Université de Lille
École doctorale Madis-631
Laboratoire Paul Painlevé

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Présentée et soutenue par

Jérôme Milot

le 24 juin 2026

Formules du coproduit des algèbres affines quantiques et des Yangiens

Composition du jury :

Rapporteurs :	Nicolas Guay	Professeur à l'Université d'Alberta (Canada)
	Loïc Poulain d'Andecy	MCF à l'Université de Reims
Examinateurs :	Justine Fasquel	MCF à l'Institut Mathématiques de Bourgogne
Président du jury :	Marc Rosso	Professeur à l'Université Paris Cité
Directeurs de thèse :	Alexis Virelizier	Professeur à l'Université de Lille
	Huafeng Zhang	MCF à l'Université de Lille

Résumé

Les groupes quantiques sont des algèbres de Hopf apparues pour construire des solutions de l'équation de Yang-Baxter, dans l'étude des systèmes intégrables en physique. Deux familles remarquables de groupes quantiques sont à l'origine de nombreux développements en théorie des représentations, en géométrie et en combinatoire : les algèbres affines quantiques et les Yangiens. En 1988, Drinfeld propose une nouvelle présentation de ces groupes quantiques, plus adaptée à l'étude de leur théorie des représentations. Néanmoins, l'expression du coproduit de ces générateurs de Drinfeld est, en général, inconnue.

L'objectif principal de cette thèse est de décrire explicitement le coproduit pour une large famille de générateurs de Drinfeld pour les algèbres affines quantiques et les Yangiens en type A. Les formules explicites que nous obtenons sont simples et ont des applications directes en théorie des représentations, comme la compatibilité du coproduit avec certains quotients remarquables des Yangiens et des algèbres affines quantiques.

Abstract

Quantum groups are Hopf algebras that were introduced in order to construct solutions of the Yang–Baxter equation, arising in the study of integrable systems in physics. Two remarkable families of quantum groups have led to numerous developments in representation theory, geometry, and combinatorics: quantum affine algebras and Yangians. In 1988, Drinfeld introduced a new presentation of these quantum groups, better suited to the study of their representation theory. However, the coproduct of these Drinfeld generators is, in general, not known explicitly.

The main goal of this thesis is to describe explicitly the coproduct for a large family of Drinfeld generators for quantum affine algebras and Yangians of type A. The explicit formulas we obtain are simple and have direct applications in representation theory, such as the compatibility of the coproduct with certain distinguished quotients of Yangians and of quantum affine algebras.

Remerciements

Une thèse, c'est un long parcours de trois à quatre années. À mon échelle, cela représente plus d'un neuvième de mon existence. Ça n'est pas rien. Et au-delà de toute l'expérience académique et des richesses mathématiques de ce doctorat, ce fut avant tout une sacrée aventure humaine. Alors, quitte à en faire trop, je souhaite aujourd'hui remercier tout un tas de personnes. Que vous ayez été déterminants dans mon parcours jusqu'à la thèse, que vous ayez été un soutien important ou que vous m'ayez rendu la vie plus agréable au détour des couloirs du M2 ou du M3 du laboratoire, si vous figurez dans la (longue) liste suivante, c'est que je vous suis reconnaissant et qu'il me paraît important que vous le sachiez. Il y aura beaucoup de fois le mot "merci", mais loin de se galvauder, je pense que ce terme prend tout son sens lorsqu'il est sincèrement prononcé. Alors : MERCI.

Je remercie Huafeng Zhang et Alexis Virelizier, mes encadrants. Huafeng, merci de m'avoir introduit au monde fabuleux des groupes quantiques, et merci pour toutes ces discussions fructueuses, ainsi que pour ta patience à répondre inlassablement aux mêmes questions qui surgissent dans le dédale des groupes quantiques. Je suis intimement convaincu que ton encadrement a été le plus adapté pour moi, me laissant libre dans mon travail tout en étant toujours là quand j'en ai eu besoin. Tu as été un excellent encadrant, je suis fier d'avoir été ton premier doctorant et je suis sûr que les prochains auront beaucoup de chance de t'avoir. Alexis, merci pour ces discussions topologiques qui ne figureront finalement pas dans ce sujet de thèse, mais qui m'ont ouvert à d'autres horizons. Merci également pour ton accompagnement dans toutes les folies administratives qui peuplent un doctorat et pour ton aide dans mes perspectives futures. Je vous suis tous deux extrêmement reconnaissant.

Je remercie également Nicolas Guay et Loïc Poulain d'Andecy, mes rapporteurs. Merci d'avoir pris le temps de relire mon manuscrit et merci pour vos retours. Loïc, je te remercie également d'avoir été un excellent encadrant de stage de M2 à Reims - qui sait si j'aurais eu la force de trouver ce doctorat sans ton soutien sans faille d'alors ? - et merci d'avoir accepté d'être membre de mon CSI. Merci également à Justine Fasquel et Marc Rosso pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Il me semble de bon aloi de procéder maintenant aux remerciements des membres du laboratoire qui ont une importance qu'ils ne peuvent imaginer au cours de ces trois années de thèse. Comment ne pas commencer par toi, Jérémy Zurcher (ça fait bizarre, non ?), qui m'a accueilli le premier jour alors que je n'étais qu'un petit nouveau perdu dans ce nouveau monde ? À l'ENS déjà, je savais que tu étais un chic type et je regrettais de ne pas avoir eu l'occasion de plus te connaître : faute réparée au cours de ces deux années partagées à Lille. Merci pour tous ces fous rires, ces discussions endiablées sur l'OM, ces voyages insensés à Oostende pour soutenir le KV(D)O. Merci de m'avoir accueilli, moi le parasite du jeudi soir, pendant toute cette année, au rythme de sessions gaming plus ou moins inspirées et de soirées européennes endiablées (non, on n'oublie pas l'horrible OGC Nice). Ton départ aux États-Unis a créé un petit vide au labo, que seules des soirées foot et JV sauront rattraper. Merci pour tout, Dr JéZu.

Merci à tous les membres du bureau quantique. Matthew Cellot, mon jumeau quantique. Bien que nos sujets aient été si similaires sur le papier, il faut avouer que nos intérêts

mathématiques ont bien vite divergé. Merci de m'avoir quand même expliqué maintes fois ce qu'est ton domaine, d'avoir été une présence si rassurante (et drôle) tout au long de mon doctorat. J'espère avoir encore l'occasion d'admirer ton flegme dans les années à venir ! Théo Deturck, mon chef quantique, la terreur de Fleurbaix, l'ours de Nieppe, le fou du bus de Laventie, le boulanger de Villeneuve-d'Ascq et autres surnoms que la décence me somme de taire ici. Ta curiosité mathématique a été une riche source d'inspiration pour moi au cours de ces trois années, et je suis certain qu'un bel avenir mathématique t'attend. Et dans le cas contraire, je suis sûr qu'il restera une place dans la charnière centrale de l'équipe de France de football. En attendant, au plaisir de te retrouver pour des pauses prolongées dans de belles journées ! Merci également à ta famille pour m'avoir hébergé si souvent et si gentiment. Enfin, merci Rodrigo Thomaz da Silva, fier représentant du bureau quantique au Brésil. Tu ne seras resté qu'une année, mais tu es définitivement l'une des plus belles rencontres humaines qu'il m'ait été donné de faire. Merci pour toutes ces discussions, ces recommandations sur la culture brésilienne (comme Construção) et sur les jeux vidéo (même si, à l'heure d'écrire ces mots, tu n'as toujours pas joué à Silksong ...). Bonne route mon ami, en espérant te revoir prochainement dans nos terres nordiques ou que tu aies un jour l'occasion de me montrer les poteaux brésiliens pour de vrai !

Je tiens également à remercier tous les membres du laboratoire, de l'équipe de topologie au bureau 12 (dédicace au séminaire 1236), et à tous ces gens qui ont rendu ma vie de thésard plus douce et surtout plus drôle. Merci à tous les footeux (surtout aux organisateurs, vu la difficulté que l'on rencontre pour réunir suffisamment de joueurs à chaque fois ...). En vrac, puissent me pardonner les oubliés : Antonin, Christophe, Christopher, Didier, Erwan, François, Ivan, Julie, Maxence, le Nicole, Quentin, Samuel, Stephan, Valentin, Victor. Un merci tout particulier à Marvin, pour toutes ces fois où tu m'as embarqué dans des missions pédagogiques, comme l'organisation des TFJM^2 ou le jury des olympiades. Avoir un ami qui partage mon appétence pour l'enseignement a été un grand soulagement pendant cette thèse. Au-delà du laboratoire, je remercie également la région des Hauts-de-France qui a financé mon doctorat.

Merci également aux non-mathématiciens du laboratoire. J'ai une pensée toute particulière pour toi, Fathia, qui a été ma première interaction au bureau et qui est mon rayon de soleil de la semaine à chaque fois que j'ai le plaisir de te croiser pendant ton service. Je pense également à Christelle, Frédérique et Sabine, toujours agréables et qui ont toujours été d'une efficacité redoutable au moindre de mes problèmes.

Parce qu'une thèse, ce n'est pas que dans un seul laboratoire, merci également à Antoine et Joris, pour l'organisation du séminaire sur les algèbres de Lie inter-laboratoires entre Lille et Montpellier. Ces différents exposés m'ont été précieux pour revenir aux bases de ces magnifiques objets et découvrir leurs approfondissements dans vos différents centres d'intérêt. Et puis, entre nous, on s'est quand même bien marrés. J'ai aussi une pensée pour d'autres doctorants rencontrés pendant ma thèse : Francesca, Hicham, Lior, Marc, Nathan, Ricardo, Yoann.

Au-delà de toutes ces rencontres effectuées lors de mon doctorat, j'aimerais remercier tous mes amis de l'ENS Rennes, thésards eux aussi, qui ont toujours été un soutien de poids pour moi au cours de ces trois années. Je pense notamment aux crêpes normaliennes, qui

oscillent entre tentatives d'assassinat en haute altitude sur mon humble personne et festins cuisinés d'une main de maître pour me réconforter. Merci Antoine (je t'ai déjà remercié, mais merci quand même pour ces parties endiablées et décérébrées sur les méchants orcs, et ton hospitalité à Montpellier), Éloan (merci de maintenir mon amour du rap au gré de débats dans lesquels je partage librement mes mauvais goûts et de discuter des mathématiques pour l'amour de cette science), Jad (même si l'on a peu eu l'occasion de se fréquenter ces trois dernières années, te revoir à Clermont m'a vraiment fait plaisir), Julius (puisses-tu pardonner ceux qui t'ont oublié dans leurs remerciements), Maxence (cette section n'est que trop petite pour noter tout ce que tu as apporté dans ma vie depuis que l'on se connaît, merci pour ton soutien de toujours, ta gentillesse si précieuse et toutes ces courses à pied où tu finis 20 minutes devant moi), Matthieu (merci de jouer les organisateurs avec tant de sérieux et de supporter toutes mes taquineries), Tintin (merci pour tous ces fous rires, une part de moi regrettera toujours que cette thèse n'ait pas eu la chance de se faire en ta compagnie comme lors de notre stage de M1). Merci également à mes amis randonneurs (curieusement, ce groupe n'a pas de nom) : Nathanaël (mon goat, cette section est bien trop petite pour toi, mais merci de m'avoir initié à Geoguessr pendant cette thèse et de m'avoir offert une véritable passion qui m'a permis de m'aérer pendant ces trois années ; à la prochaine coupe de France, je finis devant toi !), Perrine (toi aussi, cette section est bien trop étroite, merci pour ta joie et ta vaste curiosité mathématiques ; la semaine passée en conférence à Oléron avec toi fait partie des plus beaux moments de ma thèse), Romain (merci d'être toujours d'une bêtise hilarante et de ne strictement jamais parler de maths avec moi), Sébastien (merci pour ton humour dont je ne me lasse jamais et tes recommandations cinématographiques), Thibault (merci pour ces discussions profondes et tes recommandations vidéoludiques, je suis ravi que tu aies trouvé ta voie), Ulysse (merci pour toute ton humanité, je profite de ces remerciements pour promettre solennellement d'enfin assister à une de tes représentations) et Victor (merci pour tes accueils à Mtp city et merci de t'être infligé mon horrible séminaire des doctorants en première année, ça m'a touché que tu viennes). J'en profite au passage pour te remercier, Thomas, toi qui as été comme un parrain à l'ENS et qui depuis n'a pas arrêté de me donner de bons conseils et de me soutenir, que ce soit pour cette thèse ou même pour l'avenir. Je souhaite également remercier Charles, grâce à qui j'ai évolué humainement et qui m'a aidé à vivre plus simplement.

Quitte à remonter un peu plus loin, j'aimerais remercier l'intégralité de mes profs de mathématiques du secondaire. J'ai été dans un collège réputé difficile, dans une ville principalement connue pour les émeutes de 2005, Jean Jaurès à Montfermeil. Puis j'ai eu la chance d'être dans le meilleur lycée public de Seine-Saint-Denis, Albert Schweitzer au Raincy. Ces deux expériences, si différentes, ont été constitutives de mon identité et m'ont mené jusqu'ici. J'en retiens qu'il ne faut pas se fier aveuglément aux mauvaises réputations (surtout celles, scandaleuses, sur le 93), et que j'ai eu de la chance d'avoir des professeurs passionnés et dévoués tout au long de ma scolarité. Alors, merci mesdames et messieurs : Bénozène, Khazaz, Moreau, Lebas, Huillery-Perrin et Rajot. Vous avez toutes et tous contribué à mon amour pour les mathématiques, et je vous suis très reconnaissant de m'avoir ouvert cette voie. Je pense tout particulièrement à Mme Rajot qui m'a appris l'existence des prépa et des ENS, et m'a convaincu que je pourrais faire une très belle prépa à Schweitzer. Il semblerait

que vous ayez - encore une fois - eu raison.

J'en profite également pour remercier mes professeurs de prépa, tout particulièrement ceux de mathématiques : M. Bruiltet et Mme Rouanet. Tous deux m'avez appris la beauté inhérente à la rigueur mathématique et m'avez soutenu dans mes rêves d'ENS. Je n'y serais pas parvenu sans vous. Merci également à tous deux de m'avoir permis d'expérimenter le rôle de colleur, ce qui m'a permis d'avoir une première expérience d'enseignement qui m'a été précieuse pour les TD. Un merci tout particulier à M. Reichert : pour ton immense soutien lors de la prépa, je n'oublie pas que j'en suis là parce que tu as cru en moi. Je tiens aussi à brièvement remercier mon groupe de 5/2 : Elio, Patrick, Quentin (merci pour l'hébergement lors de ma conf à Nancy), Walid. Même si l'on ne se parle plus que trop peu ces derniers temps, vous êtes le point de départ de tout ce fantastique parcours. J'ai aussi une pensée émue pour Lucian, qui nous a quitté l'année dernière sans que je n'ai jamais eu l'occasion de lui exprimer toute ma gratitude.

Avant de conclure ces interminables remerciements avec ma famille, il convient de citer ceux qui sont comme ma famille depuis presque dix ans maintenant. Les enfants terribles, Bastien et Camille. Camille, même si l'on se côtoie moins depuis ton expatriation en Suisse, on se sait. Merci de me supporter sur CS et dans tout mon parcours. Même docteur, je resterai le petit être que tu as connu il y a plus de dix ans maintenant. Bastien, je pense qu'il n'y a pas assez de mots dans la langue française pour t'exprimer toute ma reconnaissance et illustrer l'impact que tu as eu sur ma vie. Tu es mon meilleur ami, et ton soutien a de nombreuses fois été la panacée face à mes doutes et mes difficultés au cours de cette thèse. Merci d'avoir toujours cru en moi, de m'avoir toujours accepté entièrement comme je suis, et surtout, merci d'être toi.

Maintenant, place à ceux qui m'ont vu grandir, avec bienveillance et amour. Je tiens d'abord à remercier la famille d'Alba, qui avec le temps est devenue ma famille. Merci pour votre accueil depuis plus de 8 ans déjà. Merci bien sûr à l'intégralité de ma famille qui m'a toujours soutenu. À mes frères et soeurs : Benoît, Damien (même si je pense que tu n'as toujours pas bien compris ce que je faisais, ni pourquoi ça me rapportait si peu au vu de mon nombre d'années d'étude !), Fabienne et François (j'espère que tu t'es remis du fait qu'il existe des boules carrées en maths). À leurs partenaires, tout particulièrement Céline qui m'aura vu grandir de la maternité au doctorat. À leurs enfants : Lilas, Lucas, Mattéo, Roman, Ugo, Yéléna (tu m'as dit que tu préférais avec accents ...), Yuna (née pendant cette thèse, tu es la seule qui pourra m'appeler docteur tonton !). J'ai également une pensée pour mes grands-parents. Mamie, tu m'as toujours dit de travailler sans trop me fatiguer. J'espère que, de là-haut, tu me pardonneras cette parenthèse insensée durant laquelle je n'ai pas appliqué ce précepte. Pépé Gilbert, ces dernières années tu étais convaincu que j'étais militaire. Tu es parti au début de cette thèse, mais j'espère que ce manuscrit te permettra de comprendre que c'est pas demain la veille que je serai sergent. Mamie Francine, je sais que tu es fière de moi. Parce que les "plaques" veulent dire beaucoup plus qu'il n'y paraît.

Je remercie bien évidemment mes parents. Papa, tu m'as toujours dit qu'il n'y avait pas que l'académique dans la vie. En tant que fils rebelle, il semble que j'ai quand même décidé d'y centrer ma vie. Merci de m'avoir transmis ta curiosité et ton intelligence de travail. Maman, je sais ô combien tu es fière que je parvienne au bout de cette longue aventure de dix années

dans le supérieur. Merci d'avoir toujours été derrière moi et de m'avoir transmis ta volonté de réussir. Ton petit CPC est devenu docteur. Merci à tous les deux pour votre amour et, plus fondamentalement, d'être deux humains formidables que j'admire.

Enfin, comment finir par quelqu'un d'autre que toi, mon amour ? Tu es la plus cool. Nous nous sommes rencontrés au crépuscule de ma 3/2, lorsque j'hésitais à faire une 5/2 et commençais à me demander si j'étais fait pour les mathématiques. Cette thèse a été pavée de doutes, de peur de ne pas y arriver. Mais tu as été le remède de tous mes maux, comme tu l'as toujours été. Merci d'être la plus belle merveille de ma vie et de m'avoir supporté pendant ces trois années. En espérant que tu aies l'énergie de me supporter quelques décennies supplémentaires. Je t'aime.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **15**
Contexte historique 15
Résumé des résultats 22
Plan de la thèse 25

1 Coproduit des A-séries en type A_1 **27**
Introduction 27
1.1 A-séries et Yangiens tronqués 28
1.2 Formule du coproduit pour le Yangien 30
1.2.1 Simplification du problème 31
1.2.2 Formules du coproduit 31
1.3 Compatibilité entre la troncature et le coproduit 34
1.4 Yangiens décalés 35
1.5 A-séries et algèbres affines quantiques tronquées 37
1.6 Formules du coproduit pour l'algèbre affine quantique 40
1.7 Compatibilité entre la troncature et le coproduit 41
1.8 Algèbres affines quantiques décalées 43

2 Coproduit des T-séries et des S-séries en type A **47**
Introduction et notations 47
2.1 Yangiens, S-séries, Théta-series 50
2.1.1 Yangiens 51
2.1.2 S-séries et Théta-séries 53
2.2 Formules du coproduit des S-séries en type A 55
2.3 Algèbres affines quantiques, T-séries, Théta-séries 59
2.3.1 Algèbres affines quantiques 59
2.3.2 T-séries et Théta-series 61
2.4 Vecteurs de racine et R-matrice universelle 62
2.5 Modules préfondamentaux positifs 67

2.6 Formule du coproduit des T-séries en type A_2 70
2.7 Appendice : Yangiens décalés et associateurs 75

Bibliographie **80**

INTRODUCTION

Contexte historique

R-matrices et groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo

Les groupes quantiques sont une famille d'algèbres de Hopf apparues dans l'étude des systèmes intégrables en physique. Ces algèbres ont été introduites mathématiquement dans les années 1980 par Drinfeld et Jimbo pour construire des solutions de l'équation de Yang-Baxter :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \in \mathrm{End}(V \otimes V \otimes V) \tag{1}$$

où V est un espace vectoriel et R est un automorphisme linéaire sur $V \otimes V$. Dans cette équation

$$R_{12} = R \otimes 1, \quad R_{23} = R \otimes 1 \text{ et } R_{13} = (1 \otimes \tau) \circ R_{12} \circ (1 \otimes \tau)$$

où $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ pour $v, w \in V$. Les solutions de cette équation jouent un rôle fondamental en physique des systèmes intégrables [Bax82].

À une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie $\mathfrak{g}$ et à un paramètre $q \in \mathbb{C}^\times$, Drinfeld et Jimbo [Dri85, Jim85] associent une algèbre de Hopf $U_q(\mathfrak{g})$ qui est une déformation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. En notant r le rang de $\mathfrak{g}$, le **groupe quantique de Drinfeld-Jimbo** $U_q(\mathfrak{g})$ est engendré, en tant qu'algèbre associative, par E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} pour $1 \leq i \leq r$.

Sa structure d'algèbre de Hopf est déterminée par le coproduit suivant :

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i; \quad \Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}; \quad \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i. \tag{2}$$

Une des propriétés fondamentales du groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ est l'existence d'une **R-matrice universelle** $\mathcal{R}$. C'est un élément inversible dans une complétion de $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ tel que, pour toute représentation V de $U_q(\mathfrak{g})$ de dimension finie, l'évaluation de $\mathcal{R}$ sur $V \otimes V$ induit un automorphisme

$$\mathcal{R}_{VV} \in \mathrm{GL}(V \otimes V)$$

qui est solution de l'équation de Yang-Baxter (1). Ces solutions ont des applications profondes en topologie de basse dimension, notamment dans la construction d'invariants quantiques des nœuds (par Jones [Jon85]) et des 3-variétés (par Reshetikhin-Turaev [RT91]).

La construction des groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo et de leurs R-matrices universelles s'étend à une grande famille d'algèbres de Lie de dimension infinie, notamment les algèbres de Kac-Moody [Kac90]. Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement à la classe des algèbres de Kac-Moody affines.

Algèbres affines quantiques et Yangiens

Pour une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie $\mathfrak{g}$ de rang r, notons $\hat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Kac-Moody affine associée (qui est de dimension infinie) construite par extension centrale de l'algèbre de lacets $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$, voir [Kac90]. Le groupe quantique de Drinfeld-Jimbo associé à $\hat{\mathfrak{g}}$ est appelé **algèbre affine quantique** et noté $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Un autre groupe quantique associé à $\mathfrak{g}$ a été introduit par Drinfeld en 1985 [Dri85], appelé **Yangien** et noté $Y(\mathfrak{g})$. C'est une déformation de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de courants $\mathfrak{g}[z]$. Il est engendré (en tant qu'algèbre associative) par x et $J(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$, et son coproduit est défini sur ces générateurs par des formules explicites. Cette construction du Yangien est appelée **J-présentation**.

Les algèbres affines quantiques et les Yangiens ont fait l'objet de nombreux travaux, notamment en géométrie algébrique et en combinatoire. Du point de vue de la théorie des représentations, la classification des représentations irréductibles de dimension finie des Yan-

giens a été établie par Drinfeld [Dri88], puis une classification analogue a été obtenue par Chari-Pressley [CP94] pour les algèbres affines quantiques. Les représentations de ces groupes quantiques ont également été abordées sous un prisme combinatoire avec les bases cristallines de Kashiwara [Kas90, Kas02]. Dans les années 90, des réalisations géométriques des algèbres affines quantiques et de leurs représentations irréductibles de dimension finie ont été construites par Ginzburg-Vasserot [GV93] et par Nakajima [Nak01]. Des constructions analogues pour le Yangien ont été réalisées par Varagnolo [Var00]. Dans les années 2010, la théorie des représentations de ces groupes quantiques a connu un essor notable. Par exemple, Hernandez-Leclerc [HL10] ont initié un programme de catégorifications monoïdales des algèbres amassées de Fomin-Zelevinsky [FZ02] via des catégories de représentations des algèbres affines quantiques. Dans une autre direction, Maulik-Okounkov [MO19] ont développé une construction géométrique de R-matrices via les enveloppes stables. Notons également qu'une équivalence de catégories entre les représentations de dimension finie des Yangiens et des algèbres affines quantiques a été établie par Gautam-Toledano Laredo [GTL16]. Plus récemment, dans les études de la géométrie des Grasmanniennes affines et des branches de Coulomb en physique théorique, nous voyons apparaître des quotients remarquables des Yangiens [KWWY14, BFN19, NW23] et des algèbres affines quantiques [FT19, VV25].

Ainsi, depuis l'avènement des Yangiens et des algèbres affines quantiques, ces objets continuent de susciter un intérêt considérable. Nous nous intéressons particulièrement à la structure **monoïdale** des catégories de représentations de ces groupes quantiques.

Nouveaux générateurs de Drinfeld

Les générateurs de Drinfeld-Jimbo pour $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et la J-présentation de $Y(\mathfrak{g})$ ne sont pas adaptés à l'étude des représentations de dimension finie de ces groupes quantiques. Pour avoir une théorie de plus haut poids de représentations, Drinfeld a introduit une nouvelle présentation des algèbres affines quantiques et des Yangiens [Dri88].

Dans la nouvelle présentation de l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, les générateurs sont $x_{i,p}^{\pm}$ et $\phi_{i,p}^{\pm}$ pour $1 \leq i \leq r$ et $p \in \mathbb{Z}$. Leurs relations sont explicitées dans la définition 2.3.3. Ces

générateurs sont encodés par les séries génératrices

$$x_i^{\pm}(z) = \sum_{p \in Z} x_{i,p}^{\pm} z^p \quad \text{et} \quad \phi_i^{\pm}(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_{i,p}^{\pm} z^p \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r.$$

Un exemple de relations entre les séries génératrices est :

$$\phi_i^-(z) x_j^{\pm}(w) = \frac{q^{\pm c_{ij}} w - z}{w - q^{\pm c_{ij}} z} x_j^{\pm}(w) \phi_i^-(z). \tag{3}$$

Les $\phi_{i,p}^{\pm}$ engendrent une sous-algèbre commutative, appelée **sous-algèbre de Drinfeld-Cartan**. Les $\phi_i^{\pm}(z)$ sont appelées **séries de Drinfeld-Cartan**. L'équivalence entre la construction originale de Drinfeld-Jimbo et la nouvelle présentation de Drinfeld a été énoncée dans l'article de Drinfeld [Dri88], puis démontrée par Beck [Bec94] et Damiani [Dam12, Dam15].

Concernant le Yangien dans sa nouvelle présentation de Drinfeld, les générateurs sont $x_{i,m}^{\pm}$ et $\xi_{i,m}$ pour $1 \leq i \leq r$ et $m \in \mathbb{N}$. Leurs relations sont explicitées dans la définition 2.1.2. Comme pour l'algèbre affine quantique, ces générateurs sont encodés dans des séries génératrices

$$x_i^{\pm}(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} x_{i,m}^{\pm} z^{-m-1} \quad \text{et} \quad \xi_i(z) = 1 + \sum_{m \in \mathbb{N}} \xi_{i,m} z^{-m-1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r.$$

Les générateurs $\xi_{i,m}$ engendrent une sous-algèbre commutative de $Y(\mathfrak{g})$, appelée **sous-algèbre de Drinfeld-Cartan**. L'équivalence entre la J-présentation et la nouvelle réalisation a été énoncée par Drinfeld [Dri88], avec une preuve complète donnée par Guay-Regelskis-Wendlandt [GRW19].

Pour étudier la structure monoïdale des catégories des représentations de dimension finie, il est crucial de comprendre le coproduit sur les générateurs de Drinfeld. Actuellement, il n'y a pas de formule générale de ce coproduit pour ces générateurs. Dans $Y(\mathfrak{sl}_2)$, le coproduit de la série de Drinfeld-Cartan $\xi_1(z)$ est calculé par Molev [Mol03] :

$$\Delta(\xi_1(z)) = (1 \otimes \xi_1(z)) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) (x_1^-(z+1))^k \otimes (x_1^+(z+1))^k \right) \times (\xi_1(z) \otimes 1)\,.$$

Notons que des formules plus générales pour le type A ont été calculées par Crampé [Cra04],

en utilisant notamment la présentation RTT. Nous constatons ici que, déjà pour $\mathfrak{sl}_2$, le coproduit de la série de Drinfeld-Cartan est compliqué.

Dans cette thèse, nous donnons des formules explicites et simples de coproduit pour certaines modifications de séries de Drinfeld-Cartan $\phi_i^{\pm}(z)$ et $\xi_i(z)$ pour $1 \leq i \leq r$.

A-séries et groupes quantiques tronqués

Les séries Gerasimov-Kharchev-Lebedev-Oblezin, abrégées en séries GKLO ou A-séries, sont une famille de séries génératrices de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan d'un Yangien. Elles sont introduites par ces quatre auteurs [GKLO05] afin de construire explicitement une famille de représentations de dimension infinie du Yangien.

Les A-séries $A_i(z)$ pour $1 \leq i \leq r$ sont déterminées par le système d'équations suivant dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan :

$$\xi_i(z) = \frac{1}{A_i(z)A_i(z-d_{ii})} \prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ c_{ij}<0}} \prod_{t=1}^{-c_{ij}} A_j(z-d_{ij}-td_{jj}) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r.$$

Ici, $d_{ij} = \frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{2}$ et $c_{ij} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ où les α_i pour $1 \leq i \leq r$ sont les racines simples de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $(,)$ est une forme bilinéaire obtenue par normalisation de la forme de Killing.

Les A-séries donnent lieu à une famille remarquable de quotients du Yangien. À tout r-uplet de séries de Laurent $\varphi_i(z) \in \mathbb{C}((z^{-1}))$ pour $1 \leq i \leq r$ est associée une algèbre $Y^{\varphi}(\mathfrak{g})$. Celle-ci est définie comme le quotient de $Y(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les coefficients de z^k des séries de Laurent $\varphi_i(z)A_i(z) \in Y(\mathfrak{g})((z^{-1}))$ pour tous $1 \leq i \leq r$ et $k < 0$. Elle est appelée **Yangien tronqué** dans les travaux de Kamnitzer-Webster-Weekes-Yacobi [KWWY14] et Bravelman-Finkelberg-Nakajima [BFN19]. Les travaux récents [KTW+19a, KPW22, KWWY24, HZ24] sur les représentations des Yangiens tronqués suggèrent que les quotients tronqués devraient être compatibles avec le coproduit de Drinfeld-Jimbo. Plus précisément, nous formulons la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Soient φ, ψ deux r-uplets de*

séries de Laurent. Alors le coproduit de $Y(\mathfrak{g})$ induit un morphisme d'algèbres

$$\Delta^{\varphi,\psi} : Y^{\varphi\psi}(\mathfrak{g}) \longrightarrow Y^{\varphi}(\mathfrak{g}) \otimes Y^{\psi}(\mathfrak{g})$$

tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\quad\Delta\quad} & Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi^{\varphi\psi}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi^{\varphi}\otimes\pi^{\psi}} \\ Y^{\varphi\psi}(\mathfrak{g}) & \dashrightarrow^{\Delta^{\varphi,\psi}} & Y^{\varphi}(\mathfrak{g}) \otimes Y^{\psi}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

où $\pi^{\varphi} : Y(\mathfrak{g}) \longrightarrow Y^{\varphi}(\mathfrak{g})$ est la surjection canonique du Yangien vers son quotient.

Pour l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, nous disposons des A-séries $\mathcal{A}_i^{\pm}(z)$ et de ses quotients tronqués $U_q^{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})$ indexés par les r-uplets φ de séries de Laurent. Nous formulons la même conjecture de compatibilité entre la troncature et le coproduit.

T-séries des algèbres affines quantiques et S-séries des Yangiens

La sous-algèbre de Drinfeld-Cartan d'une algèbre quantique admet une autre famille de séries génératrices : les T-séries. Elles sont apparues dans le travail de Frenkel-Hernandez [FH15] sur les spectres des systèmes intégrables quantiques. Leur définition utilise la notion de matrice de monodromie. La R-matrice universelle de l'algèbre affine quantique $\mathcal{R}(z)$ est une série formelle en z à coefficients dans une complétion de $U_q(\mathfrak{b})\otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Ici, $U_q(\mathfrak{b})$ est la sous-algèbre de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, appelée **sous-algèbre de Borel**, engendrée par E_i, K_i pour $0 \leq i \leq r$. Pour une représentation V de $U_q(\mathfrak{b})$ ayant une base $\mathcal{B}$ respectant certaines conditions (voir [FR92]), la **matrice de monodromie** $(M_{u,v}(z))_{u,v,\in\mathcal{B}}$ est construite en appliquant le premier facteur tensoriel de la R-matrice universelle à V comme suit, pour $v \in \mathcal{B}$:

$$\mathcal{R}(z) \cdot (v \otimes 1) = \sum_{u\in\mathcal{B}} u \otimes M_{u,v}(z) \in (V \otimes U_q(\hat{\mathfrak{g}}))\,[[z]].$$

Dans le cas particulier où V est la i-ème représentation préfondamentale positive au sens de Hernandez-Jimbo [HJ12] pour $1 \leq i \leq r$, la **T-série** $T_i(z)$ est l'entrée diagonale $M_{uu}(z)$

associée à l'unique vecteur de base $u \in \mathcal{B}$ de plus bas poids. Cette matrice de monodromie est un point-clé de la démonstration donnée par Frenkel-Hernandez [FH15] de la polynomialité de Baxter sur les spectres de systèmes intégrables quantiques, conjecturée par Frenkel-Reshetikhin [FR99].

Les relations entre les générateurs de Drinfeld et les T-séries $T_i(z)$ sont beaucoup plus simples que les relations avec les séries de Drinfeld-Cartan $\phi_i^{\pm}(z)$. Nous avons par exemple une telle relation :

$$T_i(z)x_j^-(w) = (1 - \delta_{ij}wz)\, x_j^-(w)T_i(z) \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq r. \tag{4}$$

Au niveau d'algèbre de Hopf, le coproduit des T-séries est plus simple que le coproduit des séries de Drinfeld-Cartan. En effet, Zhang [Zha24] a établi une propriété (dite de polynomialité) pour le coproduit des T-séries que ne vérifie pas le coproduit des séries de Drinfeld-Cartan. Il calcule notamment le coproduit de la T-série $T_1(z)$ pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$:

$$\Delta\left(T_1(z)\right) = \left(1 \otimes T_1(z)\right) \exp_q\left((q - q^{-1})x_{1,0}^- \otimes x_{1,-1}^+ z\right)\left(T_1(z) \otimes 1\right).$$

Les T-séries des algèbres affines quantiques proviennent des matrices de monodromie de représentations de la sous-algèbre de Borel. Cependant, cette dernière n'est pas connue pour les Yangiens. Il est tout de même possible de définir des séries génératrices de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan de $Y(\mathfrak{g})$, appelées **S-séries**, qui vérifient l'analogue de la relation (4) :

$$S_i(z)x_i^-(w) = (1 - \delta_{ij}wz^{-1})x_i^-(w)S_i(z) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r. \tag{5}$$

Le coproduit des S-séries $S_i(z)$ possède une propriété de polynomialité similaire au coproduit des T-séries. Le coproduit de $S_1(z)$ dans $Y(\mathfrak{sl}_2)$ est calculé par Zhang :

$$\Delta\left(S_1(z)\right) = \left(1 \otimes S_1(z)\right) \exp\left(-x_{1,0}^- \otimes x_{1,0}^+ z^{-1}\right)\left(S_1(z) \otimes 1\right).$$

Notons que ces formules sont beaucoup plus simples que la formule du coproduit de $\xi_1(z)$ donnée par Molev.

Question 1. *Donner une formule simple du coproduit pour les T-séries de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ et pour les S-séries de $Y(\mathfrak{g})$ pour toutes algèbres de Lie simples de dimension finie.*

Résumé des résultats

Les principaux résultats de cette thèse sont d'une part une réponse positive de la question 1 pour $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$ et $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ et d'autre part une démonstration de la conjecture 1 pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$ et $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$. Ces résultats ont donné lieu à deux prépublications [Mil25, Mil26].

Calcul du coproduit pour les Yangiens

Le premier résultat concernant le Yangien est le calcul du coproduit de l'unique A-série $A_1(z)$ de $Y(\mathfrak{sl}_2)$.

Théorème 1. *Dans le Yangien $Y(\mathfrak{sl}_2)$:*

$$\Delta(A_1(z)) = A_1(z) \otimes A_1(z) + \left[A_1(z), x^-_{1,0}\right] \otimes \left[x^+_{1,0}, A_1(z)\right].$$

La démonstration de ce théorème utilise l'expression de $A_1(z)$ en fonction de l'unique S-série $S_1(z)$ de $Y(\mathfrak{sl}_2)$:

$$A_1(z) = S_1(z)^{-1} \times S_1(z+1) \times \exp\left(\frac{1}{2}\xi_{1,0} \sum_{k>0} \frac{(-z)^k}{k}\right)$$

ainsi que la formule de Zhang pour le coproduit de $S_1(z)$. Une conséquence du théorème 1 est :

Corollaire 1. *La conjecture 1 est vraie pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$.*

Ce corollaire implique que le produit tensoriel de deux représentations de Yangiens tronqués est la représentation d'un troisième Yangien tronqué.

Le deuxième résultat concernant le Yangien est l'établissement d'une formule simple du coproduit des S-séries pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$ qui généralise la formule de Zhang pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$.

Théorème 2. *Dans le Yangien $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$, le coproduit des S-série est donné par*

$$\Delta(S_i(z)) = (1 \otimes S_i(z)) \exp\left(- \sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant r+1} E_{kj} \otimes E_{jk} z^{-1} \right) (S_i(z) \otimes 1) \text{ pour } 1 \leq i \leq r$$

où $E_{j,k}$ sont les matrices élémentaires de $\mathfrak{sl}_{r+1} \subset Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$.

Ce résultat est obtenu à partir d'une propriété d'entrelacement vérifiée par le coproduit des S-séries, suivant la construction de [Zha24]. D'après cette propriété, le coproduit des S-séries est l'unique solution d'un système d'équations linéaires. Dans le cas de $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$, nous pouvons résoudre ce système.

Calcul du coproduit des algèbres affines quantiques

Les résultats obtenus pour les algèbres affines quantiques sont analogues à ceux obtenus pour les Yangiens, mais les démonstrations sont de nature différente. Pour l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, nous disposons des A-séries $\mathcal{A}_i^{\pm}(z)$ pour $1 \leq i \leq r$ qui sont des séries formelles en $z^{\pm 1}$ à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan. Le premier résultat principal est le coproduit des deux A-séries $\mathcal{A}_1^{\pm}(z)$ pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$.

Théorème 3. *Dans $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$:*

$$\Delta(\mathcal{A}_1^-(z)) = \mathcal{A}_1^-(z) \otimes \mathcal{A}_1^-(z) + q^{-1} z \left[\mathcal{A}_1^-(z), x_{1,1}^-\right] \otimes \left[x_{1,0}^+, \mathcal{A}_1^-(z)\right];$$
$$\Delta(\mathcal{A}_1^+(z)) = \mathcal{A}_1^+(z) \otimes \mathcal{A}_1^+(z) + q z^{-1} \left[\mathcal{A}_1^+(z), x_{1,0}^-\right] \otimes \left[x_{1,-1}^+, \mathcal{A}_1^+(z)\right].$$

La démonstration du théorème 3 est basée sur l'expression des A-séries au moyen des T-séries.

Nous déduisons du théorème 3 :

Corollaire 2. *La conjecture 1 est vraie pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$.*

Une conséquence de ce corollaire est que le produit tensoriel de deux représentations d'algèbres affines quantiques tronquées est une représentation d'une troisième algèbre affine quantique tronquée.

Le deuxième résultat principal est une formule explicite pour le coproduit des T-séries dans $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$. Rappelons que la q-exponentielle est définie par

$$\exp_q(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k)_q!} x^k \quad \text{où } (k)_q = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \text{ et } (k)_q! = \prod_{m=1}^{k} (m)_q.$$

Théorème 4. *Le coproduit des T-séries pour l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ est donnée par :*

$$T_i(z) = (1 \otimes T_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (T_i(z) \otimes 1) \qquad \textit{pour } i \in \{1,2\}$$

où les Theta-séries $\Theta_i(z)$ sont données par :

$$\Theta_1(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{1,0} \otimes x^+_{1,-1} z\right) \exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} z\right);$$
$$\Theta_2(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{2,0} \otimes x^+_{2,-1} z\right) \exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{1,0}, x^+_{2,-1}\right]_{q^{-1}} z\right).$$

De plus, les q-exponentielles commutent dans les deux formules de Theta-séries.

Rappelons que les Theta-séries s'expriment au moyen des matrices de monodromie associées aux représentations préfondamentales de la sous-algèbre de Borel. La démonstration du théorème 4 consiste à calculer ces matrices de monodromie.

Perspectives

Rappelons que le calcul du coproduit des A-séries pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$ (théorème 1) et pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ (théorème 3) est basé sur les calculs de coproduit des S-séries pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$ et des T-séries pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$. Or, nous avons étendu ces résultats aux cas $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$ (théorème 2) et $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ (théorème 4). Nous devrions donc être en mesure de calculer le coproduit des A-séries pour $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$ et $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$.

Notons également que, dans l'article [Zha24], les formules du coproduit des T-séries et des S-séries permettent à l'auteur de construire de nouvelles R-matrices entre des représentations des versions décalées des algèbres affines quantiques et des Yangiens. Nos formules explicites et généralisables aux cas déacalés devraient donc permettre de construire explicitement ces nouvelles R-matrices.

De plus, nous pensons que les propriétés d'entrelacements que vérifient les S-séries du Yangien devraient être calculables pour les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ simplement lacées.

Plan de la thèse

Le premier chapitre, consacré à l'étude des formules du coproduit pour les A-séries de $Y(\mathfrak{sl}_2)$ et $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$, est organisé comme suit. Les sections 1-3 sont dédiées à l'étude du Yangien $Y(\mathfrak{sl}_2)$. Dans la section 1, nous rappelons brièvement la définition du Yangien tronqué. Dans la section 2, nous donnons une formule polynomiale pour le coproduit des séries de troncature dans ce cas. Dans la section 3, nous utilisons cette formule pour établir la compatibilité entre la troncature et le coproduit pour le Yangien et répondre à la conjecture 1 pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$. Dans la section 4, nous étendons directement les résultats obtenus à une famille d'algèbres qui généralisent notre algèbre : les Yangiens tronqués. Les sections 5-8 suivent le même principe, mais pour l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$. Dans la section 5, nous rappelons les définitions des A-séries et des algèbres affines quantiques tronquées. Dans la section 6, nous établissons les formules du coproduit des A-séries. Pour ce faire, nous profitons de la q-exponentielle pour simplifier les raisonnements utilisés pour le Yangien. Dans la section 7, nous en déduisons la réponse à la conjecture 1 pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$. Enfin, la section 8 est une généralisation immédiate de nos résultats aux algèbres affines quantiques décalées.

Le deuxième chapitre, consacré à l'étude des formules du coproduit pour les S-séries de $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$ et pour les T-séries de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$, est organisé comme suit. Dans la section 1, nous rappelons les définitions et les propriétés du Yangien, des S-séries et des Théta-séries dont nous nous servons dans les sections suivantes. Dans la section 2, nous établissons la formule du coproduit pour les S-séries. Une partie de notre démonstration, qui utilise la notion de Yangiens décalés que nous ne rappelons pas à ce stade, est donnée dans l'appendice. Dans la section 3, nous rappelons les définitions et les propriétés des algèbres affines quantiques, de la sous-algèbre de Borel et des T-séries dont nous nous servirons. Dans la section 4, nous rappelons les notions de vecteurs de racine et de R-matrice universelle de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Nous calculons notamment les vecteurs de racine de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$, selon la construction de Damiani [Dam98]. Dans la section 5, nous fournissons une base explicite pour la première représentation préfondamentale positive de la sous-algèbre de Borel de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$, utilisant notamment une base de cette sous-algèbre

formée de vecteurs de racine calculés dans la section 4. Dans la section 6, nous établissons les formules du coproduit des T-séries, en construisant les matrices de monodromie associées aux représentations préfondamentales positives. Dans l'appendice, nous rappelons les définitions et les propriétés de base des Yangiens décalés et nous donnons une démonstration du résultat admis de la section 2.

CHAPITRE 1

COPRODUIT DES A-SÉRIES EN TYPE A_1

Les résultats de ce chapitre sont tirés de [Mil25].

Introduction

Nous rappelons que l'on considère $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie et un paramètre q qui est un nombre complexe non nul, non racine de l'unité. Nous notons $Y(\mathfrak{g})$ le Yangien et $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ l'algèbre affine quantique associés, construits par Drinfeld [Dri85, Dri88] en tant que déformations, en tant qu'algèbre de Hopf, de l'algèbre de courants $\mathfrak{g}[z]$ et de l'algèbre de lacets $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$, respectivement.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une famille de quotients remarquables de nos groupes quantiques : les Yangiens tronqués et les algèbres affines quantiques tronquées. Dans le cas du Yangien, ces algèbres ont été introduites en type A par Brundan-Kleshchev [BK06] afin d'étudier la théorie des représentations des W-algèbres finies, puis généralisées aux autres types dans le cadre de la quantification des tranches de Grassmanniennes affines par Kamnitzer-Webster-Weekes-Yacobi [KWWY14] et l'étude des branches de Coulomb quantiques en 3d N = 4 par Braverman-Finkelberg-Nakajima [BFN19]. Dans le cas des algèbres affines quantiques, des constructions analogues ont été introduites par Finkelberg-Tsymbalyuk [FT19] pour réaliser les branches de Coulomb K-théoriques quantiques.

Une question qui demeure ouverte dans ce domaine concerne la compatibilité entre la procédure de troncature et le coproduit de Drinfeld-Jimbo standard. Dans ce chapitre, nous étudions le premier cas non trivial $\mathfrak{sl}_2$ et établissons le résultat de compatibilité pour les Yangiens et les algèbres affines quantiques. Si les résultats pour les deux groupes quantiques sont similaires, ils requièrent des arguments de nature différente. Par ailleurs, notons que dans les récents travaux de [KTW+19a, KTW+19b, Her23, HZ25], de nombreuses représentations

intéressantes des Yangiens et des algèbres affines quantiques se factorisent via la troncature. Notre résultat permet de démontrer que les produits tensoriels de telles représentations se factorisent également via la troncature pour $\mathfrak{sl}_2$.

Les sections 1-3 sont dédiées à l'étude du Yangien $Y(\mathfrak{sl}_2)$. Dans la section 1, nous rappelons brièvement la définition du Yangien tronqué. Dans la section 2, nous donnons une formule polynomiale pour le coproduit des séries de troncature dans ce cas. Dans la section 3, nous utilisons cette formule pour établir la compatibilité entre la troncature et le coproduit pour le Yangien et répondre à la conjecture 1 pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$. Dans la section 4, nous étendons directement les résultats obtenus à une famille d'algèbres qui généralisent notre algèbre : les Yangiens tronqués. Les sections 5-8 suivent le même principe, mais pour l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$. Dans la section 5, nous rappelons les définitions des A-séries et des algèbres affines quantiques tronquées. Dans la section 6, nous établissons les formules du coproduit des A-séries. Pour ce faire, nous profitons de la q-exponentielle pour simplifier les raisonnements utilisés pour le Yangien. Dans la section 7, nous en déduisons la réponse à la conjecture 1 pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$. Enfin, la section 8 est une généralisation immédiate de nos résultats aux algèbres affines quantiques décalées.

Dans ce chapitre, nous définissons les objets pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. La plupart de ces définitions sont étendues plus généralement au type A en général dans le chapitre 2.

1.1 A-séries et Yangiens tronqués

Nous considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ définie par ses générateurs de Chevalley x^+, x^- et ξ.

Définition 1.1.1. *Le* ***Yangien*** *de $\mathfrak{sl}_2$ est l'algèbre associative $Y(\mathfrak{sl}_2)$ engendrée par les générateurs $x_n^\pm$ et ξ_n pour $n \in \mathbb{N}$. Ces générateurs sont soumis aux relations, pour $r, s \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{gathered}
[\xi_r, \xi_s] = 0, \quad \left[\xi_0, x_s^\pm\right] = \pm 2 x_s^\pm, \\
\left[\xi_{r+1}, x_s^\pm\right] - \left[\xi_r, x_{s+1}^\pm\right] = \pm \left(\xi_r x_s^\pm + x_s^\pm \xi_r\right), \\
\left[x_r^+, x_s^-\right] = \xi_{r+s}, \\
\left[x_{r+1}^\pm, x_s^\pm\right] - \left[x_r^\pm, x_{s+1}^\pm\right] = \pm \left(x_r^\pm x_s^\pm + x_s^\pm x_r^\pm\right).
\end{gathered}$$

Nous définissons les séries génératrices :

$$x^\pm(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^\pm z^{-n-1}, \quad \xi(z) := 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n z^{-n-1}.$$

La sous-algèbre engendrée par les ξ_n pour $n \in \mathbb{N}$ est appelée **sous-algèbre de Drinfeld-Cartan** et est notée $Y^0(\mathfrak{g})$. La série génératrice $\xi(z)$ est appelée série de Drinfeld-Cartan. Le Yangien a une structure d'algèbre de Hopf dont le coproduit sur les premiers générateurs est

donné par :

$$\Delta(x_0^{\pm}) = x_0^{\pm} \otimes 1 + 1 \otimes x_0^{\pm}; \quad \Delta(\xi_0) = \xi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_0$$
$$\Delta(x_1^{+}) = x_1^{+} \otimes 1 + 1 \otimes x_1^{+} + \xi_0 \otimes x_0^{+}.$$

Remarque 1. *Il existe une formule générale pour la série de Drinfeld-Cartan $\xi(z)$ donnée par Molev dans [Mol03] :*

$$\Delta(\xi(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(x^-(z+1))^k \xi(z) \otimes \xi(z)(x^+(z+1))^k.$$

Toutefois, cette formule est relativement compliquée. Nous espérons que les formules du coproduit de certaines séries génératrices modifiées soient plus simples. Notons également que les formules pour le Yangien en type A en général ont été calculées par Crampé [Cra04].

Nous définissons des séries de Drinfeld-Cartan modifiées, qui permettent de définir les Yangiens tronqués.

Définition 1.1.2. *[GKLO05, KWWY14, BFN19] Soit $m \in \mathbb{N}$ et $a(z)$ la série de Laurent complexe en z^{-1}, de terme dominant z^{2m}. La Gerasimov–Kharchev–Lebedev–Oblezin séries, également appelée série GKLO ou A-série, associée à $a(z)$ est la série de Laurent en z^{-1} de terme dominant, à coefficients dans $Y^0(\mathfrak{sl}_2)$, déterminée de manière unique par l'équation :*

$$\xi(z) = \frac{a(z)}{A^a(z)A^a(z-1)} \in 1 + z^{-1}Y^0(\mathfrak{sl}_2)[[z^{-1}]].$$

Nous écrivons cette série sous la forme :

$$A^a(z) = z^m + \sum_{k \leqslant m} A^a_{-k} z^{k-1}.$$

*Le **Yangien tronqué** $Y^a(\mathfrak{sl}_2)$ est le quotient de $Y(\mathfrak{sl}_2)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $(A^a_k)_{k \geqslant 0}$.*

Les A-séries sont introduites dans [GKLO05, Lemma 2.1] et la définition des Yangiens tronqués est donnée dans [KWWY14, Theorem 4.5] et [BFN19, Theorem B.15].

Remarque 2. *La notation usuelle de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan $Y^0(\mathfrak{sl}_2)$ de $Y(\mathfrak{sl}_2)$ n'est pas un cas particulier de Yangien tronqué pour $a(z) = 0$ (la série de Laurent $a(z) = 0$ n'entre pas dans le cadre de la définition des A-séries, il n'y a donc pas de conflit de notation).*

Remarque 3. *L'algèbre $Y^a(\mathfrak{sl}_2)$ est entièrement caractérisée par le fait que l'image de la série $A^a(z)$ dans cette algèbre est polynomiale en z. Nous nous servirons de ce fait lorsque nous vérifierons la compatibilité entre le coproduit et la troncature.*

1.2 Formule du coproduit pour le Yangien

Nous commençons par calculer le coproduit pour $A^1(z)$, via des arguments purement algébriques. En fait, nous déduirons de cette formule le résultat général pour $A^a(z)$ pour une série $a(z)$ arbitraire. Nous notons $A(z) := A^1(z)$.

Nous commençons par étudier une série auxiliaire, appelée S-série, définie par équation aux différences avec $A(z)$. Initialement introduite dans [Zha24] pour n'importe quelle algèbre de Lie simple afin de construire des R-matrices pour les Yangiens décalés, son coproduit avait déjà été calculé par Zhang pour $\mathfrak{sl}_2$[1].

Définition 1.2.1. *[Zha24, Proposition 4.1] La série $S(z)$ est l'unique série entière en z^{-1} de terme constant 1 à coefficients dans $Y^0(\mathfrak{sl}_2)$ qui satisfait l'équation aux différences suivante :*

$$S(z+1) = S(z) \times A(z) \times K(z) \in 1 + z^{-1}Y^0(\mathfrak{sl}_2)[[z^{-1}]]$$

où $K(z) := \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_0 \sum_{k>0} \frac{(-z)^{-k}}{k}\right)$.

Proposition 1.2.2. *[Zha24, Example 5.8] Le coproduit de $S(z)$ est donné par :*

$$\Delta(S(z)) = (1 \otimes S(z)) \exp(-z^{-1}x_0^- \otimes x_0^+)(S(z) \otimes 1).$$

Remarque 4. *Nous constatons que la série $K(z)$ est définie comme l'exponentielle d'un élément primitif ($\Delta(\xi_0) = \xi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_0$). Nous en déduisons en particulier que cette série est group-like :*

$$\Delta(K(z)) = K(z) \otimes K(z).$$

Avant de calculer le coproduit de $A(z)$, rappelons les relations de commutation de $A(z)$ et $S(z)$ avec les autres générateurs de Drinfeld de $Y(\mathfrak{sl}_2)$.

Proposition 1.2.3. *[Zha24, (2.2),(4.10)] Les séries $A(z)$ et $S(z)$ commutent entre elles et*

$$\begin{aligned}
S(z)x_0^- &= (x_0^- - x_1^- z^{-1})S(z),\\
x_0^+ S(z) &= S(z)(x_0^+ - x_1^+ z^{-1}),\\
A(z)x_0^- &= x_0^- A(z) + \sum_{k\geqslant 0} x_k^- z^{-k-1} A(z),\\
x_0^+ A(z) &= A(z)x_0^+ + A(z)\sum_{l\geqslant 0} x_l^+ z^{-l-1}.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir la formule du coproduit pour $A(z)$.

[1] Les S-séries et l'étude de leur coproduit en type A sont l'objet du chapitre 2.

1.2.1 Simplification du problème

Afin de calculer le coproduit de $A(z)$, nous allons avoir besoin de formules binomiales. Pour ce faire, commençons par étudier un problème d'algèbre linéaire général auquel nous nous ramènerons.

Proposition 1.2.4. *Soient K un corps et A une K-algèbre. Soient $a, b \in A$ et $c \in K$ tels que $ab - ba = ca^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{j=0}^{k-1} (1-jc) a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Notons $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n} a^k b^{n-k}$. Pour démontrer la proposition, nous avons juste à vérifier si la suite $(\alpha_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ satisfait la même relation de récurrence que la suite $(\beta_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ définie par $\beta_{k,n} := \binom{n}{k} \prod_{j=0}^{k-1} (1-jc)$. En effet, ces deux suites satisfont la relation de récurrence suivante qui admet une unique solution :

$$\begin{aligned} u_{0,0} = u_{1,0} = u_{0,1} &= 1; \\ u_{k,n+1} &= u_{k,n} + (1-(k-1)c) u_{k-1,n}. \end{aligned}$$

□

1.2.2 Formules du coproduit

Nous pouvons donc maintenant nous intéresser au calcul de $\Delta(A(z))$. Puisque la série $K(z)$ est group-like, nous commençons par calculer une première formule pour le coproduit de la série $\tilde{A}(z) := S(z)^{-1} S(z+1)$.

Proposition 1.2.5.

$$\Delta(\tilde{A}(z)) = \left(S(z)^{-1} \otimes S(z+1)\right) \left(1 + z^{-1}(z+1)^{-1} x_0^- \otimes x_0^+\right) \left(S(z+1) \otimes S(z)^{-1}\right).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.2.2 :

$$\Delta(\tilde{A}(z)) = \sum_{k,l} \left(S(z)^{-1} \frac{z^{-k}}{k!} \frac{(-(z+1))^{-l}}{l!} (x_0^-)^{k+l} S(z+1) \right) \otimes \left((x_0^+)^k S(z)^{-1} S(z+1) (x_0^+)^l \right).$$

En appliquant la proposition 1.2.3 plusieurs fois, nous obtenons :

$$(x_0^+)^k S(z+1) = S(z+1)\left(x_0^+ - x_1^+(z+1)^{-1}\right)^k$$
$$S(z)^{-1}(x_0^+)^l = \left(x_0^+ - x_1^+ z^{-1}\right)^l S(z)^{-1}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\Delta(\tilde{A}(z)) = \left(S(z)^{-1}\otimes S(z+1)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{k!}(x_0^-)^k\otimes\left(x_0^+ - x_1^+(z+1)^{-1}\right)^k\right)$$
$$\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-(z+1))^{-l}}{l!}(x_0^-)^l\otimes\left(x_0^+ - x_1^+ z^{-1}\right)^l\right)\left(S(z+1)\otimes S(z)^{-1}\right).$$

Posons maintenant

$$X := z^{-1}x_0^-\otimes x_0^+;\quad Y = -z^{-1}(z+1)^{-1}x_0^-\otimes x_1^+$$

afin de réécrire le coproduit sous la forme :

$$\Delta(\tilde{A}(z)) = \left(S(z)^{-1}\otimes S(z+1)\right)\exp(X+Y)\exp(-z(z+1)^{-1}X - Y)\left(S(z+1)\otimes S(z)^{-1}\right).$$

Nous posons également $\lambda := (z+1)^{-1}$, de sorte que

$$1 + z^{-1}(z+1)^{-1}x_0^-\otimes x_0^+ = 1+\lambda X.$$

et

$$XY - YX = \lambda X^2.$$

À partir de la formule du coproduit calculée jusqu'à présent, nous avons donc juste à démontrer

$$\exp(X+Y) = (1+\lambda X)\exp\left((1-\lambda)X + Y\right).$$

Rappelons que nous travaillons dans $Y(\mathfrak{sl}_2)\otimes Y(\mathfrak{sl}_2)$ qui est une algèbre $\mathbb{Z}$-bigraduée. Ainsi, pour démontrer l'égalité qui précède, nous allons étudier chaque terme selon son bipoids. Ainsi, nous voulons finalement vérifier :

$$\frac{1}{n!}(X+Y)^n = \frac{1}{n!}((1-\lambda)X+Y)^n + \frac{1}{(n-1)!}\lambda X\ \ ((1-\lambda)X+Y)^{n-1} \qquad (\dagger)$$

pour tout n (c'est le terme de bipoids $(n\alpha, -n\alpha)$). Mais, d'après le problème d'algèbre linéaire

étudié précédemment, nous savons que :

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{j=0}^{k-1} (1-j\lambda) X^k Y^{n-k}.$$

Nous pouvons donc vérifier l'égalité (†) en fixant $k \in \{0, \dots, n\}$ et en regardant le coefficient de $X^k Y^{n-k}$. □

Maintenant que nous avons démontré cette première formule, nous allons pouvoir réordonner les termes pour obtenir une jolie formule du coproduit de la A-série.

Théorème 1.2.6. *Soient m, n deux entiers. Soient $a(z)$ et $b(z)$ deux séries de Laurent complexes en z^{-1} de termes dominants respectifs z^{2m} et z^{2n}. Alors :*

$$\Delta(A^{ab}(z)) = A^a(z) \otimes A^b(z) + \left[A^a(z), x_0^-\right] \otimes \left[x_0^+, A^b(z)\right].$$

Démonstration. Commençons par démontrer que le calcul de la formule pour $A^1(z)$ permet de déduire le résultat pour $A^a(z)$ en général. Notons d'abord qu'il existe une unique série de Laurent $a^*(z) \in z^m(1 + z^{-1}\,\mathbb{C}[[z^{-1}]])$ solution de l'équation aux différences

$$a(z) = a^*(z)a^*(z-1).$$

De plus, nous pouvons vérifier que l'opération $a(z) \mapsto a^*(z)$ est multiplicative :

$$(ab)^*(z) = a^*(z)b^*(z).$$

Finalement, remarquons[2] que

$$A^a(z) = a^*(z)A^1(z).$$

Ainsi, nous pouvons nous contenter de démontrer la formule pour le cas particulier $A(z)$.

Il s'agit de réordonner les termes de la proposition 1.2.5. Rappelons les relations de commutation :

$$S(z)^{-1}x_0^- = \sum_{k\geqslant 0} x_k^- z^{-k} S(z)^{-1}; \quad x_0^+ S(z)^{-1} = S(z)^{-1} \sum_{k\geqslant 0} x_k^+ z^{-k}.$$

Nous pouvons ainsi écrire

$$\Delta(A(z)) = \left(1 \otimes S(z)^{-1}S(z+1)\right) \left(1 + z^{-1}(z+1)^{-1} \sum_{k,l\geqslant 0} z^{-k} x_k^- \otimes z^{-l} x_l^+\right) (A(z) \otimes K(z)).$$

[2] Ici, a^* correspond en fait au φ de l'introduction !

Nous disposons également de la relation

$$x_l^+ K(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^{-1} K(z) x_l^+.$$

Alors :

$$\Delta(A(z)) = A(z) \otimes A(z) + \sum_{k,l \geqslant 0} z^{-k-1} x_k^- A(z) \otimes A(z) x_l^+ z^{-l-1}.$$

En combinant ces résultats à la proposition 1.2.3 :

$$A(z)x_0^- = x_0^- A(z) + \sum_{k \geqslant 0} x_k^- z^{-k-1} A(z)$$
$$x_0^+ A(z) = A(z)x_0^+ + A(z) \sum_{l \geqslant 0} x_l^+ z^{-l-1},$$

nous obtenons la formule désirée. □

1.3 Compatibilité entre la troncature et le coproduit

Cette formule explicite du coproduit des séries $A^a(z)$, beaucoup plus simple que les formules du coproduit que nous pouvons espérer pour la série de Drinfeld-Cartan $\xi(z)$, va nous permettre d'établir l'un des principaux résultats de cette thèse pour $Y(\mathfrak{sl}_2)$: la compatibilité entre la troncature et le coproduit.

Théorème 1.3.1. *Soient $a(z) \in z^{2m}(1 + z^{-1}\,\mathbb{C}[[z^{-1}]])$ et $b(z) \in z^{2n}(1 + z^{-1}\,\mathbb{C}[[z^{-1}]])$. Alors le coproduit du Yangien induit un morphisme d'algèbres :*

$$Y^{ab}(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow Y^a(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^b(\mathfrak{sl}_2).$$

Démonstration. Il s'agit de compléter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow{\quad\Delta\quad} & Y(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y(\mathfrak{sl}_2) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi^{ab}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi^a \otimes \pi^b} \\ Y^{ab}(\mathfrak{sl}_2) & & Y^a(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^b(\mathfrak{sl}_2) \end{array}$$

où π^a (resp. π^b) est la projection canonique du Yangien $Y(\mathfrak{sl}_2)$ vers sa troncature $Y^a(\mathfrak{sl}_2)$ (resp. $Y^b(\mathfrak{sl}_2)$).

Pour ce faire, nous avons donc juste à démontrer que $\pi^a \otimes \pi^b \left(\Delta(A^{ab}(z))\right)$ est un polynôme en z à coefficients dans $Y^a(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^b(\mathfrak{sl}_2)$. Or, par définition, $\pi^a(A^a(z))$ et $\pi^b(A^b(z))$ sont des

polynômes en z, tout comme $\pi^a\left(\left[A^a(z), x_0^-\right]\right)$ et $\pi^b\left(\left[x_0^+, A^b(z)\right]\right)$. Le théorème 1.2.6 permet alors de conclure. □

Nous concluons cette section avec une application explicite de ce résultat. Nous considérons les représentations de $Y(\mathfrak{sl}_2)$ issues des représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$ et nous calculons l'action des A-séries sur ces représentations. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$. Alors il existe une représentation $L(\alpha, \beta)$ avec pour base $(v_0, v_1, \ldots, v_{\alpha-\beta})$ telle que, d'après la proposition 2.6 de [CP90] :

$$\xi(z) \cdot v_i = \frac{(z+\alpha)(z+\beta-1)}{(z+\beta+i)(z+\beta+i-1)} v_i; \quad x_0^- \cdot v_i = v_{i+1}; \quad x_0^+ \cdot v_i = i(\alpha-\beta-i+1)v_{i-1}.$$

Considérons $a(z) = (z+\alpha)(z+\beta-1)$. Alors, l'action de la A-série $A^a(z)$ est diagonale et polynomiale :

$$A^a(z)v_i = (z+\beta+i)\, v_i.$$

Notons en particulier que cette action est plus simple que celle de la série génératrice $\xi(z)$.

Enfin, grâce au théorème 1.2.6, nous pouvons calculer l'action de $A(z)$ sur le produit tensoriel de telles représentations. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_1 - \beta_1 \in \mathbb{N}$ et $\alpha_2 - \beta_2 \in \mathbb{N}$. Soient $(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant \alpha_1-\beta_1}$ et $(w_j)_{0 \leqslant j \leqslant \alpha_2-\beta_2}$ les bases associées de $L(\alpha_1, \beta_1)$ et $L(\alpha_2, \beta_2)$. Posons

$$a_1(z) := (z+\alpha_1)(z+\beta_1-1); \quad a_2(z) := (z+\alpha_2)(z+\beta_2-1).$$

Alors $A^{a_1 a_2}(z)$ agit sur $L(\alpha_1, \beta_1) \otimes L(\alpha_2, \beta_2)$ par :

$$A^{a_1 a_2}(z) \cdot v_i \otimes w_j = (z+\beta_1+i)(z+\beta_2+j) v_i \otimes w_j + j(\alpha_2-\beta_2-j+1) v_{i+1} \otimes w_{j-1}.$$

1.4 Yangiens décalés

Nous étendons les résultats obtenus aux Yangiens décalés, une famille d'algèbre généralisant le Yangien. Nous rappelons la définition des Yangiens décalés associés à $\mathfrak{sl}_2$, ainsi que les coproduits décalés introduits dans [FKP+18] et leurs principales propriétés[3].

Définition 1.4.1. *Soit $\mu \in \mathbb{Z}$. Le **Yangien décalé** $Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$ est l'algèbre associative engendrée par x_n^-, x_n^+, ξ_p pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Ces générateurs sont soumis aux relations :*

$$\begin{aligned}
[\xi_p, \xi_q] = 0, \quad \left[x_n^+, x_m^-\right] &= \xi_{n+m}, \\
\left[\xi_{p+1}, x_n^\pm\right] - \left[\xi_p, x_{n+1}^\pm\right] &= \pm\left(\xi_p x_n^\pm + x_n^\pm \xi_p\right), \\
\left[x_{m+1}^\pm, x_n^\pm\right] - \left[x_m^\pm, x_{n+1}^\pm\right] &= \pm\left(x_m^\pm x_n^\pm + x_n^\pm x_m^\pm\right), \\
\xi_{-\mu-1} = 1, \quad \xi_p = 0 \ \textit{for}\ p &< -\mu - 1.
\end{aligned}$$

[3] La définition plus générale en type A est donnée dans l'appendice du chapitre 2.

Comme pour le Yangien standard, nous définissons la série de Drinfeld-Cartan :

$$\xi(z) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} \xi_p z^{-p-1}.$$

Il s'agit d'une série de Laurent en z^{-1} de terme dominant z^μ. Ses coefficients génèrent une sous-algèbre commutative de $Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$, notée $Y^0_\mu(\mathfrak{sl}_2)$. Remarquons que le Yangien standard correspond au cas $\mu = 0$.

Une famille d'homomorphismes d'algèbres

$$\Delta_{\mu,\nu} : Y_{\mu+\nu}(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow Y_\mu \otimes Y_\nu(\mathfrak{sl}_2)$$

a été introduite pour les Yangiens décalés, de manière à généraliser le coproduit du Yangien standard [FKP+18, Corollary 3.16, Theorem 4.12, Proposition 4.14]. La définition et les propriétés de ces coproduits décalés sont données en type A dans le théorème 2.7.2.

Définition 1.4.2. *[GKLO05, Lemma 2.1] Soient $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{Z}$ et $a(z)$ une série de Laurent complexe en z^{-1} de terme dominant $z^{2m+\mu}$. La série GKLO associée à $a(z)$ est la série de Laurent en z^{-1} de terme dominant z^m et à coefficients dans $Y^0_\mu(\mathfrak{sl}_2)$ déterminée de manière unique par :*

$$\xi(z) = \frac{a(z)}{A^a_\mu(z)A^a_\mu(z-1)}.$$

Le Yangien tronqué $Y^a_\mu(\mathfrak{sl}_2)$ est le quotient de $Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$ par les coefficients de puissances strictement négatives de $A^a_\mu(z)$.

Remarque 5. *Comme dans le cas standard, la notation usuelle de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan $Y^0_\mu(\mathfrak{sl}_2)$ de $Y_\mu(\mathfrak{sl}_2)$ n'est pas un cas particulier du Yangien tronqué pour la série de Laurent $a(z) = 0$. Puisque la série $a(z)$ a pour coefficient dominant 1, elle ne peut être nulle et il n'y a donc pas de conflit de notations.*

Afin de calculer le coproduit des A-séries, nous utilisons le résultat obtenu dans le cas standard pour obtenir les formules pour les Yangiens décalés via les propriétés dites de zigzag[4] de $\Delta_{\mu,\nu}$. Nous avons ainsi :

Théorème 1.4.3. *Soient $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Pour deux séries de Laurent complexes $a(z) \in z^{2m+\mu}(1 + z^{-1}\,\mathbb{C}[[z^{-1}]])$ et $b(z) \in z^{2n+\nu}(1 + z^{-1}\,\mathbb{C}[[z^{-1}]])$, nous avons :*

$$\Delta_{\mu,\nu}(A^{ab}_{\mu+\nu}(z)) = A^a_\mu(z) \otimes A^b_\nu(z) + \left[A^a_\mu(z), x^-_0\right] \otimes \left[x^+_0, A^b_\nu(z)\right].$$

De plus, $\Delta_{\mu,\nu}$ induit un morphisme d'algèbres $Y^{ab}_{\mu+\nu}(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow Y^a_\mu(\mathfrak{sl}_2) \otimes Y^b_\nu(\mathfrak{sl}_2)$.

[4] L'argument zigzag est similaire à celui utilisé dans l'appendice du chapitre 2.

1.5 A-séries et algèbres affines quantiques tronquées

Pour l'étude de l'algèbre affine quantique de $\mathfrak{sl}_2$, nous allons utiliser des idées similaires au cas du Yangien. Les principaux changements se trouvent dans la définition de la troncature et l'utilisation de q-exponentielles plutôt que d'exponentielles pour simplifier nos calculs.

Définition 1.5.1. *L'**algèbre affine quantique** $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ est l'algèbre associative engendrée par $x_m^{\pm}$ et $\phi_m^{\pm}$ pour $m \in \mathbb{Z}$ avec les relations pour $n, m \in \mathbb{Z}$:*

$$\phi_m^+ = 0 \text{ si } m < 0; \quad \phi_m^- = 0 \text{ si } m > 0; \quad \phi_0^+\phi_0^- = 1;$$
$$\left[\phi_m^{\pm}, \phi_n^{\epsilon}\right] = 0; \quad \left[x_m^+, x_n^-\right] = \frac{\phi_{m+n}^+ - \phi_{m+n}^-}{q - q^{-1}};$$
$$\phi_{m+1}^{\epsilon} x_n^{\pm} - q^{\pm 2}\phi_m^{\epsilon} x_{n+1}^{\pm} = q^{\pm 2} x_n^{\pm}\phi_{m+1}^{\epsilon} - x_{n+1}^{\pm}\phi_m^{\epsilon};$$
$$x_{m+1}^{\pm} x_n^{\pm} - q^{\pm 2} x_m^{\pm} x_{n+1}^{\pm} = q^{\pm 2} x_n^{\pm} x_{m+1}^{\pm} - x_m^{\pm} x_{n+1}^{\pm}.$$

où $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

Nous définissons les séries génératrices :

$$x^{\pm}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^{\pm} z^n \quad \text{et} \quad \phi^{\pm}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n^{\pm} z^n.$$

Nous définissons également les éléments de Drinfeld-Cartan h_n pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ par :

$$\phi^{\pm}(z) = \phi_0^{\pm} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{\pm s > 0} h_s z^s\right).$$

L'algèbre affine quantique est équipée d'une structure d'algèbre de Hopf, dont le coproduit est déterminé par :

$$\Delta(x_0^{\pm}) = x_0^{\pm} \otimes 1 + 1 \otimes x_0^{\pm}; \quad \Delta(\phi_0^{\pm}) = \phi_0^{\pm} \otimes \phi_0^{\pm};$$
$$\Delta(h_{-1}) = 1 \otimes h_{-1} + h_{-1} \otimes 1 + (q^2 - q^{-2}) x_0^- \otimes x_{-1}^+;$$
$$\Delta(h_1) = 1 \otimes h_1 + h_1 \otimes 1 - (q^2 - q^{-2}) x_1^- \otimes x_0^+.$$

Comme pour le Yangien, nous ne disposons pas de formules simples pour le coproduit des autres générateurs (voir par exemple [FT19]). Nous nous intéressons donc à des séries génératrices modifiées.

Définition 1.5.2. *[FH15, Proposition 5.5],[Her23, 9.2]*

$$T^{\pm}(z) := \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{\pm s > 0} \frac{1}{q^{2s} - q^{-2s}} h_s z^s\right).$$

Remarque 6. *La série $T^-(z)$ a été introduite dans [FH15], puis $T^+(z)$ a été introduite dans [Her23]. La convention utilisée ici diffère de ces articles et est introduite dans [HZ25]. Cette série est l'un des principaux objets d'étude du chapitre 2.*

Le coproduit de la T-série[5] de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ a été étudié dans [Zha24]. Afin de l'exprimer proprement, nous avons besoin de définir la q-exponentielle. Soit :

$$(n)_q := \frac{q^{2n}-1}{q^2-1}; \quad (n)_q! := \prod_{k=1}^{n}(k)_q.$$

Soit x un élément d'une algèbre associative B. Pour une variable formelle z, nous définissons la q-exponentielle par :

$$\exp_q(zx) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n)_q!} x^n z^n \in B[[z]].$$

Proposition 1.5.3. *[Zha24, Example 9.6]*

$$\Delta(T^-(z)) = \big(1\otimes T^-(z)\big)\exp_q\left((q-q^{-1})x_0^-\otimes x_{-1}^+ z^{-1}\right)\big(T^-(z)\otimes 1\big)$$

Nous introduisons maintenant la définition des A-séries de l'algèbre affine quantique, puis nous ferons le lien entre les A-séries et les T-séries.

Définition 1.5.4. *[FT19] Soient $n\in\mathbb{N}$ et $a(z)$ un polynôme complexe de terme dominant $a_{2n}z^{2n}$ et de terme constant non nul a_0. Les **A-séries** $\mathcal{A}^{a,+}(z)$ et $\mathcal{A}^{a,-}(z)$ sont les séries entières en z et z^{-1} respectivement, de termes constants 1, définies par :*

$$\phi^+(z) = \frac{\phi_0^+ a(z)a_0^{-1}}{\mathcal{A}^{a+}(a)\,\mathcal{A}^{a+}(zq^2)}; \quad \phi^-(z) = \frac{\phi_0^- a(z)a_{2n}^{-1}z^{-2n}}{\mathcal{A}^{a-}(z)\,\mathcal{A}^{a-}(zq^2)}.$$

Nous pouvons écrire

$$\mathcal{A}^{a\pm}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_k^{a,\pm} z^k$$

de sorte que $\mathcal{A}_k^{a,+} = 0 = \mathcal{A}_{-k}^{a,-}$ si $k<0$ et $\mathcal{A}_0^{a,\pm}=1$.

*L'**algèbre affine quantique tronquée** $U_q^a(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ est définie comme le quotient de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ par les relations suivantes pour $k\in\mathbb{Z}$:*

$$\mathcal{A}_k^{a+} = 0 \text{ for } k>n; \quad \mathcal{A}_k^{a-} = \mathcal{A}_{-n}^{a-}\mathcal{A}_{k+n}^{a+} \text{ for } k\in\mathbb{Z}; \tag{1.1}$$

$$a_{2n}(\phi_0^+)^2 = a_0(\mathcal{A}_n^{a,+})^2 q^{2n}. \tag{1.2}$$

Remarque 7. *Comme pour le Yangien, la notation usuelle de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan $U_q^0(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ n'est pas un cas particulier d'algèbre affine quantique tronquée pour*

[5] La généralisation de ce résultat à $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ est l'objet du chapitre 2.

la série $a(z) = 0$.

Remarque 8. *Cette définition suit la convention de [HZ25, (3.20-3.23)], qui est une simplification de la définition de [FT19, Definition 8.12]. L'inverse de la série* $\mathcal{A}^{1,-}(z)$ *est d'abord apparu dans [FR99, (3.11)].*

De la même manière que pour le Yangien, obtenir une formule pour $A^{\pm}(z) := \mathcal{A}^{1,\pm}(z)$ est suffisant pour en déduire une pour $\mathcal{A}^{a\pm}(z)$. Nous allons utiliser les relations suivantes, faisant notamment le lien entre les T-séries et les A-séries.

Proposition 1.5.5. *[HZ25, Proposition 3.2] Nous disposons des relations :*

$$A^+(z) = \frac{T^+(zq^{-2})}{T^+(z)}; \quad A^-(z) = \frac{T^-(zq^{-2})}{T^-(z)}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$T^-(z)^{-1}x_n^- = \sum_{k\geqslant 0} x_{n-k}^- z^{-k} T^-(z)^{-1}; \quad x_n^+ T^-(z)^{-1} = T^-(z)^{-1} \sum_{l\geqslant 0} x_{n-l}^+ z^{-l}; \tag{1.3}$$

$$\left[A^-(z), x_n^-\right] = (1-q^2) \sum_{k\geqslant 1} x_{n-k}^- z^{-k} A^-(z) \tag{1.4}$$

$$\left[x_n^+, A^-(z)\right] = (1-q^2) A^-(z) \sum_{k\geqslant 1} x_{n-k}^+ z^{-k}. \tag{1.5}$$

De ces formules, nous pouvons déduire les résultats suivants qui nous permettront d'obtenir des expressions des coproduits similaires à celles du Yangien.

Corollaire 1.5.5.1. *Pour* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\left[A^-(z), x_n^-\right] = z^{-1}\left[A^-(z), x_{n-1}^-\right]_{q^2}; \quad \left[x_n^+, A^-(z)\right] = z^{-1}\left[x_{n-1}^+, A^-(z)\right]_{q^2}$$

où $[x,y]_{q^2} = xy - q^2 yx$ *pour tous* $x, y \in U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$.

Démonstration. Démontrons le résultat pour x_n^-. D'après le point (1.3) de la proposition 1.5.5 :

$$\begin{aligned}
\left[A^-(z), x_n^-\right]_{q^2} &= (1-q^2) \sum_{k\geqslant 0} x_{n-k}^- z^{-k} A^-(z) \\
&= z(1-q^2) \sum_{k\geqslant 1} x_{n+1-k} z^{-k} A^-(z) \\
&= z\left[A^-(z), x_{n+1}^-\right]
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du point (1.4) de la même proposition. □

1.6 Formules du coproduit pour l'algèbre affine quantique

Comme nous l'avons vu dans la proposition 1.5.3, les formule du coproduit des T-séries font intervenir des q-exponentielles. Commençons par rappeler deux propriétés qui vont nous être utiles.

Proposition 1.6.1. *[Kas95, (IV.2.4,IV.2.6)]Ṡoit B une algèbre associative. Soient $a, b, c \in B$ tels que $ab = q^2ba$. Alors*

$$\exp_q(z(a+b)) = \exp_q(zb)\exp_q(za); \quad \exp_q(zc) = \exp_{q^{-1}}(-zc); \tag{1.6}$$

$$\frac{\exp_q(zc)}{\exp_q(q^{-2}zc)} = 1 + (1-q^{-2})zc \tag{1.7}$$

Calculons maintenant le coproduit $\Delta(A^-(z))$. Nous en déduirons ensuite le résultat pour le coproduit de $A^+(z)$. Pour effectuer ce calcul, nous pourrions procéder exactement de la même manière que pour le Yangien[6]. Néanmoins, dans le cas de l'algèbre affine quantique, nous pouvons utiliser les propriétés des q-exponentielles pour simplifier les calculs.

Proposition 1.6.2.

$$\Delta\left(A^-(z)\right) = \left(T^-(z)^{-1} \otimes T^-(zq^{-2})\right)\left(1 + (1-q^2)^2 q^{-1} z^{-1} x_0^- \otimes x_{-1}^+\right)\left(T^-(zq^{-2}) \otimes T^-(z)^{-1}\right).$$

Démonstration. En combinant les propositions 1.5.5 et 1.5.3, nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta(A^-(z)) = &\sum_{k,l\geqslant 0} T^-(z)^{-1} \frac{(q^{-1}-q)^k}{(k)_{q^{-1}}!} z^{-k} (x_0^-)^k \frac{(q-q^{-1})^l}{(l)_q!} z^{-l} q^{2l} (x_0^-)^l T^-(zq^{-2}) \\ &\otimes (x_{-1}^+)^k T^-(z)^{-1} T^-(zq^{-2}) (x_{-1}^+)^l \\ = &\left(T^-(z)^{-1} \otimes T^-(zq^{-2})\right) \exp_{q^{-1}}(X+Y) \exp_q(-q^2X - Y) \left(T^-(zq^{-2}) \otimes T^-(z)^{-1}\right)\end{aligned}$$

où $X := (q^{-1}-q)z^{-1}x_0^- \otimes x_{-1}^+$ et $Y := (q-q^{-1})z^{-2}q^2 x_0^- \otimes x_{-2}^+$. Puisque $x_{-1}^+ x_{-2}^+ = q^2 x_{-2}^+ x_{-1}^+$, nous avons $XY = q^2 YX$. Nous simplifions le membre de droite en utilisant la proposition 1.6.1 :

$$\begin{aligned}\exp_{q^{-1}}(X+Y)\exp_q(-q^2X-Y) &= \exp_{q^{-1}}(X)\exp_{q^{-1}}(Y)\exp_q(-Y)\exp_q(-q^2X) \\ &= \frac{\exp_{q^{-1}}(X)}{\exp_{q^{-1}}(q^2X)} = 1 + (1-q^2)X.\end{aligned}$$

□

[6] Cette méthode a été utilisée pour obtenir une première fois le résultat, mais elle est plus fastidieuse.

Théorème 1.6.3. *Soient $a(z)$ et $b(z)$ des polynômes complexes de termes constants non nuls. Alors :*

$$\Delta(\mathcal{A}^{ab-}(z)) = \mathcal{A}^{a-}(z) \otimes \mathcal{A}^{b-}(z) + q^{-1}z \left[\mathcal{A}^{a-}(z), x_1^-\right] \otimes \left[x_0^+, \mathcal{A}^{b-}(z)\right];$$
$$\Delta(\mathcal{A}^{ab+}(z)) = \mathcal{A}^{a+}(z) \otimes \mathcal{A}^{b+}(z) + qz^{-1} \left[\mathcal{A}^{a+}(z), x_0^-\right] \otimes \left[x_{-1}^+, \mathcal{A}^{b+}(z)\right].$$

Démonstration. Nous avons $\mathcal{A}^{a+}(z) = a^*(z)A^+(z)$ où $a^*(z)$ est l'unique série entière en z de terme constant 1 qui résout l'équation aux différences

$$a(z) = a^*(z)a^*(zq^{-2}).$$

Nous pouvons alors vérifier que l'application $a(z) \mapsto a^*(z)$ est multiplicative. De la même manière, $\mathcal{A}^{a-}(z) = a^\sharp(z)A(z)$ où $a^\sharp(z)$ est l'unique série entière en z^{-1} de terme constant 1 qui est solution de l'équation aux différences

$$a(z) = a^\sharp(z)a^\sharp(zq^{-2}).$$

Nous vérifions également que l'application $a(z) \mapsto a^\sharp(z)$ est multiplicative. Ainsi, comme dans le cas du Yangien, il est suffisant de démontrer la formule pour $A^\pm(z)$.

Nous utilisons le point (1.3) de la proposition 1.5.5 afin de réordonner les termes du produit tensoriel. Nous avons alors une expression du coproduit ne dépendant que de $A^-(z)$:

$$\Delta\left(A^-(z)\right) = A^-(z) \otimes A^-(z) + (1-q^2)^2 q^{-1} \sum_{k,l \geqslant 0} x_{-k}^- z^{-k} A^-(z) \otimes A^-(z) x_{-l-1}^+ z^{-l-1}.$$

Alors le point (1.4) de la proposition 1.5.5 permet de conclure.

Afin de calculer $\Delta(A^+(z))$, nous utilisons l'anti-isomorphisme de bigèbres Ω de Beck introduit dans [Bec94, (1.3)] $\Omega : U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2) \longrightarrow U_{q^{-1}}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ déterminé par

$$x_n^+ \mapsto x_{-n}^-, \quad x_n^- \mapsto x_{-n}^+, \quad h_n \mapsto h_{-n}.$$

De plus, puisque $\Omega(A^-(z^{-1})) = A^+(z)$, le coproduit de $A^+(z)$ découle directement du coproduit de $A^-(z)$. □

1.7 Compatibilité entre la troncature et le coproduit

Comme pour les Yangiens, nous démontrons maintenant la compatibilité entre la troncature et le coproduit.

Théorème 1.7.1. *Soient $a(z)$ et $b(z)$ des polynômes complexes de termes constants non nuls et de degrés pairs. Alors le coproduit de l'algèbre affine quantique induit un morphisme*

d'algèbres :

$$U_q^{ab}(\hat{\mathfrak{sl}}_2) \longrightarrow U_q^a(\hat{\mathfrak{sl}}_2) \otimes U_q^b(\hat{\mathfrak{sl}}_2).$$

Démonstration. Nous devons vérifier que les trois conditions de la définition 1.5.4 sont satisfaites. Notons $2m_a$ et $2m_b$ les degrés respectifs de $a(z)$ et $b(z)$.

Pour la première condition, il s'agit du même argument que pour le Yangien (voir théorème 1.3.1), en notant que pour $\mathcal{A}^{a-}(z)$ de degré m_a, $\left[\mathcal{A}^{a-}(z), x_1^-\right]$ est de degré $m_a - 1$ (de même pour $b(z)$).

Pour la deuxième condition, mettons d'abord en évidence les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{A}^{ab-}_{-m_a-m_b}) &= \mathcal{A}^{a-}_{-m_a} \otimes \mathcal{A}^{b-}_{-m_b};\\
\Delta(\mathcal{A}^{ab-}_{k}) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^{a-}_{i} \otimes \mathcal{A}^{b-}_{k-i} + q^{-1} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[\mathcal{A}^{a-}_{i-1}, x_1^-\right] \otimes \left[x_0^+, \mathcal{A}^{b-}_{k-i}\right];\\
\Delta(\mathcal{A}^{ab+}_{m_a+m_b+k}) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^{a+}_{m_a+i} \otimes \mathcal{A}^{b+}_{m_b+k-i} + q^{-1} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left[\mathcal{A}^{a-}_{m_a+i}, x_0^-\right] \otimes \left[x_{-1}^+, \mathcal{A}^{b-}_{m_b+k-i+1}\right].
\end{aligned}$$

Nous commençons alors par calculer, en utilisant la deuxième relation donnée dans la définition 1.5.4 dans $U_q^a(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ et $U_q^b(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$, le coproduit $\Delta(\mathcal{A}^{ab-}_{-m_a-m_b}\,\mathcal{A}^{+}_{m_a+m_b+k})$ qui est égal à :

$$\sum_i \mathcal{A}^{a-}_i \otimes \mathcal{A}^{b-}_{k-i} + q \sum_j \left(\mathcal{A}^{a-}_j\, x_0^- - \mathcal{A}^{a-}_{-m_a}\, x_0^-\, \mathcal{A}^{a-}_{m_a+j}\right) \otimes \left(\mathcal{A}^{b-}_{-m_b}\, x^+_{-1}\, \mathcal{A}^{b-}_{m_b+k-j+1} - \mathcal{A}^{b+}_{k-j+1}\, x^+_{-1}\right).$$

Rappelons les relations de q-commutativité de la proposition 1.5.5 :

$$\mathcal{A}^{a-}_{-m_a}\, x_0^- = q^2 x_0^-\, \mathcal{A}^{a-}_{-m_a}; \quad \mathcal{A}^{b-}_{-m_b}\, x^+_{-1} = q^{-2} x^+_{-1}\, \mathcal{A}^{b-}_{-m_b}.$$

Nous pouvons alors vérifier, en utilisant le corollaire 1.5.5.1

$$\mathcal{A}^{a-}_j\, x_0^- - q^2 x_0^-\, \mathcal{A}^{a-}_j = \left[A^{a-}_{j-1}, x_1^-\right]; \quad q^{-2} x^+_{-1} A^{b-}_{k-j+1} - A^{b-}_{k-j+1} x^+_{-1} = q^{-2}\left[x_0^+, A^{b-}_{k-j}\right].$$

Nous en déduisons le résultat.

Pour la troisième condition, nous souhaitons vérifier

$$(ab)_{2(m_a+m_b)}(\pi_a \otimes \pi_b) \circ \Delta(\phi_0^+)^2 = (ab)_0(\pi_a \otimes \pi_b) \circ \Delta(\mathcal{A}^{ab+}_{m_a+m_b})^2 q^{2(m_a+m_b)}.$$

Or, d'une part :

$$\begin{aligned}
(ab)_{2(m_a+m_b)}(\pi_a \otimes \pi_b) \circ \Delta(\phi_0^+)^2 &= a_{2m_a}(\phi_0^+)^2 \otimes b_{2m_b}(\phi_0^+)^2\\
&= a_0(\mathcal{A}^{a+}_{m_a})^2 q^{2m_a} \otimes b_0(\mathcal{A}^{b+}_{m_b})^2 q^{2m_b}
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$(ab)_0(\pi_a \otimes \pi_b) \circ \Delta(\mathcal{A}^{ab+}_{m_a+m_b})^2 q^{2(m_a+m_b)} = a_0(\mathcal{A}^{a+}_{m_a})^2 q^{2m_a} \otimes b_0(\mathcal{A}^{b+}_{m_b})^2 q^{2m_b}$$

ce qui permet de conclure la démonstration. □

Comme pour le Yangien, nous nous intéressons à une application explicite de ce résultat. Nous considérons les représentations de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ induites par les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$. Pour $a \in \mathbb{C}^\times$ et $n \in \mathbb{N}$, nous décrivons une telle représentation de dimension $n+1$ par sa base (comme dans [HZ25, Example 5.6]) avec les actions :

$$\phi^{\pm}(z) \cdot v_i = q^{n-2i} \frac{(1-q^{-n-1}az)(1-q^{n+1}az)}{(1-q^{n-1-2i}az)(1-q^{n+1-2i}az)} v_i; \quad (x_0^-)^i \cdot v_0 = v_i.$$

Notons $L_n(a)$ cette représentation. Il s'agit de la représentation irréductible de dimension finie associée au polynôme de Drinfeld $(1-q^{n-1}az)(1-q^{n-3}az)\dots(1-q^{-n+1}az)$ dans [CP91]. Soit $f(z) := (1-q^{-n-1}az)(1-q^{n+1}az)$. Alors l'action de $\mathcal{A}^{f\pm}(z)$ est diagonale et polynomiale :

$$\mathcal{A}^{f+}(z)v_i = (1-q^{n-1-2i}az)v_i; \quad \mathcal{A}^{f-}(z)v_i = (1-q^{-n+1+2i}a^{-1}z^{-1})v_i.$$

Par conséquent, $L_n(a)$ est également une représentation de $U_q^f(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$.

Soient $b \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. Considérons la représentation $L_m(b)$ avec pour base $(w_j)_{0\leqslant j\leqslant m}$ comme ci-dessus. Nous allons préférer travailler avec une autre base, définie par

$$v'_j := \left((x^+_{-1})^j \cdot w_m\right)_{0\leqslant j\leqslant m}.$$

Soit $g(z) := (1-q^{-m-1}bz)(1-q^{m+1}bz)$. L'action de $\mathcal{A}^{fg+}(z)$ sur $L_n(a) \otimes L_m(b)$ est alors donnée par :

$$\mathcal{A}^{fg+}(z)\cdot v_i \otimes v'_j = (1-q^{n-1-2i}az)(1-q^{-m-1+2j}bz)v_i \otimes v'_j + zabq^{n-m-2(i-j)}(q-q^{-1})^2 v_{i+1} \otimes v'_{j+1}.$$

D'après le théorème 1.7.1, le produit tensoriel $L_n(a) \otimes L_m(b)$ est un $U_q^{fg}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$-module. Nous pouvons donc appliquer le point (1) de la définition 1.5.4 pour calculer l'action de $A^{fg-}(z)$:

$$\mathcal{A}^{fg-}(z) \cdot v_i \otimes v'_j = (1-q^{-n+1+2i}a^{-1}z^{-1})(1-q^{m+1-2j}b^{-1}z^{-1})v_i \otimes v'_j + z^{-1}(1-q^2)^2 v_{i+1} \otimes v'_{j+1}.$$

1.8 Algèbres affines quantiques décalées

Comme pour le Yangien, les principaux résultats obtenus peuvent être facilement adaptés par des arguments de zigzag.

Définition 1.8.1. *Pour $\mu \in \mathbb{Z}$, l'**algèbre affine quantique décalée** $U_\mu(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ est l'algèbre*

associative engendrée par $x_m^{\pm}$, $\phi_m^{\pm}$ *pour* $m \in \mathbb{Z}$. *Ces générateurs sont soumis aux relations, pour* $n, m \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\phi_m^+ = 0 \text{ si } m < 0; \quad \phi_m^- = 0 \text{ si } m > \mu; \quad \phi_0^+\phi_\mu^- \text{ est central et inversible};$$
$$\left[\phi_m^{\pm}, \phi_n^{\epsilon}\right] = 0; \quad \left[x_m^+, x_n^-\right] = \frac{\phi_{m+n}^+ - \phi_{m+n}^-}{q - q^{-1}};$$
$$\phi_{m+1}^{\epsilon} x_n^{\pm} - q^{\pm 2}\phi_m^{\epsilon} x_{n+1}^{\pm} = q^{\pm 2} x_n^{\pm}\phi_{m+1}^{\epsilon} - x_{n+1}^{\pm}\phi_m^{\epsilon};$$
$$x_{m+1}^{\pm} x_n^{\pm} - q^{\pm 2} x_m^{\pm} x_{n+1}^{\pm} = q^{\pm 2} x_n^{\pm} x_{m+1}^{\pm} - x_m^{\pm} x_{n+1}^{\pm}$$

où $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

Remarque 9. *Attention : ici, contrairement au Yangien, le cas* $\mu = 0$ *ne donne pas l'algèbre affine quantique standard ! En effet, la condition* $\phi_0^+\phi_0^- = 1$ *a été assouplie.*

Nous définissons les séries génératrices :

$$\phi^{\pm}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n^{\pm} z^n.$$

Les coefficients de cette série engendrent une sous-algèbre commutative $U_\mu^0(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$, appelée sous-algèbre de Drinfeld-Cartan. De même que pour le Yangien, nous avons une famille d'homomorphismes d'algèbres

$$\Delta_{\mu,\nu} : U_{\mu+\nu}(\hat{\mathfrak{sl}}_2) \longrightarrow U_\mu(\hat{\mathfrak{sl}}_2) \otimes U_\nu(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$$

qui s'interprète comme une généralisation du coproduit standard. Celle-ci est introduite dans [FT19, Theorem 10.26].

Remarque 10. *Cette construction des coproduits décalés n'est, à l'heure actuelle, valable qu'en type A pour les algèbres affines quantiques (au contraire du Yangiens pour lesquels cette construction a été effectuée pour tous les types). Heureusement, cela suffit pour les cas qui nous intéressent dans le cadre de cette thèse.*

Définition 1.8.2. *[FT19] Soient* $n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{Z}$ *et* $a(z)$ *un polynôme complexe de terme dominant* $a_{2n+\mu} z^{2n+\mu}$ *et de terme constant non nul* a_0. *Les A-séries* $\mathcal{A}_\mu^{a,+}(z)$ *et* $\mathcal{A}_\mu^{a,-}(z)$ *sont des séries entières en* z *et* z^{-1} *respectivement, de termes constants* 1 *et à coefficients dans* $U_\mu^0(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$. *Elles sont définies par*

$$\phi^+(z) = \frac{\phi_0^+ a(z) a_0^{-1}}{\mathcal{A}_\mu^{a+}(z)\,\mathcal{A}_\mu^{a+}(zq^2)}; \quad \phi^-(z) = \frac{\phi_\mu^- a(z) a_{2n+\mu}^{-1} z^{-2n}}{\mathcal{A}_\mu^{a-}(z)\,\mathcal{A}_\mu^{a-}(zq^2)}.$$

Nous pouvons écrire :

$$\mathcal{A}_{\mu}^{a\pm}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{k}^{a,\pm}\, z^{k}$$

de telle sorte que $\mathcal{A}_{k}^{a,+} = 0 = \mathcal{A}_{-k}^{a,-}$ *si* $k < 0$ *and* $\mathcal{A}_{0}^{a,\pm} = 1$. *L'algèbre affine tronquée* $U_{\mu}^{a}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ *est le quotient de* $U_{\mu}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ *par les relations suivantes pour* $k \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_{k}^{a+} = 0 \text{ pour } k > n; \quad \mathcal{A}_{k}^{a-} = \mathcal{A}_{-n}^{a-}\,\mathcal{A}_{k+n}^{a+};\\ a_{2n+\mu}\phi_{0}^{+} = a_{0}\phi_{\mu}^{-}(\mathcal{A}_{n}^{a,+})^{2}q^{2n};\\ \phi_{0}^{+}\phi_{0}^{-} = a_{0}^{-1}a_{2n+\mu}q^{-2n}.\end{gathered}$$

Remarque 11. *Comme dans le cas standard, la notation usuelle de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan* $U_{\mu}^{0}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ *de* $U_{\mu}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ *n'est pas un cas particulier d'algèbre affine quantique tronquée pour la série* $a(z) = 0$. *Puisque la série* $a(z)$ *a pour terme constant* 1, *elle ne peut être nulle et il n'y a donc pas de conflit de notations.*

Remarque 12. *La définition de troncature utilisée ici suit [HZ25, (3.22)-(3.24)] qui est une légère modification de la définition originale de [FT19]. Pour une comparaison entre les deux versions, nous renvoyons à la remarque 3.11 de [HZ25].*

Théorème 1.8.3. *Soient* $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, $a(z)$ *et* $b(z)$ *des polynômes complexes termes constants non nuls tels que* $\deg(a(z)) - \mu$ *et* $\deg(b(z)) - \nu$ *soient pairs. Nous avons :*

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu,\nu}(\mathcal{A}_{\mu+\nu}^{ab-}(z)) &= \mathcal{A}_{\mu}^{a-}(z)\otimes\mathcal{A}_{\nu}^{b-}(z) + q^{-1}z\left[\mathcal{A}_{\mu}^{a-}(z), x_{1}^{-}\right]\otimes\left[x_{0}^{+}, \mathcal{A}_{\nu}^{b-}(z)\right].\\ \Delta_{\mu,\nu}(\mathcal{A}_{\mu+\nu}^{ab+}(z)) &= \mathcal{A}_{\mu}^{a+}(z)\otimes\mathcal{A}_{\nu}^{b+}(z) + qz^{-1}\left[\mathcal{A}_{\mu}^{a+}(z), x_{0}^{-}\right]\otimes\left[x_{-1}^{+}, \mathcal{A}_{\nu}^{b+}(z)\right].\end{aligned}$$

De plus, $\Delta_{\mu,\nu}$ *induit un morphisme d'algèbres :*

$$U_{\mu+\nu}^{ab}(\hat{\mathfrak{sl}}_2) \longrightarrow U_{\mu}^{a}(\hat{\mathfrak{sl}}_2)\otimes U_{\nu}^{b}(\hat{\mathfrak{sl}}_2).$$

CHAPITRE 2

COPRODUIT DES T-SÉRIES ET DES S-SÉRIES EN TYPE A

Les résultats de ce chapitre sont tirés de [Mil26].

Introduction et notations

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Pour des raisons de simplicité, nous supposons que $\mathfrak{g}$ est simplement lacée. Soit I l'ensemble des sommets de Dynkin de $\mathfrak{g}$ et q un complexe non nul qui n'est pas une racine de l'unité. Nous notons $C = (c_{ij})$ sa matrice de Cartan. Soit $Y(\mathfrak{g})$ le Yangien et $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ l'algèbre affine quantique construits par Drinfeld [Dri85] comme des déformations, en tant qu'algèbres de Hopf, de l'algèbre de courants $\mathfrak{g}[z]$ et de l'algèbre de lacets $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ respectivement.

En 1988, Drinfeld donne une nouvelle présentation de ces groupes quantiques, qui est plus adaptée à l'étude de leurs théories des représentations [Dri88]. Dans cette nouvelle présentation, les générateurs de l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ sont encodés dans les séries génératrices $x_i^{\pm}(z), \phi_i^{\pm}(z)$ pour $i \in I$. Un exemple de ces relations de commutation est donné par :

$$\phi_i^-(z)x_j^{\pm}(w) = \frac{q^{\pm c_{ij}}w - z}{w - q^{\pm c_{ij}}z}\phi^-(z)x_j^{\pm}(w) \quad \text{pour } i, j \in I.$$

Si cette nouvelle présentation peut être équipée d'une structure d'algèbre de Hopf via l'isomorphisme entre ces présentations, le coproduit correspondant est trop compliqué. Une meilleure compréhension de ces formules du coproduit permettrait d'étudier explicitement les théories des représentations de ces groupes quantiques, notamment leurs R-matrices.

Dans ce chapitre, nous établissons des formules explicites de coproduit pour des séries génératrices modifiées des nouveaux générateurs de Drinfeld en type A. Ces séries modifiées ont notamment des relations de commutation plus simples avec les autres générateurs. Ces

séries apparaissent dans l'étude de la théorie des représentations des algèbres affines quantiques et leurs connexions avec les systèmes intégrables quantiques en physique. Dans ce contexte, Baxter introduit des opérateurs commutatifs, appelés matrices de transfert, dont les valeurs propres communes encodent des informations importantes du modèle étudié. Pour étudier ces valeurs propres, Frenkel-Reshetikhin [FR99] introduisent la notion de q-caractère, un analogue quantique des caractères classiques. Les auteurs conjecturent que ces valeurs propres peuvent être obtenues en calculant les q-caractères d'une certaine représentation et en procédant à une substitution adaptée. Cette conjecture a été démontrée par Frenkel-Hernandez [FH15] en utilisant une famille de représentations de la sous-algèbre de Borel, appelées représentations préfondamentales. Ces dernières ont été introduites par Hernandez-Jimbo [HJ12] et sont construites comme limites de modules de Kirillov-Reshetikhin. Il se trouve que les matrices de transfert associées à ces représentations préfondamentales jouent un rôle clé dans la procédure de substitution mentionnée précédemment !

Dans le même article, Frenkel-Hernandez définissent une nouvelle famille de séries génératrices de la sous-algèbre de Drinfeld-cartan comme la limite de matrices de transfert associées à une représentation préfondamentale. Ces séries de Drinfeld-Cartan modifiées, appelées **T-séries** et notées $T_i(z)$ pour $1 \leq i \leq r$, se comportent particulièrement bien avec les nouveaux générateurs de Drinfeld. Par exemple, les relations

$$T_i(z)x_j^-(w)T_i(z)^{-1} = (1-\delta_{i,j}wz)x_j^-(w) \quad \text{pour } i,j \in I$$

sont plus simples que les relations de commutation pour $\phi_i^{\pm}(z)$. Il s'agit de l'une de nos motivations pour travailler avec ces séries plutôt qu'avec les séries de Drinfeld-Cartan standard. En 2024, Zhang [Zha24] a démontré que le coproduit des T-séries a une formule compacte de la forme

$$\Delta\left(T_i(z)\right) = \left(1 \otimes T_i(z)\right) \times \Theta_i(z) \times \left(T_i(z) \otimes 1\right)$$

où chaque composante de poids de $\Theta_i(z)$ est polynomiale en z.

L'un des résultats principaux de ce chapitre est une formule explicite des **Théta-séries** $\Theta_i(z)$ en type A_2 (théorème 2.6.1) :

Théorème 1. *Les Théta-séries pour l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ sont données par les formules :*

$$\Theta_1(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x_{1,0}^- \otimes x_{1,-1}^+ z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x_{1,0}^-, x_{2,0}^-\right]_q \otimes \left[x_{2,0}^+, x_{1,-1}^+\right]_{q^{-1}} z\right);$$
$$\Theta_2(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x_{2,0}^- \otimes x_{2,-1}^+ z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x_{2,0}^-, x_{1,0}^-\right]_q \otimes \left[x_{1,0}^+, x_{2,-1}^+\right]_{q^{-1}} z\right)$$

où $\exp_q$ est une q-exponentielle et $[x,y]_q = xy - qyx$ est un q-commutateur.

Pour démontrer ce résultat, nous utilisons la R-matrice universelle et l'appliquons à une représentation préfondamentale de la sous-algèbre de Borel pour déterminer $\Theta_i(z)$. Pour

ce faire, nous construisons explicitement une base pour la première représentation préfondamentale de la sous-algèbre de Borel de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$. Ces représentations ont déjà été étudiées en type A_2 par Bazhanov-Hibberd-Khoroshkin [BHK02], et plus généralement en type A par Jang-Kwon-Park [JKP23]. Notre contribution est la description explicite de l'action de tous les vecteurs de racine sur cette représentation. Ce premier résultat fournit donc une réponse positive à la question 1 pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$.

En 2024, Zhang définit un analogue des T-séries pour le Yangien, qui se comporte également bien avec les autres générateurs. Notons qu'au niveau des représentations, un analogue des T-séries avait déjà été étudié en 2020 par Gautam-Wendlandt [GW23] et Hernandez-Zhang [HZ24] indépendamment. Ces séries de Drinfeld-Cartan modifiées peuvent également se factoriser en termes de Théta-séries, essentiellement de la même manière que les T-séries, avec la même propriété de polynomialité locale. Le second résultat principal de ce chapitre est le calcul explicite des Théta-séries $\Theta_i(z)$ en type A_r pour tout $r \in \mathbb{N}$ (théorème 2.2.1) :

Théorème 2. *Pour $r \in \mathbb{N}$, les Théta-séries pour le Yangien $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$ sont :*

$$\Theta_i(z) = \exp\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant i<k\leqslant r+1} E_{kj} \otimes E_{jk}\right) \qquad \textit{pour } i \in \{1, \dots, r\}$$

où les E_{jk} sont les matrices élémentaires dans $\mathfrak{sl}_{r+1} \subset Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$.

Notons que le résultat est meilleur qu'attendu : les composantes de poids des Théta-séries ne dépendent pas de z. Si ce résultat est assez similaire à celui de l'algèbre affine quantique, les arguments utilisés sont de nature différente. Pour le Yangien, les $\Theta_i(z)$ peuvent être interprétés comme des homomorphismes entre modules sur les Yangiens décalés. Les règles de commutation entre ce morphisme et l'action de certains générateurs donnent lieu à un système d'équations qui admet une unique solution. Nous résolvons ce système pour déterminer $\Theta_i(z)$. Ce deuxième résultat fournit donc une réponse positive à la question 1 pour $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$.

Notre résultat, en plus de fournir des formules du coproduit des générateurs de Drinfeld-Cartan, pourrait être utilisé dans le futur pour calculer explicitement de nouvelles R-matrices, comme dans [Zha24, sections 6 et 10] ou pour calculer les formules du coproduit des les A-séries [GKLO05], comme nous l'avons fait dans le chapitre 1 pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 1, nous rappelons les définitions et les propriétés du Yangien, des S-séries et des Théta-séries dont nous nous servons dans les sections suivantes. Dans la section 2, nous établissons la formule du coproduit pour les S-séries. Une partie de notre démonstration, qui utilise la notion de Yangiens décalés que nous ne rappelons pas à ce stade, est donnée dans l'appendice. Dans la section 3, nous rappelons les définitions et les propriétés des algèbres affines quantiques, de la sous-algèbre de Borel et des T-séries dont nous nous servirons. Dans la section 4, nous rappelons les notions

de vecteurs de racine et de R-matrice universelle de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Nous calculons notamment les vecteurs de racine de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$, selon la construction de Damiani [Dam98]. Dans la section 5, nous fournissons une base explicite pour la première représentation préfondamentale positive de la sous-algèbre de Borel de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$, utilisant notamment une base de cette sous-algèbre formée de vecteurs de racine calculés dans la section 4. Dans la section 6, nous établissons les formules du coproduit des T-séries, en construisant les matrices de monodromie associées aux représentations préfondamentales positives. Dans l'appendice, nous rappelons les définitions et les propriétés de base des Yangiens décalés et nous donnons une démonstration du résultat admis de la section 2.

Notations et conventions

Notons $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{N}^* := \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Nous fixons $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$ l'algèbre de Lie spéciale linéaire, $\mathfrak{h}$ sa sous-algèbre de Cartan et $I = \{1, \dots, r\}$ l'ensemble de ses sommets de Dynkin. Soit $\Delta := (\alpha_i)_{i\in I}$ l'ensemble des racines simples de $\mathfrak{g}$ et notons R l'ensemble des racines positives. Soit $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. La matrice de Cartan $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ associée à $\mathfrak{g}$ est déterminée par $c_{i,j} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ pour $i, j \in I$. Remarquons qu'en type A, cette matrice est symétrique. Soit $(\omega_i^\vee)$ la base des copoids fondamentaux de $\mathfrak{h}$. C'est la base duale de la base (α_i), c'est-à-dire : $\langle \alpha_i, \omega_i^\vee \rangle = \delta_{ij}$. Notons $\alpha_i^\vee = \sum_{j\in I} c_{ij}\omega_j^\vee$.

$$P^\vee := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\,\omega_i^\vee; \quad Q := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\,\alpha_i; \quad Q_+ := \sum_{i\in I} \mathbb{N}\,\alpha_i$$

le réseau des copoids, le réseau des racines et le cône des racines positives. Pour $i \in I$, nous définissons les réflexions $(s_i)_{i\in I}$ agissant sur Q par $s_i(x) := x - \langle x, \alpha_i^\vee\rangle \alpha_i$ pour $x \in Q$.

Notons $\hat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Kac-Moody affine associée à $\mathfrak{g}$ et $\hat{I} = \{0, \dots, r\}$ l'ensemble des sommets de Dynkin affine. Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ qui n'est pas une racine de l'unité. Pour $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, nous définissons :

$$(m)_q := \frac{q^{2m}-1}{q^2-1}; \quad (m)_q! := \prod_{s=1}^{m} [s]_q; \quad [m]_q := \frac{q^m - q^{-m}}{q-q^{-1}}; \quad \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{s=1}^{k} [m-s+1]_q.$$

Nous définissons enfin la matrice de Cartan quantique $C(q) = \left([c_{i,j}]_q\right)_{i,j\in I}$. Puisque q est générique, cette matrice est inversible. Notons alors $\tilde{C}(q) = \left(\tilde{C}_{i,j}(q)\right)_{i,j\in I}$ son inverse.

2.1 Yangiens, S-séries, Théta-series

Dans cette section, nous rappelons deux présentations du Yangien : la J-présentation et la présentation de courants (également appelée nouvelle présentation de Drinfeld). La première

sera utile pour simplifier certains de nos calculs, tandis que l'essentiel de notre travail utilise la seconde. Nous introduisons ensuite des séries, appelées S-séries, à coefficients dans une sous-algèbre commutative importante du Yangien : la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan. En général, la formule du coproduit pour les générateurs standard de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan reste inconnue. Il a été démontré dans [Zha24] que les S-séries ont une formule du coproduit plus simple, notamment en utilisant les Théta-séries. Ces dernières sont des séries à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan qui peuvent être interprétées comme des associateurs pour certaines représentations du Yangien.

2.1.1 Yangiens

Dans cette sous-section, nous rappelons la J-présentation, la présentation de courants du Yangien et l'isomorphisme entre ces deux présentations. Nous commençons par donner la définition de la J-présentation, introduite par Drinfeld en 1985.

Définition 2.1.1. *[Dri85] Soit $(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$ et (x_λ) une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ par rapport à $(\cdot,\cdot)$. La **J-présentation** du Yangien $Y^J(\mathfrak{g})$ est l'algèbre définie par générateurs x et $J(x)$ pour for $x \in \mathfrak{g}$. Ces générateurs satisfont les relations :*

$$xy - yx = [x,y]_{x,y\in\mathfrak{g}}\,; \quad [x,J(y)] = J([x,y]); \tag{2.1}$$

$$J(ax+by) = aJ(x) + bJ(y); \tag{2.2}$$

$$[J(x),[J(y),z]] - [x,[J(y),J(z)]] = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \left([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[z,x_\nu]]\right)\{x_\lambda,x_\mu,x_\nu\} \tag{2.3}$$

où $\{x_1,x_2,x_3\} = \frac{1}{24}\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$ et $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Remarque 13. *La relation (2.3) n'est pas exactement la même pour le cas particulier $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, et doit être remplacée par :*

$$[[J(x_1),J(x_2)],[x_3,J(x_4)]] + [[J(x_3),J(x_4)],[x_1,J(x_2)]] = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \alpha_{\lambda,\mu,\nu}\{x_\lambda,x_\mu,J(x_\nu)\}$$

où $\alpha_{\lambda,\mu,\nu} = ([x_1,x_\lambda],[[x_2,x_\mu],[[x_3,x_4],x_\mu]]) + ([x_4,x_\lambda],[[x_3,x_\mu],[[x_1,x_2],x_\mu]])$.

Le Yangien $Y^J(\mathfrak{g})$ a une structure d'algèbre de Hopf simple, dont le coproduit est donné par :

$$\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x; \quad \Delta\left(J(x)\right) = J(x)\otimes 1 + 1\otimes J(x) + \frac{1}{2}\left[x\otimes 1,\Omega\right] \quad \text{pour } x\in\mathfrak{g}$$

où Ω est l'élément de Casimir quadratique dans la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

Nous définissons maintenant la présentation de courants avec laquelle nous allons principalement travailler. Cette présentation, également appelée nouvelle présentation de Drinfeld,

a été introduite en 1988 [Dri88]. Il est souvent plus pratique de travailler avec celle-ci plutôt qu'avec la J-présentation, notamment en théorie des représentations du Yangien.

Définition 2.1.2. *[Dri88] La* ***présentation de courants du Yangien*** $Y(\mathfrak{g})$ *est l'algèbre associative engendrée par les générateurs* $x_{i,m}^{\pm}$ *et* $\xi_{i,p}$ *pour tous* $i \in I$ *et* $m, p \in \mathbb{N}$*. Ces générateurs sont soumis aux relations :*

$$\begin{gathered}
[\xi_{i,p}, \xi_{j,m}] = 0, \quad \left[x_{i,p}^{+}, x_{j,m}^{-}\right] = \delta_{i,j}\xi_{i,p+m}, \\
\left[\xi_{i,m+1}, x_{j,p}^{\pm}\right] - \left[\xi_{i,m}, x_{j,p+1}^{\pm}\right] = \pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(\xi_{i,m}x_{j,p}^{\pm} + x_{j,p}^{\pm}\xi_{i,m}\right), \\
\left[x_{i,m+1}^{\pm}, x_{j,p}^{\pm}\right] - \left[x_{i,m}^{\pm}, x_{j,p+1}^{\pm}\right] = \pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(x_{i,m}^{\pm}x_{j,p}^{\pm} + x_{j,p}^{\pm}x_{i,m}^{\pm}\right), \\
ad_{x_{i,0}^{\pm}}^{1-c_{i,j}}(x_{j,0}^{\pm}) = 0 \qquad (i \neq j)
\end{gathered}$$

où $ad_x(y) = xy - yx$.

Le Yangien $Y(\mathfrak{g})$ admet une Q-graduation, appelée **graduation par les poids**, définie sur les générateurs par

$$\mathrm{wt}(x_{i,m}^{\pm}) = \pm\alpha_i \quad \text{et} \quad \mathrm{wt}(\xi_{i,m}) = 0.$$

Pour $\beta \in Q$, notons $Y(\mathfrak{g})_\beta$ le sous-espace des éléments de $Y(\mathfrak{g})$ de poids β. Les **séries génératrices** de $Y(\mathfrak{g})$ sont définies par :

$$x_i^{\pm}(z) := \sum_{m\geq 0} x_{i,m}^{\pm} z^{-m-1} \quad \text{et} \quad \xi_i(z) := 1 + \sum_{m\geq 0} \xi_{i,m} z^{-m-1} \quad \text{pour } i \in I.$$

Ce sont des séries entières en z^{-1} de termes dominants respectifs $x_{i,0}^{\pm}z^{-1}$ et 1. Les $\xi_{i,p}$ pour $i \in I$ et $p \in \mathbb{N}$ engendrent une sous-algèbre commutative de $Y(\mathfrak{g})$, notée $Y^0(\mathfrak{g})$, appelée **sous-algèbre de Drinfeld-Cartan**.

Nous donnons maintenant l'isomorphisme entre la J-présentation et la présentation de courants. Pour ce faire, nous considérons les éléments $x_\alpha^{\pm} \in \mathfrak{g}$ de poids $\pm\alpha$ tels que

$$(x_\alpha^{+}, x_\alpha^{-}) = 1 \quad \text{et} \quad x_{\alpha_i}^{\pm} = x_{i,0}^{\pm} \quad \text{pour } \alpha \in R.$$

Nous notons $x_i^{\pm}$ et h_i les générateurs de Chevalley de $\mathfrak{g}$.

Théorème 2.1.3. *[Dri88, Theorem 1][GRW19, Theorem 2.6] Les algèbres* $Y^J(\mathfrak{g})$ *et* $Y(\mathfrak{g})$ *sont isomorphes et un isomorphisme* $\varphi : Y^J(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$ *est donné par :*

$$\begin{gathered}
\varphi(h_i) = \xi_{i,0}; \quad \varphi\left(J(h_i)\right) = \xi_{i,1} + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\in R}(\alpha,\alpha_i)\{x_\alpha^{+}, x_\alpha^{-}\} - \frac{1}{2}\xi_{i,0}^2; \\
\varphi(x_i^{\pm}) = x_{i,0}^{\pm}; \quad \varphi(J(x_i^{\pm})) = x_{i,1}^{\pm} \pm \frac{1}{4}\sum_{\alpha\in R}\left\{\left[x_i^{\pm}, x_\alpha^{\pm}\right], x_\alpha^{\mp}\right\} - \frac{1}{4}\{x_{i,0}^{\pm}, \xi_{i,0}\}.
\end{gathered}$$

En particulier, pour $i \in I$:

$$\varphi(J(x_{i,0}^+)) = x_{i,1}^+ + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=i+1}^{n}(E_{i,k}E_{k,i+1} + E_{k,i+1}E_{i,k}) - \sum_{j=1}^{i}(E_{j,i+1}E_{i,j} + E_{i,j}E_{j,i+1})\right)$$

où les $E_{j,k}$ sont les matrices élémentaires dans $\mathfrak{sl}_{r+1} \subset Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$.

La présentation de courants du Yangien peut être équipée d'une structure d'algèbre de Hopf en considérant φ comme un isomorphisme d'algèbres de Hopf. Cependant, il n'y a pas de formule générale pour le coproduit des nouveaux générateurs de Drinfeld connue à ce jour, et les cas particuliers connus sont compliqués. Par exemple, dans $Y(\mathfrak{sl}_2)$, Molev a calculé dans [Mol03, Definition 2.24] :

$$\Delta(\xi(z)) = (1 \otimes \xi(z)) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(x^-(z+1))^k \otimes (x^+(z+1))^k\right) \times (\xi(z) \otimes 1)\,.$$

Pour pallier ce manque, nous allons nous intéresser à des séries génératrices modifiées.

2.1.2 S-séries et Théta-séries

Le coproduit des générateurs de Drinfeld-Cartan est compliqué à manipuler algébriquement. En 2024, Zhang a défini une nouvelle famille de générateurs de Drinfeld-Cartan, les S-séries [Zha24], pour construire des R-matrices pour les représentations 1-dimensionnelles des Yangiens. Ces séries sont définies en résolvant une équation aux différences dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan.

Dans son article, Zhang démontre notamment que le coproduit des S-séries a une forme plus compacte en termes de Théta-séries. Ces dernières sont des séries qui s'interprètent comme des associateurs pour les Yangiens décalés, une famille d'algèbres associatives généralisant le Yangien. Ces algèbres ont été introduites par Brundan-Kleshchev [BK06] en type A et [KWWY14, BFN19] en toute généralité. L'un des principaux résultats de ce chapitre est la formule explicite de ces Théta-séries et du coproduit des S-séries en type A.

Pour définir les S-séries, nous devons d'abord définir les séries de Gerasimov–Kharchev-Lebedev–Oblezin [GKLO05, lemma 2.1], appelées GLKO-séries ou A-séries. Les A-séries sont des séries de Laurent $A_i(z) \in 1 + z^{-1}Y^0[[z^{-1}]]$ pour $i \in I$ uniquement déterminées par les équations aux différences :

$$\xi_i(z) = \frac{A_{i-1}(z-\frac{1}{2})A_{i+1}(z-\frac{1}{2})}{A_i(z)A_i(z-1)} \in 1 + z^{-1}Y^0[[z^{-1}]] \quad \text{pour } i \in I$$

avec $A_{-1}(z) = A_{n+1}(z) = 1$. Nous introduisons également les éléments GKLO :

$$A_i(z) = \exp\left(\sum_{m\geq 0} a_{i,m} z^{-m-1}\right).$$

Remarque 14. *Notons que cette définition étend la définition 1.1.2 pour $a(z) = 1$. Les motivations données dans le chapitre 1 quant à l'étude de ces séries s'étendent également à ces A-séries.*

Nous rappelons maintenant la définition des S-séries.

Définition 2.1.4. *[Zha24, proposition 4.1] Pour $i \in I$, la **S-série** $S_i(z)$ est l'unique série entière dans $1 + z^{-1}Y^0[[z^{-1}]]$ qui satisfait l'équation aux différences :*

$$S_i(z+1) = S_i(z) \times A_i(z) \times \exp\left(a_{i,0} \sum_{k>0} \frac{(-z)^{-k}}{k}\right).$$

Les S-séries se comportent particulièrement bien avec les autres générateurs de Drinfeld. Par exemple, pour $i \neq j \in I$, la S-série $S_i(z)$ commute avec $x^{\pm}_{j,m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et pour $i \in I$:

$$S_i(z)x^-_{i,m}S_i(z)^{-1} = x^-_{i,m} - x^-_{i,m+1}z^{-1}; \quad S_i(z)^{-1}x^+_{i,m}S_i(z) = x^+_{i,m} - x^+_{i,m+1}z^{-1}.$$

Remarque 15. *Dans [Zha24, Theorem 4.6], un T-opérateur est défini comme la composition d'une S-série avec un automorphisme linéaire (relativement simple). Au niveau des représentations, ce T-opérateur est pensé comme un analogue des T-séries introduites dans [FH15] dans le cas des algèbres affines quantiques (dont nous reparlerons dans des sections ultérieures). Cet opérateur est notamment utilisé pour construire de nouvelles R-matrices (voir [Zha24, Section 6]). Toutefois, dans cette thèse, nous nous intéressons principalement aux calculs au niveau de l'algèbre. Nous ne parlerons donc pas davantage de ces opérateurs et de leurs applications.*

Nous nous intéressons maintenant au coproduit des S-séries. Dans [Zha24], l'auteur démontre que ce coproduit a une formule compacte, dans le sens suivant :

$$\Delta(S_i(z)) = (1 \otimes S_i(z)) \times \Omega_i(z) \times (S_i(z) \otimes 1) \quad \text{pour } i \in I$$

avec $\Omega_i(z) \in 1 \otimes 1 + z^{-1}(Y \otimes Y)[[z^{-1}]]$. Pour $\beta \in Q_+$, soit $\Omega_{i,\beta}(z) \in (Y_{-\beta} \otimes Y_\beta)[[z^{-1}]]$ la $(-\beta, \beta)$-composante de poids de $\Omega_i(z)$. Alors $\Omega_i(z) = \sum_{\beta \in Q_+} \Omega_{i,\beta}(z)$ et, d'après le lemme 5.1 de [Zha24], $\Omega_{i,0} = 1 \otimes 1$.

Pour étudier le coproduit des S-séries, nous n'allons pas exactement travailler avec les $\Omega_i(z)$, mais plutôt avec une modification de ces séries, suivant la définition 5.2 dans [Zha24]. D'abord, à poids fixé :

$$\Theta_{i,\beta}(z) := \Omega_{i,\beta}(z)(-z)^{\beta_i := \langle \omega_i^\vee, \beta \rangle} \quad \text{pour } \beta \in Q_+.$$

Remarquons que $\Theta_{i,0}(z) = 1 \otimes 1$. Nous pouvons maintenant considérer les **Théta series** :

$$\Theta_i(z) = \sum_{\beta \in Q_+} \Theta_{i,\beta}(z) \in \prod_{\beta \in Q_+} (Y_{-\beta} \otimes Y_\beta)((z^{-1})) \quad \text{pour } i \in I.$$

Le principal intérêt des $\Theta_i(z)$ est que ces séries s'interprètent comme des associateurs pour des représentations de Yangiens décalés (voir [Zha24, section 5.2]). À partir de cette propriété, nous obtenons les **relations d'entrelacement** : des systèmes d'équations linéaires qui admettent une unique solution : les Théta-séries. De ces relations, à priori compliquées, Zhang déduit un corollaire important : les composantes de poids $\Theta_{i,\beta}(z)$ sont polynomiales en z. Bonne nouvelle cependant : en type A, ces relations sont calculables.

2.2 Formules du coproduit des S-séries en type A

Nous établissons le résultat principal de ce chapitre pour le Yangien : des formules explicites de coproduit pour les S-séries. Nous utilisons le fait que les Théta-séries sont des morphismes de représentations et doivent donc commuter avec l'action des générateurs sur ces représentations. Il se trouve que ces relations de commutation en type A donnent lieu à un système de r équations calculables qui déterminent $\Theta_i(z)$. La résolution de ce système donne une expression simple des Théta-séries, dépendant de matrices élémentaires de l'algèbre de Lie. De ce résultat, nous déduisons la formule simple du coproduit des S-séries.

Le résultat pricipal de ce chapitre est la formule des Théta-séries et du coproduit des S-séries.

Théorème 2.2.1. *Pour $r \in \mathbb{N}$, les Théta-séries du Yangien $Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$ sont données par les r formules*

$$\Theta_i(z) = \exp\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant r+1} E_{kj} \otimes E_{jk} \right) \quad \textit{pour } 1 \leqslant i \leqslant r$$

desquelles nous déduisons les formules du coproduit des S-séries :

$$\Delta(S_i(z)) = (1 \otimes S_i(z)) \exp\left(- \sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant r+1} E_{kj} \otimes E_{jk} z^{-1} \right) (S_i(z) \otimes 1)$$

où $E_{j,k}$ sont les matrices élémentaires dans $\mathfrak{sl}_{r+1} \subset Y(\mathfrak{sl}_{r+1})$.

Remarque 16. *Nous savions d'après Zhang que les séries $\Theta_i(z)$ sont localement polynomiales en z. Le résultat obtenu ici est donc encore meilleur qu'escompté, puisque les Théta-séries ne dépendent même pas de z. De plus, notons que les termes dans la somme commutent.*

Pour établir ce théorème, nous avons besoin de résultats préliminaires. Commençons par expliciter le système d'équations que satisfont les Théta-séries $\Theta_i(z)$.

Proposition 2.2.2. *Pour $i \in I$, la Théta-série $\Theta_i(z)$ est l'unique série dans l'ensemble $\prod_{\beta \in Q_+} \left(Y(\mathfrak{g})_{-\beta} \otimes Y(\mathfrak{g})_\beta\right)((z^{-1}))$ avec la $(0,0)$-composante de poids égale à $1 \otimes 1$ qui satisfait les r équations :*

$$\text{For } j \neq i: \quad \left[x^+_{j,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{j,0}, \Theta_i(z)\right] = 0;$$

$$\left[x^+_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{i,1} - z(1 \otimes x^+_{i,0}), \Theta_i(z)\right] = \Theta_i(z) \left(\sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} \right).$$

Remarque 17. *La proposition vient essentiellement de la démonstration du théorème 5.7 de [Zha24]. Par souci d'exhaustivité, nous fournissons les détails sur les propriétés d'entrelacements et l'unicité dans l'appendice de ce chapitre.*

Nous résolvons maintenant ces équations afin de démontrer le théorème. Pour ce faire, nous avons besoin de résultats auxiliaires. D'abord, nous introduisons une complétion de $Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g})$:

$$Y(\mathfrak{g}) \otimes_z Y(\mathfrak{g}) := \sum_{\alpha,\beta \in Q} \left(\prod_{\gamma \in Q_+} \left(Y(\mathfrak{g})_{\alpha-\gamma} \otimes Y(\mathfrak{g})_{\beta+\gamma}\right)((z^{-1})) \right).$$

Notons que $Y(\mathfrak{g}) \otimes_z Y(\mathfrak{g})$ n'est pas une algèbre, et $\Theta_i(z) \in Y \otimes_z Y$.

Lemme 2.2.3. *Soient $i \in I$ et $1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant r+1$. Notons*

$$y = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant r+1} E_{k,j} \otimes E_{j,k} \in Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g}).$$

Dans $Y(\mathfrak{g}) \otimes_z Y(\mathfrak{g})$, nous disposons des relations :

$$\begin{aligned}
\left[1 \otimes x_{i,0}^+, \exp(y)\right] &= 0;\\
\left[x_{i,0}^+ \otimes 1, \exp(y)\right] &= \exp(y)\left(\sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{r+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} - \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant i\\ i<k\leqslant r+1}} E_{k,j} \otimes E_{j,i+1}E_{i,k}\right)\\
\left[x_{i,1}^+, E_{j,k}\right] &= E_{i,k}E_{j,i+1};\\
\left[1 \otimes x_{i,1}^+, \exp(y)\right] &= \exp(y)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant i<k\leqslant r+1} E_{k,j} \otimes E_{j,i+1}E_{i,k}\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. Premièrement, remarquons que

$$\exp(y) \in \prod_{\gamma\in Q_+} Y(\mathfrak{g})_{-\gamma} \otimes Y(\mathfrak{g})_\gamma \subset Y(\mathfrak{g}) \otimes_z Y(\mathfrak{g}).$$

Pour la première relation, notons que $\left[1 \otimes x_{i,0}^+, y\right] = 0$. La première formule suit donc de la propriété de dérivation du crochet de Lie.

Pour la deuxième relation, notons $x = x_{i,0}^+ \otimes 1$. Nous avons alors :

$$\exp(-y)x\exp(y) = \exp(\mathrm{ad}_{-y})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\mathrm{ad}_{-y}^k(x) \tag{2.4}$$

où $\mathrm{ad}_{-y}(x) = [x, y]$. Maintenant, caclulons les premiers termes de cette somme :

$$\begin{aligned}
[x, y] &= \sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+1}^{r+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k};\\
[[x, y], y] &= -2 \sum_{1\leqslant j\leqslant i<k\leqslant r+1} E_{k,j} \otimes E_{j,i+1}E_{i,k};\\
[[[x, y], y], y] &= 0.
\end{aligned}$$

Alors, pour $k > 2$, nous avons $\mathrm{ad}_{-y}^k(x) = 0$. Nous en déduisons donc

$$\begin{aligned}
[x, \exp(y)] &= \exp(y)\left(\exp(-y)x\exp(y) - x\right) = \exp(y)\left(\mathrm{ad}_{-y}^0(x) + \mathrm{ad}_{-y}(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}_{-y}^2(x) - x\right)\\
&= \exp(y)\left([x, y] + \frac{1}{2}\,[[x, y], y]\right)
\end{aligned}$$

ce qui est exactement la deuxième formule.

Pour la troisième formule, nous utilisons les relations définissantes de la J-présentation,

puis nous en déduisons les relations pour la présentation de courants en utilisant l'isomorphisme φ introduit dans le théorème 2.1.3. En effet, d'une part :

$$\left[J(x_{i,0}^+), E_{j,k}\right] = J\left(\left[x_{i,0}^+, E_{j,k}\right]\right) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq i < k \leq r+1.$$

D'autre part, via le théorème 2.1.3 :

$$\varphi(J(x_{i,0}^+)) = x_{i,1}^+ + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=i+1}^{r+1}\left(E_{i,k}E_{k,i+1} + E_{k,i+1}E_{i,k}\right) - \sum_{j=1}^{i}\left(E_{j,i+1}E_{i,j} + E_{i,j}E_{j,i+1}\right)\right).$$

Alors, pour $1 \leqslant j \leqslant i < k \leqslant r+1$:

$$0 = \left[\varphi(J(x_{i,0}^+)), E_{j,k}\right] = \left[x_{i,1}^+, E_{j,k}\right] - E_{i,k}E_{j,i+1}.$$

Enfin, pour la quatrième relation, remarquons que

$$\left[1 \otimes x_{i,1}^+, y\right] = \sum_{1 \leq j \leq i < k \leq r+1} E_{k,j} \otimes E_{i,k}E_{j,i+1};$$
$$\left[\left[1 \otimes x_{i,1}^+, y\right], y\right] = 0.$$

Alors, en utilisant une nouvelle fois la formule (2.4), nous obtenons la relation :

$$\left[1 \otimes x_{i,1}^+, \exp(y)\right] = \exp(y)\left[1 \otimes x_{i,1}^+, y\right]$$

de laquelle nous déduisons le résultat. □

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le théorème.

Démonstration du théorème 2.2.1. Soit $i \in I$. Notons une nouvelle fois

$$y = \sum_{1 \leq j \leq i < k \leq r+1} E_{k,j} \otimes E_{j,k}.$$

Vérifions que $\exp(y)$ satisfait les r relations de la proposition 2.2.2. Déjà, la dernière relation est une conséquence immédiate du lemme 2.2.3. Regardons alors les relations pour $j \neq i$.

Soit $j < i$. Alors :

$$\left[x_{j,0}^+ \otimes 1, y\right] = -\sum_{k=i+1}^{r+1} E_{k,j+1} \otimes E_{j,k} \quad \text{et} \qquad \left[1 \otimes x_{j,0}^+, y\right] = \sum_{k=i+1}^{r+1} E_{k,j+1} \otimes E_{j,k}.$$

Ainsi, $\left[x^+_{j,0}\otimes 1+1\otimes x^+_{j,0},y\right]=0$ et par propriété de dérivation du crochet de Lie, nous avons

$$\left[x^+_{j,0}\otimes 1+1\otimes x^+_{j,0},\Theta_i(z)\right]=0.$$

De manière similaire, pour $i<k$:

$$\left[x^+_{k,0}\otimes 1,y\right]=\sum_{j=1}^{i}E_{k,j}\otimes E_{j,k+1};\quad \left[1\otimes x^+_{k,0},y\right]=-\sum_{j=1}^{i}E_{k,j}\otimes E_{j,k+1}$$

d'où, comme précédemment, $\left[x^+_{k,0}\otimes 1+1\otimes x^+_{k,0},\Theta_i(z)\right]=0$. Ceci conclut la démonstration. □

2.3 Algèbres affines quantiques, T-séries, Théta-séries

Nous souhaitons maintenant établir des formules analogues pour le coproduit des T-séries de l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$. Bien que les formules soient similaires, les raisonnements sont différents. Les T-séries, introduites par [FH15], admettent le même type de factorisation de leur coproduit en termes de Théta-séries. Ici, nous allons tirer profit de la R-matrice universelle et des modules préfondamentaux positifs de la sous-algèbre de Borel. Les calculs sont cette fois-ci plus ad hoc, ce qui se répercute dans la restriction du résultat au cas particulier du type A_2. Il est néanmoins attendu que cette formule soit généralisable au cas plus général du type A, comme pour le Yangien.

2.3.1 Algèbres affines quantiques

Comme pour le Yangien, nous rappelons deux présentations de l'algèbre affine quantique et la correspondance entre ces présentations.

Définition 2.3.1. *[Dri85] L'**algèbre affine quantique** $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ associée à $\mathfrak{g}$ est l'algèbre associative engendrée par E_i,F_i,K_i,K_i^{-1} pour $i\in\hat{I}$. Ces générateurs satisfont les relations, pour $i,j\in\hat{I}$:*

$$K_iK_i^{-1}=K_i^{-1}K_i=1;\quad K_iK_j=K_jK_i\quad K_0K_1\dots K_n=1$$

$$K_iE_j=q^{c_{ij}}E_jK_i;\quad K_iF_j=q^{-c_{ij}}F_jK_i;\quad [E_i,F_j]=\delta_{ij}\frac{K_i-K_i^{-1}}{q-q^{-1}};$$

$$\sum_{s=0}^{-c_{ij}}\begin{bmatrix}1-c_{ij}\\ s\end{bmatrix}_q E_i^{1-c_{ij}-s}E_jE_i^s=\sum_{s=0}^{-c_{ij}}\begin{bmatrix}1-c_{ij}\\ s\end{bmatrix}_q F_i^{1-c_{ij}-s}F_jF_i^s=0 \text{ for } i\neq j$$

*où les relations de la dernière ligne sont appelées **relations de Serre quantique**.*

L'algèbre affine quantique admet une structure d'algèbre de Hopf simple, dont le coproduit est donné par :

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i; \quad \Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}; \quad \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i.$$

Nous introduisons un automorphisme Φ et un anti-automorphisme Ω de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ défini par, pour $i \in \hat{I}$:

$$\begin{aligned} \Phi(E_i) = F_i; \quad \Phi(F_i) = E_i; \quad \Phi(K_i) = K_i; \quad \Phi(q) = q^{-1}; \\ \Omega(E_i) = F_i; \quad \Omega(F_i) = E_i; \quad \Omega(K_i) = K_i^{-1}; \quad \Omega(q) = q^{-1}. \end{aligned}$$

Dans les sections suivantes, nous nous intéresserons à des représentations qui ne sont pas des représentations de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, mais de sa sous-algèbre de Borel.

Définition 2.3.2. *[Dri88] La* ***sous-algèbre de Borel supérieure****, notée $U_q(\mathfrak{b})$, est la sous-algèbre de Hopf de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par E_i, K_i pour $i \in \hat{I}$. La* ***sous-algèbre de Borel inférieure****, notée $U_q(\mathfrak{c})$, est la sous-algèbre de Hopf de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par F_i, K_i pour $i \in \hat{I}$.*

Cette première construction de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ n'est pas la plus adaptée à l'étude de la théorie des représentations de l'algèbre affine quantique. Nous préférons généralement travailler avec la nouvelle présentation de Drinfeld.

Définition 2.3.3. *[Dri88] La* ***nouvelle présentation de Drinfeld de l'algèbre affine quantique*** *$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ est l'algèbre associative engendrée par les $x_{i,m}^{\pm}$ et $\phi_{i,m}^{\pm}$ pour $i \in I$ et $m \in \mathbb{Z}$. Ces générateurs sont soumis aux relations, pour $m, p \in \mathbb{Z}$ et $i, j \in I$:*

$$\begin{aligned} &\phi_{i,m}^{+} = 0 \text{ for } m < 0; \quad \phi_{i,m}^{-} = 0 \text{ for } m > 0; \quad \phi_{i,0}^{+}\phi_{i,0}^{-} = 1; \\ &\left[\phi_{i,m}^{\pm}, \phi_{i,p}^{\epsilon}\right] = 0; \left[x_{i,m}^{+}, x_{i,p}^{-}\right] = \delta_{i,j}\frac{\phi_{i,m+p}^{+} - \phi_{i,m+p}^{-}}{q - q^{-1}}; \\ &\phi_{i,m+1}^{\epsilon}x_{j,p}^{\pm} - q^{\pm c_{ij}}\phi_{i,m}^{\epsilon}x_{j,p+1}^{\pm} = q^{\pm c_{ij}}x_{j,p}^{\pm}\phi_{i,m+1}^{\epsilon} - x_{j,p+1}^{\pm}\phi_{i,m}^{\epsilon}; \\ &x_{i,m+1}^{\pm}x_{j,p}^{\pm} - q^{\pm c_{ij}}x_{i,m}^{\pm}x_{j,p+1}^{\pm} = q^{\pm c_{ij}}x_{j,p}^{\pm}x_{i,m+1}^{\pm} - x_{j,p+1}^{\pm}x_{i,m}^{\pm}; \\ &\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_q (x_{i,0}^{\pm})^{1-c_{ij}-k} x_{j,0}^{\pm} (x_{i,0}^{\pm})^k = 0 \text{ if } i \neq j. \end{aligned}$$

où $\epsilon \in \{+, -\}$. Nous définissons les séries génératrices $\phi_i^{\pm}(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_{i,k}^{\pm} z^k$.

L'isomorphisme entre ces deux présentations a été démontré par Beck [Bec94] et Damiani

[Dam12, Dam15]. Explicitons les liens entre les premiers générateurs de $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$:

$$K_i^{\pm 1} = \phi_{i,0}^{\pm}; \quad E_i = x_{i,0}^{+}; \quad F_i = x_{i,0}^{-} \text{ for } i \in \{1,2\}$$
$$E_0 = K_0 \left[x_{1,1}^{-}, x_{2,0}^{-}\right]_q = -K_0 \left[x_{2,1}^{-}, x_{1,0}^{-}\right]_q; \quad F_0 = \Omega(E_0) = \left[x_{2,0}^{+}, x_{1,-1}^{+}\right]_{q^{-1}} K_0^{-1}$$

où $[x,y]_q = xy - qyx$. Nous verrons davantage d'exemples dans la prochaine section dédiée aux vecteurs de racine.

Remarque 18. *La sous-algèbre de Borel supérieure $U_q(\mathfrak{b})$ contient les générateurrs $x_{i,m}^{+}, x_{i,r}^{-}$ et $\phi_{i,m}^{+}$ pour $i \in I, m \geq 0$ et $r > 0$. La sous-algèbre de Borel inférieure $U_q(\mathfrak{c})$ contient les générateurs $x_{i,-m}^{-}, x_{i,-r}^{+}$ et $\phi_{i,-m}^{-}$ pour $i \in I, m \geq 0$ et $r > 0$.*

La **sous-algèbre de Drinfeld-Cartan** $U_q^0(\mathfrak{g})$ est la sous-algèbre de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ engendrée par les $\phi_{i,m}^{\pm}$ pour $i \in I$ et $m \in \mathbb{Z}$. Les éléments de Drinfeld-Cartan $(h_{i,s})_{s \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, i \in I}$ sont définis par :

$$\phi_i^{\pm}(z) = \phi_{i,0}^{\pm} \exp\left(\pm(q-q^{-1}) \sum_{\pm s > 0} h_{i,s} z^s\right).$$

Notons que $\phi_{i,\pm 1}^{\pm} = \pm(q-q^{-1})\phi_{i,0}^{\pm} h_{i,\pm 1}$ et, pour $s \in \mathbb{N}$, les $h_{i,\pm s}$ s'expriment par rapport aux éléments $\phi_{i,\pm s}^{\pm}, \phi_{i,0}^{\pm}$ et $h_{i,\pm k}$ pour $k < s$. Les éléments de Drinfeld-Cartan commutent, et nous pouvons vérifier que :

$$x_{j,m+s}^{\pm} = \frac{s}{[c_{ij}s]_q} \left[h_{i,s}, x_{j,m}^{\pm}\right].$$

Nous nous intéressons particulièrement à l'expression du coproduit pour les nouveaux générateurs de Drinfeld de la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan. Nous allons plus précisément nous intéresser à des séries génératrices modifiées : les T-séries.

2.3.2 T-séries et Théta-series

Les T-séries sont des séries introduites par Frenkel-Hernandez [FH15] dans l'étude des Q-opérateurs de Baxter pour les systèmes intégrables quantiques. Ces séries sont définies comme la limite de matrices de transfert (qui sont elles-mêmes des traces des matrices de monodromie) associées à des modules préfondamentaux positifs de la sous-algèbre de Borel supérieure. Dans [Zha24], Zhang démontre notamment que la formule du coproduit des T-séries peut être factorisée de manière analogue à la formule du coproduit des S-séries, en termes de Théta-séries. Dans le cas de l'algèbre affine quantique, ces Théta-séries peuvent être calculées en utilisant la R-matrice universelle.

Commençons par définir les T-séries. Nous rappelons que $\tilde{C}(q) = \left(\tilde{C}_{ij}(q)\right)_{i,j \in I}$ est l'inverse de la matrice de Cartan quantique et $[s]_q = \frac{q^s - q^{-s}}{q - q^{-1}}$.

Définition 2.3.4. *[FH15, proposition 5.5] Les T-séries $T_i(z)$ sont des séries entières inversibles en z à coefficients dans la sous-algèbre de Drinfeld-Cartan $U_q^0(\mathfrak{g})$ définies par :*

$$T_i(z) := \exp\left(\sum_{s>0}\sum_{j\in I}\frac{\tilde{C}_{ij}(q^s)h_{j,-s}}{[s]_q}z^s\right).$$

Les T-séries ont le même type de relations de commutation avec les autres générateurs de Drinfeld que les S-séries (ces relations ont été rappelées dans l'introduction de ce chapitre). Nous définissons les **Théta-séries** par [Zha24, definition 9.2] :

$$\Delta(T_i(z)) = (1\otimes T_i(z))\times\Theta_i(z)\times(T_i(z)\otimes 1)\,.$$

Pour $\beta\in Q_+$, notons $\Theta_{i,\beta}(z)\in(U_q(\mathfrak{c})\otimes U_q(\mathfrak{c}))\,[[z]]$ la $(-\beta,\beta)$-composante de poids de $\Theta_i(z)$. Nous pouvons vérifier que $\Theta_{i,0}(z)=1\otimes 1$ et $\Theta_i(z)=\sum\limits_{\beta\in Q_+}\Theta_{i,\beta}(z)$.

Fixons $i\in I$. Pour calculer $\Theta_i(z)$, nous suivons la construction décrite dans la section 9 de [Zha24]. Les composantes de poids $\Theta_i(z)$ s'expriment en termes d'entrées de certaines matrices de monodromie. Ces matrices sont obtenues en appliquant la R-matrice universelle sur un $U_q(\mathfrak{b})$-module, dit préfondamental. Dans la prochaine section, nous décrivons explicitement une base de la sous-algèbre $U_q(\mathfrak{b})$ formée des vecteurs de racine afin d'exprimer la R-matrice universelle, suivant la construction de [Dam98].

2.4 Vecteurs de racine et R-matrice universelle

Nous rappelons la construction des vecteurs de racine de la sous-algèbre de Borel $U_q(\mathfrak{b})$ d'après [Dam98], en utilisant l'action du groupe de tresses sur l'algèbre affine quantique décrite dans [Bec94]. Ces notions nous permettront d'étudier les Théta-séries dans les sections suivantes.

Considérons l'ensemble des **racines positives réelles** $\hat{R}$ de l'algèbre de Lie affine $\hat{\mathfrak{g}}$. Cet ensemble est l'union disjointe des deux ensembles

$$\hat{R}_+ := \{m\delta+\alpha \mid \alpha\in R;\ m\geq 0\};\quad \hat{R}_- := \{r\delta-\alpha \mid \alpha\in R; r>0\}.$$

Dans cette section, nous rappelons la construction générale des vecteurs de racine associés à ces racines réelles positives, avant d'en calculer explicitement pour $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$.

Commençons par rappeler les propriétés de base du groupe de tresse et de son action sur $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ [Bec94]. Nous allons l'utiliser pour construire les racines réelles positives de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ ainsi que les vecteurs de racine associés. Considérons W_0 le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(P^\vee)$ engendré par les réflexions simples s_i pour $i\in I$. Le groupe de Weyl est défini par $W=W_0\rtimes P^\vee$, où le produit est donné par $(s,x)(s',y)=(ss',s'^{-1}(x)+y)$. Pour $s\in W_0$, notons $s=(s,0)$ et pour $x\in P^\vee$, notons $x=(1,x)$. Considérons $\theta=\alpha_1+\cdots+\alpha_r$ la plus haute racine de $\mathfrak{g}$ et notons

$s_0 = (s_\theta, \theta^\vee)$. Considérons le sous-groupe normal $\tilde{W}$ de W engendré par $(s_0, s_1, \ldots, s_r)$, et le quotient $\mathcal{T} = W/\tilde{W}$. Alors $W = \tilde{W} \rtimes \mathcal{T}$ et l'action de $\mathcal{T}$ sur $\tilde{W}$ est donnée par $\tau s_i \tau^{-1} = s_{\tau(i)}$ pour $\tau \in \mathcal{T}$ et $i \in \hat{I}$. Enfin, nous étendons la fonction longueur de $\tilde{W}$ à W par $l_W(\tau w) = l_{\tilde{W}}(w)$ pour $\tau \in \mathcal{T}$ et $w \in \tilde{W}$.

Considérons maintenant le groupe de tresses $\mathcal{B}$ engendré par $\mathcal{T}_w$ pour $w \in W$, avec les relations $\mathcal{T}_{ww'} = \mathcal{T}_w \mathcal{T}_{w'}$ si $l(ww') = l(w) + l(w')$. Une présentation réduite de $w \in W$ est une expression $w = \tau s_{i_1} \ldots s_{i_N}$ où $l(w) = N$ pour $\tau \in \mathcal{T}$. Par exemple, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, dans W :

$$\omega_1^\vee = \tau_1 s_2 s_1; \quad \omega_2^\vee = \tau_2 s_1 s_2; \quad \mathcal{T}_{\omega_1^\vee} = \mathcal{T}_{s_0} \mathcal{T}_{s_2} \mathcal{T}_{\tau_1}; \quad \mathcal{T}_{\omega_2^\vee} = \mathcal{T}_{s_0} \mathcal{T}_{s_1} \mathcal{T}_{\tau_2}$$

où $\tau_1 = (012)$ et $\tau_2 = (021) = \tau_1^{-1}$. Enfin, rappelons l'action du groupe de tresses associé à $\tilde{W}$ sur $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, en notant $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{s_i}$ pour $i \in I$.

$$\mathcal{T}_i(E_i) = -F_i K_i; \quad \mathcal{T}_i(E_j) = \sum_{s=0}^{-c_{ij}} (-1)^{s-c_{ij}} q^{-s} E_i^{-c_{ij}-s} E_j E_i^s \quad \text{si } j \neq i;$$

$$\mathcal{T}_i(F_i) = -K_i^{-1} E_i; \quad \mathcal{T}_i(F_j) = \sum_{s=0}^{-c_{ij}} (-1)^{s-c_{ij}} q^{s} F_i^s F_j F_i^{-c_{ij}-s} \quad \text{si } j \neq i;$$

$$\mathcal{T}_i(K_j) = K_{s_i(\alpha_j)}.$$

De plus, cette action est compatible avec l'automorphisme Φ et l'anti-automorphisme, introduits Ω dans la section 2.4.1, dans le sens suivant :

$$\mathcal{T}_i \Phi = \Phi^{-1} \mathcal{T}_i; \quad \mathcal{T}_i \Omega = \Omega \mathcal{T}_i.$$

Nous pouvons maintenant construire les racines réelles positives, en suivant [Dam98]. Nous définissons $2\rho^\vee := \omega_2^\vee + \omega_1^\vee + \omega_2^\vee + \omega_1^\vee$. En voyant cet élément comme un élément du groupe de Weyl, nous pouvons écrire :

$$2\rho^\vee = \omega_2^\vee \omega_1^\vee \omega_2^\vee \omega_1^\vee = s_0 s_1 s_2 s_1 s_0 s_1 s_2 s_1.$$

Il est important de noter que le choix de l'expression de $2\rho^\vee$ est important : les vecteurs de racine et l'ordre sur les racines réelles positives en dépend, et l'expression de la R-matrice universelle va donc également en dépendre. Nous définissons maintenant, à partir de l'expression de $2\rho^\vee$, la suite

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8) = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1)$$

et sa version cyclique infinie par

$$\begin{array}{rccc} \iota & : & \mathbb{Z} & \to & \hat{I} \\ & & k & \mapsto & i_{k \bmod 8} \end{array}$$

afin de construire les racines réelles positives comme dans la proposition 3.2 de [Dam98]. Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit

$$\beta_k := \begin{cases} s_{\iota(1)} \dots s_{\iota(k-1)}(\alpha_{\iota(k)}) & \text{si } k \geq 1 \\ s_{\iota(0)} \dots s_{\iota(k+1)}(\alpha_{\iota(k)}) & \text{si } k \leq 0 \end{cases}$$

Alors $\{\beta_k \mid k \leq 0\} = \hat{R}_+$ et $\{\beta_k \mid k \geq 1\} = \hat{R}_-$. Par exemple, les premiers termes de $\hat{R}_\pm$ sont

$$\beta_1 = \delta - \alpha_1 - \alpha_2; \quad \beta_2 = \delta - \alpha_2; \quad \beta_3 = 2\delta - \alpha_1 - \alpha_2; \quad \beta_4 = \delta - \alpha_1.$$
$$\beta_0 = \alpha_1; \quad \beta_{-1} = \alpha_1 + \alpha_2; \quad \beta_{-2} = \alpha_2.$$

Nous fixons un ordre sur $\hat{R}$ par

$$\beta_1 \prec \beta_2 \prec \beta_3 \prec \beta_4 \cdots \prec \beta_{-2} \prec \beta_{-1} \prec \beta_0.$$

Nous définissons maintenant les **vecteurs de racine** associés aux racines réelles positives par [Dam98, définition 7]

$$E_{\beta_k} := \begin{cases} \mathcal{T}_{\iota(1)} \dots \mathcal{T}_{\iota(k-1)} \left(E_{\iota(k)}\right) & \text{if } k \geq 1 \\ \mathcal{T}^{-1}_{\iota(0)} \dots \mathcal{T}^{-1}_{\iota(k+1)} \left(E_{\iota(k)}\right) & \text{if } k \leq 0 \end{cases}$$

et $F_{\beta_k} = \Omega\left(E_{\beta_k}\right)$. Nous savons de plus que $E_{\beta_k} \in U_q(\mathfrak{b})$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 19. *Les formules générales pour les vecteurs de racine associés aux racines* $m\delta + \alpha_i$ *pour* $m \geq 0$ *et* $r\delta - \alpha_i$ *pour* $r \geq 1, i \in I$ *sont données par [FH15] :*

$$E_{m\delta+\alpha_i} = x^+_{i,m}; \quad F_{m\delta+\alpha_i} = x^-_{i,-m}; E_{r\delta-\alpha_i} = -K_i^{-1}x^-_{i,r}; \quad F_{r\delta-\alpha_i} = -x^+_{i,-r}K_i.$$

Soit $U_q^+(\mathfrak{b})$ la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{b})$ engendrée par les vecteurs de racine E_{β_k} for $k \leq 0$. Cette algèbre admet pour base

$$\{E_{\beta_0}^{a_0} E_{\beta_{-1}}^{a_{-1}} E_{\beta_{-2}}^{a_{-2}} \dots \mid a_0, a_{-1}, a_{-2} \cdots \in \mathbb{N} \text{ tels que presque tous les } a_k = 0\}.$$

De la même manière, les autres monômes en les vecteurs de racine E_{β_k} pour $k > 0$ engendrent une autre sous-algèbre $U_q^-(\mathfrak{b})$ de $U_q(\mathfrak{b})$. Enfin, soit $U_q^0(\mathfrak{b})$ la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{b})$ engendrée par les $K_i^{\pm 1}$ et $h_{i,s}$ pour $i \in I$ et $s > 0$. Alors, la multiplication définit un isomorphisme linéaire

$$U_q^+(\mathfrak{b}) \otimes U_q^0(\mathfrak{b}) \otimes U_q^-(\mathfrak{b}) \cong U_q(\mathfrak{b}).$$

Dans les prochaines sections, nous nous intéressons en particulier aux vecteurs de racine suivants.

Proposition 2.4.1. *Pour $i \in I$, dans $U_q(\mathfrak{b})$:*

$$E_{\alpha_i} = x_{i,0}^+; \quad F_{\alpha_i} = x_{i,0}^-; \quad E_{\delta-\alpha_i} = -K_i^{-1}x_{i,1}^-; \quad F_{\delta-\alpha_i} = -x_{i,-1}^+K_i$$
$$E_{\alpha_0} = E_0; \quad F_{\alpha_0} = F_0; \quad E_{\alpha_1+\alpha_2} = -\left[x_{2,0}^+, x_{1,0}^+\right]_{q^{-1}}; \quad F_{\alpha_1+\alpha_2} = -\left[x_{1,0}^-, x_{2,0}^-\right]_q$$

où $[x,y]_q = xy - qyx$.

Démonstration. Les deux premiers vecteurs de racine sont directement donnés par

$$E_{\alpha_1} = E_1 \quad \text{et} \quad E_{\alpha_0} = E_0.$$

Nous pouvons également calculer relativement facilement :

$$E_{\alpha_1+\alpha_2} = \mathcal{T}_1^{-1}(E_2) = \Phi\mathcal{T}_1(F_2) = \Phi(-F_2F_1 + qF_1F_2) = q^{-1}E_1E_2 - E_2E_1 = -\left[x_{2,0}^+, x_{1,0}^+\right]_{q^{-1}}.$$

Remarquons que, par définition, il n'y pas de raison pour que $E_{\alpha_2} = E_2$. Il faut donc vérifier la construction proprement.

$$\begin{aligned} E_{\alpha_2} &= \mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2^{-1}(E_1) = \Phi\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(F_1) = \Phi\mathcal{T}_1\left(-F_1F_2 + qF_2F_1\right) \\ &= \Phi\left(K_1^{-1}E_1(-F_2F_1 + qF_1F_2) - q(-F_2F_1 + qF_1F_2)K_1^{-1}E_1\right) \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} K_1^{-1}E_1(-F_2F_1 + qF_1F_2) = &- qF_2F_1K_1^{-1}E_1 - q^{-1}F_2\left(\frac{1-K_1^{-2}}{q-q^{-1}}\right) + q^2F_1F_2K_1^{-1}E_1 \\ &+ \frac{q}{q-q^{-1}}F_2 - q^{-1}F_2\frac{K_1^{-2}}{q-q^{-1}} \end{aligned}$$

nous avons finalement

$$E_{\alpha_2} = \Phi(F_2) = E_2 = x_{2,0}^+.$$

Calculons maintenant $E_{\delta-\alpha_1}$. Nous procédons aux mêmes types de calculs que pour E_{α_2}, mais nous souhaitons une expression en termes de nouveaux générateurs de Drinfeld. Or, d'après la définition 4.6 de [Bec94] :

$$x_{1,1}^- = \mathcal{T}_{\omega_1^\vee}(F_1) = \mathcal{T}_0\mathcal{T}_2(F_2) = \mathcal{T}_0(-K_2^{-1}E_2) = K_0^{-1}K_2^{-1}\left(E_0E_2 - q^{-1}E_2E_0\right) = K_1\left[E_0, E_2\right]_{q^{-1}}.$$

D'autre part, nous pouvons finalement vérifier :

$$E_{\delta-\alpha_1} = \mathcal{T}_0\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2(E_1) = \mathcal{T}_0(E_2) = -\left[E_0, E_2\right]_{q^{-1}} = -K_1^{-1}x_{1,1}^-.$$

Afin de calculer les vecteurs de racine associés à $U_q(\mathfrak{c})$, nous appliquons Ω aux vecteurs

de racine de $U_q(\mathfrak{b})$ calculés précédemment :

$$F_{\alpha_1} = F_1; \quad F_{\alpha_0} = F_0;$$
$$F_{\alpha_1+\alpha_2} = qF_2F_1 - F_1F_2 = -\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_{q^{-1}}$$
$$F_{\alpha_2} = F_2.$$

Pour $F_{\delta-\alpha_1}$, nous devons calculer :

$$\Omega(x^-_{1,1}) = \Omega\left(K_1\left(-E_0E_2 + q^{-1}E_2E_0\right)\right) = F_2F_0K_1^{-1} - qF_0F_2K_1^{-1}.$$

Or, d'après la définition 4.6 de [Bec94] :

$$x^+_{1,-1} = \mathcal{T}_{\omega_1^\vee}(E_1) = \mathcal{T}_0\mathcal{T}_2(E_2) = \mathcal{T}_0(-F_2K_2) = [F_2, F_0]_q K_1^{-1}$$

d'où

$$\Omega(x^-_{1,1}) = x^+_{1,-1}.$$

Nous en déduisons finalement :

$$F_{\delta-\alpha_1} = \Omega(-K_1^{-1}x^-_{1,1}) = -x^+_{1,-1}K_1.$$

□

Nous concluons cette section par la définition des parties triangulaires de la R-matrice universelle. Nous rappelons la définition de la q-exponentielle pour $x \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})$:

$$\exp_q(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(k)_q!}.$$

Considérons la complétion suivante de $U_q(\mathfrak{b}) \otimes U_q(\mathfrak{c})$:

$$U_q(\mathfrak{b})\tilde{\otimes}U_q(\mathfrak{c}) := \sum_{\alpha,\beta\in Q}\left(\prod_{\gamma\in Q_+} U_q(\mathfrak{b})_{\alpha+\gamma}\otimes U_q(\mathfrak{c})_{\beta-\gamma}\right) \subset \prod_{\alpha,\beta\in Q} U_q(\mathfrak{b})_\alpha \otimes U_q(\mathfrak{c})_\beta.$$

Notons qu'il s'agit d'une algèbre.

Définition 2.4.2. *[Dam98, (11.2)][Zha24, (8.3)] Les* ***parties triangulaires*** *de la R-matrice universelle sont les séries entières en z à coefficients dans $U_q(\mathfrak{b})\tilde{\otimes}U_q(\mathfrak{c})$:*

$$\mathcal{R}^+(z) = \prod_{m\geqslant 0,\ \alpha\in R} \exp_q\left((q^{-1}-q)E_{m\delta+\alpha}\otimes F_{m\delta+\alpha}z^m\right);$$

$$\mathcal{R}^-(z) = \prod_{r>0;\ \alpha\in R} \exp_q\left((q^{-1}-q)E_{r\delta-\alpha}\otimes F_{r\delta-\alpha}z^r\right)$$

où les facteurs sont ordonnés de manière décroissante par rapport à l'ordre sur les racines réelles positives, défini précédemment.

Nous allons maintenant définir les $U_q(\mathfrak{b})$-modules sur lequels nous appliquons ces R-matrices.

2.5 Modules préfondamentaux positifs

Nous rappelons brièvement les résultats sur les $U_q(\mathfrak{b})$-modules de plus bas ℓ-poids, obtenus dans [HJ12]. Nous nous intéressons notamment à la famille des modules fondamentaux positifs. Notons que ces $U_q(\mathfrak{b})$-modules ne sont pas des $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules. Dans cette section, nous déterminons l'action explicite de tous les vecteurs de racine sur un module préfondamental positif.

Commençons par rappeler la structure de poids des représentations de $U_q(\mathfrak{b})$. Pour V un $U_q(\mathfrak{b})$-module et pour $\lambda \in \mathfrak{t} := (\mathbb{C}^\times)^I$, considérons :

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \phi^+_{i,0}\cdot v = \lambda(i)v\}.$$

Si $V_\lambda \neq 0$, nous l'appelons espace de poids de V de poids λ. Un module V est dit gradué par les poids si c'est une somme directe d'espaces de poids. De plus, observons que le réseau des racines Q s'injecte dans $\mathfrak{t}^\times$ par $\alpha_j \mapsto \overline{\alpha_j} = \left(q^{c_{ij}}\right)_{i,j\in I}$. Cette application est bien injective, car q n'est pas une racine de l'unité. Notons $\overline{Q}$ l'image de Q par cette injection.

Nous considérons maintenant la structure de ℓ-poids des représentations de $U_q(\mathfrak{b})$. L'ensemble des I-uplets de séries entières en z inversibles est noté $\mathfrak{t}_l := (\mathbb{C}[[z]]^\times)^I$. Un élément de $\mathfrak{t}_l$ est appelé ℓ-poids. Pour $j \in I$ et $a \in \mathbb{C}$, nous définissons le ℓ-poids préfondamental positif $\Psi_{j,a} := \left((1-az)^{\delta_{ij}}\right)_{i\in I}$. Pour $\mathbf{P} = (P_i(z))_{i\in I} \in \mathfrak{t}_\ell^\times$, le module de Verma de plus bas ℓ-poids $M(\mathbf{P})$ est le $U_q(\mathfrak{b})$-module engendré par un vecteur v_0 tel que

$$\phi_i^+(z)\cdot v_0 = P_i(z)\ v_0; \quad E_\alpha \cdot v_0 = 0 \text{ for } \alpha \in \hat{R}_-.$$

D'après la décomposition triangulaire, nous pouvons écrire

$$M(\mathbf{P}) = U_q^+(\mathfrak{b})\cdot v_0.$$

Nous notons $L(\mathbf{P})$ l'unique quotient irréductible du module de Verma. Si le ℓ-poids est préfondamental positif, nous appelons ce module **module préfondamental positif**.

Afin de calculer les matrices de monodromie, nous nous intéressons au cas particulier des modules préfondamentaux positifs. Pour $\mathfrak{sl}_3$, nous allons nous intéresser au ℓ-poids pré-

fondamental $\Psi_{1,1} = (1-z, 1)$, puisque nous déduirons la formule du coproduit de $T_2(z)$ à partir de celle pour le coproduit de $T_1(z)$. Notons L_1 le module préfondamental positif associé à $\Psi_{1,1}$, appelé premier module préfondamental positif. Ce module est alors engendré par un vecteur $v_{0,0}$ tel que :

$$\phi_1^{\pm}(z) \cdot v_{0,0} = (1-z)v_{0,0}; \quad \phi_2^{\pm}(z) \cdot v_{0,0} = v_{0,0}$$
$$E_{r\delta-\alpha_1} \cdot v_{0,0} = 0 \quad E_{r\delta-\alpha_2} \cdot v_{0,0} = 0 \quad E_{r\delta-\alpha_1-\alpha_2} \cdot v_{0,0} = 0 \text{ for } r \geq 1.$$

En réalité, Frankel-Hernandez [FH15] ont démontré que presque tous les autres vecteurs de racine ont une action triviale sur ce module. L'action des vecteurs de racine restants est calculable explicitement.

Lemme 2.5.1. *[HJ12][FH15, Theorem 6.3]*

1. *Les générateurs suivant agissent trivialement sur L_1, pour $j \in I$ et $r \geqslant 1$:*

$$x_{j,r}^{+}; \quad E_{(r+1)\delta-\alpha_1}; \quad E_{r\delta-\alpha_2}; \quad E_{(r+1)\delta-(\alpha_1+\alpha_2)}; \quad \phi_{j,\delta_{i,j}+r}^{\pm}.$$

2. *Le module L_1 admet la décomposition en poids :*

$$L_1 = \bigoplus_{a,b\in\mathbb{N}} (L_1)_{\overline{a\alpha_1}} \oplus (L_1)_{\overline{b(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

   où chaque espace de poids est de dimension 1.

3. *D'après le point précédent :*

$$E_2 \cdot v_{0,0} = 0.$$

Nous fournissons une présentation explicite du premier module préfondamental positif de l'algèbre affine quantique $\mathfrak{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$.

Proposition 2.5.2. *Le module L_1 est $U_q(\mathfrak{b})$-module admettant pour base $(v_{a,b})_{a,b\in\mathbb{Z}_+}$ dont l'action de $U_q(\mathfrak{b})$ est donnée par, pour $m \geqslant 0$ et $r \geqslant 1$:*

$$x_{1,m}^{+} \cdot v_{a,b} = \delta_{m=0} v_{a+1,b}; \quad x_{1,r}^{-} \cdot v_{a,b} = \delta_{r=1} q^b \frac{(a)_q}{q-q^{-1}} v_{a-1,b};$$
$$x_{2,m}^{+} \cdot v_{a,b} = -\delta_{m=0} q^{-a} (a)_q v_{a-1,b+1}; \quad x_{2,r}^{-} \cdot v_{a,b} = 0;$$
$$E_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot v_{a,b} = q^a v_{a,b+1}; \quad E_0 \cdot v_{a,b} = -q^{-a-2(b-1)} \frac{(b)_q}{q-q^{-1}} v_{a,b-1};$$
$$K_1 \cdot v_{a,b} = -\phi_{1,1}^{\pm} \cdot v_{a,b} = q^{2a+b} v_{a,b}; \quad K_2 \cdot v_{a,b} = q^{b-a} v_{a,b}; \quad K_0 \cdot v_{a,b} = q^{-2b-a} v_{a,b}.$$

Tous les autres vecteurs de racine et les $(\phi_{j,\delta_{1,j}+r}^{\pm})_{j\in I, r\geq 1}$ agissent trivialement sur L_1.

Démonstration. Considérons la base de $U_q^+(\mathfrak{b})$ formée des vecteurs de racine donnée en section 4. Nous savons que le module L_1 est engendré par l'ensemble

$$\{E_{\beta_0}^{a_0} E_{\beta_{-1}}^{a_{-1}} E_{\beta_{-2}}^{a_{-2}} \cdots v_{0,0} \quad | \quad a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots \in \mathbb{N} \text{ où presque tous les } a_k = 0.\}$$

De plus, d'après le lemme précédent, les vecteurs suivants engendrent L_1 :

$$v_{a,b} := E_1^a E_{\alpha_1+\alpha_2}^b \cdot v_{0,0} \text{ for } a, b \in \mathbb{N}\,.$$

Puisque chaque vecteur $v_{a,b}$ est de poids $\overline{a\alpha_1} + \overline{b(\alpha_1+\alpha_2)}$, nous en déduisons que tous les $v_{a,b}$ sont des vecteurs non nuls et de poids différents : ils forment ainsi une famille libre. Finalement, il suit que $(v_{a,b})_{a,b\in\mathbb{N}}$ est une base de L_1. Nous allons maintenant décrire l'action des vecteurs de $U_q(\mathfrak{b})$ sur cette base.

Commençons par expliciter les actions évidentes. Notons que, par définition et en utilisant la relation de Serre quantique $E_{\alpha_1+\alpha_2}E_1 = qE_1E_{\alpha_1+\alpha_2}$:

$$x_{1,0}^+ \cdot v_{a,b} = v_{a+1,b} \quad \text{et} \quad E_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot v_{a,b} = q^a v_{a,b+1}.$$

Pour calculer l'action de $x_{2,0}^+$, nous tirons profit de l'expression de $E_{\alpha_1+\alpha_2}$. En effet :

$$E_2E_1 = q^{-1}E_1E_2 - E_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

De plus, d'après les relations de Serre quantiques, nous savons que $E_2E_{\alpha_1+\alpha_2} = qE_{\alpha_1+\alpha_2}E_2$. Notons $E_2 \cdot v_{a,b} = \lambda_{a,b}v_{a-1,b+1}$. Alors $\lambda_{a,b} = q^{-1}\lambda_{a-1,b} - q^{a-1}$. Puisque $\lambda_{0,b} = 0$ (nous savons, via le lemme, que $E_2 \cdot v_{0,0} = 0$), la résolution de cette relation de récurrence nous donne finalement

$$E_2 \cdot v_{a,b} = -q^{-a}(a)_q v_{a-1,b+1}.$$

Nous nous intéressons maintenant aux générateurs de degré supérieur. Notons l'action de $x_{1,1}^-$ par $x_{1,1}^- \cdot v_{a,b} = \mu_{a,b}v_{a-1,b}$. Puisque $x_{1,1}^-E_1 = E_1x_{1,1}^- - \frac{\phi_{1,1}^+}{q-q^{-1}}$, nous en déduisons

$$\mu_{a,b} = \frac{q^{2(a-1)+b}}{q-q^{-1}} + \mu_{a-1,b}.$$

De plus, nous pouvons vérifier que $x_{1,1}^-E_{\alpha_1+\alpha_2} = -E_2x_{1,1}^-E_1 + q^{-1}x_{1,1}^-E_1E_2$ et donc en déduire que $\mu_{0,b} = 0$. La résolution de la relation de récurrence nous donne donc

$$x_{1,-1}^- \cdot v_{a,b} = q^b \frac{(a)_q}{q-q^{-1}} v_{a-1,b}.$$

Finalement, nous regardons l'action du générateur E_0. Notons $E_0 \cdot v_{a,b} = \nu_{a,b}v_{a,b-1}$. Notons que $E_0E_1 = q^{-1}E_1E_0 - K_2^{-1}x_{2,1}^-$. Puisque $x_{2,1}^-$ agit par 0 sur L_1, nous en déduisons que

$\nu_{a,b} = q^{-a}\nu_{0,b}$. Alors, d'après les relations de Serre quantiques pour E_0 et E_2 :

$$q^{-(a-2)}\nu_{0,b+2} - (q+q^{-1})q^{-(a-1)}\nu_{0,b+1} + q^{-a}\nu_{0,b} = 0.$$

Par définition, nous savons que $\nu_{0,0} = 0$. Ainsi, il suffit de déterminer $\nu_{0,1}$. Puisque nous savons que $E_0E_2 = q^{-1}E_2E_0 + K_1^{-1}x_{1,1}^-$, nous en déduisons :

$$E_0E_{\alpha_1+\alpha_2} = q^{-2}E_{\alpha_1+\alpha_2}E_0 - K_1^{-1}x_{1,1}^-E_1 + q^{-2}E_1K_1^{-1}x_{1,1}^- - q^{-1}K_2^{-1}x_{2,1}^-E_2 + q^{-1}E_2K_2^{-1}x_{2,1}^-$$

de sorte que $\nu_{0,1} = -\frac{1}{q-q^{-1}}$. Finalement, il s'ensuit

$$E_0 \cdot v_{a,b} = -q^{-a-2(b-1)}\frac{(b)_q}{q-q^{-1}}v_{a,b-1}.$$

□

Nous nous rappelons la construction des matrices de monodromies, dans l'idée de l'appliquer pour le module L_1. Les matrices de monodromie sont définies en appliquant le premier facteur tensoriel de la R-matrice universelle sur les représentations de la sous-algèbre de Borel [FR92, (4.32)][Zha24, Definition 8.11]. Soit M un $U_q(\mathfrak{b})$-module de plus bas ℓ-poids. Soit $b_0 \in M$ un vecteur de plus bas ℓ-poids. À partir de ce vecteur, nous construisons une base $\mathbf{B}$ adaptée à la graduation par les poids. Les **matrices de monodromie** $(t^{\pm}_{b_1,b_2}(z))_{b_1,b_2\in\mathbf{B}}$ associées à M sont les séries formelles à coefficients dans $U_q(\mathfrak{c})$ définies par

$$\mathcal{R}^{\pm}(z)\cdot(b_2\otimes 1) = \sum_{b_1\in\mathbf{B}} b_1\otimes t^{\pm}_{b_1,b_2}(z) \quad \text{pour } b_2\in\mathbf{B}.$$

À partir de cette construction, Zhang démontre [Zha24, (9.52)] que les Théta-séries s'expriment en termes des entrées de la matrice de monodromie. Pour $M = L_i$, nous avons :

$$\Theta_{i,\beta}(z) = \sum_{b\in\mathbf{B},\ \mathrm{wt}(b)=\overline{\beta}} t^{+}_{b,b_0}(z)\otimes t^{-}_{b_0,b}(z)K_\beta^{-1} \quad \text{pour } \beta\in Q \tag{2.5}$$

où $K_\beta := K_1^{a_1}\dots K_n^{a_n}$ for $\beta = \sum_{j\in I} a_j\alpha_j$. Nous allons appliquer ce résultat avec la base définie précédemment $\mathbf{B} = (v_{a,b})_{a,b\in\mathbb{N}}$. Notons que $\mathrm{wt}(v_{a,b}) = \overline{a\alpha_1} + \overline{b(\alpha_1+\alpha_2)}$.

2.6 Formule du coproduit des T-séries en type A_2

Nous établissons le deuxième résultat principal de ce chapitre : les formules du coproduit des T-séries en type A_2. Nous calculons la matrice de monodromie associée à L_1 et en déduisons des formules pour la Théta-série $\Theta_1(z)$. Nous appliquons ensuite un morphisme qui intervertit

les racines simples de $\mathfrak{sl}_3$ pour obtenir la formule pour $\Theta_2(z)$. Nous concluons cette section en vérifiant la compatibilité entre nos formules et les formules du coproduit des générateurs de Drinfeld-Cartan de Finkelberg-Tsymbaliuk [FT19].

Théorème 2.6.1. *Le coproduit des T-séries pour l'algèbre affine quantique $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ est donné par :*

$$T_i(z) = (1 \otimes T_i(z)) \times \Theta_i(z) \times (T_i(z) \otimes 1) \quad \textit{pour } i \in \{1, 2\}$$

où les Théta-séries $\Theta_i(z)$ sont données par les formules :

$$\Theta_1(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{1,0} \otimes x^+_{1,-1}z\right) \exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} z\right);$$
$$\Theta_2(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{2,0} \otimes x^+_{2,-1}z\right) \exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{1,0}, x^+_{2,-1}\right]_{q^{-1}} z\right).$$

De plus, les q-exponentielles commutent dans les deux formules.

Démonstration. Premièrement, nous démontrons que nous pouvons déduire la formule pour $\Theta_2(z)$ à partir de la formule de $\Theta_1(z)$. En effet, considérons l'automorphisme d'algèbres de Hopf de $U_q\left(\hat{\mathfrak{sl}}_3\right)$:

$$\psi : \left| \begin{array}{ll} E_1 \mapsto E_2; & E_2 \mapsto E_1; \\ F_1 \mapsto F_2; & F_2 \mapsto F_1; \\ K_1 \mapsto K_2; & K_2 \mapsto K_1. \end{array} \right.$$

Par souci de simplicité, nous notons $\psi(0) = 0, \psi(1) = 2, \psi(2) = 1$. Nous pouvons vérifier que $\psi\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{\psi(i)}\psi$ pour $i \in \hat{I}$. Alors, d'après la définition 4.6 de [Bec94], nous avons

$$\psi(x^+_{1,-s}) = (-1)^s x^+_{2,-s} \quad \text{pour } s > 0.$$

Puisque $\left[x^+_{i,-s}, x^-_{i,0},\right] = \frac{\phi^-_{i,-s}}{q^{-1}-q}$, nous en déduisons que $\psi(\phi^-_{1,-s}) = (-1)^s\phi^-_{2,-s}$. Alors, par récurrence sur s, nous avons $\psi(h_{1,-s}) = (-1)^s h_{2,-s}$, et donc $\psi\left(T_1(z)\right) = T_2(-z)$. Finalement, nous déduisons la formule pour $T_2(z)$ à partir de celle pour $T_1(z)$.

Montrons maintenant la formule pour $\Theta_1(z)$. Considérons le premier module préfondamental positif L_1 et $(v_{a,b})_{a,b\in\mathbb{N}}$ sa base décrite dans la proposition 2.5.2. Pour obtenir les parties positive et négative de la matrice de monodromie associée à L_1, nous calculons :

$$\mathcal{R}^+(z) \cdot (v_{0,0} \otimes 1) = \sum_{a,b\in\mathbb{N}} v_{a,b} \otimes t^+_{v_{a,b},v_{0,0}}(z);$$
$$\mathcal{R}^-(z) \cdot (v_{a,b} \otimes 1) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}} v_{k,l} \otimes t^-_{v_{k,l},v_{a,b}}(z).$$

Remarquons que, pour la partie négative de la matrice de monodromie, nous nous intéressons uniquement aux termes $t^-_{v_{0,0},v_{a,b}}(z)$.

Commençons par la partie positive. Puisque nous savons que presque tous les termes de $\mathcal{R}^+(z)$ s'annulent sur M d'après la proposition 2.5.2, il suit que le terme $\mathcal{R}^+(z)\cdot(v_{0,0}\otimes 1)$ est égal à

$$\sum_{a,b,c\in\mathbb{N}} \frac{((q^{-1}-q)E_1\otimes F_1)^a}{(a)_q!}\frac{((q^{-1}-q)E_{\alpha_1+\alpha_2}\otimes F_{\alpha_1+\alpha_2})^b}{(b)_q!}\frac{((q^{-1}-q)E_2\otimes F_2)^c}{(c)_q!}\cdot(v_{0,0}\otimes 1)$$

Mais alors, via la même proposition :

$$E_2^c\cdot v_{0,0}=\delta_{c=0}v_{0,0};\quad E_{\alpha_1+\alpha_2}^b=v_{0,b};\quad E_1^a\cdot v_{0,b}=v_{a,b}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\mathcal{R}^+(z)\cdot(v_{0,0}\otimes 1)=\sum_{a,b\in\mathbb{N}} v_{a,b}\otimes\frac{(q^{-1}-q)^a}{(a)_q!}F_1^a\frac{(q^{-1}-q)^b}{(b)_q!}F_{\alpha_1+\alpha_2}^b.$$

Finalement, la partie positive est donnée par :

$$t^+_{v_{a,b},v_{0,0}}(z)=\frac{(q^{-1}-q)^a}{(a)_q!}(x^-_{1,0})^a\frac{(q-q^{-1})^b}{(b)_q!}\left[x^-_{1,0},x^-_{2,0}\right]_q^b$$

Calculons à présent la partie négative. Encore une fois, presque tous les termes de la R-matrice $\mathcal{R}^-(z)$ s'annulent sur M, donc :

$$\mathcal{R}^-(z)\cdot(v_{a,b}\otimes 1)=\sum_{k,l\in\mathbb{N}}\frac{((q-q^{-1})E_{\delta-\alpha_1}\otimes F_{\delta-\alpha_1}z)^k}{(k)_q!}\frac{((q-q^{-1})E_0\otimes F_0z)^l}{(l)_q!}\cdot(v_{a,b}\otimes 1).$$

Or, puisque

$$E_0^l\cdot v_{a,b}\in\mathbb{C}v_{a,b-l}\quad\text{et}\quad E_{\delta-\alpha_1}^k\cdot v_{a,b-l}\in\mathbb{C}v_{a-k,b-l}$$

nous ne nous intéressons qu'aux termes pour $k=a$ et $l=b$, soit :

$$E_0^b\cdot v_{a,b}=(-1)^b\frac{(b)_q!}{(q-q^{-1})^b}q^{-ab-b(b-1)}v_{a,0};\quad E_{\delta-\alpha_1}^a\cdot v_{a,0}=(-1)^a\frac{(a)_q!}{(q-q^{-1})^a}q^{-a(a-1)}.$$

Finalement, nous obtenons pour la partie négative :

$$t^-_{v_{0,0},v_{a,b}}(z)=q^{-a(a-1)}F_{\delta-\alpha_1}^a z^a q^{-ab-b(b-1)}F_0^b z^b.$$

Pour conclure, nous avons juste à réécrire cette expression dans la nouvelle présentation

de Drinfeld, grâce à la proposition 2.4.1

$$F^a_{\delta-\alpha_1} = (-x^+_{1,-1}K_1)^a = (-1)^a q^{a(a-1)}(x^+_{1,-1})^a K_1^a;$$
$$K_1^a F_0^b = q^{ab} F_0^b K_1^a;$$
$$F_0^b = \left(\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_q^{-1} K_0^{-1}\right)^b = q^{b(b-1)}\left(\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}\right)^b (K_0^{-1})^b.$$

D'où :

$$t^-_{v_{0,0},v_{a,b}}(z) = (-1)^a \left(x^+_{1,-1}\right)^a \left(\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}\right)^b K_1^a (K_0^{-1})^b z^{a+b}.$$

Alors, en utilisant l'équation (2.5) :

$$\Theta_{1,a\alpha_1+b(\alpha_1+\alpha_2)+c\alpha_2} = \delta_{c,0}\frac{(q-q^{-1})^a}{(a)_q!}(x^-_{1,0})^a \frac{(q-q^{-1})^b}{(b)_q!}\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q^b \otimes (x^+_{1,-1})^a \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]^b_{q^{-1}} z^{a+b}$$

d'où finalement

$$\Theta_1(z) = \exp_q\left((q-q^{-1})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1}z\right)\exp_q\left((q-q^{-1})\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} z\right).$$

De plus, les termes dans les q-exponentielles commutent. Par exemple, pour $\Theta_1(z)$, remarquons que

$$x^-_{1,0}\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q = q^{-1}\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q x^-_{1,0}; \quad x^+_{1,-1}\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} = q\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}} x^+_{1,-1}.$$

Nous en déduisons finalement que les q-exponentielles commutent. □

Nous vérifions maintenant que ces nouvelles formules du coproduit dans $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ sont compatibles avec les formules du coproduit des éléments de Drinfeld-Cartan données par Finkelberg-Tsymbaliuk [FT19, Theorem 10.14]. En type A_2, l'inverse de la matrice de Cartan quantique est $\tilde{C}(q) = \frac{1}{[3]_q}\begin{pmatrix}[2]_q & 1\\ 1 & [2]_q\end{pmatrix}$. Regardons le coefficient de z dans $T_1(z)$ (resp. $T_2(z)$), noté $T_{1,1}$ (resp. $T_{2,1}$). Alors :

$$T_{1,1} = \frac{[2]_q}{[3]_q}h_{1,-1} + \frac{1}{[3]_q}h_{2,-1}; \quad T_{2,2} = \frac{1}{[3]_q}h_{1,-1} + \frac{[2]_q}{[3]_q}h_{2,-1}.$$

En remarquant que $[2]_q^2 - 1 = [3]_q$, nous obtenons

$$\begin{cases} h_{1,-1} &= [2]_q T_{1,1} - T_{2,1} \\ h_{2,-1} &= [2]_q T_{2,1} - T_{1,1} \end{cases}.$$

D'autre part, en regardant le coefficient de z dans le théorème 2.6.1 :

$$\begin{aligned}\Delta\left(T_{1,1}\right) =& \frac{[2]_q}{[3]_q}\square(h_{1,-1}) + \frac{1}{[3]_q}\square\left(h_{2,-1}\right) + (q-q^{-1})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1}\\ &+ (q-q^{-1})\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}\\ \Delta\left(T_{2,1}\right) =& \frac{[2]_q}{[3]_q}\square(h_{2,-1}) + \frac{1}{[3]_q}\square\left(h_{1,-1}\right) + (q-q^{-1})x^-_{2,0}\otimes x^+_{2,-1}\\ &+ (q-q^{-1})\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_q \otimes \left[x^+_{1,0}, x^+_{2,-1}\right]_{q^{-1}}\end{aligned}$$

où $\square(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$. Notons que

$$\left[x^+_{1,0}, x^+_{2,-1}\right]_{q^{-1}} = -\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}; \quad [2]_q\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_q + \left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_q = -q^2\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_{q^{-3}}$$

Nous calculons alors :

$$\begin{aligned}\Delta(h_{1,-1}) =& \Delta\left([2]_q T_{1,1} - T_{2,1}\right)\\ =& \square(h_{1,-1}) + (q^2-q^{-2})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1} - (q-q^{-1})x^-_{2,0}\otimes x^+_{2,-1}\\ &- (q^3-q)\left[x^-_{2,0}, x^-_{1,0}\right]_{q^{-3}}\otimes\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}\\ \Delta(h_{2,-1}) =& \Delta\left([2]_q T_{2,1} - T_{2,1}\right)\\ =& \square(h_{2,-1}) + \left(q^2-q^{-2}\right)x^-_{2,0}\otimes x^+_{2,-1} - (q-q^{-1})x^-_{1,0}\otimes x^+_{1,-1}\\ &+ (q^3-q)\left[x^-_{1,0}, x^-_{2,0}\right]_{q^{-3}}\otimes\left[x^+_{2,0}, x^+_{1,-1}\right]_{q^{-1}}.\end{aligned}$$

Ces formules sont exactement celles obtenues dans [FT19].

Remarque 20. *Les T-séries que nous considérons ici correspondent aux $T^-(z)$ de l'article original de [FH15]. D'autres T-séries $T^+(z)$, introduites dans [Her23], peuvent être considérées. La formule du coproduit pour ces T-séries se déduit de notre formule précédente. Il est important d'expliciter ce coproduit dans l'optique d'étendre les résultats du chapitre 1. Rappelons l'anti-automorphisme Ω introduit dans [Bec94] :*

$$\Omega : E_i \mapsto F_i, \quad F_i \mapsto E_i, \quad K_i \mapsto K_i^{-1}, \quad q \mapsto q^{-1}.$$

D'après [HZ25], nous savons que

$$T_i^+(z) = \Omega\left(T_i^-(z)\right).$$

Nous en déduisons alors que

$$\Delta\left(T_i^+(z)\right) = \tau\circ(\Omega\otimes\Omega)\circ\Delta\left(T_i^-(z)\right)$$

où τ est le flip qui échange les deux facteurs tensoriels. Finalement, en notant

$$\Delta\left(T_1^+(z)\right) = \left(1 \otimes T_1^+(z)\right) \times \Theta_1^+(z) \times \left(T_1^+(z) \otimes 1\right)$$

nous obtenons

$$\Theta_1^+(z) = \exp_{q^{-1}}\left((q^{-1}-q)x_{1,1}^- \otimes x_{1,0}^+ z\right) \exp_{q^{-1}}\left((q^{-1}-q)\left[x_{2,0}^-, x_{1,1}^-\right]_{q^{-1}} \otimes \left[x_{1,0}^+, x_{2,0}^+\right]_q\right).$$

2.7 Appendice : Yangiens décalés et associateurs

Dans cette section, nous démontrons la proposition 2.2.2, suivant la démonstration du théorème 5.7 de [Zha24]. Nous aurons besoin de la notion de Yangiens décalés, une famille d'algèbres qui généralisent le Yangien standard. Ces algèbres ont été introduites par Brundan-Kleshchev [BK06] en type A et [KWWY14, BFN19] en général. Les Théta-séries s'interprètent comme des associateurs pour certaines représentations des Yangiens décalés. À partir de cette propriété, nous vérifions que les Théta-séries satisfont alors le système d'équations de la proposition 2.2.2.

Définition 2.7.1. *Soit $\mu = \sum_{i\in I} m_i\omega_i^\vee \in P^\vee$ un copoids. Le* ***Yangien décalé*** *$Y_\mu(\mathfrak{g})$ est l'algèbre associative engendrée par les $x_{i,m}^\pm$ et $\xi_{i,p}$ pour $i \in I$ et $(m,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. Ces générateurs sont soumis aux relations :*

$$\begin{gathered}
[\xi_{i,p}, \xi_{j,p'}] = 0, \quad \left[x_{i,m}^+, x_{j,m'}^-\right] = \delta_{i,j}\xi_{i,m+m'}, \\
\left[\xi_{i,p+1}, x_{j,m}^\pm\right] - \left[\xi_{i,p}, x_{j,m+1}^\pm\right] = \pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(\xi_{i,p}x_{j,m}^\pm + x_{j,m}^\pm\xi_{i,p}\right), \\
\left[x_{i,m+1}^\pm, x_{j,m'}^\pm\right] - \left[x_{i,m}^\pm, x_{j,m'+1}^\pm\right] = \pm\frac{1}{2}c_{ij}\left(x_{i,m}^\pm x_{j,m'}^\pm + x_{j,m'}^\pm x_{i,m}^\pm\right), \\
ad_{x_{i,0}^\pm}^{1-c_{ij}}(x_{j,0}^\pm) = 0 \qquad \text{if } i \neq j, \\
\xi_{i,-m_i-1} = 1; \quad \xi_{i,p} = 0 \text{ pour } p < -m_i - 1.
\end{gathered}$$

Les séries génératrices sont définies par :

$$\xi_i(z) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} \xi_{i,p} z^{-p-1}; \quad x_i^\pm(z) := \sum_{m\in\mathbb{N}} x_{i,m}^\pm z^{-m-1}.$$

Ce sont des séries de Laurent à coefficients dans $Y_\mu(\mathfrak{g})$ et de termes dominants respectifs z^{m_i} et $x_{i,0}^\pm z^{-1}$. Un copoids $\sum_{i\in I} m_i\omega_i^\vee \in P^\vee$ est dit dominant (resp. antidominant) si $m_i \geq 0$ (resp. $m_i \leq 0$) pour tout $i \in I$.

Une généralisation du coproduit standard est définie dans [FKP+18].

Théorème 2.7.2. *[FKP+18, Corollary 3.16, Theorem 4.12, Proposition 4.14]*

1. *Les homomorphismes de décalage* $\iota^{\mu}_{\epsilon,\eta} : Y_\mu(\mathfrak{g}) \longrightarrow Y_{\mu+\epsilon+\eta}(\mathfrak{g})$ *pour* ϵ, η *des copoids antidominants, définis par :*

$$x^+_{i,n} \mapsto x^+_{i,n-\langle\epsilon,\alpha_i\rangle}; \quad x^-_{i,n} \mapsto x^-_{i,n-\langle\eta,\alpha_i\rangle}; \quad \xi_{i,p} \mapsto \xi_{i,p-\langle\epsilon+\eta,\alpha_i\rangle}$$

   sont injectifs.

2. *Il existe une unique famille d'homomorphismes d'algèbres*

$$\Delta_{\mu,\nu} : Y_{\mu+\nu}(\mathfrak{g}) \longrightarrow Y_\mu(\mathfrak{g}) \otimes Y_\nu(\mathfrak{g}) \quad \textit{pour } \mu, \nu \in P^\vee$$

   appelés coproduits décalés, tels que $\Delta_{0,0}$ *est le coproduit du Yangien* $Y(\mathfrak{g})$*,*

$$\Delta_{\mu,\nu}(x^+_{i,n}) = x^+_n \otimes 1 \textit{ if } n < -\langle\mu,\alpha_i\rangle, \quad \Delta_{\mu,\nu}(x^-_{i,n}) = 1 \otimes x^-_{i,n} \textit{ si } n < -\langle\nu,\alpha_i\rangle$$

   et les diagrammes suivants sont commutatifs pour ϵ, η *antidominants :*

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mu+\nu}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta_{\mu,\nu}} & Y_\mu(\mathfrak{g}) \otimes Y_\nu(\mathfrak{g}) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota^{\mu+\nu}_{\epsilon,\eta}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota^{\mu}_{\epsilon,0} \otimes \iota^{\nu}_{0,\eta}} \\ Y_{\mu+\nu+\epsilon+\eta}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta_{\mu+\epsilon,\nu+\eta}} & Y_{\mu+\epsilon}(\mathfrak{g}) \otimes Y_{\nu+\eta}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mu+\epsilon+\nu}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta_{\mu+\epsilon,\nu}} & Y_{\mu+\epsilon}(\mathfrak{g}) \otimes Y_\nu(\mathfrak{g}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mu,\epsilon+\nu}} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mu,\epsilon} \otimes Id} \\ Y_\mu(\mathfrak{g}) \otimes Y_{\epsilon+\nu}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{Id \otimes \Delta_{\epsilon,\nu}} & Y_\mu(\mathfrak{g}) \otimes Y_\epsilon(\mathfrak{g}) \otimes Y_\nu(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Maintenant que nous avons défini les Yangiens décalés et les coproduits décalés, nous allons étudier les propriétés d'entrelacement introduites dans [Zha24, 5.3]. Commençons par rappeler brièvement certaines notions basiques de la théorie des représentations des Yangiens décalés. Soit $\mu = \sum_{i\in I} m_i\omega_i^\vee \in P^\vee$ un copoids. Pour un $Y_\mu(\mathfrak{g})$-module V, nous considérons l'espace polynomial $V[z]$. C'est également un $Y_\mu(\mathfrak{g})$-module par extension scalaire. En prenant son pullback le long de

$$\begin{array}{rccc} \tau_z \ : & Y_\mu(\mathfrak{g}) & \to & Y_\mu(\mathfrak{g})[z] \\ & x^\pm_{i,p} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{p}{n} x_{i,p-n} z^n \\ & \xi^\pm_{i,p} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{p}{n} \xi_{i,p-n} z^n \end{array}$$

nous obtenons un $Y_\mu(\mathfrak{g})[z]$-module, noté V_z et appelé module déformé. Le paramètre z est appelé paramètre spectral. L'ensemble $\mathcal{L}_\mu$ des **ℓ-poids de copoids** μ est l'ensemble des I-uplet $\mathbf{P} = (P_i(z))_{i\in I} \in \mathbb{C}((z^{-1}))^I$ où le terme dominant de chaque $P_i(z)$ est z^{m_i}. Nous pouvons définir le module de Verma $M(\mathbf{P})$ comme le $Y_\mu(\mathfrak{g})$-module engendré par le vecteur v_0 tel que

$$\xi_i(z)\cdot v_0 = P_i(z)v_0; \quad x_i^+(z)\cdot v_0 = 0 \text{ for } i\in I.$$

Le module de Verma admet un unique quotient irréductible, noté $L(\mathbf{P})$ et appelé **représentation de plus haut ℓ-poids**. Pour $i\in I$, nous définissons le **i-ème module prédondamental** L_i comme le $Y_\mu(\mathfrak{g})$-module de plus haut ℓ-poids $\Psi_i := \left(z^{\delta_{ij}}\right)_{j\in I}$.

Nous suivons maintenant les constructions de [Zha24], dans le cas particulier $\mu=\nu=0$ et pour le ℓ-poids de copoids $\zeta=\omega_i^\vee$ $\mathbf{p}=\Psi_i$. Rappelons que le Yangien $Y(\mathfrak{g})$ est une algèbre Q-graduée. Pour M et N deux $Y(\mathfrak{g})$-modules Q-gradués, le produit tensoriel complété de M et N est défini par :

$$M\otimes_z N := \sum_{\alpha,\beta\in Q}\left(\prod_{\gamma\in Q_+}\left(M_{(\alpha-\gamma)}\otimes N_{(\beta+\gamma)}\right)((z^{-1}))\right).$$

Cet espace contient le $Y(\mathfrak{g})\otimes Y(\mathfrak{g})[z]$-module $M\otimes N[z]$. Notons également que les Théta-séries $\Theta_i(z)$ appartiennent à $Y(\mathfrak{g})\otimes_z Y(\mathfrak{g})$. Considérons maintenant l'homomorphisme d'algèbres

$$\begin{array}{rccc} \pi_{i,z} & : & Y_{\omega_i^\vee}(\mathfrak{g}) & \to & \mathbb{C}[z] \\ & & x_j^\pm(w) & \mapsto & 0 \\ & & \xi_j(w) & \mapsto & (w-z)^{\delta_{ij}} \end{array}.$$

Le module déformé $(L_i)_z$ est alors le pullback de la représentation régulière $\mathbb{C}[z]$ le long de cet homomorphisme. Nous introduisons également deux homomorphismes d'algèbres F_i et G_i de $Y_{\omega_i^\vee}(\mathfrak{g})$ vers $Y(\mathfrak{g})[z]$:

$$F_i := (\pi_{i,z}\otimes \mathrm{Id})\,\Delta_{\omega_i^\vee,0}; \quad G_i := (\mathrm{Id}\otimes\pi_{i,z})\,\Delta_{0,\omega_i^\vee}.$$

Leurs actions sur les générateurs de $Y(\mathfrak{g})$ sont données par [Zha24, Example 3.4] :

$$\begin{aligned} F_i &: x_j^+(w)\mapsto (w-z)^{\delta_{ij}}x_j^+(w); \quad x_j^-(w)\mapsto x_j^-(w); \quad \xi_j(w)\mapsto (w-z)^{\delta_{ij}}\xi_j(w) \\ G_i &: x_j^+(w)\mapsto x_j^+(w); \quad x_j^-(w)\mapsto (w-z)^{\delta_{ij}}x_j^-(w); \quad \xi_j(w)\mapsto (w-z)^{\delta_{ij}}\xi_j(w). \end{aligned}$$

Nous considérons enfin deux $Y(\mathfrak{g})$-modules Q-gradués M et N. Le pullback de $M\otimes N[z]$ le long de l'homomorphisme $(G_i\otimes\mathrm{Id})\Delta_{\omega_i^\vee,0}$ donne un $Y_{\omega_i^\vee}(\mathfrak{g})$-module $(M\otimes(L_i)_z)\otimes N$ et le pullback de $M\otimes_z N$ le long du même homomorphisme est un $Y_{\omega_i^\vee}(\mathfrak{g})$-module qui est une complétion du module précédent,noté $\overline{(M\otimes(L_i)_z)\otimes N}$. De la même manière, en considérant

l'homomorphisme $(\mathrm{Id}\otimes F_i)\Delta_{0,\omega_i^\vee}$, nous pouvons construire la complétion $\overline{M\otimes((L_i)_z\otimes N)}$. D'après le théorème 5.6 de [Zha24], l'action de $\Theta_i(z)$ sur $M\otimes_z N$ définit un morphisme de $Y_{\omega_i^\vee}(\mathfrak{g})$-modules entre $\overline{(M\otimes(L_i)_z)\otimes N}\to\overline{M\otimes((L_i)_z\otimes N)}$ où un élément $x\in Y_{\omega_i^\vee}(\mathfrak{g})$ agit respectivement sur chacun des modules par :

$$(G_i\otimes\mathrm{Id})\,\Delta_{\omega_i^\vee,0}(x)\quad\text{et}\quad(\mathrm{Id}\otimes F_i)\Delta_{0,\omega_i^\vee}(x).$$

Nous allons maintenant étudier la commutation de $\Theta_i(z)$ avec l'action des générateurs $x_{j,0}^+$ pour $j\in I$. Si $i\neq j$, alors les formules du coproduit décalé des générateurs sont simplement

$$\Delta_{\omega_i^\vee,0}(x_{j,0}^+)=\Delta_{0,\omega_i^\vee}(x_{j,0}^+)=x_{j,0}^+\otimes 1+1\otimes x_{j,0}^+.$$

En remarquant que les homomorphismes F_i et G_i laissent les séries génératrices $x_j^+(z)$ invariantes pour $j\neq i$, les relations de commutation peuvent alors s'écrire :

$$\left[x_{j,0}^+\otimes 1+1\otimes x_{j,0}^+,\Theta_i(z)\right]=0.$$

Nous souhaitons maintenant calculer les formules du coproduit décalé dans le cas où $j=i$. D'après le théorème 2.7.2, il est clair que

$$\Delta_{0,\omega_i^\vee}(x_{i,0}^+)=1\otimes x_{i,0}^+ + x_{i,0}^+\otimes 1.$$

Pour calculer le coproduit $\Delta_{0,\omega_i^\vee}(x_{i,0}^+)$, nous utilisons un argument standard de zigzag. En effet, les propriétés de commutation du théorème 2.7.2 des coproduits décalés donnent, dans le cas particulier $\mu=\omega_i^\vee;\nu=\eta=0$ et $\epsilon=-\omega_i^\vee$:

$$\left(\iota^{\omega_1^\vee}_{-\omega_1^\vee,0}\otimes\iota^0_{0,0}\right)\Delta_{\omega_1^\vee,0}(x_{i,0}^+)=\Delta\left(\iota^{\omega_1^\vee}_{-\omega_1^\vee,0}(x_{i,0}^+)\right).$$

Or, nous savons que $\iota^{\omega_1^\vee}_{-\omega_1^\vee,0}(x_{i,0}^+)=x_{i,1}^+$. Or, d'après [GNW18], nous avons :

$$\Delta(x_{i,1}^+)=x_{i,1}^+\otimes 1+1\otimes x_{i,1}^+ +\xi_{i,0}\otimes x_{i,0}^+-\sum_{j=i+2}^{n}E_{j,i+1}\otimes E_{ij}+\sum_{k=1}^{i-1}E_{ik}\otimes E_{k,i+1}.$$

D'autre part, nous pouvons vérifier que le coproduit décalé $\Delta(x_{i,1}^+)$ est égal à :

$$\left(\iota^{\omega_1^\vee}_{-\omega_1^\vee,0}\otimes\iota^0_{0,0}\right)\left(x_{i,0}^+\otimes 1\otimes x_{i,1}^+ +\xi_{i,-1}\otimes x_{i,0}^+ +\sum_{j=1}^{i-1}E_{i,j}\otimes E_{j,i+1}-\sum_{k=i+2}^{n+1}E_{k,i+1}\otimes E_{i,k}\right).$$

Alors, par injectivité des homomorphismes de décalage (premier point du théorème 2.7.2) :

$$\Delta_{\omega_i^\vee,0}(x_{i,0}^+) = x_{i,0}^+ \otimes 1 \otimes x_{i,1}^+ + \xi_{i,-1} \otimes x_{i,0}^+ + \sum_{j=1}^{i-1} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} - \sum_{k=i+2}^{n+1} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k}.$$

Ainsi, le générateur $x_{i,0}^+$ agit sur $\overline{(M \otimes (L_i)_z) \otimes N}$ par

$$x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+ - \sum_{k=i+1}^{n} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} + \sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1}$$

et sur $\overline{M \otimes ((L_i)_z \otimes N)}$ par

$$x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z(1 \otimes x_{i,0}^+).$$

Puisque $\Theta_i(z)$ est un homomorphisme de modules, la Théta-série doit commuter avec ces actions. Ainsi :

$$\Theta_i(z) \left(x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z \otimes x_{i,0}^+ - \sum_{k=i+1}^{n} E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} + \sum_{j=1}^{i} E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} \right) = \left(x_{i,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{i,1}^+ - z(1 \otimes x_{i,0}^+) \right) \Theta_i(z).$$

Cette égalité peut se réécrire comme la seconde formule de la proposition 2.2.2, d'où le résultat.

Finalement, il ne reste qu'à démontrer l'unicité de la solution de ce système d'équations. Pour ce faire, nous utilisons un argument similaire à celui employé dans la section 4.2 de [GLW21] et à l'étape 2 du théorème 5.7 de [Zha24]. Remarquons qu'en projetant l'équation précédente sur $Y(\mathfrak{g})_{\alpha_i - \beta} \otimes Y(\mathfrak{g})_\beta$ pour $\beta \in Q_+$, nous obtenons :

$$\left[x_{j,0}^+ \otimes 1 + 1 \otimes x_{j,0}^+, \Theta_{i,\beta}(z) \right] = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned} \left[x_{i,0}^+ \otimes 1, \Theta_{i,\beta}(z) \right] = &- \left[1 \otimes x_{i,1}^+ - z(1 \otimes x_{i,0}^+), \Theta_{i,\beta-\alpha_i}(z) \right] + \sum_{j=1}^{i-1} \Theta_{i,\beta-\gamma_j-\alpha_i}(z) \left(E_{i,j} \otimes E_{j,i+1} \right) \\ &- \sum_{k=i+2}^{n+1} \Theta_{i,\beta-\eta_k-\alpha_i}(z) \left(E_{k,i+1} \otimes E_{i,k} \right) + \Theta_{i,\beta-\alpha_i}(z) \left(\xi_{i,0} \otimes x_{i,0}^+ \right) \end{aligned}$$

où $\gamma_j = \alpha_j + \cdots + \alpha_{i-1}$ et $\eta_k = \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_k$. Définissons la hauteur d'un poids β par

$h(\beta) = \langle \beta, \sum_{i \in I} \omega_i^\vee \rangle \in \mathbb{N}$. Alors, par récurrence sur $h(\beta)$, la série $\Theta_i(z)$ est déterminée de façon unique par $\Theta_{i,0}(z) = 1 \otimes 1$.

Pour conclure ce chapitre et cette thèse, maintenant que nous avons introduit la notion de Yangiens décalés, nous mentionnons le fait que les définitions des S-séries s'étendent à ces algèbres généralisées. Cela a notamment des implications du point de vue de la construction de R-matrices pour les représentations des groupes quantiques décalés (voir la section 6 de [Zha24]). Ce n'était pas le sujet principal de cette thèse, mais notons que, par exemple, les Théta-séries du cas standard se généralisent facilement aux cas décalés. Les S-séries $S_i^\mu(z)$ sont définies de manière analogue aux $S_i(z)$, en remplaçant le Yangien ordinaire par le Yangien décalé $Y_\mu(\mathfrak{g})$. Dans ce cas-là, nous considérons le coproduit décalé $\Delta_{\mu,\nu}\left(S_i^{\mu+\nu(z)}\right)$ pour introduire les Théta-séries $\Theta_i^{\mu,\nu}(z)$ de manière analogue. Dans ce cas, nous savons d'après [Zha24, (5.19)] :

$$\Theta_{i,\beta}^{\mu,\nu}(z) = \iota_{\mu,0}^0 \otimes \iota_{0,\nu}^0 \left(\Theta_{i,\beta}(z)\right) \quad \text{pour } \beta \in Q; \quad \mu, \nu \text{ copoids antidominants.}$$

Puisque les homomorphismes de décalage laissent invariant les éléments de $\mathfrak{sl}_{r+1}$, nous en déduisons :

$$\Theta_i^{\mu,\nu}(z) = \exp\left(\sum_{1 \leq j \leq i < k \leq r+1} E_{kj} \otimes E_{jk}\right) \quad \text{pour } \mu, \nu \text{ copoids antidominants.}$$

Nous récupérons ensuite le résultat pour les autres copoids par des arguments de zigzag (via l'injectivité des homomorphismes de décalage), d'où le résultat :

$$\Theta_i^{\mu,\nu}(z) = \exp\left(\sum_{1 \leq j \leq i < k \leq r+1} E_{kj} \otimes E_{jk}\right) \quad \text{pour tous } \mu, \nu \in P^\vee.$$

BIBLIOGRAPHIE

[Bax82] Rodney J. Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics. London - New York etc. : Academic Press. A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XII, 486 p. $ 81.00 (1982)., 1982.

[Bec94] Jonathan Beck. Braid group action and quantum affine algebras. *Commun. Math. Phys.*, 165(3) :555–568, 1994.

[BFN19] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima. Coulomb branches of $3d$ $\mathcal{N} = 4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 23(1) :75–166, 2019.

[BHK02] Vladimir V. Bazhanov, Anthony N. Hibberd, and Sergey M. Khoroshkin. Integrable structure of W_3 conformal field theory, quantum Boussinesq theory and boundary affine Toda theory. *Nucl. Phys., B*, 622(3) :475–547, 2002.

[BK06] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev. Shifted Yangians and finite W-algebras. *Adv. Math.*, 200(1) :136–195, 2006.

[CP90] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Yangians and R-matrices. *Enseign. Math. (2)*, 36(3-4) :267–302, 1990.

[CP91] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras. *Commun. Math. Phys.*, 142(2) :261–283, 1991.

[CP94] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge : Cambridge University Press, 1994.

[Cra04] N. Crampé. Hopf structure of the Yangian $Y(\mathrm{sl}_n)$ in the Drinfel'd realization. *J. Math. Phys.*, 45(1) :434–447, 2004.

[Dam98] Ilaria Damiani. The R-matrix for quantum algebras of non-twisted affine type. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 31(4) :493–523, 1998.

[Dam12] Ilaria Damiani. Drinfeld realization of affine quantum algebras : the relations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 48(3) :661–733, 2012.

[Dam15] Ilaria Damiani. From the Drinfeld realization to the Drinfeld-Jimbo presentation of affine quantum algebras : injectivity. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 51(1) :131–171, 2015.

[Dri85] V. G. Drinfel'd. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Sov. Math., Dokl.*, 32 :256–258, 1985.

[Dri88] V. G. Drinfel'd. A new realization of Yangians and quantized affine algebras. *Sov. Math., Dokl.*, 36(2) :212–216, 1988.

[FH15] Edward Frenkel and David Hernandez. Baxter's relations and spectra of quantum integrable models. *Duke Math. J.*, 164(12) :2407–2460, 2015.

[FKP+18] Michael Finkelberg, Joel Kamnitzer, Khoa Pham, Leonid Rybnikov, and Alex Weekes. Comultiplication for shifted Yangians and quantum open Toda lattice. *Adv. Math.*, 327 :349–389, 2018.

[FR92] I. B. Frenkel and N. Yu. Reshetikhin. Quantum affine algebras and holonomic difference equations. *Commun. Math. Phys.*, 146(1) :1–60, 1992.

[FR99] Edward Frenkel and Nicolai Reshetikhin. The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-algebras. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics. Proceedings of the international conference on representations of affine and quantum affine algebras and their applications, North Carolina State University, Raleigh, NC, USA, May 21–24, 1998*, pages 163–205. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 1999.

[FT19] Michael Finkelberg and Alexander Tsymbaliuk. Multiplicative slices, relativistic Toda and shifted quantum affine algebras. *Representations and nilpotent orbits of Lie algebraic systems.*, 330 :133–304, 2019.

[FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I : Foundations. *J. Am. Math. Soc.*, 15(2) :497–529, 2002.

[GKLO05] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, and S. Oblezin. On a class of representations of the Yangian and moduli space of monopoles. *Commun. Math. Phys.*, 260(3) :511–525, 2005.

[GLW21] Sachin Gautam, Valerio Toledano Laredo, and Curtis Wendlandt. The meromorphic R-matrix of the Yangian. In *Representation theory, mathematical physics, and integrable systems. In honor of Nicolai Reshetikhin*, pages 201–269. Cham : Birkhäuser, 2021.

[GNW18] Nicolas Guay, Hiraku Nakajima, and Curtis Wendlandt. Coproduct for Yangians of affine Kac-Moody algebras. *Adv. Math.*, 338 :865–911, 2018.

[GRW19] Nicolas Guay, Vidas Regelskis, and Curtis Wendlandt. Equivalences between three presentations of orthogonal and symplectic Yangians. *Lett. Math. Phys.*, 109(2) :327–379, 2019.

[GTL16] Sachin Gautam and Valerio Toledano Laredo. Yangians, quantum loop algebras, and abelian difference equations. *J. Am. Math. Soc.*, 29(3) :775–824, 2016.

[GV93] Victor Ginzburg and Eric Vasserot. Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n. *Int. Math. Res. Not.*, 1993(3) :67–85, 1993.

[GW23] Sachin Gautam and Curtis Wendlandt. Poles of finite-dimensional representations of Yangians. *Sel. Math., New Ser.*, 29(1) :68, 2023. Id/No 13.

[Her23] David Hernandez. Representations of shifted quantum affine algebras. *Int. Math. Res. Not.*, 2023(13) :11035–11126, 2023.

[HJ12] David Hernandez and Michio Jimbo. Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions. *Compos. Math.*, 148(5) :1593–1623, 2012.

[HL10] David Hernandez and Bernard Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154(2) :265–341, 2010.

[HZ24] David Hernandez and Huafeng Zhang. Shifted Yangians and polynomial R-matrices. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 60(1) :1–69, 2024.

[HZ25] David Hernandez and Huafeng Zhang. Jordan-Hölder property for shifted quantum affine algebras. Preprint, arXiv :2501.16859 [math.QA] (2025), 2025.

[Jim85] Michio Jimbo. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10 :63–69, 1985.

[JKP23] Il-Seung Jang, Jae-Hoon Kwon, and Euiyong Park. Unipotent quantum coordinate ring and prefundamental representations for types $A_n^{(1)}$ and $D_n^{(1)}$. *Int. Math. Res. Not.*, 2023(2) :1119–1172, 2023.

[Jon85] Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 12 :103–111, 1985.

[Kac90] Victor G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge etc. : Cambridge University Press, 3rd ed. edition, 1990.

[Kas90] Masaki Kashiwara. Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras. *Commun. Math. Phys.*, 133(2) :249–260, 1990.

[Kas95] Christian Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Grad. Texts Math.* New York, NY : Springer-Verlag, 1995.

[Kas02] Masaki Kashiwara. On level-zero representation of quantized affine algebras. *Duke Math. J.*, 112(1) :117–195, 2002.

[KPW22] Joel Kamnitzer, Khoa Pham, and Alex Weekes. Hamiltonian reduction for affine Grassmannian slices and truncated shifted Yangians. *Adv. Math.*, 399 :52, 2022. Id/No 108281.

[KTW+19a] Joel Kamnitzer, Peter Tingley, Ben Webster, Alex Weekes, and Oded Yacobi. Highest weights for truncated shifted Yangians and product monomial crystals. *J. Comb. Algebra*, 3(3) :237–303, 2019.

[KTW+19b] Joel Kamnitzer, Peter Tingley, Ben Webster, Alex Weekes, and Oded Yacobi. On category $\mathcal{O}$ for affine Grassmannian slices and categorified tensor products. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 119(5) :1179–1233, 2019.

[KWWY14] Joel Kamnitzer, Ben Webster, Alex Weekes, and Oded Yacobi. Yangians and quantizations of slices in the affine Grassmannian. *Algebra Number Theory*, 8(4) :857–893, 2014.

[KWWY24] Joel Kamnitzer, Ben Webster, Alex Weekes, and Oded Yacobi. Lie algebra actions on module categories for truncated shifted Yangians. *Forum Math. Sigma*, 12 :69, 2024. Id/No e18.

[Mil25] Jérôme Milot. Compatibility between truncation and coproducts for quantum affine algebra and Yangian of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Preprint, arXiv :2506.10544 [math.QA] (2025), 2025.

[Mil26] Jérôme Milot. Coproduct of modified Drinfeld-Cartan series for Yangians and quantum affine algebras in type A. Preprint, arXiv :2603.09537 [math.QA] (2026), 2026.

[MO19] Davesh Maulik and Andrei Okounkov. *Quantum groups and quantum cohomology*, volume 408 of *Astérisque*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2019.

[Mol03] A. I. Molev. Yangians and their applications. In *Handbook of algebra. Volume 3*, pages 907–959. Amsterdam : Elsevier, 2003.

[Nak01] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras. *J. Am. Math. Soc.*, 14(1) :145–238, 2001.

[NW23] Hiraku Nakajima and Alex Weekes. Coulomb branches of quiver gauge theories with symmetrizers. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 25(1) :203–230, 2023.

[RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3) :547–597, 1991.

[Var00] Michela Varagnolo. Quiver varieties and Yangians. *Lett. Math. Phys.*, 53(4) :273–283, 2000.

[VV25] Michela Varagnolo and Eric Vasserot. Representations of shifted affine quantum groups and Coulomb branches. Preprint, arXiv :2503.06262 [math.RT] (2025), 2025.

[Zha24] Huafeng Zhang. Theta series for quantum loop algebras and Yangians. *Commun. Math. Phys.*, 405(10) :68, 2024. Id/No 230.