce cas, on a alors

$$LF = - \sum_{n=0}^{+\infty} n I_n(f_n).$$

Son intérêt principal dans nos propos intervient dans le Théorème suivant qui lit les trois opérateurs principaux du calcul de MALLIAVIN.

Théorème I.4.6 : *On a l'égalité entre domaines suivante :*

$$\text{Dom}(L) = \mathbb{D}^{1,2} \cap D^{-1}(\text{Dom}(\delta)).$$

Plus précisément, F est dans le domaine de L si et seulement si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $DF \in \text{Dom}(\delta)$. Dans ce cas, on a alors

$$LF = -\delta DF.$$

La démonstration est immédiate en considérant les caractérisations chaotiques.

Remarque I.4.7. Une manière que nous proposons d'interpréter cette égalité est de regarder δ comme une intégrale et D comme une dérivée. Cette égalité propose de regarder ce qu'il se passe quand on essaie d'intégrer une dérivée. Dans notre théorie, il se trouve qu'on retrouve presque la variable initiale, avec un facteur supplémentaire dans le développement chaotique.

Dans le même esprit, on dispose en fait de la formule suivante, dite de CLARCK–OCONE qui s'écrit dans le cadre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] dB_t = F - \mathbb{E}[F].$$

Au lieu de chercher directement intégrer (au sens de SKOROHOD) la dérivée, on intègre (au sens d'ITÔ) une dérivée adaptée, de sorte qu'on retrouve bien F , à constante près. Pour une démonstration n'utilisant pas la formule de représentation des martingales d'ITÔ, regarder l'excellent [RV22], chapitre 10, Exercice 10.18. ♣

Remarque I.4.8. La manière dont nous avons présenté L semble montrer qu'il est relativement anecdotique, et nous sert juste à écrire de manière élégante ce que vaut $\delta \circ D$. Il n'en est rien. En fait, il est tout à fait possible de le voir comme l'opérateur originel de la théorie de MALLIAVIN. Regarder [Zak85] qui fait de L l'acteur principal de son propos.

En fait, cet opérateur provient du cas unidimensionnel du processus d'ORNSTEIN–UHLENBECK. En effet, si on considère l'ÉDS suivante dans $\mathbb{R}$

$$dX_t = X_t dt + \sqrt{2} dB_t,$$

alors on peut lui associer un semi-groupe sur $L^2(\mathcal{N}(0, 1))$ donné par

$$p_t f(x) \triangleq \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x].$$

Pour $f \in C^2$ à support compact, on peut dériver $t \mapsto p_t f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial p_t f(x)}{\partial t} = p_t f''(x) - x p_t f'(x).$$

En évaluant en 0, on définit alors un opérateur l sur les fonctions deux fois dérivables par

$$lf(x) = f''(x) - xf'(x).$$

Or, dans le cadre du calcul de MALLIAVIN, pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $f \in C^2$ à support compact, on a en fait

$$Lf(F) = f''(F) \|DF\|_{L^2(\mu)}^2 - f'(F) LF.$$

En particulier, en prenant $F = W(h)$ avec $\|h\|_{L^2(\mu)} = 1$, on a

$$Lf(W(h)) = f''(W(h)) - W(h)f'(W(h)) = lf(W(h)).$$

Voyez alors encore une fois un opérateur défini dans le cadre du calcul de MALLIAVIN comme une variante infinie (non dénombrable) dimensionnelle d'objets définis en dimension finie. On peut encore s'en convaincre par la formule suivante. Replaçons-nous temporairement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{W})$ l'espace canonique défini en section 1. Alors pour $F \in L^2(\mathbb{W})$, pour presque tout $\omega \in \Omega$, on dispose de la formule dite de MALHER

$$P_t F(\omega) = \int_{\Omega} F(e^{-t}\omega + \sqrt{1-e^{-2t}}\omega') d\mathbb{W}(\omega'),$$

alors que dans le cadre du générateur lié à l'ÉDS, on peut montrer qu'on a pour tout $f \in L^2(\mathcal{N}(0,1))$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$p_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = P_t f \circ B_1(\omega_x),$$

où $\omega_x \in \Omega$ est la fonction constante égale à x . ♣

Définition I.4.9 : On définit l'opérateur *pseudo-inverse* d'ORNSTEIN–UHLENBECK par le développement en chaos : pour tout $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \in L^2$,

$$L^{-1}F \triangleq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} I_n(f_n).$$

Remarque I.4.10. On n'a pas à s'embêter ici avec les domaines, puisque la série converge dans L^2 sans conditions supplémentaires. ♣

Remarque I.4.11. L'intérêt de cet opérateur réside dans le fait qu'on puisse reformuler le Théorème I.4.6 de la sorte : $F - \mathbb{E}[F] = -\delta DL^{-1}F$. En effet, par son statut de *pseudo-inverse*, on a $LL^{-1}F = F - \mathbb{E}[F]$. ♣

Méthode de Stein

« – C'était un beau discours.
– Un tas de mensonges j'en ai peur!
Mais ces paroles nous ont mené jus-
qu'ici. »

Connor à Israel Putnam, *Assassin's
Creed III*, 2012.

Le but de ce chapitre est de présenter un ensemble de techniques de calculs pour estimer des distances entre lois de probabilités, voire même de mesures générales. La première apparition de cette méthode provient d'un compte-rendu de colloque à Berkeley, 1972, de Charles STEIN, [Ste72]. On retrouve des notes de cours de 1986 à ce propos dans [Ste86], qui sont par ailleurs tout à fait accessibles dès lors qu'on possède un bagage de niveau licence en probabilités (avec la connaissance de l'espérance conditionnelle). L'idée est la suivante : à partir d'une caractérisation fonctionnelle d'une loi cible (souvent la gaussienne mais pas toujours), on étudie les solutions d'une équation différentielle associée. L'équation différentielle traduit une proximité entre la loi d'une variable aléatoire par rapport à la loi cible. Les solutions permettent alors de déterminer des bornes de distance entre lois. La méthode de STEIN permet non seulement de montrer une convergence en loi, mais aussi de déterminer une vitesse de convergence.

On présente dans un premier temps les résultats très classiques liés à l'approximation par rapport à une loi normale, déjà présents dans [Ste86]. Ensuite, nous évoquerons un sujet qui reviendra dans cette thèse et qui a été moins étudié (mais tout de même bien documenté), il s'agit d'une approximation par rapport à la loi Gamma. Nous aborderons rapidement comment approcher la loi de vecteurs aléatoires réels par rapport aux lois normales multi-dimensionnelle. Nous concluons finalement sur quelques applications récentes de la méthode de STEIN, justifiant ainsi son intérêt actuel dans la recherche.

Ce chapitre est indépendant du précédent à propos du calcul de MALLIAVIN. L'unification des deux champs est l'objet du chapitre suivant. On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Approximation gaussienne

Cette section présente le cadre standard de cette théorie. Dans des cadres d'approximation avec d'autres lois, on se base tout de même sur ce point de vue. Le point de départ de la méthode de STEIN est une intégration par parties par rapport à la mesure gaussienne.

Lemme II.1.1 : (Lemme de STEIN) Soit F une variable aléatoire réelle. Alors F suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ si et seulement si pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $\mathbb{E}[Ff(F)] < \infty$, $\mathbb{E}[f'(F)]$ est aussi finie et

$$\mathbb{E}[f'(F)] = \mathbb{E}[Ff(F)].$$

La preuve de ce lemme repose essentiellement sur l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

qui provient d'une très classique intégration par parties. Pour une démonstration complète, regarder [NP12a].

Ce lemme est une caractérisation fonctionnelle de la loi normale. Cette observation permet en fait d'établir des bornes de certaines distances définies de cette manière entre une loi de probabilité et la loi normale. Pour cela, on introduit alors l'équation de STEIN. C'est l'équation différentielle suivante d'inconnue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\mathbb{E}[|h(Z)|] < \infty$, où Z suit la loi normale,

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(Z)]. \quad [\text{II.1}]$$

L'intuition est la suivante : en interprétant le lemme de STEIN, une variable aléatoire est proche de suivre la loi normale si et seulement si pour toute fonction test f , $\mathbb{E}[f'(F) - Ff(F)]$ est petit. Le fait que cette espérance soit petite implique alors *via* l'équation de STEIN que dans ce cas $\mathbb{E}[h(F) - h(Z)]$ est petite. Or, la mesure de cette quantité est essentiellement la définition des distances qu'on introduit dans la suite.

Pour h fixé, on note f_h la solution de l'équation de STEIN associée telle que $e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$ tende vers 0 en $\pm\infty$. (sous-entendu : on sait montrer que cette solution existe et est unique). On dispose même de deux expressions de f_h :

$$f_h(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^x h(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = -e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} h(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad [\text{II.2}]$$

L'intérêt de l'équation de STEIN réside alors dans l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[f'_h(F) - Ff_h(F)] = \mathbb{E}[h(Z) - h(F)].$$

Comparer les lois de Z et F consiste à manipuler le terme de droite. L'équation de STEIN permet alors d'affirmer qu'il suffit de manipuler le terme de gauche pour cette comparaison, qui d'ailleurs ne dépend plus de Z . Supposons que l'ensemble des fonctions tests h est un ensemble $\mathcal{A}$ et que pour tout $h \in \mathcal{A}$, f_h appartient à une autre classe de fonctions $\mathcal{B}$. Supposons de plus que $\mathcal{A}$ est une classe *séparante*, c'est-à-dire une classe de fonctions qui vérifient que pour toutes variables aléatoires X, Y telles que les espérances suivantes sont définies,

$$[\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]] \implies [X \stackrel{\text{loi}}{=} Y].$$

Alors pour ces mêmes variables aléatoires X et Y ,

$$\mathbf{d}_{\mathcal{A}}(X, Y) \triangleq \sup_{f \in \mathcal{A}} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|$$

définit une distance entre les *lois des variables* X et Y . L'équation de STEIN permet alors d'avoir l'inégalité suivante :

$$\mathbf{d}_{\mathcal{A}}(F, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sup_{f \in \mathcal{B}} |\mathbb{E}[f'(F) - Ff(F)]|. \quad [\text{II.3}]$$

Voici en quoi consiste la méthode de STEIN. Il s'agit de résoudre une équation différentielle, étudier précisément ses solutions et choisir une ou plusieurs bonnes solutions (où « bonnes » dépend bien sûr de ce qu'on cherche à étudier) de sorte qu'on puisse estimer la distance entre une variable et une loi cible.

Étudions un exemple fréquent dans cette thèse : la distance de WASSERSTEIN.

Définition II.1.2 : Soient $n \geq 1$, μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ muni des boréliens telles que $\text{Lip}(1) \subset L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$, où $\text{Lip}(1)$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont 1-lipschitziennes. On appelle *distance de WASSERSTEIN* de ν et μ la quantité suivante :

$$\mathbf{d}_W(\mu, \nu) \triangleq \sup_{f \in \text{Lip}(1)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu \right|.$$

Remarque II.1.3. Il s'agit bien d'une distance concernée par nos propos précédents puisque $\text{Lip}(1)$ est bien une classe séparante. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que pour tout $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}}$ est lipschitzienne. Ainsi, si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que pour tout $f \in \text{Lip}(1)$, $f(\mathbf{X}), f(\mathbf{Y}) \in L^1(\mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] = \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]$ alors en particulier pour tout $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}[e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}}] = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{Y}}]$, donc $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ont même loi. ♣

On peut alors étudier la solution de l'équation de STEIN donnée par [II.2].

Proposition II.1.4 : *Pour tout $h \in \text{Lip}(1)$ réelle, f_h est de classe C^1 et est $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ -lipschitzienne. Ainsi, pour toute variable aléatoire réelle F telle que $h(F) \in L^1(\mathbb{P})$ pour tout $h \in \text{Lip}(1)$,*

$$d_W(F, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sup_{\substack{f \in C^1(\mathbb{R}) \\ \|f'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}}} |\mathbb{E}[f'(F) - Ff(F)]|.$$

Pour une démonstration de ce fait, regarder [NP12a]. Il s'agit donc d'une estimation générale applicable pour un grand nombre de variables aléatoires. Si l'on réussit à montrer sur une suite de variables aléatoires $(G_n)_n$ que le membre de gauche tend vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$, on aura alors montré une convergence en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$, et une estimation de la distance. Un exemple probant est le Théorème Central Limite classique, renommé ici Théorème de BERRY–ESSÉEN puisque les hypothèses sont plus fortes, et la conclusion est meilleure qu'une simple convergence. Regarder par exemple [Ste86], chapitre IX, pour une présentation plus complète de ce Théorème, en distance de KOLMOGOROV dans cet exemple, ou regarder [CGS10] pour une discussion entière dans le Chapitre 3 à propos de ce Théorème. La distance de KOLMOGOROV est définie pour la classe de fonctions du type $(-\infty, x]$ avec $x \in \mathbb{R}$. Elle consiste à étudier la différence des deux fonctions de répartition des lois qu'on compare.

Théorème II.1.5 : (Théorème de BERRY–ESSÉEN) *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de même loi qu'une variable X non identiquement nulle, telles que $X \in L^3(\mathbb{P})$. Alors*

$$d_{\text{Kol}}\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n}\sigma[X]}, \mathcal{N}(0, 1)\right) \leq \frac{C\mathbb{E}[|X|^3]}{\sqrt{n}},$$

où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\sigma[X]$ est l'écart-type de X et $C > 0$ est une constante universelle.

Ce principe général, et plutôt simple sur la papier permet de résoudre presque quotidiennement des problèmes de convergence en loi, et de pouvoir estimer des distances. Un recueil est par exemple disponible par [BC05a], et on voit que les problèmes posés sont de nature très diverse. Cette méthode est aussi souvent associée avec la notion de paires échangeables (c'est-à-dire de variables aléatoires X, Y telles que (X, Y) et (Y, X) ont même loi). Ce n'est pas une direction prise dans cette thèse, donc nous n'élaborerons pas plus à ce propos. Regarder [CGS10] et [Ste86] pour un traitement complet à ce propos.

Remarque II.1.6. Si la formule d'intégration par parties gaussienne permet de caractériser la loi normale, l'intégration par parties du calcul de MALLIAVIN (Proposition I.3.6) caractérise quant à elle la loi du mouvement brownien. Plus précisément, si $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ est l'espace probabilisable canonique du mouvement brownien introduit dans la section 1 du chapitre I, alors la mesure de WIENER $\mathbb{W}$ est l'unique mesure de probabilité telle que pour tout $F \in L^2(\mathbb{W})$ et $h \in \mathbb{H}$:

$$\int_{\Omega_0} \langle \nabla F(\omega), h \rangle_{\mathbb{H}} d\mathbb{W}(\omega) = \int_{\Omega_0} F(\omega) I_1(h)(\omega) d\mathbb{W}(\omega).$$

Regarder [RZ91] (en français) pour une exposition complète de ce fait. ♣

2. Approximation par une loi Gamma

Appliquons ce qu'on vient de présenter dans un cadre différent. Pour $\nu > 0$, on définit la loi Gamma de paramètre ν par la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont la densité est donnée par

$$\rho_\nu(x) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x). \quad [\text{II.4}]$$

On note $\Gamma(\nu)$ cette mesure. Notez que ρ_ν vérifie l'équation différentielle suivante : pour tout $x > 0$

$$x\rho_\nu(x) = \int_0^x (\nu - u)\rho_\nu(u) du = - \int_x^{+\infty} (\nu - u)\rho_\nu(u) du. \quad [\text{II.5}]$$

2.1. Motivations

Si $\nu = 1$, il s'agit de la loi exponentielle. Pour retrouver toute la famille exponentielle, il suffit de considérer $\frac{1}{\lambda}X_1$, avec X_1 suivant $\Gamma(1)$ pour retrouver la loi exponentielle de paramètre λ . Si $p \geq 1$ est un entier, et si Y_p suit la loi du χ^2 à p paramètres de liberté (c'est-à-dire la loi de $Z_1^2 + \dots + Z_p^2$, avec $Z_1, \dots, Z_p$ indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$) alors $\frac{1}{2}Y_p$ suit la loi Gamma de paramètre $\frac{p}{2}$. L'un des plus grands intérêts d'approcher par la loi du χ^2 provient du test du χ^2 (qui provient lui-même du Théorème Central Limite classique).

Théorème II.2.1 : Soient $p \geq 1$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $(X_n^j)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que

- i. La famille de variables aléatoires $(X_n^{(j)}, n \geq 1, 1 \leq j \leq p)$ est une famille indépendante de variables aléatoires ;
- ii. Pour tout $1 \leq j \leq p$, la suite $(X_n^{(j)}, n \geq 1)$ est de carré intégrable et est identiquement distribuée, de moyenne commune μ_j et de variance commune σ_j^2 .

Alors dans ce cas, $\sum_{j=1}^p \frac{1}{N\sigma_j^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n^{(j)} - \mu_j \right)^2$ converge en loi, lorsque $[N \rightarrow \infty]$, vers la loi du χ^2 à p paramètres de liberté.

Ce Théorème Limite permet de construire des tests statistiques bien connus, et le problème d'approximation par la méthode de STEIN permettrait de déterminer une vitesse de convergence du test.

Notons aussi que la somme de deux variables indépendantes suivant une loi Gamma reste une loi Gamma. En fait, si on considère un instant les intégrales stochastiques multiples introduites dans le Chapitre I, $I_1(h)^2 = I_2(h \otimes h) + \|h\|^2$ suit la loi Gamma de paramètre $\|h\|^2$. Il suit que la loi Gamma centrée (c'est-à-dire la loi de variables du type $X_\nu - \nu$ avec $X_\nu \sim \Gamma(\nu)$) est présente dans les chaos d'ordre 2. Or, d'après [NP12b], on dispose de deux faits intéressants dans les chaos d'ordre 2. D'une part, par la Proposition 2.1, toute variable dans le deuxième chaos a même loi que $\sum_{n \geq 1} \lambda_n X_1^{(n)}$, où chaque $X_1^{(n)}$ suit la loi du χ^2 centrée à 1 paramètre et est indépendante des autres. D'autre part, par le Théorème 3.1, si on considère une suite de variables aléatoires qui vivent dans le chaos d'ordre 2 et qui converge en loi vers une variable F_∞ alors la loi de F_∞ est la même que celle de $\lambda_0 N + I_2(f)$, où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, N est une gaussienne standard indépendante du processus isonormal sous-jacent et $f \in L^2(\mu)$. La loi Gamma a un rôle prépondérant dans les chaos de WIENER, il est donc majeur de savoir étudier proprement les questions d'approximation par rapport à celle-ci.

2.2. Lemme et équation de Stein

Pour étudier les distances entre une loi et une loi Gamma, on dispose aussi d'une méthode de STEIN, qui commence bien entendu par un lemme de STEIN.

Lemme II.2.2 : (Lemme de STEIN pour la loi Gamma) Soient $\nu > 0$ et $Z \in L^1(\mathbb{P})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La variable Z suit la loi $\Gamma(\nu)$;
(ii) Pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\mathbb{E}[|Zf'(Z)|]$ soit fini alors $\mathbb{E}[(Z - \nu)f(Z)]$ est fini et

$$\mathbb{E}[Zf'(Z)] = \mathbb{E}[(Z - \nu)f(Z)]. \quad [\text{II.6}]$$

Remarque II.2.3. La régularité C^1 n'est pas optimale, on souhaite juste manipuler une fonction absolument continue, donc qui admet une dérivée au sens suivant : il existe $f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u) du$ (où $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des (classes de) fonctions intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}$). ♣

Démonstration : $\Rightarrow$ Supposons que Z suive $\Gamma(\nu)$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\mathbb{E}[|Zf'(Z)|]$ soit fini. Montrons d'abord que $\mathbb{E}[|(Z - \nu)f(Z)|] < \infty$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[|(Z - \nu)f(Z)|] \\ &= \int_0^{+\infty} |z - \nu| |f(z)| \rho_\nu(z) dz = \int_0^\nu (\nu - z) |f(z)| \rho_\nu(z) dz + \int_\nu^{+\infty} (z - \nu) |f(z)| \rho_\nu(z) dz \\ &= \int_0^\nu (\nu - z) \left| f(\nu) - \int_z^\nu f'(u) du \right| \rho_\nu(z) dz + \int_\nu^{+\infty} (z - \nu) \left| f(\nu) + \int_\nu^z f'(u) du \right| \rho_\nu(z) dz \\ &\leq |f(\nu)| \mathbb{E}[|Z - \nu|] + \int_0^\nu |f'(u)| \int_0^u (\nu - z) \rho_\nu(z) dz du + \int_\nu^{+\infty} |f'(u)| \int_u^{+\infty} (z - \nu) \rho_\nu(z) dz du. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation différentielle [II.5], on conclut

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[|(Z - \nu)f(Z)|] \\ &\leq |f(\nu)| \mathbb{E}[|Z - \nu|] + \int_0^\nu |f'(u)| u \rho_\nu(u) du + \int_\nu^{+\infty} |f'(u)| u \rho_\nu(u) du \\ &= |f(\nu)| \mathbb{E}[|Z - \nu|] + \mathbb{E}[|Z| |f'(Z)|] < \infty. \end{aligned} \quad [\text{II.7}]$$

De plus, une intégration par parties donne [II.6] :

$$\mathbb{E}[Zf'(Z)] = \int_0^{+\infty} f'(x) x^\nu e^{-x} \frac{dx}{\Gamma(\nu)} = \int_0^{+\infty} (x - \nu) f(x) x^{\nu-1} e^{-x} \frac{dx}{\Gamma(\nu)} = \mathbb{E}[(Z - \nu)f(Z)].$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que pour tout $f \in C^1$ telle que $\mathbb{E}[|Zf'(Z)|] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|Z - \nu| |f(Z)|] < \infty$ et [II.6] est vérifiée. Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto \cos(xt)$ et $x \mapsto \sin(xt)$ vérifient cette hypothèse, puisque $Z \in L^1(\mathbb{P})$. En particulier, si φ_Z désigne la fonction caractéristique de Z alors φ_Z vérifie l'équation différentielle

$$(it - 1)\varphi'_Z(t) + i\nu\varphi_Z(t) = 0.$$

Avec la condition initiale $\varphi_Z(0) = 1$, on retrouve en fait l'équation différentielle vérifiée par $\widehat{\Gamma(\nu)}$, la fonction caractéristique associée à $\Gamma(\nu)$. On en déduit que Z suit bien la loi $\Gamma(\nu)$. $\square$

L'équation de STEIN associée est alors

$$xf'(x) - (x - \nu)f(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(X_\nu)], \quad [\text{II.8}]$$

où X_ν suit $\Gamma(\nu)$ et h est mesurable bornée. Nous proposons une approche complète pour la distance de WASSERSTEIN, avec les détails techniques, pour comprendre dans un contexte non gaussien comment la mécanique fonctionne. La Proposition suivante décrit les solutions de cette équation différentielle. La preuve provient de l'article de C. DÖBBLER et G. PECCATI [DP18].

Proposition II.2.4 : (*Théorème 2.3 (a) de [DP18]*) Soient $\nu > 0$, et X_ν suivant la loi $\Gamma(\nu)$ (on a noté ρ_ν sa densité donnée par [II.4]). Pour h continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de [II.8] sont toutes de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x\rho_\nu(x)} \left(C + \int_0^x (h(u) - \mathbb{E}[h(X_\nu)]) \rho_\nu(u) du \right) \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x) \\ &+ \frac{1}{x\varsigma_\nu(x)} \left(C' - \int_x^0 (h(u) - \mathbb{E}[h(X_\nu)]) \varsigma_\nu(u) du \right) \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(x) + \frac{h(0) - \mathbb{E}[h(X_\nu)]}{\nu} \mathbf{1}_{\{0\}}(x), \end{aligned} \quad [\text{II.9}]$$

où $\varsigma_\nu(x) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-x} (-x)^{\nu-1} \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(x)$ et $C, C' \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires. On appelle f_h la solution [II.9] pour $C = C' = 0$. C'est l'unique solution bornée de [II.8]. Si de plus, h est C^1 et lipschitzienne, la fonction f_h est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. De plus, f_h vérifie les estimations suivantes.

$$\|f_h\|_\infty \leq \|h'\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f'_h\|_\infty \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \|h'\|_\infty \quad [\text{II.10}]$$

Dans la suite, on notera pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{h}(x) \triangleq h(x) - \mathbb{E}[h(X_\nu)].$$

Remarque II.2.5. La fonction ς_ν ne définit bien sûr pas une densité de probabilité sur $]-\infty, 0[$ car non intégrable en $-\infty$. Elle joue néanmoins un rôle analogue que ρ_ν sur $\mathbb{R}_+^*$ dans l'expression des solutions de l'équation de STEIN. ♣

Démonstration : La valeur en 0 de toutes les solutions est fixée directement par l'équation différentielle, il suffit de prendre $x = 0$ dans [II.8] pour avoir la valeur de $f(0)$. La singularité en 0 de [II.8] implique qu'on doit traiter la résolution sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ séparément. La résolution sur chacun de ces intervalles se fait très classiquement avec une méthode de variation de la constante. La différence entre ces deux cas provient de la solution homogène, c'est-à-dire la solution de $f'(x) = \frac{x-\nu}{x} f(x)$, où une primitive de $x \mapsto \frac{x-\nu}{x}$ est $x - \nu \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ et vaut $x - \nu \ln(-x)$ sur $]-\infty, 0[$. Voici le plan du reste de la démonstration.

- (i) Montrer que f_h est bornée sur $\mathbb{R}$ et conclure sur la première estimation de [II.10].
- (ii) Montrer que f_h est l'unique solution bornée de [II.8].
- (iii) Montrer que f_h est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et conclure sur la deuxième estimation de [II.10].

Débutons la démonstration.

(i) Montrons que f_h est bornée en montrant la première estimation de [II.10]. Pour cela, on utilise l'écriture suivante de $\tilde{h}$ via le théorème de FUBINI, valable ici pour $x > 0$:

$$\tilde{h}(x) = \int_0^x h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz - \int_x^{+\infty} h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz. \quad [\text{II.11}]$$

En appliquant encore le théorème de FUBINI sur f_h donnée par [II.9], on a alors pour tout $x > 0$

$$f_h(x) = \frac{\mathbb{P}(X_\nu \geq x)}{x\rho_\nu(x)} \int_0^x h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz + \frac{\mathbb{P}(X_\nu \leq x)}{x\rho_\nu(x)} \int_x^{+\infty} h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz.$$

D'où pour tout $x > 0$:

$$|f_h(x)| \leq \|h'\|_\infty \left(\frac{\mathbb{P}(X_\nu \geq x)}{x\rho_\nu(x)} \int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz + \frac{\mathbb{P}(X_\nu \leq x)}{x\rho_\nu(x)} \int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right).$$

Or, puisque $\mathbb{E}[X_\nu] = \nu$, on a, par théorème de FUBINI, pour $x \geq 0$

$$\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz = \nu - x + \int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz. \quad [\text{II.12}]$$

Ainsi,

$$|f_h(x)| \leq \frac{\|h'\|_\infty}{x\rho_\nu(x)} \left(\int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz + (\nu - x) \mathbb{P}(X_\nu \leq x) \right).$$

Or, par intégration par parties, on a

$$\int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz = (x - \nu) \mathbb{P}(X_\nu \leq x) + x\rho_\nu(x). \quad [\text{II.13}]$$

On en déduit que $\sup_{x>0} |f_h(x)| \leq \|h'\|_\infty$. Avec l'expression de f_h en 0, on peut étendre la borne supérieure en 0 et obtenir $\sup_{x \geq 0} |f_h(x)| \leq \|h'\|_\infty$. Traitons désormais le cas $x < 0$. Pour cela, même manipulations pour $\tilde{h}$, pour $x < 0$:

$$\tilde{h}(x) = - \int_x^0 h'(z) dz - \int_0^{+\infty} h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz = - \int_x^{+\infty} h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz. \quad [\text{II.14}]$$

D'où pour $x < 0$

$$f_h(x) = \frac{1}{x\varsigma_\nu(x)} \left(\int_x^0 h'(z) Q(x \leq Y \leq z) dz + Q(Y \geq x) \int_0^{+\infty} h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right),$$

où Q est la mesure sur $\mathbb{R}$ de densité ς_ν par rapport à la mesure de LEBESGUE, et Y est l'application identité sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on en déduit que pour tout $x < 0$

$$|f_h(x)| \leq \frac{\|h'\|_\infty}{-x\varsigma_\nu(x)} \left((\nu - x)Q(Y \geq x) - \int_x^0 Q(Y \geq z) dz \right).$$

Or, on dispose aussi d'une intégration par parties pour ς_ν :

$$\int_x^0 Q(Y \geq z) dz = (\nu - x)Q(Y \geq x) + x\varsigma_\nu(x). \quad [\text{II.15}]$$

On en déduit immédiatement que $\sup_{x < 0} |f_h(x)| \leq \|h'\|_\infty$, d'où la première estimation de [II.10].

(ii) Montrons que f_h est l'unique solution bornée de [II.8]. Supposons que g soit aussi une solution bornée. Alors $f_h - g$ résout l'équation homogène et donc s'écrit comme

$$f_h(x) - g(x) = \frac{C}{x\rho_\nu(x)},$$

pour tout $x > 0$, avec $C \in \mathbb{R}$. Or, $x \mapsto \frac{1}{x\rho_\nu(x)}$ tend vers $+\infty$ en 0^+ , donc la seule façon que $f_h - g$ soit bornée au voisinage de 0 est que $C = 0$, donc $f_h = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Idem sur $\mathbb{R}_-^*$ par le même type de raisonnement. D'où $f_h = g$ sur $\mathbb{R}$ d'où l'unicité.

(iii) Montrons que f_h est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de montrer d'abord que f_h est continue sur $\mathbb{R}$, et que f_h' définie sur $\mathbb{R}^*$ est bornée pour conclure.

Pour s'en sortir, on va appliquer plusieurs fois une règle de l'HÔPITAL, regarder [Tay52]. Avec ceci, on en déduit immédiatement que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{h}(x)\rho_\nu(x)}{-(x - \nu)\rho_\nu(x)} = \frac{\tilde{h}(0)}{\nu} = f_h(0).$$

Idem en 0^- . Cela prouve bien que f_h est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrons que f_h' est bornée. Pour cela, on exprime comme dans le point (i) la fonction f_h' en fonction de h' . En utilisant [II.11], le théorème de FUBINI fournit pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^2\rho_\nu(x)f_h'(x) &= (x - \nu) \int_0^x \rho_\nu(u)\tilde{h}(u) du + x\rho_\nu(x)\tilde{h}(x) \\ &= -(x - \nu)\mathbb{P}(X_\nu \geq x) \int_0^x h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz - (x - \nu)\mathbb{P}(X_\nu \leq x) \int_x^{+\infty} h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \\ &\quad + \mathbb{P}(X_\nu \geq x) \left(\int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz \right) \left(\int_0^x h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz \right) \\ &\quad - \mathbb{P}(X_\nu \geq x) \left(\int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz \right) \left(\int_x^{+\infty} h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_\nu \leq x) \left(\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right) \left(\int_0^x h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz \right) \\ &\quad - \mathbb{P}(X_\nu \leq x) \left(\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right) \left(\int_x^{+\infty} h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right). \end{aligned}$$

En utilisant [II.12], on peut alors factoriser le tout et conclure sur l'expression plus simple

$$\begin{aligned} &x^2\rho_\nu(x)f_h'(x) \\ &= \left(\int_0^x h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz \right) \left(\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right) - \left(\int_x^{+\infty} h'(z)\mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right) \left(\int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz \right). \end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout $x > 0$,

$$|f_h'(x)| \leq \|h'\|_\infty \cdot \frac{2 \left(\int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) dz \right) \left(\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) dz \right)}{x^2\rho_\nu(x)} \triangleq \|h'\|_\infty \cdot S_\nu(x).$$

Notre mission est désormais de borner la fonction positive S_ν . On procède en deux morceaux : on trouve une borne sur $]0, \nu]$ puis sur $[\nu, +\infty[$. Tout provient de l'intégration par parties [II.13]. D'abord, sur $[\nu, +\infty[$, l'égalité [II.13] conclut que

$$\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) \, dz \leq x \rho_\nu(x),$$

si bien que par croissance de $x \mapsto \mathbb{P}(X_\nu \leq x)$, on a alors pour tout $x > \nu$

$$S_\nu(x) \leq \frac{2x\mathbb{P}(X_\nu \leq x)x\rho_\nu(x)}{x^2\rho_\nu(x)} \leq 2\mathbb{P}(X_\nu \leq x) \leq 2.$$

Sur $]0, \nu]$, on constate que S_ν est majorée par une fonction croissante :

$$S_\nu(x) \leq 2\nu \frac{\int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) \, dz}{x^2\rho_\nu(x)} \triangleq 2\nu \, \mathfrak{S}_\nu(x)$$

En effet,

$$\mathfrak{S}'_\nu(x) = \frac{x\mathbb{P}(X_\nu \leq x) - (\nu + 1 - x) \int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) \, dz}{x^3\rho_\nu(x)} \triangleq \frac{N_\nu(x)}{x^3\rho_\nu(x)},$$

avec $N_\nu(0) = 0$ et via [II.13] :

$$N'_\nu(x) = x\rho_\nu(x) + (x - \nu)\mathbb{P}(X_\nu \leq x) + \int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) \, dz = 2 \int_0^x \mathbb{P}(X_\nu \leq z) \, dz \geq 0.$$

Ainsi, $\mathfrak{S}'_\nu$ est positive, donc $\mathfrak{S}_\nu$ est croissante, donc sur $]0, \nu]$, $\mathfrak{S}_\nu(x) \leq \mathfrak{S}_\nu(\nu) = \frac{\nu\rho_\nu(\nu)}{\nu^2\rho_\nu(\nu)} = \frac{1}{\nu}$ via [II.13]. Ainsi, on en déduit encore une fois que S_ν est bornée par 2 sur $]0, \nu]$. On conclut que $\sup_{x>0} |f'_h(x)| \leq 2\|h'\|_\infty$. Sur $] -\infty, 0[$, on a le même type d'expression

$$\begin{aligned} & x^2 \varsigma_\nu(x) f'_h(x) \\ &= - \left(\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) \, dz \right) \left(\int_x^0 h'(z) Q(Y \geq z) \, dz \right) - \left(\int_x^{+\infty} h'(z) \mathbb{P}(X_\nu \geq z) \, dz \right) \left(\int_x^0 Q(Y \geq z) \, dz \right), \end{aligned}$$

avec $\int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X_\nu \geq z) \, dz = \nu - x$. D'où pour $x < 0$

$$|f'_h(x)| \leq \|h'\|_\infty \cdot \frac{2(\nu - x) \int_x^0 Q(Y \geq z) \, dz}{x^2 \varsigma_\nu(x)} \triangleq \|h'\|_\infty T_\nu(x).$$

Même enjeu que sur $]0, +\infty[$, on souhaite borner T_ν . On a en fait

$$T_\nu(x) \leq \max \left\{ \lim_{y \rightarrow 0^-} T_\nu(y), \lim_{y \rightarrow -\infty} T_\nu(y), \sup_{\substack{y < 0 \\ T'_\nu(y) = 0}} T_\nu(y) \right\}. \quad [\text{II.16}]$$

On étudie chaque terme de ce maximum un par un pour conclure.

▷ *Limite en 0^-* . On calcule cette limite par des règles de l'HÔPITAL successives (cf [Tay52]).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} T_\nu(x) &\stackrel{(\text{H})}{=} 2\nu \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-Q(Y \geq x)}{x\varsigma_\nu(x) - x(x - \nu)\varsigma_\nu(x)} = \frac{2\nu}{\nu + 1} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-Q(Y \geq x)}{x\varsigma_\nu(x)} \\ &\stackrel{(\text{H})}{=} \frac{2\nu}{\nu + 1} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varsigma_\nu(x)}{-(x - \nu)\varsigma_\nu(x)} = \frac{2}{\nu + 1}, \end{aligned}$$

où « $\stackrel{(\text{H})}{=}$ » signifie qu'on a appliqué la règle de l'HÔPITAL.

▷ *Limite en $-\infty$* . On est dans le cas $\frac{\infty}{\infty}$ de la règle de l'HÔPITAL (cf [Tay52]).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} T_\nu(x) &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\nu - x}{x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\int_x^0 Q(Y \geq z) \, dz}{x\varsigma_\nu(x)} \\ &\stackrel{(\text{H})}{=} 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-Q(Y \geq x)}{-(x - \nu)\varsigma_\nu(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{Q(Y \geq x)}{x\varsigma_\nu(x)} \\ &\stackrel{(\text{H})}{=} 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\varsigma_\nu(x)}{-(x - \nu)\varsigma_\nu(x)} = \frac{2}{\nu}. \end{aligned}$$

▷ *Valeurs aux extrema.* Pour tout $x < 0$

$$T'_\nu(x) = \frac{-2}{x^3} \left[(\nu + (\nu - x)^2) \int_x^0 Q(Y \geq z) dz + x(\nu - x)Q(Y \geq x) \right].$$

Ainsi, $T'_\nu(x) = 0$ si et seulement si $\int_x^0 Q(Y \geq z) dz = \frac{(-x)Q(Y \geq x)(\nu - x)}{(\nu - x)^2 + \nu}$. Ainsi, dans ce cas,

$$T_\nu(x) = \frac{2Q(Y \geq x)}{(-x)\varsigma_\nu(x)} \frac{(\nu - x)^2}{(\nu - x)^2 + \nu} \leq \frac{2Q(Y \geq x)}{(-x)\varsigma_\nu(x)}.$$

Or, par [II.15], en utilisant la décroissance de $z \mapsto Q(Y \geq z)$ sur $] -\infty, 0[$:

$$(\nu - x)Q(Y \geq x) + x\varsigma_\nu(x) \leq -xQ(Y \geq x),$$

d'où $0 < Q(Y \geq x) \leq \frac{-x\varsigma_\nu(x)}{\nu}$, d'où pour tout $x < 0$ tel que $T'_\nu(x) = 0$:

$$T_\nu(x) \leq \frac{2(-x)\varsigma_\nu(x)}{\nu(-x)\varsigma_\nu(x)} = \frac{2}{\nu}.$$

▷ *Bilan sur $] -\infty, 0[$.* Ainsi, en reprenant l'inégalité [II.16], on conclut que $T(x) \leq 2 \max\{1, \frac{1}{\nu}\}$, donc on conclut que

$$\sup_{x < 0} |f'_h(x)| \leq 2 \max\left\{1, \frac{1}{\nu}\right\} \|h'\|_\infty.$$

Cela conclut alors sur la borne supérieure de f'_h sur $\mathbb{R}$ tout entier, et la deuxième estimation de [II.10]. $\square$

2.3. Historique de l'estimation de la solution

De nombreux articles ont étudié la question de la solution de [II.8], mais l'estimation donnée ici est celle qui répond de manière la plus satisfaisante à notre question d'approximation. En effet, les premières estimations de f_h n'étaient uniquement que sur $(0, +\infty)$, et pas sur $\mathbb{R}$ entier. Retraçons l'historique de cette question.

1. L'un des premiers résultats qui répond à la question provient de la thèse [Luk94]. À partir d'une approche par générateur, LUK aboutit à l'équation de STEIN suivante (avec nos notations)

$$xg''(x) + (\nu - x)g'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(X_\nu)],$$

où l'inconnue est g et X_ν suit $\Gamma(\nu)$. Cette équation différentielle est très proche de celle qu'on a étudiée, puisqu'au lieu d'étudier g , il suffit ici d'étudier g' ($f_h = g'$). Alors, sous hypothèse de croissance exponentielle de la fonction h , LUK montre (entre autres) dans le Théorème 2.6 que

$$\sup_{x > 0} |g''(x)| \left(= \sup_{x > 0} |f'_h(x)| \right) \leq \frac{1}{2} \sup_{x > 0} |h''(x)|.$$

On a alors deux observations majeures à propos de ce résultat. D'une part, l'estimation n'est pas sur $\mathbb{R}$ entier, mais uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$. D'autre part, l'estimation fait intervenir la dérivée seconde de h , et non pas sa dérivée première. Cela est un vrai frein pour conclure en une estimation en distance de WASSERSTEIN générale comme on le donne en Théorème II.2.6. Néanmoins, ce résultat reste remarquable, puisqu'il est possible de se rapprocher d'une estimation d'une vitesse de convergence dans le test du χ^2 .

2. Un deuxième résultat usuellement cité était dans le chapitre [Rei05] du livre [BC05b], citant lui-même une thèse de PICKETT. Le contexte est très proche, puisqu'il s'agit cette fois d'une estimation dans le cadre de la loi du χ^2 à $p = 2\nu$ paramètres. Dans ce cas, il est affirmé dans le Lemme 3.1 que

$$\sup_{x > 0} |g''(x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \sup_{x > 0} |h'(x)|,$$

sous les mêmes hypothèses que [Luk94], c'est-à-dire croissance exponentielle et régularité C^1 sur h . La nouveauté ici est le fait qu'on a estimé par rapport à h' et pas h'' . Notons aussi l'apparition du

facteur $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ qui précise le comportement de f_h quand le nombre de paramètres de liberté de la loi du χ^2 est grand.

3. Les mêmes auteurs PICKETT et REINERT, avec GAUNT, reviennent sur ce résultat en 2016 dans [GPR17]. L'équation différentielle est toujours présentée sous la forme diffusive, et les nouvelles conclusions sont les suivantes. Pour h et h' bornées, et h vérifiant toujours la condition de croissance au plus exponentielle, alors

$$\sup_{x>0} |g''(x)| \leq \frac{2}{\nu+1} \left(3 \sup_{x>0} |h'(x)| + 2 \sup_{x>0} |h(x)| \right).$$

Cela améliore la vitesse $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ présentée précédemment. Néanmoins, l'estimation reste toujours sur $(0, +\infty)$, et toujours pas sur $\mathbb{R}$ tout entier. On en déduit néanmoins une estimation en distance de KOLMOGOROV de la vitesse de convergence dans le test du χ^2 , en approchant par des polynômes de degré 2 par morceaux la fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{\{X \leq x\}}$, avec $X \in \mathbb{R}$. Ainsi, il s'agit d'un résultat important à ne pas minimiser malgré notre présentation assez peu avantageuse. De plus, la technique de calcul pour obtenir la borne est intéressante. En effet, pour estimer la borne supérieure de f' , l'idée est de dériver l'équation de STEIN [II.8] pour avoir

$$x f''(x) + (1 + \nu - x) f'(x) - f(x) = h'(x), \quad [\text{II.17}]$$

afin d'obtenir la borne

$$(1 + \nu) \|f'\|_\infty \leq \|h'\|_\infty + \|x f''\|_\infty + \|f\|_\infty + \|x f'\|_\infty. \quad [\text{II.18}]$$

Or, [II.17] peut aussi s'interpréter comme l'équation de STEIN [II.8], où l'inconnue est f' , la constante ν est remplacée par $\nu + 1$ et la fonction test h est remplacée par $h'(x) + f(x)$. Il est dans le cas de [II.8] aisé d'estimer une borne supérieure de $x \mapsto x f'(x)$, donc toutes les bornes qui apparaissent dans [II.18] sont accessibles, donc on en déduit la réponse recherchée.

4. Le problème de l'estimation sur $\mathbb{R}$ entier a été en partie contournée dans [NP09b] en considérant une légère modification du lemme de STEIN : Z suit la loi $\mathbf{\Gamma}(\nu)$ si et seulement si pour tout f telle que les espérances existent,

$$\mathbb{E}[Z_+ f'(Z)] = \mathbb{E}[(Z - \nu) f(Z)],$$

où $x_+ \triangleq \max\{x, 0\}$ (attention, les auteurs étudient la loi Gamma *centrée* dans l'article, d'où le léger changement entre les lemmes). Pour se convaincre de la réciproque, il suffit de montrer que si Z vérifie l'égalité pour toute fonction test alors Z est $\mathbb{P}$ -presque sûrement positive. Pour cela, on prend une approximation ψ de $x \mapsto \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ telle que $\psi = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ pour conclure en passant à la limite que $\mathbb{E}[(Z - \nu) \mathbf{1}_{\{Z<0\}}] = 0$. Puisque la quantité présente dans l'espérance est négative, cela signifie que $Z = \nu$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement ou que $Z \geq 0$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Ainsi, cela conclut que $Z_+ = Z$ presque sûrement, donc à la véracité de ce lemme.

Ainsi, l'équation de STEIN alternative proposée est la suivante :

$$x_+ f'(x) = (\nu - x) f(x) + h(x) - \mathbb{E}[h(X_\nu)], \quad [\text{II.19}]$$

où X_ν suit $\mathbf{\Gamma}(\nu)$. Cette équation admet une unique solution bornée, qui coïncide avec les solutions de [Luk94], [GPR17] sur $(0, +\infty)$, et qui vaut tout simplement $\frac{h(x) - \mathbb{E}[h(X_\nu)]}{x - \nu}$ sur $(-\infty, 0)$. Dans ce cas, l'étude de la solution pour $x < 0$ est relativement simple *via* des règles de l'HÔPITAL, et permet d'aboutir à

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_h(x)| \leq \left(2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} + \frac{2}{\nu^2} \right\} \right) \sup_{x \in \mathbb{R}} |h''(x)|,$$

en combinant règle de l'HÔPITAL pour $x < 0$ et [Luk94] pour $x > 0$. Une estimation du même type est possible en utilisant [Rei05]. Notons l'apparition d'un maximum avec $\frac{1}{\nu}$ qu'on n'avait pas avant. Cela provient de l'ajout de $(-\infty, 0)$ dans la borne supérieure. Cette estimation permet alors d'aboutir à une première estimation générale en distance fonctionnelle entre une variable et la loi Gamma. Néanmoins,

on n'a toujours pas réussi à aboutir à une estimation en distance de WASSERSTEIN, mais uniquement dans une distance plus faible, qui implique tout de même une convergence en loi.

5. La solution la plus satisfaisante provient alors de [DP18]. Exit l'équation alternative [II.19], les auteurs ont réussi à étudier l'unique solution bornée de [II.8] sur $\mathbb{R}$ entier, *via* la démonstration proposée ci-dessus, dans le Théorème 2.3. La solution proposée est de plus assez élémentaire dans le sens où elle ne fait intervenir que le théorème de FUBINI et plusieurs fois la règle de L'HÔPITAL qui semble incontournable pour démontrer des résultats dans ce cadre. Il s'agit de l'article sur lequel nous nous sommes reposés pour évoquer un résultat d'indépendance asymptotique entre une variable aléatoire et la loi Gamma dans le Chapitre X.

2.4. Estimation en distance de Wasserstein

On peut déduire des estimations faites en Proposition II.2.4 le Théorème d'approximation suivant en distance de WASSERSTEIN.

Théorème II.2.6 : *Soit $F \in L^1(\mathbb{P})$ une variable aléatoire réelle. Alors pour $\nu > 0$, on a*

$$d_W(F, \Gamma(\nu)) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} |\mathbb{E}[F f'(F) - (F - \nu)f(F)]|,$$

où $\mathcal{C}_\nu$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ avec

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x \neq 0} |f'(x)| \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\}.$$

Démonstration : Par définition, la distance de WASSERSTEIN consiste à étudier les différences d'espérances entre $h(F)$ et $h(X_\nu)$ pour h 1-lipschitzienne et X_ν suivant $\Gamma(\nu)$. Supposons dans un premier temps que h soit de plus de classe C^1 , de sorte que le caractère lipschitzien se reflète par l'inégalité $\|h'\|_\infty \leq 1$. Alors d'après le Lemme de STEIN (Lemme II.2.2) :

$$\mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(X_\nu)] = \mathbb{E}[F f'_h(F) - (F - \nu)f_h(F)].$$

Par la Proposition II.2.4, on a alors pour tout h de classe C^1 qui est 1-lipschitzienne, puisque $f_h \in \mathcal{C}_\nu$:

$$|\mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(X_\nu)]| \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} |\mathbb{E}[F f'(F) - (F - \nu)f(F)]|.$$

Désormais, pour h 1-lipschitzien non nécessairement de classe C^1 , on introduit une approximation de h par la convolution suivante. Pour $\varepsilon > 0$:

$$h^\varepsilon(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} h(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}.$$

Alors h^ε est de classe C^∞ , est 1-lipschitzien et h^ε converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$ lorsque $[\varepsilon \rightarrow 0^+]$. Il est alors aisé de conclure que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit

$$|\mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(X_\nu)]| \leq 2\varepsilon + \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} |\mathbb{E}[F f'(F) - (F - \nu)f(F)]|.$$

Cela permet de conclure la démonstration du Théorème. □

Remarque II.2.7. Cet argument d'approximation par une convolution gaussienne reviendra souvent dans les arguments de démonstration dans cette thèse. ♣

Pour tester la fiabilité de cette estimation, proposons un exemple simple. Pour X suivant $\mathcal{N}(0, 1)$, $\varepsilon > 0$ et Y une variable aléatoire intégrable indépendante de X , considérons $F_\varepsilon \triangleq X^2 + \varepsilon Y$. La distance de WASSERSTEIN entre F_ε et $\Gamma(1)$ peut être estimée en utilisant directement le caractère lipschitzien :

$$d_W(F_\varepsilon, \Gamma(1)) = \sup_{h \in \text{Lip}(1)} |\mathbb{E}[h(F_\varepsilon) - h(X^2)]| \leq \varepsilon \mathbb{E}[|Y|].$$

Déterminons la borne donnée dans le Théorème II.2.6. Soit $f \in \mathcal{C}_1$. Alors

$$\mathbb{E}[F_\varepsilon f'(F_\varepsilon) - (F_\varepsilon - 1)f(F_\varepsilon)] = \mathbb{E}[X^2 f'(F_\varepsilon) - (X^2 - 1)f(F_\varepsilon)] + \varepsilon \mathbb{E}[Y(f'(F_\varepsilon) - f(F_\varepsilon))].$$

Par indépendance de X et Y , si $\mathbb{E}_X$ désigne l'intégration par rapport à la loi de X et $\mathbb{E}_Y$ celle par rapport à Y , on a

$$\mathbb{E} \left[X^2 f'(F_\varepsilon) - (X^2 - 1) f(F_\varepsilon) \right] = \mathbb{E}_Y \left[\mathbb{E}_X \left[X^2 f'(F_\varepsilon) - (X^2 - 1) f(F_\varepsilon) \right] \right] = 0,$$

car par le Lemme de STEIN II.2.2 appliqué à $x \mapsto f(x + \varepsilon y)$, avec $y \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\mathbb{E} \left[X^2 f'(X^2 + \varepsilon y) - (X^2 - 1) f(X^2 + \varepsilon y) \right] = 0.$$

Ainsi,

$$|\mathbb{E} [F_\varepsilon f'(F_\varepsilon) - (F_\varepsilon - 1) f(F_\varepsilon)]| \leq \varepsilon \mathbb{E} [|Y| |f'(F_\varepsilon) - f(F_\varepsilon)|].$$

Puisque $f \in \mathcal{C}_1$, cela se réduit à

$$|\mathbb{E} [F_\varepsilon f'(F_\varepsilon) - (F_\varepsilon - 1) f(F_\varepsilon)]| \leq 3\varepsilon \mathbb{E} [|Y|].$$

Dans ce cas simple, on trouve le même ordre de grandeur, mais une constante plus grande, ce qui présage que l'estimation serait moins bonne. D'une part, il est certainement possible de faire le calcul de manière moins grossière que notre présentation ici. D'autre part, même si sur cet exemple simple, il est plus efficace en termes d'estimation d'utiliser le caractère lipschitzien (d'autant plus qu'on n'a nullement besoin d'indépendance dans ce cas), il sera en fait très profitable d'avoir une borne ne dépendant que de la variable d'intérêt F dans le chapitre suivant quand on utilisera le calcul de MALLIAVIN.

3. Approximation gaussienne multidimensionnelle

Nous proposons ici un résumé de la façon dont on traite le cas gaussien multidimensionnel. Le Lemme de STEIN est en fait modifié dans ce cas. Pour $d \geq 1$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives), $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$ désigne la loi normale d -dimensionnelle d'espérance $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance C . Enfin, si $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle_{\text{HS}}$ désigne le produit scalaire de HILBERT-SCHMIDT de A et B : il s'agit du produit scalaire canonique lorsqu'on voit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ comme $\mathbb{R}^{d^2}$.

On expose les résultats généraux, mais on se contentera de démonstrations dans le cas centré réduit. Pour retrouver le cas général, il suffit de translater par $\boldsymbol{\mu}$ et de multiplier par l'inverse d'une racine carrée de C . Ces calculs ne sont que du travail de calcul différentiel et n'éclairent pas mieux les résultats présentés dans cette section (regarder la Remarque II.3.5 pour une explication plus précise).

Lemme II.3.1 : (Lemme de STEIN dans le cas gaussien multidimensionnel). Soient $d \geq 1$ un entier et $\mathbf{Z}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$.

1. Le vecteur $\mathbf{Z}$ suit $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d)$ si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 bornées,

$$\mathbb{E}[\Delta f(\mathbf{Z})] = \mathbb{E}[\mathbf{Z} \cdot \nabla f(\mathbf{Z})]. \quad [\text{II.20}]$$

2. Soient $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. Alors le vecteur $\mathbf{Z}$ suit la loi $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$ si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 bornées,

$$\mathbb{E}[\langle \text{Hess}(f)(\mathbf{Z}), C \rangle_{\text{HS}}] = \mathbb{E}[(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla f(\mathbf{Z})]. \quad [\text{II.21}]$$

Remarque II.3.2. On constate alors que la condition ne porte plus sur f et sa dérivée, mais sur les dérivées premières et secondes. En fait, on dispose d'une version d'ordre 1 du lemme de STEIN multidimensionnel, mais pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Le Lemme s'énonce : $\mathbf{Z}$ suit la loi $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_n)$ si et seulement si pour toute fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ C^1 bornée et aux dérivées bornées,

$$\mathbb{E}[\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{Z})] = \mathbb{E}[\mathbf{Z} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{Z})], \quad [\text{II.22}]$$

où $\nabla \cdot \mathbf{f}$ est la divergence de $\mathbf{f}$. Pour se convaincre de la réciproque, il suffit de considérer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ et considérer $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = e^{it \cdot \mathbf{x}} \mathbf{v}$. L'égalité [II.22] devient alors

$$(\nabla \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) + \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} = 0,$$

pour tout $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. On en déduit alors que $\varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2}}$, c'est-à-dire que $\mathbf{Z}$ suit $\mathcal{N}_d(0, I_d)$.

Le Lemme de STEIN précédent II.3.1 n'est alors que l'application de cet énoncé avec $\mathbf{f} = \nabla f$. L'avantage du Lemme II.3.1 provient du fait qu'on manipule une fonction numérique, et non pas une fonction vectorielle à l'arrivée. ♣

Démonstration : Nous montrons la réciproque ici, qui n'est pas claire. Supposons que $\mathbf{Z}$ vérifie [II.20]. L'idée est toujours la même, il s'agit de montrer que la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}$ est celle de la gaussienne standard de dimension d . On fixe $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. L'astuce ici consiste non pas à considérer directement $f(\mathbf{x}) = e^{it \cdot \mathbf{x}}$ qui donne une ÉDP qui admet plusieurs solutions malgré la condition initiale, mais plutôt de fixer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ et considérer $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nabla f(\mathbf{x}) = e^{it \cdot \mathbf{x}} \mathbf{v}$. Une telle fonction existe, elle est explicitement donnée par exemple par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{v_1}{it_1} e^{it \cdot \mathbf{x}} + \sum_{j=2}^n \left\{ \left(\frac{v_j}{it_j} - \frac{v_{j-1}}{it_{j-1}} \right) \prod_{k=j}^n e^{it_k x_k} \right\} - \frac{v_n}{it_n},$$

où $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ n'admet pas de coefficient égal à 0. Avec la donnée d'une telle fonction, on s'est en fait ramené au cas de la Remarque précédente, puisque dans ce cas l'égalité [II.20] de STEIN donne pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$

$$(\nabla \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) + \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ce qui conclut la démonstration. □

Remarque II.3.3. Le lecteur attentif aura reconnu le générateur lié au processus d'ORNSTEIN–UHLENBECK défini par

$$Lf(\mathbf{x}) = \Delta f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}).$$

Cela n'a rien d'une surprise, puisque la mesure invariante de l'ÉDS sur $\mathbb{R}^d$ associée $d\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_t dt + \sqrt{2} d\mathbf{B}_t$ (où $(\mathbf{B}_t)_t$ est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$) n'est autre que la loi normale standard sur $\mathbb{R}^d$. Cet approche par générateur permet alors d'introduire d'autres équations de STEIN pour d'autres lois multidimensionnelles. Regarder [Göt91], ou par exemple [KT12] qui traite de la méthode de STEIN (lié au calcul de MALLIAVIN comme on l'évoquera dans le chapitre III) pour les mesures de diffusions, ce qui inclut la plupart des lois usuelles continues : gaussienne, Gamma, uniforme, Bêta, etc. ♣

Pour $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et $C \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$, L'équation de STEIN s'écrit alors pour $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(\mathbf{Z}) \in L^1(\mathbb{P})$ et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\langle \text{Hess}(f)(\mathbf{x}), C \rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z})]. \quad [\text{II.23}]$$

Dans le cas centré réduit, l'équation devient

$$\Delta f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z})]. \quad [\text{II.24}]$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles. On sait tout de même exhiber une solution avec des propriétés intéressantes, regarder [NP12a] pour une approche plus complète à ce sujet, qui est l'objet de la Proposition suivante. Pour $d \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on définit sa *norme d'opérateur*

$$\|A\|_{\text{op}} \triangleq \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}.$$

Proposition II.3.4 : Soient $d \geq 1$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{Z}$ suivant $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$. Pour h de classe C^2 aux dérivées partielles d'ordre 1 et 2 bornées, une solution de [II.23] est donnée par

$$f_h(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left[h(\mathbf{Z}) - h \left(\boldsymbol{\mu} + e^{-t}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1 - e^{-2t}}(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}) \right) \right] dt.$$

De plus, f_h est de classe C^2 et vérifie

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \|\text{Hess}(f_h)(\mathbf{x})\|_{\text{HS}} \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h'\|_{\infty},$$

où $\|h'\|_{\infty}$ est la plus petite constante de LIPSCHITZ de h .

Remarque II.3.5. Expliquons rapidement comment passer du cas standard $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d)$ au cas général $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$, avec $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. Pour cela, il s'agit de traduire un vecteur suivant la loi normale standard (notons-le $\mathbf{Z}^\circ$) à un vecteur suivant la loi général (noté $\mathbf{Z}$). On le fait *via* $t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}(\mathbf{x}) = \Sigma \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$, puisqu'on a $\mathbf{Z} = t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}(\mathbf{Z}^\circ)$, où $\Sigma \in \mathcal{S}_d^{++}$ vérifie $\Sigma^2 = C$. Ainsi, si le lemme de STEIN pour la loi standard s'écrit $\mathbb{E}[\mathcal{L}^\circ f(\mathbf{Z}^\circ)] = 0$, pour tout f suffisamment régulière, et si pour la loi générale, elle s'écrit $\mathbb{E}[\mathcal{L}f(\mathbf{Z})] = 0$, où $\mathcal{L}$ dépend de $\boldsymbol{\mu}$ et Σ alors on dispose de la relation suivante

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}^\circ(f \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}) \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}^{-1}.$$

Puisque $\nabla(f \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}) = \Sigma((\nabla f) \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma})$ et $\Delta(f \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}) = \langle C, \text{Hess}(f) \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma} \rangle_{\text{HS}}$, cela justifie l'expression du lemme de STEIN générale. Il est en fait de même pour les solutions de l'équation de STEIN : si f_h° désigne la solution de $\mathcal{L}^\circ f = h - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}^\circ)]$ et f_h celle de $\mathcal{L}f = h - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z})]$ alors

$$f_h = f_h^\circ \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}^{-1}.$$

Ainsi, il suffit de savoir ce qu'il se passe dans le cas standard pour déduire le cas général. ♣

Avec la Proposition II.3.4, on peut estimer la distance de WASSERSTEIN d'une loi d'un vecteur aléatoire par rapport aux gaussiennes standards en dimension d . Pour une introduction plus complète, et plus précise dans les applications (matrices de WISHART), regarder la remarquable thèse de Julie GAMAIN [Gam23].

Théorème II.3.6 : Soient $d \geq 1$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{F}$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ intégrable. Alors

$$d_W(\mathbf{F}, \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)) \leq \sup_{f \in \mathcal{L}_C} \left| \mathbb{E} \left[\langle \text{Hess}(f)(\mathbf{F}), C \rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{F} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla f(\mathbf{Z}) \right] \right|, \quad [\text{II.25}]$$

où $\mathcal{L}_C$ est donné par

$$\mathcal{L}_C \triangleq \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \|\text{Hess}(f_h)(\mathbf{x})\|_{\text{HS}} \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \right\}.$$

4. Applications de la méthode de Stein dans différents domaines

Justifions l'importance de la méthode de STEIN dans la recherche actuelle avec trois articles de 2023-2024 provenant de trois domaines des Probabilités distincts. Nous nous contenterons de les résumer en expliquant le rôle de la méthode de STEIN à chaque fois.

4.1. Mathématiques appliquées : Approximation de lois liées au modèles des deux îles de Wright–Fisher

Le propos de cette sous-section provient de [GW24]. Considérons une population dispersée sur deux îles. On suppose que cette population est *haploïde*, c'est-à-dire qu'elle ne possède qu'un seul chromosome. On suppose de plus qu'il existe deux types de chromosomes. On cherche à étudier la proportion de chaque type sur chaque île après un certain temps. On considère deux types de modifications possibles : les mutations et les migrations.

On note N le nombre d'individus dans la première île, et M ce nombre dans la deuxième. On suppose que les modifications se font dans cet ordre :

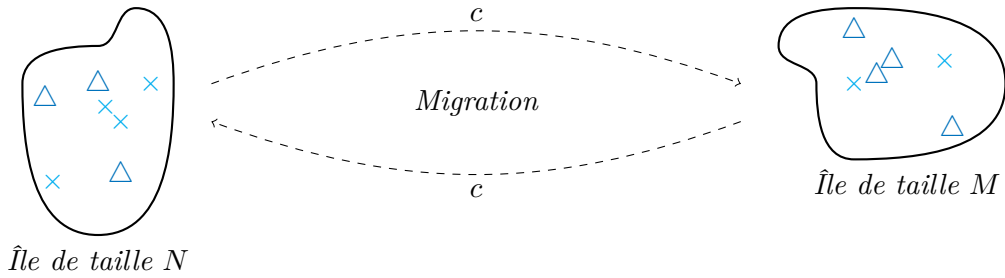


FIGURE II.1 – Représentation de la modélisation : la population est composée d'individus avec le caractère $\times$ ou $\triangle$, avec une migration entre chaque île de c individus.

- (*Migration*). Pour un entier c compris entre 1 et $\min\{N, M\}$, on observe un déplacement de c individus d'une île à l'autre. Plus précisément, c individus de la première île vont vers la deuxième, et c individus de la deuxième vont vers la première, de sorte que le nombre d'individus sur chaque île reste constant. Le choix des individus qui transitent d'une île à l'autre est uniforme, et indépendant.
- (*Mutation*). Une fois les déplacements effectués, on observe une phase de reproduction *via* une mutation ou non selon la règle suivante. Les individus de type 1 restent de type 1 avec probabilité p_1 et deviennent de type 2 avec probabilité $p_2 = 1 - p_1$. Les individus de type 2 restent de type 2 avec probabilité q_2 et deviennent de type 1 avec proba q_1 .

L'article fait l'hypothèse d'une *mutation faible* (c'est-à-dire que p_2 et q_1 sont petits par rapport à $1/N$) et étudie l'effet de la migration selon deux régimes. On suppose c de l'ordre de N^ε , où $0 \leq \varepsilon < 1$. Si $\varepsilon = 0$, on parle de *migration faible* et si $\varepsilon > 0$, on parle de *migration forte*.

On note X (respectivement Y) le nombre d'individus de type 1 sur la première (respectivement deuxième) île. L'article a deux objectifs.

1. Approcher la loi du couple (X, Y) par une loi « TI » (*two-island*) décrite par WRIGHT en 1931 dans son propre modèle de population dispersée sur deux îles. La loi TI est décrite par générateurs, et admet alors une caractérisation de STEIN.
2. Approcher la loi de $\frac{N}{N+M}X + \frac{M}{N+M}Y$ (le nombre moyen d'individus de type 1) par une loi Bêta.

La méthode de STEIN s'applique alors pour la loi TI *via* son approche par générateur. En fait, dès qu'une loi est une loi de diffusion, c'est-à-dire qu'elle est la loi invariante d'une classe d'ÉDS linéaire, on peut lui associer un générateur, et un lemme de STEIN. La loi Bêta est plus connue, et admet un lemme de STEIN plus élémentaire.

4.2. Statistiques : Estimation paramétrique de la loi de Fisher–Bingham

Le récit suivant provient de [FGS24]. Il s'agit d'une des deux parties d'un plus grand article par les mêmes auteurs, nous nous focalisons seulement sur celui mentionné par souci de concision.

Plaçons nous sur $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$ et considérons un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ suivant la loi normale $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, \Sigma^2)$, où $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive. Alors la loi de $\mathbf{X}$ sachant que $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (où $\mathbb{S}^{d-1}$ est la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$ pour la norme canonique) est la loi dite de FISHER–BINGHAM, dont la densité sur $\mathbb{S}^{d-1}$ est donnée par

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \triangleq \frac{1}{C(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}, \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \rangle_{\mathbb{R}^d}\right),$$

avec $C(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}, \Sigma^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \rangle_{\mathbb{R}^d}\right) d\mathbf{z}$, la constante de normalisation, avec $d\mathbf{z}$ la mesure de LEBESGUE induite sur $\mathbb{S}^{d-1}$. L'objectif est de construire un estimateur pour $\boldsymbol{\mu}$ et Σ à partir de la donnée d'un échantillon suivant la loi de FISHER–BINGHAM (on l'appellera loi FB dans la suite).

Il est possible de déterminer un générateur pour la loi FB, donc il est possible de déterminer un lemme de STEIN pour cette loi. Notons $\theta = (\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ et $\mathcal{A}_\theta$ l'opérateur de STEIN, qui vérifie que si $\mathbf{X}$

suit la loi FB alors $\mathbb{E}[\mathcal{A}_\theta f(\mathbf{X})] = 0$ pour une grande classe de fonctions tests. Cet opérateur admet une expression explicite en termes de dérivées de f . Par la loi des grands nombres, il suit alors que si $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$ est un échantillon de loi FB alors

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathcal{A}_\theta f(X_k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-p.s.}} \mathbb{E}[\mathcal{A}_\theta f(\mathbf{X})] = 0.$$

Alors, en choisissant bien les fonctions tests, on peut résoudre l'équation $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathcal{A}_\theta f(X_k) = 0$, d'inconnues μ et Σ et construire à partir de ces solutions des estimateurs $\hat{\mu}_n$ et $\hat{\Sigma}_n$. Le résultat principal est, modulo quelques conditions, la convergence presque sûre de ces estimateurs vers les paramètres initiaux. L'avantage de cette méthode réside dans le fait de ne pas à avoir à calculer la constante de normalisation qui peut être grande.

Ainsi, on observe qu'ici, la méthode de STEIN n'a pas été appliquée pour démontrer des résultats de convergence ou de vitesse de convergence, mais dans un but de création d'estimateurs, *via* la loi des grands nombres. Cela montre une autre facette de cette méthode.

4.3. Réseaux de neurones : Approximation de champs aléatoires par des champs gaussiens

Le contenu suivant provient de [Bal+24]. Un thème très actuel dans la recherche est l'apprentissage par couches. L'étude des réseaux de neurones est justifié par le Théorème d'approximation qui affirme qu'un grand nombre de fonctions aux comportements irréguliers peuvent être approchées par des réseaux de neurones.

Ici, on étudie un réseau aléatoire, dont l'aléa réside dans le choix des poids. L'étude de ces réseaux pour des poids gaussiens est très avancée. On se demande alors si le choix de poids *gaussiens* est crucial dans le Théorème d'approximation.

Plus précisément, considérons un réseau de neurones à L couches. Une représentation standard de ce type d'objet est la Figure II.2.

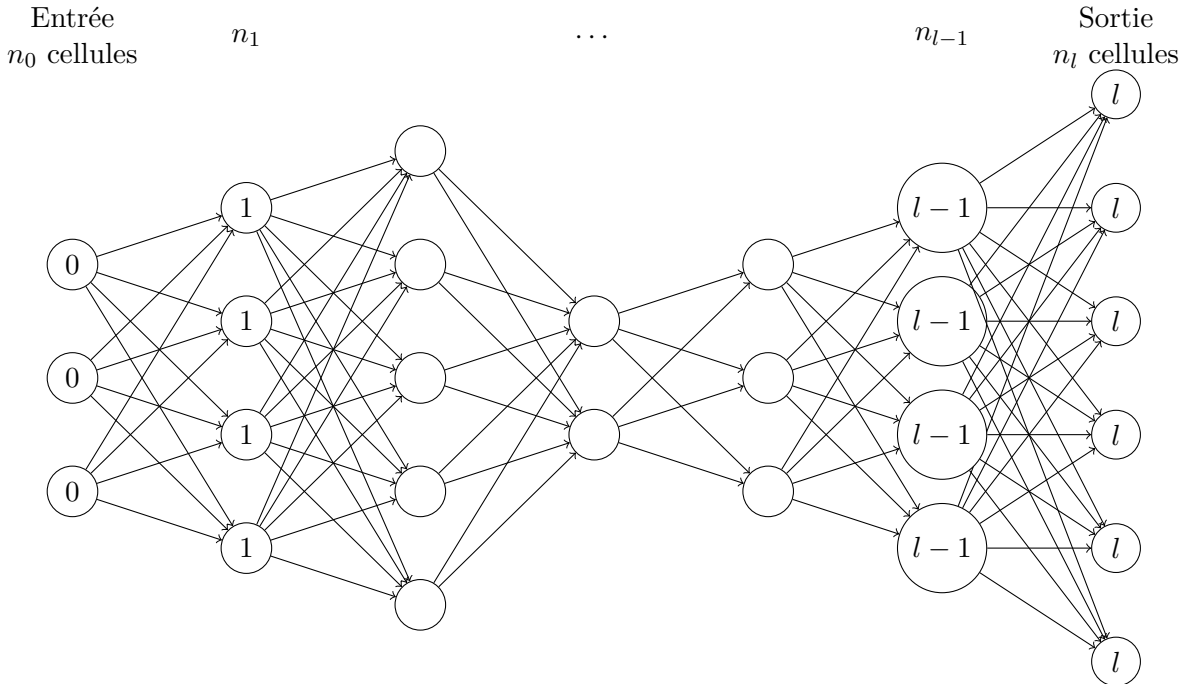


FIGURE II.2 – Représentation d'un réseau de neurones, avec en entrée les cases 0, en sortie les cases l .

On considère des entiers $n_0, n_1, \dots, n_l$ des entiers strictement positifs qui représentent le nombre de cellules sur chaque couche. On suppose que $n_1, \dots, n_{l-1}$ dépendent de n_0 , mais pas n_l (autrement dit,

plus on dispose de données initiales, plus on a besoin de cellules pour faire naviguer les informations jusqu'à la sortie). Pour $x \in \mathbb{R}^{n_0}$, on considère

$$F^{(1)}(x) \triangleq W^{(0)}x + b^{(0)} \in \mathbb{R}^{n_1},$$

où $W^{(0)}$ est une matrice aléatoire dont les lignes sont indépendantes, comportant n_0 colonnes et n_1 lignes et $b^{(0)}$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^{n_1}$ dit *de biais*, indépendant de $W^{(0)}$. Le choix de $W^{(0)}$ et de $b^{(0)}$ n'est pas forcément gaussien. Pour $l \geq 2$, on définit la l -ème couche pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_0}$ par

$$F^{(l)}(x) \triangleq W^{(l-1)}\sigma(F^{(l-1)}(x)) + b^{(l-1)},$$

où $W^{(l-1)}$ est une matrice aléatoire comportant n_{l-1} colonnes et n_l lignes dont tous ses coefficients sont indépendants, $b^{(l-1)}$ est un vecteur de biais de $\mathbb{R}^{n_l}$, $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dite *d'activation* (on adopte la notation $\sigma(\mathbf{v})$ pour désigner le vecteur dont les coefficients sont les images par σ des coefficients de $\mathbf{v}$). $W^{(l-1)}$ et $b^{(l-1)}$ sont indépendants entre eux, et indépendants des éléments aléatoires précédents.

On cherche à étudier la couche finale $F^{(L)} = (F^{(L)}(x))_{x \in \mathbb{R}^{n_0}}$. Il s'agit d'un processus stochastique centré qui n'est pas forcément gaussien. Néanmoins, on sait calculer sa covariance explicitement. Soit $G^{(L)}$ le processus gaussien centré de même fonction de covariance. Le but est d'estimer la distance de WASSERSTEIN entre la loi du processus $F^{(L)}$ et la loi du processus $G^{(L)}$, c'est-à-dire estimer à quel point s'éloigner du cadre gaussien cause du tort dans le réseau de neurones.

Pour conclure sur ces estimations, on utilise une méthode de STEIN plus sophistiquée que celle présentée jusqu'ici puisqu'il ne s'agit plus de comparer la loi de deux variables réelles, mais la loi de deux processus stochastiques. Néanmoins, il est toujours possible de déterminer un lemme de STEIN et d'extraire des solutions à partir de l'équation différentielle associée qui permettent de conclure sur des bornes pour cette distance.

L'idée de Nourdin et Peccati : fusion des deux concepts

« Quand on passe pour un crétin, seuls les crétins obéissent. Mais si tu passes pour le diable, tout le monde se soumet. »

Thatch à Kenway, *Assassin's Creed IV Black Flag*, 2013

Les idées que nous exposons ici sont plus récentes, et se rapprochent plus nettement du cœur de nos sujets de recherche. Après avoir introduit le calcul de MALLIAVIN et la méthode de STEIN, il est temps d'évoquer en quoi ces deux notions se couplent pour donner des résultats très intéressants à propos de convergence de variables aléatoires. Tous les résultats liés à ce domaine de recherche qu'on nomme *méthode de STEIN-MALLIAVIN* sont listés dans le site entretenu par Ivan NOURDIN : <https://sites.google.com/site/malliavinstein>.

Nous introduirons dans cette section l'un des théorèmes fondamentaux de ce domaine, le Théorème du Quatrième Moment, qui traite de convergence en loi vers une loi normale dans les chaos de WIENER. Par la suite, nous ferons un panorama (non exhaustif, il faudrait plusieurs tomes d'une collection d'ouvrages pour cela) des résultats des dernières années démontrés grâce à la méthode de STEIN-MALLIAVIN, et quelques questions ouvertes.

1. Unification du calcul de Malliavin et de la méthode de Stein et Théorème du Quatrième Moment

Le Théorème du Quatrième Moment est le suivant, cette section est dédiée à le comprendre. On considère $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{A}, \mu)$, avec μ sans atomes σ -finie, sur lequel on définit les opérateurs de MALLIAVIN introduits dans le chapitre I.

Théorème III.1.1 : (Théorème du Quatrième Moment) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que

1. Il existe $q \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \mathfrak{H}_q$. On note $X_n = I_q(g_n)$;
2. Il existe $\sigma > 0$ tel que $(\mathbb{E}[X_n^2])_{n \geq 1}$ converge vers σ^2 .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (A) $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
- (B) $(\mathbb{E}[X_n^4])_{n \geq 1}$ converge vers $3\sigma^4$ (le quatrième moment de $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers le moment d'ordre 4 de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$) ;
- (C) $\left(\text{Var} \left[\|DX_n\|_{L^2(\mu)}^2 \right] \right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 ;
- (D) Pour tout entier $1 \leq r \leq q-1$, $g_n \otimes_r g_n$ tend vers 0 en norme $L^2(T^{2(q-r)})$ quand $[n \rightarrow \infty]$;
- (E) Pour tout entier $1 \leq r \leq q-1$, $g_n \tilde{\otimes}_r g_n$ tend vers 0 en norme $L^2(T^{2(q-r)})$ quand $[n \rightarrow \infty]$.

1.1. Historique du Théorème du Quatrième Moment

Notre histoire débute en 2004/2005, avec l'article [NP05] de David NUALART et Giovanni PECCATI. À ce moment, il existait déjà une méthode pour étudier les variables admettant un développement possiblement infini en chaos de WIENER, il s'agissait de la méthode des moments. C'est une méthode de nature combinatoire consistant à calculer tous les moments de la suite de variables aléatoires. Regarder [Maj14] (originellement écrit en 1981, mais réécrit en 2014). Néanmoins, avec la formule produit et le Théorème de DUBINS–SCHWARZ (d'analyse stochastique), les auteurs réussissent à montrer les équivalences entre **(A)**, **(B)** et **(D)**. On détaille un peu la démonstration dans la prochaine sous-section.

Un critère multidimensionnel est abordé dans la même période par Giovanni PECCATI et Ciprian A. TUDOR dans le compte-rendu du séminaire XXXVIII [PT05] par des techniques similaires. Un corollaire très intéressant est le suivant : la convergence d'un vecteur aléatoire dont chaque composante appartient à un chaos fixé (avec pas forcément le même ordre composante par composante) vers une loi normale multidimensionnelle est *équivalente* à la convergence composante par composante vers la loi normale associée (Proposition 1).

Une extension au cas de variable quelconque pouvant se développer en chaos de WIENER est donné dans la même période par David NUALART et Yaozhing HU dans [HN05], Théorème 3. Le critère principal est la suivant : si $X_n = \sum_{q=0}^{+\infty} I_q(g_{q,n})$, alors on exige

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{q=Q+1}^{+\infty} \mathbb{E}[I_q(g_{q,n})^2] = 0. \quad [\text{III.1}]$$

Cette condition est encore d'actualité, bien qu'on développe souvent d'autres techniques dans des cas particuliers pour montrer la convergence de telles variables aléatoires. C'est le cas dans le chapitre V.

Le premier souffle liant calcul de MALLIAVIN et Théorème du Quatrième Moment intervient avec David NUALART et Salvador ORTIZ-LATORRE en 2007 dans [NO08]. Plus précisément, les auteurs montrent l'équivalence entre ce qui était connu et la condition **(C)**. Leur démonstration repose sur l'utilisation du Théorème de PROKHOROV, du fait qu'une suite bornée dans L^2 est en fait une suite étroite (c'est une conséquence de l'hypercontractivité qu'on n'a malheureusement pas évoqué, regarder [Jan97], Remarque 6.16), de la formule d'intégrations par parties (Proposition I.3.6) et de la caractérisation de la convergence en loi *via* la convergence simple des fonctions caractéristiques.

C'est alors en 2009 que l'article fondamental du domaine apparaît, écrit par Ivan NOURDIN et Giovanni PECCATI dans [NP09b]. La nouvelle idée ici n'est pas d'ajouter du calcul de MALLIAVIN puisque déjà exploité auparavant, mais bien d'utiliser la méthode de STEIN et de la combiner avec les opérateurs de MALLIAVIN. On obtient alors un résultat de convergence et en plus une estimation de la vitesse de convergence. On détaille les techniques employées dans la sous-section 1.3.

À partir de ce moment, tout s'est accéléré et d'innombrables articles reprenant cette méthode voient le jour. Nous ferons un point en fin de chapitre sur quelques articles récents employant cette méthode qu'on nomme alors de STEIN–MALLIAVIN ou de NOURDIN–PECCATI.

1.2. Première démonstration *via* le théorème de Dubins–Schwarz et la formule produit

La première démonstration du Théorème du Quatrième Moment provient de [NP05], Théorème 1. Plus précisément, on démontre l'équivalence entre **(A)**, **(B)**, **(D)** et une condition alternative proche de **(D)**, qu'on notera **(D)'**. Puisque tous les espaces de HILBERT réels séparables sont tous isométriques entre eux (ils ont tous une base hilbertienne), il suffit de le montrer sur un seul de ces espace. On se place sur $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ muni de la mesure de LEBESGUE. On considère aussi un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ à partir duquel on introduit les intégrales stochastiques multiples.

Il y a deux ingrédients principaux dans cette démonstration. Le premier est le théorème de DUBINS–SCHWARZ, stipulant qu'une martingale continue $(M_t)_{t \geq 0}$ peut se réaliser comme un mouvement brownien, mais sous un autre temps, appelé *horloge*. Plus précisément, il existe un mouvement brownien β

pour lequel $M_t = \beta_{\langle M, M \rangle_t}$, où $\langle M, M \rangle_t$ est la variation quadratique de la martingale M évaluée en t . Regarder [RY04], Chapitre V, Théorème 1.6 pour une approche complète sur ce propos. Le deuxième ingrédient est la formule produit (Proposition I.2.13) qu'on utilisera encore souvent dans la suite.

Les implications $[(\mathbf{A}) \Rightarrow (\mathbf{B})]$ et $[(\mathbf{D}) \Rightarrow (\mathbf{D}')]$ ne relèvent pas d'outils d'analyse stochastique (le premier est très bien connu, le deuxième est une manipulation d'intégrales), développons plutôt les implications $[(\mathbf{D}') \Rightarrow (\mathbf{A})]$ et $[(\mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{D})]$. Reprenons les notations du Théorème III.1.1.

Supposons avoir la condition alternative $(\mathbf{D})'$, et montrons que dans ce cas, $(X_n)_n$ converge en loi vers la gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ (on suppose $\sigma = 1$). L'idée est la suivante : X_n s'écrit comme une intégrale stochastique :

$$X_n = \int_{[0,1]^q} g_n(s, s_1, \dots, s_{q-1}) dB_{s_1} \cdots dB_{s_{q-1}} dB_s = \int_0^1 I_{q-1}(g_n(s, \bullet)) dB_s,$$

où $g_n(s, \bullet) : (s_1, \dots, s_{q-1}) \mapsto g_n(s, s_1, \dots, s_{q-1})$. On peut alors appliquer le théorème de DUBINS-SCHWARZ à $t \mapsto \int_0^t I_{q-1}(g_n(s, \bullet)) dB_s$ et évaluer en 1 pour avoir l'existence d'un mouvement brownien β^n tel que

$$X_n = \beta^n \left(\int_0^1 I_{n-1}(g_n(s, \bullet))^2 ds \right).$$

Or, *via* la formule produit, la variable $\int_0^1 I_{n-1}(g_n(s, \bullet))^2 ds$ se développe en chaos de WIENER. La condition alternative $(\mathbf{D})'$ permet alors de montrer que tous les termes de ce développement tendent dans L^2 vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$ sauf le terme constant. Ainsi, le couple $(\beta^n(\bullet), \int_0^1 I_{n-1}(g_n(s, \bullet))^2 ds)$ converge en loi quand $[n \rightarrow \infty]$ vers $(B(\bullet), 1)$, donc on conclut sur la convergence de $(X_n)_n$ vers $B_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Supposons $(\mathbf{B})$ et montrons $(\mathbf{D})$. Il s'agit encore une fois d'utilisations multiples de la formule produit pour développer en chaos la variable X_n^4 . En prenant l'espérance, on en déduit que

$$\mathbb{E}[X_n^4] = 3 + \sum_{r=1}^{q-1} \left[\frac{1}{p!(n-p)!} \right]^2 \left(\|g_k \otimes_r g_k\|_{L^2(0,1)^{2(n-r)}}^2 + \binom{2(n-p)}{n-p} \|g_k \tilde{\otimes}_r g_k\|_{L^2(0,1)^{2(n-r)}}^2 \right).$$

La somme tend vers 0 puisque par hypothèse, le moment d'ordre 4 tend vers 3. Elle ne contient que des termes positifs, cela conclut sur la convergence vers 0 de toutes les normes de contractions d'ordre r , pour $1 \leq r \leq q-1$.

1.3. L'apport du calcul de Malliavin

Une nouvelle approche au Théorème du Quatrième Moment provient de NOURDIN et PECCATI dans [NP09b]. Voici une idée globale de son fonctionnement. Dans la suite, on suppose que $\sigma = 1$, quitte à diviser X_n par σ . Reprenons les notations de la section du chapitre II, c'est-à-dire qu'à partir de l'équation différentielle [II.1], avec h dans une classe de fonctions $\mathcal{A}$ séparante, on dispose d'une solution f_h dans une classe de fonctions $\mathcal{B}$. Supposons que toutes les fonctions de $\mathcal{B}$ admettent une dérivée uniformément bornée. Alors la méthode de STEIN (regarder [II.3]) nous fournit pour tout $n \geq 1$

$$\mathbf{d}_{\mathcal{A}}(X_n, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sup_{f \in \mathcal{B}} \left| \mathbb{E}[f'(X_n) - X_n f(X_n)] \right|.$$

L'idée géniale est ici : on utilise le générateur d'ORNSTEIN-UHLENBECK L introduit dans la section 4 du chapitre I. Plus précisément, puisque X_n est centrée, on a l'égalité suivante : $LL^{-1}X_n = X_n$. Ainsi, pour $f \in \mathcal{B}$, on a

$$f'(X_n) - X_n f(X_n) = f'(X_n) - LL^{-1}X_n f(X_n)$$

Or, par le Théorème I.4.6, $L = -\delta D$ (X_n appartient à tous les domaines), si bien que

$$\mathbb{E}[X_n f'(X_n)] = -\mathbb{E} \left[\delta \left(DL^{-1}X_n \right) f(X_n) \right].$$

Par relation de dualité (Définition I.3.12) et règle de la chaîne, cela devient

$$\mathbb{E}[X_n f(X_n)] = -\mathbb{E} \left[\left\langle \mathrm{DL}^{-1} X_n, \mathrm{D}f(X_n) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right] = -\mathbb{E} \left[f'(X_n) \left\langle \mathrm{DL}^{-1} X_n, \mathrm{D}X_n \right\rangle_{\mathcal{H}} \right].$$

Il est alors notable de conclure qu'alors

$$\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(X_n, \mathcal{N}(0, 1)) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{B}} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right\} \mathbb{E} \left[\left| 1 + \left\langle \mathrm{DL}^{-1} X_n, \mathrm{D}X_n \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \right],$$

où la seule contrainte jusqu'ici était un problème d'appartenance aux domaines d'opérateurs de MALLIAVIN. En fait, on peut définir une application bilinéaire appelée *carré-du-champ*, définie sur $\mathbb{D}^{1,2} \times \mathbb{D}^{1,2}$ par $\Gamma(F, G) \triangleq -\langle \mathrm{DL}^{-1} F, \mathrm{D}G \rangle_{\mathcal{H}}$. On reparlera dans la suite de cet opérateur. Voyons qu'à ce stade, le carré-du-champ Γ dicte la vitesse de convergence en distance fonctionnelle $\mathrm{d}_{\mathcal{A}}$.

Or, dans notre cadre, X_n appartient au q -ème chaos de WIENER $\mathfrak{H}_q$, si bien qu'en fait

$$\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(X_n, \mathcal{N}(0, 1)) \leqslant \sup_{f \in \mathcal{B}} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right\} \mathbb{E} \left[\left| 1 - \frac{1}{q} \|\mathrm{D}X_n\|_{\mathcal{H}}^2 \right| \right].$$

On fait apparaître la variance de $\|\mathrm{D}X_n\|^2$ *via* CAUCHY-SCHWARZ, donnant l'implication **(C)** $\implies$ **(A)**. Ce type d'estimation permet alors de conclure en la convergence d'une part mais aussi à une vitesse de convergence, ce qui est le vrai apport de cette approche. Il suffit de savoir estimer une variance pour estimer une vitesse de convergence de la loi de $(X_n)_n$ vers la loi normale. On a transformé un problème de convergence de mesures en un problème de calcul de variance qui peut être faisable si on dispose du noyau explicite g_n tel que $X_n = I_q(g_n)$.

Retenons alors de ce paragraphe que les calculs présentés deviennent très standards dans ce domaine, dès lors qu'on travaille avec des variables dans un chaos de WIENER. Tout se complique lorsqu'on sort de ce cadre, ce qui rend ces espaces très intéressants à manipuler, et rapidement indispensables pour avoir des intuitions. Concluons par l'énoncé du Théorème de [NP09b] qui reprend de manière plus rigoureuse nos propos en distance de WASSERSTEIN (mais pas que).

Théorème III.1.2 : (*NOURDIN-PECCATI, 2009, [NP09b]*) Soit $X \in \mathbb{D}^{1,4}$ une variable aléatoire réelle. Alors pour tout $\sigma > 0$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{W}}(X, \mathcal{N}(0, \sigma^2)) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \mathbb{E} \left[\left(\sigma^2 - \langle \mathrm{D}(-\mathrm{L}^{-1})X, \mathrm{D}X \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, si $X \in \mathfrak{H}_q$ est dans le q -ème chaos de WIENER alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\mathrm{W}}(X, \mathcal{N}(0, \sigma^2)) &\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \mathbb{E} \left[\left(\sigma^2 - \frac{1}{q} \|\mathrm{D}X\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \left| \mathbb{E} [X^2] - \sigma^2 \right| + \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \frac{1}{q} \sqrt{\mathrm{Var} [\|\mathrm{D}X\|_{\mathcal{H}}^2]}. \end{aligned} \tag{III.2}$$

2. Extensions du Théorème du Quatrième Moment

2.1. Cas multidimensionnel

Dans la foulée de l'article [NP12a], un critère de convergence en loi vers une loi normale multidimensionnelle pour des vecteurs aléatoires dans un produit fixe de chaos de WIENER est explicité d'abord par PECCATI et TUDOR dans [PT05]. Les moyens utilisés sont les mêmes que [NP12a].

Tout comme le cas unidimensionnel, une nouvelle démonstration *via* la combinaison du calcul de MALLIAVIN et de la méthode de STEIN a été mise en place par Ivan NOURDIN, Giovanni PECCATI et Anthony RÉVEILLAC dans [NPR10]. Présentons le Théorème principal de cet article.

Théorème III.2.1 : (*Théorème 3.1 de [NPR10]*) Soient $d \geq 1$, $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique définie positive et $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ un vecteur aléatoire réel centré tel que pour tout $1 \leq k \leq d$, $X^{(k)} \in \mathbb{D}^{1,4}$. Alors

$$d_W(\mathbf{X}, \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)) \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[(C[i, j] - \langle DX^{(i)}, D(-L^{-1})X^{(j)} \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right]}.$$

En particulier, si pour tout $1 \leq k \leq d$, il existe $q_k \geq 1$ tel que $X^{(k)} \in \mathfrak{H}_{q_k}$ alors

$$\begin{aligned} d_W(\mathbf{X}, \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)) &\leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[\left(C[i, j] - \frac{1}{q_j} \langle DX^{(i)}, DX^{(j)} \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ &\leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (C[i, j] - \mathbb{E}[X^{(i)} X^{(j)}])^2} \\ &\quad + \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{q_j^2} \text{Var}[\langle DX^{(i)}, DX^{(j)} \rangle_{\mathcal{H}}]}. \end{aligned} \tag{III.3}$$

On a défini ici pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la norme d'opérateur par $\|A\|_{\text{op}} \triangleq \sup_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|$, où $|\cdot|$ désigne la norme canonique sur $\mathbb{R}^d$. La ressemblance avec le cas unidimensionnel est remarquable, tellement qu'on dispose du corollaire suivant : une suite de vecteurs aléatoires vivant dans un produit de chaos de WIENER d'ordres fixés converge en loi vers une gaussienne centrée multidimensionnelle de matrice de covariance C (supposée définie positive) *si et seulement si* chaque composante converge vers la gaussienne centrée réelle de variance $C[i, i]$, où i est l'indice de la composante. Il s'agit par conséquent d'un autre résultat qui est relativement surprenant, conséquence du Théorème du Quatrième Moment, et qui révèle des propriétés remarquables sur les chaos de WIENER.

Notons enfin l'apparition, encore, de l'application bilinéaire carré-du-champ :

$$\Gamma(X^{(i)}, X^{(j)}) = \langle DX^{(i)}, D(-L^{-1})X^{(j)} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Nous évoquerons plus en profondeur cet opérateur lors de la sous-section 2.3.

2.2. Cas Gamma

Comme évoqué dans la section 2 du chapitre II, la loi Gamma est souvent la deuxième loi dans la hiérarchie (derrière l'indétrônable gaussienne) quand on pratique les chaos de WIENER, principalement pour son statut incontournable dans les chaos d'ordre 2. C'est tout naturellement qu'après avoir traité le cas gaussien, NOURDIN et PECCATI s'intéressent au cas de convergence d'intégrales stochastiques multiples vers cette loi. Il s'agit du thème de l'article [NP09a]. Notons $\overline{\Gamma}(\nu)$ la *loi Gamma centrée*, c'est la loi de $X_\nu - \nu$, où X_ν suit la loi Gamma de paramètre ν donnée par [II.4]. Voici l'énoncé du Théorème principal.

Théorème III.2.2 : (*Théorème 1.2 de [NP09a]*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Supposons les deux conditions suivantes.

1. Il existe $q \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \mathfrak{H}_{2q}$. On note $X_n = I_{2q}(g_n)$;
2. Il existe $\nu > 0$ tel que $\mathbb{E}[X_n^2]$ converge vers 2ν lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Notons $c_q \triangleq \frac{4}{q!(2q)^2}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(A) La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\overline{\Gamma}(\nu)$;

- (B) $\mathbb{E}[X_n^3]$ tend vers 8ν et $\mathbb{E}[X_n^4]$ tend vers $12\nu^2 + 48\nu$ quand $[n \rightarrow \infty]$ (les troisième et quatrième moments convergent vers les troisième et quatrième moments de la loi Gamma centrée de paramètre ν);
- (C) Pour $1 \leq r \leq 2q - 1$, avec $r \neq q$, $g_n \otimes_r g_n$ tend vers 0 en norme $L^2(T^{2(2q-r)})$ et pour $r = q$, $g_n \tilde{\otimes}_q g_n - c_q g_n$ tend vers 0 pour la même norme quand $[n \rightarrow \infty]$;
- (D) $\text{Var} \left[\|DX_n\|_{\mathcal{H}}^2 - 4qI_{2q}(g_n) \right]$ tend vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$.

Remarque III.2.3. Il existe des conditions supplémentaires dans le Théorème original, proches de celles qu'on a écrit ici. On a une version symétrisée de (C) et une version unifiée de (B). ♣

Notons d'abord que ce Théorème ne s'adresse qu'aux chaos d'ordre pair. En fait, pour les chaos d'ordre impair, il n'y a aucune chance d'avoir une convergence vers la loi Gamma pour la simple raison que le moment d'ordre 3 d'une variable dans un chaos impair est toujours nul, contrairement au moment d'ordre 3 de Gamma.

On constate que les conditions sont similaires, bien que plus complexes à écrire. C'est bien sûr dû au fait qu'on manipule des intégrales stochastiques par rapport à des processus isonormaux, donc il serait bien illusoire de s'attendre à plus simple que le Théorème du Quatrième Moment gaussien. On retrouve néanmoins la condition phare des ces Théorèmes : la convergence des moments d'ordre 3 et 4. On retrouve aussi une condition portant sur les contractions, avec une exception dans le cas d'une contraction d'ordre q . Cette exception provient d'interférences entre les développements en chaos de X_n^4 et X_n^3 via la formule produit. Notons enfin l'apparition de la condition sur une convergence de variance de norme au carré de dérivée de MALLIAVIN, qui apparaît dès la première formulation du Théorème.

Pour la démonstration, les idées sont en fait très proches de ce qui a été déjà fait. Les outils principaux sont la formule produit, le théorème de PROKHOROV, l'hypercontractivité au sein des chaos de WIENER et la formule d'intégration par parties. Notons la disparition de l'argument d'analyse stochastique utilisant le théorème de DUBINS-SCHWARZ, qui a été simplifié par l'argument de NUALART et ORTIZ-LATORRE utilisant une intégration par parties pour montrer une convergence de fonctions caractéristiques.

On dispose aussi d'un résultat en distance de WASSERSTEIN provenant aussi de [NP09b], utilisant le même argument de combinaison entre méthode de STEIN et calcul de MALLIAVIN.

Théorème III.2.4 : (Théorème 3.11 de [NP09b]) Soient $\nu > 0$ et X une variable aléatoire réelle. On suppose que $X \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors

$$\begin{aligned} d_W(X, \bar{\Gamma}(\nu)) &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \mathbb{E} \left[\left| 2(X + \nu) - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right| \right] \\ &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \left(\left| 2\nu - \mathbb{E}[X^2] \right| + \mathbb{E} \left[\left| 2(X + \mathbb{E}[X^2]) - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right|^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Si de plus $X \in \mathbb{D}^{1,4}$,

$$\begin{aligned} d_W(X, \bar{\Gamma}(\nu)) &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left| 2(X + \nu) - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right|^2 \right]} \\ &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \left(\left| 2\nu - \mathbb{E}[X^2] \right| + \sqrt{\mathbb{E} \left[\left| 2(X + \mathbb{E}[X^2]) - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right|^2 \right]} \right). \quad [\text{III.4}] \end{aligned}$$

Remarque III.2.5. Il ne s'agit pas tout à fait du Théorème originel, puisqu'on a inclus les constantes améliorées par DÖBLER et PECCATI qu'on évoque dans la Proposition II.2.4, et tout au long de la sous-section 2.3 du Chapitre II. ♣

Mentionnons deux résultats issus de [KT12]. Et si on cherchait à développer des Théorèmes du Quatrième Moment pour d'autres lois encore ? Les Corollaires 6.8 et 6.12 affirment qu'il est impossible

que des intégrales multiples convergent en loi vers une loi uniforme ou une loi Bêta. Les techniques de démonstration reposent sur des considérations sur les mesures de diffusion, c'est-à-dire les mesures invariantes de certaines ÉDS.

2.3. Chaos de Markov et sommes homogènes

Le Théorème du Quatrième Moment reste encore aujourd'hui surprenant. Il s'agit d'un énoncé très simple d'un Théorème Central Limite dans les chaos de WIENER. L'énoncé lui-même ne fait pas intervenir le calcul de MALLIAVIN ou la méthode de STEIN (dans un chaos de WIENER, converger en loi vers la gaussienne est équivalent à ce que le quatrième moment converge). Alors, quelles mécanismes intrinsèques à la loi normale et aux chaos de WIENER permettent d'affirmer cette convergence en loi ?

En 2012, dans [Led12], Michel LEDOUX présente le problème d'une autre manière. On a vu dans la sous-section 1.3, *via* [NP09b], que pour une variable $F \in \mathfrak{H}_q$ de variance 1,

$$\mathfrak{d}(F, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \text{Var} \left(\|DF\|^2 \right) = q^2 \text{Var}(\Gamma(F, F)),$$

si bien que la convergence en loi se concrétise par le fait que la norme de la dérivée soit proche d'être déterministe. Rappelons qu'on a défini

$$\Gamma(F, G) \triangleq \langle DF, D(-L^{-1})G \rangle,$$

lorsque cela a un sens. Alors, par formule produit, on a alors

$$\text{Var}(\Gamma(F, F)) \leq C \left(\mathbb{E}[F^4] - 3 \right). \quad [\text{III.5}]$$

Ainsi, le Théorème du Quatrième Moment tel qu'exposé ici serait une conséquence de faits combinatoires liés aux chaos de WIENER.

LEDoux renverse alors le problème. Et si cette situation n'était pas spécifique aux chaos de WIENER ? Plus précisément, si on se donne un opérateur L qui se diagonalise sur $L^2(\mu)$, pour une certaine probabilité μ , existe-t-il une condition générale pour que chaque élément propre de L vérifient une inégalité du type [III.5] ?

Avant de répondre à la question, définissons plus précisément les objets manipulés. L'objet de départ est un opérateur L défini sur $L^2(\mu)$, où μ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$. On suppose que L est un *opérateur de MARKOV*, c'est-à-dire qu'il existe une famille d'opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$ bornés sur $L^2(\mu)$ (et à valeurs dans $L^2(\mu)$) telle que pour tout $f \in L^2(\mu)$, l'équation différentielle est vérifiée (au sens faible) : $\partial_t(P_t f) = L P_t f$, avec $P_0 f = f$, avec la condition supplémentaire que $P_t 1 = 1$, où « 1 » désigne ici la fonction constante égale μ -presque partout à 1. À partir de L , on peut définir un opérateur carré-du-champ

$$\Gamma(f, g) \triangleq \frac{1}{2} (L(fg) - fLg - gLf).$$

Remarquons qu'on exprime l'inégalité recherchée en fonction de cet opérateur, et non pas en termes de dérivée de MALLIAVIN. On cherche en fait à s'abstraire de cet opérateur d'analyse stochastique pour uniquement se focaliser sur le côté algébrique, ce que permet Γ .

On suppose que L est une *diffusion*, c'est-à-dire que si f appartient au domaine de L alors pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ ,

$$L(\varphi(f)) = \varphi'(f)Lf + \varphi''(f)\Gamma(f, f).$$

Ces hypothèses sont bien entendues vérifiées par l'opérateur d'ORNSTEIN–UHLENBECK classique que nous avons introduit. Par une étude *via* une méthode de STEIN, on montre que si F est une fonction propre de L pour une valeur propre λ alors pour tout φ réelle telle que les intégrales ont un sens :

$$\left| \mathbb{E}[\varphi(F)] - \mathbb{E}[\varphi(\mathcal{N}(0, 1))] \right| \leq \frac{C_\varphi}{\lambda} \mathbb{E} \left[(\Gamma(F, F) - \lambda)^2 \right].$$

Le but de l'article est en fait de trouver des conditions pour que ce membre de droite soit petit lorsque le quatrième moment de F est proche de 3.

Faisons une dernière hypothèse : on suppose que le spectre de $-L$ est discret et inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On note $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ les valeurs propres de $-L$. On définit les polynômes suivants. Pour $q \geq 1$, on note

$$Q_q(X) \triangleq \prod_{k=0}^{q-1} (X - \lambda_k),$$

puis R_{q+1} de sorte que $Q_{q+1}(X) = Q'_{q+1}(0)X + X^2 R_{q+1}(X)$ puis enfin $T_{q+1}(X) = R_{q+1}(X + \lambda_q) - R_{q+1}(\lambda_q)$.

On définit par récurrence la suite des itérées Gamma : $\Gamma_1 = \Gamma$ et pour $k \geq 1$

$$\Gamma_{k+1} \triangleq \frac{1}{2} (L(\Gamma_k(f, g)) - \Gamma_k(f, Lg) - \Gamma_k(g, Lf)).$$

On dit que F est une *fonction propre chaotique* pour λ_q si $[Q_{q+1}(\Gamma)](F, F) = 0$ μ -presque partout, où on a défini l'application bilinéaire sur L^2 :

$$Q_q(\Gamma) \triangleq \sum_{i=1}^q \frac{1}{i!} Q_q^{(i)}(0) \Gamma_i.$$

Voici l'énoncé principal qui apporte un début de réponse à la problématique.

Théorème III.2.6 : (*Corollaire 7 de [Led12]*) *Supposons que F soit chaotique pour la valeur propre λ_q . Si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^q T_{q+1} \left(\frac{-\lambda_q}{2} \right) \leq 0, \quad \text{[III.6]}$$

alors on a (lorsque F est de variance 1)

$$\text{Var}(\Gamma(F, F)) \leq \lambda_k^2 \left(\frac{1}{3} \mathbb{E}[F^4] - 1 \right).$$

Ainsi, pour une classe de valeurs propres, dites chaotiques, il suffit d'une condition algébrique [III.6] pour avoir un énoncé type Quatrième Moment dans le cadre de processus de MARKOV à diffusion. De plus, cette condition algébrique est vérifiée automatiquement dès lors que le spectre de $-L$ est $\mathbb{N}$ tout entier (Théorème 8). La démonstration repose d'ailleurs que sur des arguments algébriques, c'est-à-dire des identités principalement vérifiées par Γ du type IPP, et des manipulations de polynômes.

Par conséquent, les deux ingrédients que sont la loi normale et les chaos de WIENER dans le Théorème du Quatrième Moment sont utilisés de la sorte : d'abord la loi normale intervient par méthode de STEIN et on observe une convergence dès que Γ se rapproche d'une constante. Ensuite, par des manipulations de polynômes et d'intégrations par parties vérifiées par Γ , on en déduit que cette proximité provient de conditions algébriques.

À partir de ce moment, on part alors à la recherche à l'*universalité* du théorème du Quatrième Moment. En 2013, l'article [ACP14] propose une définition moins contraignante de ce qu'est être chaotique, qui contient la définition de LEDOUX. On retrouve les résultats avec des preuves toujours algébriques, et relativement plus simples à écrire. L'objet principal d'étude est alors le polynôme homogène de degré q . Plutôt que d'utiliser des intégrales stochastiques, on s'intéresse aux variables aléatoires du type $\sum_{|\alpha|=q} a_\alpha \prod_{\alpha \in \alpha} X_\alpha$, où $X_1, \dots, X_q$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi (souvent $\mathcal{N}(0, 1)$).

Dans l'optique d'étudier ces sommes homogènes, l'article de 2014 [Nou+14] arrive à la conclusion suivante.

Théorème III.2.7 : (*Théorème 2.3 de [Nou+14]*) *Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 4, telle que X soit centrée réduite, et son moment d'ordre 3 vaut 0.*

Alors si X vérifie $\mathbb{E}[X^4] \geq 3$ (on dit que son quatrième cumulant est positif), X vérifie le Théorème du Quatrième Moment dans le sens suivant : si $q \geq 1$, $X_1, \dots, X_q$ sont des copies indépendantes de X et si $Q_X(f)$ désigne le polynôme homogène

$$Q_X(f) \triangleq \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq d} f(i_1, \dots, i_q) X_{i_1} \cdots X_{i_q},$$

où $f : \llbracket 1, d \rrbracket^q \rightarrow \mathbb{R}$ est symétrique, s'annule dès que l'un des coefficients d'entrée n'est pas distinct des autres et $\mathbb{E}[Q_X(f)^2] = 1$, alors on a l'implication suivante

$$\left[\mathbb{E}[Q_X(f_n)^4] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 \right] \implies \left[Q_X(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) \right].$$

Le Théorème original nous dit encore plus, mais restons tout de même sur ce résultat. Il s'agit de voir que le phénomène de convergence vers la gaussienne n'est pas un fait uniquement du au choix d'un processus isonormal. Ici, on observe que sous assez peu de conditions sur la loi initiale (pas d'hypothèse d'absolue continuité, des hypothèses de petits moments), on peut très bien avoir des phénomènes du type quatrième moment.

Une version multidimensionnelle du Théorème du Quatrième Moment dans les chaos de MARKOV (c'est-à-dire les chaos introduits par LEDOUX puis par AZMOODEH, CAMPESE et POLY) est démontré dans [Cam+16]. Une version de ce Théorème où la loi cible est une loi de diffusion est montrée dans [Bou+19].

3. Quelques résultats récents autour de cette méthode

On propose dans cette section d'évoquer des résultats de 2023-2024 qui utilisent cette combinaison entre méthode de STEIN et calcul de MALLIAVIN. Cette section n'est pas utile pour comprendre le reste de cette thèse. Elle sert justement à éclairer d'autres aspects qu'on n'apporte pas nécessairement avec les travaux effectués, et à justifier son intérêt dans les recherches actuelles.

3.1. Surconvergence dans les chaos de Wiener

Évoquons un résultat de 2023 par Ronan HERRY, Dominique MALICET et Guillaume POLY : l'article [HMP24]. Il s'agit d'un papier plutôt dense où le résultat principal est en fait facile à énoncer avec toutes les connaissances réunies dans ce chapitre. On note φ la densité de la gaussienne standard sur $\mathbb{R}$.

Théorème III.3.1 : (Théorèmes 1 et 2 de [HMP24]) Soit $q \geq 1$.

1. Pour tout entier $k \geq 0$, il existe $\delta = \delta(q, k) > 0$ et une constante $C = C(q, k) > 0$ telles que pour tout $F \in \mathfrak{H}_q$, si ρ désigne la densité de la loi de F par rapport à la mesure de LEBESGUE alors on dispose de l'implication suivante

$$\left[d_{\text{FM}}(F, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \delta \right] \implies \left[\rho \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \text{ et } \sum_{j=0}^k \left\| \rho^{(j)} \right\|_{\infty} \leq C \right].$$

2. De manière équivalente, on dispose aussi d'une version séquentielle. Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite appartenant au q -ème chaos de WIENER de densités respectives $(\rho_n)_{n \geq 1}$ alors $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ si et seulement si

$$\forall k \geq 0, \left\| \rho_n^{(k)} - \varphi^{(k)} \right\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

où $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

On note dans ce Théorème d_{FM} la distance de FORTET–MOURIER : il s'agit d'une distance qui métrise la convergence en loi, et qui se présente sous la forme d'une distance fonctionnelle comme étudié dans la méthode de STEIN.

La densité générale d'une variable dans un chaos de WIENER est un mystère et constitue des questions encore ouvertes aujourd'hui. Nous savons que cette densité existe, et est définie sur un intervalle. Un peu mieux, [BKZ18] (Théorème 5.7) montre que la densité ρ d'une variable F non constante dans $\bigoplus_{k=0}^d \mathfrak{H}_k$ est dans l'espace de *NILKOLSKII-BESOV* d'ordre $1/q$, c'est-à-dire vérifie qu'il existe une constante $C > 0$ dépendante de ρ pour laquelle

$$\forall h \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} |\rho(x+h) - \rho(x)| dx \leq C|h|^{1/q}.$$

De plus, cette inégalité est atteinte pour certaines variables (l'exemple présenté est X^q , avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$). Autrement dit, la régularité des densités dans un chaos peut être très basse, et plus on monte en chaos, moins bonne est cette régularité.

Ce que dit le Théorème est alors très fort : si dans un chaos (ou une somme de chaos, c'est aussi un résultat de cet article, modulo une condition supplémentaire sur le chaos de plus grand ordre), une suite converge en loi vers la gaussienne, alors on observe un phénomène de régularisation de la densité, et une convergence des dérivées de tout ordre vers celles de la gaussienne. C'est cela qu'on nomme *surconvergence* (*superconvergence* en anglais).

Intéressons-nous à résumer quelques points de cet article qui contient beaucoup d'informations qui ont chacune leur intérêt. Le phénomène de régularisation provient en fait d'un lemme de MALLIAVIN qui nous indique que si une variable F dans un chaos admet des moments négatifs pour son carré du champ, alors la régularité de sa densité est élevée. Donc, le Théorème principal de l'article est en fait le suivant.

Théorème III.3.2 : (Théorème 3 de [HMP24]) Soit $q \geq 1$.

1. Pour tout $p \geq 1$, il existe $\delta = \delta(p, q) > 0$ et une constante $C = C(p, q) > 0$ telles que pour tout $F \in \mathfrak{H}_q$,

$$\left[\mathfrak{d}_{\text{FM}}(F, \mathcal{N}(0,1)) \leq \delta \right] \implies \left[\mathbb{E} \left[\frac{1}{\Gamma(F, F)^p} \right] \leq C \right].$$

2. De manière équivalente, on dispose aussi d'une version séquentielle. Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite appartenant au q -ème chaos de WIENER convergeant en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\Gamma(X_n, X_n)^p} \right] < \infty.$$

L'idée de démonstration est la suivante. On procède par récurrence sur l'ordre q . Pour $q = 2$, on relie Γ à des quantités spectrales liées à la forme quadratique F en des variables gaussiennes indépendantes. Plus précisément, on relie Γ à un polynôme en les valeurs propres de la hessienne de la matrice associée à F , noté R_p . La convergence en loi de X_n vers $\mathcal{N}(0,1)$ implique que R_p est minorée indépendamment de p , ce qui permet de borner l'espérance de $\Gamma(X_n, X_n)^{-p}$.

Remarque III.3.3. Le choix de l'espace de HILBERT sur lequel faire du calcul de MALLIAVIN est plutôt original ici. D'habitude, on se contente d'un espace relativement connu du type $L^2(0,1)$ et de travailler avec un mouvement brownien. Ce n'est pas du tout la stratégie utilisée ici. En fait, si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace probabilisé ambiant, on travaille alors sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ lui-même. Plus précisément, mais peut-être de manière moins claire, l'espace probabilisé ambiant est $\Omega \times \Omega$, muni de $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}$, et l'espace de HILBERT est simplement $L^2(\Omega)$, muni du processus isonormal suivant : pour $\Phi \in L^2(\Omega)$, et $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}$ -presque tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$, $W(\Phi)(\omega, \omega') \triangleq \Phi(\omega)$. L'intérêt de cette manœuvre est de pouvoir introduire des variables aléatoires indépendantes lorsqu'on dérive. Par exemple, si $F = f(N_1, \dots, N_K)$ alors dans ce cas

$$DF(\omega, \omega') = \sum_{k=1}^K \frac{\partial f}{\partial N_k}(N_1(\omega), \dots, N_K(\omega)) G_k(\omega'),$$

avec $N_1, \dots, N_K$ des gaussiennes indépendantes sur Ω , $G_1, \dots, G_K$ aussi, et indépendantes des N_k . La dérivée dans ce cas-là est une dérivée dite de BOULEAU, et est introduite par exemple dans [Bou21]. On l'appelle aussi opérateur *sharp* (dièse), car noté $\sharp F$. ♣

La récurrence se poursuit en montrant que si on dispose de la propriété pour les chaos d'ordre $m - 1$, c'est aussi le cas pour les chaos d'ordre m . L'idée est alors de dériver les variables pour perdre un chaos et appliquer l'hypothèse de récurrence. Cela nécessite alors de savoir relier le carré du champ de la dérivée à celui de la variable initiale. Par densité, il suffit de traiter le cas où F est un polynôme en des variables $N_1, \dots, N_K$ gaussiennes indépendantes. Dans ce cas, on peut alors relier le moment d'ordre $-p$ du carré du champ de F à un moment négatif d'un polynôme (le même que pour $q = 2$ qu'on a nommé R_p) en les valeurs propres de la matrice hessienne de F (où on dérive par rapport à chaque N_i). Par un argument de réduction, on peut alors relier ce polynôme à celui en rapport avec la dérivée de F . On prouve alors une convergence en loi vers la gaussienne de la dérivée pour appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure sur une borne sur les moments négatifs du carré du champ de F .

Outre le Théorème lui-même, un autre résultat intéressant peut être mis en avant, malgré son côté auxiliaire dans l'article. On définit la dérivée itérée k -ème de BOULEAU pour tout $F \in \mathbb{R}[N_1, \dots, N_K]$ par

$$\sharp^k F \triangleq \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq K} \frac{\partial^k F}{\partial N_{i_1} \dots \partial N_{i_k}}(N_1, \dots, N_K) G_{i_1} \dots G_{i_k},$$

où $(G_1, \dots, G_K)$ est gaussien standard indépendant de $(N_1, \dots, N_K)$. C'est la dérivée de MALLIAVIN expliqué dans le cadre de la Remarque III.3.3.

Proposition III.3.4 : (*Proposition 41 de [HMP24]*) Pour toute suite de variables $(X_n)_{n \geq 1}$ dans un chaos de WIENER fixé $\mathfrak{H}_q$, on a l'implication

$$\left[X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) \right] \implies \left[\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sharp^k X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N} \left(0, k! \binom{q}{k} \right) \right],$$

où $\binom{q}{k} = 0$ si $k > q$ et $\mathcal{N}(0, 0)$ désigne δ_0 , la mesure de DIRAC en 0.

Ce résultat est plus précis que le Théorème du Quatrième Moment, puisqu'au lieu d'indiquer que la norme au carré de la dérivée de MALLIAVIN converge vers q , on a directement une convergence en loi vers une gaussienne centrée de variance q pour la dérivée.

3.2. Théorème de Donsker en distance de Wasserstein

Exposons le résultat de 2020 de Laure COUTIN et Laurent DECREUSEFOND dans [CD20]. Il s'agit de démontrer le célèbre théorème de DONSKEER qui exprime un mouvement brownien comme limite en loi d'une marche aléatoire normalisée.

Plus précisément, si on se donne $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite indépendante et identiquement distribuée de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et si on considère l'interpolation linéaire de la marche aléatoire normalisée suivante :

$$S_n(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} X_k + (nt - \lfloor nt \rfloor) (X_{\lfloor nt \rfloor} - X_{\lfloor nt \rfloor - 1}) \right), \quad [\text{III.7}]$$

alors au sens de la topologie liée à la convergence uniforme sur tout compact, la suite de processus $(S_n(t), t \geq 0)_{n \geq 1}$ converge en loi lorsque $[n \rightarrow \infty]$ vers $\mathbb{W}$, la mesure de WIENER introduite dans le Chapitre I. La démonstration classique, qu'on retrouve par exemple dans [KS98] ou [RY04], provient du célèbre couplage « convergence des lois finies dimensionnelles + relative compacité de la suite de loi implique la convergence en loi du processus ».

On se questionne sur une éventuelle vitesse de convergence. Rappelons qu'on définit une distance, dite de WASSERSTEIN, pour un espace polonais (métrique, complet et séparable) $\mathcal{W}$, sur l'ensemble des mesures de probabilités de $\mathcal{W}$ par

$$\mathbf{d}_{\mathcal{W}}(\mu, \nu) \triangleq \sup_{H \in \text{Lip}_b(1, \mathcal{W})} \left| \int_{\mathcal{W}} H \, d\mu - \int_{\mathcal{W}} H \, d\nu \right|,$$

où $\text{Lip}_b(1, \mathcal{W})$ est l'ensemble des applications $H : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont 1-lipschitzienne pour la métrique de $\mathcal{W}$ et bornées. Jusqu'ici, on a toujours travaillé avec $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ pour comparer la loi de deux variables. Nous cherchons ici à comparer la loi de deux processus, il est donc beaucoup moins simple de déterminer un espace $\mathcal{W}$ où comparer ces lois. Un choix assez répandu est l'utilisation de topologies dites de SKOROHOD (les topologies J1, J2, M1 et M2), introduites en 1953 dans [Sko56] sur l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche. Néanmoins cette approche est difficile ici, on est obligé de supposer une plus grande régularité pour les fonctions tests h .

L'article [CD20] propose alors de travailler avec l'espace suivant : pour $\eta > 0$, $p \geq 1$, on considère $\mathcal{W}_{\eta,p}$ l'espace de SOBOLEV fractionnaire, c'est-à-dire la complétion des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour la norme suivante :

$$\|f\|_{\eta,p}^p \triangleq \int_0^1 |f(t)|^p dt + \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t) - f(s)|^p}{|t - s|^{1+\eta p}} dt ds.$$

On peut définir cet espace pour $\eta = 0$ et $p = \infty$: $\mathcal{W}_{0,\infty}$ est l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. Le Théorème principal est alors le suivant.

Théorème III.3.5 : (Théorème 3.4 de [CD20]) Soient $\eta > 0$ et $p \geq 1$ tels que $0 < \eta - \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ ou $\eta = 0$ et $p = \infty$. Considérons la marche aléatoire normalisée S_n définie par [III.7], avec $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que $X \in L^p(\mathbb{P})$ centrée réduite. Soit B un mouvement brownien standard réel. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour $n \geq 1$

$$d_{\mathcal{W}_{\eta,p}}(S_n, B) \leq C \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \frac{\ln n}{n^{\frac{1-2\eta}{6}}}.$$

L'idée de démonstration est la suivante. On introduit une deuxième approximation, qui sera une approximation en basse dimension d'un point de vue fonctionnel. Plus précisément, on peut en fait écrire S_n sous la forme

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \epsilon_{k,n}(t),$$

où $\epsilon_{k,n}(t) \triangleq \sqrt{n} \int_0^t \mathbf{1}_{[k/n, (k+1)/n]}(s) ds$. À n fixé, on définit V_n l'espace vectoriel engendré par $\epsilon_{k,n}$, de dimension n . Si B est un mouvement brownien, alors on note B_n son approximation affine par morceaux

$$B_n(t) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} \left(B\left(\frac{k+1}{n}\right) - B\left(\frac{k}{n}\right) \right) \epsilon_{k,n}(t),$$

de sorte que $B_n \in V_n$ presque sûrement. Ainsi, une première idée de découpage est la suivante : pour tout $H \in \text{Lip}_b(1, \mathcal{W}_{\eta,p})$,

$$\mathbb{E}[H(S_n)] - \mathbb{E}[H(B)] = \left(\mathbb{E}[H(S_n)] - \mathbb{E}[H(B_n)] \right) + \left(\mathbb{E}[H(B_n)] - \mathbb{E}[H(B)] \right).$$

Le dernier terme est bien connu, et on peut montrer que la borne supérieure en norme $\mathcal{W}_{\eta,p}$ est de l'ordre de $1/n^{\eta-1/2}$. Pour le premier terme, on se débrouille de manière astucieuse : on va en fait projeter à nouveau sur un sous-espace de dimension plus petite. Dans la suite, on considère $N = 2^n$, et par souci de simplicité de présentation, on va expliquer le résultat pour S_N . On fixe $0 \leq q \leq n-1$, on note $Q = 2^q$ et on réalise le découpage suivant, pour tout $H \in \text{Lip}_b(1, \mathcal{W}_{\eta,p})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H(S_N)] - \mathbb{E}[H(B)] &= \left(\mathbb{E}[H(S_N)] - \mathbb{E}[H(\pi_Q(S_N))] \right) + \left(\mathbb{E}[H(\pi_Q(S_N))] - \mathbb{E}[H(\pi_Q(B_N))] \right) \\ &\quad + \left(\mathbb{E}[H(\pi_Q(B_N))] - \mathbb{E}[H(B)] \right), \end{aligned}$$

où π_Q projette orthogonalement les éléments de V_N sur V_Q pour le produit scalaire suivant :

$$\langle \epsilon_{k,N}, \epsilon_{j,N} \rangle_N = \int_0^1 \dot{\epsilon}_{k,N}(t) \dot{\epsilon}_{j,N}(t) dt = \delta_{j,k}.$$

Notons que V_Q est un sous-espace de V_N puisque $Q = 2^q \leq 2^n = N$. Notons aussi que dans ce cas, $\pi_Q(B_N) = B_Q$. On choisit en fait q à la fin, de manière à optimiser les estimations. Les termes extrémaux ont déjà été étudiés auparavant, c'est l'étude du terme central qui est nouveau ici.

L'intérêt de l'approximation de B sur V_N réside dans l'utilisation de la méthode de STEIN sur $\mathbb{R}^d$ qu'on maîtrise mieux que sur un espace de dimension infinie non-dénombrable. Pour tout entier $n \geq 1$, B_n est connu dès lors qu'on connaît tous les incréments de B entre les temps k/n et $(k+1)/n$. Notons que, *via* l'identification $V_n \simeq \mathbb{R}^n$, B_n suit la loi $\mathcal{N}_n(\mathbf{0}, I_n)$. On montre ici une autre présentation de la méthode de STEIN multidimensionnelle que celle donnée dans le chapitre II, puisqu'on écrit en fait

$$\mathbb{E}[H_Q(S_N)] - \mathbb{E}[H_Q(B_N)] = \mathbb{E}[H_Q(S_N) - \mathbb{E}[H_Q(B_N)]] = - \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left[\frac{\partial p_t H_Q}{\partial t}(S_N) \right] dt,$$

où $H_Q = H \circ \pi_Q : V_N \rightarrow \mathbb{R}$ et p_t est le semi-groupe d'ORNSTEIN–UHLENBECK sur $\mathbb{R}^d$ donné pour tout $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable pour la mesure gaussienne, et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ par

$$p_t f(\mathbf{x}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} f \left(e^{-t} \mathbf{x} + \sqrt{1 - e^{-2t}} \mathbf{y} \right) e^{-\frac{1}{2} |\mathbf{y}|^2} \frac{d\mathbf{y}}{\sqrt{(2\pi)^d}}.$$

Ici, on se place dans le cas où $d = Q$, la dépendance en Q est implicite. On continue à faire l'identification $\mathbb{R}^Q \simeq V_Q$ de manière isométrique, avec par exemple $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \langle \epsilon_{k,Q}, \epsilon_{j,Q} \rangle_Q$, où $\mathbf{e}_k$ est le k -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^Q$.

Dans ce cas, il est aisé de calculer le générateur l associé, car il est donné sur $\mathbb{R}^Q$ par $lf(\mathbf{x}) = \Delta f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x})$. Sur V_Q , cela s'exprime alors de la sorte : pour $H : V_Q \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable au sens de MALLIAVIN sur l'espace de dimension finie V_Q et $\phi \in V_Q$,

$$lH(\phi) = -\langle \phi, DH(\phi) \rangle_Q + \sum_{k=0}^{Q-1} \langle D^2 H(\phi), \phi \otimes \phi \rangle_{Q,Q},$$

où pour $\Phi, \Psi \in V_Q \otimes V_Q$ (engendré par la base $\epsilon_{i,Q} \otimes \epsilon_{j,Q}$ pour $0 \leq i, j \leq Q-1$),

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{Q,Q} \triangleq \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial s}(t, s) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial s}(t, s) dt ds.$$

En fait, ce qui est intéressant ici, c'est le fait qu'on n'utilise pas de calcul de MALLIAVIN directement à la racine Ω où l'on définit nos variables aléatoires, mais une couche au-dessus, sur l'espace des fonctions qui agissent sur les variables.

L'idée pour conclure sur une estimation réside une nouvelle fois sur une optimisation, et sur une estimation des dérivées secondes de $p_t H_Q$. Plus précisément, on introduit un paramètre $\tau > 0$ de sorte que

$$\mathbb{E}[H_Q(S_N)] - \mathbb{E}[H_Q(B_N)] = \left(\mathbb{E}[p_\tau H_Q(S_N)] - \mathbb{E}[H_Q(S_N)] \right) - \mathbb{E} \left[\int_\tau^{+\infty} l p_t H_Q(S_N) dt \right].$$

Chaque terme peut s'estimer (c'est en fait le point technique le plus crucial de cet article, surtout le terme intégral). On conclut en optimisant en τ . Cette présentation de la méthode de STEIN *via* l'opérateur d'ORNSTEIN–UHLENBECK s'appelle aussi *représentation de STEIN–DIRICHLET*, regarder [Dec15] pour une courte introduction à cette méthode, pour des espaces de dimension quelconque où on a besoin de la « vraie » dérivée de MALLIAVIN (ou tout du moins d'un semi-groupe d'ORNSTEIN–UHLENBECK).

3.3. Ergodicité et TCL pour la moyenne spatiale de l'équation des ondes en grande dimension

Faisons un dernier panorama sur la méthode de STEIN–MALLIAVIN appliqué cette fois-ci à l'étude d'une ÉDPS dans [Ebi23]. Il s'agit d'un article poursuivant le travaux de plusieurs auteurs, et qui

répond aux mêmes questions, dans un cadre encore non étudié jusque là. Nous n'allons pas entrer dans les détails techniques dans la théorie des ÉDPS ici, puisque nous le ferons dans le Chapitre IV.

L'équation stochastique étudiée est la suivante : pour $d \geq 4$, $T > 0$ et $0 < \beta < 2$, on étudie

$$\begin{cases} \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t, x) = \Delta U(t, x) + \sigma(U(t, x)) \dot{W}_\beta(t, x) \\ U(0, x) = 1, \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases}, \quad [\text{III.8}]$$

où $U : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est le processus inconnu, $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est suffisamment régulière (C^1 lipschitzienne suffit) et $\dot{W}_\beta$ est un bruit blanc en temps et coloré en espace : pour tous $s, t \in [0, T]$ et presque tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E} [\dot{W}_\beta(s, y) \dot{W}_\beta(t, x)] = \frac{\delta_{t,s}}{|x - y|^\beta}.$$

Regarder le Chapitre IV pour une définition précise de ce que signifie cette ÉDPS. Dans un premier temps, EBINA cherche à étudier l'ergodicité de la solution sous une translation spatiale. Cela implique, qu'à $t \in [0, T]$ fixé, on dispose d'une loi des grands nombres qui s'écrit

$$\frac{1}{|\mathbf{B}_R|} \int_{\mathbf{B}_R} U(t, x) \, dx \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-ps et } L^p} \mathbb{E}[U(t, x)],$$

où $\mathbf{B}_R$ est la boule centrée en 0 de rayon R dans $\mathbb{R}^d$ et $|\mathbf{B}_R|$ est sa mesure de LEBESGUE.

Comme souvent en Probabilités, lorsqu'on dispose d'une loi des grands nombres, se pose la question d'un Théorème Central Limite. C'est l'objet du Théorème suivant qu'on va développer dans la suite.

Théorème III.3.6 : (*Théorème 1.2 de [Ebi23]*) Pour $R > 0$, notons $\sigma_R(t)$ l'écart-type de la variable $\int_{\mathbb{B}_R} U(t, x) \, dx$. Alors

$$\frac{1}{\sigma_R(t)} \left(\int_{\mathbf{B}_R} U(t, x) \, dx - \mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{B}_R} U(t, x) \, dx \right] \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

Il s'agit d'un résultat difficile pour de nombreuses raisons, dont la principale est la suivante. La démonstration repose sur l'utilisation de la méthode de STEIN–MALLIAVIN, et exige des estimations en norme L^p de dérivées de MALLIAVIN de la solution U . Souvent, comme on l'exposera plus précisément dans le Chapitre VIII, on dispose d'inégalité du type

$$\mathbb{E} [|\mathbf{D}_{s,y} U(t, x)|^p]^{1/p} \leq C_{p,T} G(t - s, x - y),$$

où G est la solution fondamentale de l'équation des ondes [III.8]. Or, en dimension supérieure ou égale à 3, la solution fondamentale n'est plus une fonction, c'est une distribution sur $\mathbb{R}^d$. Bien entendu, ce type d'inégalité n'a plus aucun sens dans ce cas. L'idée est alors de passer par des approximations de U qui gardent les mêmes propriétés que U en termes de dérivabilité de MALLIAVIN, mais qui admet une « vraie » solution fondamentale. C'est à cause de ce fait majeur qu'on ne peut conclure en une vitesse de convergence dans ce Théorème.

Plus précisément, si on note $F_R(t) \triangleq \int_{\mathbf{B}_R} (U(t, x) - 1) \, dx$, on effectue deux niveaux d'approximation. La première consiste à tronquer l'intégrale en utilisant une fonction $\psi_R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support contenant $\mathbf{B}_R$ et contenu dans $\mathbf{B}_{R+1}$. On note $\mathfrak{F}_R(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} (U(t, x) - 1) \psi_R(x) \, dx$, et $\mathfrak{s}_R(t)$ son écart-type. Dans $L^2(\mathbb{P})$, la différence entre $\frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}$ et $\frac{\mathfrak{F}_R(t)}{\mathfrak{s}_R(t)}$ tend vers 0.

Ensuite, on introduit une approximation de l'unité qu'on convole avec la solution fondamentale G (qui est une distribution pour $d \geq 4$) et qu'on note G_n . On introduit u_n par itération de PICARD : pour tous $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $u_0(t, x) \triangleq 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1}(t, x) \triangleq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(u_n(s, y)) G_n(t - s, x - y) W_\beta(ds, dy).$$

Alors $(u_n)_n$ tend vers U dans L^2 , est dérivable au sens de MALLIAVIN. On introduit $\mathfrak{F}_{n,R}(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} (u_n(t, x) - 1) \psi_R(x) \, dx$ et $\mathfrak{s}_{n,R}(t)$ son écart-type. Alors pour $t \in [0, T]$, on a (quasiment) une convergence uniforme (par rapport à R) de $\frac{\mathfrak{F}_{n,R}(t)}{\mathfrak{s}_{n,R}(t)}$ vers $\frac{\mathfrak{F}_R(t)}{\mathfrak{s}_R(t)}$ dans L^2 quand $[n \rightarrow \infty]$. Ainsi, on fait le découpage suivant :

$$d_W \left(\frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right) \leq \left\| \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)} - \frac{\mathfrak{F}_R(t)}{\mathfrak{s}_R(t)} \right\|_{L^2(\mathbb{P})} + \left\| \frac{\mathfrak{F}_R(t)}{\mathfrak{s}_R(t)} - \frac{\mathfrak{F}_{n,R}(t)}{\mathfrak{s}_{n,R}(t)} \right\|_{L^2(\mathbb{P})} + d_W \left(\frac{\mathfrak{F}_{n,R}(t)}{\mathfrak{s}_{n,R}(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right).$$

C'est avec la méthode de STEIN–MALLIAVIN qu'on estime le dernier terme. En effet, on peut interpréter $\mathfrak{F}_{n,R}(t)$ comme une intégrale de SKOROHOD par rapport au processus isonormal sur $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ induit par W_β . Notons $\mathfrak{F}_{n,R}(t) = \delta(Q_{n,R,t})$, avec $Q_{n,R,t} : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ déterminé explicitement *via* des théorèmes de FUBINI. Si on applique le Théorème III.1.2, on se retrouve avec

$$d_W \left(\frac{\mathfrak{F}_{n,R}(t)}{\mathfrak{s}_{n,R}(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right) \leq \mathbb{E} \left[\left(1 - \left\langle D(-L^{-1})\delta(Q_{n,R,t}), D\mathfrak{F}_{n,R}(t) \right\rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

En faisant des manipulations usuelles du calcul de MALLIAVIN (relation de HEISENBERG qui relie $\delta D = -L$ à $D\delta$), on en déduit

$$d_W \left(\frac{\mathfrak{F}_{n,R}(t)}{\mathfrak{s}_{n,R}(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right) \leq \frac{1}{\mathfrak{s}_{n,R}(t)^2} \sqrt{\text{Var} \left[\langle D\mathfrak{F}_{n,R}(t), Q_{n,R,t} \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)} \right]}.$$

On conclut *via* les estimations de dérivées de MALLIAVIN des approximations u_n sur une vitesse de convergence en $R^{-\frac{\beta}{2}}$ pour $d_W \left(\frac{\mathfrak{F}_{n,R}(t)}{\mathfrak{s}_{n,R}(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right)$ (où la constante multiplicative dépend de n).

Deuxième partie

Étude de fonctionnelles d'équations aux dérivées partielles stochastiques

Petit guide des ÉDPS

IT'S DANGEROUS TO GO ALONE! TAKE THIS

The Legend of Zelda, 1987

Ce chapitre n'a pas l'ambition de donner une véritable introduction à la notion d'équation aux dérivées partielles stochastique (ÉDPS). On souhaite parcourir les notions suffisantes pour comprendre les objets qu'on manipulera dans les prochains chapitres.

Par exemple, on essaiera d'expliquer ce que pourrait bien être une ÉDP aléatoire, ce que signifie "dérivée" dans "dérivées partielles" quand le terme aléatoire a très peu de chance d'être régulier (sans se résigner à travailler qu'avec des distributions).

Le domaine de recherche lié aux ÉDPS est en fait assez récent malgré son caractère naturel dans les différents domaines des sciences. Cela fait des siècles que nous manipulons des équations différentielles ordinaires, et aux dérivées partielles. La résolution de l'équation de la chaleur par FOURIER dans sa *Théorie de la chaleur analytique* [Fou22] date de 1822, celles des ondes par d'ALEMBERT de 1747 ([dAl50]), mais pour avoir une première notion de solution d'ÉDPS, il faut attendre les années 1970 et 1980. Par exemple, un ouvrage fondamental date de 1986, écrit par John B. WALSH dans [Wal86]. Une autre approche est aussi développée par da PRATO et ZABCZYK, dans [PZ92], à partir de générateurs, c'est-à-dire de voir une ÉDPS comme une ÉDS dans un espace de dimension finie. Mentionnons aussi une approche en 1977 de KRYLOV et ROSOVSKII dans [KR77]. Regarder [Zam21] pour une introduction historique plus précise au sujet des ÉDPS.

L'une des difficultés réside dans le fait que certes, on dispose depuis ITÔ d'une intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien (que) depuis 1944 (regarder [Itô44]). Cette intégrale est bien entendue décisive pour comprendre les ÉDS. WALSH propose une intégrale, avec la notion de *mesure de martingale admissible* (*worthy martingale measure*) afin de disposer d'une théorie d'intégration par rapport à des processus gaussiens indécouverts par plusieurs paramètres, disposant lui aussi de son isométrie dans L^2 .

L'intérêt actuel pour ce sujet réside dans des problèmes concrets liés à d'autres domaines scientifiques. L'étude de ces équations a permis notamment de décerner une médaille FIELDS en 2014 à Martin HAIRER. L'exemple phare est l'équation dite KPZ (Kardar–Parisi–Zhang, regarder [KPZ86]), non linéaire à cause d'une dérivée élevée au carré, et surtout avec un terme supposé infini. Avec la notion de chemins rugueux et de régularité de structure (regarder le célèbre [Hai14]), HAIRER conclut sur une solution (regarder aussi [Hai13], qui a eu une mise à jour en novembre 2024 sur arXiv).

Cependant, comme déjà dit en prélude de ce chapitre, il ne sera pas question ici d'évoquer des sujets aussi pointus dans ce chapitre. Nous souhaitons donner le bagage nécessaire pour comprendre les chapitres liés à cette deuxième partie, tout comme le chapitre VIII. Nous allons expliquer ici de manière rapide comment traiter des ÉDPS linéaires (au sens où l'opérateur qui agit sur l'inconnue l'est), avec des bruits additifs ou multiplicatifs. Les notions introduites ici proviennent principalement du très récent papier [DS24] de Robert C. DALANG et Marta SANZ-SOLÉ, reprenant toutes les sources classiques quand on évoque ce domaine ([Dal99] ou encore [DQ11]). Dans certains cas, on va aussi se référer à [Dal+08].

1. Bruits et solution au sens évolutif

1.1. Noyau de Green

Considérons l'ÉDP suivante (déterministe)

$$\mathcal{L}u(t, x) = f(t, x), \quad [\text{IV.1}]$$

avec $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un terme de source et $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel linéaire. Alors, dans les cas qu'on manipulera, il existera une application $G : (t, x) \mapsto G(t, x)$ telle que

$$u(t, x) = I_0(t) + \int_0^t \int_D G(t-s, x-y) f(s, y) \, dy ds,$$

où on suppose disposer de la condition initiale $u(t=0, x) = u_0(x)$ et I_0 résout l'équation homogène $\mathcal{L}I_0 = 0$, avec $I(t=0, x) = u_0(x)$. La fonction G sera la *solution fondamentale* de l'équation différentielle, ou sa *fonction de GREEN*. Souvent, cette fonction vérifie l'équation suivante au sens des distributions

$$\mathcal{L}G = \delta_0,$$

qu'on résout par exemple par un passage par la transformée de FOURIER. Notez que G dépend non seulement de l'équation différentielle, mais aussi des conditions au bord (mais pas des conditions initiales). Il arrive néanmoins que G ne soit pas une fonction, mais uniquement une distribution, auquel cas on parlera plus généralement de *noyau de GREEN*.

1.2. Drap brownien

Définition IV.1.1 : Pour $d \geq 1$, considérons le processus gaussien indexé par $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, noté $\bar{W}$, centré et de fonction de covariance donnée pour tous $t, s \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$ par

$$\mathbb{E}[\bar{W}(t, x) \bar{W}(s, y)] = (s \wedge t) \prod_{i=1}^d (x_i \wedge y_i).$$

Le processus $\bar{W}$ est nommé *drap brownien* à $1+d$ paramètres. Pour $d=1$, on parle simplement de drap brownien.

On peut réaliser un drap brownien comme une dérivée seconde au sens des distributions d'un processus isonormal sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Pour cela, donnons-nous un processus $\mathfrak{W}$ indexé sur $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ (l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ admettant une mesure de LEBESGUE finie). Supposons que $\mathfrak{W}$ soit un processus gaussien centré dont la fonction de covariance est donnée pour tout $A, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ par

$$\mathbb{E}[\mathfrak{W}(A) \mathfrak{W}(B)] = \text{Leb}(A \cap B).$$

Un tel processus $\mathfrak{W}$ est appelé *bruit blanc* sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. Ce processus donne naissance à un processus isonormal, donc à une intégrale de WIENER définie sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ par

$$\mathfrak{W}(h) \triangleq \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} h(t, x) \, \mathfrak{W}(dt, dx).$$

Regarder l'ensemble de la section 2 du Chapitre I pour une construction de cette intégrale. On peut montrer qu'il existe une version de $\mathfrak{W}$ qui soit à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, l'espace de SCHWARTZ. Autrement dit, il existe un processus isonormal $\mathfrak{W}_2$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d), \mathbb{P}(\mathfrak{W}(\varphi) = \mathfrak{W}_2(\varphi)) = 1$$

et il existe un événement universel $\Omega^* \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $\omega \in \Omega^*$, l'application $\varphi \mapsto [\mathfrak{W}_2(\varphi)](\omega)$ est continue pour la norme liée à l'espace de SCHWARTZ. On note tout de même dans la suite $\mathfrak{W}$ cette version du processus isonormal. On note alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$\mathfrak{W}(\varphi) = \langle \mathfrak{W}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Définissons pour $t \geq 0$, et $x \in \mathbb{R}^d$

$$\bar{W}(t, x) \triangleq \mathfrak{W}([0, t] \times I(x)),$$

où $I(x) = I(x_1) \times \cdots \times I(x_d)$ et pour $a \in \mathbb{R}$, $I(a) = [0, a]$ si $a \geq 0$ et $I(a) = [a, 0]$ si $a \leq 0$. Alors, le processus $\bar{W}$ est un drap brownien. De plus, on peut montrer que le drap brownien $\bar{W}$ vérifie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$

$$\langle \mathfrak{W}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = (-1)^{1+d} \left\langle \frac{\partial^{1+d}}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d} \bar{W}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Autrement dit, un bruit blanc est la dérivée croisée d'un drap brownien (au sens des distributions). De plus, par définition même de $\bar{W}$ et de l'intégrale de WIENER,

$$\bar{W}(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d}(t - s, x - y) \mathfrak{W}(ds, dy).$$

On en conclut que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, $\bar{W} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} * \mathfrak{W}$.

1.3. Solution au sens évolutif (*mild*) dans le cas du bruit blanc

Reprenons l'équation différentielle suivante

$$\mathcal{L}u(t, x) = f(t, x),$$

avec $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ et $u(t = 0, x) = u_0(x)$. On a introduit G sa fonction de GREEN, qui permet d'obtenir une solution par une convolution entre G et f .

On appelle *ÉDPS linéaire* ou *ÉDPS avec bruit additif* l'équation différentielle aux dérivées partielles suivantes :

$$\mathcal{L}u(t, x, \omega) = [\mathfrak{W}(t, x)](\omega),$$

où $\mathfrak{W}$ est le bruit blanc introduit précédemment. On appelle *solution au sens évolutif* de cette ÉDPS le processus stochastique indexé sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ suivant

$$u(t, x) = I_0(t, x) + \int_0^t \int_D G(t - s, x - y) \mathfrak{W}(ds, dy),$$

où l'intégrale stochastique est prise au sens de WIENER et I_0 vérifie $\mathcal{L}I_0 = 0$, avec les mêmes conditions initiales et conditions au bord.

L'équation différentielle peut être comprise au sens des distributions, si bien qu'on note aussi parfois cette équation différentielle

$$\mathcal{L}u(t, x, \omega) = \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d}(t, x) \right](\omega),$$

avec $\bar{W}$ un drap brownien.

Il y a une hypothèse que nous avons caché et qui est en fait vitale pour comprendre cette écriture : nous avons supposé que la fonction de GREEN G est véritablement une fonction. Or, ce n'est pas toujours le cas, comme nous le verrons dans l'exemple de l'équation des ondes. Dans le cas général, G est uniquement une distribution. C'est principalement DALANG qui a résolu cette question dans [Dal99]. Dans toute la suite de cette thèse, voici la Définition qu'on adoptera dans le cadre des ÉDPS linéaires.

Définition IV.1.2 : Soient $d \geq 1$, $D \subset \mathbb{R}^d$ ouvert connexe non vide. On définit sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne un bruit blanc, noté W , qui induit une intégrale de WIENER sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ encore notée W . Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ (*id est* un polynôme en les $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}$). On suppose que $\mathcal{L}$ induit une véritable fonction de GREEN $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. On considère enfin une fonction déterministe $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle *solution évolutive d'une équation aux dérivées partielles stochastiques avec bruit additif blanc en espace et en temps* le processus stochastique $u = (u(t, x), t \geq 0, x \in D)$ donné lorsque cela a un sens par

$$u(t, x) \triangleq I_0(t, x) + \int_{[0, t] \times D} G(t - s, x - y) W(ds, dy),$$

où l'intégrale stochastique est prise au sens de WIENER et I_0 résout l'équation différentielle déterministe $\mathcal{L}I_0 = 0$, avec $I_0(t = 0, x) = u_0(x)$. On dit que u résout l'ÉDPS

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t, x) = \dot{W}(t, x) & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Remarque IV.1.3. Puisque G dépend aussi des éventuelles conditions au bord, on ajoute bien sûr ces conditions quand on énonce l'ÉDPS. ♣

1.4. Cas non additif (ou non linéaire)

On appelle ÉDPS non linéaire une équation du type

$$\mathcal{L}u(t, x) = b(t, x, u(t, x)) + \sigma(t, x, u(t, x))\dot{W}(t, x),$$

où on considère encore ici $\dot{W}$ un bruit blanc sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. Si $\sigma(t, x, u)$ ne dépend que de u , on parle de *bruit multiplicatif*. Si de plus, $\sigma(u) = u$, on parle d'*ÉDPS semi-linéaire*. On appelle solution au sens évolutif de cette ÉDPS tout processus $u = (u(t, x), t \geq 0, x \in D)$ vérifiant l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u(t, x) &= I_0(t, x) + \int_0^t \int_D G(t - s, x - y) b(s, y, u(s, y)) \, ds dy \\ &\quad + \int_0^t \int_D G(t - s, x - y) \sigma(s, y, u(s, y)) W(ds, dy). \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Notez que le terme *non-linéaire* provient du type de bruit considéré, et non pas de l'opérateur $\mathcal{L}$ qui est encore linéaire ici. On pourrait bien sûr imaginer manipuler des équations non linéaires en les dérivées de u , mais cela ne rentre pas dans le cas de cette thèse (cf KPZ évoqué en introduction).

L'intégrale stochastique dans [IV.2] est à prendre dans un sens que nous n'avons pas encore expliqué, puisque cette fois, on intègre un processus stochastique, et non plus une fonction déterministe. L'idée est la suivante. On se donne $(e_i)_{i \geq 1}$ une base hilbertienne de $L^2(D)$. Alors le processus isonormal W issu du bruit blanc se décompose de la sorte (formellement)

$$W(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\int_D h(t, x) e_n(x) \, dx \right] dW_t(e_n), \tag{IV.3}$$

où pour $\varphi \in L^2(D)$ et $t \geq 0$, $W_t(\varphi)$ est donné par

$$W_t(\varphi) \triangleq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) W(ds, dx).$$

Pour tout $\varphi \in L^2(D)$ de norme 1, le processus $(W_t(\varphi), t \geq 0)$ est alors un mouvement brownien standard. Il suit alors qu'on comprend les intégrales dans [IV.3] comme des intégrales d'ITÔ. Ainsi,

en écrivant formellement

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+ \times D} G(t-s, x-y) \sigma(s, y, u(s, y)) W(ds, dy) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\int_D G(t-s, x-y) \sigma(s, y, u(s, y)) e_n(y) dy \right] dW_s(e_n), \end{aligned}$$

on en déduit qu'il faut comprendre l'intégrale stochastique dans [IV.2] comme une somme d'intégrales d'ITÔ lorsque cela a un sens. Regarder [DS24] pour une exposition beaucoup plus rigoureuse de ce fait (c'est l'objet de l'entièreté du chapitre 2).

1.5. Bruit coloré

On se réfère à [Tud22]. Comme nous le verrons dans l'étude de l'équation de la chaleur, définir une solution au sens évolutif dans le cadre du bruit blanc est en fait très contraignant, puisque souvent, cela nous oblige à considérer des dimensions petites. Pour l'équation de la chaleur, on est restreint à la dimension 1, et pour l'équation des ondes aux dimensions 1 et 2. Pour s'en sortir, on introduit un bruit plus régulier, qu'on appellera *bruit coloré*, en opposition au bruit blanc. Regarder [Dal99].

Nous avons défini le bruit blanc comme un processus gaussien défini sur l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ de mesure finie, centré et de fonction de covariance donnée par la mesure de l'intersection des boréliens. À partir de cette définition, on peut construire un processus isonormal *via* l'intégrale de WIENER.

Pour construire un bruit coloré, l'observation clé est la suivante : si $\mathfrak{W}$ est un bruit blanc alors

$$\mathbb{E}[\mathfrak{W}(A)\mathfrak{W}(B)] = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} [\mathbf{1}_A * \check{\mathbf{1}}_B](x) \delta_0(dx),$$

où pour toute fonction ϕ , $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$. Et si on décide d'intégrer par rapport à une autre mesure, à la place de la mesure de DIRAC δ_0 ? Si on suppose que la mesure choisie admet une densité f , disons $\beta(dx) = f(x) dx$ (avec des conditions sur f), alors on construit un processus gaussien centré $\mathfrak{W}_f$ sur $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des boréliens de mesure de LEBESGUE finie dont la fonction de covariance est donnée par

$$\mathbb{E}[\mathfrak{W}_f(A)\mathfrak{W}_f(B)] = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} [\mathbf{1}_A * \check{\mathbf{1}}_B](x) \beta(dx) = \int_A \int_B f(x-y) dy dx.$$

On appelle $\mathfrak{W}_f$ un *bruit coloré* par f . Un exemple récurrent de bruit est le suivant. Commençons par l'énoncer en dimension 1.

Définition IV.1.4 : Soit $1/2 < H < 1$. On appelle *bruit fractionnaire d'ordre H* un processus gaussien $W_H = (W_H(A), A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ de mesure de LEBESGUE finie. Le processus W_H est centré et sa fonction de covariance est donnée pour tout $A, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{E}[W_H(A)W_H(B)] = H(2H-1) \int_A \int_B \frac{dx dy}{|x-y|^{2(1-H)}}.$$

On peut alors associer à W_H un processus gaussien sur $\mathbb{R}$:

$$w_H(x) \triangleq W_H(I(x)),$$

où $I(x) = [0, x]$ si $x > 0$ et $[x, 0]$ si $x < 0$. Il s'agit du mouvement brownien fractionnaire bidirectionnel, dont sa fonction de covariance est donnée par

$$\mathbb{E}[w_H(x)w_H(y)] = \frac{1}{2} \left(|x|^{2H} + |y|^{2H} - |x-y|^{2H} \right).$$

Notez bien qu'on suppose que $1/2 < H < 1$, donc qu'on se donne des processus w_H aux trajectoires plus régulières qu'un simple mouvement brownien. En fait, si on souhaite travailler avec des bruits fractionnaires d'ordre inférieurs, on doit passer par la théorie des chemins rugueux. Regarder, entre autres, [FH20] pour plus de détails à ce propos.

Dans un cadre multidimensionnel, on peut distinguer deux manières de définir un tel bruit.

Définition IV.1.5 : Soit $d \geq 1$. Pour $1/2 < H_1, \dots, H_d < 1$, on définit le *bruit fractionnaire anisotropique* comme le processus gaussien $W_H^a = (W_H^a(A), A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d))$ centré et dont sa fonction de covariance est donnée pour $A, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mathbb{E}[W_H^a(A)W_H^a(B)] = \int_A \int_B \prod_{k=1}^d \frac{H_k(2H_k - 1)}{|x_k - y_k|^{2(1-H_k)}} dx dy.$$

En définissant pour $x \in \mathbb{R}^d$ $w_H^a(x) = W(I(x_1) \times \dots \times I(x_d))$, on définit en fait un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}[w_H^a(x)w_H^a(y)] = \prod_{k=1}^d \left(\frac{1}{2} (|x_k|^{2H_k} + |y_k|^{2H_k} - |x_k - y_k|^{2H_k}) \right).$$

Il s'agit du processus fractionnaire anisotropique d -dimensionnel.

Définition IV.1.6 : Soit $d \geq 1$. Pour $1/2 < H < 1$, on définit le *bruit fractionnaire isotropique* comme le processus gaussien $W_H^{\text{iso}} = (W_H^{\text{iso}}(A), A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d))$ centré et dont sa fonction de covariance est donnée pour $A, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mathbb{E}[W_H^{\text{iso}}(A)W_H^{\text{iso}}(B)] = \int_A \int_B \frac{H(2H - 1)}{|x - y|^{2(d-H)}} dx dy.$$

Le processus gaussien donné par $w_H^{\text{iso}}(x) = W_H^{\text{iso}}(I(x_1) \times \dots \times I(x_d))$ est centré et sa covariance est donnée par

$$\mathbb{E}[w_H^{\text{iso}}(x)w_H^{\text{iso}}(y)] = \frac{1}{2} (|x|^{2H} + |y|^{2H} - |x - y|^{2H}).$$

On le nomme drap brownien fractionnaire isotropique d -dimensionnel d'indice de HURST H .

2. Équation de la chaleur stochastique

Il s'agit de l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta \right) u(t, x) = f(t, x),$$

pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, où $\Delta = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ est le laplacien sur $\mathbb{R}^d$. Nous allons rapidement expliquer les différentes conditions initiales, les fonctions de GREEN associées, et donner des idées sur la manière dont on peut manipuler ce qui jouera le rôle de solution.

2.1. Cas linéaire, blanc et à domaine libre

Soit W un bruit blanc en temps et en espace sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. On s'intéresse à l'ÉDPS suivante

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta \right) u(t, x) = \dot{W}(t, x), & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(t = 0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad [\text{IV.4}]$$

Le noyau de GREEN est ici donné pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ par :

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^d}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right). \quad [\text{IV.5}]$$

On définit le processus solution au sens évolutif de [IV.4] par

$$u(t, x) \triangleq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) W(ds, dy).$$

Ce processus est bien défini si l'intégrale stochastique l'est, ici au sens de WIENER. Cela est le cas si et seulement si pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y)^2 \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dy ds < \infty.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y)^2 \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dy ds &= \int_0^t \frac{1}{(2\pi(t-s))^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{t-s}\right) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(2\pi s)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|y|^2}{s}\right) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(2\pi s)^d} (\sqrt{\pi s})^d ds \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^d} \int_0^t \frac{ds}{s^{d/2}}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est finie si et seulement si $d/2 < 1$, donc si et seulement si $d < 2$ c'est-à-dire $d = 1$. Dans le cadre de l'équation de la chaleur stochastique linéaire à bruit blanc, la solution est définie au sens évolutif si et seulement si $d = 1$. Dans ce cas, $(u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ est un processus gaussien centré, dont sa fonction de covariance se détermine *via* l'isométrie de l'intégrale stochastique de WIENER.

2.2. Cas d'un bruit multiplicatif

Considérons cette fois-ci le cas non linéaire. On se donne un bruit W sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, toujours noté W , dont sa nature sera discuté dans la suite et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. L'équation différentielle d'intérêt est la suivante

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right) u(t, x) + \sigma(u(t, x)) \dot{W}(t, x) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(t = 0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad [\text{IV.6}]$$

La fonction de GREEN est donné par le noyau gaussien [IV.5]. Une solution au sens évolutif vérifie l'équation intégrale

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy).$$

On voit que dans ce cas, la solution n'est pas donnée de manière immédiate, mais vérifie une équation intégrale au sens de WALSH (s'il s'agit d'une intégration par rapport à un drap brownien, sinon il faut donner sens à cette intégrale dans le cas d'une bruit différent). Plusieurs questions se lèvent avec cette formulation :

1. Est-ce que l'intégrale stochastique est bien définie ?
2. Peut-on trouver un tel u ?
3. Quelles sont ses propriétés de régularité ?

Observez que les questions 1 et 2 doivent être répondues en même temps. Pour répondre à ces questions, on fait une démarche très usuelle quand on étudie des équations différentielles : on applique un théorème de point fixe. Plus précisément, on se donne $(u_0(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ un certain processus stochastique, disons ici que u_0 est le processus nul, et on considère par récurrence la suite de processus $(u_n(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1}(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) \sigma(u_n(s, y)) W(ds, dy).$$

Le but du jeu est de déterminer les conditions sur le bruit W , la dimension d et le paramètre de diffusion σ pour lesquelles la suite de processus $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Une réponse est alors donnée par [DQ11], qui devient souvent l'article de référence dès lors qu'on traite ce genre d'équations. Supposons que le bruit W provienne d'une mesure positive Γ dans le sens où si $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ alors

$$\mathbb{E}[W(\phi)W(\psi)] = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t * \check{\psi}_t(x) \Gamma(dx) \right\} dt,$$

où pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$\phi_t * \check{\psi}_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t, y) \psi(t, y-x) dy.$$

Supposons que Γ (et donc W) induit une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ dite *spectrale* sur $\mathbb{R}^d$ via la formule suivante : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \Gamma(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) \mu(d\xi).$$

D'après le Théorème de BOCHNER (regarder [Sch66]), c'est le cas dès lors que Γ est définie positive : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \varphi(y-x) dy \right) \Gamma(dx) \geq 0,$$

et si $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\Gamma(dx)}{(1+|x|^2)^r} < \infty$ pour un certain $r > 0$. En particulier, cela s'applique pour le bruit blanc $\Gamma = \delta_0$ et le bruit fractionnaire pour $H > 1/2$. Avec cette supposition sur Γ , les hypothèses principales pour avoir existence de solutions au sens évolutif sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ de [IV.6] sont les suivantes :

(H1) La diffusion σ est lipschitzienne ;

(H2) La condition de DALANG suivante est satisfaite

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_t(\xi)^2 \mu(d\xi) \right) dt < \infty.$$

Or, dans le cas de l'équation [IV.6], par un calcul de transformée de FOURIER de la gaussienne, la condition **(H2)** est équivalente à

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1+|\xi|^2} < \infty.$$

Il suit dans le cas du bruit blanc, où $\Gamma = \delta_0$, on a une solution au sens évolutif si et seulement si $d = 1$.

2.3. Comment traiter les dimensions supérieures ?

Revenons au cas additif donné par [IV.4], avec un bruit non nécessairement blanc, et plaçons-nous en dimension $d \geq 2$. Dans ce cas, l'intégrale de WIENER $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} G(t-s, x-y) W(ds, dy)$ n'est plus définie. Comme dans les ÉDPS déterministes, nous n'avons plus qu'une seule arme en main : résoudre l'équation différentielle au sens des distributions. Autrement dit, si on considère une version de W à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on fixe ω et on cherche une distribution u telle que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$

$$\left\langle u, -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) - \Delta \varphi(t, x) \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}(\omega) = \langle W, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}(\omega).$$

Dans le même esprit que le Théorème 4 dans [Wil91], on peut alors conclure en l'existence pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$ d'une distribution $u(\omega) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, donnée par

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} G(t, x) [W(\omega) * \varphi](t, x) \, dx \, dt.$$

On n'a hélas pas beaucoup mieux pour donner une notion de solution de l'équation de la chaleur stochastique dans le cas additif à bruit blanc.

Par contre, comme nous l'avons déjà expliqué, il est tout à fait envisageable de construire des solutions au sens évolutives dès lors qu'on considère un bruit coloré. Si on prend l'exemple d'un bruit fractionnaire isotrope en espace, avec un indice de HURST $1/2 < H < 1$ et blanc en temps, c'est-à-dire si on se donne un processus gaussien $(W(t, A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}))$ centré et admettant la fonction de covariance suivante, pour $s, t \geq 0$ et $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{E}[W(t, A)W(s, B)] = (t \wedge s) \int_A \int_B \frac{dx \, dy}{|x - y|^{2(d-H)}},$$

alors une solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x) + \dot{W}(t, x),$$

avec $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ existe si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) G(t-s, x-y') \frac{dy \, dy'}{|y-y'|^{2(d-H)}} \, ds < \infty.$$

En manipulant le noyau gaussien G , on sait alors montrer que cela est possible lorsque $2H < d < 2H + 2$.

3. Équation des ondes stochastique

On étudie cette fois-ci l'ÉDPS suivante

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u(t, x) = \sigma(u(t, x)) \dot{W}(t, x), \quad [\text{IV.7}]$$

où Δ est le laplacien sur $\mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée assez régulière. La théorie fonctionne à peu près de la même manière que pour l'équation de la chaleur, à ceci près qu'on ne dispose plus tout à fait d'un noyau de GREEN sous forme de fonction en dimension 3 et plus. En dimension 1, on a pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$G(t, x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x| \leq t\}}.$$

Notez que le support de $G_t : x \mapsto G(t, x)$ est l'intervalle $[-t, t]$, soit encore la boule de rayon t . En dimension 2, on a cette fois pour presque tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^2$

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} \mathbf{1}_{\{|x| < t\}}.$$

Par contre, le drame apparaît en dimension 3, puisque cette fois-ci, on a

$$G(t, dx) = \frac{1}{4\pi t} \sigma_t(dx),$$

où σ_t est la mesure uniforme de la boule dans $\mathbb{R}^3$ de rayon t et de masse $4\pi t^2$. Autrement dit, on a pour tout mesurable $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$

$$G(t, A) = \frac{1}{4\pi t} \int_{A \cap \{|x| < t\}} dx.$$

Ainsi, le noyau de GREEN G n'est plus une fonction, mais une mesure, qu'on peut aussi interpréter comme une distribution. Dans le cas d'un bruit blanc, il est illusoire de déterminer un processus $(u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3)$ pouvant être solution au sens évolutif de [IV.7]. On peut uniquement déterminer un processus à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ solution au sens des distributions de l'équation, à $\omega \in \Omega$ fixé. L'idée de DALANG pour manipuler des solutions d'équations des ondes en dimension grande est de modifier le bruit, de sorte qu'il soit plus régulier qu'un bruit blanc (penser au bruit fractionnaire). Regarder [Dal+08] pour une approche complète à ce sujet.

Théorèmes centraux et non-centraux limite pour le temps de séjour spatial de l'équation des ondes stochastique

« Heureusement qu'on n'a aucune dignité, parce que sinon on serait bien dans la merde. »

Dagonet au roi Loth, *Kaamelott Livre IV*, 2007

Ce chapitre provient exclusivement de l'article [TZ24b], paru en 2024 dans *Stochastic Processes and Applications*.

RÉSUMÉ

On considère le temps de séjour spatial de la solution de l'équation des ondes stochastiques additive avec un bruit blanc en espace et en temps sur un domaine spatial $[-A, A]$. On étudie son comportement asymptotique en loi lorsque A tend vers ∞ , et lorsque la variable temporelle tend elle aussi vers ∞ sous la relation $t = A^\alpha$, avec $\alpha \geq 0$. Pour $\alpha < 1$, on montre que la normalisation de ce temps de séjour spatial vérifie un Théorème Central Limite, avec de plus une estimation de la vitesse de convergence en distance de WASSERSTEIN grâce aux techniques de la méthode de NOURDIN–PECCATI. Lorsque l'exposant α dépasse la valeur critique 1, on montre que la normalisation du temps de séjour converge en loi vers une loi de RADEMACHER.

L'étude des propriétés géométriques de surfaces aléatoires constituent une direction de recherche importante dans la théorie des Probabilités. Le lecteur peut consulter l'ouvrage [AT09] ou [IL89] pour un panorama sur les surfaces aléatoires, et l'ouvrage [AW09] pour entrevoir la notion d'ensembles de niveau aléatoires. L'un des problèmes ayant reçu beaucoup d'attention est le comportement des temps de séjour (ou le volume des temps d'excursion) de processus et champs stochastiques. Si $(X_t, t \in \mathbb{R}^d)$ est un processus stochastique à plusieurs variables, son ensemble d'excursion dans $I \subset \mathbb{R}^d$ au-delà d'un niveau $\lambda \in \mathbb{R}$ est par définition l'ensemble des $t \in I$ pour lesquels $X_t \geq \lambda$. On s'intéresse à étudier le comportement d'un tel ensemble lorsque le domaine d'intégration I est de plus en plus grand, par exemple lorsque $I = [-A, A]^d$, et que A tend vers l'infini. Un cas d'intérêt est le cas où X est gaussien stationnaire. En effet, on peut dans ce cas relier le comportement du temps séjour aux études de fonctionnelles non linéaires de processus gaussiens, et d'obtention de Théorèmes Centraux Limites. En ce sens, citons les travaux de BREUER et MAJOR en 1983 dans [BM83], et le célèbre Théorème associé éponyme, de [GS85] en 1985 évoquant des Théorèmes Limites non Centraux à partir des développements en chaos de WIENER, de CHAMBERS et SLUD en 1989 dans [CS89] avec l'étude de processus du type $\int_{[0,t]} f(X_{t+s}) ds$, avec X processus gaussien, et plus récemment en 2012 les travaux de BULINSKI, SPODAREV et TIMMERMAN dans [BST12] à propos de temps d'excursion de processus gaussiens dans un cadre de décroissance rapide de la fonction de covariance ou en 2020 les travaux

de DEBICKI et al. dans [DLM20], étudiant les temps de sortie d'un processus gaussien dans un niveau fixé. Des études dans le cas où le processus est à plusieurs variables ou à valeurs vectorielles sont aussi faites dans [Arc94] (dans un cadre général), dans [KL01] en 2000 et dans [BBL11] en 2011, trouvant une nouvelle approche pour montrer des Théorèmes de BREUER–MAJOR *via* une étude de densité spectrale. Enfin, une étude sur laquelle nous nous appuierons dans la suite, faisant intervenir une hypothèse de sommabilité de la fonction de covariance du processus gaussien est étudié en 2013 par Viet-Hung PHAM dans [Pha13], qui étudie même le cas où le niveau λ dépend de A .

Notre objectif est d'étudier un cas particulier de processus gaussien, à savoir la solution de l'équation des ondes additive en dimension 1 dirigé par un bruit blanc en temps et en espace. On la note $u = (u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$. Son temps de séjour spatial est le processus suivant : pour $A > 0$, $t \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$S_{\lambda,t}(A) \triangleq \text{Leb}\left(\{x \in [-A, A], u(t, x) \geq \lambda\}\right).$$

Le processus u est gaussien et stationnaire, et sa fonction de covariance est explicite, et est intégrable. Il suit d'après [Pha13] que son temps de séjour, à t fixé, vérifie un Théorème Central Limite (TCL dans la suite) lorsque A tend vers ∞ . Nous cherchons de notre côté à comprendre cette convergence lorsque t n'est plus fixe, mais dépend de A . On va en fait supposer que $t = A^\alpha$, avec $\alpha > 0$. Le cas $\alpha = 0$ est couvert par [Pha13]. Nous allons montrer qu'il existe deux régimes à distinguer selon les valeurs de α . Lorsque $0 < \alpha < 1$ (on parle de temps *court*), le TCL perdure, et sous normalisation, le temps de séjour converge vers une loi normale lorsque A tend vers ∞ . De plus, nous dégageons une vitesse de convergence en distance de WASSERSTEIN. L'étude du temps court se fait avec la méthode de NOURDIN–PECCATI, à partir du développement en chaos de WIENER de $S_{\lambda,t}(A)$. Par contre, pour $\alpha \geq 1$ (*temps long*), on observe encore un Théorème Limite, mais cette fois vers une surprenante loi de RADEMACHER. On prouve ce résultat à partir du caractère 1-similaire du processus en espace et en temps.

Dans la suite, on introduit dans la section 1 une définition précise des objets manipulés, à savoir ce qu'est la solution de l'équation des ondes, son temps de séjour spatial, et surtout l'énoncé de nos deux Théorèmes principaux, les Théorèmes V.1.3 et V.1.2. Les autres sections structurent la démonstration de ces Théorèmes, et sont détaillées en fin section 1.

1. Résultat principal

1.1. Équation des ondes et temps de séjour

On se place en dimension 1. On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on considère W un bruit blanc en temps et en espace : c'est un processus gaussien, centré, noté $(W(t, A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ désigne tous les boréliens bornés de $\mathbb{R}$, dont la fonction de covariance est donnée pour $s, t \geq 0$ et $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{E}[W(t, A)W(s, B)] \triangleq (t \wedge s)\text{Leb}(A \cap B).$$

On considère l'équation des ondes additive suivante, dirigée par W .

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \dot{W}(t, x) & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On considère une solution de cette équation au sens *évolutif* du terme (regarder IV) : c'est-à-dire qu'on considère le processus gaussien u suivant, défini $\mathbb{P}$ -presque sûrement sur presque tout $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$u(t, x) \triangleq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t - s, x - y) W(dy, ds),$$

où G_1 est le noyau de GREEN de l'équation des ondes : $G_1(t, x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{|x| < t\}}$, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, et l'intégrale est prise au sens de WIENER par rapport au processus isonormal engendré par W (regarder

le Chapitre I). Ainsi, le processus $u = (u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ est un processus gaussien centré dont la fonction de covariance spatiale est donnée pour $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{E}[u(t, x)u(t, y)] = \frac{1}{16}(|x - y| - 2t)^2 \mathbf{1}_{\{|x-y| \leq 2t\}}. \quad [\text{V.1}]$$

On observe en particulier que u est spatialement stationnaire.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ un niveau et $A > 0$ une fenêtre d'observation. Pour $t \geq 0$, on appelle *temps de séjour spatial de u au niveau λ entre $-A$ et A* la variable aléatoire suivante

$$S_{\lambda,t}(A) \triangleq \text{Leb}\left(\{x \in [-A, A], u(t, x) \geq \lambda\}\right) = \int_{-A}^A \mathbf{1}_{\{u(t,x) \geq \lambda\}} dx. \quad [\text{V.2}]$$

D'après la théorie développée dans [Pha13] par PHAM, à $t \geq 0$ fixé, $(S_{\lambda,t}(A), A > 0)$ vérifie un TCL, avec estimation supplémentaire en distance de WASSERSTEIN :

$$d_W\left(\frac{S_{\lambda,t}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,t}(A)]}{\sigma\sqrt{A}}, \mathcal{N}(0, 1)\right) \leq \frac{C}{(\ln A)^{1/4}}.$$

Remarque V.1.1. On peut comprendre l'intérêt d'étudier ce type de fonctionnelle comme suit. Si on ne considérait pas de bruit dans l'équation des ondes, c'est-à-dire que $W = 0$ alors l'unique solution de cette équation est la fonction nulle. Ainsi, en ce sens, la solution est *purement* « bruyante ». L'étude de la géométrie des trajectoires de la solution permet un éclairage nouveau sur leurs aspects. ♣

1.2. Temps de séjour spatial avec temps variable

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Présentons les deux principaux Théorèmes de ce Chapitre. L'objectif est d'étudier des Théorèmes Limites pour $S_{\lambda,t}(A)$, non plus à t fixé, mais avec $t = A^\alpha$, où $\alpha > 0$. Commençons par citer le cas des temps *long* ($\alpha > 1$) et modérés ($\alpha = 1$).

Théorème V.1.2 : Soient $\alpha \geq 1$ et $S_{\lambda,t}(A)$ défini par [V.2]. On suppose que $t = A^\alpha$. Alors

$$\frac{S_{\lambda,A^\alpha}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,A^\alpha}(A)]}{A} \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{R} \triangleq \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2}.$$

Pour le temps court ($\alpha < 1$), le théorème suivant statue sur un Théorème Central Limite.

Théorème V.1.3 : Soient $0 \leq \alpha < 1$ et $S_{\lambda,t}(A)$ défini par [V.2]. On suppose que $t = A^\alpha$. Alors si on définit $\sigma^2 \triangleq \frac{4}{\pi} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(2q+1)(4q+3)} \frac{1}{4^q} \binom{2q}{q}$, on a

$$\frac{S_{\lambda,A^\alpha}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,A^\alpha}(A)]}{\sqrt{A^{1+\alpha}}} \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

De plus, la convergence a aussi lieu en distance de WASSERSTEIN, puisqu'il existe $C > 0$ dépendant de λ et α tel que pour tout $A > 1$

$$d_W\left(\frac{S_{\lambda,A^\alpha}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,A^\alpha}(A)]}{\sqrt{A^{1+\alpha}}}, \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right) \leq \frac{C}{(\ln A)^{1/2}}.$$

Ces deux Théorèmes se résument comme suit : le temps de séjour spatial dans le cas où le temps varie polynômialement avec la fenêtre d'observation vérifie un TCL si $\alpha < 1$ et un Théorème Limite non-Central pour $\alpha \geq 1$.

Remarque V.1.4. Bien entendu, nos résultats généralisent ce que PHAM avait démontré dans un cadre général, en prenant $\alpha = 0$. Le TCL est valide à partir de $\alpha = 0$ jusqu'à un point critique, ici $\alpha = 1$. La variance de $S_{\lambda,t}(A)$ croît avec α . En effet, pour $0 < \alpha < 1$, nous verrons que la variance se comporte

comme une constante multipliée par $A^{1+\alpha}$. Ensuite, la variance devient stable à partir de $\alpha = 1$, donnée par une constante multipliée par A^2 , comme démontré dans la section 2. ♣

Détaillons comment nous allons démontrer ces deux Théorèmes. Dans un premier temps, nous allons développer en chaos de WIENER le processus $S_{\lambda,t}(A)$, par rapport au processus isonormal induit par W . Cela permettra de déterminer quelle normalisation adopter, ce qui n'est pas évident au vu de l'expression du temps de séjour. C'est l'objet de la section 2. Une fois ce développement effectué, on sépare les cas temps long et court, en commençant par le plus simple à démontrer, à savoir le Théorème V.1.2. On va utiliser une propriété de mise à l'échelle du processus u en espace et en temps. C'est l'objet de la section 3. On conclut alors ce travail avec l'étude en temps court, ce qui nécessite le plus de travail. On étudie la convergence d'un développement tronqué en chaos du temps de séjour, *via* les outils de la méthode de NOURDIN et PECCATI. En étudiant le reste dans ce développement, on conclut sur un TCL pour le temps de séjour. C'est l'objet de la dernière section, la section 4.

2. Décomposition en chaos et normalisations

Les résultats principaux sont donnés dans la Proposition V.2.1 et dans la sous-section 2.4, pour le lecteur désireux de ne pas lire les calculs qui arrivent dans la suite. Décomposons en chaos de WIENER le processus $S_{\lambda,t}(A)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela sera l'occasion d'introduire des notations utilisées tout au long de ce Chapitre. On considère le processus isonormal engendré par le bruit blanc W , défini sur l'espace de HILBERT $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, et l'intégrale de WIENER associée. Ainsi, dans ce cas, $u(t, x) = I_1(g_{t,x})$, où $g_{t,x} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est donnée pour presque tout $s \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$ par

$$g_{t,x}(s, y) \triangleq G_1(t - s, x - y) \mathbf{1}_{[0,t]}(s).$$

De plus, pour tout $l \in \mathbb{R}$, $\mathbf{1}_{(l,+\infty)}$ se décompose dans $L^2(\mathcal{N}(0,1))$, dans la base hilbertienne des polynômes d'HERMITE comme

$$\mathbf{1}_{(l,+\infty)} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z \geq l\}}] + \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{H_{q-1}(l)\varphi(l)}{q!} H_q \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z \geq l\}}] + \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\psi_{q-1}(l)}{\sqrt{q!}} H_q,$$

où H_n est le n -ème polynôme d'HERMITE, donné par $(-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2/2}]$, φ est la densité de la loi gaussienne standard, Z suit $\mathcal{N}(0,1)$ et pour $q \geq 1$, ψ_{q-1} est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi_{q-1}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{q!}} H_{q-1}(x) \varphi(x).$$

Puisque $\sigma[u(t, x)] = t/2$, le Théorème de conversion d'ITÔ (Théorème I.2.12) permet de conclure que dans $L^2(\mathbb{P})$

$$\mathbf{1}_{\{u(t,x) \geq \lambda\}} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{u(t,x) \geq \lambda\}}] + \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{t}\right)^q \frac{\psi_{q-1}\left(\frac{2\lambda}{t}\right)}{\sqrt{q!}} I_q(g_{t,x}^{\otimes q}).$$

En intégrant, on en déduit le développement en chaos de $S_{\lambda,t}(A)$.

Proposition V.2.1 : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $t \geq 0$ avec $\alpha > 0$ et $S_{\lambda,t}(A)$ donné par [V.2]. Alors dans $L^2(\mathbb{P})$, on a

$$S_{\lambda,t}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,t}(A)] = \sum_{q=1}^{+\infty} B_{\lambda,t}(q) \int_{-A}^A I_q(g_{t,x}^{\otimes q}) dx, \quad [\text{V.3}]$$

où $B_{\lambda,t}(q) \triangleq \frac{1}{\sqrt{q!}} \left(\frac{2}{t}\right)^q \psi_{q-1}\left(\frac{2\lambda}{t}\right)$.

On note dans la suite $X_{\lambda,t}^{(q)}(A) = B_{\lambda,t}(q) \int_{-A}^A I_q(g_{t,x}^{\otimes q}) dx$ la projection sur le q -ème chaos de WIENER de $S_{\lambda,t}(A)$. Dans le reste de cette section, on cherche une expression asymptotique de $\mathbb{E}[X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2]$, de la forme

$$\mathbb{E}[X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2] = \text{Coefficient } A^{\text{premier ordre}} + \epsilon_{\lambda,q,\alpha}(A) A^{\text{premier ordre}},$$

où le coefficient dépend *a priori* de λ, q, α , mais bien sûr pas de A , idem pour l'ordre, idem pour $\epsilon_{\lambda,q,\alpha}$ qui est une fonction vérifiant $\epsilon(A) \rightarrow 0$ lorsque $[A \rightarrow \infty]$. Reprenons l'expression [V.3].

$$\mathbb{E} [X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2] = B_{\lambda,t}(q)^2 \int_{-A}^A \int_{-A}^A \mathbb{E} [I_q(g_{t,x}^{\otimes q}) I_q(g_{t,y}^{\otimes q})] dy dx.$$

Par isométrie de l'intégrale de WIENER

$$\mathbb{E} [X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2] = q! B_{\lambda,t}(q)^2 \int_{-A}^A \int_{-A}^A \langle g_{t,x}, g_{t,y} \rangle_{L^2}^q dy dx = q! B_{\lambda,t}(q)^2 \int_{-A}^A \int_{-A}^A \mathbb{E}[u(t,x)u(t,y)]^q dy dx.$$

On a noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On en déduit que

$$\mathbb{E} [X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2] = B_{\lambda,t}(q)^2 \int_{-A}^A \int_{-A}^A \mathbb{E}[u(t,x)u(t,y)]^q dy dx.$$

Enfin, d'après l'expression de la fonction de covariance spatiale de u donnée par [V.1], on conclut que

$$\mathbb{E} [X_{\lambda,t}^{(q)}(A)^2] = \frac{q! B_{\lambda,t}(q)^2}{16^q} \int_{-A}^A \int_{-A}^A (|x-y|-2t)^{2q} \mathbf{1}_{\{|x-y|<2t\}} dy dx \triangleq \frac{q! B_{\lambda,t}(q)^2}{16^q} J_{t,q}(A). \quad [\text{V.4}]$$

Pour savoir calculer cette expression, chaque facteur doit être analysé. Commençons par le premier, dans le Lemme suivant.

Lemme V.2.2 : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $q \geq 1$. Alors

$$\frac{q! B_{\lambda,t}(q)^2}{16^q} = \frac{1}{(2t)^{2q}} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{t} \right)^2 \underset{t \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} \frac{\psi_{q-1}(0)^2}{(2t)^{2q}} + \mathcal{O}_{\lambda,q} \left(\frac{1}{t^{2q+2}} \right) & \text{si } q \text{ est impair} \\ \frac{4\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2^{2q} t^{2q+2}} + \mathcal{O}_{\lambda,q} \left(\frac{1}{t^{2q+4}} \right) & \text{si } q \text{ est pair.} \end{cases}$$

On désigne, de manière générale, par $\mathcal{O}_{\text{paramètres}}(f(A))$ une fonction g satisfaisant $g(A) \leq C f(A)$, pour A dans un voisinage d'un point précisé au préalable, et C dépendant des paramètres.

Démonstration : Il s'agit d'appliquer la formule de TAYLOR suivante sur ψ_{q-1} en 0

$$\psi_{q-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \psi_{q-1}(0) + x \psi'_{q-1}(0) + \mathcal{O}_q(x^2).$$

Or, ψ_{q-1} a même parité que $q-1$, donc a parité opposé à celle de q . On en déduit donc que $\psi_{q-1}(0) = 0$ pour q pair et $\psi'_{q-1}(0) = 0$ pour q impair. On en déduit que

$$\psi_{q-1}(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \begin{cases} \psi_{q-1}(0)^2 + \mathcal{O}_q(x^2) & \text{si } q \text{ impair} \\ x^2 \psi'_{q-1}(0)^2 + \mathcal{O}_q(x^4) & \text{si } q \text{ pair.} \end{cases}$$

En prenant $x = \frac{2\lambda}{t}$, avec t tendant vers ∞ , on en déduit l'expression attendue. □

On s'occupe désormais de $J_{t,q}(A)$. Écrivons autrement cette intégrale.

$$\begin{aligned} J_{t,q}(A) &= \int_{-A}^A \int_{-A-x}^{A-x} (|y|-2t)^{2q} \mathbf{1}_{\{|y|<2t\}} dy dx \\ &= 2 \int_{-A}^A \int_{-A-x}^0 (y+2t)^{2q} \mathbf{1}_{\{y+2t>0\}} dy dx = 2 \int_{-A}^A \int_{-A-x+2t}^{2t} y^{2q} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy dx. \end{aligned} \quad [\text{V.5}]$$

La présence de la fonction indicatrice nous oblige de savoir où est la position de 0 par rapport à $[-A-x+2t, 2t]$, pour tout $x \in [-A, A]$. Or, 0 appartient à cet intervalle si et seulement si $2t \leq A+x$. C'est précisément à cet instant qu'on doit dégager les cas $t < A$, $t = A$ et $t > A$, ou encore avec $t = A^\alpha$, pour $A > 1$, dégager les cas $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

Dans toute la suite de ce chapitre, $A > 1$.

2.1. Temps long

Supposons que $\alpha > 1$. On se contente dans ce cas d'un développement au premier ordre. Dans ce cas, pour tout $x \in [-A, A]$, $A + x \leq 2A < 2A^\alpha$, donc $0 \notin [-A - x + 2A^\alpha, 2A^\alpha]$, si bien que $\mathbb{R}_+ \cap [-A - x + 2A^\alpha, 2A^\alpha] = [-A - x + 2A^\alpha, 2A^\alpha]$. Ainsi, en reprenant [V.5],

$$J_{A^\alpha, q}(A) = 2 \int_{-A}^A \int_{-A-x+2A^\alpha}^{2A^\alpha} y^{2q} dy dx = \frac{2^{2q+3} A^{(2q+1)\alpha+1}}{2q+1} \left(1 + \frac{A^{\alpha-1}}{2q+2} \left[\left(1 - \frac{1}{A^{\alpha-1}} \right)^{2q+2} - 1 \right] \right).$$

En utilisant le développement asymptotique suivant

$$1 + \frac{1}{(2q+2)x} \left((1-x)^{2q+2} - 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2q+1}{2} x + \mathcal{O}_q(x^2),$$

on en déduit que

$$J_{A^\alpha, q}(A) \underset{A \rightarrow \infty}{=} 2^{2q+2} A^{2\alpha q+2} + \mathcal{O}_q \left(A^{3+\alpha(2q-1)} \right).$$

Par conséquent, d'après le développement exposé dans le Lemme V.2.2, on conclut que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] &\underset{A \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} \frac{2^{2q+2} A^{2\alpha q+2} \psi_{q-1}(0)^2}{2^{2q} A^{2\alpha q}} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{3+\alpha(2q-1)}}{A^{2\alpha q}} \right) + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2\alpha q+2}}{A^{2\alpha q+2\alpha}} \right) & \text{si } q \text{ impair} \\ \frac{4\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2 2^{2q+2} A^{2\alpha q+2}}{2^{2q} A^{2\alpha q+2\alpha}} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{3+\alpha(2q-1)}}{A^{2\alpha q+2\alpha}} \right) + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2\alpha q+2}}{A^{2\alpha q+4\alpha}} \right) & \text{si } q \text{ pair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4A^2 \psi_{q-1}(0)^2 + \mathcal{O}_{\lambda, q} (A^{3-\alpha}) + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{1}{A^{2(\alpha-1)}} \right) & \text{si } q \text{ impair} \\ \frac{16\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{A^{2(\alpha-1)}} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{1}{A^{3(\alpha-1)}} \right) + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{1}{A^{4\alpha-2}} \right) & \text{si } q \text{ pair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4A^2 \psi_{q-1}(0)^2 + \mathcal{O}_{\lambda, q} (A^{3-\alpha}) & \text{si } q \text{ impair} \\ \frac{16\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{A^{2(\alpha-1)}} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{1}{A^{3(\alpha-1)}} \right) & \text{si } q \text{ pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.2. Temps moyen

Traitons le cas d'égalité $\alpha = 1$. Les termes principaux seront les mêmes, mais les restes diffèrent. Pour presque tout $x \in [-A, A]$, $0 \notin [A - x, 2A]$. Ainsi, $\mathbb{R}_+ \cap [A - x, 2A] = [A - x, 2A]$ et en reprenant [V.5], on a cette fois

$$J_{A, q}(A) = 2 \int_{-A}^A \int_{A-x}^{2A} y^{2q} dy dx = \frac{2^{2q+3} A^{2q+2}}{2q+2}.$$

D'après le développement du Lemme V.2.2, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A}^{(q)}(A)^2 \right] &\underset{A \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} \frac{2^{2q+3} A^{2q+2} \psi_{q-1}(0)^2}{(2q+2) 2^{2q} A^{2q}} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2q+2}}{A^{2q+2}} \right) & \text{si } q \text{ impair} \\ \frac{4\lambda^2 2^{2q+3} A^{2q+2} \psi'_{q-1}(0)^2}{(2q+2) 2^{2q} A^{2q+2}} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2q+2}}{A^{2q+4}} \right) & \text{si } q \text{ pair} \end{cases} \\ &\underset{A \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} \frac{4\psi_{q-1}(0)^2}{q+1} A^2 + \mathcal{O}_{\lambda, q}(1) & \text{si } q \text{ impair} \\ \frac{16\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{q+1} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{1}{A^2} \right) & \text{si } q \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

2.3. Temps court

On suppose enfin que $\alpha < 1$. Pour estimer des distances dans la section 4, nous avons besoin des développements à l'ordre 2. Puisque $\alpha < 1$, $0 \in (-A - x + 2A^\alpha, 2A^\alpha)$ pour $x \in [2A^\alpha - A, A]$, auquel cas $\mathbb{R}_+ \cap [-A - x + 2A^\alpha, 2A^\alpha] = [0, 2A^\alpha]$. Sinon, pour $x \in [-A, 2A^\alpha - A]$, on a simplement $\mathbb{R}_+ \cap [-A - x + 2A^\alpha, 2A^\alpha] = [-A - x + 2A^\alpha, 2A^\alpha]$. Ainsi,

$$J_{A^\alpha, q}(A) = 2 \int_{-A}^{2A^\alpha-A} \int_{-A-x+2A^\alpha}^{2A^\alpha} y^{2q} dy + 2 \int_{2A^\alpha-A}^A \int_0^{2A^\alpha} y^{2q} dy.$$

On calcule ces intégrales, et on obtient l'expression exacte suivante

$$J_{A^\alpha, q}(A) = \frac{2^{2q+3} A^{2\alpha q + \alpha + 1}}{2q + 1} - \frac{2^{2q+3} A^{2\alpha q + 2\alpha}}{(2q + 1)(2q + 2)} \underset{A \rightarrow \infty}{=} \frac{2^{2q+3} A^{2\alpha q + \alpha + 1}}{2q + 1} + \mathcal{O}_q(A^{2\alpha q + 2\alpha}). \quad [\text{V.6}]$$

On en déduit grâce au Lemme V.2.2 que

$$\mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \underset{A \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} \frac{2^{2q+3} A^{2\alpha q + \alpha + 1} \psi_{q-1}(0)^2}{2^{2q} A^{2\alpha q} (2q+1)} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2\alpha q + 2\alpha}}{A^{2\alpha q}} \right) + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2\alpha q + \alpha + 1}}{A^{2\alpha q + 2\alpha}} \right) & \text{si } q \text{ impair} \\ \frac{2^{2q+3} A^{2\alpha q + \alpha + 1} 4\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2^{2q} A^{2\alpha q + 2\alpha} (2q+1)} + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2\alpha q + 2\alpha}}{A^{2\alpha q + 2\alpha}} \right) + \mathcal{O}_{\lambda, q} \left(\frac{A^{2\alpha q + \alpha + 1}}{A^{2\alpha q + 4\alpha}} \right) & \text{si } q \text{ pair} \end{cases}$$

En simplifiant, on obtient

$$\mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \underset{A \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} \frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1} A^{\alpha+1} + \mathcal{O}_{\lambda, q}(A^{2\alpha}) + \mathcal{O}_{\lambda, q}(A^{1-\alpha}) & \text{si } q \text{ impair} \\ \frac{32\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2q+1} A^{1-\alpha} + \mathcal{O}_{\lambda, q}(A^{1-3\alpha}) + \mathcal{O}_{\lambda, q}(1) & \text{si } q \text{ pair} \end{cases}$$

Dans les cas pairs et impairs, le premier ordre est connu sans ambiguïté (ce sont exactement les premiers termes écrits ci-dessus).

2.4. Résumé de la discussion

On résume sous forme de tableaux les développements asymptotiques qu'on a obtenu. On l'écrit sous la forme

$$\mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \underset{A \rightarrow \infty}{=} \text{Coefficient} \times A^{\text{ordre}} + o_{\lambda, q}(A^{\text{ordre}}),$$

où $o_{\lambda, q}(A^{\text{ordre}})$ désigne une fonction g telle qu'il existe $\epsilon_{\lambda, q} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $g(A) = \epsilon_{\lambda, q}(A) A^{\text{ordre}}$ et $\epsilon_{\lambda, q}(A)$ tend vers 0 lorsque A tend vers ∞ . Commençons par expliciter les ordres principaux.

Ordre principal			
$\alpha \backslash q$	$\alpha < 1$ Temps court	$\alpha = 1$ Temps moyen	$\alpha > 1$ Temps long
q impair	$A^{1+\alpha}$	A^2	A^2
q pair	$A^{1-\alpha}$	1	$A^{-2(\alpha-1)}$

Il est intéressant de noter que la convergence ne dépend de q qu'à travers sa parité, q n'apparaît pas explicitement dans les expressions des ordres. De plus, constatons que les ordres dans les cas impairs dominent toujours ceux des ordres pairs. Explicitons désormais les coefficients. Rappelons qu'on a noté $\psi_{q-1} = \frac{1}{\sqrt{q!}} H_{q-1} \varphi$, où H_{q-1} est le $(q-1)$ -ème polynôme d'HERMITE et φ est la densité de la gaussienne standard.

Coefficient			
$\alpha \backslash q$	$\alpha < 1$ Temps court	$\alpha = 1$ Temps moyen	$\alpha > 1$ Temps long
q impair	$\frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1}$	$\frac{4\psi_{q-1}(0)^2}{q+1}$	$4\psi_{q-1}(0)^2$
q pair	$\frac{32\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2q+1}$	$\frac{16\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{q+1}$	$16\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2$

Dans toute la suite, on notera $\sigma(q)$ les coefficients apparaissant dans le cas $\alpha < 1$ pour q impair :

$$\sigma(q)^2 \triangleq \frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1}. \quad [\text{V.7}]$$

3. Cas du temps long : Théorème Limite vers une loi de Rademacher

On cherche dans cette section à démontrer le Théorème V.1.2. Soit $\alpha \geq 1$. Nous venons de montrer qu'il est pertinent d'utiliser la normalisation $\frac{1}{A}X_{\lambda,A^\alpha}(A)$, via le calcul de la variance des projection sur chaque chaos. L'ingrédient principal repose sur l'auto-similarité suivante du processus u solution de l'équation des ondes.

Lemme V.3.1 : *Le processus $u = (u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ est auto-similaire d'indice 1 : pour tout $c > 0$, l'égalité suivante est vérifiée au sens des lois finies-dimensionnelles*

$$(u(ct, cx), t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \stackrel{\text{loi}}{=} (cu(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}).$$

Démonstration : Puisque les deux processus en question sont gaussiens, pour montrer qu'ils ont mêmes lois finies dimensionnelles, il suffit de montrer que ces processus partagent même espérance et même fonction de covariance. Les deux processus sont centrés. Quand à la fonction de covariance, il s'agit de constater que pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $G_1(ct, cx) = G_1(t, x)$, si bien que si $t, s \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(ct, cx)u(cs, cy)] &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,ct] \cap [0,cs]}(\tau) G_1(ct - \tau, cx - \xi) \, d\xi \, d\tau \\ &= c^2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,t] \cap [0,s]}(\tau) G_1(t - \tau, x - \xi) \, d\xi \, d\tau \\ &= c^2 \mathbb{E}[u(t, x)u(s, y)]. \end{aligned}$$

On en déduit que ces deux processus sont bien égaux en loi, au sens fini-dimensionnel. $\square$

On va aussi utiliser le fait suivant, qui est conséquence immédiate du Théorème de l'Application Continue (*Continuous Mapping Theorem*, CMT dans la suite).

Lemme V.3.2 : *Considérons deux processus stochastiques $(u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ et $(v(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$. On suppose que u et v admettent mêmes lois finies-dimensionnelles. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux. On suppose que si D_f est l'ensemble des points de discontinuité de f alors pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(t, x) \notin D_f$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Alors pour tout $A > 0$, et $\alpha > 1$*

$$\int_{-A}^A f(u(A^\alpha, x)) \, dx \stackrel{\text{loi}}{=} \int_{-A}^A f(v(A^\alpha, x)) \, dx.$$

L'énoncé est bien entendu rédigé de sorte qu'il soit applicable directement dans notre cas, mais on aurait pu le rédiger de manière plus générale.

Démonstration : Par le CMT, puisque par hypothèse, $u(t, x)$ et $v(t, x)$ ne sont presque sûrement pas point de discontinuité de f , on a égalité en loi des sommes de RIEMANN associée aux intégrales. Ces sommes convergent presque sûrement vers les intégrales, donc les lois des sommes de RIEMANN convergent vers les lois des intégrales, ce qui conclut ce Lemme. $\square$

Démontrons le Théorème V.1.2.

Démonstration du Théorème V.1.2 : On suppose que $\alpha \geq 1$. On note

$$X_{\lambda,A^\alpha}(A) \triangleq S_{\lambda,A^\alpha}(A) - \mathbb{E}[S_{\lambda,A^\alpha}(A)],$$

comme dans la section précédente. Alors

$$\frac{1}{A}X_{\lambda,A^\alpha}(A) = \frac{1}{A} \int_{-A}^A \mathbf{1}_{\{u(A^\alpha, x) \geq \lambda\}} \, dx.$$

Par auto-similarité de u (Lemme V.3.1), au sens des lois finies-dimensionnelles, on a

$$(u(A^\alpha t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \stackrel{\text{loi}}{=} \left(A^\alpha u\left(t, \frac{x}{A^\alpha}\right), t \geq 0, x \in \mathbb{R} \right).$$

Ainsi, puisque pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, la variable $u(t, x)$ est gaussienne (non dégénérée), elle n'appartient $\mathbb{P}$ -presque jamais à l'ensemble de discontinuité de $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\{x \geq \lambda\}}$, à savoir $\{\lambda\}$. Par le Lemme V.3.2, il suit que

$$\frac{1}{A} X_{\lambda, A^\alpha}(A) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{A} \int_{-A}^A \left(\mathbf{1}_{\{u(1, \frac{x}{A^\alpha}) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, \frac{x}{A^\alpha}) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} \right] \right) dx.$$

Par un changement de variables, on en déduit que

$$\frac{1}{A} X_{\lambda, A^\alpha}(A) \stackrel{\text{loi}}{=} \int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_{\{u(1, \frac{x}{A^{\alpha-1}}) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, \frac{x}{A^{\alpha-1}}) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} \right] \right) dx. \quad [\text{V.8}]$$

Si $\alpha = 1$, le cas d'un temps dit *modéré*, alors [V.8] donne dans ce cas

$$\frac{1}{A} X_{\lambda, A^\alpha}(A) \stackrel{\text{loi}}{=} \int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} \right] \right) dx.$$

Par convergence dominée,

$$\int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} \right] \right) dx \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq 0\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq 0\}} \right] \right) dx.$$

Or, u est spatialement stationnaire. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(1, x)$ suit $\mathcal{N}(0, 1/4)$, donc, toujours en utilisant le Lemme V.3.2,

$$\int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq 0\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, x) \geq 0\}} \right] \right) dx \stackrel{\text{loi}}{=} 2 \cdot \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}} - 1,$$

où Z suit $\mathcal{N}(0, 1/4)$. La variable $2 \cdot \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}} - 1$ suit la loi de RADEMACHER. On en déduit alors que $\frac{1}{A} X_{\lambda, A^\alpha}(A)$ converge en loi vers cette même loi, lorsque $\alpha = 1$.

Pour $\alpha > 1$, une convergence dominée appliquée à [V.8] donne directement

$$\int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_{\{u(1, \frac{x}{A^{\alpha-1}}) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, \frac{x}{A^{\alpha-1}}) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} \right] \right) dx \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-p.s.}} 2 \mathbf{1}_{\{u(1, 0) \geq 0\}} - 1.$$

Puisque $u(1, 0)$ suit $\mathcal{N}(0, 1/4)$, cette variable suit toujours la loi de RADEMACHER. On en déduit la convergence en loi annoncée. $\square$

Remarque V.3.3. Soit ε suivant une loi de RADEMACHER. Il est bien sûr immédiat que $\mathbb{E}[\varepsilon^2] = 1$. Si on ne sait pas que la loi limite de $\frac{1}{A} X_{\lambda, A^\alpha}(A)$ est une telle loi, on aurait tout de même pu calculer cette espérance. Si ε suit la loi limite, alors d'après la discussion effectuée dans la section précédente, seuls les chaos d'ordre impairs ont une influence sur la limite. Les chaos d'ordre pair tendent vers 0. Nous le prouverons dans la section suivante. Ainsi, en utilisant l'expression de chaque premier coefficient dans le développement asymptotique de $\mathbb{E}[X_{\lambda, A^\alpha}(A)^2]$, on a

$$\mathbb{E}[\varepsilon^2] = \sum_{q \text{ impair}} 4\psi_{q-1}(0)^2 = 4 \sum_{q \text{ impair}} \frac{H_{q-1}(0)^2}{2\pi q!} = \frac{2}{\pi} \sum_{q \text{ impair}} \frac{(q-1)!^2}{2^{q-1} \left(\frac{q-1}{2}\right)! q!} = \frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(2q+1)4^q} \binom{2q}{q}.$$

Cette dernière somme est usuelle. Par exemple, on peut la calculer en interprétant $\frac{1}{2q+1}$ comme $\int_0^1 x^{2q} dx$, puis avec la formule $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} u^n = \frac{1}{\sqrt{1-4u}}$, pour $0 \leq u < 1/4$, qui se démontre avec par exemple une équation différentielle. On en déduit donc que $\mathbb{E}[\varepsilon^2] = 1$. Néanmoins, une telle méthode ne fonctionne pas aussi bien pour le cas $\alpha < 1$, où le résultat ne peut hélas que s'exprimer sous la forme d'une somme de série. $\clubsuit$

Remarque V.3.4. Que se passe-t-il si on applique le raisonnement de la démonstration pour $\alpha < 1$? La normalisation est différente, d'après les calculs effectués précédemment. Notons $\beta = (1 + \alpha)/2 \in (1/2, 1)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^\beta} X_{\lambda, A^\alpha}(A) &= \frac{1}{A^\beta} \int_{-A}^A \left(\mathbf{1}_{\{u(A^\alpha, x) \geq \lambda\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(A^\alpha, x) \geq \lambda\}} \right] \right) dx \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} A^{1-\beta} \int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_{\{u(1, A^{1-\alpha}x) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, A^{1-\alpha}x) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} \right] \right) dx \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} 2A^{1-\beta} \left(\mathbf{1}_{\{u(1, 0) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} - \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{u(1, 0) \geq \frac{\lambda}{A^\alpha}\}} \right] \right). \end{aligned}$$

La normalisation fait que le terme devant l'intégrale ne s'annule pas. $A^{1-\beta}$ explose, tandis que la variable converge $\mathbb{P}$ -presque sûrement vers une loi de RADEMACHER. ♣

4. Temps court : Théorème Central Limite

On suppose $\alpha < 1$. On a déterminé la bonne normalisation dans ce cas, et on définit

$$Z_{\lambda, A^\alpha}(A) \triangleq \frac{1}{A^{(1+\alpha)/2}} X_{\lambda, A^\alpha}(A).$$

On cherche à démontrer le Théorème V.1.3. On suit la démarche initiée dans [Pha13]. L'idée est la suivante : on développe Z en chaos de WIENER (c'est ce qu'on a en fait déjà fait dans la section 1), et on étudie la convergence d'une somme finie de ces chaos. Observons que les chaos d'ordre pair tendent vers 0 dans L^2 , et donc que seuls les termes d'ordre impair contribuent à la limite.

On considère $A \mapsto M_A$ envoyant tout réel $A > 0$ sur un entier M_A positif qu'on suppose croître vers $+\infty$. On choisira en fait une telle application de sorte qu'on dispose d'une vitesse de convergence vers 0. On considère pour $q \geq 1$, la variable

$$Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \triangleq \frac{B_{\lambda, t}(q)}{A^{(1+\alpha)/2}} \int_{-A}^A I_q \left(g_{A^\alpha, x}^{\otimes q} \right) dx.$$

Il s'agit de la projection sur le q -ème chaos de Z , d'après la Proposition V.2.1. On considère la troncature de Z à l'ordre M_A , donnée par

$$Z_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A) \triangleq \sum_{q=1}^{M_A} Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A),$$

et on fait le découpage suivant

$$\begin{aligned} & d_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \right) \right) \\ & \leq d_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), Z_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A) \right) + d_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A), \mathcal{N} \left(0, \sigma_{M_A}^2 \right) \right) + d_W \left(\mathcal{N} \left(0, \sigma_{M_A}^2 \right), \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \right) \right), \end{aligned}$$

où $\sigma^2 = \sum_{q \text{ impair}} \sigma(q)^2$, avec $\sigma(q)$ donné par [V.7] et $\sigma_{M_A} = \sigma[Z_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A)]$ est l'écart-type de $Z_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A)$.

Le premier terme exprime la différence entre une variable développée en chaos, et une somme tronquée, elle se majore dans L^2 , et nécessite donc une étude de $\mathbb{E}[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2]$ pour tout $q \geq 1$. Le deuxième terme se maîtrise grâce à la méthode de NOURDIN–PECCATI, et nécessite d'estimer des variances de carrés de normes de dérivées de MALLIAVIN de Z^{M_A} . Enfin, le dernier terme est une conséquence de la convergence de σ_{M_A} vers σ . Les prochaines sous-sections développent ces trois convergences.

4.1. Convergence des restes du développement en chaos

Proposition V.4.1 : *Soit $M \geq 1$ un entier quelconque. Alors il existe $C > 0$ ne dépendant pas de λ, α, M ou encore A telle que pour tout $A > 1$,*

$$d_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A) \right) \leq \frac{C}{\sqrt{M}} + \frac{C}{A^{(1-\alpha)/2} \sqrt{M}}.$$

Démonstration : Puisque les deux variables sont dans $L^2(\mathbb{P})$, on a immédiatement

$$d_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A) \right) \leq \mathbb{E} \left[\left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A) - Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A) \right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{\sum_{q=M+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right]}.$$

Or, à q fixé, les calculs effectués dans la section 2, via [V.4], montrent que

$$\mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] = \frac{1}{A^{1+\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] = \frac{1}{A^{1+\alpha}} \frac{1}{2^{2q} A^{2\alpha q}} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 J_{A^\alpha, q}(A).$$

On a vu que $J_{A^\alpha, q}(A)$ avait une expression exacte, donnée par [V.6]. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] &= \frac{1}{A^{1+\alpha}} \frac{1}{2^{2q} A^{2\alpha q}} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 \left(\frac{2^{2q+3} A^{2\alpha q + \alpha + 1}}{2q+1} - \frac{2^{2q+3} A^{2\alpha q + 2\alpha}}{(2q+1)(2q+2)} \right) \\ &= \frac{8}{2q+1} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 - \frac{8}{(2q+1)(2q+2)} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 \frac{1}{A^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Or, la borne suivante est vérifiée :

$$\Psi \triangleq \sup_{q \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{q!}} |H_q(x)| \varphi(x) = \sup_{q \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{q+1} |\psi_q(x)| < \infty. \quad [\text{V.9}]$$

Regarder par exemple [Sze39]. Il suit que pour tout $q \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \leq \frac{8\Psi^2}{q(2q+1)} \left(1 - \frac{1}{2q+2} \frac{1}{A^{1-\alpha}} \right).$$

Enfin, grâce aux équivalents $\sum_{q=M+1}^{+\infty} 1/q^2 \sim 1/M$ et $\sum_{q=M+1}^{+\infty} 1/q^3 \sim 2/M^2$, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant d'aucun paramètre pour lequel

$$\sum_{q=M+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \leq \frac{C}{M} + \frac{C}{MA^{1-\alpha}}.$$

Cela conclut la démonstration de cette Proposition. $\square$

4.2. Convergence des sommes tronquées

On cherche à exprimer dans cette sous-section une approximation par une gaussienne. On applique pour cela les techniques de la méthode de NOURDIN–PECCATI, qui sont bien adaptées puisqu'on se place dans une somme finie de chaos de WIENER. Rappelons qu'on a considéré dans la section 2 un processus isonormal défini à partir du bruit blanc W dirigeant l'équation des ondes. On a noté $u(t, x) = I_1(g_{t,x})$. On considère les opérateurs de MALLIAVIN associé à ce processus isonormal, définis sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme associée, et pour $q \geq 1$, on notera $\|\cdot\|_{L_q^2}$ la norme hilbertienne usuelle sur $L^2(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+^q)$, de sorte que la formule d'isométrie s'écrit pour tous $q \geq 1$ et $f, g \in L_S^2(0, 1)^q$,

$$\mathbb{E}[I_q(f)I_q(g)] = q! \langle f, g \rangle_{L_q^2}.$$

Avant de débiter, énonçons un Lemme connu sur les contractions.

Lemme V.4.2 : Soient $n, m \geq 1$, $f_1, g_1 \in \mathcal{H}^{\odot n}$ et $f_2, g_2 \in \mathcal{H}^{\odot m}$. Alors

$$\langle f_1 \tilde{\otimes} f_2, g_1 \tilde{\otimes} g_2 \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(n+m)}} = \frac{n!m!}{(n+m)!} \sum_{r=0}^{n \wedge m} \binom{n}{r} \binom{m}{r} \langle f_1 \otimes_r g_2, g_1 \otimes_r f_2 \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(n+m-2r)}}.$$

D'après le Théorème du Quatrième Moment, pour prouver une convergence vers la gaussienne, il est bon de connaître la variance du carré de la norme d'une dérivée de MALLIAVIN. C'est l'objet du Lemme suivant.

Lemme V.4.3 : Soit $q \geq 1$ un entier quelconque. Alors pour tout $A > 1$,

$$\text{Var} \left[\left\| \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 \right] \leq 16 \cdot 9^{q-1} q^2 \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^4 \frac{1}{A^{1-\alpha}}.$$

Démonstration : Il s'agit de calculs classiques, bien que longs, qui utilisent la formule produit. Repartons de l'expression [V.3] de la Proposition V.2.1, donnant

$$Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) = \frac{1}{\sqrt{A^{1+\alpha}}} B_{\lambda, A^\alpha}(q) \int_{-A}^A I_q \left(g_{A^\alpha, x}^{\otimes q} \right) dx.$$

Ainsi, en permutant dérivée et intégrale de LEBESGUE sur un compact

$$D_\bullet Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) = q \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)}{\sqrt{A^{1+\alpha}}} \int_{-A}^A g_{A^\alpha, x}(\bullet) I_{q-1} \left(g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1)} \right) dx.$$

Ainsi,

$$\left\| D Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 = q^2 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^2}{A^{1+\alpha}} \int_{-A}^A \int_{-A}^A \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, y} \rangle_{L^2} I_{q-1} \left(g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1)} \right) I_{q-1} \left(g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1)} \right) dy dx.$$

On cherche à calculer la variance de cette variable aléatoire. Développons-la en chaos, grâce à la formule produit.

$$\begin{aligned} & \left\| D Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 \\ &= q^2 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^2}{A^{1+\alpha}} \int_{-A}^A \int_{-A}^A \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, y} \rangle_{L^2} \left\{ \sum_{r=0}^{q-1} r! \binom{q-1}{r}^2 I_{2(q-1-r)} \left(g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1)} \tilde{\otimes}_r g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1)} \right) \right\} dy dx \\ &= q^2 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^2}{A^{1+\alpha}} \sum_{r=0}^{q-1} r! \binom{q-1}{r}^2 I_{2(q-1-r)} \left(\int_{-A}^A \int_{-A}^A \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, y} \rangle_{L^2}^{r+1} g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1-r)} \tilde{\otimes} g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1-r)} dy dx \right). \end{aligned}$$

L'espérance de cette variable se retrouve au terme numéro $r = q - 1$, si bien que par orthogonalité des chaos, on retrouve

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left[\left\| D Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 \right] \\ &= q^4 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} \sum_{r=0}^{q-2} r!^2 \binom{q-1}{r}^4 (2(q-1-r))! \left\| \int_{-A}^A \int_{-A}^A \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, y} \rangle_{L^2}^{r+1} g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1-r)} \tilde{\otimes} g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1-r)} dy dx \right\|_{L_{2(q-1-r)}^2}^2 \\ &= q^4 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} \sum_{r=0}^{q-2} r!^2 \binom{q-1}{r}^4 (2(q-1-r))! \int_{[-A, A]^4} \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, y} \rangle_{L^2}^{r+1} \langle g_{A^\alpha, x'}, g_{A^\alpha, y'} \rangle_{L^2}^{r+1} \\ & \quad \cdot \left\langle g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1-r)} \tilde{\otimes} g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1-r)}, g_{A^\alpha, x'}^{\otimes(q-1-r)} \tilde{\otimes} g_{A^\alpha, y'}^{\otimes(q-1-r)} \right\rangle_{L_{2(q-1-r)}^2} dy' dx' dy dx. \end{aligned}$$

Or, pour $-A \leq x, y, x', y' \leq A$ et $0 \leq r \leq q - 2$, d'après le Lemme V.4.2,

$$\begin{aligned} & \left\langle g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1-r)} \tilde{\otimes} g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1-r)}, g_{A^\alpha, x'}^{\otimes(q-1-r)} \tilde{\otimes} g_{A^\alpha, y'}^{\otimes(q-1-r)} \right\rangle_{L_{2(q-1-r)}^2} \\ &= \frac{(q-1-r)!^2}{(2(q-1-r))!} \sum_{k=0}^{q-1-r} \binom{q-1-r}{k}^2 \left\langle g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1-r)} \otimes_k g_{A^\alpha, x'}^{\otimes(q-1-r)}, g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1-r)} \otimes_k g_{A^\alpha, y'}^{\otimes(q-1-r)} \right\rangle_{L_{2(q-1-r-k)}^2} \\ &= \frac{(q-1-r)!^2}{(2(q-1-r))!} \sum_{k=0}^{q-1-r} \binom{q-1-r}{k}^2 \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, x'} \rangle_{L^2}^k \langle g_{A^\alpha, y}, g_{A^\alpha, y'} \rangle_{L^2}^k \\ & \quad \cdot \left\langle g_{A^\alpha, x}^{\otimes(q-1-r-k)} \otimes g_{A^\alpha, x'}^{\otimes(q-1-r-k)}, g_{A^\alpha, y}^{\otimes(q-1-r-k)} \otimes g_{A^\alpha, y'}^{\otimes(q-1-r-k)} \right\rangle_{L_{2(q-1-r-k)}^2} \\ &= \frac{(q-1-r)!^2}{(2(q-1-r))!} \sum_{k=0}^{q-1-r} \binom{q-1-r}{k}^2 \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, x'} \rangle_{L^2}^k \langle g_{A^\alpha, y}, g_{A^\alpha, y'} \rangle_{L^2}^k \\ & \quad \cdot \langle g_{A^\alpha, x}, g_{A^\alpha, y} \rangle_{L^2}^{q-1-r-k} \langle g_{A^\alpha, x'}, g_{A^\alpha, y'} \rangle_{L^2}^{q-1-r-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour l'expression de la variance, on a

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\left\| D Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 \right] &= q^4 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} \sum_{r=0}^{q-2} r!^2 \binom{q-1}{r}^4 (q-1-r)!^2 \sum_{k=0}^{q-1-r} \binom{q-1-r}{k}^2 J_{q, r, k}(A^\alpha) \\ &= q^4 (q-1)!^2 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q-1}{r}^2 \sum_{k=0}^{q-1-r} \binom{q-1-r}{k}^2 J_{q, r, k}(A^\alpha), \end{aligned}$$

où

$$J_{q,r,k}(A^\alpha) \triangleq \int_{[-A,A]^4} \langle g_{A^\alpha,x}, g_{A^\alpha,x'} \rangle_{L^2}^k \langle g_{A^\alpha,y}, g_{A^\alpha,y'} \rangle_{L^2}^k \langle g_{A^\alpha,x}, g_{A^\alpha,y} \rangle_{L^2}^{q-k} \langle g_{A^\alpha,x'}, g_{A^\alpha,y'} \rangle_{L^2}^{q-k} dx dy dx' dy'.$$

Jusqu'ici, les calculs sont très généraux, et n'exploitent en rien l'expression de $g_{t,x}$. Désormais, on spécialise les calculs sur notre étude. Rappelons que pour tout $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\langle g_{t,x}, g_{t,y} \rangle_{L^2} = \mathbb{E}[u(t,x)u(t,y)] = \frac{1}{16}(|x-y|-2t)^2 \mathbf{1}_{\{|x-y| \leq 2t\}} \triangleq \frac{1}{16} \rho_t(|x-y|).$$

Par conséquent, (remarquez que seul l'aspect stationnaire en espace de la solution est exploité)

$$J_{q,r,k}(A^\alpha) = \frac{1}{16^{2q}} \int_{[-A,A]^4} \rho_{A^\alpha}(|x-x'|)^k \rho_{A^\alpha}(|y-y'|)^k \rho_{A^\alpha}(|x-y|)^{q-k} \rho_{A^\alpha}(|x'-y'|)^{q-k} dx dy dx' dy'.$$

On effectue le changement de variables 4-dimensionnel suivant

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ x-y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Notez que cette matrice admet un déterminant égal à 1, et que

$$x' - y' = -(x - x') + (x - y) + (y - y') = -z_1 + z_3 + z_2.$$

Enfin, ce changement de variables envoie $-A \leq x, y, x', y' \leq A$ sur $-2A \leq z_1, z_2, z_3 \leq 2A$ et $-A \leq z_4 \leq A$ (de manière non bijective, les espaces qu'on vient de décrire sont plus gros que l'image de la matrice par $[-A, A]^4$). Ainsi, c'est à partir d'ici qu'on manipule des inégalités, et on obtient

$$\begin{aligned} J_{q,r,k}(A^\alpha) &\leq \frac{1}{16^{2q}} \int_{-A}^A \left\{ \int_{[-2A, 2A]^3} \rho_{A^\alpha}(|z_1|)^k \rho_{A^\alpha}(|z_2|)^k \rho_{A^\alpha}(|z_3|)^{q-k} \rho_{A^\alpha}(|-z_1 + z_2 + z_3|)^{q-k} dz_1 dz_2 dz_3 \right\} dz_4 \\ &= \frac{2A}{16^{2q}} \int_{[-2A, 2A]^3} \rho_{A^\alpha}(|z_1|)^k \rho_{A^\alpha}(|z_2|)^k \rho_{A^\alpha}(|z_3|)^{q-k} \rho_{A^\alpha}(|-z_1 + z_2 + z_3|)^{q-k} dz_1 dz_2 dz_3. \end{aligned}$$

Or, on a l'inégalité suivante $\rho_{A^\alpha}(|z|) \leq 4A^{2\alpha} \mathbf{1}_{\{|z| \leq 2A^\alpha\}}$ (remarquez qu'on utilise seulement qu'à partir d'ici une propriété réellement inhérente au problème étudié, et qu'on a quitté la sphère des calculs généraux pour des processus stationnaires en espace). On obtient

$$\begin{aligned} J_{q,r,k}(A^\alpha) &\leq \frac{2A}{16^{2q}} \cdot 4^{2q} A^{4\alpha q} \int_{[-2A, 2A]^3} \mathbf{1}_{\{|z_1| \leq 2A^\alpha\}} \mathbf{1}_{\{|z_2| \leq 2A^\alpha\}} \mathbf{1}_{\{|z_3| \leq 2A^\alpha\}} \mathbf{1}_{\{|-z_1 + z_2 + z_3| \leq 2A^\alpha\}} dz_1 dz_2 dz_3 \\ &\leq \frac{2}{16^q} A^{4\alpha q + 1} \left(\int_{-2A}^{2A} \mathbf{1}_{\{|z| \leq 2A^\alpha\}} dz \right)^3 = \frac{1}{16^{q-1}} A^{4\alpha q + 3\alpha + 1}. \end{aligned}$$

On peut alors revenir au calcul de la variance.

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\left\| \text{DZ}_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 \right] &= q^4 (q-1)!^2 \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q-1}{r}^2 \sum_{k=0}^{q-1-r} \binom{q-1-r}{k}^2 J_{q,r,k}(A^\alpha) \\ &\leq \frac{q^4 (q-1)!^2}{16^{q-1}} \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} A^{4\alpha q + 3\alpha + 1} \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q-1}{r}^2 \sum_{k=0}^{q-1-r} \binom{q-1-r}{k}^2 \\ &= \frac{q^4 (q-1)!^2}{16^{q-1}} \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} A^{4\alpha q + 3\alpha + 1} \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q-1}{r}^2 \binom{2(q-1-r)}{q-1-r}. \end{aligned}$$

Or, $\binom{2(q-1-r)}{q-1-r}$ est le coefficient numéro $q-1-r$ dans le développement du polynôme $(1+X)^{2(q-1-r)}$. On dispose de la majoration (très peu fine) $\binom{2(q-1-r)}{q-1-r} \leq (1+1)^{2(q-1-r)}$. On en déduit

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\left\| \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 \right] &\leq \frac{q^4(q-1)!^2}{16^{q-1}} \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} A^{4\alpha q+3\alpha+1} \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q-1}{r}^2 2^{2(q-1+r)} \\ &\leq \frac{q^4(q-1)!^2}{16^{q-1}} \frac{B_{\lambda, A^\alpha}(q)^4}{A^{2+2\alpha}} A^{4\alpha q+3\alpha+1} \left(\sum_{r=0}^{q-1} \binom{q-1}{r} 2^{q-1+r} \right)^2 \\ &\leq \frac{q^4(q-1)!^2}{16^{q-1}} \frac{1}{A^{2+2\alpha}} \left(\frac{1}{q!^2} \frac{16^q}{A^{4\alpha q}} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^4 \right) \cdot A^{4\alpha q+3\alpha+1} 9^{q-1} \\ &\leq 16 \cdot 9^{q-1} q^2 \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^4 \frac{1}{A^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Il s'agit de l'inégalité attendue, cela conclut donc cette démonstration. $\square$

Appliquons la méthode de NOURDIN–PECCATI pour la Proposition suivante.

Proposition V.4.4 : *Soit $M \geq 1$ un entier quelconque. Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que pour tout $A > 1$*

$$\text{d}_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A), \mathcal{N}(0, \sigma_M^2) \right) \leq \frac{C}{A^{(1-\alpha)/2}} 9^M.$$

Démonstration : D'après la méthode de NOURDIN–PECCATI, plus précisément, d'après le Théorème III.1.2, on a

$$\begin{aligned} \text{d}_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A), \mathcal{N}(0, \sigma_M^2) \right) &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbb{E} \left[\left(\sigma_M^2 - \left\langle \text{D}(-L)^{-1} Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A), \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A) \right\rangle_{L^2} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Var} \left[\sum_{q=1}^M \sum_{q'=1}^M \frac{1}{q} \left\langle \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A), \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q')}(A) \right\rangle_{L^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire dans $L^2(\mathbb{P})$,

$$\text{d}_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A), \mathcal{N}(0, \sigma_M^2) \right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{q=1}^M \sum_{q'=1}^M \text{Var} \left[\frac{1}{q} \left\langle \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A), \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q')}(A) \right\rangle_{L^2} \right]^{1/2}.$$

Puis, par inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P}) \otimes L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

$$\text{d}_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A), \mathcal{N}(0, \sigma_M^2) \right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{q=1}^M \sum_{q'=1}^M \frac{1}{q} \text{Var} \left[\left\| \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A) \right\|_{L^2}^2 \right]^{1/4} \text{Var} \left[\left\| \text{D}Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q')}(A) \right\|_{L^2}^2 \right]^{1/4}.$$

Enfin, d'après le Lemme précédent,

$$\text{d}_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A), \mathcal{N}(0, \sigma_M^2) \right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{q=1}^M \sum_{q'=1}^M \frac{1}{q} 4 \cdot 3^{q+q'-1} \sqrt{q} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right) \sqrt{q'} \psi_{q'-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right) \frac{1}{A^{1/2-\alpha/2}}.$$

D'où finalement, en majorant $1/q$ par 1 et en calculant les sommes géométriques,

$$\text{d}_W \left(Z_{\lambda, A^\alpha}^M(A), \mathcal{N}(0, \sigma_M^2) \right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{3} \Psi^2 \frac{9^M}{A^{1/2-\alpha/2}},$$

où Ψ est donnée par [V.9]. Cela conclut la démonstration. $\square$

4.3. Convergence des écarts-types

Proposition V.4.5 : Soit $M \geq 1$ un entier quelconque. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de λ telle que pour tout $A > 1$,

$$d_W\left(\mathcal{N}\left(0, \sigma_M^2\right), \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)\right) \leq \frac{C}{M^{1/2}A^\alpha} + \frac{C}{A^{1-\alpha}} + \frac{CM^{1/2}}{A^{2\alpha}} + \frac{C}{M}.$$

Démonstration : Les deux lois manipulées sont gaussiennes, on en déduit que

$$d_W\left(\mathcal{N}\left(0, \sigma_M^2\right), \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} |\sigma - \sigma_M| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|\sigma^2 - \sigma_M^2|}{\sigma + \sigma_M} \leq \sqrt{\frac{2}{\sigma^2 \pi}} |\sigma^2 - \sigma_M^2|.$$

Rappelons qu'on a défini σ_M comme l'écart-type de Z^M , et σ^2 comme la somme des variances limites des chaos impairs :

$$\sigma^2 = \sum_{q \text{ impair}} \frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1},$$

où, d'après les calculs de la section 2,

$$\frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right].$$

Cette double limite (dans la somme, et en A) empêche de conclure immédiatement que σ_M converge vers σ lorsque $[M \rightarrow \infty]$. Estimons donc la différence entre σ^2 et σ_M^2 .

$$\begin{aligned} |\sigma^2 - \sigma_M^2| &= \left| \sum_{q \text{ impair}} \frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1} - \sum_{q=1}^M \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \right| \\ &\leq \left| \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ impair}}}^M \left(\frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1} - \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \right) \right| + \left| \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \right| + \left| \sum_{\substack{q=M+1 \\ q \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1} \right| \\ &\triangleq A + B + C. \end{aligned}$$

Commençons par estimer A. Pour cela, on utilise l'expression explicite suivante, qu'on a vu dans la Démonstration de la Proposition V.4.1, valable pour tout $q \geq 1$

$$\mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] = \frac{8}{2q+1} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 - \frac{8}{(2q+1)(2q+2)} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 \frac{1}{A^{1-\alpha}}.$$

Ainsi,

$$\frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1} - \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] = \frac{8}{2q+1} \left(\psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 - \psi_{q-1}(0)^2 \right) - \frac{8}{(2q+1)(2q+2)} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 \frac{1}{A^{1-\alpha}}.$$

Or, ψ_{q-1} vérifie

$$\psi'_{q-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{q!}} \left((q-1)H_{q-2}(x) - xH_{q-1}(x) \right) \varphi(x) = \frac{-1}{\sqrt{q!}} H_q(x) \varphi(x) = -\sqrt{q+1} \psi_q(x), \quad [\text{V.10}]$$

si bien que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi'_{q-1}(x)| \leq \Psi$, avec Ψ donné par [V.9]. En appliquant le Théorème des accroissements finis, on en déduit que

$$\left| \frac{8\psi_{q-1}(0)^2}{2q+1} - \mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \right| \leq \frac{16\Psi^2}{(2q+1)\sqrt{q}} \frac{2|\lambda|}{A^\alpha} - \frac{8\Psi^2}{q(2q+1)(2q+2)} \frac{1}{A^{1-\alpha}}.$$

En utilisant l'équivalent $\sum_{q=1}^M \frac{1}{q^{3/2}} \sim \frac{2}{M^{1/2}}$, et le fait que $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^3}$ converge, on en déduit qu'il existe C ne dépendant d'aucun paramètre pour lequel

$$A \leq \frac{|\lambda|C}{M^{1/2}A^\alpha} + \frac{C}{A^{1-\alpha}}.$$

Passons désormais au terme B. La normalisation imposée montre que pour q pair, $Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)$ converge dans L^2 vers 0, puisque

$$\mathbb{E} \left[Z_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] = \frac{1}{A^{2\alpha}} \left(\frac{1}{A^{1-\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right] \right),$$

où $\frac{1}{A^{1-\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}^{(q)}(A)^2 \right]$ tend vers $\frac{32\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2q+1}$ lorsque $[A \rightarrow \infty]$. Montrons que

$$\sum_{q=1}^M \frac{1}{A^{1-\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}(A)^2 \right] \leq \frac{C\sqrt{M}}{A^{2\alpha}},$$

où C ne dépend que de λ . Pour cela, on fait le découpage suivant

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{1}{A^{1-\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}(A)^2 \right] - \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{32\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2q+1} \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{8}{2q+1} \left(\left(A^\alpha \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right) \right)^2 - 4\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2 \right) - \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{8}{(2q+1)(2q+2)} \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right)^2 \right| \\ &\leq \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{32|\lambda|\Psi}{2q+1} \left| A^\alpha \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right) - 2\lambda \psi'_{q-1}(0) \right| + \frac{32\lambda^2\Psi}{A^{2\alpha}} \sum_{q \text{ pair}} \frac{1}{(2q+1)(2q+2)}. \end{aligned}$$

Or, en utilisant le fait que $\psi''_{q-1} = \sqrt{q+1}\sqrt{q+2}\psi_{q+1}$, et la définition de Ψ donnée par [v.9],

$$\left| A^\alpha \psi_{q-1} \left(\frac{2\lambda}{A^\alpha} \right) - 2\lambda \psi'_{q-1}(0) \right| \leq \frac{2\lambda^2}{A^{2\alpha}} \sqrt{q+1} \Psi.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{1}{A^{1-\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}(A)^2 \right] - \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{32\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2q+1} \right| \\ &\leq \frac{64\lambda^2\Psi^2}{A^{2\alpha}} \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{\sqrt{q+1}}{2q+1} + \frac{32\lambda^2\Psi}{A^{2\alpha}} \sum_{q \text{ pair}} \frac{1}{(2q+1)(2q+2)} \\ &\leq C \frac{\sqrt{M}}{A^{2\alpha}}, \end{aligned}$$

où C ne dépend que de λ , via l'équivalent $\sum_{q=1}^M \frac{1}{q^{1/2}} \sim 2\sqrt{M}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{A^{2\alpha}} \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{1}{A^{1-\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}(A)^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{A^{2\alpha}} \left| \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{1}{A^{1-\alpha}} \mathbb{E} \left[X_{\lambda, A^\alpha}(A)^2 \right] - \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{32\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2q+1} \right| + \frac{1}{A^{2\alpha}} \sum_{\substack{q=1 \\ q \text{ pair}}}^M \frac{32\lambda^2 \psi'_{q-1}(0)^2}{2q+1} \\ &\leq \frac{C\sqrt{M}}{A^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Enfin, pour le terme C. Puisque $\psi_{q-1}(0) \leq \frac{\Psi}{\sqrt{q}}$, il suit que

$$C \leq 8\Psi \sum_{q=M+1}^{+\infty} \frac{1}{q(2q+1)} \leq \frac{C}{M},$$

où C ne dépend d'aucun paramètre. □

4.4. Démonstration du Théorème V.1.3

À l'aide des trois dernières Propositions, nous sommes en capacité de démontrer le Théorème Limite pour $\alpha < 1$.

Démonstration : Comme annoncé en préambule de cette section, on considère $A \mapsto M_A$ une application envoyant $A > 1$ sur un entier positif, qu'on suppose croître vers $+\infty$. On la fixera en fin de démonstration. On effectue le découpage suivant.

$$\begin{aligned} & d_W\left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right) \\ & \leq d_W\left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), Z_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A)\right) + d_W\left(Z_{\lambda, A^\alpha}^{M_A}(A), \mathcal{N}(0, \sigma_{M_A}^2)\right) + d_W\left(\mathcal{N}(0, \sigma_{M_A}^2), \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right), \end{aligned}$$

Les Propositions V.4.1, V.4.4 et V.4.5 concluent qu'il existe $C > 0$ dépendant de λ telle que pour tout $A > 1$

$$\begin{aligned} & d_W\left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{M_A}} + \frac{C}{\sqrt{M_A} A^{(1-\alpha)/2}} + \frac{C}{A^{(1-\alpha)/2}} 3^{M_A} + \frac{C}{\sqrt{M_A} A^\alpha} + \frac{C}{A^{1-\alpha}} + \frac{C M_A^{1/2}}{A^{2\alpha}} + \frac{C}{M_A}. \end{aligned}$$

Quel que le soit le choix de M_A , tous ces termes tendent vers 0, à l'exception de $\frac{C}{A^{(1-\alpha)/2}} 3^{M_A}$ et $\frac{1}{A^{2\alpha}} M_A^{1/2}$, dont la convergence vers 0 n'est pas toujours vérifiée. Pour s'assurer de la première, on doit choisir M_A de sorte que

$$\frac{3^{M_A}}{A^{(1-\alpha)/2}} = \exp\left(M_A \ln 3 - \frac{1-\alpha}{2} \ln A\right) \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

Donc tel que

$$\ln A \left(\frac{M_A \ln 3}{\ln A} - \frac{1-\alpha}{2} \right) \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -\infty.$$

Pour cela, il suffit que $\frac{M_A}{\ln A}$ soit borné et que

$$\frac{M_A \ln 3}{\ln A} - \frac{1-\alpha}{2} < 0,$$

c'est-à-dire que $M_A < \frac{1-\alpha}{2 \ln 3} \ln A$. Considérons alors pour $A > 1$

$$M_A \triangleq \max \left\{ 0, \left\lfloor \frac{1-\alpha}{4 \ln 3} \ln A \right\rfloor \right\}.$$

Alors grâce à ce choix, on a

$$\frac{3^{M_A}}{A^{(1-\alpha)/2}} \leq \frac{A^{\frac{1-\alpha}{4}}}{A^{\frac{1-\alpha}{2}}} = \frac{1}{A^{(1-\alpha)/4}}.$$

On conclut alors sur l'estimation suivante : puisque $M_A \leq C \ln A$, avec C dépendant de α , on a alors l'existence d'une constante C dépendant de λ et α telle que

$$\begin{aligned} & d_W\left(Z_{\lambda, A^\alpha}(A), \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{\ln A}} + \frac{C}{\sqrt{\ln A} A^{(1-\alpha)/2}} + \frac{C}{A^{(1-\alpha)/4}} + \frac{C}{\sqrt{\ln A} A^\alpha} + \frac{C}{A^{1-\alpha}} + \frac{C \sqrt{\ln A}}{A^{2\alpha}} + \frac{C}{\ln A}, \end{aligned}$$

d'où la distance en $\frac{1}{\sqrt{\ln A}}$ annoncée. □

Estimation du paramètre de diffusion dans l'équation des ondes multiplicative

« – Travis se trompe. Elisabet essayait de faire en sorte que la vie ait un futur. Elle se souciait de tout le monde.

– Je n'en suis pas si sûr. Les personnes exceptionnelles suivent une route de solitude. Toi et moi le savons mieux que quiconque. »

Aloy à Sylens, *Horizon :Forbidden West*, 2022

RÉSUMÉ

On considère l'équation des ondes stochastique multiplicative, dirigée par un bruit blanc en temps et en espace, en dimension 1. Avec les techniques du calcul de MALLIAVIN, on détermine le comportement asymptotique des variations quadratiques temporelles de la solution. On discute aussi de l'application de ce résultat en statistiques, à travers l'étude d'un estimateur du paramètre de diffusion.

L'étude des p -variations de processus stochastiques admet une longue histoire. Les p -variations sont utilisées dans différents domaines des Probabilités et dans les statistiques : dans le cadre des semi-martingales (regarder par exemple [JP11]), des chemins rugueux (regarder [FH20]), ou encore dans l'estimation de paramètres pour différents modèles stochastiques (regarder [Tud13]).

Plus récemment, l'étude des p -variations de solutions d'équations aux dérivées partielles (ÉDPS dans la suite) a eu un intérêt accru, principalement grâce à leurs énormes potentiels pour des applications à l'inférence statistique. Par exemple, les p -variations (en espace ou en temps) de solutions de l'équation de la chaleur stochastique a été traité dans [PT07], [TK19] (laplacien fractionnaire pour l'équation additive), [BT19], [BT20], [CH20] (dans $L^2(0, \pi)$ ou $L^2(\mathbb{R})$), [HT21], [CD23] (étude d'un laplacien fractionnaire dans un cadre multiplicatif), ou encore [GT23] (bruit non gaussien).

À propos de l'équation des ondes stochastique, la littérature est moins riche et les travaux précédents sur les p -variations à propos de cette ÉDPS ne concernent, à notre connaissance, uniquement les situations où le bruit aléatoire est additif. À propos des travaux liés aux p -variations de la solution de cette équation, regarder [AGT22], [SST20] ou encore [TK19]. Regarder aussi le récent livre [Tud13] pour une exposition plus complète sur le comportement des variations de solutions de plusieurs ÉDPS et leur application en statistiques.

Dans ce travail, on souhaite apporter une première contribution à l'étude des p -variations de la solution des ondes multiplicative dirigée par un bruit blanc en temps et en espace. Plus précisément, on étudie les variations quadratiques (ou 2-variations) temporelles de la solution de l'équation. L'approche

utilisée dans ce travail n'est pas la même quand dans le cas de l'équation de la chaleur non linéaire. En effet, dans ce cas de l'équation de la chaleur non linéaire, l'idée principale de cette étude repose sur une approximation des incréments de l'équation non linéaire par des incréments de l'équation linéaire multiplié par une quantité indépendante fonction de la diffusion (regarder [PT07] ou [GT23]). Ici, notre approche est différente et utilise entièrement les techniques du calcul de MALLIAVIN. On arrive à identifier une partie dominante de la variation quadratique, où les incréments du noyau de GREEN sont présents, et on obtient ainsi une limite pour cette partie dominante. La limite obtenue est différente du cas de l'équation de la chaleur non linéaire.

Nous allons aussi discuter de conséquences immédiates à propos de l'estimation du paramètre de diffusion dans le système étudié, en définissant un estimateur consistant pour ce paramètre. Mentionnons aussi que pour nombre d'ÉDPS, et en particulier pour l'équation de la chaleur stochastique, la variation quadratique permet d'estimer le paramètre de dérive. Dans notre cas, la méthode usuelle pour une estimation de la dérive ne fonctionne pas, à cause principalement de la forme complexe de la limite. Nous commentons ces aspects dans la section 3.

Ce chapitre est divisé comme suit. Nous introduisons dans la section 1 les résultats liés à la solution de l'équation des ondes, en démontrant sa dérivabilité. Nous démontrons le résultat principal dans la section 2, à savoir la convergence en probabilité de la variation quadratique temporelle de la solution vers une limite explicite. Dans la section 3, on discute de quelques aspects à propos de l'application de ce résultat à l'estimation de paramètres. On conclut avec des résultats de calcul de MALLIAVIN connus mais non expliqués au sein du Chapitre I.

1. Préliminaire sur l'équation des ondes stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère W un bruit blanc sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$: il s'agit d'un processus gaussien centré $(W(t, A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ est l'ensemble des borélien bornés, et dont la fonction de covariance est donnée pour $s, t \geq 0$ et $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{E}[W(t, A)W(s, B)] = (t \wedge s) \text{Leb}(A \cap B).$$

À partir de ce bruit, on associe l'équation différentielle suivante.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \sigma(u(t, x)) \dot{W}(t, x) & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On suppose que $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est globalement Lipschitzienne, avec $\sigma(0) \neq 0$ afin d'éviter de manipuler la solution constamment égale à zéro. La solution au sens évolutif est par définition solution de l'équation intégrale suivante

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy),$$

où l'intégrale est prise au sens de WALSH. Le noyau de GREEN G_1 est donné pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ par $G_1(t, x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x| < t\}}$. De plus, l'estimation uniforme suivante est connue : pour tout $T > 0$, pour tout $p \geq 1$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[|u(t, x)|^p] < \infty.$$

Enfin, il est aussi connu que la solution est spatialement stationnaire : pour tous temps $t \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$, les processus $(u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ et $(u(t, x+h), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ ont les mêmes lois finies-dimensionnelles.

On démontre le résultat de dérivabilité suivant, qu'on n'a étonnement pas trouvé parmi tous les résultats étudiés sur cette équation. Pour $T > 0$, on considère W le processus isonormal sur $\mathcal{H} = L^2([0, T] \times \mathbb{R})$ associé au bruit blanc ambiant. On lui associe les opérateurs de MALLIAVIN,

et dans toute la suite de ce chapitre, on se place sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par W . L'opérateur de divergence sera noté δ , et parfois, pour $u \in \text{Dom}(\delta)$, on notera

$$\delta(u) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u(t, x) W(\delta t, \delta x).$$

Si u est adapté par rapport à la filtration définie pour $t > 0$ par $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s, A), s \leq t, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}))$ alors bien entendu, $\delta(u)$ coïncide avec l'intégrale de WALSH, regarder le chapitre I.

Proposition VI.1.1 : Soit $T > 0$. Pour presque $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(t, x) \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Démonstration : On suit la démonstration proposée par NUALART dans [Nua06], plus précisément on suit le Théorème 2.4.3 et la Proposition 2.4.4. On considère le schéma de PICARD associé à cette équation : il s'agit de la suite de processus $(u_n)_n$ suivant. On considère $u_0 = 0$ le processus nul, puis pour $n \in \mathbb{N}$, pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1}(t, x) \triangleq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) \sigma(u_n(s, y)) W(ds, dy).$$

Le plan de démonstration est le suivant.

1. Pour presque tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(t, x)$ converge dans L^2 vers $u(t, x)$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et presque tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u_n(t, x) \in \mathbb{D}^{1,2}$, qu'on démontre par récurrence ;
3. On passe à la limite pour montrer que $u(t, x) \in \mathbb{D}^{1,2}$.

• Commençons par montrer le point 1., qui est déjà connu. Pour cela, la méthode classique est la suivante : pour tout $t \in [0, T]$ et $n \geq 1$, on considère

$$J_n(t) \triangleq \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[(u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x))^2 \right]$$

et on montre que la suite $(\sup_{t \in [0, T]} J_n(t), n \geq 1)$ est le terme général d'une suite convergente. Pour $n \geq 2$, $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$, l'isométrie de WALSH montre que

$$\mathbb{E} \left[(u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x))^2 \right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y)^2 \mathbb{E} \left[\{ \sigma(u_n(s, y)) - \sigma(u_{n-1}(s, y)) \}^2 \right] dy ds.$$

En utilisant le caractère lipschitzien de σ , on conclut que

$$\mathbb{E} \left[(u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x))^2 \right] \leq \|\sigma\|_{\text{Lip}}^2 \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y)^2 dy \right) \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[(u_n(s, x) - u_{n-1}(s, x))^2 \right] ds.$$

D'où, en calculant l'intégrale de G :

$$\mathbb{E} \left[(u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x))^2 \right] \leq \frac{\|\sigma\|_{\text{Lip}}^2}{4} \int_0^t (t-s) J_{n-1}(s) ds.$$

On en déduit l'inégalité récursive suivante : pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$

$$J_{n+1}(t) \leq \frac{\|\sigma\|_{\text{Lip}}^2}{4} \int_0^t (t-s) J_n(s) ds.$$

Or, $J_0(t) = \frac{\sigma(0)^2 t^2}{2}$. On en déduit par récurrence que pour tout $t \in [0, T]$,

$$J_n(t) \leq \frac{\sigma(0)^2}{2} \left(\frac{\|\sigma\|_{\text{Lip}}}{4} \right)^n \frac{1}{(2n+2)!} t^{2n+2}.$$

D'où finalement

$$\sup_{t \in [0, T]} J_n(t) \leq \frac{\sigma(0)^2}{2} \left(\frac{\|\sigma\|_{\text{Lip}}}{4} \right)^n \frac{1}{(2n+2)!} T^{2n+2}.$$

Cela prouve d'une part que pour t, x fixés, la suite $(u_n(t, x))_n$ est de CAUCHY dans $L^2(\mathbb{P})$, donc converge vers $u(t, x) \in L^2$, avec d'autre part l'estimation

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[(u_n(t, x) - u(t, x))^2 \right] \leq \frac{\sigma(0)^2}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{\|\sigma\|_{\text{Lip}}}{4} \right)^k \frac{1}{(2k+2)!} T^{2k+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

[VI.1]

- Montrons désormais le point 2.. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition suivante

$$(\mathcal{P}_n) : \begin{cases} \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, u_n(t, x) \in \mathbb{D}^{1,2} \\ \sup_{s \in [0, T]} \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y)^2] d\xi d\tau < \infty. \end{cases}$$

Cela est vrai pour $n = 0$, puisque u_0 est le processus nul. On suppose $(\mathcal{P}_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors on peut écrire $u_{n+1}(t, x) = \delta(V_n^{t,x})$, où pour presque tout $s \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$V_n^{t,x}(s, y) \triangleq \mathbf{1}_{[0, t]}(s) G_1(t - s, x - y) \sigma(u_n(s, y)).$$

On va montrer que $u_{n+1}(t, x) \in \mathbb{D}^{1,2}$ à l'aide de la Proposition VI.4.1. Commençons par constater que $V_n^{t,x}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ d'après la Proposition 2.9 de [DQ11], si bien que $\delta(V)$ coïncide avec l'intégrale de WALSH de V . Montrons que

- (a) Pour presque tous $s \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $V_n^{t,x}(s, y) \in \mathbb{D}^{1,2}$;
- (b) Pour presque tous $\tau \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, $(D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y), s \in [0, T], y \in \mathbb{R}) \in \text{Dom}(\delta)$;
- (c) L'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y) W(\delta s, \delta y) \right)^2 \right] d\tau d\xi < \infty.$$

- (d) On conclut la récurrence en montrant la condition technique au rang $n + 1$:

$$\sup_{s \in [0, T]} \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_{n+1}(s, y)^2] d\xi d\tau < \infty.$$

▷ Pour le point (a), il s'agit de constater que par hypothèse de récurrence, pour presque tout $s \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $u_n(s, y) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Puisque σ est globalement lipschitzienne, $\sigma(u(s, y)) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et donc $V_n^{t,x}(s, y) \in \mathbb{D}^{1,2}$, avec pour presque tout $\tau \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y) = \mathbf{1}_{[0, t]}(s) G_1(t - s, x - y) \Sigma(s, y) D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y),$$

où $\Sigma(s, y) = \sigma'(u_n(s, y))$ définit un processus adapté et borné par la constante de LIPSCHITZ de σ .

▷ Il suit que,

$$\sup_{s \in [0, T]} \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y)^2] d\xi d\tau \leq \frac{\|\sigma\|_{\text{Lip}}}{2} \sup_{s \in [0, T]} \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y)^2] d\xi d\tau < +\infty,$$

par hypothèse de récurrence. De plus, puisque $u_n(s, y)$ est $\mathcal{F}_s$ -mesurable, c'est aussi le cas de $D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y)$, si bien que le processus $(D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y), s \geq 0, y \in \mathbb{R})$ est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Il suit que ce processus est intégrable au sens de WALSH, donc appartient à $\text{Dom}(\delta)$, d'où le point (b).

▷ Enfin, pour (c), l'isométrie de WALSH nous conduit à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y) W(\delta s, \delta y) \right)^2 \right] d\tau d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y) W(ds, dy) \right)^2 \right] d\tau d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y)^2] dy ds \right) d\tau d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) G_1(t - s, x - y)^2 \left[\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left\{ \Sigma(s, y) D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y) \right\}^2 \right] d\tau d\xi \right] dy ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} D_{(\tau, \xi)} V_n^{t,x}(s, y) W(\delta s, \delta y) \right)^2 \right] d\tau d\xi \\ &\leq \|\sigma\|_{\text{Lip}} \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) G_1(t - s, x - y)^2 dy ds \right) \sup_{s \in [0, T]} \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y)^2] d\tau d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Cela montre le point (c), grâce à l'hypothèse technique de $(\mathcal{P}_n)$.

▷ Il reste à montrer le point (d). En plus de nous fournir le caractère dérivable de $u_{n+1}(t, x)$, la Proposition VI.4.1 nous donne l'expression suivante

$$\begin{aligned} & D_{(\tau, \xi)} u_{n+1}(t, x) \\ = & \mathbf{1}_{[0, t]}(\tau) G_1(t - \tau, x - \xi) \sigma(u_n(\tau, \xi)) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, t]}(s) G_1(t - s, x - y) \Sigma(s, y) D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y) W(ds, dy). \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant la convexité de la fonction carrée et par isométrie de WALSH

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_{n+1}(t, x)^2] d\tau d\xi \\ \leq & 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t - \tau, x - \xi)^2 \mathbb{E} [\sigma(u_n(\tau, \xi))^2] d\xi d\tau \\ & + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t - s, x - y)^2 \mathbb{E} \left[\left\{ \Sigma(s, y) D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y) \right\}^2 \right] dy ds. \end{aligned}$$

Or, puisque σ est globalement lipschitzienne, et d'après la convergence uniforme sur L^2 de $(u_n)_n$ donnée par [VI.1], il suit

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [\sigma(u_n(\tau, \xi))^2] \leq \max\{|\sigma(0)|, \|\sigma\|_{\text{Lip}}\} \left(1 + \sup_{n \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [u_n(t, x)^2] \right) < \infty.$$

On en déduit l'existence de constantes C , ne dépendant que de σ , et de T (puisque la suite $(u_n)_n$ est bornée dans L^2 par des constantes ne dépendant que de ces deux paramètres), telles que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_{n+1}(t, x)^2] d\tau d\xi \\ \leq & 2CT + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} G(t - s, x - y)^2 dy \right) \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y)^2] d\xi d\tau \right\} ds \\ \leq & C \left(1 + \int_0^t \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(s, y)^2] d\xi d\tau \right\} ds \right). \end{aligned}$$

Ainsi, si on définit

$$S_n(t) \triangleq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(t, x)^2] d\tau d\xi,$$

alors l'inégalité suivante est vérifiée

$$S_{n+1}(t) \leq C \left(1 + \int_0^t S_n(s) ds \right).$$

Puisque $S_0 = 0$, il suit que l'inégalité suivante est vraie

$$S_n(t) \leq C \sum_{k=0}^n \frac{(Ct)^k}{k!} \leq Ce^{CT}. \quad [\text{VI.2}]$$

Ainsi, on en déduit que $\sup_{t \in [0, T]} S_n(t)$ est fini, ce qui signifie précisément qu'on vient de démontrer le point (d).

• Concluons cette démonstration en montrant le point 3., c'est-à-dire montrer que presque tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$ $u(t, x) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Il s'agit d'un passage à la limite, on applique la Proposition VI.4.3. Puisque nous savons déjà que la suite $(u_n(t, x), n \geq 1)$ converge dans L^2 vers $u(t, x)$, il suffit de montrer que

$$\sup_{n \geq 1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(t, x)^2] d\xi d\tau < \infty.$$

Pour cela, il suffit de reprendre [VI.2], qui donne

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{t \in [0, T]} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(\tau, \xi)} u_n(t, x)^2] d\xi d\tau \leq Ce^{CT},$$

qui ne dépend pas de n , donc a exactement l'inégalité souhaitée. La Proposition VI.4.3 nous permet donc de conclure que $u(t, x) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Cela conclut cette démonstration. $\square$

2. Variation quadratique temporelle

Il est connu qu'à un lieu $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto u(t, x)$ est presque sûrement γ -HÖLDER, pour tout $0 < \gamma < 1/2$. Il est donc tout à fait pertinent d'étudier les variations quadratiques temporelles de cette solution.

Définition VI.2.1 : Pour $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, et $D = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{\#D-1} < t_{\#D} = T\}$ une subdivision de $[0, T]$, on appelle *variations quadratiques temporelles sur $[0, T]$ en x de u par rapport à la partition D* la suite suivante donnée pour tout $n \geq 1$ par

$$V_D(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\#D-1} \left(u(t_{i+1}, x) - u(t_i, x) \right)^2.$$

Remarque VI.2.2. Parfois, on peut appeler *variations quadratiques* plusieurs objets distincts. Ici, nous avons choisi de les définir comme la donnée d'une suite. Il est aussi possible de nommer variations quadratiques la limite de cette suite lorsque le pas de la suite des subdivisions tend vers 0. On ajoute aussi parfois l'hypothèse de subdivisions emboîtées (c'est-à-dire que $D_n \subset D_{n+1}$). De manière plus préoccupante, par exemple dans [FV10], dans la théorie des chemins rugueux, on appelle variations quadratiques d'un chemin $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sup_{\substack{D \text{ partition} \\ \text{de } [0, T] \\ D = \{0=t_0 < \dots < t_{\#D}=T\}}} \sum_{i=0}^{\#D-1} \left(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \right)^2.$$

Ces deux notions ne coïncident pas ! En effet, comme montré dans la section 13.9 du chapitre 13 de [FV10], si B est un mouvement brownien standard, alors dans le premier cas (passage à la limite), la variation quadratique de B vaut T , tandis que sur la deuxième (passage au supremum), la variation quadratique de B est infinie. ♣

Dans la suite de cette section, on fixe $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $(D_n, n \geq 1)$ une suite de subdivision de $[0, T]$ telle que

$$\delta_n \triangleq \max_{0 \leq i \leq \#D_n-1} \left(t_{i+1}^n - t_i^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On énonce le Théorème principal de ce chapitre.

Théorème VI.2.3 : Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$V_{D_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^t \left(\sigma(u(t-s, x-s))^2 + \sigma(u(t-s, x+s))^2 \right) ds dt,$$

où $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ désigne la convergence en probabilité.

Remarque VI.2.4. Si on suppose que le bruit est additif, c'est-à-dire que σ est la fonction constante égale à 1, alors cette limite est réduite à $\frac{1}{4}T^2$, ce qui avait été déjà calculé dans [AGT22]. Dans ce cas précis, il a été montré que la convergence est en fait presque sûre dans tous les L^p , avec $1 \leq p < \infty$. De plus, un Théorème Central Limite a de plus été démontré. ♣

Remarque VI.2.5. Dans le cas de l'équation de la chaleur multiplicative, la limite s'écrit $\int_0^T \sigma(u(t, x)) dt$, comme démontré dans [PT07]. L'expression que nous obtenons dans le cas des ondes est plus complexe, ce qui a un impact sur les applications possibles en estimation. Une discussion plus profonde est expliquée dans la Remarque VI.3.2. ♣

Expliquons la démarche de démonstration. On notera dans la suite $V_n(x)$ pour désigner $V_{D_n}(x)$. L'équation intégrale vérifiée par u donne pour $V_n(x)$ l'expression développée suivante

$$\begin{aligned}
V_n(x) &= \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\int_0^{t_{i+1}^n} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_i^n - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) - G_1(t_i^n - s, x - y) \right) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \\
&\quad - 2 \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) - G_1(t_i^n - s, x - y) \right) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \\
&\quad \cdot \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $V_n(x)$ se présente comme une somme de trois termes. Les deux derniers termes concernent principalement des données vivant sur l'intervalle temporel $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, dont la longueur tend vers 0 par hypothèse. Il suit que seul le premier terme donne la convergence attendue. On s'intéresse donc à montrer dans la prochaine sous-section que les termes qu'on vient de supposer petits le sont effectivement, dans le sens où les deuxième et troisième termes tendent vers 0 dans $L^1(\mathbb{P})$.

On s'intéresse ensuite au premier terme. Il se présente sous la forme $\sum_{i=0}^{\#D_n-1} \delta(v_{x,i})^2$. En utilisant la formule provenant de la Proposition VI.4.4

$$\delta(v)^2 = \delta(v\delta(v)) + \langle v, D\delta(v) \rangle,$$

et $D\delta(v) = \delta Dv + v$ provenant de la Proposition VI.4.1, le terme principal est de la forme

$$\sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\delta(\delta(v_{x,i})v_{x,i}) + \langle \delta(D_{\bullet}v_{x,i}), v_{x,i}(\bullet) \rangle_{L^2} + \|v_{x,i}\|_{L^2}^2 \right).$$

Le premier terme est une intégrale stochastique qui s'avère être une intégrale de WALSH. Par isométrie, l'espérance du carré de cette intégrale fait intervenir tous les produits scalaires entre $v_{x,i}$ et $v_{x,j}$. Or, ces fonctions sont orthogonales dans L^2 , donc on s'attend à avoir que le premier terme tend vers 0 dans L^2 . Le deuxième terme tend lui aussi vers 0 dans L^2 , non pas par orthogonalité des $v_{x,i}$, mais par leur caractère adapté. Cela aura pour conséquence d'annuler leur dérivée de MALLIAVIN sur un gros intervalle de temps, assez longtemps pour que la norme L^2 s'écrase vers 0. Ces deux convergences vers 0 dans L^2 font l'objet de la deuxième sous-section.

Reste alors à étudier le dernier terme, qui est le plus décisif. La convergence de ce terme provient fait d'une sommation de RIEMANN, puisque le support de $v_{x,i}$ est $[t_i^n, t_{i+1}^n]$. Il s'agit d'une convergence presque sûre. C'est cette convergence qui nous fait conclure sur la convergence plus faible en probabilité dans l'énoncé du Théorème. Cette convergence presque sûre est l'objet de la dernière sous-section avant la démonstration de ce Théorème.

2.1. Convergence en moyenne des termes avec des petits intervalles temporels

Lemme VI.2.6 : Soit $D = \{0 = t_0 < \dots < t_{\sharp D-1} < t_{\sharp D} = T\}$ une partition de $[0, T]$, de pas δ . Alors il existe une constante $K_{\sigma, T} > 0$, donnée par [VI.3] telle que

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} (G_1(t_{i+1} - s, x - y) - G_1(t_i - s, x - y)) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \cdot \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1} - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \right| \right] \leq \frac{K_{\sigma, T} T^{3/2}}{8} \sqrt{\delta}$$

et

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1} - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \right| \right] \leq \frac{K_{\sigma, T}}{4} T \delta.$$

Démonstration : Débutons par la deuxième inégalité. Par isométrie de WALSH

$$\begin{aligned} E_2 &\triangleq \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1} - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1} - s, x - y)^2 \mathbb{E} [\sigma(u(s, y))^2] dy ds. \end{aligned}$$

Or, puisque σ est lipschitzienne et u bornée dans L^2 ,

$$K_{\sigma, T} \triangleq \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [\sigma(u(s, y))^2] < \infty, \quad [\text{VI.3}]$$

si bien que

$$\begin{aligned} E_2 &\leq K_{\sigma, T} \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1} - s, x - y)^2 dy ds = \frac{K_{\sigma, T}}{2} \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s) ds \\ &= \frac{K_{\sigma, T}}{4} \sum_{i=0}^{\sharp D-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq \frac{K_{\sigma, T}}{4} \delta T, \end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième inégalité. Pour la première, l'inégalité triangulaire et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P})$ donnent

$$\begin{aligned} E_1 &\triangleq \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} (G_1(t_{i+1} - s, x - y) - G_1(t_i - s, x - y)) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \cdot \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1} - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \right| \right] \\ &\leq \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} (G_1(t_{i+1} - s, x - y) - G_1(t_i - s, x - y)) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1} - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Par isométrie de WALSH,

$$\begin{aligned}
 E_1 &\leq \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1}-s, x-y) - G_1(t_i-s, x-y) \right)^2 \mathbb{E} \left[\sigma(u(s, y))^2 \right] ds dy \right)^{1/2} \\
 &\quad \cdot \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1}-s, x-y)^2 \mathbb{E} \left[\sigma(u(s, y))^2 \right] dy ds \right)^{1/2} \\
 &\leq K_{\sigma, T} \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1}-s, x-y) - G_1(t_i-s, x-y) \right)^2 ds dy \right)^{1/2} \\
 &\quad \cdot \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1}-s, x-y)^2 dy ds \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, en calculant les intégrales, on a alors

$$\begin{aligned}
 E_1 &\leq \frac{K_{\sigma, T}}{4} \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(\int_0^{t_i} (t_{i+1} - t_i) ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s) ds \right)^{1/2} \\
 &= \frac{K_{\sigma, T}}{8} \sum_{i=0}^{\sharp D-1} (t_i(t_{i+1} - t_i))^{1/2} (t_{i+1} - t_i) \leq \frac{K_{\sigma, T} T^{3/2} \delta^{1/2}}{8}.
 \end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration de ce Lemme. □

2.2. Convergence quadratique provenant de l'orthogonalité

Lemme VI.2.7 : Soit $D = \{0 = t_0 < \dots < t_{\sharp D-1} < t_{\sharp D} = T\}$ une subdivision de $[0, T]$, de pas δ . Si on note pour $0 \leq i \leq \sharp D - 1$, $t \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$

$$v_{x, D, i}(t, y) \triangleq \mathbf{1}_{[0, t_i]}(t) \left(G_1(t_{i+1} - t, x - y) - G_1(t_i - t, x - y) \right) \sigma(u(t, y)), \quad \text{[VI.4]}$$

alors il existe $C > 0$ dépendant de σ et T telle que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x, D, i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x, D, i}(t, y) W(\delta t, \delta y) \right)^2 \right] \leq C \sqrt{\delta}.$$

Remarque VI.2.8. Dans la suite des démonstrations des Lemmes, nous noterons uniquement $v_{x, i}$ au lieu de $v_{x, D, i}$. ♣

Démonstration : Notons E la quantité étudiée. On cherche à utiliser l'isométrie de WALSH. Par une relation de CHASLES, valable pour une intégrale de ce type

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x, i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x, i}(t, y) W(\delta t, \delta y) \\
 &= \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x, i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x, i}(t, y) W(dt, dy) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_t^T \int_{\mathbb{R}} v_{x, i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x, i}(t, y) W(\delta t, \delta y).
 \end{aligned} \quad \text{[VI.5]}$$

Remarquer le passage à une intégrale de WALSH pour le premier terme. Pour le deuxième terme, on applique une permutation d'intégrales de SKOROHOD comme suit (on doit faire attention au fait que si $u \in \text{Dom}(\delta)$, rien n'indique

que $u\mathbf{1}_{[0,t]}$ l'est encore, alors que cela est vrai pour l'intégrale de WALSH).

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_t^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,i}(t, y) W(\delta t, \delta y) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[t,T]}(s) v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) W(ds, dz) \right) W(\delta t, \delta y) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[t,T]}(s) v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) W(\delta s, \delta z) \right) W(\delta t, \delta y).
\end{aligned}$$

On permute les intégrales

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_t^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,i}(t, y) W(\delta t, \delta y) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,s]}(t) v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) W(\delta t, \delta y) \right) W(\delta s, \delta z) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,s]}(t) v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) W(dt, dy) \right) W(\delta s, \delta z) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,s]}(t) v_{x,i}(t, y) W(dt, dy) \right) v_{x,i}(s, z) W(\delta s, \delta z).
\end{aligned}$$

Conclusion : il s'agit de la même intégrale que celle qui apparaît dans le premier terme de [VI.5]. D'où

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,i}(t, y) W(\delta t, \delta y) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,i}(t, y) W(dt, dy).
\end{aligned}$$

On peut utiliser l'isométrie de WALSH pour conclure. Cela donne

$$\begin{aligned}
E &= 4\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,i}(t, y) W(dt, dy) \right)^2 \right] \\
&= 4 \sum_{i,j=1}^{\sharp D-1} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,i}(t, y) W(dt, dy) \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,j}(s, y) W(ds, dz) \right) v_{x,j}(t, y) W(dt, dy) \right) \right] \\
&= 4 \sum_{i,j=1}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[v_{x,i}(t, y) v_{x,j}(t, z) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,j}(s, z) W(ds, dz) \right) \right] dy dt.
\end{aligned}$$

Or, pour $i \neq j$, on a pour presque tout $t \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$

$$v_{x,i}(t, y) v_{x,j}(t, y) = 0.$$

Ainsi, pas mal de termes se simplifient et il reste

$$E = 4 \sum_{i=1}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[v_{x,i}(t, y)^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right)^2 \right] dy dt.$$

Puis, en utilisant la définition de $v_{x,i}$

$$\begin{aligned}
E &= 4 \sum_{i=1}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1} - t, x - y) - G_1(t_i - t, x - y) \right)^2 \\
&\quad \mathbb{E} \left[\sigma(u(t, y))^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s, z) W(ds, dz) \right)^2 \right] dy dt.
\end{aligned}$$

Or, avec

$$K'_{\sigma,T} \triangleq \sup_{t \in [0,T]} \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [\sigma(u(t,x))^4],$$

l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ nous donne pour $t \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} \left[\sigma(u(t,y))^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s,z) W(ds, dz) \right)^2 \right] \leq K'_{\sigma,T}{}^{1/4} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s,z) W(ds, dz) \right)^4 \right]^{1/2}.$$

De plus, par inégalité de BURKHOLDER–DAVIS–GUNDY, il existe une constante $C > 0$ dépendant de T et σ telle que

$$\mathbb{E} \left[\sigma(u(t,y))^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s,z) W(ds, dz) \right)^2 \right] \leq C K'_{\sigma,T}{}^{1/4} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s,z)^2 dz ds \right)^2 \right]^{1/2}.$$

La constante C qui apparaîtra dans les prochaines lignes changera à chaque fois, mais ne dépend que σ et T . En reprenant la définition de $v_{x,i}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sigma(u(t,y))^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s,z) W(ds, dz) \right)^2 \right] \\ \leq C \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1} - t, x - y) - G_1(t_i - t, x - y) \right)^2 \sigma(u(s,z))^2 dz ds \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Par une inégalité de CAUCHY–SCHWARZ pour l'intégrale double,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sigma(u(t,y))^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s,z) W(ds, dz) \right)^2 \right] \\ \leq C \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1} - t, x - y) - G_1(t_i - t, x - y) \right)^4 \mathbb{E} [\sigma(u(s,z))^4] dz ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En bornant le moment d'ordre 4 de $\sigma(u(s,z))$, on finit avec

$$\mathbb{E} \left[\sigma(u(t,y))^2 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}(s,z) W(ds, dz) \right)^2 \right] \leq C \left(\int_0^t (t_{i+1} - t_i) dz ds \right)^{1/2} = C(t_{i+1} - t_i)^{1/2}.$$

D'où

$$E \leq C \sum_{i=1}^{\sharp D-1} (t_{i+1} - t_i)^{1/2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1} - t, x - y) - G_1(t_i - t, x - y) \right)^2 dy dt = C \sum_{i=1}^{\sharp D-1} (t_{i+1} - t_i)^{3/2}.$$

D'où $E \leq C\sqrt{\delta}$. □

2.3. Convergence quadratique provenant de l'adaptabilité

Lemme VI.2.9 : Soit $D = \{0 = t_0 < \dots < t_{\sharp D} = T\}$ une subdivision de $[0, T]$ de pas δ . Pour $0 \leq i \leq \sharp D - 1$, on définit $v_{x,D,i}$ par [VI.4]. Alors il existe une constante C dépendant de σ et T telle que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\sharp D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t,y)} v_{x,D,i}(s,z) W(\delta s, \delta z) \right) v_{x,D,i}(t,y) dy dt \right)^2 \right] \leq C\delta^{3/2}.$$

Démonstration : Commençons par constater que $v_{x,i}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, donc que pour presque tout $t > s$ et $y, z \in \mathbb{R}$, $D_{(t,y)} u(s, y) = 0$. De plus, la dérivée de MALLIAVIN de $v_{x,i}(s, z)$ est donnée par

$$D_{(t,y)} v_{x,i}(s, z) = \mathbf{1}_{[0, t_i]}(s) \left(G_1(t_{i+1} - s, x - z) - G_1(t_i - s, x - z) \right) \Sigma(s, y) D_{(t,y)} u(s, z),$$

où $(\Sigma(s, z), s \in [0, T], z \in \mathbb{R})$ est un processus adapté et borné par $\|\sigma\|_{\text{Lip}}$. Par conséquent, pour presque tout $t \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$, le processus $(D_{(t,y)}u(s, y), s \in [0, T], y \in \mathbb{R})$ est adapté, si bien que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t,y)}v_{x,i}(s, z) W(\delta s, \delta z) \right) v_{x,i}(t, y) dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t,y)}v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) W(ds, dz) \right) dy dt. \end{aligned}$$

Développons le carré de cette expression.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)}v_{x,i}) v_{x,i}(t, y) dy dt \right)^2 &= \sum_{i,j=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t,y)}v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) W(ds, dz) \right) \\ &\quad \cdot \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t',y')}v_{x,j}(s, z) v_{x,j}(t', y') W(ds, dz) \right) dy' dt' dy dt. \end{aligned}$$

Et prenons son espérance

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)}v_{x,i}) v_{x,i}(t, y) dy dt \right)^2 \right] &= \sum_{i,j=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} dy' dt' dy dt \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t,y)}v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) W(ds, dz) \right) \cdot \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t',y')}v_{x,j}(s, z) v_{x,j}(t', y') W(ds, dz) \right) \right]. \end{aligned}$$

Par isométrie de WALSH, cela donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)}v_{x,i}) v_{x,i}(t, y) dy dt \right)^2 \right] &= \sum_{i,j=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} dy' dt' dy dt \\ &\quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [D_{(t,y)}v_{x,i}(s, z) v_{x,i}(t, y) D_{(t',y')}v_{x,j}(s, z) v_{x,j}(t', y')] dz ds. \end{aligned}$$

On reconnaît un produit scalaire de dérivées.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)}v_{x,i}) v_{x,i}(t, y) dy dt \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i,j=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\langle D_{(t,y)}v_{x,i}, D_{(t',y')}v_{x,j} \rangle_{L^2} v_{x,i}(t, y) v_{x,j}(t', y') \right] dy' dt' dy dt. \end{aligned}$$

Constatons alors que pour presque tout (t, y) , le support de $(s, z) \mapsto D_{(t,y)}v_{x,i}(s, z)$ est le même que celui de $v_{x,i}$, donc puisque $v_{x,i}(s, z)v_{x,j}(s, z) = 0$ pour $i \neq j$, on en déduit que pour presque tout (t, y) ,

$$\forall i \neq j, \quad \langle D_{(t,y)}v_{x,i}, D_{(t',y')}v_{x,j} \rangle_{L^2} = 0.$$

On en est donc réduit à

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)}v_{x,i}) v_{x,i}(t, y) dy dt \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\langle D_{(t,y)}v_{x,i}, D_{(t',y')}v_{x,i} \rangle_{L^2} v_{x,i}(t, y) v_{x,i}(t', y') \right] dy' dt' dy dt. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $L^2(\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)}v_{x,i}) v_{x,i}(t, y) dy dt \right)^2 \right] \\ &\leq \sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\|D_{(t,y)}v_{x,i}\|_{L^2}^2 v_{x,i}(t, y)^2 \right]^{1/2} \mathbb{E} \left[\|D_{(t',y')}v_{x,i}\|_{L^2}^2 v_{x,i}(t', y')^2 \right]^{1/2} dy' dt' dy dt. \end{aligned}$$

Soit encore, en regroupant les intégrales

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)} v_{x,i}) v_{x,i}(t,y) dy dt \right)^2 \right] \leq \sum_{i=0}^{\#D-1} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [\|D_{(t,y)} v_{x,i}\|_{L^2}^2 v_{x,i}(t,y)^2]^{1/2} dy dt \right)^2.$$

On applique de nouveau l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P})$ cette fois-ci

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)} v_{x,i}) v_{x,i}(t,y) dy dt \right)^2 \right] \\ \leq \sum_{i=0}^{\#D-1} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [\|D_{(t,y)} v_{x,i}\|_{L^2}^4]^{1/4} \mathbb{E} [v_{x,i}(t,y)^2]^{1/4} dy dt \right)^2. \end{aligned}$$

Par l'expression de la dérivée de $v_{x,i}$ donnée en début de démonstration, pour $t \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E} [\|D_{(t,y)} v_{x,i}\|_{L^2}^4] = \int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1} - s, x - z) - G_1(t_i - s, x - z) \right)^4 \mathbb{E} [\Sigma(s, z)^4 D_{(t,y)} u(s, z)^4] dz ds.$$

Or, d'après le Lemme 2.2 de [DNZ20] (qui est aussi le Lemme VIII.1.4 du Chapitre A), l'estimée suivante est valable pour presque tous t, y, s, z , avec C dépendant de T et σ :

$$\mathbb{E} [D_{(t,y)} u(s, z)^4]^{1/4} \leq C G_1(t - s, y - z).$$

On en déduit l'existence de C dépendant de T et σ telle que

$$\mathbb{E} [\|D_{(t,y)} v_{x,i}\|_{L^2}^4] \leq C \int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1} - s, x - z) - G_1(t_i - s, x - z) \right)^4 G_1(t - s, y - z)^4 dz ds.$$

On majore $G_1(t - s, y - z)^4$ par sa borne supérieure, qui est égale à $\frac{1}{2^4}$, et on calcule l'intégrale des différences des fonctions de GREEN, ce qui donne

$$\mathbb{E} [\|D_{(t,y)} v_{x,i}\|_{L^2}^4] \leq C \int_0^{t_i} (t_{i+1} - t_i) ds \leq C(t_{i+1} - t_i).$$

On en déduit

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)} v_{x,i}) v_{x,i}(t,y) dy dt \right)^2 \right] \leq C \sum_{i=0}^{\#D-1} (t_{i+1} - t_i)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [v_{x,i}(t,y)^2]^{1/4} dy dt \right)^2$$

Enfin, l'expression de $v_{x,i}(t,y)$ donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)} v_{x,i}) v_{x,i}(t,y) dy dt \right)^2 \right] \\ \leq C \sum_{i=0}^{\#D-1} (t_{i+1} - t_i)^{1/2} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1} - s, x - z) - G_1(t_i - s, x - z) \right)^{1/2} \mathbb{E} [\sigma(u(s,y))^2]^{1/4} dy dt \right)^2. \end{aligned}$$

L'espérance de $\sigma(u(s,y))$ est bornée, puisque σ est lipschitzienne et u bornée dans L^4 . On en conclut alors en calculant l'intégrale des fonctions de GREEN que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\#D-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \delta(D_{(t,y)} v_{x,i}) v_{x,i}(t,y) dy dt \right)^2 \right] \leq C \sum_{i=0}^{\#D-1} (t_{i+1} - t_i)^{1/2+2} \leq C\delta^{3/2}.$$

Cela conclut cette démonstration. □

2.4. Convergence du terme principal

Lemme VI.2.10 : Soit $(D_n = \{0 = t_0^n < \dots < t_{\#D_n}^n = T\}, n \geq 1)$ une suite de subdivisions de $[0, T]$ de pas δ_n convergeant vers 0. Pour $0 \leq i \leq \#D_n - 1$, on définit $v_{x,D_n,i}$ par [VI.4] (avec $t_i = t_i^n$). Alors

$$\sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,D_n,i}(t, y)^2 dy dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-p.s.}} \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^t (\sigma(u(t-s, x-s))^2 + \sigma(u(t-s, x+s))^2) ds dt.$$

Remarque VI.2.11. Dans cette démonstration, on notera $v_{x,i}^n$ pour désigner $v_{x,D_n,i}$. ♣

Démonstration : Notons $A_n = \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,i}^n(t, y)^2 dy dt$. En explicitant l'expression de G_1 , voici l'expression explicite de A_n qu'on étudie

$$A_n = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{t_i^n - t < |x-y| < t_{i+1}^n - t\}} \sigma(u(t, y))^2 dy dt.$$

Un changement de variables donne

$$A_n = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{s < |z| < s + \Delta t_i^n\}} \sigma(u(t_i^n - s, x - z))^2 dz ds,$$

où $\Delta t_i^n = t_{i+1}^n - t_i^n \leq \delta_n$. On fait apparaître des taux d'accroissement

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \Delta t_i^n \int_0^{t_i^n} \left[\frac{1}{\Delta t_i^n} \int_s^{s+\Delta t_i^n} \sigma(u(t_i^n - s, x - z))^2 dz \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \Delta t_i^n \int_0^{t_i^n} \left[\frac{1}{\Delta t_i^n} \int_{-(s+\Delta t_i^n)}^{-s} \sigma(u(t_i^n - s, x - z))^2 dz \right] ds. \end{aligned}$$

Il se passe alors deux phénomènes de convergence simultanée. D'abord, au sein de la somme,

$$f_{-,n}(s) \triangleq \frac{1}{\Delta t_i^n} \int_s^{s+\Delta t_i^n} \sigma(u(t_i^n - s, x - z))^2 dz$$

et son jumeau $f_{+,n}$ dans la somme suivante définissent des suites de fonctions qui se rapprochent presque sûrement, lorsque n tend vers ∞ , vers $\sigma(u(t_i^n - s, x - s))^2$ pour le premier et $\sigma(u(t_i^n - s, x + s))^2$ pour le deuxième (mais la présence de t_i^n nous empêche de parler de convergence). Le deuxième phénomène est une convergence de somme de RIEMANN, en observant que

$$\sum_{i=0}^{\#D_n-1} \Delta t_i^n \int_0^{t_i^n} f_{\pm,n}(s) ds \approx \int_0^T \left(\int_0^t f_{\pm,n}(s) ds \right) dt.$$

Encore une fois, la présence du n dans $f_{\pm,n}$ empêche de parler de convergence (sans parler de la dépendance en i que nous avons caché par souci de simplicité de présentation). La simultanéité de ces phénomènes nous font deviner la limite annoncée dans l'énoncé du Lemme.

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq \#D_n - 1$, notons

$$F_{i,n}(t) \triangleq \int_0^t \left(\frac{1}{\Delta t_i^n} \int_s^{s+\Delta t_i^n} \sigma(u(t-s, x-z))^2 dz + \frac{1}{\Delta t_i^n} \int_{-(s+\Delta t_i^n)}^{-s} \sigma(u(t-s, x-z))^2 dz \right) ds,$$

de sorte que $A_n = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \Delta t_i^n F_{i,n}(t_i^n)$. Or, pour presque $s \in [0, T]$, on a $\mathbb{P}$ -presque sûrement

$$\left| \frac{1}{\Delta t_i^n} \int_s^{s+\Delta t_i^n} \sigma(u(t-s, x-z))^2 dz \right| \leq \sup_{s \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \sigma(u(t-s, x-z))^2,$$

si bien que par convergence dominée,

$$F_{i,n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-p.s.}} \int_0^t (\sigma(u(t-s, x-s))^2 + \sigma(u(t-s, x+s))^2) ds \triangleq G(t).$$

De plus,

$$A_n = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \Delta t_i^n G(t_i^n) + \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \Delta t_i^n \left(F_{i,n}(t_i^n) - G(t_i^n) \right).$$

Le premier terme est la somme de RIEMANN escomptée, donnant la limite annoncée dans l'énoncé. On s'attend à ce que le deuxième terme tende vers 0. Il suffit pour cela de montrer que

$$\sup_{0 \leq i \leq \#D_n} \sup_{t \in [0, T]} |F_{i,n}(t) - G(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour cela, on se donne $\varepsilon > 0$ et une fonction $\psi^\varepsilon : [0, T] \times [0, 2T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} |\psi^\varepsilon(t, x - z) - \sigma(u(t, x - z))^2| \leq \varepsilon.$$

Une telle fonction existe puisque $(t, z) \mapsto \sigma(u(t, x - z))^2$ est continue sur le compact $[0, T] \times [0, 2T]$ (en convolant avec une approximation de l'unité par exemple). Avec cette fonction, on introduit les approximations à ε près des quantités en jeu :

$$F_{i,n}^\varepsilon(t) \triangleq \int_0^t \left(\frac{1}{\Delta t_i^n} \int_s^{s+\Delta t_i^n} \psi^\varepsilon(t-s, x-z) dz + \frac{1}{\Delta t_i^n} \int_{-(s+\Delta t_i^n)}^{-s} \psi^\varepsilon(t-s, x-z) dz \right) ds$$

et

$$G^\varepsilon(t) \triangleq \int_0^t \left(\psi^\varepsilon(t-s, x-s) + \psi^\varepsilon(t-s, x+s) \right) ds.$$

Ainsi, pour $0 \leq i \leq \#D_n - 1$ et $t \in [0, T]$

$$|F_{i,n}(t) - G(t)| \leq |F_{i,n}(t) - F_{i,n}^\varepsilon(t)| + |F_{i,n}^\varepsilon(t) - G^\varepsilon(t)| + |G^\varepsilon(t) - G(t)|.$$

Alors, on dispose des inégalités suivantes pour les termes de bord :

$$\max \left\{ |F_{i,n}(t) - F_{i,n}^\varepsilon(t)|, |G^\varepsilon(t) - G(t)| \right\} \leq 2T\varepsilon.$$

Étudions finalement le terme central. Pour cela, la formule de TAYLOR-LAGRANGE nous donne pour $s \in [0, T]$ et $z \in [0, 2T]$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Delta t_i^n} \int_s^{s+\Delta t_i^n} \psi^\varepsilon(t-s, x-z) dz - \psi^\varepsilon(t-s, x-s) \right| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \left| \partial_2 \psi^\varepsilon(t, x-z) \right| \cdot \frac{1}{\Delta t_i^n} \int_s^{s+\Delta t_i^n} |z-s| dz \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \left| \partial_2 \psi^\varepsilon(t, x-z) \right| \cdot \frac{(\Delta t_i^n)^2}{2\Delta t_i^n} \\ &\leq \frac{\delta_n}{2} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \left| \partial_2 \psi^\varepsilon(t, x-z) \right|, \end{aligned}$$

où $\partial_2 \psi^\varepsilon$ désigne la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable. Ainsi,

$$\left| F_{i,n}^\varepsilon(t) - G^\varepsilon(t) \right| \leq T \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \left| \partial_2 \psi^\varepsilon(t, x-z) \right| \cdot \delta_n.$$

On fait le bilan :

$$\left| F_{i,n}(t) - G(t) \right| \leq 2\varepsilon + T \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \left| \partial_2 \psi^\varepsilon(t, x-z) \right| \cdot \delta_n,$$

d'où

$$\sup_{0 \leq i \leq \#D_n} \sup_{t \in [0, T]} \left| F_{i,n}(t) - G(t) \right| \leq 2\varepsilon + T \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \left| \partial_2 \psi^\varepsilon(t, x-z) \right| \cdot \delta_n.$$

Fixons $\eta > 0$, et considérons $\varepsilon = \frac{\eta}{4}$. Alors, puisque δ_n tend vers 0, il existe un rang $N \geq 1$ à partir duquel pour $n \geq N$,

$$T \sup_{t \in [0, T]} \sup_{z \in [0, 2T]} \left| \partial_2 \psi^\varepsilon(t, x-z) \right| \cdot \delta_n \leq \frac{\eta}{2}.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a bien

$$\sup_{0 \leq i \leq \#D_n} \sup_{t \in [0, T]} \left| F_{i,n}(t) - G(t) \right| \leq \eta,$$

d'où la convergence vers 0 souhaitée. On en déduit donc que

$$\left| A_n - \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \Delta t_i^n G(t_i^n) \right| \leq \frac{T}{4} \sup_{0 \leq i \leq \#D_n} \sup_{t \in [0, T]} |F_{i,n}(t) - G(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-p.s.}} 0.$$

Cela conclut cette démonstration. $\square$

2.5. Démonstration du Théorème VI.2.3

Démonstration du Théorème VI.2.3 : Comme expliqué en préambule de cette section, nous avons l'expression suivante pour $V_n(x)$.

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) - G_1(t_i^n - s, x - y) \right) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\int_0^{t_i^n} \int_{\mathbb{R}} \left(G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) - G_1(t_i^n - s, x - y) \right) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \\ &\quad \cdot \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \int_{\mathbb{R}} G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \right)^2 \\ &\triangleq A + B + C. \end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme VI.2.6, les termes B et C vérifient

$$\mathbb{E}[|B|] \leq C\delta_n^{1/2} \text{ et } \mathbb{E}[|C|] \leq C\delta_n,$$

où ici et dans la suite, C désigne une constante ne dépendant que T et σ . Il suit que ces termes tendent vers 0 dans L^1 . Quand au terme A, il s'interprète comme

$$A = \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \delta(v_{x,D_n,i})^2,$$

avec, rappelons-le

$$v_{x,D_n,i}(s, y) \triangleq \mathbf{1}_{[0, t_i^n]}(t) \left(G_1(t_{i+1}^n - s, x - y) - G_1(t_i^n - t, x - y) \right) \sigma(u(s, y)).$$

D'après la Proposition VI.4.4, on a alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,D_n,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,D_n,i}(t, y) W(\delta t, \delta y) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t,y)} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,D_n,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,D_n,i}(t, y) dy dt \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

D'après le Lemme VI.2.7, on a alors

$$\mathbb{E}[A_1^2] \leq C\sqrt{\delta_n}.$$

On en déduit que ce terme tend vers 0 dans L^2 . Quand à A_2 , la Proposition VI.4.1 nous donne

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} D_{(t,y)} v_{x,D_n,i}(s, z) W(ds, dz) \right) v_{x,D_n,i}(t, y) dy dt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\#D_n-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{x,D_n,i}(t, y)^2 dy dt \\ &= A_2' + AA. \end{aligned}$$

D'après le Lemme VI.2.9, le terme A'_2 vérifie

$$\mathbb{E} [A'_2{}^2] \leq C\delta_n^{3/2}.$$

On en déduit sa convergence vers 0 dans L^2 . Quand au terme AA , il s'agit du terme principal traité dans le Lemme VI.2.10, et ce terme vérifie

$$AA \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-p.s.}} \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^t \left(\sigma(u(t-s, x-s))^2 + \sigma(u(t-s, x+s))^2 \right) ds dt.$$

Ainsi, nous avons montré que

$$V_n(x) = A_1 + A'_2 + AA + B + C.$$

Les termes autres que AA convergent dans L^1 vers 0, et AA converge presque sûrement. On en déduit la convergence en probabilité de $V_n(x)$ vers la limite annoncée. $\square$

3. Application à l'estimation du paramètre de diffusion

Pour $\gamma > 0$, qu'on nommera dans la suite *paramètre de diffusion*, on s'intéresse à l'équation des ondes suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x^2}(t, x) + \gamma \sigma(u_\gamma(t, x)) \dot{W}(t, x) & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u_\gamma(t=0, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}(t=0, x) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les hypothèses sur W et σ sont les mêmes. Nous allons introduire un estimateur de γ à partir d'observations de u_γ , à des temps discrets, et continûment en espace. On utilise pour cela les variations quadratiques : pour $T > 0$, pour D une subdivision de $[0, T]$ de pas δ et $x \in \mathbb{R}$ fixé

$$V_D^\gamma(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \left(u_\gamma(t_{i+1}, x) - u_\gamma(t_i, x) \right)^2,$$

où $D = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{\sharp D-1} < t_{\sharp D} = T\}$. D'après nos investigations précédentes, c'est-à-dire le Théorème VI.2.3,

$$V_D^\gamma(x) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{\mathbb{P}} \frac{\gamma^2}{4} \int_0^T \int_0^t \left(\sigma(u_\gamma(t-s, x-s))^2 + \sigma(u_\gamma(t-s, x+s))^2 \right) ds dt.$$

Nous voyons donc ici l'opportunité de définir un estimateur consistant du paramètre γ , à partir des observations $(u_\gamma(t_i, x), 0 \leq i \leq \sharp D - 1, x \in \mathbb{R})$. On suppose que la fonction σ est connue, seul le paramètre γ est inconnu. Pour $x \in \mathbb{R}$, $t, s \in [0, T]$, on définit pour $s < t$

$$f(x, t, s) \triangleq \sigma(u_\gamma(t-s, x-s))^2 + \sigma(u_\gamma(t-s, x+s))^2$$

et pour $s > t$, $f(x, t, s) = 2\sigma(0)^2$. Notez que f est continue puisque $u(t=0, x) = 0$. L'idée est la suivante :

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{4V_D^\gamma(x)}{\int_0^T \int_0^t f(t, s, x) ds dt}},$$

avec $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ à choisir. On approche l'intégrale double par des sommes discrètes pour rendre cette estimation calculable. Pour D une partition, et $t \in [0, T]$, on note $\pi_D(t)$ l'élément de D inférieur ou égal à t qui en soit le plus proche. Une approximation classique de RIEMANN donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t f(t, s, x) ds dt &\approx \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \Delta t_i \int_0^{t_i} f(t_i, s, x) ds \\ &\approx \sum_{i=0}^{\sharp D-1} \Delta t_i \sum_{j=0}^{i-1} \Delta t_j f(t_i, t_j, x). \end{aligned}$$

On définit alors l'estimateur suivant

$$\hat{\gamma}_D(x) \triangleq \sqrt{\frac{4}{\sum_{i=0}^{D-1} \Delta t_i \sum_{j=0}^{i-1} \Delta t_j f(t_i, t_j, x)} \sum_{i=0}^{D-1} \left(u_\gamma(t_{i+1}, x) - u_\gamma(t_i, x) \right)^2}.$$

La conséquence majeure du Théorème VI.2.3 est la suivante.

Corollaire VI.3.1 : *L'estimateur $\hat{\gamma}_D$ est consistant : c'est-à-dire que $\hat{\gamma}_D$ converge en probabilité vers γ lorsque le pas de D tend vers 0.*

Remarque VI.3.2. Dans le cas de l'équation de la chaleur stochastique, les variations quadratiques permettent aussi une estimation de ce paramètre de diffusion. Elles permettent aussi d'estimer un paramètre de dérive : c'est-à-dire le paramètre $\theta > 0$ pour l'équation

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}(t, x) = \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(t, x) + \dot{W}(t, x),$$

où W est le même, et on suppose $u(t = 0, x) = 0$. On peut faire de même en remplaçant le laplacien par un laplacien fractionnaire. Regarder [PT07] ou [GT23]. Hélas, cette idée ne peut pas fonctionner dans le cas des ondes, de nouvelles idées sont nécessaires pour répondre à cette problématique d'estimation de paramètre de dérive. ♣

4. Quelques résultats liés au calcul de Malliavin

On écrit ici des résultats liés au calcul de MALLIAVIN que nous n'avons pas évoqué dans le Chapitre I, dans un but d'éviter d'alourdir ce chapitre déjà assez complet.

La première proposition évoque une condition sur un processus u pour que $\delta(u)$ soit dérivable.

Proposition VI.4.1 : *Soit $(V(s, y), s \geq 0, y \in \mathbb{R})$ un processus stochastique. On suppose les trois conditions suivantes.*

1. *Pour presque tous $s \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $V(s, y) \in \mathbb{D}^{1,2}$;*
2. *Pour presque tous $\tau \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, le processus $(D_{(\tau, \xi)} V(s, y), s \geq 0, y \in \mathbb{R})$ est intégrable au sens de SKOROHOD ;*
3. *L'inégalité suivante est vérifiée*

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} D_{(\tau, \xi)} V(s, y) W(\delta s, \delta y) \right)^2 \right] d\tau d\xi < \infty.$$

Alors $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} V(s, y) W(\delta s, \delta y) \in \mathbb{D}^{1,2}$ avec de plus pour presque tous $\tau \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$

$$D_{\tau, \xi} \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} V(s, y) W(\delta s, \delta y) \right) = V(\tau, \xi) + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} D_{(\tau, \xi)} V(s, y) W(\delta s, \delta y).$$

Remarque VI.4.2. Le fait que pour presque tout $s \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $V(s, y) \in \mathbb{D}^{1,2}$ implique directement que $V \in \text{Dom}(\delta)$. Regarder la Proposition 1.3.13 de [Nua06]. ♣

La deuxième Proposition nous donne une condition suffisante pour qu'une suite de $\mathbb{D}^{1,2}$ convergente dans L^2 admette une limite dans $\mathbb{D}^{1,2}$.

Proposition VI.4.3 : *Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires L^2 telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \mathbb{D}^{1,2}$ et X_n converge dans L^2 vers X . Si*

$$\sup_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(D_{(\tau, \xi)} X_n \right)^2 \right] d\xi d\tau < \infty,$$

alors $X \in \mathbb{D}^{1,2}$.

La dernière Proposition exprime ce qu'est l'intégrale de SKOROHOD de F , une variable, multipliée par u un processus. En particulier, on ne peut pas simplement factoriser par F .

Proposition VI.4.4 : *Soit $(u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ un processus stochastique tel que $u \in \text{Dom}(\delta)$. Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors $Fu \in \text{Dom}(\delta)$ et*

$$F \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) W(\delta t, \delta x) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} Fu(t, x) W(\delta t, \delta x) + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} D_{(t,x)} F u(t, x) dx dt.$$

On peut résumer cette formule : $F\delta(u) = \delta(Fu) + \langle DF, u \rangle$.

Troisième partie

Méthode de Nourdin–Peccati indépendante

Méthode de Nourdin–Peccati pour les lois normales unidimensionnelles

« Forgive me, you ignorant fuck, but sarcasm is all I've fucking got! Sarcasm, and a room full of you cunts! »

Michael à Trevor, *Grand Theft Auto V*,
2013

Ce chapitre reprend les éléments principaux développés dans [Tud23], publié en 2024.

RÉSUMÉ

Soient X une variable aléatoire réelle et $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire réel de $\mathbb{R}^p$. On développe une théorie de NOURDIN–PECCATI dite *indépendante* qui va nous permettre d'évaluer la distance de WASSERSTEIN entre la loi du couple $(X, \mathbf{Y})$ et $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})$, avec $\sigma^2 > 0$. On se concentre en particulier dans le cas où X et $\mathbf{Y}$ sont dans des chaos de WIENER et on donne une version asymptotique de ce résultat. Dans ce contexte, on aboutit à des résultats inattendus, et rapides à étudier, puisqu'on montre que sous une condition de décorrélation asymptotique, on aboutit en fait à un Théorème Limite qu'on interprète comme une indépendance asymptotique.

Comme nous l'avons longuement détaillé en Chapitre II, la méthode de STEIN permet de donner une estimation entre la loi d'une variable aléatoire réelle et une loi normale. Pour cela, on part d'un lemme, dit de STEIN, qui donne une caractérisation fonctionnelle de la loi normale. À partir de celle-ci, on dispose d'une équation différentielle ordinaire, qui ne permet d'exprimer les quantités fonctionnelles dans la définition des distances en jeu qu'en fonction de la variable d'intérêt. Si de plus, on ajoute une hypothèse de dérivabilité, on aboutit aux résultats du chapitre III, principalement au Théorème du Quatrième Moment.

Dans ce chapitre, on propose de travailler avec une variante de cette méthode, développée d'abord par Leandro PIMENTEL dans [Pim22]. Cette fois-ci, au lieu de considérer une variable aléatoire, on considère un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) . Le Lemme de STEIN sous-jacent, qu'on nommera Lemme de STEIN indépendant, exprime que le couple (X, Y) suit $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbb{P}_Y$, avec $\mathbb{P}_Y$ la loi de Y sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour toute fonction test $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dispose de la formule d'intégration par parties

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) \right] = \mathbb{E}[X f(X, Y)].$$

À partir de là, on pourra donner une équation de STEIN, qui sera une équation aux dérivées partielles, et étudier les solutions de cette équation afin de donner une borne pour des distances entre (X, Y) et $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbb{P}_Y$. On présentera le résultat pour un second membre Y qui sera un vecteur aléatoire (qu'on notera alors $\mathbf{Y}$). C'est l'objet du Théorème VII.1.3.

Dans la suite, on combinera ce résultat avec le calcul de MALLIAVIN afin d'aboutir à des bornes en termes des opérateurs liés à cette théorie. C'est l'objet du Théorème VII.2.1. Dans le cadre où

les variables appartiennent à des chaos de WIENER, le résultat sera édifiant : si on a convergence en loi de la première marginale vers $\mathcal{N}(0, 1)$, de la deuxième vers la loi d'un vecteur $\mathbf{Y}$ et si on a *décorrélation asymptotique*, alors on a indépendance asymptotique dans le sens où au sens des distances fonctionnelles utilisées, la loi de la suite de couples converge vers $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$. C'est l'objet du Théorème VII.3.3.

Dans l'entièreté de ce chapitre, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On notera $\mathbb{E}$ l'espérance associée.

1. Méthode de Stein indépendante

1.1. Lemme de Stein indépendant

Lemme VII.1.1 : (Lemme de STEIN indépendant) Soient X une variable aléatoire réelle, $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La variable X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et est indépendante de $\mathbf{Y}$;
- (ii) Pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x, \mathbf{y})$ soit absolument continue et telle que $\mathbb{E}[|\partial_1 f(X, \mathbf{Y})|] < \infty$ et $\mathbb{E}[(X - \mu)f(X, \mathbf{Y})] < \infty$ alors

$$\sigma^2 \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] = \mathbb{E}[(X - \mu)f(X, \mathbf{Y})]. \quad [\text{VII.1}]$$

Démonstration : Supposons d'abord (i), c'est-à-dire qu'on suppose que X suit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et est indépendant de $\mathbf{Y}$. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ comme précisé dans (ii). En utilisant alors l'intégration par parties du lemme de STEIN classique et l'indépendance de X et $\mathbf{Y}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] &= \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{y}) \right] \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}[(X - \mu)f(X, \mathbf{y})] \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) \\ &= \mathbb{E}[(X - \mu)f(X, \mathbf{Y})]. \end{aligned}$$

On en déduit (ii).

Supposons désormais (ii), à savoir qu'on dispose de l'égalité [VII.1] pour toute fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ absolument continue par rapport à sa deuxième variable telle que les espérances existent. Alors en particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$, une fonction dans ce cas est donnée par $f(x, \mathbf{y}) = e^{itx} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}}$ (c'est le cas des fonctions trigonométriques réelles associées, donc des exponentielles complexes par linéarité). Alors [VII.1] donne dans ce cas

$$i\sigma^2 t \mathbb{E} [e^{itX} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{Y}}] = \mathbb{E} [(X - \mu)e^{itX} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{Y}}]. \quad [\text{VII.2}]$$

Or, l'hypothèse (ii) appliquée à f constamment égale à 1 implique que $X \in L^1(\mathbb{P})$, si bien que par dérivation sous l'espérance, le membre de droite de [VII.2] s'écrit aussi

$$(i\sigma^2 t + \mu) \mathbb{E} [e^{itX} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{Y}}] = -i \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbb{E} [e^{itX} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{Y}}] \}.$$

On conclut alors que $\varphi := \varphi_{(X, \mathbf{Y})}$ la fonction caractéristique de $(X, \mathbf{Y})$ vérifie l'équation différentielle

$$(-\sigma^2 t + i\mu)\varphi(t, \mathbf{s}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{s}).$$

Puisque la condition initiale en t vérifie $\varphi(0, \mathbf{s}) = \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{s})$ pour tout $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$, il suit que $\varphi(t, \mathbf{s}) = \widehat{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(t) \cdot \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{s})$. On en déduit (i). $\square$

1.2. Équation différentielle associée

On considère $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ et Z suivant $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendant de $\mathbf{Y}$. Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbb{E}[|h(Z, \mathbf{y})|] < \infty$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) - x f(x, \mathbf{y}) = h(x, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{y})]. \quad [\text{VII.3}]$$

L'intérêt de cette équation différentielle réside dans l'écriture suivante :

$$\mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] = \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right].$$

On résout l'équation différentielle [VII.3] dans la Proposition suivante.

Proposition VII.1.2 : Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 admettant des dérivées partielles bornées. Alors [VII.3] admet une unique solution bornée $f_h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et est explicitement donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ par

$$f_h(x, \mathbf{y}) = \frac{-1}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[Z h \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, \mathbf{y} \right) \right] dt. \quad [\text{VII.4}]$$

De plus, on dispose des bornes suivantes :

1. Pour $f_h : \|f_h\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_\infty$;
2. Pour ses dérivées $\left\| \frac{\partial f_h}{\partial x} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_\infty$ et pour $1 \leq j \leq p$, $\left\| \frac{\partial f_h}{\partial y_j} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\| \frac{\partial h}{\partial y_j} \right\|_\infty$.

Démonstration : Commençons par constater que l'expression donnée dans le membre de droite de [VII.4] est bien solution de [VII.3]. Par les théorèmes classiques, f_h est effectivement de classe C^1 . Pour cela, il suffit de constater que par le lemme de STEIN classique,

$$f_h(x, \mathbf{y}) = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathbb{E} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, \mathbf{y} \right) \right] dt.$$

En dérivant de plus l'expression [VII.4] par rapport à x , et en utilisant la précédente expression pour f_h , on obtient

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) - x f_h(x, \mathbf{y}) &= - \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathbb{E} \left[\left(Z \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} - x \right) \frac{\partial h}{\partial x} \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, \mathbf{y} \right) \right] dt \\ &= - \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left\{ h \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, \mathbf{y} \right) \right\} dt \right] \\ &= h(x, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{y})]. \end{aligned}$$

Ainsi, f_h est bien solution de [VII.3]. De plus, f_h est bornée, puisqu'alors

$$\begin{aligned} |f_h(x, \mathbf{y})| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathbb{E} \left[\left| \frac{\partial h}{\partial x} \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, \mathbf{y} \right) \right| \right] dt \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} dt \right) \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_\infty = \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Cela permet de conclure aussi en la borne 1.. De plus, si g est une solution de [VII.3] alors par linéarité, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, il existe une constante $C(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_h(x, \mathbf{y}) - g(x, \mathbf{y}) = C(\mathbf{y}) e^{\frac{x^2}{\sigma^2}}.$$

Si on souhaite que g soit aussi bornée, alors $C(\mathbf{y})$ doit être constamment nul. On en déduit que $f_h = g$, donc à l'unicité de la solution bornée pour l'équation [VII.3].

Reste à montrer les estimations 2.. Pour la dérivée en x , on utilise l'expression suivante

$$\frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) = \frac{-1}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[Z \frac{\partial h}{\partial x} \left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Z, \mathbf{y} \right) \right] dt.$$

On en déduit alors

$$\left| \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right| \leq \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{\infty} \frac{\mathbb{E}[|Z|]}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} dt = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{\infty}.$$

Enfin, pour les dérivées en y , on dérive directement l'expression [VII.4] par rapport à y_j pour obtenir

$$\left| \frac{\partial f_h}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right| \leq \frac{\mathbb{E}[|Z|]}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} dt \left\| \frac{\partial h}{\partial y_j} \right\|_{\infty} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\| \frac{\partial h}{\partial y_j} \right\|_{\infty}.$$

On en déduit la borne 2.. □

Dans la suite de ce chapitre, on notera

$$\mathcal{C}_{\sigma} \triangleq \left\{ f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}) \left| \begin{array}{l} \|f\|_{\infty} \leq 1 \\ \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \left\| \frac{\partial f}{\partial y_j} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{array} \right. \right\}.$$

1.3. Bornes en distance de Wasserstein

Rappelons qu'on a défini dans la Définition II.1.2 la distance de WASSERSTEIN sur $\mathbb{R}^d$ comme la distance entre deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathbb{R}^d$ admettant un moment d'ordre 1 donnée par

$$d_W(\mu, \nu) \triangleq \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} h d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu \right|.$$

Théorème VII.1.3 : Soient X une variable aléatoire réelle intégrable, $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire intégrable de $\mathbb{R}^p$ et $\sigma > 0$. Alors

$$d_W(\mathbb{P}_{(X, \mathbf{Y})}, \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_{\sigma}} \left| \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|. \quad [\text{VII.5}]$$

Démonstration : Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante du vecteur $\mathbf{Y}$. Considérons une fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui soit 1-lipschitzienne. D'après l'équation de STEIN [VII.3], on a alors

$$\mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] = \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f_h}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f_h(X, \mathbf{Y}) \right],$$

où f_h est la solution donnée dans la Proposition VII.1.2. D'après cette même Proposition, pour tout h de classe C^1 et 1-lipschitzienne, $f_h \in \mathcal{C}_{\sigma}$, si bien que pour ces fonctions h :

$$\left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right| \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_{\sigma}} \left| \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|.$$

Pour h lipschitzienne non nécessairement de classe C^1 , on approche uniformément h par $h_{\varepsilon} = h * G_{\varepsilon}$, où G_{ε} est un noyau gaussien de variance ε sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ pour $\varepsilon > 0$. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$,

$$h_{\varepsilon}(x, \mathbf{y}) = \mathbb{E} [h(x + \sqrt{\varepsilon}N, \mathbf{y} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{N})],$$

où $(N, \mathbf{N})$ suit la loi $\mathcal{N}_{p+1}(\mathbf{0}, I_{p+1})$. Alors h_{ε} converge uniformément vers h quand $[\varepsilon \rightarrow 0]$ et h_{ε} est 1-lipschitzienne et de classe C^1 . On conclut alors que

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h_{\varepsilon}(X, \mathbf{Y})] \right| + \left| \mathbb{E}[h_{\varepsilon}(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h_{\varepsilon}(Z, \mathbf{Y})] \right| + \left| \mathbb{E}[h_{\varepsilon}(Z, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right| \\ & \leq 2\|h - h_{\varepsilon}\|_{\infty} + \sup_{f \in \mathcal{C}_{\sigma}} \left| \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|. \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire $[\varepsilon \rightarrow 0]$ pour conclure que pour tout $h \in \text{Lip}(1)$

$$\left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right| \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_{\sigma}} \left| \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|.$$

Cela donne alors [VII.5] et conclut cette démonstration. $\square$

Ce Théorème conclut la partie classique liée à la méthode de STEIN. Ce résultat est alors déjà extrêmement intéressant en soi, bien qu'on utilisera en pratique les critères qu'on développe dans la suite.

Remarque VII.1.4. Mentionnons rapidement ce qu'il se passe dans le cas où on travaille par exemple avec la distance en variation totale, définie pour deux mesures de probas μ et ν sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$

$$d_{TV}(\mu, \nu) \triangleq \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Pour cela, au lieu d'utiliser la Proposition VII.1.2, on utilise l'expression suivante provenant d'une méthode classique de variation de la constante pour la solution de STEIN f_h :

$$f_h(x, \mathbf{y}) = e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} (h(z, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{y})]) dz.$$

Pour la distance en variation totale, on considère $h = \mathbf{1}_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$. Pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, on note $A_{\mathbf{y}}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, (x, \mathbf{y}) \in A\}$. Dans ce cas,

$$\frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) = \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} (\mathbf{1}_A(z, \mathbf{y}) - \mathbb{P}(Z \in A_{\mathbf{y}})) dz + \frac{\mathbf{1}_A(x, \mathbf{y}) - \mathbb{P}(Z \in A_{\mathbf{y}})}{\sigma^2}.$$

Ainsi, pour $x > 0$,

$$\left| \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right| \leq \frac{1}{\sigma^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_x^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} |\mathbf{1}_A(z, \mathbf{y}) - \mathbb{P}(Z \in A_{\mathbf{y}})| dz + \frac{1}{\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2}.$$

Idem pour $x < 0$. On en déduit que $\left\| \frac{\partial f_h}{\partial x} \right\|_{\infty} \leq 2$.

Par contre, on ne peut rien affirmer sur une dérivabilité de f_h par rapport aux variables y_j . Si la dérivabilité par rapport à x provient du fait que f_h vérifie une équation différentielle, celle par rapport à aux y_j ne provient exclusivement que du caractère dérivable de h par rapport à ces mêmes variables.

Autrement dit, la méthode que nous appliquons ici permet d'estimer des distances qui font intervenir des fonctions tests dérivables (au sens absolument continue), autrement dit pour la distance de WASSERSTEIN principalement. Cela fonctionne aussi pour la distance de FORTER-MOURIER donnée par

$$d_{FM}(\mu, \nu) \triangleq \sup_{\substack{\|h\|_{\infty} \leq 1 \\ \|h\|_{Lip} \leq 1}} \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} h(x, \mathbf{y}) d\mu(x, \mathbf{y}) - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} h(x, \mathbf{y}) d\nu(x, \mathbf{y}) \right|.$$

Rappelons que cette dernière métrise la convergence en loi. $\clubsuit$

2. Étude dans le cas dérivable

On considère $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ un espace de HILBERT sur lequel on définit un processus isonormal $W : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{P})$. Dans toute la suite de ce chapitre, on se place sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par W . On introduit l'opérateur de dérivation D , et les opérateurs L et δ associés par rapport à W .

Théorème VII.2.1 : Soient X une variable aléatoire réelle centrée, $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p))$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ et $\sigma > 0$. Supposons que $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y(j) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors

$$\begin{aligned} d_W((X, \mathbf{Y}), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \\ \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbb{E} \left[\left| \sigma^2 - \langle DX, D(-L)^{-1}X \rangle_{\mathcal{H}} \right| \right] + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\left| \langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right| \right]. \quad [\text{VII.6}] \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que $X \in \mathbb{D}^{1,4}$ et $Y(j) \in \mathbb{D}^{1,4}$ pour tout $1 \leq j \leq p$ alors

$$\begin{aligned} d_W((X, \mathbf{Y}), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \\ \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbb{E}[(\sigma^2 - \langle DX, D(-L)^{-1}X \rangle_{\mathcal{H}})^2]} + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]}. \end{aligned} \quad [\text{VII.7}]$$

Démonstration : Reprenons la borne de STEIN donnée par [VII.5]. Il suffit d'en étudier le membre de droite avec les calculs usuels du calcul de MALLIAVIN. Considérons $f \in \mathcal{C}_{\sigma}$. Alors par la relation $\delta D = -L$ du Théorème I.4.6, par relation de dualité donnée dans la Définition I.3.12, et par règle de la chaîne pour la dérivée, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - \delta D(-L)^{-1} X f(X, \mathbf{Y}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] - \mathbb{E} [\langle D(-L)^{-1} X, Df(X, \mathbf{Y}) \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] - \mathbb{E} [\langle D(-L)^{-1} X, Df(X, \mathbf{Y}) \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] - \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \langle D(-L)^{-1} X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right] - \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial y_j}(X, \mathbf{Y}) \langle D(-L)^{-1} X, DY_j \rangle_{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $f \in \mathcal{C}_{\sigma}$, on conclut par inégalité triangulaire que

$$\left| \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right| \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbb{E} \left[\left| \sigma^2 - \langle DX, D(-L)^{-1} X \rangle_{\mathcal{H}} \right| \right] + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\left| \langle D(-L)^{-1} X, DY_j \rangle_{\mathcal{H}} \right| \right].$$

On en déduit l'inégalité [VII.6]. Pour obtenir [VII.7], il suffit d'appliquer CAUCHY–SCHWARZ qui est valable puisque chaque variable est dans $\mathbb{D}^{1,4}$. $\square$

Remarque VII.2.2. Constatons que cette estimation de distance est décomposée en deux termes. Le premier, faisant intervenir uniquement la dérivée de X , est en fait le même que celui qui intervient dans le Théorème III.1.2 lorsqu'on cherche à estimer la distance de WASSERSTEIN entre X et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Quand au deuxième, il s'interprète comme une mesure de la décorrélation entre X et les Y_j . Cela deviendra clair dans la prochaine section, où toutes les variables seront des intégrales stochastiques multiples de WIENER. En d'autres termes, on peut lire ce Théorème comme la décomposition suivante :

$$d_W((X, \mathbf{Y}), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \leq \begin{array}{c} \text{Borne de la distance} \\ \text{entre } X \text{ et } \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{array} + \begin{array}{c} \text{Décorrélation} \\ \text{entre } X \text{ et } \mathbf{Y} \end{array}.$$

♣

3. Cas particulier des chaos de Wiener

3.1. Pour un chaos fixe

On applique le Théorème VII.2.1 dans le cadre où chaque variable est dans un chaos de WIENER.

Proposition VII.3.1 : Soient X une variable aléatoire réelle et $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p))$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ tels qu'il existe $q \geq 1$ et $q(1), \dots, q(p) \geq 1$, $f \in \mathcal{H}^{\odot q}$, $g(1) \in \mathcal{H}^{\odot q(1)}, \dots, g(p) \in \mathcal{H}^{\odot q(p)}$ tels que $X = I_q(f)$ et pour tous $1 \leq j \leq p$, $Y(j) = I_{q(j)}(g(j))$. Alors

$$\begin{aligned} d_W((X, \mathbf{Y}), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) &\leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \sigma^2 - q! \|f\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}} \right| + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sum_{r=1}^{q-1} a_{q,r} \|f \tilde{\otimes}_r f\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2(q-r))}}^2} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^p \sqrt{\sum_{r=1}^{q \wedge q_j} b_{q, q_j, r} \|f \tilde{\otimes}_r g(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q_j-2r)}}^2}, \end{aligned} \quad [\text{VII.8}]$$

où

$$a_{q,r} \triangleq r!^2 \binom{q}{r}^2 \binom{q-1}{r-1}^2 (2(q-r))! \quad \text{et} \quad b_{q,q_j,r} \triangleq r!^2 \binom{q-1}{r-1}^2 \binom{q_j}{r}^2 (2(q \wedge q_j - r))!$$

sont des constantes ne dépendant pas de f et g .

Démonstration : On applique directement le Théorème VII.2.1, plus précisément l'inégalité [VII.7] avec la manipulation supplémentaire :

$$\sqrt{\mathbb{E}[(\sigma^2 - \langle DX, D(-L)^{-1}X \rangle_{\mathcal{H}})^2]} \leq |\sigma^2 - \mathbb{E}[X^2]| + \sqrt{\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X^2] - \langle DX, D(-L)^{-1}X \rangle_{\mathcal{H}})^2]}.$$

Par isométrie des intégrales multiples, $\mathbb{E}[X^2] = q! \|f\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}^2$, donnant ainsi le premier terme de [VII.8]. Il s'agit dans toute la suite de cette démonstration de calculer vaillamment les termes $\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X^2] - \langle DX, D(-L)^{-1}X \rangle_{\mathcal{H}})^2]$ (qu'on notera A dans la suite) et $\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]$ (noté B) grâce à des utilisations répétées de la formule produit pour les intégrales stochastiques.

Pour le terme A , il s'agit du terme correspondant à la borne de la distance entre X et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Il s'agit en fait d'un terme déjà connu. On réfère alors à [NP12a], Lemme 5.2.4 pour les détails de ce terme.

Détaillons le terme B . D'après la formule produit (Proposition I.2.13),

$$\begin{aligned} \langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{q} \langle DX, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= q(j) \sum_{r=0}^{q \wedge q(j)-1} r! \binom{q-1}{r} \binom{q(j)-1}{r} I_{2(q \wedge q(j)-r-1)}(f \tilde{\otimes}_{r+1} g(j)). \end{aligned}$$

Après un changement de variables dans la somme, et une transformation *via* le coefficient binomial, on écrit la somme sous la forme

$$\langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{r=1}^{q \wedge q(j)} r! \binom{q-1}{r-1} \binom{q(j)}{r} I_{2(q \wedge q(j)-r)}(f \tilde{\otimes}_r g(j)).$$

On conclut par orthogonalité des chaos, et par isométrie des intégrales stochastiques que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2] &= \sum_{r=1}^{q \wedge q(j)} r!^2 \binom{q-1}{r-1}^2 \binom{q(j)}{r}^2 \mathbb{E}[I_{2(q \wedge q(j)-r)}(f \tilde{\otimes}_r g(j))^2] \\ &= \sum_{r=1}^{q \wedge q(j)} r!^2 \binom{q-1}{r-1}^2 \binom{q(j)}{r}^2 (2(q \wedge q(j) - r))! \|f \tilde{\otimes}_r g(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q+q(j)-2r)}}^2. \end{aligned}$$

Cela est le troisième terme dans le membre de droite de [VII.8], et conclut cette démonstration. $\square$

Remarque VII.3.2. Le critère d'ÛSTUNEL et ZAKAI, donné dans [UZ89], affirme que deux variables aléatoires $X = I_n(f)$ et $Y = I_p(g)$ dans des chaos de WIENER sont indépendantes si et seulement si $f \otimes_1 g = 0$ presque partout, soit encore $\langle DX, DY \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ presque sûrement et presque partout.

La Proposition VII.3.1 permet de retrouver le sens réciproque ce critère dans le cas où $X = I_1(f)$ avec $\mathbb{E}[X^2] = \sigma$, et $Y = I_q(g)$, avec $q \geq 1$. En effet, si $f \otimes_1 g = 0$, il devient immédiat que [VII.8] devient simplement $d_W(\mathbb{P}_{(X,Y)}, \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y) = 0$, d'où l'indépendance entre X et Y . $\clubsuit$

Cette Proposition, certes explicite sur la borne, cache en fait un Théorème Limite extrêmement surprenant par sa simplicité, ressemblant au même type de résultat que le Théorème du Quatrième Moment.

Théorème VII.3.3 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$, où on note $Y_n(j)$ sa j -ème coordonnée, et $\sigma^2 > 0$. On suppose qu'il existe $q \geq 1$ et $q_1, \dots, q_p \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \mathfrak{H}_q$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y_n(j) \in \mathfrak{H}_{q_j}$. On suppose les quatre conditions suivantes.

- (i) $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
- (ii) $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une probabilité μ ;

(iii) Les ordres des composantes de $\mathbf{Y}_n$ sont inférieurs à l'ordre de X_n : $q \geq \max_{1 \leq j \leq p} q_j$;

(iv) Pour tous $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n Y_n(j)] \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$.

Alors la suite de couples $(X_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$. De plus, si $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en distance de WASSERSTEIN vers μ alors la convergence du couple se fait aussi en distance de WASSERSTEIN, avec pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu) \leq & \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbb{E}[(\sigma^2 - \langle DX_n, D(-L)^{-1} X_n \rangle_{\mathcal{H}})^2]} \\ & + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_n(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} + d_W(\mathbf{Y}_n, \mu). \end{aligned} \quad [\text{VII.9}]$$

Démonstration : Considérons $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$ tels que $(t, \mathbf{s})$ ne soit pas le couple nul et $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ par

$$h(x, \mathbf{y}) \triangleq \frac{1}{|(t, \mathbf{s})|} e^{itx + i\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}}.$$

Remarquez que h est 1-lipschitzienne. Pour montrer la convergence en loi de $(X_n, \mathbf{Y}_n)_n$ vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad [\text{VII.10}]$$

où $(Z, \mathbf{Y}) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$. Or, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})]| \\ \leq & |\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_n, \mathbf{Y}_n)]| + |\mathbb{E}[h(Z_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})]| \\ \leq & d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + \left| \int_{\mathbb{R}} G(x) (\mathbb{E}[h(x, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(x, \mathbf{Y})]) dx \right| \\ \triangleq & A + B, \end{aligned}$$

où G est la densité de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et pour tout $n \geq 1$, Z_n suit $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et est indépendante de $\mathbf{Y}_n$.

Montrons d'abord que B tend vers 0. Pour cela, on observe que

$$B = \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[H(\mathbf{Y})] \right|,$$

où pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $H(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}} G(x) h(x, \mathbf{y}) dx$. Cette fonction H est continue et bornée par $\frac{1}{|(t, \mathbf{s})|}$. Ainsi, par convergence en loi de $\mathbf{Y}_n$ vers $\mathbf{Y}$, on conclut que B tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Montrons désormais que A tend aussi vers 0. Pour cela, notons pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq p$

$$X_n \triangleq I_q(\phi_n) \text{ et } Y_n(j) \triangleq I_{q_j}(g_n(j)).$$

D'après la Proposition VII.3.1, on a

$$\begin{aligned} A \leq & \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} |\sigma^2 - \mathbb{E}[X_n^2]| + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sum_{r=1}^{q-1} a_{q,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2(q-r))}}^2} \\ & + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^p \sqrt{\sum_{r=1}^{q \wedge q_j} b_{q,q_j,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q_j-2r)}}^2}. \end{aligned}$$

Or, les deux premiers termes du membres tendent vers 0 par convergence de $(X_n)_{n \geq 1}$ vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Montrons que pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$\sum_{r=1}^{q \wedge q_j} b_{q,q_j,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q_j-2r)}}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

La troisième hypothèse du Théorème donne $q \wedge q_j = q_j$. Pour comprendre comment influe cette hypothèse, on le laisse sous cette forme pour le moment. Fixons $1 \leq r \leq q \wedge q_j$. Alors

$$\begin{aligned} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q_j-2r)}}^2 & \leq \|\phi_n \otimes_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q_j-2r)}}^2 = \langle \phi_n \otimes_r g_n(j), \phi_n \otimes_r g_n(j) \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q_j-2r)}} \\ & = \langle \phi_n \otimes_{q-r} \phi_n, g_n(j) \otimes_{q_j-r} g_n(j) \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \leq \|\phi_n \otimes_{q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \|g_n(j) \otimes_{q_j-r} g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \\ & \leq \|\phi_n \otimes_{q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \|g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q_j}}^2. \end{aligned}$$

Or, $(Y_n(j))_n$ converge en loi et vit dans un chaos de WIENER fixe, donc est bornée dans L^2 (voir le Corollaire 6.11 dans [Jan97]). De plus, puisque $(X_n)_n$ converge vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, d'après le Théorème du Quatrième Moment III.1.1, pour tout $1 \leq r \leq q-1$, $\|\phi_n \otimes_{q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}}$ tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$. On en déduit que

$$\sum_{r=1}^{(q-1) \wedge q_j} b_{q,q_j,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q+q_j-2r)}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Attention aux bornes de la somme qui ne sont pas celles qu'on espère. En effet, si $q_j < q$, alors on conclut que A tend aussi vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$. Pour $q = q_j$, la somme est alors, par isométrie des intégrales stochastiques multiples

$$\sum_{r=1}^q b_{q,q_j,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q+q_j-2r)}}^2 = \sum_{r=1}^{q-1} b_{q,q_j,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q+q_j-2r)}}^2 + \mathbb{E}[X_n Y_n(j)].$$

C'est donc ici que la dernière hypothèse intervient, et permet de conclure en la convergence vers 0 de A . Puisqu'on a montré que A et B tendent vers 0, on conclut sur [VII.10] pour tout $h \in \text{Lip}(1)$, donc en la convergence en loi du couple $(X_n, \mathbf{Y}_n)_n$ vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$.

Supposons désormais que $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge au sens de la distance de WASSERSTEIN vers μ . Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne. Alors l'inégalité suivante reste valable

$$\left| \mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right| \leq d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + \left| \mathbb{E}[h(Z_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right|.$$

Nous avons déjà démontré que le premier terme tend vers 0. Quand au deuxième, il s'écrit

$$\left| \mathbb{E}[h(Z_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right| = \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[H(\mathbf{Y})] \right|,$$

où encore une fois $H(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}} G(x) h(x, \mathbf{y}) \, dx$. Puisque h est 1-lipschitzienne, c'est aussi le cas de H , si bien que

$$\left| \mathbb{E}[h(Z_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] \right| \leq d_W(\mathbf{Y}_n, \mu).$$

Ainsi,

$$d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu) \leq d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + d_W(\mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}, \mu),$$

qui tend bien vers 0. On en déduit la convergence du couple au sens de WASSERSTEIN. On en déduit aussi [VII.9] via le Théorème VII.2.1. $\square$

Remarque VII.3.4. Au vu de ce résultat, on serait tenté d'affirmer que ce Théorème Limite exprime l'indépendance asymptotique entre $(X_n)_n$ et $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$. On restera vigilant avec ce terme, car il peut renfermer plusieurs définitions non équivalentes. Regarder l'Annexe A. $\clubsuit$

Remarque VII.3.5. L'hypothèse (iii) sur les ordres est nécessaire. Dans la démonstration, si l'un des j vérifie $q_j > q$, alors il n'y a aucune raison pour que $\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q_j-q)}}$ tende vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$, ce qui empêche de conclure que le terme A tend vers 0.

De plus, on dispose du contre-exemple suivant. Considérons $X_n = I_q(\phi_n)$ une suite de variables aléatoires dans le chaos d'ordre q convergeant en loi vers $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Donnons nous $Y_n = I_{2q}(\phi_n \tilde{\otimes} \phi_n)$. Alors, par la formule produit I.2.13,

$$X_n^2 = \mathbb{E}[X_n^2] + Y_n + S_n,$$

où $S_n \triangleq \sum_{r=1}^{q-1} r! \binom{q}{r}^2 I_{2(q-r)}(\phi_n \tilde{\otimes}_r \phi_n)$. Or, d'après le Théorème du Quatrième Moment III.1.1, $\mathbb{E}[S_n^2]$ tend vers 0. On en déduit que $(Y_n)_n$ converge en loi vers $Z^2 - 1$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[X_n Y_n] = 0$. Ainsi, les hypothèses (i), (ii) et (iv) sont vérifiées. Pourtant, pour tout $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[e^{itX_n} e^{isY_n} \right] - \mathbb{E} \left[e^{itZ} e^{is(Z^2-1)} \right] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E} \left[e^{itX_n} e^{is(X_n^2-1)} \right] - \mathbb{E} \left[e^{itZ} e^{is(Z^2-1)} \right] \right| + \left| \mathbb{E} \left[e^{itX_n} e^{isY_n} \right] - \mathbb{E} \left[e^{itX_n} e^{is(X_n^2-1)} \right] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E} \left[e^{itX_n} e^{is(X_n^2-1)} \right] - \mathbb{E} \left[e^{itZ} e^{is(Z^2-1)} \right] \right| + \left| \mathbb{E} \left[e^{isS_n} \right] - 1 \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 par Théorème Portemanteau, tandis que le deuxième tend vers 0 par convergence L^2 de S_n vers 0. On en déduit que (X_n, Y_n) converge en loi vers $(Z, Z^2 - 1)$, qui n'est pas un couple indépendant (calculer $\mathbb{E}[Z^2(Z^2 - 1)] \neq 0$ pour s'en convaincre). ♣

On dispose du même type de Théorème dans le cas d'un développement en chaos fini pour Y .

Théorème VII.3.6 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$, où on note $Y_n(j)$ sa j -ème coordonnée, et $\sigma^2 > 0$. On suppose qu'il existe $q \geq 1$ et $q' \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \mathfrak{H}_q$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y_n(j) \in \bigoplus_{k=0}^{q'} \mathfrak{H}_k$. On suppose les quatre conditions suivantes.

- (i) $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
- (ii) $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une probabilité μ ;
- (iii) Les ordres des composantes de Y_n sont inférieurs à l'ordre de X_n : $q' \leq q$;
- (iv) Pour tous $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n Y_n(j)] \rightarrow 0$ quand $[n \rightarrow \infty]$.

Alors la suite de couples $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$. De plus, si $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en distance de WASSERSTEIN vers μ alors la convergence de $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ est aussi valable au sens de WASSERSTEIN et pour tout $n \geq 1$ l'inégalité [VII.9] est vérifiée.

Démonstration : Il s'agit de la même démarche qu'avant, mais en plus lourd. Notons $X_n = I_q(\phi_n)$ et $Y_n(j) = \sum_{k=0}^{q'} I_k(g_{n,k}(j))$. On note pour $1 \leq k \leq q'$, $Y_{n,k}$ le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ dont la j -ème composante est donnée par $I_k(g_{n,k}(j))$. Ainsi, $Y_n = \sum_{k=0}^{q'} Y_{n,k}$. On applique l'inégalité [VII.9]. Les termes $\langle DX_n, D(-L)^{-1} X_n \rangle$ ne sont pas nouveaux, et donne la somme $\sum_{r=1}^{q-1} a_{q,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2(q-r))}}^2$ apparaissant dans la Proposition VII.3.1 qui tend vers 0 par le Théorème du Quatrième Moment III.1.1, puisque $(X_n)_n$ converge vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Par contre, l'inégalité [VII.9] nous fournit alors des calculs de dérivées entre X et Y_n . Plus précisément, on va montrer que

$$\sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_n(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_n(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \leq \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{q'} \sqrt{\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_{n,k}(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]}.$$

Or, à k fixé, la somme sur j est connue, puisqu'on l'a étudiée dans le cas unichaotique. Plus précisément, on a utilisé la formule produit, qui donne ici :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{q'} \sqrt{\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_{n,k}(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{q'} \sqrt{\sum_{r=1}^{q \wedge k} b_{q,k,r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,k}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+k-2r)}}^2}.$$

Or, par exactement les mêmes arguments que la démonstration du Théorème VII.3.3 (terme B), on en déduit via les hypothèses (ii), (iii) et (iv) que

$$\sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_n(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc à la convergence souhaitée de (X_n, Y_n) vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$. □

3.2. Cadre d'un développement en chaos infini

Pour $q \geq 0$, on note $J_q : L^2(\mathcal{G}) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{H}_k \rightarrow \mathfrak{H}_q$ la projection orthogonale sur le q -ème chaos de WIENER.

Théorème VII.3.7 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires réels de $\mathbb{R}^p$, où on note $Y_n(j)$ sa j -ème coordonnée et $\sigma > 0$. On suppose qu'il existe $q \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \mathfrak{H}_q$ et que pour tout $1 \leq j \leq p$ et $n \geq 1$, $Y_n(j) \in L^2(\mathbb{P})$. On suppose de plus les conditions suivantes.

- (i) $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
- (ii) $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^2 vers un vecteur aléatoire $\mathbf{Y}_\infty$ de loi μ ;
- (iii) Pour tout $1 \leq j \leq p$, le reste des développements en chaos de WIENER de $(Y_n(j))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 dans $L^2(\mathbb{P})$:

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{q'=M+1}^{+\infty} \mathbb{E} [J_{q'} Y_n(j)^2] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0;$$

- (iv) Pour tout $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n Y_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors le couple $(X_n, \mathbf{Y}_n)_n$ converge au sens de WASSERSTEIN vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$. De plus, si pour tout $1 \leq j \leq p$ et $n \geq 1$, $Y_n(j) \in \mathbb{D}^{1,4}$ alors l'estimation [VII.9] est vérifiée.

Démonstration : La démonstration est différente des précédentes, puisqu'elle n'utilise pas la Proposition VII.3.1. Notons $X_n = I_q(\phi_n)$, avec $\phi_n \in \mathcal{H}^{\odot n}$ et $Y_n(j) = \sum_{q'=0}^{+\infty} I_{q'}(g_{n,q'}(j))$, avec pour tout $q' \geq 0$, $g_{n,q'}(j) \in \mathcal{H}^{\odot q'}$. Pour $M \geq 1$, et $n \geq 1$ ou $n = \infty$, on note $\mathbf{Y}_n^M$ la somme tronquée à l'ordre M , c'est-à-dire le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ dont la j -ème coordonnée est donnée par

$$Y_n^M(j) \triangleq \sum_{q'=0}^M I_{q'}(g_{n,q'}(j)).$$

Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une application 1-lipschitzienne. On effectue alors le découpage suivant

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y}_\infty)] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n^M)] \right| + \left| \mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n^M)] - \mathbb{E}[h(Z_n^M, \mathbf{Y}_n^M)] \right| \\ & \quad + \left| \mathbb{E}[h(Z_n^M, \mathbf{Y}_n^M)] - \mathbb{E}[h(Z^M, \mathbf{Y}_\infty^M)] \right| + \left| \mathbb{E}[h(Z^M, \mathbf{Y}_\infty^M)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y}_\infty)] \right| \\ & \triangleq A_{n,M}(h) + B_{n,M}(h) + C_{n,M}(h) + D_M(h). \end{aligned}$$

On a noté $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendant de $\mathbf{Y}_\infty$ et pour tout $M \geq 1$, $Z_n^M \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendant de $\mathbf{Y}_n^M$ et $Z^M \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendant de $\mathbf{Y}_\infty^M$. Traitons chacun des quatre termes.

Pour le terme A , l'inégalité triangulaire, le caractère 1-lipschitzien de h et CAUCHY-SCHWARZ donne

$$A_{n,M}(h) \leq \mathbb{E} [|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_n^M|] \leq \sqrt{\mathbb{E} [|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_n^M|^2]} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^p \sup_{n \geq 1} \sum_{q'=M+1}^{+\infty} \mathbb{E} [J_{q'} Y_n(j)^2]}.$$

On en déduit que $\sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{n \geq 1} A_{n,M}(h)$ tend vers 0 quand $[M \rightarrow \infty]$ par l'hypothèse (iii).

Pour le terme B , il s'agit de comparer la loi de $(X_n, \mathbf{Y}_n^M)$ à celle de $(Z_n^M, \mathbf{Y}_n^M)$, qui suit $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n^M}$. Il ne s'agit pas exactement du cadre du Théorème VII.3.6, à cause du fait que l'ordre maximal du développement en chaos M de $\mathbf{Y}_n^M$ peut excéder q . Néanmoins, au lieu d'une convergence en loi, on a une convergence L^2 . Par le Théorème VII.2.1, on a

$$\begin{aligned} & d_W \left((X_n, \mathbf{Y}_n^M), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n^M} \right) \\ & \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbb{E} [(\sigma^2 - \langle DX_n, D(-L)^{-1} X_n \rangle_{\mathcal{H}})^2]} + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E} [\langle D(-L)^{-1} X_n, D Y_n^M(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \\ & \triangleq \alpha_n + \beta_{n,M}. \end{aligned}$$

Le terme α_n tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$, par le Théorème du Quatrième Moment III.1.1. Quand à $\beta_{n,M}$, à M fixé, une inégalité triangulaire dans $L^2(\mathbb{P})$ et la formule produit donne

$$\begin{aligned} \beta_{n,M} & \leq \sum_{j=1}^p \sum_{q'=0}^M \sqrt{\mathbb{E} [\langle D(-L)^{-1} X_n, D I_{q'}(g_{n,q'}(j)) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \\ & = \sum_{j=1}^p \sum_{q'=0}^M \sqrt{\sum_{r=1}^{q \wedge q'} b_{q,q',r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2}, \end{aligned}$$

où $b_{q,q',r}$ est défini dans la Proposition VII.3.1. Pour $1 \leq j \leq p$, $0 \leq q' \leq M$ et $1 \leq r \leq q \wedge q'$, montrons que $\|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}$ tend vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$. Pour $r < q' \leq q$,

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2 \leq \|\phi_n \otimes_{q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \sup_{n \geq 1} \|g_{n,q'}\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}^2,$$

qui tend vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$ par Théorème du Quatrième Moment. Si $r = q = q'$, alors l'hypothèse **(iv)** donne (puisque $X_n \in \mathcal{H}_q$)

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_{n,q}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 0}}^2 = \frac{1}{q!} \mathbb{E}[X_n \cdot J_q Y_n(j)] = \frac{1}{q!} \mathbb{E}[X_n Y_n(j)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Supposons désormais que $q' > q$. Pour $r < q < q'$, c'est encore l'inégalité précédente avec le Théorème du Quatrième Moment qui permet de conclure. Considérons finalement $r = q < q'$. Par convergence L^2 quand $[n \rightarrow \infty]$ de $J_{q'} Y_n(j) = I_{q'}(g_{n,q'}(j))$ vers $J_{q'} Y_\infty(j) \stackrel{\Delta}{=} I_{q'}(g_{\infty,q'}(j))$, et par isométrie des intégrales stochastiques, il suit que

$$\|g_{n,q'}(j) - g_{\infty,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} &\leq \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_{\infty,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} + \|\phi_n \tilde{\otimes}_q (g_{n,q'}(j) - g_{\infty,q'}(j))\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} \\ &\leq \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_{\infty,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} + \sup_{n \geq 1} \{\|\phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}\} \|g_{n,q'}(j) - g_{\infty,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}. \end{aligned}$$

Reste à montrer que pour $\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_{\infty,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}}$ tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$. On va conclure par troncature de $g_{\infty,q'}(j)$. Afin de simplifier les notations, on va simplement noter $g = g_{\infty,q'}(j)$ de manière provisoire. Si $(e_i)_{i \geq 1}$ désigne une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ alors dans $\mathcal{H}^{\otimes q'}$, on a la décomposition suivante

$$g = \sum_{i_1, \dots, i_{q'} \geq 1} \left\langle g, \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q'}} \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k}.$$

Soit $K \geq 1$. Alors on définit $g_K \stackrel{\Delta}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{q'} \leq K} \left\langle g, \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q'}} \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k}$, de sorte que

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} \leq \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_K\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} + \sup_{n \geq 1} \|\phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}} \|g - g_K\|_{\mathcal{H}^{q'}}.$$

Le deuxième terme tend uniformément vers 0 lorsque $[K \rightarrow \infty]$. Montrons qu'à K fixé, le premier terme tend aussi vers 0. Soient $1 \leq i_1, \dots, i'_q \leq K$. Alors

$$\begin{aligned} \phi_n \otimes_q \widetilde{\bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k}} &= \frac{1}{q'!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q'}} \left\langle \phi_n, \bigotimes_{k=1}^q e_{i_{\sigma(k)}} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q}} \bigotimes_{k=q+1}^{q'} e_{i_{\sigma(k)}} \\ &= \frac{1}{q'!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q'}} \left\langle \phi_n \otimes_1 e_{i_{\sigma(1)}}, \bigotimes_{k=2}^q e_{i_{\sigma(k)}} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(q-1)}} \bigotimes_{k=q+1}^{q'} e_{i_{\sigma(k)}} \end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned} \left\| \phi_n \otimes_q \widetilde{\bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k}} \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} &\leq \frac{1}{q'!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q'}} \|\phi_n \otimes_1 e_{i_{\sigma(1)}}\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q-1)}} \\ &\leq \|\phi_n \otimes_{q-1} \phi_n\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

par le Théorème du Quatrième Moment. On en déduit alors que pour $K \geq 1$ fixé, $\|\phi_n \otimes_q g_K\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}$ tend vers 0 quand

$[n \rightarrow \infty]$. On conclut alors, en revenant aux notations $g = g_{\infty, q'}(j)$, que pour $M > q$ et $K \geq 1$ fixé,

$$\begin{aligned} \beta_{n,M} &\leq \sum_{j=1}^p \sum_{q'=0}^q \sqrt{\sum_{r=1}^{q'} b_{q,q',r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \sum_{q'=q+1}^M \sqrt{\sum_{r=1}^{q-1} b_{q,q',r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2 + b_{q,q',q} \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{(q'-q)}}^2} \\ &\leq \sum_{j=1}^p \sum_{q'=0}^q \sqrt{\sum_{r=1}^{q'} b_{q,q',r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \sum_{q'=q+1}^M \left\{ \sum_{r=1}^{q-1} b_{q,q',r} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_{n,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2r)}}^2 + b_{q,q',q} \|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_{n,q',K}(j)\|_{\mathcal{H}^{(q'-q)}}^2 \right. \\ &\quad \left. + b_{q,q',q} \sup_{n \geq 1} \left\{ \|\phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}^4 \right\} \left(\|g_{\infty,q',K}(j) - g_{\infty,q'}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}^2 + \|g_n(j) - g_{\infty}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}^2 \right) \right\}^{1/2} \\ &\triangleq \beta_n^1 + \sum_{j=1}^p \sum_{q'=q+1}^M \sqrt{\beta_{n,K,M}^2 + \beta_K^3 + \beta_n^4}. \end{aligned}$$

On a caché les dépendances en j et q' dans la définitions des β^i . Nos investigations ont conclu que β_K^3 tend vers 0 lorsque $[K \rightarrow \infty]$, et qu'à K et M fixés, β_n^1 , $\beta_{n,K,M}^2$ et β_n^4 tendent vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$. Considérons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $K \geq 1$ tel que $\beta_K^3 \leq \frac{\varepsilon^2}{48p^2M^2}$. Pour ce choix de K , il existe un rang N dépendant de M, K et p pour lequel $\beta_{n,K,M}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{48p^2M^2}$, $\beta_n^4 \leq \frac{\varepsilon^2}{48p^2M^2}$ et $\beta_n^1 \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Il suit que pour ce choix de K , et pour tout $n \geq N = N(M, K, p)$

$$\beta_{n,M} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^p \sum_{q'=q+1}^M \sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{48p^2M^2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Enfin, puisque α_n tend vers 0, on en déduit que pour n plus grand qu'un rang dépendant de K, M et p que

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) \leq d_W((X_n, \mathbf{Y}_n^M), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n^M}) \leq \alpha_n + \beta_n \leq \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $M \geq 1$, $\sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h)$ tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Pour le terme C , on a

$$C_M(h) = \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_n^M)] - \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_\infty^M)] \right|,$$

où pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $H(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}} G(x) h(x, \mathbf{y}) dx$, et G est la densité de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Puisque h est 1-lipschitzienne, c'est aussi le cas de H , si bien que

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{M \geq 1} C_{n,M}(h) \leq \sqrt{\mathbb{E}[|\mathbf{Y}_n^M - \mathbf{Y}_\infty^M|^2]} \leq \sqrt{\mathbb{E}[|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_\infty|^2]}.$$

On a donc montré que $\sup_{M \geq 1} C_{n,M}(h)$ tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Pour le terme D . On a de même

$$D_M(h) = \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_\infty^M)] - \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_\infty)] \right| \leq \sqrt{\mathbb{E}[|\mathbf{Y}_\infty^M - \mathbf{Y}_\infty|^2]}.$$

On conclut que $\sup_{h \in \text{Lip}(1)} D_M(h)$ tend vers 0 lorsque $[M \rightarrow \infty]$.

On peut alors conclure :

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y}_\infty)]| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \sup_{h \in \text{Lip}(1)} A_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{M \geq 1} C_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} D_M(h). \end{aligned}$$

Constatons d'abord que le membre de droite de l'inégalité ne dépend plus de h , donc on a

$$d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu) \leq \sup_{n \geq 1} \sup_{h \in \text{Lip}(1)} A_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{M \geq 1} C_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} D_M(h)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier M pour lequel

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{n \geq 1} A_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} D_M(h) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe ce choix de M , et pour ce M fixé, il existe un rang $N = N(M, \varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{M \geq 1} C_{n,M}(h) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit enfin que pour tout $n \geq N$,

$$d_W\left((X_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu\right) \leq \varepsilon.$$

Cela permet de conclure que $(X_n, \mathbf{Y}_n)$ converge au sens de WASSERSTEIN lorsque $[n \rightarrow \infty]$ vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_\infty}$.

Supposons désormais que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{Y}_n \in \mathbb{D}^{1,4}$. Alors une inégalité triangulaire et l'application du Théorème VII.2.1 permet de conclure sur [VII.9]. $\square$

Remarque VII.3.8. La condition (iii) du Théorème, stipulant que

$$\sum_{j=1}^p \sup_{M \geq 1} \sum_{q'=M+1}^{\infty} \mathbb{E}[J_{q'} Y_n(j)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

n'est pas étrangère au domaine de la méthode de NOURDIN–PECCATI. En effet, il s'agit déjà d'une condition exprimée par NUALART et HU dans [HN05] (où le « sup » est remplacée par l'hypothèse plus faible « limsup ») dans le cadre d'un Théorème exprimant la convergence en loi d'une variable admettant un développement chaotique infini vers une gaussienne. $\clubsuit$

3.3. Comparaison avec le résultat de Nualart, Nourdin et Peccati

À propos d'indépendance asymptotique dans les chaos de WIENER, il existait des résultats avant l'écriture du Théorème VII.3.3. En 2014, NOURDIN et ROSIŃSKI donnent dans [NR14] le critère suivant.

Théorème VII.3.9 : (*Théorème 3.1 de [NR14]*) *Considérons $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, dont on note $X_n(j)$ la j -ème coordonnée. On suppose que pour tout $1 \leq j \leq d$, il existe $q_j \geq 1$ tel que $X_n(j) \in \mathfrak{H}_{q_j}$. On suppose*

(i) *Les chaos sont ordonnés : $q_1 \geq \dots \geq q_d$;*

(ii) *Il existe un vecteur aléatoire $\mathbf{U}$ de $\mathbb{R}^p$ tel que $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathbf{U}$.*

Alors $\mathbf{U}$ admet des moments à tous ordres et les assertions suivantes sont équivalentes

(α) *Les composantes $U(1), \dots, U(d)$ de $\mathbf{U}$ admettent des moments indépendants : pour tous entiers $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^d U(j)^{k_j} \right] = \prod_{j=1}^d \mathbb{E} [U(j)^{k_j}] ;$$

(β) *Si on note pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq d$ $X_n(j) \stackrel{\Delta}{=} I_{q_j}(\phi_n(j))$ alors pour tout $1 \leq i \neq j \leq d$ et $1 \leq r \leq q_i \wedge q_j$*

$$\|\phi_n(j) \otimes_r \phi_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q_i+q_j-2r)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

(γ) *Pour tout $1 \leq i \neq j \leq d$,*

$$\text{Cov}(X_n(i)^2, X_n(j)^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Si de plus la loi de $\mathbf{U}$ est déterminée par ses moments alors la condition (α) est équivalente à

(δ) *Les variables $U(1), \dots, U(d)$ sont indépendantes.*

Remarque VII.3.10. La condition (γ) provient en fait de l'équivalence suivante : si $X \in \mathfrak{H}_q$ et $Y \in \mathfrak{H}_{q'}$ alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X^2, Y^2) = 0$. Il s'agit d'une reformulation du critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI [UZ89] : si $X = I_q(f)$ et $Y = I_{q'}(g)$ alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $f \otimes_1 g = 0$ presque partout. ♣

Ce Théorème a été amélioré par NOURDIN, NUALART et PECCATI en 2016 dans [NNP16], avec les deux Théorèmes suivants.

Théorème VII.3.11 : (Théorème 1.3 de [NNP16]) Soit $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, dont on note $X_n(j)$ la j -ème coordonnée. On suppose que pour tout $1 \leq j \leq d$ et $n \geq 1$, $X_n(j) \in \mathfrak{H}_{q_j}$. On suppose l'unique condition suivante.

(i) Les chaos sont ordonnés : $q_1 \geq \dots \geq q_d$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) Pour tout $1 \leq i \neq j \leq d$,

$$\text{Cov}(X_n(i)^2, X_n(j)^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

(2) Pour tout $1 \leq i \neq j \leq d$ et $1 \leq r \leq q_i \wedge q_j$,

$$\|\phi_n(i) \otimes_r \phi_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q_i+q_j-2r)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

(3) Pour tout $\psi_1, \dots, \psi_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ admettant des dérivées bornées jusqu'à l'ordre q_1 ,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^d \psi_j(X_n(j)) \right] - \prod_{j=1}^d \mathbb{E}[\psi_j(X_n(j))] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le Théorème VII.3.11 nous fournit alors un exemple de critère pour une indépendance asymptotique dans les chaos de WIENER. Un Théorème Limite est aussi exprimé.

Théorème VII.3.12 : (Théorème 1.4 de [NNP16]) Soit $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, dont on note $X_n(j)$ la j -ème coordonnée. On suppose que pour tout $1 \leq j \leq d$ et $n \geq 1$, $X_n(j) \in \mathfrak{H}_{q_j}$. On suppose les conditions suivantes.

(i) Les chaos sont ordonnés : $q_1 \geq \dots \geq q_d$.

(ii) Pour tout $1 \leq j \leq d$, $X_n(j)$ converge en loi vers $U(j)$;

(iii) Les variables $U(1), \dots, U(d)$ sont indépendantes ;

(iv) On dispose de la condition (1) dans le Théorème VII.3.11 (ou de l'une de ses versions équivalentes).

Alors la suite de vecteurs $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers le vecteur $\mathbf{U} = (U(1), \dots, U(d))$.

La principale différence entre le Théorème VII.3.12 et le Théorème VII.3.3 provient d'une estimation supplémentaire en distance de WASSERSTEIN, et surtout du fait que la loi cible soit particulière. Dans le langage du Théorème VII.3.12, on suppose dans le Théorème VII.3.3 que $\mathbf{U} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \otimes \mu$, avec μ une loi quelconque sur $\mathbb{R}^{d-1}$. Autrement dit, on cherche un Théorème Limite uniquement sur un couple, et non pas directement sur toutes les composantes. Ainsi, la condition (1) du Théorème VII.3.11 se réduit à : pour tout $2 \leq j \leq d$, $\text{Cov}(X_n(1)^2, X_n(j)^2) \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$. Or, on a simplement supposé que $\text{Cov}(X_n(1), X_n(j)) \rightarrow 0$. Cela est bien sûr dû au fait que la loi limite soit gaussienne.

Dans les chapitres X et IX, on écrit aussi des Théorèmes Limites du même type, où les lois limites sont soit $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu$ ou $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C) \otimes \mu$.

Retenons que les Théorèmes VII.3.11 et VII.3.12 donnent des Théorèmes Limites assez généraux dans les chaos de WIENER qu'on interprète comme des indépendances asymptotiques. Nos contributions consistent à expliciter les hypothèses de décorrélation des carrés des variables d'intérêt dans le cas de lois plus précises, et surtout de donner des estimations de vitesse de convergence de ces Théorèmes Limites en distance de WASSERSTEIN.

4. Application au Théorème de Breuer–Major

4.1. Contexte

Le Théorème Central Limite classique affirme que si on dispose d'une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées $(Y_n, n \geq 1)$ et L^2 alors sous normalisation, la suite converge en loi vers la gaussienne standard. Les Théorèmes de BREUER–MAJOR explorent le cas où $Y_n = f(X_n)$, où $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ est un processus gaussien stationnaire centré et f est une fonction L^2 par rapport à $\mathcal{N}(0, 1)$. Si ρ est la fonction de corrélation de X , c'est-à-dire que $\rho(n) = \mathbb{E}[X_n X_0]$, il existe des conditions sur ρ pour lesquelles on observe une convergence en loi de la renormalisation de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k)$ vers $\mathcal{N}(0, 1)$. Regarder par exemple [NP12a] pour une explication plus précise à ce sujet.

On s'intéresse au cas où X est donné par des incréments de mouvement brownien fractionnaire. Pour $0 < H < 1$, on considère B_H un mouvement brownien fractionnaire d'indice de HURST H : il s'agit d'un processus gaussien réel indexé sur $\mathbb{R}_+$ centré et de fonction de covariance donnée pour tout $s, t \geq 0$ par

$$\mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

On peut montrer qu'il s'agit d'un processus à accroissements stationnaires mais non-indépendants, à moins que $H = 1/2$ auquel cas $B_{1/2}$ est un mouvement brownien standard. On considère le processus gaussien suivant, donné pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$X_k \triangleq B_H(k+1) - B_H(k).$$

Alors la fonction de covariance de X est donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\rho_H(k) \triangleq \frac{1}{2} ((k+1)^{2H} + |k-1|^{2H} - 2k^{2H}).$$

En particulier, $(X_k)_{k \geq 0}$ est un processus stationnaire, car en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k suit $\mathcal{N}(0, 1)$. On cherche donc à étudier la convergence en loi de la version renormalisée de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$, où $f \in L^2(\mathcal{N}(0, 1))$. Un cas particulier intéressant consiste à prendre $f = H_q$ le q -ème polynôme d'HERMITE puisque ces polynômes forment une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{N}(0, 1))$.

Notons $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} H_q(B_H(k+1) - B_H(k))$. La suite de variables aléatoires $(M_n, n \geq 1)$ est appelée *q-variation d'HERMITE de B_H* . Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[M_n] = 0$ et de plus

$$\begin{aligned} \sigma[M_n]^2 &= q! \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \rho_H(|k-l|)^q \\ &= q! \sum_{v=0}^{n-1} \rho_H(v)^q \# \{(k, l) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2, |k-l| = v\} \\ &= q! \sum_{v=0}^{n-1} \rho_H(v)^q \cdot 2(n-v). \end{aligned}$$

L'étude d'une expression asymptotique de $\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \rho(k)^q$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$ aboutit à trois comportements distincts, correspondant à trois normalisations possibles de M_n . Le Théorème suivant résume cette discussion, dont une démonstration est vue dans [NP12a], ou avec les outils classiques de la méthode de NOURDIN–PECCATI dans [BN08].

Théorème VII.4.1 : (*Théorème 7.4.1 de [NP12a]*) Soit $q \geq 1$. Considérons pour tout $n \geq 1$,

$$V_n^{(q)} \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} H_q(B_H(k+1) - B_H(k)). \quad [\text{VII.11}]$$

1. Si $0 < H < 1 - \frac{1}{2q}$, alors

$$\frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\sigma_{q,H}^2 = 2q! \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_H(k)^q$.

2. Si $H = 1 - \frac{1}{2q}$ alors

$$\frac{1}{\sigma_{q,1-1/2q} \sqrt{n \ln n}} V_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\sigma_{q,1-1/2q}^2 = 2q!(1 - 1/q)^q(1 - 1/2q)^q$.

3. Pour $1 - \frac{1}{2q} < H < 1$, alors

$$\frac{1}{n^{1-q(1-H)}} V_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Variable d'HERMITE.}$$

Nous ne détaillerons pas plus ce qu'est une variable d'HERMITE, puisqu'on ne l'utilisera pas dans la suite. Notez seulement qu'il s'agit du processus d'HERMITE pris au temps 1, qui apparaît dans le chaos d'ordre q . La démonstration des deux premiers points se fait avec les outils de la méthode de NOURDIN–PECCATI, donnant aussi une estimation de la vitesse de convergence en distance en variation totale, tandis que la démonstration du dernier repose sur une convergence L^2 d'une copie d'une suite de variables de même loi que V_n (donnant aussi lieu à une estimation en variation totale, due à l'estimation de la vitesse de convergence L^2).

4.2. Théorème Limite indépendant

On cherche à étudier la convergence jointe de deux variations d'HERMITE d'ordre différent. Pour simplifier, on considère $q \geq 3$ quelconque et $q = 2$. Pour illustrer une éventuelle poursuite d'étude, on considère un exemple : le cas où

$$H \in \left(0, 1 - \frac{1}{2q}\right) \cap \left(\frac{3}{4}, 1\right) = \left(\frac{3}{4}, 1 - \frac{1}{2q}\right),$$

de sorte que, sous normalisation, $V_n^{(q)}$ converge vers une gaussienne et $V_n^{(2)}$ converge vers une loi d'HERMITE d'ordre 2, c'est-à-dire une loi de ROSENBLATT. BRETON et NOURDIN, dans [BN08], donnent des bornes en variations totales grâce à la méthode de NOURDIN–PECCATI de la vitesse de convergence entre $V_n^{(q)}$ et la gaussienne, et $V_n^{(2)}$ et la loi de ROSENBLATT. On rappelle les résultats qui nous seront utiles pour la suite.

Proposition VII.4.2 : (Théorèmes 1.1 et 1.2 de [BN08]) Soient $q \geq 3$ et pour tout $n \geq 1$, $V_n^{(2)}$ et $V_n^{(q)}$ donnés par [VII.11], avec $3/4 < H < 1 - 1/2q$. Alors

$$\text{dw}\left(\frac{1}{n^{2H-1}} V_n^{(2)}, \mathcal{R}\right) \leq \frac{c_H}{n^{H-3/4}}, \quad \text{[VII.12]}$$

où $\mathcal{R}$ désigne la loi de ROSENBLATT. On a aussi

$$\text{d}_{\text{TV}}\left(\frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(q)}, \mathcal{N}(0, 1)\right) \leq c_{q,H} \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{1}{q\sigma_{q,H}^2 n} \|\text{D}V_n^{(q)}\|_{\mathcal{H}}^2\right)^2\right]} \leq \frac{c_{q,H}}{n^{q(1-H)-1/2}}. \quad \text{[VII.13]}$$

Dans le Théorème original, tous les résultats sont exprimés en distance en variation totale. Pour la première convergence, le fait qu'on puisse l'affirmer en distance de WASSERSTEIN provient du fait qu'on montre qu'une copie de $V_n^{(q)}$ converge dans L^2 vers une variable explicite suivant la loi de ROSENBLATT. Cette convergence L^2 implique la convergence au sens de WASSERSTEIN indiquée. On précise de plus le processus isonormal par rapport auquel on dérive dans la démonstration du Théorème suivant.

Dans la suite, contrairement à ce qui est présenté dans [Tud23], on se contente de démontrer le cas où $q = 3$. Le cas $q \geq 3$ se gère de la même manière, les calculs sont simplement très lourds. Dans le cas $q = 3$, la condition sur H se réduit à $3/4 < H < 5/6$.

Théorème VII.4.3 : Soient $q \geq 3$ et pour $n \geq 1$, $V_n^{(q)}$ et $V_n^{(2)}$ donnés par [VII.11]. Alors

$$\begin{aligned} d_W \left(\left(\frac{1}{n^{2H-1}} V_n^{(2)}, \frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(q)} \right), \mathcal{R} \otimes \mathcal{N}(0, 1) \right) \\ \leq c_{H,q} \begin{cases} \frac{1}{n^{1-H}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} & \text{si } \frac{3}{4} < H \leq 1 - \frac{1}{2(q-1)} \\ \frac{1}{n^{q(1-H)-1/2}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} & \text{si } 1 - \frac{1}{2(q-1)} < H < 1 - \frac{1}{2q} \end{cases} \quad [\text{VII.14}] \end{aligned}$$

Pour $q = 3$, l'inégalité se réduit à

$$d_W \left(\left(\frac{1}{n^{2H-1}} V_n^{(2)}, \frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(q)} \right), \mathcal{R} \otimes \mathcal{N}(0, 1) \right) \leq c_{H,q} \begin{cases} \frac{1}{n^{1-H}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} & \text{si } H = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{n^{5/2-3H}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} & \text{si } \frac{3}{4} < H < \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Démonstration : On débute la démonstration avec q quelconque, et quand les calculs deviendront trop lourds, on se spécialisera dans le cas $q = 3$. On considère $\mathcal{H}$ l'espace de HILBERT décrit comme suit. On considère le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}_+)$ engendré par les indicatrices de boréliens bornés. Cet espace est muni du produit scalaire suivant : pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ bornés,

$$\langle \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \rangle_{\mathcal{H}} \triangleq \int_A \int_B \frac{dt ds}{|t-s|^{2(1-H)}}.$$

Constatez en particulier que $\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t, s)$, où R_H désigne la fonction de covariance du mouvement brownien fractionnaire. On définit $\mathcal{H}$ comme le complété de cet espace pour ce produit scalaire. En particulier, pour $f, g \in \mathcal{H}$, on a

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)g(s) \frac{dt ds}{|t-s|^{2(1-H)}}.$$

On définit un processus isonormal sur $\mathcal{H}$ par rapport au brownien fractionnaire, si bien qu'on a pour tout $t \geq 0$, $B_H(t) = I_1(\mathbf{1}_{[0,t]})$. D'après le Théorème VII.2.1,

$$\begin{aligned} d_W \left(\left(\frac{1}{n^{2H-1}} V_n^{(2)}, \frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(q)} \right), \mathcal{R} \otimes \mathcal{N}(0, 1) \right) \\ \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(1 - \frac{1}{q\sigma_{q,H}^2 n} \|DV_n^{(q)}\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^2 \right]} + \sqrt{\frac{\pi}{2q\sigma_{q,H}^2}} \frac{1}{n^{2H-1/2}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\langle DV_n^{(q)}, DV_n^{(2)} \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} \\ + d_W \left(\frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(2)}, \mathcal{R} \right). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $V_n^{(q)}$ appartenait au q -ème chaos de WIENER pour simplifier les expressions. Avec les inégalités [VII.13] et [VII.12], on en déduit que

$$d_W \left(\left(\frac{1}{n^{2H-1}} V_n^{(2)}, \frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(q)} \right), \mathcal{R} \otimes \mathcal{N}(0, 1) \right) \leq \frac{c_{q,H}}{n^{q(1-H)+1/2}} + \frac{c_{q,H}}{n^{H-3/4}} + \frac{c_{q,H}}{n^{2H-1/2}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\langle DV_n^{(q)}, DV_n^{(2)} \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]}.$$

Il reste alors à traiter ce dernier terme. Pour cela, en développant en chaos, et en constatant que pour $k, j \in \mathbb{N}$, $\langle \mathbf{1}_{[k,k+1]}, \mathbf{1}_{[j,j+1]} \rangle_{\mathcal{H}} = \rho_H(|k-j|)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle DV_n^{(q)}, DV_n^{(2)} \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] &= q(q-1)q! \sum_{j,k=0}^{n-1} \sum_{j',k'=0}^{n-1} \rho_H(|k-k'|)^{q-2} \rho_H(|k'-j|) \rho_H(|k-j'|) \rho_H(|k-j|) \rho_H(|k'-j'|) \\ &\quad + qq! \sum_{j,k=0}^{n-1} \sum_{j',k'=0}^{n-1} \rho_H(|k-k'|)^{q-1} \rho_H(|k-j|) \rho_H(|k'-j'|) \rho_H(|j-j'|) \\ &\quad + (q-1)(q-1)! \sum_{j,k=0}^{n-1} \sum_{j',k'=0}^{n-1} \rho_H(|k-k'|)^{q-2} \rho_H(|k-j|)^2 \rho_H(|k'-j'|)^2. \end{aligned}$$

Comme détaillé dans [NZ18], il est extrêmement pénible de manipuler ces sommes, puisqu'en distinguant les cas où les indices sont tous égaux, ou le cas où trois d'entre eux le sont, ou celui ou deux et deux distincts le sont, ou

celui où exactement deux sont égaux, ou le cas où ils sont tous distincts, cela nous donne plusieurs comportements possibles lorsque $[n \rightarrow \infty]$. C'est à partir d'ici qu'on spécialise la démonstration à $q = 3$, et à $3/4 < H < 5/6$. On peut néanmoins simplifier un peu le propos, en utilisant l'inégalité

$$\begin{aligned} & \rho_H(|k' - j|) \rho_H(|k - j'|) \rho_H(|k - j|) \rho_H(|k' - j'|) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\rho_H(|k - j|)^2 \rho_H(|k' - j'|)^2 + \rho_H(|k' - j|)^2 \rho_H(|k - j'|)^2 \right), \end{aligned}$$

on peut montrer que la première somme est inférieure à la troisième. Ainsi, voilà ce qu'on doit étudier.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\langle DV_n^{(3)}, DV_n^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] & \leq c_H \sum_{j,k=0}^{n-1} \sum_{j',k'=0}^{n-1} \rho_H(|k - k'|)^2 \rho_H(|k - j|) \rho_H(|k' - j'|) \rho_H(|j - j'|) \\ & \quad + c_H \sum_{j,k=0}^{n-1} \sum_{j',k'=0}^{n-1} \rho_H(|k - k'|) \rho_H(|k - j|)^2 \rho_H(|k' - j'|)^2 \\ & \triangleq T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Commençons par le terme le plus simple, à savoir T_2 .

$$\begin{aligned} T_2 & = c_H \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_H(|k - k'|) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \rho_H(|k - j|)^2 \right) \left(\sum_{j'=0}^{n-1} \rho_H(|k' - j'|)^2 \right) \\ & \leq c_H n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_H(k) \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \rho_H(j)^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Or, pour tout $v \geq 0$, $|\rho_H(v)| \leq c_H \min\{1, \frac{1}{v^{2(1-H)}}\}$, si bien que puisque $3/4 < H < 5/6$, on a $2(1-H) < 4(1-H) < 1$ et

$$\begin{aligned} T_2 & \leq c_H n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right)^{2(1-H)} \right) \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \right)^{4(1-H)} \right)^2 \\ & \leq c_H n n^{2H-1} n^{2(4H-3)} = c_H n^{10H-6}. \end{aligned}$$

Traisons désormais le cas de T_1 . On décompose la double (double) somme comme suit.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=j'=k'=k} + \left(\sum_{\substack{j=j'=k \\ k' \neq j}} + \sum_{\substack{j=j'=k' \\ k \neq j}} + \sum_{\substack{j=k=k' \\ j' \neq j}} + \sum_{\substack{j'=k=k' \\ j \neq j'}} \right) + \left(\sum_{\substack{j=j' \\ k=k' \\ j \neq k}} + \sum_{\substack{j=k \\ j'=k' \\ j \neq j'}} + \sum_{\substack{j=k' \\ j'=k \\ j \neq j'}} \right) \\ & + \left(\sum_{\substack{j=j' \\ k \neq k' \\ k \neq k'}} + \sum_{\substack{j=k \\ k' \neq j \\ k' \neq k'}} + \sum_{\substack{j=k' \\ k \neq j \\ k' \neq k}} + \sum_{\substack{j'=k \\ j \neq j' \\ k \neq k'}} + \sum_{\substack{j'=k' \\ k \neq j' \\ k' \neq k}} + \sum_{\substack{k=k' \\ j \neq k \\ j' \neq j}} \right) + \sum_{\substack{j,k,j',k' \\ \text{distincts}}} \end{aligned}$$

Cela fait donc 15 sommes à traiter. Puisque les indices j et j' , et les indices k et k' jouent des rôles symétriques, cela réduit (sauf erreur de compte) à 9 le nombre de sommes distinctes à traiter. De plus, pour la dernière somme U_5 , on doit distinguer l'ordre sur les indices de sommation, ce qui fait $4! = 24$ possibilités supplémentaires, à diviser par 6 par symétrie de j, j' et k, k' , donc un total de $9 + 4 = 13$ termes distincts à traiter.

- Terme $j = j' = k = k'$. Dans ce cas, la somme est réduite à

$$\sum_{j=j'=k=k'}^{n-1} = c_H \sum_{j=0}^{n-1} \rho_H(0)^5 = c_H n.$$

- Terme $j = j' = k, k' \neq j$. Constatons d'abord que c'est la même somme que $j = j' = k', k' \neq k$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{\substack{j=j'=k \\ k' \neq j}}^{n-1} = c_H \sum_{j=0}^{n-1} \rho_H(0)^2 \sum_{\substack{k'=0 \\ k' \neq j}}^{n-1} \rho_H(|j - k'|)^3 \leq c_H n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right)^{3 \cdot 2(1-H)} \leq c_H n,$$

car $6(1-H) > 1$.

- Terme $j = k = k', j' \neq j$. C'est la même somme que $j' = k = k', j \neq j'$.

$$\sum_{\substack{j=k=k' \\ j' \neq j}} = c_H \sum_{j=0}^{n-1} \rho(0)^3 \sum_{\substack{j'=0 \\ j' \neq j}}^{n-1} \rho_H(|j-j'|)^2 \leq c_H n \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{2 \cdot 2(1-H)} = c_H n^{2-4(1-H)} = c_H n^{4H-2}.$$

- Terme $j = j', k = k', j \neq k$.

$$\sum_{\substack{j=j' \\ k=k' \\ j \neq k}} = c_H \rho_H(0)^3 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \rho_H(|k-j|)^2 \leq c_H n \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{2 \cdot 2(1-H)} \leq c_H n^{2-4(1-H)} = c_H n^{4H-2}.$$

- Terme $j = k, j' = k', j' \neq j$. C'est la même somme que $j = k', j' = k, j \neq j'$.

$$\sum_{\substack{j=j' \\ k=k' \\ j \neq k}} = c_H \rho_H(0)^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{j'=0 \\ j' \neq j}}^{n-1} \rho_H(|j-j'|)^3 \leq c_H n \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{3 \cdot 2(1-H)} \leq c_H n,$$

car $6(1-H) > 1$.

- Terme $j = j', k' \neq j, k \neq k'$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=j' \\ k \neq j \\ k' \neq k}} &= c_H \rho_H(0) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \sum_{\substack{k'=0 \\ k' \neq j}}^{n-1} \rho_H(|k-k'|)^2 \rho_H(|k-j|) \rho_H(|k'-j|) \\ &\leq c_H n \sum_{k,k'=0}^{n-1} \rho_H(|k-k'|)^2 \rho_H(k) \rho_H(k') = c_H n \sum_{k=0}^{n-1} \rho_H(k) \sum_{k'=0}^{n-1} \rho_H(|k-k'|)^2 \rho_H(k') \\ &\leq c_H n \sum_{k=0}^{n-1} \rho_H(k) \left(\sum_{k'=0}^{n-1} \rho_H(|k-k'|)^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{k'=0}^{n-1} \rho_H(k')^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_H n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_H(k) \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_H(k)^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_H(k)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_H n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{2(1-H)} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k}\right)^{4 \cdot 2(1-H)} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k}\right)^{2 \cdot 2(1-H)} \right)^{1/2} \\ &\leq c_H n^{2 - \frac{1}{2} 2(1-H) - \frac{1}{2} 4(1-H)} = c_H n^{3H-1}. \end{aligned}$$

- Terme $j = k, k' \neq j, j' \neq k'$. C'est la même somme que $j = k', k \neq j, j' \neq k; j' = k, k' \neq j', j \neq k'$;
 $j' = k', k \neq j', j \neq k$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=k \\ k' \neq k \\ j' \neq k'}} &= c_H \rho_H(0) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{j'=0 \\ j' \neq j}}^{n-1} \sum_{\substack{k'=0 \\ k' \neq j'}}^{n-1} \rho_H(|j-k'|)^2 \rho_H(|j-j'|) \rho_H(|k'-j|) \\ &\leq c_H n^{6H-3}. \end{aligned}$$

- Terme $k = k', j \neq k, j' \neq k'$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=k' \\ j \neq k \\ j' \neq k'}} &= c_H \rho_H(0)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} \sum_{\substack{j'=0 \\ j' \neq j}}^{n-1} \rho_H(|k-j|) \rho_H(|k-j'|) \rho_H(|j-j'|) \\ &\leq c_H n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho_H(|k-j|) \rho_H(k) \rho_H(j) \\ &\leq c_H n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{2(1-H)} \right) \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{2 \cdot 2(1-H)} \right) \\ &\leq c_H n^{3-2(1-H)-4(1-H)} = c_H n^{6H-3}. \end{aligned}$$

- Terme j, j', k, k' distincts. On ordonne les indices. Faisons le calcul pour $j < j' < k < k'$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j < j' < k < k'} &= c_H \sum_{j < j' < k < k'} \rho_H(|k - k'|)^2 \rho_H(|k - j|) \rho_H(|k' - j'|) \rho_H(|j - j'|) \\
&\leq c_H \sum_{j < j' < k < k'} |k - k'|^{4(1-H)} |k - j|^{2(1-H)} |k' - j'|^{2(1-H)} |j - j'|^{2(1-H)} \\
&\leq c_H \sum_{j < j' < k < k'} \frac{1}{|k - k'|^{4(1-H)} |k - j|^{2(1-H)} |k' - j'|^{2(1-H)} |j - j'|^{2(1-H)}} \\
&\leq c_H \sum_{j < j' < k < k'} \frac{1}{|k - k'|^{4(1-H)} |k' - j'|^{2(1-H)} |j - j'|^{4(1-H)}} \\
&\leq c_H \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right)^{4(1-H)} \right) \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right)^{4(1-H)} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right)^{8(1-H)} \right)^{1/2} \\
&\leq c_H n^{1-4(1-H)} n^{1/2-2(1-H)} = c_H n^{6H-9/2}.
\end{aligned}$$

Les autres termes se gèrent de la même manière.

On a alors conclu que le terme T_1 vérifiait alors

$$T_1 \leq c_H \left(n + n^{4H-2} + n^{6H-3} + n^{6H-9/2} \right)$$

Ainsi,

$$\mathbb{E} \left[\left\langle DV_n^{(3)}, DV_n^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]^{1/2} \leq c_H \left(n^{1/2} + n^{2H-1} + n^{3H-3/2} + n^{3H-9/4} + n^{5H-3} \right) \leq c_H n^{5H-3}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_W \left(\left(\frac{1}{n^{2H-1}} V_n^{(2)}, \frac{1}{\sigma_{3,H} \sqrt{n}} V_n^{(3)} \right), \mathcal{R} \otimes \mathcal{N}(0, 1) \right) \\
&\leq \frac{c_H}{n^{7/2-3H}} + \frac{c_H}{n^{H-3/4}} + \frac{c_H}{n^{2H-1/2}} n^{5H-3} = c_H \left(\frac{1}{n^{7/2-3H}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} + \frac{1}{n^{5/2-3H}} \right) \\
&= c_H \left(\frac{1}{n^{5/2-3H}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} \right).
\end{aligned}$$

Ce qui conclut dans la démonstration dans le cas $q = 3$ et $3/4 < H < 5/6$. □

Théorèmes limites de la loi jointe entre solutions d'ÉDPS et leurs moyennes spatiales

« – Comment peux-tu les appeler ami alors qu'ils nous abandonnent?
 – Ils nous abandonnent parce que tu leur brises le cœur!
 – Je ne le fais pas exprès.
 – Je sais. Tu ne le fais jamais exprès.
 C'est la seule raison pour laquelle ils te supportent. »

Sheldon à Amy, *The Big Bang Theory*,
 2019

Ce chapitre est issu de [TZ24d], toujours en cours de soumission au moment de la rédaction.

RÉSUMÉ

Soit $(u(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d)$ la solution de l'équation des ondes ou de la chaleur stochastique, avec bruit blanc en temps, et bruit blanc ou coloré en espace. On considère la moyenne spatiale de la solution

$$M_R(t) \triangleq \frac{1}{\text{Leb}(|x| \leq R)} \int_{|x| \leq R} u(t, x) \, dx.$$

Il est connu que si $F_R(t)$ est la normalisation de $M_R(t)$, $F_R(t)$ converge en loi vers une gaussienne lorsque $[R \rightarrow \infty]$. On va montrer que $F_R(t)$ est en fait indépendante asymptotiquement de la solution elle-même à n'importe quel point de l'espace et à n'importe quel temps, c'est-à-dire que le vecteur $(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x}))$ converge en loi lorsque $[R \rightarrow \infty]$ vers une gaussienne indépendante de $u(\bar{t}, \bar{x})$. Grâce à la méthode de NOURDIN–PECCATI *indépendante*, on explicite une borne en distance de WASSERSTEIN de cette convergence.

Dans la dernière décennie, un grand nombre d'articles analysaient le comportement asymptotique de solutions de plusieurs équations aux dérivées partielles stochastiques (ÉDPS dans la suite). Le contexte est le suivant. On se donne une ÉDPS générale à bruit multiplicatif de la forme

$$\mathcal{L}u(t, x) = \sigma(u(t, x))\dot{W}(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad \text{[VIII.1]}$$

avec condition initiale $u(t = 0, x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On suppose que l'opérateur $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel du premier ou du deuxième ordre avec des coefficients constants, que $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne et que W est un bruit blanc en temps, et blanc ou coloré en espace avec un bruit fractionnaire (défini plus loin, ou regarder le chapitre IV). Une solution au sens évolutif de [VIII.1] est un processus $(u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ vérifiant presque sûrement l'équation intégrale

suivante

$$u(t, x) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) \sigma(u(s, y)) W(ds, dy), \quad [\text{VIII.2}]$$

où G est le noyau de GREEN associé à $\mathcal{L}$. L'intégrale stochastique est à comprendre au sens de DALANG–WALSH.

On suppose qu'il existe une unique solution à l'équation intégrale [VIII.2] (ce qui est le cas pour les cas que nous allons traiter). L'objectif est d'étudier le comportement asymptotique lorsque $[R \rightarrow +\infty]$ de la quantité

$$M_R(t) \triangleq \frac{1}{\text{Leb}(|x| \leq R)} \int_{|x| \leq R} u(t, x) \, dx,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et Leb la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}^d$. La variable aléatoire $M_R(t)$, fonctionnelle du processus u , est appelé *moyenne spatiale au temps t sur $[-R, R]$* de la solution de l'ÉDPS [VIII.1]. On s'intéresse en fait plus précisément à la forme centrée réduite de $M_R(t)$, notée $F_R(t)$, donnée par

$$F_R(t) \triangleq \frac{M_R(t) - \mathbb{E}[M_R(t)]}{\sigma[M_R(t)]} = \frac{1}{\sigma_R} \int_{|x| \leq R} (u(t, x) - 1) \, dx, \quad [\text{VIII.3}]$$

où σ_R est l'écart-type de $M_R(t)$, donné par

$$\sigma_R^2 \triangleq \mathbb{E} \left[\left(\int_{|x| \leq R} (u(t, x) - 1) \, dx \right)^2 \right].$$

Dans plusieurs situations, il a été démontré que pour $t > 0$ fixé, le processus $F_R(t)$ converge en loi lorsque $[R \rightarrow \infty]$ vers $\mathcal{N}(0, 1)$, avec de plus une estimation en variation totale entre la loi de $F_R(t)$ et $\mathcal{N}(0, 1)$. Par exemple, les références suivantes traitent le cas de l'équation de la chaleur (c'est-à-dire $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta$, avec Δ le laplacien sur $\mathbb{R}^d$) :

- [HNV20] pour le cas de bruit blanc en espace,
- [Hua+20] dans un cas coloré en espace,
- [NXZ22] pour un bruit coloré, mais avec un bruit défini par un produit de WICK.

Pour le cas de l'équation des ondes, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$,

- [DNZ20] dans le cas coloré fractionnaire en dimension 1,
- [GNZ21] dans le cas 2D coloré avec bruit fractionnaire isotrope (on parle aussi de noyau de RIESZ)
- [NZ22] dans le cas d'un bruit général vérifiant la condition de DALANG (regarder le chapitre IV).

Les résultats sont plus précis que la simple convergence, car ils donnent de plus une vitesse de convergence pour des distances usuelles à la méthode de STEIN. Nous les exposons dans les Théorèmes VIII.1.1 et VIII.1.3. Ils donnent aussi des résultats fonctionnels qu'on n'exploitera pas ici.

Une grande variété d'autres situations a été considérée dans la littérature. Les cas où les bruits temporels ne sont plus blancs sont traités dans [Bal+22] pour une étude de borne de dérivée de MALLIAVIN dans L^p dans le cadre d'un bruit général vérifiant la condition de DALANG, dans [NXZ22], dans [NZ20] qui quitte même le thème des ÉDPS avec une étude générale de processus gaussiens ou encore dans [NSZ21] traitant aussi un bruit défini *via* un produit de WICK. Le cas de l'équation de la chaleur fractionnaire (c'est-à-dire remplacer le laplacien par un laplacien fractionnaire) est vu dans [Ass+22]. Le cas du bruit indépendant du temps est traité pour l'équation des ondes dans [BY22] avec $\sigma(u) = u$, et bruit donné par la condition de DALANG, dans [BY24], où le bruit est *rugueux* au sens où on le définit de manière fractionnaire avec $1/4 < H < 1/2$ et dans [BY23] pour l'équation de la chaleur sous les mêmes deux dernières modalités. Mentionnons enfin le cas de conditions initiales données par des distributions de DIRAC, étudiées dans [Che+22] pour l'équation de la chaleur en dimension 1 avec bruits blancs et dans [KNP21] en dimension $d \geq 1$, toujours pour l'équation de la chaleur.

Dans le travail présenté dans ce chapitre, on cherche à montrer des Théorèmes Limites qu'on peut interpréter comme de l'indépendance asymptotique entre la moyenne spatiale normalisée $F_R(t)$ donnée par [VIII.3] et la solution évaluée en $(\bar{t}, \bar{x})$, avec $\bar{t} \geq 0$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ fixés. Autrement dit, on montre que pour tout $\bar{t} \geq 0$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$, le processus suivant converge en loi :

$$(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x})) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x})).$$

On l'interprète comme de l'indépendance asymptotique. Intuitivement, cela signifie que de grandes variations (au sens de la variance) pour la solution n'impliquent pas de grandes variations pour la moyenne spatiale. Les valeurs extrêmes de $u(\bar{t}, \bar{x})$ n'ont pas d'effet sur le comportement de la moyenne spatiale lorsque le domaine d'intégration devient de plus en plus grand. Pour un travail récent sur le concept d'indépendance asymptotique, regarder [DN21], et l'annexe A.

Nous traiterons plusieurs situations : le cas des équations de la chaleur et des ondes non linéaires avec un bruit blanc en espace et en temps, ou alors un bruit blanc en temps et coloré en espace avec un bruit donné par un noyau de RIESZ. Dans toutes les situations, on va montrer un Théorème Limite qu'on interprète comme de l'indépendance asymptotique entre $F_R(t)$ et $u(\bar{t}, \bar{x})$ avec de plus une estimation en distance de WASSERSTEIN entre la loi de $((F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x})))$ et $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))$ lorsque R est assez grand.

Pour démontrer ces résultats, on utilise une variante de la méthode de STEIN, développée dans [Pim22], et aussi dans le chapitre VII. Cette méthode permet de donner des bornes en termes d'opérateurs de MALLIAVIN pour la distance de WASSERSTEIN entre la loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y) (avec des composantes dérivables au sens de MALLIAVIN) et la loi de $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(Y)$. On va en fait faire une légère modification de la méthode développée dans le chapitre VII, en considérant le cas où X est une intégrale au sens de SKOROHOD.

1. Préliminaires et buts de ce chapitre

Commençons par présenter les équations de la chaleur et des ondes stochastiques, et quelques propriétés de leurs solutions. Nous allons aussi rappeler un certain nombre de résultats obtenus dans la littérature à propos du comportement asymptotique de la moyenne spatiale pour ces équations, et allons décrire les contributions que nous apportons.

1.1. Bruit gaussien et intégrale de Walsh

On a introduit avec les mains ces notions dans le chapitre IV, on réfère le lecteur non averti à ce sujet à ce chapitre. Expliquons en détail les bruits et les intégrales stochastiques que nous manipulerons. On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On fixe $d \geq 1$. On note $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des boréliens bornés de $\mathbb{R}^d$. Pour $0 < \alpha < d$, on considère le champ gaussien centré $W_\alpha = (W_\alpha(t, A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d))$ blanc en temps et coloré en espace par un *bruit de RIESZ*. Cela signifie que pour $s, t \geq 0$ et $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, pour $0 < \alpha < d$,

$$\mathbb{E}[W_\alpha(t, A)W_\alpha(s, B)] = (s \wedge t) \int_A \int_B f_\alpha(x - y) \, dx \, dy,$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f_\alpha(x) \triangleq \frac{1}{|x|^{d-\alpha}}$. Il s'agit en fait d'une reformulation du bruit fractionnaire isotropique en espace d'indice $1/2 < H < 1$ introduit dans le chapitre IV, Définition IV.1.6 avec $d - \alpha = 2(d - H)$ (et à constante près). On considère aussi W_b un bruit blanc en temps et en espace, comme défini dans le Chapitre IV, c'est-à-dire que $W_b = (W_b(t, A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d))$ est gaussien centré et admet comme fonction de covariance

$$\mathbb{E}[W_b(t, A)W_b(s, B)] = (s \wedge t) \text{Leb}(A \cap B).$$

On définit un espace de HILBERT, noté $\mathcal{H}$, dépendant de $\alpha \in (0, d) \cup \{b\}$, en complétant l'ensemble des fonctions du type $\mathbf{1}_{[0, t]} \otimes \mathbf{1}_A$, avec $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ pour le produit scalaire donné pour $s \geq 0$

et $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, et pour $0 < \alpha < d$ par

$$\langle \mathbf{1}_{[0,t]} \otimes \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{[0,s]} \otimes \mathbf{1}_B \rangle_{\mathcal{H}} \stackrel{\Delta}{=} (s \wedge t) \int_A \int_B f_{\alpha}(x-y) \, dx \, dy = \mathbb{E}[W_{\alpha}(t, A)W_{\alpha}(s, B)].$$

Pour $f, g \in \mathcal{H}$, on a alors

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(s, y)g(s, y') \, dy \, dy' \right] ds.$$

Dans le cas du bruit blanc, on a simplement $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Pour $\alpha \in (0, d) \cup \{b\}$, le processus gaussien W_{α} donne naissance à un processus isonormal, qu'on note encore W_{α} , sur $\mathcal{H}$. Pour $t > 0$, on note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $(W_{\alpha}(s, A), s \leq t, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d))$. On se place dans la suite sur $\mathcal{G}$, la tribu engendrée par les négligeables de $\mathcal{F}$ et $\bigvee_{t>0} \mathcal{F}_t$. On considère les opérateurs de MALLIAVIN par rapport à W_{α} , notés D , δ , L et L^{-1} , regarder le chapitre I.

Un champ stochastique $(X(t, y), t \geq 0, y \in \mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable au sens de DALANG–WALSH par rapport à W_{α} s'il est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et si, lorsque $0 < \alpha < d$

$$\mathbb{E}[\|X\|_{\mathcal{H}}^2] = \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[X(s, y)X(s, y')] f_{\alpha}(y - y') \, dy \, dy' \right] ds < \infty,$$

et lorsque $\alpha = b$, c'est-à-dire dans le cas blanc,

$$\mathbb{E}[\|X\|_{\mathcal{H}}^2] = \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[X(s, y)^2] \, dy \right] ds < \infty,$$

Dans ce cas, son intégrale stochastique au sens de WALSH est notée $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} X(s, y) W_{\alpha}(ds, dy)$. Cette intégrale vérifie la formule d'isométrie suivante : pour $0 < \alpha < d$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} X(s, y) W_{\alpha}(ds, dy) \right)^2 \right] = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[X(s, y)X(s, y')] f_{\alpha}(y - y') \, dy \, dy' \, ds,$$

et pour $\alpha = b$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} X(s, y) W_b(ds, dy) \right)^2 \right] = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[X(s, y)^2] \, dy \, ds.$$

1.2. Convergence des moyennes spatiales dans les équations de la chaleur et des ondes

Nous rappelons dans cette sous-section les résultats connus que nous exploiterons dans la suite, à propos des équations de la chaleur et des ondes, et des moyennes spatiales associées à leurs solutions.

1.2.1 Équation de la chaleur

On considère l'ÉDPS suivante : pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \sigma(u(t, x)) \dot{W}_{\alpha}(t, x), \quad [\text{VIII.4}]$$

avec condition initiale $u(t = 0, x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, où W_{α} est le bruit gaussien introduit dans la sous-section précédente et $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne. On suppose aussi que $\sigma(1) \neq 0$ afin d'éviter de traiter le cas de solution triviale (c'est-à-dire de manipuler le processus constant égal à 1). La solution est prise au sens évolutif du terme (regarder le chapitre IV), c'est-à-dire que u vérifie l'équation intégrale suivante : pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$u(t, x) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W_{\alpha}(ds, dy), \quad [\text{VIII.5}]$$

où l'intégrale est prise au sens de WALSH comme expliqué dans la sous-section précédente, et G est le noyau de GREEN donné par [IV.5]. Lorsque $0 < \alpha < d$, un tel u n'existe que si et seulement si $d < 2 + \alpha$, c'est-à-dire $d - 2 < \alpha < d$. Dans le cas blanc, un tel processus n'existe que si $d = 1$. Regarder le chapitre IV. On se restreint donc à ces choix de dimension d pour tout le reste de ce chapitre. De plus, G vérifie la propriété de semi-groupe suivante : pour tout $s, t \geq 0$ et $x, x' \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(t, x' - y) G(s, y - x) dy = G(t + s, x - x'). \quad [\text{VIII.6}]$$

Enfin, il est aussi connu que pour tout $p \geq 1$ et $T > 0$ (regarder [Dal99]) que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E} [|u(t, x)|^p] < \infty. \quad [\text{VIII.7}]$$

On note $F_R^H(t)$ la moyenne spatiale normalisée (définie par [VIII.3]) associée à l'équation de la chaleur. On peut en fait aussi l'écrire comme l'intégrale de WALSH, donc aussi au sens de SKOROHOD puisque ces deux notions coïncident en cas de processus adaptés (regarder la Proposition I.3.16, ou [Nua06]), d'un processus noté $v_{R,t} : F_R^H(t) = \delta(v_{R,t})$, où $v_{R,t} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ est donnée pour presque tout $s \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}^d$ par

$$v_{R,t}(s, y) \triangleq \frac{1}{\sigma_R} \left(\int_{|x| \leq R} G(t - s, x - y) dx \right) \sigma(u(s, y)) \mathbf{1}_{[0,t]}(s). \quad [\text{VIII.8}]$$

Le Théorème suivant a été démontré dans [HNV20] et [Hua+20].

Théorème VIII.1.1 : Soient $T > 0$ et $v_{R,T}$ défini par [VIII.8]. Alors pour tout $t > 0$ et $R > 0$, $F_R^H(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$. De plus :

1. (Théorème 1.1 de [HNV20]) Lorsque $d = 1$ et $\alpha = \flat$ (le cas où le bruit est blanc), il existe une constante $C = C(T) > 0$ telle que pour tout $R > 0$ et $t \in [0, T]$

$$\mathbf{d}_{\text{TV}}(F_R^H(t), \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sqrt{\text{Var} [\langle DF_R^H(t), v_{R,t} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)}]} \leq \frac{C}{\sqrt{R}}, \quad [\text{VIII.9}]$$

où $\mathbf{d}_{\text{TV}}$ est la distance en variation totale. De plus, lorsque $[R \rightarrow \infty]$, il existe $C = C(T) > 0$ tel que $\sigma_R \sim C\sqrt{R}$.

2. (Théorème 1.1 de [Hua+20]) Si $\max\{0, d - 2\} < \alpha < d$ (cas coloré) alors il existe $C = C(\alpha, T) > 0$ telle que pour tout $R > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\mathbf{d}_{\text{TV}}(F_R^H(t), \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sqrt{\text{Var} [\langle DF_R^H(t), v_{R,t} \rangle_{\mathcal{H}}]} \leq \frac{C}{R^{\beta/2}}, \quad [\text{VIII.10}]$$

où $\beta = d - \alpha \in [0, \min\{2, d\}]$. De plus, il existe $C = C(T, \alpha) > 0$ pour lequel lorsque $[R \rightarrow \infty]$, $\sigma_R \sim CR^{d-\beta/2}$.

Le dernier résultat utile pour la suite est le Lemme suivant qui permet d'estimer la dérivée de MALLIAVIN de $u(t, x)$ en termes de la fonction de GREEN. Ces résultats sont aussi démontrés dans [HNV20] et [Hua+20].

Lemme VIII.1.2 : Soient $T > 0$, $t \in (0, T]$, $0 < \alpha < d$ ou $\alpha = \flat$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $p \geq 2$, $u(t, x) \in \mathbb{D}^{1,p}$ et il existe une constante $C = C(p, T, \alpha)$ telle que pour presque tout $s \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E} [|D_{s,y} u(t, x)|^p]^{1/p} \leq CG(t - s, x - y).$$

1.2.2 Équation des ondes en dimension 1

On se place en dimension 1 et on considère l'équation des ondes sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \sigma(u(t, x)) \dot{W}_\alpha(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad [\text{VIII.11}]$$

avec conditions initiales $u(t = 0, x) = 1$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où W_α est le bruit introduit dans la sous-section précédente et $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne. La solution est à comprendre au sens évolutif : u est solution de l'équation intégrale suivante

$$u(t, x) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t - s, x - y) \sigma(u(s, y)) W_\alpha(ds, dy), \quad [\text{VIII.12}]$$

où l'intégrale stochastique est à comprendre au sens de WALSH. Le noyau de GREEN G_1 est donné pour presque tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$G_1(t, x) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x| \leq t\}}. \quad [\text{VIII.13}]$$

La borne suivante est connue, regarder [Dal99] :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[|u(t, x)|^p \right] < \infty. \quad [\text{VIII.14}]$$

On note ici $F_R^W(t)$ la moyenne spatiale normalisée associée à l'équation des ondes. On peut le noter $F_R^W(t) = \delta(v_{R,t})$ où

$$v_{R,t}(s, y) = \frac{1}{\sigma_R} \left(\int_{|x| \leq R} G_1(t - s, x - y) dx \right) \sigma(u(s, y)) \mathbf{1}_{[0,t]}(s). \quad [\text{VIII.15}]$$

Le résultat suivant provient de [DNZ20] (écrit dans un langage fractionnaire).

Théorème VIII.1.3 : Soient $T > 0$ et $v_{R,t}$ donné par [VIII.15].

1. Pour $\alpha = \flat$, c'est-à-dire dans le cas du bruit blanc en espace, il existe $C = C(p, T)$ telle que pour tout $t \geq 0$ et pour R assez grand,

$$d_{TV}(F_R^W(t), \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sqrt{\text{Var} \left[\langle DF_R^W(t), v_{R,t} \rangle_{\mathcal{H}} \right]} \leq \frac{C}{\sqrt{R}}.$$

2. Pour $0 < \alpha < 1$, il existe $C = C(p, T, \alpha) > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$ et pour R assez grand,

$$d_{TV}(F_R^W(t), \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sqrt{\text{Var} \left[\langle DF_R^W(t), v_{R,t} \rangle_{\mathcal{H}} \right]} \leq \frac{C}{R^{\beta/2}},$$

où $\beta = 1 - \alpha \in (0, 1)$. De plus, il existe une autre constante $C = C(p, T, \alpha) > 0$ pour laquelle on a l'équivalent suivant lorsque $[R \rightarrow \infty] : \sigma_R \sim CR^{1-\beta/2}$.

Enfin, on dispose d'un lemme similaire au Lemme VIII.1.2.

Lemme VIII.1.4 : Soient $T > 0$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Pour tout $p \geq 2$, $u(t, x) \in \mathbb{D}^{1,p}$ et il existe une constante $C = C(p, T, \alpha) > 0$ telle que pour presque tout $s \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left[|D_{s,y} u(t, x)|^p \right]^{1/p} \leq C G_1(t - s, x - y). \quad [\text{VIII.16}]$$

1.3. Résultats

On travaille dans ce chapitre avec la distance de WASSERSTEIN, notée d_W , définie dans la Définition II.1.2.

Théorème VIII.1.5 : Soient $T > 0$, $d \geq 1$, F_R^H donné par [VIII.3], un temps arbitraire $\bar{t} \in [0, T]$ et un point arbitraire $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$.

1. Supposons que $d = 1$ et $\alpha = \flat$, donc qu'on se place dans le cas d'un bruit blanc en espace. Alors il existe $C = C(T) > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ et pour $R > 0$,

$$d_W \left(\text{Loi}(F_R^H(t), u(\bar{t}, \bar{x})), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x})) \right) \leq \frac{C}{\sqrt{R}}. \quad [\text{VIII.17}]$$

2. Lorsque $d \geq 1$, avec $\max\{0, d - 2\} < \alpha < d$, il existe $C = C(\alpha, T) > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ et $R > 0$

$$d_W\left(\text{Loi}(F_R^H(t), u(\bar{t}, \bar{x})), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))\right) \leq \frac{C}{R^{\beta/2}}, \quad [\text{VIII.18}]$$

où $\beta = d - \alpha$.

Un Théorème similaire est vrai pour l'équation des ondes.

Théorème VIII.1.6 : Soient $T > 0$, F_R^W donné par [VIII.3], un temps arbitraire $\bar{t} \in [0, T]$ et un point arbitraire $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

1. Supposons que $\alpha = 1$, donc qu'on se place dans le cas d'un bruit blanc en espace. Alors il existe $C = C(T) > 0$ et $R_0 = R_0(T, \bar{x})$ tels que pour tout $t \in [0, T]$ et pour $R > R_0$,

$$d_W\left(\text{Loi}(F_R^W(t), u(\bar{t}, \bar{x})), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))\right) \leq \frac{C}{\sqrt{R}}. \quad [\text{VIII.19}]$$

2. Lorsque $0 < \alpha < 1$, il existe $C = C(\alpha, T) > 0$ et $R_0 = R_0(T, \bar{x}) > 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$ et $R > R_0$,

$$d_W\left(\text{Loi}(F_R^W(t), u(\bar{t}, \bar{x})), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x}))\right) \leq \frac{C}{R^{\beta/2}}, \quad [\text{VIII.20}]$$

où $\beta = 1 - \alpha$.

Remarque VIII.1.7. Notez ici que toutes les constantes notées C dépendent de T et α , mais pas du choix de $\bar{t}$ et $\bar{x}$. Cette dépendance en les évaluations se repèrent dans le rang R_0 à partir duquel les inégalités sont valables. Il semblerait qu'on ne puisse pas mieux faire et qu'on ne peut trouver un rang R_0 ne dépendant pas des paramètres $\bar{t}$ et $\bar{x}$ dans le cas de l'équation des ondes, tout en gardant C ne dépendant que de T . ♣

2. Une borne de Stein fondamentale

Nous commençons nos démonstrations en introduisant une nouvelle borne de STEIN pour un couple de variables aléatoires, en adoptant ce qui est expliqué dans le Chapitre VII. On se place dans cette section dans un cadre général, où les opérateurs de MALLIAVIN sont définis à travers un processus isonormal W défini sur un espace de HILBERT $\mathcal{H}$. On en déduit la Proposition suivante.

Proposition VIII.2.1 : Soient $X = \delta(v)$, où $v \in \text{Dom}(\delta) \subset L^2(\Omega \times \mathcal{H})$, et $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)$ un vecteur aléatoire réel. On note $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$. On suppose enfin que $X \in \mathbb{D}^{1,4}$, et que pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y_j \in \mathbb{D}^{1,4}$. Alors

$$d_W\left(\text{Loi}(X, \mathbf{Y}), \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \sqrt{\text{Var}[\langle DX, v \rangle_{\mathcal{H}}]} + \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} \sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E}[\langle v, DY_j \rangle_{\mathcal{H}}^2]}. \quad [\text{VIII.21}]$$

Démonstration : Considérons $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , admettant des dérivées partielles toutes bornées par 1. Notons $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de $\mathbf{Y}$. Alors d'après l'équation de STEIN [VII.3] établie dans le Chapitre VII, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] &= \mathbb{E}\left[h(X, \mathbf{Y}) - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sigma^2 \frac{\partial f_h}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f_h(X, \mathbf{Y})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sigma^2 \frac{\partial f_h}{\partial x}(X, \mathbf{Y})\right] - \mathbb{E}[\delta(v) f_h(X, \mathbf{Y})]. \end{aligned}$$

Par relation de dualité [I.4] et par règle de la chaîne, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})] &= \mathbb{E} \left[\sigma^2 \frac{\partial f_h}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] - \mathbb{E} [\langle v, Df_h(X, \mathbf{Y}) \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial f_h}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) (\sigma^2 - \langle v, DX \rangle_{\mathcal{H}}) \right] - \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\frac{\partial f_h}{\partial y_j}(X, \mathbf{Y}) \langle v, DY_j \rangle_{\mathcal{H}} \right].\end{aligned}$$

Encore par relation de dualité [I.4], on a en fait

$$\mathbb{E}[\langle v, DX \rangle_{\mathcal{H}}] = \mathbb{E}[\delta(v)^2] = \mathbb{E}[X^2] = \sigma^2.$$

Ainsi, par CAUCHY-SCHWARZ et par la Proposition VII.1.2, on obtient

$$|\mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z, \mathbf{Y})]| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \sqrt{\text{Var}[\langle DX, v \rangle_{\mathcal{H}}]} + \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} \sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E}[\langle v, DY_j \rangle_{\mathcal{H}}^2]}.$$

Pour $h \in \text{Lip}(1)$ générale avec des dérivées bornées par 1, on conclut comme d'habitude avec un argument d'approximation par convolution gaussienne : pour $\varepsilon > 0$, $h_\varepsilon = G_\varepsilon * h$ est C^1 , admet des dérivées bornées par 1, donc vérifie l'inégalité écrite précédemment, en plus de converger uniformément vers h . Il suffit de passer à la limite $[\varepsilon \rightarrow 0]$ pour conclure sur [VIII.2.1]. $\square$

3. Démonstrations

Il s'agit de démontrer ici les Théorèmes VIII.1.5 et VIII.1.6. La façon de procéder sera la même, mais les calculs ne se gèrent pas de la même façon. Dans le cas de la chaleur, on utilise la propriété de semi-groupe de la fonction de GREEN tandis que le cas des ondes nous fait exploiter le caractère explicite des calculs d'intégrales avec son noyau de GREEN.

3.1. Démonstration du Théorème VIII.1.5

3.1.1 Cas du bruit blanc

Commençons par traiter le point 1. du Théorème VIII.1.5. Cela signifie que $d = 1$, et que $\alpha = b$, donc qu'on se place dans le cadre où W_b est un bruit blanc en espace et en temps.

Démonstration du point 1. du Théorème VIII.1.5 : Fixons $\bar{t} \geq 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$ et $R > 0$. Nous avons vu que $F_R^H(t) = \delta(v_{R,t})$, avec $v_{R,t}$ donné par [VIII.8]. De plus, le Théorème VIII.1.1 nous affirme que $F_R^H(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Nous sommes donc dans le cadre de la Proposition VIII.2.1 qui nous donne

$$\begin{aligned}& \text{dw} \left(\text{Loi}(F_R^H(t), u(\bar{t}, \bar{x})), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x})) \right) \\ & \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\text{Var}[\langle DF_R^H(t), v_{R,t} \rangle_{\mathcal{H}}]} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathbb{E}[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2]}.\end{aligned} \tag{VIII.22}$$

Le Théorème VIII.1.1 nous donne une estimation du premier terme :

$$\sqrt{\text{Var}[\langle DF_R^H(t), v_{R,t} \rangle_{\mathcal{H}}]} \leq \frac{C}{\sqrt{R}}.$$

Il ne reste plus qu'à estimer le deuxième terme. Par définition du produit scalaire sur $\mathcal{H}$ dans le cas blanc, et par un théorème de FUBINI

$$\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sigma_R} \int_{-R}^R \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \sigma(u(s, y)) G(t-s, x-y) D_{s,y} u(\bar{t}, \bar{x}) dy ds \right] dx.$$

On élève au carré, et on prend l'espérance de cette expression.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2] &= \frac{1}{\sigma_R^2} \int_{-R}^R \int_{-R}^R \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) G(t-s', x'-y') \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{E}[\sigma(u(s, y)) \sigma(u(s', y')) D_{s,y} u(\bar{t}, \bar{x}) D_{s',y'} u(\bar{t}, \bar{x})] dy' ds dy ds \right\} dx dx' .\end{aligned}$$

On applique deux fois l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ sur le terme lié à l'espérance :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sigma(u(s, y)) \sigma(u(s', y')) D_{s, y} u(\bar{t}, \bar{x}) D_{s', y'} u(\bar{t}, \bar{x}) \right] \\ & \leq \mathbb{E} [\sigma(u(s, y))^4]^{1/4} \mathbb{E} [\sigma(u(s', y'))^4]^{1/4} \mathbb{E} [D_{s, y} u(\bar{t}, \bar{x})^4]^{1/4} \mathbb{E} [D_{s', y'} u(\bar{t}, \bar{x})^4]^{1/4}. \end{aligned}$$

Cela permet de factoriser l'intégrale :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle v_{R, t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\ & \leq \frac{1}{\sigma_R^2} \left(\int_{-R}^R \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) \mathbb{E} [\sigma(u(s, y))^4]^{1/4} \mathbb{E} [D_{s, y} u(\bar{t}, \bar{x})^4]^{1/4} dy ds \right\} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Or, σ est supposée globalement lipschitzienne, si bien que si $\|\sigma\|_{\text{Lip}}$ est sa constante de LIPSCHITZ, alors pour tout $s \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{y \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [\sigma(u(s, y))^4] \leq 8|\sigma(0)|^4 + 8\|\sigma\|_{\text{Lip}}^4 \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [u(t, x)^4], \quad \text{[VIII.23]}$$

où le membre de droite est fini via [VIII.7]. De plus, d'après le Lemme VIII.1.2, pour tout $s \in [0, T]$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} [D_{s, y} u(\bar{t}, \bar{x})^4]^{1/4} \leq CG(\bar{t} - s, \bar{x} - y).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R, t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{-R}^R \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) G(\bar{t}-s, \bar{x}-y) dy ds \right\} dx \right)^2.$$

Or, par la propriété de semi-groupe [VIII.6] vérifiée par G , on conclut

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle v_{R, t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] & \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{-R}^R \left\{ \int_0^t G(t+\bar{t}-2s, x-\bar{x}) ds \right\} dx \right)^2 \\ & \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t+\bar{t}-2s, x) dx dt \right)^2 \leq \frac{CT^2}{\sigma_R^2} = \frac{C}{\sigma_R^2}. \end{aligned}$$

Or, d'après le Théorème VIII.1.1, σ_R^2 est équivalent à C/R . On en déduit que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R, t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{R}.$$

Il en est donc de même pour la distance de WASSERSTEIN recherchée, si bien qu'on conclut alors sur [VIII.17]. $\square$

3.1.2 Cas du bruit coloré

On montre maintenant le point 2. du Théorème VIII.1.5, c'est-à-dire le cas où $\max\{0, d-2\} < \alpha < d$.

Démonstration du point 2. du Théorème VIII.1.5 : On fixe $\bar{t} \in [0, T]$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$. L'estimation [VIII.22] est toujours valable, et le Théorème VIII.1.1 nous fournit l'inégalité

$$\sqrt{\text{Var}[\langle DF_R^H(t), v_{R, t} \rangle_{\mathcal{H}}]} \leq \frac{C}{R^{\beta/2}},$$

où $\beta = d - \alpha$. Montrons que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R, t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{R^{\beta}}.$$

Cela conclura la démonstration grâce à [VIII.22]. La définition du produit scalaire sur $\mathcal{H}$ donne ici

$$\langle v_{R, t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sigma_R} \int_{|x| \leq R} \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(u(s, y)) G(t-s, x-y) D_{s, z} u(\bar{t}, \bar{x}) \frac{dy dz}{|y-z|^{\beta}} \right\} dx.$$

On élève au carré, et on prend l'espérance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] &= \frac{1}{\sigma_R^2} \int_{|x| \leq R} \int_{|x'| \leq R} \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) G(t-s', x'-y') \right. \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \left[\sigma(u(s, y)) \sigma(u(s', y')) D_{s,z} u(\bar{t}, \bar{x}) D_{s',z'} u(\bar{t}, \bar{x}) \right] \frac{dy' dz'}{|y' - z'|^\beta} ds' \frac{dy dz}{|y - z|^\beta} ds \Big\} dx dx'. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration précédente, on applique deux fois l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, puis [VIII.23] et le Lemme VIII.1.2 pour obtenir

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{|x| \leq R} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) G(\bar{t}-s, \bar{x}-z) \frac{dy dz}{|y-z|^\beta} ds dx \right)^2.$$

On interprète les intégrales par rapport à y et z comme une espérance de gaussiennes indépendantes. Ainsi,

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{|x| \leq R} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|x - \bar{x} + \sqrt{t-s} \mathbf{Z}_1 + \sqrt{\bar{t}-s} \mathbf{Z}_2|^\beta} \right] ds dx \right)^2,$$

où $\mathbf{Z}_1$ et $\mathbf{Z}_2$ sont deux vecteurs gaussiens standards de $\mathbb{R}^d$ indépendants. On fait alors le changement de variables $x' = \frac{x}{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] &\leq \frac{CR^{2d}}{\sigma_R^2} \left(\int_{|x| \leq 1} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|Rx - \bar{x} + \sqrt{t-s} \mathbf{Z}_1 + \sqrt{\bar{t}-s} \mathbf{Z}_2|^\beta} \right] ds dx \right)^2 \\ &= \frac{CR^{2(d-\beta)}}{\sigma_R^2} \left(\int_{|x| \leq 1} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|x - \frac{\bar{x}}{R} + \frac{1}{R} \sqrt{t-s} \mathbf{Z}_1 + \frac{1}{R} \sqrt{\bar{t}-s} \mathbf{Z}_2|^\beta} \right] ds dx \right)^2 \\ &\leq \frac{CR^{2(d-\beta)}}{\sigma_R^2} \int_0^t \sup_{v \in \mathbb{R}^d} \left\{ \int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x+v|^\beta} \right\} ds \leq \frac{CR^{2(d-\beta)}}{\sigma_R^2}. \end{aligned}$$

Or, d'après le Théorème VIII.1.1, σ_R^2 est équivalent à $CR^{2d-\beta}$, si bien qu'on a donc bien

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{R^\beta},$$

ce qui conclut la démonstration. □

3.2. Démonstration du Théorème VIII.1.6

3.2.1 Cas du bruit blanc

On s'intéresse à la démonstration du point **1.** du Théorème VIII.1.6, où $\alpha = \flat$, c'est-à-dire qu'on se place dans le cas d'un bruit blanc.

Démonstration du point 1. du Théorème VIII.1.6 : On a vu que $F_R^W = \delta(v_{R,t})$, où $v_{R,t}$ est donné par [VIII.15]. Comme dans le cas de l'équation de la chaleur, en utilisant la Proposition VIII.2.1, puis le Théorème VIII.1.3, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{R}. \quad \text{[VIII.24]}$$

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ deux fois, puis le Lemme VIII.1.4, on obtient l'inégalité semblable à ce qu'on a vu pour le cas de la chaleur :

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{-R}^R \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) G_1(\bar{t}-s, \bar{x}-y) dy ds dx \right)^2.$$

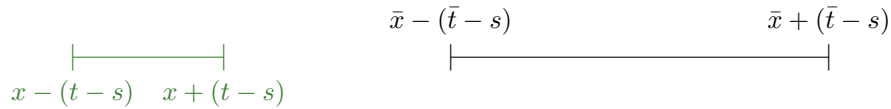
Dans le cas de la chaleur, on a conclu *via* la propriété de semi-groupe du noyau de GREEN, qui n'est pas vraie dans le cas des ondes. Néanmoins, G_1 est explicite, tout comme les calculs d'intégrales associées. Rappelons que G_1 est donné par [VIII.13]. Pour $s \in [0, t]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) G_1(\bar{t}-s, \bar{x}-y) dy &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{|x-y| \leq t-s\}} \mathbf{1}_{\{|\bar{x}-y| \leq \bar{t}-s\}} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x-(t-s) \leq y \leq x+(t-s)\}} \mathbf{1}_{\{\bar{x}-(\bar{t}-s) \leq y \leq \bar{x}+(\bar{t}-s)\}} dy \\ &= \frac{1}{4} \text{Leb}([x-(t-s), x+(t-s)] \cap [\bar{x}-(\bar{t}-s), \bar{x}+(\bar{t}-s)]). \end{aligned}$$

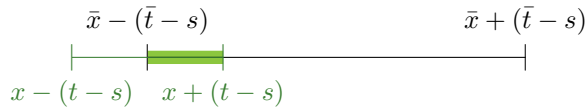
On utilise la convention $[a, b] = \emptyset$ lorsque $a > b$. Constatons d'abord que si $s > \bar{t}$, cette intégrale est nulle. Supposons dans la suite de notre discussion que $s < \min\{t, \bar{t}\}$. On distingue à ce stade deux cas sur les valeurs de t et $\bar{t}$. Supposons pour commencer que $t \geq \bar{t}$. À s fixé, on a par ordre de x croissant

$$[x-(t-s), x+(t-s)] \cap [\bar{x}-(\bar{t}-s), \bar{x}+(\bar{t}-s)] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) \\ [\bar{x} - (\bar{t} - s), x + (t - s)] & \text{si } \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) < x < \bar{x} - (t - \bar{t}) \\ [\bar{x} - (\bar{t} - s), \bar{x} + (\bar{t} - s)] & \text{si } \bar{x} - (t - \bar{t}) < x < \bar{x} + (t - \bar{t}) \\ [x - (t - s), \bar{x} + (\bar{t} - s)] & \text{si } \bar{x} + (t - \bar{t}) < x < \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s) \\ \emptyset & \text{si } x > \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s). \end{cases} \quad [\text{VIII.25}]$$

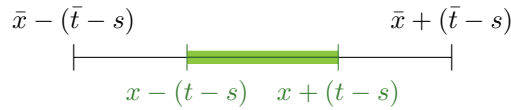
Pour comprendre la discussion [VIII.25], on propose la représentation suivante, qui va nous guider le long de cette démonstration, comme le long de la suivante. Il s'agit en fait d'étudier, lorsque $x \in \mathbb{R}$ varie l'intersection de deux segments. Premier cas, l'intersection est vide :



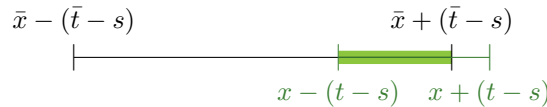
Deuxième cas, on a surligné l'intersection.



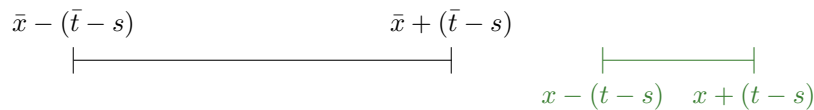
Troisième cas.



Quatrième cas.



Cinquième et dernier cas.



Notez qu'on a tout dessiné dans le cas où $\bar{t} > t$. Par symétrie, on dispose bien sûr de la même discussion dans le cas où $\bar{t} \leq t$, c'est la même représentation en faisant varier $\bar{x}$ cette fois. Notez aussi qu'il suffit de traiter les trois premiers cas pour conclure sur tous les cas, car les quatrième et cinquième cas se déduisent des cas précédents en faisant le changement de variables X donne $-X$ sur toutes les bornes des intervalles.

Cette étude de cas permet de conclure sur le calcul d'intégrale en cours. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) G_1(\bar{t}-s, \bar{x}-y) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) \\ \frac{1}{4}(x + \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)) & \text{si } \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) < x < \bar{x} - (t - \bar{t}) \\ \frac{1}{2}(\bar{t} - s) & \text{si } \bar{x} - (t - \bar{t}) < x < \bar{x} + (t - \bar{t}) \\ \frac{1}{4}(\bar{x} - x + (\bar{t} + t - 2s)) & \text{si } \bar{x} + (t - \bar{t}) < x < \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s) \\ 0 & \text{si } x > \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s). \end{cases}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) G_1(\bar{t}-s, \bar{x}-y) dy \\ &= \frac{1}{4}(x - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)) \mathbf{1}_{[\bar{x}-(t+\bar{t}-2s), \bar{x}-(t-\bar{t})]}(x) + \frac{1}{2}(\bar{t} - s) \mathbf{1}_{[\bar{x}-(t-\bar{t}), \bar{x}+(t-\bar{t})]}(x) \\ & \quad + \frac{1}{4}(\bar{x} - x + (t + \bar{t} - 2s)) \mathbf{1}_{[\bar{x}+(t-\bar{t}), \bar{x}+(t+\bar{t}-2s)]}(x). \end{aligned}$$

Reste à intégrer le tout pour $x \in [-R, R]$ et $s \in [0, \bar{t}]$ (car l'intégrale ci-dessus vaut zéro si $s > \bar{t}$). On obtient, lorsque $R > \bar{x} + T + \bar{t}$, l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] &\leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left[\frac{1}{4} \int_0^{\bar{t}} \int_{\bar{x}-(t+\bar{t}-2s)}^{\bar{x}-(t-\bar{t})} (x - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)) dx ds + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\bar{x}-(t-\bar{t})}^{\bar{x}+(t-\bar{t})} (\bar{t} - s) dx ds \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \int_0^{\bar{t}} \int_{\bar{x}+(t-\bar{t})}^{\bar{x}+(t+\bar{t}-2s)} (\bar{x} - x + (t + \bar{t} - 2s)) dx ds \right] \\ &= \frac{C}{\sigma_R^2} \left[\frac{1}{4} \int_0^{\bar{t}} \int_{t-\bar{t}}^{t+\bar{t}-2s} (-x + (t + \bar{t} - 2s)) dx ds + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{-(t-\bar{t})}^{t-\bar{t}} (\bar{t} - s) dx ds \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \int_0^{\bar{t}} \int_{-(t+\bar{t}-2s)}^{-(t-\bar{t})} (x + (t + \bar{t} - 2s)) dx ds \right]. \end{aligned}$$

Cette intégrale ne dépend pas de R , uniquement de T (en majorant les $s, t, \bar{t}$ par T) et pas de $\bar{x}$. On conclut alors que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \leq \frac{C}{R},$$

via le Théorème VIII.1.3. On obtient donc [VIII.24], et on a alors conclu la démonstration, pour $t \geq \bar{t}$.

Supposons maintenant que $\bar{t} \geq t$. Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}, s \in [0, t]$, on a

$$\begin{aligned} & [x - (t-s), x + (t-s)] \cap [\bar{x} - (\bar{t}-s), \bar{x} + (\bar{t}-s)] \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) \\ [\bar{x} - (\bar{t}-s), x + (t-s)] & \text{si } \bar{x} - (\bar{t} + t - 2s) < x < \bar{x} - (\bar{t} - t) \\ [x - (t-s), x + (t-s)] & \text{si } \bar{x} - (\bar{t} - t) < x < \bar{x} + (\bar{t} - t) \\ [x - (t-s), \bar{x} + (\bar{t}-s)] & \text{si } \bar{x} + (\bar{t} - t) < x < \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s) \\ \emptyset & \text{si } x > \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s). \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) G_1(\bar{t}-s, \bar{x}-y) dy \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) \\ \frac{1}{4}(x + \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)) & \text{si } \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) < x < \bar{x} - (\bar{t} - t) \\ \frac{1}{2}(t-s) & \text{si } \bar{x} - (\bar{t} - t) < x < \bar{x} + (\bar{t} - t) \\ \frac{1}{4}(\bar{x} - x + (\bar{t} + t - 2s)) & \text{si } \bar{x} + (\bar{t} - t) < x < \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s) \\ 0 & \text{si } x > \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s). \end{cases} \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s, x-y) G_1(\bar{t}-s, \bar{x}-y) \, dy \\ &= \frac{1}{4} (x - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)) \mathbf{1}_{[\bar{x}-(t+\bar{t}-2s), \bar{x}-(\bar{t}-t)]}(x) + \frac{1}{2} (t-s) \mathbf{1}_{[\bar{x}-(\bar{t}-t), \bar{x}+(\bar{t}-t)]}(x) \\ & \quad + \frac{1}{4} (\bar{x} - x + (t + \bar{t} - 2s)) \mathbf{1}_{[\bar{x}+(\bar{t}-t), \bar{x}+(t+\bar{t}-2s)]}(x). \end{aligned}$$

En intégrant le tout par rapport à $x \in [-R, R]$ et $s \in [0, t]$, on a alors, pour $R > \bar{x} + T + \bar{t}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] &\leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left[\frac{1}{4} \int_0^t \int_{\bar{x}-(t+\bar{t}-2s)}^{\bar{x}-(\bar{t}-t)} (x - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)) \, dx \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\bar{x}-(\bar{t}-t)}^{\bar{x}+(\bar{t}-t)} (t-s) \, dx \, ds \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{\bar{x}+(\bar{t}-t)}^{\bar{x}+(t+\bar{t}-2s)} (\bar{x} - x + (t + \bar{t} - 2s)) \, dx \, ds \right] \\ &= \frac{C}{\sigma_R^2} \left[\frac{1}{4} \int_0^t \int_{\bar{t}-t}^{t+\bar{t}-2s} (-x + (t + \bar{t} - 2s)) \, dx \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-(\bar{t}-t)}^{\bar{t}-t} (t-s) \, dx \, ds \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{-(t+\bar{t}-2s)}^{-(\bar{t}-t)} (x + (t + \bar{t} - 2s)) \, dx \, ds \right] \\ &\leq \frac{C}{\sigma_R^2}, \end{aligned}$$

en majorant t et $\bar{t}$ par T . Comme dans le cas $t > \bar{t}$, C ne dépend que de T . On a montré [VIII.24] dans les cas $t \geq \bar{t}$ et $t \leq \bar{t}$, on a donc conclu cette démonstration. $\square$

3.2.2 Cas du bruit coloré

On suppose cette fois-ci $0 < \alpha < 1$, c'est-à-dire le cas coloré pour l'équation des ondes. On présente d'abord un résultat technique sur un calcul d'intégrale, dans le Lemme suivant.

Lemme VIII.3.1 : Soient $0 < \beta < 1$, $a < b$ et $\bar{a} < \bar{b}$. Alors si on définit

$$F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) \triangleq (1 - \beta)(2 - \beta) \int_a^b \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{dy \, dz}{|y - z|^\beta},$$

on dispose de son expression exacte

$$F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b} - a|^{2-\beta} - |\bar{b} - b|^{2-\beta} - |\bar{a} - a|^{2-\beta} + |\bar{a} - b|^{2-\beta}.$$

Démonstration du Lemme VIII.3.1 : Pour suivre les calculs de cette démonstration, il est recommandé au lecteur d'avoir près de lui les représentations données après la discussion de cas [VIII.25] pour comprendre les différentes situations rencontrées, avec $a = x - (t - s)$, $b = x + (t - s)$, $\bar{a} = \bar{x} - (\bar{t} - s)$ et $\bar{b} = \bar{x} + (\bar{t} - s)$.

En observant la formule, on a *a priori* dix cas à traiter (selon les positions relatives de $[a, b]$ par rapport à $[\bar{a}, \bar{b}]$, ce qui en fait cinq, et selon si $\bar{t} \geq t$ ou non, ce qui en fait deux). Si $L = b - a$ et $\bar{L} = \bar{b} - \bar{a}$, commençons les calculs en supposant que $L < \bar{L}$. Si $L \geq \bar{L}$, il suffit d'échanger les rôles de a et $\bar{a}$ et de b et $\bar{b}$, en utilisant le fait que $F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = F_\beta(\bar{a}, \bar{b}, a, b)$. À ce stade, on n'a alors plus que cinq cas à traiter selon les positions relatives de $[a, b]$ par rapport à $[\bar{a}, \bar{b}]$.

- Supposons que $b \leq \bar{a}$. Alors dans ce cas

$$\frac{1}{(1 - \beta)(2 - \beta)} F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = \int_a^b \left(\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{dz}{(z - y)^\beta} \right) dy.$$

On intègre.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 - \beta} F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) &= \int_a^b \left((\bar{b} - y)^{1-\beta} - (\bar{a} - y)^{1-\beta} \right) dy \\ &= \int_{\bar{b}-b}^{\bar{b}-a} y^{1-\beta} dy - \int_{\bar{a}-b}^{\bar{a}-a} y^{1-\beta} dy. \end{aligned}$$

On intègre de nouveau et on obtient

$$F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b} - a)^{2-\beta} - (\bar{b} - b)^{2-\beta} - (\bar{a} - a)^{2-\beta} + (\bar{a} - b)^{2-\beta}.$$

- Pour $a \leq \bar{a} \leq b \leq \bar{b}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\beta)(2-\beta)} F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) &= \int_a^{\bar{a}} \left(\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{dz}{(z-y)^\beta} \right) dy + \int_{\bar{a}}^b \left(\int_{\bar{a}}^y \frac{dz}{(y-z)^\beta} \right) dy \\ &\quad + \int_{\bar{a}}^b \left(\int_y^{\bar{b}} \frac{dz}{(z-y)^\beta} \right) dy. \end{aligned}$$

Première intégration.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\beta} F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) &= \int_a^{\bar{a}} \left((\bar{b}-y)^{1-\beta} - (\bar{a}-y)^{1-\beta} \right) dy + \int_{\bar{a}}^b (y-\bar{a})^{1-\beta} dy \\ &\quad + \int_{\bar{a}}^b (\bar{b}-y)^{1-\beta} dy \\ &= \int_{\bar{b}-\bar{a}}^{\bar{b}-a} y^{1-\beta} dy - \int_0^{\bar{a}-a} y^{1-\beta} dy + \int_0^{b-\bar{a}} y^{1-\beta} dy + \int_{\bar{b}-b}^{\bar{b}-\bar{a}} y^{1-\beta} dy \\ &= \int_{\bar{b}-b}^{\bar{b}-a} y^{1-\beta} dy - \int_0^{\bar{a}-a} y^{1-\beta} dy + \int_0^{b-\bar{a}} y^{1-\beta} dy. \end{aligned}$$

Deuxième intégration.

$$F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b} - a)^{2-\beta} - (\bar{b} - b)^{2-\beta} - (\bar{a} - a)^{2-\beta} + (b - \bar{a})^{2-\beta}.$$

- Pour $\bar{a} \leq a < b \leq \bar{b}$.

$$\frac{1}{(1-\beta)(2-\beta)} F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = \int_a^b \left(\int_{\bar{a}}^y \frac{dz}{(y-z)^\beta} \right) dy + \int_a^b \left(\int_y^{\bar{b}} \frac{dz}{(z-y)^\beta} \right) dy.$$

Première intégration.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\beta} F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) &= \int_a^b (y-\bar{a})^{1-\beta} dy + \int_a^b (\bar{b}-y)^{1-\beta} dy \\ &= \int_{a-\bar{a}}^{b-\bar{a}} y^{1-\beta} dy + \int_{\bar{b}-b}^{\bar{b}-a} y^{1-\beta} dy. \end{aligned}$$

Deuxième intégration.

$$F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = (b - \bar{a})^{2-\beta} - (a - \bar{a})^{2-\beta} + (\bar{b} - a)^{2-\beta} - (b - \bar{b})^{2-\beta}.$$

- Pour $\bar{a} \leq a \leq \bar{b} \leq b$. On utilise ce qu'on a déjà fait, grâce au fait que

$$F_\beta(a, b, \bar{a}, \bar{b}) = F_\beta(-b, -a, -\bar{b}, -\bar{a}).$$

Ainsi, on se retrouve dans le cas 2, où la formule est déjà montrée.

- Enfin, pour $\bar{b} \leq a$. De même qu'avant, en exploitant le premier cas en multipliant cette inégalité par -1 , on se retrouve avec un cas déjà traité.

On a alors su traiter tous les cas possibles, on a bien conclu cette démonstration. $\square$

À l'aide de ce Lemme, on peut conclure sur le cas coloré du Théorème VIII.1.6.

Démonstration du point 2. du Théorème VIII.1.6 : Par les mêmes arguments que les démonstrations précédentes, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{R^\beta}. \quad [\text{VIII.26}]$$

Or, par les mêmes opérations que précédemment, à savoir les deux inégalités de CAUCHY-SCHWARZ, l'utilisation du Lemme VIII.1.4, on aboutit à

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{-R}^R \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{G_1(t-s, x-y) G_1(\bar{t}-s, \bar{x}-z)}{|y-z|^\beta} dy dz ds dx \right)^2.$$

Or, avec les notations du Lemme VIII.3.1, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\
& \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{-R}^R \int_0^t F_\beta(x - (t-s), x + (t-s), \bar{x} - (\bar{t}-s), \bar{x} + (\bar{t}-s)) \, ds \, dx \right)^2 \\
& = \frac{C}{\sigma_R^2} \left(\int_{-R}^R \int_0^t \left(|x - \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s)|^{2-\beta} + |x - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)|^{2-\beta} - |x - \bar{x} + (\bar{t} - t)|^{2-\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - |x - \bar{x} + (t - \bar{t})|^{2-\beta} \right) \, ds \, dx \right)^2.
\end{aligned}$$

Supposons que $R > \bar{x} + 2T$. On dispose du découpage suivant :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\
& \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left\{ \int_0^t \int_{-R}^{\bar{x}-2T} \left((\bar{x} + (t + \bar{t} - 2s) - x)^{2-\beta} + (\bar{x} - (t + \bar{t} - 2s) - x)^{2-\beta} - (\bar{x} - (\bar{t} - t) - x)^{2-\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\bar{x} - (t - \bar{t}) - x)^{2-\beta} \right) \, ds \, dx \right. \\
& \quad + \int_0^t \int_{\bar{x}-2T}^{\bar{x}+2T} \left(|x - \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s)|^{2-\beta} + |x - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s)|^{2-\beta} - |x - \bar{x} + (\bar{t} - t)|^{2-\beta} \right. \\
& \quad \left. - |x - \bar{x} + (t - \bar{t})|^{2-\beta} \right) \, ds \, dx \\
& \quad \left. + \int_0^t \int_{\bar{x}+2T}^R \left((x - \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s))^{2-\beta} + (x - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s))^{2-\beta} - (x - \bar{x} + (\bar{t} - t))^{2-\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (x - \bar{x} + (t - \bar{t}))^{2-\beta} \right) \, ds \, dx \right\}^2.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables x donne $x - \bar{x}$ dans la deuxième intégrale, on voit que ce terme ne dépend pas de $\bar{x}$. Il se majore alors uniquement en fonction de T et de β . Quand aux autres intégrales, elles se calculent explicitement. De plus, les termes de bord ne dépendant pas de R ne dépendent pas non plus de $\bar{x}$. On obtient l'estimation suivante, avec C ne dépendant que de T et β .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\
& \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left\{ 1 + \int_0^t \left((R + \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} + (R + \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} - (R + \bar{x} - (t - \bar{t}))^{3-\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (R + \bar{x} + (t - \bar{t}))^{3-\beta} \right) \, ds \right. \\
& \quad + \int_0^t \left((R - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} + (R - \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} - (R - \bar{x} + (t - \bar{t}))^{3-\beta} \right. \\
& \quad \left. \left. - (R - \bar{x} + (t - \bar{t}))^{3-\beta} \right) \, ds \right\}^2.
\end{aligned}$$

On organise les termes qui se ressemblent, en constatant qu'ils sont toujours opposés les uns aux autres.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\ & \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left\{ 1 + \int_0^t \left((R + \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} - (R - \bar{x} + (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} \right) ds \right. \\ & \quad + \int_0^t \left((R + \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} - (R - \bar{x} - (t + \bar{t} - 2s))^{3-\beta} \right) ds \\ & \quad + \int_0^t \left((R + \bar{x} + (t - \bar{t}))^{3-\beta} - (R - \bar{x} + (t - \bar{t}))^{3-\beta} \right) ds \\ & \quad \left. + \int_0^t \left((R + \bar{x} + (\bar{t} - t))^{3-\beta} - (R - \bar{x} + (\bar{t} - t))^{3-\beta} \right) ds \right\}^2. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales sont des intégrations par rapport à des constantes. On intègre les deux premières, et on organise de nouveau sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\ & \leq \frac{C}{\sigma_R^2} \left\{ 1 + \frac{\left((R - \bar{x} + (\bar{t} - t))^{4-\beta} - (R + \bar{x} + (\bar{t} - t))^{4-\beta} \right) + \left((R + \bar{x} + (\bar{t} + t))^{4-\beta} - (R - \bar{x} + (\bar{t} + t))^{4-\beta} \right)}{2(4 - \beta)} \right. \\ & \quad + \frac{\left((R + \bar{x} - (\bar{t} - t))^{4-\beta} - (R - \bar{x} - (\bar{t} - t))^{4-\beta} \right) + \left((R - \bar{x} - (\bar{t} + t))^{4-\beta} - (R + \bar{x} - (\bar{t} + t))^{4-\beta} \right)}{2(4 - \beta)} \\ & \quad \left. + t \left((R + \bar{x} + (t - \bar{t}))^{3-\beta} - (R - \bar{x} + (t - \bar{t}))^{3-\beta} \right) + t \left((R + \bar{x} + (\bar{t} - t))^{3-\beta} - (R - \bar{x} + (\bar{t} - t))^{3-\beta} \right) \right\}^2. \end{aligned}$$

Supposons alors que $R > 2(\bar{x} + 2T)$, de sorte que tous les termes de la forme $(R + \text{terme})^{4-\beta}$ (respectivement $(R + \text{terme})^{3-\beta}$) sont majorés par $2^{2-\beta}(R + \text{terme})^2 R^{2-\beta}$ (respectivement $2^{1-\beta}(R + \text{terme})R^{2-\beta}$). Observons de plus que $\frac{1}{2(4-\beta)} \leq \frac{1}{4}$. On obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\ & \leq \frac{CR^{4-2\beta}}{\sigma_R^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left((R - \bar{x} + (\bar{t} - t))^2 - (R + \bar{x} + (\bar{t} - t))^2 \right) + \frac{1}{4} \left((R + \bar{x} + (\bar{t} + t))^2 - (R - \bar{x} + (\bar{t} + t))^2 \right) \right. \\ & \quad + \frac{1}{4} \left((R + \bar{x} - (\bar{t} - t))^2 - (R - \bar{x} - (\bar{t} - t))^2 \right) + \frac{1}{4} \left((R - \bar{x} - (\bar{t} + t))^2 - (R + \bar{x} - (\bar{t} + t))^2 \right) \\ & \quad \left. + t \left((R + \bar{x} - (\bar{t} - t)) - (R - \bar{x} - (\bar{t} - t)) \right) + t \left((R + \bar{x} + (\bar{t} - t)) - (R - \bar{x} + (\bar{t} - t)) \right) \right\}^2. \end{aligned}$$

En développant, on constate que tout ce qui trouve entre accolade vaut 1, il y a compensation de tous les termes polynomiaux. Ainsi, on a bien déterminé C ne dépendant que de T et β (et donc pas de $\bar{x}$) tel que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{CR^{2-\beta}}{\sigma_R^2}.$$

Puisque le Théorème VIII.1.3 nous fournit l'équivalent $\sigma_R^2 \sim CR^{2-2\beta}$, on conclut bien que

$$\mathbb{E} \left[\langle v_{R,t}, Du(\bar{t}, \bar{x}) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{C}{R^\beta}.$$

Cela conclut la démonstration. □

4. Perspectives

Nous exposons dans cette courte section des poursuites envisageables après les résultats démontrés dans les Théorèmes VIII.1.5 et VIII.1.6.

4.1. Convergence avec un nombre fini d'évaluations

Nous avons montré jusqu'ici le Théorème Limite suivant :

$$(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x})) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}, \bar{x})).$$

La technique utilisée est une adaptation des résultats provenant du Chapitre VII, à propos de la méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante. Il est envisageable qu'on puisse aussi disposer du Théorème Limite suivant. Si on se donne $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbb{R}$ et $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \geq 0$ des points où évaluer u alors pour tout $t \in [0, T]$

$$\left((F_R(t_1), \dots, F_R(t_n)), (u(\bar{t}_1, \bar{x}_1), \dots, u(\bar{t}_n, \bar{x}_n)) \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}_n(0, I_n) \otimes \text{Loi}(u(\bar{t}_1, \bar{x}_1), \dots, u(\bar{t}_n, \bar{x}_n)).$$

La démonstration de ce fait reposerait sur la version multidimensionnelle de la méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante, qu'on développe dans le Chapitre IX.

4.2. Convergence des processus sur un ensemble fixe

On peut franchir une étape supplémentaire, et au lieu de considérer un nombre fini d'évaluations, on peut s'en donner un ensemble infini sous la forme de processus. Plus précisément, si on considère A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ et B un sous-ensemble de $[0, T]$, a-t-on le Théorème limite suivant : pour tout $t \in [0, T]$

$$(F_R(t), (u(\bar{t}, \bar{x}), \bar{t} \in B, \bar{x} \in A)) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}((u(\bar{t}, \bar{x}), \bar{t} \in B, \bar{x} \in A)),$$

où la convergence en loi serait prise dans l'espace des fonctions continues. Pour cela, on appliquerait le célèbre adage « convergence des lois finies-dimensionnelles et tension ». La convergence des lois finies dimensionnelles serait conséquence de la sous-section précédente, et la tension fonctionnerait dans le cadre où A et B sont des compacts bornés, *via* le critère de KOLMOGOROV, et des résultats connus sur une continuité L^p de $(t, x) \mapsto u(t, x)$.

Si on interprète ce résultat comme de l'indépendance asymptotique, cela signifierait qu'un sous-ensemble borné de points d'évaluation influe de moins en moins sur la répartition des moyennes spatiales de la solution lorsque la fenêtre d'observation R devient de plus en plus grande.

4.3. Convergence des processus sur un ensemble dépendant de la variable d'observation

Les étapes ultimes pour l'étude de ces Théorèmes Limites consisteraient en la convergence de processus du type

$$\left((F_R(t), t \in [0, T]), (u(\bar{t}, \bar{x}), \bar{t} \in [0, T], \bar{x} \in A(R)) \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Loi}(F_\infty(t), t \in [0, T]) \otimes \mu,$$

où F_∞ est un processus limite pour F_R . Plus précisément, il a été démontré dans [HNV20] ou encore [Hua+20] des convergences de processus de F_R en loi sur $C([0, T])$. De plus, ici $A(R)$ serait un ensemble du type $[-R^\alpha, R^\alpha]$, avec $0 < \alpha < 1$. Enfin, μ serait une loi limite possible, peut-être la loi du processus u en entier. Il pourrait être très intéressant d'étudier les convergences possibles ou non en fonction de α et aboutir à une étude du type transition de phase. Cela signifie qu'on essaierait de déterminer un seuil α_0 tel que pour $\alpha < \alpha_0$, on dispose du Théorème Limite qu'on interprète comme de l'indépendance asymptotique, et un autre comportement pour $\alpha > \alpha_0$, probablement pas de l'indépendance asymptotique.

L'interprétation serait la suivante : si on dispose de données $(u(\bar{t}, \bar{x}), \bar{t} \in [0, T], \bar{x} \in [-R^\alpha, R^\alpha])$ de taille trop petite par rapport à R , alors les valeurs de ces données ne vont pas trop influencer sur les valeurs possibles.

Pour parvenir à de tels résultats, la convergence des lois finies dimensionnelles fonctionneraient certainement sans soucis. Il resterait par contre à étudier la tension, c'est-à-dire établir des inégalités du type

$$\mathbb{E} \left[\left| \left(F_R(t), u(\bar{t}, \bar{x}) \right), \left(F_R(s), u(\bar{s}, \bar{y}) \right) \right| \right] \leq C \left(|t - s|^a + |\bar{t} - \bar{s}|^b + |\bar{x} - \bar{y}|^c \right).$$

Sauf que, certes on dispose d'inégalités du type tension pour F_R et u , mais en fait, l'inégalité

$$\mathbb{E} [|u(t, x) - u(s, y)|^p] \leq C \left(|t - s|^{p/2} + |x - y|^{p/4} \right)$$

n'est valable que pour $t, s \in [0, T]$ et x, y dans un compact. La constante C dépend de T , et du compact choisi. Si on souhaite travailler avec $x \in [-R^\alpha, R^\alpha]$, on ne pourra pas exploiter directement cette inégalité, puisque la « constante » dépendra de R . On aura alors besoin d'une étude plus fine de la dépendance de C par rapport au compact de référence pour x et y . Il s'agit d'un travail certainement ambitieux, nécessitant plusieurs mois de calculs pour aboutir à un résultat exploitable.

Méthode de Nourdin–Peccati pour les lois normales multidimensionnelles

« – Tu viens de perdre la Piston Cup, tu le sais ?

– Comme l’a dit un jour un ami coureur particulièrement grincheux, ce n’est qu’une coupe vide. »

Le King à Flash, *Cars*, 2006

Ce chapitre est complètement issu de [TZ24c].

RÉSUMÉ

On développe une méthode de NOURDIN–PECCATI, dite *indépendante*, afin d’évaluer la distance de WASSERSTEIN entre la loi d’un vecteur aléatoire $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de taille $d + p$, avec des composantes assez régulières au sens du calcul de MALLIAVIN, et la loi du vecteur $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$, où $\mathbf{Z}$ est une Gaussienne d -dimensionnelle indépendante de $\mathbf{Y}$. Nous appliquons cette théorie pour quantifier une notion d’indépendance asymptotique pour des suites de vecteurs aléatoires. On traite différents exemples à propos de matrices aléatoires et d’estimateurs de paramètres pour l’équation des ondes stochastique.

Ce chapitre rentre dans le cadre d’une liste de travaux présentés dans les Chapitres VII et X, développant une méthode que nous nommons *méthode de NOURDIN–PECCATI indépendante*. Dans ces derniers, nous avons développé une méthode de STEIN afin d’évaluer la distance de WASSERSTEIN entre un couple $(X, \mathbf{Y})$, avec X une variable aléatoire réelle et $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire par rapport à $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})$ ou par rapport à $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})$, en termes d’opérateurs de MALLIAVIN. Nous avons su en particulier donner un Théorème Limite qu’on interprète comme de l’indépendance asymptotique dès lors qu’on se donne des variables dans des chaos de WIENER.

L’objectif est de proposer une approche similaire lorsque la loi cible de la première composante est une loi gaussienne multidimensionnelle. Plus précisément, on veut étudier le cas où $\mathbf{X} = (X(1), \dots, X(d))$ et $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p))$ sont deux vecteurs aléatoires, avec $p \geq 1$ et $d \geq 1$, dérivables au sens de MALLIAVIN. Pour $C = (C[i, j])_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ (réelle symétrique définie positive de taille d), on note $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$ la loi gaussienne d -dimensionnelle centrée de matrice de covariance C . Le Théorème principal de ce travail est le Théorème IX.2.1, qui estime la distance de WASSERSTEIN entre $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ et $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y})$, lorsqu’on se place dans le cadre dérivable, c’est-à-dire si on suppose que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont L^2 , mesurables par rapport à un processus isonormal ambiant, et dérivables par rapport auxdits processus. Il s’agit de la borne [IX.8]. On observe que cette estimation se divise en deux, comme ce qu’on a montré dans les précédents travaux, avec un terme exclusivement lié à l’approximation de la première marginale vers la gaussienne, et le deuxième terme mesurant la décorrélation entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$.

Nous présentons deux applications de cette estimation, et nous croyons que cette estimation pourrait s’appliquer dans beaucoup de cas possibles. Regarder par exemple le Chapitre VIII. Les applications qu’on donne sont liés à des Théorèmes Limites ou aux statistiques. La première étudie des

comportements de matrices de WISHART tandis que la deuxième étudie un estimateur du paramètre de dérive dans l'équation des ondes stochastiques.

Bien que ces applications traitent des sujets distincts, ils peuvent être inclus dans un cadre général de quantification de l'indépendance asymptotique. Regarder l'Annexe A, ou [DN21] pour plus de détails à ce propos.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous débutons par étudier l'équation de STEIN associée à la loi $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mu$, avec μ une probabilité sur $\mathbb{R}^p$. La solution de cette équation sera étudiée, et nous permettra de conclure sur la borne de STEIN donnée dans la Proposition IX.1.4. Nous combinons ensuite ce résultat avec la relation de dualité (regarder l'équation I.4 dans le Chapitre I) pour conclure sur le Théorème IX.2.1. Nous en déduisons des Théorèmes Limites, d'abord dans des chaos de WIENER (Théorème IX.3.2), et ensuite plus généraux dans le cadre d'un développement en chaos infini (Théorème IX.3.5). Les deux dernières sections sont quand à elles dédiées aux applications dans le cadre de matrices aléatoires et d'estimation de paramètres pour l'équation des ondes stochastique que nous avons évoqué précédemment.

Dans l'entièreté de chapitre, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On notera $\mathbb{E}$ l'espérance associée. Si $\mathbf{U}$ est un vecteur aléatoire, on notera $\text{Loi}(\mathbf{U})$ ou $\mathbb{P}_{\mathbf{U}}$ sa loi.

1. Méthode de Stein indépendante pour la loi normale multidimensionnelle

1.1. Lemme de Stein indépendant

Si $m \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, on note $\text{Hess}(f)(\mathbf{x})$ la matrice Hessienne de f évaluée en $\mathbf{x}$. C'est la matrice de ses dérivées partielles secondes. De plus, si $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, avec $p \geq 1$ et $d \geq 1$ alors pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, on notera $\text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la matrice des dérivées partielles par rapport aux d premières coordonnées évaluée en $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\text{Hess}_{x,x}(f) \triangleq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

On note de même $\nabla_x f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$ le gradient de f par rapport aux d premières coordonnées évalué en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Enfin, si A, B sont deux matrices carrées de même taille, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{HS}}$ la norme de HILBERT–SCHMIDT associée : c'est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{n^2}$ lorsqu'on identifie une matrice comme un vecteur de taille n^2 . Pour tout $m \geq 1$, on note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$, et $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ le produit scalaire euclidien de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Lemme IX.1.1 : Soient $d \geq 1$, $p \geq 1$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On considère de plus $\mathbf{X} = (X(1), \dots, X(d))$ et $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p))$ deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$.

1. Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont indépendants et $\mathbf{X}$ suit $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$ alors pour toute application $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 bornées par rapport aux d premières coordonnées

$$\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[\langle C, \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_{\text{HS}}]. \quad [\text{IX.1}]$$

2. Soit $\mathbf{Z}$ un vecteur aléatoire suivant $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$. Pour $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 bornées, on considère l'équation de STEIN suivante, d'inconnue $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiée par tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$\langle \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C \rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{y})]. \quad [\text{IX.2}]$$

Alors une solution de [IX.2] est donnée par $f = Uh : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ par

$$Uh(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \int_0^{+\infty} \left\{ \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{y})] - \mathbb{E}\left[h\left(\boldsymbol{\mu} + e^{-t}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1 - e^{-2t}}(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu}), \mathbf{y}\right)\right] \right\} dt. \quad [\text{IX.3}]$$

De plus, Uh est de classe C^2 , et admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport aux d premières variables qui sont de plus bornées.

3. Supposons que pour tout $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 bornées, l'équation [IX.1] soit vérifiée. Alors $\mathbf{X}$ suit $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$ et est indépendant de $\mathbf{Y}$.

Remarque IX.1.2. Constatez la différence entre les lemmes de STEIN usuels (Lemmes II.1.1, VII.1.1, X.1.1) et cet énoncé. On expose ici directement le lemme et l'équation de STEIN, et de fait la solution [IX.3] qu'on manipulera dans la suite. Cette exposition permet de faciliter une démonstration de ce Lemme. En fait, on évite d'évoquer les questions d'unicité pour les solutions de l'équation différentielle, qui n'est de toutes façons pas nécessaire pour conclure sur la suite des opérations. Le lecteur averti aura bien sûr noté la ressemblance avec l'article [NPR10] de NOURDIN, PECCATI et REVEILLAC. ♣

Démonstration : Commençons par montrer le point 1.. Puisque $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{y})] \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}).$$

D'après le Lemme de STEIN pour la Gaussienne multidimensionnelle (Lemme II.21), nous avons alors

$$\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}[\langle C, \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{y}) \rangle_{\text{HS}}] \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}).$$

Et donc, on obtient, encore par indépendance, la relation [IX.2].

Montrons 2.. Fixons $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, considérons

$$h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \triangleq h(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Alors d'après la Proposition II.3.4, la fonction $U_{\mathbf{y}}h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ donnée pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ par

$$U_{\mathbf{y}}h(\mathbf{x}) \triangleq \int_0^{+\infty} \left\{ \mathbb{E}[h_{\mathbf{y}}(\mathbf{Z})] - \mathbb{E}\left[h_{\mathbf{y}}\left(\boldsymbol{\mu} + e^{-t}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1 - e^{-2t}}(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})\right)\right] \right\} dt$$

résout l'équation différentielle d'inconnue $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle \text{Hess}(f)(\mathbf{x}), C \rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbb{E}[h_{\mathbf{y}}(\mathbf{Z})].$$

Ainsi, en définissant $Uh : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto U_{\mathbf{y}}h(\mathbf{x})$, Uh résout bien [IX.2]. De plus, Uh admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues par rapport aux coordonnées de $\mathbf{x}$, donc est de classe C^2 . On va montrer dans la Proposition IX.1.3 que les dérivées sont de plus bornées.

Montrons finalement 3., c'est-à-dire la réciproque de 1.. Considérons pour cela $\mathbf{Z}$ suivant $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C)$ et indépendant de $\mathbf{Y}$, et supposons que [IX.1] est vérifié pour tout f de classe C^2 avec des dérivées partielles bornées. Montrons que $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ a la même loi que $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$. Il suffit pour cela de montrer qu'elles ont même fonction caractéristique. Or, pour toute fonction $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 aux dérivées partielles bornées, d'après l'équation de STEIN [IX.2], on a

$$\mathbb{E}[h(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[\langle C, \text{Hess}_{x,x}(Uh)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_{\text{HS}}] - \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x Uh(\mathbf{X}, \mathbf{Y})].$$

Or, par le point 2., Uh est de classe C^2 avec des dérivées partielles bornées par rapport à $\mathbf{x}$, si bien que par [IX.1], il suit que

$$\mathbb{E}[\langle C, \text{Hess}_{x,x}(Uh)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle_{\text{HS}}] - \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x Uh(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = 0,$$

montrant que $\mathbb{E}[h(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 aux dérivées partielles bornées. En particulier, pour tout $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$, avec

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}} e^{i\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}},$$

on conclut que $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ a même fonction caractéristique que $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$. Cela conclut cette démonstration. $\square$

1.2. Étude de la solution de l'équation de Stein

Pour $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 dans toutes les directions, on note $\text{Hess}_{x,y}(f)$ la matrice des dérivées croisées en x et y . Plus précisément, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, on définit

$$\text{Hess}_{x,y}(f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Pour $n \geq 1$, $m \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on note $\|A\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur de A .

Proposition IX.1.3 : Soient $d \geq 1$, $p \geq 1$, $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 admettant des dérivées partielles bornées d'ordre 1 et 2. Considérons Uh donnée par [IX.3]. Alors Uh est de classe C^2 , admet des dérivées partielles bornées par rapport aux d premières composantes, et des dérivées partielles croisées bornées. Plus précisément, on a

$$\sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,x} Uh(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h\|_{\text{Lip}} \quad [\text{IX.4}]$$

et

$$\sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,y} Uh(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h\|_{\text{Lip}}. \quad [\text{IX.5}]$$

Démonstration : Pour montrer que Uh est de classe C^2 , il suffit d'appliquer le théorème de dérivations successives sous l'intégrale, sachant que h admet des dérivées partielles bornées. Montrons les estimations [IX.4] et [IX.5].

Pour [IX.4], on note comme dans la précédente démonstration $h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $U_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x}) = Uh(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. D'après la Proposition II.3.4, on a pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \|\text{Hess} U_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x})\|_{\text{HS}} \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h_{\mathbf{y}}\|_{\text{Lip}}.$$

Or, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$,

$$\|h_{\mathbf{y}}\|_{\text{Lip}} = \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^d \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'}} \frac{|h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}')|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \leq \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^d \\ \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^p \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\mathbf{x}', \mathbf{y}')}} \frac{|h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - h(\mathbf{x}', \mathbf{y}')|}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{y}'|^2}} = \|h\|_{\text{Lip}}.$$

Ainsi, on conclut que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$,

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \|\text{Hess} U_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x})\|_{\text{HS}} \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h\|_{\text{Lip}},$$

donc à l'inégalité [IX.4].

Étudions désormais [IX.5]. Commençons par le cas où $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et $C = I_d$. On utilise l'égalité suivante, vérifiée pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{R})$:

$$\|M\|_{\text{HS}} = \sup_{\substack{A \in \mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{R}) \\ A \neq 0}} \frac{|\langle A, M \rangle_{\text{HS}}|}{\|A\|_{\text{HS}}}.$$

Considérons une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_{d,p}(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$\langle \text{Hess}_{x,y} Uh(\mathbf{x}, \mathbf{y}), A \rangle_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \|h\|_{\text{Lip}} \|A\|_{\text{HS}}$$

pour conclure. Pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$, on a

$$\frac{\partial^2 Uh}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial y_j} \left(e^{-t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1 - e^{-2t}} \mathbf{Z}, \mathbf{y} \right) \right] dt.$$

On applique désormais le lemme de STEIN unidimensionnel pour la gaussienne $Z(i)$, i -ème composante de $\mathbf{Z}$, suivant $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\frac{\partial^2 Uh}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[Z(i) \frac{\partial h}{\partial y_j} \left(e^{-t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1 - e^{-2t}} \mathbf{Z}, \mathbf{y} \right) \right] dt.$$

Ainsi, en sommant ces égalités, on aboutit à

$$\langle \text{Hess}_{x,y} U h(\mathbf{x}, \mathbf{y}), A \rangle_{\text{HS}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^p \frac{\partial h}{\partial y_j} \left(e^{-t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1-e^{-2t}} \mathbf{Z}, \mathbf{y} \right) \sum_{i=1}^d A_{i,j} Z(i) \right] dt.$$

On applique l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $\mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} & \langle \text{Hess}_{x,y} U h(\mathbf{x}, \mathbf{y}), A \rangle_{\text{HS}} \\ & \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[\sqrt{\sum_{j=1}^p \left(\frac{\partial h}{\partial y_j} \left(e^{-t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}) + \sqrt{1-e^{-2t}} \mathbf{Z}, \mathbf{y} \right) \right)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^d A_{i,j} Z(i) \right)^2} \right] dt. \end{aligned}$$

Puisque h est lipschitzienne, on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle \text{Hess}_{x,y} U h(\mathbf{x}, \mathbf{y}), A \rangle_{\text{HS}} & \leq \|h\|_{\text{Lip}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \mathbb{E} \left[\sqrt{\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^d A_{i,j} Z(i) \right)^2} \right] dt \\ & = \frac{\pi}{2} \|h\|_{\text{Lip}} \mathbb{E} \left[\sqrt{\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^d A_{i,j} Z(i) \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P})$ cette fois-ci.

$$\langle \text{Hess}_{x,y} U h(\mathbf{x}, \mathbf{y}), A \rangle_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|h\|_{\text{Lip}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^d A_{i,j} Z(i) \right)^2 \right]}$$

Enfin, puisque les Z_i sont indépendants et suivent $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient

$$\langle \text{Hess}_{x,y} U h(\mathbf{x}, \mathbf{y}), A \rangle_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|h\|_{\text{Lip}} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p A_{i,j}^2} = \frac{\pi}{2} \|h\|_{\text{Lip}} \|A\|_{\text{HS}}.$$

Cela démontre alors [IX.5] dans le cas où $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et $C = I_d$. Pour $\boldsymbol{\mu}$ et C généraux, on se ramène au cas standard par un changement de variables. Plus précisément, si on considère $\Sigma \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\Sigma^2 = C$, alors $\mathbf{Z}^\circ \triangleq \Sigma^{-1}(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})$ suit $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d)$. On note U° l'opérateur associé à $\mathbf{Z}^\circ$: pour tout $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne

$$U^\circ g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \int_0^{+\infty} \left\{ \mathbb{E} \left[g(\mathbf{Z}^\circ, \mathbf{y}) \right] - \mathbb{E} \left[g \left(e^{-t} \mathbf{x} + \sqrt{1-e^{-2t}} \mathbf{Z}^\circ, \mathbf{y} \right) \right] \right\} dt.$$

Nous venons de montrer que pour ces fonctions g ,

$$\sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,y} U^\circ g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|g\|_{\text{Lip}}. \quad [\text{IX.6}]$$

Notons $t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\Sigma \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}, \mathbf{y})$. Alors, on dispose du lien suivante entre solution de l'équation de STEIN pour la normale standard et la normale d'espérance $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance C :

$$U h = U^\circ (h \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}) \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}^{-1}.$$

Si bien que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$\text{Hess}_{x,y}(U h)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\text{Hess}_{x,y}(U^\circ (h \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma})) \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \cdot \Sigma^{-1}.$$

On en déduit alors que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$\|\text{Hess}_{x,y}(U h)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} = \left\| \left(\text{Hess}_{x,y}(U^\circ (h \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma})) \circ t_{\boldsymbol{\mu}, \Sigma}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \cdot \Sigma^{-1} \right\|_{\text{HS}}.$$

En utilisant l'inégalité $\|MM'\|_{\text{HS}} \leq \min\{\|M\|_{\text{op}}\|M'\|_{\text{HS}}, \|M\|_{\text{HS}}\|M'\|_{\text{op}}\}$, valable pour toutes matrices $M \in \mathcal{M}_{d_1, d_2}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_{d_2, d_3}(\mathbb{R})$, avec $d_1, d_2, d_3 \geq 1$, alors on obtient

$$\|\text{Hess}_{x,y}(Uh)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \left\| \text{Hess}_{x,y}(U^\circ(h \circ t_{\mu, \Sigma})) \circ t_{\mu, \Sigma}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|_{\text{HS}} \|\Sigma^{-1}\|_{\text{op}}.$$

Alors on peut faire l'estimation suivante, d'après [IX.6]

$$\begin{aligned} \|\text{Hess}_{x,y}(Uh)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} &= \left\| \text{Hess}_{x,y}(U^\circ(h \circ t_{\mu, \Sigma})) \circ t_{\mu, \Sigma}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|_{\text{HS}} \|\Sigma^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,y}(U^\circ(h \circ t_{\mu, \Sigma}))(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \|\Sigma^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq \frac{\pi}{2} \|h \circ t_{\mu, \Sigma}\|_{\text{Lip}} \|\Sigma^{-1}\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} |h \circ t_{\mu, \Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - h \circ t_{\mu, \Sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')| &\leq \|h\|_{\text{Lip}} |t_{\mu, \Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_{\mu, \Sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')| \\ &= \|h\|_{\text{Lip}} |(\Sigma \mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\Sigma \mathbf{x}', \mathbf{y}')| \\ &\leq \|h\|_{\text{Lip}} \|\Sigma\|_{\text{op}} |(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}', \mathbf{y}')|. \end{aligned}$$

On conclut alors que

$$\sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,y}(Uh)(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|\Sigma^{-1}\|_{\text{op}} \|\Sigma\|_{\text{op}} \|h\|_{\text{Lip}}.$$

Enfin, puisque $C = \Sigma^2$, avec Σ symétrique, la norme d'opérateur de C est donnée par son rayon spectral, si bien qu'on conclut que $\|C\|_{\text{op}} = \|\Sigma\|_{\text{op}}^2$. De même avec C^{-1} . Cela montre bien [IX.5] dans le cas général. $\square$

1.3. Borne de Stein

La distance de WASSERSTEIN est définie dans le Chapitre II, Définition II.1.2.

Proposition IX.1.4 : Soient $d \geq 1$, $p \geq 1$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. Considérons $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$, tous les deux admettant une espérance. Alors

$$d_W((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\mu, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \leq \sup_{f \in \mathcal{F}_C} \left| \mathbb{E} \left[\left\langle \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), C \right\rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \mu) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \right|, \quad [\text{IX.7}]$$

où

$$\mathcal{F}_C = \left\{ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p), \begin{array}{l} \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,y} Uh(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \\ \sup_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \|\text{Hess}_{x,x} Uh(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\text{HS}} \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \end{array} \right\}.$$

Démonstration : Soit $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ admettant des dérivées d'ordre 1 et 2 bornées, avec $\|h\|_{\text{Lip}} \leq 1$. Notons $\mathbf{Z}$ un vecteur aléatoire suivant $\mathcal{N}_d(\mu, C)$ indépendant de $\mathbf{Y}$. D'après l'équation de STEIN [IX.2],

$$\mathbb{E}[h(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E} \left[\left\langle \text{Hess}_{x,x}(Uh)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), C \right\rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \mu) \cdot \nabla_x (Uh)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right].$$

D'après la Proposition IX.1.3, $Uh \in \mathcal{F}_C$, si bien qu'on a immédiatement

$$\left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] \right| \leq \sup_{f \in \mathcal{F}_C} \left| \mathbb{E} \left[\left\langle \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), C \right\rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \mu) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \right|.$$

Pour avoir [IX.7], il faut montrer la précédente inégalité pour tout h 1-lipschitzienne. Pour cela, on applique l'argument usuel de convolution gaussienne. Pour $\varepsilon > 0$, on considère

$$h^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi\varepsilon)^{d+p}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} h(\mathbf{x}', \mathbf{y}') e^{-\frac{1}{2\varepsilon}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 + |\mathbf{y}-\mathbf{y}'|^2)} d\mathbf{y}' d\mathbf{x}'.$$

Puisque h est lipschitzienne, h est uniformément continue, si bien que h^ε converge uniformément vers h lorsque $[\varepsilon \rightarrow 0]$, en plus d'être de classe C^∞ et d'admettre des dérivées d'ordre 1 et 2 bornées, et de vérifier que $\|h^\varepsilon\|_{\text{Lip}} \leq \|h\|_{\text{Lip}}$. On en déduit avec un découpage que

$$\left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] \right| \leq 2\|h - h^\varepsilon\| + \sup_{f \in \mathcal{F}_C} \left| \mathbb{E} \left[\left\langle \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), C \right\rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \right|.$$

En faisant tendre ε vers 0, on conclut bien sur [IX.7]. $\square$

2. Application au cas dérivable

Soit $\mathcal{H}$ un espace de HILBERT réel séparable. On considère W un processus isonormal sur $\mathcal{H}$. On se place désormais sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{G}$ est la tribu (augmentée) engendrée par W . On note D la dérivée de MALLIAVIN par rapport au processus W , L l'opérateur d'ORNSTEIN–UHLENBECK associé et δ l'opérateur de divergence (regarder le Chapitre I).

Théorème IX.2.1 : Soient $d \geq 1$ et $p \geq 1$. On considère $\boldsymbol{\mu} = (\mu(1), \dots, \mu(d)) \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$, $\mathbf{X} = (X(1), \dots, X(d))$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p))$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$. On suppose que

(i) Pour tout $1 \leq i \leq d$, $X(i) \in \mathbb{D}^{1,4}$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y(j) \in \mathbb{D}^{1,4}$;

(ii) $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$.

Alors

$$\begin{aligned} d_W((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) &\leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E}[(C_{i,j} - \langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}})^2]} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E}[\langle DY(j), D(-L)^{-1}X(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \quad [\text{IX.8}] \end{aligned}$$

Démonstration : Reprenons l'inégalité [IX.7]. Considérons $f \in \mathcal{F}_C$. Alors on a plus explicitement

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left\langle \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), C \right\rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[C_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] - \sum_{i=1}^d (X(i) - \mu(i)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Or, d'après le Théorème I.4.6, on a

$$X(i) - \mu(i) = \delta D(-L)^{-1}X(i).$$

Ainsi, par relation de dualité [I.4]

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left\langle \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), C \right\rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[C_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] - \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[\left\langle D(-L)^{-1}X(i), D \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned}$$

Puis, par règle de la chaîne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left\langle \text{Hess}_{x,x}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), C \right\rangle_{\text{HS}} - (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla_x f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[C_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \langle D(-L)^{-1} X(i), DX(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \langle D(-L)^{-1} X(i), DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right] \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[(C_{i,j} - \langle D(-L)^{-1} X(i), DX(j) \rangle_{\mathcal{H}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \langle D(-L)^{-1} X(i), DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right].
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P})$, et puisque $f \in \mathcal{F}_C$, on conclut sur [IX.8]. $\square$

Remarque IX.2.2. Supposons que $\mathbf{Y}$ soit un vecteur gaussien et, par simplicité de l'explication, que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ soient centrés. Notons C' la matrice de covariance de $\mathbf{Y}$. Dans ce cas, la loi $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$ est la loi $\mathcal{N}_{d+p}(\mathbf{0}, \Gamma)$, où Γ est la matrice par blocs

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{d+p}^{++}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, estimer la distance de WASSERSTEIN entre $(X, \mathbf{Y})$ et cette loi normale peut se faire *via* la borne classique donnée par NOURDIN, PECCATI et RÉVEILLAC dans [NPR10], regarder le Théorème III.2.1. Cela donne ici

$$\begin{aligned}
d_W((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) &\leq \|\Gamma^{-1}\|_{\text{op}} \|\Gamma\|_{\text{op}}^{1/2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[(C_{i,j} - \langle DX(i), D(-L)^{-1} X(j) \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right]} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\langle DY(j), D(-L)^{-1} X(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} \right). \quad [\text{IX.9}]
\end{aligned}$$

On constate qu'entre [IX.8] et [IX.9], seule les constantes diffèrent. Il n'y *a priori* aucune raison pour que l'une des approches soient plus fine que l'autre. Constatons seulement que dans [IX.9], la matrice de covariance de $\mathbf{Y}$ est impliquée dans cette constante. $\clubsuit$

Remarque IX.2.3. Comme observé dans les Chapitres VII et X, on constate une estimation qu'on interprète comme suit :

$$d_W((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \leq \underbrace{\text{Approximation de } \mathbf{X} \text{ par la gaussienne}} + \underbrace{\text{Décorrélation entre } \mathbf{X} \text{ et } \mathbf{Y}}.$$

$\clubsuit$

3. Théorèmes Limites associés

Le Théorème IX.2.1 permet d'écrire des Théorèmes Limites lorsque le vecteur $\mathbf{X}$ est dans un produit de chaos de WIENER, et $\mathbf{Y}$ est simplement supposé L^2 . Nous allons d'abord décrire le cas où $\mathbf{Y}$ est dans un produit fini de chaos, puisque cela donne un critère déjà assez clair sur la convergence d'un couple $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}$, où $\mathbf{p}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^p$. Sous des hypothèses plus fortes, on en déduira le Théorème IX.3.5.

3.1. Chaos de Wiener

On suppose pour commencer que $\mathbf{Y}_n$ vit dans un produit fixe de chaos de WIENER. Pour cela, nous avons besoin d'expliciter la borne donnée par [IX.8] via la formule produit. C'est l'objet de la Proposition suivante.

Proposition IX.3.1 : Soient $d \geq 1$, $p \geq 1$, $\mathbf{X} = (X(1), \dots, X(d))$ et $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p))$ deux vecteurs aléatoires réels. On suppose :

- (i) Pour tout $1 \leq i \leq d$, il existe $q(i) \geq 1$ et $\phi(i) \in \mathcal{H}^{\odot q(i)}$ tels que $X(i) = I_{q(i)}(\phi(i))$;
- (ii) Pour tout $1 \leq j \leq p$, il existe $q'(j) \geq 1$ et $g(j) \in \mathcal{H}^{\odot q'(j)}$ tels que $Y(j) = I_{q'(j)}(g(j))$.

Alors si $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & d_W((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \\ & \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (C_{i,j} - \mathbb{E}[X(i)X(j)])^2} \\ & \quad + \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{r=1}^{q(i) \wedge q(j)} a_{q(i), q(j), r} \|\phi(i) \tilde{\otimes}_r \phi(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q(j)-2r)}}^2} \\ & \quad + \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{q(i) \wedge q'(j)} b_{q(i), q'(j), r} \|\phi(i) \tilde{\otimes}_r g(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q'(j)-2r)}}^2}, \end{aligned} \tag{IX.10}$$

où pour $q(i) \neq q(j)$

$$\begin{aligned} a_{q(i), q(j), r} & \triangleq r!^2 \binom{q(i)}{r}^2 \binom{q(j)-1}{r}^2 (2(q(i) \wedge q(j)) - r)! \\ b_{q(i), q'(j), r} & \triangleq r!^2 \binom{q(i)-1}{r-1}^2 \binom{q'(j)}{r}^2 (2(q(i) \wedge q'(j)) - r)! \end{aligned}$$

et pour $q(i) = q(j) = r$, $a_{q(i), q(i), q(i)} = 0$ définissent des constantes ne dépendant pas des $\phi(i)$ ou des $g(j)$.

Démonstration : Il s'agit de manipuler la formule produit sur l'inégalité [IX.8]. Par inégalité triangulaire, à partir de [IX.8], on a

$$\begin{aligned} d_W((\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) & \leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E}[(C_{i,j} - \mathbb{E}[X(i)X(j)])^2]} \\ & \quad + \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X(i)X(j)] - \langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}})^2]} \\ & \quad + \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E}[\langle DY(j), D(-L)^{-1}X(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2]}. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i, j \leq d$, le développement en chaos de $\langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}}$ se déroule comme dans la démonstration de la Proposition VII.3.1. De plus,

$$\mathbb{E}[X(i)X(j)] = \mathbb{E}[\langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}}].$$

On en déduit le développement suivant :

$$\langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{r=1}^{q(i) \wedge q(j)} r! \binom{q(j)-1}{r-1} \binom{q(i)}{r} I_{2(q(i) \wedge q(j) - r)}(\phi(i) \tilde{\otimes}_r \phi(j)).$$

Lorsque $q(i) \neq q(j)$, $\mathbb{E}[X(i)X(j)] = 0$, si bien que

$$\langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}} - \mathbb{E}[X(i)X(j)] = \sum_{r=1}^{q(i) \wedge q(j)} r! \binom{q(j)-1}{r-1} \binom{q(i)}{r} I_{2(q(i) \wedge q(j)-r)}(\phi(i) \tilde{\otimes}_r \phi(j)).$$

Par contre, lorsque $q(i) = q(j)$, $\mathbb{E}[X(i)X(j)]$ est égal au terme $r = q(i)$, ce qui donne dans ce cas

$$\langle DX(i), D(-L)^{-1}X(j) \rangle_{\mathcal{H}} - \mathbb{E}[X(i)X(j)] = \sum_{r=1}^{q(i)-1} r! \binom{q(i)-1}{r-1} \binom{q(i)}{r} I_{2(q(i)-r)}(\phi(i) \tilde{\otimes}_r \phi(j)).$$

On conclut par isométrie de l'intégrale de WIENER et par orthogonalité des chaos pour obtenir le deuxième terme [IX.10], impliquant les $a_{q(i),q(j),r}$. Quand au dernier terme, il provient du développement en chaos du terme en dérivées croisées $\langle DY(j), D(-L)^{-1}X(i) \rangle_{\mathcal{H}}$, se déroulant comme dans la démonstration de la Proposition VII.3.1. $\square$

Nous pouvons en déduire le Théorème Limite suivant, interprétable comme une forme d'indépendance asymptotique.

Théorème IX.3.2 : Soient $d \geq 1$, $p \geq 1$, $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On considère deux suites de vecteurs aléatoires $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^d$ et une suite $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^p$, où on note $X_n(i)$ la i -ème composante de $\mathbf{X}_n$ et $Y_n(j)$ la j -ème composante de $\mathbf{Y}_n$. On suppose que ces vecteurs appartiennent aux espaces suivants

- (a) il existe des entiers $q(1), \dots, q(d) \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 \leq i \leq d$, $X_n(i) \in \mathfrak{H}_{q(i)}$;
- (b) il existe des entiers $q'(1), \dots, q'(p) \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y_n(j) \in \mathfrak{H}_{q'(j)}$.

On fait les hypothèses suivantes.

- (i) Le vecteur $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$;
- (ii) Le vecteur aléatoire $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^p$ qu'on note $\mathfrak{p}$;
- (iii) Les ordres de $\mathbf{Y}_n$ sont tous inférieurs ou égaux aux ordres de $\mathbf{X}_n$:

$$\max_{1 \leq j \leq p} q'(j) \leq \min_{1 \leq i \leq d} q(i);$$

- (iv) On a décorrélation asymptotique : pour tout $1 \leq i \leq d$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n(i)Y_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors la suite de couples $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathfrak{p}$. Si de plus $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en distance de WASSERSTEIN vers $\mathfrak{p}$ alors la convergence de $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ est aussi valable en distance de WASSERSTEIN avec pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathfrak{p}) &\leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E}[(C_{i,j} - \langle DX_n(i), D(-L)^{-1}X_n(j) \rangle_{\mathcal{H}})^2]} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E}[\langle DY_n(j), D(-L)^{-1}X_n(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2]} \quad [\text{IX.11}] \\ &\quad + d_W(\mathbf{Y}_n, \mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Démonstration : Considérons $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$ tels que $|(\mathbf{t}, \mathbf{s})| > 0$ et notons

$$h = h(\mathbf{t}, \mathbf{s}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \frac{1}{|(\mathbf{t}, \mathbf{s})|} e^{i\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}}.$$

Remarquons qu'on a fait en sorte que h soit bien 1-lipschitzienne. Pour montrer que $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathfrak{p}$, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})], \quad [\text{IX.12}]$$

où $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ suit $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}$. Par inégalité triangulaire, si on note $\mathbf{Z}_n$ un vecteur aléatoire suivant $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$ et indépendant de $\mathbf{Y}_n$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Y}_n)] \right| + \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] \right| \\ & \leq d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_n) - H(\mathbf{Y})] \right| \\ & \triangleq A + B. \end{aligned}$$

On a défini pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$H(\mathbf{y}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x},$$

où G est la densité de la gaussienne $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$. Montrons que A et B convergent vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Commençons par le terme B . Pour cela, il suffit de constater que H est continue bornée par $\frac{1}{|(\mathbf{t}, \mathbf{s})|}$, si bien que par convergence en loi de $(\mathbf{Y}_n)_n$ vers $\mathbf{Y}$, on a la convergence de B vers 0.

Montrons désormais la convergence vers 0 du terme A . Pour tout $n \geq 1$, et $1 \leq i \leq d$, on note $X_n(i) = I_{q(i)}(\phi_n(i))$ et pour $1 \leq j \leq p$, $Y_n(j) = I_{q'(j)}(g_n(j))$. Pour montrer la convergence de A vers 0, d'après la Proposition IX.3.1, il suffit de montrer les différentes convergences suivantes lorsque $[n \rightarrow \infty]$:

1. $\mathbb{E}[X_n(i)X_n(j)] \rightarrow C_{i,j}$;
2. Pour $1 \leq r \leq q(i) \wedge q(j)$, $\|\phi_n(i) \tilde{\otimes}_r \phi_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q(j)-2r)}} \rightarrow 0$;
3. Pour $1 \leq r \leq q(i) \wedge q'(j)$, $\|\phi_n(i) \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q'(j)-2r)}} \rightarrow 0$.

Les points 1. et 2. sont conséquences de la convergence en loi de $(\mathbf{X}_n)_n$ vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$, via le Théorème du Quatrième Moment pour les lois gaussiennes multidimensionnelles. Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à montrer le point 3..

D'après l'hypothèse (iii), $q(i) \wedge q'(j) = q'(j)$. Supposons pour commencer que $1 \leq r \leq q'(j) - 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \|\phi_n(i) \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q'(j)-2r)}}^2 & \leq \|\phi_n(i) \otimes_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q'(j)-2r)}}^2 \\ & = \langle \phi_n(i) \otimes_{q(i)-r} \phi_n(i), g_n(j) \otimes_{q'(j)-r} g_n(j) \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(2r)}} \\ & \leq \|\phi_n(i) \otimes_{q(i)-r} \phi_n(i)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2r)}} \|g_n(j) \otimes_{q'(j)-r} g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2r)}} \\ & \leq \|\phi_n(i) \otimes_{q(i)-r} \phi_n(i)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2r)}} \sup_{n \geq 1} \|g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{q'(j)}}^2. \end{aligned}$$

Rappelons que puisque $(Y_n(j))_{n \geq 1}$ converge en loi dans un chaos fixé, il s'agit d'une suite bornée dans L^2 (regarder le Corollaire 6.11 de [Jan97]). De plus, par convergence de $(X_n(i))_n$ vers une gaussienne, le Théorème du Quatrième Moment conclut que $\phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)-r} \phi_n(i)$ tend vers 0, donc

$$\|\phi_n(i) \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q'(j)-2r)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Supposons désormais que $r = q'(j)$. Alors, nous devons isoler deux cas : celui où $q'(j) < q(i)$ et celui où $q'(j) = q(i)$. Si $q'(j) < q(i)$, l'inégalité

$$\|\phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q'(j)} g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)-q'(j))}}^2 \leq \|\phi_n(i) \otimes_{q(i)-q'(j)} \phi_n(i)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2q'(j))}} \sup_{n \geq 1} \|g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{q'(j)}}^2$$

reste valable, donc on a encore bien convergence vers 0. Enfin, si $r = q'(j) = q(i)$, alors cette fois, on a

$$\|\phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q'(j)} g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 0}}^2 = \langle \phi_n(i), g_n(j) \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q'(j)}} = \frac{1}{q(j)!} \mathbb{E}[X_n(i)Y_n(j)].$$

D'après l'hypothèse (iv), cela tend encore vers 0. On a alors bien montré le point 3., donc a bien montré que le terme A tend vers 0. On en déduit la convergence en loi annoncée.

Reste à montrer [IX.11]. Soit $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne. Alors, de même qu'en début de démonstration, avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Y}_n)] \right| + \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] \right| \\ & \leq d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_n) - H(\mathbf{Y})] \right|. \end{aligned}$$

Puisque H est 1-lipschitzienne, on en déduit que

$$\left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})] \right| \leq d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + d_W(\mathbf{Y}_n, \mathbf{p}).$$

On conclut alors avec le Théorème IX.2.1 sur l'inégalité [IX.11]. La convergence en distance de WASSERSTEIN de $(\mathbf{Y}_n)_n$ vers $\mathbf{p}$, et l'étude du terme A permettent par ailleurs de conclure que la convergence du couple a bien lieu aussi au sens de WASSERSTEIN. $\square$

3.2. Somme finie de chaos

On s'intéresse ici au cas où $\mathbf{Y}$ est dans une somme finie fixe de chaos. Cela est une étape supplémentaire pour aboutir au Théorème IX.3.5. On écrit uniquement ces résultats sous la forme de Propositions puisqu'elles ne sont pas d'importance aussi cruciale que le cas unichaotique (la démonstration est très proche) ni que dans le cas d'un développement infini.

3.2.1 Sous l'hypothèse de convergence en loi

Nous commençons par présenter un cas qui étend le Théorème IX.3.2 pour une hypothèse de convergence en loi de $\mathbf{Y}$, qui impose encore cette condition d'ordre sur les chaos entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Cette Proposition n'est pas utile pour démontrer le cas du développement infini, elle est présente à titre informatif.

Proposition IX.3.3 : Soient $d \geq 1$ et $p \geq 1$. On considère $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ dont on note $X_n(i)$ la i -ème composante et $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$ dont on note $Y_n(j)$ la j -ème composante. Soit $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que les variables sont dans les espaces suivants.

- (a) Pour tout $1 \leq i \leq d$, il existe $q(i)$ tel que pour tout $n \geq 1$, $X_n(i) \in \mathfrak{H}_{q(i)}$;
- (b) Il existe $q' \geq 1$ tel que pour tout $1 \leq j \leq p$ et $n \geq 1$, $Y_n(j) \in \bigoplus_{k=0}^{q'} \mathfrak{H}_k$.

On fait les hypothèses suivantes.

- (i) $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$;
- (ii) $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une probabilité $\mathbf{p}$;
- (iii) Les ordres des composantes de $\mathbf{Y}_n$ sont tous inférieurs à ceux de $\mathbf{X}_n$: $q' \leq \min_{1 \leq i \leq d} q(i)$;
- (iv) On a décorrélation asymptotique : pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n(i)Y_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}$. Si $(\mathbf{Y}_n)_n$ converge en distance de WASSERSTEIN vers $\mathbf{p}$ alors la convergence du couple $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ a aussi lieu dans ce sens, et on a de plus l'inégalité [IX.11].

Démonstration : La démonstration est la même que précédemment. Pour $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq p$, notons

$$Y_n(j) = \sum_{k=0}^{q'} Y_{n,k}(j)$$

la décomposition en chaos de $Y_n(j)$. On utilise encore l'inégalité [IX.8]. Par inégalité triangulaire

$$\sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1} X_n(i), DY_n(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} \leq \sum_{k=0}^{q'} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1} X_n(i), DY_{n,k}(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]}.$$

Le reste se déroule comme avant, formule produit pour avoir une expression avec les coefficients $b_{q(i), q'(j), r}$ et en déduire qu'il suffit de montrer que $\|\phi_n(i) \tilde{\otimes}_r g_{n,k}(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q+k-2r)}}$ tend vers 0 (avec des notations semblables à la démonstration précédente). $\square$

3.2.2 Sous l'hypothèse de convergence quadratique

Nous présentons cette fois-ci la forme de la Proposition précédente avec cette fois-ci une hypothèse plus forte de convergence L^2 de $\mathbf{Y}$. Cela permet de s'abstraire des hypothèses d'ordre sur les chaos. Cette Proposition sera incontournable pour démontrer le Théorème IX.3.5.

Proposition IX.3.4 : Soient $d \geq 1$ et $p \geq 1$. On considère $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ dont on note $X_n(i)$ la i -ème composante et $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$ dont on note $Y_n(j)$ la j -ème composante. Soit $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que les variables sont dans les espaces suivants.

- (a) Pour tout $1 \leq i \leq d$, il existe $q(i)$ tel que pour tout $n \geq 1$, $X_n(i) \in \mathfrak{H}_{q(i)}$;
- (b) Il existe $M \geq 1$ tel que pour tout $1 \leq j \leq p$ et $n \geq 1$, $Y_n(j) \in \bigoplus_{q'=0}^M \mathfrak{H}_{q'}$.

On fait les hypothèses suivantes.

- (i) $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$;
- (ii) $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^2 vers un vecteur $\mathbf{Y}_\infty$ admettant une loi notée $\mathbf{p}$;
- (iii) On a décorrélation asymptotique : pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n(i)Y_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge au sens de WASSERSTEIN vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}$, et l'inégalité [IX.11] est vérifiée.

Démonstration : Par inégalité triangulaire, pour tout $n \geq 1$,

$$d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}) \leq d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + d_W(\mathbf{Y}_n, \mathbf{p}). \quad [\text{IX.13}]$$

Par inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$d_W(\mathbf{Y}_n, \mathbf{p}) \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[\|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_\infty\|^2 \right]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Notons le développement en chaos de $\mathbf{Y}_n$ par

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{q'=0}^M \mathbf{Y}_n^{q'}.$$

D'après le Théorème IX.2.1, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) &\leq \|C^{-1}\|_{\text{op}} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \left[(C_{i,j} - \langle D X_n(i), D(-L)^{-1} X_n(j) \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right]} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \|C^{-1}\|_{\text{op}}^{1/2} \|C\|_{\text{op}}^{1/2} \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \sum_{q'=0}^M \mathbb{E} \left[\langle D Y_n^{q'}(j), D(-L)^{-1} X_n(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème du Quatrième Moment multidimensionnel, le premier terme tend vers 0. Notons pour $n \geq 1$

$$\Delta_n \triangleq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^p \sum_{q'=0}^M \mathbb{E} \left[\langle D Y_n^{q'}(j), D(-L)^{-1} X_n(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right].$$

Il suffit de montrer que Δ_n tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$ pour conclure en la convergence pour la distance de WASSERSTEIN. On fixe deux indices $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$ et un ordre $0 \leq q' \leq M$. On note

$$\Delta_n(i, j, q') \triangleq \mathbb{E} \left[\langle D Y_n^{q'}(j), D(-L)^{-1} X_n(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right].$$

D'après la formule produit, ceci se développe de la sorte

$$\Delta_n(i, j) = \sum_{r=1}^{q(i) \wedge q'} b_{q(i), q', r} \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_r g_n^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q(i) + q' - 2r)}}^2,$$

où les constantes $b_{q(i),q',r}$ sont définies dans la Proposition IX.3.1, et où on a défini $X_n(i) = I_{q(i)}(\phi_n(i))$ et $Y_n(j) = I_{q'}(g_n^{q'}(j))$. Pour $1 \leq r \leq q(i) \wedge q'$, on note

$$\Delta_n(i, j, q')_r \triangleq \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_r g_n^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)+q'-2r)}},$$

qu'on transforme immédiatement en Δ , on cache les dépendances en tous les entiers en jeu. Pour conclure que Δ_n tend vers 0, il suffit de montrer que pour tous entiers i, j, q' et r , Δ tend vers 0. Cela est déjà démontré dans la Proposition IX.3.3 lorsque $q(i) > q'$, la convergence en loi de $\mathbf{Y}_n$ est suffisante, sans avoir besoin de décorrélation asymptotique. Reste à montrer le cas où $q' \geq q(i)$. Pour $q' = q(i)$, le résultat est aussi démontré lorsque $r < q'$ dans la Proposition IX.3.3. Enfin, pour $r = q'$, puisque $X_n(i) \in \mathfrak{H}_{q(i)}$, l'orthogonalité des chaos permet d'écrire

$$\Delta^2 = \frac{1}{q!} \mathbb{E}[X_n(i) Y_n^{q'}(j)] = \frac{1}{q!} \mathbb{E}[X_n(i) Y_n(j)],$$

qui tend vers 0 par hypothèse de décorrélation (iii).

Supposons désormais que $q' > q(i)$. Pour $r < q(i) < q'$, on a encore l'inégalité suivante, qu'on utilise déjà dans la démonstration de la Proposition IX.3.3

$$\Delta^2 \leq \left\| \phi_n(i) \otimes_{q(i)-r} \phi_n(i) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(2r)}} \sup_{n \geq 1} \left\| g_n^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}^2,$$

qui tend vers 0 par Théorème du Quatrième Moment. Considérons enfin le cas où $r = q(i) < q'$. Montrons que la convergence L^2 de $\mathbf{Y}_n$ permet de conclure que Δ tend vers 0 dans ce cas précis. La convergence L^2 de $\mathbf{Y}_n$ vers $\mathbf{Y}_\infty$ implique la convergence L^2 de tous les $\mathbf{Y}_n^{q'}$, pour $0 \leq q' \leq M$ vers $\mathbf{Y}_\infty^{q'}$ et donc on a par isométrie de l'intégrale de WIENER,

$$\left\| g_n^{q'}(j) - g_\infty^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad [\text{IX. 14}]$$

Ainsi, par inégalités triangulaires

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g_\infty^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} + \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} (g_n^{q'}(j) - g_\infty^{q'}(j)) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} \\ &\leq \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g_\infty^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} + \sup_{n \geq 1} \left\| \phi_n(i) \right\|_{\mathcal{H}^{q(i)}} \left\| g_n^{q'}(j) - g_\infty^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}. \end{aligned}$$

D'après [IX. 14], le deuxième terme vers 0. Reste à montrer que

$$\Delta' \triangleq \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g_\infty^{q'}(j) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On allège les notations en notant uniquement $g = g_\infty^{q'}(j)$. Si $(e_i)_{i \geq 1}$ désigne une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ alors dans $\mathcal{H}^{\otimes q'}$, on a la décomposition suivante

$$g = \sum_{i_1, \dots, i_{q'} \geq 1} \left\langle g, \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q'}} \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k}.$$

Soit $K \geq 1$. Alors on définit $g_K \triangleq \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{q'} \leq K} \left\langle g, \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q'}} \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k}$, de sorte que

$$\left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} \leq \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g_K \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} + \sup_{n \geq 1} \left\| \phi_n(i) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes q(i)}} \|g - g_K\|_{\mathcal{H}^{q'}}.$$

Le deuxième terme tend uniformément vers 0 lorsque $[K \rightarrow \infty]$. Montrons qu'à K fixé, le premier terme tend aussi vers 0. Soient $1 \leq i_1, \dots, i_{q'} \leq K$. Alors

$$\begin{aligned} \phi_n(i) \otimes_{q(i)} \bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k} &= \frac{1}{q'!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q'}} \left\langle \phi_n(i), \bigotimes_{k=1}^{q(i)} e_{i_{\sigma(k)}} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q(i)}} \bigotimes_{k=q(i)+1}^{q'} e_{i_{\sigma(k)}} \\ &= \frac{1}{q'!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q'}} \left\langle \phi_n(i) \otimes_1 e_{i_{\sigma(1)}}, \bigotimes_{k=2}^{q(i)} e_{i_{\sigma(k)}} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)-1)}} \bigotimes_{k=q(i)+1}^{q'} e_{i_{\sigma(k)}} \end{aligned}$$

Si bien que

$$\left\| \phi_n(i) \otimes_{q(i)} \widetilde{\bigotimes_{k=1}^{q'} e_{i_k}} \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q)}} \leq \frac{1}{q'!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q'}} \left\| \phi_n(i) \otimes_1 e_{i_{\sigma(1)}} \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q(i)-1)}} \\ \leq \left\| \phi_n(i) \otimes_{q(i)-1} \phi_n(i) \right\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

par le Théorème du Quatrième Moment. On en déduit alors que pour $K \geq 1$ fixé, $\left\| \phi_n \otimes_{q(i)} g_K \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes q(i)}}$ tend vers 0 quand $[n \rightarrow \infty]$. Ainsi, pour tout $K \geq 1$,

$$\Delta' \leq \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g_K \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} + \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} (g - g_K) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} \\ \leq \left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g_K \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} + \sup_{n \geq 1} \left\| \phi_n \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes q(i)}} \|g - g_K\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence dans $\mathcal{H}^{\otimes q'}$ de g_K vers g , on peut fixer K de sorte que

$$\left\| \phi_n \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes q(i)}} \|g - g_K\|_{\mathcal{H}^{\otimes q'}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour ce choix de K , il existe un rang $N = N(\varepsilon, K)$ à partir duquel, pour tout $n \geq N$,

$$\left\| \phi_n(i) \tilde{\otimes}_{q(i)} g_K \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} \leq \left\| \phi_n(i) \otimes_{q(i)} g_K \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes(q'-q(i))}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, $\Delta' \leq \varepsilon$, donc Δ' tend vers 0. C'est donc aussi le cas de Δ . On conclut donc bien que Δ_n tend vers 0, donc à partir de [IX.13], on en déduit la convergence en distance de WASSERSTEIN annoncée, avec de plus l'estimation [IX.11]. $\square$

3.3. Cas général

On présente cette fois-ci le cas d'un développement en chaos possiblement infini pour $\mathbf{Y}$. Attention, comme dans la deuxième Proposition à propos de convergence sur des sommes finies de chaos fixes (Proposition IX.3.4, on suppose une convergence plus forte sur $\mathbf{Y}$, à savoir une convergence L^2 au lieu d'une convergence en loi. Cela permet de mettre de côté les problèmes d'hypothèses liées aux ordres inférieurs de $\mathbf{X}$.

Pour $q \geq 0$, on note $J_q : \bigoplus_{k \geq 0}^{\perp} \mathfrak{H}_k \longrightarrow \mathfrak{H}_q$ la projection orthogonale sur $\mathfrak{H}_q$.

Théorème IX.3.5 : Soient $d \geq 1$ et $p \geq 1$. On considère une suite de vecteurs aléatoires $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}^d$, dont on note $X_n(i)$ la i -ème composante et $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ une autre suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$ dont on note $Y_n(j)$ la j -ème composante. Soit $C \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. La suite de vecteurs $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ et $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ appartiennent aux espaces suivants.

- (a) Pour tout $1 \leq i \leq d$, il existe $q(i) \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$, $X_n(i) \in \mathfrak{H}_{q(i)}$;
- (b) Pour tout $1 \leq j \leq p$ et pour tout $n \geq 1$, $Y_n(j) \in L^2(\mathbb{P})$.

On fait les hypothèses suivantes.

- (i) $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$;
- (ii) $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^2 vers un vecteur aléatoire $\mathbf{Y}_\infty$ de loi $\mathbf{p}$;
- (iii) Pour tout $1 \leq j \leq p$, le reste des développements en chaos de WIENER de $(Y_n(j))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 :

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{q'=M+1}^{+\infty} \mathbb{E}[J_{q'} Y_n(j)^2] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

- (iv) On a décorrélation asymptotique : pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n(i) Y_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors le couple $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge pour la distance de WASSERSTEIN vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$. De plus, si pour tout $1 \leq j \leq p$ et $n \geq 1$, $Y_n(j) \in \mathbb{D}^{1,4}$, alors l'estimation [IX.11] est vérifiée.

Démonstration : Notons $\mathbf{Z}$ suit $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$ et est indépendant de $\mathbf{Y}_\infty$. Pour $M \geq 1$ et $n \geq 1$ ou $n = \infty$, on considère les développements tronqués jusqu'à l'ordre M de $\mathbf{Y}_n$: pour tout $1 \leq j \leq p$

$$Y_n^M(j) \triangleq \sum_{q'=0}^M J_{q'} Y_n(j).$$

Soit $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une application 1-lipschitzienne. On fait le découpage suivant

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_\infty)] \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n^M)] \right| + \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n^M)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}^M, \mathbf{Y}_\infty^M)] \right| \\ & \quad + \left| \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}^M, \mathbf{Y}_\infty^M)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_\infty)] \right| \\ & \triangleq A_{n,M}(h) + B_{n,M}(h) + C_M(h), \end{aligned} \tag{IX.15}$$

où $\mathbf{Z}^M$ suit $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$ et est indépendant de $\mathbf{Y}_\infty^M$.

Commençons par traiter le terme A . Par inégalité triangulaire, en utilisant le caractère 1-Lipschitz de h ,

$$A_{n,M}(h) \leq \mathbb{E} [|h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) - h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n^M)|] \leq \mathbb{E} [|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_n^M|].$$

En appliquant de nouveau l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P})$, et par orthogonalité des chaos

$$A_{n,M} \leq \sqrt{\mathbb{E} [|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_n^M|^2]} = \sqrt{\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^p \sum_{q'=M+1}^{+\infty} J_{q'} Y_n(j)^2 \right]}$$

Ainsi, on conclut que

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{n \geq 1} A_{n,M}(h) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^p \sup_{n \geq 1} \sum_{q'=M+1}^{+\infty} \mathbb{E} [J_{q'} Y_n(j)^2]} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Pour le terme B . Pour $M \geq 1$, et $n \geq 1$, on a

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) \leq d_W \left((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n^M), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}^M \right),$$

où $\mathbf{p}^M$ est la loi de $\mathbf{Y}_\infty^M$. Notons que pour tout $M \geq 1$, $(\mathbf{Y}_n^M)_{n \geq 1}$ converge dans L^2 vers $\mathbf{Y}_\infty^M$, puisque

$$\mathbb{E} [|\mathbf{Y}_n^M - \mathbf{Y}_\infty^M|^2] \leq \mathbb{E} [|\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_\infty|^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, $\mathbf{X}_n$ et $\mathbf{Y}_n^M$ sont aussi asymptotiquement décorrélés puisque par orthogonalité des chaos, pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq p$

$$\mathbb{E} [X_n(i) Y_n^M(j)] = \mathbb{E} [X_n(i) Y_n(j)] \mathbf{1}_{\{M \geq q(i)\}}.$$

Les trois hypothèses de la Proposition IX.3.4 sont donc vérifiées, on peut donc conclure que $(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n^M)_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}^M$. Mieux encore, cette même Proposition nous affirme que cela se passe en distance de WASSERSTEIN. On en déduit alors que pour tout $M \geq 1$,

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) \leq d_W \left((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n^M), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C) \otimes \mathbf{p}^M \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour le terme C . Notons G la densité de $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, C)$ et pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$H(\mathbf{y}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}.$$

Puisque h est 1-lipschitzienne, c'est aussi de le cas H . Ainsi, pour tout $M \geq 1$, on a par inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans $L^2(\mathbb{P})$

$$C_M(h) = \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_\infty^M)] - \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_\infty)] \right| \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[|\mathbf{Y}_\infty^M - \mathbf{Y}_\infty|^2 \right]}.$$

D'où

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} C_M(h) \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[|\mathbf{Y}_\infty^M - \mathbf{Y}_\infty|^2 \right]} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Récapitulons. Reprenons l'inégalité [IX.15]. Nous avons montré que

$$\left| \mathbb{E}[h(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_\infty)] \right| \leq \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{n \geq 1} A_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} C_M(h).$$

Le membre de droite ne dépend pas de h , donc on a en fait

$$d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), (\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_\infty)) \leq \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{n \geq 1} A_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} C_M(h).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par les investigations faites sur A et C , il existe $M \geq 1$ pour lequel

$$\sup_{h \in \text{Lip}(1)} \sup_{n \geq 1} A_{n,M}(h) + \sup_{h \in \text{Lip}(1)} C_M(h) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons alors un tel M . Pour ce choix de M , on sait que $\sup_{h \in \text{Lip}(1)} B_{n,M}(h)$ tend vers 0 lorsque $[n \rightarrow \infty]$. Il suit qu'il existe $N = N(\varepsilon, M)$ tel que pour tout $n \geq N$, $B_{n,M} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En conclusion, nous avons montré que pour $n \geq N$,

$$d_W((\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n), (\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_\infty)) \leq \varepsilon.$$

Cela permet de conclure sur la convergence au sens de WASSERSTEIN. Enfin, si on suppose de plus que pour tout $1 \leq j \leq p$ et $n \geq 1$, $Y_n(j) \in \mathbb{D}^{1,4}$, l'inégalité [IX.11] est montrée comme toutes les autres démonstrations à partir d'une inégalité triangulaire et du Théorème IX.2.1. $\square$

4. Application au Théorème de Breuer–Major

4.1. Contexte

Le Théorème Central Limite classique affirme que si on dispose d'une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées $(Y_n, n \geq 1)$ et L^2 alors sous normalisation, la suite converge en loi vers la gaussienne standard. Les Théorèmes de BREUER–MAJOR explorent le cas où $Y_n = f(X_n)$, où $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ est un processus gaussien stationnaire centré et f est une fonction L^2 par rapport à $\mathcal{N}(0, 1)$. Si ρ est la fonction de corrélation de X , c'est-à-dire que $\rho(n) = \mathbb{E}[X_n X_0]$, il existe des conditions sur ρ pour lesquelles on observe une convergence en loi de la renormalisation de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k)$ vers $\mathcal{N}(0, 1)$. Regarder par exemple [NP12a] pour une explication plus précise à ce sujet.

On s'intéresse au cas où X est donné par des incréments de mouvement brownien fractionnaire. Pour $0 < H < 1$, on considère B_H un mouvement brownien fractionnaire d'indice de HURST H : il s'agit d'un processus gaussien réel indexé sur $\mathbb{R}_+$ centré et de fonction de covariance donnée pour tout $s, t \geq 0$ par

$$\mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2} \left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right).$$

On peut montrer qu'il s'agit d'un processus à accroissements stationnaires mais non-indépendants, à moins que $H = 1/2$ auquel cas $B_{1/2}$ est un mouvement brownien standard. On considère le processus gaussien suivant, donné pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$X_k \triangleq B_H(k+1) - B_H(k).$$

Alors la fonction de covariance de X est donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\rho_H(k) \triangleq \frac{1}{2} \left((k+1)^{2H} + |k-1|^{2H} - 2k^{2H} \right).$$

En particulier, $(X_k)_{k \geq 0}$ est un processus stationnaire, de loi commune $\mathcal{N}(0, 1)$. On cherche donc à étudier la convergence en loi de la version normalisée de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$, où $f \in L^2(\mathcal{N}(0, 1))$. Un cas particulier intéressant consiste à prendre $f = H_q$ le q -ème polynôme d'HERMITE puisque ces polynômes forment une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{N}(0, 1))$.

Notons $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} H_q(B_H(k+1) - B_H(k))$. La suite de variables aléatoires $(nM_n, n \geq 1)$ est appelée *q-variation d'HERMITE de B_H* . Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[M_n] = 0$ et de plus

$$\sigma[M_n]^2 = q! \sum_{v=0}^{n-1} \rho_H(v)^q \cdot 2(n-v).$$

L'étude d'une expression asymptotique de $\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \rho(k)^q$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$ aboutit à trois comportements distincts, correspondant à trois normalisations possibles de M_n . Le Théorème suivant résume cette discussion, dont une démonstration est vue dans [NP12a], ou avec les outils classiques de la méthode de NOURDIN–PECCATI dans [BN08].

Théorème IX.4.1 : (*Théorème 7.4.1 de [NP12a]*) *Considérons pour $q \geq 2$ et pour tout $n \geq 1$,*

$$V_n^{(q)} \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} H_q(B_H(k+1) - B_H(k)).$$

1. *Si $0 < H < 1 - \frac{1}{2q}$, alors*

$$\frac{1}{\sigma_{q,H} \sqrt{n}} V_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\sigma_{q,H}^2 = 2q! \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_H(k)^q$.

2. *Si $H = 1 - \frac{1}{2q}$ alors*

$$\frac{1}{\sigma_{q,1-1/2q} \sqrt{n \ln n}} V_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\sigma_{q,1-1/2q}^2 = 2q!(1 - 1/q)^q (1 - 1/2q)^q$.

3. *Pour $1 - \frac{1}{2q} < H < 1$, alors*

$$\frac{1}{n^{1-q(1-H)}} V_n^{(q)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Variable d'HERMITE}.$$

Nous ne détaillerons pas plus ce qu'est une variable d'HERMITE, puisqu'on ne l'utilisera pas dans la suite. Notez seulement qu'il s'agit du processus d'HERMITE pris au temps 1, qui apparaît dans le chaos d'ordre q . La démonstration des deux premiers points se fait avec les outils de la méthode de NOURDIN–PECCATI, donnant aussi une estimation de la vitesse de convergence en distance en variation totale, tandis que la démonstration du dernier repose sur une convergence L^2 d'une copie d'une suite de variables de même loi que $V_n^{(q)}$ (donnant aussi lieu à une estimation en variation totale, due à l'estimation de la vitesse de convergence L^2).

On s'intéresse dans la suite uniquement au cas où $0 < H < 1 - 1/2q$. Une étape suivante après avoir montré un TCL est de montrer un TCL fonctionnel. Dans notre cas, il s'agit d'étudier une marche aléatoire de pas de plus en plus petit suivant les variables normalisées. En l'occurrence, dans le cas de $V_n^{(q)}$, on étudie pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement $S_n^{(q)}(0) = 0$ si $t = 0$ et pour $t > 0$

$$S_n^{(q)}(t) \triangleq V_{[nt]}^{(q)} + (nt - [nt])H_q(B_H([nt] + 1) - B_H([nt])). \quad [\text{IX.16}]$$

Il s'agit d'une approximation affine par morceaux de la marche aléatoire discrète de hauteur donné par la suite $(H_q(X_k), k \in \mathbb{N})$ et de pas $1/n$. Dans [NPR10], le Théorème suivant est démontré à l'aide de la méthode de NOURDIN–PECCATI pour la loi normale multidimensionnelle.

Théorème IX.4.2 : (*Théorème 4.1 de [NPR10]*) *Pour tout $n \geq 1$, on considère le processus stochastique $(S_n^{(q)}(t), t \geq 0)$ donné par [IX.16]. Alors, au sens des lois finie-dimensionnelles, la suite*

de processus $\left(\frac{1}{\sigma_{q,H}\sqrt{n}}\mathbf{S}_n^{(q)}, n \geq 1\right)$ converge vers un mouvement brownien standard, $\sigma_{q,H}$ est défini dans le Théorème IX.4.1. De plus, pour $q \geq 3$, pour tout $d \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d$, il existe une constante $C = C(q, H, t_1, \dots, t_d)$ telle que

$$d_W \left(\left(\frac{\mathbf{S}_n^{(q)}(t_i) - \mathbf{S}_n^{(q)}(t_{i-1})}{\sigma_{q,H}\sqrt{n(t_i - t_{i-1})}} \right)_{1 \leq i \leq d}, \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d) \right) \leq C \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } 0 < H < 1/2 \\ n^{-(1-H)} & \text{si } 1/2 < H < 1 - \frac{1}{2(q-2)} \\ n^{1/2-q(1-H)} & \text{si } 1 - \frac{1}{2(q-2)} < H < 1 - \frac{1}{2q}. \end{cases}$$

4.2. Théorème Limite indépendant multidimensionnel

Soit $q \geq 3$. On considère de plus le cas $q = 2$, donné par $(V_n^{(2)}, n \geq 1)$ définie par

$$V_n^{(2)} \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} H_2(B_H(k+1) - B_H(k)).$$

D'après le Théorème IX.4.1, point 3., lorsque $\frac{3}{4} < H < 1$, $\frac{1}{n^{2H-1}}V_n^{(2)}$ converge en loi lorsque $[n \rightarrow \infty]$ vers une dilatation de la loi dite de ROSENBLATT, c'est-à-dire la loi d'HERMITE pour $q = 2$ multipliée par une constante (qui dépend de H). De plus, d'après la convergence L^2 d'une copie de U_n vers une variable de ROSENBLATT, vue dans la Proposition 3.1 de [BN08],

$$d_W \left(\frac{1}{n^{2H-1}}V_n^{(2)}, \text{Rosenblatt dilatée} \right) \leq \frac{C}{n^{H-3/4}}. \quad [\text{IX.17}]$$

On s'intéresse au comportement asymptotique du couple composé de $\mathbf{S}_n^{(2)}(t')$, avec $t' \geq 0$ et du processus donné par les accroissements de $\mathbf{S}_n^{(q)}$, pour $H \in (3/4, 1) \cap (0, 1 - 1/2q)$. Puisqu'on se contente de constantes pouvant dépendre des choix des temps d'évaluation, on considère uniquement une évaluation en $t' = 1$ du processus $\mathbf{S}_n^{(2)}$, donnant $\mathbf{S}_n^{(2)}(1) = V_n^{(2)}$. C'est l'objet du Théorème suivant.

Théorème IX.4.3 : Soient $q \geq 4$, $3/4 < H < 1 - 1/2q$, $\mathbf{S}_n^{(q)}$ donné par [IX.16] et $V_n^{(2)}$ défini précédemment. Pour $d \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d$, il existe $C = C(q, H, t_1, \dots, t_d)$ telle que pour tout $n \geq 1$

$$d_W \left\{ \mathcal{L} \left(\left(\frac{\mathbf{S}_n^{(q)}(t_i) - \mathbf{S}_n^{(q)}(t_{i-1})}{\sigma_{q,H}\sqrt{n(t_i - t_{i-1})}} \right)_{1 \leq i \leq d}, \frac{1}{n^{2H-1}}V_n^{(2)} \right), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d) \otimes \mathcal{R} \right\} \leq C \begin{cases} \frac{1}{n^{1-H}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} & \text{si } 3/4 < H < 1 - \frac{1}{2q-2} \\ \frac{1}{n^{q(1-H)+1}} + \frac{1}{n^{H-3/4}} & \text{si } 1 - \frac{1}{2q-2} < H < 1 - \frac{1}{2q}, \end{cases} \quad [\text{IX.18}]$$

où $\mathcal{R}$ est la loi limite de $\frac{1}{n^{2H-1}}V_n^{(2)}$.

Remarque IX.4.4. On considère $q \geq 4$ afin d'éviter les cas d'égalité dans les différentes estimations et de simplifier la présentation, mais le résultat reste vrai (modulo les inégalités à gérer) pour $q = 3$. ♣

Démonstration : Soit $\mathcal{H}$ l'espace de HILBERT suivant, sur lequel on définit les opérateurs de MALLIAVIN. On considère le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}_+)$ engendré par les fonctions indicatrices du type $\mathbf{1}_A$, avec A un borélien borné de $\mathbb{R}_+$. On munit cet espace du produit scalaire suivant : pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ bornés

$$\langle \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \rangle_{\mathcal{H}} \triangleq H(2H+1) \int_A \int_B \frac{dt ds}{|t-s|^{2(1-H)}}.$$

Notez en particulier que $\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t, s)$, où R_H est la fonction de covariance du mouvement brownien fractionnaire B_H . On définit alors $\mathcal{H}$ comme le complété dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ de ce sous-espace pour ce produit scalaire. Pour tout $f, g \in \mathcal{H}$, on a alors

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)g(s) \frac{ds dt}{|t-s|^{2(1-H)}}.$$

On note plus succinctement

$$\mathbf{s}_n = \left(\frac{\mathbf{S}_n^{(q)}(t_i) - \mathbf{S}_n^{(q)}(t_{i-1})}{\sigma_{q,H} \sqrt{n(t_i - t_{i-1})}} \right)_{1 \leq i \leq d} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{2H-1}} V_n^{(2)}.$$

Appliquons le Théorème IX.2.1.

$$\begin{aligned} & d_W((\mathbf{s}_n, v_n), \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I_d) \otimes \mathcal{R}) \\ & \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^d \mathbb{E} \left[(\delta_{i,j} - \langle D(-L)^{-1} \mathbf{s}_n(i), D\mathbf{s}_n(j) \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right]} + \sqrt{\sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[\langle Dv_n, D(-L)^{-1} \mathbf{s}_n(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} + d_W(v_n, \mathcal{R}). \end{aligned}$$

La démonstration du Théorème 4.1 de [NPR10] nous fournit l'inégalité suivante

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^d \mathbb{E} \left[(\delta_{i,j} - \langle D(-L)^{-1} \mathbf{s}_n(i), D\mathbf{s}_n(j) \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right]} \leq C \begin{cases} \frac{1}{n^{1-H}} & \text{si } 3/4 < H < 1 - \frac{1}{2(q-1)} \\ \frac{1}{n^{q(1-H)+1/2}} & \text{si } 1 - \frac{1}{2(q-2)} < H < 1 - \frac{1}{2q}. \end{cases}$$

Le troisième terme est donné quand à lui par [IX.17]. Enfin, le deuxième terme a été évalué dans la démonstration du Théorème VII.4.3 (on l'a fait dans le cas $q = 3$ et $3/4 < H < 5/6$, regarder [Tud23] pour une démonstration complète). On obtient dans ce cas

$$\mathbb{E} \left[\langle Dv_n, D(-L)^{-1} \mathbf{s}_n(i) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq c_{q,H} \begin{cases} \frac{1}{n^{2(1-H)}} & \text{si } \frac{3}{4} < H < 1 - \frac{1}{2(q-1)} \\ \frac{1}{n^{2q(1-H)+1}} & \text{si } 1 - \frac{1}{2(q-1)} < H < 1 - \frac{1}{2q} \end{cases}$$

On constate alors que le terme qui exprime la convergence de $\mathbf{s}_n$ vers la loi normale est du même ordre que celui exprimant la décorrélation entre $\mathbf{s}_n$ et u_n . Cela permet de conclure sur [IX.18]. $\square$

5. Application à un problème de matrices aléatoires

5.1. Contexte

On considère un espace de HILBERT $\mathcal{H}$ réel séparable dans lequel on introduit l'intégrale de WIENER, tout comme les opérateurs de MALLIAVIN. Dans l'entièreté de cette section, on désignera des matrices par lettres sans serif (par exemple $\mathbf{X}$), et des variables aléatoires par des lettres majuscules latines. Pour $d \geq 1$ et $n \geq 1$, on considère une matrice aléatoire $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ à n lignes et d colonnes dont le coefficient situé à la ligne i ($1 \leq i \leq n$) et colonne j ($1 \leq j \leq d$) est donné par

$$\mathbf{X}(i, j) = I_{q_i}(f(i, j)),$$

où $q_i \geq 1$ et $f(i, j) \in \mathcal{H}^{\odot q_i}$. Autrement dit, toutes les colonnes sont composées de variables aléatoires appartenant au même chaos de WIENER. De plus, on suppose que la famille des coefficients $(\mathbf{X}(i, j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$ constitue une famille indépendante de variables aléatoires, avec deuxième moment égal à 1 et quatrième moment égal à 3 : pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq d$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}(i, j)^2] = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathbf{X}(i, j)^4] = 3.$$

On définit à partir de la matrice aléatoire $\mathbf{X}$ la matrice de WISHART associée, notée $W_{n,d}^1$ donnée par $W_{n,d}^1 = \mathbf{X}\mathbf{X}^t$, où on note $\mathbf{X}^t$ la transposée de la matrice $\mathbf{X}$. On cherche à étudier le comportement asymptotique de $W_{n,d}^1$ lorsque n et d tendent vers ∞ . On s'intéresse donc plus précisément à la matrice aléatoire centrée réduite associée à $W_{n,d}^1$. On la note $W_{n,d}$, ou parfois plus simplement W , et est donnée par

$$W_{n,d} \triangleq \sqrt{d} \left(\frac{1}{d} \mathbf{X}\mathbf{X}^t - I_n \right), \quad [\text{IX.19}]$$

où $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne la matrice identité dans le long de cette section. Le coefficient situé à la ligne i ($1 \leq i \leq n$) et à la colonne j ($1 \leq j \leq n$) de $W_{n,d}$ est noté $W_{n,d}(i, j)$ ou parfois plus simplement $W(i, j)$. Il est donné pour $i \neq j$ par

$$W_{n,d}(i, j) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d X_{i,k} X_{j,k},$$

et pour $i = j$ par

$$W_{n,d}(i, i) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d (X(i, k)^2 - 1).$$

La convergence de telles matrices a été étudiée dans [BDT21]. Rappelons le Théorème principal de cet article, le Théorème 1. On appelle *Ensemble Gaussien Orthogonal* (abrégé sous la traduction anglaise GOE) l'ensemble des matrices aléatoires carrées, notées $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 1$ telles que

- La famille de variables aléatoires $(Z(i, j), 1 \leq i \leq j \leq n)$ est indépendante;
- Pour tout $1 \leq i \leq n$, $Z(i, i)$ suit $\mathcal{N}(0, 2)$;
- Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $Z(i, j)$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathbb{P}$ -presque sûrement, $Z(j, i) = Z(i, j)$.

Puisque toutes les matrices de taille n qui sont dans GOE ont même loi, on identifie cet ensemble avec la probabilité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie précédemment.

Théorème IX.5.1 : (Théorème 1 de [BDT21]) On considère pour tout $n \geq 1$ et $d \geq 1$ la matrice aléatoire $W_{n,d}$ donnée par [IX.19]. On suppose qu'il existe $q^* \geq 1$ tel que tous les coefficients $X_{n,d}(i, j)$ de la matrice $X_{n,d}$ appartiennent à un chaos de WIENER d'ordre inférieur à q^* . Alors pour tout $n \geq 1$, $(W_{n,d}, d \geq 1)$ converge en loi vers la loi du GOE en dimension n . De plus, il existe $C > 0$ dépendant de q^* tel que pour $n, d \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_W(W_{n,d}, \text{GOE}(n)) &\leq C \sqrt{\sum_{i,j,a,b=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\langle D(-L)^{-1} W_{n,d}(i, j), DW_{n,d}(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} - \sigma_n((i, j), (a, b)) \right)^2 \right]} \\ &\leq C \sqrt{\frac{n^3}{d}}, \end{aligned} \tag{IX.20}$$

où $\sigma((i, j), (a, b)) = \mathbb{E}[Z_n(i, j)Z_n(a, b)]$, lorsque Z_n suit une loi GOE de taille n , définit la matrice de covariance d'une matrice GOE vue comme vecteur gaussien de taille n^2 .

Cela signifie que si, lorsque d et n tendent vers ∞ , $\frac{n^3}{d}$ tend vers 0, alors W est proche, en distance de WASSERSTEIN, d'une matrice GOE.

Les matrices de WISHART sont des matrices dites de covariance, c'est-à-dire que ses coefficients contiennent tous les estimateurs de covariance des coefficients $X(i, j)$. On s'intéresse à l'influence des données empiriques provenant de la matrice initiale sur la matrice de WISHART associée lorsque les tailles de matrice d et n sont grands. Plus précisément, si on considère un vecteur aléatoire $\mathbf{Y}_{n,d}$, de dimension dépendant de d ou (non exclusif) de n , contenant des coefficients $X(i, j)$, et analyser ce qu'on peut interpréter comme de l'indépendance asymptotique entre $\mathbf{Y}_{n,d}$ et W .

5.2. Influence des données sur la matrice de Wishart

Pour $n \geq 1$ et $d \geq 1$, on introduit X et W comme dans la sous-section précédente. On considère J_n un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et K_d un sous-ensemble de $\llbracket 1, d \rrbracket$. On considère le vecteur aléatoire suivant

$$\mathbf{Y}_{n,d} \triangleq (X(a, b), a \in J_n, b \in K_d). \tag{IX.21}$$

Il s'agit d'un vecteur à valeurs dans un produit de chaos ne dépendant pas de n ni de d . On cherche à étudier le comportement asymptotique en loi du couple $(W_{n,d}, \mathbf{Y}_{n,d})$ lorsque d et n tendent vers ∞ . Une application directe du Théorème IX.3.2 n'est pas possible ici, pour deux raisons simples. La

première consiste à constater qu’aucun de ces deux vecteurs aléatoires ne converge en loi, on dispose uniquement d’une estimation en distance de WASSERSTEIN entre W et GOE . La deuxième consiste à remarquer que les tailles des vecteurs considérés dépendent des tailles n et d .

Rappelons d’abord le célèbre Théorème d’ÜSTUNEL et ZAKAI sur l’indépendance dans un chaos de WIENER, rédigé sous forme de Lemme.

Lemme IX.5.2 : (*ÜSTUNEL et ZAKAI, 1989*) Pour $q, q' \geq 1$, on considère $f \in \mathcal{H}^{\odot q}$ et $g \in \mathcal{H}^{\odot q'}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Les variables $F = I_q(f)$ et $G = I_{q'}(g)$ sont indépendantes ;
- (ii) Presque partout sur $\mathcal{H}^{\otimes(q+q'-2)}$, $f \otimes_1 g = 0$.

Dans ce cas, $\mathbb{P}$ -presque sûrement, $\langle DF, DG \rangle_{\mathcal{H}} = \langle D(-L)^{-1}F, DG \rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

Énonçons et démontrons le Théorème à propos du comportement asymptotique recherché.

Théorème IX.5.3 : Pour tous $n \geq 1$ et $d \geq 1$, on considère $W_{n,d}$ défini par [IX.19] et $Y_{n,d}$ donné par [IX.21]. On suppose qu’il existe $q^* \geq 1$ tel que tous les coefficients $X_{n,d}(i, j)$ de la matrice $X_{n,d}$ appartiennent à un chaos de WIENER d’ordre inférieur à q^* . Il existe une constante $C > 0$ (dépendant de q^*) et un rang $N \geq 1$ tels que pour tout $n \geq N$ et $d \geq N$,

$$d_W(W_{n,d}, Y_{n,d}, GOE(n) \otimes \text{Loi}(Y_{n,d})) \leq C \left(\sqrt{\frac{n^3}{d}} + \sqrt{\frac{n \sharp J_n \sharp K_d}{d}} \right). \quad [\text{IX.22}]$$

Avant de débiter la démonstration, qui utilise bien entendu le Théorème IX.2.1, analysons rapidement la matrice de covariance d’une matrice GOE Z_n , disons de taille $n = 2$ pour débiter. Cette étude est importante, puisqu’on a besoin de la norme d’opérateur de cette matrice pour estimer la distance de WASSERSTEIN, tout comme celle de son inverse. Pour $n = 2$, la matrice de covariance (de taille 2^2) a la forme suivante

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On constate que cette matrice n’est en fait pas inversible. On aurait pu le constater immédiatement pour tout $n \geq 2$, puisque les colonnes distinctes suivantes sont égales : pour $1 \leq a < b \leq n$,

$$\left(\mathbb{E}[Z_n(i, j)Z_n(a, b)] \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\mathbb{E}[Z_n(i, j)Z_n(b, a)] \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Il est donc impossible d’appliquer le Théorème IX.2.1 dans ces conditions. Le défaut d’inversibilité de C_n provient du fait que $Z_n(i, j) = Z_n(j, i)$ presque sûrement, pour tous les indices i et j . Ainsi, il suffit d’éliminer l’une des deux variables pour avoir une matrice inversible. Nous suivons l’idée de NOURDIN et ZHENG dans [NZ18].

Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique (aléatoire ou non), on note $M^{\text{half}} \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ son *vecteur réduit*, donnée par

$$M^{\text{half}} \triangleq (M(i, j), 1 \leq i \leq j \leq n).$$

Notons C'_n la matrice de covariance de Z_n^{half} . Il s’agit d’une matrice symétrique réelle de taille $\frac{n(n+1)}{2}$. Mieux encore, il s’agit d’une matrice diagonale. En effet, par indépendance de la famille $(Z_n(i, j), 1 \leq i \leq j \leq n)$, si $i \leq j$ et $a \leq b$ vérifient $(i, j) \neq (a, b)$, on a alors

$$\mathbb{E}[Z_n(i, j)Z_n(a, b)] = \mathbb{E}[Z_n(i, j)]\mathbb{E}[Z_n(a, b)] = 0.$$

Sur la diagonale, on rencontre alors les termes suivants :

$$\mathbb{E}[Z(i, j)^2] = 1 \cdot (1 - \delta_{i,j}) + 2\delta_{i,j}.$$

On en déduit alors immédiatement que la norme d'opérateur, donnée par le plus grand module des valeurs propres dans le cas d'une matrice symétrique.

Lemme IX.5.4 : Soit $n \geq 1$. On note C'_n la matrice de covariance de Z_n^{half} , où Z_n est une matrice du GOE de taille n . Alors

$$\|C'_n\|_{\text{op}} = 2 \text{ et } \|C_n'^{-1}\|_{\text{op}} = 1.$$

Dans [NZ18], la borne suivante est démontrée : pour toutes matrices aléatoires X et Y symétriques,

$$d_W(X, Y) \leq \sqrt{2} d_W(X^{\text{half}}, Y^{\text{half}}).$$

On montre une version un peu différente dans le Lemme suivant, plus adapté à notre problème d'étude de loi d'un couple, où l'une des marginales est une matrice aléatoire.

Lemme IX.5.5 : Soient $n, p \geq 1$, X, Y deux matrices aléatoires symétriques réelles de taille n et U, V deux vecteurs aléatoires réels de taille p . Alors

$$d_W((X, U), (Y, V)) \leq \sqrt{2} d_W((X^{\text{half}}, U), (Y^{\text{half}}, V)).$$

Démonstration du Lemme IX.5.5 : On adapte la démonstration du Lemme 2.2 de [NZ18]. On se donne $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne (on munit le premier de la norme de HILBERT-SCHMIDT, qui est la norme canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$). L'application $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{\text{half}} \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ est bijective, on note son inverse $x \mapsto M_x$. On définit l'application

$$\tilde{h} : (x, y) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \times \mathbb{R}^p \mapsto h(M_x, y).$$

Montrons que l'application $\tilde{h}$ est lipschitzienne. Considérons $x, x' \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $y, y' \in \mathbb{R}^p$.

$$|\tilde{h}(x, y) - \tilde{h}(x', y')| = |h(M_x, y) - h(M_{x'}, y')|.$$

Or, h est 1-lipschitzienne, donc

$$|\tilde{h}(x, y) - \tilde{h}(x', y')| \leq |(M_x - M_{x'}, y - y')| = \sqrt{\|M_x - M_{x'}\|_{\text{HS}}^2 + |y - y'|^2} = \sqrt{\|M_{x-x'}\|_{\text{HS}}^2 + |y - y'|^2}.$$

Or, pour tout $v \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$,

$$\|M_v\|_{\text{HS}}^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} v(i, j)^2 + \sum_{i=1}^n v(i, i)^2 \leq 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} v(i, j)^2 = 2|v|^2.$$

C'est cette inégalité qui explique le facteur $\sqrt{2}$ dans l'énoncé du Lemme. On en déduit finalement que

$$|\tilde{h}(x, y) - \tilde{h}(x', y')| \leq \sqrt{\|M_x - M_{x'}\|_{\text{HS}}^2 + |y - y'|^2} = \sqrt{2|x - x'|^2 + |y - y'|^2} \leq \sqrt{2} |(x, y) - (x', y')|.$$

Il suit que $\tilde{h}$ est $\sqrt{2}$ -lipschitzienne. On conclut donc de la sorte.

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[h(X, U)] - \mathbb{E}[h(Y, V)]| &= |\mathbb{E}[\tilde{h}(X^{\text{half}}, U)] - \mathbb{E}[\tilde{h}(Y^{\text{half}}, V)]| \\ &= \sqrt{2} \left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{h}(X^{\text{half}}, U) \right] - \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{h}(Y^{\text{half}}, V) \right] \right| \\ &\leq \sqrt{2} d_W((X^{\text{half}}, U), (Y^{\text{half}}, V)). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tout h 1-lipschitzienne, on en déduit l'inégalité souhaitée. $\square$

Remarque IX.5.6. L'encadrement suivant est vérifié

$$d_W((X^{\text{half}}, U), (Y^{\text{half}}, V)) \leq d_W((X, U), (Y, V)) \leq \sqrt{2} d_W((X^{\text{half}}, U), (Y^{\text{half}}, V)).$$

Nous n'avons bien sûr besoin que de la deuxième inégalité dans la suite. $\clubsuit$

On peut enfin conclure sur la démonstration du Théorème IX.5.3.

Démonstration du Théorème IX.5.3 : Soient $n \geq 1$ et $d \geq 1$. On note $Z_{n,d}$ une matrice aléatoire du GOE de taille n et indépendante de $\mathbf{Y}_{n,d}$. D'après le Lemme IX.5.5,

$$d_W\left((W_{n,d}, \mathbf{Y}_{n,d}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_{n,d})\right) \leq \sqrt{2} d_W\left((W_{n,d}^{\text{half}}, \mathbf{Y}_{n,d}), (Z_{n,d}^{\text{half}}, \mathbf{Y}_{n,d})\right).$$

La loi du vecteur $Z_{n,d}^{\text{half}}$ est une loi gaussienne de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ centrée et dont la matrice de covariance C'_n vérifie les inégalités du Lemme IX.5.4. D'après le Théorème IX.2.1, appliqué aux vecteurs réduits de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, on a alors

$$\begin{aligned} & d_W\left((W_{n,d}, \mathbf{Y}_{n,d}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_{n,d})\right) \\ & \leq 2 \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ 1 \leq a \leq b \leq n}} \mathbb{E} \left[\left(C'_n((i, j), (a, b)) - \langle D(-L)^{-1}W(i, j), DW(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ & \quad + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{\substack{a \in J_n \\ b \in K_d}} \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}W(i, j), X(a, b) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]}. \end{aligned} \quad [\text{IX.23}]$$

Le premier terme est l'objet du Théorème IX.5.1, dont l'inégalité [IX.20] donne la borne en $\sqrt{\frac{n^3}{d}}$. Reste à traiter le deuxième terme. On fixe $a \in J_n$ et $b \in K_d$, et $1 \leq i \leq j \leq n$. Supposons dans un premier temps que $i < j$. Dans ce cas,

$$W(i, j) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d X(i, k)X(j, k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d I_{q_i}(f(i, k))I_{q_j}(f(j, k)) = \frac{1}{\sqrt{d}} I_{q_i+q_j} \left(\sum_{k=1}^d f(i, k) \otimes f(j, k) \right),$$

en utilisant la formule produit, et en exploitant le fait que puisque tous les $X(i, j)$ sont indépendants, le critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI donné dans le Lemme IX.5.2 nous donne que toutes les contractions d'ordre $r \geq 1$ sont nulles. On en déduit que

$$D(-L)^{-1}W(i, j) = \frac{1}{q_i + q_j} DW(i, j) = \frac{1}{\sqrt{d}(q_i + q_j)} \sum_{k=1}^d \left\{ X(i, k)DX(j, k) + X(j, k)DX(i, k) \right\}.$$

Ainsi,

$$\langle D(-L)^{-1}W(i, j), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{d}(q_i + q_j)} \sum_{k=1}^d \left\{ X(i, k) \langle DX(j, k), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} + X(j, k) \langle DX(i, k), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} \right\}.$$

Or, la famille $(X(i, j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$ est indépendante, donc par le critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI (Lemme IX.5.2),

$$\langle DX(i, k), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} = \|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^2 \delta_{i,a} \delta_{k,b}.$$

On en déduit que

$$\langle D(-L)^{-1}W(i, j), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{d}(q_i + q_j)} \|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^2 \left(X(i, b) \delta_{j,a} + X(j, b) \delta_{i,a} \right).$$

Il suit alors que, pour $i < j$

$$\mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}W(i, j), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] = \frac{1}{d(q_i + q_j)^2} \left(\delta_{j,a} \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^4 X(i, b)^2 \right] + \delta_{i,a} \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^4 X(j, b)^2 \right] \right)$$

Or, par hypercontrativité dans les chaos de WIENER,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^4 X(i, b)^2 \right] & \leq \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^8 \right]^{1/2} \mathbb{E} \left[X(i, b)^4 \right]^{1/2} = \sqrt{3} \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^8 \right]^{1/2} \\ & \leq c(q_a) \mathbb{E} \left[\|DX(a, b)\|_{\mathcal{H}}^2 \right]^2 = c(q_a) q_a^2 \mathbb{E} \left[X(a, b)^2 \right]^2 = c(q_a), \end{aligned}$$

où $c(q_a)$ désigne à chaque une constante strictement positive dépendant que de q_a . Nous avons donc montré que pour $i < j$,

$$\mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}W(i, j), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \leq \frac{(\delta_{i,a} + \delta_{j,a}) c(q_i, q_j)}{d}. \quad [\text{IX.24}]$$

Supposons désormais que $i = j$. Dans ce cas, on a

$$W(i, i) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=1}^d \{X(i, k)^2 - 1\} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{r=0}^{q_i-1} r! \binom{q_i}{r}^2 I_{2(q_i-r)} \left(\sum_{k=1}^d f(i, k) \tilde{\otimes}_r f(i, k) \right).$$

On a alors

$$\langle D(-L)^{-1}W(i, i), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{r=0}^{q_i-1} \frac{r!}{2(q_i-r)} \binom{q_i}{r}^2 \left\langle DI_{2(q_i-r)} \left(\sum_{k=1}^d f(i, k) \tilde{\otimes}_r f(i, k) \right), DI_{q_a}(f(a, b)) \right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Or, par critère d'indépendance,

$$\langle DI_{2(q_i-r)}(f(i, k) \tilde{\otimes}_r f(i, k)), DI_{q_a}(f(a, b)) \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{i,a} \delta_{k,b} \langle DI_{2(q_i-r)}(f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)), DI_{q_i}(f(a, b)) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Ainsi,

$$\langle D(-L)^{-1}W(i, i), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\delta_{i,a}}{\sqrt{d}} \sum_{r=0}^{q_i-1} \frac{r!}{2(q_i-r)} \binom{q_i}{r}^2 \langle DI_{2(q_i-r)}(f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)), DI_{q_i}(f(a, b)) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Par formule produit de nouveau, on obtient

$$\begin{aligned} & \langle D(-L)^{-1}W(i, i), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{\delta_{i,a}}{\sqrt{d}} \sum_{r=0}^{q_i-1} \frac{r!}{2(q_i-r)} \binom{q_i}{r}^2 \sum_{s=0}^{(2(q_i-r)) \wedge q_i-1} s! \binom{2(q_i-r)-1}{s} \binom{q_i-1}{s} I_{3q_i-2(r+s+1)}((f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)) \tilde{\otimes}_s f(a, b)). \end{aligned}$$

On en déduit, puisque la décomposition ne fait intervenir que des chaos d'ordre distincts que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\langle D(-L)^{-1}W(i, i), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}}^2] &= \frac{\delta_{i,a}}{d} \sum_{r=0}^{q_i-1} \frac{r!^2}{4(q_i-r)^2} \binom{q_i}{r}^4 \sum_{s=0}^{(2(q_i-r)) \wedge q_i-1} s!^2 \binom{2(q_i-r)-1}{s}^2 \binom{q_i-1}{s}^2 \\ &\quad \cdot (3q_i-2(r+s+1))! \|(f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)) \tilde{\otimes}_s f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(3q_i-2(r+s+1))}}^2. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \|(f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)) \tilde{\otimes}_s f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(3q_i-2(r+s+1))}}^2 &\leq \|(f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)) \otimes_s f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(3q_i-2(r+s+1))}}^2 \\ &\leq \|f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2(q_i-r)}}^2 \|f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{q_a}}^2 \\ &\leq \|(f(a, b) \tilde{\otimes}_r f(a, b)) \otimes_s f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{\otimes(3q_i-2(r+s+1))}}^2 \\ &\leq \|f(a, b) \otimes_r f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2(q_i-r)}}^2 \|f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{q_a}}^2 \\ &\leq \|f(a, b)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q_a}}^6 = \frac{1}{q_a!^3} \mathbb{E}[X(a, b)^2]^3 = \frac{1}{q_a!^3}. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $c(q_i)$ telle que

$$\mathbb{E} [\langle D(-L)^{-1}W(i, i), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}}^2] \leq \frac{\delta_{i,a} c(q_i)}{d}. \quad [\text{IX.25}]$$

On en déduit d'après [IX.24] et [IX.25] que

$$\begin{aligned} \sum_{a \in J_n} \sum_{b \in K_d} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mathbb{E} [\langle D(-L)^{-1}W(i, j), DX(a, b) \rangle_{\mathcal{H}}^2] &\leq \frac{c(q_1, \dots, q_n)}{d} \sum_{a \in J_n} \sum_{b \in K_d} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\delta_{i,a} + \delta_{j,a}) \\ &= c(q_1, \dots, q_n) \frac{n \sharp J_n \sharp K_d}{d}. \end{aligned}$$

Puisque tous les $q_1, \dots, q_n$ sont inférieurs ou égaux à q^* , on en déduit qu'on peut prendre une constante ne dépendant que de q^* . Au vu de [IX.23], on a alors montré [IX.22], donc conclu cette démonstration. $\square$

Remarque IX.5.7. On constate que l'inégalité [IX.22] se décompose en deux termes. Le premier mesure la distance entre W et la loi du GOE tandis que le deuxième mesure la corrélation entre W et Y . Selon différents choix de Y , l'un des deux termes peut prévaloir sur l'autre. $\clubsuit$

Remarque IX.5.8. Distinguons deux cas de figure.

1. Soit $1 \leq j_0 \leq d$. Supposons que $J_n = \llbracket 1, n \rrbracket$ et que $K_d = \{j_0\}$, c'est-à-dire que $\mathbf{Y}$ contient tous les éléments d'une seule colonne entière parmi les données de $\mathbf{X}$. Dans ce cas, la borne est réduite à

$$d_W\left((W_{n,d}, \mathbf{Y}_{n,d}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_{n,d})\right) \leq C \left(\sqrt{\frac{n^3}{d}} + \sqrt{\frac{n^2}{d}} \right) = C \sqrt{\frac{n^3}{d}}.$$

Cela signifie dans ce cas que dès lors que W est proche de la loi GOE, l'indépendance asymptotique par rapport à $\mathbf{Y}$ est automatique (au sens de la distance de WASSERSTEIN).

2. Soit $1 \leq i_0 \leq n$. Supposons cette fois-ci que $J_n = \{i_0\}$, c'est-à-dire qu'on dispose pour $\mathbf{Y}$ que de données provenant d'une unique ligne de $\mathbf{X}$. Cette fois-ci, on obtient

$$d_W\left((W_{n,d}, \mathbf{Y}_{n,d}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_{n,d})\right) \leq C \left(\sqrt{\frac{n^3}{d}} + \sqrt{\frac{n \sharp K_d}{d}} \right).$$

Alors dans ce cas, si $\sharp K_d \leq n^2$, la vitesse de convergence dans la décorrélation entre W et $\mathbf{Y}$ prévaut sur la vitesse de décroissance entre W et la loi GOE. ♣

Remarque IX.5.9. Supposons que $d = d_n = n^{3+\varepsilon}$, avec $\varepsilon > 0$, de sorte que la distance de WASSERSTEIN entre W et la loi GOE tende vers 0. Supposons de plus que $\sharp J_n \sim n^\gamma$ et que $\sharp K_d \sim d^\beta$ lorsque ces deux paramètres tendent vers ∞ . Alors, on obtient cette fois-ci

$$d_W\left((W_{n,d}, \mathbf{Y}_{n,d}), \text{GOE}(n) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_{n,d})\right) \leq C \left(\frac{1}{n^{\varepsilon/2}} + \left(\frac{n^{\gamma+(3+\varepsilon)\beta}}{n^{2+\varepsilon}} \right)^{1/2} \right).$$

Le terme de droite tend vers 0 si et seulement si $\varepsilon > \frac{3\beta-2+\gamma}{1-\beta}$. Le cas extrême où $\beta = 1$, c'est-à-dire que $\mathbf{Y}$ couvre toutes les colonnes, n'implique alors pas nécessairement d'indépendance asymptotique (au sens de WASSERSTEIN). Cela signifie que $\mathbf{Y}$ possède trop de données pour avoir indépendance asymptotique par rapport à W . Sinon, pour tout $0 \leq \gamma \leq 1$ et $0 \leq \beta < 1$, il existe un seuil ε_0 pour lequel pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, l'indépendance asymptotique au sens de WASSERSTEIN est automatique entre $\mathbf{Y}$ et W . ♣

6. Application à l'estimation de paramètres dans l'équation des ondes stochastique

6.1. Contexte

On considère l'équation des ondes stochastiques additive en dimension 1, avec un bruit blanc (regarder le Chapitre IV), paramétrée par $\theta > 0$ comme suit.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}(t, x) = \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(t, x) + \dot{W}(t, x), & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u_\theta(t = 0, x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(t = 0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On peut interpréter $\theta = \frac{1}{c^2}$ comme l'inverse du carré d'une vitesse de propagation c de la solution. On considère la solution au sens évolutif, c'est-à-dire que u_θ est un processus gaussien donné pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ par

$$u_\theta(t, x) \triangleq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1\left(\sqrt{\theta}(t-s), x-y\right) W(ds, dy),$$

où l'intégrale est au sens de WIENER, et G_1 est le noyau de GREEN associé, donné par

$$G_1(t, x) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{|x| \leq t\}}.$$

On définit un estimateur pour θ à partir des variations quadratiques temporelle de u_θ . On définit les variations quadratiques uniformes temporelles de u_θ sur $[0, 1]$, pris au point $x \in \mathbb{R}$ comme la suite de variables aléatoires notée $V(x) = (V_N(x), N \geq 1)$ donnée pour tout $N \geq 1$ par

$$V_N(x) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \left(u_\theta \left(\frac{i+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{i}{N}, x \right) \right)^2. \quad [\text{IX.26}]$$

Ces variations quadratiques capturent le comportement $(1/2)^-$ -Hölder des trajectoires de $t \mapsto u_\theta(t, x)$. L'étude des variations quadratiques se fait à travers la connaissance du processus des incréments temporels $(u_\theta(t, x) - u_\theta(s, x), s < t)$. Il s'agit d'un processus gaussien centré, dont la fonction de covariance est déterminée par

$$\mathbb{E} \left[(u_\theta(t, x) - u_\theta(s, x))^2 \right] = \frac{\sqrt{\theta}}{4} (t^2 - s^2),$$

et pour $0 \leq a < b \leq s < t$

$$\mathbb{E} \left[(u_\theta(a, x) - u_\theta(b, x))(u_\theta(t, x) - u_\theta(s, x)) \right] = 0.$$

La Proposition suivante a été démontrée dans [AGT22].

Proposition IX.6.1 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \geq 1$, $V_N(x)$ défini par [IX.26]. Alors $\mathbb{P}$ -presque sûrement et dans $L^2(\mathbb{P})$, $(V_N(x), N \geq 1)$ converge vers $\frac{1}{4}\sqrt{\theta}$.

Cette convergence L^2 et presque sûre permet de définir un estimateur $\hat{\theta}_N(x) \triangleq 16V_N(x)^2$ fortement consistant pour le paramètre θ , à partir d'observations $(u_\theta(\frac{i}{N}, x), 0 \leq i \leq N)$. Dans ce même article, les auteurs démontrent la normalité asymptotique de $V_N(x)$.

Proposition IX.6.2 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \geq 1$ la variable $V_N(x)$ donnée par [IX.26]. Alors il existe $\sigma^2 > 0$ dépendant de θ telle que

$$U_N(x) \triangleq \sqrt{\frac{N}{\sigma^2}} \left(V_N(x) - \frac{\sqrt{\theta}}{4} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1). \quad [\text{IX.27}]$$

6.2. Influence du nombre de données

On cherche à étudier l'influence de la donnée des accroissements de $t \mapsto u_\theta(t, x)$ sur l'estimateur $\hat{\theta}_N(x)$. Pour cela, on considère J_N un sous-ensemble de $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$, et pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on considère le vecteur aléatoire suivant

$$\mathbf{Y}_N(x) \triangleq \left(u_\theta \left(\frac{i+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{i}{N}, x \right), i \in J_N \right).$$

On cherche à estimer, selon la taille de J_N , si le couple $(\hat{\theta}_N(x), \mathbf{Y}_N(x))$ est proche en distance de WASSERSTEIN de la loi du couple s'il était indépendant. C'est l'objet du Théorème suivant.

Théorème IX.6.3 : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$, on considère $\hat{\theta}_N(x)$ et $\mathbf{Y}_N(x)$ définis précédemment. On définit une normalisation de $\hat{\theta}_N$ avec

$$\hat{\Theta}_N(x) \triangleq \sqrt{\frac{N}{64\sigma^2}} (\hat{\theta}_N(x) - \theta).$$

Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de x tel que pour tout $N \geq 1$

$$d_W \left(\text{Loi}(\hat{\Theta}_N(x), \mathbf{Y}_N(x)), \text{Loi}(\hat{\Theta}_N(x)) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N(x)) \right) \leq C \left(\frac{1}{N} + \sqrt{\frac{m^+(N)4\sharp J_N}{m^-(N)N^5}} \right), \quad [\text{IX.28}]$$

où $m^-(N) = \min J_N$ et $m^+(N) = \max J_N$.

Pour démontrer ce Théorème, on s'intéresse d'abord à l'étude de l'indépendance asymptotique entre $\mathbf{Y}_N(x)$ et $U_N(x)$, au sens de WASSERSTEIN.

Proposition IX.6.4 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$. Alors

$$d_W\left(\text{Loi}(U_N(x), \mathbf{Y}_N(x)), \text{Loi}(U_N(x)) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N(x))\right) \leq \frac{\pi}{\sigma} \left(\frac{2m^+(N) + 1}{2m^-(N) + 1} \frac{1}{N^5} \sum_{q \in J_N} (2q + 1)^3 \right)^{1/2}.$$

En particulier, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de x tel que pour $N \geq 1$

$$d_W\left(\text{Loi}(U_N(x), \mathbf{Y}_N(x)), \text{Loi}(U_N(x)) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N(x))\right) \leq C \sqrt{\frac{m^+(N)^4 J_N}{m^-(N) N^5}}. \quad [\text{IX.29}]$$

Démonstration de la Proposition IX.6.4 : Par simplicité de notation, on ne note plus les dépendances en x des éléments aléatoires. On applique le Théorème IX.2.1, en constatant que $\mathbf{Y}_N$ est un vecteur gaussien de dimension $\sharp J_N$, dont la matrice de covariance est diagonale, dont les coefficients diagonaux sont donnés pour $i, j \in J_N$ par

$$\mathbb{E} \left[\left(u_\theta \left(\frac{i+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{i}{N}, x \right) \right) \left(u_\theta \left(\frac{j+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{j}{N}, x \right) \right) \right] = \frac{\sqrt{\theta}}{4} \frac{2i+1}{N^2} \delta_{i,j}.$$

Il suit que si C_N est la matrice de covariance du vecteur $\mathbf{Y}_N$, alors

$$\|C_N\|_{\text{op}} = \frac{\sqrt{\theta}}{4} \frac{2m^+(N) + 1}{N^2} \text{ et } \|C_N^{-1}\|_{\text{op}} = \frac{4}{\sqrt{\theta}} \frac{N^2}{m^-(N) + 1}.$$

Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_\times \mathbb{R})$. On considère un processus isonormal associé bruit blanc W , et les opérateurs de MALLIAVIN associés. D'après le Théorème IX.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} & d_W\left(\text{Loi}(U_N(x), \mathbf{Y}_N(x)), \text{Loi}(U_N(x)) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N(x))\right) \\ & \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m^+(N) + 1}{2m^-(N) + 1}} \sqrt{\sum_{q \in J_N} \mathbb{E} \left[\left\langle DU_N, D(-L)^{-1} \left(u_\theta \left(\frac{q+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{q}{N}, x \right) \right) \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} \end{aligned} \quad [\text{IX.30}]$$

Pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, le choix du processus isonormal implique que

$$u_\theta(t, x) = I_1(g_{t,x}),$$

où pour $s \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$g_{t,x}(s, y) \triangleq G_1 \left(\sqrt{\theta}(t-s), x-y \right) \mathbf{1}_{[0,t]}(s).$$

De plus,

$$V_N = \sum_{i=0}^{N-1} I_1 \left(g_{\frac{i+1}{N}, x} - g_{\frac{i}{N}, x} \right)^2 = \sum_{i=0}^{N-1} I_1(h_i)^2,$$

où $h_i = g_{\frac{i+1}{N}, x} - g_{\frac{i}{N}, x}$. Notez que les supports des h_i sont disjoints, donc que les h_i sont orthogonaux. Il suit que $DV_N = 2 \sum_{i=0}^{N-1} h_i I_1(h_i)$ puis que

$$DU_N = \sqrt{\frac{N}{\sigma^2}} DV_N = 2 \sqrt{\frac{N}{\sigma^2}} \sum_{i=0}^{N-1} h_i I_1(h_i).$$

On en déduit que pour $q \in J_N$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\langle DU_N, D(-L)^{-1} \left(u_\theta \left(\frac{q+1}{N}, x \right) - u_\theta \left(\frac{q}{N}, x \right) \right) \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\langle DU_N, DI_1(h_q) \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] \\ &= \frac{4N}{\sigma^2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{N-1} I_1(h_i) \langle h_i, h_q \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4N \|h_q\|_{\mathcal{H}}^6}{\sigma^2} = \frac{4(2q+1)^3}{\sigma^2 N^5}. \end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant [IX.30], on obtient les inégalités [IX.29]. $\square$

Remarque IX.6.5. Considérons le cas extrême où $J_N = \llbracket 1, N \rrbracket$. Alors $\frac{m^+(N)^4 \#J_N}{m^-(N)N^5} = 1$ ne converge pas vers 0. On ne peut pas conclure sur de l'indépendance asymptotique au sens de WASSERSTEIN dans ce cas.

Dans le cas où $\#J_N \sim N^\gamma$, avec $0 < \gamma < 1$, alors la borne est équivalente à $\left(\frac{1}{N} \lfloor N^\gamma \rfloor\right)^{5/2}$, qui tend vers 0. Dans ce cas, on a bien indépendance asymptotique du vecteur $\mathbf{Y}_N$ et de la variable U_N . $\clubsuit$

Remarque IX.6.6. Dans la démonstration, nous avons privilégié le fait que $\mathbf{Y}$ soit gaussien pour écrire la borne. Et si on utilisait plutôt U_N , qui est asymptotiquement gaussien? On utilise dans ce cas la théorie développée dans le cas unidimensionnel (Chapitre VII), qui donne

$$\begin{aligned} d_W((U_N, \mathbf{Y}_N), \mathcal{N}(0, 1) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N)) &\leq C \left(\mathbb{E} \left[\left(1 - \langle D U_N, D(-L)^{-1} U_N \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right) \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q \in J_N} \mathbb{E} \left[\left\langle D(-L)^{-1} U_N, D \left(u_\theta \left(\frac{q+1}{N} \right) - u_\theta \left(\frac{q}{N} \right) \right) \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]^{1/2} \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{m^+(N)^3 \#J_N^3}{N^5}} \right). \end{aligned}$$

Sur les cas traités dans la Remarque précédente, on voit que cette borne est moins bonne. $\clubsuit$

On peut alors conclure notre étude avec la démonstration du Théorème IX.6.3.

Démonstration du Théorème IX.6.3 : Par définition de U_N , on a

$$U_N = \sqrt{\frac{N}{16\sigma^2}} (4V_N - \sqrt{\theta}) = \sqrt{\frac{N}{16\sigma^2}} (\sqrt{\hat{\theta}_N} - \sqrt{\theta}).$$

D'après le Théorème 3 de [AGT22],

$$U_N(x) = \sqrt{\frac{N}{64\sigma^2\theta}} (\hat{\theta}_N - \theta) + A_N(x) = \Theta_N(x) + A_N(x),$$

où $A_N(x)$ est un terme de reste tel qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[|A_N(x)|] \leq \frac{C}{N}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d_W((\Theta_N, \mathbf{Y}_N), \text{Loi}(\Theta_N) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N)) &\leq d_W((\Theta_N, \mathbf{Y}_N), (U_N, \mathbf{Y}_N)) + d_W((U_N, \mathbf{Y}_N), \text{Loi}(U_N) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N)) \\ &\quad + d_W(\text{Loi}(U_N) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N), \text{Loi}(\Theta_N) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N)) \\ &\leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[|A_N(x)|] + d_W((U_N, \mathbf{Y}_N), \text{Loi}(U_N) \otimes \text{Loi}(\mathbf{Y}_N)). \end{aligned}$$

On en déduit la borne [IX.28] grâce à la Proposition IX.6.4 et la borne vérifiée par A_N . $\square$

Méthode de Nourdin–Peccati indépendante pour la loi Gamma

« Les Nornes disent de moi que je
cherche une rédemption que j'estime
ne pas mériter. Qu'est-ce que cela fait
de moi? Un Dieu des imbéciles. Un
Dieu de l'Espoir. »

Kratos à lui-même, *God of War*
Ragnarök : Valhalla, 2023

Ce chapitre est issu de [TZ24a], paru en 2024 dans le journal ALEA.

RÉSUMÉ

Nous développons une variante multidimensionnelle de la méthode de STEIN pour une approximation de la loi Gamma centrée $\bar{\Gamma}(\nu)$ de paramètre $\nu > 0$ qui permet d'obtenir des bornes en distance de WASSERSTEIN entre la loi d'un vecteur aléatoire arbitraire $(X, \mathbf{Y})$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ et la loi $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$. Dans le cas de vecteurs aléatoires ayant des composantes dans des chaos de WIENER, ces bornes mènent à des conditions intéressantes pour la convergence jointe de la suite $((X_n, \mathbf{Y}_n), n \geq 1)$ vers $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$ en supposant que $(X_n, n \geq 1)$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(\nu)$ et $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ converge vers un vecteur aléatoire arbitraire $\mathbf{Y}$. On illustre ce critère par deux exemples concrets.

Dans ce chapitre, on cherche à donner une méthode de NOURDIN–PECCATI pour estimer des distances entre une loi quelconque d'un couple $(X, \mathbf{Y})$ où X est une variable aléatoire réelle et $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire réel de $\mathbb{R}^p$ et la loi produit $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathcal{L}(\mathbf{Y})$, c'est-à-dire la loi du couple $(Z_\nu, \mathbf{Y})$ avec Z_ν suivant $\bar{\Gamma}(\nu)$ et étant indépendante de $\mathbf{Y}$. Pour cela, on s'inspire du chapitre VII et de la caractérisation de STEIN de la loi Gamma donnée dans le Chapitre II.

Le cheminement est le suivant. On énonce d'abord un lemme de STEIN indépendant pour la loi Gamma. Ensuite, on étudie les solutions intéressantes de l'équation de STEIN associée dans le cadre de la distance de WASSERSTEIN. On en déduira une borne de STEIN générale pour cette distance entre une probabilité μ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ et $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu_1$, où μ_1 est une marginale sur $\mathbb{R}^p$ de μ .

Avec le calcul de MALLIAVIN, avec une hypothèse supplémentaire de dérivabilité, on pourra en déduire une nouvelle borne en termes des opérateurs de dérivation. On étudiera le cas où les variables vivent dans un chaos de WIENER fixe, et on en déduira un théorème de convergence vers la loi produit relativement simple. Plus précisément, si on se donne $(X_n, n \geq 1)$ convergeant vers une loi Gamma centrée, $(\mathbf{Y}_n, n \geq 1)$ convergeant vers une loi μ_1 sur $\mathbb{R}^p$, en supposant que X_n et toutes les composantes de $\mathbf{Y}_n$ sont dans des chaos de WIENER fixes, alors (sous quelques conditions sur les chaos) si on dispose d'une forme de décorrélation asymptotique entre X_n et les composantes de $\mathbf{Y}_n$, alors on a aussi indépendance asymptotique dans le sens où le couple $(X_n, \mathbf{Y}_n)$ converge en loi quand $[n \rightarrow \infty]$ vers la loi produit $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu_1$.

Dans la suite de ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace probabilisé ambiant, où on note $\mathbb{E}$ l'espé-

rance. Pour $\nu > 0$, on appelle *loi Gamma centrée de paramètre ν* la mesure de probabilité notée $\bar{\Gamma}(\nu)$ admettant une densité par rapport à la mesure de LEBESGUE donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$p_\nu(x) \triangleq \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}(x+\nu)^{\nu/2-1}e^{-\frac{1}{2}(x+\nu)} \mathbf{1}_{(-\nu,+\infty)}(x).$$

Pour voir l'intérêt de cette loi, regarder la section 2 du Chapitre II. Notez que p_ν vérifie l'équation différentielle suivante : pour tout $x > -\nu$

$$2(x+\nu)p_\nu(x) = - \int_{-\nu}^x up_\nu(u) du. \quad [\text{X.1}]$$

Avec cette convention, par rapport à celle adoptée dans la section 2 du Chapitre II, si $Z \sim \bar{\Gamma}(\nu)$ alors $\frac{Z+\nu}{2} \sim \Gamma(\nu/2)$.

1. Lemme de Stein indépendant pour la loi Gamma

Lemme X.1.1 : (STEIN indépendant pour la loi Gamma) Soient $\nu > 0$, $Z \in L^1(\mathbb{P})$ et $\mathbf{Y} \in L^0(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^p)$, avec $p \geq 1$, un vecteur aléatoire réel. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La variable Z suit $\bar{\Gamma}(\nu)$ et est indépendante de $\mathbf{Y}$;
- (ii) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, \mathbf{y})$ est absolument continue et telle que $\mathbb{E}\left[(Z+\nu) \left| \frac{\partial f}{\partial x}(Z, \mathbf{Y}) \right| \right]$ et $\mathbb{E}[|Z| |f(Z, \mathbf{Y})|]$ soient finies alors

$$\mathbb{E}\left[2(Z+\nu) \frac{\partial f}{\partial x}(Z, \mathbf{Y})\right] = \mathbb{E}[Zf(Z, \mathbf{Y})]. \quad [\text{X.2}]$$

Remarque X.1.2. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ désigne l'un des représentants de la classe de fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ pour laquelle $f(b, \mathbf{y}) - f(a, \mathbf{y}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) dx$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$. ♣

Démonstration : Supposons d'abord (i), c'est-à-dire que $(Z, \mathbf{Y})$ suit $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$. Considérons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne par rapport à sa première variable telle que $\mathbb{E}[(Z+\nu) |\frac{\partial f}{\partial x}(Z, \mathbf{Y})|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Z| |f(Z, \mathbf{Y})|] < \infty$. Alors par indépendance de Z et $\mathbf{Y}$

$$\mathbb{E}\left[2(Z+\nu) \frac{\partial f}{\partial x}(Z, \mathbf{Y})\right] = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}\left[2(Z+\nu) \frac{\partial f}{\partial x}(Z, \mathbf{y})\right] \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}).$$

Par le lemme de STEIN pour la loi Gamma centrée II.2.2 (appliqué à $\frac{Z+\nu}{2}$ suivant $\Gamma(\nu/2)$)

$$\mathbb{E}\left[2(Z+\nu) \frac{\partial f}{\partial x}(Z, \mathbf{Y})\right] = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{E}[Zf(Z, \mathbf{y})] \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) = \mathbb{E}[Zf(Z, \mathbf{Y})].$$

On obtient donc [X.2].

Réciproquement, supposons (ii). Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$, $(x, \mathbf{y}) \mapsto e^{itx} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}}$ vérifie les hypothèses du point (ii), puisque $Z \in L^1(\mathbb{P})$. Ainsi,

$$2it\mathbb{E}\left[(Z+\nu)e^{itZ} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{Y}}\right] = \mathbb{E}\left[Z e^{itZ} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{Y}}\right].$$

Notons φ la fonction caractéristique du couple $(Z, \mathbf{Y})$. Puisque $Z \in L^1(\mathbb{P})$, φ est dérivable par rapport à sa première variable, et on obtient

$$2it \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{s}) + 2it\nu\varphi(t, \mathbf{s}) = \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{s}).$$

D'où l'équation différentielle suivante vérifiée par φ :

$$(2it - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{s}) - 2t\nu\varphi(t, \mathbf{s}) = 0.$$

On conclut que $\varphi(t, \mathbf{s}) = \widehat{\bar{\Gamma}(\nu)}(t) \cdot \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{s})$, donc que $(Z, \mathbf{Y})$ suit $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$. □

2. Équation de Stein associée

Dans cette section, et pour le reste de ce chapitre, on fixe $\nu > 0$ et on note Z_ν une variable aléatoire réelle suivant la loi $\bar{\Gamma}(\nu)$. Pour $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbb{E}[|h(Z_\nu, \mathbf{y})|] < \infty$, on considère l'équation différentielle d'inconnue $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$2(x + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) - x f(x, \mathbf{y}) = h(x, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{y})]. \quad [\text{X.3}]$$

Proposition X.2.1 : Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors toute solution de [X.3] est de la forme

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{2(x + \nu)p_\nu(x)} \left(C + \int_{-\nu}^x p_\nu(u, \mathbf{y}) (h(u, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{y})]) du \right) \mathbf{1}_{(-\nu, +\infty)}(x) \\ & + \frac{-1}{2(x + \nu)q_\nu(x)} \left(C' + \int_x^{-\nu} q_\nu(u, \mathbf{y}) (h(u, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{y})]) du \right) \mathbf{1}_{(-\infty, -\nu)}(x) \\ & + \frac{1}{\nu} (h(-\nu, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{y})]) \mathbf{1}_{\{-\nu\}}(x), \end{aligned} \quad [\text{X.4}]$$

où $C, C' \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires et

$$q_\nu(x) \triangleq \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} (-(x + \nu))^{\nu/2-1} e^{\frac{-1}{2}(x+\nu)} \mathbf{1}_{(-\infty, -\nu)}(x).$$

On note f_h la solution [X.4] pour $C = C' = 0$. Il s'agit de l'unique solution bornée. Si h est de plus de classe C^1 , alors f_h admet des dérivées partielles par rapport à x et aux variables y_j sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right| \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right| \quad [\text{X.5}]$$

et

$$\max_{1 \leq j \leq p} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial f_h}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right| \leq \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) du} \right\} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial h}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right|, \quad [\text{X.6}]$$

où x_ν est la médiane de $\bar{\Gamma}(\nu)$.

Démonstration : Pour h continue, et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, notons $f_{\mathbf{y}} : x \mapsto f(x, \mathbf{y})$, où f est une solution de [X.3]. Alors $f_{\mathbf{y}}$ vérifie l'équation différentielle [II.6], ou en tous cas une version translatée :

$$2(x + \nu) f'_{\mathbf{y}}(x) - x f_{\mathbf{y}}(x) = h_{\mathbf{y}}(x) - \mathbb{E}[h_{\mathbf{y}}(Z_\nu)].$$

Par la Proposition II.2.4, il suit que toutes les solutions de cette équation différentielle sont de la forme translatée de [II.9], ce qui permet de conclure sur [X.4].

Supposons de plus que h soit de classe C^1 . Alors la version translatée de la Proposition II.2.4 nous affirme que $x \mapsto f_h(x, \mathbf{y})$ est dérivable sur $(-\infty, -\nu)$ et $(-\nu, +\infty)$, de dérivées bornées de sorte que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right| \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right|.$$

Si bien que

$$\sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial f_h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right| \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right|.$$

On a donc obtenu [X.5]. Analysons désormais les dérivées de f_h par rapport aux variables y_j . Pour cela, constatons qu'en dérivant par rapport aux y_j l'équation de STEIN [X.3], on a en fait

$$\frac{\partial f_h}{\partial y_j} = f_{\frac{\partial h}{\partial y_j}}.$$

Montrons que pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} |f_\phi(x, \mathbf{y})| \leq \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) du} \right\} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} |\phi(x, \mathbf{y})|. \quad [\text{X.7}]$$

D'abord pour $x > -\nu$, on dispose de deux expressions de f_ϕ :

$$\begin{aligned} f_\phi(x, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2(x+\nu)p_\nu(x)} \int_{-\nu}^x (\phi(u, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[\phi(Z_\nu, \mathbf{y})]) p_\nu(u) \, du \\ &= \frac{-1}{2(x+\nu)p_\nu(x)} \int_x^{+\infty} (\phi(u, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[\phi(Z_\nu, \mathbf{y})]) p_\nu(u) \, du. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\sup_{(x, \mathbf{y}) \in (-\nu, +\infty) \times \mathbb{R}^p} |f_\phi(x, \mathbf{y})| \\ &\leq 2\|\phi\|_\infty \sup_{(x, \mathbf{y}) \in (-\nu, +\infty) \times \mathbb{R}^p} \min \left\{ \frac{1}{2(x+\nu)p_\nu(x)} \int_{-\nu}^x p_\nu(u) \, du, \frac{1}{2(x+\nu)p_\nu(x)} \int_x^{+\infty} p_\nu(u) \, du \right\} \\ &\triangleq 2\|\phi\|_\infty \sup_{(x, \mathbf{y}) \in (-\nu, +\infty) \times \mathbb{R}^p} \min \{A(x), B(x)\}. \end{aligned}$$

Étudions A et B . La relation [X.1] permet d'avoir

$$A(x) = \frac{1}{-\int_{-\nu}^x u p_\nu(u) \, du} \int_{-\nu}^x p_\nu(u) \, du.$$

Notez que $\int_{-\nu}^x u p_\nu(u) \, du < 0$. Alors en appliquant la règle de l'HÔPITAL (cf [Tay52]), on en déduit que A tend vers 0 en 0. De plus, A tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Enfin, A est strictement croissante car en effet sa dérivée est donnée par

$$A'(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{-\int_{-\nu}^x u p_\nu(u) \, du} \int_{-\nu}^x p_\nu(u) \, du \right) > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{-\int_{-\nu}^x u p_\nu(u) \, du} \int_{-\nu}^x u p_\nu(u) \, du \right) = 0.$$

On montre de même que B est strictement décroissante, tend vers 0 en $+\infty$ et vers $+\infty$ en 0. Il suit qu'il existe un unique point x_0 pour lequel

$$\sup_{(x, \mathbf{y}) \in (-\nu, +\infty) \times \mathbb{R}^p} \min \{A(x), B(x)\} = A(x_0) = B(x_0).$$

Or, $A(x_0) = B(x_0)$ si et seulement si $\int_{-\nu}^{x_0} p_\nu(u) \, du = \int_{x_0}^{+\infty} p_\nu(u) \, du$, donc si et seulement si x_0 est la médiane de $\bar{\Gamma}(\nu)$, notée x_ν . On conclut que

$$\sup_{(x, \mathbf{y}) \in (-\nu, +\infty) \times \mathbb{R}^p} |f_\phi(x, \mathbf{y})| \leq \frac{2\|\phi\|_\infty}{4(x_\nu + \nu)p_\nu(x_\nu)} = \frac{\|\phi\|_\infty}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) \, du}.$$

Pour $x < -\nu$, on dispose de d'une unique expression pour f_ϕ :

$$f_\phi(x, \mathbf{y}) = \frac{-1}{2(x+\nu)q_\nu(x)} \int_x^{-\nu} q_\nu(u) (\phi(u, \mathbf{y}) - \mathbb{E}[\phi(Z_\nu, \mathbf{y})]) \, du,$$

avec aussi

$$2(x+\nu)q_\nu(x) = \int_x^{-\nu} u q_\nu(u) \, du < 0. \quad [\text{X.8}]$$

Puisque

$$-\int_x^{-\nu} u q_\nu(u) \, du \geq \nu \int_x^{-\nu} q_\nu(u) \, du > 0,$$

on conclut avec [X.8] que

$$\sup_{(x, \mathbf{y}) \in (-\infty, -\nu) \times \mathbb{R}^p} |f_\phi(x, \mathbf{y})| \leq \frac{2\|\phi\|_\infty}{\nu}.$$

Ainsi, on a bien montré [X.7] pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. On en déduit alors que

$$\max_{1 \leq j \leq p} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial f_h}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right| \leq \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) \, du} \right\} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial h}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right|,$$

c'est-à-dire exactement [X.6]. Cela conclut cette démonstration. $\square$

Corollaire X.2.2 : On note $\mathcal{C}_\nu$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables vérifiant

$$\sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right| \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\}$$

et

$$\max_{1 \leq j \leq p} \sup_{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right| \leq \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) \, du} \right\}.$$

Alors si $X \in L^1(\mathbb{P})$ et $\mathbf{Y} \in L^1(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^p)$, on a

$$d_W((X, \mathbf{Y}), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|. \quad [\text{X.9}]$$

Démonstration : La Proposition X.2.1 ainsi que l'équation de STEIN [X.3] nous fournit l'estimation suivante : pour tout $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et 1-lipschitzienne,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y})] \right| &= \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f_h}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f_h(X, \mathbf{Y}) \right] \right| \\ &\leq \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|, \end{aligned}$$

où Z_ν suit $\bar{\Gamma}(\nu)$ et est indépendante de $\mathbf{Y}$.

Pour $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne, mais non nécessairement de classe C^1 , on introduit pour tout $n \geq 1$ la suite de fonctions suivantes :

$$h_n(x, \mathbf{y}) \triangleq \mathbb{E} \left[h \left(x + \frac{1}{\sqrt{n}} N, \mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{N} \right) \right],$$

où $(N, \mathbf{N})$ suit $\mathcal{N}_{p+1}(\mathbf{0}, I_{p+1})$. Il s'agit de la convolution de h par le noyau gaussien $G_{1/n}$ donné pour tout $\varepsilon > 0$ par

$$G_\varepsilon(x, \mathbf{y}) \triangleq \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{p+1}{2}}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}(|x|^2 + |\mathbf{y}|^2)}.$$

Ainsi h_n converge uniformément vers h . De plus, h_n est aussi 1-lipschitzienne et est de classe C^∞ . On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y})] \right| &\leq \left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h_n(X, \mathbf{Y})] \right| + \left| \mathbb{E}[h_n(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h_n(Z_\nu, \mathbf{Y})] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}[h_n(Z_\nu, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y})] \right| \\ &\leq 2\|h - h_n\|_\infty + \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|. \end{aligned}$$

On conclut alors en passant à la limite lorsque $[n \rightarrow \infty]$ que pour tout $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne

$$\left| \mathbb{E}[h(X, \mathbf{Y})] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y})] \right| \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|.$$

Le terme de droite ne dépend pas de h , on conclut alors sur [X.9]. $\square$

3. Bornes dans le cas dérivable

On considère W un processus isonormal sur un espace de HILBERT réel séparable $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par W . Dans toute la suite de ce chapitre, on se place sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, et on définit les opérateurs de MALLIAVIN par rapport à W .

Théorème X.3.1 : Considérons $X \in L^2(\mathbb{P})$ une variable aléatoire centrée et $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p)) \in L^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^p)$ un vecteur aléatoire centrée. On suppose que $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ et que pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y(j) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Alors

$$\begin{aligned} d_W((X, \mathbf{Y}), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \mathbb{E} \left[\left| 2(X + \nu) - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right| \right] \\ &\quad + \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) \, du} \right\} \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\left| \langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right| \right]. \end{aligned} \quad [\text{X.10}]$$

Si de plus $X \in \mathbb{D}^{1,4}$ et $Y(j) \in \mathbb{D}^{1,4}$ pour tout $1 \leq j \leq p$ alors

$$\begin{aligned} d_W((X, \mathbf{Y}), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) &\leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(2(X + \nu) - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ &\quad + \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) \, du} \right\} \sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]}. \end{aligned} \quad [\text{X.11}]$$

Démonstration : Le Corollaire X.2.2 nous fournit l'estimation suivante :

$$d_W((X, \mathbf{Y}), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_\nu} \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right|.$$

Or, puisque X est centrée, et est dans $\mathbb{D}^{1,2}$, on a

$$X = \delta D(-L)^{-1}X.$$

Ainsi, pour $f \in \mathcal{C}_\nu$

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) - \delta D(-L)^{-1}X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] - \mathbb{E} \left[\delta D(-L)^{-1}X f(X, \mathbf{Y}) \right] \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left[2(X + \nu) \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] - \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}X, Df(X, \mathbf{Y}) \rangle_{\mathcal{H}} \right] \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left[\left\{ 2(X + \nu) - \langle DX, D(-L)^{-1}X \rangle_{\mathcal{H}} \right\} \frac{\partial f}{\partial x}(X, \mathbf{Y}) \right] - \sum_{j=1}^p \mathbb{E} \left[\frac{\partial f}{\partial y_j}(X, \mathbf{Y}) \langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}} \right] \right|. \end{aligned}$$

Puisque $f \in \mathcal{C}_\nu$, on conclut par inégalité triangulaire à [X.10]. Si $X \in \mathbb{D}^{1,4}$ et $Y(j) \in \mathbb{D}^{1,4}$, alors les espérances dans [X.11] sont bien définies et on conclut sur cette inégalité en appliquant l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ à partir de [X.10]. $\square$

Remarque X.3.2. Dans ce cas, si $\mathbb{E}[X^2] = 2\nu$ (le moment d'ordre 2 de $\bar{\Gamma}(\nu)$), alors tout comme dans le Théorème VII.2.1, la distance se coupe en deux termes qu'on peut interpréter de la sorte :

$$d_W((X, \mathbf{Y}), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \leq \underbrace{\text{Borne de la distance}}_{\text{entre } X \text{ et } \bar{\Gamma}(\nu)} + \underbrace{\text{Décorrélation entre}}_{\text{entre } X \text{ et } \mathbf{Y}}.$$

♣

4. Cas particulier des chaos de Wiener

Dans cette section, on explicite la borne [X.11] dans le cadre de variables dans un chaos de WIENER. La formule produit nous donne la Proposition suivante.

Proposition X.4.1 : Soient X une variable aléatoire réelle, $\mathbf{Y} = (Y(1), \dots, Y(p))$ un vecteur aléatoire réel, $q \geq 1$, $q_1, \dots, q_p \geq 0$, $\phi \in \mathcal{H}^{\odot 2q}$, $g(1) \in \mathcal{H}^{\odot q_1}, \dots, g(p) \in \mathcal{H}^{\odot q_p}$ tels que $X = I_{2q}(\phi)$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $Y(j) = I_{q_j}(g(j))$. Alors

$$\begin{aligned} & d_W((X, \mathbf{Y}), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}) \\ & \leq \left| 2\nu - (2q)! \|\phi\|_{\mathcal{H}^{\odot 2q}}^2 \right| + 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sqrt{c'_q \|\phi - c_q \phi \tilde{\otimes}_q \phi\|_{\mathcal{H}^{\odot 2q}}^2 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^{2q-1} a_{q,r} \|\phi \tilde{\otimes}_r \phi\|_{\mathcal{H}^{\odot(4q-2r)}}^2} \\ & \quad + \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) \, du} \right\} \sum_{j=1}^p \sqrt{\sum_{r=1}^{(2q) \wedge q_j} b_{2q,q_j,r} \|\phi \tilde{\otimes}_r g(j)\|_{\mathcal{H}^{\odot(2q+q_j-2r)}}^2}. \end{aligned} \quad [\text{X.12}]$$

où $c'_q \triangleq 4(2q)!$, $c_q \triangleq q!(\frac{2q-1}{q-1})^2$ et

$$a_{q,r} \triangleq 4q^2(r-1)!^2 \binom{2q-1}{r-1}^4 (4q-2r)! \text{ et } b_{2q,q_j,r} \triangleq r!^2 \binom{2q-1}{r-1}^2 \binom{q_j}{r}^2 (2((2q) \wedge q_j - r))!.$$

Démonstration : Il s'agit de calculer avec la formule produit les termes apparaissant dans [X.11] :

$$\mathbb{E} \left[\left(2(X + \nu) - \langle D(-L)^{-1}X, DX \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \text{ et } \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1}X, DY(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right].$$

Le deuxième a été déjà traité dans la Proposition VII.3.1, et donnait déjà le terme $b_{2q,q_j,r}$. Quand au premier, il a été étudié dans [NP09b], Proposition 3.13. Pas de grands mystères, seule l'utilisation de la formule produit conclut en cette estimation. $\square$

Remarque X.4.2. Cette estimation respecte le critère d'indépendance d'ÜSTUNEL et ZAKAI dans le cas suivant. Si $X = I_2(f \otimes f)$ alors X suit la loi $\bar{\Gamma}(\|f\|_{\mathcal{H}}^2)$. Dans ce cas, avec $\phi = f \otimes f$ et $q = 1$, on a

$$c'_1 \|\phi - c_1 \phi \tilde{\otimes}_1 \phi\|_{\mathcal{H}^{\odot 2}}^2 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq 1}}^1 a_{1,r} \|\phi \tilde{\otimes}_r \phi\|_{\mathcal{H}^{\odot(4-2r)}}^2 = 0.$$

Ainsi, si $Y = I_{q'}(g)$ avec $\phi \otimes_1 g = 0$ presque partout, on retrouve que $d_W((X, Y), \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y) = 0$. $\clubsuit$

On peut alors déduire de la Proposition X.4.1 un Théorème Limite sur les chaos de WIENER.

Théorème X.4.3 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteur aléatoires de $\mathbb{R}^p$, on note $Y_n(j)$ la j -ème composante de $\mathbf{Y}_n$ pour $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq p$. Supposons qu'il existe $q \geq 1$ et $q_1, \dots, q_p \geq 0$ tels que $(X_n)_{n \geq 1} \subset \mathfrak{H}_{2q}$ et $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1} \subset \prod_{j=1}^p \mathfrak{H}_{q_j}$. On suppose les hypothèses suivantes.

- (i) $(X_n)_n$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(\nu)$;
- (ii) $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une probabilité μ sur $\mathbb{R}^p$;
- (iii) Les chaos sont ordonnés : $2q \geq \max_{1 \leq j \leq p} q_j$;
- (iv) On dispose d'une décorrélation asymptotique : pour tout $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}[X_n \mathbf{Y}_n(j)] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$;
- (v) Si $X_n = I_{2q}(\phi_n)$ et $Y_n(j) = I_{q_j}(g_n(j))$ alors $\|\phi_n \otimes_q g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\odot q_j}} \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Alors le couple $(X_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu$. De plus, si $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge au sens de WASSERSTEIN vers μ alors la convergence du couple $(X_n, \mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ se fait aussi au sens de

WASSERSTEIN, avec de plus l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu) \\ & \leq 2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\nu} \right\} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(2(X_n + \nu) - \langle D(-L)^{-1} X_n, DX_n \rangle_{\mathcal{H}} \right)^2 \right]} \\ & \quad + \max \left\{ \frac{2}{\nu}, \frac{1}{\int_{x_\nu}^{+\infty} u p_\nu(u) \, du} \right\} \sum_{j=1}^p \sqrt{\mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1} X_n, DY_n(j) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]} + d_W(\mathbf{Y}_n, \mu). \end{aligned} \quad [\text{X.13}]$$

Démonstration : Montrons d'abord la convergence en loi annoncée. Pour cela, considérons $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^p$ et on définit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ par

$$h(x, \mathbf{y}) \triangleq \frac{1}{|(t, \mathbf{s})|} e^{itx + i\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}}.$$

Pour montrer la convergence en loi du couple, il suffit alors de montrer que

$$\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)], \quad [\text{X.14}]$$

où Z_ν suit $\bar{\Gamma}(\nu)$ et est indépendante de $\mathbf{Y}_\infty$ qui suit μ . Pour cela, on fait le découpage suivant :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]| & \leq |\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_n)]| + |\mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]| \\ & \leq d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + |\mathbb{E}[h(Z_\nu^n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]| \\ & = A + B, \end{aligned}$$

où Z_ν suit $\bar{\Gamma}(\nu)$ et est indépendante de $\mathbf{Y}_n$.

Montrons d'abord que B tend vers 0. On constate pour cela que

$$B = \left| \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[H(\mathbf{Y})] \right|,$$

où pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $H(\mathbf{y}) = \int_0^{+\infty} p_\nu(x) h(x, \mathbf{y}) \, dx$. Cette fonction H est continue et bornée par $\frac{1}{|(t, \mathbf{s})|}$, si bien que la convergence en loi de $(\mathbf{Y}_n)_n$ vers μ implique alors la convergence de B vers 0.

Montrons que A tend vers 0. Utilisons la Proposition X.4.1. L'inégalité [X.12] nous permet d'affirmer qu'il suffit de montrer que lorsque $[n \rightarrow \infty]$

1. $(2q)! \|\phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2q}} \rightarrow 2\nu$;
2. $\|\phi_n - c_q \phi_n \tilde{\otimes}_q \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2q}} \rightarrow 0$;
3. Pour tout $1 \leq r \leq 2q - 1$, avec $r \neq q$, $\|\phi_n \tilde{\otimes}_r \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes (4q-2r)}} \rightarrow 0$;
4. Pour tout $1 \leq r \leq (2q) \wedge q_j (= q_j)$, $\|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (2q+q_j-2r)}} \rightarrow 0$.

Or, le point 1. est assuré par la convergence de $(X_n)_n$ vers $\bar{\Gamma}(\nu)$. De plus, cette même convergence implique aussi 2. et 3. d'après le Théorème des Troisième et Quatrième Moments Gamma, c'est-à-dire le Théorème III.2.2. Il ne reste plus qu'à montrer 4..

Soit $1 \leq r \leq q_j - 1$. Alors

$$\begin{aligned} \|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (2q+q_j-2r)}}^2 & \leq \|\phi_n \otimes_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (2q+q_j-2r)}}^2 = \langle \phi_n \otimes_{2q-r} \phi_n, g_n(j) \otimes_{q_j-r} g_n(j) \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2r}} \\ & \leq \|\phi_n \otimes_{2q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes (2r)}} \sup_{n \geq 1} \|g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q_j}}^2. \end{aligned}$$

Or, $\sup_{n \geq 1} \|g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes q_j}}^2 < \infty$ car $(Y_n(j))_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathfrak{H}_{q_j}$ qui converge en loi, donc est bornée dans L^2 (regarder [Jan97], Corollaire 6.11). De plus, puisque $2q - r \geq 1$, $\|\phi_n \otimes_{2q-r} \phi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes (2r)}} \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$, à moins que $2q - r = q$, c'est-à-dire que $r = q$. Dans ce cas, on a directement par hypothèse (v) que

$$\|\phi_n \tilde{\otimes}_q g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q+q_j)}} \leq \|\phi_n \otimes_q g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (q+q_j)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Reste à traiter le cas $r = q_j$. Si $q_j < 2q$, le raisonnement précédent permet de conclure une fois de plus que $\|\phi_n \tilde{\otimes}_r g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes (2q+q_j-2r)}} \rightarrow 0$. Supposons enfin que $q_j = 2q$. Dans ce cas, grâce à l'hypothèse (iv)

$$\begin{aligned} \|\phi_n \tilde{\otimes}_{2q} g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 0}}^2 & \leq \|\phi_n \otimes_{2q} g_n(j)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 0}}^2 = \langle \phi_n, g_n(j) \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2q}}^2 \\ & = \frac{1}{(2q)!} \mathbb{E}[X_n Y_n(j)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On a donc bien montré le point 4.. Cela permet de conclure en [X.14], donc en la convergence en loi de $(X_n, \mathbf{Y}_n)$ vers $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu$.

Supposons désormais que la convergence en loi de $(\mathbf{Y}_n)_{n \geq 1}$ vers μ se passe au sens de WASSERSTEIN. Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne. Alors l'inégalité suivante est encore vérifiée

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]| &\leq |\mathbb{E}[h(X_n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_n)]| + |\mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]| \\ &\leq d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + |\mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]|. \end{aligned} \quad [\text{X.15}]$$

Le premier terme tend vers 0, nous l'avons déjà démontré. Quand au deuxième, il s'écrit

$$|\mathbb{E}[h(Z_\nu^n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]| = |\mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[H(\mathbf{Y}_\infty)]|,$$

où encore une fois $H(\mathbf{y}) = \int_0^{+\infty} p_\nu(x) h(x, \mathbf{y}) \, dx$. Puisque h est 1-lipschitzienne, c'est aussi le cas de H , si bien qu'en fait

$$|\mathbb{E}[h(Z_\nu^n, \mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}[h(Z_\nu, \mathbf{Y}_\infty)]| \leq d_W(\mathbf{Y}_n, \mu),$$

qui tend vers 0 par hypothèse. D'après [X.15], il suit que

$$d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mu) \leq d_W((X_n, \mathbf{Y}_n), \bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_n}) + d_W(\mathbf{Y}_n, \mu).$$

Ainsi, on a bien convergence au sens de WASSERSTEIN du couple. On en déduit de plus [X.13] grâce au Théorème X.3.1. $\square$

Remarque X.4.4. Comme dans le cadre du Théorème VII.3.3, le caractère ordonné des chaos est nécessaire, sinon le Théorème X.4.3 est mis en défaut. Pour cela, considérons pour $q \geq 1$ les variables $X_n = I_{2q}(\psi_n)$ et on suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(1)$. Considérons alors $Y_n = I_{4q}(\psi_n \tilde{\otimes} \psi_n)$. La formule produit nous donne

$$X_n^2 = \mathbb{E}[X_n^2] + Y_n + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^{2q-1} r! \binom{2q}{r}^2 I_{2(2q-r)}(\psi_n \tilde{\otimes}_r \psi_n) + q! \binom{2q}{q}^2 I_{2q}(\psi_n \tilde{\otimes}_q \psi_n),$$

si bien que

$$Y_n = X_n^2 - \mathbb{E}[X_n^2] - \frac{1}{c_{2q}} q! \binom{2q}{q}^2 X_n + S'_n,$$

avec

$$S'_n \triangleq \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^{2q-1} r! \binom{2q}{r}^2 I_{2(2q-r)}(\psi_n \tilde{\otimes}_r \psi_n) + \frac{1}{c_q} q! \binom{2q}{q}^2 (c_q I_{2q}(\psi_n \tilde{\otimes}_q \psi_n) - I_{2q}(\psi_n)).$$

Par isométrie des intégrales stochastiques, et par Théorème du Quatrième Moment Gamma III.2.2, il suit que S'_n converge vers 0 dans L^2 lorsque $[n \rightarrow \infty]$, si bien que Y_n converge en loi vers la variable $Z_1^2 - 2 - \frac{1}{c_q} q! \binom{2q}{q}^2 Z_1$, avec Z_1 suivant $\bar{\Gamma}(1)$. Par le même type de raisonnement que dans la Remarque VII.3.5, on en déduit que (X_n, Y_n) converge en loi lorsque $[n \rightarrow \infty]$ vers le couple $(Z_1, Z_1^2 - \frac{1}{c_q} q! \binom{2q}{q}^2 Z_1 - 2)$, dont sa loi n'est pas la loi produit de chacune de ses marginales (calculer $\mathbb{E}[Z_1^2(Z_1^2 - \frac{1}{c_q} q! \binom{2q}{q}^2 Z_1 - 2)] \neq 0$ pour s'en convaincre), donc l'indépendance asymptotique n'est pas vérifiée dans ce cas. $\clubsuit$

Remarque X.4.5. Il y a une nouvelle hypothèse par rapport au théorème lié au cas gaussien, le Théorème VII.3.3, il s'agit de l'hypothèse (v). Elle est nécessaire pour le Théorème X.4.3. En effet, plaçons-nous sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. On considère pour $0 < \rho < 1$ les deux fonctions $h_1 = \mathbf{1}_{(\rho/2-1, \rho/2)}$ et $h_2 = \mathbf{1}_{(-\rho/2, 1-\rho/2)}$. On a $\|h_1\|_{L^2} = \|h_2\|_{L^2} = 1$ et $\langle h_1, h_2 \rangle_{L^2} = \rho$. Si on considère $X = I_2(h_1^{\otimes 2})$ et $Y = I_1(h_2)$ alors X suit la loi $\bar{\Gamma}(1)$, Y suit $\mathcal{N}(0, 1)$, avec $\mathbb{E}[XY] = 0$. Les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv) sont vérifiées, seule l'hypothèse (v) est mise en défaut, puisque $\|h_1^{\otimes 2} \otimes_1 h_2\|_{L^2} = \rho$. Dans ce cas précis, on a précisément $h_1^{\otimes 2} \otimes_1 h_2 = \rho h_1$, donc le critère d'ÜSTUNEL et ZAKAI nous indique directement que X et Y ne sont pas indépendantes. $\clubsuit$

5. Deux illustrations du Théorème X.4.3

Comme dans l'entièreté de ce chapitre, on considère $\mathcal{H}$ un espace de HILBERT réel séparable et W un processus isonormal associé, avec lequel on définit les opérateurs de MALLIAVIN.

5.1. Moyenne asymptotique d'un produit tensoriel

Soit $(e_i)_{i \geq 1}$ une famille orthonormée de $\mathcal{H}$. Pour $n \geq 2$, on considère

$$U_n \triangleq \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} I_2(e_i \tilde{\otimes} e_j) \triangleq I_2(\phi_n).$$

Remarque X.5.1. La normalisation semble surprenante, puisqu'il y a $n(n-1)$ termes dans la somme. Pour la justifier, on constate que chaque terme n'est pas décorrélié des autres. Regarder en fait l'équation [X.18] dans la démonstration qui suit pour comprendre cette normalisation. ♣

La Proposition suivante provient de [Arr+19]. On propose une démonstration à l'aide du Théorème des Troisième et Quatrième Moments Gamma.

Proposition X.5.2 : *La suite $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(1)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ pour lequel pour tout $n \geq N$,*

$$d_W(U_n, \bar{\Gamma}(1)) \leq \frac{2\sqrt{2} + \varepsilon}{\sqrt{n}}. \quad [\text{X.16}]$$

Démonstration : Appliquons le Théorème du Troisième et Quatrième Moments Gamma (Théorème III.2.4). Il suffit de montrer que

$$\mathbb{E} \left[\left((2(U_n + 1) - \langle D(-L)^{-1}U_n, DU_n \rangle_{\mathcal{H}}) \right)^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad [\text{X.17}]$$

Or, d'après le Théorème I.3.9

$$DU_n = \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} e_i I_1(e_j) + e_j I_1(e_i).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \langle D(-L)^{-1}U_n, DU_n \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\langle \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} e_i I_1(e_j) + e_j I_1(e_i), \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} e_i I_1(e_j) + e_j I_1(e_i) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq i' \neq j' \leq n} \langle e_i I_1(e_j) + e_j I_1(e_i), e_{i'} I_1(e_{j'}) + e_{j'} I_1(e_{i'}) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq i' \neq j' \leq n} \left\{ I_1(e_j) I_1(e_{j'}) \delta_{i,i'} + I_1(e_j) I_1(e_{i'}) \delta_{i,j'} + I_1(e_i) I_1(e_{j'}) \delta_{j,i'} + I_1(e_i) I_1(e_{i'}) \delta_{j,j'} \right\} \\ &= \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq i' \neq j' \leq n} I_1(e_j) I_1(e_{j'}) \delta_{i,i'} \end{aligned}$$

où $\delta_{\cdot, \cdot}$ désigne le symbole de KRONECKER. Or,

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq i' \neq j' \leq n} \delta_{i,i'} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq i}}^n = \sum_{j=1}^n \sum_{j'=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n.$$

Ainsi, en utilisant la formule produit,

$$\begin{aligned} \langle D(-L)^{-1}U_n, DU_n \rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{2}{(n-1)^2} \left[(n-1) \sum_{j=1}^n I_1(e_j)^2 + (n-2) \sum_{1 \leq j \neq j' \leq n} I_2(e_j \tilde{\otimes} e_{j'}) \right] \\ &= \frac{2}{n-1} \sum_{j=1}^n I_2(e_j \otimes e_j) + \frac{2n}{n-1} + \frac{2(n-2)}{n-1} U_n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$2(U_n + 1) - \langle D(-L)^{-1}U_n, DU_n \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{-2}{n-1} \sum_{j=1}^n I_2(e_j \otimes e_j) - \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n-1} U_n.$$

Puisque U_n et tous les $I_2(e_j \otimes e_j)$ sont deux à deux décorrélés (car les noyaux de chaque intégrale stochastique sont orthogonaux), on conclut que

$$\mathbb{E} \left[(2(U_n + 1) - \langle D(-L)^{-1}U_n, DU_n \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right] = \frac{8n}{(n-1)^2} + \frac{4}{(n-1)^2} + \frac{4}{(n-1)^2} \mathbb{E}[U_n^2],$$

où

$$\mathbb{E}[U_n^2] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} I_2(e_i \tilde{\otimes} e_j) \right)^2 \right] = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq i' \neq j' \leq n} 2 \langle e_i \tilde{\otimes} e_j, e_{i'} \tilde{\otimes} e_{j'} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}.$$

En utilisant la définition du symétrisé, et du produit scalaire sur $\mathcal{H}^{\otimes 2}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_n^2] &= \frac{1}{2(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq i' \neq j' \leq n} \left\{ \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} + \delta_{j,i'} \delta_{i,j'} + \delta_{i,j'} \delta_{j,i'} + \delta_{j,j'} \delta_{i,i'} \right\} \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq i' \neq j' \leq n} \left\{ \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} + \delta_{j,i'} \delta_{i,j'} \right\} \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n \left(\delta_{i,i'} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq i'}}^n \delta_{j,j'} \right\} + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \delta_{i',j} \right) \left(\sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq i'}}^n \delta_{i,j'} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq i}}^n \delta_{j,j'} + \sum_{i'=1}^n (1 - \delta_{i,i'})^2 \right). \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\mathbb{E}[U_n^2] = \frac{2n}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2. \quad [\text{X.18}]$$

De plus, cela signifie que

$$\mathbb{E} \left[(2(U_n + 1) - \langle D(-L)^{-1}U_n, DU_n \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right] = \frac{8n}{(n-1)^2} + \frac{4}{(n-1)^2} + \frac{4}{(n-1)^2} \frac{2n}{n-1} = \frac{8n}{(n-1)^2} + \frac{12n-4}{(n-1)^3},$$

ce qui est équivalent à $\frac{8}{n}$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$. On en déduit alors [X.17], donc à la convergence en loi de U_n vers $\bar{\Gamma}(1)$, et à l'estimation en distance de WASSERSTEIN [X.16] via [III.4]. $\square$

Dans la suite de cette sous-section, on s'intéresse d'abord à l'indépendance asymptotique entre U_n et une variable réelle ne dépendant pas de n , provenant d'un des termes de la somme définissant U_N : pour $k \neq l$

$$G \triangleq I_2(e_k \tilde{\otimes} e_l),$$

Proposition X.5.3 : La convergence en distance de WASSERSTEIN suivante est vérifiée : il existe une constante C ne dépendant pas de k et l telle que pour $n \geq 1$

$$d_W((U_n, G), \bar{\Gamma}(1) \otimes \mathbb{P}_G) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration : On applique directement le Théorème limite X.4.3. Il suffit de vérifier les hypothèses (iv) et (v), c'est-à-dire montrer que

1. Les variables sont asymptotiquement décorréélées : $\mathbb{E}[U_n G] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$;
2. On dispose aussi de la condition technique $\|\phi_n \otimes_1 (e_k \tilde{\otimes} e_l)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \rightarrow 0$.

Commençons par montrer **1.**.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_n G] &= \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{E}[I_2(e_i \tilde{\otimes} e_j) I_2(e_k \tilde{\otimes} e_l)] = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \langle e_i \tilde{\otimes} e_j, e_k \tilde{\otimes} e_l \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \langle e_i, e_k \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_j, e_l \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Donc **1.** est bien vérifié.

Montrons **2.**.

$$\begin{aligned}\phi_n \otimes_1 (e_k \tilde{\otimes} e_l) &= \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (e_i \tilde{\otimes} e_j) \otimes_1 (e_k \tilde{\otimes} e_l) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (e_i \otimes e_j) \otimes_1 (e_k \otimes e_l) + \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (e_j \otimes e_i) \otimes_1 (e_k \otimes e_l) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n e_j \otimes e_l + \frac{1}{2(n-1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n e_i \otimes e_k\end{aligned}$$

Ainsi, par orthogonalité des $e_a \otimes e_b$ dans $\mathcal{H}^{\otimes 2}$, on en déduit que

$$\|\phi_n \otimes_1 (e_k \tilde{\otimes} e_l)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 = \frac{n-1}{2(n-1)^2} = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Ainsi, **2.** est bien vérifié, et on en déduit que (U_n, G) converge en loi vers $\bar{\Gamma}(1) \otimes \mathbb{P}_G$.

Pour la distance de WASSERSTEIN, la Proposition X.4.1 nous indique que

$$\mathbb{E}[\langle D(-L)^{-1} U_n, DG \rangle_{\mathcal{H}}^2] = b_{2,2,1} \|\phi_n \otimes_1 (e_k \tilde{\otimes} e_l)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 + b_{2,2,2} \mathbb{E}[U_n G].$$

Ainsi, on en déduit avec [X.12], et aussi avec la Proposition X.5.2 que la distance de WASSERSTEIN est bien d'ordre de grandeur $\frac{1}{\sqrt{n}}$. $\square$

Concluons ce premier exemple avec le cas de figure suivant. On vient de montrer que (U_n, G) vérifie un Théorème Limite qu'on interprète comme de l'indépendance asymptotique. La variable G ne considère qu'un seul élément de la somme dans U_n , et il semble effectivement naturel qu'en considérant un petit nombre de termes, la connaissance de G n'influe en rien sur la connaissance de U_n . La question est la suivante : combien de vecteurs e_k peut-on considérer de sorte qu'on garde cette propriété ? C'est l'objet de la Proposition suivante, qui donne une condition suffisante sur la taille du nombre de vecteurs à prélever pour garder l'indépendance asymptotique. Pour $n \geq 1$, on considère K_n un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on considère le vecteur aléatoire suivant de taille $\#K_n$

$$\mathbf{G}_n \triangleq (I_2(e_k \tilde{\otimes} e_l), k, l \in K_n, k \neq l).$$

Proposition X.5.4 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ à partir duquel pour tout $n \geq N$

$$d_W((U_n, \mathbf{G}_n), \bar{\Gamma}(1) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{G}_n}) \leq \frac{\sqrt{8} + \varepsilon}{\sqrt{n}} + \frac{4}{\int_{x_1}^{+\infty} u p_1(u) du} \frac{\#K_n}{\sqrt{n}}. \quad [\text{X.19}]$$

Démonstration : Appliquons le Théorème général X.3.1, qui nous indique que

$$\begin{aligned}d_W((U_n, \mathbf{G}_n), \bar{\Gamma}(1) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{G}_n}) &\leq 2 \sqrt{\mathbb{E} \left[(2(U_n + 1) - \langle D(-L)^{-1} U_n, D U_n \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right]} \\ &\quad + \frac{1}{\int_{x_1}^{+\infty} u p_1(u) du} \sum_{\substack{k, l \in K_n \\ k \neq l}} \sqrt{\mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1} U_n, D G_n(k, l) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right]}.\end{aligned}$$

On a noté $G_n(k, l) = I_2(e_k \tilde{\otimes} e_l)$. Le premier terme a été traité dans la Proposition X.5.2. Le produit scalaire des dérivées de U_n et $G_n(k, l)$ a été étudié dans la Proposition X.5.3, puisqu'en effet

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\langle D(-L)^{-1} U_n, DG(k, l) \rangle_{\mathcal{H}}^2 \right] &= b_{2,2,1} \|\phi_n \tilde{\otimes}_1 (e_k \tilde{\otimes} e_l)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 + b_{2,2,2} \mathbb{E}[U_n G(k, l)] \\ &\leq 8 \|\phi_n \otimes_1 (e_k \tilde{\otimes} e_l)\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 + 4 \mathbb{E}[U_n G(k, l)] \\ &= \frac{8}{n-1} \leq \frac{16}{n}. \end{aligned}$$

On en déduit alors la distance de WASSERSTEIN [X.19]. $\square$

Remarque X.5.5. La réponse à la question posée avant cette Proposition est alors la suivante : si $\frac{1}{\sqrt{n}} \sharp K_n \rightarrow 0$, alors la distance entre la loi de $(U_n, \mathbf{G}_n)$ et $\bar{\Gamma}(1) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{G}_n}$ tend vers 0. On interprète encore ce fait comme de l'indépendance asymptotique. Consultez tout de même l'annexe A pour bien distinguer les notions d'indépendance asymptotique qu'on dégage ici. $\clubsuit$

Remarque X.5.6. Revenons sur l'article de [NNP16], plus précisément sur le Théorème VII.3.12. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce Théorème fournit un critère pour une convergence qu'on interprète comme de l'indépendance asymptotique dans les chaos de WIENER. Il s'applique en particulier dans le cadre de la Proposition X.5.3, et reprend les calculs qu'on a aussi utilisé dans la démonstration de cette Proposition. Il ne donne pas par contre pas d'estimation en distance.

Par contre, en l'état, il n'est pas applicable pour montrer des convergences comme dans la Proposition X.5.4, qui n'est pas un Théorème Limite à cause de la dépendance en n de la probabilité $\bar{\Gamma}(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{G}_n}$. En effet, comme dans notre Théorème X.4.3, le nombre de composantes pour le vecteur $\mathbf{Y}$ est fixe, et ne dépend pas de n . Si on souhaite écrire un Théorème Limite général qui permet cette dépendance en n (lorsque le nombre de paramètres explose), il faudrait non plus se placer sur un brave espace de dimension finie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, mais certainement sur un espace du type $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de dimension infinie, qui exige aussi de connaître une topologie associée. $\clubsuit$

5.2. Orthogonalité asymptotique en moyenne

On se place sur le cas particulier où $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$. Sur $\mathcal{H}$, on considère le processus isonormal construit à partir d'un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$. On considère sur $\mathcal{H}$ la famille orthonormée suivante : pour tout $n \geq 0$, $e_n \triangleq \mathbf{1}_{[2n, 2n+1]}$. On définit U_n de la même manière qu'à la sous-section précédente :

$$\begin{aligned} U_n &\triangleq \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} I_2(e_i \tilde{\otimes} e_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \int_0^{+\infty} \int_0^t e_i \tilde{\otimes} e_j(t, s) dB_s dB_t \triangleq I_2(\phi_n) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \int_0^{+\infty} \int_0^t e_i(t) e_j(s) dB_s dB_t \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \int_{2i}^{2i+1} \int_{[0,t] \cap [2j, 2j+1]} dB_s dB_t = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq j < i \leq n} \int_{2i}^{2i+1} \int_{[0,t] \cap [2j, 2j+1]} dB_s dB_t \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq j < i \leq n} \int_{2i}^{2i+1} (B_{2j+1} - B_{2j}) dB_t = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq j < i \leq n} (B_{2j+1} - B_{2j})(B_{2i+1} - B_{2i}). \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, on considère $g_n \triangleq \mathbf{1}_{[2n-1+\frac{1}{n}, 2n+\frac{1}{n^a}]}$, avec $a > 0$. Il s'agit aussi d'une famille orthogonale de $\mathcal{H}$, avec de plus

$$\langle g_n, e_m \rangle_{L^2(0, \infty)} = \frac{1}{n^a} \delta_{n,m}.$$

On considère alors

$$\begin{aligned} V_n &\triangleq \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} I_2(g_i \tilde{\otimes} g_j) \triangleq I_2(\psi_n) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(B_{2i+\frac{1}{i^a}} - B_{2i-1+\frac{1}{i}} \right) \left(B_{2j+\frac{1}{j^a}} - B_{2j-1+\frac{1}{j}} \right). \end{aligned}$$

Proposition X.5.7 : La suite de variables aléatoires $(V_n)_n$ converge en loi vers $\bar{\Gamma}(1)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$d_W(V_n, \bar{\Gamma}(1)) \leq \frac{2\sqrt{2} + \varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration : La démonstration de cette Proposition est très proche de celle de la Proposition X.5.2, puisqu'il s'agit de montrer que

$$\mathbb{E} \left[(2(V_n + 1) - \langle D(-L)^{-1}V_n, DV_n \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right] = \frac{8}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On donne les étapes de calcul. D'abord, par le même type de calcul que pour $\mathbb{E}[U_n^2]$, on a

$$\mathbb{E}[V_n^2] = \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(1 + \frac{1}{j^a} - \frac{1}{j}\right) \left(1 + \frac{1}{i^a} - \frac{1}{i}\right) = 2 + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'après la distinction de cas suivante

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j^a} - \frac{1}{j}\right) \begin{cases} \sim \ln n & \text{si } a > 1 \\ = 0 & \text{si } a = 1 \\ \sim \frac{n^{1-a}}{1-a} & \text{si } a < 1. \end{cases}$$

Puis,

$$\langle D(-L)^{-1}V_n, DV_n \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{2(n-2)}{n-1}V_n + \frac{2}{n-1} \sum_{j=1}^n I_2(g_j \otimes g_j) + \mathbb{E}[V_n^2] + R_n,$$

avec $R_n = \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq j, j' \leq n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \notin \{j, j'\}}} \left(\frac{1}{i^a} - \frac{1}{i}\right) I_2(g_j \otimes g_{j'})$ est un terme interprété comme un reste. On conclut alors que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(2(V_n + 2) - \langle D(-L)^{-1}V_n, DV_n \rangle_{\mathcal{H}})^2 \right] &= \frac{8}{(n-1)^2} \sum_{j=1}^n \|g_j \otimes g_j\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 + \frac{4}{(n-1)^2} \mathbb{E}[V_n^2] \\ &\quad + \left(\mathbb{E}[V_n^2] - 2\right)^2 + \text{Reste}. \end{aligned}$$

On montre que l'ordre le plus petit provient du premier terme, puisqu'il est en $1/n$ (en développant $\|g_j \otimes g_j\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2$, on retombe bien sur 8 comme facteur principal). $\square$

Proposition X.5.8 : Le couple (U_n, V_n) converge en loi vers $\bar{\Gamma}(1) \otimes \bar{\Gamma}(1)$. De plus, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$

$$d_W((U_n, V_n), \bar{\Gamma}(1) \otimes \bar{\Gamma}(1)) \leq C \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } a \geq 1/2 \\ \frac{1}{n^a} & \text{si } a < 1/2 \end{cases}. \quad [\text{X.20}]$$

Démonstration : D'après le Théorème X.4.3, il suffit de montrer que

1. $\mathbb{E}[U_n V_n] \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$;
2. $\|\phi_n \otimes_1 \psi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \rightarrow 0$ lorsque $[n \rightarrow \infty]$.

Pour 1., on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_n V_n] &= \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \langle e_i \otimes e_j, g_k \otimes g_l \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \\ &= \frac{1}{2(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \langle e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i, g_k \otimes g_l + g_l \otimes g_k \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \\ &= \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \langle e_i, g_k \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_j, g_l \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{1}{(ij)^a} \leq \frac{2}{(n-1)^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^a} \right)^2 \end{aligned}$$

Or, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^a}$ converge si $a > 1$, est équivalent à $\ln n$ si $a = 1$ et équivalent à $\frac{1}{1-a}n^{1-a}$ si $a < 1$. On conclut bien sur la convergence vers 0.

Pour **2.**, désormais. Rappelons qu'on a noté ϕ_n et ψ_n les noyaux de U_n et V_n .

$$\begin{aligned}
& \phi_n \otimes_1 \psi_n \\
&= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \left((e_i \tilde{\otimes} e_j) \otimes_1 (g_k \tilde{\otimes} g_l) \right) \\
&= \frac{1}{4(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \left(\langle e_i, g_k \rangle_{\mathcal{H}} e_j \otimes g_l + \langle e_j, g_k \rangle_{\mathcal{H}} e_i \otimes g_l + \langle e_i, g_l \rangle_{\mathcal{H}} e_j \otimes g_k + \langle e_j, g_l \rangle_{\mathcal{H}} e_i \otimes g_k \right) \\
&= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \langle e_i, g_k \rangle_{\mathcal{H}} e_j \otimes g_l \\
&= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} \frac{1}{k^a} \delta_{k,i} e_j \otimes g_l \\
&= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \{j,l\}}}^n \frac{1}{k^a} \right) e_j \otimes g_l.
\end{aligned}$$

Par orthogonalité de la famille $(e_j \otimes g_k)_{j,k}$ dans $\mathcal{H}^{\otimes 2}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\|\phi_n \otimes_1 \psi_n\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 &= \frac{1}{(n-1)^4} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \{j,l\}}}^n \frac{1}{k^a} \right)^2 \|e_j \otimes g_l\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)^4} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \{j,l\}}}^n \frac{1}{k^a} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{l} - \frac{1}{l^a} \right) \\
&\leq \frac{2n^2}{(n-1)^4} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \right)^2 \leq \frac{32}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \right)^2,
\end{aligned}$$

où la constante 32 provient de l'inégalité $\frac{n}{n-1} \leq 2$. Ainsi, nous avons montré les convergences vers 0 demandées en **1.** et **2.**. De plus, l'ordre de convergence en distance de WASSERSTEIN, d'après le Théorème X.4.3, sera

$$d_W((U_n, V_n), \bar{\Gamma}(1) \otimes \bar{\Gamma}(1)) \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \right).$$

On conclut alors sur [X.20] avec le fait que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^a}$ converge si $a > 1$, est équivalent à $\ln n$ si $a = 1$ et équivalent à $\frac{1}{1-a}n^{1-a}$ si $a < 1$. $\square$

Quatrième partie

Annexes

Sur la notion d'indépendance asymptotique

On se propose dans ce chapitre de proposer des pistes pour définir ce que pourrait être l'indépendance asymptotique dans le cadre de variables ou de vecteurs aléatoires réels. On utilise principalement l'article [DN21] de Youri DAVYDOV et Svyatoslav NOVIKOV pour étayer nos propos.

Les définitions qu'on propose sont en fait des versions asymptotiques des différentes caractérisations de l'indépendance. Nous en distinguerons trois. La première consiste à écrire une version asymptotique du fait que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

Définition A.1 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On dit que ces deux suites sont *asymptotiquement indépendantes au sens 1* si

$$d_{\text{FM}}(\mathbb{P}_{(X_n, Y_n)}, \mathbb{P}_{X_n} \otimes \mathbb{P}_{Y_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On rappelle que d_{FM} est la distance de FORTET–MOURIER donnée pour deux probabilités μ et ν sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$d_{\text{FM}}(\mu, \nu) \triangleq \sup_{\substack{h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \|h\|_{\infty} \leq 1 \\ \|h\|_{\text{Lip}} \leq 1}} \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x, y) \, d\mu(x, y) - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x, y) \, d\nu(x, y) \right|.$$

Cette distance métrise la convergence en loi. Le choix spécifique de cette distance n'est pas importante, tant qu'elle métrise la convergence en loi. La deuxième définition exploite la caractérisation suivante : X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toutes fonctions $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées $\mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)]\mathbb{E}[\psi(Y)]$.

Définition A.2 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont *asymptotiquement indépendantes au sens 2* si pour toutes fonctions $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées,

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)]\mathbb{E}[\psi(Y_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On donne enfin une dernière définition possible, proposant que la probabilité de l'intersection et le produit des probabilités soient asymptotiquement proches.

Définition A.3 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont *asymptotiquement indépendantes au sens 3* si pour tout borélien $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X_n \in A, Y_n \in B) - \mathbb{P}(X_n \in A)\mathbb{P}(Y_n \in B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

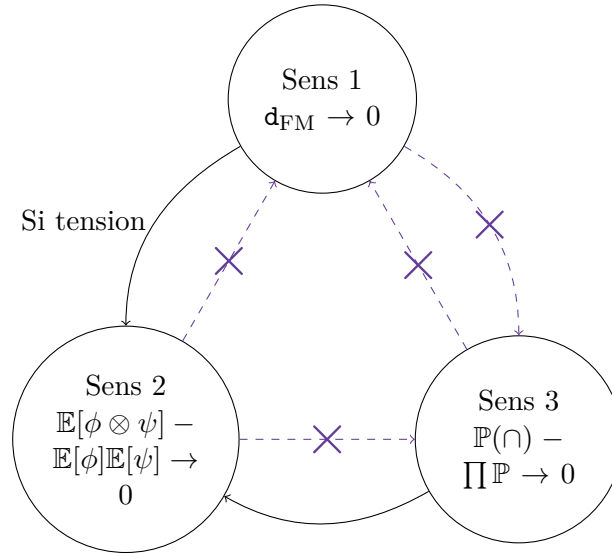


FIGURE A.1 – Une illustration du Théorème A.4

On pourrait imaginer d'autres définitions exploitant différentes classes de fonctions tests h sur lesquels vérifier la convergence $\mathbb{E}[h(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[h(Z_n, Y_n)]$, où $(Z_n)_{n \geq 1}$ a même loi que $(X_n)_{n \geq 1}$ et est indépendante de $(Y_n)_{n \geq 1}$.

Nous allons montrer que ces trois définitions ne sont pas équivalentes, donc que la notion d'indépendance asymptotique est trop vague pour être simplement présentée comme telle dans un théorème.

Théorème A.4 : Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles.

- A.** Si ces deux suites sont asymptotiquement indépendantes au sens 1 et si $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ et $((Z_n, Y_n), n \geq 1)$ avec $(Z_n)_n$ ayant la même loi que $(X_n)_n$ et indépendante de $(Y_n)_n$, alors elles le sont au sens 2.
- B.** Il existe $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ convergeant au sens 1 mais pas au sens 3.
- C.** Il existe $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ convergeant au sens 2 mais pas au sens 1.
- D.** Il existe $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ convergeant au sens 2 mais pas au sens 3.
- E.** Il existe $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ convergeant au sens 3 mais pas au sens 1.
- F.** Si $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont asymptotiquement indépendantes au sens 3 alors elles le sont au sens 2.

L'énoncé du Théorème A.4 est résumé dans la figure A.1.

Démonstration : A. On suppose que

$$d_{FM}(\mathbb{P}_{(X_n, Y_n)}, \mathbb{P}_{X_n} \otimes \mathbb{P}_{Y_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Soient $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées. On cherche à montrer que

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)]\mathbb{E}[\psi(Y_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Supposons d'abord que ces deux fonctions soient de classe C^∞ à support compact. Elles sont en particulier lipschitziennes, et donc puisque

$$\|\phi \otimes \psi\|_{Lip} \leq \|\phi\|_{Lip}\|\psi\|_\infty + \|\psi\|_{Lip}\|\phi\|_\infty,$$

on en déduit que

$$|\mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)]\mathbb{E}[\psi(Y_n)]| \leq d_{FM}(\mathbb{P}_{(X_n, Y_n)}, \mathbb{P}_{X_n} \otimes \mathbb{P}_{Y_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Supposons désormais que ϕ et ψ sont uniquement continues bornées. On cherche à les approcher par des fonctions C^∞ à support compact. Pour cela, l'hypothèse continue bornée n'est pas suffisante, car on cherche en effet une

approximation par des convolutions avec des approximations de l'unité, qui ne sont valables pour la norme uniforme que pour des fonctions uniformément continues. Ainsi, on va premièrement approcher ϕ et ψ par des fonctions continues à support compact, de sorte que ces fonctions approchantes soient uniformément continues. Soit $R > 0$. On considère $\chi_R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction plateau, qui vaut 1 sur $[-R, R]^2$ et 0 en dehors de $[-(R+1), R+1]^2$. Pour tout $R > 0$, la fonction $(\phi \otimes \psi)\chi_R$ est continue bornée. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\Xi_{\varepsilon, R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et à support compact pour laquelle

$$\|(\phi \otimes \psi)\chi_R - \Xi_{\varepsilon, R}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Faisons la décomposition suivante

$$\phi \otimes \psi = (\phi \otimes \psi - (\phi \otimes \psi)\chi_R) + ((\phi \otimes \psi)\chi_R - \Xi_{\varepsilon, R}) + \Xi_{\varepsilon, R}.$$

Ainsi, si on note $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable admettant la même loi que $(X_n)_{n \geq 1}$ et indépendante de $(Y_n)_{n \geq 1}$ alors

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(Z_n)\psi(Y_n)] \right| &\leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty \left| 2 - \mathbb{E}[\chi_R(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[\chi_R(Z_n, Y_n)] \right| + 2\varepsilon \\ &\quad + \left| \mathbb{E}[\Xi_{\varepsilon, R}(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[\Xi_{\varepsilon, R}(Z_n, Y_n)] \right|. \end{aligned}$$

Or, puisque les suites $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ et $((Z_n, Y_n), n \geq 1)$ sont tendues,

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}((X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus [-R, R]^2) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Idem pour (Z_n, Y_n) . Si $\eta > 0$, il existe $R > 0$ pour lequel

$$\begin{aligned} &\left| 2 - \mathbb{E}[\chi_R(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[\chi_R(Z_n, Y_n)] \right| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}((X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus [-R, R]^2) + \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}((Z_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus [-R, R]^2) \\ &\leq \frac{\eta}{3\|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty}. \end{aligned}$$

On fixe $\varepsilon = \frac{\eta}{6}$. Par convergence au sens 1, pour ce choix de R et ε , il existe un rang $N = N(\varepsilon, R)$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \mathbb{E}[\Xi_{\varepsilon, R}(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[\Xi_{\varepsilon, R}(Z_n, Y_n)] \right| \leq \frac{\eta}{3}.$$

Ainsi, on a montré que pour $n \geq N$,

$$\left| \mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(Z_n)\psi(Y_n)] \right| \leq \eta.$$

D'où l'indépendance asymptotique au sens 1.

B. et D. Considérons X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. Pour $n \geq 1$, on considère $X_n = X + \frac{1}{n}Y$ et $Y_n = Y$. Alors $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ sont asymptotiquement indépendantes au sens 1 et 2 mais pas au sens 3. On note $(Z_n)_{n \geq 1}$ une copie de $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendante de $(Y_n)_{n \geq 1}$. Les lois des couples (X_n, Y_n) , (Z_n, Y_n) et (X, Y) sont données par

$Y_n \backslash X_n$	0	$\frac{1}{n}$	1	$1 + \frac{1}{n}$
0	1/4	0	1/4	0
1	0	1/4	0	1/4

$Y_n \backslash Z_n$	0	$\frac{1}{n}$	1	$1 + \frac{1}{n}$
0	1/8	1/8	1/8	1/8
1	1/8	1/8	1/8	1/8

$Y \backslash X$	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

Ainsi, si $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée, on observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X_n, Y_n)] &= \frac{1}{4} \left\{ h(0, 0) + h\left(\frac{1}{n}, 1\right) + h(1, 0) + h\left(1 + \frac{1}{n}, 1\right) \right\} \\ \mathbb{E}[h(Z_n, Y_n)] &= \frac{1}{8} \left\{ h(0, 0) + h\left(\frac{1}{n}, 1\right) + h(1, 0) + h\left(1 + \frac{1}{n}, 1\right) \right. \\ &\quad \left. + h(0, 1) + h\left(\frac{1}{n}, 0\right) + h(1, 1) + h\left(1 + \frac{1}{n}, 0\right) \right\} \\ \mathbb{E}[h(X, Y)] &= \frac{1}{4} \left\{ h(0, 0) + h(1, 0) + h(0, 1) + h(1, 1) \right\}. \end{aligned}$$

Avec $h(x, y) = \phi(x)\psi(y)$, ϕ et ψ continues bornées, on en déduit que $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ sont asymptotiquement indépendantes au sens 2. Pour h bornée par 1 et 1-lipschitzienne, on en déduit aussi que

$$d_{\text{FM}}(\mathbb{P}_{(X_n, Y_n)}, \mathbb{P}_{X_n} \otimes \mathbb{P}_{Y_n}) \leq \frac{1}{2n},$$

donc ces deux suites sont aussi asymptotiquement indépendantes au sens 1.

Néanmoins, avec $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$, on constate que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 0, Y_n = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0, Y_n = 1) = \frac{1}{8}$. Cela conclut que $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ ne sont pas asymptotiquement indépendantes au sens 3.

C. et E. Pour $n \geq 1$, on considère un entier Y_n suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$. Le développement de Y_n en base 2 s'écrit

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(i, Y_n) 2^i,$$

avec $\chi(i, j) \in \{0, 1\}$. Notons $\tilde{Y}_n$ définie par

$$\tilde{Y}_n \triangleq Y_n + 2^n(2^n - Y_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(i, Y_n) 2^i + \sum_{i=n}^{2n-1} (1 - \chi(i - n, Y_n)) 2^i = \sum_{i=0}^{2n-1} \chi(i, \tilde{Y}_n) 2^i.$$

Notons qu'il y a exactement n coefficients $\chi(i, \tilde{Y}_n)$ égaux à 1 (et donc aussi n coefficients nuls). On tire un indice parmi les coefficients non nuls selon une loi uniforme, qu'on note X_n . Plus précisément, la loi de X_n sachant Y_n est donnée pour $i \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$ par

$$\mathbb{P}(X_n = i | Y_n) = \frac{\chi(i, \tilde{Y}_n)}{n}.$$

On peut alors montrer que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$. De plus, la loi du couple (X_n, Y_n) est donnée pour $0 \leq i \leq 2n - 1$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$ par

$$\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j) = \begin{cases} \frac{\chi(i, j)}{n 2^n} & \text{si } 0 \leq i \leq n - 1 \\ \frac{1 - \chi(i - n, j)}{n 2^n} & \text{si } n \leq i \leq 2n - 1. \end{cases}$$

Montrons que le couple $(X_n, Y_n)_n$ est asymptotiquement indépendant au sens 2. Considérons ϕ et ψ deux fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)]\mathbb{E}[\psi(Y_n)] \\ &= \frac{1}{n 2^{n+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2\chi(i, j) - 1) \phi(i) \psi(j) + \frac{1}{n 2^{n+1}} \sum_{i=n}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} (2\chi(i - n, j) - 1) \phi(i) \psi(j). \end{aligned}$$

Notons $\mathfrak{s}(i, j) \triangleq 2\chi(i, j) - 1 \in \{\pm 1\}$. Alors d'après le Lemme A.5,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)]\mathbb{E}[\psi(Y_n)] \right| \\ & \leq \frac{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty}{n 2^{n+1}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathfrak{s}(i, j) \frac{\phi(i)\psi(j)}{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty} \right| + \frac{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty}{n 2^{n+1}} \left| \sum_{i=n}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathfrak{s}(i - n, j) \frac{\phi(i)\psi(j)}{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty} \right| \\ & \leq \frac{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty}{n 2^{n+1}} \cdot 2 \cdot 2^n \sqrt{n} = \frac{\|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Cela conclut en l'indépendance asymptotique au sens 2.

Montrons que $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ ne sont pas asymptotiquement indépendantes au sens 1. Pour cela, on considère une fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(i, j) = \chi(i, j)$ pour tout $0 \leq i \leq n - 1$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$, qui soit continue bornée par 1, et 1-lipschitzienne. On peut alors imaginer h comme une fonction tentes (au pluriel), avec un campement en chaque (i, j) pour lequel $\chi(i, j) = 1$. Plus précisément, si on considère la fonction tente suivante :

$$u(x, y) \triangleq \max\{0, 1 - 4(|x| + |y|)\},$$

qui est à support dans le carré $[-1/4, 1/4]^2$, on considère h pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ de la forme

$$h(x, y) \triangleq \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \chi(i, j) u(x - i, y - j).$$

Le facteur $\frac{1}{4}$ permet de s'assurer du caractère 1-lipschitzien. Ainsi, puisque $h(i, j) = \chi(i, j) = \chi(i, j)^2$, on a

$$\mathbb{E}[h(X_n, Y_n)] = \frac{1}{n2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \chi(i, j) + \frac{1}{n2^n} \sum_{i=n}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} (1 - \chi(i - n, j)) \chi(i, j).$$

Or, dans la deuxième somme, $\chi(i, j) = 0$. En effet, si j se développe que jusqu'à l'ordre $n - 1$, les coefficients d'ordre $n, \dots, 2n - 1$ sont nuls. On a alors l'expression suivante

$$\mathbb{E}[h(X_n, Y_n)] = \frac{1}{n2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \chi(i, j).$$

De plus, on a aussi (Z_n suit la même loi que X_n et est indépendante de Y_n)

$$\mathbb{E}[h(Z_n, Y_n)] = \frac{1}{n2^{n+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \chi(i, j).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[h(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[h(Z_n, Y_n)] = \frac{1}{n2^{n+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \chi(i, j).$$

Or, $\sum_{j=0}^{2^n-1} \chi(i, j) = 2^{n-1}$ (parmi les entiers entre 0 et $2^n - 1$, la moitié d'entre eux ont 0 comme coefficients d'ordre i dans leur développement en base 2 tandis que l'autre moitié ont 1). On conclut alors que

$$\mathbb{E}[h(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[h(Z_n, Y_n)] = \frac{1}{4},$$

qui ne converge donc pas vers 0. On conclut alors que $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ ne sont pas asymptotiquement indépendantes au sens 1.

Enfin, pour tout $0 \leq i \leq n - 1$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$,

$$\left| \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j) - \mathbb{P}(X_n = i) \mathbb{P}(Y_n = j) \right| \leq \frac{1}{n2^n} + \frac{1}{n2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ sont asymptotiquement indépendantes au sens 3.

F. Supposons que $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ sont asymptotiquement indépendantes au sens 3. Soient ϕ et ψ continues bornées sur $\mathbb{R}$. Montrons que

$$\mathbb{E}[\phi(X_n) \psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)] \mathbb{E}[\psi(Y_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour cela, on utilise un argument d'approximation par des indicatrices de la manière suivante. Pour $M \geq 1$, considérons l'approximation étagée de $\phi \otimes \psi$ sur des carrés de côté $\frac{1}{2^M}$ donnée par

$$g_M \triangleq \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \frac{j}{2^M} \frac{k}{2^M} \mathbf{1}_{\{\frac{j}{2^M} \leq \phi < \frac{j+1}{2^M}\}} \otimes \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^M} \leq \psi < \frac{k+1}{2^M}\}}.$$

Notons d'abord que puisque ϕ et ψ sont bornées, les sommes sont en fait finies. Plus précisément,

$$g_M = \sum_{|j| \leq \lfloor 2^M \|\phi\|_\infty \rfloor + 1} \sum_{|k| \leq \lfloor 2^M \|\psi\|_\infty \rfloor + 1} \frac{j}{2^M} \frac{k}{2^M} \mathbf{1}_{\{\frac{j}{2^M} \leq \phi < \frac{j+1}{2^M}\}} \otimes \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^M} \leq \psi < \frac{k+1}{2^M}\}}.$$

Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|g_M(x, y) - \phi(x) \psi(y)| = \sum_{\substack{|j| \leq \lfloor 2^M \|\phi\|_\infty \rfloor + 1 \\ |k| \leq \lfloor 2^M \|\psi\|_\infty \rfloor + 1}} \left| \frac{j}{2^M} \frac{k}{2^M} - \phi(x) \psi(y) \right| \mathbf{1}_{\{\frac{j}{2^M} \leq \phi < \frac{j+1}{2^M}\}}(x) \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^M} \leq \psi < \frac{k+1}{2^M}\}}(y).$$

Ou encore $\|g_M - \phi \otimes \psi\|_\infty \leq \frac{1}{2^{M+1/2}}$. On en déduit que pour tout $M \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[\phi(X_n) \psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)] \mathbb{E}[\psi(Y_n)] \right| \\ & \leq 2 \|g_M - \phi \otimes \psi\|_\infty + \sum_{\substack{|j| \leq \lfloor 2^M \|\phi\|_\infty \rfloor + 1 \\ |k| \leq \lfloor 2^M \|\psi\|_\infty \rfloor + 1}} \frac{j}{2^M} \frac{k}{2^M} \left| \mathbb{P} \left(\frac{j}{2^M} \leq \phi(X_n) < \frac{j+1}{2^M}, \frac{k}{2^M} \leq \psi(Y_n) < \frac{k+1}{2^M} \right) \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{P} \left(\frac{j}{2^M} \leq \phi(X_n) < \frac{j+1}{2^M} \right) \mathbb{P} \left(\frac{k}{2^M} \leq \psi(Y_n) < \frac{k+1}{2^M} \right) \right| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe M de sorte que $2\|g_M - \phi \otimes \psi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Par hypothèse d'indépendance asymptotique au sens 3, pour tout $|j| \leq \lfloor 2^M \|\phi\|_\infty \rfloor + 1$ et $|k| \leq \lfloor 2^M \|\psi\|_\infty \rfloor + 1$, il existe un rang $N = N(j, k, M)$ à partir duquel

$$\left| \mathbb{P} \left(\frac{j}{2^M} \leq \phi(X_n) < \frac{j+1}{2^M}, \frac{k}{2^M} \leq \psi(Y_n) < \frac{k+1}{2^M} \right) - \mathbb{P} \left(\frac{j}{2^M} \leq \phi(X_n) < \frac{j+1}{2^M} \right) \mathbb{P} \left(\frac{k}{2^M} \leq \psi(Y_n) < \frac{k+1}{2^M} \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2 \lfloor 2^M \|\phi\|_\infty \rfloor + 2} \frac{1}{2 \lfloor 2^M \|\psi\|_\infty \rfloor + 2}.$$

Il suit que pour tout $n \geq \max_{j,k} N(j, k, M)$ (où le maximum est pris sur les indices de la somme),

$$\left| \mathbb{E}[\phi(X_n)\psi(Y_n)] - \mathbb{E}[\phi(X_n)]\mathbb{E}[\psi(Y_n)] \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit l'indépendance asymptotique au sens 2. $\square$

Lemme A.5 : Soit $n \geq 1$. Pour $j \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$, on note son développement en base de 2 : $j = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(i, j) 2^i$. Pour $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$, on note

$$\mathfrak{s}(i, j) \triangleq 2\chi(i, j) - 1 \in \{\pm 1\}.$$

Alors pour tous réels $\phi_0, \dots, \phi_{2^n-1}$ et $\psi_0, \dots, \psi_{2^n-1}$ dans $[-1, 1]$, on a

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \phi_i \psi_j \mathfrak{s}(i, j) \right| \leq 2^n \sqrt{n}. \quad [\text{A.1}]$$

Démonstration du Lemme A.5 : Notons

$$Q : \begin{pmatrix} [-1, 1]^n \times [-1, 1]^{2^n} & \longrightarrow \\ (\phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1}) & \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \phi_i \psi_j \mathfrak{s}(i, j) \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

À $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1}$ fixés dans $[-1, 1]$, $\phi_0 \mapsto |Q(\phi_0, \dots, \psi_{2^n-1})|$ est convexe car valeur absolue d'une fonction linéaire. Il suit que cette application atteint son maximum au bord, donc pour $\phi_0 \in \{\pm 1\}$. Notons $\epsilon_0 \in \{\pm 1\}$ cette valeur de ϕ_0 .

Maintenant, à $\phi_2, \dots, \psi_{2^n-1}$ fixés dans $[-1, 1]$,

$$\phi_2 \mapsto |Q(\epsilon_0, \phi_2, \dots, \psi_{2^n-1})|$$

est convexe, donc admet son maximum en $\epsilon_1 \in \{\pm 1\}$. Par récurrence finie, on introduit $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1} \in \{\pm 1\}$ puis $\eta_0, \dots, \eta_{2^n-1} \in \{\pm 1\}$ pour lesquels

$$\max_{\substack{-1 \leq \phi_0, \dots, \phi_{n-1} \leq 1 \\ -1 \leq \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1} \leq 1}} |Q(\phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1})| \leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \epsilon_i \eta_j \mathfrak{s}(i, j) \right| \leq \sum_{j=0}^{2^n-1} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i \mathfrak{s}(i, j) \right|.$$

L'application $j \mapsto (\mathfrak{s}(i, j))_{0 \leq i \leq n-1}$ est surjective sur $\{\pm 1\}^n$. Ainsi, $(\sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{s}(i, j), 0 \leq j \leq 2^n - 1)$ compile tous les résultats possibles de somme à n termes de 1 et -1 . C'est aussi le cas de $(\sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i \mathfrak{s}(i, j), 0 \leq j \leq 2^n - 1)$, puisque l'application $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \{\pm 1\}^n \mapsto (\epsilon_i a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \{\pm 1\}^n$ est une bijection (d'inverse elle-même). Il suit que

$$\max_{\substack{-1 \leq \phi_0, \dots, \phi_{n-1} \leq 1 \\ -1 \leq \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1} \leq 1}} |Q(\phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1})| \leq \sum_{c_1, \dots, c_n \in \{\pm 1\}} \left| \sum_{i=1}^n c_i \right|.$$

On interprète alors cette somme comme une espérance. Si $E_1, \dots, E_n$ sont des variables indépendantes de loi $\frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2}$ alors

$$\max_{\substack{-1 \leq \phi_0, \dots, \phi_{n-1} \leq 1 \\ -1 \leq \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1} \leq 1}} |Q(\phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \psi_0, \dots, \psi_{2^n-1})| \leq 2^n \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n E_k \right| \right] \leq 2^n \sqrt{\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n E_k \right]} = \sqrt{n} 2^n.$$

On a alors montré [A.1]. $\square$

Une preuve combinatoire de la formule de linéarisation des polynômes d'Hermite

« Ce qui est génial avec MJ, c'est quand on la regarde dans les yeux, et qu'elle t'envoie ton regard, les choses ne semblent plus tout à fait normales. Parce qu'on se sent plus fort et plus faible, tout ça en même temps. On éprouve du plaisir et on se sent en même temps totalement terrifié. À vrai dire, on ne sait même plus comment on se sent, on sait seulement quel genre d'homme on voudrait être. C'est comme si on venait d'accéder à l'inaccessible sans y être préparé. »

Peter à MJ, *Spider-Man*, 2002

Pour cette dernière annexe, on se propose de sortir du cadre de cette thèse. Il s'agit d'une collaboration avec mon camarade de bureau et ami François BACHER. Durant ma première année de thèse, alors que je marchais doucement dans la jungle du calcul de MALLIAVIN à travers les références absolues que sont [Nua06] et [NP12a], la formule produit m'est apparue. Il s'agit de la Proposition I.2.13. Pour le bien du lecteur qui tomberait dans cette annexe, donnons la formule dans le cadre plus simple des polynômes d'HERMITE. Si $(H_n)_{n \geq 0}$ désigne la suite des polynômes d'HERMITE, avec $H_0 = 1$ et $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2/2}]$ alors pour tout $p \geq 0$ et $j \geq 0$

$$H_p H_{p+j} = \sum_{r=0}^p r! \binom{p}{r} \binom{p+j}{r} H_{2(p-r)+j}. \quad [\text{B.1}]$$

Les démonstrations de ce fait étaient à l'époque pour moi toutes relativement calculatoires (ou parfois carrément obscures) et ne rendaient pas justice au fait que les coefficients apparaissant dans cette formule soient *entiers*. Or, il me semblait évident, et c'est toujours le cas au moment où je rédige ces mots, qu'une formule faisant intervenir des entiers doit s'interpréter en termes combinatoires, que cela soit avec les incontournables urnes, ou des boules, voire mêmes des boules dans des urnes. Pourquoi diable lorsqu'on multiplie deux polynômes d'HERMITE ensemble, on obtient une combinaison linéaire *entière* de polynômes d'HERMITE de même parité que la somme des ordres ?

J'étais nouveau dans ce bureau, même si cela faisait quelques semaines que je venais, et à part Julie GAMAIN, je ne connaissais pas trop les personnes du laboratoire. À l'époque, on était à trois dans ce bureau, et je n'avais jamais encore eu l'occasion de discuter avec le doctorant qui était au fond dans le coin sombre, caché derrière l'armée d'ordinateurs. C'est avec timidité que j'osai lui demander si par hasard, il n'aurait pas quelques notions de combinatoires et une idée derrière ces coefficients. Je vis ses yeux s'illuminer, et ce fut la première de nos nombreuses discussions tout au long des mois qu'on a vécu dans notre bureau. Après cette discussion, je partis du bureau un peu tôt, et laissai François seul,

alors qu'il commençait déjà à rédiger sa thèse. Le lendemain, lorsque j'ouvris la porte dudit bureau, le grand tableau noir qui trônait au milieu de la pièce était rempli, entre formules et diagrammes un peu dans tous les sens. François avait pris sa soirée pour dégoter la solution que je vous expose dans cette annexe.

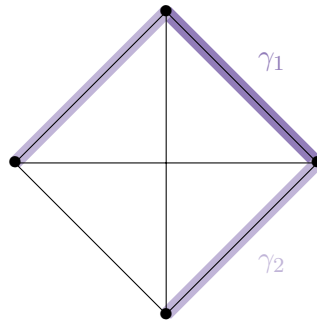
Cette discussion a été fondamentale dans toute ma vie de laboratoire durant mes années de thèse, puisqu'elle m'a permis d'avoir beaucoup de discussions avec lui, et d'encourager les nouveaux arrivants de faire de même entre nous. On a ainsi créé un séminaire local, le dénommé *1236* (douze cent trente six), qui nous a permis à tous d'exposer des problèmes plus ou moins éloignés de nos domaines de recherche, et de s'oxygéner l'esprit mathématique. Il est donc évident désormais que cette annexe est une dédicace pour mes amies et amis François, Julie, Emma, Antonin, Ivan, Théo, Matthew, Paul et bien sûr Jérôme sans qui ma thèse n'aurait pas du tout eu ce visage.

1. Appariement dans le graphe complet

Définition B.1 : Soit S un ensemble non vide et A un sous-ensemble de $\{\{x, y\}, x, y \in S, x \neq y\}$.

- La paire $G = (S, A)$ est appelé *graphe*. Tout élément $\{x, y\}$ de A est appelé *arête* et tout point de S un *sommet*.
- Pour $n \geq 1$, on appelle *graphe complet* à n élément le graphe $K_n \triangleq (V_n \triangleq \llbracket 1, n \rrbracket, A_n)$, où A_n est l'ensemble de tous les sous-ensembles à deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- Un sous-ensemble γ de A_n est appelé *appariement du graphe complet* si tous les sommets de K_n appartiennent au plus à une arête de γ . On note $|\gamma|$ le nombre d'arêtes définissant γ et $\text{fix}(\gamma)$ le nombre de sommets qui n'appartiennent à aucune arête de γ . On note Γ_n l'ensemble des appariements du graphe complet.

À titre d'exemple, considérons le cas $n = 4$. On définit sur K_4 les deux ensembles d'arêtes γ_1 et γ_2 suivants



Dans le cas de γ_1 , représenté en foncé, on a $|\gamma_1| = 1$ et deux sommets ne sont pas atteints par γ_1 , donc $\text{fix}(\gamma_1) = 2$. Quand à γ_2 , on a $|\gamma_2| = 2$ et $\text{fix}(\gamma_2) = 0$.

Lemme B.2 : Soient $n \geq 1$ et $\gamma \in \Gamma_n$. Alors

$$|\gamma| = \frac{n - \text{fix}(\gamma)}{2}. \quad [\text{B.2}]$$

Démonstration : Si $x \in V_n$, alors il y a deux possibilités. Soit x est atteint par une arête de γ , soit il ne l'est pas. Autrement dit,

$$V_n = \{x \in V_n, \exists y \in V_n, \{x, y\} \subset \gamma\} \sqcup \{x \in V_n, \forall y \in V_n, \{x, y\} \cap \gamma = \emptyset\}.$$

Ce deuxième ensemble est par définition l'ensemble des sommets fixes par γ . On en déduit que

$$n - \text{fix}(\gamma) = \sum_{y \in V_n} \#\{x \in V_n, \{x, y\} \subset \gamma\}.$$

Or,

$$|\gamma| = \#\{\{x, y\} \in A_n, \{x, y\} \subset \gamma\} = \frac{1}{2} \#\{(x, y) \in V_n^2, \{x, y\} \subset \gamma\} = \frac{1}{2} \sum_{y \in V_n} \#\{x \in V_n, \{x, y\} \subset \gamma\}.$$

Cela permet de conclure sur [B.2]. □

Remarque B.3. Ce lemme permet d'affirmer que si on connaît la valeur de $|\gamma|$, alors on connaît aussi $\text{fix}(\gamma)$. ♣

Lemme B.4 : Soient $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n/2$. Alors

$$\#\{\gamma \in \Gamma_n, |\gamma| = k\} = \#\{\gamma \in \Gamma_n, \text{fix}(\gamma) = n - 2k\} = \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}. \quad [\text{B.3}]$$

Démonstration : Il s'agit de compter le nombre d'appariements γ avec $n - 2k$ points fixes. Voici comment faire.

1. Parmi les n points de V_n , on en choisit $n - 2k$ qui seront fixes. On a ainsi choisi $2k$ sommets impliqués dans le processus d'appariement. Il y a alors $\binom{n}{2k}$ possibilités.
2. Parmi les $2k$ points choisis, on fait k liens à sommets distincts entre eux. On choisit d'abord les points (x_1, y_1) qu'on relie entre eux, puis parmi les autres points, on choisit (x_2, y_2) , et on répète jusqu'à obtenir (x_k, y_k) . Cela donne une liste ordonnée de couples eux aussi ordonnés $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$. Cela fait $(2k)!$ possibilités.
3. On désordonne le lien global : cela fait $k!$ choix possibles de permutations de tous les couples (on affirme que si $\{(x, y), (z, w)\} \subset \gamma$ alors $\{(z, w), (x, y)\} \subset \gamma$).
4. On désordonne les couples, cela fait 2^k nouvelles possibilités (on affirme que si $\{x, y\} \subset \gamma$ alors $\{y, x\} \subset \gamma$).

Bilan des courses : pour déterminer complètement γ , il suffit de suivre ces quatre étapes, qui donnent alors le calcul suivant :

$$\#\{\gamma \in \Gamma_n, \text{fix}(\gamma) = n - 2k\} = \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!2^k} = \frac{n!}{(n-2k)!k!2^k}.$$

Cela conclut la démonstration de ce lemme. □

2. Lien entre appariement et polynômes d'Hermite

Proposition B.5 : Soit $n \geq 1$. Alors le n -ème polynôme d'HERMITE vérifie

$$H_n(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)}. \quad [\text{B.4}]$$

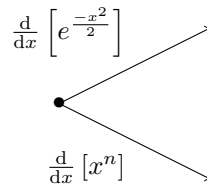
D'après [B.3], on peut d'ailleurs en déduire un développement de H_n dans la base canonique des polynômes : $H_n(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{(-1)^k n!}{2^k(n-2k)!k!} X^{n-2k}$. On propose deux démonstrations de cette Proposition, l'une plus laborieuse que l'autre mais plus pédestre.

2.1. Démonstration en comptant des chemins

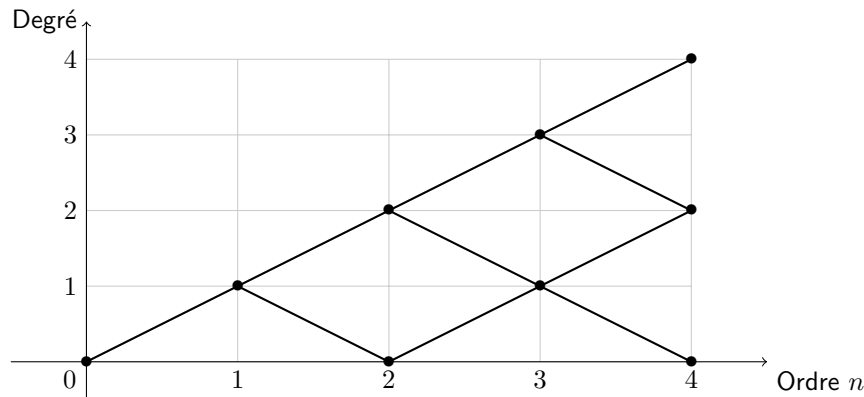
Démonstration : Nous avons défini le n -ème polynôme d'HERMITE comme une dérivée n -ème :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2/2}].$$

Pendant le processus de calcul des dérivées itérées, on aura à dériver des termes du type « polynôme fois la gaussienne ». Par linéarité, on calcule en fait des dérivées du type $x^n e^{-x^2/2}$. En tant que dérivée d'un produit, on additionne la dérivée du monôme fois l'exponentielle et x fois le monôme fois l'exponentielle. On représente ces informations sous la forme de chemins qui représentent tout le processus de dérivation itérée



Sur l'axe des abscisses, on indique le nombre de dérivations (et donc on obtient tous les monômes impliqués dans H_n). Sur l'axe des ordonnées, on indique le degré du monôme en face du terme exponentiel. Pour $n = 4$, on représente tout le processus de dérivation avec le diagramme suivant.



Ce que nous dit ce diagramme jusqu'alors est que H_4 ne contient que les monômes x^4 , x^2 et 1. La question désormais est de savoir comment connaître les coefficients de chaque monôme. Durant le processus de dérivation, si on dérive l'exponentielle, on augmente le degré du monôme par 1 en multipliant le tout par $-x$. Par contre, si on dérive le monôme, on se retrouve avec nx^{n-1} fois l'exponentielle. Ainsi, pour connaître le coefficient sur le terme en x^k de H_n , pour tout chemin venant de $(0,0)$ et arrivant en (n,k) , on doit compter « $\times(-1)$ » lorsqu'on monte et « $\times m$ » lorsqu'on descend à partir du m -ème niveau. On le résume sous la formule suivante :

$$\text{Coeff}(x^k) = \sum_{\substack{\text{Chemins} \\ (0,0) \rightarrow (n,k)}} (-1)^{n-\text{nb de montées}} \prod_{\text{Descentes}} \text{Degré}^\uparrow.$$

Notez que si on descend deux fois à la suite, cela compte comme deux descentes. Notez aussi que si on choisit (n,k) comme point de chute du chemin, alors le nombre de descentes est fixé. En effet, les nombres de montées et de descentes vérifient

$$\begin{cases} \text{Nb de montées} + \text{Nb de descentes} &= n \\ \text{Nb de montées} - \text{Nb de descentes} &= k \end{cases}$$

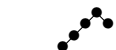
On conclut en particulier que $n - k$ est égal à 2 fois le nombre de descentes, nous permettant de conclure que k doit avoir même parité que n , donc que H_n a même parité que n . Ainsi, le coefficient s'écrit alors

$$\text{Coeff}(x^k) = (-1)^{\frac{n-k}{2}} \sum_{\substack{\text{Chemins} \\ (0,0) \rightarrow (n,k)}} \prod_{\text{Descentes}} \text{Degré}^\uparrow,$$

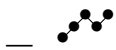
ou encore, de manière plus élégante

$$\text{Coeff}(x^{n-2k}) = (-1)^k \sum_{\substack{\text{Chemins} \\ (0,0) \rightarrow (n,n-2k)}} \prod_{\text{Descentes}} \text{Degré}^\uparrow.$$

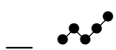
Prenons l'exemple de $n = 4$, pour connaître le coefficient de x^2 dans H_4 . Les chemins possibles sont :



— avec 1 descente au niveau 3, donc dans ce cas, le produit des degrés lors de la descente vaut 3 ;



— avec 1 descente au niveau 2 ;



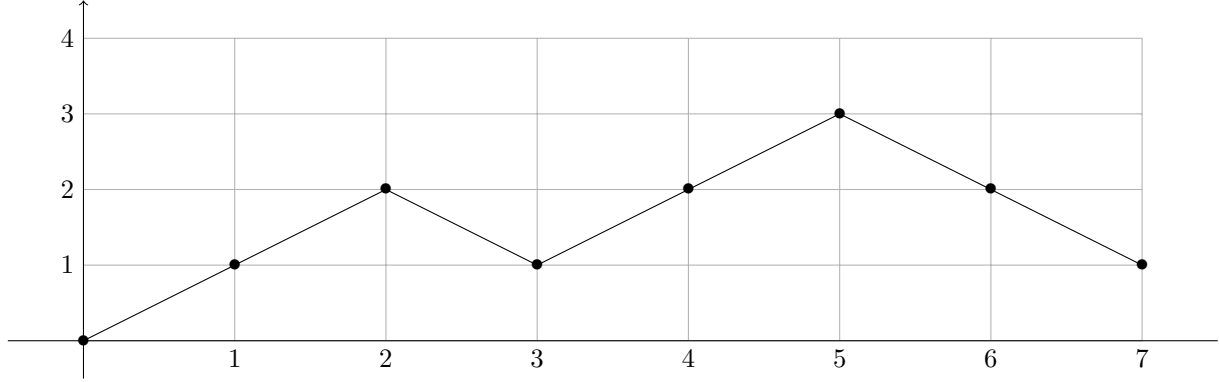
— avec 1 descente au niveau 1.

Ainsi, le coefficient pour x^2 est $-3 - 2 - 1 = -6$.

Pour conclure en cette Proposition, nous allons expliciter une bijection entre les chemins que nous venons de créer et l'ensemble des appariements. Constatons d'abord que si $\gamma \in \Gamma_n$, la formule précédente s'écrit en fait, en utilisant [B.2]

$$\text{Coeff}(x^{\text{fix}(\gamma)}) = (-1)^{|\gamma|} \sum_{\substack{\text{Chemins} \\ (0,0) \rightarrow (n, \text{fix}(\gamma))}} \prod_{\text{Descentes}} \text{Degré}^\uparrow. \quad [\text{B.5}]$$

Pour avoir une bijection, on doit en fait ajouter une donnée supplémentaire aux chemins, qu'on appellera *chemins étiquetés*. La bijection envra alors tout chemin étiqueté sur un appariement. Expliquons comment étiqueter les chemins. Fonctionnons sur l'exemple suivant.

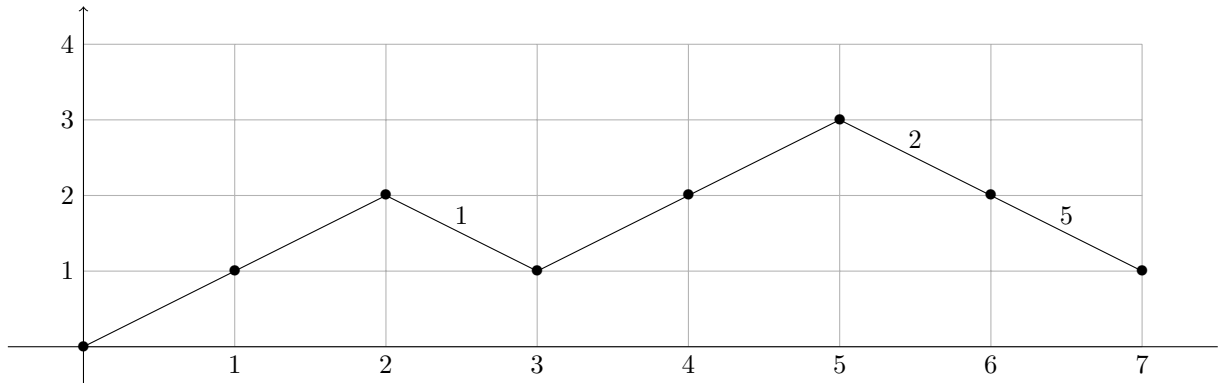


Une descente correspond à une dérivation par rapport au monôme. Si la descente intervient entre les ordres k et $k+1$, qu'on note $k \searrow k+1$, cela signifie qu'on dérive x^d , où d est le niveau atteint à l'ordre k . Plus précisément, si on voit x^d comme $x \times \dots \times x$, la descente signifie qu'on fait disparaître l'un des x . Lequel ? C'est l'étiquette qui nous l'indique. Cette étiquette est choisie entre 1 et d (donc entre 1 et k) et nous dit quel terme x est concerné par la dérivation.

Plus formellement, pour une descente $k \searrow k+1$ du chemin, on lui associe une étiquette ℓ , un entier tel que

- $1 \leq \ell \leq k$;
- ℓ vit sur une montée : $\ell - 1 \nearrow \ell$;
- ℓ n'est étiqueté à aucune descente précédente.

Sur l'exemple qu'on propose, les descentes sont $2 \searrow 3$, $5 \searrow 6$ et $6 \searrow 7$. Un étiquetage possible de ces descentes se fait de la sorte : pour la première descente $2 \searrow 3$, les phases de montée précédentes sont $0 \nearrow 1$ et $1 \nearrow 2$. On choisit alors une étiquette parmi 1 et 2. Disons ici qu'on choisit 1. On passe à la deuxième descente $5 \searrow 6$. Les montées précédentes non associées à la descente précédente sont $1 \nearrow 2$, $3 \nearrow 4$ et $4 \nearrow 5$. Encore une fois, on choisit une étiquette parmi ces choix (2, 4 ou 5). Disons qu'on choisit 2. Idem pour la dernière descente $6 \searrow 7$, où les montées possibles sont $3 \nearrow 4$ et $4 \nearrow 5$. Disons qu'on choisit 5. Ainsi, nous avons étiqueté le chemin de la sorte :

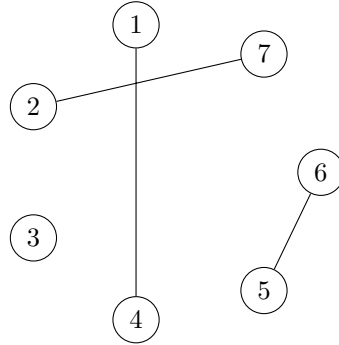


Dans ce cas, il faut comprendre le processus de dérivations successives comme suit :

$$\begin{array}{l} x \\ \nearrow x \cdot x \\ \searrow^1 1 \cdot x \cdot 1 \\ \nearrow 1 \cdot x \cdot 1 \cdot x \\ \nearrow 1 \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot x \\ \searrow^2 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x \cdot x \cdot 1 \\ \searrow^5 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{array}$$

À ce chemin étiqueté, on lui associe l'appariement qui envoie ℓ sur $k + 1$. Ainsi, dans notre exemple, 1 est associé à 3, 2 à 6 et 5 à 7.

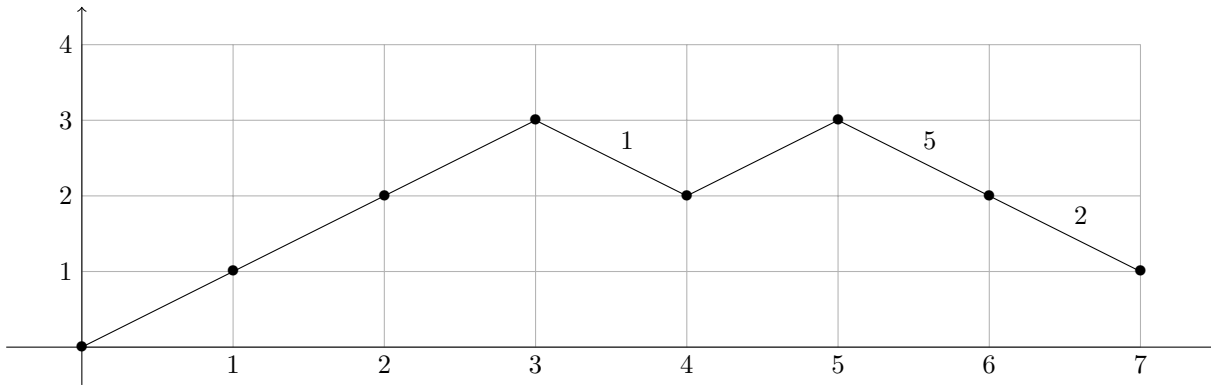
Nous venons de décrire comment passer d'un chemin étiqueté à un appariement. Construisons désormais à partir d'un appariement un chemin étiqueté. On prend l'exemple suivant



Pour construire le chemin étiqueté associé, on applique l'algorithme suivant. À l'étape $k = 1$, on monte (cela crée la montée $0 \nearrow 1$). Puis, pour k parcourant 2 à n :

- Si k est relié à $\ell > k$, on monte à l'étape k , créant la montée $k - 1 \nearrow k$;
- Si k n'est relié à personne, on monte à l'étape k , créant la montée $k - 1 \nearrow k$;
- Si k est relié à $\ell < k$ alors on descend à l'étape k , et on associe à cette nouvelle descente l'étiquette ℓ , créant la descente $k - 1 \searrow^\ell k$.

Dans le cas de l'exemple proposé, on obtient le chemin étiqueté suivant.



Les deux applications que nous venons de créer sont alors inverses l'une de l'autre, créant ainsi une bijection entre chemins étiquetés et appariements. Pour le démontrer, notons Φ l'application envoyant les appariements sur les chemins étiquetés et Ψ celle qui envoie les chemins étiquetés sur les appariements.

- Si on fixe un appariement γ , dont ses liens sont $k_1 \leftrightarrow \ell_1, \dots, k_p \leftrightarrow \ell_p$, avec $k_i > \ell_i$ alors $\Phi(\gamma)$ est un chemin étiqueté, dont ses descentes sont données par les $k_i - 1 \searrow^{\ell_i} k_i$. Il suit que $\Psi(\Phi(\gamma))$ est l'appariement reliant les k_i avec les ℓ_i , si bien que $\Psi(\Phi(\gamma)) = \gamma$.
- Réciproquement, si on fixe un chemin étiqueté X , dont ses descentes sont données par $k_i - 1 \searrow^{\ell_i} k_i$ alors $\Psi(X)$ est l'appariement reliant les k_i aux ℓ_i . Donc on conclut que $\Phi(\Psi(X)) = X$.

Cette bijection permet alors de conclure sur le calcul des coefficients de H_n . En effet, à partir de [B.5], on observe en fait que le terme $\prod_{\text{Descentes}} \text{Degré}^\uparrow$ est exactement le nombre de chemins étiquetés représentant le même chemin. En effet, à chaque descente, le degré du monôme qu'on dérive représente en fait le nombre d'étiquettes possibles à lui attribuer. Ainsi, à partir de la partition suivante

$$\{\text{Chemins étiquetés}\} = \bigsqcup_{X \text{ chemin}} \{\text{Chemins étiquetés associés à } X\},$$

on a en fait, en reprenant [B.5]

$$\text{Coeff}\left(x^{\text{fix}(\gamma)}\right) = (-1)^{|\gamma|} \#\{\text{Chemins étiquetés } (0,0) \rightarrow (n, \text{fix}(\gamma))\}.$$

Or, par la bijection qu'on a construit, on a en fait pour tout $0 \leq k \leq n/2$

$$\{\text{Chemins étiquetés } (0,0) \rightarrow (n, n - 2k)\} \simeq \{\gamma \in \Gamma_n, |\gamma| = k\},$$

puisque de tels chemins comportent k descentes. Ainsi,

$$\text{Coeff}\left(x^{\text{fix}(\gamma)}\right) = (-1)^{|\gamma|} \#\{\eta \in \Gamma_n, |\eta| = |\gamma|\}.$$

En conclusion, on a alors

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{Coeff}(x^{n-2k}) x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \#\{\gamma \in \Gamma_n, |\gamma| = k\} x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_n \\ |\gamma|=k}} (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_n} (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)}. \end{aligned}$$

Cela permet de conclure cette démonstration. $\square$

2.2. Démonstration *via* les espèces combinatoires

On se propose une deuxième démonstration de la Proposition B.5, en n'utilisant pas la notion de chemins étiquetés, mais de manière plus astucieuse avec la notion d'espèce combinatoire.

Définition B.6 : Soit $(E_n)_n$ une suite d'ensembles finis. On appelle *espèce combinatoire associée à $(E_n)_n$* la série exponentielle suivante

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\#E_n}{n!} x^n.$$

On peut interpréter certaines opérations sur les espèces comme une nouvelle espèce.

Lemme B.7 : Soient $(E_n)_{n \geq 1}$ et $(G_n)_{n \geq 1}$ deux suites d'ensembles finis, et on note A, B leurs espèces combinatoires respectives.

(i) Le produit $A(x)B(x)$ est l'espèce combinatoire associée à

$$\left(\bigsqcup_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} E_{\#I} \times G_{\#I^c} \right)_{n \geq 1};$$

(ii) L'exponentielle $e^{A(x)}$ est l'espèce associée à

$$\left(\bigsqcup_{\substack{\Pi \text{ partition} \\ \text{de } \llbracket 1, n \rrbracket}} \prod_{J \in \Pi} E_{\#J} \right)_{n \geq 1};$$

(iii) La dérivée $A'(x)$ est l'espèce associée à $(E_{n+1})_{n \geq 1}$.

Démonstration : Il suffit de développer les séries entières qui résultent des opérations décrites. On note $a_n = \#E_n$ et $b_n = \#G_n$.

(i) Pour le produit $A(x)B(x)$, on a

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right] \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \# \left[\bigsqcup_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} E_{\#I} \times G_{\#I^c} \right] \frac{x^n}{n!}.$$

(ii) Pour l'exponentielle, on écrit

$$e^{A(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{i!} x^i \right)^k.$$

On développe, on utilise la partition

$$\mathbb{N}^k = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k, i_1 + \dots + i_k = n\}$$

et on utilise la relation suivante lorsque $i_1 + \dots + i_k = n$:

$$\frac{n!}{i_1! \dots i_k!} = \prod_{j=1}^k \binom{n - (i_1 + \dots + i_{j-1})}{i_j}$$

pour conclure que

$$e^{A(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \prod_{j=1}^k \binom{n - (i_1 + \dots + i_{j-1})}{i_j} a_{i_j} \right] \frac{x^n}{n!}.$$

Or, $\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \binom{n - (i_1 + \dots + i_{j-1})}{i_j}$ compte le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de taille $i_1, \dots, i_k$, si bien qu'on en déduit que

$$e^{A(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \# \left[\bigsqcup_{\Pi \text{ partition de } \llbracket 1, n \rrbracket} \prod_{J \in \Pi} E_{\#J} \right] \frac{x^n}{n!}.$$

(iii) La dérivée de A est directement donnée par

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}.$$

□

Nous pouvons alors conclure sur [B.4].

Démonstration de la Proposition B.5 : Considérons l'espèce combinatoire donnée par $A^\circ(x) = \frac{x^2}{2}$. Il s'agit de l'espèce combinatoire associée à la suite $(E_n^\circ)_{n \geq 1}$ définie par $E_n^\circ = \emptyset$ pour $n \neq 2$ et $E_2^\circ = \{\gamma \in \Gamma_2, |\gamma| = 1\}$, avec $\#E_2^\circ = 1$. Il s'agit du graphe complet à deux éléments, c'est-à-dire un segment.

Son exponentielle $A^b(x) = e^{A^\circ(x)}$ est l'espèce combinatoire qui compte le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont chaque élément de la partition soit exactement de cardinal 2. En particulier, les coefficients impairs dans le développement de A^b sont nuls. On peut alors interpréter le n -ème coefficient comme le nombre d'appariements $\gamma \in \Gamma_n$ admettant exactement zéro point fixe.

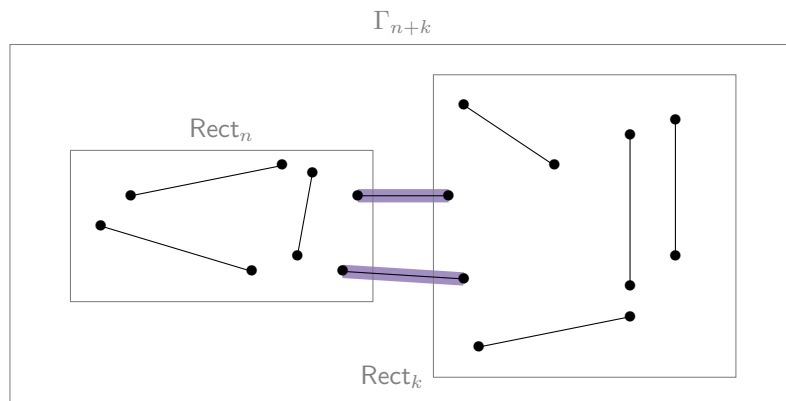
Ainsi, la dérivée k -ème de A^b , qu'on note B_k , est l'espèce dont le n -ème coefficient compte le nombre d'appariements $\gamma \in \Gamma_{n+k}$ à zéro point fixe. Si on note

$$\tilde{H}_k(x) \triangleq e^{-x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} [e^{x^2/2}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(k)}{n!} x^n,$$

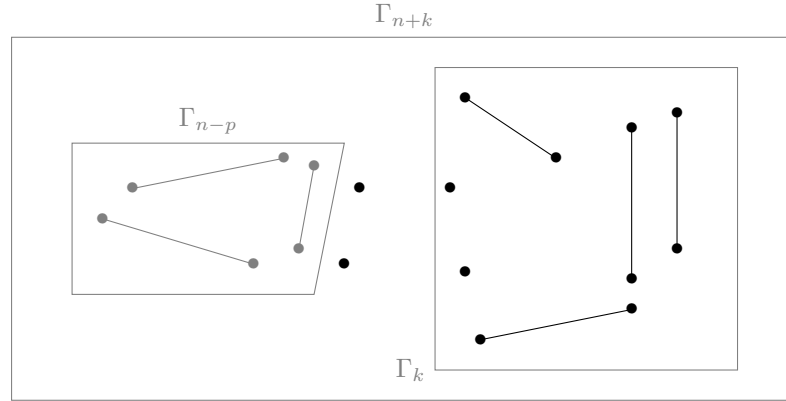
alors on dispose de la relation

$$B_k(x) = A^b(x) \tilde{H}_k(x).$$

Or, on peut décomposer l'ensemble des appariements dans le graphe complet à $n+k$ éléments avec zéro point fixe comme tel (où k est l'ordre du polynôme d'HERMITE considéré et n le degré du coefficient d'intérêt, si bien que $n \leq k$). Considérons un tel γ . Il se représente sous la forme suivante



Chaque point représente un sommet, et est numéroté (on l'a masqué dans la représentation par souci de lisibilité). Les n premiers sommets sont dans le cadre de gauche (nommé Rect_n), tandis que les k derniers sont le cadre de droite (Rect_k). Il y a des liens internes entre sommets de chaque rectangle, et des liens transversaux, qu'on a mis en avant avec le surlignage. Avec cette représentation, on peut en fait voir qu'on peut voir $\gamma \in \Gamma_{n+k}$ avec zéro point fixe comme la donnée de deux rectangles contenant n et k points, de deux appariements à zéro point fixe, vus dans chaque rectangle, et la donnée de liens transversaux. Notons p le nombre d'arêtes transversales. L'idée pour nous est la suivante :



Dans le rectangle Rect_n , nous avons isolé les points transversaux, et l'avons donc subdivisé en un appariement de taille $n - p$ à zéro point fixe (on a appelé p le nombre de liens transversaux) et p points isolés et numérotés. Quand au rectangle Rect_k , les points concernés par les liens transversaux sont isolés, et forment des points fixes pour un appariement de Γ_k . On vient alors de montrer que

$$\begin{aligned} & \{\gamma \in \Gamma_{n+k}, \text{fix}(\gamma) = 0\} \\ &= \bigcup_{p=0}^n \{n-p \text{ sommets à relier}\} \times \{\gamma \in \Gamma_{n-p}, \text{fix}(\gamma) = 0\} \times \{p \text{ sommets numérotés}\} \times \{\gamma \in \Gamma_k, \text{fix}(\gamma) = p\}. \end{aligned}$$

De manière plus élégante, en notant en indice courant I l'ensemble des $n - p$ sommets à relier, on a

$$\{\gamma \in \Gamma_{n+k}, \text{fix}(\gamma) = 0\} = \bigcup_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} \{\gamma \in \Gamma_{\#I^c}, \text{fix}(\gamma) = 0\} \times \{\#I \text{ sommets numérotés}\} \times \{\gamma \in \Gamma_k, \text{fix}(\gamma) = \#I\}.$$

Cela signifie qu'on peut interpréter ceci comme une espèce produit. La première espèce est donnée pour $n \geq 1$ par $\{\gamma \in \Gamma_n, \text{fix}(\gamma) = 0\}$, dont la série exponentielle est donnée par $A^b(x)$. La deuxième est associée à $\mathfrak{S}_n \times \{\gamma \in \Gamma_k, \text{fix}(\gamma) = n\}$. On note G_k sa série exponentielle associée. On a alors montré qu'on a la relation entre séries exponentielles

$$B_k(x) = A^b(x)G_k(x).$$

Puisqu'on a vu précédemment que $B_k = A^b \tilde{H}_k$, on en déduit que $\tilde{H}_k = G_k$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(k)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \#\{\gamma \in \Gamma_k, \text{fix}(\gamma) = n\} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \#\{\gamma \in \Gamma_k, \text{fix}(\gamma) = n\} x^n = \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_k \\ \text{fix}(\gamma) = n}} x^{\text{fix}(\gamma)} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_k} x^{\text{fix}(\gamma)}. \end{aligned}$$

Il reste plus qu'à conclure en observant que $\tilde{H}_k(x) = (-i)^k H_k(ix)$ pour obtenir

$$H_k(x) = (-i)^k \tilde{H}_k(ix) = (-i)^k \sum_{\gamma \in \Gamma_k} i^{\text{fix}(\gamma)} x^{\text{fix}(\gamma)}.$$

On conclut avec l'égalité $k = 2|\gamma| + \text{fix}(\gamma)$ prouvée dans le Lemme B.2 et on obtient [B.4]. □

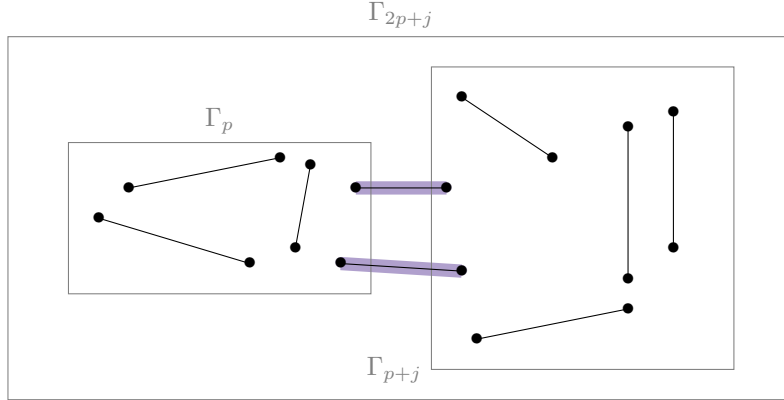
3. Démonstration de la formule produit

Grâce à l'interprétation des polynômes d'HERMITE *via* les appariements du graphe complet, on conclut sur la formule produit [B.1].

Démonstration : On fixe $p, j \geq 0$. D'après la Proposition B.5, on a

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_p} \sum_{\gamma_2 \in \Gamma_{p+j}} (-1)^{|\gamma_1|+|\gamma_2|} x^{\text{fix}(\gamma_1)+\text{fix}(\gamma_2)}.$$

Rappelons que dans le graphe complet K_{2p+j} , on a nommé *arête transversale* toute arête reliant un sommet situé dans $A \triangleq \llbracket 1, p \rrbracket$ à un sommet dans $B \triangleq \llbracket p+1, 2p+j \rrbracket$. Notons T l'ensemble de ces arêtes.



Dans cet exemple, nous avons surligné les arêtes transversales de γ . Notons dans la suite $\Gamma(A)$ (respectivement $\Gamma(B)$) l'ensemble des appariements sur $A = \llbracket 1, p \rrbracket$ (respectivement sur $B = \llbracket p+1, p+j \rrbracket$). Ainsi, on dispose de la formulation suivante pour $H_p H_{p+j}$

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma(A)} \sum_{\gamma_2 \in \Gamma(B)} (-1)^{|\gamma_1 \sqcup \gamma_2|} x^{\text{fix}(\gamma_1 \sqcup \gamma_2)}.$$

On dispose alors de la bijection suivante

$$\Gamma(A) \times \Gamma(B) \simeq \{\gamma \in \Gamma(A \sqcup B), \gamma \cap T = \emptyset\},$$

via $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \sqcup \gamma_2$, donnant l'expression suivante

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(A \sqcup B) \\ \gamma \cap T = \emptyset}} (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)}.$$

Afin de faire intervenir les polynômes d'HERMITE, on doit faire apparaître des termes provenant d'appariements admettant des arêtes transversales. Un tel appariement est connu dès lors qu'on connaît ses arêtes transversales et internes.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des appariements n'admettant que des arêtes transversales, ou l'appariement vide. Pour $\delta \in \mathcal{T}$, on note $\text{Supp}(\delta)$ l'ensemble des points de $A \sqcup B$ dans l'une des arêtes de δ . On note $R(\delta)$ son complémentaire. Soit $\gamma \in \Gamma(A \sqcup B)$ avec $\gamma \cap T \neq \emptyset$. Alors les deux ensembles suivants sont en bijection

$$\left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ pair} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ impair} \end{array} \right\}. \quad [\text{B.6}]$$

En effet, si $v \in \gamma \cap T$, alors

$$\left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ pair} \end{array} \right\} = \left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ pair} \\ v \in \delta \end{array} \right\} \sqcup \left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ pair} \\ v \notin \delta \end{array} \right\}.$$

Via les applications $\delta \mapsto \delta \setminus \{v\}$ pour le premier ensemble et $\delta \mapsto \delta \sqcup \{v\}$ pour le deuxième, on en déduit

$$\left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ pair} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ impair} \\ v \notin \delta \end{array} \right\} \sqcup \left\{ \delta \in \mathcal{T}, \begin{array}{l} \delta \subset \gamma \\ |\delta| \text{ impair} \\ v \in \delta \end{array} \right\}.$$

D'où [B.6]. Autrement dit, pour $0 \leq r \leq p$, si on note $\mathcal{T}_r$ l'ensemble des $\delta \in \mathcal{T}$ tels que $|\delta| = r$ alors pour tout $\gamma \in \Gamma(A \sqcup B)$ tels que $\gamma \cap \mathbf{T} \neq \emptyset$,

$$\sum_{r=0}^p (-1)^r \# \{ \delta \in \mathcal{T}_r \mid \delta \subset \gamma \} = 0.$$

Ainsi, nous avons l'égalité suivante pour $H_p H_{p+j}$

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(A \sqcup B) \\ \gamma \cap \mathbf{T} = \emptyset}} (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)} + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(A \sqcup B) \\ \gamma \cap \mathbf{T} \neq \emptyset}} \left(\sum_{r=0}^p (-1)^r \# \{ \delta \in \mathcal{T}_r \mid \delta \subset \gamma \} \right) (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)}.$$

Pour $\gamma \in \Gamma(A \sqcup B)$ tel que $\gamma \cap \mathbf{T} = \emptyset$, $\# \{ \delta \in \mathcal{T}_r \mid \delta \subset \gamma \} = 0$ sauf si $r = 0$ où cela vaut 1 (seul l'appariement vide est à considérer), si bien que la formule précédente se simplifie

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma(A \sqcup B)} \left(\sum_{r=0}^p (-1)^r \# \{ \delta \in \mathcal{T}_r \mid \delta \subset \gamma \} \right) (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)} = \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{\delta \in \mathcal{T}_r} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(A \sqcup B) \\ \delta \subset \gamma}} (-1)^{|\gamma|} x^{\text{fix}(\gamma)}.$$

Or, les deux ensembles suivants sont en bijection

$$\left\{ (\gamma, \delta) \mid \begin{array}{l} \gamma \in \Gamma(A \sqcup B) \\ \delta \in \mathcal{T}_r \\ \delta \subset \gamma \end{array} \right\} \simeq \left\{ (\eta, \delta) \mid \begin{array}{l} \delta \in \mathcal{T}_r \\ \eta \in \Gamma(\mathbf{R}(\delta)) \end{array} \right\}$$

via l'application $(\gamma, \delta) \mapsto (\gamma \setminus \delta, \delta)$ de réciproque $(\eta, \delta) \mapsto (\eta \sqcup \delta, \delta)$. Ainsi,

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{\delta \in \mathcal{T}_r} \sum_{\eta \in \Gamma(\mathbf{R}(\delta))} (-1)^{|\eta \sqcup \delta|} x^{\text{fix}(\eta \sqcup \delta)}.$$

Or, pour $\delta \in \mathcal{T}_r$ et $\eta \in \Gamma(\mathbf{R}(\delta))$, $|\eta \sqcup \delta| = |\eta| + r$. De plus, pour les points fixes, pour E un ensemble fini et $\gamma \in \Gamma(E)$ si on note

$$\text{fix}_E(\gamma) = \# \{ x \in E, \forall v \in \gamma, x \notin v \},$$

la somme sous-entend que l'exposant en x dans la formule précédente est $\text{fix}_{A \sqcup B}(\eta \sqcup \delta)$. Or,

$$\text{fix}_{A \sqcup B}(\eta \sqcup \delta) = \text{fix}_{\mathbf{R}(\delta)}(\eta) + \text{fix}_{\text{Supp}(\delta)}(\delta) = \text{fix}_{\mathbf{R}(\delta)}(\eta).$$

Or, $\# \mathbf{R}(\delta) = 2(p-r) + j$, si bien que $\Gamma(\mathbf{R}(\delta))$ est en bijection avec $\Gamma_{2(p-r)+j}$. Il suit, en reprenant des notations implicites pour les points fixes, que

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{r=0}^p \sum_{\delta \in \mathcal{T}_r} \sum_{\eta \in \Gamma_{2(p-r)+j}} (-1)^{|\eta|} x^{\text{fix}(\eta)}.$$

Or,

$$\# \mathcal{T}_r = r! \binom{p+j}{r} \binom{p}{r},$$

puisque $\delta \in \mathcal{T}_r$ est déterminé par r points dans A de cardinal p , r points dans B de cardinal $p+j$ et de la manière de les relier, donnant une permutation de $\mathfrak{S}_r$. On conclut alors que

$$H_p(x)H_{p+j}(x) = \sum_{r=0}^p r! \binom{p}{r} \binom{p+j}{r} H_{2(p-r)+j}(x).$$

On a démontré la formule [B.1]. □

Remarque B.8. Je remercie le docteur François BACHER pour sa contribution pour la démonstration de ce dernier fait, en s'inspirant d'une démonstration combinatoire de la formule du crible. ♣

Bibliographie

- [ACP14] E. AZMOODEH, S. CAMPESE et G. POLY. « Fourth Moment Theorems for Markov diffusion generators ». In : *Journal of Functional Analysis* 266.4 (2014), p. 2341-2359. ISSN : 0022-1236. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.10.014>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123613004047>.
- [AGT22] O. ASSAAD, J. GAMAIN et C. A. TUDOR. « Quadratic variation and drift parameter estimation for the stochastic wave equation with space-time white noise ». In : *Stochastics and Dynamics* 22.07 (2022), p. 2240014. DOI : 10.1142/S0219493722400147. eprint : <https://doi.org/10.1142/S0219493722400147>. URL : <https://doi.org/10.1142/S0219493722400147>.
- [Arc94] M. A. ARCONES. « Limit Theorems for Nonlinear Functionals of a Stationary Gaussian Sequence of Vectors ». In : *The Annals of Probability* 22.4 (1994), p. 2242-2274. DOI : 10.1214/aop/1176988503. URL : <https://doi.org/10.1214/aop/1176988503>.
- [Arr+19] B. ARRAS et al. « A bound on the Wasserstein-2 distance between linear combinations of independent random variables ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 129.7 (2019), p. 2341-2375. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2018.07.009>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414918303259>.
- [Ass+22] O. ASSAAD et al. « Quantitative normal approximations for the stochastic fractional heat equation ». In : *Stoch PDE : Anal Comp* 10 (2022), p. 223-254. DOI : <https://doi.org/10.1007/s40072-021-00198-7>.
- [AT09] R. J. ADLER et J. E. TAYLOR. *Random Fields and Geometry*. Springer New York, NY, 2009. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48116-6>.
- [AW09] J. AZAÏS et M. WSCHEBOR. *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. 2009 John Wiley & Sons, Inc., 2009. DOI : 10.1002/9780470434642.
- [AY89] J. AZÉMA et M. YOR. « Étude d'une martingale remarquable ». In : *Séminaire de probabilités de Strasbourg* 23 (1989), p. 88-130. URL : http://www.numdam.org/item/SPS_1989__23__88_0/.
- [Bal+22] R. M. BALAN et al. « The hyperbolic Anderson model : moment estimates of the Malliavin derivatives and applications ». In : *Stoch Partial Differ Equ.* 10(3) (2022), p. 757-827. DOI : 10.1007/s40072-021-00227-5.
- [Bal+24] K. BALASUBRAMANIAN et al. « Gaussian random field approximation via Stein's method with applications to wide random neural networks ». In : *Applied and Computational Harmonic Analysis* 72 (2024), p. 101668. ISSN : 1063-5203. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.acha.2024.101668>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1063520324000459>.
- [BBL11] H. BIERMÉ, A. BONAMI et J. R. LEON. « Central Limit Theorems and Quadratic Variations in Terms of Spectral Density ». In : *Electronic Journal of Probability* 16.none (2011), p. 362-395. DOI : 10.1214/EJP.v16-862. URL : <https://doi.org/10.1214/EJP.v16-862>.

- [BC05a] A. BARBOUR et L. H.Y. CHEN. *Stein's Method and Applications*. CO-PUBLISHED WITH SINGAPORE UNIVERSITY PRESS, 2005. DOI : 10.1142/5793. eprint : <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/5793>. URL : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/5793>.
- [BC05b] A.D. BARBOUR et L. H.Y. CHEN. *An Introduction to Stein's Method*. CO-PUBLISHED WITH SINGAPORE UNIVERSITY PRESS, 2005. DOI : 10.1142/5792. eprint : <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/5792>. URL : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/5792>.
- [BDT21] S. BOURGUIN, C.-P. DIEZ et C. A. TUDOR. « Limiting behavior of large correlated Wishart matrices with chaotic entries ». In : *Bernoulli* 27.2 (2021), p. 1077-1102. DOI : 10.3150/20-BEJ1266. URL : <https://doi.org/10.3150/20-BEJ1266>.
- [Ber41] A. C. BERRY. « The Accuracy of the Gaussian Approximation to the Sum of Independent Variates ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 49.1 (1941), p. 122-136. ISSN : 00029947, 10886850. URL : <http://www.jstor.org/stable/1990053> (visité le 14/02/2025).
- [BKZ18] V. BOGACHEV, E. KOSOV et G. ZELENOV. « Fractional Smoothness of Distributions of Polynomials and a Fractional Analog of the Hardy–Landau–Littlewood Inequality ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 370.6 (2018), pp. 4401-4432. ISSN : 00029947, 10886850. URL : <https://www.jstor.org/stable/90020277>.
- [BM83] P. BREUER et P. MAJOR. « Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields ». In : *Journal of Multivariate Analysis* 13.3 (1983), p. 425-441. ISSN : 0047-259X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(83\)90019-2](https://doi.org/10.1016/0047-259X(83)90019-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0047259X83900192>.
- [BN08] J.-C. BRETON et I. NOURDIN. « Error bounds on the non-normal approximation of Hermite power variations of fractional Brownian motion ». In : *Electronic Communications in Probability* 13.none (2008), p. 482-493. DOI : 10.1214/ECP.v13-1415. URL : <https://doi.org/10.1214/ECP.v13-1415>.
- [Bou+19] S. BOURGUIN et al. « Four Moments Theorems on Markov Chaoses ». In : *The Annals of Probability* 47.3 (2019), pp. 1417-1446. ISSN : 00911798, 2168894X. URL : <https://www.jstor.org/stable/26730462> (visité le 31/08/2024).
- [Bou21] N. BOULEAU. *The Mathematics of Errors*. Springer Cham, 2021. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-030-88575-5>.
- [BST12] A. BULINSKI, E. SPODAREV et F. TIMMERMAN. « Central limit theorems for the excursion set volumes of weakly dependent random fields ». In : *Bernoulli* 18.1 (2012), p. 100-118. DOI : 10.3150/10-BEJ339. URL : <https://doi.org/10.3150/10-BEJ339>.
- [BT19] M. BIBINGER et M. TRABS. « On Central Limit Theorems for Power Variations of the Solution to the Stochastic Heat Equation ». In : *Stochastic Models, Statistics and Their Applications*. Sous la dir. d'A. STELAND, E. RAFAJŁOWICZ et O. OKHRIN. Cham : Springer International Publishing, 2019, p. 69-84. ISBN : 978-3-030-28665-1.
- [BT20] M. BIBINGER et M. TRABS. « Volatility estimation for stochastic PDEs using high-frequency observations ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 130.5 (2020), p. 3005-3052. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2019.09.002>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414918305258>.
- [BY22] R. M. BALAN et W. YUAN. « Spatial integral of the solution to hyperbolic Anderson model with time-independent noise ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 152 (2022), p. 177-207. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2022.06.013>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030441492200148X>.

- [BY23] R. M. BALAN et W. YUAN. « Central limit theorems for heat equation with time-independent noise : The regular and rough cases ». In : *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* 26.02 (2023), p. 2250029. DOI : 10.1142/S0219025722500291. URL : <https://doi.org/10.1142/S0219025722500291>.
- [BY24] Raluca M. BALAN et Wangjun YUAN. « Hyperbolic Anderson model with time-independent rough noise : Gaussian fluctuations ». In : *Electronic Journal of Probability* 29.none (2024), p. 1-52. DOI : 10.1214/24-EJP1239. URL : <https://doi.org/10.1214/24-EJP1239>.
- [Cam+16] S. CAMPESE et al. « Multivariate Gaussian approximations on Markov chaoses ». In : *Electronic Communications in Probability* 21.none (2016), p. 1-9. DOI : 10.1214/16-ECP4615. URL : <https://doi.org/10.1214/16-ECP4615>.
- [CD20] L. COUTIN et L. DECREUSEFOND. « Donsker's theorem in Wasserstein-1 distance ». In : *Electronic Communications in Probability* 25.none (2020), p. 1-13. DOI : 10.1214/20-ECP308. URL : <https://doi.org/10.1214/20-ECP308>.
- [CD23] Carsten CHONG et Robert C. DALANG. « Power variations in fractional Sobolev spaces for a class of parabolic stochastic PDEs ». In : *Bernoulli* 29.3 (2023), p. 1792-1820. DOI : 10.3150/22-BEJ1521. URL : <https://doi.org/10.3150/22-BEJ1521>.
- [CGS10] L. H.Y. CHEN, L. GOLDSTEIN et Q. SHAO. *Normal Approximations by Stein's Method*. Springer Berlin, Heidelberg, 2010.
- [CH20] Igor CIALENCO et Yicong HUANG. « A note on parameter estimation for discretely sampled SPDEs ». In : *Stochastics and Dynamics* 20.03 (2020), p. 2050016. DOI : 10.1142/S0219493720500161. URL : <https://doi.org/10.1142/S0219493720500161>.
- [Che+22] L. CHEN et al. « Spatial ergodicity and central limit theorems for parabolic Anderson model with delta initial condition ». In : *Journal of Functional Analysis* 282.2 (2022), p. 109290. ISSN : 0022-1236. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109290>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123621003724>.
- [CR22] C. CHEVERRY et N. RAYMOND. *A Guide to Spectral Theory*. Birkhäuser Cham, 2022. URL : <https://perso.univ-rennes1.fr/christophe.cheverry/spectral-theory.pdf>.
- [CS89] D. CHAMBERS et E. SLUD. « Central limit theorems for nonlinear functionals of stationary Gaussian processes ». In : *Probab. Th. Rel. Fields* 80 (1989), p. 323-346. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF01794427>.
- [Dal+08] R. DALANG et al. *A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations*. Springer Berlin, Heidelberg, 2008. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-540-85994-9>.
- [dAl50] J. D'ALEMBERT. « Recherche sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration ». In : *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin (HAB) pour l'année 1747*. 1750, p. 214-219.
- [Dal99] R. C. DALANG. « Extending martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous S. P. D. E's. » In : *Electronic Journal of Probability [electronic only]* 4 (1999), Paper No. 6, 29 p.-Paper No. 6, 29 p. URL : <http://eudml.org/doc/119958>.
- [Dec15] L. DECREUSEFOND. « The Stein-Dirichlet-Malliavin method ». In : *ESAIM : Proc.* 51 (2015), p. 49-59. DOI : 10.1051/proc/201551003. URL : <https://doi.org/10.1051/proc/201551003>.
- [DLM20] K. D BICKI, P. LIU et Z. MICHNA. « Sojourn Times of Gaussian Processes with Trend ». In : *J Theor Probab* 33 (2020), p. 2119-2166. DOI : <https://doi.org/10.1007/s10959-019-00934-9>.
- [DN21] Y. A. DAVYDOV et S. M. NOVIKOV. « Remarks on Asymptotic Independence ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 66.1 (2021), p. 44-57. DOI : 10.1137/S0040585X97T990241. URL : <https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990241>.

- [DNZ20] F. DELGADO-VENCES, D. NUALART et G. ZHENG. « A Central Limit Theorem for the stochastic wave equation with fractional noise ». In : *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 56.4 (2020), p. 3020-3042. DOI : 10.1214/20-AIHP1069. URL : <https://doi.org/10.1214/20-AIHP1069>.
- [Don52] M. D. DONSKEER. « Justification and Extension of Doob's Heuristic Approach to the Kolmogorov- Smirnov Theorems ». In : *The Annals of Mathematical Statistics* 23.2 (1952), p. 277-281. DOI : 10.1214/aoms/1177729445. URL : <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729445>.
- [DP18] C. DÖBLER et G. PECCATI. « The Gamma Stein equation and noncentral de Jong theorems ». In : *Bernoulli* 24.4B (2018), p. 3384-3421. DOI : 10.3150/17-BEJ963. URL : <https://doi.org/10.3150/17-BEJ963>.
- [DQ11] R. C. DALANG et L. QUER-SARDANYONS. « Stochastic integrals for spde's : A comparison ». In : *Expositiones Mathematicae* 29.1 (2011), p. 67-109. ISSN : 0723-0869. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2010.09.005>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0723086910000435>.
- [DS24] R. C. DALANG et M. SANZ-SOLÉ. « Stochastic Partial Differential Equations, Space-time White Noise and Random Fields ». Preprint. 2024.
- [Ebi23] M. EBINA. « Ergodicity and Central Limit Theorems for Stochastic Wave Equations in High Dimensions ». Preprint. 2023. URL : <https://arxiv.org/abs/2308.05716>.
- [Ess42] C. ESSEN. « On the Liapunoff limit of error in the theory of probability ». In : *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* A28 (1942), p. 1-19. ISSN : 0365-4133.
- [FGS24] A. FISHER, R. GAUNT et Y. SWAN. « Stein's Method of Moments on the Sphere ». Preprint. 2024. URL : <https://arxiv.org/abs/2407.02299>.
- [FH20] P. FRIZ et M. HAIRER. *A Course on Rough Paths. with an Introduction to Regularity Structures*. Springer Cham, 2020. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-030-41556-3>.
- [Fis12] H. FISCHER. *A History of the Central Limit Theorem. From Classical to Modern Probability Theory*. Springer New York, NY, 2012. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-0-387-87857-7>.
- [Fou22] J. FOURIER. *Théorie analytique de la chaleur*. F. Didot, 1822.
- [FV10] P. FRIZ et N. VICTOIR. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths : Theory and Applications*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2010. DOI : <https://doi.org/10.1017/CB09780511845079>.
- [Gam23] J. GAMAIN. « Contributions à l'étude des matrices aléatoires et à l'inférence statistique des EDPS par le calcul de Stein-Malliavin ». Thèse de doct. Université de Lille, 2023.
- [Gau09] C. F. GAUSS. « Theoria motus corporum coelestium ». In : *Hamburgi : sumtibus Frid. Perthes et I. H. Besser* (1809). DOI : <https://doi.org/10.3931/e-rara-522>.
- [GE11] C. GEISS et E. LAUKKARINEN. « Denseness of certain smooth Lévy functionnals ». In : *Probability and Mathematical Statistics* 31.2 (2011). URL : <https://wuw.rpl/pms/article/view/6870/6516>.
- [GNZ21] R. Bolaños GUERRERO, D. NUALART et G. ZHENG. « Averaging 2d stochastic wave equation ». In : *Electronic Journal of Probability* 26.none (2021), p. 1-32. DOI : 10.1214/21-EJP672. URL : <https://doi.org/10.1214/21-EJP672>.
- [Göt91] F. GÖTZE. « On the Rate of Convergence in the Multivariate CLT ». In : *The Annals of Probability* 19.2 (1991), p. 724-739. DOI : 10.1214/aop/1176990448. URL : <https://doi.org/10.1214/aop/1176990448>.

- [GPR17] R. GAUNT, A. PICKETT et G. REINERT. « Chi-square approximation by Stein's method with application to Pearson's statistic ». In : *The Annals of Applied Probability* 27.2 (2017), p. 720-756. DOI : 10.1214/16-AAP1213. URL : <https://doi.org/10.1214/16-AAP1213>.
- [GS85] L. GIRAITIS et D. SURGAILIS. « CLT and other limit theorems for functionals of Gaussian processes ». In : *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete* 70 (1985), p. 191-212. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF02451428>.
- [GT23] J. GAMAIN et C.A. TUDOR. « Exact variation and drift parameter estimation for the nonlinear fractional stochastic heat equation ». In : *Jpn J Stat Data Sci* 6 (2023), p. 381-406. DOI : <https://doi.org/10.1007/s42081-023-00188-0>.
- [GW24] H. GAN et M. WILKE-BERENGUER. « Stationary Distribution Approximations of Two-Islands Wright-Fisher and Seed-bank Models Using Stein's Method ». Preprint. 2024. URL : <https://arxiv.org/abs/2405.18763>.
- [Hai11] M. HAIRER. « On Malliavin's proof of Hörmander's theorem ». In : *Bulletin des Sciences Mathématiques* 135.6 (2011). Special issue in memory of Paul Malliavin, p. 650-666. ISSN : 0007-4497. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.07.007>.
- [Hai13] M. HAIRER. « Solving the KPZ equation ». In : *Annals of Mathematics* 178.2 (2013), p. 559-664. ISSN : 0003486X. URL : <http://www.jstor.org/stable/23470800> (visité le 16/01/2025).
- [Hai14] M. HAIRER. « A Theory of Regularity Structure ». In : *Invent. Math.* 198 (2014), p. 269-504. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00222-014-0505-4>.
- [HMP24] R. HERRY, D. MALICET et G. POLY. « Superconvergence phenomenon in Wiener chaoses ». In : *The Annals of Probability* 52.3 (2024), p. 1162-1200. DOI : 10.1214/24-AOP1689. URL : <https://doi.org/10.1214/24-AOP1689>.
- [HN05] Y. HU et D. NUALART. « Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion ». In : *The Annals of Probability* 33.3 (2005), p. 948-983. DOI : 10.1214/009117905000000017. URL : <https://doi.org/10.1214/009117905000000017>.
- [HNV20] J. HUANG, D. NUALART et L. VIITASAARI. « A central limit theorem for the stochastic heat equation ». In : *Stochastic Processes and Their Applications* 130.12 (déc. 2020), p. 7170-7184. ISSN : 0304-4149. DOI : 10.1016/j.spa.2020.07.010.
- [HT21] F. HILDEBRANDT et M. TRABS. « Parameter estimation for SPDEs based on discrete observations in time and space ». In : *Electronic Journal of Statistics* 15.1 (2021), p. 2716-2776. DOI : 10.1214/21-EJS1848. URL : <https://doi.org/10.1214/21-EJS1848>.
- [Hua+20] J. HUANG et al. « Gaussian fluctuations for the stochastic heat equation with colored noise. » In : *Stochastics and Partial Differential Equations : Analysis and Computations* 8.2 (2020). ISSN : 2194-0401.
- [IL89] A. V. IVANOV et N. N. LEONENKO. *Statistical Analysis of Random Fields*. Springer Dordrecht, 1989. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1183-3>.
- [Itô44] Kiyosi ITÔ. « Stochastic integral ». In : *Proceedings of the Imperial Academy* 20.8 (1944), p. 519-524. DOI : 10.3792/pia/1195572786. URL : <https://doi.org/10.3792/pia/1195572786>.
- [Itô51] K. ITÔ. « Multiple Wiener Integral ». In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 3.1 (1951), p. 157-169.
- [Itô56] K. ITÔ. « Spectral Type of the Shift Transformation of Differential Processes With Stationary Increments ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 81.2 (1956), p. 253-263. ISSN : 00029947. URL : <http://www.jstor.org/stable/1992916>.
- [Jan97] S. JANSON. *Gaussian Hilbert Spaces*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

- [JP11] J. JACOD et P. PROTTER. *Discretization of Processes*. Springer Berlin, Heidelberg, 2011. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-642-24127-7>.
- [KL01] M. F. KRATZ et J. R. LEÓN. « Central Limit Theorems for Level Functionals of Stationary Gaussian Processes and Fields ». In : *Journal of Theoretical Probability* 14 (2001), p. 639-672. DOI : <https://doi.org/10.1023/A:1017588905727>.
- [KNP21] Davar KHOSHNEVISAN, David NUALART et Fei PU. « Spatial Stationarity, Ergodicity, and CLT for Parabolic Anderson Model with Delta Initial Condition in Dimension $d \geq 1$ ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 53.2 (2021), p. 2084-2133. DOI : 10.1137/20M1350418. URL : <https://doi.org/10.1137/20M1350418>.
- [Kol30] A. KOLMOGOROV. « Sur la loi forte des grands nombres ». In : *CRAS Paris* 191 (1930), p. 910-912.
- [KPZ86] M. KARDAR, G. PARISI et Y.-C. ZHANG. « Dynamic Scaling of Growing Interfaces ». In : *Phys. Rev. Lett.* 56 (9 mars 1986), p. 889-892. DOI : 10.1103/PhysRevLett.56.889. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.889>.
- [KR77] N. V. KRYLOV et B. L. ROZOVSKII. « On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations ». In : *Math. USSR-Izv.* 11 (6 1977), p. 1267-1284.
- [KS98] I. KARATZAS et S. E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2^e éd. Springer New York, NY, 1998.
- [KT12] S. KUSUOKA et C. A. TUDOR. « Stein's method for invariant measures of diffusions via Malliavin calculus ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 122.4 (2012), p. 1627-1651. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2012.02.005>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414912000270>.
- [Lap10] P.-S. LAPLACE. « Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités ». In : *Mémoires de l'Académie des sciences, 1ère série, T. X, année 1809*. 1810, p. 301-345.
- [Led12] M. LEDOUX. « Chaos of a Markov Operator and the Fourth Moment Condition ». In : *The Annals of Probability* 40.6 (2012), p. 2439-2459. ISSN : 00911798. URL : <http://www.jstor.org/stable/41713971> (visité le 31/08/2024).
- [Lév22] P. LÉVY. « Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques ». In : *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris* 175 (1922), p. 854-856.
- [Luk94] H. M. LUK. « Stein's method for the Gamma distribution and related statistical applications ». Thèse de doct. University of Southern California, 1994.
- [Maj14] P. MAJOR. *Multiple Wiener-Itô Integrals*. 2^e éd. Springer Cham, 2014. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-319-02642-8>.
- [Mal78] P. MALLIAVIN. « Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators ». In : *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)* (1978).
- [Mey86] P.-A. MEYER. « Éléments de probabilités quantiques (exposés I à V) ». In : *Séminaire de probabilités de Strasbourg* 20 (1986), p. 186-312. URL : <http://eudml.org/doc/113544>.
- [NNP16] I. NOURDIN, D. NUALART et G. PECCATI. « Strong asymptotic independence on Wiener chaos ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 (2016), p. 875-886. DOI : <https://doi.org/10.1090/proc12769>.
- [NO08] D. NUALART et S. ORTIZ-LATORRE. « Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 118.4 (2008), p. 614-628. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2007.05.004>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414907000828>.

- [Nou+14] I. NOURDIN et al. « Classical and Free Fourth Moment Theorems : Universality and Thresholds ». In : *Journal of Theoretical Probability* 29 (2014), p. 653-680. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:39160398>.
- [NP05] D. NUALART et G. PECCATI. « Central Limit Theorems for Sequences of Multiple Stochastic Integrals ». In : *The Annals of Probability* (2005).
- [NP09a] I. NOURDIN et G. PECCATI. « Noncentral convergence of multiple integrals ». In : *The Annals of Probability* 37.4 (2009), p. 1412-1426. DOI : 10.1214/08-AOP435. URL : <https://doi.org/10.1214/08-AOP435>.
- [NP09b] I. NOURDIN et G. PECCATI. « Stein's Method on Wiener chaos ». In : *Probability Theory and Related Fields* (2009).
- [NP12a] I. NOURDIN et G. PECCATI. *Normal Approximations with Malliavin Calculus : From Stein's Method to Universality*. Cambridge University Press, 2012.
- [NP12b] I. NOURDIN et G. POLY. « Convergence in law in the second Wiener/Wigner chaos ». In : *Electronic Communications in Probability* 17.none (2012), p. 1-12. DOI : 10.1214/ECP.v17-2023. URL : <https://doi.org/10.1214/ECP.v17-2023>.
- [NP88] D. NUALART et E. PARDOUX. « Stochastic calculus with anticipating integrands ». In : *Probab. Th. Rel. Fields* 78 (1988), p. 535-581. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF00353876>.
- [NPR10] I. NOURDIN, G. PECCATI et A. RÉVEILLAC. « Multivariate normal approximation using Stein's method and Malliavin calculus ». In : *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques* 46.1 (2010), p. 45-58. URL : <http://eudml.org/doc/241128>.
- [NR14] I. NOURDIN et J. ROSIŃSKI. « Asymptotic independence of multiple Wiener-Itô integrals and the resulting limit laws ». In : *The Annals of Probability* 42.2 (2014), p. 497-526. DOI : 10.1214/12-AOP826. URL : <https://doi.org/10.1214/12-AOP826>.
- [NSZ21] D. NUALART, X. SONG et G. ZHENG. « Spatial averages for the parabolic Anderson model driven by rough noise ». In : *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 18 (2021), p. 907-943. DOI : 10.30757/ALEA.v18-33.
- [Nua06] D. NUALART. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. 2nd ed. Springer Berlin, 2006.
- [NXZ22] D. NUALART, P. XIA et G. ZHENG. « Quantitative central limit theorems for the parabolic Anderson model driven by colored noises ». In : *Electronic Journal of Probability* 27.none (2022), p. 1-43. DOI : 10.1214/22-EJP847. URL : <https://doi.org/10.1214/22-EJP847>.
- [NZ18] Ivan NOURDIN et Guangqu ZHENG. « Asymptotic Behavior of Large Gaussian Correlated Wishart Matrices ». In : *Journal of Theoretical Probability* 35 (2018), p. 2239-2268. DOI : <https://doi.org/10.1007/s10959-021-01133-1>.
- [NZ20] David NUALART et Guangqu ZHENG. « Averaging Gaussian functionals ». In : *Electronic Journal of Probability* 25.none (2020), p. 1-54. DOI : 10.1214/20-EJP453. URL : <https://doi.org/10.1214/20-EJP453>.
- [NZ22] D. NUALART et G. ZHENG. « Central limit theorems for stochastic wave equations in dimensions one and two ». In : *Stoch PDE : Anal Comp* 10 (2022), p. 392-418. DOI : <https://doi.org/10.1007/s40072-021-00209-7>.
- [Pha13] V.-H. PHAM. « On the rate of convergence for central limit theorems of sojourn times of Gaussian fields ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 123.6 (2013), p. 2158-2174. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2013.01.016>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414913000355>.
- [Pim22] L. PIMENTEL. « Integration by parts and the KPZ two-point function ». In : *The Annals of Probability* 50.5 (2022), p. 1755-1780. DOI : 10.1214/22-AOP1564. URL : <https://doi.org/10.1214/22-AOP1564>.

- [PR16] G. PECCATI et M. REITZNER. *Stochastic Analysis for Poisson Point Process*. Springer Cham, 2016.
- [PT05] G. PECCATI et C.A. TUDOR. « Gaussian Limits for Vector-valued Multiple Stochastic Integrals ». In : *Séminaire de Probabilités XXXVIII*. Sous la dir. de M. ÉMERY, M. LEDOUX et M. YOR. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005, p. 247-262. ISBN : 978-3-540-31449-3. DOI : 10.1007/978-3-540-31449-3_17. URL : https://doi.org/10.1007/978-3-540-31449-3_17.
- [PT07] J. POSPÍŠIL et R. TRIBE. « Parameter Estimates and Exact Variations for Stochastic Heat Equations Driven by Space-Time White Noise ». In : *Stochastic Analysis and Applications* 25.3 (2007), p. 593-611. DOI : 10.1080/07362990701282849. URL : <https://doi.org/10.1080/07362990701282849>.
- [PZ92] G. da PRATO et J. ZABCZYK. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, 1992.
- [Rei05] G. REINERT. « Three general approaches to Stein's method ». In : *An Introduction to Stein's Method*. Singapore University Press, Singapore, 2005, p. 183-221. ISBN : 978-981-256-280-7. DOI : 10.1142/9789812567680_0004.
- [RNP10] G. REINERT, I. NOURDIN et G. PECCATI. « Stein's method and Stochastic Analysis of Rademacher Functionals ». In : *Electron. J. Probab.* 15 (2010), p. 1703-1742.
- [RV22] F. RUSSO et P. VALLOIS. *Stochastic Calculus via Regularizations*. Bocconi & Springer Series. Springer Cham, 2022. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-031-09446-0>.
- [RY04] D. REVUZ et M. YOR. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3^e éd. Springer Berlin, Heidelberg, 2004. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-662-06400-9>.
- [RZ91] S. ROELLY et H. ZESSIN. « Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques ». In : 1991. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124339950>.
- [Sch66] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Hermann Paris, 1966.
- [Sko56] A. V. SKOROKHOD. « Limit Theorems for Stochastic Processes ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 1.3 (1956), p. 261-290. DOI : 10.1137/1101022. URL : <https://doi.org/10.1137/1101022>.
- [Sko76] A. V. SKOROKHOD. « On a Generalization of a Stochastic Integral ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 20.2 (1976), p. 219-233. DOI : 10.1137/1120030. URL : <https://doi.org/10.1137/1120030>.
- [SST20] R. SHEVCHENKO, M. SLAOUI et C.A. TUDOR. « Generalized k-variations and Hurst parameter estimation for the fractional wave equation via Malliavin calculus ». In : *Journal of Statistical Planning and Inference* 207 (2020), p. 155-180. ISSN : 0378-3758. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2019.10.008>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375819301193>.
- [Ste72] C. STEIN. « A Bound for the Error in the Normal Approximation to the Distribution of a Sum of Dependent Random Variables ». In : *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (1972).
- [Ste86] C. STEIN. *Approximate Computations of Expectations*. IMS Lecture Notes Vol. 7, Hayward, Calif., 1986.
- [SUV07] J. L. SOLÉ, F. UTZET et J. VIVES. « Canonical Lévy process and Malliavin calculus ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 117.2 (2007), p. 165-187. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2006.06.006>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414906001001>.
- [Sze39] G. SZERGÖ. *Orthogonal Polynomials*. T. 23. American Mathematical Society Colloquium Publications, 1939.

- [Tay52] A. E. TAYLOR. « L'Hospital's Rule ». In : *The American Mathematical Monthly* 59.1 (1952), p. 20-24. DOI : 10.1080/00029890.1952.11988058. URL : <https://doi.org/10.1080/00029890.1952.11988058>.
- [TK19] C.A. TUDOR et Z. KHALIL. « On the distribution and q-variation of the solution to the heat equation with fractional Laplacian ». In : *Probability and Mathematical Statistics* 39 (2019). DOI : <https://doi.org/10.19195/0208-4147.39.2.5>.
- [Tud13] C.A. TUDOR. *Analysis of Variations for Self-similar Processes*. Springer Cham, 2013. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00936-0>.
- [Tud22] C. A. TUDOR. *Stochastic Partial Differential Equations with Additive Gaussian Noise*. WORLD SCIENTIFIC, 2022. DOI : 10.1142/13089. URL : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/13089>.
- [Tud23] C.A. TUDOR. « Multidimensional Stein's method and quantitative asymptotic independence ». In : *Preprint* (2023). URL : <https://arxiv.org/pdf/2302.09946>.
- [TZ24a] C. A. TUDOR et J. ZURCHER. « Multidimensional Stein's method for Gamma approximation ». In : *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* XXI (2024), p. 1709-1726. DOI : <https://doi.org/10.30757/ALEA.v21-64>.
- [TZ24b] C. A. TUDOR et J. ZURCHER. « The spatial sojourn time for the solution to the wave equation with moving time : Central and non-central limit theorems ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 172 (2024), p. 104333. ISSN : 0304-4149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2024.104333>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414924000395>.
- [TZ24c] C.A. TUDOR et J. ZURCHER. « Multidimensional Stein–Malliavin calculus for the multivariate Gaussian distribution ». Preprint. 2024.
- [TZ24d] C.A. TUDOR et J. ZURCHER. « The spatial average of solutions to SPDEs is asymptotically independent of the solution ». Preprint. 2024. URL : <https://arxiv.org/abs/2404.11147>.
- [UZ89] A. USTUNEL et M. ZAKAI. « On Independence and Conditioning On Wiener Space ». In : *The Annals of Probability* 17.4 (1989), p. 1441-1453. DOI : 10.1214/aop/1176991164. URL : <https://doi.org/10.1214/aop/1176991164>.
- [Wal86] J. B. WALSH. « An introduction to stochastic partial differential equations ». In : *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984*. Sous la dir. de P. L. HENNEQUIN. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1986, p. 265-439. ISBN : 978-3-540-39781-6.
- [Wil91] C. H. WILCOX. « The Cauchy Problem for the Wave Equation with Distribution Data : an Elementary Approach ». In : *The American Mathematical Monthly* 98.5 (1991), p. 401-410. DOI : 10.1080/00029890.1991.12000777.
- [Zak85] M. ZAKAI. « The Malliavin Calculus ». In : *Acta Applicandae Mathematicae* 3 (1985), p. 175-207. URL : <https://doi.org/10.1007/BF00580703>.
- [Zam21] L. ZAMBOTTI. « A brief and personal history of stochastic partial differential equations ». In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 41.1 (2021), p. 471-487. ISSN : 1078-0947. DOI : 10.3934/dcds.2020264. URL : <https://www.aims sciences.org/article/id/28a76574-7ff5-4099-bb47-55b7d68299c2>.