

# Thèse

présentée par

**Maxence Lepers**

en vue d'obtenir le grade de docteur de

**l'Université Lille 1**

dans la spécialité

**Optique et Lasers, Physico-Chimie, Atmosphère**

Titre :

**Dynamique d'atomes dans des  
potentiels optiques : du chaos  
quantique au chaos quasi-classique**

soutenue le 3 avril 2009,  
devant le jury composé de :

Mme Tania S. Monteiro	Rapportrice
Mme Laurence Pruvost	Rapportrice
Mme Véronique Zehnlé	Directrice de Thèse
M. Jean-Claude Garreau	Directeur de Thèse
M. Dominique Delande	Examineur
M. Georges Wlodarczak	Examineur

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Réalisation d'une expérience d'atomes froids</b>	<b>5</b>
1.1 Refroidissement et confinement d'atomes . . . . .	6
1.2 Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein . . . . .	9
1.2.1 La condensation de Bose-Einstein . . . . .	10
1.2.2 Théorie de champ moyen et équation de Gross-Pitaevskii . . . . .	12
1.3 Potentiels optiques . . . . .	13
1.3.1 Principe général . . . . .	14
1.3.2 Potentiel sinusoïdal pulsé . . . . .	16
1.3.3 Réseau incliné . . . . .	17
1.4 Vélométrie Raman . . . . .	18
1.5 Conclusion . . . . .	19
<b>2 Présentation du rotateur pulsé</b>	<b>23</b>
2.1 Le rotateur pulsé classique . . . . .	23
2.1.1 Le modèle . . . . .	24
2.1.2 Dynamique d'un rotateur pulsé . . . . .	25
2.2 Le rotateur pulsé quantique . . . . .	33
2.2.1 Dynamique quantique . . . . .	33
2.2.2 Quasi-énergies et quasi-états de Floquet . . . . .	37
2.2.3 Rotateur pulsé quantique dans l'espace des positions . . . . .	40
2.3 Conclusion . . . . .	41
<b>3 Réduction de l'effet de l'émission spontanée sur le rotateur pulsé</b>	<b>43</b>
3.1 Rotateur pulsé et émission spontanée . . . . .	44
3.1.1 Modélisation de l'émission spontanée . . . . .	45
3.1.2 Effet d'une seule émission spontanée . . . . .	46
3.1.3 Effet d'une succession d'émissions spontanées . . . . .	48
3.2 Application de la sélection de vitesses . . . . .	51
3.2.1 Simulations numériques . . . . .	51
3.2.2 Dynamique des populations moyennes . . . . .	54
3.2.3 Calcul de l'énergie cinétique moyenne . . . . .	57
3.2.4 Approximation adiabatique . . . . .	62
3.3 Conclusion . . . . .	65

---

<b>4</b>	<b>Résonances quantiques du rotateur pulsé dans l'espace des positions</b>	<b>67</b>
4.1	Résonances quantiques simples . . . . .	69
4.1.1	Evolution temporelle de la fonction d'onde . . . . .	69
4.1.2	Valeurs moyennes d'observables . . . . .	72
4.1.3	Valeurs moyennes et cas limites . . . . .	74
4.2	Résonances quantiques d'ordre supérieur : exemple de $\hbar = \pi$ . . . . .	77
4.2.1	Evolution dynamique et formalisme matriciel . . . . .	78
4.2.2	Valeurs moyennes d'observables . . . . .	82
4.3	Observation des résonances quantiques dans les conditions expérimentales	88
4.4	Conclusion . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Chaos quasi-classique dans les condensats de Bose-Einstein</b>	<b>93</b>
5.1	Réseau incliné et base de Wannier-Stark . . . . .	95
5.1.1	Les états de Wannier-Stark en question . . . . .	96
5.1.2	Etats localisés et échelle de Wannier-Stark . . . . .	97
5.1.3	Dynamique d'un condensat dans la base de Wannier-Stark . . . . .	100
5.2	Dynamique quantique et théorème KAM . . . . .	102
5.2.1	Un système quasi-intégrable . . . . .	102
5.2.2	Modèle à trois états . . . . .	104
5.3	Chaos et position moyennes d'un condensat . . . . .	109
5.3.1	Fréquences de Bohr et résonances secondaires . . . . .	110
5.3.2	Dynamique chaotique . . . . .	112
5.4	Conclusions et perspectives . . . . .	114
	<b>Conclusion</b>	<b>117</b>
	<b>Annexes</b>	<b>121</b>
A	Calculs relatifs aux résonances quantiques du rotateur pulsé	121
B	Résonances quantiques et quasi-états de Floquet	129
C	Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau incliné : modèle à deux états	137
D	Calcul des exposants de Lyapunov	145
E	Publications	155
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>

# Remerciements

Ce manuscrit, ainsi que la soutenance qui en a découlé, sont l’aboutissement de quatre ans de travail, un an de Master et trois ans de Doctorat, au sein du laboratoire PhLAM et de l’UFR de Physique de l’Université Lille 1.

J’ai vécu cette période d’apprentissage du métier de chercheur comme un cheminement intellectuel, certes long et tortueux, mais aussi stimulant et passionnant. Au cours de ce cheminement, mes directeurs de thèse, Véronique Zehnlé et Jean-Claude Garreau, ont été d’excellents guides, par leur compétence, leur disponibilité et la confiance qu’ils m’ont accordée. Je les en remercie chaleureusement. J’ai aussi bénéficié de l’aide précieuse de Marc Lefranc pour le calcul des exposants de Lyapunov : je voudrais le remercier pour sa disponibilité et sa pédagogie.

Je remercie également les membres de mon jury : Mmes Laurence Pruvost et Tania Monteiro en tant que rapportrices de mon manuscrit, M. Dominique Delande en tant qu’examinateur, et M. Georges Wlodarczak en tant qu’examinateur et président du jury. Leurs questions et leurs remarques ont fait naître une discussion scientifique intéressante et stimulante.

Je voudrais aussi remercier M. Wlodarczak en tant que directeur du laboratoire PhLAM, où j’ai bénéficié de très bonnes conditions de travail. Ces très bonnes conditions sont dues au travail des personnels du laboratoire, mais aussi de l’UFR, du CERLA, de l’Ecole Doctorale SMRE et du CIES, que je remercie. Je pense notamment à MM. Fauquembergue et Uytterhaegen de l’atelier de reprographie, pour les innombrables documents agrandis qu’ils m’ont fournis. Pour le jour de ma soutenance, je pense aussi à Mme Favier du service d’entretien pour la préparation du buffet.

D’un point de vue plus personnel, je voudrais remercier Sandrine, ma compagne, qui a été à mes côtés pendant la rédaction du manuscrit, le moment le plus éprouvant de ma thèse.

Cette thèse, comme les études qui l’ont précédée, sont la conséquence de choix courageux et avisés de mes parents : je leur en suis infiniment reconnaissant. Je les remercie aussi, ainsi que ma sœur Caroline, pour leur soutien constant tout au long de mes études.

Je remercie celles et ceux grâce à qui cette thèse a été aussi un moment d’épanouissement personnel fort. Il est sans doute inutile de les nommer, ils se reconnaîtront.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui, par leur présence, ont fait de la journée du 3 avril un moment de partage inoubliable : famille, dont une partie n’a pas hésité à parcourir la moitié de la France (et même au-delà !), collègues, amis du labo et d’ailleurs, notamment de l’association Handifac.

---

Le savant n'est pas l'homme qui fournit les vraies réponses ; c'est celui qui pose les vraies questions.

Claude Lévi-Strauss, *Le Cru et le Cuit*, Plon, 1964.

# Introduction

Dans le langage courant, le terme “chaos” est étroitement associé à la notion de désordre. Il en va de même dans le vocabulaire scientifique, où ce terme a été introduit pour désigner le comportement visiblement erratique de certains systèmes. Cependant, l’arrivée du chaos dans les sciences ne s’est faite que récemment, après de nombreuses recherches. Les travaux précurseurs en la matière ont été menés dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par des savants tels que H. Poincaré et A. Lyapunov. Au cours de ses recherches sur la stabilité du système solaire, Poincaré a introduit pour la première fois la notion fondamentale d’*espace des phases*, dans lequel l’état d’un système est représenté par un point et son évolution par une *trajectoire*. Il a également prouvé que l’évolution d’un système instable ne peut pas être prédite analytiquement. Parallèlement à cela, Lyapunov proposait déjà de quantifier l’instabilité des systèmes dynamiques en calculant le taux de divergence entre deux trajectoires initialement proches – connu depuis sous la dénomination d’*exposant de Lyapunov*. Il a donc compris l’importance capitale de ce que l’on appelle aujourd’hui la *sensibilité aux conditions initiales*.

Ces travaux précurseurs ont longtemps été laissés en friche, jusqu’aux années 1960 et l’arrivée d’ordinateurs assez puissants pour intégrer des équations différentielles. Ainsi, en cherchant à simplifier les équations de Navier-Stokes pour décrire la convection de Rayleigh-Bénard, le météorologiste E. Lorenz a-t-il découvert que son modèle, qui ne contenait pourtant que trois variables dynamiques, présentait une grande sensibilité aux conditions initiales. Il a donc repris l’idée développée plusieurs décennies auparavant par Lyapunov, qu’il a popularisée sous le terme d’*effet papillon*. A la même époque, un effort considérable a été mené par plusieurs mathématiciens russes, notamment pour décrire l’instabilité des systèmes conservatifs, aboutissant au théorème de *Kolmogorov-Arnold-Moser*, ou encore pour décrire l’instabilité comme une perte d’information, ce qui a abouti à l’entropie de Kolmogorov-Krylov-Sinai. Tous ces travaux ont conduit, dans les années 70, à l’élaboration de la *théorie du chaos*, telle qu’elle est encore utilisée aujourd’hui. Est ainsi défini comme chaotique tout système présentant de la sensibilité aux conditions initiales, c’est-à-dire pour lequel deux trajectoires initialement proches dans l’espace des phases divergent exponentiellement avec le temps.

Après l’avènement de la théorie du chaos, que nous qualifierons de *chaos classique*, la question de sa transposition au monde quantique s’est très vite posée. Cependant, elle s’est heurtée à deux problèmes fondamentaux : l’impossibilité de définir une trajectoire d’une part, et la linéarité de l’équation de Schrödinger d’autre part. En effet, à cause des relations d’incertitude de Heisenberg, l’état d’un système ne peut pas être décrit par un point dans l’espace des phases. De plus, l’équation de Schrödinger est linéaire en la fonction d’onde, alors que la sensibilité aux conditions initiales ne peut se manifester que dans un système non-linéaire. Il n’en demeure pas moins que le caractère chaotique d’un système classique influence les propriétés de sa version quantique, notamment son

spectre d'énergies ou de quasi-énergies propres. L'étude des systèmes quantiques dont l'homologue classique est chaotique est le but du champ de recherche que l'on appelle le *chaos quantique*.

D'abord réservé aux théoriciens, ce champ de recherche a connu un grand essor dans les années 80, avec la réalisation expérimentale de systèmes tels que les atomes de Rydberg plongés dans des champs électro-magnétiques intenses. Mais, depuis 1995, grâce aux avancées de la physique des atomes froids, c'est le *rotateur pulsé* qui s'est imposé comme le système de référence pour l'étude du chaos quantique. Le rotateur pulsé consiste en un gaz d'atomes refroidis dans un piège magnéto-optique, puis soumis à une onde stationnaire pulsée générée par laser. Ce système très simple à modéliser, mais très riche, est encore aujourd'hui le centre de nombreuses recherches, par exemple sur la localisation d'Anderson. L'une des caractéristiques remarquables du rotateur pulsé quantique est qu'il présente le phénomène de *localisation dynamique* : au bout d'un certain temps, la diffusion de l'énergie cinétique, observée dans le cas classique, s'arrête sous l'effet d'interférences destructives.

Du fait de sa périodicité temporelle, le rotateur pulsé présente aussi des phénomènes de résonance, qui apparaissent tant pour le système classique que pour le système quantique, et dont on peut donner une image simple. Classiquement, si, à chaque fois qu'une impulsion laser est appliquée, le rotateur se trouve au même endroit, il reçoit toujours la même quantité de mouvement. Son impulsion augmente donc linéairement avec le temps, et son énergie cinétique augmente quadratiquement. Pour le rotateur pulsé classique, cette dynamique, qui est *balistique*, est connue sous le nom de *mode accélérateur*. Cette dynamique balistique est aussi observable dans le cas quantique, où elle est l'analogie de l'*effet Talbot optique*. En effet, si l'on place un écran derrière un réseau de diffraction, on remarque que, pour certaines distances entre le réseau et l'écran, le réseau se reconstruit à l'identique sur l'écran. De même, un paquet d'ondes quantique, périodique dans l'espace des positions, se reconstruit à l'identique après certains temps de propagation libre. Si on applique des impulsions laser aux instants où le paquet se reconstruit, on lui communique toujours la même impulsion, qui augmente donc linéairement avec le temps.

Le rotateur pulsé quantique possède donc une grande variété de comportements dynamiques. Cependant, comme tous les systèmes quantiques dont les particules sont indépendantes, il ne présente pas de sensibilité aux conditions initiales. Or, depuis la réalisation, en 1995, des premiers *condensats de Bose-Einstein*, il est désormais possible de manipuler des objets quantiques en forte interaction. Du fait de ces interactions, les condensats de Bose-Einstein, qui possèdent par ailleurs des propriétés de cohérence remarquables, ont la particularité d'évoluer suivant l'équation de *Schrödinger non-linéaire*. En réunissant la mécanique quantique et la dynamique non-linéaire, les condensats rendent donc possible l'observation de la sensibilité aux conditions initiales dans un système quantique. Nous avons appelé ce chaos, qui possède les mêmes caractéristiques que celui observé dans les systèmes classiques, le chaos *quasi-classique*.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés tant au chaos quantique, à travers les propriétés du rotateur pulsé, qu'au chaos quasi-classique dans les condensats de Bose-Einstein. Bien qu'il soit purement théorique, le travail présenté ici se situe dans le cadre expérimental de l'étude des atomes froids qui est menée dans notre groupe.

Nous commençons donc, dans le chapitre 1, par présenter les techniques de refroidissement et de confinement d'atomes à l'aide d'un piège magnéto-optique, ainsi que

---

la condensation de Bose-Einstein. Nous y présentons aussi les potentiels optiques, dans lesquels évoluent les atomes après leur refroidissement. Enfin, nous expliquons brièvement la technique de vélocimétrie Raman, qui permet de connaître avec précision la distribution en impulsion des atomes après l'application des potentiels optiques. Dans ce chapitre, nous nous efforçons de donner les ordres de grandeurs des paramètres expérimentaux, puis, partant de ces paramètres, de définir les différents systèmes d'unités réduites utilisés par la suite.

Les chapitres 2 à 4 constituent la partie du manuscrit consacrée au rotateur pulsé. Le chapitre 2 consiste en une présentation générale de ce modèle typique du chaos quantique. Il commence par une présentation du rotateur pulsé classique, mettant l'accent sur le chaos observé dans ce système. Puis, nous abordons le rotateur pulsé quantique, en insistant sur les différences entre dynamiques classique et quantique, notamment sur la localisation dynamique.

Dans le chapitre 3, nous étudions une méthode pour limiter les effets de décohérence générée par l'émission spontanée dans une expérience d'atomes froids. En effet, l'émission spontanée, qui est inévitable, détruit partiellement les interférences induisant la localisation dynamique et restaure la diffusion de l'énergie cinétique. Nous proposons de limiter au maximum cette diffusion, en sélectionnant les atomes servant à mesurer l'énergie cinétique par vélocimétrie Raman. Cette technique permet en effet d'ignorer les atomes qui subissent de l'émission spontanée, et qui donc engendrent la diffusion de l'énergie cinétique. Nous réalisons une étude analytique complète de la dynamique, dont les résultats sont confirmés par des simulations numériques, et nous proposons un ensemble de paramètres pour lesquels la diffusion réduite serait visible expérimentalement.

Puis, dans le chapitre 4, nous nous intéressons aux résonances quantiques du rotateur pulsé. Alors que l'immense majorité des recherches sur les résonances quantiques ont été menées dans l'espace des impulsions, nous abordons le problème en adoptant une approche nouvelle : une description dans l'espace des positions, qui nous permet de mener une étude analytique poussée. Nous donnons ainsi une interprétation simple et intuitive des résonances quantiques. En utilisant le concept de force, nous faisons un parallèle entre les résonances quantiques et les modes accélérateurs classiques du rotateur pulsé.

Enfin, dans le chapitre 5, nous abordons un autre système : les condensats de Bose-Einstein. Nous y montrons qu'un tel système, qui est décrit par l'équation de Schrödinger non-linéaire, présente de la sensibilité aux conditions initiales – le chaos quasi-classique – qui apparaît selon le scénario décrit par le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser. Nous illustrons ce scénario de deux façons différentes : d'abord, en utilisant une description en terme d'espace des phases, puis, en utilisant une grandeur accessible expérimentalement : la position moyenne du condensat. En prenant la transformée de Fourier de cette quantité, nous obtenons clairement une *route vers le chaos quasi-classique*. En particulier, la signature du chaos est confirmée par le calcul des exposants de Lyapunov du système.





# Chapitre 1

## Réalisation d'une expérience d'atomes froids

Depuis une vingtaine d'années, la physique atomique a connu des développements considérables, avec l'avènement des techniques de refroidissement par laser. Basées sur l'interaction entre photons et atomes, ces techniques ont permis de descendre à des températures jamais atteintes auparavant, de l'ordre du microkelvin. Ainsi ralentis, les atomes peuvent être manipulés et sondés avec précision, à l'aide d'autres lasers. A de telles températures, comme la *longueur d'onde de de Broglie thermique* des atomes, donnée par

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (1.1)$$

est de l'ordre du micron, c'est-à-dire comparable à la longueur d'onde des faisceaux dans lesquels ils sont plongés, les atomes se comportent comme des *ondes de matière*. En d'autres termes, ils permettent l'observation directe de phénomènes fondamentaux de la mécanique quantique, tels que les interférences. Après refroidissement, les atomes forment des *gaz froids*, tellement dilués qu'ils peuvent être considérés comme des gaz parfaits.

En 1995, une étape supplémentaire a été franchie en physique des atomes froids, avec l'obtention des premiers *condensats de Bose-Einstein* (CBE) [5, 25], appelés aussi *gaz ultra-froids*. En effet, une nouvelle technique, le refroidissement évaporatif, a permis de descendre jusqu'à une centaine de nanokelvins, rendant ainsi possible l'observation de cet état particulier de la matière, prédit théoriquement soixante-dix ans auparavant. Les condensats de Bose-Einstein ouvrent de nouvelles perspectives pour l'observation de phénomènes quantiques, car leurs propriétés de cohérence, de taille mésoscopique, donnent accès à une physique différentes des gaz d'atomes froids présentés ci-dessus.

Par ailleurs, la longueur d'ondes de de Broglie thermique des atomes étant comparable à leur distance moyenne, les interactions entre atomes influencent de façon drastique leurs propriétés. Si ces interactions sont faibles, elles peuvent être décrites par une théorie de champ moyen, auquel cas toute l'information sur le condensat est contenue dans une seule fonction d'onde, la *fonction d'onde "macroscopique" du condensat*, dont la dynamique suit l'équation de *Schrödinger non-linéaire*. Comportant un terme non-linéaire, cette équation permet la prédiction de phénomènes dynamiques nouveaux pour un système quantique, par exemple le chaos.

L'observation d'une dynamique purement quantique nécessite de soumettre les atomes à des potentiels mécaniques, tout en minimisant la décohérence. Là encore, nous avons recours aux lasers, qui permettent, d'une part, de créer des potentiels facilement ajustables. En particulier, leur profondeur est comparable à l'énergie cinétique des atomes<sup>1</sup>, ce qui rend possible, par exemple, l'observation directe de phénomènes basés sur l'effet tunnel. D'autre part, le taux d'émission spontanée peut être réduit jusqu'à des valeurs de l'ordre de  $10^2 - 10^4 \text{ s}^{-1}$ . L'émission spontanée étant la principale source de décohérence, les phénomènes où la cohérence quantique joue un rôle primordial sont donc observables pendant un temps de l'ordre de la milli-seconde<sup>2</sup>.

Dans ce manuscrit, nous étudions de façon théorique la dynamique quantique dans des potentiels créés par laser, à la fois de gaz d'atomes froids (cf. chapitres 2 à 4), et de condensats de Bose-Einstein (cf. chapitre 5). Avant de commencer cette étude, nous présentons, dans ce chapitre, le principe des expériences sur lesquelles se basent nos travaux. Pour ce qui est des gaz d'atomes froids, cette présentation s'appuie fortement sur l'expérience réalisée dans notre équipe<sup>3</sup> sur l'atome de césium. La section 1.1 est ainsi consacrée au refroidissement et au confinement d'atomes, aboutissant à la production d'un gaz froid. Puis, dans la section 1.2, nous expliquons comment, à partir d'un gaz froid, obtenir un condensat de Bose-Einstein. Nous y présentons aussi les propriétés remarquables des condensats, ainsi que la façon de modéliser leur dynamique. Ensuite, dans la section 1.3, nous expliquons comment générer, avec des lasers, des potentiels mécaniques qui agissent sur le centre de masse des atomes. Après une présentation générale, nous traitons l'exemple des deux potentiels étudiés dans ce manuscrit : le potentiel sinusoïdal pulsé et le réseau incliné. Enfin, la section 1.4 présente la technique de mesure de la vitesse des atomes basée sur la spectroscopie Raman, à laquelle nous ferons directement appel dans le chapitre 3.

## 1.1 Refroidissement et confinement d'atomes

Le refroidissement et le confinement, ou piégeage, des atomes constituent la première étape de toute expérience d'atomes froids. Dans le plupart des cas, les atomes sont placés dans un *piège magnéto-optique* (PMO) constitué de trois faisceaux rétro-réfléchis, servant pour le refroidissement, et de deux bobines en configuration anti-Helmholtz, servant pour le confinement (cf. Fig. 1.1). Les mécanismes de refroidissement mis en jeu dans un tel dispositif sont les refroidissements Doppler et Sisyphé. Par souci de simplicité, nous ne présenterons ici que le refroidissement Doppler en ne considérant qu'une seule dimension de l'espace (la direction  $x$ ), après quoi nous expliquerons le principe du confinement par effet Zeemann.

Bien que de nombreuses techniques aient été proposées dans le but de produire un gaz d'atomes froids [67], nous ne présentons ici que le refroidissement Doppler. En effet, il a été le premier à être proposé [43] et réalisé [16] ; et malgré cela, il reste aujourd'hui encore incontournable dans les expériences d'atomes froids. Le refroidissement Doppler est basé sur l'échange de quantité de mouvement entre photons et atomes pendant un cycle de fluorescence (CF). Lors de l'absorption d'un photon, un atome reçoit, dans la

---

<sup>1</sup>La profondeur des potentiels générés est de l'ordre de  $k_B T$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $10^{-30} \text{ J}$ .

<sup>2</sup>Les temps caractéristiques d'évolution des atomes sont de l'ordre de la micro-seconde, donc bien inférieurs.

<sup>3</sup>De plus amples informations sur le montage peuvent être trouvées dans les références [93, 12].

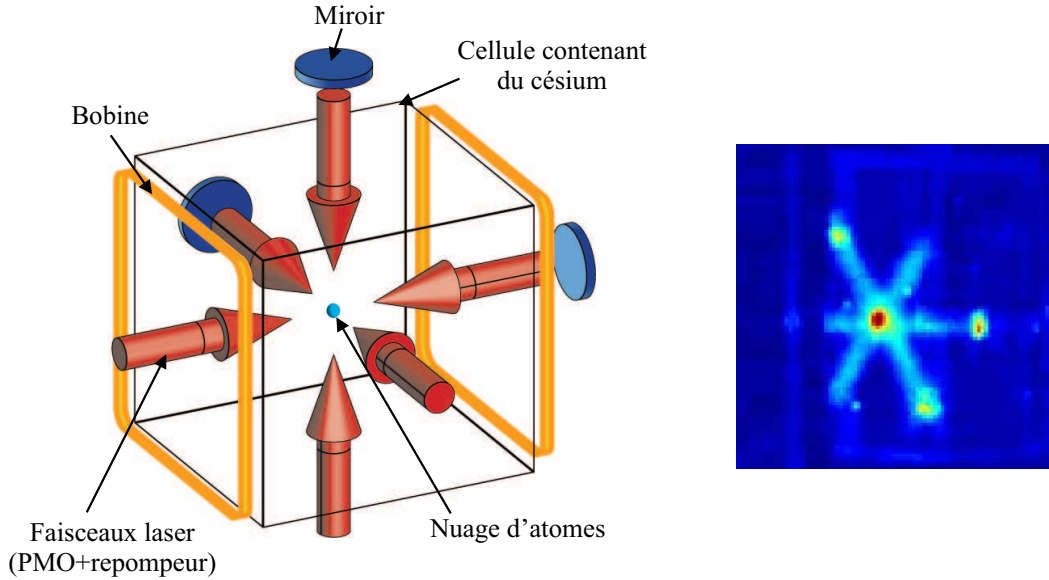


FIG. 1.1 – Schéma du piège magnéto-optique. Les trois faisceaux laser servant au refroidissement sont rétro-réfléchis sur les trois miroirs. Ils se croisent au minimum du champ magnétique créé par les deux bobines. A droite : photographie en caméra infra-rouge du nuage d'atomes.

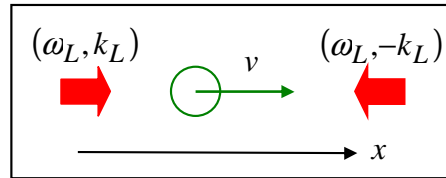


FIG. 1.2 – Principe du refroidissement Doppler. L'atome, de vitesse  $v$  est placé dans l'onde stationnaire formé par deux faisceaux laser contra-propageants. Il voit le faisceau de gauche, noté (+), avec une fréquence apparente  $\omega_L - k_L v$  et le faisceau de droite, noté (-), avec une fréquence apparente  $\omega_L + k_L v$ .

direction du faisceau, la vitesse de recul

$$\vec{v}_r = \frac{\hbar \vec{k}_L}{m}, \quad (1.2)$$

où  $\vec{k}_L$  est le vecteur d'onde du photon absorbé et  $m$  la masse d'un atome<sup>4</sup>. Puis, l'émission spontanée provoque une autre variation de la vitesse, qui a la même norme que pour l'absorption, mais qui est orientée dans une direction aléatoire. Sur un grand nombre de CF, l'influence de l'émission spontanée sur la vitesse est donc nulle en moyenne, et seules les absorptions successives induisent un changement de la vitesse des atomes.

Pour ralentir les atomes, il faut donc que le recul qu'ils encaissent lors d'une absorption fasse en moyenne diminuer leur vitesse, quelle que soit la direction de leur mouvement. Comme le montre la figure 1.2, cela est réalisable, en plaçant les atomes dans l'onde stationnaire formée par deux faisceaux laser contra-propageants, de fréquence  $\omega_L$

<sup>4</sup>Dans le cas du césium,  $v_r \approx 3.5 \text{ mm.s}^{-1}$ .

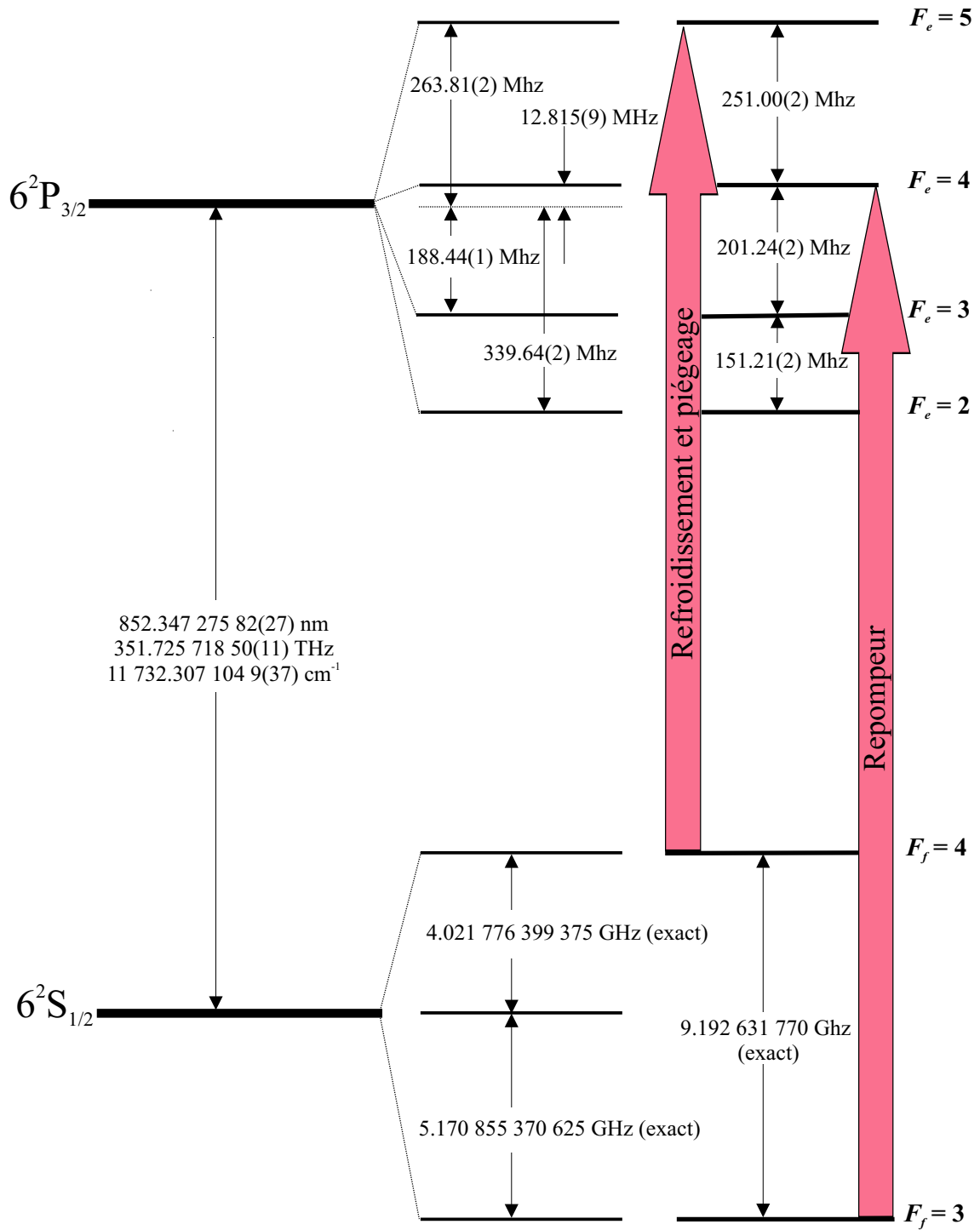


FIG. 1.3 – Niveaux d'énergie du césium impliqués dans l'ensemble de notre expérience de rotateur pulsé. L'indice  $f$  (fondamental) concerne les niveaux singulets et  $e$  (excité) les niveaux triplets.

légèrement désaccordée par rapport à la transition atomique. Pour le césium, la transition choisie est  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$ , de fréquence  $\omega_0/2\pi \approx 350$  THz (voir les niveaux d'énergie sur la figure 1.3). Le désaccord en fréquence

$$\delta_L = \omega_L - \omega_0 \quad (1.3)$$

est pris négatif pour la raison suivante : par effet Doppler, un atome qui se déplace à la vitesse  $v$  "voit" les faisceaux de l'onde stationnaire avec des fréquences apparentes :

$$\omega_{\pm} = \omega_L \mp k_L v, \quad (1.4)$$

où le signe (+) désigne le faisceau venant de la gauche et le (-) celui venant de la droite. Le désaccord en fréquence dépend donc de la vitesse atomique :

$$\delta_{\pm}(v) = \delta_L \mp k_L v, \quad (1.5)$$

ce qui fait qu'un atome allant vers la droite ( $v > 0$ ) absorbe préférentiellement un photon du faisceau (-), car le désaccord est plus faible qu'avec le faisceaux (+) : il subit ainsi un ralentissement.

Les faisceaux exercent donc en moyenne sur les atomes une force de freinage, appelée *pression de radiation*. La vitesse des atomes peut être ainsi considérablement réduite, après une centaine de milli-secondes. Le résultat de ce seul processus de refroidissement, appelé *mélasse optique*, est un ensemble d'atomes lents mais spatialement éparpillés. Dans la plupart des cas, un confinement des atomes est également appliqué.

Ce confinement est en fait réalisé en même temps que le refroidissement. L'idée, pour piéger les atomes dans une zone bien définie de l'espace, est de leur appliquer une force de rappel qui les ramène au point d'intersection des trois faisceaux servant au refroidissement (en  $x = 0$ ). Pour cela, il faut que les atomes en  $x > 0$  absorbent préférentiellement un photon venant de la droite, et que les atomes en  $x < 0$  absorbent préférentiellement un photon venant de la gauche. Cela est possible en appliquant un champ magnétique inhomogène, qui modifie la fréquence atomique par effet Zeemann<sup>5</sup>. Le désaccord en fréquence dépend alors de la position ; il est minimal lorsque  $x > 0$  et  $v > 0$  pour le faisceau (-), et lorsque  $x < 0$  et  $v < 0$  pour le faisceau (+).

Dans cette section, nous avons présenté le principe du refroidissement Doppler et du confinement par effet Zeemann, qui sont à la base du piégeage magnéto-optique, et qui constitue la première étape de la plupart des expériences d'atomes froids. Le temps caractéristique de cette étape est de l'ordre de 100 ms. Le gaz ainsi obtenu compte environ un milliard d'atomes, à une température de l'ordre du microkelvin, et piégés dans  $1 \text{ mm}^3$ . Une fois que cette étape est terminée, soit on applique le potentiel optique pour sonder la dynamique du gaz d'atomes froids (cf. section 1.3), soit on applique une étape de refroidissement supplémentaire, qui conduit à la production d'un condensat de Bose-Einstein (cf. section 1.2).

## 1.2 Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein

Prédite théoriquement pour les gaz parfaits par Einstein en 1925, la condensation de Bose-Einstein consiste en l'accumulation de particules de spin entier, *des bosons*, dans

<sup>5</sup>Pour une présentation plus complète, décrivant notamment l'influence des sous-niveaux magnétiques de l'atome, nous invitons le lecteur à consulter la référence [67].

l'état fondamental d'un puits de potentiel. Qualitativement, elle se produit pour des températures suffisamment basses pour que la longueur d'ondes de de Broglie thermique de chaque particule (cf. Eq. (1.1)) soit comparable à la distance moyenne entre les particules. La superfluidité de l'hélium liquide en dessous de 2,2 K, observée en 1938 [2], a été interprétée comme une conséquence de la condensation de Bose-Einstein [64]. Elle a même été considérée pendant plusieurs décennies comme la manifestation de référence de la condensation, malgré le décalage entre les prédictions théoriques et les observations expérimentales<sup>6</sup>.

Cette situation a persisté jusqu'à la réalisation, en 1995, des premiers condensats de Bose-Einstein avec des atomes refroidis à des températures inférieures au microkelvin [5, 25]<sup>7</sup>, c'est-à-dire dont la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre de plusieurs microns. Les condensats ainsi formés, qui comprennent de  $10^4$  à  $10^6$  atomes, se caractérisent par une *cohérence macroscopique* : ce sont donc des candidats idéals pour l'observation de phénomènes basés sur des interférences quantiques. Ainsi, depuis 1995, de très nombreuses recherches ont-elles été menées, notamment concernant des condensats placés dans des potentiels optiques [72], tel que ceux décrits dans la section 1.3.

Contrairement au cas du gaz parfait, les interactions entre atomes, i.e. les collisions, ne peuvent pas être négligées à l'intérieur d'un condensat, ce qui, a priori, complique sa description. Toutefois, si le condensat obtenu est suffisamment dilué et qu'il contienne un nombre suffisant d'atomes, ces interactions peuvent être décrites par une théorie de champ moyen. Toute l'information sur l'état du condensat est alors contenue dans une seule fonction d'onde, dite *fonction d'onde "macroscopique" du condensat*, qui évolue suivant l'équation de *Gross-Pitaevskii*, ou *Schrödinger non-linéaire*. Comme son nom l'indique, cette équation réunit mécanique quantique et dynamique non-linéaire, donnant lieu à toute une classe de phénomènes inédits pour un système quantique, tels que les solitons ou le chaos.

L'objet de cette section est de présenter succinctement les condensats de Bose-Einstein, et en particulier comment se modélise leur évolution dynamique. Dans la sous-section 1.2.1, nous présenterons la condensation de Bose-Einstein telle qu'elle a prédite théoriquement, ainsi que la technique expérimentale pour réaliser un condensat atomique. Puis, dans la sous-section 1.2.2, nous expliquerons comment modéliser l'état du condensat à l'aide d'une théorie de champ moyen, et ainsi comment obtenir l'équation de Gross-Pitaevskii.

### 1.2.1 La condensation de Bose-Einstein

Nous considérons  $N$  bosons piégés dans une boîte cubique de côté  $L$  avec des conditions aux limites périodiques. A la limite thermodynamique définie par  $N, L \rightarrow +\infty$  et  $\rho = N/L^3 = \text{cste}$ , où  $\rho$  est la densité volumique de particules, on peut démontrer qu'une transition de phase se produit à la température critique  $T_C$  telle que

$$\rho \lambda_{dB}^3(T_C) = \zeta(3/2) \simeq 2,612, \quad (1.6)$$

---

<sup>6</sup>Ce décalage s'explique parce que la prédiction théorique d'Einstein a été faite avec un gaz parfait, alors que les interactions à l'intérieur de l'hélium liquide ne peuvent pas être négligées.

<sup>7</sup>Ces premiers condensats ont été obtenus avec du rubidium [5] et du sodium [25]. Depuis lors, d'autres atomes ont été condensés, dont le césium en 2002 [103].

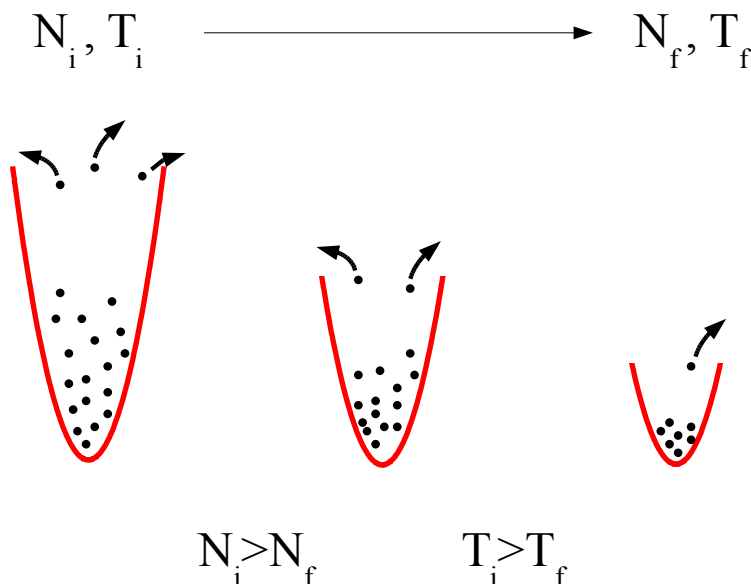


FIG. 1.4 – Schéma de principe du refroidissement évaporatif, dont la durée typique est de quelques secondes. Au fur et à mesure que la hauteur du piège est abaissée, les atomes les plus chauds s'en échappent ( $N_f < N_i$ ), et le température des atomes qui restent piégés diminue ( $T_f < T_i$ ).

où  $\lambda_{dB}$  est la longueur d'onde de De Broglie thermique (cf. Eq. (1.1)) et  $\zeta$  la fonction “zéta” de Riemann. Au dessus de cette température critique, le nombre  $N_0$  d'atomes dans l'état fondamental de la boîte quantique tend vers 0. A l'inverse, pour  $T < T_c$ , le nombre  $N_0$  reste fini, et vaut

$$\frac{N}{N_0} = 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^3, \quad (1.7)$$

où  $N/N_0$  est le paramètre d'ordre de la transition. Un nombre macroscopique d'atomes vient donc s'accumuler dans le niveau d'énergie fondamental à très basse température<sup>8</sup> : c'est la *condensation de Bose-Einstein*.

Pour observer la condensation de Bose-Einstein, il faut donc que le matériau considéré soit gazeux aux alentours de  $T_C$ , ce qui nécessite de travailler à très basse densité. Compte tenu de (1.6), cette contrainte abaisse considérablement la température critique. C'est donc seulement dans les années 90 que la condensation de Bose-Einstein a été observée sur des gaz atomiques préalablement refroidis par laser, comme il est décrit dans la section 1.1. Pour ce faire, les atomes ont été placés dans un piège dont la hauteur est progressivement diminuée. Ainsi les atomes les plus chauds s'extrait-ils du piège par collision, ce qui fait diminuer la température de ceux qui y restent. Cette technique, connue sous le nom de *refroidissement évaporatif* [46], est représentée schématiquement sur la figure 1.4. Son principal inconvénient est qu'elle fait perdre un nombre considérable d'atomes – leur nombre dans le piège est divisé par 1000. Typiquement, les condensats obtenus comptent  $10^5$  atomes ; leur taille est de quelques microns, leur densité de  $10^{21}$  atomes.m<sup>-3</sup>, ce qui donne une température critique inférieure au microkelvin.

<sup>8</sup>Pour  $T \rightarrow 0$ , toutes les particules sont dans l'état fondamental.



## 1.2.2 Théorie de champ moyen et équation de Gross-Pitaevskii

Nous avons vu, dans la section 1.1, que les gaz d'atomes froids peuvent être considérés comme des gaz parfaits, puisque les interactions entre atomes sont négligeables. Dans les CBE, la distance inter-atomique étant comparable à la longueur de de Broglie (1.1), les interactions ne peuvent pas être ignorées. Le but de cette sous-section est d'expliquer comment modéliser simplement ces interactions, en utilisant une théorie de *champ moyen*. Nous aboutirons ainsi à une seule équation d'évolution pour tout le condensat, l'équation de *Gross-Pitaevskii* [20].

Les interactions entre les atomes consistent en des *collisions élastiques*. Comme le condensat est très dilué, on ne considère que les collisions à deux atomes. D'autre part, comme la température est très basse, on considère que les collisions ne se produisent que dans l'onde  $s$  [18]. Dans ce cas, le potentiel d'interaction entre deux atomes  $V_{\text{int}}$  ne dépend que d'un seul paramètre  $a_s$ , appelé *longueur de diffusion* dans l'onde  $s$ . Si l'on suppose qu'il a la forme d'un "delta" de Dirac, on peut écrire [79]

$$V_{\text{int}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (1.8)$$

où  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  désignent la position des deux atomes. La quantité  $a_s$  dépend de l'atome considéré : elle peut être positive, auquel cas le potentiel  $V_{\text{int}}(\vec{r})$  est répulsif, ou négative, auquel cas  $V_{\text{int}}(\vec{r})$  est attractif<sup>9</sup>.

Nous allons maintenant chercher à écrire l'évolution de la fraction condensée des atomes, dont nous supposons qu'elle est proche de 1 ( $N_0 \approx N$ ,  $T \approx 0$ ). Dans le cas d'un condensat dilué, i.e. si la distance moyenne  $\rho^{-3}$  est grande par rapport à la longueur de diffusion, les atomes "perdent" le souvenir de leur collision pendant la propagation libre qui suit. L'influence des autres atomes peut être traitée comme une influence moyenne, et l'état du CBE peut être décrit que par une seule fonction d'onde  $\phi(\vec{r}, t)$ , la fonction d'onde macroscopique du condensat. Celui-ci obéit à l'équation de Gross-Pitaevskii, ou Schrödinger non-linéaire

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}, t) \right] \phi(\vec{r}, t) + \frac{4\pi\hbar^2 N a_s}{m} |\phi(\vec{r}, t)|^2 \phi(\vec{r}, t), \quad (1.9)$$

où  $\nabla^2$  est l'opérateur laplacien,  $V_{\text{ext}}$  le potentiel extérieur appliqué et  $\phi(\vec{r}, t)$  la fonction d'onde du condensat normalisée à 1, i.e.  $\int d^3\vec{r} |\phi(\vec{r}, t)|^2 = 1$ . L'équation (1.9) est celle décrivant la dynamique de l'atome appartenant à un gaz parfait, avec en plus un terme non-linéaire analogue à un terme d'effet Kerr pour le champ électrique.

Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéresserons à des condensats quasi-unidimensionnels, dont nous étudierons la dynamique dans la direction  $x$ . Une telle situation est obtenue en soumettant le condensat à un potentiel de confinement "raide" dans les directions transverses ( $y, z$ ), afin qu'il reste dans l'état fondamental de ce potentiel. Pour cela, il faut que les collisions entre atomes – dont l'énergie vaut typiquement  $2\pi\hbar^2 \bar{\rho} a_s / m$ , avec  $\bar{\rho}$  la densité moyenne des atomes – soit négligeable devant l'espacement des niveaux d'énergie transverses – qui vaut  $2\hbar\omega_{\perp}$ , dans le cas d'un piège

<sup>9</sup>Pour le rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ),  $a_s = 5,4$  nm, alors que pour le lithium ( $^7\text{Li}$ ),  $a_s = -1,35$  nm.

harmonique de fréquence  $\omega_{\perp}$ . Cela se traduit mathématiquement par la condition

$$\frac{\pi \hbar \bar{\rho} a_s}{m} \ll \omega_{\perp}, \quad (1.10)$$

ce qui expérimentalement donne  $\omega_{\perp}$  valant quelques Hertz.

Dans ces conditions, en factorisant la fonction d'onde  $\phi(\vec{r}, t)$  en

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_{\perp}(y, z) \times \Psi(x, t), \quad (1.11)$$

nous aboutissons à l'équation de Gross-Pitaevskii à une dimension [72]

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t) \\ &+ g |\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec

$$g = 2N a_s \hbar \omega_{\perp}. \quad (1.13)$$

L'équation (1.12) est bien l'équation de Schrödinger pour un atome, à laquelle s'ajoute un terme non-linéaire, qui dépend du paramètre  $g$  rendant compte des collisions entre atomes. Ce paramètre peut être ajusté en changeant la raideur du potentiel transverse ou la longueur de diffusion<sup>10</sup>. Dans le chapitre 5, nous verrons que  $g$  influence de façon drastique la dynamique d'un condensat.

Dans cette section, nous avons vu que les condensats de Bose-Einstein se caractérisent par le fait que les atomes qui les composent sont dans le même état quantique. Cela leur confère une cohérence “macroscopique”, i.e. qui s'étend sur plusieurs microns, ce qui en fait des systèmes particulièrement bien adaptés pour l'observation de phénomènes quantiques. Hormis leur très basse température, les condensats se caractérisent aussi par une densité suffisamment élevée pour que les interactions entre atomes soient prises en compte. Nous avons vu que si le condensat est assez dilué, ces interactions peuvent être modélisées par une approximation de champ moyen. Son état est alors décrit par une fonction d'onde unique dont l'évolution est régie par l'équation de Schrödinger non-linéaire. Cette non-linéarité rend l'étude des condensats particulièrement attrayante, puisqu'elle permet l'observation de phénomènes tels que les solitons [11, 56] ou le chaos [95, 110]. L'observation du chaos dans les CBE, qui fait l'objet du chapitre 5 de ce manuscrit, nécessite de les soumettre à des potentiels mécaniques, tels que ceux présentés dans la section suivante.

### 1.3 Potentiels optiques

Dans les sections 1.1 et 1.2, nous avons vu comment obtenir un gaz d'atomes froids et ultra-froids, respectivement. Une fois cette phase de production terminée, nous soumettons, dans les deux cas, les atomes à un potentiel mécanique généré par d'autres faisceaux laser, et que l'on appelle donc *potentiel optique* ou *lumineux*. Il est particulièrement intéressant de réaliser un potentiel optique avec une onde stationnaire, car cela

<sup>10</sup> La longueur de diffusion peut être modifiée en utilisant les résonances de Feshbach [14].

produit un potentiel périodique (sinusoïdal), et la dynamique devient ainsi analogue à celle des électrons dans un cristal<sup>11</sup>.

Le but de cette section est de présenter le principe de réalisation d'un tel potentiel. Dans la sous-section 1.3.1, nous expliquerons comment, en agissant sur les niveaux d'énergie d'un atome, nous pouvons créer un potentiel qui agit sur le centre de masse de cet atome. Puis, dans les sous-sections 1.3.2 et 1.3.3, nous traiterons l'exemple des deux potentiels étudiés dans ce manuscrit : le *potentiel sinusoïdal pulsé*, que nous appliquerons à un gaz froid, et le *réseau incliné*, que nous appliquerons à un condensat de Bose-Einstein<sup>12</sup>. Dans le deux cas, nous présenterons le système d'unités réduites utilisées dans nos simulations.

### 1.3.1 Principe général

Pour créer un potentiel optique, nous plongeons, comme pour le refroidissement, les atomes dans l'onde stationnaire obtenue à partir de deux faisceaux laser identiques contra-propageants. La différence est que, dans le cas présent, il nous faut minimiser l'émission spontanée, car celle-ci brise les effets de *cohérence quantique* que nous souhaitons observer<sup>13</sup>. Pour ce faire, nous utilisons des faisceaux fortement désaccordés par rapport à la transition atomique. En effet, le taux d'émission spontanée  $\Gamma$  dépend du désaccord  $\delta_L$  suivant la formule

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{4} \frac{\Omega_R^2}{\delta_L^2 + \Gamma_0^2/4} \sim \frac{\Gamma_0}{4\delta_L^2}, \quad (1.14)$$

où  $\Gamma_0$  la largeur naturelle du niveau excité  $|e\rangle$  et  $\Omega_R$  la fréquence de Rabi, qui donne l'échelle caractéristique d'oscillation de l'atome entre ses deux niveaux d'énergie :

$$\Omega_R = \frac{2dE_0}{\hbar}, \quad (1.15)$$

avec  $d$  l'élément non-diagonal du moment dipolaire de l'atome<sup>14</sup> et  $E_0$  l'amplitude du champ électrique associé à chaque faisceau laser. Donc, en prenant un désaccord tel que

$$|\delta_L| \gg \Omega_R, \Gamma_0, \quad (1.16)$$

on peut limiter considérablement le taux d'émission spontanée, jusqu'à avoir des cycles de fluorescence espacés d'une fraction de milli-seconde<sup>15</sup>.

Le fait de prendre un désaccord élevé a aussi l'effet suivant : les atomes qui se trouvent dans le niveau excité retombent "très rapidement" dans le niveau fondamental. Nous pouvons donc négliger les variations de population du niveau excité, réalisant ainsi une *approximation adiabatique*. Dans ces conditions, sous l'effet de l'onde stationnaire, l'énergie du niveau fondamental est déplacée d'une quantité proportionnelle à l'intensité

---

<sup>11</sup>Dans les réseaux cristallins, les effets quantiques ne sont pas directement observables, à cause de la forte dissipation engendrée par les collisions à l'intérieur des solides.

<sup>12</sup>Ces deux potentiels sont appliqués dans une seule direction, notée  $x$ .

<sup>13</sup>Nous privilégions ainsi l'aspect *conservatif* de la dynamique au profit des effets *dissipatifs*.

<sup>14</sup>Le moment dipolaire est considéré dans la direction de polarisation du champ électrique, ici  $y$ .

<sup>15</sup>Pour la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$  du césium, nous avons  $\Gamma_0 \approx 2\pi \times 5,2$  MHz,  $\delta_L \sim -1000 \times \Gamma_0$  et  $\Omega_R \approx 2\pi \times 100$  MHz, ce qui donne  $\Gamma \sim 2\pi \times 10$  kHz soit une émission spontanée toutes les 0,1 ms.

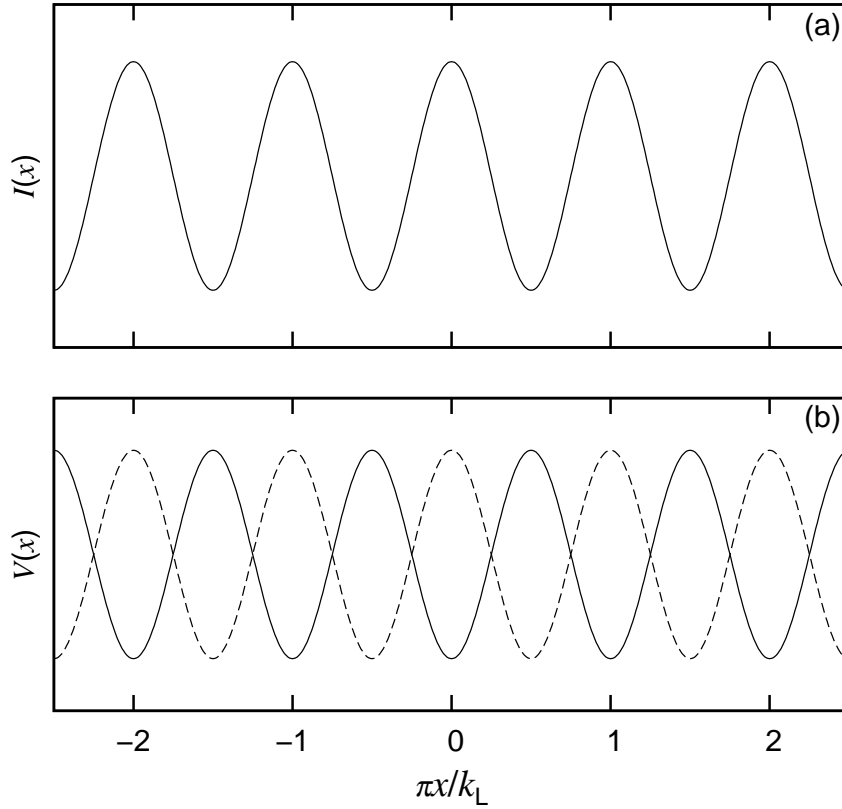


FIG. 1.5 – Représentation schématique du potentiel mécanique créé par une onde lumineuse stationnaire. Le panneau (a) représente le profil d'intensité, et le panneau (b) le potentiel qui en résulte : pour  $\delta_L > 0$  (traits pleins) et  $\delta_L < 0$  (tirets). Dans le premier cas ( $\delta_L > 0$ , désaccord “vers le bleu”), les atomes sont attirés vers les zones claires, i.e. les maxima d'intensité; dans le second cas ( $\delta_L < 0$ , désaccord “vers le rouge”), ils sont attirés vers les zones sombres.

de l'onde. Celle-ci crée donc, pour le centre de masse de l'atome, le potentiel mécanique  $V(x)$ , donné par

$$V(x) = -\frac{\hbar\Omega_R^2}{8\delta_L} (\cos(2k_L x) + 1), \quad (1.17)$$

que nous réécrivons, en ignorant le terme constant<sup>16</sup>

$$V(x) = V_0 \cos(2k_L x), \quad (1.18)$$

avec  $V_0 = -\frac{\hbar\Omega_R^2}{8\delta_L}$ . Selon le signe du désaccord, les atomes seront attirés vers les zones d'intensité minimale ( $\delta_L < 0$ ) ou maximale ( $\delta_L > 0$ ) (cf. Fig. 1.5). Le potentiel sinusoïdal ainsi généré peut ensuite servir de base pour construire des potentiels plus élaborés, comme nous allons le voir dans les sous-sections suivantes.

<sup>16</sup>Dans la limite des “grands” désaccords (cf. Eq. (1.16)), la profondeur du potentiel, proportionnelle à  $\delta_L^{-1}$ , diminue moins vite que le taux d'émission spontanée, proportionnel à  $\delta^{-2}$  (cf. Eq. (1.14)).

### 1.3.2 Potentiel sinusoïdal pulsé

Dans cette sous-section, nous montrons comment générer expérimentalement un potentiel sinusoïdal pulsé. Cette forme de potentiel est incontournable, car elle permet la réalisation expérimentale du système de référence du chaos quantique, le rotateur pulsé (cf. chapitre 2).

Pour créer des impulsions<sup>17</sup> d'onde stationnaire, il faut “bloquer” les faisceaux, sauf pendant de très courts instants, ce qui est réalisé grâce à des modulateurs acousto-optiques. Mathématiquement, cela revient à multiplier le potentiel (1.18) par une série de créneaux  $\Delta_\tau(t)$  définis tels que

$$\Delta_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\tau < t < 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.19)$$

ce qui donne le potentiel pulsé

$$V(x,t) = V_0 \cos(2k_L x) \sum_n \Delta_\tau(t - nT), \quad (1.20)$$

où  $T$  est l'intervalle entre les pulses et  $\tau$  leur durée (bien sûr finie dans une expérience). Pour retrouver des pulses “instantanés” comme dans le modèle du rotateur pulsé, il faut prendre la limite

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Delta_\tau(t) = \delta(t), \quad (1.21)$$

où  $\delta$  est la fonction “delta” de Dirac, ce qui donne l'hamiltonien

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \tau \cos(2k_L \hat{x}) \sum_n \delta(t - nT). \quad (1.22)$$

La durée des pulses  $\tau$  doit donc satisfaire à deux exigences contradictoires :

- ne pas être “trop longue”, pour se rapprocher au maximum des pulses instantanés considérés dans le modèle. Cela évite que la particule ne parcoure trop de chemin pendant le pulse. Quantitativement, on peut établir le critère  $\frac{\tau}{T} < 0.1$  ;
- mais ne pas être “trop courte” non plus, pour que les atomes “ressentent” le potentiel, et qu'ils puissent absorber et émettre des photons, ce qui donne  $\tau > \Omega_R^{-1} \sim 10 \text{ ns}$  (cf. Eq. (1.15)).

Pour satisfaire ces deux conditions, dans les expériences réalisées dans notre équipe, le paramètre  $\tau$  est pris aux alentours de  $1 \mu\text{s}$ . Les autres paramètres du hamiltonien (1.22), quant à eux, sont ajustés autour des valeurs suivantes :  $\delta_L = 2\pi \times 10 \text{ GHz}$ ,  $T = 20 \mu\text{s}$ . La puissance laser est approximativement de  $150 \text{ mW}$ .

Pour les simulations numériques, il est intéressant d'introduire des variables réduites. Dans le cas du rotateur pulsé, les variables sans dimension sont construites à partir du pas du réseau et de la période des pulses. Si on pose  $t' = \frac{t}{T}$ ,  $\hat{X} = 2k_L \hat{x}$ ,  $\hat{P} = \frac{2k_L T}{m} \hat{p}$  et  $\hat{H}' = \frac{4k_L^2 T^2}{m} \hat{H}$ , et que l'on enlève les primes, l'hamiltonien (1.22) prend alors la forme bien connue

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{P}^2}{2} + K \cos \hat{X} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - n), \quad (1.23)$$

<sup>17</sup>Par la suite, nous utiliserons le néologisme “pulse” plutôt que le terme “impulsion”, afin de ne pas confondre avec la quantité de mouvement.

où nous avons posé

$$K = \frac{4k_L^2 T \tau}{m} V_0, \quad (1.24)$$

qui est le paramètre sans dimension donnant l'intensité des pulses<sup>18</sup>. Le vecteur d'état  $|\Psi\rangle$  du système suit alors l'équation de Schrödinger

$$i\bar{k} \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (1.25)$$

où  $\bar{k}$  est la constante de Planck normalisée<sup>19</sup>

$$\bar{k} = \frac{4k_L^2 T}{m} \hbar = 8\omega_r T, \quad (1.26)$$

avec  $\omega_r = \frac{v_r^2}{2m\hbar}$  est la pulsation de recul<sup>20</sup>. Cette constante de Planck, qui est un paramètre propre à la dynamique quantique, est aussi appelée "paramètre de quanticité". Compte tenu des ordres de grandeur expérimentaux, elle vaut quelques unités.

Dans cette sous-section, nous avons vu comment réaliser un potentiel sinusoïdal pulsé avec des lasers. Contrairement au modèle théorique, les pulses de potentiel ne sont pas instantanés ; mais ils sont tellement courts, que leur durée finie n'influence pas significativement la dynamique du système (voir la sous-section 2.2.3 de la référence [61]). Par ailleurs, l'écriture sous forme de variables réduites a mis en évidence que la dynamique quantique ne dépend que de deux paramètres : le paramètre  $K$  donnant la force des pulses, et le paramètre  $\bar{k}$  reflétant la "quanticité" du système.

### 1.3.3 Réseau incliné

A présent, nous revenons au cas d'un potentiel continu. Dans cette sous-section, nous allons introduire le potentiel en forme de *réseau incliné*, qui est le potentiel ressenti par les électrons d'un cristal soumis à un champ électrique constant. Comme nous le verrons au chapitre 5, l'intérêt principal du réseau incliné est qu'il révèle les effets de cohérence quantique dans l'espace des positions.

L'idée, pour réaliser un réseau incliné, est d'introduire un déphasage dépendant du temps, noté  $k_L \varphi(t)$ , dans l'un des bras de l'onde stationnaire. L'intensité résultante vaut dans ce cas

$$I(t) = 4E_0^2 \cos^2 \left( 2k_L \left( x + \frac{1}{2} \varphi(t) \right) \right). \quad (1.27)$$

Le déphasage a donc pour effet de traduire l'onde stationnaire dans le référentiel du laboratoire. Si maintenant nous nous plaçons dans le référentiel de l'onde stationnaire, cette translation est "ressentie" par les atomes comme une force

$$F(t) = \frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t). \quad (1.28)$$

Ainsi, dans le cas d'un déphasage quadratique  $\varphi(t) = at^2$ , les atomes ressentent-ils la force

<sup>18</sup>Expérimentalement,  $K$  peut atteindre des valeurs de l'ordre de la dizaine.

<sup>19</sup>En d'autres termes, nous avons la relation de commutation  $[\hat{X}; \hat{P}] = i\bar{k}$ .

<sup>20</sup> $v_r$  est la vitesse de recul définie dans l'équation (1.2).

$$F = ma. \quad (1.29)$$

qui est constante dans le temps. Nous obtenons donc le potentiel du réseau incliné :

$$V(x) = V_0 \cos(2k_L x) + Fx, \quad (1.30)$$

en unités physiques.

Les simulations numériques du chapitre 5 sont effectuées avec des paramètres sans dimension construits à partir du pas du réseau  $\pi/k_L$  et de l'énergie de recul  $\hbar^2 k_L^2 / 2m$ . En posant  $\hat{H}' = \frac{2m}{\hbar^2 k_L^2} \hat{H}$ ,  $\hat{X} = \frac{k_L}{\pi} \hat{x}$ ,  $\hat{P} = \frac{1}{\hbar k_L} \hat{p}$ ,  $t' = \frac{\hbar k_L^2}{2m} t$ ,  $V_0' = \frac{2m}{\hbar^2 k_L^2} V_0$ ,  $F' = \frac{2\pi m}{\hbar^2 k_L^3} F$  et  $g' = \frac{2m}{\pi \hbar^2 k_L} g$ , et en ôtant les primes, nous aboutissons à la forme réduite de l'équation de Schrödinger non-linéaire (1.12)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) = \left[ -\frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + V_0 \cos(2\pi X) + FX + g |\Psi|^2 \right] \Psi(X, t), \quad (1.31)$$

En imprimant un déphasage à l'un des deux bras de l'onde stationnaire, on peut donc, en plus du terme sinusoïdal, créer un grande variété de forces. Dans ce manuscrit, nous considérerons le cas d'une force constante, mais des recherches ont par exemple été menées avec une force sinusoïdale [45, 92, 96].

Dans cette section, nous avons vu comment réaliser un potentiel optique, ce qui constitue le cœur de nos expériences de dynamique quantique. En soumettant les atomes à une onde stationnaire dont les faisceaux sont fortement désaccordés avec leur transition, d'une part, nous soumettons leur centre de masse à un potentiel mécanique dont la forme est facilement ajustable ; d'autre part, nous limitons très fortement la source de décohérence qu'est l'émission spontanée. Comme exemple de potentiels optiques, nous avons considéré le potentiel sinusoïdal pulsé, conçu en n'appliquant l'onde stationnaire qu'en de courts instants, et le réseau incliné réalisé en introduisant un déphasage dans l'un des bras de l'onde. Une fois que les atomes ont été soumis à l'un de ces potentiels, nous souhaitons en connaître certaines propriétés, notamment l'impulsion, car celle-ci, tout en étant simple à mesurer, rend bien compte des effets d'interférence quantique. Dans la section suivante, nous allons présenter l'une des techniques de mesure de l'impulsion basée sur la transition Raman.

## 1.4 Vélométrie Raman

La méthode la plus couramment utilisée pour mesurer l'impulsion des atomes est celle dite de "temps de vol" [108]. Cependant, dans le chapitre 3 de ce manuscrit, nous présentons des résultats obtenus avec une mesure d'impulsion par *transition Raman stimulée*. Cette méthode, qui donne, avec une très bonne précision, le nombre d'atomes ayant une impulsion donnée, est brièvement expliquée dans cette section.

Dans notre dispositif expérimental, la transition Raman stimulée [68] permet de transférer des atomes de l'état  $|F_f = 4\rangle$  du césium vers le niveau  $|F_f = 3\rangle$  distant de  $\omega_{HF} \approx 9,2$  GHz (cf. Fig 1.3)<sup>21</sup>. Cette transition à deux photons se fait grâce à deux

---

<sup>21</sup>Les lettres HF signifient qu'il s'agit d'une transition hyperfine.

faisceaux laser contra-propageants  $((\omega_{R1}, \vec{k}_{R1})$  et  $(\omega_{R2}, \vec{k}_{R2}))$  et désaccordés. L'atome absorbe un photon du faisceau R1, puis en émet un de façon stimulée dans le mode R2.

Pour que le transfert de population soit optimal, le désaccord entre les deux faisceaux, qui est ajustable, doit être proche de  $\omega_{HF}$ , mais il doit aussi tenir compte du décalage de la fréquence perçue par l'atome dû à son impulsion  $\vec{p}$  (effet Doppler). Partant de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement avant et après la transition, nous trouvons que pour sélectionner la classe d'impulsion  $\vec{p}$ , il faut appliquer le désaccord

$$\omega_{R2} - \omega_{R1} = \omega_{HF} - \frac{1}{m} \left( \vec{k}_{R1} - \vec{k}_{R2} \right) \left( \vec{p} + \frac{\hbar}{2} \left( \vec{k}_{R1} - \vec{k}_{R2} \right) \right). \quad (1.32)$$

Une fois que l'on a trouvé le bon désaccord, il faut déterminer la durée  $\tau_R$  des impulsions R1 et R2. Comme au départ, tous les atomes se trouvent dans l'état  $|F_f = 4\rangle$ , il faut que  $\tau_R$  vérifie

$$\Omega_{\text{eff}} \times \tau_R = \pi, \quad (1.33)$$

où  $\Omega_{\text{eff}}$  est l'analogie de la fréquence de Rabi d'un cycle de fluorescence<sup>22</sup>, pour que tous les atomes de la classe de vitesse sélectionnée soient transférés dans  $|F_f = 3\rangle$ . Dans notre expérience,  $\tau_R$  est de l'ordre de 1 ms. Compte tenu des inégalités de Heisenberg, la durée finie des pulses limite la précision de la sélection en impulsion, qui peut cependant être abaissée jusque  $\hbar k_L/25$  ( $k/50$  dans le système d'unités réduites du rotateur pulsé).

Une fois que les atomes de l'impulsion sélectionnée ont été transférés dans le niveau  $|F_f = 3\rangle$ , un faisceau pousseur est appliqué, afin d'enlever de la cellule tous les atomes non sélectionnés. A l'aide d'un faisceau repompeur, les atomes sont intégralement transférés de  $|F_f = 3\rangle$  à  $|F_f = 4\rangle$ , après quoi un faisceau "sonde", résonant avec la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$ , permet de mesurer le nombre d'atomes restant dans la cellule. Toutes ces étapes, qui durent au total 50 ms, sont représentées schématiquement sur la figure 1.6.

La technique de vélocimétrie Raman permet de mesurer la distribution en impulsion d'un ensemble d'atomes avec une très grande précision. Elle consiste à sélectionner une classe d'impulsion particulière en tirant profit de la transition Raman stimulée et de l'effet Doppler. Cette sélection est intéressante car elle nous laisse le choix de la (des) classe(s) d'impulsion dont nous mesurons la population. Comme les atomes sélectionnés sont séparés des autres atomes, la vélocimétrie Raman nous permet aussi de préparer une distribution très fine en impulsion, pouvant ensuite servir de condition initiale à une expérience de dynamique quantique (cf. chapitre 3).

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les expériences qui ont motivé les résultats théoriques des chapitres suivants. Nous nous sommes efforcés de démontrer que les atomes froids sont particulièrement bien adaptés pour l'observation expérimentale de phénomènes quantiques fondamentaux. En effet, comme ils ont une très faible impulsion, leur longueur d'onde de de Broglie thermique est comparable à la longueur d'onde des faisceaux laser dans lesquels ils sont plongés, ce qui rend leur propriétés ondulatoires

<sup>22</sup>L'expression de  $\Omega_{\text{eff}}$  est donnée dans l'équation (2.17) de la référence [61].



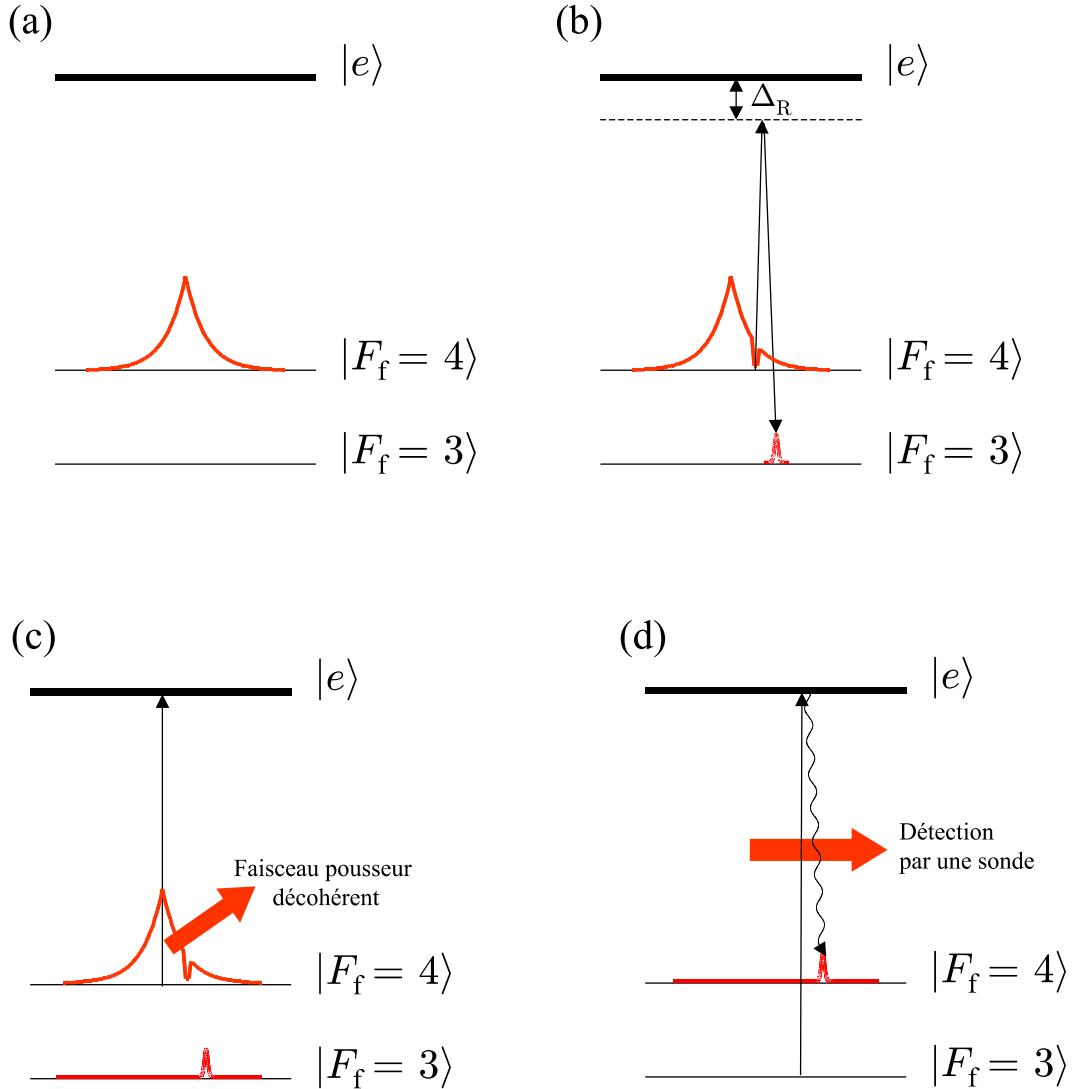


FIG. 1.6 – Mesure de la distribution en impulsion par spectroscopie Raman. Après l'application du potentiel mécanique (a), tous les atomes sont dans l'état  $|F_f = 4\rangle$ . L'application du pulse Raman (b) sélectionne la classe d'impulsion donnée par l'équation (1.32). Notons que sur le schéma, le niveau "virtuel" de la transition Raman est repéré par rapport aux niveaux hyperfins  $|e\rangle = |F_e = 3,4,5\rangle$ , car ce niveau a une plus haute probabilité de se trouver aux alentours de ces "vrais" niveaux. Les atomes non sélectionnés sont ensuite enlevés de la cellule par un faisceau "pousseur" résonant (c), avant que les atomes sélectionnés ne soient repompés vers le niveau  $|F_f = 4\rangle$ . (d) Enfin un faisceau sonde permet de mesurer par absorption le nombre d'atomes sélectionnés.

prédominantes. Par ailleurs, le taux d'émission spontanée subie par les atomes peut être considérablement réduit, ce qui rend les effets purement cohérents observables sur un "long" intervalle de temps.

Parmi les systèmes obtenus après refroidissement, nous en avons distingué deux différents : les gaz froids et les condensats de Bose-Einstein. Les gaz froids sont produits dans un piège magnéto-optique ; ils ont une température de l'ordre de microkelvin, et sont composés d'atomes indépendants. Les condensats de Bose-Einstein, quant à eux, sont obtenus après une étape de refroidissement supplémentaire, le refroidissement évaporatif, qui les amènent à une centaine de nanokelvins. Leur densité est beaucoup plus élevée que celle des gaz froids, si bien que les atomes qui les composent interagissent par collision. Ces interactions ont une influence capitale sur la dynamique des condensats, qui réunissent ainsi la mécanique quantique et la dynamique non-linéaire. Les condensats de Bose-Einstein sont donc le siège de phénomènes inédits dans le monde quantique, tels que les solitons atomiques ou le chaos.

Pour étudier la dynamique quantique des gaz froids comme des condensats, nous les plaçons dans des potentiels mécaniques "synthétisés" par laser. En particulier, nous avons considéré le cas d'un gaz froid soumis à un potentiel sinusoïdal pulsé, réalisant ainsi le système de référence du chaos quantique, le rotateur pulsé, qui fera l'objet des chapitres 2 à 4. Nous avons aussi considéré le cas d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau incliné, qui sera repris au chapitre 5, car ce potentiel est particulièrement intéressant pour observer les effets de cohérence quantique dans l'espace réel.



# Chapitre 2

## Présentation du rotateur pulsé

Depuis l'arrivée des techniques de refroidissement d'atomes par laser, le rotateur pulsé, du fait de sa simplicité et de son incroyable richesse, s'est imposé comme le système de référence du chaos quantique [15, 48, 71], supplantant ainsi des systèmes tels que les atomes de Rydberg [52]. La version classique du rotateur pulsé présente en effet du chaos, i.e. une sensibilité aux conditions initiales, qui s'accompagne d'une diffusion de l'énergie cinétique. Dans le système quantique, cette sensibilité aux conditions initiales n'est pas observable, mais elle laisse une "signature" : l'énergie cinétique n'est diffusive que pendant un certain temps, après quoi elle finit par saturer.

Ce phénomène, appelé *localisation dynamique*, est la manifestation d'interférences quantiques destructives. Comme tous les phénomènes d'interférences, la localisation dynamique est très sensible à la décohérence, qui empêche l'arrêt total de la diffusion. L'impact de l'une des causes principales de décohérence, l'émission spontanée, ainsi qu'une méthode pour limiter cet impact seront étudiés dans le chapitre 3. Dans certaines situations, la localisation dynamique n'est pas observable, sans que cela ne soit dû à la décohérence. Les interférences destructives, caractéristiques de la localisation dynamique, laissent alors place à des interférences constructives, qui produisent une diffusion quadratique de l'énergie cinétique. Ce phénomène, connu sous le nom de *résonance quantique*, fera l'objet du chapitre 4.

Avant d'aborder ces deux sujets, nous allons présenter, dans ce chapitre, les caractéristiques du rotateur pulsé qui seront nécessaires à la compréhension des deux chapitres suivants. Dans la section 2.1, consacrée au rotateur pulsé classique (RPC), nous mettrons particulièrement l'accent sur le chaos et ses conditions d'apparition. Puis, dans la section 2.2, nous présenterons le rotateur pulsé quantique (RPQ), en insistant sur la localisation dynamique.

### 2.1 Le rotateur pulsé classique

Nous commençons donc ce chapitre par le rotateur pulsé classique. En utilisant la mécanique hamiltonienne, nous écrirons son évolution temporelle sous la forme d'une application, puis nous distinguerons ses différents comportements dynamiques en fonction des conditions initiales et d'un paramètre de contrôle.

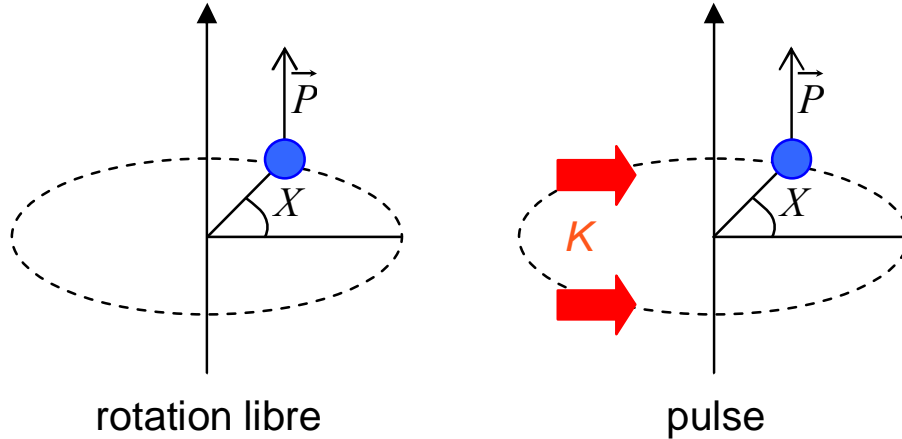


FIG. 2.1 – Schéma du rotateur pulsé, dont les variables dynamiques sont l’angle  $X$  et le moment cinétique  $\vec{P}$ . Le dessin de gauche représente la rotation libre et celui de droite l’application du pulse.

### 2.1.1 Le modèle

Le rotateur pulsé, en anglais “kicked rotor”, consiste en une particule tournant autour d’un axe. Cette rotation se fait librement la plupart du temps, sauf pendant de courts intervalles régulièrement espacés, où la particule est soumise à une force constante. Nous pouvons par exemple nous représenter cette situation en imaginant un pendule tournant dans le vide et soumis périodiquement à des pulses de gravité (cf. Fig 2.1).

Le rotateur pulsé étant un système *conservatif*, il peut être décrit par le formalisme *hamiltonien*. En considérant que la force s’applique pendant des durées tellement courtes qu’elle peut s’écrire comme une suite de “fonctions delta” de Dirac, nous écrivons l’hamiltonien du système comme étant (cf. Eq. (1.23))

$$H(t) = \frac{P^2}{2} + K \cos X \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - n), \quad (2.1)$$

où  $X$  et  $P$  forment un couple de variables *conjuguées* [60]. Dans le cas du rotateur pulsé, ces variables sont l’angle et le moment cinétique. Mais dans le cas d’un mouvement rectiligne (cf. Section 2.2),  $X$  et  $P$  représentent la position et l’impulsion de la particule. Pour le problème classique, cette différence n’a aucune importance : en terme de variables réduites, les deux situations peuvent être décrites par le même hamiltonien (2.1).<sup>1</sup>

L’écriture sous forme réduite a un autre avantage : elle met clairement en évidence que la dynamique du rotateur pulsé ne dépend que d’un paramètre, noté ici  $K$ , qui est proportionnel à l’intensité des pulses (cf. Eq. (1.24)). Ce paramètre, qui joue un rôle primordial dans la nature de la dynamique, est appelé “paramètre de stochasticité”.

Nous cherchons maintenant l’évolution des grandeurs  $X$  et  $P$  en fonction du temps.

<sup>1</sup>Dans cette section consacrée au problème classique, nous considérerons, à partir de maintenant que  $X$  est l’angle et  $P$  le moment cinétique du rotateur.

Pour cela, nous utilisons les équations de Hamilton

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad (2.2)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}. \quad (2.3)$$

Les équations (2.2) et (2.3) nous indiquent qu'entre deux pulses, la particule est animée d'un mouvement de rotation uniforme, alors que l'application d'un pulse provoque un changement instantané du moment cinétique. Si l'on note  $X_t$  et  $P_t$  l'angle et le moment cinétique après le pulse numéro  $t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ), l'évolution de ces variables est donnée par les relations de récurrence

$$X_t = X_{t-1} + P_{t-1} \quad (2.4)$$

$$P_t = P_{t-1} + K \sin X_t. \quad (2.5)$$

Les équations (2.4) et (2.5) sont connues sous le nom d'*application standard* ou de *Chirikov-Taylor* (en anglais "standard mapping" ou "Chirikov-Taylor mapping") [15].

Même si cette application est bidimensionnelle, il ne faut pas perdre de vue que l'espace des phases du rotateur pulsé compte *trois* dimensions : l'angle  $X$ , le moment cinétique  $P$  et le temps  $t$ , ce qui est une condition nécessaire pour l'observation du chaos. L'application (2.4) et (2.5) ne nous donne l'état du rotateur qu'à des instants stroboscopiques, entre lesquels il ne cesse de tourner. Il en est de même pour les portraits de phase (diagrammes  $(P_t, X_t)$ ) que nous utiliserons dans la suite pour caractériser la dynamique du système. Comme ces portraits de phase sont  $2\pi$ -périodiques en  $X$  comme en  $P$ , elles ne seront représentés que dans l'intervalle  $X \in [0; 2\pi[$  et  $P \in [-\pi; \pi[$ . Remarquons toutefois que cette symétrie géométrique ne traduit pas une symétrie physique du système : en effet, un rotateur qui est immobile n'a pas la même dynamique qu'un rotateur tournant avec un moment cinétique égal à  $2\pi$ .

## 2.1.2 Dynamique d'un rotateur pulsé

Dans cette sous-section, nous allons étudier les différents types de dynamique du rotateur pulsé. Nous verrons à quel point cette dynamique est dépendante de la condition initiale  $(X_0, P_0)$ , mais aussi et surtout du paramètre  $K$ , dont nous augmenterons progressivement la valeur.

### 2.1.2.1 Le rotateur libre

Commençons notre étude par la situation triviale où le rotateur tourne librement, i. e. :  $K = 0$ . Dans ce cas, les équations (2.4) et (2.5) s'itèrent facilement et donnent

$$X_t = X_0 + P_0 t \quad (2.6)$$

$$P_t = P_0. \quad (2.7)$$

Les équations (2.6) et (2.7) indiquent que  $P$  reste constante, et que l'angle évolue linéairement avec une pulsation notée  $\omega(P) = P_0$ . Comme le montre la figure 2.2, l'espace des phases est donc constitué de lignes verticales.

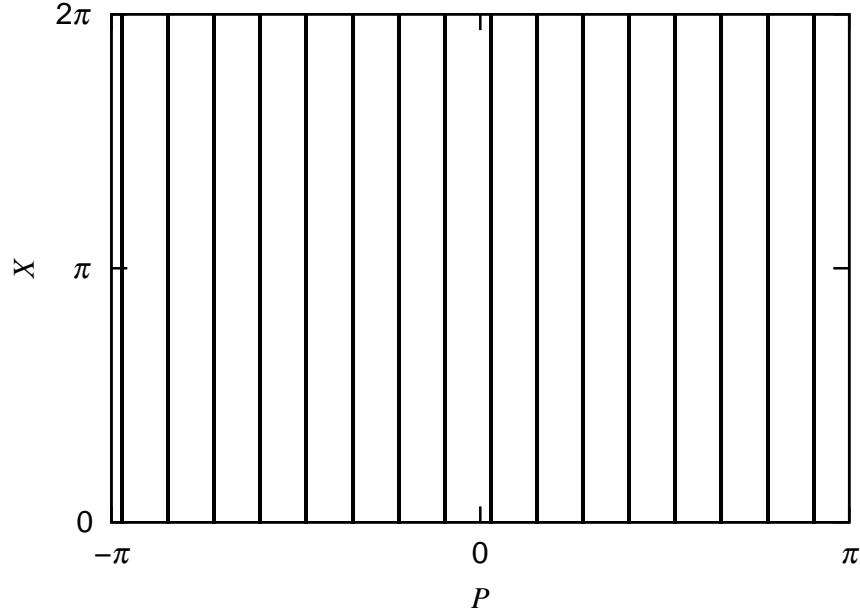


FIG. 2.2 – Portrait de phase du rotateur libre ( $K = 0$ ), exclusivement composé de trajectoires pour lesquelles  $P$  est constant.

### 2.1.2.2 Rotateur pulsé et apparition du chaos

Appliquons maintenant au rotateur des pulses d'intensité “modérée” (cf. Fig. 2.3). Ces pulses ont pour effet de transformer l'espace des phases de la figure 2.2. Certains points voient s'enrouler autour d'eux plusieurs trajectoires qui forment ainsi des *îlots de résonance*. Ces îlots traduisent des mouvements d'oscillations autour de leur centre, qui sont des points fixes de l'application (2.4) et (2.5). Parmi les différentes résonances, nous distinguons la *résonance principale*, nommée ainsi car son centre, de coordonnées  $(X = \pi; P = 0)$ , est un point fixe de période 1, et les résonances *secondaires*, dont les centres sont des points fixes de période supérieure. Par exemple, nous voyons, sur la figure 2.3 (c), la résonance d'ordre 2 autour des points  $(X = 0; P = -\pi)$  et  $(X = \pi; P = -\pi)$ .

En dehors des îlots de résonance, le rotateur tourne presque librement : il n'est que faiblement affecté par les pulses, ce qui donne naissance à des trajectoires à peine déformées que nous appelons *trajectoires passantes*. A la frontière entre les îlots de résonance et les trajectoires passantes, se trouvent des *séparatrices*, qui se rejoignent au niveau de points fixes instables (par exemple  $(X = 0, P = 0)$  pour la résonance principale). Pour donner une image simple, la séparatrice correspond, pour le pendule simple, à la situation où celui-ci est lâché très proche de son équilibre instable.

Lorsque l'on augmente l'intensité des pulses ( $K = 0,6$ ), tous les effets décrits précédemment s'amplifient (cf. Fig. 2.3 (b)). D'une part, la taille des résonances augmente, d'autre part, les trajectoires passantes sont de plus en plus déformées. Mais le principal changement se trouve à la limite de la résonance principale. La séparatrice bien nette pour  $K = 0,3$  a laissé place à des points distribués “au hasard”, et ne formant aucune trajectoire, ce qui reflète la dynamique *chaotique* du rotateur. Ce comportement apparaît préférentiellement dans cette zone de l'espace des phases, car la dynamique y est très sensible à la moindre perturbation.

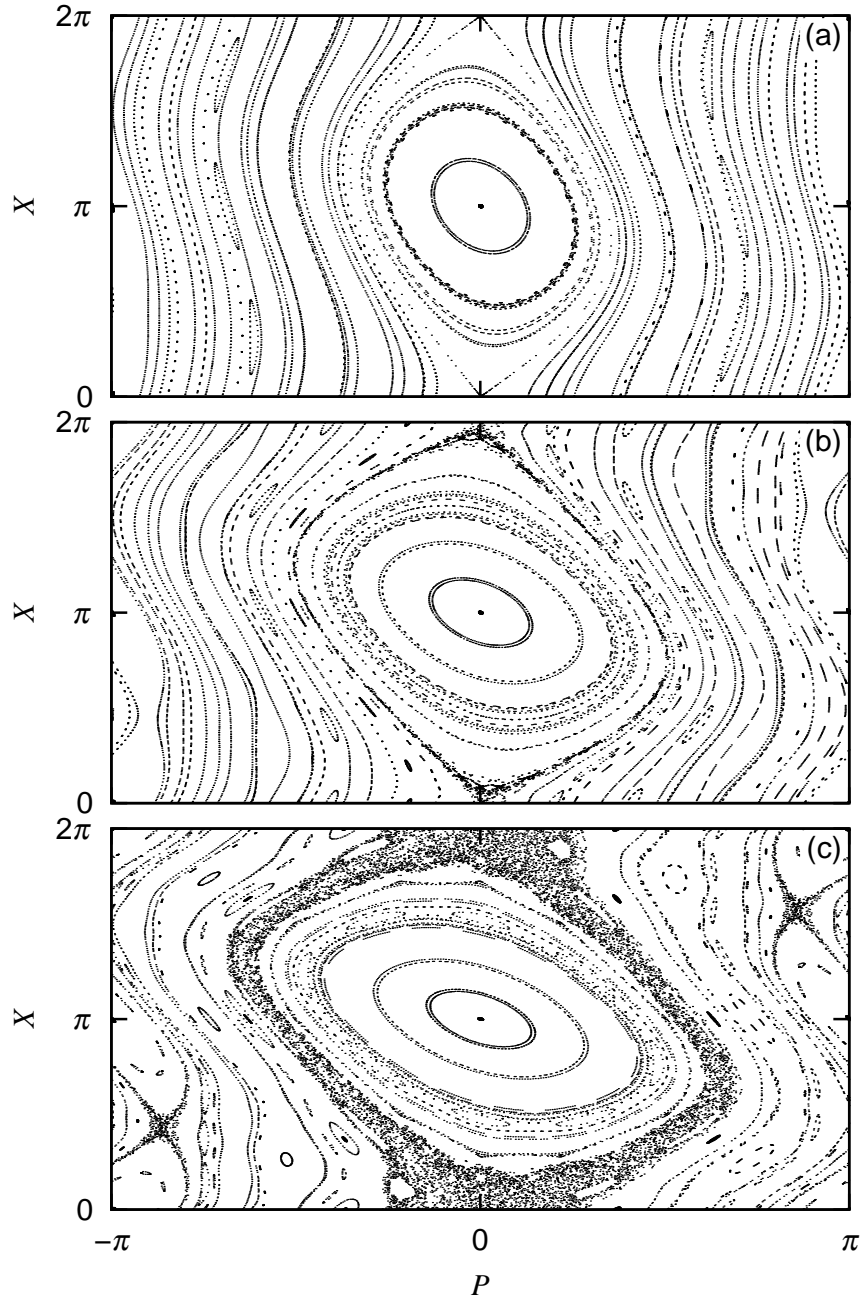


FIG. 2.3 – Portraits de phase tracés pour des pulses d'intensité "modérée", c'est-à-dire pour lesquels le chaos reste localisé autour des îlots de résonance. Les valeurs de  $K$  sont : (a)  $K = 0,3$ ; (b)  $K = 0,6$  et (c)  $K = 0,9$ .



Pour  $K = 0,9$  (cf. Fig. 2.3 (c)), la zone chaotique autour de la résonance principale s'est étendue, et une autre zone de chaos est apparue autour de la résonance d'ordre 2. Remarquons aussi qu'un cortège d'îlots *secondaires* est visible autour de la résonance principale, car la fréquence d'oscillation de leur centre est également commensurable avec la fréquence des pulses. Enfin, des trajectoires passantes, de moins en moins nombreuses, subsistent entre les résonances et les zones chaotiques.

Ces trajectoires, dont l'existence est l'objet du théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) (cf. Chapitre 5), sont très importantes, car tant qu'il en subsiste au moins une, les différentes zones chaotiques de l'espace des phases ne peuvent pas se rejoindre. En revanche, quand la dernière "cède", il n'y a plus de barrière, et une trajectoire chaotique peut explorer une grande partie de l'espace des phases (en particulier, elle couvre toute la gamme des valeurs de  $P$ ). Le chaos est alors dit à *grande échelle*, ce qui se traduit pas un mouvement complètement erratique du rotateur.

### 2.1.2.3 Stochasticité à grande échelle

Pour la rotateur pulsé, la disparition de la dernière trajectoire passante se produit pour la valeur critique de  $K = K_{cr} \approx 0,9716\dots$ . Au-dessus de  $K_{cr}$  (cf. Fig. 2.4), une seule zone chaotique, appelée "mer stochastique" entoure les îlots de résonance, dont la taille diminue jusqu'à ce qu'ils disparaissent par *doublement de période*. Ainsi, sur la figure 2.4, l'îlot principal du panneau (a), de période 1 pulse, a laissé place, pour  $K = 4$ , aux deux îlots secondaires du panneau (b), de période 2 pulses. En  $K = 2\pi$ , ces deux îlots donnent à leur tour naissance à quatre îlots, et ainsi de suite. Une cascade de bifurcations se produit, de plus en plus rapprochées et créant des îlots de plus en plus petits, pour finalement aboutir au chaos.

**Diffusion de l'énergie cinétique.** Pour  $K \gtrsim 5$ , à part quelques minuscules îlots que nous décrivons plus bas, l'ensemble de l'espace des phases est chaotique, et est accessible par une seule trajectoire : on dit que le système est *ergodique*. Au cours de son évolution, une particule finit donc par prendre toutes les valeurs possibles de  $P$ . De façon équivalente, si l'on considère un ensemble de particules occupant une grande variété de positions, un pulse donné leur apportera toute la gamme de quantités de mouvement comprise entre  $-K$  et  $+K$ . Ainsi des particules dont l'impulsion est initialement distribuée autour de  $P = 0$  évoluent-elles de façon très différente selon leur conditions initiales, certaines allant plutôt vers les  $P$  positifs et d'autres vers les  $P$  négatifs. Cela entraîne une dispersion de la distribution en impulsion, et donc une *diffusion* de l'énergie cinétique, qui augmente linéairement avec le temps.

Pour s'en convaincre, écrivons  $\Delta E_t$ , l'énergie apportée à une particule par le pulse numéro  $t$  :

$$\Delta E_t = \frac{P_t^2}{2} - \frac{P_{t-1}^2}{2} = \frac{K^2}{2} \sin^2 X_t + K P_{t-1} \sin X_t. \quad (2.8)$$

Si  $K$  est suffisamment élevé,  $X$  et  $P$  peuvent être considérées comme des variables purement aléatoires et indépendantes. Pour calculer la moyenne  $\langle \Delta E_t \rangle$  sur plusieurs particules, nous pouvons donc supposer que les différents  $X_t$  sont uniformément répartis sur l'intervalle  $[0; 2\pi[$ . Ainsi, seul le premier terme de (2.8), en sinus carré, apporte-t-il une contribution à la moyenne, ce qui donne

$$\langle \Delta E_t \rangle \approx \frac{K^2}{4}, \quad (2.9)$$

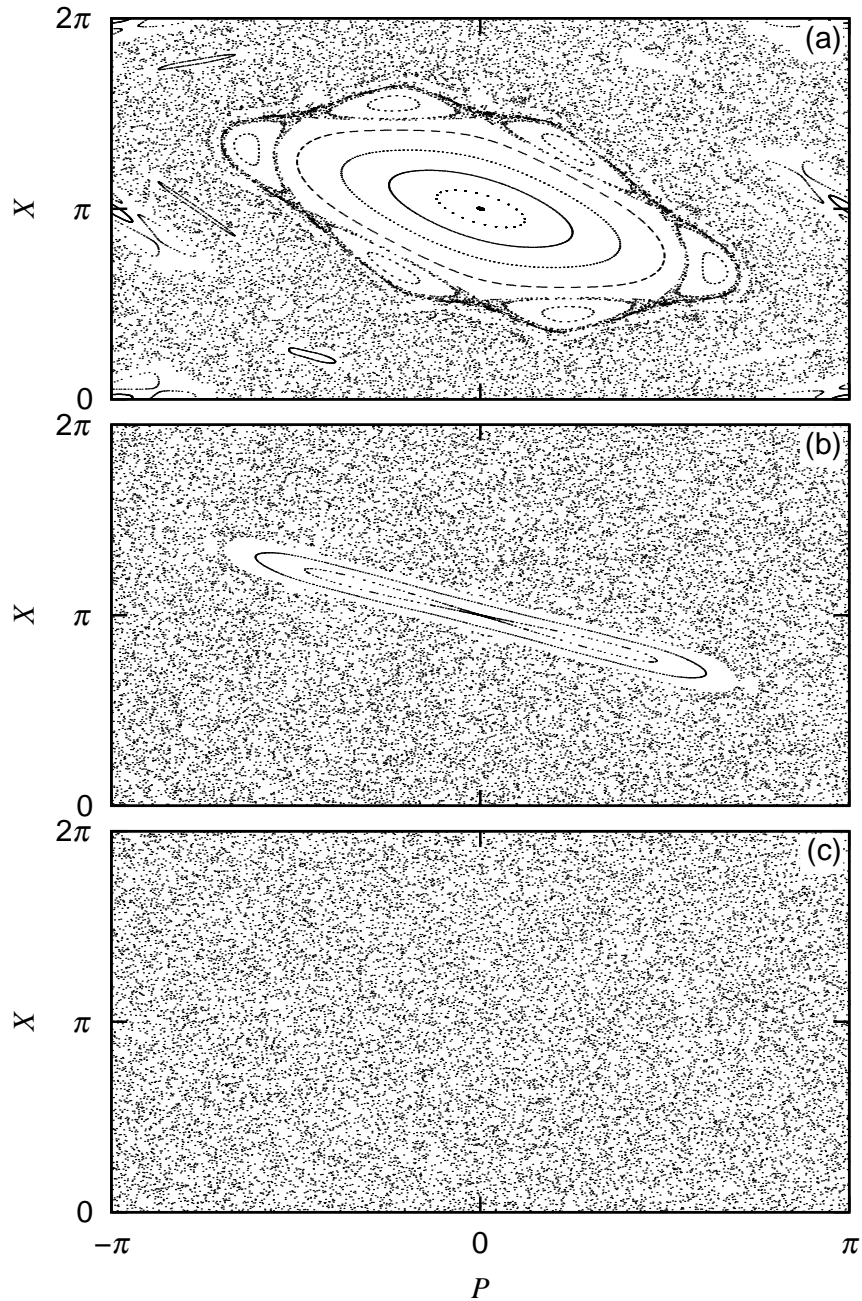


FIG. 2.4 – *Portraits de phase illustrant la stochasticité à grande échelle : (a) pour  $K = 1,5$ ; (b)  $K = 4,2$  et (c)  $K = 7$ . Les îlots de résonance se réduisent progressivement, disparaissent par doublement de période, jusqu'à ce que le chaos occupe tout l'espace des phases.*

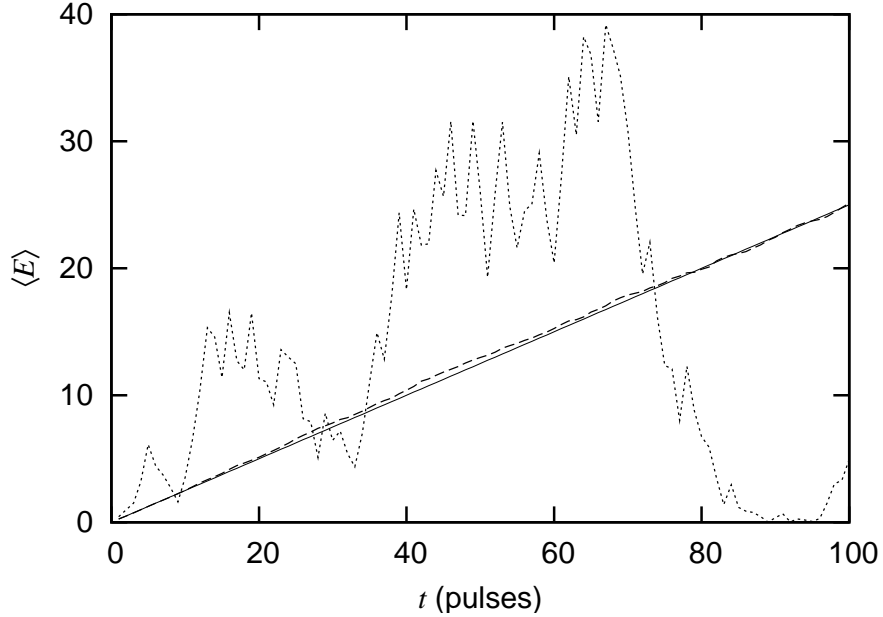


FIG. 2.5 – *Energie cinétique tracée en fonction du temps pour  $K = 40$ . La courbe en pointillés donne l'énergie d'une seule trajectoire, alors que celle avec des tirets donne l'énergie moyenne de  $50 \times 50$  trajectoires dont les conditions initiales sont uniformément réparties dans les intervalles  $X \in [0; 2\pi[$  et  $P \in [-\pi; \pi[$ . Dans ce second cas, nous observons bien un comportement diffusif, correctement décrit par l'estimation (2.10) (trait plein).*

où nous avons utilisé  $\int_0^{2\pi} du \sin^2 u = 1/2$ , et l'énergie cinétique moyenne s'écrit donc :

$$\langle E_t \rangle - \langle E_0 \rangle = \frac{1}{2} D_{cl} t. \quad (2.10)$$

avec  $D_{cl} \approx K^2/2$ . Nous trouvons donc bien un comportement diffusif, dont le taux évolue comme le carré de l'intensité des pulses. Comme le montre la figure 2.5, l'estimation (2.10) est très bonne pour les "grandes" valeurs de  $K$ , e.g.  $K = 40$ . En revanche, pour des valeurs plus "petites", l'estimation est moins fiable, car les variables  $X$  et  $P$  ne peuvent pas être supposées totalement aléatoires. La prise en compte des corrélations entre les pulses successifs permet ainsi d'affiner l'estimation de  $D_{cl}$  [15, 80]

$$D_{cl} = \frac{K^2}{2} \{1 - 2J_2(K) + 2J_2^2(K)\}, \quad (2.11)$$

où  $J_2$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 2. Par rapport à (2.10), l'équation (2.11) comporte en plus une partie oscillante qui s'amortit au fur et à mesure que  $K$  augmente.

Revenons maintenant à la distribution en impulsion d'un ensemble de particules  $\rho(P, t)$ , dont nous souhaitons aussi déterminer l'évolution. Sur la figure 2.6. nous considérons une distribution initiale de forme gaussienne. Au cours du temps, cette distribution s'étale, mais elle garde sa forme gaussienne

$$\rho(P, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle P_t^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{P^2}{2 \langle P_t^2 \rangle}\right), \quad (2.12)$$

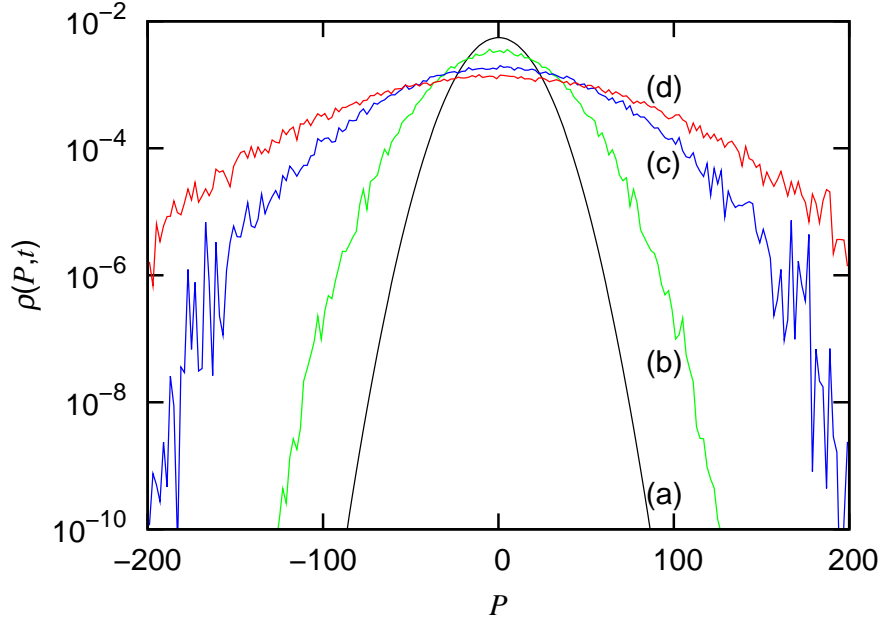


FIG. 2.6 – Evolution de la distribution en impulsion d'un ensemble de  $4 \times 10^6$  particules classiques, pour  $K = 10$ , à différents instants : (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 10$ ; (c)  $t = 50$  et (d)  $t = 100$  pulses. La distribution, représentée en échelle semi-logarithmique, diffuse tout en restant gaussienne.

où  $\langle P_t^2 \rangle$  est la variance, donnée au facteur 2 près par l'énergie cinétique (cf. Eq. (2.10)). De façon asymptotique, i.e. pour  $t \gg 1$ , nous pouvons supposer que le terme linéaire de (2.10) est prépondérant, i.e.  $\langle P_t^2 \rangle \approx D_{cl}t \gg \langle P_0^2 \rangle$ , et donc que la distribution en impulsion s'écrit approximativement

$$\rho(P,t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{cl}t}} \exp\left(-\frac{P^2}{2D_{cl}t}\right). \quad (2.13)$$

Nous verrons dans la suite que la conservation de la forme gaussienne est caractéristique de la dynamique classique, et qu'elle ne se retrouve pas au niveau quantique.

**Modes accélérateurs.** Nous avons vu que pour les “grandes” valeurs de  $K$ , l'espace des phases est essentiellement chaotique. Cependant, même pour  $K \gg 1$ , subsistent de petits îlots de résonance (cf. Fig. 2.7), dont nous pouvons expliquer l'existence grâce à l'exemple suivant. Prenons  $K = 2\pi$  et les conditions initiales ( $X_0 = \pi/2, P = 0$ ). Dans ce cas, le rotateur est immobile jusqu'au premier pulse, qui lui communique un moment cinétique égal à  $K$ . Le rotateur se met donc à tourner ; et lorsque le second pulse est appliqué, comme il se trouve de nouveau en  $X_2 = \pi/2$ , il reçoit de nouveau un moment cinétique égal à  $K$ . Il est de même à chaque pulse, de tel sorte que le moment cinétique augmente linéairement avec le temps, i.e.

$$P_t - P_0 = 2\pi\ell t, \quad (2.14)$$

où le raisonnement précédent a été généralisé à  $K = 2\pi|\ell|$ , avec  $\ell \neq 0$ .<sup>2</sup> L'énergie cinétique augmente donc quadratiquement avec le temps, ce qui est caractéristique d'un

<sup>2</sup>L'entier  $\ell$  est positif, si  $X_0 = \pi/2$ , ou négatif, si  $X_0 = -\pi/2$ .

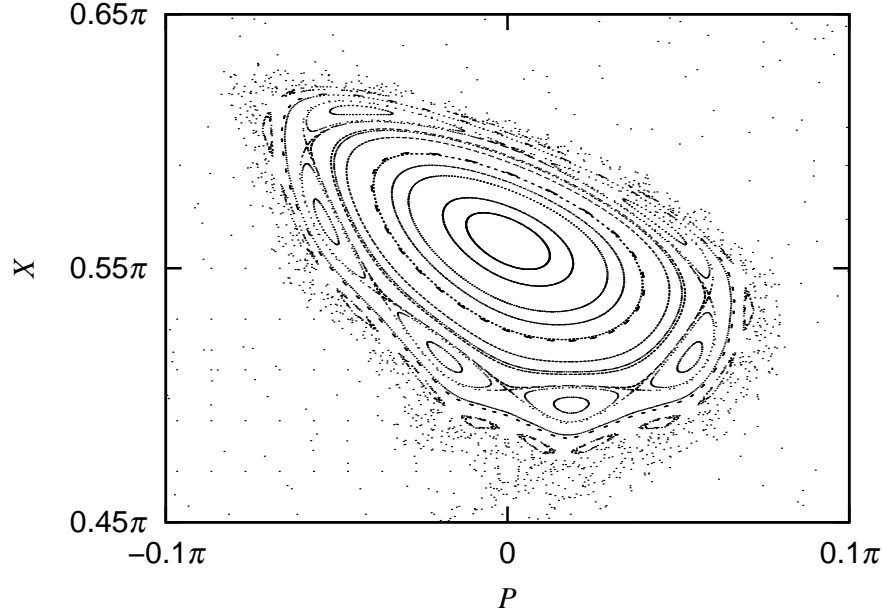


FIG. 2.7 – Mode accélérateur  $\ell = 1$  tracé pour  $K = 6,4$ . Le centre de l'îlot est donné par  $P = 0$  et  $X = \pi - \arcsin(2\pi/6,4) \simeq 0,56\pi$ . Ce mode apparaît pour  $K = 2\pi$  et disparaît par doublement de période pour  $K \simeq 7,45$ .

comportement *ballistique*. De façon générale, cette dynamique balistique ne se produit pas uniquement pour  $K = 2\pi\ell$  et  $X = \pm\pi/2$ , mais pour tout couple  $(K, X)$  tel que  $P_t = P_{t-1} + 2\pi\ell$ , c'est-à-dire que

$$K \sin X = 2\pi\ell. \quad (2.15)$$

Pour une valeur de  $\ell$  donnée (disons positive), le comportement balistique apparaît donc en  $(X = \pi/2, P = 0)$  pour  $K = 2\pi\ell$ . Puis, lorsque  $K$  augmente, la quantité  $\sin X$  tend vers 0, ce qui signifie qu'il existe deux solutions à l'équation (2.15), *même pour les "grandes" valeurs de  $K$* .

Cependant, pour observer la ballisticité, il faut que les points voisins de celui défini par l'équation (2.15) aient aussi un comportement balistique, ce qui est le cas sur la figure 2.7. Nous y voyons un petit îlot de stabilité au milieu de la mer stochastique, îlot dont le centre, donné par (2.15) et  $P = 0$ , a un comportement rigoureusement balistique. Autour de ce point centre, s'enroulent des trajectoires animées du même mouvement balistique, et d'un mouvement d'oscillation supplémentaire. L'ensemble de ces trajectoires constitue un *mode accélérateur*, dont l'existence peut être déterminée par analyse de stabilité (cf. annexe D, section D.4). Ainsi, pour une valeur de  $\ell$  donnée, existe-t-il un mode accélérateur pour

$$2\pi|\ell| \leq K \leq \sqrt{16 + 4\pi^2\ell^2}, \quad (2.16)$$

la disparition de l'îlot se faisant par doublement de période. Même si des modes accélérateurs peuvent apparaître pour une valeur arbitrairement grande de  $K$ , il convient de préciser que leur taille diminue à mesure que  $K$  augmente (cf. Eq. (5.56) de la référence [15]). Notons pour finir que nous ferons référence aux modes accélérateurs et à leur ballisticité dans le chapitre 4.

Dans cette section, nous avons caractérisé la dynamique du rotateur pulsé classique en fonction du paramètre de stochasticité  $K$  et des conditions initiales. En traçant des portraits de phase, nous avons en particulier constaté l'existence de régions chaotiques dans l'espace des phases. Celles-ci apparaissent à la frontière entre les îlots de résonance et les trajectoires passantes, car à cet endroit, le système est très sensible au moindre changement de ses conditions initiales. Pour des valeurs suffisamment élevées de  $K$ , le chaos est dit à grande échelle, c'est-à-dire qu'il occupe la majorité de l'espace des phases. Dans l'annexe D, nous montrons comment quantifier la "force" de ce chaos en calculant les exposants de Lyapunov. Nous avons aussi observé qu'en régime chaotique, l'énergie cinétique a un comportement diffusif, c'est-à-dire qu'elle augmente linéairement avec le temps. Toutes ces caractéristiques vont nous servir de base dans la section suivante, afin de comparer les dynamiques classique et quantique.

## 2.2 Le rotateur pulsé quantique

Nous nous intéressons maintenant au rotateur pulsé quantique (RPQ). Dans le cadre du chaos quantique, la question principale est de savoir si la sensibilité aux conditions initiales observée classiquement laisse une "signature" sur la dynamique quantique. En nous plaçant dans un gamme de paramètre correspondant au chaos classique généralisé ( $K \gtrsim 5$ ), nous allons montrer que l'énergie cinétique n'a pas un comportement asymptotique diffusif, mais qu'elle finit par saturer. En réalisant une analyse de Floquet de notre système, nous verrons que l'ampleur de ce phénomène de *localisation dynamique* dépend, en plus de  $K$ , d'un paramètre de "quanticité"  $\hbar$ , que l'on peut faire varier expérimentalement (cf. chapitre 1). Enfin, basée sur les propriétés de symétrie du RPQ, la sous-section 2.2.3 en donne une description dans l'espace des positions.

### 2.2.1 Dynamique quantique

Le dynamique du rotateur est caractérisée par son vecteur d'état  $|\Psi(t)\rangle$ , qui évolue selon l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (2.17)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite (cf. Eq. (1.26)) et  $\hat{H}(t)$  la version quantifiée de l'hamiltonien (2.1)

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{P}^2}{2} + K \cos \hat{X} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - n). \quad (2.18)$$

Compte tenu de la périodicité temporelle de (2.18), nous allons chercher une relation entre le vecteur d'état après  $t$  pulses et celui après  $(t - 1)$  pulses. Nous obtiendrons ainsi une relation de récurrence qui est l'équivalent quantique de l'application standard (2.4) et (2.5).

#### 2.2.1.1 De l'opérateur d'évolution à la quasi-impulsion

Pour établir cette relation entre deux vecteurs d'état successifs, nous allons introduire l'*opérateur d'évolution* entre les deux instants considérés. Comme l'hamiltonien

(2.18) est périodique dans le temps, l'opérateur évolution entre deux pulses successifs est indépendant du temps. Par ailleurs, comme (2.18) est aussi périodique dans l'espace, il ne couple que des états d'impulsion régulièrement espacés, ce qui nous permettra d'introduire la quasi-impulsion, qui est une constante du temps.

**Périodicité temporelle et opérateur d'évolution.** Ainsi donc, les vecteurs  $|\Psi(t)\rangle$  et  $|\Psi(t-1)\rangle$  sont simplement liés par la relation

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t-1) |\Psi(t-1)\rangle, \quad (2.19)$$

avec  $\hat{U}(t, t-1)$  l'opérateur d'évolution entre les pulses  $(t-1)$  et  $t$ , donné par

$$\hat{U}(t, t-1) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t-1}^t dt' \hat{H}(t')\right). \quad (2.20)$$

Comme  $\hat{H}(t)$  est périodique, l'opérateur  $\hat{U}(t, t-1)$  ne dépend pas de  $t$  : il sera donc par la suite écrit  $\hat{U}$ . Ainsi l'équation (2.20) s'écrit-elle jusqu'à  $t=0$

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\Psi(t=0)\rangle. \quad (2.21)$$

Comme les pulses sont supposés instantanés, nous pouvons négliger la propagation libre pendant leur application. Cela revient à supposer que le vecteur d'état est d'abord soumis à l'opérateur de propagation libre  $\hat{U}_{libre}$ , puis à l'opérateur de pulse  $\hat{U}_{pulse}$ . L'équation (2.20) peut ainsi être factorisée

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{U}_{pulse} \times \hat{U}_{libre} \\ &= \exp\left(-i\frac{K}{\hbar} \cos \hat{X}\right) \times \exp\left(-i\frac{\hat{P}^2}{2\hbar k}\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

où nous rappelons que l'ordre chronologique s'écrit de droite à gauche.

L'équation (2.22) est l'équivalent quantique de l'application standard (2.4) et (2.5). Elle apparaît sous la forme d'un produit de deux opérateurs, le premier,  $\hat{U}_{libre}$ , étant diagonal en représentation  $P$ , et le second,  $\hat{U}_{pulse}$ , étant diagonal en représentation  $X$ . Le calcul numérique de  $|\Psi(t)\rangle$  en fonction de  $|\Psi(t-1)\rangle$  comporte donc les étapes suivante :

- exprimer le vecteur d'état en représentation  $P$  :  $\tilde{\psi}(P, t-1) = \langle P | \Psi(t-1) \rangle$  ;
- appliquer l'opérateur  $\hat{U}_{libre}$  ;
- prendre la transformée de Fourier inverse pour arriver à  $\psi(X, t^-)$ , juste avant le pulse  $t$  ;
- appliquer l'opérateur  $\hat{U}_{pulse}$  ;
- enfin, prendre la transformée de Fourier pour obtenir  $\tilde{\psi}(P, t)$ .

Cette méthode simple et rapide est répétée  $t$  fois pour exprimer le vecteur d'état en fonction des conditions initiales.

**Périodicité spatiale et quasi-impulsion.** En plus de sa périodicité temporelle, l'hamiltonien (2.18) est  $2\pi$ -périodique en  $X$  (Rappelons que  $X \in ]-\infty; +\infty[$ ). Pour comprendre l'effet de cette périodicité spatiale, nous écrivons l'opérateur d'évolution (2.22) en représentation  $P$ . En décomposant  $P$  en les parties entière et fractionnaire de  $\hbar k$ , i.e.

$$P = \hbar k (n + \beta), \quad (2.23)$$

où  $n$  est un entier relatif et  $\beta$  un réel compris entre  $-1/2$  et  $1/2$  ( $\beta \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ ), nous aboutissons à l'expression

$$\langle m + \beta | \hat{U} | n + \beta \rangle = (-i)^{m-n} J_{m-n} \left( \frac{K}{\hbar} \right) \exp \left( -i \frac{\hbar}{2} (n + \beta)^2 \right), \quad (2.24)$$

où  $J_\ell$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre  $\ell$ .

Les pulses ne couplent donc que les états d'impulsion distants de  $\ell \hbar$  (avec  $\ell$  entier), et que la quantité  $\beta$ , appelée *quasi-impulsion*, est une constante du mouvement. L'espace des impulsions se divise donc en différentes classes de quasi-impulsions, chacune évoluant indépendamment des autres, suivant l'opérateur

$$\hat{U}_\beta = \exp \left( -i \frac{K}{\hbar} \cos \hat{X} \right) \exp \left( -i \frac{\hbar}{2} (\hat{n} + \beta)^2 \right), \quad (2.25)$$

où  $\hat{n}$  est l'opérateur dont les valeurs propres sont les entiers relatifs, i.e.  $\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle$ , et  $\beta$  un simple paramètre. Ce découpage en classes de quasi-impulsions est particulièrement intéressant du point de vue numérique, car il permet de calculer l'évolution de la distribution en impulsions en traitant une quasi-impulsion à la fois, et non pas toutes en même temps, ce qui réduit la taille des tableaux utilisés. Notons pour terminer que le mouvement de rotation proprement dit correspond au cas où seule la quasi-impulsion nulle existe.

**Mélange incohérent de quasi-impulsions.** A la sortie d'un piège magnéto-optique, les atomes constituent un mélange *incohérent* d'états quantiques purs. En principe, une telle situation ne peut pas être décrite par un vecteur d'état, mais par un opérateur densité. Cependant, le découpage en quasi-impulsions peut nous permettre d'éviter ce formalisme beaucoup plus lourd à implémenter. L'idée pour cela est d'associer à chaque atome du nuage une quasi-impulsion donnée. De plus, pour prendre en compte le caractère incohérent du nuage, nous attribuons, dans la distribution initiale, une phase aléatoire à chaque quasi-impulsion. Concrètement, en fonction de la quasi-impulsion, le vecteur d'état du RPQ s'écrit

$$|\Psi\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(n + \beta) |n + \beta\rangle. \quad (2.26)$$

où  $|n + \beta\rangle$  est le vecteur propre de  $\hat{P}$  correspondant à la valeur propre  $\hbar(n + \beta)$ , et  $\tilde{\psi}(n + \beta)$  est la distribution en impulsion<sup>3</sup>. Dans nos simulations numériques, les distributions initiales seront soit des "fonctions porte" de largeur  $\Delta$

$$\tilde{\psi}(n + \beta) = \begin{cases} \frac{\exp(i\phi(\beta))}{\sqrt{\Delta}} & \text{si } |n + \beta| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{si } |n + \beta| \geq \frac{\Delta}{2}, \end{cases} \quad (2.27)$$

soit des gaussiennes de largeur  $\sigma$

$$\tilde{\psi}(n + \beta) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{(n + \beta)^2}{4\sigma^2} \right) \exp(i\phi(\beta)). \quad (2.28)$$

avec  $\phi(\beta)$  une phase aléatoire identique à l'intérieur d'un même classe de quasi-impulsion. Cette méthode permet de retrouver les résultats expérimentaux sans augmenter de façon prohibitive le temps de calcul numérique.

<sup>3</sup>Dans la suite,  $\tilde{\psi}(n + \beta)$  sera notée  $\tilde{\psi}_\beta(n)$ , lorsque nous nous intéresserons à une quasi-impulsion particulière.



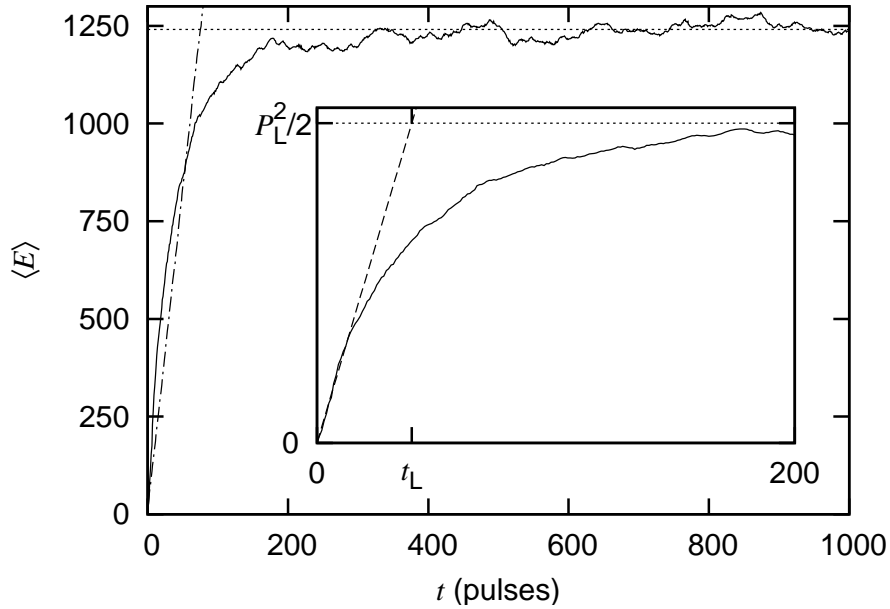


FIG. 2.8 – Saturation de l'énergie cinétique observée pour  $K = 10$  et  $\bar{k} = 2,89$ . La simulation numérique du cas quantique, en traits pleins, est réalisée avec un mélange statistique de 200 quasi-impulsions, afin de réduire les fluctuations. Elle est à comparer avec le résultat classique, en tirets-pointillés. L'insert illustre graphiquement comment sont calculés  $P_L$  et  $t_L$  : un "fit" de la courbe  $\langle E \rangle(t)$  permet de déterminer le palier  $P_L^2$  et sa pente à l'origine  $D_q$ , ce qui, en appliquant la relation (2.29), donne un temps de localisation  $t_L \approx 40$  pulses.

### 2.2.1.2 Localisation dynamique

Dans la section 2.1, nous avons vu que dans le régime classiquement chaotique ( $K \gtrsim 5$ ), l'énergie cinétique moyenne d'un ensemble de particules classiques augmente linéairement en fonction du temps. A présent, nous allons calculer numériquement l'énergie cinétique d'un paquet d'ondes ayant une forme initiale gaussienne de largeur  $\sigma$  accessible expérimentalement. Le résultat de cette simulation, présenté sur la figure 2.8, est très différent du cas classique, présenté sur la figure 2.5. Même si, dans un premier temps, l'énergie cinétique du paquet d'ondes augmente linéairement, elle finit par saturer autour d'une valeur notée  $P_L^2/2$  : la diffusion est alors *gelée*. Cet arrêt de la diffusion se fait après un temps appelé temps de localisation  $t_L$ , défini de la façon suivante. Si nous notons  $D_q/2$  le coefficient de diffusion initiale,  $t_L$  est le temps au bout duquel l'énergie atteindrait son palier si la diffusion initiale persistait ;  $t_L$ ,  $P_L$  et  $D_q$  sont donc liés par la relation

$$t_L = \frac{P_L^2}{D_q}, \quad (2.29)$$

qui est illustrée graphique dans l'insert de la figure 2.8. Pour calculer  $t_L$ , nous évaluons d'abord  $D_q$  à partir des premiers points et  $P_L$  à partir des derniers points de la courbe  $\langle E \rangle(t)$ , après quoi nous appliquons la relation (2.29).

Puisque l'énergie cinétique moyenne n'évolue plus significativement au bout d'un certain temps, nous pouvons supposer qu'il en va de même pour la distribution en impulsion. Contrairement à la distribution classique (cf. Fig. 2.6), qui s'étale en gardant

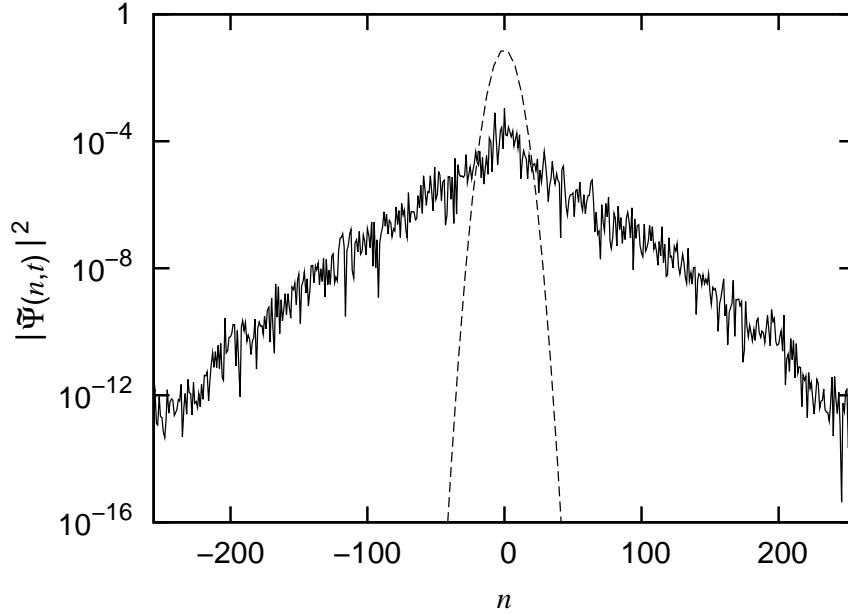


FIG. 2.9 – Localisation dynamique observée sur la distribution en impulsion après 1000 pulses ( $t \gg t_L$ ), pour  $K = 10$ ,  $\bar{k} = 2,89$  et avec 200 quasi-impulsions. Cette courbe en trait plein, à comparer avec la distribution initiale (gaussienne) représentée avec des tirets, présente la forme double-exponentielle caractéristique (et donc triangulaire en échelle semi-logarithmique). Pour diminuer les fluctuations, un lissage est effectué autour des valeurs entières  $n$  de l'impulsion (cf. Eq. (2.23)).

sa forme gaussienne, la distribution en impulsion quantique  $\tilde{\psi}(n + \beta, t)$  stoppe son expansion et prend, pour  $t \gg t_L$ , une forme double-exponentielle

$$\left| \tilde{\psi}(n + \beta, t) \right|^2 \approx \frac{\bar{k}}{P_L} \exp\left(-\frac{\bar{k}|n + \beta|}{2P_L}\right), \quad (2.30)$$

où  $P_L$  est appelée longueur de localisation. Cet arrêt de l'expansion de  $\tilde{\psi}(n + \beta, t)$  est appelé *localisation dynamique* (LD).

Pour toutes les grandeurs ici déterminées numériquement, il existe aussi des estimations analytiques. Ainsi, Shepelyansky [88] a-t-il démontré que le taux de diffusion quantique  $D_q$  est le même que le classique  $D_{cl}$  (cf. Eq. (2.10)), à condition de remplacer  $K$  par  $K_q$ , i. e. :

$$D_q(K) = D_{cl}(K_q), \quad (2.31)$$

avec

$$K_q = K \frac{\sin(\bar{k}/2)}{\bar{k}/2}, \quad (2.32)$$

ce qui donne bien  $D_q(K) \rightarrow D_{cl}(K)$  quand  $\bar{k} \rightarrow 0$ . En ce qui concerne  $P_L$  et  $t_L$ , il est possible d'en donner l'ordre de grandeur, en utilisant les quasi-états de Floquet, présentés dans la sous-section suivante.

## 2.2.2 Quasi-énergies et quasi-états de Floquet

Le rotateur pulsé ayant un hamiltonien dépendant du temps, sa dynamique ne peut pas être décrite en terme d'états propres de l'hamiltonien. Cependant, la périodicité

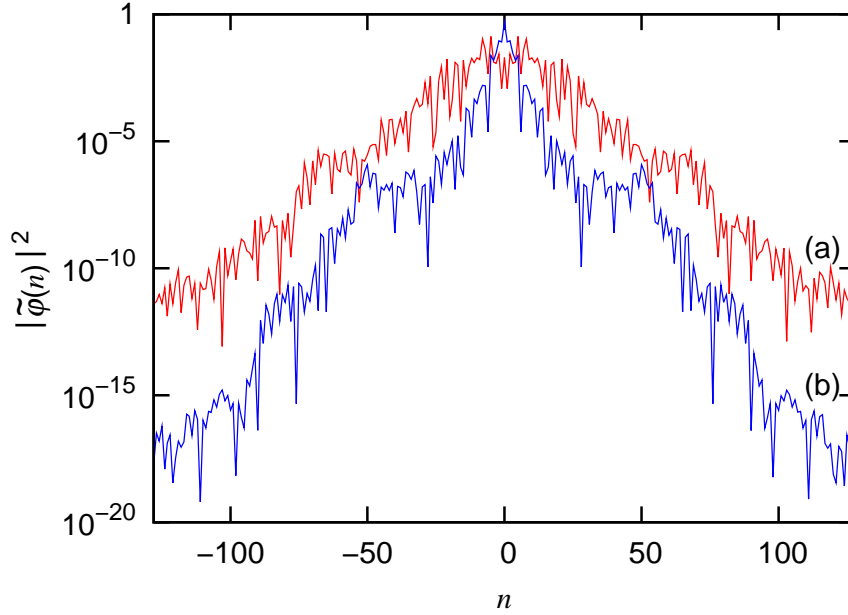


FIG. 2.10 – *Quasi-états de Floquet tracés en fonction de l’impulsion (en échelle semi-logarithmique) pour  $K = 10$  et  $\beta = 0$  : (a) pour  $\bar{k} = 2,89$  et (b) pour  $\bar{k} = 3,46$ . Les deux distributions ont la forme double-exponentielle de la figure 2.9. Celle qui correspond à la valeur la plus élevée de  $\bar{k}$  a une longueur de localisation plus faible, ce qui tend à confirmer que la LD est un phénomène purement quantique.*

temporelle du système rend possible l’existence d’états qui, à un facteur de phase près, restent inchangés après une période. Ils sont appelés *quasi-états de Floquet* ; mathématiquement, ce sont les vecteurs propres, notés  $|\varphi\rangle$ , de l’opérateur d’évolution  $\hat{U}$  :

$$\hat{U} |\varphi\rangle = \exp(-i\varepsilon) |\varphi\rangle,$$

où  $\varepsilon$ , définie à  $2\pi$  près, est appelée *quasi-énergie*. La différence majeure avec les systèmes stationnaires est que les  $|\varphi\rangle$  ne nous permettent d’évaluer la dynamique qu’à des instants discrets, multiples de la période des pulses.

Pour expliquer la localisation dynamique, nous diagonalisons l’opérateur  $\hat{U}_\beta$  dans la base des états d’impulsion  $\{|P\rangle = |n + \beta\rangle\}$  ;<sup>4</sup> les résultats du calcul sont les suivants :

- les quasi-énergies  $\varepsilon_j$  forment un spectre discret, et elles sont réparties de façon “pseudo-aléatoire” sur l’intervalle  $[0; 2\pi[$  ;
- des états propres sont localisés en impulsion, et ont une forme de double-exponentielle, i. e.  $|\tilde{\varphi}_j(n)|^2 \sim \exp\left(-\frac{|n|}{2l}\right)$  (cf. Fig. 2.10).<sup>5</sup>

Ces deux propriétés remarquables des quasi-états de Floquet vont nous permettre d’expliquer la localisation dynamique. En effet, le caractère discret du spectre de quasi-énergies empêche la diffusion (qui nécessite un spectre continu) ; leur répartition aléatoire provoque la saturation de l’énergie ; enfin, la forme double-exponentielle de la distribution en impulsions se retrouve dans la distribution en impulsion du système.

<sup>4</sup>Les éléments de matrice de  $\hat{U}_\beta$  dans la base  $\{|n + \beta\rangle\}$  sont données par l’équation (2.24).

<sup>5</sup>Cette expression est valable pour les quasi-états centrés autour de  $n = 0$ , qui sont les seuls significativement excités dans nos expériences.

Pour s'en convaincre, considérons l'état initial  $|\Psi(t=0)\rangle$  de la figure 2.9, typique des expériences, et décomposons-le sur les quasi-états de Floquet

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_j c_j |\varphi_j\rangle, \quad (2.33)$$

avec  $\sum_j |c_j|^2 = 1$ . En rappelant que

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j c_j e^{-i\varepsilon_j t} |\varphi_j\rangle, \quad (2.34)$$

nous écrivons  $\langle E \rangle(t)$  comme étant

$$\begin{aligned} \langle \hat{E} \rangle(t) &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_k^* c_j e^{-i(\varepsilon_j - \varepsilon_k)t} \langle \varphi_k | \hat{P}^2 | \varphi_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_j |c_j|^2 \langle \varphi_j | \hat{P}^2 | \varphi_j \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} c_k^* c_j e^{-i(\varepsilon_j - \varepsilon_k)t} \langle \varphi_k | \hat{P}^2 | \varphi_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

La répartition aléatoire des quasi-énergies produit peu à peu un effet d'interférences destructives qui rend le second terme de (2.35) petit devant le premier. Aux temps longs, le deuxième terme n'apporte que des fluctuations résiduelles autour de valeur asymptotique  $P_L^2/2$  telle que

$$P_L^2 \approx \sum_j |c_j|^2 \langle \varphi_j | \hat{P}^2 | \varphi_j \rangle. \quad (2.36)$$

Pour estimer le temps  $t_L$  au bout duquel est atteint ce palier, nous utilisons la forme particulière des quasi-états de Floquet.

En effet, comme ils sont localisés en impulsion, nous supposons que l'état initial  $|\Psi(t=0)\rangle$  ne se recouvre significativement qu'avec un nombre limité  $N_\Psi$  de quasi-états. Comme les quasi-énergies sont comprises entre  $-\pi$  et  $\pi$ , nous supposons aussi que les  $N_\Psi$  quasi-énergies correspondant aux quasi-états excités sont en moyenne séparées par la distance  $\bar{\omega} \approx \frac{2\pi}{N_\Psi}$ . La localisation dynamique se produit quand les différentes quasi-énergies ont été "résolues", c'est-à-dire quand se ressent le caractère discret de leur spectre. Le temps de localisation  $t_L$  est donc de l'ordre de

$$t_L \sim \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \approx N_\Psi. \quad (2.37)$$

Par ailleurs, comme en représentation  $P$ , les quasi-états de Floquet sont distants de la quantité  $\bar{k}$ , les  $N_\Psi$  quasi-états excités se répartissent sur un intervalle égal à la longueur de localisation  $P_L$ , ce qui donne

$$P_L \sim N_\Psi \bar{k}. \quad (2.38)$$

Enfin, en rappelant la définition (2.29) de  $t_L$  et en combinant (2.37) et (2.38) afin d'éliminer  $N_\Psi$ , nous obtenons les ordres de grandeurs suivants

$$t_L \sim \frac{P_L}{\bar{k}} \sim \frac{D_q(K)}{\bar{k}^2} \sim \frac{K^2}{\bar{k}^2}. \quad (2.39)$$

Nous retrouvons la tendance observée sur la figure 2.8 :  $t_L$  et  $P_L$  tendent à diminuer quand le paramètre de quanticité  $\tilde{k}$  augmente. Toutefois, cette tendance est à nuancer, car les oscillations de  $D_q(K)$  se retrouvent dans  $t_L$  et  $P_L$ .

L'étude des états propres de l'opérateur d'évolution sur une période des pulses, que l'on appelle les quasi-états de Floquet, permet donc d'expliquer l'apparition de la localisation dynamique. Celle-ci est en fait un phénomène d'interférences destructives, qui se produit car les quasi-énergies sont quantifiées et réparties "pseudo-aléatoirement". Après la localisation, la distribution en impulsion du rotateur prend une forme double-exponentielle, qui est précisément celle des quasi-états de Floquet. Les quasi-états nous permettent aussi d'évaluer les ordres de grandeur du temps et de la longueur de localisation en fonction des paramètres expérimentaux  $K$  et  $\tilde{k}$ .

### 2.2.3 Rotateur pulsé quantique dans l'espace des positions

Terminons ce chapitre en présentant la modélisation du RPQ dans l'espace des positions. Nous établirons ainsi des définitions et des relations que nous reprendrons au Chapitre 4. Pour cela nous commençons par projeter le vecteur d'état  $|\Psi\rangle$  sur  $|X\rangle$ , vecteur propre de l'opérateur position, ceci en tenant compte de l'équation (2.26). Nous obtenons ainsi  $\psi(X) = \langle X | \Psi \rangle$ , donnée par

$$\begin{aligned} \psi(X) &= \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_\beta(n) \langle X | n + \beta \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} d\beta e^{i\beta X} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_\beta(n) e^{inX}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

où nous avons utilisé la relation

$$\langle X | n + \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i(n + \beta)X). \quad (2.41)$$

Le paquet d'ondes  $\psi(X)$  s'écrit donc comme la superposition

$$\psi(X) = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \psi_\beta(X), \quad (2.42)$$

avec  $\psi_\beta(X)$

$$\psi_\beta(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta X} \sum_n \tilde{\psi}_\beta(n) e^{inX}, \quad (2.43)$$

composée d'un terme de phase  $e^{i\beta X}$  multiplié par une fonction  $2\pi$ -périodique  $u_\beta(X) = \sum_n \tilde{\psi}_\beta(n) e^{inX}$ . Cette forme nous évoque les fonctions d'ondes décrivant l'état électronique dans un cristal parfait ; par analogie, nous appelons  $\psi_\beta$  l'onde de Bloch (OB) de quasi-impulsion  $\beta$  [55]. Dans le chapitre 4, nous retiendrons la description du système donnée par les fonctions  $\tilde{\psi}_\beta(X)$ , car elles s'avèrent particulièrement simples à manipuler, notamment pour calculer les moyennes d'observables telles que l'impulsion ou énergie cinétique.

Les  $\tilde{\psi}_\beta(n)$  étant les coefficients de Fourier de la fonction  $u_\beta = e^{-i\beta X} \psi_\beta$ , nous pouvons "inverser" (2.43) et définir  $\tilde{\psi}_\beta(n)$  par :

$$\tilde{\psi}_\beta(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{-i(n+\beta)X} \psi_\beta(X). \quad (2.44)$$

Enfin, en rappelant que  $\tilde{\psi}_\beta(n)$  est la transformée de Fourier inverse de  $\psi(X)$ , i.e.  $\tilde{\psi}_\beta(n) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dX e^{-i(n+\beta)X} \psi(X)$  (les bornes sont bien infinies), nous exprimons  $\psi_\beta(X)$  en fonction de  $\psi(X)$  :

$$\psi_\beta(X) = \sum_q e^{i2\pi q\beta} \psi(X - 2\pi q). \quad (2.45)$$

La conservation de la quasi-impulsion engendre donc des propriétés remarquables dans l'espace des positions. Chaque classe de quasi-impulsion y est représentée par une onde de Bloch qui, bien que définie dans tout l'espace des positions, contient toute l'information sur la classe de quasi-impulsion donnée dans un intervalle ne couvrant qu'une seule période de potentiel. Nous verrons au Chapitre 4 que ces ondes de Bloch sont particulièrement bien adaptées pour décrire les résonances quantiques du RPQ.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre de présentation, nous avons vu que le rotateur pulsé est un excellent candidat pour l'étude du chaos quantique. En effet, sa version classique présente du chaos, qui pour des pulses suffisamment forts, occupe la quasi-totalité de l'espace des phases. Dans cette gamme de paramètre, le rotateur pulsé quantique ne présente pas de sensibilité aux conditions initiales, mais une signature bien connue, la localisation dynamique. Etant basée sur des interférences destructives, la localisation dynamique peut être partiellement détruite la décohérence ; ce point fera l'objet du chapitre 3. Par ailleurs, du fait de ses propriétés de symétrie, le RPQ présente aussi des phénomènes qui lui sont propres, comme les modes accélérateurs classiques ou les résonances quantiques, dont l'étude fera l'objet du chapitre 4.



# Chapitre 3

## Réduction de l'effet de l'émission spontanée sur le rotateur pulsé

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le rotateur pulsé quantique (RPQ) présente des phénomènes remarquables, tels que le gel de la diffusion dans l'espace des impulsions, appelé *localisation dynamique* (LD). Ce phénomène étant dû à des *interférences destructives*, il n'est pas observable classiquement. Comme tout phénomène d'interférence, la LD est très sensible à la *décohérence*, pouvant ainsi être partiellement détruite, auquel cas la diffusion en impulsion ne s'arrête pas totalement. Dans une expérience d'atomes froids, la principale source de décohérence est l'*émission spontanée* (ES), dont le taux peut être largement ajusté, mais dont on ne peut pas totalement s'affranchir. L'objet de ce chapitre est de présenter une méthode qui permet de minimiser les effets de l'ES, et ainsi de *restaurer partiellement* la LD.

L'idée, pour cela, est de séparer les atomes qui ont subi de l'ES, et qui contribuent donc à la diffusion dans l'espace des impulsions, et les atomes qui n'en ont pas subi, et qui contribuent donc à la LD. Ces derniers n'ayant interagi avec les faisceaux de l'onde stationnaire que par émission stimulée, leur impulsion suivant l'axe des faisceaux ne peut varier que d'une quantité multiple de deux impulsions de recul (cf. Fig. 3.1 (a)). A l'inverse, lors d'une émission spontanée, le photon émis l'est dans une direction *aléatoire* ; donc l'impulsion de l'atome suivant l'axe des faisceaux varie d'une quantité *non* multiple de deux impulsions de recul (cf. Fig. 3.1 (b)). Donc, si nous considérons une distribution initiale en impulsion très fine et centrée en zéro, la partie cohérente de la dynamique, i.e. le potentiel sinusoïdal, va peupler des états d'impulsions séparés de deux impulsions de recul, alors que la partie incohérente, i.e. l'émission spontanée, va peupler les autres états d'impulsion. Pour s'affranchir, au moins en partie, de l'émission spontanée, il semble donc judicieux, pour calculer l'énergie cinétique moyenne ou la distribution en impulsion, de ne tenir compte que des atomes occupant ces états d'impulsions particuliers. Une telle sélection d'impulsions est réalisable expérimentalement grâce à la spectroscopie Raman, présentée dans la section 1.4, qui permet d'isoler une classe d'impulsion dont la largeur peut descendre jusqu'au cinquantième de la zone de Brillouin [13].

Dans ce chapitre, nous allons étudier, numériquement et analytiquement, la dynamique d'un nuage d'atomes froids auquel est appliquée une sélection de vitesses de type Raman, en nous intéressant principalement à l'évolution temporelle de l'énergie cinétique moyenne. Dans la section 3.1, nous étudierons l'influence de la seule émission spontanée, i.e. sans sélection de vitesses : nous expliquerons comment la modéliser



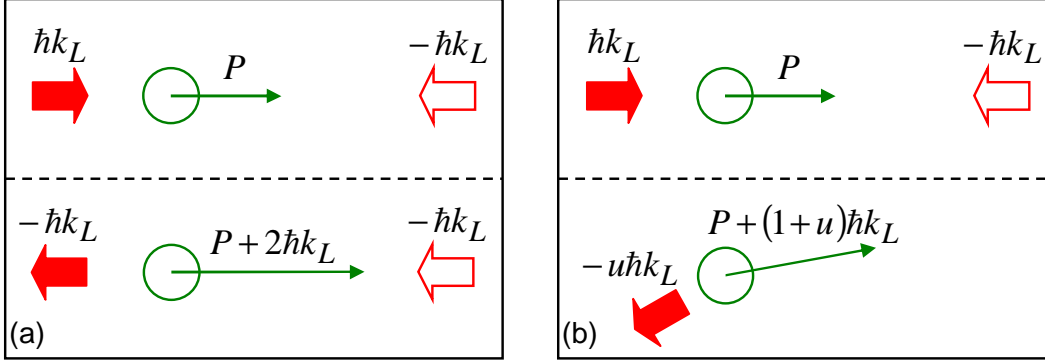


FIG. 3.1 – Schéma illustrant l'évolution de l'impulsion  $P$  suivant l'axe des faisceaux laser, pendant un cycle d'absorption-émission. Dans le cadre (a), il s'agit d'une émission stimulée : l'atome absorbe le photon venant de la gauche (flèche pleine), puis émet de façon stimulée, un photon vers la gauche. Au total, son impulsion varie de  $2\hbar k_L$  ( $\hbar$  en unités réduites, cf. Eq. (1.26)). Le cadre (b) représente une émission spontanée : contrairement à (a), le photon est émis dans une direction aléatoire, et son impulsion suivant l'axe des faisceaux vaut  $-u\hbar k_L$  (avec  $u < 1$ ). L'impulsion de l'atome varie donc de  $(1+u)\hbar k_L$ , qui n'est, en général, pas un multiple de  $2\hbar k_L$ .

dans nos simulations, puis nous calculerons son influence sur l'énergie cinétique. Ensuite, dans la section 3.2, nous ajouterons la sélection de vitesses, dont nous étudierons l'impact, d'abord numériquement, puis à l'aide d'un modèle analytique simple.

### 3.1 Rotateur pulsé et émission spontanée

La formulation la plus simple de la mécanique quantique est basée sur le concept de vecteur d'état, dont la dynamique est régie par l'équation de Schrödinger [18]. Le vecteur d'état permet de caractériser un état pur, tout à fait adapté pour décrire un système quantique isolé. En revanche, le vecteur d'état ne permet pas de décrire un système couplé à son *environnement*, par exemple l'ensemble des modes du champ électro-magnétique. Le système doit alors être décrit par l'opérateur densité [32], qui peut notamment modéliser des mélanges statistiques d'états quantiques [21], pour lesquels la cohérence quantique est partiellement ou totalement détruite. L'émission spontanée d'un photon par un atome est l'un de ces phénomènes. En effet, contrairement à l'émission stimulée, le photon est émis dans une direction aléatoire, et l'atome subit une destruction de sa cohérence.

Cependant, pour des simulations numériques, l'inconvénient est que, dans un espace de Hilbert à  $N$  dimensions, l'opérateur densité comporte  $N^2$  éléments de matrice, alors que le vecteur d'état n'en comporte que  $N$ . Des techniques, dites de Monté-Carlo quantique, ont donc été développées, afin de décrire un système ouvert avec à l'aide d'un vecteur d'état [22, 28, 69]. Sa dynamique n'est alors plus régie par l'équation de Schrödinger habituelle, mais par une équation de Schrödinger *stochastique*, i.e. contenant une ou plusieurs variables aléatoires. C'est cette méthode que nous allons utiliser pour simuler l'émission spontanée dans le rotateur pulsé quantique. Dans la sous-section 3.1.1, nous verrons que les propriétés de symétrie du RPQ nous permettront de modéliser l'ES de façon particulièrement simple. Puis, dans les sous-sections 3.1.2 et 3.1.3,

nous étudierons son effet sur l'énergie cinétique du RPQ, dans le cas d'une seule puis d'une succession de cycles de fluorescence (CF).

### 3.1.1 Modélisation de l'émission spontanée

L'émission spontanée, dans le rotateur pulsé quantique, est provoquée par les pulses laser qui créent le potentiel sinusoïdal. Le taux d'ES par seconde  $\Gamma$  (cf. Eq. (1.14)) est fonction du désaccord  $\delta_L$  entre la fréquence de ces faisceaux et la fréquence de la transition atomique. Intégré sur toute la durée  $\tau$  d'un pulse, ce taux définit la probabilité qu'à un atome de subir une ES pendant un pulse. En fonction des paramètres du problème, cette probabilité, notée  $\Pi$ , s'écrit

$$\Pi = \frac{\Gamma_0 \Omega_R^2 \tau}{4\delta_L^2}, \quad (3.1)$$

où  $\Gamma_0$  est la largeur naturelle de la transition atomique et  $\Omega_R$  sa fréquence de Rabi (cf. sous-section 1.3.1). Expérimentalement, la probabilité  $\Pi$  peut être abaissée jusqu'à des valeurs de l'ordre de  $10^{-3}$  [61]. Pour tenir compte de cet aspect probabiliste dans nos simulations, à chaque itération, nous tirons au hasard un nombre  $\zeta$  compris entre 0 et 1, et nous considérons que l'ES se produit à condition que

$$0 \leq \zeta < \Pi. \quad (3.2)$$

Si elle a effectivement lieu, l'émission spontanée est précédée d'une absorption qui fait passer l'atome dans son état excité. Pour décrire la dynamique de l'atome, il faut donc a priori tenir compte de ce degré de liberté interne<sup>1</sup>. Toutefois, comme il est montré dans la référence [3], la prise en compte de l'état excité n'apporte pas d'amélioration majeure à la description du RPQ. Nous allons donc directement étudier l'impact de l'ES sur la dynamique du niveau fondamental, en cherchant tout particulièrement à évaluer l'impulsion de recul encaissée par l'atome dans la direction des faisceaux laser.

Comme le photon émis spontanément peut avoir n'importe quelle direction de propagation, l'atome subit une variation d'impulsion qui, projetée sur l'axe des faisceaux laser, vaut entre  $-\hbar k_L$  et  $+\hbar k_L$  (cf. Fig. 3.1). L'émission spontanée induit donc une variation d'impulsion  $u\hbar k_L$ , où  $u$  est une seconde variable aléatoire, comprise entre  $-1$  et  $+1$ . Dans nos simulations, nous faisons l'hypothèse simplificatrice que toutes les valeurs de  $u$  sont équiprobables<sup>2</sup> [4]. L'émission spontanée étant précédée d'une absorption, l'atome encaisse au préalable une quantité de mouvement égale à  $\pm\hbar k_L$  dans la direction des faisceaux. Supposons, comme sur la figure 3.1 (b), que l'atome absorbe un photon venant de la gauche, son impulsion varie donc de  $+\hbar k_L$ . Sur l'ensemble du cycle de fluorescence, l'impulsion de l'atome varie entre 0 et  $+2\hbar k_L$ . A l'inverse, s'il absorbe un photon venant de la droite, son impulsion varie entre  $-2\hbar k_L$  et 0. La variation d'impulsion d'un atome sur l'intégralité du CF est donc égale à  $2\hbar k_L u'$  ( $\hbar k_L u'$  en unités réduites), où  $u' = u \pm 1$  (<sup>3</sup>) est une variable aléatoire comprise entre  $-1$  et  $+1$ , dont toutes les valeurs sont équiprobables.

<sup>1</sup>Les degrés de liberté internes sont les transitions entre les différents niveaux d'énergie électroniques, alors que les degrés de liberté externes sont les mouvements de translation du centre de masse de l'atome.

<sup>2</sup>En fait, toutes les directions de propagation ont des probabilités différentes, dont l'expression est donnée dans la référence [50].

<sup>3</sup>Le signe (+) correspond au cas où le photon absorbé vient de la gauche, et le (−) à celui où il vient de la droite.

Une fois que la valeur de  $u'$  est connue, nous translatons de la quantité  $\hbar u'$  la distribution en impulsion de l'atome. Bien que cette méthode n'introduise pas de décohérence à proprement parler, elle s'avère efficace pour modéliser l'émission spontanée, à condition de tirer profit des propriétés de symétrie du RPQ. En effet, nous avons vu au chapitre 2 que le RPQ se décompose en différentes classes de quasi-impulsion, qui sont des *constantes du mouvement*. Or, comme le CF fait varier l'impulsion d'une quantité égale à une fraction de  $\hbar$ , la quasi-impulsion n'est alors *plus* constante. Cette brisure de symétrie a pour effet d'introduire la décohérence due à l'ES, car elle empêche les interférences destructives responsables de la localisation dynamique de se développer. Par ailleurs, comme nous modélisons un atome du nuage par une classe de quasi-impulsion, nous n'appliquons un CF donné qu'à une seule classe de quasi-impulsion. Si nous considérons un nombre suffisant de quasi-impulsions dans notre distribution initiale, nous parvenons à rendre compte de l'aspect probabiliste de l'ES : sur  $N$  atomes, il y en a en moyenne  $\Pi N$  qui effectuent un CF à chaque pulse.

En résumé, la modélisation de l'émission spontanée dans le RPQ se fait de façon très simple, grâce aux propriétés de symétrie de ce système. A chaque pulse, en plus d'appliquer le potentiel créé par l'onde stationnaire, nous suivons les étapes suivantes pour chaque classe de quasi-impulsion séparément :

1. Nous tirons au hasard le nombre  $\zeta$  compris entre 0 et 1 : si  $\zeta < \Pi$ , l'émission spontanée a lieu. Dans ce cas, nous passons à l'étape 2, sinon nous appliquons l'opérateur de propagation libre suivant.
2. Nous tirons au hasard le nombre  $u'$ , compris entre  $-1$  et  $+1$ , et nous décalons de  $\hbar u'$  la distribution en impulsion. Cette opération n'étant appliquée qu'à une seule classe de quasi-impulsion, elle revient à décaler cette quasi-impulsion de la quantité  $u'$ .

Une fois que toutes les classes de quasi-impulsion ont été traitées, les quantités calculées, i.e. énergie cinétique et distribution en impulsion, sont moyennées sur la quasi-impulsion. Dans les deux prochaines sous-sections, nous allons précisément évaluer l'impact de l'ES sur ces deux quantités accessibles expérimentalement.

### 3.1.2 Effet d'une seule émission spontanée

Pour cela, nous commençons par faire une simulation numérique pour laquelle un seul CF se produit au temps  $t_{es} = 200$  pulses. Le résultat de cette simulation est présenté sur la figure 3.2, où l'énergie cinétique est tracée en fonction du temps. Pour  $t < 200$  pulses, nous observons bien évidemment la localisation dynamique, comme sur la figure 2.8 ; puis à  $t = 200$  pulses, nous voyons que la diffusion reprend avec un taux proportionnel à la probabilité d'émission spontanée  $\Pi$ . Ensuite, une seconde localisation dynamique se produit après un intervalle de temps semblable à la première localisation, et une longueur de localisation également proportionnelle à  $\Pi$ .

Pour comprendre ce résultat, nous simplifions le problème, en supposant qu'entre  $t = 0$  et  $t = t_{es} - 1$ , le système est dans le quasi-état de Floquet  $|\varphi_{j_1}(\beta_1)\rangle$  de quasi-impulsion  $\beta_1$  (cf. sous-section 2.2.2). A  $t = t_{es}$ , la quasi-impulsion du système passe de la valeur  $\beta_1$  à la valeur  $\beta_2$ , i.e.  $\beta_2 = \beta_1 + u'$  <sup>(4)</sup>, et sa distribution en impulsion est translatée de  $\hbar u'$ . Dans la nouvelle classe de quasi-impulsion  $\beta_2$ , le système n'est plus

<sup>4</sup>Dans ce cas,  $\beta_2$  n'est pas nécessairement comprise entre  $-1/2$  et  $+1/2$ .

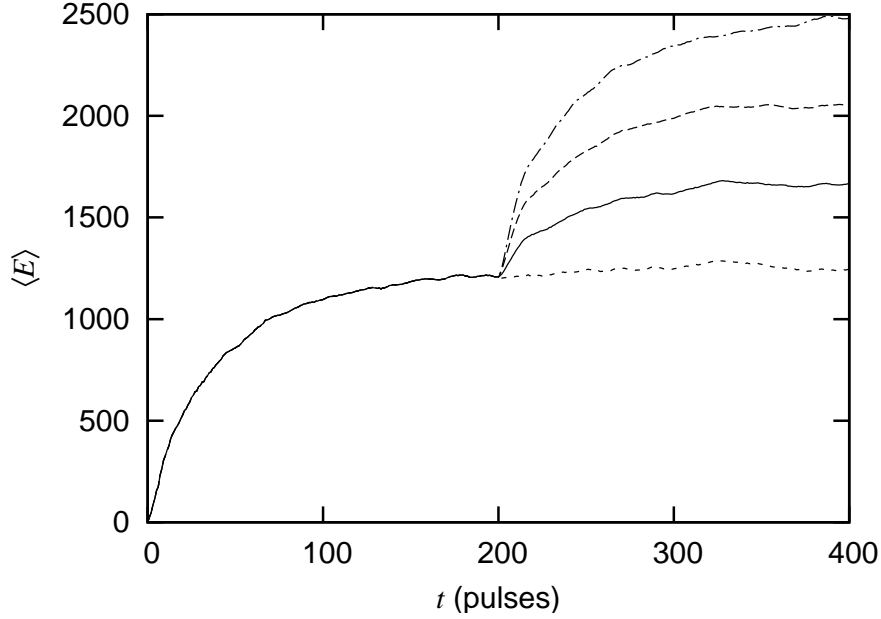


FIG. 3.2 – *Effet sur l'énergie cinétique d'un cycle de fluorescence se produisant à  $t_{es} = 200$  pulses, avec différentes probabilités d'émission spontanée par pulse :  $\Pi = 1/3$  en traits pleins,  $\Pi = 2/3$  en tirets et  $\Pi = 1$  en tirets-pointillés. L'émission spontanée induit une reprise de la diffusion, avant une nouvelle localisation. Par comparaison, le cas sans émission spontanée ( $\Pi = 0$ ) est représenté en pointillés. Les autres paramètres sont  $K = 10$  et  $\bar{k} = 2,89$ .*

dans un seul mais une superposition de quasi-états de Floquet  $|\varphi_j(\beta_2)\rangle$ , i.e.

$$|\Psi(t = t_{es})\rangle = \sum_j c_j |\varphi_j(\beta_2)\rangle. \quad (3.3)$$

où les  $c_j$  sont les coefficients de recouvrement entre les quasi-états avant et après le cycle de fluorescence<sup>5</sup>

$$c_j = \sum_n \tilde{\varphi}_j^*(n + \beta_2) \tilde{\varphi}_{j_1}(n + \beta_1). \quad (3.4)$$

Nous retrouvons donc, pour  $t \geq t_{es}$ , une situation semblable à celle qui se produit juste après  $t = 0$  : le système se trouve dans une superposition de quasi-états de Floquet, dont chacun évolue suivant sa quasi-énergie  $\varepsilon_j(\beta_2)$ . Ainsi,  $s$  pulses après  $t_{es}$ , l'énergie cinétique a-t-elle évolué de façon analogue à l'équation (2.35) :

$$\begin{aligned} \langle \hat{E} \rangle (t_{es} + s) &= \frac{1}{2} \sum_j |c_j|^2 \langle \varphi_j(\beta_2) | \hat{P}^2 | \varphi_j(\beta_2) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} c_k^* c_j e^{-i(\varepsilon_j(\beta_2) - \varepsilon_k(\beta_2))s} \langle \varphi_k(\beta_2) | \hat{P}^2 | \varphi_j(\beta_2) \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En reprenant les arguments développés dans la sous-section 2.2.2, nous pouvons conclure que le cycle de fluorescence provoque une reprise de la diffusion avec le même taux que

<sup>5</sup>C'est-à-dire relatifs à  $\beta_1$  et  $\beta_2$  respectivement.

le taux initial, et que cette diffusion s'arrête une fois que les différentes quasi-énergies  $\varepsilon_j(\beta_2)$  ont été "résolues", ce qui se produit après un temps égal au temps de la première localisation  $t_L$ .

Bien évidemment, le raisonnement précédent doit être pondéré, car seule une fraction égale à  $\Pi$  des atomes subissent de l'émission spontanée. Le taux de diffusion due à l'ES est donc *le produit du taux de diffusion sans émission spontanée et de la probabilité d'émission spontanée par pulse*. Il est important de noter que nous n'avons tenu compte ici que de la décohérence introduite par l'ES, négligeant ainsi la diffusion due aux échanges d'impulsion avec les photons pendant le CF. Comme, au cours d'un cycle, l'impulsion d'un atome peut au maximum augmenter de  $\hbar$ , cette diffusion est de l'ordre de  $\Pi\hbar$ , ce qui est bien négligeable devant la diffusion par décohérence, de l'ordre de  $\Pi D_q$ .<sup>6</sup>

### 3.1.3 Effet d'une succession d'émissions spontanées

Nous allons maintenant calculer l'effet sur l'énergie cinétique, non pas d'un, mais d'une succession de cycles de fluorescence se produisant à chaque pulse. Comme dans la référence [4], nous allons généraliser le raisonnement précédent, en tenant compte du fait qu'à un instant donné, la diffusion est due à tous les cycles de fluorescence qui se sont produits auparavant. Si nous appelons  $D_0(t)$  le taux de diffusion sans émission spontanée du RPQ<sup>7</sup> et  $N$  le nombre total d'atomes du nuage, nous pouvons reconstituer en moyenne l'historique des ES jusqu'à  $t$  pulses :

- Au pulse numéro  $t$ , il y a  $N\Pi$  atomes qui effectuent un cycle de fluorescence. Ces atomes ont un comportement diffusif identique à celui observé sans ES à  $t = 0$  : ils contribuent donc à la diffusion avec le taux  $D_0(0)$ .
- Au pulse numéro  $t - 1$ , il y a aussi  $N\Pi$  atomes qui ont subi une ES ; mais parmi eux  $N\Pi^2$  en ont subi une autre au pulse numéro  $t$ . Donc seuls  $N\Pi(1 - \Pi)$  atomes ont effectué un CF à  $t - 1$  sans en effectuer un à  $t$ . Ils ont un comportement identique à celui observé sans ES à  $t = 1$  : ils contribuent donc à la diffusion avec le taux  $D_0(1)$ .
- De la même façon, nous pouvons estimer à  $N\Pi(1 - \Pi)^2$  le nombre d'atomes apportant un taux de diffusion  $D_0(2)$ .
- Nous pouvons ainsi remonter jusque  $t = 1$  pulse. Enfin, il reste une fraction d'atomes, estimée à  $N(1 - \Pi)^t$ , qui n'ont pas subi d'ES, et donc, qui apportent la contribution  $D_0(t)$ .

Ainsi le taux de diffusion  $D(t)$  s'exprime-t-il comme la somme des contributions de chaque pulse :

$$D(t) = (1 - \Pi)^t D_0(t) + \Pi \sum_{s=0}^{t-1} (1 - \Pi)^s D_0(s). \quad (3.6)$$

Malgré la forme générale de l'équation (3.6), nous voyons d'ores et déjà que même pour les "grandes" valeurs de  $t$ ,  $D(t)$  ne s'annule pas, et donc que la localisation dynamique est partiellement détruite.

Pour mieux tirer profit de l'équation (3.6), nous allons faire deux hypothèses. Tout d'abord, nous supposons que  $t$  est désormais une variable continue, ce qui se justifie par

<sup>6</sup>Rappelons qu'en régime classiquement chaotique,  $D_q \simeq K^2/2 \gg 1$  (cf. Eq. (2.31)). Pour voir la diffusion par échange d'impulsion, il faut prendre un jeu de paramètres classiquement réguliers.

<sup>7</sup>Il s'agit du taux de diffusion sur le carré de l'impulsion, i.e.  $D(t) = d\langle P^2 \rangle / dt$ .

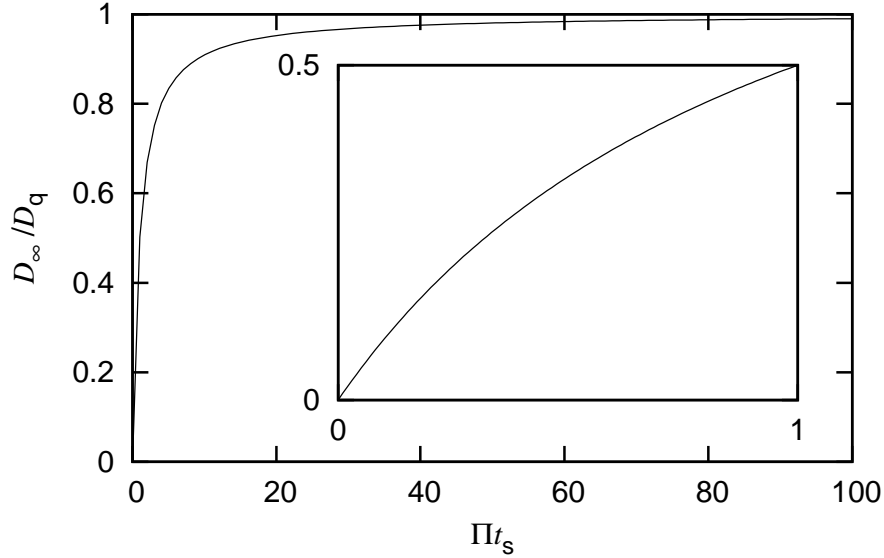


FIG. 3.3 – Taux de diffusion asymptotique  $D_\infty$  donné par l'équation (3.11), et tracé en fonction de la probabilité d'émission spontanée par pulse  $\Pi$ .  $D_\infty$  tend vers  $D_q$  pour  $\Pi t_s \gg 1$ . Dans la pratique, nous ne travaillons qu'avec de "petites" valeurs de  $\Pi$  (cf. insert).

le fait que l'on s'intéresse à la dynamique à long terme, i.e. pour  $t \gg 1$ . Cela revient à considérer que deux pulses successifs sont séparés d'un intervalle  $dt$  et à remplacer dans (3.6) les termes  $(1 - \Pi)^t$  par  $\exp(-\Pi t)$ . Le taux de diffusion  $D(t)$  s'écrit alors sous forme intégrale :

$$D(t) = D_0(t) \exp(-\Pi t) + \Pi \int_0^t ds \exp(-\Pi s) D_0(s). \quad (3.7)$$

Pour expliciter (3.7), nous supposons également que  $D_0(t)$  est de forme exponentielle

$$D_0(t) = D_q \exp\left(-\frac{t}{t_s}\right), \quad (3.8)$$

avec  $D_q$  le taux de diffusion à l'origine, donné par la relation (2.31), et  $t_s$  le temps de saturation, au bout duquel l'énergie atteint son palier.<sup>8</sup>

En introduisant (3.8) dans (3.7), nous arrivons à l'expression

$$D(t) = \frac{D_q}{1 + \Pi t_s} \left[ \exp\left(-\left(\Pi + \frac{1}{t_s}\right)t\right) + \Pi t_s \right], \quad (3.9)$$

dont nous déduisons directement l'énergie cinétique moyenne

$$\begin{aligned} \langle E \rangle(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t ds D_0(s) \\ &= \frac{D_q t_s}{2(1 + \Pi t_s)^2} \left[ 1 - \exp\left(-\left(\Pi + \frac{1}{t_s}\right)t\right) \right] + D_\infty t, \end{aligned} \quad (3.10)$$

<sup>8</sup>Ce temps est de l'ordre de  $t_L$ , mais il ne lui est pas égal. En effet, l'évaluation du temps de localisation  $t_L$  (cf. Eq. 2.29) se fait sans supposer de forme particulière pour  $D_0(t)$ .

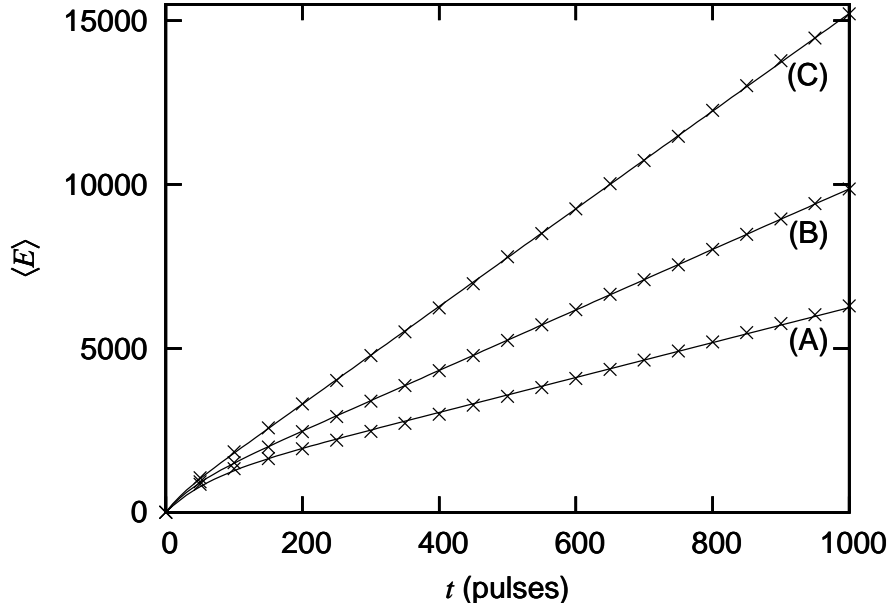


FIG. 3.4 – Simulations numériques (tracées avec des croix, tous les 20 pulses) donnant l'énergie cinétique moyenne en fonction du temps pour différents taux d'ES : (A)  $\Pi = 0,005$  ; (B)  $\Pi = 0,01$  ; (C)  $\Pi = 0,02$ . Ces résultats sont "fittés" avec un très bon accord par la formule (3.10), tracée en traits pleins (cf. tableau 3.1). Les simulations sont effectuées avec  $N = 4000$  quasi-impulsions. Les autres paramètres sont  $K = 10$  et  $\bar{k} = 2,89$ .

cas	$\Pi$	$D_q$	$t_s$
(A)	$5 \times 10^{-3}$	34,6	88,8
(B)	$1 \times 10^{-2}$	43,6	73,2
(C)	$2 \times 10^{-2}$	57,2	54,3

TAB. 3.1 – "Fits" sur  $D_q$  et  $t_s$  des résultats numériques de la figure 3.4 (cas (A-C)) par l'équation (3.10).

où nous avons posé

$$D_\infty = \frac{\Pi t_s}{1 + \Pi t_s} D_q, \quad (3.11)$$

qui est le taux de diffusion asymptotique. Nous voyons que l'équation (3.10) se compose de deux termes. Le premier terme traduit la localisation dynamique, dont l'échelle de temps caractéristique,  $t_s / (1 + \Pi t_s) \simeq t_s$ , est peu modifiée dans la gamme de  $\Pi$  considérée. Le second terme, quant à lui, traduit la destruction de la LD aux temps longs : pour  $t \gg t_s / (1 + \Pi t_s)$ , le terme exponentiel devient négligeable, et  $\langle E \rangle (t)$  devient purement diffusive, avec une pente égale à  $D_\infty$ . Sur la figure 3.3, nous avons représenté  $D_\infty$  en fonction de  $\Pi$  : pour  $\Pi = 0$ , nous retrouvons bien la LD, donnée par  $D_\infty = 0$ , alors que quand  $\Pi$  augmente,  $D_\infty$  augmente aussi, en tendant asymptotiquement vers  $D_q$ .

La comparaison de l'équation (3.10) avec des simulations numériques révèle un très bon accord (cf. figure 3.4 et tableau 3.1). Nous pouvons toutefois remarquer que les paramètres  $D_q$  et  $t_s$  varient fortement selon la valeur de  $\Pi$  considérée, ce qui est inattendu. Une explication possible est que la forme (3.8) du taux de diffusion  $D_0(t)$  n'est

qu'une forme approchée. De plus, le "fit" s'effectue sur  $D_q$  et  $t_s$ , qui rendent compte de la dynamique lors des premiers pulses, là où l'approximation de temps continu est la moins valable. Malgré ces réserves, l'équation (3.10), qui est généralisable à d'autres sources de bruit [17, 27] que l'ES [37, 39], reste une très bonne estimation, qui a été validée par diverses observations expérimentales [57, 4, 91, 99].

En ce qui concerne la distribution en impulsion, l'effet de l'ES est moins spectaculaire. A mesure que le taux d'ES augmente, la distribution passe lentement d'une forme double-exponentielle à une forme gaussienne. Toutefois, pour des temps accessibles expérimentalement, i.e. une centaine de pulses, la forme gaussienne n'est visible que pour des probabilités d'ES supérieures à 0,1 par pulse [57, 27, 99]. Pour des taux plus faibles, il faut mesurer la distribution en impulsion à des temps beaucoup plus longs pour voir la transition vers une gaussienne (cf. Fig. 3.6).

Dans cette section, nous avons vu comment modéliser de façon simple l'émission spontanée dans le rotateur pulsé. Numériquement, il est possible de décrire son impact directement sur la fonction d'onde, en appliquant la méthode de Monté-Carlo, ce qui permet d'économiser un temps de calcul considérable par rapport à un traitement basé sur l'opérateur densité. La prise en compte de l'impulsion de recul imprimée par le photon absorbé et le photon émis permet, en couplant les différentes quasi-impulsions, d'introduire la décohérence caractéristique de l'émission spontanée. Comme elle brise les effets d'interférences, cette décohérence a pour effet de détruire partiellement la localisation dynamique, et donc d'induire une diffusion de l'énergie cinétique analogue à la diffusion sans émission spontanée, et dont le taux peut être estimé analytiquement.

## 3.2 Application de la sélection de vitesses

Pour minimiser les effets de l'ES, nous allons maintenant appliquer la sélection de vitesses Raman, présentée dans la section 1.4. Pour mesurer l'énergie cinétique moyenne et la distribution en impulsion, nous ne tenons compte que des atomes dont l'impulsion est comprise entre les valeurs  $\hbar(k(n - \Delta/2))$  et  $\hbar(k(n + \Delta/2))$ , où  $n$  est un entier relatif et  $\Delta$  est la largeur de la zone de détection. Bien évidemment, la transition se fait avec la probabilité  $\mathcal{P}_R(P)$  qui dépend de l'impulsion ; cependant, par souci de simplification, nous ferons l'approximation que  $\mathcal{P}_R(P)$  est *constante sur toute la plage sélectionnée*, i.e.

$$\mathcal{P}_R(P) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |P - n\hbar k| < \frac{\hbar k \Delta}{2} \\ 0 & \text{pour } |P + n\hbar k| \geq \frac{\hbar k \Delta}{2}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous ferons la même approximation pour la distribution initiale, que l'on prend comme une distribution "porte" centrée autour de  $P = 0$  et de largeur  $\Delta$  (cf. Eq. (2.27)). La présente section est consacrée à l'étude d'un tel système, en particulier de son énergie cinétique moyenne en fonction du temps. Dans un premier temps (cf. sous-section 3.2.1), nous présenterons le résultat de nos simulations numériques, que nous expliquerons ensuite par un modèle analytique simple (cf. sous-sections 3.2.2 à 3.2.4).

### 3.2.1 Simulations numériques

Nous commençons par calculer, par simulation numérique, l'énergie cinétique moyenne des atomes détectés. Il est important de préciser qu'il s'agit bien de l'énergie par atome



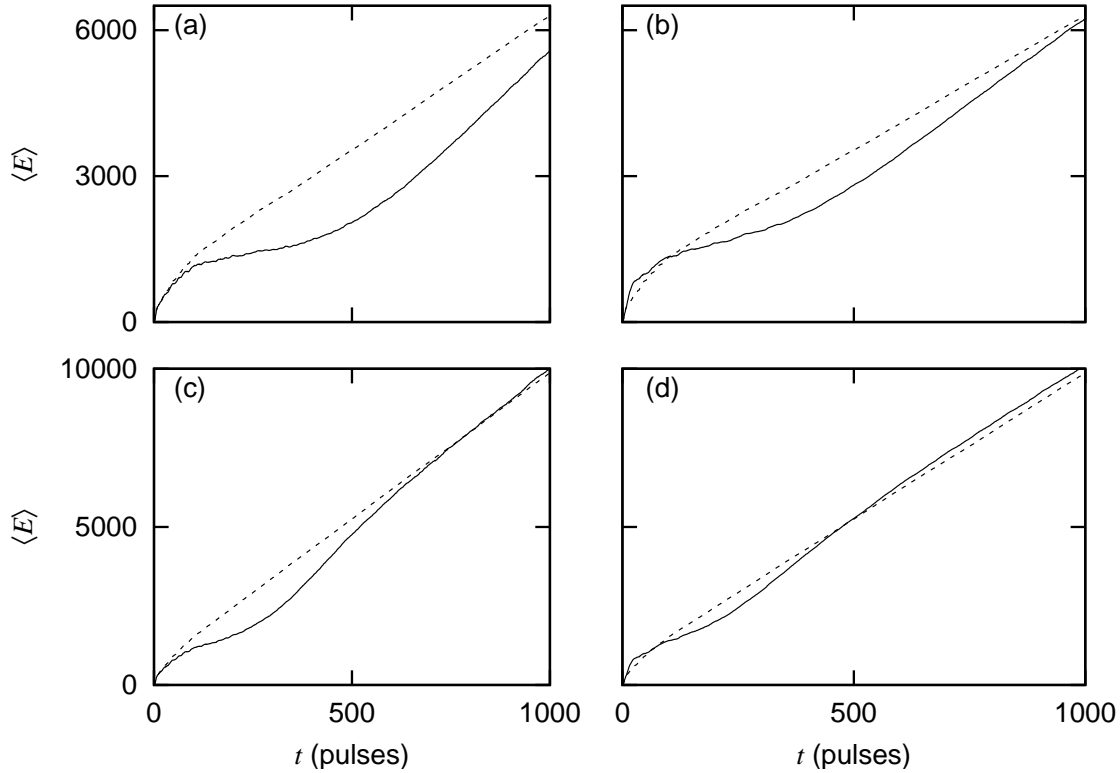


FIG. 3.5 – Réduction de la diffusion observée sur l'évolution temporelle de l'énergie cinétique moyenne, tracée en traits pleins. Les quatre simulations numériques ont été effectuées avec  $N = 10^5$  quasi-impulsions et pour différentes valeurs de  $\Pi$  et  $\Delta$  : (a)  $\Pi = 0,005$  et  $\Delta = 0,04$ ; (b)  $\Pi = 0,005$  et  $\Delta = 0,1$ ; (c)  $\Pi = 0,01$  et  $\Delta = 0,04$ ; (d)  $\Pi = 0,01$  et  $\Delta = 0,1$ . Pour comparaison, l'énergie cinétique sans sélection de vitesses est tracée en pointillés. Les autres paramètres sont  $K = 10$  et  $\bar{k} = 2,89$ .

détecté, dont le nombre n'est pas constant au cours du temps. Les résultats de ces simulations sont présentés sur la figure 3.5 pour plusieurs valeurs de  $\Pi$  et de  $\Delta$ . Pour comparaison, est également tracée l'énergie cinétique avec les mêmes paramètres et la même condition initiale, mais sans sélection de vitesses. Après la phase de diffusion initiale, qui est semblable dans les deux cas, les courbes avec sélection Raman se distinguent clairement avec une énergie cinétique inférieure à celle sans sélection. L'énergie cinétique est toujours diffusive, mais pendant un certain temps, le taux de diffusion est plus faible avec sélection Raman. Ceci est manifestement l'effet que nous avons escompté : la plupart des atomes qui ont subi de l'ES ne sont pas retenus pour le calcul de l'énergie cinétique. Cependant, un petit nombre d'atomes “retombent” quand-même dans la zone de détection, après un<sup>9</sup> ou plusieurs CF, contribuant ainsi à la faible diffusion observée sur la figure 3.5.

Puis, nous voyons que les courbes en traits pleins rattrapent celles en pointillés ; cet effet apparemment “super-diffusif” est dû aux variations du nombre d'atomes détectés. En effet, à ce moment de la dynamique, la zone de détection contient en grande majorité des atomes qui ont subi de l'émission spontanée : ils induisent donc une diffusion peu

<sup>9</sup>Il s'agit de ceux dont l'impulsion varie de  $\pm 2\hbar k_L$  ou ne varie pas du tout au cours d'un CF, car ils émettent le photon dans la direction des faisceaux laser.

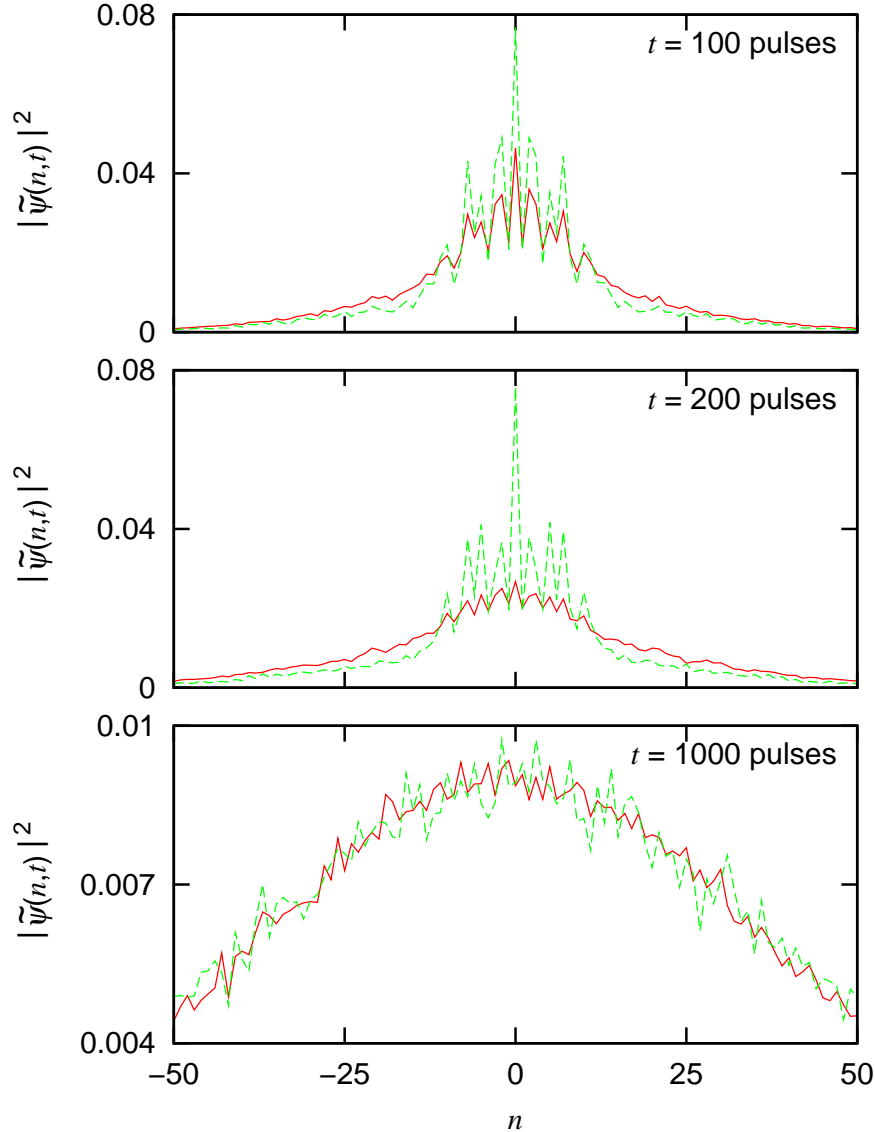


FIG. 3.6 – *Effet de la sélection de vitesses sur la distribution en impulsion dans le cas (c) de la figure 3.5 ( $\Pi = 0,01$  et  $\Delta = 0,04$ ), à différents instants : de haut en bas  $t = 100$  ; 200 et 1000 pulses. Ces courbes, tracées en tirets verts, sont à comparer avec celle sans sélection de vitesse, en traits pleins rouges. L'effet de la sélection est le plus net pour  $t = 200$  pulses.*

différente d'un système sans filtrage Raman. Cependant, la zone de détection contient encore une minorité d'atomes n'ayant pas subi d'ES, et dont le nombre diminue au cours du temps. L'énergie totale est donc à peu près celle que l'on aurait sans sélection de vitesses, mais le nombre d'atomes sur lequel est calculée la moyenne diminue. Ces deux phénomènes engendrent une augmentation du taux de diffusion qui persiste jusqu'à ce que le nombre d'atomes détectés devienne en moyenne constant dans le temps. A ce moment-là, les atomes détectés ont le même comportement que les atomes non détectés : il subissent régulièrement de l'émission spontanée, contribuant de la même façon à la diffusion en impulsion. Le système se comporte donc, sur le petit nombre d'atomes détectés, comme un système sans sélection de vitesses.

En ce qui concerne la distribution en impulsion, l'influence de la sélection est moins

spectaculaire (cf. Fig. 3.6). Globalement, elle tend à piquer la distribution autour de  $n = 0$ , mais pendant un intervalle de temps limité. En effet, il faut que l'ES ait "suffisamment agi" pour rendre la distribution sans Raman proche d'une gaussienne, ce qui n'est pas encore le cas après 100 pulses. A l'inverse, il ne faut pas non plus que le système avec sélection soit devenu complètement diffusif, auquel cas les deux distributions sont à peu près gaussiennes (comme après  $t = 1000$  pulses).

La sélection de vitesses permet donc d'obtenir une plage temporelle pendant laquelle le système est peu affecté par l'émission spontanée. Qualitativement, nous pouvons estimer que cette phase de diffusion réduite dure tant que les atomes détectés par Raman ont majoritairement connu une dynamique purement cohérente. A l'inverse, lorsqu'une fraction importante d'atomes a subi de l'ES, le système se comporte comme s'il n'y avait pas de sélection Raman, avec en particulier, le même taux de diffusion. Nous allons maintenant expliquer ces résultats à l'aide d'un modèle analytique simple, en commençant par modéliser les échanges de populations à l'intérieur et à l'extérieur de la zone de détection.

### 3.2.2 Dynamique des populations moyennes

Comme le suggèrent les résultats précédents, le rapport entre les atomes ayant et n'ayant pas subi d'émission spontanée joue un rôle prépondérant dans l'ampleur de la diffusion. Dans cette sous-section, nous allons donc déterminer le nombre moyen d'atomes de chacune de trois classes suivantes :

- la classe (0), qui contient les  $N_0$  atomes appartenant à la zone de détection et n'ayant subi aucune ES ;
- la classe ( $\Delta$ ), qui contient les  $N_\Delta$  atomes appartenant à la zone de détection et ayant subi au moins une ES ;
- la classe ( $1 - \Delta$ ), constituée des  $N_{1-\Delta}$  atomes hors de la zone de détection (et ayant donc forcément subi au moins une ES),

le nombre total d'atomes  $N$  étant conservé à chaque instant, i.e.

$$N_0(t) + N_\Delta(t) + N_{1-\Delta}(t) = N. \quad (3.13)$$

Par émission spontanée, les atomes passent d'une classe à une autre, selon le scénario représenté sur la figure 3.7.

Pendant un intervalle de temps  $dt$ , la classe (0) se vide par émission spontanée avec le taux  $\Pi$  : l'évolution de  $N_0$  s'écrit donc

$$\frac{dN_0}{dt} = -\Pi N_0. \quad (3.14)$$

En considérant qu'à  $t = 0$ , tous les atomes appartiennent à cette classe, i.e.  $N_0(t = 0) = N$ , nous intégrons directement l'équation (3.14) :

$$N_0(t) = N \exp(-\Pi t). \quad (3.15)$$

La classe (0) se vide de façon irréversible avec un temps caractéristique  $\Pi^{-1}$ .

Pendant le même intervalle  $dt$ , la classe ( $\Delta$ ), quant à elle, perd également des atomes, au nombre de  $\Pi N_\Delta dt$ , par ES. Mais parmi les  $\Pi N dt$  atomes qui font un cycle de

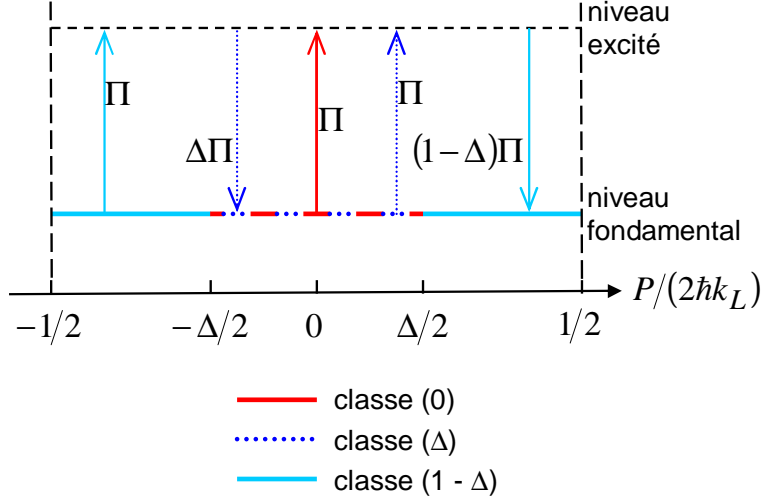


FIG. 3.7 – Représentation schématique des échanges par émission spontanée entre les classes de population (0), ( $\Delta$ ) et ( $1 - \Delta$ ). Sur le dessin, les différentes classes sont localisées par rapport à l'impulsion de leurs atomes. Cette représentation, périodique en  $P$ , est ici restreinte à la première zone de Brillouin  $[-\hbar k/2; +\hbar k/2[$  ( $[-\hbar k_L; +\hbar k_L[$  en unités physiques). Les valeurs attachées aux flèches sont les taux de transfert entre chaque classe du niveau fondamental et le niveau excité.

fluorescence, un petit nombre  $\Pi\Delta N dt$  vient peupler ( $\Delta$ ). Ainsi la population de cette classe d'atomes obéit-elle à l'équation différentielle

$$\frac{dN_\Delta}{dt} = -\Pi N_\Delta + \Pi\Delta N, \quad (3.16)$$

qui s'intègre tout aussi facilement que la précédente

$$N_\Delta(t) = \Delta N (1 - e^{-\Pi t}), \quad (3.17)$$

où nous avons pris comme condition initiale  $N_\Delta(t = 0) = 0$ . Le même raisonnement peut être mené pour la classe ( $1 - \Delta$ ), ce qui permet d'aboutir à l'équation différentielle

$$\frac{dN_{1-\Delta}}{dt} = -\Pi N_{1-\Delta} + \Pi(1 - \Delta) N, \quad (3.18)$$

qui s'intègre

$$N_{1-\Delta}(t) = (1 - \Delta) N (1 - e^{-\Pi t}). \quad (3.19)$$

Lorsque nous calculons l'énergie cinétique, nous faisons une moyenne sur le nombre d'atomes détectés  $N_D$ . Ces atomes appartenant aux classes (0) et ( $\Delta$ ), leur nombre est donné par la somme de (3.15) et (3.17) :

$$N_D(t) = N \times \{(1 - \Delta) \exp(-\Pi t) + \Delta\}, \quad (3.20)$$

dont la figure 3.8 montre un très bon accord avec les simulations numériques. Dans un premier temps,  $N_D$  décroît significativement sous l'effet du dépeuplement irréversible de (0) ; puis, une fois que (0) s'est vidée, la zone de détection contient en moyenne  $N\Delta$  atomes, appartenant tous à ( $\Delta$ ), et qui subissent régulièrement de l'émission spontanée. Si l'on suppose que la diffusion de l'énergie cinétique est réduite par le filtrage Raman

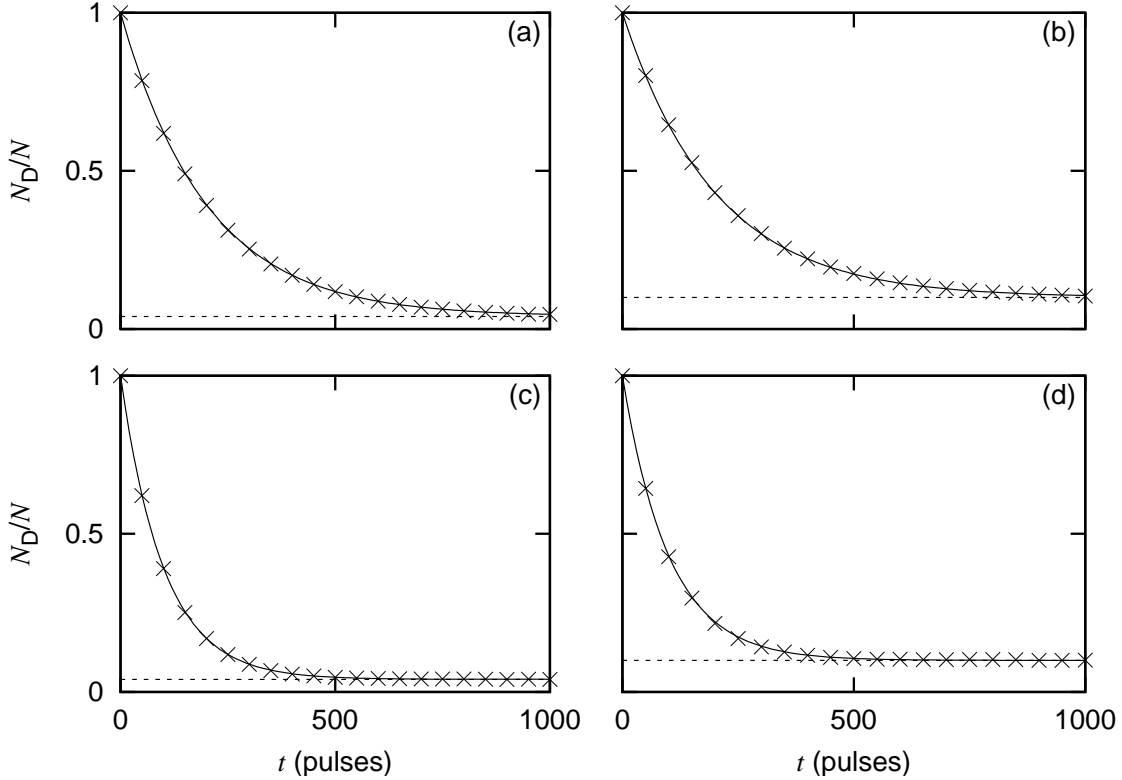


FIG. 3.8 – Population de la zone de détection représentée en fonction du temps, dans les quatre jeux de paramètres (a)–(d) de la figure 3.5. Les courbes avec des croix sont le résultat de simulations numériques, alors que celles en traits pleins représentent l'équation (3.20). Pour chaque courbe, l'asymptote  $\Delta$  est tracée en pointillés.

(cf. Fig 3.5) tant que la classe d'atomes (0) contient sensiblement plus d'atomes de ( $\Delta$ ), i.e.  $N_{\Delta}(t) \lesssim N_0(t)$ , le temps maximal d'observation du phénomène, noté  $t_{\Delta}$ , peut être estimé à

$$t_{\Delta} \sim \frac{1}{\Pi} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (3.21)$$

La dépendance logarithmique en  $\Delta$  suggère qu'il faut prendre une zone de détection particulièrement étroite pour augmenter de façon tangible le temps d'observation du phénomène<sup>10</sup>. La gamme de paramètres de la figure 3.5 nous donne un  $t_{\Delta}$  de l'ordre de la centaine de pulses. Si on considère que le temps minimal d'observation est le temps de saturation  $t_s$ , de l'ordre de 40 pulses, cela nous laisse une large fenêtre temporelle d'observation<sup>11</sup>.

Le nombre d'atomes de la zone de détection s'avère donc une information capitale pour comprendre la dynamique du système. Il sert bien sûr à calculer la moyenne de l'énergie cinétique ; mais il permet aussi d'estimer, de façons qualitative et quantitative, pendant combien de temps est observable la diffusion réduite. Dans la sous-section suivante, nous verrons que cette dynamique des populations joue un rôle prépondérant dans les échanges d'énergie par émission spontanée.

<sup>10</sup>Notons le cas limite  $t_{\Delta} \rightarrow 0$  quand  $\Delta \rightarrow 1$ , qui est tout à fait logique.

<sup>11</sup>Ces estimations seront affinées dans la sous-section 3.2.3 sans que cela ne remette en cause l'observation de la diffusion réduite.

### 3.2.3 Calcul de l'énergie cinétique moyenne

La première idée qui vient à l'esprit pour calculer l'énergie cinétique, est de calculer au préalable le taux de diffusion, par une méthode analogue à celle exposée dans la section 3.1. Rappelons que le point clé de ce calcul est d'évaluer l'influence de toutes les ES antérieures. Il suppose ainsi que l'énergie acquise en un instant donné l'est *définitivement*. Dans notre système avec sélection de vitesses, cette supposition n'est pas valable, car le nombre d'atomes servant aux calcul de l'énergie n'est pas constant. Par exemple, pour la classe d'atomes (0), après la phase de diffusion initiale, l'énergie diminue jusqu'à devenir nulle, parce que cette classe d'atomes se vide totalement (cf. Fig. 3.9).

Un calcul basé sur le taux de diffusion n'est donc pas faisable dans le cas présent. Il est au contraire plus judicieux de chercher directement l'évolution de l'énergie cinétique. Plus précisément, nous allons d'abord calculer l'énergie *totale*<sup>12</sup> des classes d'atomes (0) et ( $\Delta$ ). En les additionnant, nous aurons l'énergie totale des atomes détectés, notée  $E_D$ , que nous diviserons par le nombre d'atomes détectés, pour obtenir l'énergie moyenne  $\langle E \rangle$ . Nous écrirons la dynamique de ces énergies sous une forme générale, que nous appliquerons à l'estimation (3.8) du taux de diffusion initiale  $D_0(t)$ , afin de donner une expression analytique complète de l'énergie moyenne en fonction du temps.

#### 3.2.3.1 Energie cinétique de la classe d'atomes (0)

Nous commençons par le calcul de l'énergie totale de la classe d'atomes (0). Nous savons, de la section 3.1, que pendant un intervalle de temps  $dt$ , l'énergie, notée  $E_0$ , augmente de la quantité  $N_0(t)D_0(t)dt/2$  sous l'effet de la diffusion initiale, tendant ainsi vers la localisation dynamique (voir le premier terme de (3.7)). Par ailleurs, à cause du dépeuplement par émission spontanée de la classe (0), l'énergie diminue d'une quantité  $\Pi E_0 dt$ . La somme de ces deux contributions aboutit à l'équation différentielle

$$\frac{dE_0}{dt} = \frac{1}{2}N_0D_0 - \Pi E_0, \quad (3.22)$$

où le facteur 1/2 vient du fait que  $D_0$  est le taux de diffusion pour le carré de l'impulsion. L'énergie évolue donc suivant une équation différentielle du premier ordre avec coefficients non constants, dans laquelle le terme de LD apparaît comme un forçage, et le terme d'émission spontanée comme le terme homogène. En ne faisant aucune supposition sur la forme de  $D_0(t)$ , si ce n'est qu'il tend asymptotiquement vers 0, i.e.,  $D_0(t) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow +\infty$ , nous retrouvons bien qu'aux temps longs, l'équation (3.22) tend vers la solution stationnaire  $E_0 = 0$ .

En introduisant dans (3.22) l'estimation (3.8) de  $D_0$ , et en appliquant la méthode de variation de la constante, nous obtenons pour  $E_0$

$$E_0(t) = \frac{1}{2}ND_0t_s \left(1 - e^{-\frac{t}{t_s}}\right) e^{-\Pi t}, \quad (3.23)$$

où nous avons pris le zéro de l'énergie tel que  $E_0(t=0) = 0$ . L'évolution de l'énergie, donnée par (3.23) et tracée sur la figure 3.9, comporte deux phases très distinctes. Dans un premier temps,  $E_0$  augmente, sous l'effet de la diffusion initiale ; dans un deuxième

<sup>12</sup>C'est-à-dire sans diviser par le nombre d'atomes peuplant chaque classe.

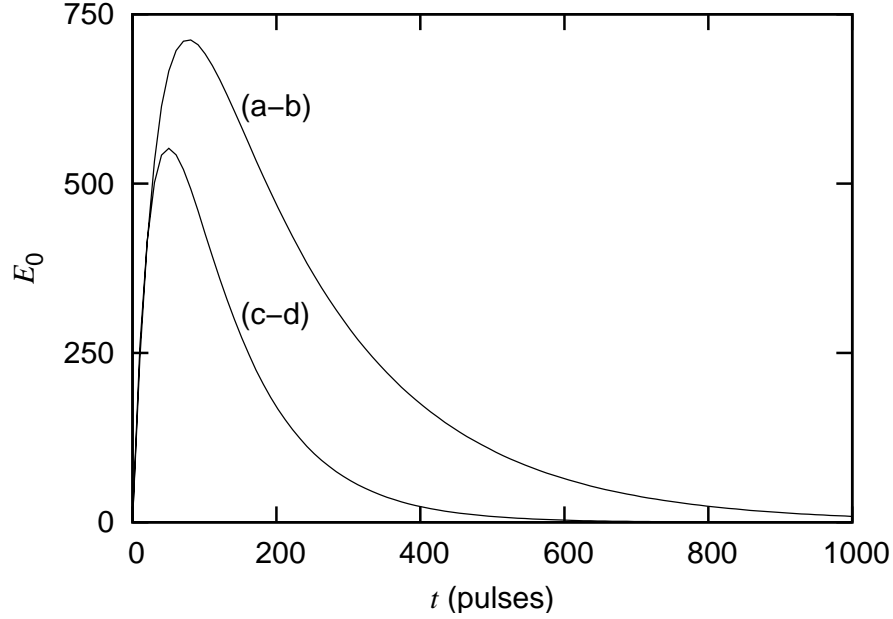


FIG. 3.9 – *Énergie totale  $E_0$  de la classe d'atomes (0) en fonction du temps, donnée par l'équation (3.29), et pour les cas (a-d) de la figure 3.5. Les paramètres  $D_q$  et  $t_s$  sont donnés par le "fit" résumé dans le tableau 3.2.*

temps,  $E_0$  présente une longue décroissance jusqu'à 0, due au dépeuplement de la classe (0).

Il est intéressant de remarquer que la diffusion initiale apparaît comme un effet "moyen", i.e. équitablement réparti sur tous les atomes de la classe (0). Tout se passe donc comme si tous les atomes avaient la même énergie moyenne, dont l'évolution est seulement déterminée par la diffusion, et que cette énergie moyenne était pondérée par la population de la classe (0). En effet, si nous introduisons la forme

$$E_0(t) = N_0(t) \times \varepsilon_0(t), \quad (3.24)$$

où  $\varepsilon_0(t)$  est l'énergie moyenne par atome, dans l'équation différentielle (3.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dE_0}{dt} &= N_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt} + \frac{dN_0}{dt} \varepsilon_0 \\ &= N_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt} - \Pi N_0 \varepsilon_0 \\ &= N_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt} - \Pi E_0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{1}{2} D_0(t). \quad (3.26)$$

L'évolution de  $\varepsilon_0$ , due à la diffusion initiale, ne dépend ni de la population de la classe (0), ni de l'énergie individuelle des atomes. Cela n'est en fait pas surprenant, puisque la diffusion n'est due qu'à la décohérence, et donc qu'elle touche de façon équivalente tous les atomes, quelle que soit leur énergie cinétique individuelle.

### 3.2.3.2 Energie cinétique de la classe d'atomes ( $\Delta$ )

La classe ( $\Delta$ ) n'étant composée que d'atomes ayant subi au moins une ES, son énergie est due à la diffusion induite par tous les cycles de fluorescence antérieurs. L'évolution temporelle de l'énergie comporte donc un terme analogue au second terme de l'équation (3.7), que l'on peut réécrire sous la forme générale  $\int_0^t ds (dN_\Delta/ds) \times D_0(s)$  (cf. Réf. [17], Eq. (6.12)). Par ailleurs, l'énergie de la classe ( $\Delta$ ) augmente aussi parce qu'elle contient de plus en plus d'atomes. Pour quantifier l'influence de ce transfert de population, nous remarquons le fait suivant à partir des équations de la sous-section (3.2.2). Pour  $\Pi N_0 dt$  atomes quittant la classe (0), il y en a  $\Delta \Pi N_0 dt$  qui viennent peupler la classe ( $\Delta$ ) et  $(1 - \Delta) \Pi N_0 dt$  la classe ( $1 - \Delta$ ). Si l'on suppose que cette proportion est la même pour le transfert d'énergie, cela revient à dire que si  $E_0$  diminue d'une quantité  $\Pi E_0 dt$ , alors  $E_\Delta$  augmente de  $\Delta \Pi E_0 dt$  et  $E_{1-\Delta}$  augmente de  $(1 - \Delta) \Pi E_0 dt$ .

En tenant compte de ces deux effets, nous arrivons donc aux équations

$$\frac{dE_\Delta}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^t ds \frac{dN_\Delta}{ds} D_0(s) + \Delta \Pi E_0 \quad (3.27)$$

$$\frac{dE_{1-\Delta}}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^t ds \frac{dN_{1-\Delta}}{ds} D_0(s) + (1 - \Delta) \Pi E_0, \quad (3.28)$$

qui peuvent être intégrées directement pour avoir  $E_\Delta$  et  $E_{1-\Delta}$ . Comme pour les populations, la classe (0) "alimente" les classes ( $\Delta$ ) et ( $1 - \Delta$ ) en énergie. A l'intérieur de la zone de détection, il existe donc un transfert progressif d'énergie de la classe d'atomes (0) vers la classe ( $\Delta$ ). Ce transfert, proportionnel à  $\Delta$ , est incomplet car une partie des atomes quittant (0) vont peupler ( $1 - \Delta$ ). Notons tout de même le cas particulier  $\Delta = 1$ , pour lequel le transfert d'énergie est total, i.e. tous les atomes, et donc toute l'énergie, qui quittent (0) se retrouvent dans ( $\Delta$ ). Ce transfert n'a donc aucune influence sur l'énergie totale du nuage atomique, ce qui explique que la description basée sur le taux de diffusion présentée dans la section 3.1 soit valable en l'absence de sélection Raman.

En prenant pour  $D_0(t)$  la forme exponentielle (3.8), nous intégrons explicitement les équations (3.27) et (3.28), ce qui donne

$$\begin{aligned} E_\Delta(t) &= \frac{1}{2} N \Delta D_q t_s \frac{\Pi}{1 + \Pi t_s} t - \frac{1}{2} N \Delta D_q t_s e^{-\Pi t} \\ &+ \frac{1}{2} N \Delta D_q t_s \frac{\Pi t_s}{1 + \Pi t_s} \left( 1 + \frac{\Pi t_s}{1 + \Pi t_s} \right) e^{-(\Pi + \frac{1}{t_s})t} \\ &+ \frac{1}{2} N \Delta D_q t_s \frac{1}{1 + \Pi t_s} \left( 1 - \Pi t_s + \frac{\Pi t_s}{1 + \Pi t_s} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} E_{1-\Delta}(t) &= \frac{1}{2} N (1 - \Delta) D_q t_s \frac{\Pi}{1 + \Pi t_s} t - \frac{1}{2} N (1 - \Delta) D_0 t_s e^{-\Pi t} \\ &+ \frac{1}{2} N (1 - \Delta) D_q t_s \frac{\Pi t_s}{1 + \Pi t_s} \left( 1 + \frac{\Pi t_s}{1 + \Pi t_s} \right) e^{-(\Pi + \frac{1}{t_s})t} \\ &+ \frac{1}{2} N (1 - \Delta) D_q t_s \frac{1}{1 + \Pi t_s} \left( 1 - \Pi t_s + \frac{\Pi t_s}{1 + \Pi t_s} \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

où nous avons pris la condition initiale  $E_\Delta(t = 0) = E_{1-\Delta}(t = 0) = 0$ . L'évolution temporelle de  $E_\Delta$  est tracée sur la figure 3.10 dans les cas (a-d). Nous constatons



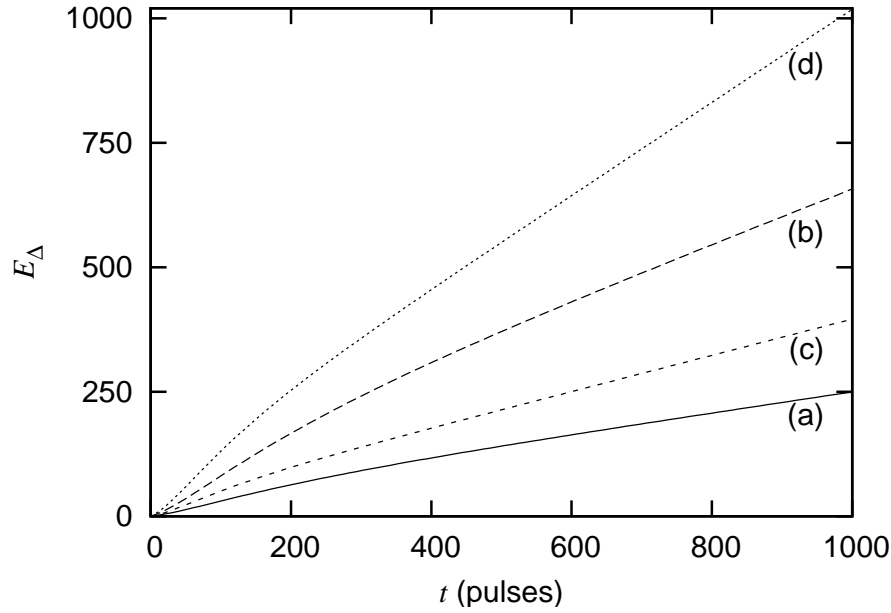


FIG. 3.10 – *Energie totale  $E_\Delta$  de la classe d'atomes ( $\Delta$ ) en fonction du temps, donnée par l'équation (3.29), et pour les cas (a–d) de la figure 3.5. Les paramètres  $D_q$  et  $t_s$  sont donnés par le “fit” résumé dans le tableau 3.2.*

cas	$\Pi$	$\Delta$	$D_0$	$t_s$
(a)	$5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$	55,8	46,4
(b)	$5 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-1}$	59,9	45,2
(c)	$1 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-2}$	64,1	39,5
(d)	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-1}$	67,2	38,5

TAB. 3.2 – “Fits” sur  $D_q$  et  $t_s$  des résultats numériques de la figure 3.11 (cas (a–d)) par l'équation (3.10).

qu'elle augmente toujours, mais de façon plus ou moins prononcée. Aux temps longs, nous retrouvons une diffusion dont le taux vaut  $\Delta D_\infty$ , où  $D_\infty$  est le taux sans sélection de vitesse (cf. Eq. (3.11)), ce qui montre qu'un nombre plus faible d'atomes contribue à la diffusion. Jusqu'à  $t \simeq 200$  pulses,  $E_\Delta$  augmente plus rapidement, car c'est dans cette échelle de temps, de l'ordre de  $\Pi^{-1}$ , que se fait l'essentiel du transfert d'atomes depuis la zone (0).

### 3.2.3.3 Energie moyenne des atomes détectés

Dans le cadre d'une sélection de vitesses, nous nous intéressons en particulier aux énergies des classes (0) et ( $\Delta$ ). A partir de ces énergies, nous distinguons deux quantités :

- d'une part l'énergie totale  $E_D$  des  $N_D$  atomes détectés (cf. Eq. (3.20)), i.e.

$$E_D(t) = E_0(t) + E_\Delta(t); \quad (3.31)$$

- d'autre part l'énergie *moyenne*  $\langle E \rangle$  par rapport au nombre d'atomes détectés  $N_D$

$$\langle E \rangle (t) = \frac{E_D(t)}{N_D(t)} = \frac{E_0 + E_\Delta}{N_0 + N_\Delta}, \quad (3.32)$$

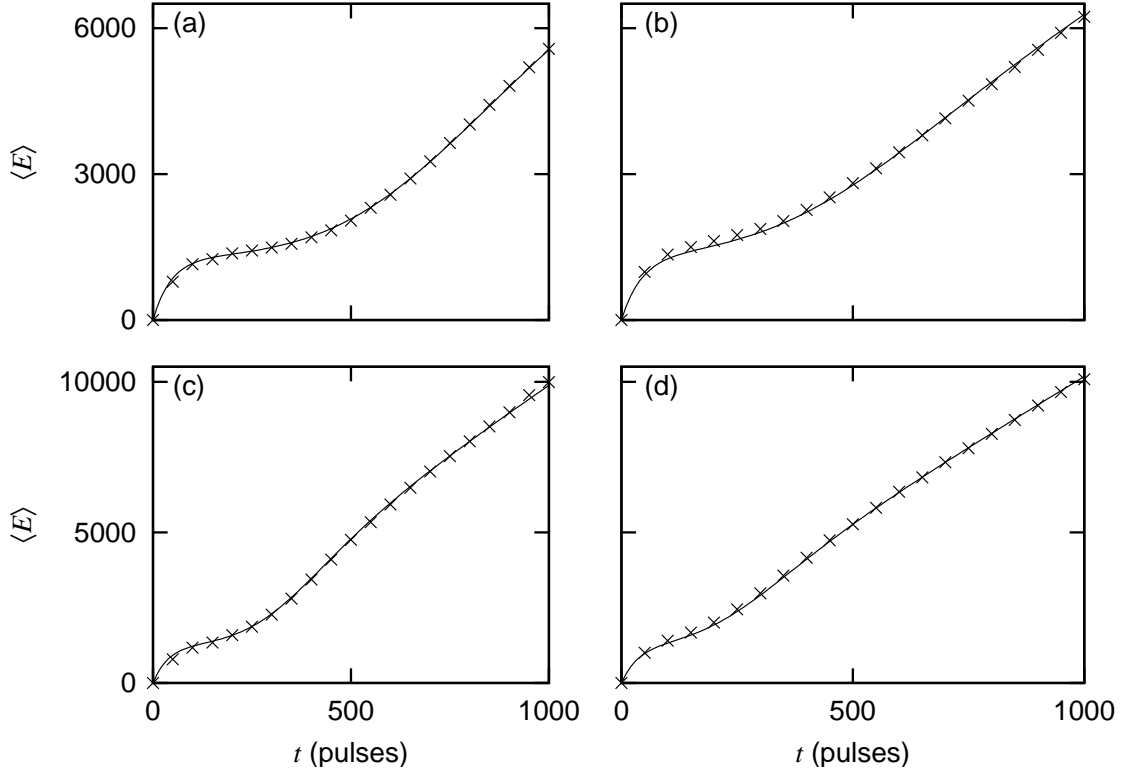


FIG. 3.11 – "Fits" des simulations numériques de la figure 3.5, représentées avec des croix, par la formule (3.32), tracée en traits pleins. Ces "fits", résumés dans le tableau 3.2, montrent un très bon accord entre les simulations et le modèle.

dont nous comparons les calculs analytique et numérique.

Cette comparaison est réalisée par des "fits" sur  $D_q$  et  $t_s$  pour les quatre jeux de paramètres de la figure 3.5. Les résultats de ces "fits" sont résumés dans le tableau 3.2 et sur la figure 3.11. Nous voyons sur le graphique un très bon accord entre le modèle et les simulations, même si une remarque semblable à celle de la discussion suivant le tableau 3.1 peut être faite. Ici aussi, nous voyons une variation, quoique moins prononcée, des paramètres  $D_q$  et  $t_s$  selon les paramètres  $\Pi$  et  $\Delta$ . Pour l'expliquer, nous avançons les mêmes hypothèses que pour le tableau 3.1 : d'une part la forme exponentielle du taux de diffusion sans ES (cf. Eq. (3.8)), d'autre part le fait que  $D_q$  et  $t_s$  rendent compte de la dynamique des premiers pulses, au moment où l'hypothèse de temps continu est la moins valable.

Dans cette sous-section, nous avons donc développé un modèle analytique simple qui permet de décrire la dynamique du RPQ avec une sélection de vitesses Raman. Il apparaît que cette sélection limite la diffusion de l'énergie cinétique, tant que les atomes détectés par Raman n'ont en majorité pas effectué de CF. Comme l'équilibre entre ces atomes et ceux qui ont subi de l'ES joue un rôle crucial dans la nature de la dynamique, nous avons cherché la population et l'énergie de ces deux catégories d'atomes. Nous avons ainsi obtenu un modèle qui tient compte de la diffusion par ES, qui apparaît comme un forçage extérieur, et des transferts entre les différentes classes d'atomes. En supposant que le taux de diffusion a une forme exponentielle, nous avons calculé analytiquement la population et l'énergie des différentes classes d'atomes,

puis l'énergie moyenne par atome détecté, avec un très bon accord par rapport aux simulations numériques. A partir de ces résultats analytiques, nous allons maintenant pleinement caractériser la phase de diffusion réduite, en calculant son taux, ainsi que la plage de temps sur laquelle elle est observable.

### 3.2.4 Approximation adiabatique

Pour cela, nous allons pousser plus loin le calcul analytique, en tirant profit des différents ordres de grandeur de nos paramètres. En particulier, dans les cas (a) et (b) de la figure 3.5, nous avons les ordres de grandeur suivants :  $\Delta \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ ,  $t_s \sim 30 - 50$  pulses et  $\Pi = 5 \times 10^{-3}$  pulses $^{-1}$ . Pour nos calculs, nous supposons que  $\Delta$ ,  $\Pi$  et  $t_s$  se hiérarchisent de la façon suivante :

$$\Pi t_s, \Delta \ll 1, \quad (3.33)$$

avec  $\Delta, \Pi t_s \sim O(\epsilon)$  et  $O(\epsilon) \sim 10^{-1}$ . Physiquement, l'inégalité (3.33) revient à considérer que les étapes successives observées sur la figure 3.5 se produisent selon des échelles de temps très différentes :

- d'abord la localisation dynamique, qui se fait avec le temps caractéristique  $t_s$  (quelques dizaines de pulses) ;
- puis, le dépeuplement de la zone (0) par émission spontanée, qui se produit après un temps de l'ordre de  $\Pi^{-1}$  (une centaine de pulses) ;
- enfin, la mise en place du régime purement diffusif, après un temps de l'ordre de  $t_\Delta$  (cf. Eq. (3.21)) (quelques centaines de pulses).

Tout se passe donc comme si les comportements dynamiques successifs étaient découplés, ce qui justifie le terme d'*approximation adiabatique*. Cette approximation va nous permettre de délimiter et de décrire par des équations plus simples les comportements dynamiques successifs.

Nous commençons par décrire le régime de diffusion initiale, pour lequel  $t \sim t_s$ . Dans ce cas,  $E_\Delta(t)$  est négligeable puisqu'en  $O(\epsilon^2)$  ; par ailleurs dans l'expression de  $N_D(t)$  et  $E_0(t)$ , données respectivement par les équations (3.20) et (3.23), nous pouvons considérer que  $\exp(-\Pi t) \simeq 1$ , ce qui nous laisse

$$\langle E \rangle (t) \simeq E_0(t) \simeq \frac{1}{2} D_0 t_s \left( 1 - e^{-\frac{t}{t_s}} \right). \quad (3.34)$$

La phase de diffusion initiale n'est donc pas notablement affectée, ni par l'émission spontanée, ni par la sélection de vitesses. Elle prend fin après un temps de l'ordre de  $t_s$  qui n'est pas modifié non plus. L'énergie  $E_0$  tend alors à saturer (cf. Fig. 3.9) ; mais peu à peu, l'effet de l'émission spontanée, qui dépeuple la classe (0), tend à faire diminuer  $E_0$ . L'action contraire de ces deux phénomènes, LD d'une part et ES d'autre part, fait que  $E_0$  atteint un maximum, en  $t = t_1$ . Comme la diffusion initiale est alors bien terminée, et l'effet de l'ES encore faible, nous pouvons donc estimer le temps  $t_1$  comme le début de la diffusion réduite. En résolvant l'équation  $dE_0/dt = 0$  à partir de l'expression (3.23), nous trouvons

$$t_1 \simeq \frac{t_s}{1 - \Pi t_s} \ln \frac{1}{\Pi t_s} \sim t_s \ln \frac{1}{\Pi t_s}, \quad (3.35)$$

ce qui, avec les paramètres du tableau 3.2, donne  $t_1 \simeq 88$  et  $87$  pulses, dans les cas (a) et (b) respectivement.

Cette diffusion réduite perdure ensuite pendant plusieurs centaines de pulses, avec un taux qui varie peu. Pour estimer ce taux, nous allons calculer la dérivée de l'énergie moyenne  $\langle E \rangle$  en un instant  $t_2$ , que nous choisissons de la façon suivante. Sur la figure 3.9, nous voyons que, pendant le dépeuplement de la classe (0), la courbure de l'énergie  $E_0$  s'inverse : le temps  $t_2$  est pris comme l'instant auquel se produit cette inversion, c'est-à-dire pour lequel s'annule la dérivée seconde  $d^2 E_0 / dt^2$ . Le temps  $t_2$  vaut donc

$$t_2 \sim 2t_s \ln \frac{1}{\Pi t_s}. \quad (3.36)$$

Comme dans notre gamme de paramètre,  $t_2 \sim 180$  pulses, c'est-à-dire qu'il est de l'ordre de  $\Pi^{-1}$ . il nous faut donc évaluer l'énergie dans cette échelle de temps.

Pour calculer  $E_0$  et  $E_\Delta$  pour  $t \sim \Pi^{-1}$ , nous pouvons supposer que  $\exp(-t/t_s)$  sont négligeables, i.e. le système n'a plus aucun souvenir de la diffusion initiale ni de la saturation.  $E_0$  se réduit donc au terme d'ES

$$E_0(t) \simeq \frac{1}{2} N D_0 t_s e^{-\Pi t}, \quad (3.37)$$

et  $E_\Delta$  ne contient que le terme linéaire, et celui en  $\exp(-\Pi t)$ , ce qui donne

$$E_\Delta(t) \simeq \frac{1}{2} \Delta N D_0 t_s \times \left\{ \frac{\Pi t}{1 + \Pi t_s} + (1 - e^{-\Pi t}) \right\}. \quad (3.38)$$

L'énergie  $E_\Delta$  augmente donc sous les deux effets décrits précédemment : le terme linéaire rend compte de la diffusion par ES, et le terme exponentiel traduit le fait que l'énergie de  $(\Delta)$  augmente, parce que son nombre d'atomes augmente. Toutefois, étant proportionnelle à  $\Delta$ , l'énergie  $E_\Delta$  a encore une valeur assez faible (de l'ordre de  $\epsilon$ ) dans cette échelle de temps.

En introduisant les équations (3.37) et (3.38) dans (3.32), nous aboutissons à l'énergie moyenne

$$\langle E \rangle (t) \simeq \frac{1}{2} D_0 t_s \left( 1 + \frac{\Delta \Pi t}{\exp(-\Pi t)} \right), \quad (3.39)$$

où une fois encore, nous n'avons gardé que les termes de l'ordre de 1 et de  $\epsilon$ . Finalement, en développant (3.39) autour de  $t_2$ , nous arrivons à

$$\langle E \rangle (t) \simeq \frac{1}{2} (A + D_r (t - t_2)), \quad (3.40)$$

où  $A = 2 \langle E \rangle (t_2)$  est une constante, et  $D_r$  le taux de diffusion réduite, donné par

$$D_r = \alpha (1 + \alpha \ln \alpha) \Delta D_\infty \sim \Delta D_\infty,$$

avec  $D_\infty$  est le taux de diffusion asymptotique sans filtrage Raman (cf. Eq. (3.11)), et  $\alpha = (\Pi t_s)^{-2\Pi t_s}$  un facteur qui est ici de l'ordre de 2. <sup>(13)</sup> La sélection de vitesses permet donc de réduire considérablement le taux de diffusion due à la décohérence, car, grâce à cette sélection, les atomes détectés n'ont, en majorité, pas effectué de CF. Cependant, le taux de diffusion ne peut pas être nul, ceci pour deux raisons : la première est que même s'ils ont minoritaires, les atomes détectés ayant subi de l'ES provoquent une faible diffusion, proportionnelle à  $\Delta$ . La seconde est que, comme la zone de détection se vide

<sup>13</sup>Le facteur  $\alpha (1 + \alpha \ln \alpha)$  vaut respectivement 4,60 et 4,54.

progressivement par ES, le nombre d'atomes sur lequel se calcule la moyenne diminue, et donc la moyenne augmente. Cet effet apporte le facteur  $\alpha$  au taux de diffusion de diffusion  $D_r$ .

Comme nous l'avons vu en étudiant les différentes classes d'atomes (cf. sous-section 3.2.2), la diffusion réduite persiste tant que la dynamique à l'intérieur de la zone de détection est majoritairement cohérente. En appliquant un critère semblable, mais pour l'énergie, nous allons affiner l'estimation (3.21) du temps maximal d'observation de la diffusion réduite, que nous appelons  $t_3$ . En effet, l'énergie totale des atomes détectés  $E_D$  est une compétition entre une partie cohérente  $E_0$ , qui diminue au cours du temps, et une partie diffusive  $E_\Delta$  qui augmente. Si nous estimons que  $t_3$  est le temps pour lequel l'énergie  $E_D$  est minimale, i.e. tel que  $dE_D/dt = 0$ , nous obtenons à partir de (3.37) et (3.38) l'estimation suivante

$$t_3 = \frac{1}{\Pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{\Delta} - 1 \right) + \ln(1 + \Pi t_s) \right] \sim \frac{1}{\Pi} \ln \frac{1}{\Delta}, \quad (3.41)$$

qui est de l'ordre de la première estimation  $t_\Delta$ , donnée dans la sous-section 3.2.2. Pour nos deux jeux de paramètres (a) et (b), nous obtenons  $t_3 = 677$  et 480 pulses, respectivement.

Après le temps,  $t_3$  la majorité des atomes détectés ont subi de l'ES, et contribuent à la diffusion. Le fait que la zone de détection continue à se vider accentue encore la diffusion, ce qui explique que les courbes avec filtrage Raman rattrapent les courbes sans filtrage Raman (cf. Fig. 3.2.1). Enfin, une fois que tous les atomes ont subi de l'ES, pour  $t \gg \Pi^{-1}$ , nous retrouvons la diffusion sans filtrage, dont le taux vaut  $D_\infty$ . En effet, tous les atomes détectés ont subi de l'ES, et le système a complètement perdu le souvenir de sa dynamique cohérente. En fait, la dynamique est la même que s'il n'y avait pas de filtrage Raman, mais avec un nombre restreint d'atomes, qui vaut en moyenne  $\Delta N$ .

Toutes les grandeurs calculées dans le cadre de l'approximation adiabatique sont comparées aux simulations numériques sur la figure 3.12. Les prévisions de notre approximation sont d'autant plus fiables dans le cas (b), qui correspond mieux aux ordres de grandeurs donnés par l'inégalité (3.33). Ce jeu de paramètres est donc particulièrement adapté pour l'observation de la diffusion réduite. En effet, la grande différence entre les échelles de temps caractéristiques du système permet de bien distinguer et de bien délimiter les différentes étapes de la dynamique :

- d'abord, la diffusion initiale et l'amorce de la localisation, qui ne changent pas significativement lorsque l'on change le taux d'ES, car, à ce moment-là, trop peu d'atomes ont subi de l'émission spontanée, pour que celle-ci ait une action significative ;
- puis, à  $t_1 \simeq 87$  pulses, la diffusion réduite commence : l'ES commence à avoir un effet significatif, mais grâce à la sélection de vitesses, la plupart des atomes qui la subissent retombent hors de la zone de détection. Ceux qui y tombent provoquent une faible diffusion, dont le taux  $D_r$  est proportionnel à la largeur de la zone de détection  $\Delta$  ;
- la phase de diffusion réduite persiste, jusque  $t_3 \simeq 480$  pulses, tant que la zone de détection contient en majorité des atomes n'ayant connu qu'une dynamique cohérente. Ensuite, la dynamique devient la même que s'il n'y avait pas de Raman car le système a perdu toute mémoire de sa dynamique purement cohérente.

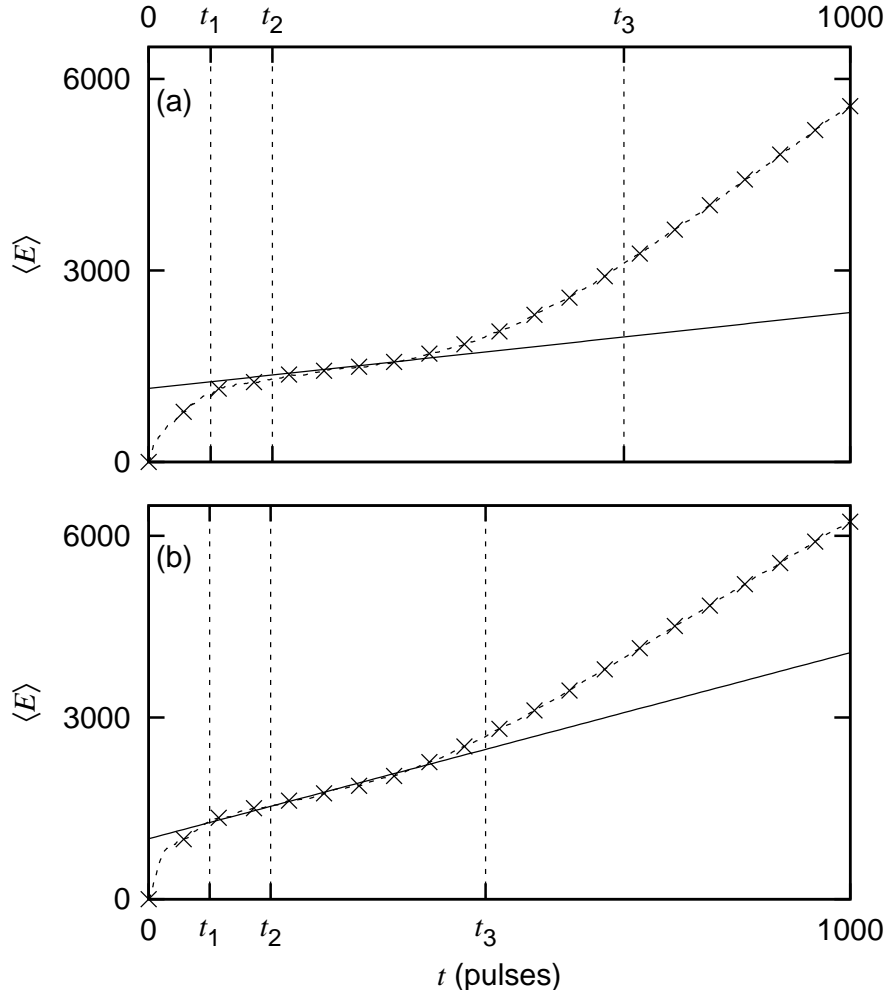


FIG. 3.12 – Illustration de l'approximation adiabatique pour les simulations numériques des cas (a) et (b) (cf. Fig. 3.5). Sur les deux tracés, sont marqués les quantités calculées dans le cadre de l'approximation (3.33). Les lignes verticales, en pointillés, représentent  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  (cf. Eqs. (3.35), (3.36) et (3.41)); les courbes en traits pleins donnent le taux de diffusion réduite (cf. Eq. (3.40)); elles sont à comparer avec les simulations numériques (tirets et croix). Les paramètres  $\Pi$ ,  $\Delta$ ,  $D_0$  et  $t_s$  sont ceux du tableau 3.2.

Comme le montre cette sous-section, l'intérêt de séparer les différentes échelles de temps est aussi de pouvoir faire des estimations analytiques des grandeurs pertinentes pour chaque phase de la dynamique.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit, numériquement et analytiquement, une méthode permettant de limiter les effets de l'émission spontanée pour le rotateur pulsé, basée sur la sélection de vitesses Raman. En partant d'une distribution initiale fortement localisée autour de l'impulsion nulle, et en sélectionnant les impulsions multiples de la largeur de la zone de Brillouin, nous retenons préférentiellement, pour le calcul de l'énergie cinétique moyenne, des atomes qui n'ont pas subi d'émission spontanée, et donc qui

n'induisent pas de diffusion. Cependant, comme la zone de détection compte également des atomes qui ont subi de l'émission spontanée, la diffusion en impulsion ne s'arrête jamais totalement. Dans un premier temps, le nombre de ces atomes étant faible, nous observons le phénomène escompté de diffusion réduite ; puis, comme de plus en plus d'atomes ont effectué au moins un cycle de fluorescence, le taux de diffusion retrouve sa valeur sans sélection de vitesses.

En supposant que le taux d'émission spontanée et la largeur de la zone de détection Raman sont faibles, nous avons complètement caractérisé la phase de diffusion réduite : nous en avons calculé analytiquement le taux de diffusion, ainsi que l'intervalle de temps pendant lequel elle est observable. Nous avons ainsi trouvé un jeu de paramètres (cas (b) de nos simulations) pour lesquels la diffusion réduite semble observable expérimentalement. En effet, tant la probabilité d'émission spontanée, de  $5 \times 10^{-3}$  par pulses, que la largeur Raman, un dixième de la zone de Brillouin, sont accessibles avec une expérience de rotateur pulsé quantique. De plus, la diffusion réduite est clairement visible à partir de 80 pulses, alors que les expériences peuvent atteindre 150 pulses. Enfin, la largeur Raman est assez élevée pour que le nombre d'atomes détectés ne soit pas trop faible, et donc que le rapport signal sur bruit ne soit pas trop faible. Dans un futur proche, notre équipe réalisera une démonstration expérimentale de cette technique originale de réduction des effets de la décohérence.

# Chapitre 4

## Résonances quantiques du rotateur pulsé dans l'espace des positions

Au chapitre 2, nous avons vu que le rotateur pulsé classique (RPC) possède une dynamique presque totalement chaotique si le paramètre de stochasticité  $K$  est supérieur à 5. Cependant, au milieu du chaos généralisé, subsistent de petits îlots de stabilité, appelés *modes accélérateurs classiques*. Les trajectoires qui composent ces îlots se caractérisent par une dynamique *balistique* : leur impulsion augmente linéairement avec le temps. Cela s'explique par le fait que chaque pulse de potentiel frappe le rotateur au même endroit, lui communiquant toujours la même quantité de mouvement. Pour certaines valeurs de la période des pulses, la dynamique balistique est aussi observable avec le rotateur pulsé quantique (RPQ), reflétant dans ce cas un effet d'*interférences constructives*, bien différent de la localisation dynamique. Ce phénomène très particulier, connu sous le nom de *résonance quantique*, fait l'objet du présent chapitre, ainsi que d'une publication de notre groupe [59].

Historiquement, les résonances quantiques ont été étudiées théoriquement dès la fin des années 70 [49], puis ont connu un net regain d'intérêt depuis la première réalisation expérimentale du RPQ avec des atomes froids en 1995 [71]. Les différentes observations qui s'en sont suivies ont été faites tant avec des gaz atomiques [76, 24, 83, 54, 86], qu'avec des condensats de Bose-Einstein [26, 82, 70] qui permettent une sélection plus fine sur l'impulsion des atomes. Parallèlement à la détection des RQ, des recherches sont aussi menées autour des résonances du RPQ en présence de gravité, couramment appelées *modes accélérateurs quantiques* [75, 34, 87, 66, 7, 41, 107], ou encore sur les résonances quantiques comme moyen d'observation de l'effet de cliquet quantique, en anglais “quantum ratchet” [65, 84, 23].

Pour rendre compte des effets expérimentaux, il semble naturel de décrire les RQ dans l'espace des impulsions, d'une part parce que c'est très souvent la distribution en impulsion ou ses moments que l'on cherche à mesurer, et d'autre part parce que l'espace des impulsions est beaucoup plus adapté pour modéliser les gaz atomiques (mélange incohérent d'ondes planes ou de quasi-impulsions) et les CBE (onde plane). Dans ce travail, nous proposons toutefois de faire une étude complète des RQ dans l'*espace des positions* [48]. Cette étude se base sur l'analogie entre l'*effet Talbot* optique et les RQ. L'effet Talbot est un effet de diffraction à travers un motif périodique. Si l'on place un écran derrière ce motif, on observe que pour certaines distances entre l'objet et l'écran, le motif se “reconstruit” sur l'écran. Ces distances particulières sont des multiples d'une



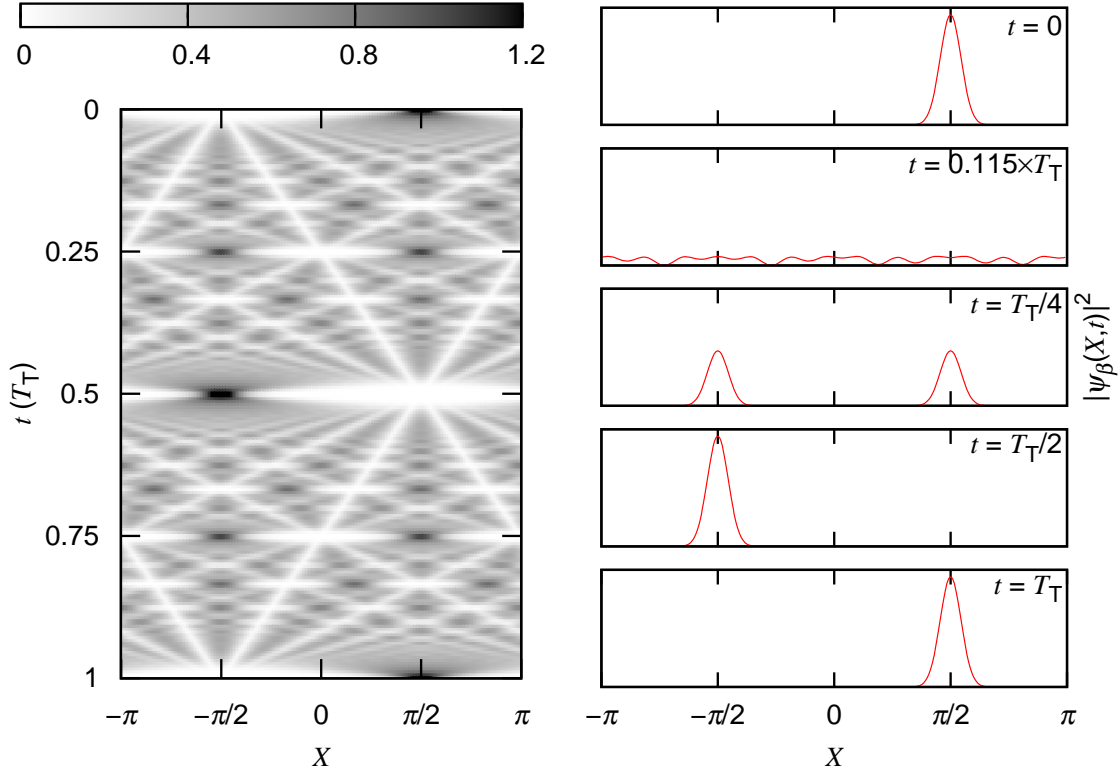


FIG. 4.1 – *Analogie quantique de l'effet Talbot optique, illustré par l'évolution temporelle de la probabilité de présence associée à une onde de Bloch de quasi-impulsion  $\beta = 0$ . Cette onde de Bloch n'occupant que les états d'impulsion (discrets)  $|P = n\mathbf{k}\rangle$  ( $n$  entier relatif), elle est  $2\pi$ -périodique dans l'espace des positions. Aussi, dans cette figure comme dans les suivantes, la probabilité de présence n'est-elle tracée que dans l'intervalle  $X \in [-\pi; \pi[$ . Du fait de sa périodicité spatiale, la fonction d'onde se reconstruit au bout d'une période de Talbot (cf. Eq. (4.1)). Le panneau de gauche représente le module de la fonction d'onde entre  $t = 0$  et  $t = T_T$ . (Le fait de représenter  $|\psi_\beta|$  plutôt que  $|\psi_\beta|^2$  permet de mieux faire ressortir le contraste entre les différents niveaux de gris.) Les panneaux de droite représentent la probabilité de présence à différents instants : de haut en bas  $t = 0$ ;  $0,115T_T$ ;  $T_T/4$ ;  $T_T/2$  et  $T_T$ . Le paquet initial est une gaussienne centrée en  $\pi/2$  et de largeur en position  $1/5\sqrt{2}$ .*

longueur caractéristique appelée longueur de Talbot<sup>1</sup>.

Dans le cas du RPQ, l'effet est temporel. Sur la figure 4.1, nous considérons un paquet d'ondes initial dont la structure localisée se répète périodiquement dans l'espace des positions. Lors de sa propagation libre, ce paquet d'ondes interfère avec lui-même selon un motif compliqué. Cependant, après un certain temps d'évolution, le paquet initial “se reconstruit” intégralement, se localisant ainsi autour des mêmes positions. Par analogie avec l'optique, nous appelons ce temps particulier la période de Talbot  $T_T$ , qui vaut

$$T_T = \frac{\pi m}{\hbar k_L^2} \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>Pour un réseau de 100 traits par millimètre et une longueur d'onde de 1  $\mu\text{m}$ , la longueur de Talbot vaut 0,2 mm.

en unités physiques<sup>2</sup>, et qui, exprimée dans les unités réduites de la section 1.3, correspond à  $\bar{k} = 4\pi$ . Si nous soumettons le paquet d’ondes ainsi “refocalisé” à une succession de pulses espacés d’une période de Talbot, le paquet reçoit de chaque pulse la même quantité de mouvement, et son impulsion augmente *linéairement* avec le temps : sa dynamique est alors *ballistique*. Si maintenant les pulses successifs sont séparés d’une demi-période de Talbot, le paquet initial se reconstruit à l’identique, mais décalé d’une demi-période de potentiel (cf. Fig. 4.1) : chaque pulse lui apporte alors une quantité de mouvement opposée au pulse précédent : la dynamique est *périodique*.

Dans ces deux cas simples, il est facile de prédire le comportement dynamique du RPQ, car le paquet d’ondes initial se reconstruit totalement avant chaque pulse. Ces résonances, pour lesquelles l’intervalle entre les pulses est un multiple de la demi-période de Talbot, sont appelées *résonances quantiques simples* (RQS), et feront l’objet de la section 4.1. Sur la figure 4.1, nous voyons que pour une évolution libre d’un quart de la période de Talbot, le paquet initial donne deux répliques de forme identique. D’une façon générale, cette “reconstruction” partielle du paquet initial se produit pour des temps d’évolution commensurables avec la période de Talbot, donnant lieu aux *résonances quantiques d’ordre supérieur* (RQOS). Dans ce cas, la nature de la dynamique est plus difficile à prédire, et elle requiert une étude quantitative, qui sera menée dans la section 4.2, pour un espacement entre pulses qui est le quart de la période de Talbot, c’est-à-dire pour  $\bar{k} = \pi$ .

## 4.1 Résonances quantiques simples

Comme nous l’avons vu dans la sous-section 2.2.1, la périodicité temporelle du rotateur pulsé nous incite à chercher son évolution sur une période. Nous aboutissons ainsi à une relation de récurrence qui lie l’état du système après  $t$  pulses à celui après  $(t - 1)$  pulses. Dans le cas des RQS, le fait que le paquet d’ondes retrouve la même forme après une période simplifie considérablement cette relation de récurrence, qui peut être ainsi facilement itérée. Dans cette section, nous allons donc donner une description analytique complète des RQS, en exprimant l’état du RPQ à l’instant  $t$  en fonction des conditions initiales. D’abord, nous calculerons la fonction d’onde, puis les moyennes de la position, de l’impulsion et de l’énergie cinétique du RPQ.

### 4.1.1 Evolution temporelle de la fonction d’onde

Nous commençons donc par chercher une relation de récurrence sur la fonction d’onde. Compte tenu de la périodicité spatiale du potentiel, la quasi-impulsion  $\beta$  (cf. Eq. (2.23)) est une constante du mouvement. Dans l’espace des positions, la fonction d’onde se décompose donc en ondes de Bloch (cf. sous-section 2.2.3), que nous allons utiliser pour décrire notre système. Elles nous permettront ainsi de mettre en évidence le rôle prépondérant de la quasi-impulsion dans la dynamique du système.

Dans notre système d’unités réduites, la condition de résonance (cf. Fig. 4.1) s’exprime sur la constante de Planck réduite (cf. Eq. (1.26)) qui doit être un multiple de  $2\pi$ , i. e. :

$$\bar{k} = 2\pi\ell, \tag{4.2}$$

<sup>2</sup>Pour l’atome de césium,  $T_T = 133 \mu\text{s}$ .

avec  $\ell$  entier positif. Dans ce cas, l'opérateur de propagation libre  $\hat{U}_{libre}$ , introduit dans l'équation (2.22), prend une forme particulièrement simple. En effet, soit  $\tilde{\psi}_\beta(n, t-1)$  la distribution d'impulsion juste après le pulse numéro  $t-1$ , et  $\tilde{\psi}_\beta(n, t^-)$  celle juste avant le pulse  $t$ . Elles sont simplement reliées par  $\hat{U}_{libre}$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\beta(n, t^-) &= \exp\left(-i\frac{\bar{k}}{2}(n+\beta)^2\right)\tilde{\psi}_\beta(n, t-1) \\ &= \exp(-i\pi\ell n^2)\exp(-i2\pi\ell n\beta)\exp(-i\pi\ell\beta^2)\tilde{\psi}_\beta(n, t-1).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Comme la parité de  $n^2$  est la même que celle de  $n$ , nous avons  $\exp(-i\pi\ell n^2) = \exp(-i\pi\ell n)$ . Ceci est beaucoup plus intéressant car, du fait de la linéarité en  $n$ , la fonction d'onde  $\psi_\beta(X, t^-)$  s'écrit alors

$$\psi_\beta(X, t^-) = \exp(-i\pi\ell\beta^2)\sum_n \exp\left(-i2\pi\ell n\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\right) e^{i(n+\beta)X}\tilde{\psi}_\beta(n, t-1), \quad (4.4)$$

ce qui, en calculant la somme sur  $n$  et en remplaçant  $2\pi\ell$  par  $\bar{k}$ , donne

$$\psi_\beta(X, t^-) = \exp\left(i\frac{\bar{k}\beta(\beta+1)}{2}\right)\psi_\beta\left(X - \bar{k}\left(\beta + \frac{1}{2}\right), t-1\right). \quad (4.5)$$

A présent, on peut faire agir l'opérateur  $\hat{U}_{pulse}$ , qui est diagonal en représentation  $X$ . On aboutit alors à la relation de récurrence<sup>3</sup>

$$\psi_\beta(X, t) = e^{-i\kappa\cos X}\psi_\beta(X - v, t-1), \quad (4.6)$$

où l'on a posé

$$v = \bar{k}\left(\beta + \frac{1}{2}\right). \quad (4.7)$$

L'équation (4.6) se compose d'un terme de translation de la fonction d'onde au pulse ( $t-1$ ), qui reflète la propagation libre, et un terme de phase, qui caractérise l'action du pulse.

Nous retrouvons bien dans l'équation (4.6) ce que nous voyons sur la figure 4.1 : après s'être complètement délocalisé, le paquet d'ondes se "refocalise" et retrouve la même forme que celle qu'il avait avant la propagation libre, i.e.

$$\begin{aligned}|\psi_\beta(X, t)|^2 &= |\psi_\beta(X - v, t-1)|^2 \\ &= |\psi_\beta(X - vt, 0)|^2.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Si  $v = 0$ , le paquet se reconstruit toujours autour de la même position, alors que si  $v = \pi$ , il se reconstruit autour d'une position décalée d'une demi-période de potentiel à chaque pulse.

L'importance du terme exponentiel de (4.6) apparaît clairement lorsque l'on itère cette équation jusque  $t = 0$  :

$$\psi_\beta(X, t) = \exp(-i\kappa\Phi(X, t))\psi_\beta(X - vt, 0), \quad (4.9)$$

---

<sup>3</sup>On peut ignorer le facteur de phase global  $\exp\left(i\frac{\bar{k}\beta(\beta+1)}{2}\right)$ .

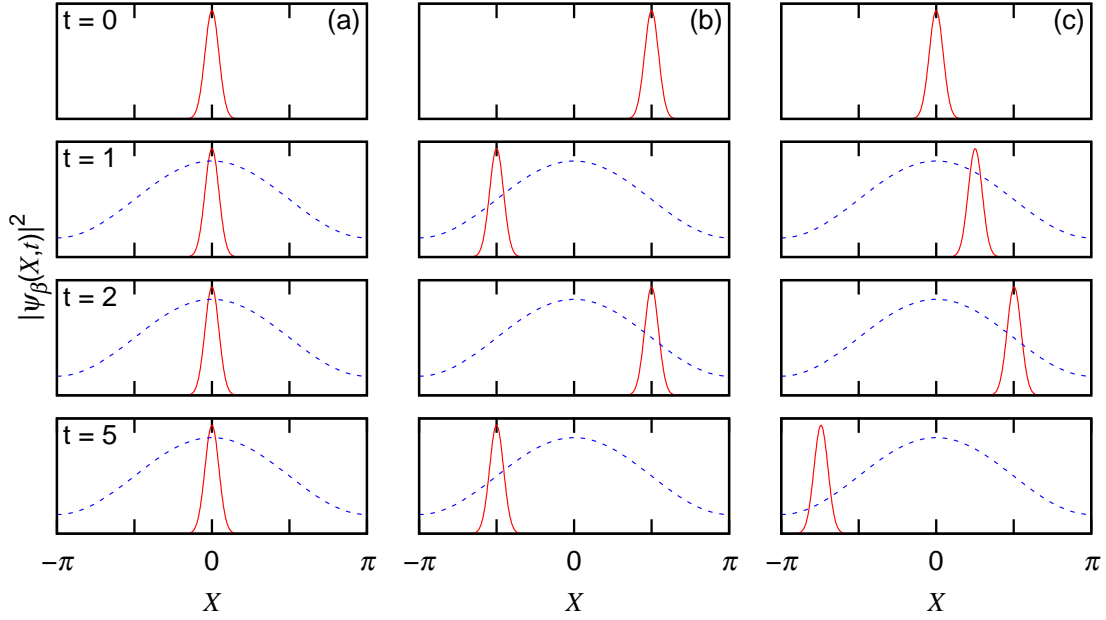


FIG. 4.2 – Différents types de dynamiques apparaissant pour une résonance quantique simple, illustrés par la probabilité de présence d'une onde de Bloch à différents instants : de haut en bas  $t = 0, 1, 2$  et 5 pulses. La colonne (a) correspond à la balisticité ( $\bar{k} = 4\pi$ ,  $\beta = 0$ ,  $v = 2\pi$ ), la colonne (b) à l'anti-résonance ( $\bar{k} = 2\pi$ ,  $\beta = 0$ ,  $v = \pi$ ), et la (c) à une dynamique quasi-périodique ( $\bar{k} = 4\pi$ ,  $\beta = \pi/50$ ,  $v/2\pi$  irrationnel). Le potentiel est représenté en pointillés. La distribution initiale est une gaussienne de largeur  $1/5\sqrt{2}$ .

où  $\Phi(X,t)$  est la phase accumulée tout au long de l'évolution dynamique

$$\Phi(X,t) = \sum_{s=0}^{t-1} \cos(X - vs). \quad (4.10)$$

Nous retrouvons une phase  $\Phi(X,t)$  caractéristique de la diffraction à travers un réseau, qui est une image parfois utilisée pour expliquer les RQ [26]. Les propriétés de  $\Phi(X,t)$  dépendent de façon drastique du paramètre  $v$ . En particulier, si  $v$  est  $2\pi$  sont commensurables :

$$v = 2\pi \frac{p}{q}, \quad (4.11)$$

c'est-à-dire si  $\beta = p/(q\ell) - 1/2 \pmod{1}$ ,  $\Phi(X,t)$  prend des valeurs remarquables selon  $q$  :  $\Phi(X,t = q) = \cos X$  pour  $q = 1$ , et  $\Phi(X,t = q) = 0$  pour  $q \neq 1$ .

Dans le premier cas ( $q = 1$ ,  $v = 2\pi$ ), représenté sur la figure 4.2 (a), nous avons

$$\psi_\beta(X,1) = e^{-i\kappa \cos X} \psi_\beta(X - 2\pi p, 0) = e^{-i\kappa \cos X} e^{-i2\pi p\beta} \psi_\beta(X, 0), \quad (4.12)$$

Après le pulse numéro  $t$ , la phase accumulée vaut donc  $\Phi(X,t = q) = t \cos X$ , ce qui est la signature d'un effet d'interférence constructive conduisant à la *balisticité*. Nous pouvons aussi interpréter cet effet purement cohérent, en disant que le paquet interagit toujours avec la même partie du potentiel, et donc qu'à chaque pulse, il reçoit la même quantité de mouvement. Nous voyons donc déjà que la balisticité s'interprète à l'aide d'idées intuitives, inspirées de la mécanique classique.

Dans le second cas ( $q \neq 1$ ), nous pouvons donc introduire un temps de récurrence  $t_r = q$  au bout duquel

$$\psi_\beta(X, t_r) = \psi_\beta(X - 2\pi p, 0) = e^{-i2\pi p\beta} \psi_\beta(X, 0). \quad (4.13)$$

Après  $t_r$  pulses, le paquet d'ondes retrouve son état initial : la dynamique est donc *périodique*. L'exemple le plus simple de ce comportement est donné par  $v = \pi$  ( $p = 1$ ,  $q = 2$  et  $t_r = 2$ ), où l'évolution sur  $t_r = 2$  pulses est donnée par

$$\psi_\beta(X, t_r = 2) = e^{-i\kappa \cos X} \psi_\beta(X - \pi, 1) = \psi_\beta(X - 2\pi, 0).$$

L'action du second pulse compense donc exactement celle du premier. Pour  $\hbar = 2\pi$  et  $\beta = 0$ , ce phénomène est connu sous le nom d'*anti-résonance* (cf. Fig. 4.2 (b)).

Enfin, comme nous le voyons sur la figure 4.2 (c), si  $v$  et  $2\pi$  ne sont pas commensurables, la phase  $\Phi(X, t)$  ne prend de valeur particulière : la dynamique est *quasi-périodique*. Les différents types de dynamiques, décrits ici à l'aide la fonction d'onde, vont apparaître de façon encore plus évidente avec le calcul des moyennes d'observables.

### 4.1.2 Valeurs moyennes d'observables

Nous allons chercher des relations de récurrence pour les moyennes de la position  $\langle X \rangle_\beta$ , de l'impulsion  $\langle P \rangle_\beta$  et de l'énergie cinétique  $\langle E \rangle_\beta = \langle P^2 \rangle_\beta / 2$ . Comme pour les fonctions d'ondes, la simplicité de ces relations de récurrence va nous permettre de les écrire explicitement en fonction des conditions initiales. La méthode pour calculer ces moyennes est donnée dans l'annexe A.1. Pour  $\langle X \rangle_\beta$ , nous arrivons ainsi à la formule

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_\beta(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} dX X |\psi_\beta(X, t)|^2 \\ &= \langle X \rangle_\beta(t-1) + v = \langle X \rangle_\beta(t=0) + vt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nous retrouvons, comme dans l'équation (4.6), l'idée que le paquet d'ondes est décalé d'une quantité  $v$  entre deux pulses. En ce qui concerne l'impulsion, nous avons (cf. Eq. (A.8))

$$\langle P \rangle_\beta(t) = -i\hbar \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta^*(X, t) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X, t). \quad (4.15)$$

En dérivant l'équation (4.6), nous obtenons la relation

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X, t) &= -i\hbar e^{-i\kappa \cos X} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X - v, t - 1) \\ &+ K \sin X \psi_\beta(X, t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

ce qui donne pour  $\langle P \rangle_\beta$

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_\beta(t) &= \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_\beta(X - v, t - 1)|^2 \\ &= \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X + vt) |\psi_\beta(X, 0)|^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

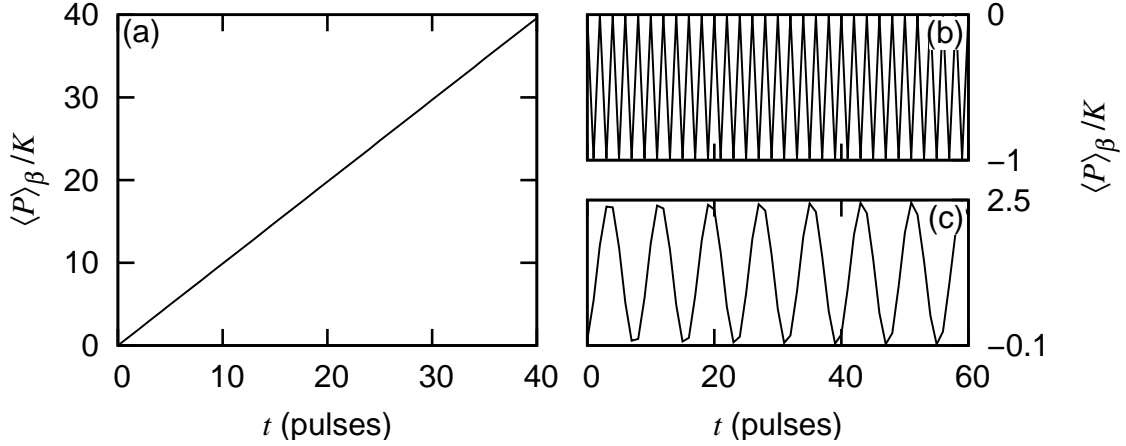


FIG. 4.3 – Comme sur la figure 4.2, différents types de dynamique apparaissant dans une RQS, illustrés ici avec l’impulsion moyenne en fonction du temps, calculée par simulation numérique : (a) dynamique balistique, (b) anti-résonance, (c) dynamique quasi-périodique. Le paquet d’ondes initial est gaussien de largeur  $1/5\sqrt{2}$ . Autre paramètre :  $K = 10$ .

La deuxième ligne de (4.17) nous permet de remonter jusque  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_\beta(t) &= \langle P \rangle_\beta(0) + K \sum_{n=1}^t \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X + nv) |\psi_\beta(X,0)|^2 \\ &= \langle P \rangle_\beta(0) + K \frac{\sin(tv/2)}{\sin(v/2)} \operatorname{Im} \left( e^{i(t+1)v/2} \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{iX} |\psi_\beta(X,0)|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

L’équation (4.18) contient le rapport de sinus caractéristique des effets de diffraction par un réseau. Notons qu’il est indépendant du paquet d’ondes initial. Si  $v = 2\pi [2\pi]$ , nous y retrouvons la balisticité

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(0) + D_1 t, \quad (4.19)$$

avec

$$D_1 = K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_\beta(X,0)|^2, \quad (4.20)$$

la force moyenne appliquée à chaque pulse de potentiel (cf. Fig. 4.3 (a)). A l’inverse, pour  $v = \pi [2\pi]$ ,  $\langle P \rangle_\beta(t)$  oscille entre deux valeurs :  $\langle P \rangle_\beta(0)$  si  $t$  est pair et  $\langle P \rangle_\beta(0) - D_1$  si  $t$  est impair : à  $t = 1$  la particule reçoit une force  $-D_1$ , puis à  $t = 2$ , elle reçoit  $+D_1$  car elle se retrouve décalée d’une demi-période par rapport au potentiel (cf. Fig. 4.3 (b)). Enfin dans le cas général  $v \neq 2\pi \frac{p}{q}$ ,  $\langle P \rangle_\beta$  évolue de façon quasi-périodique (cf. Fig. 4.3 (c)).

Nous pouvons aussi calculer l’énergie cinétique moyenne (cf. Eq. (A.13))

$$\langle E \rangle_\beta = \frac{\langle P^2 \rangle_\beta}{2} = \frac{\hbar^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \frac{\partial \psi_\beta^*}{\partial X} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial X}, \quad (4.21)$$

qui suit la relation de récurrence (cf. Eqs. (4.6) et (4.16))

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_\beta(t) &= \langle E \rangle_\beta(t-1) + \frac{K^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin^2(X+vt) |\psi_\beta(X,0)|^2 \\ &+ K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X+v) J(X,t-1), \end{aligned} \quad (4.22)$$

où l'on a introduit le courant

$$J(X,t) = i \frac{\hbar}{2} \left( \psi_\beta(X,t) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta^*(X,t) - c.c. \right). \quad (4.23)$$

Comme pour  $\langle P \rangle_\beta$ , nous pouvons “remonter” jusque  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_\beta(t) &= \langle E \rangle_\beta(t=0) + \frac{K^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( \sum_{n=1}^t \sin(X+nv) \right)^2 |\psi_\beta(X,t=0)|^2 \\ &+ K \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( \sum_{n=1}^t \sin(X+nv) \right) J(X,t=0). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nous retrouvons bien, pour  $v = 2\pi [2\pi]$ , le comportement balistique, pour lequel l'énergie cinétique augmente quadratiquement avec le temps. En effet, les termes en sinus et sinus carré sont alors indépendants de  $n$ , et l'équation (4.24) se simplifie en :

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_\beta(t) &= \langle E \rangle_\beta(t=0) + \frac{1}{2} K^2 t^2 \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin^2 X |\psi_\beta(X,t=0)|^2 \\ &+ Kt \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X J(X,t=0). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Le taux de diffusion pour l'énergie est donc proportionnel à la moyenne de  $K^2 \sin^2 X$  sur la distribution initiale. Pour tirer une interprétation simple des résultats précédents (Eqs. (4.18) et (4.24)), nous allons considérer deux cas limites pour la distribution initiale : celui d'un état totalement localisé en position et celui d'une onde plane.

### 4.1.3 Valeurs moyennes et cas limites

Nous avons vu, dans l'équation (4.6), qu'entre deux pulses successifs, la fonction d'onde est tradatée d'une quantité  $v$ . En d'autres termes, la population qui occupe l'état propre  $|X\rangle$  de l'opérateur position est transférée vers l'état  $|X+v\rangle$  au pulse suivant, puis vers  $|X+2v\rangle$  après 2 pulses, et ainsi de suite. Cela signifie que, pour étudier la dynamique d'un paquet d'ondes quelconque, il nous suffit de le “découper” en différentes tranches dans l'espace des positions, chacune évoluant indépendamment des autres. Cela nous incite, pour donner une image intuitive des RQS, à considérer un paquet initial totalement localisé en  $X = X_0 [2\pi]$  :

$$\psi_\beta(X,t=0) = e^{i\beta X} \sum_j \delta(X - X_0 - 2\pi j), \quad (4.26)$$

où  $\delta$  est la fonction “delta” de Dirac. Les équations (4.17) et (4.22) se simplifient donc considérablement : pour l'impulsion, nous obtenons

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \sin(X_0 + vt); \quad (4.27)$$

et pour l'énergie, après avoir remarqué que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dX J(X,t) = \langle P \rangle_{\beta}(t), \quad (4.28)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\beta}(t) &= \langle E \rangle_{\beta}(t-1) + \frac{1}{2} K^2 \sin^2(X_0 + vt) \\ &+ K \sin(X_0 + vt) \langle P \rangle_{\beta}(t-1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

En comparant les équations (4.27) et (4.29), on remarque que

$$\langle E \rangle_{\beta}(t) - \langle E \rangle_{\beta}(t-1) = \frac{1}{2} \left( \langle P \rangle_{\beta}^2(t) - \langle P \rangle_{\beta}^2(t-1) \right). \quad (4.30)$$

Cela signifie qu'à l'exception de leur différence à  $t = 0$ ,  $\langle E \rangle_{\beta}$  et  $\frac{1}{2} \langle P \rangle_{\beta}^2$  ont la même évolution dynamique<sup>4</sup>. Ceci n'est généralement pas vrai pour un paquet d'ondes quantique, mais l'est au contraire pour une particule classique. L'évolution des moyennes quantiques s'apparente donc à celle de variables classiques, régie par l'application

$$X_t = X_{t-1} + v \quad (4.31)$$

$$P_t = P_{t-1} + K \sin X_t, \quad (4.32)$$

avec l'énergie cinétique  $E_t = P_t^2/2$ .

Nous retrouvons l'idée que sur une période, la particule subit une "dérive" constante, mais surtout que son impulsion évolue en fonction de la force exercée localement par le pulse. Les équations (4.31) et (4.32) ressemblent donc à l'application standard (2.4) et (2.5) du rotateur pulsé classique, à la différence que  $X_t$  ne dépend pas de  $P_{t-1}$ .<sup>(5)</sup> Toutefois, elles mettent clairement en évidence l'analogie entre la balisticité quantique et les modes accélérateurs classiques (pour  $v = 2\pi[2\pi]$ ), mais aussi entre la périodicité quantique et les points fixes d'ordre élevé de l'application standard ( $v = 2\pi\frac{p}{q}$  pour une dynamique de période  $q$ ).

Il est intéressant de remarquer que, contrairement aux modes accélérateurs classiques, qui apparaissent dans une zone bien définie de l'espace des phases, la balisticité quantique existe pour toutes les conditions initiales  $(X_0, P_0)$  de (4.31) et (4.32). Il n'est donc pas pertinent ici de réaliser une analyse de stabilité, comme nous le faisons dans le cas classique. En revanche, nous pouvons nous interroger sur l'existence de la balisticité lorsque les paramètres  $\beta$  et  $\tilde{k}$  varient légèrement. Selon la quasi-impulsion  $\beta$ , la largeur  $\Delta\beta$  de la gamme donnant lieu à la balisticité diminue au cours du temps, i.e.  $\Delta\beta \sim \frac{1}{\tilde{k}t}$  (cf. Eq. (4.18)), ce qui veut dire que la balisticité est de plus en plus "sélective" au cours du temps. Pour un  $\tilde{k}$  légèrement hors-résonance, nous voyons, sur la figure 4.4, que la balisticité n'est visible que pendant un temps fini. Si  $\tilde{k} = 2\pi\ell + \epsilon$ , le paquet d'ondes ne se reconstruit pas totalement à chaque pulse, subissant ainsi une sorte de diffusion dans l'espace des positions, diffusion dont le taux est proportionnel à  $\epsilon$ . Jusqu'à  $t \simeq 30$  pulses, nous observons une balisticité plus importante qu'à l'exacte résonance, car en diffusant, les ailes du paquet d'ondes reçoivent une force plus élevée

<sup>4</sup> $\langle P \rangle_{\beta}(t=0) = 0$  alors que  $\langle E \rangle_{\beta}(t=0) \neq 0$ .

<sup>5</sup>Cela est dû au fait que  $X_t$  et  $P_t$  ne forment pas un couple de variables conjuguées [60].



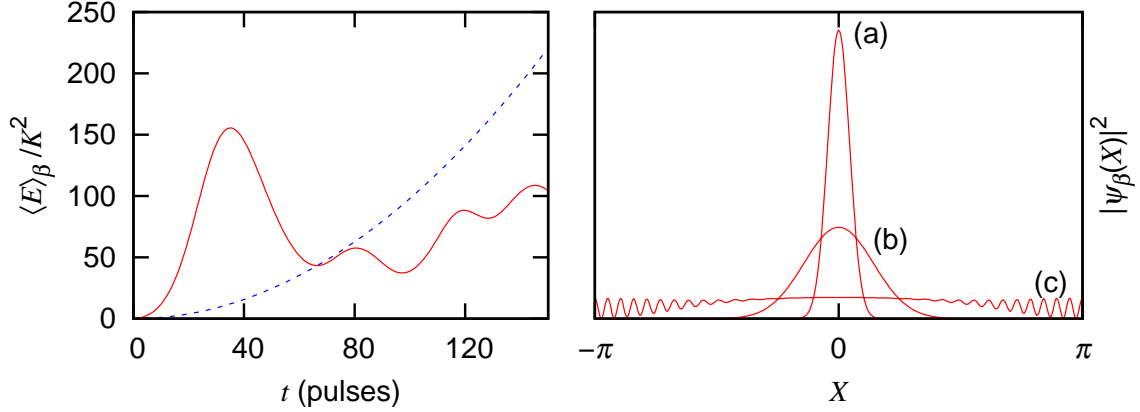


FIG. 4.4 – *Dynamique d'un rotateur pulsé légèrement hors-résonance* ( $\bar{k} = 4\pi + 0,01$ ). *A gauche, énergie cinétique moyenne en fonction du temps (traits pleins) à comparer avec le cas résonant*  $\bar{k} = 4\pi$  (pointillés). *A droite, probabilité de présence : (a) à  $t = 0$ , (b)  $t = 10$  et (c)  $t = 20$  pulses. Le paquet d'ondes initial est gaussien de largeur  $1/5\sqrt{2}$ . Les autres paramètres sont  $K = 10$ ,  $\beta = 0$  et  $X_0 = 0$ .*

qu'en restant proches de  $X = 0$  (cf. Eq. (4.24)). Puis, lorsque le paquet d'ondes s'est suffisamment étalé au point d'interférer avec lui-même, après un temps de l'ordre de  $\epsilon^{-1}$ , la balisticité s'arrête, et l'image simple développée tout au long de cette section ne s'applique plus.

L'autre cas limite, l'onde plane, s'avère plus utile expérimentalement. En effet, un condensat de Bose-Einstein peut être considéré comme une onde plane [26], car sa distribution en impulsion est très fine par rapport à la zone de Brillouin. Les gaz atomiques, quant à eux, ont une distribution plus large que la zone de Brillouin (cf. section 4.3), mais ils peuvent être décrits par un mélange statistique d'ondes planes [106]. En représentation  $X$ , un état initial décrit par une onde plane d'impulsion  $\bar{k} (n + \beta)$ , s'écrit

$$\psi_\beta(X, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n+\beta)X}. \quad (4.33)$$

Dans l'équation (4.18) qui donne  $\langle P \rangle_\beta(t)$ , l'intégrale du deuxième terme se réduit à celle d'un sinus et vaut donc 0 : l'impulsion moyenne reste inchangée, i.e. :

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(t = 0) = \bar{k} (n + \beta). \quad (4.34)$$

Concernant maintenant  $\langle E \rangle_\beta(t)$  (cf. Eq. (4.24)), seul le second terme, qui se réduit à la moyenne d'un sinus carré, est non nul, et nous aboutissons à l'expression bien connue [106]

$$\langle E \rangle_\beta(t) = \langle E \rangle_\beta(t = 0) + \frac{K^2 \sin^2(tv/2)}{4 \sin^2(v/2)}. \quad (4.35)$$

Les équations (4.34) et (4.35) indiquent que la distribution en impulsion reste toujours centrée autour de la même valeur, mais qu'elle s'étale symétriquement, plus ou moins fort selon la valeur de  $v$  (cf. discussion suivant l'équation (4.18)). Pour expliquer cela, nous allons utiliser les arguments développés pour les états localisés en position.

Plutôt qu'une onde plane, considérons un ensemble de particules classiques distribuées uniformément dans l'espace des positions. Lorsque le pulse est appliqué, la

particule qui se trouve en  $X$  reçoit la force  $K \sin X$ . Comme les particules couvrent tout l'espace des positions, il y en a forcément une en  $X + \pi$ , qui reçoit  $K \sin (X + \pi) = -K \sin X$ . Pour chaque particule qui reçoit une certaine force, il en existe donc une autre qui reçoit la force opposée. La force totale appliquée est donc nulle, et l'impulsion moyenne reste inchangée.

Maintenant, si une particule se retrouve toujours à la position  $X [2\pi]$ , i.e. si  $v = 2\pi [2\pi]$ , comme entre deux pulses successifs, toutes les particules se déplacent de la même quantité  $v$ , cela signifie que toutes se retrouveront au même endroit – à un multiple de  $2\pi$  près – à chaque pulse. Chacune recevra donc toujours la même force. Ainsi, même si la moyenne de l'impulsion est constante, sa variance augmente linéairement avec le temps, donnant ainsi lieu à de la balisticité. Un raisonnement analogue peut aussi expliquer les dynamiques périodique et quasi-périodique.

Dans cette section, nous avons donc étudié les résonances quantiques simples du rotateur pulsé, en calculant analytiquement sa fonction d'onde, et ses position, impulsion et énergie cinétique moyennes, mettant ainsi en lumière les comportement balistique, périodique et quasi-périodique. Nous avons constaté que l'espace des positions est particulièrement bien adapté pour faire nos calculs, car d'une part ils les simplifie beaucoup, et d'autre part, il permet de donner une interprétation intuitive, basée sur le concept de force, des différents comportements dynamiques. Dans le cas des résonances quantiques d'ordre supérieur, que nous allons étudier dans la section suivante, nous verrons que cette interprétation simple ne suffira pas à expliquer la dynamique du système.

## 4.2 Résonances quantiques d'ordre supérieur : exemple de $\tilde{k} = \pi$

Les résonances quantiques d'ordre supérieur (RQOS), qui apparaissent pour  $\tilde{k} = 4\pi \frac{r}{s}$  (avec  $s > 2$ ), sont l'analogue quantique de l'effet Talbot fractionnaire. Avant chaque pulse de potentiel, le paquet d'ondes initial se reconstruit en au moins deux<sup>6</sup> sous-paquets équidistants et de forme identique au premier. Cette "multiplication" des sous-paquets rend les équations plus difficiles à traiter que pour les RQS. Pour minimiser cette difficulté, nous considérerons la plus "simple" des RQOS :  $\tilde{k} = \pi$ , pour laquelle le paquet initial donne deux répliques. Un traitement analytique complet sera ainsi présenté pour la quasi-impulsion nulle, dont les résultats, renforcés par des simulations numériques, nous permettront ensuite de comprendre la dynamique des autres quasi-impulsions. Comme dans la section précédente, nous chercherons à déterminer l'évolution des fonctions d'ondes, puis de l'impulsion et de l'énergie cinétique moyennes du RPQ.

---

<sup>6</sup>Si  $s$  est pair, le paquet initial donne  $s/2$  sous-paquets ; si  $s$  est impair, il en donne  $s$ .

## 4.2.1 Evolution dynamique et formalisme matriciel

### 4.2.1.1 Evolution d'une onde de Bloch

Nous cherchons à écrire une relation de récurrence pour  $\psi_\beta(X,t)$ . Le calcul, présenté dans l'annexe A.2, aboutit à la relation

$$\begin{aligned} \psi_\beta(X,t) = & \frac{e^{-i\kappa \cos X}}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\pi/4} \psi_\beta(X - \bar{k}\beta, t-1) \right. \\ & \left. + e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} \psi_\beta(X - \bar{k}\beta - \pi, t-1) \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pour interpréter plus facilement (4.36), nous posons

$$w = \bar{k}\beta, \quad (4.37)$$

qui correspond à la dérive en position par pulse<sup>7</sup>, et

$$\phi(X,t) = \kappa \cos(X + wt), \quad (4.38)$$

la phase apportée par un pulse, ce qui donne, pour (4.36),

$$\begin{aligned} \psi_\beta(X + wt, t) = & \frac{e^{-i\phi(X,t)}}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\pi/4} \psi_\beta(X + w(t-1), t-1) \right. \\ & \left. + e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} \psi_\beta(X + w(t-1) - \pi, t-1) \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

A l'instant  $t$ , le paquet d'ondes est donc composé de deux sous-paquets, répliques du paquet initial, et décalés par rapport à lui des quantités  $wt$  et  $wt + \pi$ , respectivement. Chaque sous-paquet est multiplié par un facteur de phase qui reflète un motif d'interférence complexe, tel que celui observé sur la figure 4.5. Pour mieux comprendre ce motif, nous allons nous intéresser directement à "l'histoire" de chaque sous-paquet.

### 4.2.1.2 Ecriture matricielle de la dynamique

Nous commençons par décomposer  $\psi_\beta(X,t)$  sur chaque sous-paquet

$$\psi_\beta(X + wt, t) = c_1(X, t) \psi_\beta(X, 0) + c_2(X, t) \psi_\beta(X - \pi, 0), \quad (4.40)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des fonctions complexes, telles qu'à  $t = 0$ ,  $c_1(X, 0) = 1$  et  $c_2(X, 0) = 0$ . Pour trouver une relation de récurrence sur ces fonctions, nous introduisons la relation (4.40) dans (4.39), ce qui donne

$$\begin{aligned} \psi_\beta(X + wt, t) = & \frac{e^{-i\phi(X,t)}}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\pi/4} [c_1(X, t-1) \psi_\beta(X, 0) \right. \\ & \left. + c_2(X, t-1) \psi_\beta(X - \pi, 0)] \right. \\ & \left. + e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} [c_1(X - \pi, t-1) \psi_\beta(X - \pi, 0) \right. \\ & \left. + c_2(X - \pi, t-1) \psi_\beta(X - 2\pi, 0)] \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

---

<sup>7</sup>C'est l'analogie de  $v$  pour les RQS.

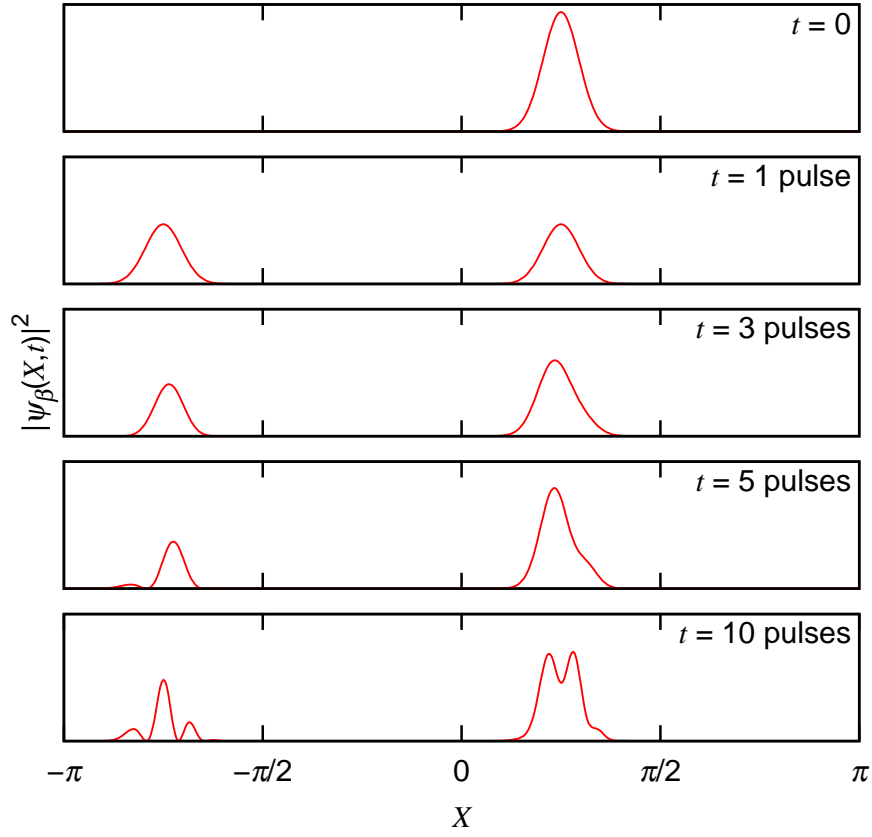


FIG. 4.5 – Probabilité de présence tracée à différents instants : de haut en bas  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 3$ ,  $t = 5$  et  $t = 10$  pulses. A mesure que le temps passe, la forme des deux sous-paquets se complique, reflétant la richesse croissante des effets d'interférence, d'où l'intérêt de suivre individuellement l'évolution de chaque sous-paquet. Le paquet d'ondes initial est gaussien de largeur  $1/5\sqrt{2}$ . Les autres paramètres sont  $\beta = 0$ ,  $K = 10$  et  $X_0 = \pi/4$ .

En comparant cette expression à (4.40) et en utilisant la relation  $\psi_\beta(X - 2\pi, 0) = e^{-i2\pi\beta}\psi_\beta(X, 0)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} c_1(X, t) &= \frac{e^{-i\phi(X, t)}}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\pi/4} c_1(X, t-1) + e^{i\pi/4} e^{-i\beta\pi} c_2(X - \pi, t-1) \right] \\ c_2(X, t) &= \frac{e^{-i\phi(X, t)}}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} c_1(X - \pi, t-1) + e^{-i\pi/4} c_2(X, t-1) \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Cette expression est intéressante, car en utilisant un raisonnement par récurrence, nous pouvons en déduire : d'une part que les fonctions  $c_1$  et  $c_2$  sont  $2\pi$ -périodiques  $\forall t$ , ce qui nous permet de réécrire l'équation (4.42) sur  $c_2$

$$c_2(X + \pi, t) = \frac{e^{i\phi(X, t)}}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} c_1(X, t-1) + e^{-i\pi/4} c_2(X + \pi, t-1) \right], \quad (4.43)$$

et d'autre part que  $\forall X, t$ ,  $|c_1(X, t)|^2 + |c_2(X + \pi, t)|^2 = 1$ .

A partir de  $c_1$  et  $c_2$ , si on définit le vecteur  $\mathbf{c}_t$  tel que

$$\mathbf{c}_t = \begin{pmatrix} c_1(X, t) \\ c_2(X + \pi, t) \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

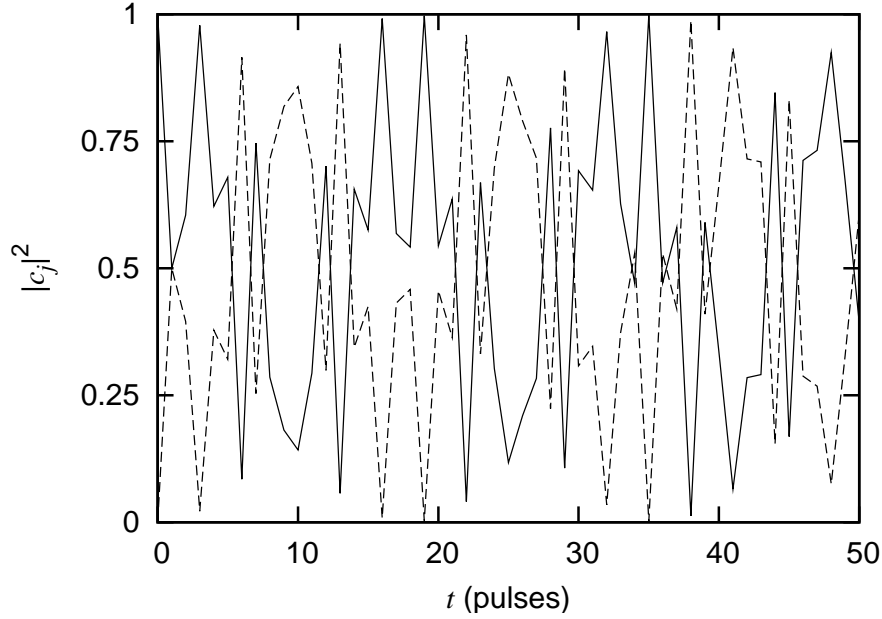


FIG. 4.6 – Evolution temporelle des coefficients  $|c_1|^2$  (traits pleins) et  $|c_2|^2$  (tirets), données par les équations (4.42) et (4.43), montrant une dynamique ressemblant à des oscillations de Rabi entre les états 1 et 2 (on a bien  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \forall t$ ). Les paramètres sont  $K = 10$ ,  $\beta = 1/2$  et  $X_0 = \pi/4$ .

la dynamique de l'OB peut être écrite sous la forme matricielle

$$\mathbf{c}_t = e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathbf{M}_t \mathbf{c}_{t-1} \quad (4.45)$$

avec  $\mathbf{M}_t$  une matrice unitaire donnée par

$$\mathbf{M}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & ie^{-i\phi}e^{-i\beta\pi} \\ ie^{i\phi}e^{i\beta\pi} & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

où  $\phi = \phi(X, t)$ . Il est intéressant de noter que  $\mathbf{M}_t$  peut être factorisée en

$$\mathbf{M}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-i\beta\pi} \\ ie^{i\beta\pi} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

où l'on retrouve l'opérateur de pulse dans la matrice de gauche qui est diagonale, et l'opérateur de propagation libre qui a pour effet de “mélanger” les deux sous-paquets de façon cohérente.

Dans le cas général,  $\mathbf{M}_t$  est une fonction de  $X$  et  $t$ . Mais si l'on considère un paquet d'ondes initial localisé autour de  $X_0$  (cf. Eq. (4.26)),  $X$  peut y être remplacé par  $X_0$  qui devient alors un simple paramètre. Le système est alors composé de deux “états discrets”, notés 1 et 2, et comme le montre la figure 4.6, sa dynamique s'apparente à des oscillations de Rabi entre ces deux états.

#### 4.2.1.3 Cas particulier de $\beta = 0$

Dans le cas  $\beta = 0$ , le problème se simplifie suffisamment pour en faire un traitement analytique complet. En effet, comme la phase  $\phi$  et donc la matrice  $\mathbf{M}_t \equiv \mathbf{M}$  sont

indépendantes du temps, i.e. :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\kappa \cos X} & ie^{-i\kappa \cos X} \\ ie^{i\kappa \cos X} & e^{i\kappa \cos X} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

il devient très intéressant de diagonaliser  $\mathbf{M}$ , dont les valeurs propres s'écrivent

$$\lambda_{\pm} = \exp(\pm i\Theta),$$

où<sup>8</sup>

$$\cos \Theta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} = \frac{\cos(\kappa \cos X)}{\sqrt{2}}. \quad (4.49)$$

En introduisant la matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ e^{-i\phi} - \sqrt{2}e^{i\Theta} & e^{-i\phi} - \sqrt{2}e^{-i\Theta} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

entre la base propre de  $\mathbf{M}_t$  et celle composée des niveaux 1 et 2, nous pouvons écrire  $\mathbf{c}_t$  sous la forme

$$\mathbf{c}_t = e^{-it\frac{\pi}{4}} \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{it\Theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\Theta} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{c}_0. \quad (4.51)$$

En faisant explicitement ce calcul, nous arrivons finalement aux expressions suivantes pour  $c_1$  et  $c_2$  :

$$c_1(X, t) = e^{-it\frac{\pi}{4}} \left[ \cos(t\Theta) - \frac{i\sqrt{2} \sin \phi}{2 \sin \Theta} \sin(t\Theta) \right] \quad (4.52)$$

$$c_2(X + \pi, t) = \frac{i\sqrt{2}}{2} \frac{e^{i\phi}}{\sin \Theta} e^{-it\frac{\pi}{4}} \sin(t\Theta). \quad (4.53)$$

Il est difficile d'extraire directement une information des équations (4.52) et (4.53), notamment de prédire la balisticité. Toutefois, nous pouvons d'ores et déjà signaler quelques cas particuliers. Le cas  $\phi = \Theta = \frac{\pi}{2} [\pi]$  ( $\cos \phi = \cos \Theta = 0$ ) donne

$$\begin{aligned} |c_1|^2 = 1, |c_2|^2 = 0 & \quad \text{pour } t = 2m \\ |c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2} & \quad \text{pour } t = 2m + 1, \end{aligned} \quad (4.54)$$

avec  $m$  un entier positif, c'est-à-dire qu'après un pulse de potentiel, la moitié du paquet d'ondes est transférée dans le niveau 2, puis après deux pulses, il revient en intégralité dans le niveau 1. Par ailleurs, pour  $\phi = 0 [\pi], \Theta = \frac{\pi}{4} [\pi]$  ( $|\cos \phi| = 1, |\cos \Theta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), les équations (4.52) et (4.53) deviennent

$$\begin{aligned} |c_1|^2 = 1, |c_2|^2 = 0 & \quad \text{pour } t = 4m \\ |c_1|^2 = 0, |c_2|^2 = 1 & \quad \text{pour } t = 4m + 2 \\ |c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2} & \quad \text{pour } t = 2m + 1, \end{aligned} \quad (4.55)$$

avec  $m$  un entier positif, ce qui signifie qu'il y a échange complet de population tous les deux pulses. Pour en savoir plus sur la dynamique dans ces cas particuliers comme dans le cas général, nous allons maintenant calculer les moyennes de  $\langle P \rangle_{\beta}$  et  $\langle E \rangle_{\beta}$ .

<sup>8</sup>Comme  $|\cos \Theta| \leq 1/\sqrt{2}$ ,  $\pi/4 \leq |\Theta| \leq 3\pi/4$ .

## 4.2.2 Valeurs moyennes d'observables

### 4.2.2.1 Relation de récurrence dans le cas général

Revenons maintenant au cas de  $\beta$  quelconque. Pour calculer  $\langle P \rangle_\beta$  et  $\langle E \rangle_\beta$ , données respectivement par les équations (A.8) et (A.13), nous cherchons d'abord l'action de l'opérateur impulsion sur  $\psi_\beta(X,t)$ . En dérivant la relation (4.36), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X,t) &= K \sin X \psi_\beta(X,t) - i\hbar \frac{e^{-i\kappa \cos X}}{\sqrt{2}} \\ &\times \left( e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-w,t-1) \right. \\ &\left. + e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\beta\pi} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-w-\pi,t-1) \right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Tout comme (4.56),  $\langle P \rangle_\beta(t)$  va comporter deux termes, dont le calcul, développé dans l'annexe A.2, permet de trouver la relation de récurrence

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_\beta(X,t)|^2. \quad (4.57)$$

Cette équation est similaire à celle trouvée pour les RQS (cf. Eq (4.17)) : à chaque pulse, l'impulsion change d'une quantité égale à la force moyenne reçue par le paquet d'ondes.

En partant de (4.56) et en utilisant le même raisonnement que pour  $\langle P \rangle_\beta$ , nous trouvons, pour  $\langle E \rangle_\beta$ , la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_\beta(t) &= \langle E \rangle_\beta(t-1) + \frac{K^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin^2 X |\psi_\beta(X,t)|^2 \\ &+ K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X J'(X-w,t-1), \end{aligned} \quad (4.58)$$

où nous avons posé

$$J'(X,t) = \frac{\hbar}{2} e^{i\beta\pi} \psi_\beta^*(X,t) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-\pi,t) + c.c. \quad (4.59)$$

A première vue, l'équation (4.58) ressemble fort à son analogue (4.22) pour les résonances quantiques simples. Mais le terme de courant est en fait très différent car il couple de façon cohérente les deux parties de paquet d'ondes initial. Nous entre-voyons donc avec (4.58), que les RQOS, contrairement aux RQS, ne peuvent pas être interprétées à l'aide d'arguments classiques. Pour s'en convaincre davantage, nous allons maintenant calculer explicitement  $\langle P \rangle_\beta$  et  $\langle E \rangle_\beta$  dans le cas  $\beta = 0$ .

### 4.2.2.2 Calcul explicite pour $\beta = 0$

Pour  $\langle P \rangle_\beta$ , le calcul est direct : il suffit d'introduire (4.40) dans (4.57), tout en supposant que le paquet d'ondes initial est fortement localisé autour de  $X_0$ . Ceci nous permet de négliger les termes croisés entre  $c_1$  et  $c_2$ , et nous donne

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \sin(X_0 + wt) (|c_1(X_0,t)|^2 - |c_2(X_0 - \pi,t)|^2). \quad (4.60)$$

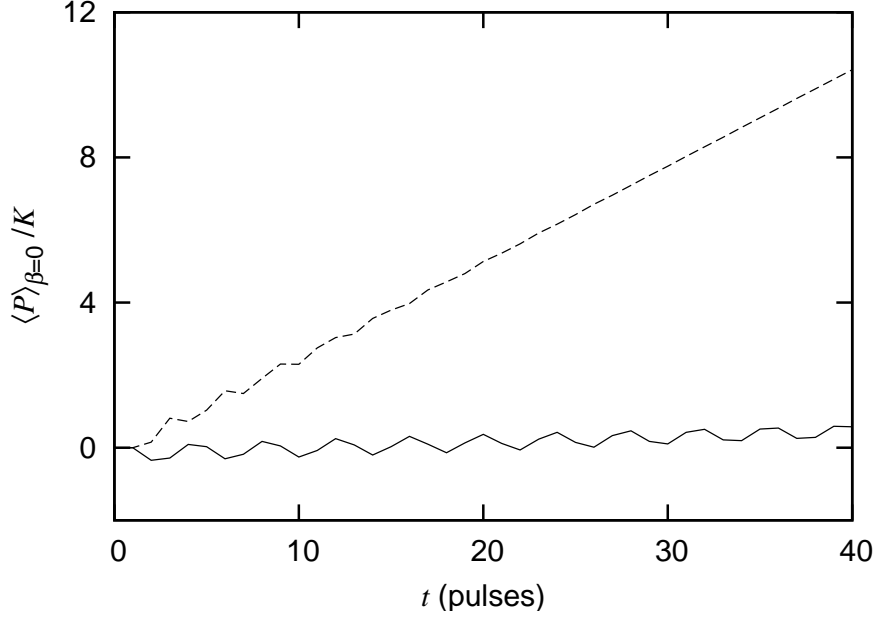


FIG. 4.7 – *Comportement balistique combiné à des oscillations, observé sur l'impulsion moyenne en fonction du temps, calculée par simulation numérique, pour  $X_0 = \pi/8$  (traits pleins) et  $X_0 = \pi/4$  (tirets). Le paquet d'ondes initial est gaussien de largeur  $1/5\sqrt{2}$ . Les autres paramètres sont  $K = 10$  et  $\beta = 0$ .*

Il apparaît donc clairement que les deux sous-paquets reçoivent des impulsions de signe opposé, qui dépendent de la force locale et de leur poids relatif. Notons, par exemple, que s'ils ont la même amplitude, i.e.  $|c_1(X_0, t)|^2 = |c_2(X_0 - \pi, t)|^2 = 1/2$ , l'impulsion totale est inchangée.

En remplaçant  $c_1(X_0, t)$  et  $c_2(X_0 - \pi, t)$  par leur expression (4.52) et (4.53), nous pouvons “remonter” jusqu'à  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_{\beta=0}(t) &= \langle P \rangle_{\beta=0}(t=0) + K \sin X_0 \\ &\times \left[ \left( \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} \right) t + \frac{1}{2(1 + \sin^2 \phi)} \left( \frac{\sin [(2t + 1)\Theta]}{\sin \Theta} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Nous retrouvons bien une diffusion balistique, mais aussi une partie oscillante (cf. Fig. 4.7). La coexistence de ces deux comportements est propre aux RQOS, alors que dans les RQS, apparaît soit l'un soit l'autre. Si  $\sin X_0 \neq 0$  et  $\sin \phi \neq 0$ , après un temps suffisamment long, le terme oscillant devient négligeable, et il reste

$$\langle P \rangle_{\beta=0}(t) \simeq \langle P \rangle_{\beta=0}(t=0) + D_2 t, \quad (4.62)$$

où  $D_2$  est le taux de diffusion

$$D_2 = K \sin X_0 \left( \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} \right) = \alpha D_1, \quad (4.63)$$

où  $D_1$  est le taux pour les RQS (cf. Eq. (4.20)), et

$$\alpha = \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi}. \quad (4.64)$$



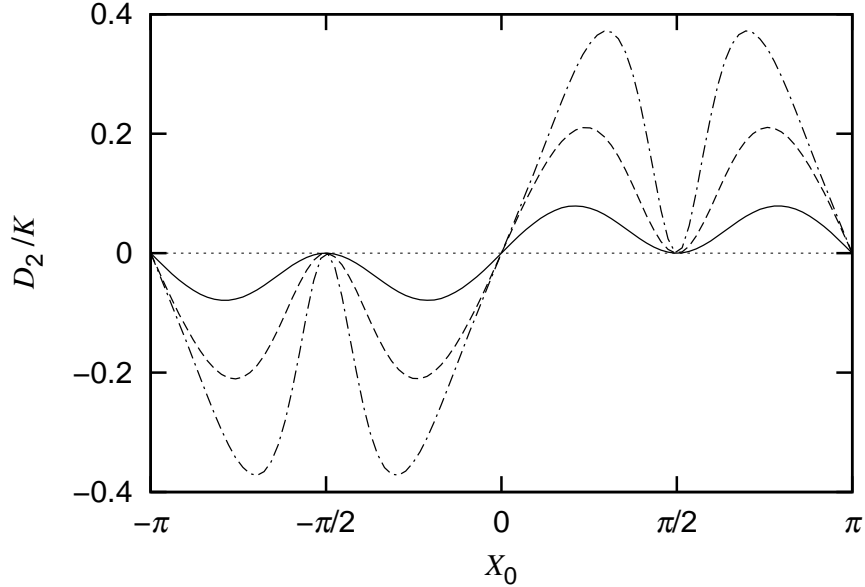


FIG. 4.8 – Variation du taux de diffusion en impulsion  $D_2$ , donné par l'équation (4.63), en fonction de la position initiale  $X_0$  : pour  $\kappa = 0,5$  (traits pleins),  $\kappa = 1$  (tirets) et  $\kappa = 2$  (tirets-pointillés). L'axe des ordonnées, dessiné en fins pointillés, met bien en évidence que le taux de diffusion est impair en  $X_0$ , et qu'il s'annule en  $X_0 = \pm\pi/2$ , là où la force est pourtant maximale en valeur absolue.

Cette deuxième forme met clairement en évidence la différence fondamentale entre RQS et RQOS. Ici, le taux de diffusion est aussi lié à la force exercée par un pulse de potentiel, mais il est pondéré par le facteur  $\alpha$ . Ce facteur, compris entre 0 et 1/2, reflète les interférences entre les deux sous-paquets.

Pour illustrer ce point, l'exemple de  $X_0 = \pi/2$  ( $\phi = 0$ ) est très parlant : le taux de diffusion est nul, alors que la force appliquée est maximale. Ceci est dû au fait que tous les deux pulses, le paquet d'ondes est entièrement transféré d'un niveau à l'autre (cf. Eq. (4.55)), et donc reçoit une quantité de mouvement opposée à celle reçue deux pulses plus tôt. A l'inverse, si  $\phi = \pi/2$  [ $\pi$ ], le taux de diffusion est maximal et égal à  $D_1/2$ . Ce facteur 1/2 s'explique par le fait que le paquet d'ondes initial ne peut entièrement se reconstruire qu'après deux pulses (cf. Eq. (4.54)).

Ces deux cas limites sont clairement visibles sur les figures 4.8 et 4.9, où nous voyons que  $D_2$  oscille suivant les valeurs de  $X_0$  et  $\kappa$ . Les oscillations en  $\kappa$  (qui est proportionnel à l'intensité des pulses  $K$ ) sont remarquables : contrairement aux RQS, *augmenter l'intensité des pulses n'augmente pas nécessairement l'impulsion du rotateur*. En particulier, si  $\phi = \kappa \cos X_0 = 0$  [ $\pi$ ], il n'y a pas de diffusion.

En ce qui concerne l'énergie cinétique  $\langle E \rangle_\beta$ , les calculs, plus complexes, sont présentés dans l'annexe A.3. Ils permettent d'aboutir à l'expression

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\beta=0}(t) &= \langle E \rangle_{\beta=0}(t=0) + \frac{K^2}{2} \sin^2 X_0 \\ &\times \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} t^2 + \frac{1}{4 \sin^4 \Theta} (1 - \cos(2t\Theta)) \right\} \end{aligned} \quad (4.65)$$

qui se compose également d'une partie balistique et d'une partie oscillante. Comme

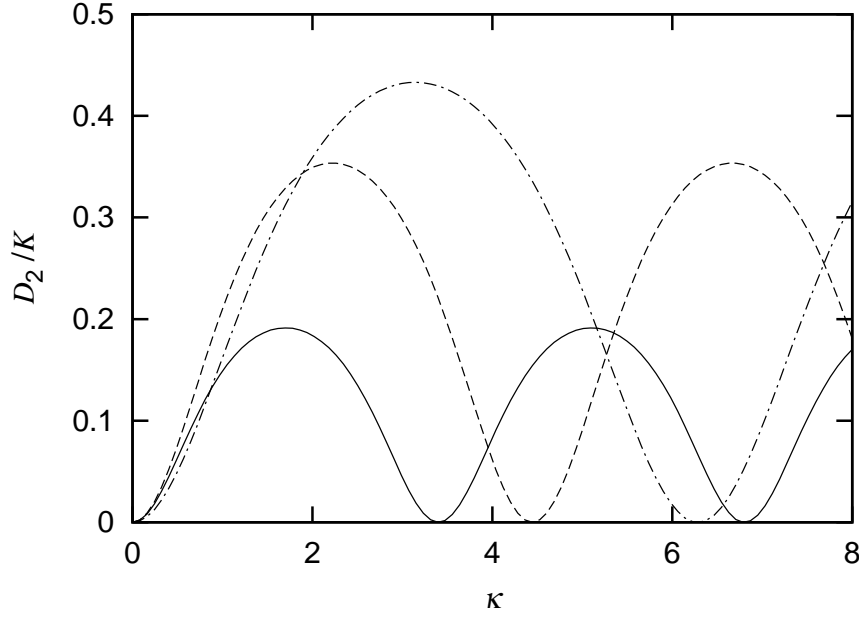


FIG. 4.9 – Variation du taux de diffusion en impulsion  $D_2$ , donné par l'équation (4.63), en fonction de  $\kappa$  : pour  $X_0 = \pi/8$  (traits pleins),  $X_0 = \pi/4$  (tirets) et  $X_0 = \pi/3$  (tirets-pointillés). Le taux de diffusion n'augmente pas forcément avec l'amplitude des pulses ; il peut même être nul pour certaines valeurs de  $K$ .

pour  $\langle P \rangle_\beta$ , le taux de diffusion  $D_3$  s'écrit

$$D_3 = \frac{1}{2}\alpha D_1^2, \quad (4.66)$$

c'est-à-dire celui obtenu pour les RQS multiplié par le facteur d'interférences  $\alpha/2$ . Ce résultat est le même que dans la référence [90], mais l'approche pour y arriver est complètement différente. Contrairement aux RQS, les taux de diffusion en impulsion et en énergie cinétique ne sont pas liés par la relation

$$D_3 \neq \frac{1}{2}D_1^2, \quad (4.67)$$

il est clair qu'un raisonnement classique, tel que celui qui a abouti à l'application (4.31) et (4.32), n'est pas utilisable, ce qui, une fois de plus, distingue les deux types de résonances.

#### 4.2.2.3 Balisticité pour $\beta \neq 0$

Comme nous l'avons démontré ci-dessus, la balisticité s'observe avec les RQOS, comme avec les RQS. Dans les deux cas, elle peut être interprétée comme l'apport d'une même quantité de mouvement à chaque pulse. Dans les résonances simples, tout le paquet se reconstruit au même endroit et reçoit l'impulsion  $K \sin X_0$ . Dans le cas où  $\bar{k} = \pi$ , le paquet d'ondes se divise en deux sous-paquets recevant une quantité de mouvement de signe opposé : l'un  $+|c_1(X_0, t)|^2 K \sin X_0$  et l'autre  $-|c_2(X_0 - \pi, t)|^2 K \sin X_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  étant le fruit d'interférences (quantiques) complexes. Cette "compétition" entre les deux sous-paquets diminue l'impulsion totale reçue ; mais sauf cas particulier (cf. Eq. (4.55)),

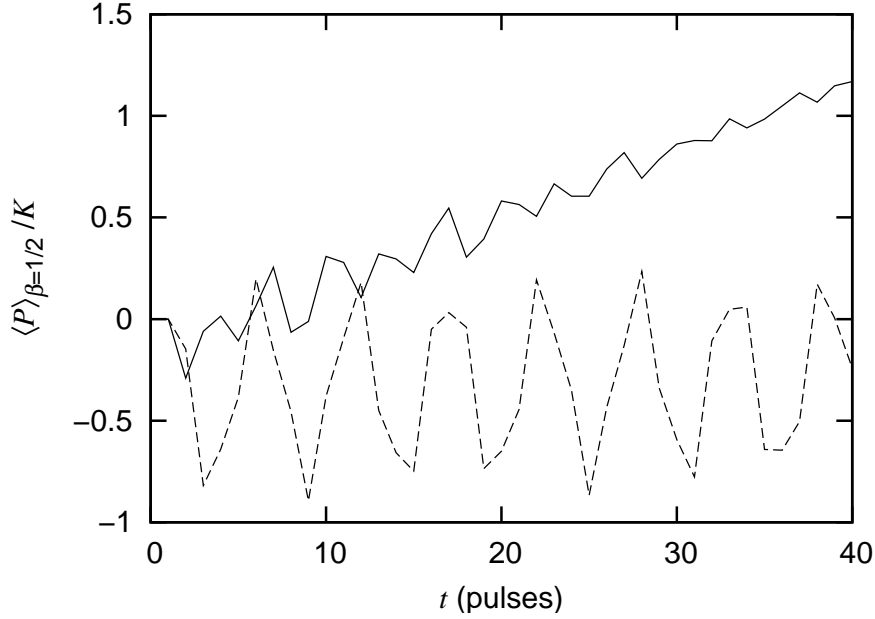


FIG. 4.10 – Evolution temporelle de l'impulsion moyenne, déterminée par simulation numérique pour  $\beta = 1/2$ , montrant un mouvement balistique combiné à des oscillations : pour  $X_0 = \pi/8$  (traits pleins) et  $X_0 = \pi/4$  (tirets). Le paquet d'ondes initial est gaussien de largeur  $1/5\sqrt{2}$ . Autre paramètre :  $K = 10$ .

l'un des deux sous-paquets reçoit globalement une quantité de mouvement supérieure à l'autre, ce qui crée une balisticité moyenne, accompagnée de fluctuations.

Considérons maintenant le cas  $\beta = 1/2$  ( $w = \pi/2$ ). Après deux impulsions, le paquet initial se reconstruit en deux parties, comme suit :

- l'une en  $X_0 + 2w = X_0 + \pi$ , qui reçoit  $-|c_1(X_0, t = 2)|^2 K \sin X_0$  ;
- l'autre en  $X_0 + 2w + \pi = X_0$ , qui reçoit  $+|c_2(X_0, t = 2)|^2 K \sin X_0$  ;

puis, après quatre impulsions :

- l'une en  $X_0 + 4w = X_0$ , qui reçoit  $+|c_1(X_0, t = 4)|^2 K \sin X_0$  ;
- l'une en  $X_0 + 4w + \pi = X_0 + \pi$ , qui reçoit  $-|c_2(X_0, t = 4)|^2 K \sin X_0$ ,

et ainsi de suite. Donc, malgré "l'inversion" entre les deux sous-paquets à  $t = 2$ , nous pouvons appliquer à  $\beta = 1/2$  le raisonnement fait pour  $\beta = 0$  : en se reconstruisant en  $X_0$  et  $X_0 + \pi$ , le paquet d'ondes reçoit en moyenne une quantité de mouvement constante qui crée la balisticité (cf. Fig 4.10). Ceci est même valable pour toutes les quasi-impulsions rationnelles  $\beta = p/q$ , pour lesquelles le paquet d'ondes revient à sa position initiale après un temps de récursion  $t_r = 2\pi q/(p\hbar)$ . En apparence, cette balisticité change radicalement des RQS où les quasi-impulsions rationnelles donnent lieu à une dynamique périodique (par exemple, l'anti-résonance) ; mais en réalité, elle apparaît comme la conséquence du fait que, contrairement aux RQS, les impulsions successives ne se compensent pas *exactement*.

La balisticité des quasi-impulsions rationnelles peut également être expliquée à l'aide du formalisme matriciel développé ci-dessus. En réécrivant l'équation (4.51) sous la forme générale

$$\mathbf{c}_t = (\mathbf{M}_t^+ e^{i\Theta(X_0, t)} + \mathbf{M}_t^- e^{-i\Theta(X_0, t)}) \times \mathbf{c}_{t-1}, \quad (4.68)$$

nous mettons en évidence deux termes : le premier en  $e^{i\Theta(X_0, t)}$  qui apporte une impul-

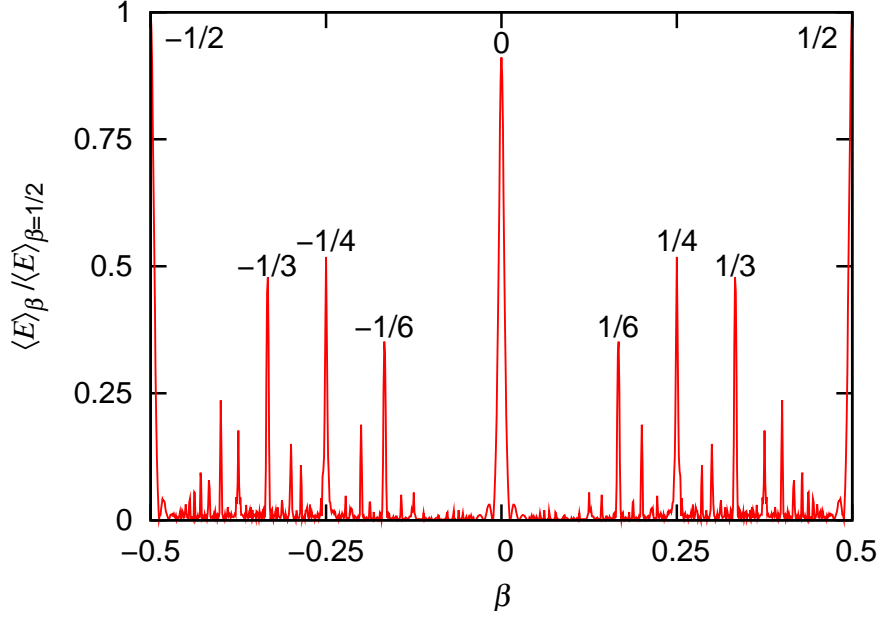


FIG. 4.11 – Simulation numérique donnant l'énergie cinétique moyenne en fonction de la quasi-impulsion  $\beta$  après 80 pulses (avec  $K = 10$ ). Les pics, dont les principaux sont indexés, correspondent aux quasi-impulsions rationnelles. De façon générale, leur hauteur diminue à mesure que le dénominateur de  $\beta$  augmente. Leur forme en sinus cardinal, observée pour les RQS (cf. Eq. (4.35)), est ici visible autour de  $\beta = 0$  et  $\pm 1/2$ . Pour s'affranchir de l'effet de la position initiale, nous prenons comme distribution initiale une onde plane (cf. Eq. (4.33)).

sion proportionnelle à  $K \sin(X_0 + \hbar\beta t)$  et les second en  $e^{-i\Theta(X_0,t)}$  qui en apporte une proportionnelle à  $-K \sin(X_0 + \hbar\beta t)$ . Pour  $\beta = 0$ , l'équation (4.68) s'itère facilement

$$\mathbf{c}_t = (\mathbf{M}^+ e^{it\Theta(X_0,t)} + \mathbf{M}^- e^{-it\Theta(X_0,t)}) \times \mathbf{c}_0, \quad (4.69)$$

car  $\mathbf{M}^\pm$  ne dépendent pas du temps. Nous retrouvons donc bien deux termes pour l'impulsion, en  $Kt \sin X_0$  et en  $-Kt \sin X_0$ , ce qui caractérise la balisticité.

Pour toutes les quasi-impulsions non-nulles,  $\mathbf{M}_t$  dépend du temps, mais pour celles qui sont rationnelles,  $\mathbf{M}_t$  est périodique, de période  $t_r$ . Par exemple, pour  $\beta = 1/2$ , comme  $t_r = 4$ , il est possible de construire la matrice  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_4 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$ , indépendante du temps, et à laquelle nous pourrions appliquer une relation semblable à (4.69). Pour  $\beta = p/q$ , en posant

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{t_r} \times \mathbf{M}_{t_r-1} \times \cdots \times \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_1, \quad (4.70)$$

nous ferons apparaître une balisticité dont le taux de diffusion est proportionnel à  $1/t_r$  (cf. Fig 4.11).

Dans cette section, nous avons étudié, analytiquement et numériquement, la résonance quantique d'ordre supérieur  $\hbar = \pi$ . Celle-ci se caractérise par le fait que la balisticité se combine avec la (quasi-)périodicité et aussi qu'elle apparaît pour toutes les quasi-impulsions rationnelles. Nous avons expliqué ce phénomène à l'aide d'un formalisme matriciel donnant le poids relatif de sous-paquets composant la fonction d'onde. Grâce à un développement analytique complet du cas  $\beta = 0$ , nous avons aussi mis en

évidence le rôle prépondérant des interférences entre les deux sous-paquets, qui rendent insuffisant le raisonnement basé sur la force, présenté pour les RQS. Ces interférences induisent une réponse parfois surprenante du RPQ au forçage qui lui est appliqué : par exemple l'énergie cinétique n'augmente pas de façon monotone avec l'amplitude des pulses. L'objet de la section 4.3 est de déterminer les conditions expérimentales favorables à l'observation des effets décrits dans les sections 4.1 et 4.2.

### 4.3 Observation des résonances quantiques dans les conditions expérimentales

La manière la plus directe de refroidir des atomes par laser est d'utiliser un piège magnéto-optique (cf. Ch. 1). Ils en sortent avec une température de l'ordre du millikelvin, c'est-à-dire que leur distribution en impulsion a une largeur de quelques impulsions de recul. Elle couvre donc toute la zone de Brillouin, contenant ainsi toutes les quasi-impulsions. Par des techniques plus avancées, comme le refroidissement évaporatif utilisé pour atteindre la condensation de Bose-Einstein ou encore la sélection de vitesses Raman, la distribution en impulsion peut ensuite être fortement affinée jusqu'à une largeur de l'ordre du cinquantième de la zone de Brillouin. Il est donc possible d'obtenir une distribution "plutôt large" ou une distribution "plutôt fine" en impulsion, les deux donnant lieu à une dynamique différente.

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de simulations numériques et de calculs analytiques dans les deux situations expérimentales précédentes. Pour faire le lien avec les sections 4.1 et 4.2, nous commencerons par considérer une distribution initiale fine en impulsion – CBE ou Raman –, qui se rapproche fortement du cas des deux sections précédentes, où une seule quasi-impulsion est peuplée. Ensuite, nous considérerons une distribution large en impulsion – de type PMO –, en distinguant RQS et RQOS. Qu'elle soit fine ou large, la distribution initiale est toujours symétrique en  $P$ , ce qui fait que son impulsion moyenne reste nulle au cours du temps (cf. Eq. (A.7)), i. e.

$$\langle P \rangle (t) = \langle P \rangle (0) = 0. \quad (4.71)$$

Pour avoir une information pertinente, nous calculerons donc l'énergie cinétique moyenne  $\langle E \rangle$ .

Nous commençons donc, sur la figure 4.12, par prendre une distribution initiale fine, i.e. de largeur  $\bar{k}/25$ . La quasi-impulsion centrale  $\beta = 0$  influence clairement la dynamique, en induisant les oscillations caractéristiques de l'anti-résonance  $\bar{k} = 2\pi$ . Ces oscillations sont cependant amorties au cours du temps, du fait de l'épaisseur finie de la distribution en impulsion. Les autres quasi-impulsions acquièrent petit à petit un déphasage qui produit des interférences destructives. Cet effet est comparable à celui des collisions dans un CBE sur les oscillations de Bloch [47, 10, 42, 94]. De façon générale, une distribution fine présente le comportement dynamique de sa quasi-impulsion centrale, mais seulement pendant un temps limité, inversement proportionnel à son épaisseur.

Dans le cas d'une distribution large, au contraire, toutes les quasi-impulsions sont présentes avec un poids sensiblement égal. Pour calculer l'énergie cinétique moyenne dans le cas des RQS, nous supposons que notre paquet d'ondes initial est d'incertitude minimale, i.e.  $\Delta X \Delta P \simeq \bar{k}/2$ . Nous pouvons donc le considérer très fin en  $X$ , et, comme

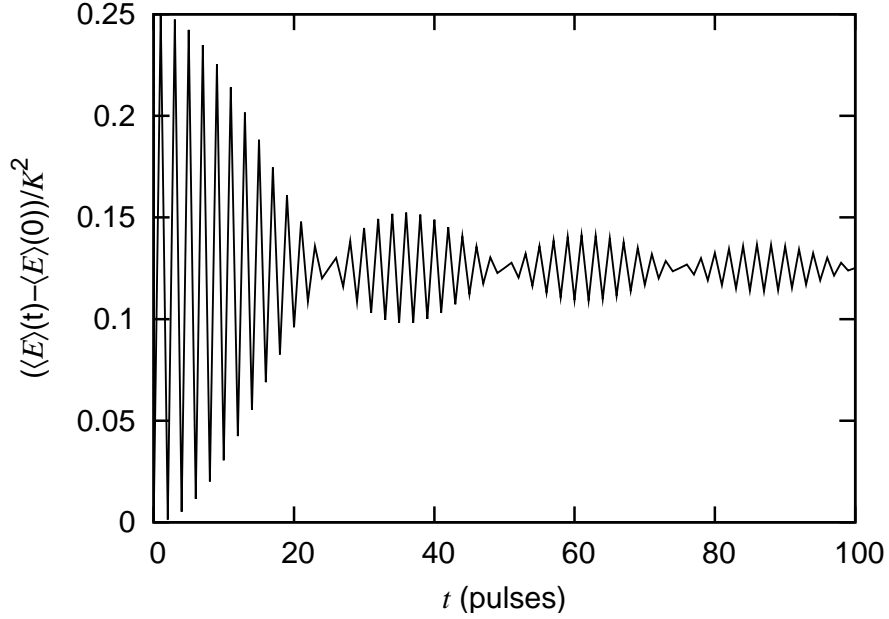


FIG. 4.12 – Simulation numérique donnant l'énergie cinétique moyenne en fonction du temps pour l'anti-résonance  $\bar{k} = 2\pi$  et  $K = 10$ . La condition initiale est une distribution carrée et incohérente d'ondes planes, de largeur  $\Delta = \bar{k}/25$  (cf. Eq. (2.27)). Les oscillations de l'anti-résonance sont amorties par un sinus cardinal (soit la transformée de Fourier de la distribution initiale), dont le premier zéro se trouve à  $t = 1/\Delta$ .

l'indique l'équation (A.11), faire une moyenne sur  $\beta$  de l'équation (4.29). En itérant jusque  $t = 0$ , nous arrivons à la diffusion bien connue

$$\langle E \rangle(t) = \langle E \rangle(t=0) + \frac{1}{4}K^2t \quad (4.72)$$

(voir par exemple Réf. [106], Eq. (24)). Nous voyons tout d'abord que (4.72) ne comprend pas de terme dépendant de la position, ce qui peut s'expliquer de la façon suivante<sup>9</sup>. Considérons un paquet d'ondes initial localisé autour de  $X_0$ . Après un pulse, les paquets correspondant aux différentes quasi-impulsions vont se reconstruire autour de positions différentes,  $X_0 + \bar{k}(\beta + 1/2)$ . Comme  $\bar{k} = 2\pi\ell$ , ces différentes positions, comprises entre  $X_0$  et  $X_0 + 2\pi\ell$ , recouvrent uniformément  $\ell$  périodes du potentiel. Nous retrouvons ainsi une situation analogue au rotateur pulsé classique, dont le comportement chaotique diffusif est expliqué par le fait que  $X$  devient une variable aléatoire, et donc, qu'à chaque pulse, un ensemble de rotateurs couvrent aussi toute une période de potentiel. Dans les deux cas, la force totale reçue est nulle, mais ses valeurs non-nulles génèrent de la diffusion.

L'équation (4.72) est en très bon accord avec la simulation présentée sur la figure 4.13. Dans cette simulation, la distribution initiale est une superposition de quasi-impulsions dont chacune a une phase aléatoire. Dans l'espace des positions, cela équivaut à attribuer à chaque  $\beta$  un  $X_0$  différent. Compte tenu de l'indépendance de  $\langle E \rangle$  par rapport à  $X_0$ , expliquée ci-dessus, il est logique que nous retrouvons un comportement diffusif pour l'énergie cinétique.

<sup>9</sup>Cette explication est différente de l'effet de "compétition" entre quasi-impulsions qui est habituellement avancé.

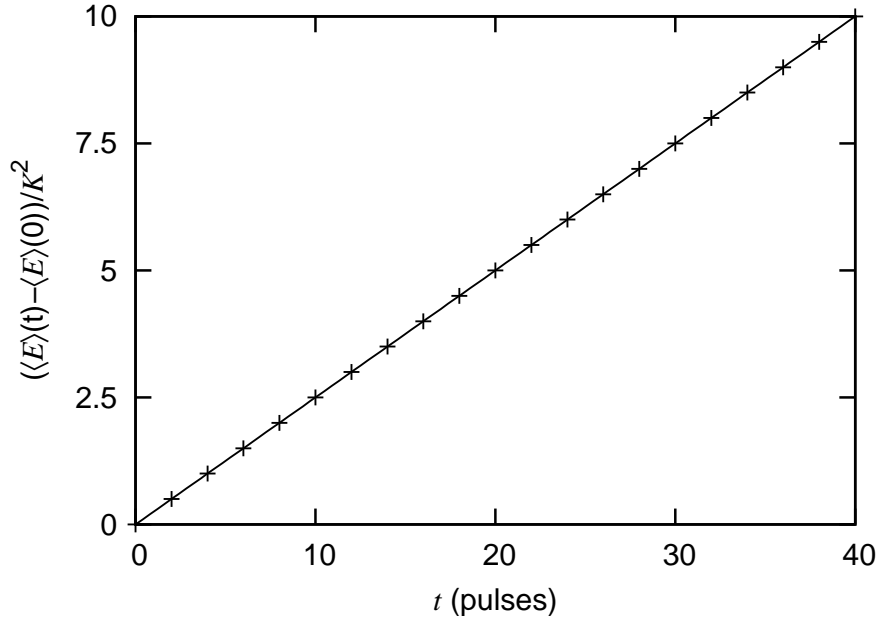


FIG. 4.13 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique moyenne pour  $\hbar k = 4\pi$  et  $K = 10$ . La simulation numérique, pour un mélange statistique de 400 quasi-impulsions, de forme gaussienne (largeur en impulsion  $5/\sqrt{2}$ ) est représentée avec des croix. Elle est à comparer avec l'équation (4.72) tracée en traits pleins.

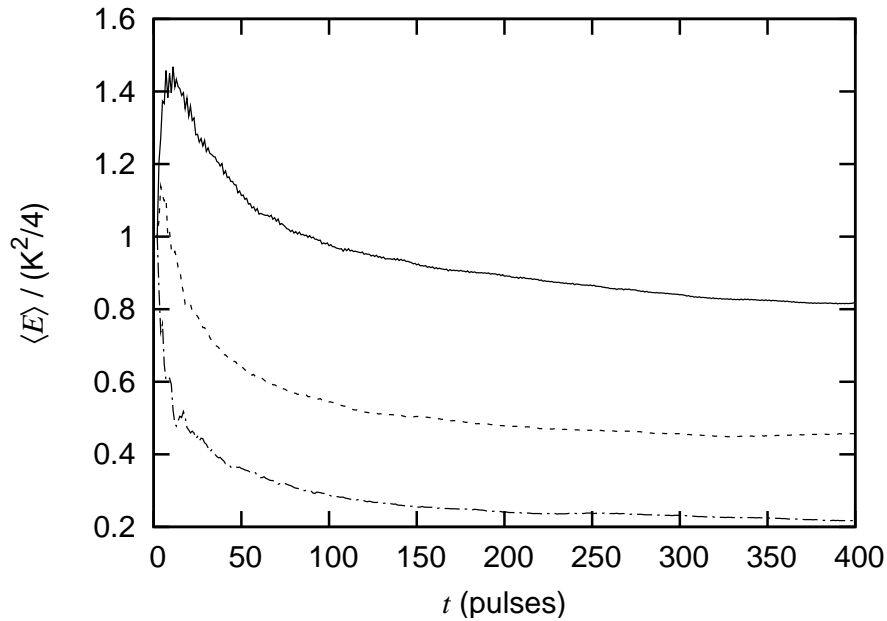


FIG. 4.14 – Simulation numérique donnant l'énergie cinétique en fonction du temps pour  $\hbar k = \pi$ , avec différentes valeurs de  $K$  : en traits pleins,  $K = 1,1\pi^2$  ( $\kappa = 1,1\pi$ ) ; en tirets,  $K = 1,3\pi^2$  ( $\kappa = 1,3\pi$ ) ; en tirets-pointillés,  $K = 1,5\pi^2$  ( $\kappa = 1,5\pi$ ). Étonnamment, l'énergie est plus faible quand l'amplitude des pulses augmente. La distribution initiale est un mélange statistique de 2000 quasi-impulsions, de forme gaussienne de largeur en impulsion  $5/\sqrt{2}$ .

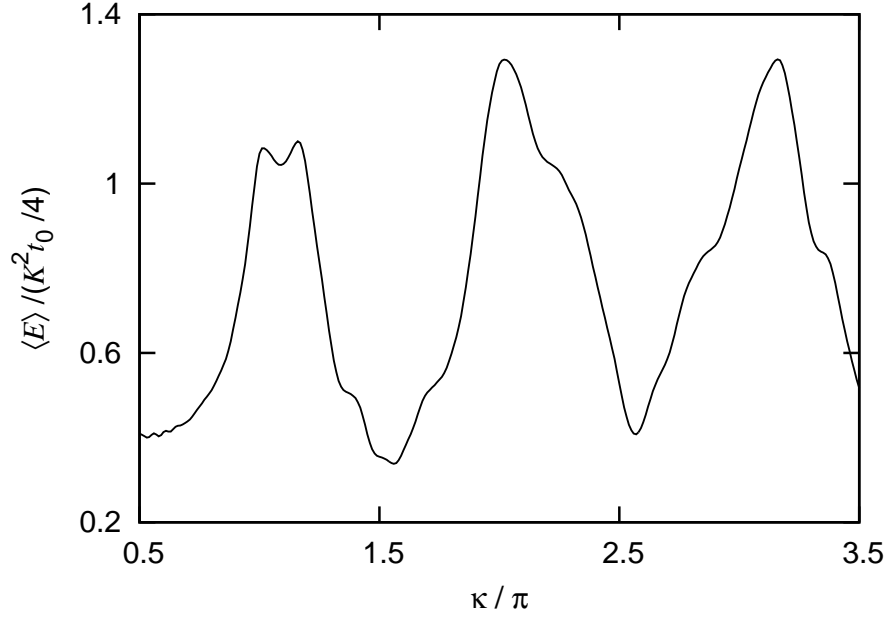


FIG. 4.15 – Simulation numérique donnant l'énergie cinétique en fonction de l'amplitude des pulses pour  $\bar{k} = \pi$  et à  $t_0 = 60$  pulses. Comme sur la figure 4.14, nous voyons qu'augmenter  $K$  n'augmente pas nécessairement l'énergie cinétique. La distribution initiale est un mélange statistique de 200 quasi-impulsions, de forme gaussienne de largeur en impulsion  $5/\sqrt{2}$ .

Pour les RQOS ( $\bar{k} = \pi$ ), comme il n'est pas possible de calculer  $\langle E \rangle$  analytiquement, nous avons totalement recours aux simulations numériques. La figure 4.14 présente ainsi l'énergie cinétique moyenne en fonction du temps. Nous y retrouvons, comme pour les RQS, un comportement asymptotique diffusif, ce qui veut dire que, même si elle apparaît pour un nombre plus important de quasi-impulsions, la balisticité ne “survit” pas au moyennage sur  $\beta$ . L'autre résultat remarquable, propre aux RQOS, est que le coefficient de diffusion asymptotique oscille en fonction de  $\kappa$ , ce que nous voyons plus clairement encore sur la figure 4.15. Ces oscillations, décrites analytiquement pour  $\beta = 0$ , persistent donc pour toutes les quasi-impulsions<sup>10</sup>.

Les distributions en impulsion “fines”, du type CBE ou Raman, permettent donc une observation expérimentale, pendant un temps fini, des phénomènes qui apparaissent pour une quasi-impulsion particulière, en particulierité l'anti-résonance. Cependant, étant d'extension spatiale supérieure à un puits de potentiel, ces distributions ne permettent pas d'observer d'effets dépendants de la position. Pour ce qui est des distributions “larges” en impulsion, elles présentent un comportement diffusif que nous avons expliqué de façon intuitive. En outre, dans le cas de la résonance  $\bar{k} = \pi$ , le taux de diffusion oscille en fonction de l'amplitude des pulses.

<sup>10</sup>Ces oscillations n'ont aucun rapport avec celles du coefficient de diffusion initiale, dans le cas de la LD (cf. Eq. (2.31)).



## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les résonances quantiques du rotateur pulsé dans l'espace des positions. Comme l'effet Talbot optique, les résonances se caractérisent par une reconstruction, totale ou partielle, du paquet d'ondes initial dans l'espace des positions. Cet effet de focalisation est l'expression d'interférences constructives. Mais, si nous observons le système à des instants discrets, i.e. à chaque pulse de potentiel, cette localisation dans l'espace des positions nous permet d'interpréter la dynamique avec des arguments classiques, en particulier le concept de force.

Deux types de résonances se distinguent. Les premières sont les résonances quantiques simples, pour lesquelles l'analogie classique est complète : tant leur impulsion que leur énergie cinétique peuvent être expliquées en terme de force transmise par les pulses. La balisticité apparaît ainsi comme l'analogie des modes accélérateurs classiques. Les secondes sont les résonances quantiques d'ordre supérieur, dont nous avons étudié l'exemple  $\tilde{k} = \pi$ . Dans ce cas, le paquet initial se reconstruit en deux sous-paquets, dont la phase relative ne permet pas une analogie classique complète. En effet, l'évolution de l'impulsion peut être expliquée en terme de force, mais pas celle de l'énergie cinétique.

La description dans l'espace des positions est une approche qui permet donc de donner une image physique claire et intuitive des résonances quantiques. C'est aussi leur représentation la plus naturelle, car, comme il est montré dans l'annexe B, les quasi-états de Floquet ont des propriétés remarquables, bien différentes de celles qui permettent d'expliquer la localisation dynamique (cf. sous-section 2.2.2), notamment leur localisation dans l'espace des positions.

# Chapitre 5

## Chaos quasi-classique dans les condensats de Bose-Einstein

Dans les chapitres 2 à 4 de cette thèse, nous nous sommes focalisés sur l'étude du rotateur pulsé, dont nous avons vu que la version classique présente de la *sensibilité aux conditions initiales*. Celle-ci ne se retrouve pas dans le cas quantique, car l'équation de Schrödinger, qui régit l'évolution du système quantique, est *linéaire* en la fonction d'onde. Cependant, la sensibilité aux conditions initiales classique laisse une signature sur la dynamique quantique : la *localisation dynamique*, qui consiste en l'arrêt de la diffusion dans l'espace des impulsions. Dans le chapitre 2, nous avons observé la localisation dynamique en calculant l'évolution temporelle de la distribution en impulsion et de l'énergie cinétique moyenne. Sur la figure 5.1, nous proposons d'illustrer l'absence de sensibilité aux conditions initiales de la dynamique quantique, en utilisant une autre quantité. Pour différentes valeurs du paramètre de stochasticité  $K$ , nous calculons l'évolution temporelle du carré de l'impulsion<sup>1</sup>. Nous en prenons ensuite la transformée de Fourier, dont nous retenons les fréquences dont l'amplitude est au-dessus d'un certain seuil.

Le panneau (a) de la figure 5.1 montre le résultat d'un tel calcul pour une trajectoire classique initialement en  $(X_0 = 0, P_0 = 0,18\pi)$ . Il comprend un petit nombre de branches qui se croisent pour des valeurs bien précises de  $K$ . Ces branches deviennent de plus en plus nombreuses jusqu'à former un continuum correspondant au chaos pour  $K \simeq 0,83$ . Cette disposition des branches est une illustration de la route vers le chaos décrite par le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser. Pour les "petites" valeurs de  $K$ , le mouvement consiste en une rotation presque libre, avec de petites oscillations de fréquence  $0,09$  pulse<sup>-1</sup> et ses harmoniques<sup>2</sup>. Ces fréquences évoluent en fonction de  $K$ , jusqu'à ce que les branches se croisent en  $K \simeq 0,37$  ou en  $K \simeq 0,61$ . Ces croisements sont la signature d'îlots de résonance, ici  $(1 : -7)$  et  $(1 : -6)$  respectivement (cf. insert de la figure 5.1 (a)). Le rotateur reste dans la résonance  $(1 : -6)$  jusque  $K \simeq 0,78$ , valeur à laquelle se produit une cascade de doublements de période<sup>3</sup> aboutissant au chaos.

La panneau (b), qui correspond au cas quantique, est fort différent. Les branches, qui représentent les quasi-états de Floquet se recouvrent significativement avec le paquet

---

<sup>1</sup>Dans le cas classique, il s'agit de l'impulsion élevée au carré associée à une seule trajectoire. Dans le cas quantique, c'est la moyenne de cette quantité qui est calculée, à partir d'un paquet d'ondes initial dont le maximum est la condition initiale classique.

<sup>2</sup>Cette fréquence, qui est en fait  $P_0/2\pi$ , est celle prédite par le théorème KAM.

<sup>3</sup>Concrètement, nous voyons les résonances  $(1 : -12)$  et  $(1 : -24)$  pour  $K \simeq 0,81$ .

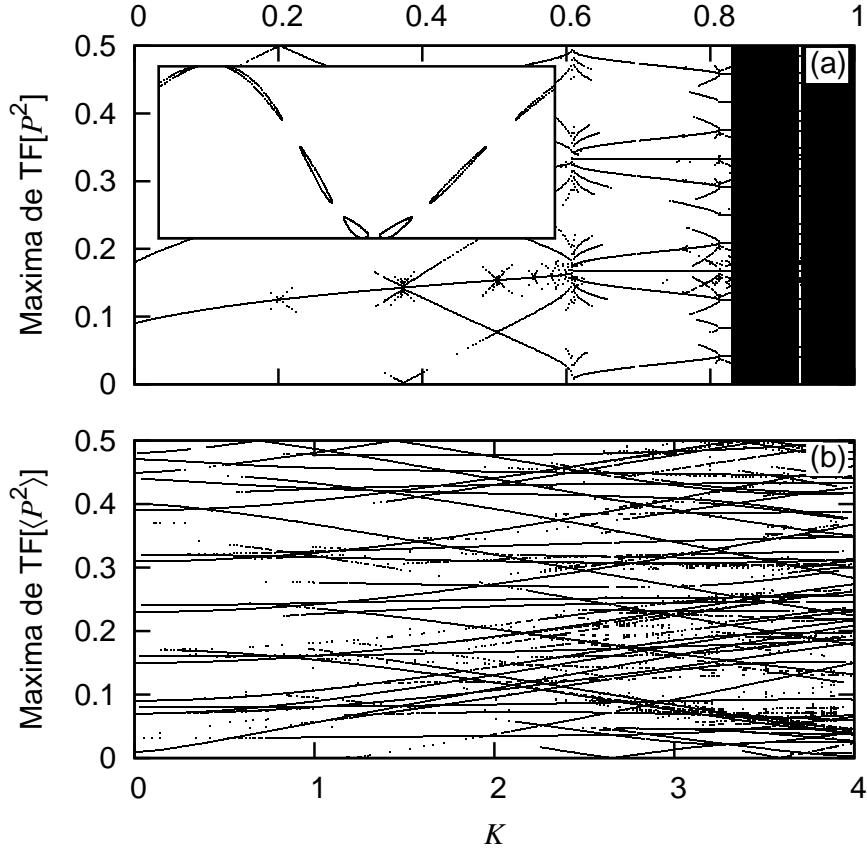


FIG. 5.1 – Absence de sensibilité aux conditions initiales dans le rotateur pulsé quantique, observée grâce aux maxima du spectre de l’impulsion carrée en fonction du paramètre de stochasticité  $K$ . Le panneau (a) présente le cas d’une trajectoire classique initialement en  $(X_0 = 0, P_0 = 0,18\pi)$ ; le panneau (b) celui d’un paquet d’ondes quantique gaussien initialement centré autour des mêmes valeurs et de largeur en impulsion  $\sigma = 5/\sqrt{2}$  (cf. Eq. (2.28)). Une fréquence est retenue si son amplitude correspondante est au moins  $1/500$  de l’amplitude maximale, alors que le signal temporel est pris jusque 10000 pulses. L’insert du panneau (a) représente la résonance  $(1 : -6)$  dans l’espace des phases  $(P, X)$  pour  $K = 0,615$ .

d’ondes initial, y sont plus nombreuses, et elles se densifient au fur et à mesure que la diffusion classique se met en place. Les croisement entre les branches sont aussi plus nombreux, et ils paraissent “désordonnés”. Cependant, pour le rotateur pulsé comme pour tous les systèmes quantiques à particules indépendantes, il n’y a pas de spectre continu, et donc pas de chaos au sens classique du terme.

La réalisation des premiers condensats de Bose-Einstein (CBE) à partir d’atomes refroidis par laser (cf. section 1.2) a ouvert de nouvelles perspectives pour l’étude du chaos dans les systèmes quantiques. En effet, l’une des particularités des CBE est que les interactions entre les atomes qui les composent influencent significativement les propriétés du condensat. S’il est suffisamment dilué, ces interactions peuvent être modélisées à l’aide d’une théorie de *champ moyen*, auquel cas le CBE est décrit par une seule fonction d’onde, appelée *fonction d’onde “macroscopique” du condensat*. La grande nouveauté est que cette fonction d’onde évolue suivant l’équation de Gross-Pitaevskii (EGP) [20]. L’EGP est en fait l’équation de Schrödinger pour un atome sans interaction, à laquelle

s'ajoute un terme *non-linéaire* en la fonction d'onde, qui rend compte des collisions entre atomes. Ce terme, qui est l'analogie de l'effet Kerr optique, a permis l'observation de phénomènes nouveaux dans les systèmes quantiques, tels que les solitons [11, 56] ou le chaos [78, 95, 110, 81], qui est précisément l'objet de ce chapitre et d'une publication de notre groupe [58].

Dans une étude précédente [95], nous avons montré que le chaos qui apparaît dans les systèmes quantiques que sont les CBE est bien du chaos au sens classique : nous l'avons donc qualifié de chaos *quasi-classique*. Dans cette étude, le CBE est placé dans un potentiel optique en forme de réseau incliné (cf. sous-section 1.3.3). En le décrivant dans la base des états de Wannier-Stark (WS), nous avons prouvé que le chaos quasi-classique se développe selon le scénario prédit par le théorème KAM. En traçant des sections de Poincaré contenant les populations et les phases des différents états de WS, nous observons bien les structures typiques d'un système KAM : trajectoires passantes, îlots de résonance et zone chaotique. Cependant, conscients de la grande difficulté à mesurer la population et la phase de chaque état de WS, nous avons cherché à caractériser les différents régimes dynamiques, en utilisant une quantité accessible expérimentalement. Ainsi, de façon analogue à la figure 5.1, en considérant le spectre de fréquences de la position moyenne du condensat en fonction d'un paramètre de contrôle, nous montrons, dans ce chapitre, que les différents types de trajectoire possèdent une signature clairement identifiable. Pour une trajectoire chaotique par exemple, la signature est un spectre continu.

Dans la section 5.1, nous commençons par présenter la base de Wannier-Stark, qui est notre cadre de travail ; nous écrivons ensuite l'équation de Gross-Pitaevskii dans cette base. Dans la section 5.2, nous montrons que la dynamique de notre système peut être interprétée à l'aide du théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser. Cette étude est menée dans le cas d'un condensat ne peuplant que trois états de Wannier-Stark, qui est le nombre minimum requis pour l'observation du chaos. Puis, dans la section 5.3, nous passons à l'aspect nouveau de ce travail : l'étude de la signature d'un scénario KAM sur le spectre de la position moyenne. Pour confirmer la nature chaotique des trajectoires ayant un spectre continu, nous appuyons notre travail sur le calcul de l'exposant de Lyapunov maximal.

## 5.1 Réseau incliné et base de Wannier-Stark

Un effort de recherche considérable s'est concentré sur l'étude des CBE dans des potentiels sinusoïdaux, appelés *réseaux* en référence au mouvement des électrons dans un cristal parfait<sup>4</sup>. Les états propres d'un tel potentiel sont les ondes de Bloch, qui sont complètement délocalisées en position (cf. sous-section 2.2.3). L'intérêt d'ajouter au potentiel périodique une pente, ce qui donne un *réseau incliné*, est que celle-ci brise la symétrie de translation, permettant donc l'apparition d'états propres localisés sur l'un des puits de potentiel, appelés états de *Wannier-Stark* (WS). Par ailleurs, comme chaque puits est décalé d'une énergie  $F$  par rapport à ses voisins (cf. Fig. 5.2), les niveaux d'énergie des états de WS sont disposés en *échelle*.

Cette discrimination spatiale des niveaux d'énergie et leur espacement régulier rend observables les phénomènes purement cohérents tels que les oscillations de Bloch [109, 9, 8, 10, 33, 42], qui se caractérisent par l'évolution périodique des observables quantiques

<sup>4</sup>Pour un résumé de toutes ces recherches, se reporter à la référence [72].

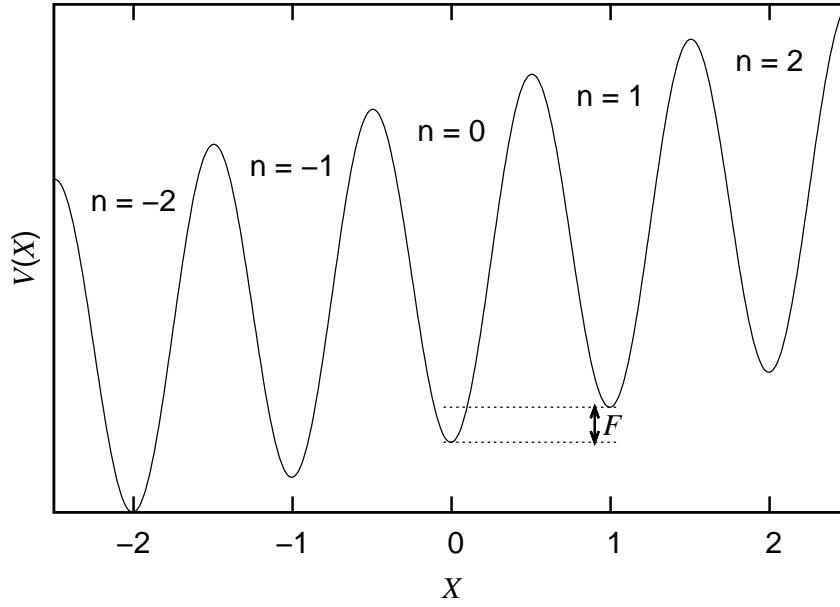


FIG. 5.2 – Représentation symbolique du potentiel en forme de réseau incliné. Les puits, notés  $n$ , sont numérotés en fonction de leur position, et deux puits voisins sont séparés par l'énergie  $F$ .

comme la position et l'impulsion moyennes. En unités réduites (cf. sous-section 1.3.3), la pulsation de ces oscillations, notée  $\omega_B$ , est simplement donnée par

$$\omega_B = F, \quad (5.1)$$

où  $F$  est la pente (cf. Fig. 5.2), c'est-à-dire que la période associée vaut  $T_B = 2\pi/F$ .<sup>5</sup>

Cependant, l'existence des états de Wannier-Stark n'est pas une chose évidente à cause de la forme divergente du réseau incliné. Les problèmes posés par cette divergence seront ainsi rappelés dans la sous-section 5.1.1, ainsi que les moyens de les contourner ; puis, nous nous concentrerons sur les états localisés dont nous présenterons les propriétés qui nous seront utiles ; enfin, nous écrirons les équations dynamiques de notre condensat de la base de WS.

### 5.1.1 Les états de Wannier-Stark en question

Nous cherchons donc à diagonaliser l'hamiltonien (cf. sous-section 1.3.3)

$$H = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + V(X), \quad (5.2)$$

où  $V(X)$  est le potentiel

$$V(X) = -V_0 \cos(2\pi X) + FX, \quad (5.3)$$

tracé sur la figure 5.2.<sup>6</sup> L'existence d'états localisés pour (5.2), décrits pour la première fois par Wannier [102], a fait l'objet d'une longue controverse, retracée dans la référence

<sup>5</sup>Dans la suite de ce chapitre, tous les temps et toutes les fréquences seront exprimés en unités de  $T_B$  et  $\omega_B$ , respectivement.

<sup>6</sup>Par rapport à la sous-section 1.3.3, nous avons changé  $V_0$  en  $-V_0$ , pour que le fond des différents puits de potentiel soit centré autour des valeurs entières de  $x$ .

[74], et qui n'a cessé qu'après leur observation dans des semi-conducteurs [100] et des gaz d'atomes froids [105]. L'origine de la controverse est le terme linéaire  $FX$  qui diverge à l'infini, i.e.

$$\lim_{X \rightarrow \pm\infty} V(X) \rightarrow \pm\infty. \quad (5.4)$$

A priori, les valeurs propres d'un tel hamiltonien forment un spectre continu, et ses fonctions propres ne sont pas de carré sommable, et donc pas localisées.

L'une des façons de surmonter le problème est de mettre notre potentiel dans une "boîte" dont les parois ont une hauteur infinie. Ceci est fait en ajoutant à  $V(X)$  un terme  $B(X)$ , tel que

$$B(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } |X| < L \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.5)$$

avec  $L \gg 1$ , de sorte que la boîte contienne de nombreuses mailles du réseau. Dans ce cas, nous trouvons bien des niveaux d'énergie discrets et des fonctions d'ondes localisées. Si la boîte est suffisamment large, les fonctions d'ondes localisées en son centre sont insensibles aux variations de  $L$ , évitant ainsi les effets de bords. Pour diagonaliser  $H$  numériquement, nous considérons un espace des positions d'extension finie, ce qui revient à rajouter à  $V(X)$  ce terme de boîte  $B(X)$ .

Cependant, pour donner un argument plus physique à l'existence des états de WS, revenons au cas d'une extension infinie (sans boîte). Comme les fonctions propres de  $V(X)$  sont délocalisées, un paquet d'ondes initialement localisé dans un puits s'en échappe progressivement par effet tunnel, donnant lieu à une *résonance* de Wannier-Stark [36]. Si nous appelons  $\Gamma$  le taux de dépeuplement, nous pouvons considérer l'état initial localisé comme un état propre de  $H$  d'énergie  $\varepsilon$  complexe

$$\varepsilon = E - i\Gamma, \quad (5.6)$$

où  $E$  prend des valeurs discrètes. Si le dépeuplement de l'état localisé se fait sur une échelle de temps ( $\sim \Gamma^{-1}$ ) beaucoup plus lente que la durée de l'expérience, la partie imaginaire de  $\varepsilon$  peut être négligée – ce que nous ferons par la suite – et l'état localisé initial peut être considéré comme un état propre de (5.2) d'énergie  $E$ .

### 5.1.2 Etats localisés et échelle de Wannier-Stark

Maintenant que nous acceptons l'existence des états de WS, nous allons en déduire les propriétés de symétrie à partir de celles du potentiel  $V$ . Pour commencer plaçons-nous dans un puits de potentiel donné, d'indice  $n$  (cf. Fig. 5.2). Selon la valeur de  $V_0$  et de  $F$ , il existe un certain nombre d'états localisés dans ce puits<sup>7</sup>. Ces états peuvent être étiquetés à l'aide des entiers  $n$  et  $l$ , où  $n$  désigne le numéro du puits et  $l$  le numéro de l'état dans ce puits. Les énergies propres, notées  $E_n^l$ , suivent donc la relation

$$E_n^0 < E_n^1 < \dots \quad (5.7)$$

Un étiquetage identique est utilisé pour les fonctions d'ondes, notées  $\varphi_n^l(X)$ , qui sont localisées autour du puits<sup>8</sup> $n$ , et orthonormées, i. e.

$$\langle \varphi_n^l | \varphi_m^k \rangle = \delta_{k,l} \delta_{n,m}, \quad (5.8)$$

<sup>7</sup>Un critère quantitatif sur le nombre d'états localisés peut être trouvé dans la référence [94].

<sup>8</sup>Comme les états de WS sont essentiellement attachés à un puits, nous utiliserons parfois le mot "puits" à la place du mot "état", afin de mieux faire ressortir la physique sous-jacente.

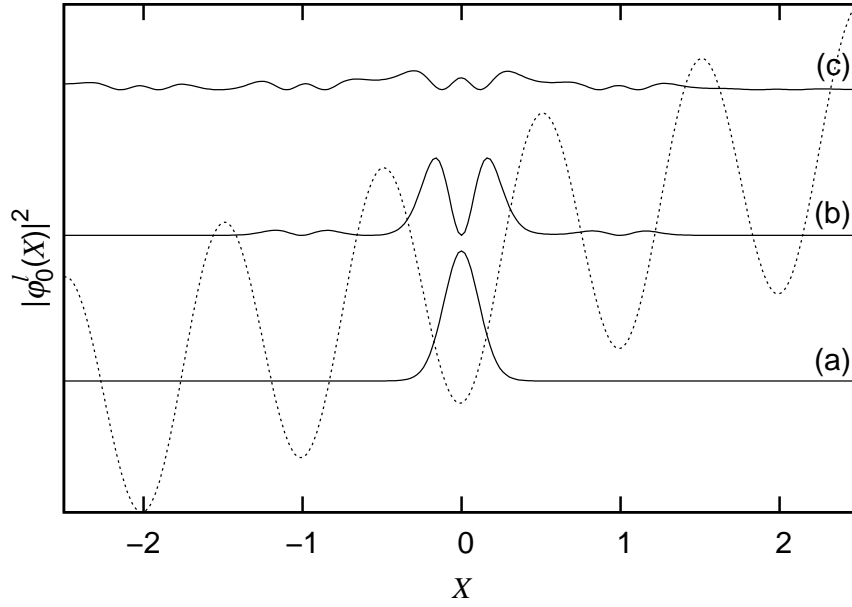


FIG. 5.3 – *Etats propres du réseau incliné calculés numériquement pour  $V_0 = 10$  et  $F = 0,25$ . Les états (a) et (b) sont localisés dans le puits  $n = 0$ , (a) étant l'état fondamental ( $l = 0$ ) et (b) le premier état excité ( $l = 1$ ); l'état (c) est délocalisé. Le zéro des fonctions d'ondes est décalé en fonction de leur énergie. Le potentiel est symboliquement représenté en pointillés.*

où  $\delta_{i,j}$  est le “delta” de Kronecker. Pour le jeu de paramètres de la figure 5.3, la profondeur assez importante des puits de potentiel, i.e.  $V_0 = 10$ , permet l'existence de deux états localisés par puits, représentés ici pour le puits  $n = 0$ . Tous les autres états ne sont “attachés” à aucun puits en particulier : ils sont délocalisés et forment un continuum d'énergie.

Pour observer des effets dynamiques intéressants, qui sont basés sur le couplage entre puits, il convient de prendre un potentiel moins profond que sur la figure 5.3. La figure 5.4 présente l'état fondamental du puits  $n = 0$  pour  $V_0 = 3$ . La fonction d'onde reste essentiellement localisés dans le puits  $n = 0$ , mais elle “déborde” légèrement dans les puits voisins.

Si maintenant, nous nous déplaçons dans le puits numéro  $m$ , le potentiel (5.3) est modifié d'une quantité  $mF$ , i.e.

$$V(X + m) = V(X) + mF. \quad (5.9)$$

Cette propriété de symétrie a les deux conséquences suivantes (cf. Fig. 5.5) :

1. les fonctions propres  $\varphi_n^l(X)$  sont invariantes par translation d'une période de potentiel

$$\varphi_{n+m}^l(X) = \varphi_n^l(X - m), \quad (5.10)$$

2. les énergies propres sont déplacées d'une quantité  $mF$

$$E_{n+m}^l = E_n^l + mF. \quad (5.11)$$

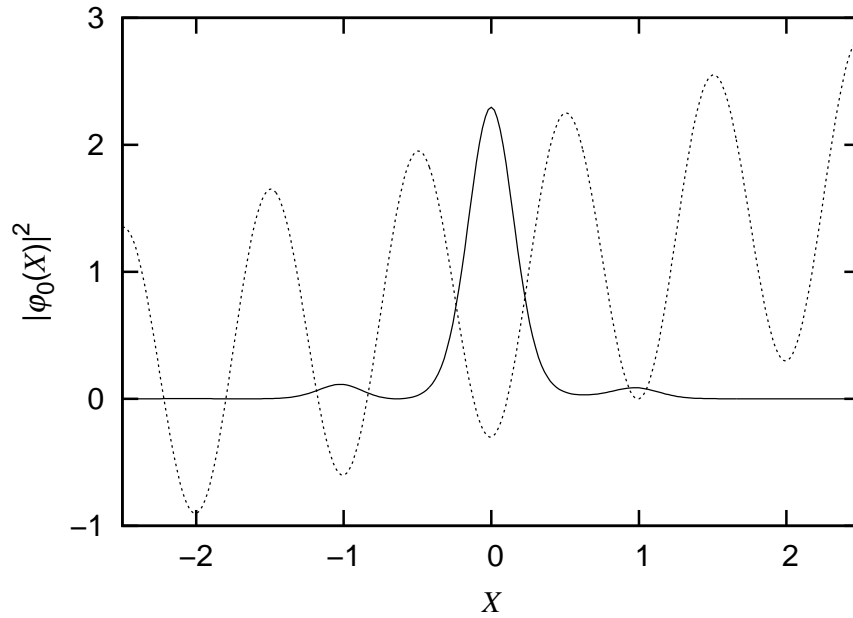


FIG. 5.4 – *Etat fondamental du puits  $n = 0$ , pour  $V_0 = 3$  et  $F = 0,25$ . La “faible” amplitude du réseau permet que  $\varphi_0(X)$  déborde dans les puits  $\pm 1$ . Le potentiel est représenté de façon symbolique en pointillés.*

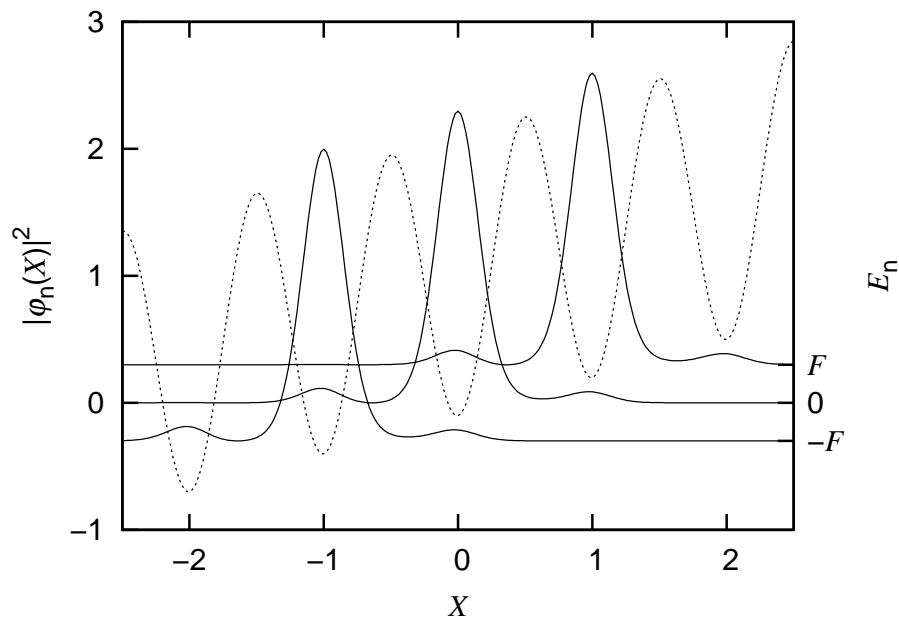


FIG. 5.5 – *Représentation symbolique de l'échelle de Wannier-Stark pour  $V_0 = 3$  et  $F = 0,25$ . Les états fondamentaux des puits 0 et  $\pm 1$  sont représentés avec le zéro décalé en fonction de leur énergie.*



Pour chaque valeur de  $l$ , nous voyons donc que les niveaux d'énergie se rangent selon une *échelle* dont les barreaux sont distants de  $F$ . Par la suite, nous considérerons que notre condensat a une température suffisamment basse, pour que seul l'état fondamental ( $l = 0$ ) de chaque puits soit peuplé. Nous omettrons donc l'indice  $l$  de toute notation.

### 5.1.3 Dynamique d'un condensat dans la base de Wannier-Stark

Nous allons maintenant exprimer la dynamique de notre CBE dans la base de WS, en décomposant sa fonction d'onde  $\Psi(X,t)$  sur les fonctions  $\varphi_n(X)$ . Ce faisant, partant de l'équation de Gross-Pitaevskii, qui est une équation aux dérivées partielles, nous aboutirons à un système d'équations différentielles ordinaires couplées. Les propriétés de la base de WS, présentées dans la sous-section précédente, nous permettront ensuite de simplifier ces équations, en ne tenant compte que des interactions entre puits premiers voisins.

Dans les unités du système, l'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit (cf. Eq. (1.31))

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X,t) = [H + g |\Psi|^2] \Psi(X,t), \quad (5.12)$$

où  $H$  est l'hamiltonien (5.2). En décomposant  $\Psi(X,t)$  sur la base de WS, i.e.

$$\Psi(X,t) = \sum_m c_m(t) \varphi_m(X), \quad (5.13)$$

nous obtenons pour (5.12)

$$i \sum_m \frac{d}{dt} c_m(t) \varphi_m(X) = \sum_m c_m(t) H \varphi_m(X) + g \sum_{k,l,m} c_k^* c_l c_m \varphi_k \varphi_l \varphi_m, \quad (5.14)$$

où nous avons utilisé que les fonctions  $\varphi_k$  sont réelles. Dans la première ligne de (5.14), nous reconnaissons l'équation aux valeurs propres de  $H$

$$H \varphi_m(X) = E_m \varphi_m(X) = mF \varphi_m(X), \quad (5.15)$$

où nous avons posé  $E_0 = 0$  dans (5.11). Après projection de (5.14) sur l'état  $\varphi_n$ , nous obtenons :

$$i \frac{d}{dt} c_n(t) = nF c_n(t) + g \sum_{k,l,m} \chi_{k,l}^{m,n} c_k^* c_l c_m, \quad (5.16)$$

où nous avons introduit les intégrales de recouvrement à quatre états

$$\chi_{k,l}^{m,n} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dX \varphi_k(X) \varphi_l(X) \varphi_m(X) \varphi_n(X). \quad (5.17)$$

L'équation (5.16) se compose de deux parties : la première traduit l'évolution de la phase de l'état de WS numéro  $n$  avec sa pulsation propre  $nF$ , alors que le second est une somme qui couple les différents états de façon *cohérente* et *non-linéaire*. C'est précisément la réunion de ces deux termes, propres aux CBE, qui fait tout l'intérêt

de ce travail. La force du couplage entre états est donnée par le paramètre  $g$  et par l'intégrale de recouvrement  $\chi_{k,l}^{m,n}$ , dont les propriétés vont nous permettre de simplifier (5.16). Remarquons tout d'abord que  $\chi_{k,l}^{m,n}$  est insensible à toute permutation d'indice, i.e.

$$\chi_{k,l}^{m,n} = \chi_{l,m}^{n,k} = \chi_{l,k}^{m,n} = \dots, \quad (5.18)$$

ensuite qu'elle est invariante par translation d'indice

$$\chi_{k-q,l-q}^{m-n,q} = \chi_{k,l}^{m,n}. \quad (5.19)$$

En particulier, si l'on pose  $q = n$ , l'équation (5.19) devient  $\chi_{k-n,l-n}^{m-n,0} = \chi_{k,l}^{m,n}$ , ce qui signifie que nous n'avons besoin que de trois indices pour définir nos intégrales. En posant

$$\chi_{k,l,m} = \chi_{k-n,l-n}^{m-n,0}, \quad (5.20)$$

nous pouvons réécrire (5.16) :

$$i \frac{d}{dt} c_n(t) = nF c_n(t) + g \sum_{k,l,m} \chi_{k,l,m} c_{k-n}^* c_{l-n} c_{m-n} \quad (5.21)$$

Enfin, en tenant compte de la forme localisée des fonction  $\varphi_n(X)$ , nous pouvons hiérarchiser les différents  $\chi_{k,l,m}$  (cf. Complément C-10 de la référence [94])

$$|\chi_{000}| \gg |\chi_{001}|, |\chi_{00,-1}| \gg |\chi_{011}|, |\chi_{002}| \gg \dots \quad (5.22)$$

Ainsi, comme il est montré dans la référence [95], seuls les termes en  $\chi_{000}$  et  $\chi_{00,\pm 1}$  influencent significativement la dynamique du système. En ne tenant compte que de ces termes, nous aboutissons à l'équation

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} c_n(t) &= nF c_n + g \chi_{000} |c_n|^2 c_n \\ &+ g (\chi_{00-1} c_{n-1}^* + \chi_{001} c_{n+1}^*) c_n^2 \\ &+ 2g (\chi_{00-1} c_{n-1} + \chi_{001} c_{n+1}) |c_n|^2 \\ &+ g (\chi_{001} |c_{n-1}|^2 c_{n-1} + \chi_{00-1} |c_{n+1}|^2 c_{n+1}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

La première ligne de l'équation (5.23) ne dépend que de l'indice  $n$ , c'est-à-dire qu'elle n'induit pas de couplage entre puits voisins. Sous l'effet de ces deux termes, la population de chaque puits reste inchangée. En revanche, la non-linéarité modifie la fréquence d'oscillation de l'état  $n$ , qui s'écrit

$$\omega_n = nF + g \chi_{000} |c_n(t=0)|^2. \quad (5.24)$$

Cette modification de la fréquence peut s'interpréter comme une modification des niveaux d'énergie, qui est d'autant plus marquée que l'état en question est peuplé. Les autres termes de (5.23), en  $g \chi_{00\pm 1}$ , qui couplent l'état  $n$  à ses premiers voisins, induisent un échange complexe de population entre les puits premiers voisins.

Dans cette section, nous avons posé le cadre de notre travail, en modélisant la dynamique d'un CBE dans un réseau incliné. Pour cela, nous avons d'abord présenté la base propre d'un réseau incliné, appelée base de Wannier-Stark, qui se caractérise

par des fonctions d'ondes localisées dans un puits de potentiel et des niveaux d'énergie disposés en échelle. Ensuite, en décomposant la fonction d'onde du condensat sur ces états localisés, nous avons écrit l'équation de Gross-Pitaevskii sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires couplées. Le couplage entre les différents états de WS étant non-linéaire, il va donner lieu à une dynamique très riche et variée, que nous allons étudier dans les sections suivantes.

## 5.2 Dynamique quantique et théorème KAM

Pour comprendre la dynamique de notre système, nous allons commencer par transformer l'équation (5.23), pour l'exprimer en terme des populations et des phases de chaque état de WS. Nous mettrons ainsi en évidence que la population et la phase d'un état donné forment un couple de *variables conjuguées* dans le sens du formalisme hamiltonien [60]. L'hamiltonien que nous écrirons à partir de ces variables étant *quasi-intégrable*, nous montrerons que notre condensat suit une dynamique prédite par le *théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser* (KAM), et en particulier, qu'il présente du *chaos* au sens classique du terme. Nous appellerons ce chaos classique observé dans un système quantique le *chaos quasi-classique*.

### 5.2.1 Un système quasi-intégrable

Nous commençons donc par réécrire l'équation (5.23) en faisant apparaître la population  $I_n$  et la phase  $\theta_n$  de chaque état. En introduisant la forme  $c_n = \sqrt{I_n} \exp(i\theta_n)$  dans (5.23), nous obtenons les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_n(t) &= 2\epsilon g \chi \sqrt{I_n} \left[ \sqrt{I_{n+1}} (I_{n+1} + \beta I_n) \sin(\theta_{n+1} - \theta_n) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{I_{n-1}} (I_n + \beta I_{n-1}) \sin(\theta_{n-1} - \theta_n) \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta_n(t) &= -nF - g\chi I_n \\ &\quad - \frac{\epsilon g \chi}{\sqrt{I_n}} \left[ \sqrt{I_{n+1}} (I_{n+1} + 3\beta I_n) \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{I_{n-1}} (3I_n + \beta I_{n-1}) \cos(\theta_{n-1} - \theta_n) \right], \end{aligned} \quad (5.26)$$

où nous avons posé [95]

$$\chi = \chi_{000}, \quad (5.27)$$

$$\epsilon = \frac{\chi_{00-1}}{\chi_{000}} \quad (5.28)$$

qui, compte tenu de la hiérarchie (5.22) est un "petit" paramètre, i.e.  $\epsilon \ll 1$ , et

$$\beta = \frac{\chi_{001}}{\chi_{00-1}} \simeq -1 \quad (5.29)$$

(pour une justification de cette approximation, voir le Complément C-10 de la référence [94]). Il est intéressant de noter que ces trois paramètres,  $\chi$ ,  $\epsilon$  et  $\beta$ , ne dépendent que de la forme des états de WS.

Pour chaque indice  $n$ ,  $I_n$  et  $\theta_n$  forment un couple de variables conjuguées, c'est-à-dire qu'elles satisfont les équations d'Hamilton [60]

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_n} \quad (5.30)$$

$$\frac{d\theta_n}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_n}, \quad (5.31)$$

où  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\mathbf{I}, \Theta)$ <sup>9</sup> est l'hamiltonien

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{I}, \Theta) = & \sum_n \left[ nFI_n + \frac{g\chi}{2} I_n^2 + 2\epsilon g\chi \sqrt{I_n I_{n+1}} \right. \\ & \left. \times (I_{n+1} + \beta I_n) \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les variables  $I_n$  et  $\theta_n$  forment donc un espace des phases généralisé de dimension infinie. Chaque trajectoire de cet espace des phases est caractérisée par son énergie  $\mathcal{H}(I(t), \theta(t)) = E$  qui est une constante du mouvement.

Comme le paramètre  $\epsilon$ , donné par l'équation (5.28), est un "petit" paramètre,  $\mathcal{H}(\mathbf{I}, \Theta)$  peut être mis sous la forme particulière

$$\mathcal{H}(\mathbf{I}, \Theta) = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{I}, \Theta), \quad (5.33)$$

où  $\mathcal{H}_0(\mathbf{I}) = \sum_n nFI_n + g\chi I_n^2/2$ . Si  $\epsilon = 0$  ( $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ ), la dynamique du système est particulièrement simple, puisque les équations (5.25) et (5.26) s'intègrent directement :

$$I_n(t) = I_n(t=0) \quad (5.34)$$

$$\theta_n(t) = \theta_n(t=0) - \omega_n t, \quad (5.35)$$

où la fréquence  $\omega_n$ , donnée par l'équation (5.24), vaut, en fonction des nouvelles variables,

$$\omega_n = nF + g\chi I_n(t=0). \quad (5.36)$$

Nous retrouvons bien le résultat discuté après l'équation (5.24). Les populations  $I_n$ , étant constantes, sont appelés *intégrales premières du mouvement*. Comme le système comporte autant d'intégrales premières du mouvement que de degrés de liberté, on dit qu'il est *intégrable*. Les phases  $\theta_n$ , quant à elles, évoluent linéairement, avec les fréquences  $\omega_n$  (cf. Eq. (5.36)) telles que

$$\omega_n \equiv -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_n}. \quad (5.37)$$

L'évolution d'un système intégrable pouvant être prédite analytiquement, sa dynamique est totalement régulière : elle ne présente donc pas de chaos. Si maintenant  $\epsilon \neq 0$ , l'hamiltonien (5.33), qui comprend un terme proportionnel au petit paramètre  $\epsilon$ , est l'hamiltonien d'un système dit *quasi-intégrable* : c'est précisément de cette catégorie de systèmes dont traite le théorème KAM.

La problématique de ce théorème est de savoir à quelle condition est valable un développement perturbatif partant, à l'ordre 0, des solutions (5.34) et (5.35) du système intégrable. La grande réussite du théorème KAM est qu'il fournit un critère quantitatif

<sup>9</sup>Ici,  $\mathbf{I}$  et  $\Theta$  sont des vecteurs contenant l'ensemble des populations et des phases, respectivement.

de convergence de la série de perturbation. Si ce critère est satisfait, les trajectoires du système quasi-intégrable ressemblent fortement à celles du système intégrable, en étant légèrement déformées. Ce critère relie les fréquences  $\omega_n$ , et donc les conditions initiales, de la façon suivante [63]

$$\left| \sum_n l_n \omega_n \right|^{-1} \leq C \left( \sum_n l_n^2 \right)^{\frac{\tau}{2}}, \quad (5.38)$$

avec  $l_n$  des entiers relatifs, et  $C$  et  $\tau$  des constantes. A l'inverse, dans les régions de l'espace des phases telles que  $\sum_n l_n \omega_n$  est proche de 0, les trajectoires se referment autour d'un ou plusieurs points centre, formant ainsi des îlots de résonance. Enfin, à la frontière entre les trajectoires passantes et les îlots de résonance se trouvent les régions chaotiques.

Tous ces points, présentés ici de façon abstraite, vont maintenant être repris, après quelques simplifications, à l'aune de la dynamique de notre condensat<sup>10</sup>. En effet, nous considérons dans la suite que notre CBE ne peut peupler que trois états de WS<sup>11</sup>. A priori, un tel système possède un espace des phases à six dimensions : la population et la phase de chaque état. Mais, comme la fonction d'onde du condensat est normalisée, il n'y a en réalité que deux populations indépendantes. Par ailleurs, comme c'est la différence de phase entre deux états, et non pas la phase absolue d'un état, qui contient l'information pertinente sur la dynamique, seules deux variables, les différences de phases entre deux puits voisins, sont indépendantes. Au total, l'espace des phases comporte donc quatre dimensions, ce qui est suffisant pour obtenir du chaos, qui en nécessite au moins trois. Dans la suite de ce chapitre, nous supposons donc que notre condensat est restreint à ne peupler que trois états de Wannier-Stark. Nous nous appuyerons fortement sur le modèle à deux états, présenté dans l'annexe C.

### 5.2.2 Modèle à trois états

L'étude de CBE dans un petit nombre de puits de potentiel, présenté ici comme une simplification, fait en soi l'objet de nombreuses recherches. Concernant les systèmes à deux puits, nous pouvons citer l'exemple de l'effet Josephson, qui est issu de la physique des supra-conducteurs [53, 6], et qui a été prédit numériquement [89], puis observé expérimentalement [1] avec des CBE. Les condensats placés dans un triple puits de potentiel [38, 73, 101, 62], ou une double puits avec un paramètre dépendant du temps [104], ont fait l'objet de plusieurs articles théoriques. Ils montrent notamment des différences notables entre les résultats obtenus avec un modèle de champ moyen d'une part, et un modèle à  $N$  particules d'autre part.

A partir de maintenant, nous supposons que seuls les puits  $-1$ ,  $0$  et  $+1$  sont peuplés, i.e.  $I_n = 0$  pour  $|n| > 1$ . Pour montrer que notre système suit bien un scénario de type KAM, nous allons tracer des *sections de Poincaré* [60], en augmentant progressivement le paramètre  $g$ , ce qui permet de distinguer facilement les différents types de trajectoires. Pour que ces sections soient assez larges, nous considérons que le puits  $-1$  est initialement faiblement peuplé. Cela a un autre avantage : le puits  $-1$  agit ainsi sur les deux autres puits comme une "perturbation", ce qui permet de comparer les résultats du modèle à trois puits avec ceux du modèle à deux puits (cf. Annexe C).

---

<sup>10</sup>Le théorème KAM peut aussi expliquer la dynamique du rotateur pulsé classique (cf. chapitre 2).

<sup>11</sup>Cela équivaut à considérer la dynamique d'un CBE dans un triple puits de potentiel.

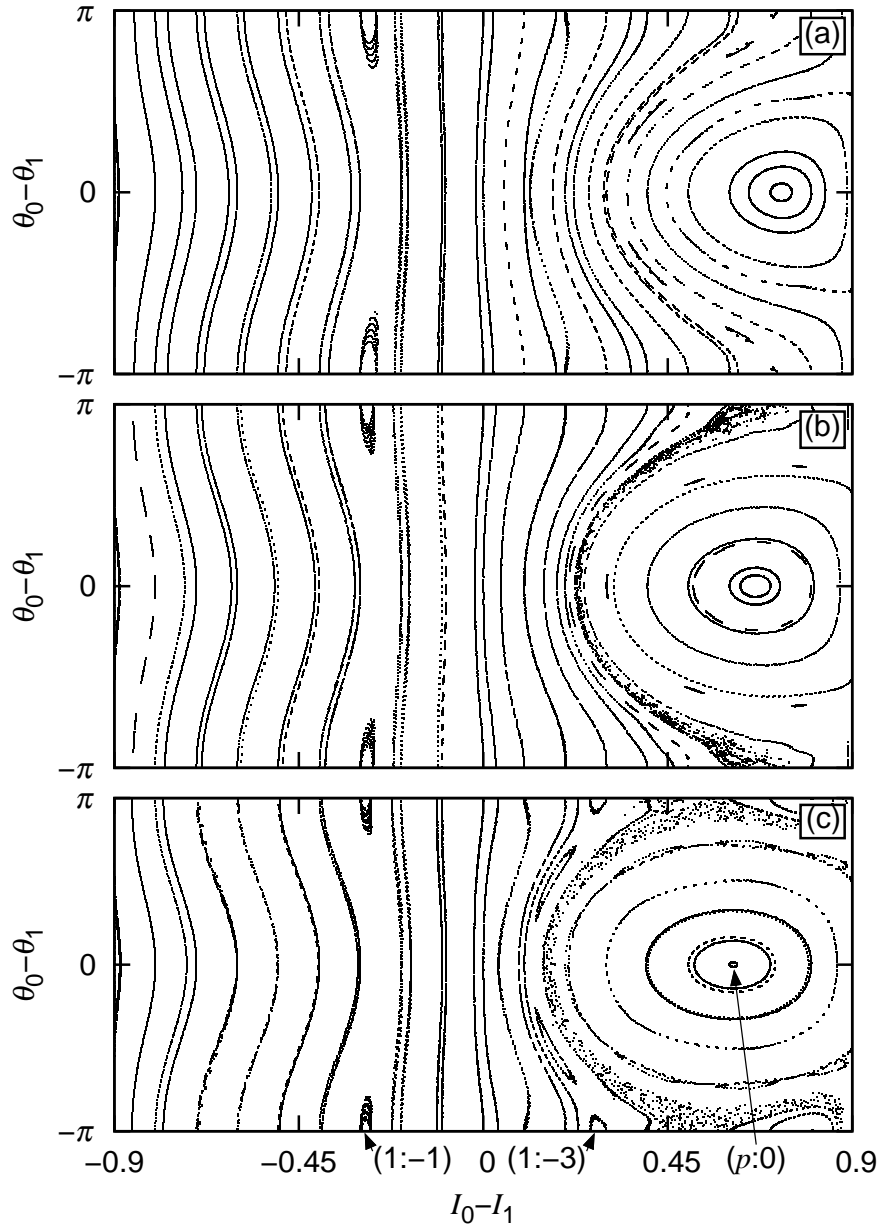


FIG. 5.6 – Dynamique d'un condensat observée grâce à trois sections de Poincaré  $(I_0 - I_1, \theta_0 - \theta_1)$ , tracées pour différentes valeurs de  $g$  : (a)  $g = 0,15$  ; (b)  $g = 0,175$  et (c)  $g = 0,2$ . Les résonances  $(p : 0)$ ,  $(1 : -1)$  et  $(1 : -3)$  sont désignées par des flèches. Pour  $g = 0,175$ , une fine zone chaotique est clairement visible en marge de la résonance principale. Les autres variables fixées sont  $I_{-1} = 0,1$  et  $\theta_{-1} - \theta_0 = 0$ , et les paramètres sont  $V_0 = 5$  et  $F = 0,25$ .

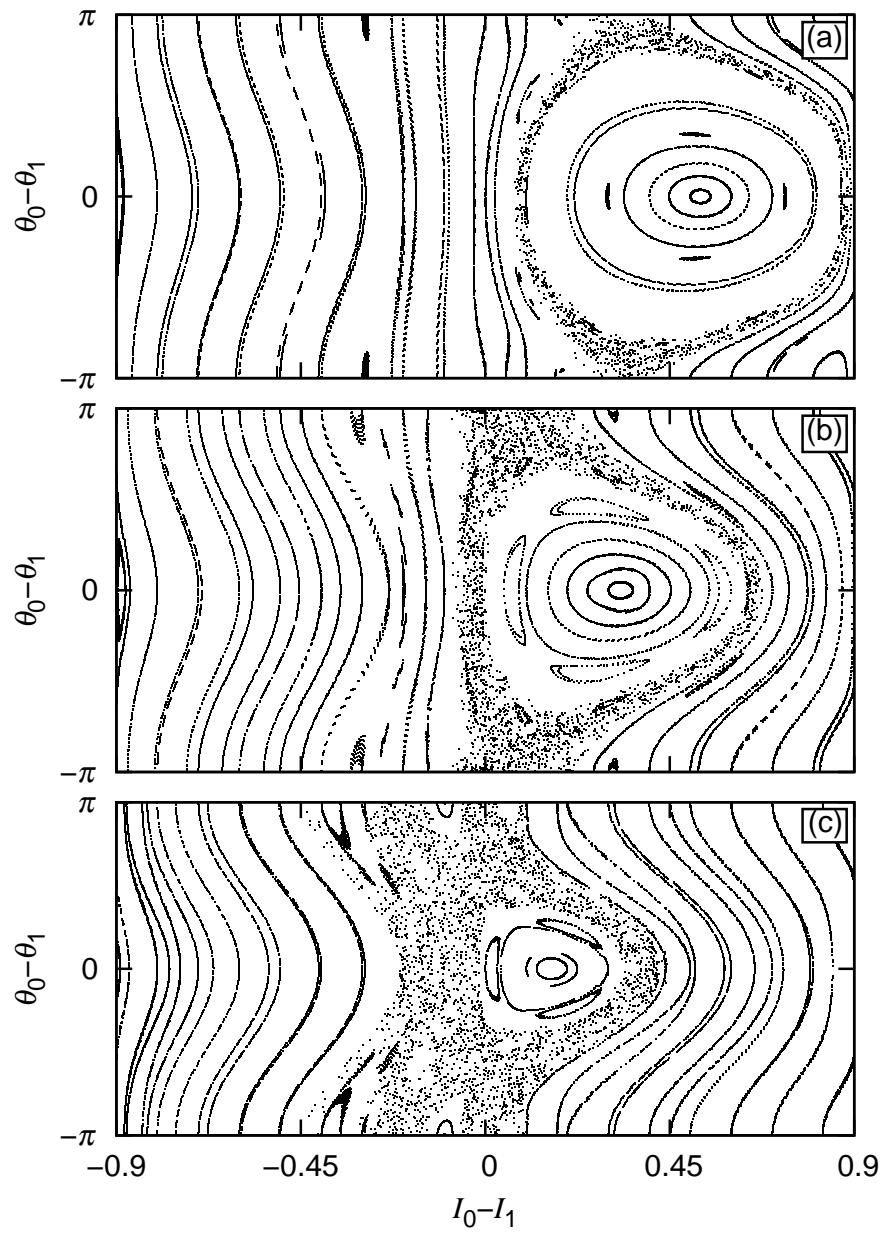


FIG. 5.7 – *Idem* que la figure 5.6, pour (a)  $g = 0,25$ ; (b)  $g = 0,5$  et (c)  $g = 2$ . La résonance ( $p : 0$ ) et la zone chaotique se déplacent vers le centre de la section.

Sur les figures 5.6 et 5.7, nous avons tracé six sections de Poincaré, prises dans le plan  $(I_0 - I_1, \theta_0 - \theta_1)$ , et en fixant les autres variables à  $I_{-1} = 0,1$  et  $\theta_{-1} - \theta_0 = 0$ . Ces sections reflètent bien un scénario de type KAM. En effet, sur leur partie gauche, nous voyons des trajectoires presque verticales : il s'agit des trajectoires du système intégrable (cf. Fig. C.1 (a)) qui sont ici légèrement déformées. Elles satisfont au critère (5.38) et sont ainsi appelées *trajectoires passantes* ou *tores de KAM*. Au fur et à mesure que  $g$  augmente, ces trajectoires sont de moins en moins nombreuses et de plus en plus déformées.

Hormis les trajectoires passantes, l'espace des phases compte des zones où les trajectoires s'enroulent autour d'un ou plusieurs points centre, et qui sont appelées *îlots de résonance*. À l'intérieur de ces îlots, les trajectoires ont une différence de phase  $(\theta_0 - \theta_1)$  qui est bornée : on dit qu'elles sont en *accrochage de phase*. Les coordonnées du (des) point(s) centre peuvent être estimées à partir du théorème KAM (cf. Eq. (5.38))

$$l_{-1}\omega_{-1} + l_0\omega_0 + l_1\omega_1 = 0. \quad (5.39)$$

Pour tenir compte des spécificités de notre système quantique, nous choisissons d'étiqueter ces résonances en utilisant plutôt le couple d'indices  $(p : q)$  définis tels que

$$\Omega_{pq} = p\omega_{-10} + q\omega_{01} = 0, \quad (5.40)$$

où nous avons posé

$$\omega_{n,n+1} = \omega_{n+1} - \omega_n, \quad (5.41)$$

qui sont les fréquences de Bohr entre deux états voisins<sup>12</sup>.

Parmi toutes les résonances visibles sur les figures 5.6 et 5.7, l'îlot le plus large est donné par les indices  $(p : 0)$ . Il se distingue des autres îlots par le fait que, comme il ne dépend pas de l'état  $-1$ , il existe aussi dans le modèle à deux états : nous l'appelons donc *îlot de résonance principale*. Il se caractérise par la quasi-dégénérescence des niveaux d'énergie modifiés (5.36) de l'état 0 et de l'état 1 :

$$\omega_0 \simeq \omega_1, \quad (5.42)$$

qui se traduit par la condition

$$I_0 - I_1 \simeq \frac{F}{g\chi}. \quad (5.43)$$

sur les populations. Pour observer cette résonance, il faut donc que le puits 0 soit suffisamment peuplé pour compenser son défaut d'énergie par rapport au puits 1.

Sur les figures 5.6 et 5.7, nous voyons également des îlots de résonance plus petits, qui n'apparaissent pas dans le modèle à deux états : ce sont des *îlots secondaires*. Par exemple, sur la figure 5.6 (c), nous avons marqué d'une flèche la résonance  $(1 : -1)$ , pour laquelle l'évolution temporelle des populations est tracée sur la figure 5.8. Nous voyons que  $I_{-1}$  et  $I_1$  oscillent bien aux mêmes fréquences. La particularité de la résonance  $(1 : -1)$  est que sa position dans l'espace des phases ne dépend pas de  $g$ , i.e.  $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 1/3$  et  $I_1 = 17/30$  (soit  $I_0 - I_1 = -7/30 \simeq -0,23$ ).

À part les résonances secondaires, la différence fondamentale entre le modèle à trois états et celui à deux états est l'existence, à partir de  $g = 0,175$ , d'une zone où les points ne forment pas de trajectoires précises, ce qui est caractéristique du *chaos*. Comme le

<sup>12</sup>Il est inutile d'introduire  $\omega_{-1,1}$  dans la condition (5.40), puisque  $\omega_{-11} = \omega_{-10} + \omega_{01}$ .



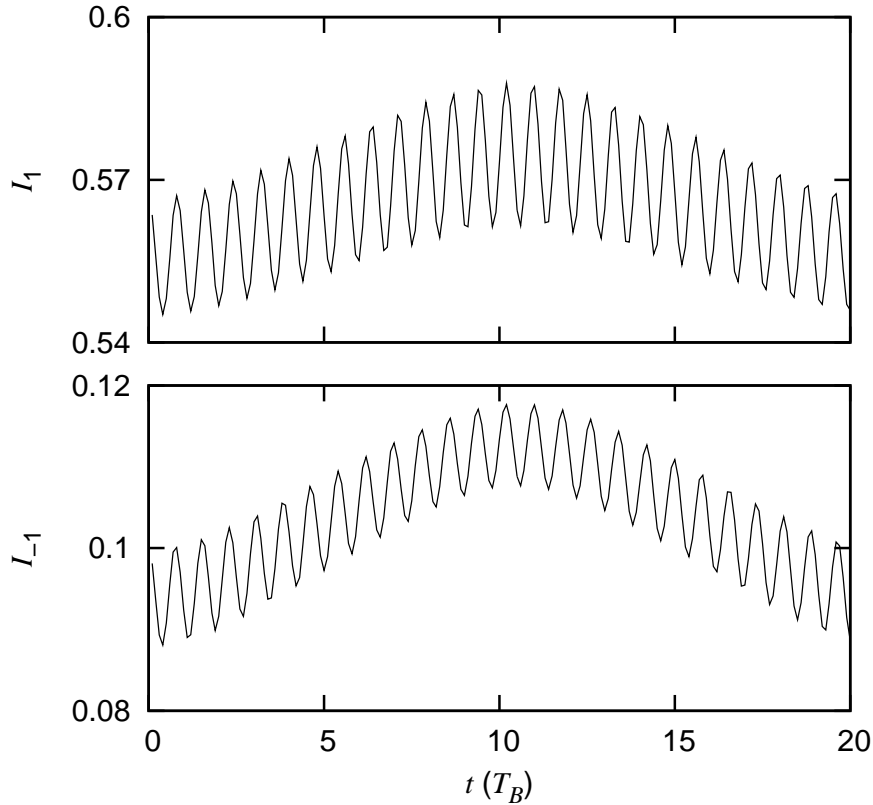


FIG. 5.8 – Exemple de résonance secondaire : la résonance  $(1 : -1)$  (cf. Fig. 5.6), donnée par l’oscillation, à la même fréquence, des populations des puits  $-1$  et  $1$ . Le paramètre  $g$  vaut  $0,15$  et les conditions initiales sont :  $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 1/3$ ,  $I_1 = 17/30$ ,  $\theta_{-1} = \theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \pi$ .

montre la figure 5.9, les trajectoires de la zone chaotique ont une évolution temporelle erratique et un spectre de fréquences continu. Dans le cas (a–b) ( $g = 0,175$ ), la population  $I_0$  présente de petites oscillations irrégulières autour de  $0,8$ , alors que dans le cas (c–d) ( $g = 0,25$ ),  $I_0$  présente une succession de petites et de grandes oscillations. Lorsque  $I_0$  effectue de petites oscillations autour de  $0,6$ , la trajectoire passe à gauche de la résonance principale dans la figure 5.7 (a). A l’inverse, lorsque  $I_0$  effectue de grandes oscillations, elle passe à droite de la résonance. Dans ce cas, le chaos traduit donc “l’hésitation” du système entre deux “choix” différents [95].

En comparant les figures 5.6 et 5.7 à celles de l’annexe C, nous constatons que la zone chaotique se développe là où se trouve la séparatrice du modèle à deux puits. En effet, la dynamique y est tellement sensible à la moindre perturbation, que les faibles variations de population du puits  $-1$  suffisent à la déstabiliser. Quand  $g$  augmente, la zone chaotique s’étend et rentre vers l’intérieur de la section de Poincaré. Pour  $g = 0,5$ , elle est encore limitée à la partie droite de la section<sup>13</sup>, alors que pour  $g = 2$ , elle a largement pénétré la partie gauche de l’espace des phases, où nous voyons par ailleurs qu’est apparue la résonance  $s_3$  du modèle à deux états.

<sup>13</sup>La zone chaotique semble bloquée par la trajectoire verticale en  $J_0$  du modèle à deux états (cf. Eq. (C.7)).

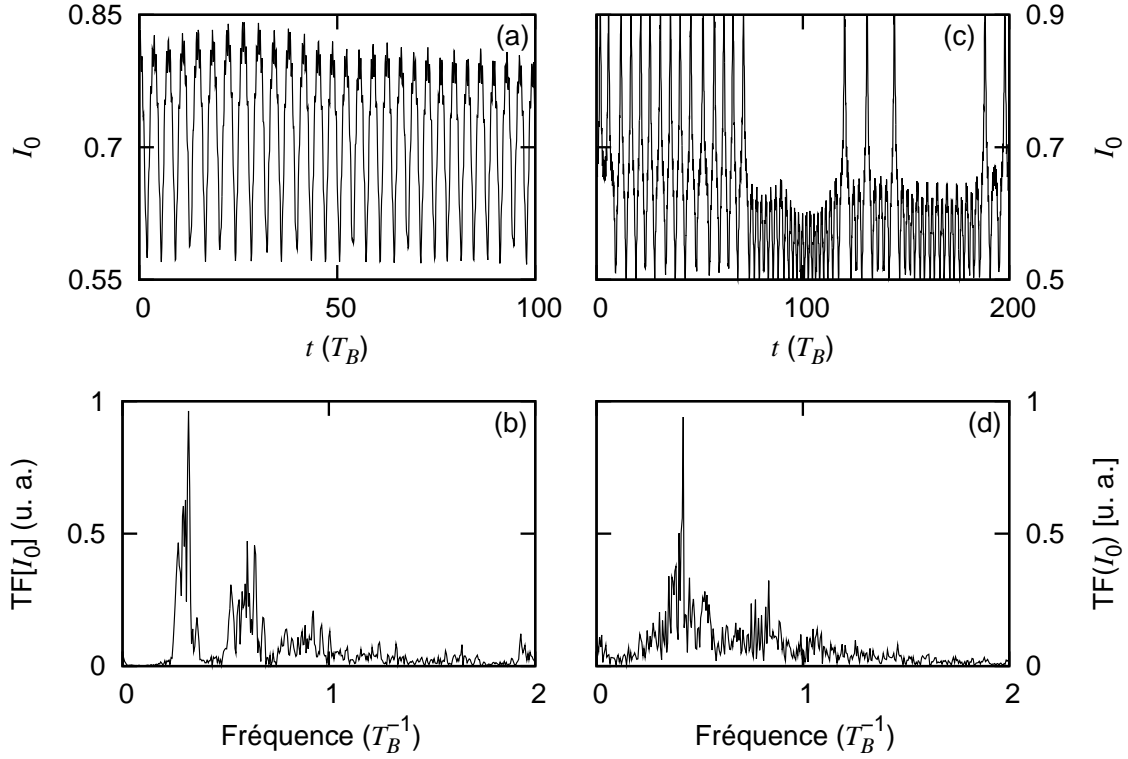


FIG. 5.9 – *Dynamique chaotique observée sur  $I_0$  : (a) et (c) en fonction du temps ; (b) et (d) spectre en fréquences de  $I_0$ . Les courbes (a) et (b) sont tracées pour  $g = 0,175$  et les condition initiales  $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 0,8$ ,  $I_1 = 0,1$ ,  $\theta_{-1} = \theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \pi$  ; les courbes (c) et (d) pour  $g = 0,25$ ,  $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 0,65$ ,  $I_1 = 0,25$ ,  $\theta_{-1} = \theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \pi$ .*

Un condensat de Bose-Einstein placé dans un réseau incliné peut donc avoir une dynamique chaotique, s'il occupe au moins trois puits de potentiel. Bien que le CBE soit un système quantique, ce chaos n'est pas ce que l'on appelle habituellement du chaos quantique, mais bien de la sensibilité aux conditions initiales dans un espace des phases de type classique, où l'évolution du CBE est représentée par une trajectoire. Nous appelons ce chaos au sens classique dans un système quantique le chaos *quasi-classique*. Nous avons montré que le chaos se développe selon le scénario décrit par le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser, que nous avons observé dans un espace des phases généralisé, composé des population et des phases de chaque état de Wannier-Stark. Comme il est très difficile de mesurer expérimentalement la population et la phase de chaque état, dans la section suivante, nous proposons une méthode qui peut être utilisée expérimentalement pour observer la route vers le chaos quasi-classique. Cette méthode est basée sur une grandeur mesurable : la position moyenne du condensat.

### 5.3 Chaos et position moyennes d'un condensat

Sur la figure 5.1, nous avons tracé, en fonction d'un paramètre de contrôle, les fréquences caractéristiques du spectre de l'impulsion carrée pour un autre système KAM, le rotateur pulsé. Nous avons établi une distinction claire entre le cas classique, marqué par l'apparition de spectres continus typiques de la sensibilité aux conditions initiales,

et le cas quantique, où nous observons un spectre discret de quasi-états de Floquet. Dans cette section, nous réalisons une simulation analogue avec un condensat de Bose-Einstein. Pour différentes valeurs du paramètre  $g$  et une seule condition initiale, nous recueillerons l'évolution temporelle de la position moyenne du condensat  $\langle X \rangle$ ,<sup>14</sup> dont nous prenons la transformée de Fourier. Puis, nous gardons du spectre ainsi obtenu les fréquences dont l'amplitude est au-dessus d'un certain seuil.

Le résultat d'un tel calcul est présenté sur la figure 5.10. L'allure générale de la courbe ressemble nettement à la figure 5.1 (a), ce qui confirme que le chaos observé dans les CBE est bien de nature classique. Dans cette section, nous allons montrer que tous les types de trajectoires observées dans un système KAM (cf. section précédente) possèdent une signature caractéristique sur la figure 5.10. Dans un premier temps, nous verrons comment reconnaître les trajectoires passantes et les résonances, en utilisant les niveaux d'énergies modifiés donnés par l'équation (5.36). Puis, nous nous intéresserons aux trajectoires chaotiques, dont nous confirmerons l'existence en utilisant l'exposant de Lyapunov maximal [30]. En effet, cet exposant, dont la méthode de calcul est donnée dans l'annexe D, est un outil robuste qui permet de distinguer de façon systématique les trajectoires chaotiques des trajectoires régulières.

### 5.3.1 Fréquences de Bohr et résonances secondaires

Nous commençons par écrire  $\langle X \rangle$  dans la base de Wannier-Stark :

$$\langle X \rangle = \sum_{m,n} X_{mn} \sqrt{I_m I_n} \cos(\theta_n - \theta_m), \quad (5.44)$$

où les  $X_{mn} = \int dX X \varphi_m \varphi_n$  sont les éléments de l'opérateur de position. Pour  $m \neq n$ ,  $X_{mn}$  est invariant par translation d'indice, i.e.  $X_{mn} = X_{m-n,0} \equiv X_{m-n}$ , alors que si  $m = n$ ,  $X_{mm} \equiv X_m = X_0 + m \simeq m$ . Si  $g = 0$ , les  $I_n$  sont constants et les  $\theta_n$  évoluent linéairement (cf. Eqs. (5.34) et (5.35)). Pour un système restreint à trois puits,  $\langle X \rangle$  s'écrit

$$\begin{aligned} \langle X \rangle(t) &= X_0 - I_{-1} + I_1 \\ &+ 2X_1 \sqrt{I_{-1} I_0} \cos(\omega_B t + \theta_{-1} - \theta_0) \\ &+ 2X_1 \sqrt{I_0 I_1} \cos(\omega_B t + \theta_0 - \theta_1) \\ &+ 2X_2 \sqrt{I_{-1} I_1} \cos(2\omega_B t + \theta_{-1} - \theta_1), \end{aligned} \quad (5.45)$$

avec dans ce cas  $I_n, \theta_n \equiv I_n(0), \theta_n(0)$ . Les fréquences de  $\langle X \rangle$  sont donc  $\omega_B$  et  $2\omega_B$ , ce que l'on a bien sur la figure 5.10. Lorsque  $g$  augmente légèrement, ces fréquences sont modifiées de la façon suivante :

- d'une part, il y a une levée de dégénérescence en  $\omega_B$ , car les fréquences  $\omega_{01} = \omega_B + g\chi(I_1 - I_0) < \omega_B$  (branche a) et  $\omega_{-10} = \omega_B + g\chi(I_0 - I_{-1}) > \omega_B$  (branche b) deviennent différentes ;
- d'autre part, la fréquence  $2\omega_B$  est déplacée en  $\omega_{-11} = 2\omega_B + g\chi(I_1 - I_{-1}) > 2\omega_B$  (branche c).

<sup>14</sup>Nous choisissons de travailler avec la position plutôt qu'avec l'impulsion, car, comme les états de Wannier-Stark sont localisés, la position retranscrit plus fidèlement les transferts de population entre les différents puits du réseau.

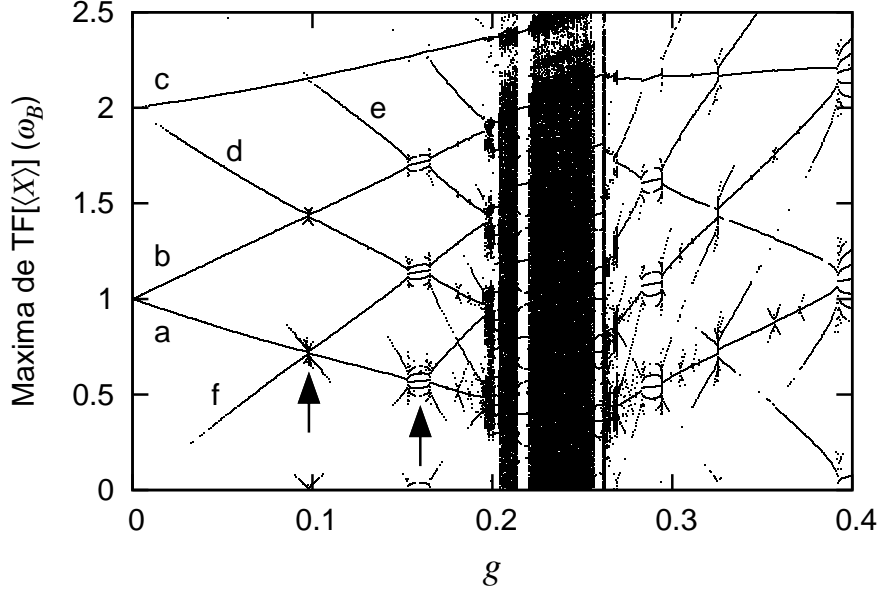


FIG. 5.10 – Transition vers le chaos prédite par le théorème KAM et observée sur les maxima du spectre de  $\langle X \rangle$  en fonction de  $g$ , pour la condition initiale  $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 0,65$ ,  $I_1 = 0,25$ ,  $\theta_{-1} = \theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \pi$ . Une fréquence est retenue si son amplitude correspondante est au moins  $1/100$  de l’amplitude maximale, alors que le signal temporel est pris jusque 400 périodes de Bloch. Certaines branches sont indexées de “a” à “f” et des flèches pointent les deux premières résonances secondaires (cf. texte).

Puis, d’autres fréquences qui sont les combinaisons linéaires de ces trois fréquences, apparaissent progressivement :  $2\omega_{01}$  (branche d),  $3\omega_{01}$  (branche e) ou encore  $(\omega_{01} - \omega_{-10})$  (branche f).

À l’intersection de ces différentes branches, se trouvent les résonances secondaires ( $p : q$ ) (cf. Eq. (5.40)) : ainsi  $(1 : -2)$  pour  $g \simeq 0,097$  et  $(1 : -3)$  autour de  $g \simeq 0,16$  (voir flèches). Cette dernière résonance est facilement observable car elle existe sur une large gamme de  $g$ , i.e.  $0,152 \lesssim g \lesssim 0,165$ . Elle présente un “effondrement” au niveau de ses extrémités que l’on observe aussi pour la résonance  $(1 : -6)$  de la figure 5.1 (a). Cet “effondrement” se produit lorsque nous passons sur la séparatrice de la résonance  $(1 : -3)$ , au voisinage de laquelle les différentes fréquences évoluent comme la racine carrée de  $g$  [60]. Notons que des résonances d’indices plus élevés apparaissent aussi, telle la  $(2 : -7)$  pour  $g \simeq 0,181$ . Les valeurs de  $g$  donnant lieu à une résonance peuvent être estimées analytiquement à partir de la condition (5.40), qui, exprimée en terme de  $g = g_{pq}$ , devient

$$g_{pq} = \frac{F}{\chi} \times \frac{p + q}{pI_{-1} + (q - p)I_0 - qI_1}, \quad (5.46)$$

ce qui donne, sachant que  $\chi = 2,00$ ,  $g_{1,-2} \simeq 0,093$ ,  $g_{1,-3} \simeq 0,143$  et  $g_{2,-7} \simeq 0,160$ . Ces prédictions sont moins fiables quand  $g$  augmente car les différentes branches de la figure 5.10 se courbent légèrement, rendant l’estimation de la fréquence (5.36) moins bonne.

La résonance  $(1 : -4)$ , apparaissant pour  $0,195 \lesssim g \lesssim 0,201$ , est visible sous une forme différente des autres. Elle se caractérise par plusieurs “bouffées” continues de fréquences, dues au fait que seul l’un des points selle de la résonance est accessible

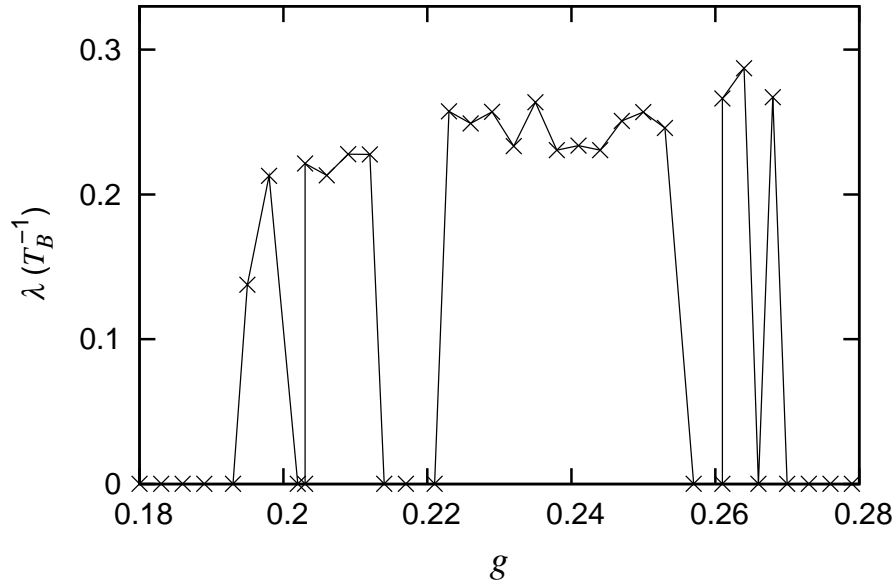


FIG. 5.11 – *Exposant de Lyapunov maximal en fonction de  $g$ , pour la même condition initiale que la figure 5.10, montrant bien une alternance de chaos et de dynamique régulière. Bien que le calcul de  $\lambda$  soit fait après 100000  $T_B$  (voir la discussion à ce sujet, dans l'annexe D), un lissage est effectué en faisant la moyenne de trois points voisins lorsque  $\lambda > 0$ . L'intervalle en  $g$  est choisi de sorte que le tracé soit centré autour de la zone chaotique de la figure 5.10.*

à notre condition initiale, contrairement à la  $(1 : -3)$  où nous passons par un point centre. Ce point selle donne des trajectoires instables, formant une petite zone chaotique, localisée dans l'espace des phases comme en fréquence. Puis, entre  $g \simeq 0,201$  et  $g \simeq 0,203$ , nous retrouvons une fenêtre de stabilité correspondant à la résonance  $(3 : -13)$ , avant d'arriver dans la zone chaotique "principale" autour du point instable  $i_2$  du modèle à deux états (cf. annexe C). Le chaos persiste jusque  $g \simeq 0,27$ , mais il est entre-coupé de deux fenêtres de stabilité :  $(1 : -5)$  pour  $0,213 \lesssim g \lesssim 0,220$  et  $(1 : -7)$  pour  $0,256 \lesssim g \lesssim 0,261$ . Enfin, à droite de la zone chaotique, nous retrouvons des branches qui se croisent, donnant lieu à des résonances caractérisées par  $q > 0$ , telle que  $(1 : 5)$  pour  $g \simeq 0,29$  ou  $(1 : 3)$  autour de  $0,4$ . Cependant, les trajectoires sont tellement déformées par rapport au système intégrable ( $\epsilon = 0$ ) que l'estimation (5.46) n'est plus adéquate pour prédire la position de ces résonances.

### 5.3.2 Dynamique chaotique

La figure 5.10 nous indique donc l'existence d'une zone chaotique entre  $g \simeq 0,195$  et  $0,27$ , au milieu de laquelle se trouvent des fenêtres de stabilité. En traçant, sur la figure 5.11, l'exposant de Lyapunov maximal en fonction de  $g$ , nous retrouvons bien cette alternance de chaos et de dynamique régulière. Aux zones où le spectre est continu correspond bien un exposant de Lyapunov positif, alors qu'au niveau des fenêtres de stabilité, l'exposant est nul. La transition entre ces deux dynamiques étant subite, il est intéressant d'estimer théoriquement la valeur de  $g$  pour laquelle apparaît le chaos, en utilisant le modèle à deux états développé dans l'annexe C. Dans un premier temps,

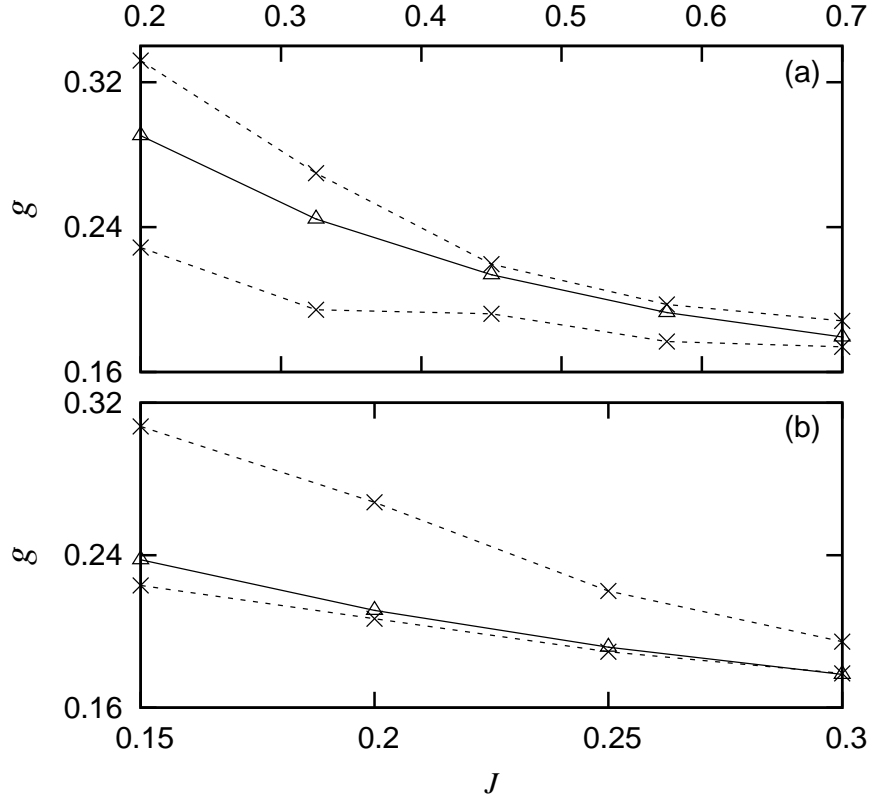


FIG. 5.12 – Comparaison des valeurs chaotiques de  $g$  en fonction de la différence de population initiale  $J$ , et pour une différence de phase : (a)  $\theta_1 - \theta_0 = \pi$  et (b)  $\theta_1 - \theta_0 = \pi/2$ . La zone chaotique est la région pour laquelle l'exposant de Lyapunov maximal, calculé après 10000  $T_B$ , est positif. Les limites inférieure et supérieure, calculées à partir de simulations numériques, sont tracées en pointillés et croix, et l'estimation théorique en traits pleins et triangles.

nous ferons cette estimation pour une condition initiale telle que  $\theta_1 - \theta_0 = \pi$ , puis telle que  $\theta_1 - \theta_0 \neq \pi$ .

Dans l'annexe C, nous montrons que le système à deux états possède un point fixe instable, noté  $i_2$ , pour  $\theta_1 - \theta_0 = \pi$ . Comme le chaos se développe autour de ce point fixe instable, le  $g$  chaotique peut être estimé en renversant l'équation (C.5) donnant  $i_2$  :

$$g_{ch}(\theta_1 - \theta_0 = \pi) = \frac{F}{\chi(J - \frac{\varepsilon}{2}f(J))}, \quad (5.47)$$

où

$$f(J) = 3(\beta - 1)\sqrt{1 - J^2} + \sqrt{\frac{(1 - J)^3}{1 + J}} - \beta\sqrt{\frac{(1 + J)^3}{1 - J}}, \quad (5.48)$$

où nous avons posé  $J = I_0 - I_1$ . L'équation (5.47) est écrite en fonction de la quantité  $J$ , car c'est sur elle que se base la comparaison avec les simulations présentées sur la figure 5.12. Sur le panneau (a), nous traçons  $g_{ch}(\theta_1 - \theta_0 = \pi)$ , donné par (5.47) d'une part, et les limites de la zone chaotique déterminées par simulations numériques d'autre part. Ces limites sont les valeurs minimale et maximale de  $g$  pour lesquelles l'exposant de Lyapunov maximal est positif. Bien qu'elle ne tienne pas compte de l'état  $-1$ , la

prédiction théorique est très bonne, ce qui confirme que le troisième état ne fait que perturber les deux autres.

Le panneau (b) de la figure 5.12 présente la même comparaison, mais pour  $\theta_1 - \theta_0 = \pi/2$ . Dans ce cas,  $g_{ch}$  est la valeur de  $g$  pour laquelle la condition initiale choisie  $(J, \theta_1 - \theta_0)$  appartient à la séparatrice issue du point fixe instable  $i_2$ . Concrètement, pour une valeur de  $g$  donnée, en utilisant le modèle à deux états, nous calculons l'énergie  $E_{i_2} = \mathcal{H}(J_{i_2}, \pi)$  associée au point  $i_2$  et l'énergie  $E_{ci} = \mathcal{H}(J, \pi/2)$  associée à la condition initiale choisie. Nous balayons ensuite le paramètre  $g$ , jusqu'à trouver  $g_{ch}(\pi/2)$ , la valeur pour laquelle les deux énergies sont égales, i.e.

$$E_{ci} = E_{i_2}. \quad (5.49)$$

Là encore, l'estimation de  $g_{ch}$  est très bonne, bien qu'elle ignore l'état  $-1$ .

Dans cette section, nous avons donc caractérisé le chaos quasi-classique, à travers une quantité mesurable expérimentalement, la position moyenne du condensat. En considérant une condition initiale particulière et en faisant varier le paramètre de non-linéarité  $g$ , nous avons retrouvé les dynamiques caractéristiques d'un système hamiltonien : d'abord des trajectoires passantes, puis des résonances, puis une transition subite vers le chaos. L'observation du chaos par notre méthode spectrale a été confirmée par le calcul de l'exposant de Lyapunov maximal qui est positif. Par ailleurs, en se basant sur les propriétés du système à deux états de l'annexe C, nous avons estimé avec succès la valeur de  $g$  pour laquelle apparaît le chaos.

## 5.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau incliné, dans la cas où les interactions à l'intérieur du condensat sont décrites par une théorie du champ moyen. L'équation de Gross-Pitaevskii qui découle de cette description, du fait de sa non-linéarité, ouvre de nouvelles perspectives pour les systèmes quantiques, en particulier l'observation de la sensibilité aux conditions initiales, que nous avons appelée chaos quasi-classique. Après avoir rappelé que la dynamique de notre système peut être expliquée à l'aide du théorème KAM, nous avons montré que les différents types de trajectoires, passantes, résonantes et chaotiques, laissent une signature clairement identifiable sur une quantité mesurable expérimentalement : la position moyenne du condensat. En augmentant progressivement le paramètre de non-linéarité et en retenant les fréquences présentes de façon significative dans le spectre de la position moyenne, nous avons observé que ces fréquences forment des branches de plus en plus nombreuses, et qui finissent en un spectre continu lorsque la dynamique est chaotique. Nous avons ainsi mis en évidence une *route* vers le chaos quasi-classique. Cette route est locale dans le sens où le détail de sa géométrie dépend de la condition initiale considérée ; mais elle est universelle dans le sens où elle existe pour des systèmes KAM très différents, dont le rotateur pulsé.

Bien que notre étude s'appuie sur la physique des condensats dans les réseaux optiques, nous l'avons restreinte à un condensat ne peuplant que trois puits de potentiel. La raison de cette hypothèse se trouve sur la figure 5.13, où sont tracées en fonction du temps les populations des puits 0 et 2. Au départ, le CBE est confiné dans trois puits de potentiel, comme précédemment ; mais cette fois-ci, il est libre de "déborder" dans les puits voisins [95]. Jusqu'à  $t = 80 T_B$ , cela ne modifie pas radicalement la dynamique ;

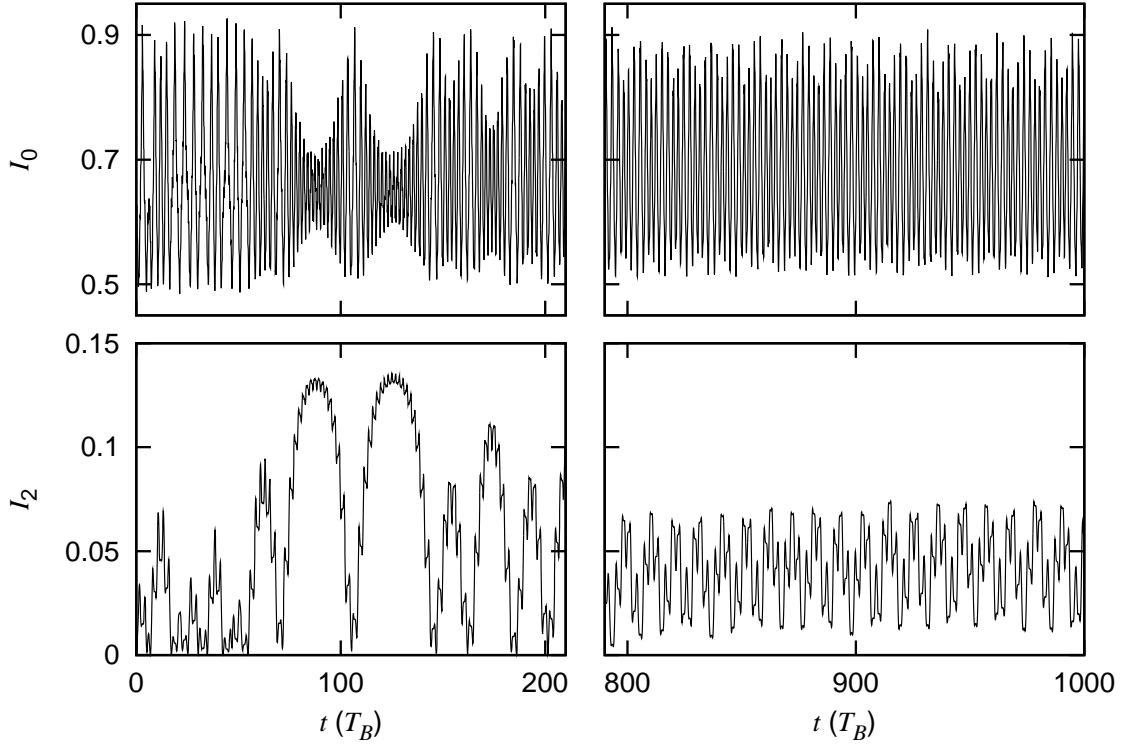


FIG. 5.13 – Variations des populations  $I_0$  (rangée du haut) et  $I_2$  (rangée du bas) en fonction du temps : de 0 à  $210 T_B$  (colonne de gauche) et de  $790$  à  $1000 T_B$  (colonne de droite). Même s’il occupe initialement trois puits ( $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 0,6$ ,  $I_1 = 0,3$ ,  $\theta_{-1} = \theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \pi$ ) le CBE peut ensuite “déborder” dans les autres puits, ayant ainsi une dynamique plus complexe. Autres paramètres :  $V_0 = 5$ ,  $F = 0,25$  et  $g = 0,25$ .

puis nous observons un couplage fort entre les différents puits autour de  $90$  et de  $125 T_B$ , où la population du puits 2 forme une “voûte” dont le maximum est à  $14\%$  de la population totale. Cela n’est pas la seule différence avec le chaos observé sur la figure 5.9. En effet, nous voyons qu’entre  $790$  et  $1000$  périodes de Bloch, la dynamique n’est même pas chaotique, et qu’elle se caractérise au contraire par des oscillations régulières. De façon générale, de longues phases chaotiques alternent avec de longues phases régulières, et sont entre-coupées de courtes périodes de couplage fort “en voûte” (cf. Fig. 5.13). Ces phénomènes dépassent le cadre du théorème KAM présenté dans ce travail, et entrent dans celui des systèmes hamiltoniens à grand nombre de degrés de liberté (cf. Chapitre 6 de la référence [60]), nécessitant donc une étude approfondie de ce type de systèmes. Il en va de même pour un CBE qui peuple initialement “beaucoup” (par exemple une dizaine) de puits de potentiel. La méthode spectrale de la section 5.3 est difficilement applicable, car le système possède un grand nombre de fréquences de Bohr.

Pour autant, il est important de préciser que la restriction à trois puits de potentiel n’est pas expérimentalement absurde, puisqu’il est possible de limiter à quelques unités le nombre de puits de potentiel occupés par le condensat [31]. Ce confinement permet d’étudier plus facilement les différences entre le modèle de champ moyen et ceux à  $N$  particules, par exemple Bose-Hubbard [51, 19]. En effet, l’équation de Gross-Pitaevskii ne prédit pas certains phénomènes comme l’effondrement et la renaissance (en anglais,



“collapse and revival”) [40], et elle prédit des résultats différents des modèles à  $N$  particules, surtout au voisinage des trajectoires instables [98]. Dans un article théorique paru récemment [104], il a été montré que, dans la région chaotique, même en faisant la moyenne entre plusieurs trajectoires prédites par l’EGP, on ne retrouve pas les résultats prédits par le modèle de Bose-Hubbard. Ce travail a été mené pour un double puits avec une force modulée dans le temps, et il nous semble intéressant d’en mener un autre dans le système autonome qu’est le triple puits de potentiel.

# Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons présenté un certain nombre de résultats théoriques s'appuyant sur les expériences menées avec des atomes refroidis par laser, en particulier au sein de notre groupe. De façon générale, ces résultats concernent le chaos dans les systèmes quantiques, et les liens complexes entre mécanique classique et quantique. Une partie importante de ce travail est consacrée à l'un des systèmes de référence pour l'étude du chaos quantique : le rotateur pulsé. En régime fortement chaotique, l'énergie cinétique du rotateur pulsé classique est diffusive, alors que dans le cas quantique, elle finit par saurer au bout d'un certain temps, présentant le phénomène bien connue de localisation dynamique.

Ce phénomène étant dû à des interférences destructives, il peut être affecté par la décohérence, et notamment par l'émission spontanée, qui induit donc une reprise de la diffusion en impulsion. Dans cette thèse, nous proposons une méthode applicable expérimentalement pour réduire les effets de l'émission spontanée. Cette méthode, basée sur la spectroscopie Raman, consiste à sélectionner préférentiellement les atomes qui n'ont pas effectué de cycle de fluorescence, pour le calcul de la distribution en impulsion et de l'énergie cinétique moyenne. Nous menons une étude analytique complète, validée par des simulations numériques, donnant l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un tel système. Cette étude nous permet de proposer une gamme de paramètres favorables pour l'observation expérimentale de la diffusion réduite. Ainsi la méthode proposée ici sera-t-elle prochainement mise en œuvre expérimentalement dans notre groupe.

Du fait de sa périodicité temporelle, le rotateur pulsé présente également des phénomènes de résonance, qui se caractérisent par un comportement balistique, et qui apparaissent dans le cas classique comme dans le cas quantique. Dans ce travail, nous proposons une description des résonances quantiques dans l'espace des positions, qui nous permet, malgré leur caractère purement ondulatoire, d'expliquer leur dynamique à l'aide de concepts classiques tels que la force et la quantité de mouvement. Nous établissons donc clairement un parallèle entre les résonances quantiques et leurs homologues classiques, les modes accélérateurs. Cette interprétation intuitive des résonances, qui, à notre connaissance, n'a jamais été formulée de la sorte, vient en complément de celle basée sur la diffraction dans le réseau réciproque.

Le rotateur pulsé est donc un système incroyablement riche qui est, encore aujourd'hui, au centre de nombreuses recherches. Cependant, comme tous les systèmes quantiques composés de particules indépendantes, il ne présente pas de chaos. Ainsi l'obtention des premiers condensats de Bose-Einstein, dont les atomes interagissent de façon significative, a-t-elle marqué un tournant dans l'étude du chaos dans les systèmes quantiques. En effet, pour la première fois, du chaos au sens classique a été observé dans un système quantique : nous l'avons donc appelé chaos quasi-classique. Dans ce manus-

crit, nous montrons que ce chaos apparaît suivant le scénario prédit par le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser, et nous proposons une méthode, basée sur la mesure de la position moyenne du condensat, afin d'observer expérimentalement la transition vers le chaos quasi-classique.

Cette prédiction est basée sur la description, en terme de champ moyen, des interactions entre les atomes du condensat. Comme perspective de ce travail, nous proposons donc de comparer les résultats donnés par cette approximation de champ moyen et ceux donnés par une description dite à  $N$  particules, par exemple le modèle de Bose-Hubbard. En effet, comme la non-linéarité inhérente à l'approximation de champ moyen ne se retrouvant pas dans le modèle de Bose-Hubbard, il nous semble particulièrement intéressant d'étudier comment évolue, suivant le modèle de Bose-Hubbard, un état initial donnant une dynamique chaotique dans la théorie de champ moyen.

En tous les cas, nous espérons que ce travail, ainsi que les publications qui en découlent, constitue une avancée intéressante dans le domaine du chaos dans les systèmes quantiques, et qu'il stimulera la réflexion d'autres chercheurs, théoriciens comme expérimentateurs.

# Annexes



# Annexe A

## Calculs relatifs aux résonances quantiques du rotateur pulsé

Cette annexe vient en complément du chapitre 4, sur les résonances quantiques du rotateur pulsé. Elle se compose de trois sections, renvoyant chacune à des calculs précis, menés dans le chapitre 4.

### A.1 Valeurs moyennes de l'impulsion et de l'énergie cinétique

Le but de cette annexe est de présenter le développement qui aboutit aux formules de l'impulsion et de l'énergie cinétique moyennes, pour une seule quasi-impulsion et moyennées sur toutes les quasi-impulsions. Pour cela, nous commençons par écrire la définition générale de  $\langle P \rangle$  en faisant apparaître la quasi-impulsion :

$$\langle P \rangle = \bar{k} \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \sum_n (n + \beta) \left| \tilde{\psi}_\beta(n) \right|^2, \quad (\text{A.1})$$

où  $\tilde{\psi}_\beta(n) = \langle n + \beta | \Psi \rangle$  est la distribution en impulsions. En rappelant la relation donnée dans le chapitre sur le RP

$$\tilde{\psi}_\beta(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta(X) e^{-i(n+\beta)X}, \quad (\text{A.2})$$

nous pouvons écrire l'action de l'opérateur impulsion comme

$$\begin{aligned} (n + \beta) \tilde{\psi}_\beta(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (n + \beta) \psi_\beta(X) e^{-i(n+\beta)X} dX \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta(X) \frac{\partial}{\partial X} e^{-i(n+\beta)X}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En décomposant (A.3) sous la forme d'une intégrale par partie, nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} (n + \beta) \tilde{\psi}_\beta(n) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[ \psi_\beta(X) e^{-i(n+\beta)X} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{-i(n+\beta)X} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dont le premier terme de droite s'annule, étant donné que  $\psi_\beta(X) e^{-i\beta X}$  est  $2\pi$ -périodique.

Finalement, l'impulsion moyenne s'écrit

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= -\frac{i\hbar}{2\pi} \int d\beta \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} dX' e^{i(n+\beta)X'} \psi_\beta(X') \\ &\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{-i(n+\beta)X} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où nous avons aussi écrit  $\tilde{\psi}_\beta^*(n)$  dans l'espace des positions. En utilisant la relation

$$\frac{1}{2\pi} \sum_n e^{-in(X-X')} = \sum_k \delta(X - X' - 2k\pi) \quad (\text{A.6})$$

et en intégrant sur  $X'$  pour faire disparaître la fonction “delta” de Dirac, nous aboutissons à

$$\langle P \rangle = -i\hbar \int d\beta \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta^*(X) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X) = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \langle P \rangle_\beta, \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\langle P \rangle_\beta = -i\hbar \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta^*(X) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X). \quad (\text{A.8})$$

Même si la fonction d'onde  $\psi_\beta(X)$  est définie pour  $X \in ]-\infty; +\infty[$ , il suffit d'intégrer sur une période du potentiel pour calculer  $\langle P \rangle_\beta$ . Ceci est dû au fait que toute l'information sur l'état du système est contenue dans un intervalle de  $X$  appartenant à une seule période de potentiel.

Un tel raisonnement peut être appliqué pour n'importe quel moment de l'impulsion, ce qui fait que la relation (A.7) peut être généralisée

$$\langle P^k \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \langle P^k \rangle_\beta, \quad (\text{A.9})$$

avec

$$\langle P^k \rangle_\beta = (-i\hbar)^k \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta^*(X) \frac{\partial^k}{\partial X^k} \psi_\beta(X). \quad (\text{A.10})$$

Dans le cas particulier  $k = 2$ , nous obtenons que l'énergie cinétique est donnée par

$$\langle E \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \langle E \rangle_\beta, \quad (\text{A.11})$$

avec

$$\langle E \rangle_\beta = -\frac{\hbar^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta^*(X) \frac{\partial^2}{\partial X^2} \psi_\beta(X), \quad (\text{A.12})$$

que nous écrirons

$$\langle E \rangle_\beta = \frac{\hbar^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta^*(X) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X), \quad (\text{A.13})$$

afin de simplifier nos calculs.

## A.2 Relations de récurrence pour $\bar{k} = \pi$

Cette annexe présente les détails des calculs menés dans le cas  $\bar{k} = \pi$ , et permettant d'aboutir dans la sous-section A.2.1, aux relations de récurrence sur la fonction d'onde et, dans la sous-section A.2.2, à celles sur l'impulsion moyenne.

### A.2.1 Relation de récurrence sur la fonction d'onde

Nous cherchons à écrire une relation de récurrence pour  $\psi_\beta(X, t)$ . Comme pour les RQS, nous écrivons d'abord l'action de l'opérateur de propagation libre sur  $\tilde{\psi}_\beta(n, t - 1)$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\beta(n, t^-) &= \exp\left(-i\frac{\bar{k}}{2}(n + \beta)^2\right) \tilde{\psi}_\beta(n, t - 1) \\ &= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}n^2\right) \exp(-i\pi n\beta) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\beta^2\right) \tilde{\psi}_\beta(n, t - 1).\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Selon la parité de  $n$ , le premier facteur de (A.14) prend des valeurs différentes :

$$\exp\left(-i\frac{\pi}{2}n^2\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ pair} \\ -i & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}\quad (\text{A.15})$$

Lorsque l'on écrit  $\psi_\beta(X, t^-)$  sous forme d'une série de Fourier, il faut donc distinguer les termes pairs et impairs, ce qui donne

$$\begin{aligned}\psi_\beta(X, t^-) &= \frac{e^{i\beta X}}{\sqrt{2\pi}} \sum_p \left( e^{i2pX} \tilde{\psi}_\beta(2p, t^-) + e^{i(2p+1)X} \tilde{\psi}_\beta(2p+1, t^-) \right) \\ &= \frac{e^{i\beta X}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{\bar{k}}{2}\beta^2\right) \sum_p \left( e^{i2p(X-\bar{k}\beta)} \tilde{\psi}_\beta(2p, t - 1) \right. \\ &\quad \left. - i e^{i(2p+1)(X-\bar{k}\beta)} \tilde{\psi}_\beta(2p+1, t - 1) \right).\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

À présent, en prenant la transformée de Fourier inverse de  $\tilde{\psi}_\beta(2p, t - 1)$  et  $\tilde{\psi}_\beta(2p+1, t - 1)$ , nous faisons dans les deux cas apparaître une somme d'exponentielles imaginaires

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{2p} e^{i2p(X-X'-\bar{k}\beta)} = \frac{1}{2} \sum_q \delta(X - X' - \bar{k}\beta + q\pi),\quad (\text{A.17})$$

et l'équation (A.16) devient

$$\begin{aligned}\psi_\beta(X, t^-) &= \frac{\exp(-i\bar{k}\beta^2/2)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX' \psi_\beta(X', t - 1) e^{i\beta(X-X')} \\ &\quad \times \left( 1 - i e^{i(X-X'-\bar{k}\beta)} \right) \sum_q \delta(X - X' - \bar{k}\beta + q\pi).\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

Compte tenu des bornes de l'intégrale sur  $X'$ , les sommes sur  $q$  ne donnent des contributions non nulles que pour  $q = 0$  et  $q = 1$ . L'équation (A.18) est donc la superposition d'un terme en  $\psi_\beta(X - \bar{k}\beta, t - 1)$  avec le coefficient  $\frac{1-i}{2}$  et un autre en  $\psi_\beta(X - \bar{k}\beta - \pi, t - 1)$  avec le coefficient  $\frac{1+i}{2} e^{i\beta\pi}$ . En posant  $\frac{1\pm i}{\sqrt{2}} = e^{\pm i\pi/4}$ , nous aboutissons à la relation (4.36).



### A.2.2 Relation de récurrence sur l'impulsion moyenne

Partant des équations (A.8) et (4.56), nous trouvons que l'impulsion moyenne comprend deux termes. Le premier terme,  $p_1$  se trouve facilement :

$$p_1 = K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_{\beta}(X,t)|^2, \quad (\text{A.19})$$

alors que le second s'écrit

$$\begin{aligned} p_2 &= -\frac{i\bar{k}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( e^{i\frac{\pi}{4}} \psi_{\beta}^*(X-w,t-1) + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\beta\pi} \psi_{\beta}^*(X-w-\pi,t-1) \right) \\ &\quad \times \left( e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\partial}{\partial X} \psi_{\beta}(X-w,t-1) + e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\beta\pi} \frac{\partial}{\partial X} \psi_{\beta}(X-w-\pi,t-1) \right) \\ &= -\frac{i\bar{k}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( \psi_{\beta}^*(X,t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_{\beta}(X,t-1) \right. \\ &\quad \left. + \psi_{\beta}^*(X-\pi,t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_{\beta}(X-\pi,t-1) \right) \\ &\quad + \frac{\bar{k}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( e^{i\beta\pi} \psi_{\beta}^*(X,t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_{\beta}(X-\pi,t-1) \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\beta\pi} \psi_{\beta}^*(X-\pi,t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_{\beta}(X,t-1) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Dans la dernière égalité, nous avons remplacé  $X-\pi$  par  $X$  sans pour autant changer les bornes de l'intégrale, l'essentiel étant qu'elles couvrent une période de potentiel. Dans la première ligne de (A.20), nous reconnaissons  $\langle P \rangle_{\beta}(t-1)$ , alors qu'en utilisant

$$\psi_{\beta}(X-2\pi,t) = e^{-i2\pi\beta} \psi_{\beta}(X,t), \quad (\text{A.21})$$

nous trouvons que la deuxième ligne disparaît. Nous trouvons donc que l'impulsion moyenne suit la relation de récurrence (4.57).

## A.3 Energie cinétique moyenne pour $\bar{k} = \pi$ et $\beta = 0$

Cette annexe présente la méthode pour calculer explicitement l'énergie cinétique du rotateur pulsé dans le cas de la RQOS  $\bar{k} = \pi$  pour  $\beta = 0$ , c'est-à-dire qu'il aboutit à l'équation (4.65). Ce calcul est basé sur le formalisme matriciel développé dans la sous-section 4.2.1, qui sera ici étendu avec l'introduction de la dérivée des fonctions  $c_1$  et  $c_2$ . La sous-section A.3.1 sera consacrée au calcul de ces dérivées, puis dans la sous-section A.3.2, nous verrons comment les utiliser pour calculer l'énergie cinétique moyenne  $\langle E \rangle_{\beta=0}$ .

### A.3.1 Extension du formalisme matriciel

Partant de l'équation (4.58), nous cherchons à y introduire la décomposition de  $\psi_{\beta}(X,t)$  sur  $c_1$  et  $c_2$ . Pour cela, nous devons décomposer la dérivée  $\frac{\partial}{\partial X} \psi_{\beta}(X,t)$ , c'est-à-

dire dériver l'équation (4.40)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X + wt, t) &= \frac{\partial}{\partial X} c_1(X, t) \psi_\beta(X, 0) + c_1(X, t) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X, 0) \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} c_2(X, t) \psi_\beta(X - \pi, 0) \\ &+ c_2(X, t) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X - \pi, 0). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Nous voyons donc apparaître les dérivées  $\frac{\partial}{\partial X} c_1(X, t)$  et  $\frac{\partial}{\partial X} c_2(X, t)$ , pour lesquelles nous pouvons trouver une relation de récurrence en dérivant les équations (4.42) et (4.43), ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} c_1(X, t) &= -i \frac{\partial}{\partial X} \phi(X, t) \times c_1(X, t) \\ &+ \frac{e^{-i\phi(X, t)}}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\pi/4} \frac{\partial}{\partial X} c_1(X, t - 1) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\pi/4} e^{-i\beta\pi} \frac{\partial}{\partial X} c_2(X + \pi, t - 1) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} c_2(X + \pi, t) &= i \frac{\partial}{\partial X} \phi(X, t) \times c_2(X + \pi, t) \\ &+ \frac{e^{i\phi(X, t)}}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} \frac{\partial}{\partial X} c_1(X, t - 1) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\pi/4} \frac{\partial}{\partial X} c_2(X + \pi, t - 1) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial X} \phi(X, t) = -\kappa \sin(X + wt). \quad (\text{A.25})$$

Nous pouvons déduire de (A.22) les conditions initiales

$$\frac{\partial}{\partial X} c_1(X, t = 0) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial X} c_2(X, t = 0) = 0, \quad (\text{A.27})$$

ce qui implique (en utilisant un raisonnement par récurrence comme pour  $c_1$  et  $c_2$ ) que  $\frac{\partial}{\partial X} c_1$  et  $\frac{\partial}{\partial X} c_2$  sont  $2\pi$ -périodiques  $\forall t$ .

Pour condenser nos équations, nous allons utiliser le même formalisme matriciel que pour calculer  $c_1$  et  $c_2$ . Ainsi, en posant

$$c'_j(X, t) = \frac{\partial}{\partial X} c_j(X, t) \quad (\text{A.28})$$

( $j = 1, 2$ ), pouvons-nous définir le vecteur

$$\mathbf{c}'_t = \begin{pmatrix} c'_1(X, t) \\ c'_2(X + \pi, t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

dont l'évolution temporelle est donnée par la relation de récurrence

$$\mathbf{c}'_t = \mathbf{A}_t \mathbf{c}'_t + e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathbf{M}_t \mathbf{c}'_{t-1}, \quad (\text{A.30})$$

où  $\mathbf{A}_t$  et  $\mathbf{M}_t$  sont des matrices  $2 \times 2$  données par

$$\mathbf{A}_t = i\kappa \sin(X + wt) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{M}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & ie^{-i\phi}e^{-i\beta\pi} \\ ie^{i\phi}e^{i\beta\pi} & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Après avoir rappelé les conditions initiales

$$\mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

nous itérons (A.30) jusque  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_t &= \mathbf{A}_t \mathbf{c}_t + \mathbf{M}_t (\mathbf{A}_{t-1} \mathbf{c}_{t-1} + \mathbf{M}_{t-1} (\mathbf{A}_{t-2} \mathbf{c}_{t-2} + \dots)) \\ &= \mathbf{A}_t \mathbf{c}_t + \mathbf{M}_t \mathbf{A}_{t-1} \mathbf{c}_{t-1} + \mathbf{M}_t \mathbf{M}_{t-1} \mathbf{A}_{t-2} \mathbf{c}_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{s=0}^{t-1} \left( \prod_{r=1}^s \mathbf{M}_{t-r} \right) \mathbf{A}_{t-s} \mathbf{c}_{t-s} \\ &= \left\{ \sum_{s=0}^{t-1} \left( \prod_{r=1}^s \mathbf{M}_{t-r} \right) \mathbf{A}_{t-s} \left( \prod_{q=0}^{t-s-1} \mathbf{M}_{t-s-q} \right) \right\} \times \mathbf{c}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Le vecteur  $\mathbf{c}'_t$  est donc le résultat de sommes et de produits de matrices. Pour le calculer explicitement, nous devons considérer des cas particuliers, dont le plus simple est  $\beta = 0$ .

**Cas particulier de  $\beta = 0$**  Comme  $\mathbf{A}_t \equiv \mathbf{A}$  et  $\mathbf{M}_t \equiv \mathbf{M}$  ne dépendent pas du temps, l'équation (A.34) se simplifie considérablement pour donner

$$\mathbf{c}'_t = \left( \sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{M}^s \mathbf{A} \mathbf{M}^{t-s} \right) \times \mathbf{c}_0. \quad (\text{A.35})$$

Pour calculer explicitement  $c'_1(X, t)$  et  $c'_2(X + \pi, t)$ , il nous faut d'abord calculer  $\mathbf{M}^s$ , ce qui est fait en diagonalisant  $\mathbf{M}$ . Cette diagonalisation nous permet d'écrire  $\mathbf{M}$  sous la forme

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{it\Theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\Theta} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}, \quad (\text{A.36})$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de passage entre la base propre de  $\mathbf{M}$ , notée  $\mathcal{B}_M$  et la base de départ, notée  $\mathcal{B}_0$  (cf. Eq. (4.50)). Le calcul de  $\mathbf{c}'_t$  apparaît donc comme une suite d'allers-retours entre les deux bases dont le détail est le suivant :

- partant de  $\mathcal{B}_0$ , passage dans  $\mathcal{B}_M$  afin de calculer  $\mathbf{M}^{t-s}$ ,
- puis retour dans  $\mathcal{B}_0$  pour calculer l'action de  $\mathbf{A}$  (qui y est diagonale),
- retour dans  $\mathcal{B}_M$  pour calculer  $\mathbf{M}^s$ ,
- enfin retour dans  $\mathcal{B}_0$ ,

cette opération étant répétée pour différentes valeurs de  $s$ .

Une fois tous les calculs effectués, nous arrivons au résultat

$$c'_1(X,t) = i\kappa \sin X e^{-it\frac{\pi}{4}} \times \left[ \frac{1 \cos \Theta}{2 \sin^3 \Theta} \sin(t\Theta) + t \left( \cos(t\Theta) - \frac{i \sin \phi}{\sqrt{2} \sin \Theta} \sin(t\Theta) \right) \right] \quad (\text{A.37})$$

$$c'_2(X + \pi, t) = i\kappa \sin X e^{-it\frac{\pi}{4}} \frac{e^{i\phi}}{\sin \Theta} \times \left[ -\frac{1 \sin \phi}{2 \sin \Theta} t \cos(t\Theta) + t \left( \frac{i \sin \phi \cos \Theta}{2 \sin^2 \Theta} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \sin(t\Theta) \right]. \quad (\text{A.38})$$

$c'_1$  et  $c'_2$  sont constitués de termes oscillants, dont certains sont multipliés par  $t$ . Nous verrons dans la suite que ce sont ces termes linéaires dans le temps qui apportent la ballisticité.

### A.3.2 Energie cinétique moyenne

Pour calculer l'énergie cinétique, nous partons de l'équation (4.58), dont nous allons expliciter les différents termes, en supposant que les fonctions  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c'_0$ ,  $c'_1$  et  $\sin X$  varient beaucoup plus lentement que  $\psi_\beta$  et  $\frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta$ , qui sont fortement localisées autour de  $X_0$ . Dans cette approximation, le terme en sinus carré devient

$$\begin{aligned} & \frac{K^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin^2 X |\psi_\beta(X,t)|^2 \\ &= \frac{K^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin^2 (X_0 + wt) |\psi_\beta(X,0)|^2 \\ & \quad \times (|c_1(X,t)|^2 + |c_2(X + \pi, t)|^2) \\ &= \frac{K^2}{2} \sin^2 (X_0 + wt) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

où nous avons utilisé la normalisation  $|c_1(X,t)|^2 + |c_2(X + \pi, t)|^2 = 1$ . Le terme de courant, lui, s'écrit

$$\begin{aligned} & K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X J'(X - w, t - 1) \\ &= \frac{\bar{k}K}{2} e^{i\beta\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin (X + w(t - 1)) \\ & \quad \times (c_1^*(X) \psi_\beta^*(X) + c_2^*(X) \psi_\beta^*(X - \pi)) \\ & \quad \times (c'_1(X - \pi) \psi_\beta(X - \pi) + c_1(X - \pi) \psi'_\beta(X - \pi) \\ & \quad + c'_2(X - \pi) \psi_\beta(X - 2\pi) + c_2(X - \pi) \psi'_\beta(X - 2\pi)) + cc \\ &= \frac{\bar{k}K}{2} e^{i\beta\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin (X + w(t - 1)) \\ & \quad \times (e^{-i2\pi\beta} c_1^*(X) c'_2(X - \pi) |\psi_\beta(X)|^2 \\ & \quad + c_2^*(X) c'_1(X - \pi) |\psi_\beta(X - \pi)|^2 \\ & \quad + e^{-i2\pi\beta} c_1^*(X) c_2(X - \pi) \psi_\beta^*(X) \psi'_\beta(X) \\ & \quad + c_2^*(X) c_1(X - \pi) \psi_\beta^*(X - \pi) \psi'_\beta(X - \pi)) + cc. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

(Pour plus de clarté dans l'écriture, nous avons enlevé toutes les dépendances temporelles.) En intégrant sur  $X$ , nous arrivons à

$$\begin{aligned}
& K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X J'(X - w, t - 1) \\
= & \frac{\hbar K}{2} \sin(X_0 + w(t - 1)) \\
& \times (e^{-i\pi\beta} c_1^*(X_0) c_2'(X_0 + \pi) - e^{i\pi\beta} c_2^*(X_0 + \pi) c_1'(X_0) + cc) \\
+ & iK \sin(X_0 + w(t - 1)) \langle P \rangle_{\beta}(t = 0) \\
& \times (e^{-i\pi\beta} c_1^*(X_0) c_2(X_0 + \pi) - e^{i\pi\beta} c_2^*(X_0 + \pi) c_1(X_0)). \tag{A.41}
\end{aligned}$$

Pour  $\beta = 0$ , le dernier terme de (A.41) s'annule, et l'énergie cinétique s'écrit

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_{\beta=0}(t) = & \langle E \rangle_{\beta=0}(t - 1) + \frac{K^2}{2} \sin^2 X_0 + \hbar K \sin X_0 \\
& \times (c_1^*(X_0) c_2'(X_0 + \pi) - c_2^*(X_0 + \pi) c_1'(X_0) + cc). \tag{A.42}
\end{aligned}$$

En remplaçant  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_1'$  et  $c_2'$ , nous exprimons  $\langle E \rangle_{\beta=0}(t)$  en fonction des seules paramètres du problème

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_{\beta=0}(t) = & \langle E \rangle_{\beta=0}(t - 1) + \frac{K^2}{2} \sin^2 X_0 \\
& \times \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} (2t - 1) + \frac{1}{1 + \sin^2 \phi} \right. \\
& \left. \times \left( \cos((2t - 2)\Theta) + \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \sin((2t - 2)\Theta) \right) \right\}. \tag{A.43}
\end{aligned}$$

Nous voyons d'ores et déjà apparaître la balisticité dans le terme linéaire de l'équation (A.43). Elle apparaît encore plus clairement après itération de (A.43), qui donne

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_{\beta=0}(t) = & \langle E \rangle_{\beta=0}(t = 0) + \frac{K^2}{2} \sin^2 X_0 \times \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} t^2 \right. \\
& + \frac{1}{4 \sin^2 \Theta} \left( \frac{1}{\sin^2 \Theta} + \frac{\sin((2t - 1)\Theta)}{\sin \Theta} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\cos \Theta}{\sin^2 \Theta} \cos((2t - 1)\Theta) \right) \right\}. \tag{A.44}
\end{aligned}$$

En développant les termes  $\cos((2t - 1)\Theta)$  et  $\sin((2t - 1)\Theta)$  en fonction de  $\cos(2t\Theta)$  et  $\sin(2t\Theta)$ , nous aboutissons finalement à l'équation (4.65).

# Annexe B

## Résonances quantiques et quasi-états de Floquet

Dans le chapitre 4, nous avons vu qu'étudier les résonances quantiques du rotateur pulsé dans l'espace des positions permet d'en donner une image physique très simple. L'objet de cette annexe est de montrer, à l'aide des quasi-états de Floquet, que l'espace des positions est en fait la base naturelle pour étudier les résonances quantiques. Reprenant les résultats présentés dans la référence [15], nous montrons que les quasi-états de Floquet sont *localisés* dans l'espace des positions, et que le spectre de quasi-énergies correspondantes possède des propriétés remarquables, qui permettent de distinguer d'une part la balisticité, et d'autre part les dynamiques périodique et quasi-périodique. Si la dynamique est balistique, le spectre de quasi-énergies correspondantes forme une bande *continue* et d'épaisseur *non-nulle*, alors que pour une dynamique périodique, le spectre est composé d'un nombre *fini* de *bandes plates*.

Rappelons pour commencer que les quasi-états de Floquet  $|\varphi\rangle$ , introduits dans la sous-section 2.2.2, sont les états propres de l'opérateur d'évolution pris sur une période de potentiel

$$\hat{U} = \exp\left(-i\frac{K}{\hbar}\cos\hat{X}\right)\exp\left(-i\frac{\hat{P}^2}{2\hbar}\right). \quad (\text{B.1})$$

Ils satisfont donc à l'équation aux valeurs propres

$$\hat{U}|\varphi\rangle = \exp(-i\varepsilon)|\varphi\rangle, \quad (\text{B.2})$$

où  $\varepsilon$ , définie à  $2\pi$  près, est la quasi-énergie. En dehors des résonances quantiques  $\hbar \neq 4\pi r/s$ , les états de Floquet possèdent un spectre discret de quasi-énergies réparties "pseudo-aléatoirement" sur l'intervalle  $[-\pi; \pi[$ , et une distribution en impulsion qui a une forme double-exponentielle. Ce sont ces propriétés qui permettent d'expliquer la localisation dynamique.

Pour étudier les quasi-états de Floquet dans le cas des résonances quantiques, nous allons successivement considérer trois exemples typiques des différentes dynamiques existantes :

- dans la section B.1,  $\hbar = 4\pi$  et  $\beta = 0$ , qui est balistique,
- dans la section B.2,  $\hbar = 2\pi$  et  $\beta = 0$ , l'anti-résonance, qui est périodique,
- dans la section B.3,  $\hbar = \pi$  et  $\beta = 0$ , la plus simple des RQOS, qui est balistique et périodique<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Comme, pour les trois exemples,  $\beta = 0$ , nous ne le précisons plus par la suite.

Dans les trois cas, nous ferons nos calculs dans l'espace des impulsions (dont les kets de base sont notés  $|n\rangle$ ), où l'opérateur d'évolution s'écrit

$$\langle m | \hat{U} | n \rangle = (-i)^{m-n} J_{m-n}(\kappa) e^{-i\frac{\kappa}{2}n^2}, \quad (\text{B.3})$$

où nous avons posé

$$\kappa = \frac{K}{\hbar}. \quad (\text{B.4})$$

Nous commencerons par calculer l'action de  $\hat{U}$  sur un état propre  $|X\rangle$ , de valeur propre  $X$ , de l'opérateur position  $\hat{X}$ , qui s'écrit

$$\tilde{\psi}_X(n) = \langle n | X \rangle = \exp(-inX) \quad (\text{B.5})$$

dans l'espace des impulsions.

## B.1 La résonance $\hbar k = 4\pi$

Pour  $\hbar k = 4\pi$ , la partie libre de l'opérateur d'évolution vaut  $\exp(-i\frac{\hbar k}{2}n^2) = \exp(-i2\pi n^2) = 1$ , et  $\hat{U}$  se réduit à

$$\langle m | \hat{U} | n \rangle = (-i)^{m-n} J_{m-n}(\kappa). \quad (\text{B.6})$$

L'action de  $\hat{U}$  sur  $|X\rangle$  s'écrit donc

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{U} | X \rangle &= \sum_n (-i)^{m-n} J_{m-n}(\kappa) e^{-inX} \\ &= \left( \sum_l (-i)^l J_l(\kappa) e^{ilX} \right) e^{-imX} \\ &= e^{-i\kappa \cos X} \tilde{\psi}_X(m), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où nous avons utilisé la propriétés des fonctions de Bessel

$$\sum_l (-i)^l J_l(\kappa) e^{ilX} = e^{-i\kappa \cos X}. \quad (\text{B.8})$$

Le résultat de (B.7) est très clair : l'état localisé en position  $|X\rangle$  est un état propre de  $U$ , donc un quasi-état de Floquet, et sa quasi-énergie correspondante est

$$\varepsilon = \kappa \cos X. \quad (\text{B.9})$$

Comme  $X$  varie continûment de  $-\pi$  et  $\pi$ , le spectre des quasi-énergies est continu et il forme une bande d'épaisseur non-nulle (cf. Fig. B.1). C'est la combinaison de ces deux propriétés qui génère la diffusion balistique.

Pour s'en convaincre, nous considérons un paquet d'ondes fortement localisé autour de  $X = \pi$ . Cet état n'excite significativement que les quasi-énergies  $\varepsilon$  pour lesquels  $X \simeq \pi$ . En faisant un développement de l'équation (B.9) autour de  $X = \pi$ , nous trouvons que la quasi-énergie s'écrit

$$\varepsilon \simeq \kappa \left( -1 + \frac{X^2}{2} \right). \quad (\text{B.10})$$

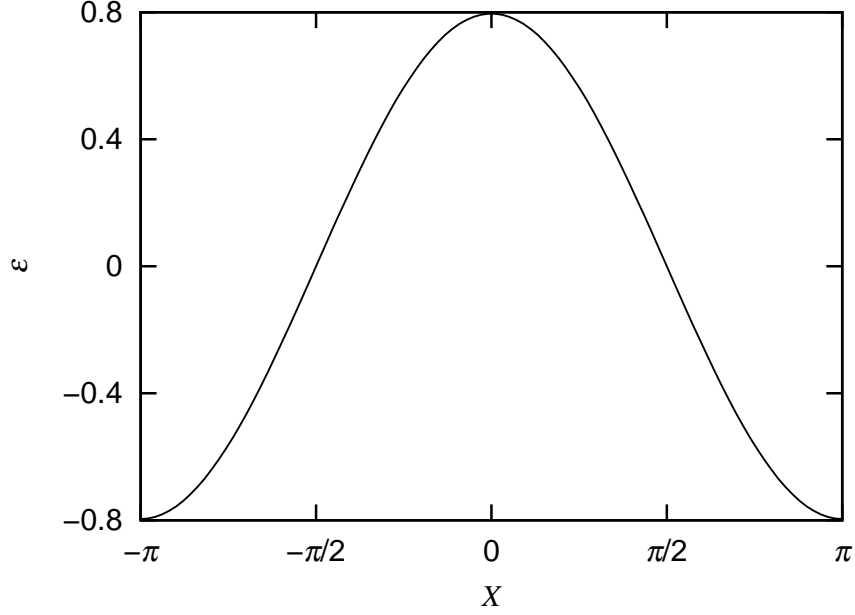


FIG. B.1 – Spectre de quasi-énergie  $\varepsilon$  représenté en fonction de  $X$  (cf. Eq. (B.9)) pour  $\bar{k} = 4\pi$  et  $K = 10$ . Le spectre forme une bande continue et d'épaisseur non-nulle, qui permet d'expliquer la diffusion en impulsion.

En laissant tomber le terme constant, nous trouvons que l'opérateur d'évolution sur une période de potentiel s'écrit  $\exp(-i\kappa X^2/2)$ . Nous obtenons donc une situation analogue à l'étalement d'un paquet d'ondes libre dans l'espace des positions, dont l'opérateur d'évolution s'écrit  $\exp(-iP^2t/2m)$  (où  $t$  est le temps (continu) et  $m$  la masse de la particule). Un paquet d'ondes libre s'étales car sa distribution en impulsion est continue, et que chaque impulsion se propage à une vitesse différente. Ici, la situation est la même, sauf que les deux espaces (position et impulsion) sont inversés et que la diffusion n'a lieu qu'à des instants multiples de la période de potentiel.

## B.2 L'anti-résonance $\bar{k} = 2\pi$

Dans le cas  $\bar{k} = 2\pi$ , le terme de propagation libre prend la valeur remarquable  $\exp(-i\pi n^2) = \exp(-i\pi n) = (-1)^n$ , et l'opérateur d'évolution vaut

$$\langle m | \hat{U} | n \rangle = (-i)^m (-i)^n J_{m-n}(\kappa). \quad (\text{B.11})$$

Son action sur le ket  $|X\rangle$  s'écrit

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{U} | X \rangle &= \sum_n (-i)^m (-i)^n J_{m-n}(\kappa) e^{-inX} \\ &= \left( \sum_l (i)^l J_l(\kappa) e^{ilX} \right) (-1)^m e^{-imX} \\ &= e^{+i\kappa \cos X} (-1)^m \tilde{\psi}_{X+\pi}(m), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

où nous avons utilisé la propriété (B.8) pour  $X + \pi$ . L'opérateur d'évolution couple donc les états  $|X\rangle$  et  $|X + \pi\rangle$ ; nous allons donc chercher  $|\varphi\rangle$  comme une superposition



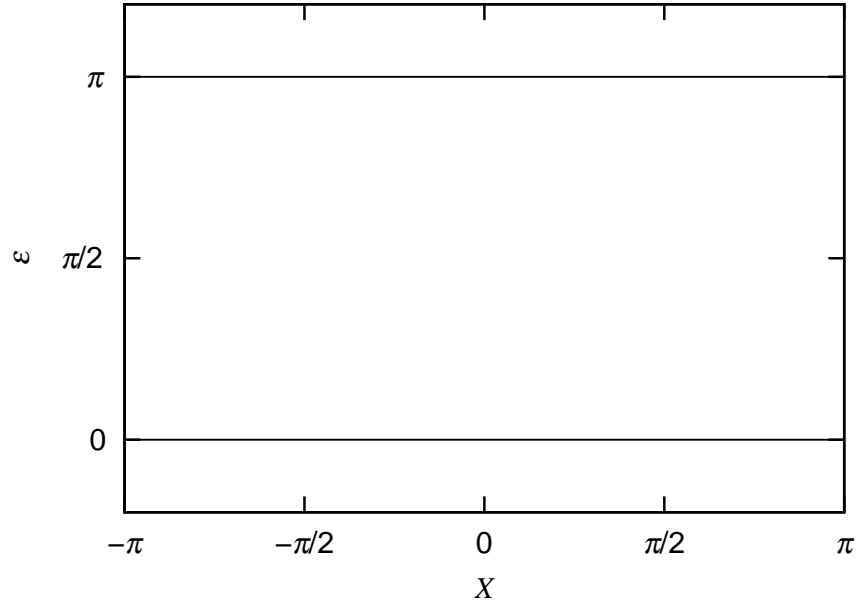


FIG. B.2 – Même chose que la figure B.1, mais pour  $\tilde{k} = 2\pi$ . Le spectre de quasi-énergie est formé de deux bandes plats en 0 et  $\pi$ .

de ces deux états

$$|\varphi\rangle = A|X\rangle + B|X + \pi\rangle. \quad (\text{B.13})$$

La condition (B.2) se traduit pour  $A$  et  $B$

$$Ae^{-i\varepsilon} = Be^{-i\kappa \cos X} \quad (\text{B.14})$$

$$Be^{-i\varepsilon} = Ae^{+i\kappa \cos X}. \quad (\text{B.15})$$

En multipliant ces deux équations, nous obtenons

$$e^{-2i\varepsilon} = 1, \quad (\text{B.16})$$

ce qui laisse deux valeurs possibles pour  $\varepsilon$  :  $\varepsilon = 0$  et  $\varepsilon = \pi$ . Nous trouvons donc maintenant deux conditions pour  $A$  et  $B$  :

$$\begin{aligned} B &= Ae^{i\kappa \cos X} && \text{pour } \varepsilon = 0 \\ -B &= Ae^{i\kappa \cos X} && \text{pour } \varepsilon = \pi, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

ce qui donne deux distributions en impulsions :

$$\begin{aligned} \langle m|\varphi\rangle &= 2Ae^{-i\frac{\kappa}{2}\cos X} e^{im\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\kappa \cos X - m\pi}{2}\right) e^{-imX} && \text{pour } \varepsilon = 0 \\ \langle m|\varphi\rangle &= -2iAe^{-i\frac{\kappa}{2}\cos X} e^{im\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\kappa \cos X - m\pi}{2}\right) e^{-imX} && \text{pour } \varepsilon = \pi. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

L'anti-résonance  $\tilde{k} = 2\pi$  se caractérise donc par des quasi-états de Floquet localisés autour de deux valeurs distantes d'une demi-période de potentiel, et surtout par deux quasi-énergies 0 et  $\pi$ . Ces quasi-énergies ne dépendant pas de  $X$ , elles forment deux bandes plates, qui ne permettent pas de diffusion en impulsion (cf. Fig. B.2). Les valeurs très particulières  $\varepsilon = 0$  et  $\pi$ , correspondant aux valeurs propres  $+1$  et  $-1$  de  $\hat{U}$  génèrent une dynamique périodique de 2 pulses.

### B.3 La résonance d'ordre supérieur $k = \pi$

Si  $k = \pi$ , la partie propagation libre prend deux valeurs selon la parité de  $n$  :

$$\exp\left(-i\frac{\pi}{2}n^2\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ pair} \\ -i & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Il faut donc distinguer les deux situations, i.e.  $n = 2q$  et  $n = 2q + 1$ , pour calculer l'action de  $\hat{U}$  :

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{U} | X \rangle &= \sum_q [(-i)^{m-2q} J_{m-2q}(\kappa) e^{-i2qX} \\ &\quad -i \times (-i)^{m-2q-1} J_{m-2q-1}(\kappa) e^{-i(2q+1)X}] \\ &= \sum_q [(-i)^{m-2q} J_{m-2q}(\kappa) e^{-i2qX} \\ &\quad + (-i)^{m-2q} J_{m-2q-1}(\kappa) e^{-i(2q+1)X}]. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Comme les fonctions de Bessel d'ordres pairs et impairs sont séparés, il n'est difficile de calculer directement ces deux sommes. Pour ce faire, nous allons les exprimer comme des coefficients de Fourier de la fonction  $e^{i\kappa \cos X}$

$$J_n(\kappa) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dX' e^{i\kappa \cos X'} e^{-inX'}. \quad (\text{B.21})$$

La première somme de (B.20) devient donc

$$\begin{aligned} &\sum_q (-i)^{m-2q} J_{m-2q}(\kappa) e^{-i2qX} \\ &= \sum_q e^{-i2qX} (-i)^{m-2q} \\ &\quad \times \frac{(-i)^{m-2q}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dX' e^{i\kappa \cos X'} e^{-i(m-2q)X'}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

En utilisant l'égalité

$$\sum_q e^{i2q(X'-X)} = \frac{1}{2} (\delta(X' - X) + \delta(X' - X - \pi)), \quad (\text{B.23})$$

nous éliminons la somme sur  $q$ , puis l'intégrale sur  $X'$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} &\sum_q (-i)^{m-2q} J_{m-2q}(\kappa) e^{-i2qX} \\ &= \frac{e^{im\pi}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX' e^{i\kappa \cos X'} e^{-imX'} (\delta(X' - X) + \delta(X' - X - \pi)) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-imX} e^{-i\kappa \cos X} + e^{-im(X+\pi)} e^{i\kappa \cos X}). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

En procédant de la même façon pour la seconde somme de (B.20), nous aboutissons au résultat

$$\langle m | \hat{U} | X \rangle = \frac{1-i}{2} e^{-i\kappa \cos X} e^{-imX} + \frac{1+i}{2} e^{i\kappa \cos X} e^{-im(X+\pi)}, \quad (\text{B.25})$$

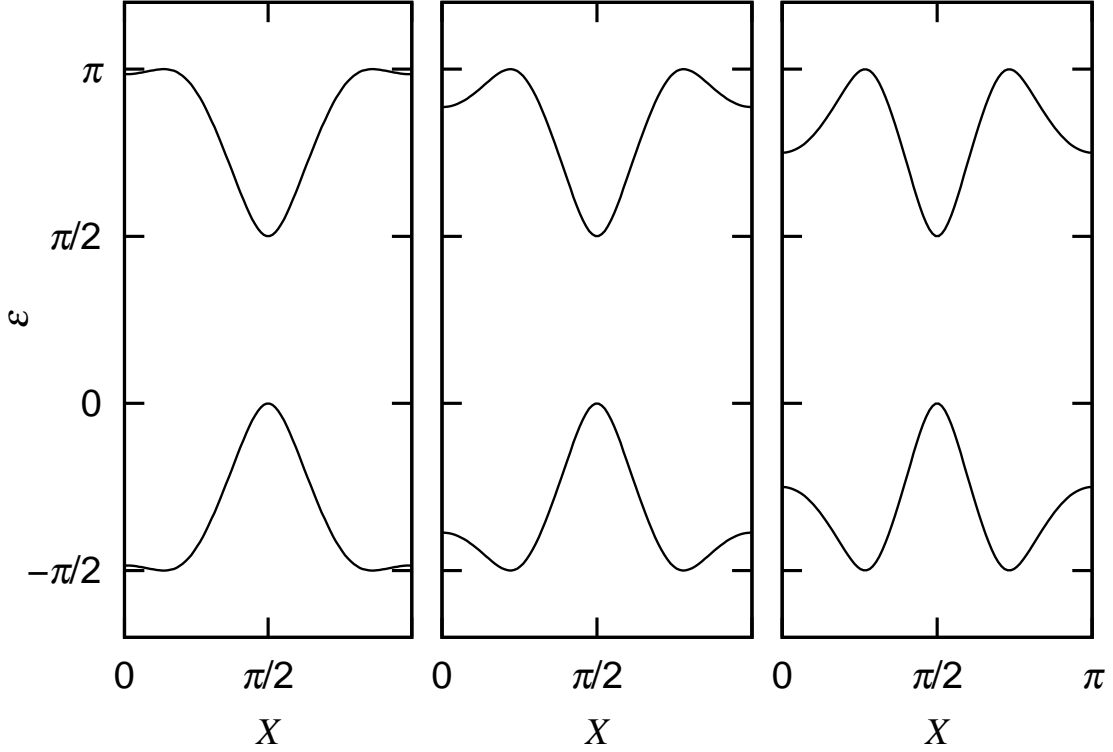


FIG. B.3 – Bandes de quasi-énergie pour  $\bar{k} = \pi$  et différentes valeurs de  $K$  : de gauche à droite  $K = 1,1\pi^2$  ;  $1,3\pi^2$  et  $1,5\pi^2$  (soit les paramètres des figures 4.14 et 4.15). Comme  $\epsilon$  est paire en  $X$ , elle n'est représentée que sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .

que nous pouvons réécrire

$$\hat{U}|X\rangle = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} e^{-i\kappa \cos X} |X\rangle + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} e^{i\kappa \cos X} |X + \pi\rangle. \quad (\text{B.26})$$

Nous retrouvons ainsi, d'une autre façon, l'équation (4.39), et la diagonalisation de  $\hat{U}$  est similaire à celle de la matrice  $\mathbf{M}$ . Pour une valeur de  $X$ , il y a donc deux quasi-énergies

$$\epsilon = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\cos(\kappa \cos X)}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{B.27})$$

qui sont représentés sur la figure B.3.

Le spectre de quasi-énergies est composé de deux bandes continues et d'épaisseur non-nulle, c'est-à-dire qu'il présente à la fois les caractéristiques de  $\bar{k} = 4\pi$  et de  $\bar{k} = 2\pi$ . Ceci explique pourquoi la dynamique de  $\bar{k} = \pi$  est à la fois balistique et (quasi-)périodique. Notons que nous retrouvons les valeurs particulières  $\epsilon = 0$  et  $\pi/2$  ( $X = \pm\pi/2$ ) pour lesquelles la dynamique a une période de 4 pulses.

En conclusion, les propriétés des quasi-états de Floquet montrent clairement que l'espace des positions est la base naturelle pour étudier les résonances quantiques du rotateur pulsé. En effet, leur spectre de quasi-énergies permet de prédire la dynamique correspondant aux différentes résonances. Ainsi la balisticité apparaît-elle lorsque le spectre est constitué d'une ou plusieurs bandes continues et d'épaisseur non-nulles,

alors que la (quasi-)périodicité est liée à l'existence d'au moins deux bandes plates de quasi-énergies. Les spectres de quasi-énergies confirment que pour les résonances d'ordre supérieur, balisticité et dynamique (quasi-)périodique peuvent apparaître simultanément, ce qui n'est pas le cas pour les résonances simples. La forme des quasi-états de Floquet est également remarquable, puisqu'ils sont localisés dans l'espace des positions, ce qui confirme qu'un état initialement localisé en position se "reconstruit" après chaque période du potentiel.



## Annexe C

# Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau incliné : modèle à deux états

Cette annexe consiste en une étude complète de la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein, restreint à deux états de Wannier-Stark. Elle constitue donc un complément indispensable des sections 5.2 et 5.3. Notre but ici est de distinguer les différents types de trajectoires, pour différentes valeurs du paramètre de contrôle  $g$ , en laissant les autres inchangés ( $V_0 = 5$ ,  $F = 0,25$  [95]). Pour chaque valeur de  $g$ , que nous augmenterons progressivement, nous déterminerons par simulation numériques les trajectoires issues de différentes conditions initiales  $(J(0), \theta(0))$ , puis nous observerons leur forme dans l'espace des phases. Nous serons ainsi amenés à porter une attention particulière aux points fixes de (C.4) et (C.5).

Nous supposons donc que le condensat ne peuple que les états de Wannier-Stark n°0 et 1. Dans ce cas, seules les variables  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $\theta_0$  et  $\theta_1$  sont non nulles, même si toutes ne sont pas indépendantes. D'une part, la conservation du nombre de particules s'écrit

$$I_0 + I_1 = 1, \quad (\text{C.1})$$

et d'autre part, comme c'est la différence de phase entre les deux états

$$\theta = \theta_0 - \theta_1 \quad (\text{C.2})$$

qui est pertinente, l'espace des phases ne compte que deux variables indépendantes : la différence de population

$$J = I_0 - I_1 \quad (\text{C.3})$$

et  $\theta$ . En introduisant ces deux nouvelles variables dans (5.25) et (5.26), nous trouvons qu'elles obéissent aux équations

$$\frac{dJ}{dt} = g\chi\sqrt{1-J^2}((\beta+1) + (\beta-1)J)\sin\theta \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= F - g\chi J - \frac{\epsilon g\chi}{2}\cos\theta \\ &\times \left( 3(\beta-1)\sqrt{1-J^2} + \sqrt{\frac{(1-J)^3}{1+J}} - \beta\sqrt{\frac{(1+J)^3}{1-J}} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Il est facile de démontrer que les variables  $J$  et  $\theta$  forment un couple de variables conjuguées<sup>1</sup> de la mécanique hamiltonienne [60], et qu'elles dérivent de l'hamiltonien

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(J,\theta) = & \frac{1-J}{2}F + \frac{g\chi}{4}(1+J^2) + \frac{\epsilon g\chi}{2} \\ & \times \sqrt{1-J^2}((\beta+1) + (\beta-1)J) \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Cet hamiltonien est particulièrement intéressant dans le modèle à deux états, car il donne directement l'équation des courbes iso-énergétiques observées sur les figures C.1 à C.4.

Nous commençons par tracer le portrait de phase pour  $g = 0$ , auquel cas  $J(t) = J(0)$  est constante et  $\theta(t) = \theta(0) + Ft$ . Dans l'espace des phases de la figure C.1 (a), cela nous donne des trajectoires verticales. Lorsque l'on augmente  $g$ , ces trajectoires se déforment pour devenir légèrement incurvées, et leur rayon de courbure va vers l'extérieur de l'espace des phases. Cette déformation est d'autant plus prononcée que  $|J|$  est grande. Par contre, au centre de l'espace des phases, il existe une trajectoire, telle que

$$J_0 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \simeq 0 \quad (\text{C.7})$$

qui reste verticale<sup>2</sup>. Cette trajectoire est tracée en pointillés sur les figures C.1 – C.3.

Pour  $g = 0,15$ , la déformation s'accroît ; mais surtout, nous voyons que certaines trajectoires ne couvrent plus toute la gamme des  $\theta$ . Elles s'enroulent ainsi autour d'un point fixe de coordonnées  $(J_1, 0)$ , et forment une *résonance* (dont le centre est noté  $s_1$ ). Ces trajectoires sont analogues aux oscillations du pendule simple, alors que les trajectoires presque verticales sont analogue à la rotation du pendule autour de son point d'attache. Cependant, contrairement au pendule simple, il n'y a pas, entre ces deux types de trajectoires, de *séparatrice* issue d'un point fixe instable. Ici, la trajectoire qui distingue les deux dynamiques est caractérisée par une variation brutale de sa phase<sup>3</sup> [77]. Elle est tracée en traits plus épais sur la figure C.1 (c).

La question de l'existence d'une séparatrice fait l'objet de la figure C.2. A  $g = 0,175$ , un point instable est apparu en  $(J_{2i} \simeq 0,7; \theta = \pm\pi)$ , duquel part une trajectoire non verticale. Cette trajectoire passe à gauche de la résonance  $s_1$  d'une part, et d'autre part s'enroule autour d'une nouvelle résonance, notée  $s_2$ . Le centre de cette petite résonance est le point fixe de coordonnées  $(J_{2s}, \pm\pi)$ , qui apparaît en même temps que le point fixe instable lors d'une bifurcation nœud-col pour  $g \simeq 0,1741$  (cf. Fig C.5). Lorsque  $g$  augmente, ces deux points s'éloignent l'un de l'autre. Le point instable, tout comme la résonance  $s_1$ , se déplacent vers les petites valeurs de  $J$ . La résonance  $s_2$ , elle, est de plus en plus "serrée" contre le bord de l'espace des phases.

Le déplacement de la résonance  $s_1$  vers la gauche et celui de  $s_2$  vers la droite a la conséquence suivante sur la séparatrice. Pour la valeur critique  $g_{c2} \simeq 0,2069$ , la branche droite de la séparatrice se met à tourner autour de la résonance  $s_1$ , donnant ainsi une situation classique, avec une résonance entourée d'une séparatrice hétérocline. La résonance  $s_2$  devient ainsi délimitée par une trajectoire à saut de phase (cf. Fig C.3). La détermination de  $g_{c2}$  se fait de la façon suivante. A la séparatrice, est associée l'énergie

$$E_{i2} = \mathcal{H}(J_{i2}, \pm\pi). \quad (\text{C.8})$$

---

<sup>1</sup>A proprement parler, ce sont  $J/2$  et  $\theta$ , et non pas  $J$  et  $\theta$ , qui sont les variables conjuguées.

<sup>2</sup>Rappelons que  $\beta \simeq -1$ .

<sup>3</sup>Cette variation brutale de la phase se produit autour de en  $J = \pm 1$ . A ces endroits, l'une ou l'autre des populations est nulle, et donc la phase n'est pas définie.

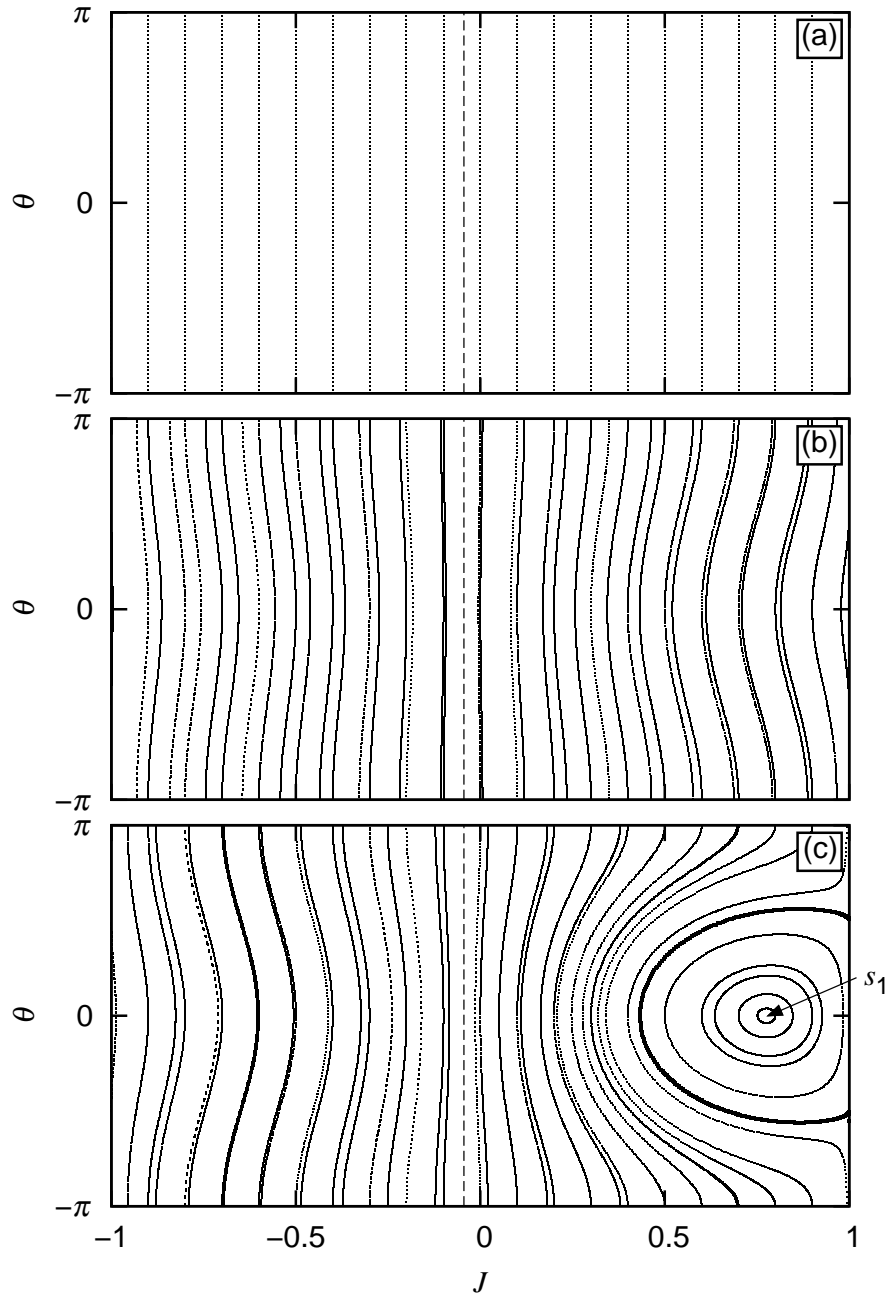


FIG. C.1 – *Portraits de phases  $(J, \theta)$  pour différentes valeurs de  $g$  : (a)  $g = 0$ ; (b)  $g = 0,05$  et (c)  $g = 0,15$ . La trajectoire verticale  $J = J_0$  est tracée en pointillés. Pour  $g = 0,15$ , la trajectoire dont la phase varie brutalement, qui tourne autour de  $s_1$ , est tracée en gras. Les paramètres du potentiel sont  $V_0 = 5$  et  $F = 0,25$ .*



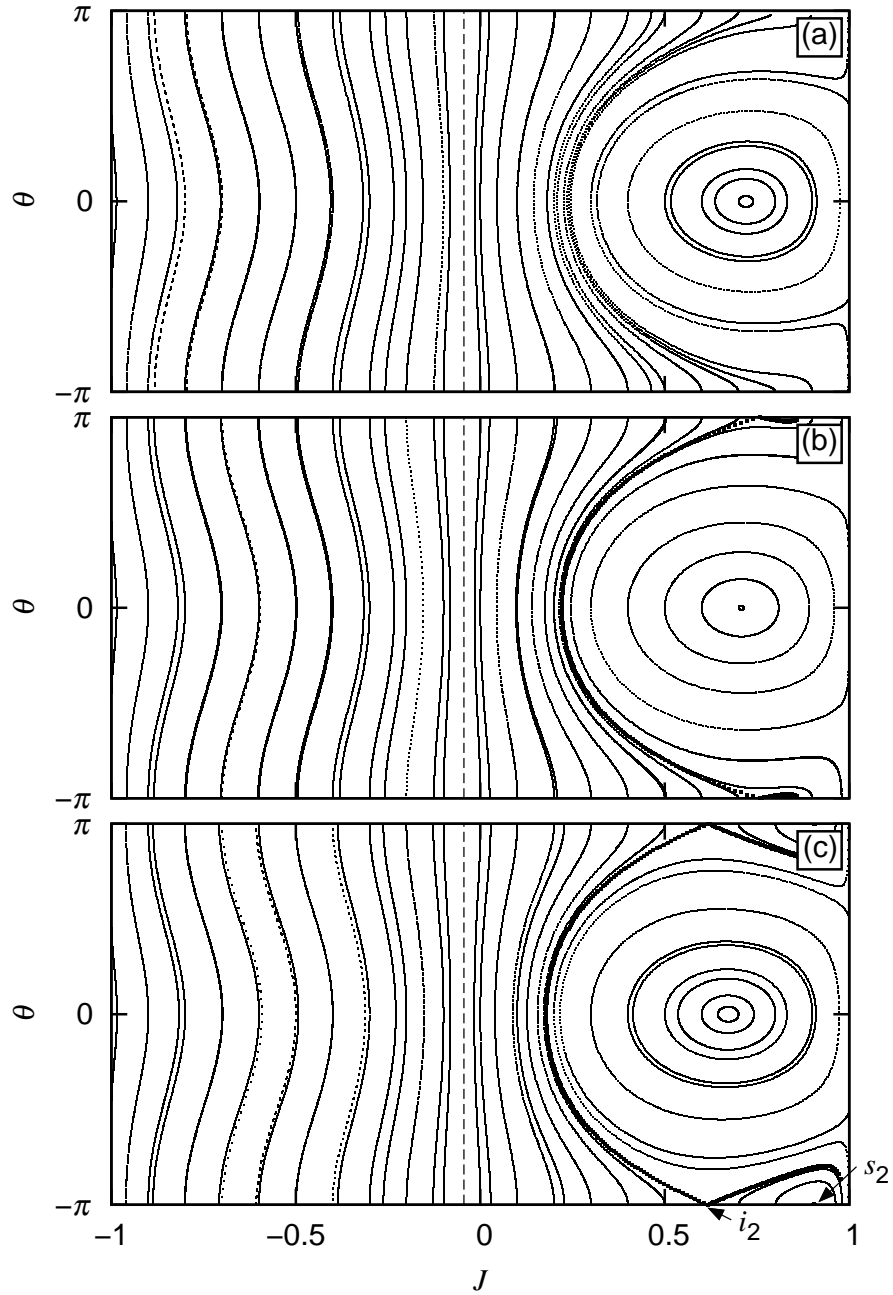


FIG. C.2 – Idem que la figure C.1 avec (a)  $g = 0,17$  ; (b)  $g = 0,175$  et (c)  $g = 0,19$ . Les points  $s_2$  et  $i_2$  apparaissent pour  $g_{c1} \simeq 0,1741$ . La séparatrice est tracée en gras.

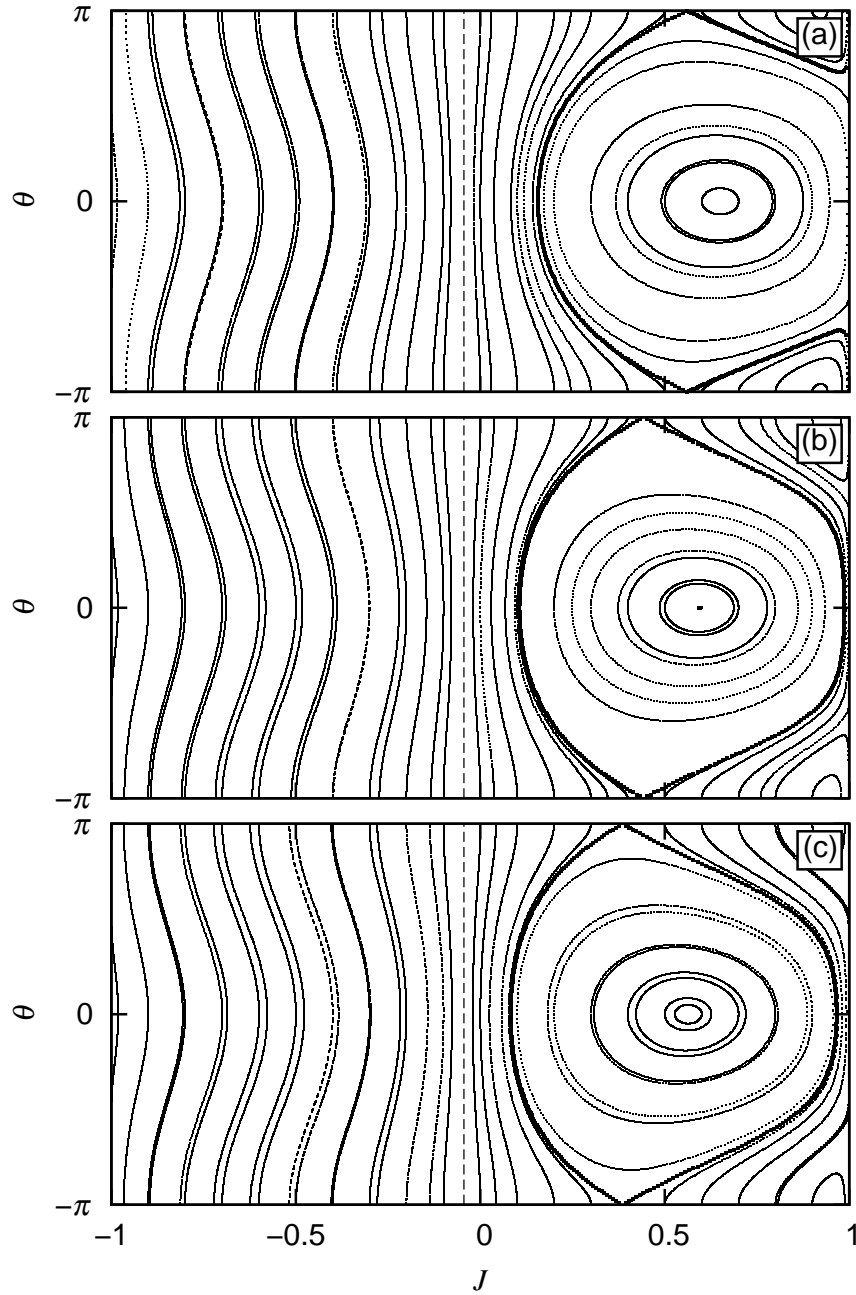


FIG. C.3 – *Idem que la figure C.1 avec (a)  $g = 0,2$ ; (b)  $g = 0,23$  et (c)  $g = 0,25$ . La séparatrice commence à tourner autour de la résonance  $s_1$  pour  $g_{c2} \simeq 0,2068$ .*

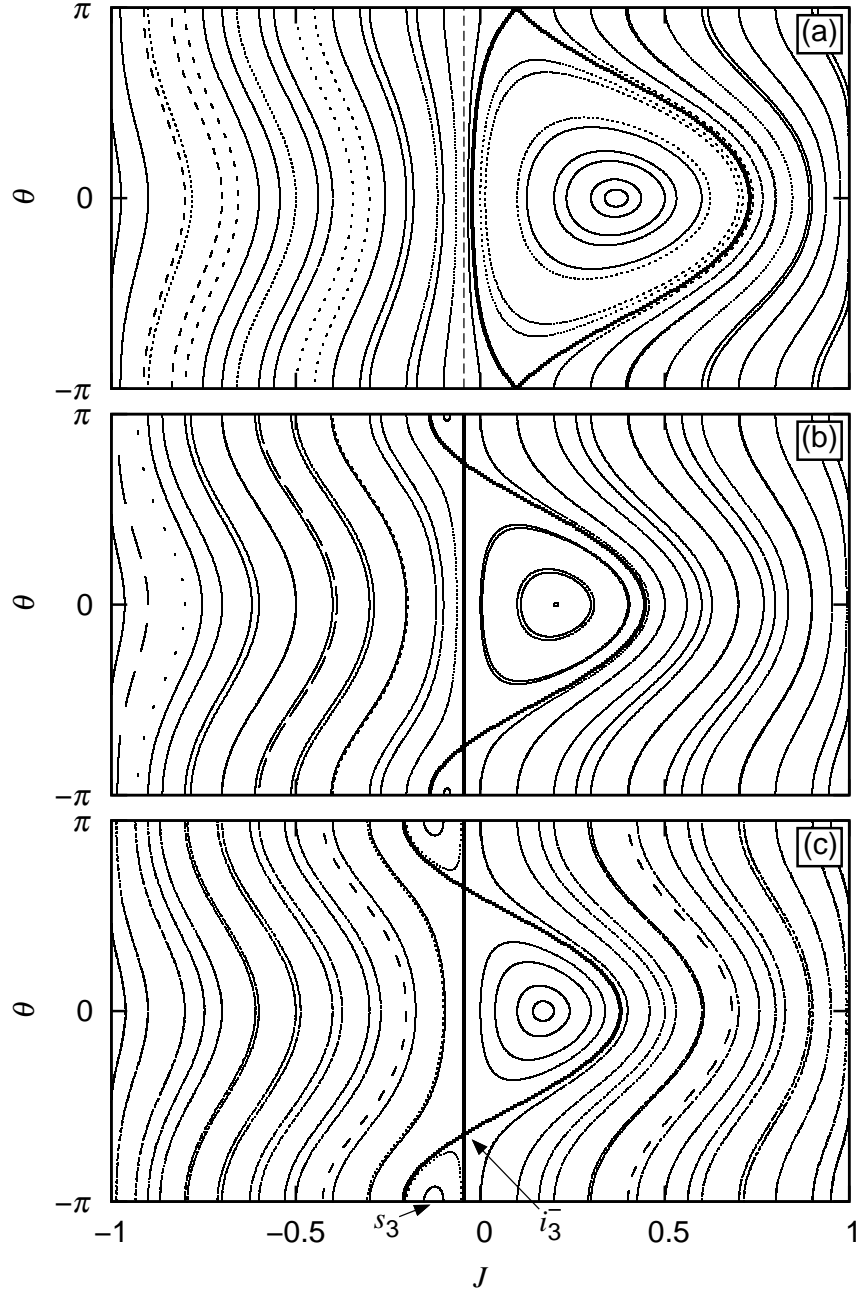


FIG. C.4 – *Idem* que la figure C.1 avec (a)  $g = 0,5$ ; (b)  $g = 2$  et (c)  $g = 5$ . Les points  $s_3$  et  $\mathcal{B}_3^\pm$  apparaissent en  $g_{c3} \simeq 1,139$ .

La valeur critique de  $g$  est celle à partir de laquelle disparaît la solution – en  $J$  – de l'équation  $\mathcal{H}(J_{i2}, \pm\pi) = \mathcal{H}(J, \pm\pi)$ , et apparaît celle de l'équation  $\mathcal{H}(J_{i2}, \pm\pi) = \mathcal{H}(J, 0)$ , et ce pour  $J > J_{i2}$ .

Pour  $g > 0,25$ , les changements de dynamique sont beaucoup plus lents, ce qui explique que les valeurs de  $g$  soient plus éloignées sur la figure C.4 que sur les précédentes. La dynamique n'en est pas moins intéressante. Pour  $g = 0,5$ , la résonance  $s_2$  n'est presque plus visible, alors que  $s_1$  se rapproche du centre de l'espace des phases. Elle semble même “butter” sur la barrière que forme la trajectoire verticale en  $J_0$  (cf. Eq. (C.7)), ce qui lui donne cette forme “triangulaire”. Pour  $g = 2$ , cet “écrasement” se

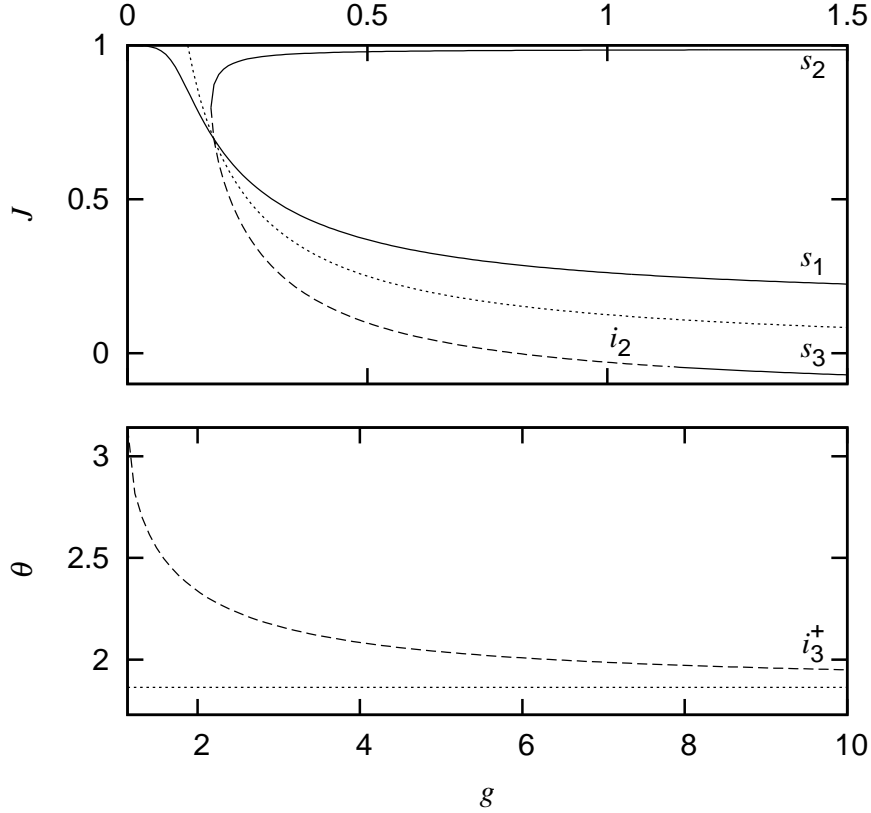


FIG. C.5 – Coordonnées des points fixes du système d'équations (C.4) et (C.5), représentées en fonction de  $g$ . En haut : coordonnée  $J$  des points stables  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  (traits pleins), et instable  $i_2$  (tirets), tous déterminés numériquement, et à comparer avec l'estimation (C.11) tracée en pointillés. En bas : coordonnée  $\theta$  de  $i_3^+$ , donnée par (C.9) (tirets) et, en pointillés, sa valeur asymptotique (cf. Eq. C.13).

renforce. Mais surtout, nous voyons qu'une nouvelle résonance est apparue autour du point fixe  $s_3$  de coordonnées  $(J_{s_3}, \pm\pi)$ , avec  $J_{s_3} < J_0$ . Les résonances  $s_1$  et  $s_3$  sont ainsi séparées par deux points instable  $i_3^\pm$  de coordonnées  $(J_0, \theta_{i_3}^\pm)$  avec

$$\theta_{i_3}^\pm = \pm \arccos \left( \frac{J_0 - \frac{F}{q\chi}}{2\epsilon\sqrt{-\beta}} \right). \quad (\text{C.9})$$

L'apparition des points  $s_3$  et  $i_3^\pm$  se fait selon un scénario bien précis. Au fur et à mesure que  $g$  augmente, le point  $i_2$  se rapproche de la trajectoire verticale  $J_0$ . Il l'atteint pour la valeur critique  $g = g_{c3}$ , telle que  $\cos \theta_{3i}^\pm = -1$ , et donnée par

$$g_{c3} = \frac{F/\chi}{J_0 + 2\epsilon\sqrt{-\beta}}, \quad (\text{C.10})$$

qui vaut approximativement  $g_{c3} \simeq 1,139$ . A ce moment, le point instable  $i_2$  se sépare en un point stable  $s_3$  qui est toujours en  $\theta = \pm\pi$  et deux autres points instables  $i_3^+$  et  $i_3^-$  qui partent dans la direction perpendiculaire.

Tous les résultats sur les points fixes sont résumés sur la figure C.5 où sont tracés, en fonction de  $g$ , leurs coordonnées  $J$  et  $\theta$ . Sur le panneau du haut est représentée la

coordonnée  $J$  des points  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $i_2$  et  $s_3$ , ainsi que leur estimation pour  $\epsilon = 0$  :

$$J = \frac{F}{g\chi}, \quad (\text{C.11})$$

qui donne la variation qualitative de  $s_1$ ,  $i_2$  et  $s_3$ , mais pas du tout de  $s_2$ . Lorsque  $g \rightarrow \infty$ ,  $J_{s_1}$  et  $J_{s_3}$  tendent vers une limite que l'on obtient en négligeant le terme  $F$  de l'équation (C.5). En résolvant numériquement avec  $\theta = 0$  et  $\pi$  respectivement, nous trouvons pour notre jeu de paramètres  $J_{1s} = 0,1484$  et  $J_{3s} = -0,1503$ , dont nous pouvons donner une bonne approximation, en supposant  $\beta = -1$ , et donc  $J_0 = 0$ ,

$$J_{1,3s}(g \rightarrow \infty) \simeq \pm 2\epsilon, \quad (\text{C.12})$$

avec  $2\epsilon$  qui vaut ici  $0,1477$ . Le panneau du bas représente la coordonnée  $\theta$  de  $i_3^+$  donnée par (C.9). Juste après leur apparition,  $i_3^\pm$  sont très sensible aux variations de  $g$ , puis quand  $g \gg F/(\chi J_0)$ , ils tendent vers la valeur asymptotique

$$\theta_{3i}^\pm(g \rightarrow \infty) = \pm \arccos\left(\frac{J_0}{2\epsilon\sqrt{-\beta}}\right), \quad (\text{C.13})$$

qui vaut approximativement  $\pm 1,864$  pour les paramètres que nous avons choisis.

L'étude du modèle à deux états, qui est équivalent à un double-puits de potentiel, nous permet d'avoir un premier aperçu de la dynamique de notre condensat dans un réseau incliné. Nous avons tracé des portraits de phases, qui ont les structures typiques de systèmes hamiltoniens : trajectoires passantes, résonances, séparatrices. Nous avons aussi déterminé la position des points fixes stables et instables, ainsi que leur scénario d'apparition et de disparition. Cette étude peut servir de base pour le modèle à trois niveaux de la section 5.2, car nous y considérons que le troisième puits, faiblement peuplé, agit comme une "perturbation" des deux autres puits.

# Annexe D

## Calcul des exposants de Lyapunov

Cette annexe présente la méthode de calcul des exposants de Lyapunov, que nous cherchons à déterminer, dans la section 5.3, pour un condensat de Bose-Einstein. La démarche que nous avons suivie, expliquée en détail dans la référence [30], est valable pour un calcul à partir de simulations numériques [35]. Notons toutefois que les exposants de Lyapunov peuvent aussi être évalués à partir de données expérimentales [85, 44]. Dans certaines situations, ils peuvent même être déterminés analytiquement (cf. section D.4 ou référence [97]).

Dans notre travail, nous nous sommes essentiellement intéressés à l'exposant de Lyapunov maximal (ELM). Nous commençons donc, dans la section D.1, par considérer le cas particulier de l'ELM, ce qui nous permet d'introduire de façon simple, les idées sous-jacentes aux exposants. Ensuite, la section D.2 consiste en une présentation plus technique pour calculer plusieurs exposants de Lyapunov, avec application aux CBE dans la section D.3. Enfin, la section D.4 aborde brièvement les systèmes à temps discret, avec application au rotateur pulsé classique.

### D.1 Exposant de Lyapunov maximal

Le concept d'exposant de Lyapunov est intimement lié à celui de sensibilité aux conditions initiales. En effet, si l'on considère deux points très proches, et appartenant à une région chaotique de l'espace des phases, la distance  $d$  entre ces points augmente exponentiellement au cours du temps,

$$d(t) \sim d(0) e^{\lambda t}, \tag{D.1}$$

où  $\lambda$  est l'exposant de Lyapunov maximal (ELM). Cette définition, qui a le mérite d'être simple, doit cependant être considérée avec prudence, car elle n'est pas valable pour toutes les valeurs de  $t$ . En effet, aux temps "très courts",  $d$  est fonction de l'orientation relative des deux points initiaux dans l'espace des phases. À l'inverse, aux temps "très longs", une fois que les deux trajectoires ont exploré l'ensemble de la région stochastique, leur distance finit par atteindre un palier. Ainsi la définition (D.1) est-elle valable, mais dans un intervalle de temps bien précis. Cette restriction est gênante si l'on veut calculer  $\lambda$  de façon systématique, car elle nous oblige à examiner  $d(t)$  pour chaque trajectoire, afin de déterminer visuellement l'intervalle où (D.1) est valable, puis dans cet intervalle, de "fitter"  $d(t)$ . En plus de n'être pas systématisable, cette méthode n'est donc pas très précise, et il nous faut l'améliorer.

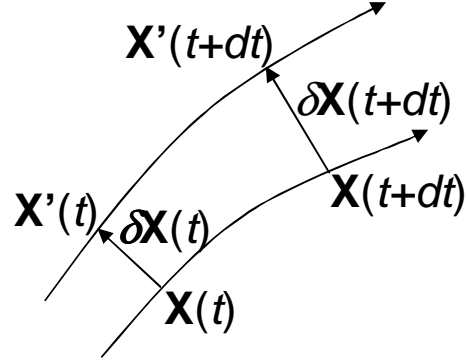


FIG. D.1 – Schéma de principe pour le calcul des exposants de Lyapunov. Sur la figure, la dynamique est chaotique : entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , les deux trajectoires  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}'$  s'éloignent, et donc la norme de  $\delta\mathbf{X}$  augmente.

L'idée est de choisir différemment les deux trajectoires observées. La première est une “vraie” trajectoire, que l'on note sous forme vectorielle  $\mathbf{X} = (\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots)$ , où les  $x_j$  sont les variables *réelles* du système. Sa dynamique est régie par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad (\text{D.2})$$

avec  $\mathbf{F}$  une fonction vectorielle de composante  $f_i(\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots; t)$ . En revanche, la seconde trajectoire est modifiée de telle sorte qu'après chaque intervalle de temps  $dt$ , elle est “ramenée” très près de la première tout en gardant son orientation par rapport à celle-ci. Ce n'est donc plus la distance entre deux trajectoires qui est calculée, mais leur éloignement relatif entre deux instants successifs.

Concrètement, considérons deux trajectoires  $\mathbf{X}(t)$  et  $\mathbf{X}'(t)$ , initialement proches. Leur écart relatif (cf. Fig. D.1)

$$\delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}'(t) - \mathbf{X}(t) \quad (\text{D.3})$$

est un vecteur dont les composantes

$$\delta x_j = x'_j - x_j. \quad (\text{D.4})$$

évoluent dans le temps de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta x_i(t) &= \frac{d}{dt}x'_i(t) - \frac{d}{dt}x_i(t) \\ &= f_i(\dots, x'_{j-1}, x'_j, x'_{j+1}, \dots; t) \\ &\quad - f_i(\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots; t). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Comme les deux trajectoires sont proches, i.e.  $|\delta\mathbf{X}| \ll |\mathbf{X}'|, |\mathbf{X}|$ , l'équation (D.5) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta x_i(t) &= \dots + (x'_{j-1} - x_{j-1}) \frac{\partial}{\partial x_{j-1}} f_i(\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots; t) \\ &\quad + (x'_j - x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots; t) + \dots \\ &= \sum_j \delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots; t), \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

ce qui, de façon plus compacte donne

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{X},t) \times \delta\mathbf{X}(t), \quad (\text{D.7})$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice jacobienne de la fonction  $\mathbf{F}$ , dont les éléments s'écrivent

$$J_{ij}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots; t). \quad (\text{D.8})$$

L'équation (D.7) étant la version linéarisée de (D.2) autour de la trajectoire  $\mathbf{X}$ ,<sup>1</sup> on dit qu'elle régit la dynamique de l'espace *tangent* à  $\mathbf{X}$ .

Si  $\mathbf{X}$  est chaotique,  $\delta\mathbf{X}$  s'aligne progressivement sur la direction de dilatation maximale de l'espace tangent, et sa norme augmente de façon exponentielle avec le temps. L'ELM, noté  $\lambda$ , est le taux de croissance exponentielle de cette norme, i.e.

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{X}(t)\|}{\|\delta\mathbf{X}(0)\|}, \quad (\text{D.9})$$

la limite infinie faisant que  $\delta\mathbf{X}$  perd totalement le "souvenir" de son orientation initiale. Ce qui fait de l'ELM un outil robuste et systématisable est que la définition (D.9) est aussi valable pour une trajectoire régulière. En effet, comme celle-ci s'éloigne linéairement de ces voisines, i.e.  $\|\delta\mathbf{X}(t)\| \sim \|\delta\mathbf{X}(0)\| + At$ , l'application directe de (D.9) donne donc  $\lambda = 0$ , ce qui signifie qu'il n'y a aucune sensibilité aux conditions initiales. Cette définition de l'ELM fournit donc un très bon critère pour distinguer trajectoires chaotiques ( $\lambda > 0$ ) et trajectoires régulières ( $\lambda = 0$ ).

Comme dans ce travail, nous cherchons plus à établir cette distinction, qu'à connaître la valeur précise des exposants, nous n'avons utilisé que l'ELM. Il nous semble toutefois intéressant de présenter, d'une façon que nous espérons la plus intelligible possible, la technique pour calculer tout le spectre des exposants de Lyapunov.

## D.2 Spectre d'exposants de Lyapunov

A mesure que le temps passe, le vecteur  $\delta\mathbf{X}$  s'aligne suivant la direction de dilatation maximale, dont le taux est donné par  $\lambda$ . Pour calculer plusieurs exposants, l'idée est de "monitorer" plusieurs vecteurs  $\delta\mathbf{X}$  (autant que d'exposants à calculer), pour que chacun suive la direction correspondant à un exposant de Lyapunov particulier. Si l'on veut calculer  $M$  exposants (avec  $1 \leq M \leq N$ ), pour rendre l'écriture du système plus compacte, nous définissons la matrice  $\mathbf{T}$ , de dimension  $N \times M$  ( $N$  lignes et  $M$  colonnes), qui contient les différents  $\delta\mathbf{X}_j$  rangés en colonnes, c'est-à-dire dont les éléments  $T_{ij}$  s'écrivent

$$T_{ij} = (\delta X_j)_i, \quad (\text{D.10})$$

avec  $(\delta X_j)_i$  la  $i$ -ème coordonnée du  $j$ -ème vecteur  $\delta\mathbf{X}_j$ . Il est facilement démontrable que  $\mathbf{T}$  obéit à la même équation que  $\delta\mathbf{X}$  :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{X},t) \times \mathbf{T}(t), \quad (\text{D.11})$$

qui est un système de  $N \times M$  équations différentielles couplées.

<sup>1</sup>L'équation (D.7) est un système linéaire à coefficients non constants.



Cependant, si nous intégrons (D.11) telle quelle, tous les  $\delta\mathbf{X}_j$  vont évoluer les uns indépendamment des autres, et vont finir par tous s’aligner sur la direction de dilatation maximale, et donc tous donner le même exposant,  $\lambda$ . Pour obtenir différents exposants, il faut donc “coupler” les différents  $\delta\mathbf{X}_j$ , ce qui est fait par la méthode de décomposition QR.

Concrètement, si on appelle  $\Delta t_i$  le pas d’intégration numérique de (D.11) et  $\Delta t_\lambda$  l’intervalle de calcul des exposants de Lyapunov<sup>2</sup>, le schéma de calcul est le suivant :

- Entre  $t = 0$  et  $t = \Delta t_\lambda$ , les équations (D.2) et (D.11) sont intégrées numériquement.
- A  $t = \Delta t_\lambda$ , nous obtenons donc la matrice  $\mathbf{T}_1$  que nous décomposons en

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{R}_1, \quad (\text{D.12})$$

avec  $\mathbf{Q}_1$  une matrice orthogonale<sup>3</sup> et  $\mathbf{R}_1$  une matrice triangulaire supérieure, chaque matrice portant une information différente. Les éléments diagonaux de  $\mathbf{R}_1$ , notés

$$\Lambda_{1i} = R_{1,ii}, \quad (\text{D.13})$$

sont les *taux* de compression-dilatation<sup>4</sup>, alors que les colonnes de  $\mathbf{Q}_1$  contiennent les *directions* de compression-dilatation dans l’espace des phases. La matrice  $\mathbf{Q}_1$  sert donc de “nouvelle condition initiale” pour le calcul numérique entre  $\Delta t_\lambda$  et  $2\Delta t_\lambda$ .

- A  $t = 2\Delta t_\lambda$ , on refait une autre décomposition  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{R}_2$ , et ainsi de suite. A chaque itération  $k$ , les taux de compression-dilatation sont donc stockés dans les variables  $\Lambda_{ki}$ , et ainsi les différents exposants de Lyapunov sont données par

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k\Delta t_\lambda} \sum_{j=1}^k \ln \Lambda_{ji}, \quad (\text{D.14})$$

où, compte tenu de la méthode utilisée, les exposants sont rangés par ordre décroissant, i.e.  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_M$ .

Il est intéressant de noter que l’exposant  $\lambda_1$  est le même que celui défini dans l’équation (D.9), i.e.  $\lambda \equiv \lambda_1$ . D’autre part, signalons que dans le cas d’un système hamiltonien, la somme des exposants est nulle, i.e.  $\sum_i \lambda_i = 0$ .

### D.3 Exposant de Lyapunov et condensat de Bose-Einstein

Dans cette section, nous allons appliquer les techniques présentées ci-dessus aux condensats de Bose-Einstein. Nous verrons dans un premier temps comment les adapter à ce système quantique, dont les variables dynamiques sont complexes. Puis, nous présenterons des résultats sur le calcul des exposants de Lyapunov : d’abord l’ELM en fonction du temps de calcul, puis le spectre des exposants.

---

<sup>2</sup>Ces deux intervalles ne sont pas forcément identiques et satisfont la condition  $\Delta t_\lambda \geq \Delta t_i$ .

<sup>3</sup>Les colonnes de  $\mathbf{Q}_1$  sont constituées de vecteurs orthonormés.

<sup>4</sup>Si  $\Lambda_{1i} > 1$ , il s’agit d’une dilatation; alors que si  $\Lambda_{1i} < 1$ , c’est une compression.

### D.3.1 Application aux condensats de Bose-Einstein

Dans un système quantique tel que le CBE dans la base de WS (cf. Eq. (5.23)), les variables dynamiques sont complexes. Or comme nous l'avons déjà précisé ci-dessus, les composantes du vecteur  $\mathbf{X}$  doivent être réelles pour pouvoir calculer la jacobienne  $\mathbf{J}$ . Il nous faut "transformer" les  $c_n$  en variables réelles. Pour ce faire, la première idée serait d'utiliser leur module  $I_n$  et leur phase  $\theta_n$  (cf. Eqs. (5.25) et (5.26)), qui sont les variables conjuguées de notre système hamiltonien. Mais elles ne conviennent pas, car  $\theta_n$  n'est ni définie ni dérivable en  $I_n = 0$ .<sup>5</sup> Nous choisissons donc les parties réelles et imaginaires des coefficients  $c_n$ .<sup>6</sup> En posant

$$c_n(t) = a_n(t) + ib_n(t), \quad (\text{D.15})$$

avec  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , nous écrivons  $\mathbf{X}$  comme  $\mathbf{X} = (\dots, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \dots)$ , c'est-à-dire que

$$x_i = \begin{cases} a_n & \text{pour } i \text{ pair} \\ b_n & \text{pour } i \text{ impair,} \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

et  $\mathbf{F}$  telle que

$$f_i = \begin{cases} f_n^a = \frac{d}{dt} a_n & \text{pour } i \text{ pair} \\ f_n^b = \frac{d}{dt} b_n & \text{pour } i \text{ impair.} \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

Après calcul, nous trouvons que  $a_n$  et  $b_n$  satisfont les équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_n = f_n^a &= nFb_n + g\chi (a_n^2 + b_n^2) b_n \\ &+ g\chi\epsilon (b_{n-1} + \beta b_{n+1}) (a_n^2 + 3b_n^2) \\ &+ 2g\chi\epsilon (a_{n-1} + \beta a_{n+1}) a_n b_n \\ &+ g\epsilon (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) b_{n+1} \\ &+ g\epsilon\beta (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2) b_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_n = f_n^b &= -nFa_n - g\chi (a_n^2 + b_n^2) a_n \\ &- g\chi\epsilon (a_{n-1} + \beta a_{n+1}) (3a_n^2 + b_n^2) \\ &- 2g\chi\epsilon (b_{n-1} + \beta b_{n+1}) a_n b_n \\ &- g\epsilon (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) a_{n+1} \\ &- g\epsilon\beta (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2) a_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

De même que nous avons défini le vecteur  $\mathbf{X}$  à partir de  $a_n$  et  $b_n$ , de même nous posons  $\delta\mathbf{X} = (\dots, \delta a_n, \delta b_n, \delta a_{n+1}, \delta b_{n+1}, \dots)$ . Compte tenu de cette écriture, il existe, pour le couple d'indices  $(m, n)$ , quatre éléments de la matrice  $\mathbf{J}$ , notés  $J_{mn}^{yz}$ , tels que

$$J_{mn}^{yz} = \frac{\partial}{\partial z_n} f_n^y, \quad (\text{D.20})$$

<sup>5</sup>Ceci est évidemment dû au fait que la phase du nombre complexe nul n'est pas définie.

<sup>6</sup>Le vecteur  $\delta\mathbf{X}$  étant défini par linéarisation, il est invariant par changement de variables.

avec  $(y, z) = (a, b)$ . Ainsi les quantités  $\delta a_n$  et  $\delta b_n$  évoluent-elles selon les équations

$$\frac{d}{dt} \delta a_n = \sum_m (J_{nm}^{aa} \delta a_m + J_{nm}^{ab} \delta b_m) \quad (\text{D.21})$$

$$\frac{d}{dt} \delta b_n = \sum_m (J_{nm}^{ba} \delta a_m + J_{nm}^{bb} \delta b_m). \quad (\text{D.22})$$

Comme seules les interactions entre premiers voisins sont significatives, les sommes sur  $m$  se réduisent à trois termes  $m = n, n \pm 1$ , et les éléments de matrice correspondants valent

$$\begin{aligned} J_{nn}^{aa} &= 2g\chi a_n b_n \\ &+ 2g\chi\epsilon (b_{n-1} + \beta b_{n+1}) a_n \\ &+ 2g\chi\epsilon (a_{n-1} + \beta a_{n+1}) b_n \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} J_{nn}^{ab} &= nF + g\chi (a_n^2 + 3b_n^2) \\ &+ 6g\chi\epsilon (b_{n-1} + \beta b_{n+1}) b_n \\ &+ 2g\chi\epsilon (a_{n-1} + \beta a_{n+1}) a_n \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} J_{nn}^{ba} &= -nF - g\chi (3a_n^2 + b_n^2) \\ &- 6g\chi\epsilon (a_{n-1} + \beta a_{n+1}) a_n \\ &- 2g\chi\epsilon (b_{n-1} + \beta b_{n+1}) b_n \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$J_{nn}^{bb} = -J_{nn}^{aa} \quad (\text{D.26})$$

$$\begin{aligned} J_{n,n-1}^{aa} &= 2g\chi\epsilon a_n b_n \\ &+ 2g\chi\epsilon \beta a_{n-1} b_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

$$\begin{aligned} J_{n,n-1}^{ab} &= g\chi\epsilon (a_n^2 + 3b_n^2) \\ &+ g\chi\epsilon \beta (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2) \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

$$\begin{aligned} J_{n,n-1}^{ba} &= -g\chi\epsilon (3a_n^2 + b_n^2) \\ &- g\chi\epsilon \beta (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2) \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

$$J_{n,n-1}^{bb} = -J_{n,n-1}^{aa} \quad (\text{D.30})$$

$$\begin{aligned} J_{n,n+1}^{aa} &= 2g\chi\epsilon \beta a_n b_n \\ &+ 2g\chi\epsilon a_{n+1} b_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

$$\begin{aligned} J_{n,n+1}^{ab} &= -g\chi\epsilon \beta (a_n^2 + 3b_n^2) \\ &- g\chi\epsilon (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

$$\begin{aligned} J_{n,n+1}^{ba} &= -g\chi\epsilon \beta (3a_n^2 + b_n^2) \\ &- g\chi\epsilon (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

$$J_{n,n+1}^{bb} = -J_{n,n+1}^{aa}. \quad (\text{D.34})$$

En plus de l'équation (D.2), nous intégrons donc aussi (D.5). pour ensuite calculer les exposants de Lyapunov, à partir de la définition (D.14). A présent, nous allons présenter les résultats de ces calculs.

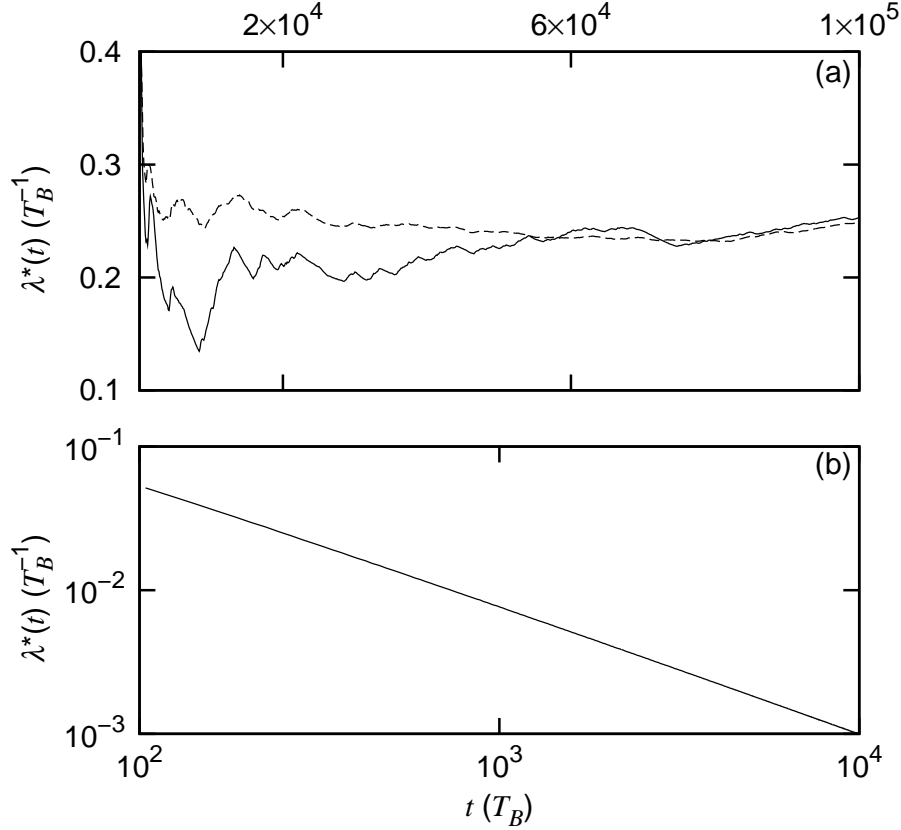


FIG. D.2 – Variation de la quantité  $\lambda^*$ , donnée par l'équation (D.35) en fonction du temps pour  $g = 0,25$ ,  $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 0,65$ ,  $I_1 = 0,25$ ,  $\theta_{-1} = \theta_0 = 0$ . La panneau (a) montre une dynamique chaotique pour une trajectoire partant de  $\theta_1 = \pi$  (traits pleins) et pour quatre trajectoires disposées en carré dont un coin est en  $\theta_1 = \pi$  et dont les côtés mesurent  $\Delta(I_0 - I_1) = 1/500$  et  $\Delta(\theta_0 - \theta_1) = \pi/500$ . Le panneau (b) montre une trajectoire régulière partant de  $\theta_1 = 0$ , dont le tracé en échelle logarithmique met clairement en évidence la dépendance asymptotique en  $1/t$ .

### D.3.2 Exposant de Lyapunov à temps fini

Lorsque nous réalisons une simulation numérique, nous ne pouvons évidemment pas aller jusqu'à un temps infini; en toute rigueur, nous ne pouvons donc pas appliquer la définition (D.14). Pour avoir un résultat pertinent sur les exposants de Lyapunov, nous devons toutefois pousser le calcul jusqu'à un temps suffisamment long pour que le vecteur  $\delta\mathbf{X}$  se soit aligné sur la direction d'expansion maximale de l'espace des phases. Le but de ce paragraphe est de trouver le meilleur instant auquel évaluer les exposants de Lyapunov : il faut que cet instant soit assez long pour que le résultat ne fluctue plus "beaucoup", mais pas trop long pour limiter le temps de calcul numérique.

Concrètement, nous calculons la quantité

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{X}(t)\|}{\|\delta\mathbf{X}(0)\|}, \quad (\text{D.35})$$

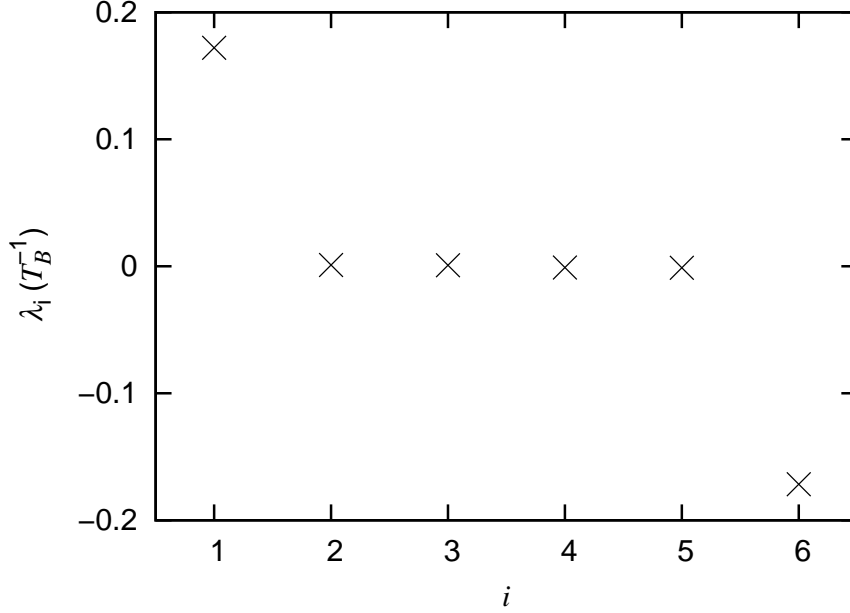


FIG. D.3 – Spectre des exposants de Lyapunov  $\lambda_i$  représenté en fonction de leur indice  $i$ . Deux exposants sont clairement non-nuls :  $\lambda_1 = -\lambda_6 \simeq 0,172 T_B^{-1}$ , et tous les autres sont proches de  $\pm 10^{-3} \simeq 0$ . Les paramètres de la simulation sont  $V_0 = 5$ ,  $F = 0,25$  et  $g = 0,25$ , les conditions initiales  $I_{-1} = 0,1$ ,  $I_0 = 0,65$ ,  $I_1 = 0,25$ ,  $\theta_{-1} = \theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \pi$ . Les exposants sont calculés après 100000 périodes de Bloch.

qui a comme limite<sup>7</sup>

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda^*(t) = \lambda. \quad (\text{D.36})$$

Le résultat d'un tel calcul est présenté sur la figure D.2. Pour une dynamique chaotique, la fonction  $\lambda^*(t)$  tend bien vers un palier ( $\simeq 0,25 T_B^{-1}$ ), mais après beaucoup de fluctuations. Après 60000 périodes de Bloch, celles-ci se réduisent fortement, et les deux courbes, calculés pour une trajectoire d'une part et en faisant la moyenne sur quatre trajectoires initialement très proches d'autre part, sont très proches. Le panneau (b), correspondant à une dynamique régulière, est radicalement différent, puisque  $\lambda^*(t)$  tend vers 0 comme  $1/t$ , comme le montre le tracé en échelle logarithmique.

En résumé, si nous souhaitons avoir une valeur précise des exposants de Lyapunov, il faut les calculer après un temps très long, de l'ordre de  $10^5 T_B$ , afin de réduire le plus possible les fluctuations. En revanche, si l'on souhaite simplement déterminer si une trajectoire donnée est régulière ou chaotique, il n'est pas nécessaire d'aller aussi loin, et un calcul jusque  $10^4 T_B$  est suffisant. Dans le paragraphe suivant, nous mettons ces conclusions en applications, afin de calculer le spectre complet des exposants de Lyapunov.

### D.3.3 Spectre d'exposants

Comme notre CBE peuple trois états de Wannier-Stark, il compte six variables dynamiques et six exposants de Lyapunov, qui sont tracés sur la figure D.3. Deux

---

<sup>7</sup>Dans la littérature, la quantité  $\lambda^*(t)$  est connue sous le nom d'exposant de Lyapunov local (voir par exemple la référence [29]).

valeurs sont non-nulles et opposées l'une de l'autre, ce qui caractérise de systèmes hamiltoniens. Les quatre autres valeurs sont proches de 0. Pour deux d'entre elles, cela s'explique par le fait qu'il n'y ait pas six mais quatre variables indépendantes dans le système (deux populations et deux différences de phase).

## D.4 Système à temps discret

Pour terminer, disons quelques mots des systèmes à temps discret, qui se caractérisent par une évolution dynamique sous la forme d'une application. Si l'on appelle  $\mathbf{X}_n$  le vecteur composé des variables dynamiques du système après la  $n$ -ème itération,  $\mathbf{X}_{n+1}$  est donnée par

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_n; t), \quad (\text{D.37})$$

où  $\mathbf{f}$  est une application vectorielle de composantes  $f_i(\dots, x_j, \dots; t)$ . Comme dans le cas continu, nous pouvons définir l'écart  $\delta\mathbf{X}_n$  entre la trajectoire  $\mathbf{X}_n$  et ses voisines, qui suit l'application

$$\delta\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{j}(\mathbf{X}_n; t) \times \delta\mathbf{X}_n, \quad (\text{D.38})$$

avec  $\mathbf{j}$  la jacobienne de la fonction  $\mathbf{f}$ , dont les éléments s'écrivent

$$j_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\dots, x_j, \dots; t). \quad (\text{D.39})$$

Nous pouvons aussi définir la matrice  $\mathbf{T}_n$  qui suit la même évolution. Nous retrouvons donc la même situation que dans la section D.2.

**Application au rotateur pulsé classique.** Dans le cas du rotateur pulsé, les variables dynamiques sont l'angle  $X$  et le moment cinétique  $P$ , dont l'évolution  $\mathbf{f}$  est donnée par l'application standard

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{f} \begin{pmatrix} X_n \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n + P_n \\ P_n + K \sin X_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.40})$$

et la jacobienne par

$$\mathbf{j}(X_n, P_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + K \cos(X_n + P_n) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.41})$$

La simplicité du rotateur pulsé permet de calculer les taux de dilatation  $\Lambda_+$  et de compression  $\Lambda_-$ , qui sont les valeurs propres de  $\mathbf{j}(X_n, P_n)$ ,<sup>8</sup> solutions de

$$\Lambda^2 - (2 + K \cos X_t) \Lambda + 1 = 0. \quad (\text{D.42})$$

Le système étant conservatif, ces valeurs sont inverses l'une de l'autre, i.e.  $\Lambda_+ \Lambda_- = 1$ , et le taux exponentiel de dilatation sur une itération  $\lambda_1^*$  s'écrit

$$\exp(+\lambda_1^*) + \exp(-\lambda_1^*) = |2 + K \cos X_1|. \quad (\text{D.43})$$

<sup>8</sup>Ce sont aussi ces valeurs propres que l'on calcule pour déterminer la stabilité des points fixes (cf. sous-section 2.1.2).

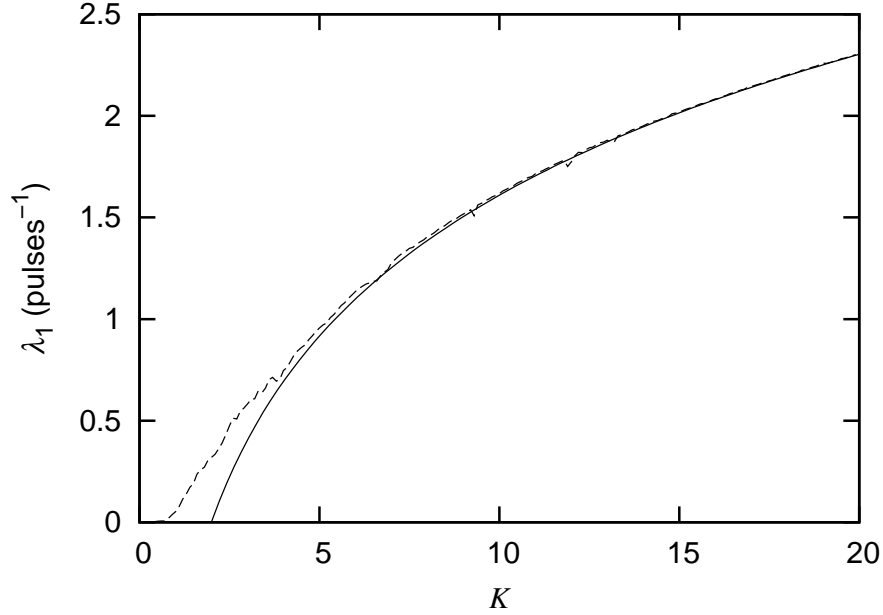


FIG. D.4 – *Exposant de Lyapunov maximal du rotateur pulsé classique tracé en fonction de  $K$ . Pour  $K \gtrsim 5$  (stochasticité à grande échelle), l'accord entre les simulations numériques, effectuée sur 100 trajectoires et représentées avec des tirets, et l'estimation analytique (D.44), représentée en traits pleins, est très bon.*

Pour estimer analytiquement l'exposant de Lyapunov maximal  $\lambda_1$ , nous considérons que la dynamique du rotateur est fortement chaotique ( $K \gg 1$ ). Nous pouvons ainsi considérer que sur la grande majorité de l'espace des phases,  $K \cos X_t \gg 2$  et  $\exp(+\lambda^*) \gg \exp(-\lambda^*)$ . Enfin si la variable  $X_t$  est supposée purement aléatoire, donc prenant toutes les valeurs entre  $-\pi$  et  $\pi$  avec la même probabilité, nous arrivons à l'exposant de Lyapunov maximal [15]

$$\lambda_1 = \langle \lambda_1^* \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dX \ln |K \cos X| = \ln \frac{K}{2}, \quad (\text{D.44})$$

où nous avons utilisé la relation  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \ln(\cos u) = -\pi \ln 2$ . (Notons que  $\lambda_2 = -\lambda_1$ .) Nous voyons sur la figure D.4, que malgré les hypostases restrictives émises pour aboutir à l'équation (D.4), celle-ci s'avère une bonne approximation dès  $K \approx 5$ .

# Annexe E

## Publications

Cette annexe contient les deux articles, publiés à ce jour, relatifs à ces travaux de thèse. Le premier article reprend les résultats du chapitre 4, sur les résonances quantiques du rotateur pulsé. Le second reprend ceux du chapitre 5, sur le chaos quasi-classique dans les condensats de Bose-Einstein.



## Kicked-rotor quantum resonances in position space

Maxence Lepers, Véronique Zehnlé, and Jean Claude Garreau

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université des Sciences et Technologies de Lille, CNRS; CERLA; F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

(Received 11 November 2007; published 24 April 2008)

We present an approach of the kicked-rotor quantum resonances in position space, based on its analogy with the optical Talbot effect. This leads to a very simple picture of the physical mechanism underlying the dynamics and to analytical expressions for relevant physical quantities. The ballistic behavior, which is closely associated with quantum resonances, is analyzed and shown to emerge from a coherent adding of successive kicks thanks to a periodic reconstruction of the spatial wave packet.

DOI: [10.1103/PhysRevA.77.043628](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.043628)

PACS number(s): 03.75.Be, 05.45.Mt, 37.10.Vz

### I. INTRODUCTION

The kicked rotor has played a central role in studies of classical and “quantum chaos” (which is defined as the quantum behavior of a system whose classical counterpart is chaotic). A kicked rotor (KR) is formed by a particle orbiting a fixed circular orbit to which an instantaneous force (a kick) is applied periodically. In 1995, Raizen and co-workers [1] established this system as a privileged ground for studies of quantum chaos by realizing experimentally a kicked rotor in the quantum regime with laser-cooled atoms placed in a kicked (i.e., rapidly turned on and off) laser standing wave.

Despite its apparent simplicity, the quantum kicked rotor (QKR) has very remarkable dynamical properties. One of the most studied is the so-called “dynamical localization:” in contrast to the classical case, the ergodic diffusion does not last forever in the quantum case. After a characteristic “localization time,” the diffusion is stopped by destructive quantum interferences [1–4]. Another feature of the QKR that has been the object of a recent burst of activity is the existence of quantum resonances (QRs), whose most dramatic manifestation is the appearance of a ballistic motion.

The experimental realization of the QKR has triggered in the last decade an impressive number of studies involving dynamical localization [5–11], quantum transport [12–15], ratchets [16–19], chaos-assisted tunneling [20,21], and classical and quantum resonances [22–27]. Quantum resonances have been used in studies of fundamental aspects of quantum chaos such as quantum stabilization [28] or measurements of the gravitation [29]. “High-order” quantum resonances were also observed recently [30–32] both with laser-cooled atoms and a Bose-Einstein condensate.

In the present work, we show that quantum resonances have a very simple and intuitive interpretation in position space, as opposed to the more common momentum space representation (see Ref. [33], and references therein). QRs in position space have been previously considered by Izrailev and Shepelyansky [3,34]. Here, we extend their approach and build a simple physical picture that enlightens the underlying physics and allows the calculation of quantities of experimental relevance, such as average momentum or the kinetic energy.

### II. PHYSICAL ORIGIN OF QUANTUM RESONANCES

The atom-optics realization of a (quantum) kicked rotor consists of laser-cooled atoms placed in a far-detuned stand-

ing wave. The standing wave is pulsed periodically, being on for a time interval so short that the motion of the atoms can be neglected. In such conditions, the pulse can be considered as a  $\delta$  function, and the atoms feel the light intensity as a kick related to a mechanical potential affecting their center-of mass motion [35–37]. The standing wave sinusoidal modulation of intensity generates a spatial potential in  $\sin(2k_L x)$ , where  $k_L = 2\pi/\lambda_L$  is the wave number of the radiation. We shall use a normalized coordinate  $X = 2k_L x$  which plays in fact the role of a cyclic variable: the spatial periodicity of the potential implies that the physics is invariant under translations by a multiple of  $\lambda_L/2$ . We can thus use either a “linear” (“unfolded”) representation of the KR, or a “cyclic” or “folded” representation using the angular variable  $\theta = X[\text{mod } 2\pi]$  [38].

Choosing units such that the mass of the particle is  $M = 1$  and the time period of the forcing is  $T = 1$ , the Hamiltonian of the KR is

$$H = \frac{P^2}{2} + K \cos X \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n), \quad (1)$$

where  $P$  is the momentum (scaled by a factor  $M/2k_L T$ ),  $X$  the position in the periodic potential,  $K$  (usually called “stochasticity parameter”) the intensity of the kicks, and  $n$  a discrete time corresponding to the  $n$ th kick ( $n$  is an integer in normalized units). Labeling  $X_t, P_t$  the position and momentum immediately after the  $t$ th kick, and integrating the classical Hamilton equations of motion corresponding to Eq. (1) produces the so-called Chirikov’s “standard map” [39]:

$$X_{t+1} = X_t + P_t, \quad P_{t+1} = P_t + K \sin X_{t+1}. \quad (2)$$

For small  $K$  the dynamics is mostly regular, except for limited zones of the phase space. As  $K$  approaches a critical value  $K_c \approx 0.9716$ , small separated chaotic regions appear. At the critical value  $K_c$ , chaotic regions connect to each other, leading to a diffusive behavior in momentum space. The chaotic region grows with  $K$  and for  $K \gtrsim 5$  the classical dynamics tends to be ergodic in the phase space (for a more complete discussion of dynamical issues, see Ref. [40]). The average kinetic energy then increases linearly with time (or kick number  $t$ ):  $\langle P^2 \rangle = D_c t$ , where  $D_c$  is a diffusion coefficient that can be explicitly calculated [41]; to a first approximation  $D_c \approx K^2/2$ .

If we set  $K=2\pi$  and consider a particle with initial conditions  $X_0=\pi/2$  and  $P_0=0$ , iteration of Eqs. (2) shows that  $P_t=2\pi t$ : The momentum increases linearly with time; hence the kinetic energy  $P^2/2$  increases quadratically, which is a signature of a ballistic dynamics, called a (classical) resonance. The origin of the ballisticity is easily seen: for this particular value of  $K$  and of the initial conditions, the particle is always kicked at the same position (modulus  $2\pi$ ), that is  $\sin X_t=\sin[2\pi(t^2-t)+\pi/2]=1$ , so that it receives a constant amount  $K$  of linear momentum per kick. The classical resonance has been experimentally observed in the atom-optics realization of the KR [22]. There are also classical antiresonances: For the above initial conditions and  $K=3\pi/2$ , successive kicks have opposite directions, and the momentum jumps endlessly between two values  $P_t=0$  and  $P_{t+1}=3\pi/2$ .

In order to study the quantum case, let us consider the one-period evolution operator, or Floquet operator

$$U = e^{-iH/K} = \exp\left(-i\frac{K}{\hbar}\cos X\right)\exp\left(-i\frac{P^2}{2\hbar}\right), \quad (3)$$

where  $\hbar=4\hbar k_L^2 T/M$  is the normalized Planck's constant resulting from the definition of normalized variables satisfying the commutation relation  $[X, P]=i\hbar$ . Because of the  $\delta$ -function time dependence, this operator factorizes in the product of a kick operator by a free evolution operator.

The kick operator is periodic in space, so its eigenstates have a Bloch wave (BW) structure. If one starts with an initial state of well-defined momentum  $|P_0\rangle$ , only states of the form  $|P_0+m\hbar\rangle$  ( $m$  integer) will appear in the dynamics. We can write any arbitrary momentum  $P$  in the form  $P=(m+\beta)\hbar$  with  $\beta\in[-1/2, 1/2)$ . This introduces the quasimomentum  $\hbar\beta$  which is thus a constant of motion. The particle wave function  $\psi(X)=\langle X|\psi\rangle$  can be written as

$$\psi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{\psi}(k) dk, \quad (4)$$

where  $k=P/\hbar$ , that is,

$$\psi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{+1/2} d\beta \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_\beta(m) e^{i(m+\beta)X} = \int_{-1/2}^{+1/2} d\beta \psi_\beta(X). \quad (5)$$

The quasimomentum component  $\psi_\beta(X)$  is defined by

$$\psi_\beta(X) = \frac{e^{i\beta X}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_\beta(m) e^{imX}, \quad (6)$$

where the function  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_\beta(m) e^{imX}$  is  $2\pi$  periodic.

Let us take, for simplicity, an initial state of quasimomentum  $\beta=0$  and apply to it the free evolution  $\exp(-i\hbar P^2/2)$ ; one obtains at time  $t=1^-$  (that is, just before the first kick):

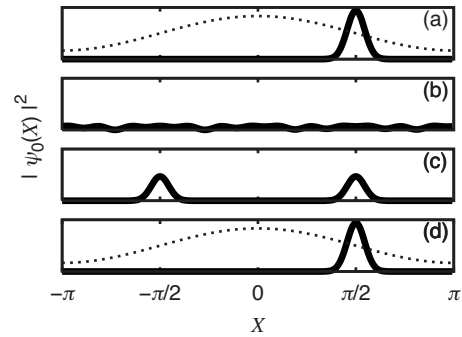


FIG. 1. Free evolution of a localized wave packet ( $\beta=0$ ) between two kicks for  $\hbar=4\pi$  (note that the packet is shown in the interval  $X\in[-\pi, \pi]$ , but it reproduces itself periodically outside this range). (a) An initial wave packet centered at  $X=\pi/2$ , (b) wave packet at  $t=0.115$ , showing complete delocalization, (c) wave packet at  $t=0.25$ , showing two replicas of the initial shape, (d) “reconstructed” wave packet at  $t=1^-$ , identical to the initial one. The vertical scale is the same for all the panels.

$$\psi_0(X, t=1^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \tilde{\psi}_0(m, t=0) \exp\left(-i\hbar \frac{m^2}{2}\right) \exp(imX). \quad (7)$$

Setting in the above expression  $\hbar=4\pi$ , for example, the argument of the exponential phase factor in Eq. (7) is seen to be an integer multiple of  $2\pi$ . Hence, the free evolution over a period leaves the wavepacket invariant. Figure 1 shows a  $\beta=0$  wave function which is initially spatially localized in one potential well [42] and which evolves freely with time. The wave function becomes completely delocalized but it “focalizes” back to its initial shape just before the next kick is applied. This is analogous to the optical Talbot effect: a monochromatic beam diffracted by a grating also reforms after a certain propagation length [43]. Quantum resonance is thus the atom-optics analog of the optical Talbot effect [31,44].

As the kick operator in Eq. (3) is diagonal in position representation, it simply adds a position-dependent phase to the wave function

$$\psi_0(X, t=1) = \exp(-i\kappa \cos X) \psi_0(X, t=0), \quad (8)$$

where  $\kappa\equiv K/\hbar$ . As the wave packet has always the same shape when the kick is applied, it acquires the same phase from each kick, and the effect of the kicks adds coherently. Quantum resonance can thus be simply view as a constructive interference effect.

The above discussion evidences an analogy of the physical pictures underlying the quantum and the classical resonances: In both cases, for particular values of the parameters, the dynamics is such that the particle (the wave packet in the quantum case) is always kicked at the same position so that the kick effect adds to produce a linear increase of the momentum. However, the quantum and the classical resonances have a very different nature, and this analogy does not imply that the detailed dynamics in the same. In the classical case the effect is related to the intensity of the kicks  $K$  whereas in the quantum case it depends on the value of  $\hbar$  [45].

### III. ANALYSIS OF “SIMPLE” QUANTUM RESONANCES

Quantum resonances obeying the condition  $\hbar k = 2\pi l$  (with  $l$  a positive integer) are named “simple” quantum resonances (SQRs). In this case, the shape of BW remains invariant under the free propagation over a period, the kicking period is then a multiple of the half-Talbot time (defined in classical optics), which is the condition for the optical (integer) Talbot effect [43,46,47].

#### A. Time evolution

Let us consider, at some (integer) time  $(t-1)$  a state  $\psi_\beta(X, t-1)$  corresponding to the general form of Eq. (6), and apply to it the free-evolution operator with  $\hbar k = 2\pi l$ :

$$\begin{aligned}\psi_\beta(X, t^-) &= \exp\left(-i\frac{P^2}{2k}\right)\psi_\beta(X, t-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-i\pi l\beta^2)\sum_m \tilde{\psi}_\beta(m, t-1) \\ &\quad \times \exp(-i\pi l m^2)\exp(-i2\pi l m\beta)e^{i(m+\beta)X}.\end{aligned}$$

As  $lm^2$  and  $lm$  have the same parity, the first exponential factor under the sum is equal to  $\exp(-i\pi l m)$ ; it can thus be combined with the second term, yielding  $\exp[-im\hbar k(\beta + 1/2)]$ :

$$\begin{aligned}\psi_\beta(X, t^-) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-i\frac{\hbar k\beta^2}{2}\right)\sum_m \tilde{\psi}_\beta(m, t-1) \\ &\quad \times \exp(-im\hbar k\beta')e^{i(m+\beta)X}\end{aligned}$$

with  $\beta' \equiv \beta + 1/2$ . Or, using Eq. (6)

$$\psi_\beta(X, t^-) = \exp\left(i\frac{\hbar k\beta(\beta+1)}{2}\right)\psi_\beta(X - \hbar k\beta', t-1). \quad (9)$$

Applying now the kick operator produces a recurrence relation linking the wave packets at times  $t$  and  $(t-1)$ :

$$\psi_\beta(X, t) = e^{-i\kappa \cos X} \exp\left(i\frac{\hbar k\beta(\beta+1)}{2}\right)\psi_\beta(X - \hbar k\beta', t-1). \quad (10)$$

Thus,  $|\psi(X, t)|^2 = |\psi(X - v, t-1)|^2 = |\psi(X - vt, 0)|^2$ . The square modulus of the wave function remains invariant immediately before each kick, except for a drift with a rate per kick [48]

$$v = \hbar k\left(\beta + \frac{1}{2}\right). \quad (11)$$

Iterating Eq. (10) down to  $t=0$  gives

$$\psi_\beta(X, t) = \exp[-i\kappa\Phi(X, t)]\psi_\beta(X - vt, 0) \quad (12)$$

with an accumulated phase [49]

$$\Phi(X, t) = \sum_{s=0}^{t-1} \cos(X - sv). \quad (13)$$

A remarkable property is obtained if

$$v = 2\pi\frac{p}{q} \quad (14)$$

with  $p, q$  integers, i.e.,  $\beta = p/(q) - 1/2$ . The phase defined in Eq. (13) takes the values  $\Phi(X, t=q) = 0$  if  $q \neq 1$  and  $\Phi(X, t=q) = \cos X$  if  $q=1$ . Consider first the case  $q \neq 1$ . After a recurrence time  $t_r = q$  the wave function is:

$$\psi_\beta(X, t_r) = \psi_\beta(X - 2\pi p, 0) = e^{-i2\pi p\beta}\psi_\beta(X, 0), \quad (15)$$

i.e., the particle comes back to its initial state after  $t_r$  kicks, leading to a periodic evolution. The physical origin of this periodicity can be easily seen, e.g., if  $v = \pi$  ( $p=1, q=2, t_r=2$ ): From Eqs. (12) and (13), the BW evolution over two successive kicks is

$$\psi_\beta(X, 2) = e^{-i\kappa \cos X}\psi_\beta(X - \pi, 1) = \psi_\beta(X - 2\pi, 0). \quad (16)$$

Hence, the phase added by the kicks simply cancels after two kicks. This behavior is called “antiresonance,” leading to a periodic evolution.

If  $q=1, v=2\pi p$ , the evolution is given by

$$\begin{aligned}\psi_\beta(X, t_r = 1) &= e^{-i\kappa \cos X}\psi_\beta(X - 2\pi p, 0) \\ &= e^{-i2\pi p\beta}e^{-i\kappa \cos X}\psi_\beta(X, 0).\end{aligned}$$

The wave packet thus recovers its initial shape at each kick and the wave function interacts with the potential in the same position, leading to a linear increase of the average momentum, or ballistic behavior. This is the quantum resonance. Note again analogy of this physical picture with that presented in Sec. II for the classical resonance.

#### B. Quantum averages

Let us now focus on the time evolution of average values. From Eq. (10) we can easily obtain a recurrence relation for the position average over the BW

$$\langle X \rangle(t) = \langle \psi_\beta(t) | X | \psi_\beta(t) \rangle = \langle X \rangle(t-1) + v. \quad (17)$$

The recurrence relation for the average momentum is

$$\begin{aligned}\langle P \rangle_\beta(t) &= \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_\beta(X - v, t-1)|^2 \\ &= \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X + vt) |\psi_\beta(X, t=0)|^2.\end{aligned} \quad (18)$$

This expression can be iterated down to  $t=0$ , leading to

$$\begin{aligned}\langle P \rangle_\beta(t) &= \langle P \rangle_\beta(0) + K \left( \sum_{n=1}^t \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X + nv) |\psi_\beta(X, 0)|^2 \right) \\ &= \langle P \rangle_\beta(0) + K \frac{\sin(tv/2)}{\sin(v/2)} \\ &\quad \times \text{Im} \left( e^{i(t+1)v/2} \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{iX} |\psi_\beta(X, 0)|^2 \right).\end{aligned} \quad (19)$$

If  $v=2\pi$ , the modulus of the momentum increases linearly with the (stroboscopic) time  $t$ , i.e.,

$$\langle P \rangle_{\beta}(t) = \langle P \rangle_{\beta}(0) + D_1 t \quad (20)$$

with the slope

$$D_1 = K \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin x |\psi_{\beta}(x, 0)|^2 \quad (21)$$

which appears as the force averaged over the initial spatial distribution.

For  $v = \pi[\text{mod } 2\pi]$ , however, destructive interference occurs. This can be seen from Eq. (19):  $\langle P \rangle_{\beta}(t) = \langle P \rangle_{\beta}(0)$  ( $t$  even) or  $\langle P \rangle_{\beta}(t) = \langle P \rangle_{\beta}(0) - D_1$  ( $t$  odd). In the general case ( $v \neq 2\pi[\text{mod } 2\pi]$ ), the momentum is frozen.

Quantum resonance effects can also be analyzed through the temporal evolution of the average kinetic energy. Using Eq. (12), one obtains

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\beta}(t) &= \langle E \rangle_{\beta}(t=0) + \frac{K^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( \sum_{n=1}^t \sin(X + nv) \right)^2 \\ &\quad \times |\psi_{\beta}(X, t=0)|^2 + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( \sum_{n=1}^t \sin(X + nv) \right) \\ &\quad \times J(X, t=0), \end{aligned} \quad (22)$$

where we introduced the current

$$J(X, t) = i \frac{\hbar}{2} [\psi_{\beta}(X, t) \partial_X \psi_{\beta}(X, t) - \text{c.c.}]. \quad (23)$$

The quantum resonance case  $v = 2\pi[\text{mod } 2\pi]$  then leads to an average kinetic energy increasing quadratically with time:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{\beta}(t) &= \langle E \rangle_{\beta}(t=0) + \frac{1}{2} K^2 t^2 \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin^2 X |\psi_{\beta}(X, t=0)|^2 \\ &\quad + K t \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X J(X, t=0). \end{aligned} \quad (24)$$

The ballistic growth is seen to be proportional to the quantum average of  $K^2 \sin^2 X$ .

### C. Map

The dynamics of position and momentum averages at “stroboscopic” times  $t$  can be described by a map. We assume that the initial BW is sharply localized around its mean position  $\langle X \rangle_{\beta}(t=0) = X_0$ . Noting  $P_t = \langle P \rangle_{\beta}(t)$  and  $X_t = \langle X \rangle_{\beta}(t)$  we get from Eq. (18) [taking  $\int_{-\pi}^{\pi} dX |\psi_{\beta}(X, t=0)|^2 = 1$ ]:

$$P_t = P_{t-1} + K \sin X_t, \quad (25a)$$

$$X_t = X_{t-1} + v. \quad (25b)$$

Unlike the standard map [Eq. (2)], Eq. (25b) does not depend on  $P_t$  but only on  $v$ . Thus, after  $t$  kicks

$$X_t = X_0 + vt, \quad P_t = P_{t-1} + K \sin(X_0 + vt). \quad (26)$$

Iterating this equation produces

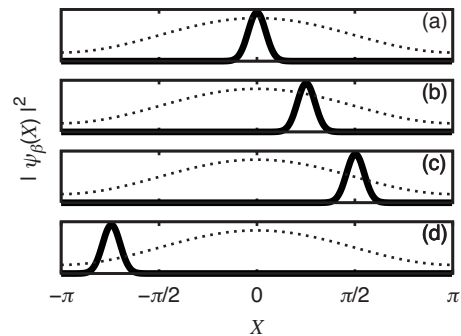


FIG. 2. Wave packet plotted at different integer times, for  $\hbar = 4\pi$  and an irrational quasimomentum ( $\beta = \frac{\pi}{50} \approx 0.063$ ). (a) Initial wave packet ( $|\psi_{\beta}|^2$ ) centered at  $X=0$ , (b)  $t=1$ , (c)  $t=2$ , (d)  $t=5$ . The shape of the potential is represented in dotted lines. The wave packet interacts with the potential at different positions, and the average effect tends to zero.

$$P_t = P_0 + K \sum_{n=1}^t \sin(X_0 + nv). \quad (27)$$

Ballistic growth is found if  $v = 2\pi(\text{mod } 2\pi)$ :

$$P_t = P_0 + tK \sin X_0 = P_0 + D_1 t \quad (28)$$

with

$$D_1 = K \sin X_0. \quad (29)$$

The quantum resonance condition thus depends on the quantum parameters  $\hbar$  and  $\beta$  (through  $v$ ), but the kick intensity  $K$  and the initial position  $X_0$  determine only the growth rate of the average momentum.

Other kinds of behavior can be found. Generally, rational quasimomentum values  $\beta = p/q$  produces periodic motion (antiresonance) with period  $t_r = q$  due to kick compensation effect discussed above. In Sec. III A we showed, e.g., that if  $\hbar = 2\pi$  and  $\beta = 0$  ( $v = \pi$ ), the motion is periodic with a recursion time  $t_r = 2$ . For irrational quasimomenta, the wave packet is kicked at different positions and does not display resonant behaviors (Fig. 2).

### IV. THE $\hbar = \pi$ HIGH-ORDER RESONANCE

“High-order” quantum resonances are the quantum-mechanical analogs of the fractional optical Talbot effect [50]. In this case, after a free propagation the initial packet does not reconstruct in an identical packet, but forms two or more replicas of the original one. The action of the kick on these subpackets generates different quantum phases producing quantum interference effects. This makes high-order quantum resonances fundamentally different from, and more complex than, simple ones.

High-order quantum resonances (HQRs) correspond to a dimensionless Planck’s constant of the form  $\hbar = 4\pi r/s$ , with  $r$  and  $s > 2$  integers. A reasoning similar to that leading to Eq. (10) shows that after the free propagation the initial packet refocalizes to  $s$  uniformly spaced subpackets if  $s$  is odd, and  $s/2$  subpackets if  $s$  is even. We shall consider here only the

simplest case  $\kappa=\pi$ . The method introduced below can in principle be generalized to more complicated cases, but the resulting algebra is cumbersome.

Using Eq. (6) and applying the free-evolution operator with  $\kappa=\pi$  produces

$$\begin{aligned} \psi_\beta(X,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{i\pi\beta^2}{2}\right) \sum_n \tilde{\psi}_\beta(n,t-1) \\ &\times \exp\left(-\frac{i\pi n^2}{2}\right) \exp(-i\pi n\beta) \exp[i(n+\beta)X]. \end{aligned} \quad (30)$$

We show in Appendix A that the above expression can be written as

$$\begin{aligned} \psi_\beta(X+wt,t) &= \frac{e^{-i\kappa\phi(X,t)}}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\pi/4} \psi_\beta(X+w(t-1),t-1) \right. \\ &\left. + e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} \psi_\beta(X+w(t-1)-\pi,t-1) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

where  $w$  is the packet (stroboscopic) drift rate defined by  $w=\kappa\beta$  and  $\phi$  is a ‘‘local’’ phase

$$\phi(X,t) = \kappa \cos(X+wt). \quad (32)$$

Equation (31) shows that at any (integer) time  $t$ ,  $\psi_\beta(X+wt,t)$  is the superposition of two subpackets having the same shape as the initial BW, centered at  $X=0$  and  $X=\pi$ . Each subpacket is multiplied by a phase factor which is the sum of the accumulated phases, producing a complex interference pattern. The principle of our calculation is thus to keep track of the coefficient of each subpacket, as their shape is fixed. We thus write

$$\psi_\beta(X+wt,t) = c_1(X,t)\psi_\beta(X,0) + c_2(X,t)\psi_\beta(X-\pi,0), \quad (33)$$

where  $c_1(X,t)$  and  $c_2(X,t)$  are  $2\pi$ -periodic complex amplitudes. We are thus considering a coupled two-level system initially in ‘‘level 1’’ ( $c_1=1$  at  $t=0$ ) which is progressively ‘‘transferred’’ to ‘‘level 2’’ and then back again to ‘‘level 1,’’ performing the analogous of a Rabi oscillation.

Define the state vector

$$\mathbf{c}_t = \begin{pmatrix} c_1(X,t) \\ c_2(X-\pi,t) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

We show in Appendix A 2 that this vector obeys the recurrence relation

$$\mathbf{c}_t = e^{-i\pi/4} \mathbf{M}_t \cdot \mathbf{c}_{t-1}, \quad (35)$$

where  $\mathbf{M}_t$  is a matrix depending on time and space

$$\mathbf{M}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & ie^{-i\phi}e^{-i\beta\pi} \\ ie^{i\phi}e^{i\beta\pi} & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (36)$$

via  $\phi=\phi(X,t)$ , Eq. (32). The matrix  $\mathbf{M}_t$  can be recast as

$$\mathbf{M}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-i\beta\pi} \\ ie^{i\beta\pi} & 1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

The rightmost matrix in the above product stands for the free propagation that induces a coupling between the two subpackets; it is thus responsible for the interference effects. The leftmost one represents the effect of the kick and is diagonal in the  $x$  representation.

Analytical results can be obtained in the case  $\beta=0$ , where the matrix  $\mathbf{M}_t$  is time independent. It is then easy to write  $\mathbf{c}_t$  as a function of the initial condition  $\mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ :

$$\mathbf{c}_t = e^{-it\pi/4} [\mathbf{M}_t]^t \mathbf{c}_0.$$

The eigenvalues of  $\mathbf{M}_t$  are

$$\lambda = \exp(\pm i\Theta), \quad (38)$$

where the phase  $\Theta$  is given by

$$\cos \Theta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{2}} = \frac{\cos(\kappa \cos X)}{\sqrt{2}}$$

(note that  $\pi/4 \leq \Theta \leq 3\pi/4$ ). If  $\mathbf{P}$  is the diagonalizing matrix, then (see Appendix A 3)

$$\mathbf{c}_t = e^{-it\pi/4} \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{it\Theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\Theta} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{c}_0. \quad (39)$$

After a straightforward calculation, one finds

$$c_1(X,t) = e^{-it\pi/4} \left[ \cos(t\Theta) - \frac{i\sqrt{2}}{2} \frac{\sin \phi}{\sin \Theta} \sin(t\Theta) \right] \quad (40)$$

and

$$c_2(X-\pi,t) = \frac{i\sqrt{2}}{2} \frac{e^{i\phi}}{\sin \Theta} e^{-it\pi/4} \sin(t\Theta). \quad (41)$$

The average momentum is then (see Appendix B):

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_\beta(X,t)|^2. \quad (42)$$

In the general case, it is difficult to analyze the behavior of the amplitudes  $c_1$  and  $c_2$  since they depend implicitly on  $X$  in a quite complicated way. Analytic results can, however, be obtained assuming that the BW  $\psi_\beta(X,t=0)$  is sharply localized at some position  $X_0$  in the interval  $[-\pi, \pi]$  (with its width  $\Delta X \ll 2\pi$ ):

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_\beta(t) &= \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(X+wt) \\ &\times [ |c_1(X,t)|^2 - |c_2(X-\pi,t)|^2 ] |\psi_\beta(X,0)|^2. \end{aligned} \quad (43)$$

This expression is valid if the two subpackets do not overlap significantly and shows that if the two subpackets have the same weight, the overall momentum shift per kick is zero: The subpackets are localized around positions  $X_0$  and  $X_0+\pi$ , and subjected to opposite forces  $+K \sin(X_0)/2$  and  $-K \sin(X_0)/2$ .

For a wave packet strongly localized at  $X_0$ , the amplitudes in the decomposition (43) can be evaluated at  $X=X_0$  and

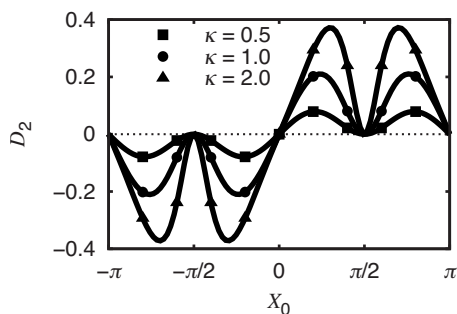


FIG. 3. Momentum slope  $D_2$  [Eq. (48)] as a function of  $X_0$  for three values of  $\kappa$ : 0.5 (squares), 1.0 (circles), and 2.0 (triangles).

depend only on time, while the phases  $\phi$  and  $\Theta$  take constant values ( $\phi = \kappa \cos X_0$ ). Hence, the average momentum evolution is

$$\langle P \rangle_{\beta}(t) = \langle P \rangle_{\beta}(t-1) + K \sin(X_0 + wt) [1 - 2|c_2(X_0 - \pi, t)|^2], \quad (44)$$

which, in the case  $\beta=0$ , takes the explicit form

$$\langle P \rangle_{\beta=0}(t) = \langle P \rangle_{\beta=0}(t-1) + K \sin X_0 \left( 1 - \frac{\sin^2(t\Theta)}{\sin^2 \Theta} \right). \quad (45)$$

The expression inside parentheses is characteristic of the diffraction by a grating. Iterating down to  $t=0$  produces

$$\langle P \rangle_{\beta=0}(t) = \langle P \rangle_{\beta=0}(t=0) + K \sin X_0 \left[ \left( \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} \right) t + \frac{1}{1 + \sin^2 \phi} \left( \frac{\sin[(2t+1)\Theta]}{2 \sin \Theta} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (46)$$

The average momentum evolution is seen to be, for arbitrary  $\phi$  and  $\Theta$ , a mix of two different behaviors: ballistic, corresponding to the first term in the brackets, and oscillation, described by the second term. This also contrasts with SQRs, where the dynamics is either ballistic or oscillatory.

For long times and  $\phi \neq 0$ , the ballistic term dominates and one gets

$$\langle P \rangle_{\beta=0}(t) = \langle P \rangle_{\beta=0}(t=0) + D_2 t \quad (47)$$

with

$$D_2 = K \sin X_0 \left( \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} \right) = D_1 \left( \frac{\sin^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} \right) \quad (48)$$

being the rate of change of the average momentum. The behavior of  $D_2$  as a function of  $X_0$  is displayed in Fig. 3 for different values of  $\kappa$ . It is interesting to compare Eq. (29) with its counterpart for SQRs, Eq. (48): In particular, for SQRs the maximum of  $D_1$  occurs for at  $X_0 = \pi/2$  (i.e., where the force is maximum), whereas in the present case  $D_2=0$  if  $X_0 = \pi/2$ , because the kicks acting on each subpackets are in this case opposite one to the other.

The coefficient  $D_2$  depends periodically on the kick intensity  $\kappa$  via  $\phi = \kappa \cos X_0$ , as shown in Fig. 4. In contrast to the SQR, increasing the kick intensity does not necessarily in-

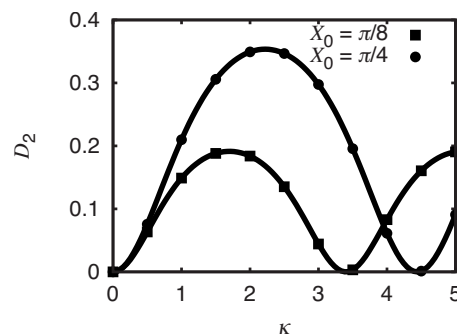


FIG. 4. Momentum slope  $D_2$  [Eq. (48)] as a function of  $\kappa$  for two initial positions  $X_0 = \pi/4$  (circles) and  $X_0 = \pi/8$  (squares). Increasing  $\kappa$  (that is, the kick intensity) does not necessarily increase the momentum slope.

crease the slope of the momentum, because of compensating effects as described above.

Analogous results describing the ballistic behavior for an initial state which is an eigenvector of the momentum have been obtained via a quite different approach in Ref. [51], but our localized-packet approach has the merit of providing a clearer picture of the underlying physics.

For  $\beta \neq 0$ , the occurrence of ballisticity depends of the periodicity on  $\mathbf{M}_r$ . Ballisticity will emerge if the relation  $\mathbf{M}_{t+t_r} = \mathbf{M}_t$  is fulfilled for some (integer) recurrence time  $t_r$ . This happens for any rational value of quasimomentum. For example, if  $\beta = 1/2$ ,  $\mathbf{M}_r$  [Eq. (36)] has a period of four kicks:  $\mathbf{M}_{t+4} = \mathbf{M}_t$ . One can then apply the above diagonalization method to  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_4 \cdot \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$ . To illustrate the resulting behavior, Fig. 5 shows the time evolution of average momentum obtained by direct integration of the Schrödinger equation. One observes essentially the same types of behavior.

## V. AVERAGING OVER QUASIMOMENTUM

In experiments performed with laser-cooled atoms (not with ultracold atoms) the initial momentum distribution is larger than the Brillouin zone unless some velocity selection process is applied. A reasonable assumption is then that all

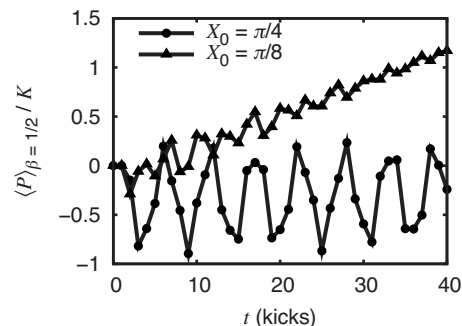


FIG. 5. Evolution of the average momentum for  $\beta = 1/2$  obtained by numerical integration of the Schrödinger equation. The initial wave function has the same Gaussian shape as in Fig. 1 and is centered at the positions  $X_0 = \pi/4$  (circles), which displays a dominant oscillatory behavior, or  $X_0 = \pi/8$  (triangles), displaying dominant ballisticity.

quasimomenta are equally represented in the initial state. In position space, this corresponds to an initial wave packet which is localized on a single potential well. In this simple case, for  $\kappa=2\pi l$ , we can work out an analytical expression for the momentum and kinetic energy averaged over the quasimomentum (see Appendix C):

$$\langle P \rangle(t) = \langle P \rangle(t=0) + K \sum_{n=1}^t \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X + nv) \times |\psi_{\beta}(X, 0)|^2. \quad (49)$$

Assuming that  $\psi_{\beta}(X, 0)$  is  $\beta$  independent [ $\psi_{\beta}(X, 0) = \varphi(X)$  and  $\int_{-\pi}^{\pi} dx |\varphi(X)|^2 = 1$ ], and recalling that  $v = 2\pi l(\beta + 1/2)$ , the averaging over  $\beta$  leads to  $\langle P \rangle(t) = \langle P \rangle(t=0)$ . Similarly, for the kinetic energy, we get from Eq. (22)

$$\langle E \rangle(t) = \langle E \rangle(t=0) + \frac{K^2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( \sum_{n=1}^t \sin(X + nv) \right)^2 \times |\varphi(X)|^2 + K \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \int_{-\pi}^{\pi} dx \left( \sum_{n=1}^t \sin(X + nv) \right) \times J(X, t=0).$$

When we integrate over  $\beta$  the last term cancels out, and the only contribution comes from

$$\begin{aligned} & \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \left( \sum_{n=1}^t \sin(X + nv) \right)^2 \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \left( \sum_{n=1}^t \sin^2(X + \pi ln + 2\pi ln\beta) \right) \\ &= \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (50)$$

We thus get a linear increasing of the average kinetic energy

$$\langle E \rangle(t) = \langle E \rangle(t=0) + \frac{K^2 t}{4}. \quad (51)$$

Hence, the ballistic contribution, corresponding to a “null-measure ensemble” of rational quasimomenta, cannot be detected by measuring quantities averaged over quasimomentum. Experimentally, the optimum situation for observing QRs is to perform quasimomentum selection, either by using stimulated Raman transitions [32,52] or by using a Bose-Einstein condensate [14,30,31]. However, it is possible to detect QRs with atoms issued from a magneto-optical trap if one can measure the full momentum distribution with enough precision to see the ballistic parts of the wave function separating out of the diffusive part for long enough times, as experimentally evidenced by D’Arcy *et al.* [24,53].

## VI. CONCLUSION

In the present work, we presented a description of quantum resonances of the kicked rotor in position space, both for simple and for high-order quantum resonances. We have shown that the dynamics can be simply understood in terms

of a spatial wave packet that comes back to its initial form after a finite number of kicks, according to the value of the quasimomentum. This picture, inspired of the atom-optics analog of the Talbot effect, provides an intuitive understanding of the underlying physics.

## APPENDIX A: BLOCH WAVE EVOLUTION FOR THE $\kappa = \pi$

### 1. Wave function evolution

The free-propagation factor  $\exp(-i\frac{\pi}{2}n^2)$  in Eq. (30) takes two different values according to the parity of  $n$ :

$$\begin{aligned} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}n^2\right) &= 1 \quad (n \text{ even}) \\ &= -i \quad (n \text{ odd}). \end{aligned}$$

Inserting

$$\tilde{\psi}_{\beta}(n, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{-i(n+\beta)X} \psi_{\beta}(X, t) \quad (A1)$$

in Eq. (30) produces

$$\begin{aligned} \psi_{\beta}(X, t^-) &= \frac{\exp(-i\pi\beta^2/2)}{2\pi} \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} dX' e^{-i(n+\beta)(X-X')} \\ &\quad \times \psi_{\beta}(X', t-1) e^{-i\pi n^2/2} e^{-i\pi n\beta}. \end{aligned} \quad (A2)$$

One can then separate even and odd terms by setting  $n=2p$  and  $n=2p+1$ :

$$\begin{aligned} \psi_{\beta}(X, t^-) &= \frac{\exp(-i\pi\beta^2/2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dX' \psi_{\beta}(X', t-1) e^{-i\beta(X-X')} \\ &\quad \times (1 - i e^{-i\pi\beta} e^{-i(X-X')}) \sum_p e^{-i2\pi p\beta} e^{-i2p(X-X')}. \end{aligned} \quad (A3)$$

Using the relation  $\sum_p e^{-i2\pi p\beta} e^{-i2p(X-X')} = (1/2) \sum_n \delta(X-X' - \pi\beta + n\pi)$  and integrating with respect to  $X'$ , gives Eq. (31) (note that only  $n=0, 1$  contribute for  $\beta > 0$  and only  $n=0, -1$  for  $\beta < 0$ ).

### 2. “Two-level” system

The evolution equations for the amplitudes  $c_{1,2}$  are obtained in the following way. Inserting Eq. (33) calculated at time  $(t-1)$  into Eq. (31) gives

$$\begin{aligned} & \psi_{\beta}(X + wt, t) \\ &= \frac{e^{-i\phi(X, t)}}{\sqrt{2}} \{ e^{-i\pi/4} [c_1(X, t-1) \psi_{\beta}(X, 0) + c_2(X, t-1) \\ &\quad \times \psi_{\beta}(X - \pi, 0)] + e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} [c_1(X - \pi, t-1) \\ &\quad \times \psi_{\beta}(X - \pi, 0) + c_2(X - \pi, t-1) \psi_{\beta}(X - 2\pi, 0)] \} \end{aligned}$$

which can be put in a simpler form [using  $\psi_{\beta}(X - 2\pi, 0) = e^{-i2\pi\beta} \psi_{\beta}(X, 0)$ ]:

$$\begin{aligned}
& \psi_\beta(X+wt, t) \\
&= \frac{e^{-i\phi(X,t)}}{\sqrt{2}} \{ [e^{-i\pi/4} c_1(X, t-1) + e^{i\pi/4} e^{-i\beta\pi} c_2(X-\pi, t-1)] \\
&\times \psi_\beta(X, 0) + [e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} c_1(X-\pi, t-1) \\
&+ e^{-i\pi/4} c_2(X, t-1)] \psi_\beta(X-\pi, 0) \}.
\end{aligned}$$

By comparing with Eq. (33), one finds

$$\begin{aligned}
c_1(X, t) &= \frac{e^{-i\phi(X,t)}}{\sqrt{2}} [e^{-i\pi/4} c_1(X, t-1) \\
&+ e^{i\pi/4} e^{-i\beta\pi} c_2(X-\pi, t-1)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2(X, t) &= \frac{e^{-i\phi(X,t)}}{\sqrt{2}} [e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} c_1(X-\pi, t-1) \\
&+ e^{-i\pi/4} c_2(X, t-1)].
\end{aligned}$$

The last expression can be written

$$\begin{aligned}
c_2(X-\pi, t) &= \frac{e^{i\phi(X,t)}}{\sqrt{2}} [e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} c_1(X-2\pi, t-1) \\
&+ e^{-i\pi/4} c_2(X-\pi, t-1)]. \quad (\text{A4})
\end{aligned}$$

One can show that the amplitudes are periodic functions, i.e.,  $c_{1,2}(X, t) = c_{1,2}(X+2\pi, t)$  by combining Eq. (33) with the equality  $\psi_\beta(X-2\pi, t) = e^{-i2\pi\beta} \psi_\beta(X, t)$ . This then leads to the matrix expression

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1(X, t) \\ c_2(X+\pi, t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} e^{-i\pi/4} & e^{-i\phi} e^{i\pi/4} e^{-i\beta\pi} \\ e^{i\phi} e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} & e^{i\phi} e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} c_1(X, t-1) \\ c_2(X+\pi, t-1) \end{pmatrix}. \quad (\text{A5})
\end{aligned}$$

### 3. The case $\beta=0$

The explicit expression for the amplitudes  $c_{1,2}$  for  $\beta=0$  is obtained as follows. The diagonalization matrix  $\mathbf{P}$  is formed with the eigenvectors of  $e^{i\pi/4} \mathbf{M}_t$ . For  $\lambda = e^{\pm i\theta}$  these eigenvectors are  $(-ie^{-i\phi}, e^{-i\phi} - \sqrt{2}e^{\pm i\theta})^T$ . Thus

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -ie^{-i\phi} & -ie^{-i\phi} \\ e^{-i\phi} - \sqrt{2}e^{i\theta} & e^{-i\phi} - \sqrt{2}e^{-i\theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{A6})$$

The amplitudes  $c_1$  and  $c_2$  at time  $t$ , can be obtained by an explicitly development corresponding to Eq. (39), leading to Eq. (40).

## APPENDIX B: CALCULUS OF THE AVERAGE MOMENTUM IN THE $\kappa=\pi$ CASE

Starting from Eq. (31) and changing  $X+wt$  into  $X$ , we easily obtain a recursion relation for the derivative

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X, t) &= i\kappa \sin X e^{-i\kappa \cos X} \psi_\beta(X, t) \\
&+ \frac{e^{-i\kappa \cos X}}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\pi/4} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-w, t-1) \right. \\
&\left. + e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-w-\pi, t-1) \right). \quad (\text{B1})
\end{aligned}$$

Using this expression for calculating the average momentum produces two terms  $p_1$  and  $p_2$ . The first one is given by

$$p_1 = K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_\beta(X, t)|^2$$

and the term  $p_2$  is

$$\begin{aligned}
p_2 &= -\frac{i\kappa}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX [e^{i\pi/4} \psi_\beta(X-w, t-1) \\
&+ e^{-i\pi/4} e^{-i\beta\pi} \psi_\beta(X-w-\pi, t-1)] \\
&\times \left( e^{-i\pi/4} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-w, t-1) + e^{i\pi/4} e^{i\beta\pi} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta \right. \\
&\left. \times (X-w-\pi, t-1) \right) \\
&= -\frac{i\kappa}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( \psi_\beta(X, t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X, t-1) \right. \\
&+ \psi_\beta(X-\pi, t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-\pi, t-1) \Big) \\
&+ \frac{\kappa}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dX \left( e^{i\beta\pi} \psi_\beta(X, t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X-\pi, t-1) \right. \\
&\left. - e^{-i\beta\pi} \psi_\beta(X-\pi, t-1) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X, t-1) \right).
\end{aligned}$$

In the last equality we replaced  $(X-w)$  by  $X$ ; as the integration is over one period, the integration limits can be kept. One recognizes  $\langle P \rangle_\beta(t-1)$  in the first term, while the second term cancels out. The recursion relation for the momentum is thus

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin X |\psi_\beta(X, t)|^2. \quad (\text{B2})$$

We now use the decomposition Eq. (33) to transform Eq. (B2) into

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle_\beta(t) &= \langle P \rangle_\beta(t-1) + iK \cos(\beta\pi) \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X+wt) \\
&\times [c_1(X, t) \psi_\beta(X, 0) + c_2(X, t) \psi_\beta(X-\pi, 0)] \\
&\times [c_1(X, t) \psi_\beta(X, 0) + c_2(X, t) \psi_\beta(X-\pi, 0)].
\end{aligned}$$

If the initial wave function has a narrow distribution centered around position  $X_0$ , we can neglect overlaps of functions  $\psi_\beta(X, 0)$  and  $\psi_\beta(X+\pi)$  [54], producing



$$\begin{aligned} \langle P \rangle_\beta(t) = & \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \int_{-\pi}^{\pi} dX \sin(X+wt) [c_1(X,t)]^2 \\ & - |c_2(X-\pi,t)|^2 |\psi_\beta(X,0)|^2. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Finally, using the fact that  $\psi_\beta(X,0)$  is much narrower than any other factor, and assuming  $\int_{-\pi}^{\pi} dX |\psi_\beta(X,0)|^2 = 1$  [55] gives

$$\langle P \rangle_\beta(t) = \langle P \rangle_\beta(t-1) + K \sin(X_0 + wt) [1 - 2|c_2(X_0 - \pi, t)|^2]. \quad (\text{B4})$$

### APPENDIX C: MOMENTUM AVERAGED OVER THE QUASIMOMENTUM

The momentum averaged over the quasimomentum

$$\langle P \rangle = \hbar \sum_n \int_{-1/2}^{1/2} d\beta (n + \beta) |\tilde{\psi}_\beta(n)|^2 \quad (\text{C1})$$

can be related to quantum average  $\langle P \rangle_\beta$  in the following way: From the definition of Sec. II one has

$$\tilde{\psi}_\beta(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_\beta(X) e^{-i(\beta+n)X} dX. \quad (\text{C2})$$

Therefore,

$$\begin{aligned} (n + \beta) \tilde{\psi}_\beta(n) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta(X) \frac{\partial}{\partial X} e^{-i(\beta+n)X} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} [\psi_\beta(X) e^{-i(\beta+n)X}]_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{-i(\beta+n)X} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X). \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

The first term on the right-hand side vanishes [ $\psi_\beta(X) e^{-i\beta X}$  is  $2\pi$  periodic], thus

$$\langle P \rangle = - \frac{i\hbar}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \int d\beta \tilde{\psi}_\beta(n) \int_{-\pi}^{\pi} dX e^{-i(\beta+n)X} \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X).$$

Using  $\sum_n e^{-in(X-X')} = \sum_n \delta(X-X' - 2n\pi)$  one obtains

$$\langle P \rangle = -i\hbar \int d\beta \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta(X) \frac{\partial}{\partial X} \psi_\beta(X) = \int_{-1/2}^{1/2} d\beta \langle P \rangle_\beta, \quad (\text{C4})$$

where

$$\langle P \rangle_\beta = \int_{-\pi}^{\pi} dX \psi_\beta(X) [P \psi_\beta(X)]. \quad (\text{C5})$$

For the second momentum of  $P$ , an analogous development leads to

$$\langle P^2 \rangle = \sum_n \int d\beta (n + \beta)^2 |\tilde{\psi}_\beta(n)|^2 = \int d\beta \langle P^2 \rangle_\beta, \quad (\text{C6})$$

where

$$\langle P^2 \rangle_\beta = \int_{-\pi}^{\pi} dX [P \psi_\beta(X)] [P \psi_\beta(X)] \quad (\text{C7})$$

(and, in general,  $\langle P^k \rangle = \int d\beta \langle P^k \rangle_\beta$  for any integer  $k$ ).

- 
- [1] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4598 (1995).  
[2] G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford, and F. M. Izrailev, *Stochastic Behavior of a Quantum Pendulum Under Periodic Perturbation* (Springer Verlag, Berlin, 1979), Vol. 93, pp. 334–352.  
[3] F. M. Izrailev, *Phys. Rep.* **196**, 299 (1990).  
[4] D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 677 (1986).  
[5] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1203 (1998).  
[6] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4111 (1998).  
[7] J. Ringot, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2741 (2000).  
[8] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J. C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 224101 (2002).  
[9] C. E. Creffield, G. Hur, and T. S. Monteiro, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 024103 (2006).  
[10] H. Lignier, J. Chabé, D. Delande, J. C. Garreau, and P. Szriftgiser, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 234101 (2005).  
[11] J. Chabé, H. Lignier, H. Cavalcante, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 264101 (2006).  
[12] P. H. Jones, M. M. Stocklin, G. Hur, and T. S. Monteiro, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 223002 (2004).  
[13] P. H. Jones, M. Goonasekera, D. R. Meacher, T. Jonckheere, and T. S. Monteiro, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 073002 (2007).  
[14] G. J. Duffy, S. Parkins, T. Müller, M. Sadgrove, R. Leonhardt, and A. C. Wilson, *Phys. Rev. E* **70**, 056206 (2004).  
[15] M. Sadgrove, S. Wimberger, S. Parkins, and R. Leonhardt, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 174103 (2005).  
[16] T. S. Monteiro, P. A. Dando, N. A. C. Hutchings, and M. R. Isherwood, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 194102 (2002).  
[17] P. H. Jones, M. Goonasekera, and F. Renzoni, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 073904 (2004).  
[18] G. G. Carlo, G. Benenti, G. Casati, S. Wimberger, O. Morsch, R. Mannella, and E. Arimondo, *Phys. Rev. A* **74**, 033617 (2006).  
[19] I. Dana, V. Ramareddy, I. Talukdar, and G. S. Summy, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 024103 (2008).  
[20] D. A. Steck, W. H. Oskay, and M. G. Raizen, *Science* **293**, 274 (2001).

- [21] W. K. Hensinger *et al.*, *Nature (London)* **412**, 52 (2001).
- [22] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4044 (1998).
- [23] L. Deng, E. W. Hagley, J. Denschlag, J. E. Simsarian, M. Edwards, C. W. Clark, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5407 (1999).
- [24] M. K. Oberthaler, R. M. Godun, M. B. d’Arcy, G. S. Summy, and K. Burnett, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4447 (1999).
- [25] S. Fishman, I. Guarneri, and L. Rebuzzini, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 084101 (2002).
- [26] G. Behinaein, V. Ramareddy, P. Ahmadi, and G. S. Summy, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 244101 (2006).
- [27] I. Dana and D. L. Dorofeev, *Phys. Rev. E* **73**, 026206 (2006).
- [28] S. Schlunk, M. B. d’Arcy, S. A. Gardiner, D. Cassettari, R. M. Godun, and G. S. Summy, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 054101 (2003).
- [29] Z. Y. Ma, M. B. d’Arcy, and S. A. Gardiner, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 164101 (2004).
- [30] S. Schlunk, M. B. d’Arcy, S. A. Gardiner, and G. S. Summy, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 124102 (2003).
- [31] C. Ryu, M. F. Andersen, A. Vaziri, M. B. d’Arcy, J. M. Grossman, K. Helmerson, and W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 160403 (2006).
- [32] J. F. Kanem, S. Maneshi, M. Partlow, M. Spanner, and A. M. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 083004 (2007).
- [33] S. Wimberger, I. Guarneri, and S. Fishman, *Nonlinearity* **16**, 1381 (2003).
- [34] F. M. Izrailev, D. L. Shepelyansky, and Th. Math, *Physica* **43**, 553 (1980).
- [35] C. Cohen-Tannoudji, *Atomic Motion in Laser Light* (North-Holland, Amsterdam, 1992), pp. 1–164.
- [36] H. J. Metcalf and P. V. D. Straten, *Laser Cooling and Trapping* (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
- [37] P. Meystre, *Atom Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 2001).
- [38] One must, however, be careful about the meaning of a wave packet when going from one representation to the other. To give an example that will play a role in the following, consider a wave packet that is “localized” around a given position in the folded representation. In the unfolded representation such a packet corresponds in fact to a “comb” (of spatial step  $\lambda_L/2$ ) of packets periodically distributed in  $X$ , with period  $2\pi$ .
- [39] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, 263 (1979).
- [40] G. M. Zaslavsky, M. Edelman, and B. A. Niyazov, *Chaos* **7**, 159 (1997).
- [41] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, and R. B. White, *Phys. Rev. A* **23**, 2664 (1981).
- [42] Indeed, a wave packet can be spatially localized in the first Brillouin zone and also have a well-defined quasimomentum. Both in the (unfolded) real space and in the momentum space the corresponding wave function is a periodic distribution of packets (an infinite comb) and the Heisenberg inequality is fulfilled.
- [43] M. V. Berry and E. Bodenchatz, *J. Mod. Opt.* **46**, 349 (1999).
- [44] M. S. Chapman, C. R. Ekstrom, T. D. Hammond, J. Schmiedmayer, B. E. Tannian, S. Wehinger, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. A* **51**, R14 (1995).
- [45] Moreover, in order to observe accelerator modes, it is necessary that the motion to be stable in the neighbor of the considered initial condition [see, e.g., A. J. Lichtenberg and M. A. Liberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [46] M. V. Berry, *Physica D.* **10**, 369 (1984).
- [47] D. R. Grempel, S. Fishman, and R. E. Prange, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 833 (1982).
- [48] Note that the wave packet is not simply drifting. Between kicks, it is completely delocalized (see Fig. 1). It is only because we are considering the wave packet at “stroboscopic” times in the vicinity of the kick that it gives the impression of a drift.
- [49] The constant phase factor in Eq. (10) has been omitted in Eq. (12) for the sake of simplicity.
- [50] M. V. Berry and S. Klein, *J. Mod. Opt.* **43**, 2139 (1996).
- [51] V. V. Sokolov, O. V. Zhirov, D. Alonso, and G. Casati, *Phys. Rev. E* **61**, 5057 (2000).
- [52] M. Kasevich and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1741 (1992).
- [53] M. B. d’Arcy, R. M. Godun, M. K. Oberthaler, G. S. Summy, K. Burnett, and S. A. Gardiner, *Phys. Rev. E* **64**, 056233 (2001).
- [54] Note that we cannot use the narrow wave packet approximation directly in the calculation of the coefficients  $c_{1,2}$  because in such case the derivative in Eq. (B1) is meaningless. We can, however, use it in the expression of the average momentum thanks to the presence of the integral of  $X$ .
- [55] This normalization is not *a priori* fulfilled since the BW  $\psi_\beta$  is a component of the full wave function.

## Tracking Quasiclassical Chaos in Ultracold Boson Gases

Maxence Lepers, Véronique Zehnlé, and Jean Claude Garreau

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université des Sciences et Technologies de Lille; CNRS;  
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France\**

(Received 5 August 2008; published 3 October 2008)

We study the dynamics of an ultracold boson gas in a lattice submitted to a constant force. We track the route of the system towards chaos created by the many-body-induced nonlinearity and show that relevant information can be extracted from an experimentally accessible quantity, the gas mean position. The threshold nonlinearity for the appearance of chaotic behavior is deduced from Kolmogorov-Arnold-Moser arguments and agrees with the value obtained by calculating the associated Lyapunov exponent.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.144103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.144103)

PACS numbers: 05.45.Mt, 03.75.Nt, 05.45.Ac, 37.10.Jk

Recent advances in the physics of cold atoms paved the way for the investigation of fundamental quantum problems with unprecedented cleanness. “Quantum chaos” is one of the most fascinating among these problems, because in such a case the correspondence between the dynamics of the quantum system and its classical counterpart is non-trivial. The reasons for that are twofold: First, quantum particles obey Heisenberg inequalities and, hence, their dynamics cannot be described in terms of phase-space trajectories; second, sensitivity to initial conditions is not observed, as the Schrödinger equation is linear. For these reasons, *quantum chaos* has often been defined as “the behavior of a quantum system whose classical limit is chaotic.” Whereas this is a reasonable definition, it is clear that the actual quantum dynamics has no direct relation to classical chaos. Much work thus is concentrated in finding “reminiscences” of classical chaos that might survive in the quantum system, the so-called “signatures” of quantum chaos [1].

The realization in 1995 of the first Bose-Einstein condensate with laser-cooled atoms [2–4] opened a new way for investigating (truly) nonlinear dynamics in quantum systems. In an “ideal” (i.e., in the zero temperature limit) Bose-Einstein condensate (BEC), the atoms are indistinguishable and form a mesoscopic object which can be described by a “collective” single wave function. The BEC’s dynamical behavior is then described by the Gross-Pitaevskii equation which includes a *nonlinear* term due to atomic interactions [5]. The solutions of such equation can—and do—present sensitivity to initial conditions, leading to “classical-like” instabilities, a possibility that attracted much attention from both theoreticians [6–14] and experimentalists [15,16].

To make these ideas clear, let us first consider a simpler system, the kicked rotor, whose experimental realization with laser-cooled atoms [17] lead to an impressive burst of experimental work [18–24]. This system is formed by a particle periodically “kicked” by a sinusoidal force. The classical dynamics is characterized by a single parameter  $K$ , which is the normalized amplitude of the potential [17],

whereas the “quantumness” of the quantum system is described by a “normalized Planck constant”  $\hbar$  (the dynamics become classical as  $\hbar \rightarrow 0$ ).

To characterize the dynamics, one may chose, for instance, the particle’s square momentum as the relevant quantity [ $p^2(t)$  in the classical case,  $\langle p^2(t) \rangle$  in the quantum case]. By taking the Fourier transform of the above quantity and pinpointing the frequencies appearing in the evolution of the system for different values of  $K$  and fixed initial conditions, we can characterize in a common language both the classical and the quantum versions. The result is plotted in Fig. 1.

The classical dynamics, Fig. 1(a), shows resonances (or frequency-locking events) each time a frequency becomes very close to another one. For  $K \gtrsim 0.8$ , the frequencies in the spectrum “coalesce” to form of a dense spectrum, which is a signature of a chaotic dynamics. In the quantum case, Fig. 1(b), the spectrum is richer and present numerous frequency crossings, but no dense spectrum is observed.

Let us now consider a one-dimensional BEC of particles of mass  $M$  placed in a sinusoidal lattice formed by counter-propagating laser beams of wavelength  $\lambda_L$ , and subjected to a linear force. The system is described by the Gross-Pitaevskii equation (GPE)

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left( \frac{P^2}{2m} + V_0 \cos(2\pi x) + Fx + g|\psi|^2 \right) \psi(x, t), \quad (1)$$

with lengths measured in units of the lattice step  $d = \lambda_L/2$ , energy measured in units of the recoil energy  $E_R = \hbar^2 k_L^2 / (2M)$  (with  $k_L = 2\pi/\lambda_L$ ), time in units of  $\hbar/E_R$ , the force  $F$  in units of  $E_R/d$ ,  $P = -i\partial/\partial x$ , the reduced mass is  $m = \pi^2/2$  and  $g$  is the (1D) nonlinearity parameter. The eigenstates of the linear part of the Hamiltonian (1), obtained by setting  $g = 0$ , are the so-called Wannier-Stark (WS) states [6,25,26]. To simplify the discussion, let us suppose that the BEC energy is low enough that its wave function  $\psi$  can be expanded only on the lowest-energy WS state of each potential well, hereafter noted as  $\varphi_n(x)$  (corresponding to the  $n$ th well). These states are centered in

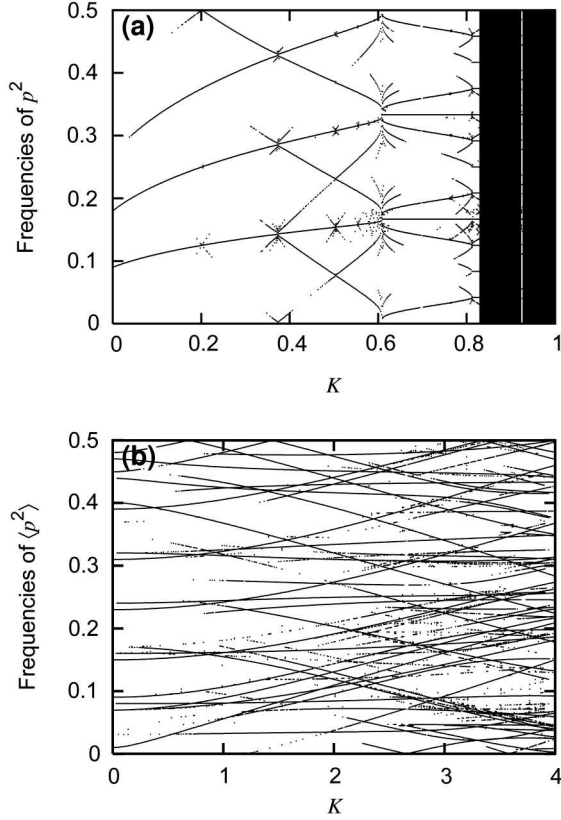


FIG. 1. Classical and quantum dynamics of the kicked rotor. For each value of  $K$ , we numerically calculate  $p^2(t)$  (classical case) and  $\langle p^2(t) \rangle$  (quantum case) up to 2000 kicks, perform the Fourier transform, and pinpoint the frequencies whose Fourier amplitude is above a threshold (here  $1/500$  of the maximum amplitude). (a) Frequencies in the classical dynamics: A dense spectrum appears for  $K \geq 0.82$  (initial conditions  $x = 0$  and  $p = 0.56$ ). (b) Frequencies in the quantum dynamics: The spectrum is complex, but always discrete ( $\hbar = 2.89$ , the initial state is a Gaussian in momentum space of FWHM  $5\hbar$  centered at  $p = 0.56$ ).

each potential well, obey the symmetry relation  $\varphi_{n+m}(x) = \varphi_n(x - m)$ , and form a ladder of eigenenergies  $E_n = n\omega_B$ , where  $\omega_B = Fd/\hbar$  ( $F$  in our normalized units) is the Bloch frequency. Thus, putting  $\varphi(x) \equiv \varphi_0(x)$

$$\psi(x, t) = \sum_n \sqrt{I_n} e^{-i\theta_n} \varphi(x - n), \quad (2)$$

where the eigenstates population  $I_n$  and phase  $\theta_n$  are real functions of the time.

Following the approach of [6], we insert Eq. (2) in Eq. (1), and obtain Hamilton equations for the populations and phases. The Hamiltonian then appears as a sum of an integrable part  $H_0$  and a nonintegrable perturbation  $H_1$ :

$$H = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta), \quad (3)$$

with  $\epsilon \propto g\chi_{01}$ , where  $\chi_{0i} \equiv \int dx \varphi^3(x) \varphi(x - i)$  is a measure of the superposition of eigenfunctions corresponding to different wells. For small  $\epsilon$ , the system is quasi-

integrable and fits into the general frame of the Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) theorem [27]. Therefore, the quantum-coherent evolution of a BEC displays classical-like KAM-structured chaos. We call this, “quasiclassical” chaos.

If we temporarily neglect the nonlinear term in Eq. (1), we see that the phases evolve as  $\theta_n(t) = \theta_{n0} + n\omega_B t$ . To the first order in  $\epsilon$ , the effect of the nonlinearity is to introduce a population-dependent correction to this phase, producing a harmonic evolution with frequencies  $\omega_n = n\omega_B + g\chi_{00}I_n$ . The intensities are constants of motion,  $I_n(t) = I_n(t=0)$  and the “self-coupling” parameter  $\chi_{00}$  depends only  $V_0$  and  $F$ . The BEC dynamics is thus governed by the Bohr frequencies

$$\omega_{nm} \equiv \omega_n - \omega_m = (n - m)\omega_B + g\chi_{00}(I_n - I_m). \quad (4)$$

To simplify further our description, let us restrict the dynamics to three adjacent potential wells; i.e., we set  $I_n \equiv 0$  if  $n \neq -1, 0, 1$  in Eq. (2). The phase space of the system is then four-dimensional, the dynamical variables being two populations (since  $I_{-1} + I_0 + I_1 = 1$ ) and two relative phases [6]. Note that BEC dynamics in three-well potentials has recently been considered in various contexts [28–30].

The onset of chaos in this system is shown in Fig. 2, which is the equivalent of Fig. 1, with the difference that we used the average position  $\langle x(t) \rangle$  instead of  $\langle p^2(t) \rangle$ . Strikingly, the plot resembles more closely to the classical [Fig. 1(a)] than to the quantum [Fig. 1(b)] dynamics of the kicked rotor.

We can interpret the main features of Fig. 2 from simple arguments. At  $g = 0$  there are only three Bohr frequencies

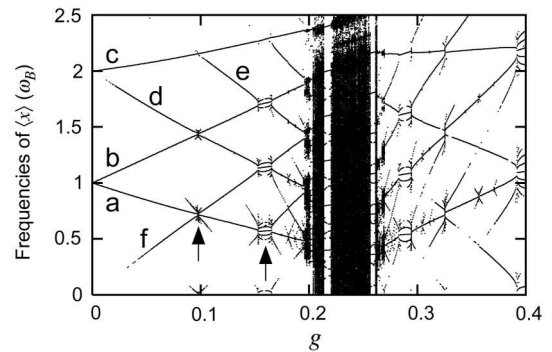


FIG. 2. Frequencies present in the spectrum of  $\langle x(t) \rangle$  vs  $g$  (the threshold is  $1/100$  of the maximum amplitude). For small  $g$ , the Bohr frequencies [cf. Eq. (4)] are  $\omega_{10} = \omega_B - 0.4g\chi_{00}$ ,  $\omega_{0-1} = \omega_B + 0.55g\chi_{00}$  and  $\omega_{1-1} = 2\omega_B + 0.15g\chi_{00}$ , corresponding to branches a, b, and c, respectively. Harmonics of  $\omega_{10}$  (branches d and e) and  $\Omega_{1,-1,0}$  (branch f) are also seen. For  $0.19 \lesssim g \lesssim 0.26$  one observes dense-spectrum windows corresponding to quasiclassical chaos. Parameters are  $\omega_B = 0.25$ ,  $V = 5$  ( $\chi_{00} = 2$ ); initial conditions are  $I_0 = 0.65$ ,  $I_1 = 0.25$ ,  $\theta_0 = \theta_{-1} = 0$ ,  $\theta_1 = \pi$ .

in the model: Two of them are degenerated,  $\omega_{0-1} = \omega_{10} = \omega_B$ , and correspond to energy difference between neighbor wells, whereas  $\omega_{1-1} = 2\omega_B$  corresponds to next-to-neighbor energy difference. The low- $g$  structure can be understood using Eq. (4). The frequencies present around  $g = 0.05$ , for instance, in Fig. 2 are of the form

$$\Omega_{pqr} = p\omega_{0-1} + q\omega_{10} + r\omega_{1-1} \quad (5)$$

with  $p, q, r$  integer. Namely, from top to bottom, we found  $\omega_{1-1}, 2\omega_{10}, \omega_{0-1}, \omega_{10}$ , and  $\omega_{0-1} - \omega_{10}$ . These frequencies are only weakly perturbed by the nonlinearity, which manifests itself by the slight curvature of the branches. A KAM-type expansion in powers of  $\epsilon$  shows that the weight of a frequency  $\Omega_{pqr}$  in the spectrum is proportional to  $g/\Omega_{pqr}$  [27]; thus, the higher the value of  $g$ , the larger the number of frequencies that will be present (remember that Fig. 2 displays the frequencies whose amplitude is above a threshold), and smaller frequencies will be favored. The intersection of two branches corresponds to a resonance, that is, the condition  $\Omega_{pqr} = 0$  is fulfilled for some  $p, q, r$ . Close to a resonance the KAM perturbation theory breaks down, and nonintegrable behaviors appear that may lead to chaos. In Fig. 2 the arrows indicate the resonances  $\Omega_{1q0} = 0$  ( $q = -2$ ) for  $g \approx 0.10$ , and  $\Omega_{1q0} = 0$  ( $q = -3, -4, -5$ ) for, respectively,  $g \approx 0.16, g \approx 0.20$ , and  $g \approx 0.22$ . For higher  $g$  values, resonances with higher and higher  $q$  values become significative, as seen on the left of the chaotic region: Each frequency crossing produces a multifrequency structure (indicated by the arrows). Finally, for  $g \gtrsim 0.2$  one observes at least four successive windows of dense spectrum, corresponding to a chaotic behavior.

Figure 2 represents a “local route” (in the sense that its detailed geometry depends on the initial conditions) to quasiclassical chaos. The above argument suggests, however, that this route is characteristic of KAM systems, and globally independent of initial conditions. Its universal character is confirmed by comparing it to Fig. 1(a), where an analogous structure is observed in a completely different KAM system, the classical kicked rotor. We have thus put into evidence a route to KAM chaos in a nonlinear quantum system, which is potentially observable with state-of-the-art experiments.

To confirm our conclusions, we have also calculated the maximum Lyapunov exponent (MLE) associated to the dynamics, which is a direct signature of the sensitivity to the initial conditions, and thus of chaos. To calculate MLEs in our quantum system, we adapted the classical Jacobian method [31]. We represent the system evolution by a trajectory in a six-dimensional “generalized quantum phase-space,” formed by the real and imaginary parts of each WS state coefficient, i.e.,  $\sqrt{I_n} \cos \theta_n$  and  $\sqrt{I_n} \sin \theta_n$ , for  $n = -1, 0, 1$  (this is numerically more stable than using  $I_n$  and  $\theta_n$ ), and calculate the divergence of neighbor WS trajectories, from which we can extract the MLE. The

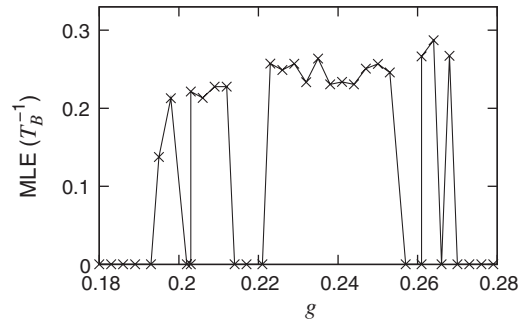


FIG. 3. Maximum Lyapunov exponent (in units of  $T_B^{-1} = \omega_B/2\pi$ ) as a function of  $g$ . One observes a good correspondence between the existence of a nonzero Lyapunov exponent and the presence of dense-spectrum regions in Fig. 2. The observed dense spectrum is thus a reliable signature of the chaotic behavior. Same parameters and initial conditions as in Fig. 2.

result is presented in Fig. 3. One sees a clear transition to chaos for  $g \approx 0.194$ , which is in good agreement with the value that can be deduced from Fig. 2. We can also identify the four successive chaotic windows.

For given initial conditions, we can obtain an estimate for the critical value of  $g$  leading to chaos. KAM theory shows that chaos generally appears along a separatrix. In our system there are two main kinds of trajectories [6]: “Passing” (unbounded phase) trajectories correspond to Bohr oscillations slightly perturbed by the nonlinearity (for the low values of  $g$  we are considering); they appear when the three populations are comparable. Bound, periodic orbits correspond to a motion essentially confined in a potential well, and appear when one population dominates the others. Between these two kinds of trajectories, there is a separatrix. For a given trajectory (i.e., for fixed initial conditions), chaos appears when the changing in the value of  $g$  brings it close to the separatrix. The condition for that can be simply estimated by confining the BEC to only two wells ( $I_{-1} = 0$ ), in which case the system is integrable. This “reduced” system does not exhibit chaos, but it has a phase-space structure analogous to that of the 3-wells, displaying bound and passing trajectories, and, between them, a separatrix. In the reduced system we can calculate both the energy  $E_0$  corresponding to the trajectory (with  $I_{-1} = 0$ ) and the energy  $E_s$  of the unstable point to which the separatrix is connected. We can then numerically determine the value of  $g$  for which  $E_0 = E_s$ , which gives the critical value. Figure 4 shows the result for various initial conditions (solid line). The dotted lines indicate the limits of the chaotic region as inferred from the Lyapunov exponent calculation in the 3-well system. The agreement is very good, even when the chaotic zone is narrow.

In conclusion, we have characterized the phenomenon of quasiclassical chaos using an experimentally accessible signal, the mean position of the boson gas. We have studied a “local route” to quasiclassical chaos and shown that the information obtained from this approach agrees well with

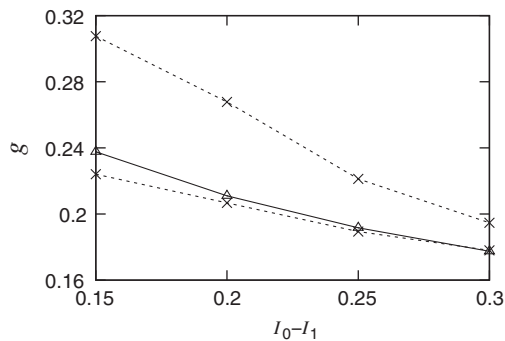


FIG. 4. Determination of the critical value of  $g$ . The solid line with triangles is the estimated critical value of  $g$ , given by the condition that the trajectory energy equals the separatrix energy (cf. text). The dotted lines with crosses are the limits of the chaotic region, where the Lyapunov exponent is nonzero. The parameters are the same as in Fig. 2, except  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ .

that provided by a hallmark signature of chaos, the sensitivity to initial conditions, quantified by a positive Lyapunov exponent. The understanding of the structure of such a route allowed us to determine the critical value of the nonlinearity parameter, which is in good agreement with the one deduced from the calculation of the Lyapunov exponent. We think that the present work might stimulate an experimental observation of quasiclassical chaos, which would, in turn, stimulate new investigations on the nature of quantum chaos.

The authors are happy to thank M. Lefranc for fruitful discussions and for his help with the calculation of Lyapunov exponents.

\*<http://www.phlam.univ-lille1.fr/atfr/cq>

- [1] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001), 2nd ed.
- [2] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [3] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [4] W. Ketterle, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131 (2002).
- [5] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [6] Q. Thommen, J.C. Garreau, and V. Zehnlé, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 210405 (2003).
- [7] Y. Zheng, M. Kořtrun, and J. Javanainen, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 230401 (2004).
- [8] G.P. Berman, F. Borgonovi, F.M. Izrailev, and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 030404 (2004).
- [9] J. Fang and W. Hai, *Physica (Amsterdam)* **370B**, 61 (2005).
- [10] D. Witthaut, M. Werder, S. Mossmann, and H.J. Korsch, *Phys. Rev. E* **71**, 036625 (2005).
- [11] J. Liu, C. Zhang, M.G. Raizen, and Q. Niu, *Phys. Rev. A* **73**, 013601 (2006).
- [12] S. Wimberger, P. Schlagheck, and R. Mannella, *J. Phys. B* **39**, 729 (2006).
- [13] N. van Noort, M.A. Porter, Y. Yi, and S.N. Chow, *J. Nonlinear Sci.* **17**, 59 (2007).
- [14] J. Reslen, C.E. Creffield, and T.S. Monteiro, *Phys. Rev. A* **77**, 043621 (2008).
- [15] L. Fallani, L. De Sarlo, J.E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140406 (2004).
- [16] M. Christiani, O. Morsch, N. Malossi, M. Jona-Lasinio, M. Anderlini, E. Courtade, and E. Arimondo, *Opt. Express* **12**, 4 (2004).
- [17] F.L. Moore, J.C. Robinson, C.F. Bharucha, B. Sundaram, and M.G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4598 (1995).
- [18] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4111 (1998).
- [19] M.K. Oberthaler, R.M. Godun, M.B. d'Arcy, G.S. Summy, and K. Burnett, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4447 (1999).
- [20] L. Deng, E.W. Hagley, J. Denschlag, J.E. Simsarian, M. Edwards, C.W. Clark, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5407 (1999).
- [21] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J.C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 224101 (2002).
- [22] G.J. Duffy, S. Parkins, T. Müller, M. Sadgrove, R. Leonhardt, and A.C. Wilson, *Phys. Rev. E* **70**, 056206 (2004).
- [23] H. Lignier, J. Chabé, D. Delande, J.C. Garreau, and P. Szriftgiser, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 234101 (2005).
- [24] C.E. Creffield, G. Hur, and T.S. Monteiro, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 024103 (2006).
- [25] G.H. Wannier, *Phys. Rev.* **117**, 432 (1960).
- [26] Q. Thommen, J.C. Garreau, and V. Zehnlé, *Phys. Rev. A* **65**, 053406 (2002).
- [27] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1982).
- [28] S. Mossmann and C. Jung, *Phys. Rev. A* **74**, 033601 (2006).
- [29] E.M. Graefe, H.J. Korsch, and D. Witthaut, *Phys. Rev. A* **73**, 013617 (2006).
- [30] B. Liu, L.B. Fu, S.P. Yang, and J. Liu, *Phys. Rev. A* **75**, 033601 (2007).
- [31] J.P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).



# Bibliographie

- [1] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, et M. K. Oberthaler, *Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), no. 1, 010402.
- [2] J. F. Allen et A. D. Misener, *Flow of liquid helium II*, Nature **141** (1938), no. 3558, 75.
- [3] H. Ammann et N. Christensen, *Mixing internal and external atomic dynamics in the kicked rotor*, Phys. Rev. E **57** (1998), no. 1, 354–358.
- [4] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, et N. Christensen, *Quantum delta-kicked rotor : Experimental observation of decoherence*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), no. 19, 4111–4115.
- [5] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, et E. Wieman, C. ans Cornell, *Obervation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*, Science **269** (1995), no. 5221, 198–201.
- [6] P. W. Anderson et J. M. Rowell, *Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963), no. 6, 230–232.
- [7] G. Behinaein, V. Ramareddy, P. Ahmadi, et G. S. Summy, *Exploring the phase space of the quantum  $\delta$ -kicked accelerator*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), no. 24, 244101.
- [8] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, et C. Salomon, *Bloch oscillations of atoms in an optical potential*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), no. 24, 4508–4511.
- [9] J. Bleuse, G. Bastard, et P. Voisin, *Electric-field-induced localization and oscillatory electro-optical properties of semiconductor superlattices*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), no. 3, 220–223.
- [10] A. Buchleitner et A. R. Kolovsky, *Interaction-induced decoherence of atomic Bloch oscillations*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), no. 25, 253002.
- [11] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, et M. Lewenstein, *Dark solitons in Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), no. 25, 5198–5201.
- [12] J. Chabé, *Chaos quantique et transition d’Anderson avec des atomes refroidis par laser*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2007.
- [13] J. Chabé, H. Lignier, P. Szriftgiser, et J.C. Garreau, *Improving Raman velocimetry of laser-cooled cesium atoms by spin-polarization*, Opt. Comm. **274** (2007), no. 1, 254–259.



- [14] C. Chin, V. Vuletić, A. J. Kerman, et S. Chu, *High-resolution Feshbach spectroscopy of cesium*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), no. 13, 2717–2720.
- [15] B. V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep. **52** (1979), no. 5, 263–379.
- [16] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, et A. Ashkin, *Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), no. 1, 48–51.
- [17] D. Cohen, *Quantum chaos, dynamical correlations, and the effect of noise on localization*, Phys. Rev. A **44** (1991), 2292–2313.
- [18] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann, 1977.
- [19] C. E. Creffield et T. S. Monteiro, *Tuning the Mott transition in a Bose-Einstein condensate by multiple photon absorption*, Phys. Rev. Lett. **96** (2006), no. 21, 210403.
- [20] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71** (1999), 463–512.
- [21] J. Dalibard, *Cohérence quantique et dissipation. cours de magistère de physique*, [http://www.phys.ens.fr/~dalibard/enseignement\\_fr.html](http://www.phys.ens.fr/~dalibard/enseignement_fr.html), 2006.
- [22] J. Dalibard, Y. Castin, et K. Mølmer, *Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), no. 5, 580–583.
- [23] I. Dana, V. Ramareddy, I. Talukdar, et G. S. Summy, *Experimental realization of quantum-resonance ratchets at arbitrary quasimomenta*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), no. 2, 024103.
- [24] M. B. d’Arcy, R. M. Godun, M. K. Oberthaler, D. Cassettari, et G. S. Summy, *Quantum enhancement of momentum diffusion in the delta-kicked rotor*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001), no. 7, 074102.
- [25] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. Van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, et W. Ketterle, *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), no. 22, 3969–3973.
- [26] L. Deng, E. W. Hagley, J. Denschlag, J. E. Simsarian, Mark Edwards, Charles W. Clark, K. Helmerson, S. L. Rolston, et W. D. Phillips, *Temporal, matter-wave-dispersion Talbot effect*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), no. 26, 5407–5411.
- [27] A. C. Doherty, K. M. D. Vant, G. H. Ball, N. Christensen, et R. Leonhardt, *Momentum distributions for the quantum delta-kicked rotor with decoherence*, J. Opt. B **2** (2000), no. 5, 605–611.
- [28] R. Dum, P. Zoller, et H. Ritsch, *Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission*, Phys. Rev. A **45** (1992), no. 7, 4879–4887.
- [29] B. Eckhardt et D. Yao, *Local Lyapunov exponents in chaotic systems*, Physica D **65** (1993), 100–108.
- [30] J. P. Eckmann et D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. **57** (1985), 617–656.

- 
- [31] J. Esteve, C. Gross, A. Weller, S. Giovanazzi, et M. K. Oberthaler, *Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate*, Nature **455** (2008), no. 7217, 1216–1219.
- [32] U. Fano, *Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques*, Rev. Mod. Phys. **29** (1957), no. 1, 74–93.
- [33] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, et GM Tino, *Long-lived Bloch oscillations with bosonic sr atoms and application to gravity measurement at the micrometer scale*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), no. 6, 60402.
- [34] S. Fishman, I. Guarneri, et L. Rebuzzini, *Stable quantum resonances in atom optics*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), no. 8, 084101.
- [35] J. Froyland et K. H. Alfsen, *Lyapunov-exponent spectra for the Lorenz model*, Phys. Rev. A **29** (1984), 2928–2931.
- [36] M. Glück, A. R. Kolovsky, et H. J. Korsch, *Wannier-Stark resonances in optical and semiconductor superlattices*, Phys. Rep. **366** (2002), no. 3, 103–182.
- [37] P. Goetsch et R. Graham, *Decoherence by spontaneous emission in atomic-momentum transfer experiments*, Phys. Rev. A **54** (1996), no. 6, 5345–5348.
- [38] E. M. Graefe, H. J. Korsch, et D. Witthaut, *Mean-field dynamics of a Bose-Einstein condensate in a time-dependent triple-well trap : Nonlinear eigenstates, Landau-Zener models, and stimulated Raman adiabatic passage*, Phys. Rev. A **73** (2006), no. 1, 013617.
- [39] R. Graham et S. Miyazaki, *Dynamical localization of atomic de Broglie waves : The influence of spontaneous emission*, Phys. Rev. A **53** (1996), no. 4, 2683–2693.
- [40] M. Greiner, O. Mandel, T.W. Hänsch, et I. Bloch, *Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate*, Nature (London) **419** (2002), no. 6102, 51–54.
- [41] I. Guarneri et L. Rebuzzini, *Quantum accelerator modes near higher-order resonances*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), no. 23, 234103.
- [42] M. Gustavsson, E. Haller, M. J. Mark, J. G. Danzl, G. Rojas-Kopeinig, et H.-C. Nagerl, *Control of interaction-induced dephasing of Bloch oscillations*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), no. 8, 080404.
- [43] T. W. Hänsch et A. L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Opt. Com. **13** (1975), 68–69.
- [44] R. Hegger, H. Kantz, et T. Schreiber, *Practical implementation of nonlinear time series methods : The TISEAN package*, Chaos **9** (1999), no. 2, 413–435.
- [45] W. K. Hensinger, H. Haeffner, A. Browaeys, N. R. Heckenberg, K. Helmerson, C. McKenzie, G. J. Milburn, W. D. Phillips, S. L. Rolston, H. Rubinsztein-Dunlop, et B. Upcroft, *Dynamical tunneling of ultracold atoms*, Nature (London) **412** (2001), 52–55.
- [46] H. F. Hess, *Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen*, Phys. Rev. B **34** (1986), no. 5, 3476–3479.

- [47] M. Holthaus, *Bloch oscillations and Zener breakdown in an optical lattice*, J. Opt. B **2** (2000), 589–604.
- [48] F. M. Izrailev, *Simple models of quantum chaos : Spectrum and eigenfunctions*, Phys. Rep. **196** (1990), no. 5–6, 299–392.
- [49] F. M. Izrailev et D. L. Shepelyansky, *Quantum resonance for a rotator in a non-linear periodic field*, Theor. Math. Phys. **43** (1980), no. 3, 553–561.
- [50] J. D. Jackson, *Electrodynamique classique*, 2 éd., Dunod, 2001.
- [51] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, et P. Zoller, *Cold bosonic atoms in optical lattices*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), no. 15, 3108–3111.
- [52] R. V. Jensen, S. M. Susskind, et M. M. Sanders, *Chaotic ionization of highly excited hydrogen atoms : Comparison of classical and quantum theory with experiment*, Phys. Rep. **201** (1991), no. 1, 1–56.
- [53] B. D. Josephson, *Possible new effects in superconductive tunnelling*, Phys. Lett. **1** (1962), no. 7, 251–253.
- [54] J. P. Kanem, S. Maneshi, M. Partlow, M. Spanner, et A. M. Steinberg, *Observation of high-order quantum resonances in the kicked rotor*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007), no. 8, 083004.
- [55] C. Kittel, *Physique de l'état solide*, 7 éd., Dunod, 1998.
- [56] Y. S. Kivshar et B. Luther-Davies, *Dark optical solitons : physics and applications*, Phys. Rep. **298** (1998), no. 1–2, 81–197.
- [57] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, et M. G. Raizen, *Observation of noise and dissipation effects on dynamical localization*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), no. 6, 1203–1206.
- [58] M. Lepers, V. Zehnlé, et J. C. Garreau, *Tracking quasi-classical chaos in ultra-cold boson gases*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008), no. 14, 144103.
- [59] M. Lepers, V. Zehnlé, et J. C. Garreau, *Kicked-rotor quantum resonances in position space*, Phys. Rev. A **77** (2008), no. 4, 043628.
- [60] A. J. Lichtenberg et M. A. Leiberman, *Regular and stochastic motion*, Springer-Verlag, 1993.
- [61] H. Lignier, *Étude de la localisation dynamique avec des atomes refroidis par laser*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2005.
- [62] B. Liu, L. B. Fu, S. P. Yang, et J. Liu, *Josephson oscillation and transition to self-trapping for Bose-Einstein condensates in a triple-well trap*, Phys. Rev. A **75** (2007), no. 3, 033601.
- [63] R. Livi et A. Vulpiani, *L'héritage de Kolmogorov en physique*, Belin, 2003.
- [64] F. London, *The lambda-phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy*, Nature **141** (1938), no. 3571, 643–644.
- [65] E. Lundh et M. Wallin, *Ratchet effect for cold atoms in an optical lattice*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), no. 11, 110603.

- 
- [66] Z. Y. Ma, M. B. d'Arcy, et S. A. Gardiner, *Gravity-sensitive quantum dynamics in cold atoms*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), no. 16, 164101.
- [67] H. J. Metcalf et P. Van der Straten, *Laser cooling and trapping*, Springer Verlag, 1999.
- [68] K. Moler, D. S. Weiss, M. Kasevich, et S. Chu, *Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions*, Phys. Rev. A **45** (1992), no. 1, 342–348.
- [69] K. Molmer, Y. Castin, et J. Dalibard, *Monte Carlo wave-function method in quantum optics*, J. Opt. Soc. Am. B **10** (1993), no. 3, 524–538.
- [70] T. S. Monteiro, A. Rançon, et J. Ruostekoski, *Nonlinear resonances in  $\delta$ -kicked Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **102** (2009), no. 1, 014102.
- [71] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, et M. G. Raizen, *Atom optics realization of the quantum  $\delta$ -kicked rotator*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), no. 25, 4598–4601.
- [72] O. Morsch et M. Oberthaler, *Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices*, Rev. Mod. Phys. **78** (2006), no. 1, 179.
- [73] S. Mossmann et C. Jung, *Semiclassical approach to Bose-Einstein condensates in a triple well potential*, Phys. Rev. A **74** (2006), no. 3, 033601.
- [74] G. Nenciu, *Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields : rigorous justification of the effective hamiltonians*, Rev. Mod. Phys. **63** (1991), no. 1, 91.
- [75] M. K. Oberthaler, R. M. Godun, M. B. d'Arcy, G. S. Summy, et K. Burnett, *Observation of quantum accelerated modes*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), no. 22, 4447–4451.
- [76] W. H. Oskay, D. A. Steck, V. Milner, B. G. Klappauf, et M. G. Raizen, *Ballistic peaks at quantum resonance*, Opt. Comm. **179** (2000), no. 1–6, 137–148.
- [77] E. A. Ostrovskaya, Y. S. Kivshar, M. Lisak, B. Hall, F. Cattani, et D. Anderson, *Coupled-mode theory for Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **61** (2000), no. 3, 031601.
- [78] B. Y. Ou, X. G. Zhao, J. Liu, et S. G. Chen, *Nonlinear tunneling and chaos between two Bose-Einstein condensates trapped in time-dependent potential*, Phys. Lett. A **291** (2001), no. 1, 17–21.
- [79] C. Pethick et H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, Cambridge University Press, 2002.
- [80] A. B. Rechester et R. B. White, *Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov-Taylor model*, Phys. Rev. Lett. **44** (1980), no. 24, 1586–1589.
- [81] J. Reslen, C. E. Creffield, et T. S. Monteiro, *Dynamical instability in kicked Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **77** (2008), no. 4, 043621.
- [82] C. Ryu, M. F. Andersen, A. Vaziri, M. B. d'Arcy, J. M. Grossman, K. Helmerson, et W. D. Phillips, *High-order quantum resonances observed in a periodically kicked Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **96** (2006), no. 16, 160403.

- [83] M. Sadgrove, A. Hilliard, T. Mullins, S. Parkins, et R. Leonhardt, *Observation of robust quantum resonance peaks in an atom optics kicked rotor with amplitude noise*, Phys. Rev. E **70** (2004), no. 3, 036217.
- [84] M. Sadgrove, M. Horikoshi, T. Sekimura, et K. Nakagawa<sup>1</sup>, *Rectified momentum transport for a kicked Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007), no. 4, 043002.
- [85] M. Sano et Y. Sawada, *Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), no. 10, 1082–1085.
- [86] M. Saunders, P. L. Halkyard, K. J. Challis, et S. A. Gardiner, *Manifestation of quantum resonances and antiresonances in a finite-temperature dilute atomic gas*, Phys. Rev. A **76** (2007), no. 4, 043415.
- [87] S. Schlunk, M. B. d’Arcy, S. A. Gardiner, et G. S. Summy, *Experimental observation of high-order quantum accelerator modes*, Phys. Rev. Lett. **90** (2003), no. 12, 124102.
- [88] D. L. Shepelyansky, *Localization of diffusive excitation in multi-level systems*, Physica D **28** (1987), 103–114.
- [89] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, et S. R. Shenoy, *Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), no. 25, 4950–4953.
- [90] V. V. Sokolov, O. V. Zhirov, D. Alonso, et G. Casati, *Quantum resonances and regularity islands in quantum maps*, Phys. Rev. E **61** (2000), no. 5, 5057–5072.
- [91] D. A. Steck, V. Milner, W. H. Oskay, et M. G. Raizen, *Quantitative study of amplitude noise effects on dynamical localization*, Phys. Rev. E **62** (2000), no. 3, 3461–3475.
- [92] D. A. Steck, W. H. Oskay, et M. G. Raizen, *Observation of chaos-assisted tunneling between islands of stability*, Science **293** (2001), 274–278.
- [93] P. Szriftgiser, H. Lignier, J. Ringot, J. C. Garreau, et D. Delande, *Experimental study of quantum chaos with cold atoms*, Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul. **8** (2003), 301–313.
- [94] Q. Thommen, *Dynamique quantique dans des potentiels lumineux*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2004.
- [95] Q. Thommen, J. C. Garreau, et V. Zehnlé, *Classical chaos with Bose-Einstein condensates in tilted optical lattices*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), no. 21, 210405.
- [96] Q. Thommen, J. C. Garreau, et V. Zehnlé, *Atomic motion in tilted optical lattices : an analytical approach*, J. Opt. B **6** (2004), no. 7, 301–308.
- [97] F. Toscano, R. L. de Matos Filho, et L. Davidovich, *Decoherence and the quantum-classical limit in the presence of chaos*, Phys. Rev. A **71** (2005), no. 1, 010101.
- [98] F. Trimborn, D. Witthaut, et H. J. Korsch, *Number-conserving phase-space dynamics of the Bose-Hubbard dimer beyond the mean-field approximation*, <http://arxiv.org/abs/0802.1142> (2008).

- 
- [99] K. Vant, G. Ball, et N. Christensen, *Momentum distributions for the quantum  $\delta$ -kicked rotor with decoherence*, Phys. Rev. E **61** (2000), no. 5, 5994–5996.
- [100] P. Voisin, J. Bleuse, C. Bouche, S. Gaillard, C. Alibert, et A. Regreny, *Observation of the Wannier-Stark quantization in a semiconductor superlattice*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), no. 14, 1639–1642.
- [101] G. F. Wang, D. F. Ye, L. B. Fu, X. Z. Chen, et J. Liu, *Landau-Zener tunneling in a nonlinear three-level system*, Phys. Rev. A **74** (2006), no. 3, 033414.
- [102] G. H. Wannier, *Wave functions and effective hamiltonian for Bloch electrons in an electric field*, Phys. Rev. **117** (1960), no. 2, 432–439.
- [103] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.C. Nagerl, et R. Grimm, *Bose-Einstein condensation of cesium*, Science **299** (2003), no. 5604, 232–235.
- [104] C. Weiss et N. Teichmann, *Differences between mean-field dynamics and  $n$ -particle quantum dynamics as a signature of entanglement*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), no. 14, 140408.
- [105] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu, et M. G. Raizen, *Observation of atomic Wannier-Stark ladders in an accelerating optical potential*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), no. 24, 4512–4515.
- [106] S. Wimberger, I. Guarneri, et S. Fishman, *Quantum resonances and decoherence for delta-kicked atoms*, Nonlinearity **16** (2003), 1381–1420.
- [107] S. Wimberger, R. Mannella, O. Morsch, et E. Arimondo, *Resonant nonlinear quantum transport for a periodically kicked Bose condensate*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), no. 13, 130404.
- [108] I. Yavin, M. Weel, A. Andreyuk, et A. Kumarakrishnan, *A calculation of the time-of-flight distribution of trapped atoms*, Am. J. Phys. **70** (2002), no. 2, 149–152.
- [109] C. Zener, *A theory of electrical breakdown of solid dielectrics*, Proc. R. Soc. (London) A **145** (1934), 523.
- [110] C. Zhang, J. Liu, M. G. Raizen, et Q. Niu, *Transition to instability in a kicked Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), no. 5, 054101.







## Résumé

Cette thèse présente des résultats théoriques sur le chaos dans les systèmes quantiques. Dans sa première partie, nous étudions la dynamique du rotateur pulsé. Ce système, qui est la référence pour l'étude du chaos quantique, présente un gel de la diffusion en impulsion, appelé localisation dynamique. Celle-ci est un phénomène purement quantique basé sur des interférences destructives.

Comme tout phénomène d'interférence, la localisation dynamique est affectée par l'émission spontanée. Dans cette thèse, nous proposons une méthode basée sur la spectroscopie Raman, pour limiter l'impact de l'émission spontanée. Nous menons une étude analytique complète de la dynamique, en très bon accord avec nos simulations numériques.

Du fait de sa périodicité temporelle, le rotateur pulsé présente aussi des résonances quantiques, qui sont l'analogie de l'effet Talbot optique. En décrivant ces résonances dans l'espace des positions, nous en donnons une image simple et intuitive, basée sur des notions classiques comme la force.

Les condensats de Bose-Einstein ont ouvert la voie à l'obtention de phénomènes quantiques nouveaux. La non-linéarité de leur équation d'évolution permet notamment l'observation du chaos quasi-classique. Nous proposons ici une méthode pour le détecter, basée sur la mesure de la position moyenne du condensat. Cette méthode, dont la validité est confirmée par les exposants de Lyapunov du système, permet de distinguer sans équivoque les trajectoires chaotiques et régulières.

**Mots-clés :** atomes – refroidissement, interaction photon-atome, condensation de Bose-Einstein, chaos déterministe, systèmes hamiltoniens, équations d'évolution non-linéaires, chaos quantique, spectroscopie Raman, dynamique – localisation.

## Abstract

This thesis contains theoretical results about chaos in quantum systems. In its first part, we study the dynamics of the quantum kicked rotor. This system, which is paradigmatic of quantum chaos, exhibits dynamical localization, a decay of diffusion in momentum space. The latter is a purely quantum phenomenon, as it is based on destructive interferences.

As all interference effects, dynamical localization is affected by spontaneous emission. In this manuscript, we propose a method to decrease the effect of spontaneous emission, by using Raman spectroscopy. We perform a full analytical study in very good agreement with our numerical simulations.

As a consequence of its temporal periodicity, the kicked rotor also exhibits quantum resonances, the analogy of the optical Talbot effect. By describing them in position space, we provide a simple and intuitive image of the resonances, based on classical notions like force.

Bose-Einstein condensation has enabled the study of unprecedented quantum phenomena. In particular, the nonlinearity of their evolution equation has made possible the observation of quasi-classical chaos. Here, we propose a method to detect chaos, by measuring the averaged position of the condensate. This method enables us to clearly distinguish chaotic and regular trajectories. Its validity is confirmed by the calculation of the system Lyapunov exponents.

**Keywords:** atom cooling, photon-atom interaction, Bose-Einstein condensation, Hamiltonian chaos, nonlinear dynamical equations, quantum chaos, dynamical localization, Raman spectroscopy.