МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

САЙГИН Михаил Юрьевич

Многомодовые перепутанные состояния в связанных оптических параметрических взаимодействиях и их применения в телепортации

Специальность 01.04.21 – лазерная физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
профессор
М. И. Колобов

Москва – 2011

RESUME :

La thèse est consacrée au développement de la théorie quantique de l'intrication et de la statistique non classique des champs optiques multimodaux dans les interactions paramétriques. Nous étudions également des applications de ce type de champs dans les schémas de l'information quantique.

Nous considérons deux types d'interactions paramétriques, appelées concurrents et consécutifs, entre cinq modes du champ électromagnétique avec des fréquences différentes. Le premier type d'interaction est le processus de conversion de fréquence connu comme « parametric down-conversion » accompagné par « parametric up-conversion » : $\omega_p = \omega_1 + \omega_2,\ 2\omega_p = \omega_2 + \omega_3,\ \omega_p + \omega_1 = \omega_3.$ Nous démontrons que ces deux processus concurrent produisent une intrication de trois modes du champ électromagnétique avec les trois fréquences différentes. Nous trouvons les conditions optimales pour la création de ce type d'intrication.

Le deuxième processus considéré dans la thèse est celle du « parametric down-conversion » accompagné par deux « parametric up-conversion » : $\omega_p = \omega_1 + \omega_2,\ \ \omega_p + \omega_1 = \omega_3,\ \omega_p + \omega_2 = \omega_4.$ Nous avons trouvé l'intrication entres les deux modes de basses fréquences ω_1 et ω_2 et les deux modes de hautes fréquences ω_3 et ω_4. En appliquant le critère basé sur les valeurs symplectiques nous avons quantifié ce type d'intrication.

Nous avons étudié des propriétés de champs avec plusieurs modes spatiaux dans les deux configurations de l'imagerie quantiques : le champ proche et le champ lointain. Dans les deux cas nous avons calculé le rapport signal à bruits et étudié son comportement en fonction des paramètres physiques.

Nous avons également proposé et étudié un schéma pour téléportation des images optiques classiques et non classiques (intriquées). Nous avons évalué la fidélité de téléportation en fonction des paramètres de notre système tels que la taille de pixel dans la caméra de détection et la longueur de cohérence de l'émission paramétrique.

ABSTRACT :

The main goal of the thesis is to elaborate the quantum properties, such as entanglement and quantum statistics, of multi-frequency fields, both spatial single-mode and multimode, generated in coupled parametric wave interactions and consider some applications of these fields in quantum information schemes.

In the thesis two coupled (also named as concurrent or consecutive) parametric interactions involving modes of five frequencies are considered. The first interactions are two parametric down-conversion processes accompanied by the up-conversion process: $\omega_p = \omega_1 + \omega_2,\ 2\omega_p = \omega_2 + \omega_3,\ \omega_p + \omega_1 = \omega_3$. It has been shown that the resulting three-frequency optical field is in a three mode entangled state. We formulate the optimal conditions for creation of such type of entanglement.

The other coupled interactions comprise one parametric down-conversion process with two up-conversion ones: $\omega_p = \omega_1 + \omega_2,\ \omega_p + \omega_1 = \omega_3,\ \omega_p + \omega_2 = \omega_4$. The entanglement analysis, carried out for these interactions, suggests that the modes with frequencies ω_1 and ω_2 (low-frequency modes) along with modes with frequencies ω_3 and ω_4 (high-frequency modes) exhibit two-mode entanglement. Moreover, the symplectic eigenvalue criterion has shown the presence of block entanglement between low-frequency and high-frequency modes.

The properties of the spatially multimode fields, generated in the second type of interaction, were investigated for two configurations of quantum imaging schemes: the near-field and the far-field. For both configurations the signal-to-noise ratio and entanglement properties of the generated images have been studied in detail.

The schemes for teleportation of entangled spatial single-mode states and entangled images using auxiliary quantum states obtained in the second interactions are proposed and thoroughly analyzed. The teleportation quality in dependence on the amount of entanglement in auxiliary fields and the states to be teleported has been studied. For the images teleportation scheme the influence of the detectors pixel size on the quality of teleportation has been analyzed.

Содержание

Введение

Актуальность темы

Нелинейно-оптические взаимодействия, такие как трех- и четырехчастотные параметрические процессы и процессы самовоздействия, играют важную роль в квантовой оптике. Оптические параметрические взаимодействия служат основными источниками сжатого света и световых полей в перепутанном состоянии. К настоящему времени в основе источников перепутанных квантовых состояний лежат трехчастотное параметрическое взаимодействие, в котором фотоны интенсивной волны накачки распадаются на пары фотонов, проявляющих корреляции, которые нельзя объяснить в рамках классической теории.

Перепутанные квантовые состояния света играют ключевую роль во многих областях квантовой информации: квантовой коммуникации, квантовых вычислениях и квантовой обработки данных. Свойство квантовой перепутанности находит применение также в экспериментах по обоснованию квантовой механики. В связи с этим разработка и исследование новых источников перепутанных квантовых состояний света является в настоящее время важной фундаментальной и прикладной проблемой.

В квантовой оптике существует два типа квантовых систем: системы с дискретными переменными, в которых имеют дело с одиночными фотонами, и системы с непрерывными переменными (квадратурные компоненты поля), в которых наблюдаемые обладают непрерывным спектром. Оба типа квантовых систем обладают как общими свойствами, так и присущими только конкретному типу системы особенностями. Например, в схемах квантовой информации, в основе которых лежат непрерывные переменные, квантовые состояния сравнительно легко можно получать и преобразовывать. Это обстоятельство является причиной того, что квантовая информация с непрерывными переменными в последнее время вызывает повышенный интерес исследователей.

К настоящему времени можно выделить две группы методов получения перепутанных многомодовых состояний непрерывных переменных. Первую группу составляют методы получения перепутанных состояний с помощью генерации сжатых световых полей с последующим их преобразованием на светоделителях; при этом свет в сжатом состоянии формируется в вырожденном трехчастотном оптическом параметрическом процессе. Вторая группа способов генерации перепутанных многомодовых состояний света использует так называемые связанные параметрические взаимодействия, протекающие в одном нелинейно-оптическом кристалле, расположенном вне или внутри резонатора. Для эффективной реализации одновременно нескольких параметрических процессов в одном нелинейном кристалле необходимо создание условий фазового синхронизма для этих процессов. В однородных нелинейно-оптических кристаллах это можно осуществить только в некоторых частных случаях. В связи с этим для реализации нескольких нелинейно-оптических взаимодействий интерес вызывают неоднородные нелинейные кристаллы, в которых фазовые расстройки можно компенсировать векторами обратной нелинейной решетки. В многоволновых связанных параметрических взаимодействиях возможность одновременной реализации процессов смешения оптических частот, наряду с параметрическими процессами преобразования частоты вниз, позволяет переносить квантовые свойства световых полей с одних частот на другие частоты. Методы второй группы позволяют создать компактные источники многочастотных перепутанных состояний.

В последнее десятилетие интенсивные исследования ведутся в новой области квантовой оптики, основанной на использовании пространственных квантовых свойств света и получившей название квантовое изображение. Предметом исследований квантового изображения является изучение преобразования оптического изображения в различных нелинейно-оптических схемах с использованием квантовых особенностей световых полей. Использование оптических изображений в схемах квантовой информации позволяет не только увеличить объемы квантовых данных, обрабатываемых параллельно, но также предложить новые методы обработки изображений. Хотя в некоторых схемах квантового изображения применения перепутанности не является необходимым, использование в них перепутанных состояний улучшает их шумовые характеристики.

Цель диссертационной работы

Основной целью диссертационной работы является *исследование квантовых свойств многочастотных полей, одномодовых и многомодовых в пространстве, формируемых в связанных параметрических взаимодействиях, и их применение в квантовой телепортации.*

В работе решаются следующие задачи.

1. Исследование квантовых свойств двух пятичастотных связанных оптических параметрических взаимодействий:

   1) взаимодействий, состоящих из двух параметрических процессов преобразования частоты вниз и одного процесса преобразования частоты вверх, протекающих в полей двух волн накачки, и

   2) взаимодействий, протекающих в поле одной волны накачки и состоящих из одного параметрического процесса преобразования частоты вниз и двух процессов преобразования частоты вверх.

2. Анализ возможности применения четырехчастотных перепутанных состояний, генерируемых в связанных параметрических взаимодействиях, в схеме телепортации двухчастотных пространственно-одномодовых перепутанных состояний непрерывных переменных.

3. Изучение формирования перепутанных двухчастотных оптических изображений и анализ их квантовых свойств в процессе параметрического усиления при низкочастотной накачке.

4. Исследование возможности применения перепутанных пространственно-многомодовых полей, формируемых в пятичастотных связанных параметрических взаимодействиях, для телепортации перепутанных оптических изображений и анализ качества телепортации.

Научная новизна

1. Детально исследованы квантовые корреляции фотонов и квадратурных компонент двух пятичастотных связанных параметрических взаимодействий. Обнаружено влияние процессов смешения частот на двухчастотную перепутанность.

2. Впервые показано, что в связанном параметрическом процессе преобразования частоты вниз и двух процессах смешения частот квантовая перепутанность, формируемая на частотах ниже частоты накачки, преобразуется на частоты выше частоты накачки.

3. Предложена и исследована схема телепортации перепутанных пространственно-одномодовых двухчастотных состояний. Показано, что в этой схеме перепутанные состояния можно телепортировать с большой точностью.

4. Исследованы квантовые характеристики усиленных и преобразованных по частоте изображений в связанных параметрических взаимодействиях для конфигураций с близко и далеко расположенным объектом на несущих частотах ниже и выше частоты накачки.

5. Впервые исследована телепортация перепутанных оптических изображений с использованием пространственно-многомодовых четырехчастотных полей, генерируемых в связанном параметрическом взаимодействии. Проанализирована точность телепортации оптических изображений в зависимости от соотношений ширин пространственных спектров телепортируемых изображений и вспомогательных четырехчастотных полей.

6. Для схемы телепортации перепутанных двухчастотных оптических изображений детально исследовано влияние размеров пикселей регистрирующих устройств на качество телепортации.

Защищаемые положения

1. В связанном пятичастотном оптическом параметрическом процессе, состоящем из двух процессов преобразования частоты вниз и одного процесса преобразования частоты вверх, формируются трехчастотные перепутанные состояния. Наличие процесса смешения частот уменьшает шумовое влияние одного процесса преобразования частоты вниз на другой. При равных коэффициентах нелинейной связи, отвечающих за процесс

смешения частот и процесс, шумовое воздействие которого необходимо уменьшить, достигается максимальное уменьшение шума.

2. В связанном параметрическом процессе, протекающем в поле одной волны накачки, состоящем из одного процесса преобразования частоты вниз и двух процессов преобразования частоты вверх формируются два двухмодовых перепутанных состояния: на частотах ниже и выше частоты накачки, а пары мод образуют перепутанные блоки.

3. Отношение сигнал/шум усиливаемых и преобразуемых по частоте изображений в связанных одном преобразовании частоты вниз и двух преобразованиях частоты вверх, протекающих в поле монохроматической плоской волны накачки, в конфигурациях с близким и далеким расположением объекта стремится с ростом длины взаимодействия к предельному значению $\frac{1}{4}$.

4. Повышение перепутанности передаваемых состояний как одномодовых, так и многомодовых в пространстве, ведет к снижению, а увеличение перепутанности вспомогательных состояний, генерируемых в связанных одном преобразовании частоты вниз и двух преобразованиях частоты вверх, приводит к увеличению качества телепортации. Согласование ширин пространственных спектров телепортируемых изображений и вспомогательных пространственно-многомодовых полей в схеме телепортации перепутанных изображений повышает качество телепортации.

5. Увеличение размера пикселей детекторов в схеме телепортации перепутанных изображений с использованием вспомогательных полей, генерируемых в связанных одном преобразовании частоты вниз и двух преобразованиях частоты вверх, уменьшает вклад высоких пространственных частот квантового шума в качество телепортации. При генерации телепортируемых изображений и вспомогательных полей в монохроматических плоских волнах накачек точность телепортации перепутанных изображений стремится к предельному значению быстрее, чем точность телепортации неперепутанных изображений.

Практическая значимость

1. Применение связанных оптических параметрических взаимодействий позволяет решить задачу миниатюризации источников многомодовых перепутанных квантовых состояний.

2. В связанном процессе, состоящем из одного параметрического процесса преобразования частоты вниз и двух процессов преобразования частоты вверх, формируются двухчастотные перепутанные состояния на частотах ниже и выше частоты накачки. Это обстоятельство можно использовать для генерации двухчастотных перепутанных состояний в ультрафиолетовом диапазоне, когда с помощью традиционного параметрического преобразования частоты вниз этого осуществить не удается из-за попадания частоты накачки в область поглощения нелинейного кристалла.

3. Перепутанность между блоками мод, формируемая в исследованном связанном параметрическом процессе, может представлять интерес для передачи информации в квантовой сети.

4. Двухчастотная перепутанность, как одномодовая, так и многомодовая в пространстве, формируемая в связанных параметрических процессах, может быть применена в схемах передачи двухчастотных перепутанных состояний и оптических изображений.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из Введения, пяти глав, Заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем работы: 163 страниц, включая 85 рисунков. Библиография содержит 133 наименований, в том числе 8 авторских публикаций.

Содержание работы

Во Введении кратко обоснована актуальность выбранной темы, определены цели диссертационной работы, изложены основные защищаемые положения и приведены ее структура и краткое содержание.

В Главе 1 дан обзор литературы, касающейся изучаемых в диссертационной работе вопросов. Рассмотрены широко используемые методы создания перепутанных световых состояний с непрерывными переменными, включая как методы, основанные на использовании сжатых состояний, так и методы, в основе которых лежат связанные параметрические нелинейно-оптические взаимодействия. Приведен обзор работ по получению и применению перепутанных состояний.

Глава 2 посвящена исследованию двух связанных пятичастотных оптических параметрических взаимодействий. Одно взаимодействие состоит из двух параметрических процессов преобразования частоты вниз и одного процесса смешения частот, протекающих в поле двух волн накачек с кратными частотами. Другое связанное взаимодействие включает в себя один процесс преобразования частоты вниз и два процесса смешения частот, протекающих в поле одной и той же волны накачки. Детально исследованы их квантовые свойства: корреляции чисел фотонов, корреляции квадратурных компонент. Установлено, что в рассмотренных процессах формируются трех- и четырехчастотные перепутанные состояния. Анализ перепутанности состояний, получаемых в связанном взаимодействии, протекающем в поле двух волн накачек, показал, что процесс генерации суммарной частоты может полностью подавить действие одного из параметрических процессов преобразования частоты вниз. Показано, что в связанном процессе, протекающем в поле одной волны накачки, формируются две пары двухчастотных перепутанных состояний: на частотах ниже частоты накачки и на частотах выше частоты накачки, которые проявляют также блочное перепутывание между собой.

В Главе 3 рассматривается схема телепортации двухчастотных перепутанных состояний в основе которой лежат перепутанные состояния, генерируемые в связанном процессе, протекающем в поле одной волны накачки. Детально исследуется качество телепортации: точность телепортации и сохранение квантовых корреляций. Показано, что в этой схеме можно телепортировать перепутанные двухчастотные состояния с малым добавлением шума.

Глава 4 посвящена детальному исследованию пространственно-многомодовых полей, генерируемых в связанном нелинейно-оптическом взаимодействии, состоящем из одного процесса преобразования частоты вниз и двух процессов смешения частот. Анализируются две схемы формирования квантовых изображений: схема с близко расположенным объектом и схема с далеко расположенным объектом. Изучено пространственное перепутывание изображений, формируемых в этих схемах. Показано, что на выходе обеих схем формируются перепутанные оптические изображения.

В Главе 5 рассматривается голографическая телепортация перепутанных оптических изображений, в которой в качестве вспомогательных перепутанных состояний используются пространственно-многомодовые поля, генерируемые в связанном процессе, исследованном в Главе 4. Установлено, что успешно телепортировать все моды перепутанных изображений удается лишь при согласовании ширин пространственных спектров телепортируемых изображений и вспомогательных перепутанных пространственно-многомодовых полей. Детально исследовано влияние размеров пикселей регистрирующих устройств на точность телепортации.

В Заключении перечислены основные результаты работы.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы опубликованы в журналах:
Acta Physica Hungarica B, 2006; Современные проблемы статистической физики, 2006; Journal of Russian Laser Research, 2007, 2008; Physica Scripta, 2009; ЖЭТФ, 2010; Proceedings of SPIE, 2010; Оптика и спектроскопия, 2011;
и докладывались на следующих конференциях:

- Фундаментальные проблемы оптики-2006, 2008 (Санкт-Петербург, Россия, 2006, 2008).
- 13th, 15th, 16th, 17th Central European Workshop on Quantum Optics (Vienna, Austria, 2006; Belgrade, Serbia, 2008; Turku, Finland, 2009; St.-Andrews, Scotland, UK, 2010).
- X Международные Чтения по Квантовой Оптике (Самара, Россия, 2007).
- 5-й и 6-й семинары памяти Д.Н. Клышко (Москва, Россия, 2007, 2009).

- The International Conference on Coherent and Nonliner Optics-2007 (Минск, Белоруссия, 2007).
- 10th, 11th International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations (Bradford, UK, 2007; Olomouc, Czech Republic, 2009).
- Всероссийская научная школа-семинар «Волны-2008» (Московская область, Красновидово, Россия, 2008).
- 12th Intertational Conference on Quantum Optics and Quantum Information (Vilnius, Lithuania, 2008).
- Устные выпуски журнала «Лазерные исследования в России» (Москва, Россия, 2009, 2010).
- Российско-Франко-Германский симпозиум по лазерной физике-2009 (Нижний Новгород, Россия, 2009).
- The International Conference on Coherent and Nonliner Optics-2010 (Казань, Россия, 2010).
- Заседание совета РАН по спектроскопии атомов и молекул (Москва, Россия, 2010).
- Межвузовский семинар по квантовой оптике (Санкт-Петербург, Россия, 2011).

Глава 1

Методы получения перепутанных состояний света и их применения; обзор литературы

В последние два десятилетия созданы источники неклассического света, представляющие интерес для ряда областей физики. Свойства такого света адекватно описываются только квантовой теорией. К настоящему времени получены свет с уменьшенными флуктуациями числа фотонов (свет с суб-пуассоновской статистикой фотонов), излучение с подавленными флуктуациями одной из квадратурных компонент (квадратурно-сжатый свет), свет с подавленными квантовыми флуктуациями в некоторых стоксовых параметрах (поляризационно-сжатый свет). Особенно большое внимание исследователей в последнее время привлекает другое свойство неклассического света — перепутанность состояний. Перепутанные квантовые состояния являются основой для многих схем квантовой информации, таких как квантовая телепортация, сверхплотное кодирование, квантовоя криптография. Помимо этого, перепутанные состояния находят применение в экспериментах по обоснованию его квантовой природы. Интерес к перепутанным состояниям в последние годы стимулируется также прецизионными оптико-физическими экспериментами.

1.1. Перепутанность световых полей

Определение перепутанности дается по-разному для чистых и смешанных квантовых состояний. Для чистого состояния составной квантовой системы $Q = A + B + \ldots$ перепутанным называют такое состояние, для которого полный вектор состояния $|\psi_Q\rangle$ нельзя представить в виде произведения парциальных векторов состояния:

$$|\psi_Q\rangle \neq |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle \ldots . \quad (1.1)$$

Если вектор состояния составной системы представим в виде произведения векторов состояний парциальных подсистем, то между этими подсистемами нет никаких корреляций, поскольку усреднение любых операторов по данному состоянию производится независимо для каждой из подсистем.

Для смешанных состояний, описываемых матрицами плотности, определение перепутанности формулируется иначе. Для смешанного состояния составной квантовой системы $Q = A + B + \ldots$ перепутанным называют такое состояние, для которого полную матрицу плотности $\hat{\rho}_Q$ нельзя представить в виде:

$$\hat{\rho}_Q \neq \sum_i p_i \hat{\rho}_A^{(i)} \otimes \hat{\rho}_B^{(i)} \otimes \ldots, \tag{1.2}$$

где $\hat{\rho}_l^{(i)}$ — матрица плотности l-го состояния ($l = A, B, \ldots$), p_i — термодинамические вероятности i-го случая ($\sum_i p_i = 1$). Следует заметить, что в общем случае для смешанных состояний могут иметь место корреляции, обусловленные лишь смешанностью состояния, так называемые классические корреляции.

Состояния квантовой системы, которые можно представить в виде (1.1) или (1.2), называют также сепарабельными. Иначе говоря, несепарабельные состояния являются перепутанными.

Перепутанные состояния принято классифицировать по числу подсистем в рассматриваемой квантовой системе: перепутанные состояния, состоящие из N парциальных подсистем, называют N-частичными (компонентными) перепутанными состояниями, причем состояния с $N > 2$ получили название многочастичных перепутанных состояний. Следует заметить также, что парциальные подсистемы могут сами состоять из нескольких подсистем: $A = A_1 + A_2 + \ldots$, $B = B_1 + B_2 + \ldots$. В таком случае принято говорить о перепутывании между блоками, т.е. перепутывании между составными подсистемами. Увеличение числа частей, составляющих квантовую систему, ведет к росту числа возможных типов перепутанности, которыми может обладать данная квантовая система. Так, например, в случае уже трех подсистем, состояние всей квантовой системы может принадлежать одному из пяти классов состояний [1]: от класса полностью сепарабельных состояний до класса истинно перепутанных состояний.

Работы в области многочастичного перепутывания свидетельствуют, что перепутанность в целом всей квантовой многочастичной системы не обязательно влечет перепутанность между частями какой-то её посистемы. Такие состояния, в которых наблюдается только перепутанность самого высокого порядка называются истинными перепутанными состояниями. Одним из примеров таких состояний служит так называемое ГХЦ-состояние [2] (состояние Гринбергера-Хорна-Цайлингера):

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \tag{1.3}$$

которое обладает трехчастичными квантовыми корреляциями, но в то же время не проявляет двухчастичных корреляций, являясь, следовательно, истинным трехчастичным перепутанным состоянием. Здесь $|0\rangle$ и $|1\rangle$ — базисные состояния квантовой системы размерностью 2 (кубит).

В квантовой физике существуют различные виды перепутывания. Это многочастотное перепутывание — перепутанность между подсистемами с различными частотами, многомодовое перепутывание — перепутывание между различными модами, многокомпонентное перепутывание и другие. Следует отметить, что термины «многочастичное» и «многокомпонентное» являются наиболее общими, то есть применяются для систем независимо от того идет ли речь о перепутанности света либо о перепутанности состояний атомов. Термины «многомодовое» и «многочастотное» применяется, в основном, для световых перепутанных состояний.

1.2. Квантовая информация с непрерывными переменными

К настоящему времени работы в области квантовой информации ведутся в двух направлениях. В первом направлении исследователи имеют дело с системами обладающими дискретным спектром — квантовая информация с дискретными переменными [3–5]. В качестве систем с дискретными переменными можно привести кубиты (qubits) — квантовые системы с двумя стационарными состояниями:

$$|\psi_{qubit}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

где $|0\rangle, |1\rangle$ — стационарные состояния, α, β — коэффициенты, характеризующие кубит (в общем случае комплексные), и кудиты (qudits) — квантовые системы с d стационарными состояниями [6–8]:

$$|\psi_{qudit}\rangle = \sum_{k=1}^{d} c_k|k\rangle, \quad \sum_{k=1}^{d} |c_k|^2 = 1,$$

где $|k\rangle$ — стационарные состояния кудита ($k = 1, \ldots, d$), c_k — коэффициенты, описывающие кудит. Физические реализации систем с дискретным спектром — атомы и ионы в ловушках, поляризованные фотоны.

Объектом исследований второй области квантовой информации являются системы с непрерывным спектром — это так называемая квантовая информация с непрерывными переменными. Непрерывными переменными в этом случае служат квадратурные компоненты электромагнитного поля

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{y} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}, \tag{1.4}$$

которые являются аналогами координаты и импульса осциллятора квантованного поля [9–13]:

$$\begin{aligned} \hat{E}(t, \mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}(\hat{a}e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}) = \\ &= 2\sqrt{\frac{\pi\hbar\omega}{V}}(\hat{x}\cos(\omega t - \mathbf{kr}) + \hat{y}\sin(\omega t - \mathbf{kr})), \end{aligned} \tag{1.5}$$

здесь $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ — оператор уничтожения и рождения фотонов данной моды поля, ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор рассматриваемой моды поля, V — объем квантования поля, $\hbar = 1,05 \times 10^{-27}$эрг $\cdot$ с — постоянная Планка.

В настоящее время интенсивно исследуются протоколы квантовой информации, основанные на использовании непрерывных переменны [14–16]. Это связано с тем, что в квантовой оптике состояния с непрерывными переменными удается сравнительно легко получить в параметрических нелинейно-оптических взаимодействиях, которые хорошо исследованы к настоящему времени [17–19]. В частности, основным источником перепутанных состояний в протоколах, основанных на использовании непрерывных переменных, является параметрический процесс распада фотонов накачки. Квантовые состояния, генерируемые в таких взаимодействиях, обладают свойством гауссовости — распределение вероятностей на фазовой плоскости квадратурных компонент имеет гауссов вид, что является дополнительным преимуществом использования этих состояний, так как преобразования таких состояний линейно-оптическими элементами, например, светоделителями не меняет их характер статистики. Исследования свидетельствуют, что гауссовы состояния более устойчивы к воздействию на них шумов [20].

Как известно, гауссовы состояния допускают простое теоретическое описание с привлечением только средних и дисперсий рассматриваемых величин [21]. Для описания многокомпонентного гауссова состояния достаточно ковариационной матрицы квадратурных компонент:

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{2}(\langle \hat{\xi}_j \hat{\xi}_k + \hat{\xi}_k \hat{\xi}_j \rangle) - \langle \hat{\xi}_j \rangle \langle \hat{\xi}_k \rangle, \quad (j, k = 1 \ldots N), \tag{1.6}$$

и средних значений квадратур поля $\langle \hat{\xi}_k \rangle$, где

$$\hat{\xi}_j = \begin{cases} \hat{x}_m, \text{при } j = 2m - 1, \\ \hat{y}_m, \text{при } j = 2m. \end{cases} \quad (m = 1 \ldots N) \tag{1.7}$$

N — число мод в рассматриваемой системе. Данное обстоятельство является существенным преимуществом использования непрерывных переменных в протоколах обработки и передачи квантовой информации.

1.3. Двухмодовые перепутанные состояния

Как отмечалось выше, традиционным источником двухчастичной перепутанности в квантовой оптике как дискретных (см., например, [4, 6–8, 22]), так и непрерывных переменных (см. книги [14, 15] и обзор [16]) служит параметрический процесс преобразования частоты вниз, когда в нелинейном кристалле фотоны интенсивной волны накачки с частотой ω_p распадаются на пары фотонов с частотами ω_1 и ω_2, называемыми сигнальными и холостыми. Частоты взаимодействующих волн подчиняются закону сохранения энергии [11, 17]:

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2. \tag{1.8}$$

Несмотря на то, что рождающиеся в процессе (1.8) волны могут иметь широкий пространственно-временной спектр, при рассмотрении многих задач можно пользоваться приближением, в котором взаимодействующие волны являются плоскими и монохроматическими. В таком случае, гамильтониан взаимодействия для параметрического преобразования частоты вниз (1.8) имеет вид [11]:

$$\hat{H}_{int} = i\hbar\beta(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2), \tag{1.9}$$

где β — нелинейный коэффициент, $\hat{a}_j$, $\hat{a}_j^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения фотонов на частоте ω_j. Гамильтониан такого вида получается в предположении интенсивной плоской монохроматической волны накачки. Амплитуда волны накачки A_p и значение эффективной нелинейности d_{eff} содержатся в коэффициенте β [17]: $\beta \propto A_p d_{\text{eff}}$.

При малых длинах взаимодействия z эффективность нелинейного преобразования мала: $\beta z \ll 1$. В этом случае реализуется режим, в котором генерируются отдельные пары коррелированных сигнального и холостого фотонов. Состояние поля на выходе кристалла можно получить с помощью разложения оператора эволюции (унитарного оператора) в ряд Тейлора с удержанием только членов первого порядка:

$$|\psi_{out}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int}z}|0\rangle_1|0\rangle_2 \approx |0\rangle_1|0\rangle_2 + \beta z|1\rangle_1|1\rangle_2, \tag{1.10}$$

здесь $|0\rangle_1|0\rangle_2$ — вакуумное состояние поля на соответствующих модах, $|1\rangle_1|1\rangle_2$ — состояние пары коррелированных фотонов. Это состояние является перепутанным, причем в случае $\beta z = 1$ состояние на выходе кристалла оказывается максимально перепутанным:

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2). \tag{1.11}$$

При больших длинах взаимодействия генерируются моды с большим количеством фотонов — это так называемые яркие световые пучки. В этом случае для состояния на выходе кристалла имеем [16]:

$$|\psi_{out}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int}z}|0\rangle_1|0\rangle_2 = \sqrt{1-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m/2}|m\rangle_1|m\rangle_2, \tag{1.12}$$

где $\lambda = \mathrm{th}^2(\beta z)$. Выражение (1.12) свидетельствует о том, что в ярких пучках фотоны на сигнальной и холостой частотах коррелированны между собой: при детектировании числа фотонов в одной из мод, такое же число фотонов будет зарегистрировано в другой моде.

Корреляции между модами сигнальной и холостой волн в случае ярких пучков могут быть выявлены при рассмотрении дисперсий [16, 23]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{x}_1 + \hat{x}_1^{est}) &= \mathrm{Var}(\hat{x}_1 + g_x\hat{x}_2), \\ \mathrm{Var}(\hat{y}_1 - \hat{y}_1^{est}) &= \mathrm{Var}(\hat{y}_1 - g_y\hat{y}_2), \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\hat{x}_1^{est} = g_x\hat{x}_1$ и $\hat{y}_1^{est} = g_y\hat{y}_1$ — косвенные оценки квадратур $\hat{x}_1$ и $\hat{y}_1$, основанные на результатах измерений квадратур $\hat{x}_2$ и $\hat{y}_2$. Параметры g_x и g_y могут быть выбраны оптимальным образом, чтобы получить наименьшее значение дисперсий (1.13), то есть наиболее точную оценку квадратур моды с частотой ω_1. Оптимальные значения параметров g_x и g_y имеют вид:

$$g_x^{opt} = -\frac{\langle\Delta\hat{x}_1\Delta\hat{x}_2\rangle}{V(\hat{x}_2)}, \quad g_y^{opt} = \frac{\langle\Delta\hat{y}_1\Delta\hat{y}_2\rangle}{V(\hat{y}_2)} \tag{1.14}$$

а соответствующие дисперсии:

$$\begin{aligned} V_{12,x}^{cond} &= \mathrm{Var}(\hat{x}_1)\left(1 - \frac{\langle\Delta\hat{x}_1\Delta\hat{x}_2\rangle^2}{\mathrm{Var}(\hat{x}_1)\mathrm{Var}(\hat{x}_2)}\right), \\ V_{12,y}^{cond} &= \mathrm{Var}(\hat{y}_1)\left(1 - \frac{\langle\Delta\hat{y}_1\Delta\hat{y}_2\rangle^2}{\mathrm{Var}(\hat{y}_1)\mathrm{Var}(\hat{y}_2)}\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Условие перепутанности в терминах дисперсий (1.15) принимает следующий вид:

$$V_{12,x}^{cond}V_{12,y}^{cond} < \frac{1}{4}. \tag{1.16}$$

Для процесса (1.8) дисперсии (1.15) при оптимальных параметрах (1.14) принимают вид:

$$V_{12,x}^{cond} = V_{12,y}^{cond} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(2\beta z)} \xrightarrow{z\to\infty} 0, \tag{1.17}$$

что свидетельствует об увеличении степени перепутанности между сигнальной и холостой волной с ростом длины взаимодействия.

Следует заметить, что в тех ситуациях, когда $\mathrm{Var}(\hat{x}_1) = \mathrm{Var}(\hat{x}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{y}_1) = \mathrm{Var}(\hat{y}_2)$ перепутанность между модами можно выявить если рассматривать дисперсии (1.13) при значениях $g_x = -g_y = 1$ [10].

Для получения двухмодовой перепутанности между непрерывными переменными, помимо невырожденного преобразования частоты вниз, используют также сжатые состояния [24]. Сжатые состояния получают в вырожденном трехчастотном параметрическом процессе, в котором генерируется одна волна с частотой, равной половине частоты накачки:

$$\omega_p = 2\omega. \tag{1.18}$$

Гамильтониан взаимодействия для невырожденного взаимодействия имеет такой вид

$$\hat{H}_{int} = i\hbar\frac{\beta}{2}\left((\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2\right),$$

где $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ — оператор уничтожения и рождения фотонов генерируемой моды поля. Для дисперсий квадратур генерируемой волны имеем [10]:

$$\mathrm{Var}(\hat{x}) = \frac{1}{2}\exp(-2\beta z), \quad \mathrm{Var}(\hat{y}) = \frac{1}{2}\exp(2\beta z). \tag{1.19}$$

Сжатие квантовых флуктуаций в одной из квадратур сопровождается усилением квантовых флуктуаций в другой квадратуре так, что соотношение неопределенностей Гейзенберга выполняется:

$$\mathrm{Var}(\hat{x})\mathrm{Var}(\hat{y}) \geq 1/4.$$

Для получения двухмодовых перепутанных состояний из двух вырожденных процессов (1.18) генерируют поля с флуктуациями подавленными в различных квадратурах, например, в квадратуре $\hat{x}_1$ для одной моды, и в квадратуре $\hat{y}_2$ — для второй моды. Затем полученные поля подают на вход светоделителя. В результате на выходе светоделителя формируются перепутанные состояния.

1.4. Многомодовые перепутанные состояния

В последнее десятилетие появился большой интерес к исследованию многочастичной/многомодовой перепутанности, то есть перепутанности между тремя и более квантовыми подсистемами. На сегодняшний день предложены схемы квантовых вычислений [67], квантовых сетей с повышенной секретностью передачи информации [15, 25], управления плотным кодированием [62, 63] основанных на многомодовой перепутанности.

Можно выделить две группы методов получения многомодовых перепутанных состояний. В первую группу входят методы, основанные на использовании сжатых состояний и светоделителей. Подобно получению двухмодовых перепутанных состояний с использованием двух сжатых мод и светоделителя, многомодовое перепутанное состояние может быть получено с использованием нескольких сжатых состояний и светоделителей [25]. По нашему мнению, с практической точки зрения эти методы обладают рядом недостатков. Известно, что для устойчивой работы квантового алгоритма, основанного на свойствах перепутанности, необходимо обладать источником сильной перепутанности. В схемах квантовой коммуникации и криптографии это существенно влияет на пропускную способность и секретность передачи данных квантовых каналов связи. В схемах, на которые налагаются требования масштабируемости, таких как квантовые вычисления, увеличения числа элементов ведет к росту чувствительности схем к ошибкам, связанным с неидеальностью квантовых корреляций. В свою очередь, генерация даже малого количества состояний с хорошим сжатием для приготовления многочастичной перепутанности на практике представляется довольно сложной задачей. Следует также добавить, что юстировка и синхронизация этих устройств усложняется с увеличением их числа. Отметим, что недавно появилось предложение использовать для формирования многочастичного перепутывания одно устройства, генерирующее последовательность сжатых импульсов [26].

Вторая группа методов основана на связанных или одновременных параметрических взаимодействиях, протекающих в одном нелинейно-оптическом кристалле. При этом взаимодействующие волны должны иметь, по крайней мере, одну общую моду. Как известно, для реализации нескольких параметрических процессов одновременно в одном кристалле необходимо компенсировать фазовые расстройки $\Delta\mathbf{k}_m$ для всех процессов, вовлеченных в связанные взаимодействия. В однородных нелинейных кристаллах это сделать не удается по причине частотной дисперсии. Для преодоления этой проблемы применяют кристаллы с модулированной в пространстве нелинейностью. В таких структурах фазовые расстройки $\Delta\mathbf{k}_m$ компенсируются векторами обратной нелинейной решетки кристалла $\mathbf{g}_m$:

$$\Delta\mathbf{k}_m = \mathbf{g}_m.$$

Нелинейные структуры с перидической модуляцией знака нелинейности, иначе нелинейные фотонные кристаллы (НФК) (их называют также кристаллами с регулярной доменной структурой или периодически поляризованными кристаллами), позволяют осуществить связанные взаимодействия, состоящие только из двух трехчастотных процессов [27, 28]. В очень редких случаях в НФК удается реализовать три трехчастотных параметрических процесса [18, 29]. При этом набор таких связанных взаимодействий невелик. В этой связи особый интерес вызывают нелинейные структуры с апериодической модуляцией знака нелинейности, так называемые апериодические нелинейные фотонные кристаллы (АНФК) [38].

В неоднородных нелинейных кристаллах зависимость квадратичной нелинейности можно представить в виде:

$$\chi^{(2)}(z) = g(z)d_{\text{eff}},$$

где d_{eff} — значение эффективной нелинейности для данного однородного кристалла и типа нелинейного взаимодействия волн, $g(z)$ — в общем случае апериодическая функция модуляции нелинейности, которая принимает значения «-1» и «$+1$». К настоящему времени разработаны методы дизайна апериодических нелинейных структур, обладающих заданным набором обратных векторов решетки, что позволяет реализовать протекание одновременно нескольких параметрических процессов в одном нелинейном кристалле, поскольку позволяют использовать более широкое множество векторов обратной нелинейной решетки.

Существует несколько способов создания апериодических структур. Например, фазоинвертированные решетки [30], состоящие из нескольких участков с регулярной структурой [31], и чирпированные решетки [32–34]. Одной из широко распространенных в последнее время апериодических структур являются решетки Фибоначчи [35–37]. Одним из перспективных методов конструирования апериодических нелинейных является метод суперпозиции модуляции знака нелинейности, который, в частности, позволяет управлять нелинейными коэффициентами на этапе создания нелинейной структуры [38–40]. На наш взгляд, этот метод на настоящий момент является наиболее универсальным с точки зрения создания нелинейных структур с заданными нелинейными свойствами. Содержание метода модуляции знака нелинейной восприимчивости затронуто в Приложении к Главе 2. Стоит заметить, что некоторые типы связанных взаимодействий можно осуществить в однородных нелинейно-оптических кристаллах в неколлинеарной геометрии [42–44].

Для проведения анализа на перепутанность многомодовых квантовых гауссовых состояний непосредственное использование определение перепутанных состояний (1.1), (1.2) представляется весьма сложной задачей, поэтому на сегодняшний день разработан целый ряд критериев перепутанности, основанных на исследовании поведения дисперсий и корреляций квадратурных компонент поля [47–53]. Поскольку в многомодовой квантовой системе может иметь место перепутанность разного вида (см. выше), общепринятого критерия, использование которого может выявить все типы перепутанности, на сегодняшний день не существует. Разработка новых критериев перепутанности интенсивно ведется и по сей день.

В случае плоских монохроматических волн гамильтониан взаимодействия для связанных процессов, состоящих из N взаимодействующих мод, можно записать в общем виде так

$$\hat{H}_{int} = i\hbar \left[\sum_{m>n=1}^{N} \beta_{mn}(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_m \hat{a}_n) + \sum_{m>n=1}^{N} \gamma_{mn}(\hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n) \right], \qquad (1.20)$$

где первая сумма описывает параметрические процессы преобразования частоты вниз с нелинейными коэффициентами связи β_{mn}, характеризующими взаимодействие между модами m и n, а вторая сумма описывает процессы смешения частот, с нелинейными коэффициентами связи γ_{mn} между модами m и n.

Следует заметить, что в процессах смешения частот не формируется перепутанных состояний, а они лишь преобразуют перепутанность на другие частоты. Источниками квантовых корреляций (перепутанности), как уже упоминалось, являются параметрические процессы преобразования частоты вниз.

1.5. Применение перепутанных состояний

Перепутанные состояния играют важнейшую роль в квантовой информации [3–5]. Использование перепутанных состояний в спектроскопии позволяет проводить прецизионные измерения [54–58]. Схемы квантовой коммуникации, основанные на перепутанных состояний, позволяют увеличить пропускную способность канала связи [59–63] и секретность передачи данных [64–66]. Многочастичные перепутанные состояния составляют основу однонаправленных квантовых вычислений [67, 68].

В большинстве схем квантовой коммуникации данные передаются с помощью вспомогательных перепутанных состояний. Для этого передаваемое состояние и часть вспомогательного перепутанного состояния комбинируют друг с другом и над полученной смешанной системой проводятся измерения, результаты которых используются для преобразования оставшейся части вспомогательного перепутанного состояния — это так называемые локальные операции и классическая связь. Передача неизвестного квантового состояния из одного места в другое без непосредственного участия физического носителя этого состояния называется квантовой телепортацией (см. Главы 3 и 5).

Квантовая телепортация была впервые предложена для дискретных переменных [69]. Затем протокол был обобщен на все квантовые состояния [70].

Экспериментальная схема для телепортации когерентного состояния с использованием перепутывания, полученного с помощью сжатых состояний предложена в [71]. На сегодняшний день осуществлены эксперименты по телепортации состояний одиночных фотонов [72–76], атомов [77–79] и непрерывных переменных [80–82].

Алгоритм квантовой телепортации играет большое значение в квантовой информации и неразрывно связан с перепутанными состояниями, для которых «сила» перепутанности играет решающее значение. В работах [86, 87] показано, что телепортация квантового состояния может быть использована в квантовых вычислениях. В предложенной в работах [67, 68] парадигме однонаправленных квантовых вычислений обработка входной квантовой информации, представляющей входные данные, осуществляется посредством локальных измерений и классической коммуникации над многочастичным перепутанным состоянием — кластерным состоянием. В [93] алгоритм однонаправленных вычислений обобщается на область непрерывных значений, причем в [94, 95] авторы предлагают использовать так называемые оптические гребенки для генерации перепутанных кластерных состояний.

В схемах квантового плотного кодирования передаваемая классическая информация кодируется в квантовое состояние [59, 60], которое в самой простой схеме представляет собой одну часть двухмодового перепутанного состояния. При идеальном перепутывании этого квантового состояния возможно достичь увеличения пропускной способности канала связи в два раза по сравнению со схемами, использующими только классическую связь. Использование трехчастотных перепутанных состояния в схеме плотного кодирования рассматривается в [61–63].

В последнее время получило широкое развитие область квантовой оптики, имеющая дело с неклассическими свойствами изображений — квантовое изображение [98, 105, 106]. Объектом исследований квантовых изображений являются пространственно-многомодовые поля, использование которых в схемах квантовой информации позволяет существенно повысить объем квантовых данных, обрабатываемых и передавамых параллельно [107, 108]. Кроме этого, оптическое изображение предлагает новые методы обработки данных. К таким схемам относятся привлекающие большое внимание исследователей схемы по визуализации объекта без непосредственного измерения в пучке, проходящем через этот объект, так называемом фантомном изображении [109–111]. Хотя после опубликования первых работ по фантомным изображениям было установлено, что фантомные изображения можно получать в классически коррелированных пучках [112, 113], использование пространственно-многомодовой перепутанности в этих схемах позволяет увеличить отношение сигнал к шуму измеряемых сигналов [113].

Началом исследований, относящихся к квантовой обработке изображений, явились работы [98, 114–116], которые показали возможность подавления квантовых флуктуаций в пространстве в традиционном процессе оптического параметрического усиления (ОПУ). Авторы работ [114, 115] использовали подход, впервые развитый в работах [117, 118]. К настоящему времени теоретические и экспериментальные исследования пространственного перепутывания изображений выполнены при усилении в поле высокочастотной [119, 120], и низкочастотной [121–125] накачки. Применение перепутанных пространственно-многомодовых полей в телепортации и клонировании когерентных оптических изображений приведены работах [126, 127] и [128] соответственно. В [129] генерация перепутанных оптических изображений в средах с кубической нелинейностью.

Приведенный обзор литературы свидетельствует, что применение многокомпонентных перепутанных квантовых состояний в схемах квантовой информации открывает доступ к новым методам обработки и передачи информации. Связанные нелинейно-оптические процессы интересны с точки зрения создания компактных источников многомодовых перепутанных квантовых состояний света, при этом протекание нескольких связанных трехчастотных процессов в одном кристалле позволяет обойти проблему синхронизации этих процессов друг с другом. Таким образом, изучение квантовых свойств связанных оптических параметрических процессов и разработка их применений представляется перспективной как с физической точки зрения, так и для различных применений.

Приведенный в настоящей главе обзор литературы демонстрирует, таким образом, наличие нарастающего интереса к многочастотным перепутанным состояниям.

Глава 2

Связанные пятичастотные параметрические взаимодействия световых волн и их квантовые свойства

Как подчеркивалось в Главе 1, многочастичные перепутанные квантовые состояния световых полей играют большую роль в алгоритмах квантовой информации, поэтому в настоящее время разработка методов получения многочастотных/многомодовых световых состояний привлекает большое внимание исследователей. Методы получения многокомпонентного перепутывания, основанные на использовании независимых трехчастотных нелинейно-оптических процессов, представляется весьма затратным при необходимости генерации многомодовой перепутанности, состоящей из нескольких частот/мод. В этой связи использование нескольких трехчастотных параметрических процессов, протекающих одновременно в одном нелинейном кристалле, представляет собой компактный способ получения многочастотных/многомодовых перепутанных состояний.

Для эффективного энергообмена между взаимодействующими волнами необходимо одновременно удовлетворить условиям квазисинхронизма для всех трехчастотных взаимодействий, вовлеченных в связанное взаимодействие. В однородном кристалле эта задача представляет сложную проблему. В периодических нелинейных фотонных кристаллах (НФК) можно реализовать одновременно несколько (как правило, два) традиционных трехчастотных квазисинхронных нелинейно-оптических процессов путем подбора периода модуляции и порядка квазисинхронизма [18, 27, 28]. Однако в этом случае порядок квазисинхронизма сильно влияет на эффективность нелинейного взаимодействия, поскольку коэффициент нелинейной связи волн оказывается обратно пропорционален порядку квазисинхронизма.

В связи с ограниченностью возможностей периодических НФК сегодня интенсивно ведутся исследования НФК с апериодической модуляцией знака нелинейности. К настоящему времени разработаны методы конструирования АНФК с заданными свойствами — это, например, методы создания чирпированных кристаллов и, получивший развитие недавно, метод суперпозиции модуляции знака нелинейности [38–41]. Метод суперпозиции модуляции знака нелинейности позволяет конструировать АНФК с нелинейными коэффициентами связи, заданными на этапе их изготовления. Кроме этого, в АНФК, созданном этим методом, каждое трехволновое взаимодействие эффективно протекает на всей длине взаимодействия, что позволяет задействовать всю длину кристалла для реализации заданного связанного взаимодействия.

Квантовые состояния волн, формируемых в связанных взаимодействиях, в общем случае отличаются от состояний, полученных путем смешения сжатых состояний на светоделителях, поэтому исследование квантовых свойств состояний, генерируемых в связанных взаимодействиях, представляет большой интерес. В данной Главе рассматриваются два пятичастотных связанных нелинейно-оптических взаимодействия: 1) взаимодействие, состоящее из двух параметрических процессов преобразования частоты вниз и одного процесса смешения частот (раздел 2.1) и 2) взаимодействие, состоящее из одного параметрического процесса преобразования частоты вниз и двух процессов преобразования частоты вверх (раздел 2.4). Исследуются неклассические свойства этих процессов: статистика и корреляции чисел фотонов, корреляции квадратурных компонент и перепутанность генерируемых полей.

2.1. Трехмодовые перепутанные состояния, генерируемые в связанных параметрических процессах; гамильтониан взаимодействия, квантовые уравнения

2.1.1. Классические уравнения

Рассмотрим три связанных трехчастотных параметрических процесса взаимодействия световых волн с частотами ω_1, ω_2 и ω_3:

$$\begin{aligned} \omega_p &= \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_{2p} = 2\omega_p &= \omega_2 + \omega_3, \\ \omega_1 + \omega_p &= \omega_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

одновременно протекающие в поле двух волн накачки с частотой ω_p и удвоенной частотой $2\omega_p$. Взаимодействия (2.1) включают два процесса параметрического усиления при высокочастотной накачке (первые два процесса) и процесс смешения частот. Как уже отмечалось выше, для реализации многочастотных параметрических взаимодействий можно использовать апериодические нелинейные фотонные кристаллы (см. также Приложение к Главе 2).

Будем считать, что взаимодействующие плоские монохроматические волны распространяются вдоль оси z (коллинеарное взаимодействие). В этом случае поле в нелинейном кристалле можно записать в следующем виде:

$$E(t,z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} A_j(z)e^{-i(\omega_j t - k_j z)} + \frac{1}{2}A_p(z)e^{-i(\omega_p t - k_p z)} + \frac{1}{2}A_{2p}(z)e^{-i(\omega_{2p} t - k_{2p} z)} + \text{к.с.}$$

Динамика комплексных классических амплитуд описывается системой связанных укороченных уравнений [39]:

$$
\begin{aligned}
\frac{dA_p}{dz} &= i\gamma_p^{(1)} g(z) A_1 A_2 e^{-i\Delta k_1 z} + i\gamma_p^{(3)} g(z) A_1^* A_3 e^{-i\Delta k_3 z},\\
\frac{dA_{2p}}{dz} &= i\gamma_{2p}^{(2)} g(z) A_2 A_3 e^{-i\Delta k_2 z},\\
\frac{dA_1}{dz} &= i\gamma_1^{(1)} g(z) A_p A_2^* e^{i\Delta k_1 z} + i\gamma_1^{(3)} g(z) A_p^* A_3 e^{-i\Delta k_3 z},\\
\frac{dA_2}{dz} &= i\gamma_2^{(1)} g(z) A_p A_1^* e^{i\Delta k_1 z} + i\gamma_2^{(2)} g(z) A_{2p} A_3^* e^{i\Delta k_2 z},\\
\frac{dA_3}{dz} &= i\gamma_3^{(2)} g(z) A_{2p} A_2^* e^{i\Delta k_2 z} + i\gamma_3^{(3)} g(z) A_p A_1 e^{i\Delta k_3 z},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь $\gamma_j^{(m)}$ — коэффициент нелинейной связи волн:

$$
\gamma_j^{(m)} = \frac{2\pi\omega_j^2}{c^2 k_j} d_{\mathrm{eff}}^{(m)}, \tag{2.3}
$$

верхний индекс m соответствует номеру процесса ($m = 1, 2, 3$), а коэффициент $d_{\mathrm{eff}}^{(m)}$ связан с тензором квадратичной нелинейной восприимчивости и учитывает геометрию волнового взаимодействия и дисперсию кристалла (**??**), $g(z)$ — функция модуляции знака нелинейности апериодического нелинейного фотонного кристалла, k_j — волновое число на частоте ω_j, Δk_m — волновая (фазовая) расстройка:

$$
\begin{aligned}
\Delta k_1 &= k_p - k_1 - k_2,\\
\Delta k_2 &= k_{2p} - k_2 - k_3,\\
\Delta k_3 &= k_{2p} + k_1 - k_3.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Дальнейшее рассмотрение связанных процессов будем проводить в рамках следующих приближений. Во-первых, будем полагать интенсивные волны накачек заданными: $A_p(z) = \mathrm{const}$, $A_{2p}(z) = \mathrm{const}$. В этом приближении укороченные уравнения для амплитуд накачек в (2.2) можно отбросить. Во-вторых, считаем, что характерная длина нелинейного взаимодействия

$$
L_{nl} = \max\left(\frac{1}{\gamma|A_p|}, \frac{1}{\gamma|A_{2p}|}\right) \gg \max\left(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\right), \tag{2.5}
$$

(коэффициент $\gamma = \max(\gamma_j^{(m)})$), где Λ_m — период модуляции нелинейности для m-го процесса. Как показано в [40], это приближение позволяет заменить в уравнениях явно зависящие от z произведение функций $g(z)e^{i\Delta k_m}$ на его среднее значение по длине кристалла L:

$$g(\Delta k_m) = \frac{1}{L}\int\limits_0^L g(z)e^{i\Delta k_m z}dz \longrightarrow g_m. \tag{2.6}$$

В результате принятых упрощений получаем такие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= i\gamma_1^{(1)}g_1A_pA_2^* + i\gamma_1^{(3)}g_3A_p^*A_3, \\ \frac{dA_2}{dz} &= i\gamma_2^{(1)}g_1A_pA_1^* + i\gamma_2^{(2)}g_2A_{2p}A_3^*, \\ \frac{dA_3}{dz} &= i\gamma_3^{(2)}g_2A_{2p}A_2^* + i\gamma_3^{(3)}g_3A_pA_1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

описывающих динамику классических амплитуд процессов (2.1).

Методы конструирования апериодических нелинейных структур позволяют создавать апериодические нелинейные фотонные кристаллы по заранее заданным значениям g_m. Это обстоятельство позволяет управлять эффективными нелинейностями на этапе изготовления апериодических нелинейных фотонных кристаллов.

Для анализа квантовых свойств рассматриваемых процессов перейдем от классических уравнений (2.7) к квантовым уравнениям для операторов поля.

2.1.2. Гамильтониан взаимодействия; квантовые уравнения

Чтобы перейти от классических уравнений для медленно-меняющихся амплитуд к квантовым уравнениям для операторов взаимодействующих мод поля проведем сначала формальную замену амплитуд на бозе-операторы [13]:

$$A_j \to \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_j}{n_j^2V}}\hat{a}_j, \quad A_j^* \to \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_j}{n_j^2V}}\hat{a}_j^\dagger, \tag{2.8}$$

где $(\hat{a}_j)\hat{a}_j^\dagger$ — оператор уничтожения (рождения) фотонов на частоте ω_j, n_j — показатель преломления кристалла для волны на соответствующей частоте, V — объем квантования, $\hbar$ — постоянная Планка.

Квантовые уравнения, соответствующие процессам (2.1), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_1}{dz} &= -\beta_1 \hat{a}_2^\dagger + \gamma \hat{a}_3, \\ \frac{d\hat{a}_2^\dagger}{dz} &= -\beta_1 \hat{a}_1 - \beta_2 \hat{a}_3, \\ \frac{d\hat{a}_3}{dz} &= -\gamma \hat{a}_1 - \beta_2 \hat{a}_2^\dagger, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где коэффициенты нелинейной связи:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{2\pi\sqrt{\omega_1\omega_2}}{nc} d_{\text{eff}}^{(1)} g_1 |A_p| e^{i(\varphi_p - \pi/2)}, \\ \beta_2 &= \frac{2\pi\sqrt{\omega_2\omega_3}}{nc} d_{\text{eff}}^{(2)} g_2 |A_{2p}| e^{i(\varphi_{2p} + \pi/2)}, \\ \gamma &= \frac{2\pi\sqrt{\omega_1\omega_3}}{nc} d_{\text{eff}}^{(3)} g_3 |A_p| e^{i(\varphi_p - \pi/2)}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

здесь φ_p и φ_{2p} фазы волн амплитуд A_p и A_{2p} соответственно. Далее будем полагать $\varphi_p = \pi/2$, $\varphi_{2p} = -\pi/2$ так, что коэффициенты β_1, β_2 и γ будут действительными.

Уравнения (2.9) можно получить также при использовании гамильтониана взаимодействия следующего вида:

$$\hat{H}_{int} = i\hbar\frac{n}{c}\left(\beta_1(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2) + \beta_2(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_2\hat{a}_3) + \gamma(\hat{a}_1\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_3)\right). \tag{2.11}$$

Для этого необходимо гамильтониан (2.11) подставить в уравнения эволюции Гейзенберга:

$$i\hbar\frac{d\hat{a}_j}{dt} = [\hat{a}_j, \hat{H}_{int}], \quad (j = 1, 2, 3), \tag{2.12}$$

и учесть, что динамика во времени эквивалентна эволюции в пространстве, если перейти от временной переменной к пространственной с помощью замены: $t = -nz/c$. Таким образом показывается, что переход от классических уравнений к квантовым является корректным. Отметим, что при последовательном выводе квантовых уравнений (2.9) нужно исходить из оператора импульса поля (см. Главу 4).

2.1.3. Решение квантовых уравнений

Решения уравнений (2.9) представим в матричном виде:

$$\hat{\mathbf{a}}(z) = \mathcal{Q}(z)\hat{\mathbf{a}}_0. \tag{2.13}$$

Здесь $\hat{\mathbf{a}}(z) = (\hat{a}_1(z), \hat{a}_2^\dagger(z), \hat{a}_3(z))^T$ — столбец, составленный из операторов генерируемых мод на выходе кристалла, $\hat{\mathbf{a}}_0 = \hat{\mathbf{a}}(z=0)$ — столбец операторов на входе кристалла, $\mathcal{Q}(z)$ — 3×3 матрица, с передаточными коэффициентами Q_{mn}, связывающими оператор с частотой ω_m на выходе из кристалла с оператором на частоте ω_n на его входе:

$$\mathcal{Q}(z) = \begin{pmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & Q_{13}(z) \\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) & Q_{23}(z) \\ Q_{31}(z) & Q_{32}(z) & Q_{33}(z) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Передаточные коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned}
Q_{11}(z) &= \frac{(\beta_1^2 - \gamma^2)\operatorname{ch}(\Gamma z) + \beta_2^2}{\Gamma^2}, \\
Q_{12}(z) &= \frac{\beta_2\gamma(1 - \operatorname{ch}(\Gamma z))}{\Gamma^2} - \frac{\beta_1 \operatorname{sh}(\Gamma z)}{\Gamma}, \\
Q_{13}(z) &= \frac{\beta_1\beta_2(\operatorname{ch}(\Gamma z) - 1)}{\Gamma^2} + \frac{\gamma \operatorname{sh}(\Gamma z)}{\Gamma}, \\
Q_{21}(z) &= \frac{\beta_2\gamma(\operatorname{ch}(\Gamma z) - 1)}{\Gamma^2} - \frac{\beta_1 \operatorname{sh}(\Gamma z)}{\Gamma}, \\
Q_{22}(z) &= \frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2)\operatorname{ch}(\Gamma z) - \gamma^2}{\Gamma^2}, \\
Q_{23}(z) &= \frac{\beta_1\gamma(1 - \operatorname{ch}(\Gamma z))}{\Gamma^2} - \frac{\beta_2 \operatorname{sh}(\Gamma z)}{\Gamma}, \\
Q_{31}(z) &= \frac{\beta_1\beta_2(\operatorname{ch}(\Gamma z) - 1)}{\Gamma^2} - \frac{\gamma \operatorname{sh}(\Gamma z)}{\Gamma}, \\
Q_{32}(z) &= \frac{\beta_1\gamma(\operatorname{ch}(\Gamma z) - 1)}{\Gamma^2} - \frac{\beta_2 \operatorname{sh}(\Gamma z)}{\Gamma}, \\
Q_{33}(z) &= \frac{(\beta_2^2 - \gamma^2)\operatorname{ch}(\Gamma z) + \beta_1^2}{\Gamma^2}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь $\Gamma = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \gamma^2}$ — инкремент, характеризующий темп нелинейного взаимодействия. Наибольший интерес с точки зрения эффективного энергообмена между взаимодействующими волнами представляют действительные значения инкремента, так как в этом случае реализуется режим экспоненциального роста взаимодействующих волн поэтому мы будем рассматривать только действительные значения инкремента, что возможно при выполнении неравенства:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 > \gamma^2.$$

Заметим, что в случае мнимого инкремента большой интенсивности взаимодействущих волн получить не удается; при этом решения получаются с помощью замены гиперболических функций в передаточных коэффициентах (2.15) на тригонометрические.

Поскольку бозе-операторы подчиняются коммутационным соотношениям: $[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn}$, то это обстоятельство накладывает связи на коэффициенты (2.15):

$$\sum_{j=1}^{3} (-1)^{m+j} Q_{mj} Q_{nj} = \delta_{mn}, \quad (m, n = 1, 2, 3). \tag{2.16}$$

Соотношения (2.16) позволяют существенно сократить расчеты, а проверка их выполнения является одним из критериев правильности расчетов.

Для дальнейшего анализа квантовых свойств вместо коэффициентов β_1, β_2, γ, и длины взаимодействия z удобно ввести нормированные параметры: $\xi_d = \beta_2/\beta_1$, $\xi_u = \gamma/\beta_1$, $\eta = \beta_1 z$. Параметры ξ_d и ξ_u характеризуют эффективность процесса преобразования частоты вниз, протекающего в поле удвоенной волны накачки $2\omega_p$ и процесса сложения частот относительно эффективности процесса преобразования частоты вниз в поле волны накачки с частотой ω_p (см. (2.1)). Таким образом, в новых переменных фактор усиления принимает вид

$$\Gamma z = \eta \sqrt{1 + \xi_d^2 - \xi_u^2}. \tag{2.17}$$

2.2. Перепутанность трехмодовых состояний; корреляции чисел фотонов, анализ информационных характеристик

2.2.1. Статистика и корреляции чисел фотонов

Для определения средних наблюдаемых (измеряемых параметров) в используемом гейзенберговском представлении необходимо провести усреднение по состоянию полей на входе нелинейного кристалла. Будем полагать, что состояние поля на входе кристалла на частотах генерируемых мод вакуумное, т.е. вектор состояния $|\Psi_0\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3$, где нижние индексы относятся к частотам. Среднее значение некоторого оператора наблюдаемой $\hat{O}$ на выходе из кристалла равно $\langle\hat{O}(z)\rangle = \langle\Psi_0|\hat{O}(z)|\Psi_0\rangle$.

Для средних чисел фотонов $\langle\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\rangle$ на генерируемых частотах в соответствии с (2.13) и (2.15) имеем:

$$\langle\hat{n}_1(z)\rangle = Q_{12}^2(z), \quad \langle\hat{n}_2(z)\rangle = Q_{22}^2(z) - 1, \quad \langle\hat{n}_3(z)\rangle = Q_{32}^2(z). \tag{2.18}$$

Из (2.18) и (2.16) следует, что

$$\langle\hat{n}_2(z)\rangle = \langle\hat{n}_1(z)\rangle + \langle\hat{n}_3(z)\rangle. \tag{2.19}$$

Это соотношение есть следствие того, что фотоны на частоте ω_2 рождаются в двух параметрических процессах преобразования частоты вниз.

Для анализа статистических свойств полей воспользуемся параметром, называемым фактором Фано:

$$F_j = \frac{\sigma_j^2}{\langle\hat{n}_j\rangle}, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2.20}$$

Здесь $\sigma_j^2 = \langle\hat{n}_j^2\rangle - \langle\hat{n}_j\rangle^2 = \langle\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\rangle - \langle\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\rangle^2$ — дисперсия чисел фотонов на соответствующей частоте. Значение $F_j = 1$ отвечает пуассоновской статистике, $F < 1$ — субпуассоновской и $F > 1$ — суперпуассоновской статистике.

Для дисперсий чисел фотонов получаем:

$$\sigma_j^2(z) = \langle\hat{n}_j\rangle(1 + \langle\hat{n}_j\rangle), \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.21}$$

Подставляя (2.18) и (2.21) в (2.20), имеем:

$$F_j(z) = 1 + \langle \hat{n}_j \rangle, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2.22}$$

Из (2.22) видно, что статистика фотонов на отдельных генерируемых частотах суперпуассоновская, а поле каждой отдельной частоты имеет характер теплового поля.

Для исследования корреляций между фотонами обратимся к корреляционным функциям Глаубера. Определим нормированную корреляционную функцию фотонов 2-го порядка:

$$G_{jk}^{(2)} = \frac{\langle : \hat{n}_j \hat{n}_k : \rangle}{\langle \hat{n}_j \rangle \langle \hat{n}_k \rangle} = \frac{\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_k \rangle}{\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle}, \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{2.23}$$

характеризующую корреляции фотонов между j-ой и k-ой модой, и нормированную корреляционную функцию 3-го порядка:

$$G_{123}^{(3)} = \frac{\langle : \hat{n}_1 \hat{n}_2 \hat{n}_3 : \rangle}{\langle \hat{n}_1 \rangle \langle \hat{n}_2 \rangle \langle \hat{n}_3 \rangle} = \frac{\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \rangle}{\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle \langle \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \rangle}, \tag{2.24}$$

описывающую корреляции между фотонами на трех генерируемых частотах. Здесь двоеточие означает, что при усреднении по состоянию полей операторы надо брать в нормально-упорядоченном виде.

Подставив решения для операторов генерируемых полей (2.15) в (2.23) и (2.24) и учитывая также соотношения (2.16), приходим к следующим выражениям для $G^{(2)}$:

$$\begin{aligned} &G_{12}^{(2)}(z) = G_{23}^{(2)}(z) = 2! + \mathcal{K}(z), \\ &G_{13}^{(2)}(z) = 2!, \end{aligned} \tag{2.25}$$

и для $G^{(3)}$:

$$G_{123}^{(3)}(z) = 3! + 4\mathcal{K}(z), \tag{2.26}$$

где введено обозначение $\mathcal{K}(z) = 1/(Q_{22}^2(z) - 1)$. Из полученных выражений видно, что корреляционные свойства фотонов в рассматриваемом связанном взаимодействии зависят только от функции $\mathcal{K}(z)$.

Известно, что в случае коррелированных классических полей с гауссовой статистикой корреляционная функция интенсивностей m-го порядка равна [21]:

$$G^{(m)} = \frac{\overline{I_1 I_2 ... I_m}}{\overline{I}_1 \overline{I}_2 \cdot \overline{I}_m} = m! \tag{2.27}$$

где I_j — интенсивность j-ой моды поля. Превышение корреляций фотонов над значением (2.27) свидетельствует о квантовом характере корреляций. Таким образом, величина $\mathcal{K}$ в (2.25) и (2.26) описывает добавку к корреляциям, обусловленную неклассичностью рассматриваемых полей.

Примечательно, что корреляционные функции фотонов при больших длинах взаимодействия стремятся к своим классическим пределам: 2! для корреляционных функций 2-го порядка и $3! = 6$ для корреляционных функций 3-го порядка. Заметим также, что корреляции между фотонами на частотах ω_1 и ω_3 имеют постоянное значение равное 2!, то есть неклассические корреляции в числах фотонов между модами этих частот отсутствуют.

На рис. 2.1 представлены графики зависимостей функции $\mathcal{K}$ от нормированной длины взаимодействия η. Пары близкорасположенных кривых отвечают одному значения нормированного коэффициента ξ_d, различающихся значениями ξ_u. Нижние кривые каждой из пар соответствуют коэффициенту $\xi_u = 0$, верхние кривые — $\xi_u = \xi_d$. Из графиков видно, что с ростом длины взаимодействия величина $\mathcal{K}$ стремиться к нулю, что отвечает значениям корреляций для классических полей (2.27). Вследствие этого при нарастании интенсивностей взаимодействующих волн неклассичность корреляций фотонов падает. Рис. 2.1 также показывает, что эффективность процесса смешения частот слабо влияет на корреляции между фотонами, тогда как процессы параметрического преобразования частоты вниз оказывают существенное влияние на корреляции между фотонами. Это объясняется тем, что в процессе смешения частот не рождается новых фотонов, и он не вносит вклад в интенсивность, тогда как процессы преобразования частоты вниз служат источниками фотонов и дают основной вклад в интенсивность взаимодействующих волн. Таким образом, увеличение эффективности процессов преобразования частоты вниз способствует увеличению скорости нарастания интенсивности

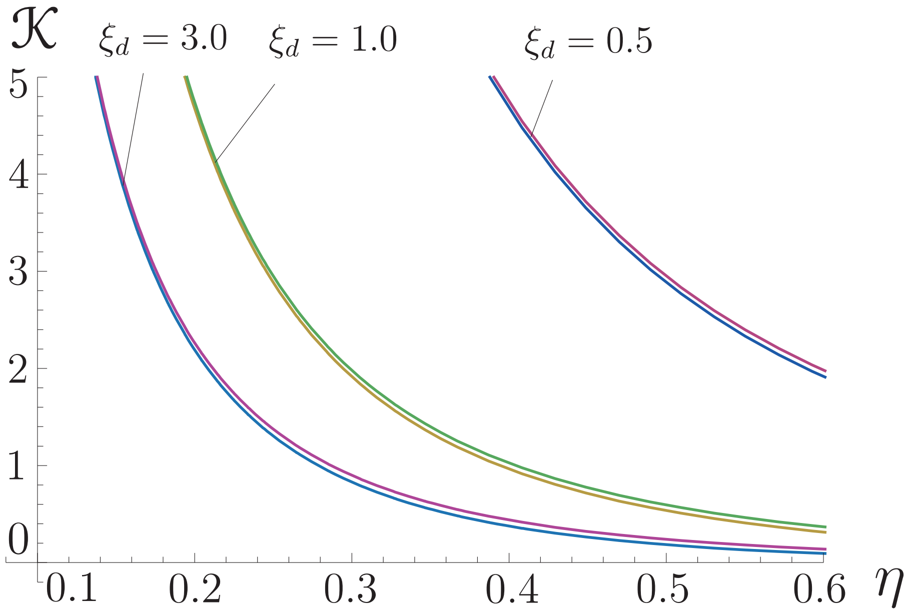

Рис. 2.1. Зависимость функции $\mathcal{K}$ от нормированной длины взаимодействия η при различных значениях коэффициентов ξ_d и ξ_u. Пары близкорасположенных кривых отвечают одному значения нормированного коэффициента ξ_d, различающихся значениями ξ_u: нижние кривые каждой пары соответствуют $\xi_u = 0$, верхние кривые — $\xi_u = \xi_d$

волн в рассматриваемом процессе, что приводит, в свою очередь, к уменьшению неклассичности корреляций фотонов.

Сказанное подтверждает зависимость функции $\mathcal{K}$ от длины взаимодействия и нелинейного коэффициента ξ_d, представленная на рис. 2.2.

2.2.2. Информационный анализ перепутанности

Обратимся к анализу квантовых корреляций в процессе (2.1) с точки зрения квантово-информационных величин.

Одной из основных информационных характеристик в квантовой информации является фон неймановская энтропия, определение которой для состояния $\hat{\rho}$ дается следующим образом [3]:

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}) = -\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}). \tag{2.28}$$

Здесь Tr обозначает взятие следа по всему состоянию $\hat{\rho}$, $\log_2\hat{\rho}$ — логарифм от оператора плотности данного состояния. Фон неймановская энтропия яв-

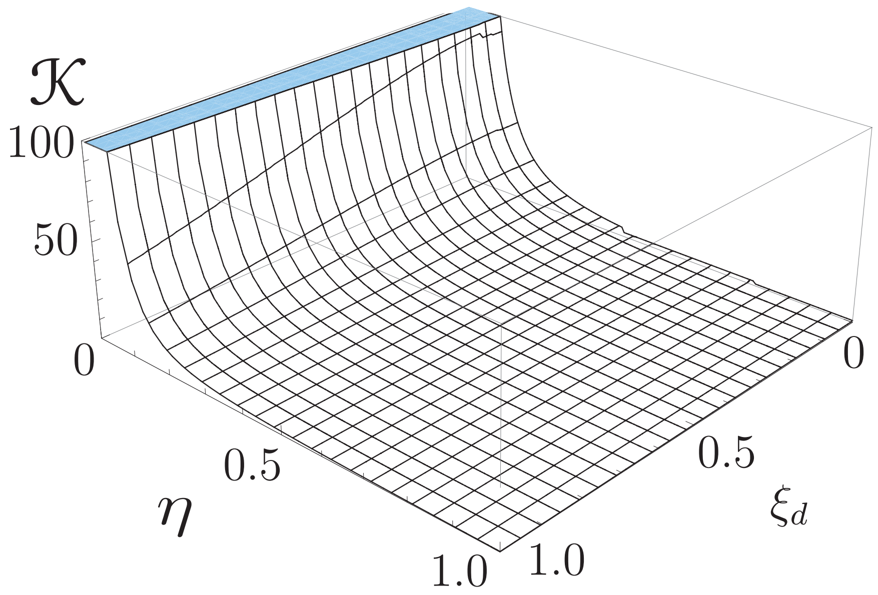

Рис. 2.2. Зависимость $\mathcal{K}$ от нормированной длины взаимодействия η и нелинейного коэффициента ξ_d при $\xi_u = 1$

ляется неотрицательной величиной для любого физического состояния $\hat{\rho}$:

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}) \geq 0, \quad \forall \hat{\rho}$$

Можно показать, что если квантовая система находится в чистом состоянии, то ее фон неймановская энтропия тождественно равна нулю:

$$S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0. \tag{2.29}$$

Если чистую квантовую систему можно разбить на 2 подсистемы: $A+B$, т.е. система является, по крайней мере, двухчастичной, то фон неймановскую энтропию можно непосредственно использовать в качестве меры перепутанности между двумя частями чистой системы. При этом для энтропий подсистем справедливо:

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_A) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_B). \tag{2.30}$$

Одночастичная энтропия $\mathcal{S}(\hat{\rho}_j)$ может являться такой мерой перепутанности.

Для случая многочастичных состояний непосредственное использование фон неймановской энтропии позволяет раскрыть лишь наличие перепутанности между двумя блоками частей системы, при этом квантовые корреляции между частями, составляющими многочастичную систему, остаются нераскрытыми. Для анализа корреляций между двумя частями многочастичной системы применяются другие характеристики, которые используют в своем определении фон неймановскую энтропию.

Для анализа корреляций между частями квантового состояния пользуются величиной

$$\mathcal{I}(\hat{\rho}_{jl}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_j) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_l) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_{jl}), \quad (j, l = 1, 2, 3) \tag{2.31}$$

называемой взаимной информацией, где $\hat{\rho}_{jl}$ — оператор плотности, описывающий состояние частей j и l, $\hat{\rho}_l$ — оператор плотности, описывающий состояние части l. Взаимная информация между двумя системами служит мерой информации, которой одновременно обладают как одна, так и другая системы одновременно. Как отмечалось в главе 1, корреляции между квантовыми системами могут быть чисто классическими. В этом случае взаимная информация, однако, не может служить мерой квантовых корреляций между подсистемами, поскольку помимо квантовых, учитывает и классические корреляции.

Другой информационной величиной, которая может раскрывать наличие квантовых корреляций между рассматриваемыми системами, является условная информация:

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_j|\hat{\rho}_l) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_{jl}) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_l). \tag{2.32}$$

При этом ее отрицательные значения свидетельствуют о перепутанности между рассматриваемыми системами. Условие отрицательности условной энтропии является необходимым и достаточным условием перепутанности для чистого составного состояния $\hat{\rho}_{jl}$, т.к. в этом случае $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{jl}) = 0$ и всегда справедливо: $\mathcal{S}(\hat{\rho}_j|\hat{\rho}_l) = -\mathcal{S}(\hat{\rho}_l) \leq 0$. Если состояние $\hat{\rho}_{jl}$ смешанное, то отрицательность условной энтропии является достаточным условием перепутанности и, таким образом, ее положительные значения ничего не говорят о перепутанности.

Возвращаясь к рассматриваемому процессу, легко заметить, что состояние, получаемое в этом процессе является чистым. Это следует из того, что трехмодовое чистое состояние на входе кристалла $|\psi_{in}\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3$ преобразуется унитарным оператором эволюции:

$$\hat{U}(z) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int}z\right) \tag{2.33}$$

в чистое состояние на выходе кристалла:

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}(z)|\psi_{in}\rangle, \tag{2.34}$$

где $\hat{H}_{int}$ — гамильтониан взаимодействия (2.11), описывающий эволюцию состояния в кристалле.

Таким образом, принимая во внимание (2.29), получаем:

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{123}) = 0, \tag{2.35}$$

а учитывая (2.30), приходим к следующим соотношениям для фон неймановских энтропий:

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{jl}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_k), \quad (j \neq l \neq k) \tag{2.36}$$

Данный результат является общим для всех трехчастичных чистых состояний. Он позволяет рассчитать информационные характеристики квантовой системы на основе только знания одночастичных операторов плотности. Пользуясь этим результатом, взаимную информацию и условную энтропию можно записать в виде:

$$\mathcal{I}(\hat{\rho}_{jl}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_j) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_l) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_k), \tag{2.37}$$

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_j|\hat{\rho}_l) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_k) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_l) \quad (j \neq l \neq k). \tag{2.38}$$

Из (2.38) следует выражение

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_j|\hat{\rho}_l) = -\mathcal{S}(\hat{\rho}_j|\hat{\rho}_k) \quad (j \neq l \neq k), \tag{2.39}$$

которое будет также использовано в дальнейшем информационном анализе.

2.2.3. Вектор состояния и парциальные матрицы плотности

Как показано выше, для расчета информационных характеристик рассматриваемого связанного процесса необходимо знать матрицы плотности отдельных мод генерируемых полей. Для получения одномодовой матрицы плотности необходимо усреднить трехчастичную матрицу плотности $\hat{\rho}_{123} = |\psi_{123}\rangle\langle\psi_{123}|$ по состояниям остальных двух мод:

$$\hat{\rho}_j = \mathrm{Tr}_{lk}(\hat{\rho}_{123}), \quad (j \neq l \neq k).$$

Вектор состояния для трех мод генерируемых полей можно найти, используя оператор эволюции (2.33) и уравнение (2.34). Однако, расчет действия оператора эволюции на начальное состояние не может быть проведен без предварительного преобразования этого оператора. Можно убедиться, что операторы

$$\hat{\sigma}_{d1} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2, \qquad \hat{\sigma}_{d2} = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_2 \hat{a}_3, \quad \hat{\sigma}_u = \hat{a}_1 \hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 \tag{2.40}$$

образуют замкнутое множество операторов относительно коммутации:

$$[\hat{\sigma}_{d1}, \hat{\sigma}_u] = \hat{\sigma}_{d2}, \quad [\hat{\sigma}_u, \hat{\sigma}_{d2}] = \hat{\sigma}_{d1}, \quad [\hat{\sigma}_{d1}, \hat{\sigma}_{d2}] = \hat{\sigma}_u. \tag{2.41}$$

Это означает, что оператор эволюции может быть записан в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} \hat{U}(z) = \exp\left[\frac{nz}{c}(\hat{\sigma}_{d1} + \xi_d \hat{\sigma}_{d2} + \xi_u \hat{\sigma}_u)\right] = \\ = \exp[\alpha_1(z)\hat{\sigma}_{d1}] \exp[\alpha_2(z)\hat{\sigma}_u] \exp[\alpha_3(z)\hat{\sigma}_{d2}] \end{aligned} \tag{2.42}$$

где неизвестные параметры $\alpha_j(z) \quad (j = 1, 2, 3)$ могут быть вычислены с помощью, например, метода дифференцирования по параметру. Здесь мы следуем методу расчета, изложенному в работе [45], поэтому детали расчета опускаем.

Вектор состояния рассматриваемого процесса в базисе фоковских состояний имеет следующий вид (ср. с [45]):

$$|\psi_{123}\rangle = \sqrt{A} \sum_{m,n=0}^{\infty} (\mathrm{th}\,\alpha_1)^m \left(-\frac{\mathrm{th}\,\alpha_2}{\mathrm{ch}\,\alpha_1}\right)^n \sqrt{\frac{(m+n)!}{m!n!}} |m\rangle_1 |m+n\rangle_2 |n\rangle_3 \tag{2.43}$$

где $A = 1/(\mathrm{ch}^2\,\alpha_1\,\mathrm{ch}^2\,\alpha_2)$. Параметры $\alpha_j = \alpha_j(z)$ определяются из соотношений:

$$\mathrm{sh}^2\,\alpha_1(z) = \frac{Q_{22}^2(z)}{1 + Q_{32}^2(z)}, \quad \mathrm{ch}^2\,\alpha_1(z) = \frac{Q_{12}^2(z)}{1 + Q_{32}^2(z)}, \quad \mathrm{sh}^2\,\alpha_2(z) = Q_{32}^2(z). \tag{2.44}$$

Одночастичные матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 &= B \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_1 - \operatorname{th}^2 \alpha_2} \right]^m |m\rangle\langle m|, \\
\hat{\rho}_2 &= A \sum_{m=0}^{\infty} \left[\operatorname{th}^2 \alpha_1 + \frac{\operatorname{th}^2 \alpha_2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_1} \right]^m |m\rangle\langle m|, \\
\hat{\rho}_3 &= C \sum_{m=0}^{\infty} \left[\operatorname{th}^2 \alpha_2 \right]^m |m\rangle\langle m|,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

где $B = 1/(\operatorname{ch}^2 \alpha_2 (\operatorname{ch}^2 \alpha_1 - \operatorname{th}^2 \alpha_2))$, $C = 1/(\operatorname{ch}^2 \alpha_2)$.

Учитывая (2.18), приходим к известному результату

$$\hat{\rho}_j = \frac{1}{1 + \langle \hat{n}_j \rangle} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\langle \hat{n}_j \rangle}{1 + \langle \hat{n}_j \rangle} \right)^m |m\rangle\langle m|, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2.46}$$

для матрицы плотности теплового состояния [13].

Принимая во внимание, что для операторов, записанных в диагональном виде:

$$\hat{\rho} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{mm} |m\rangle\langle m|,$$

справедливо

$$f(\hat{\rho}) = \sum_{m=0}^{\infty} f(\rho_{mm}) |m\rangle\langle m|,$$

и учитывая также выражения для коэффициентов A, B и C и соотношения (2.44), приходим к выражениям для одночастичных энтропий:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\hat{\rho}_1) &= \log_2(1 + Q_{12}^2) - Q_{12}^2 \log_2 \left(\frac{Q_{12}^2}{1 + Q_{12}^2} \right), \\
\mathcal{S}(\hat{\rho}_2) &= \log_2(1 + Q_{12}^2 + Q_{32}^2) - (Q_{12}^2 + Q_{32}^2) \log_2 \left(\frac{Q_{12}^2 + Q_{32}^2}{1 + Q_{12}^2 + Q_{32}^2} \right), \\
\mathcal{S}(\hat{\rho}_3) &= \log_2(1 + Q_{32}^2) - Q_{32}^2 \log_2 \left(\frac{Q_{32}^2}{1 + Q_{32}^2} \right),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Принимая во внимание (2.46), имеем

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_j) = (1 + \langle \hat{n}_j \rangle) \log_2(1 + \langle \hat{n}_j \rangle) - \langle \hat{n}_j \rangle \log_2 \langle \hat{n}_j \rangle. \tag{2.48}$$

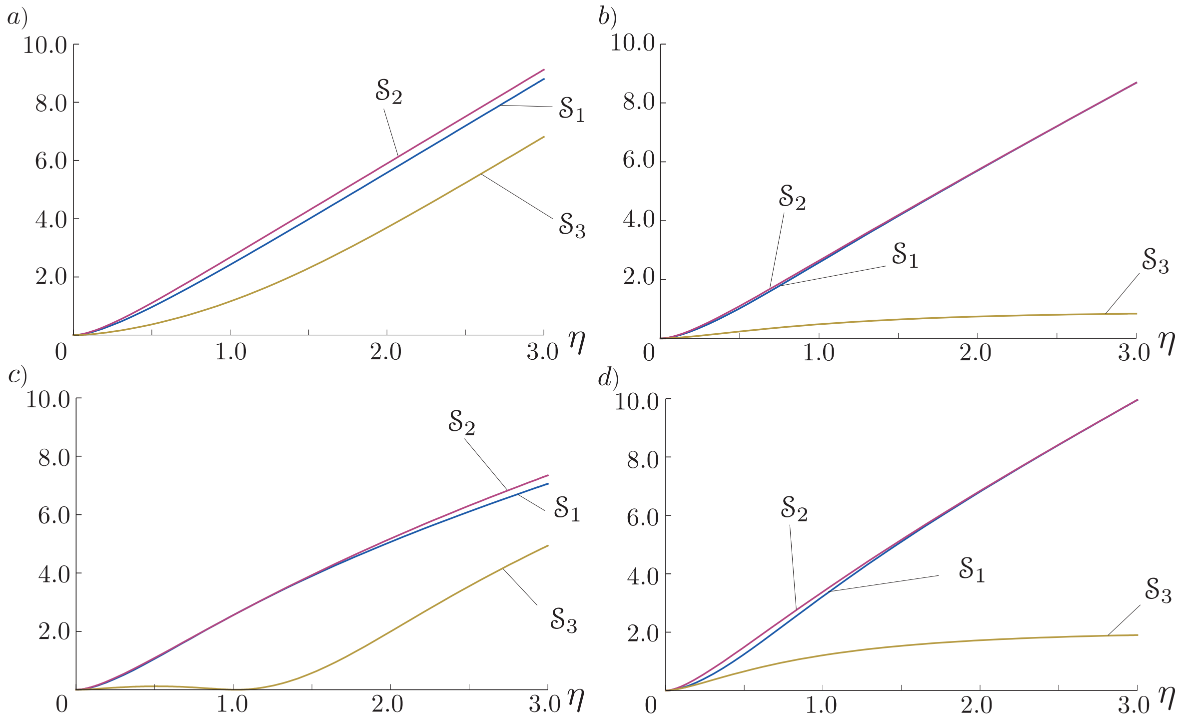

Рис. 2.3. Зависимость энтропий $\mathcal{S}_j = \mathcal{S}(\hat{\rho}_j)$ от нормированной длины взаимодействия η для различных значений параметров ξ_d и ξ_u: a) $\xi_d = 0.5$, $\xi_u = 0$, b) $\xi_d = 0.5$, $\xi_u = 0.5$, c) $\xi_d = 0.5$ и $\xi_u = 1.0$, d) $\xi_d = 1.0$, $\xi_u = 1.0$

На рис.2.3 представлены графики зависимостей фон неймановских энтропий для состояний на генерируемых частотах. Как следует из рис.2.3, при отсутствии процесса смешения частот ($\xi_u = 0$) одночастичные энтропии монотонно растут с увеличением длины взаимодействия (рис.2.3 a). При этом справедливы следующие неравенства:

$$S(\hat{\rho}_2) > S(\hat{\rho}_1) \geq S(\hat{\rho}_3). \tag{2.49}$$

Наличие процесса смешения между частотами ω_1 и ω_3 приводит к значительному уменьшению энтропии для моды на частоте ω_3 (рис. 2.3 b,c,d), что свидетельствует об уменьшении перепутанности между этой модой и модами на частотах ω_1 и ω_2. При этом, когда эффективность процесса смешения частот равна эффективности процесса преобразования частоты вниз, протекающего в поле основной волны накачки, и в два раза превышает эффективность второго процесса преобразования частоты вниз (Рис. 2.3 c), на длине взаимодействия $\eta \approx 1$ наблюдается распутывание моды на частоте ω_3 от мод на частотах ω_1 и ω_2.

На рис. 2.4 представлены графики зависимостей взаимных информаций от нормированной длины взаимодействия при различных значениях параметров ξ_d и ξ_u. Из Рис. 2.4 следует, что наибольшими взаимными корреляциями обладают моды на частотах ω_1 и ω_2, что находится в согласии с (2.49). Из этих графиков также видно, что наличие процесса смешения частот приводит к усилению корреляций между модами на частотах ω_1 и ω_2 и ослаблению корреляций между модами с частотами ω_2 и ω_3.

На Рис. 2.5 представлены графики зависимостей условных энтропий $\mathcal{S}(\hat{\rho}_1|\hat{\rho}_2)$ и $\mathcal{S}(\hat{\rho}_3|\hat{\rho}_2)$ от нормированной длины взаимодействия при различных значениях параметров ξ_d и ξ_u. Рис. 2.5a отвечает ситуации, когда в связанном взаимодействии процесс смешения частот отсутствует. Как следует из Рис. 2.5a, величины $\mathcal{S}(\hat{\rho}_1|\hat{\rho}_2)$ и $\mathcal{S}(\hat{\rho}_3|\hat{\rho}_2)$ принимают отрицательное значение и с ростом длины взаимодействия монотонно стремятся к своим асимптотических значениям. Данное обстоятельство свидетельствует о наличии перепутанности между модами с частотами ω_1 и ω_2 и между модами с частотами ω_2 и ω_3. Подобная ситуация наблюдается и для Рис. 2.5c, который соответствует случаю $\xi_u = 2\xi_d = 1.0$. Условные энтропии с ростом длины взаимодействия также стремятся к своим асимптотическим значениям, но в этом случае $\mathcal{S}(\hat{\rho}_1|\hat{\rho}_2)$ принимает минимальное значение при $\eta \approx 1.5$.

Ситуация, когда $\xi_d = \xi_u$, представлена на Рис. 2.5b и Рис. 2.5d для $\xi_d = 0.5$ и $\xi_d = 1.0$ соответственно. Из этих рисунков видно, что $\mathcal{S}(\hat{\rho}_1|\hat{\rho}_2)$ принимает отрицательные значения, абсолютная величина которых возрастает с ростом длины взаимодействия, тогда как $\mathcal{S}(\hat{\rho}_3|\hat{\rho}_2)$ стремиться к нулю. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что при $\xi_d = \xi_u$ степень перепутанности между модами с частотами ω_1 и ω_2 растет, а между модами с частотами ω_2 и ω_3 стремиться к нулю. Заметим, что из (2.39) следуют соотношения: $\mathcal{S}(\hat{\rho}_1|\hat{\rho}_3) = -\mathcal{S}(\hat{\rho}_1|\hat{\rho}_2)$, $\mathcal{S}(\hat{\rho}_3|\hat{\rho}_1) = -\mathcal{S}(\hat{\rho}_3|\hat{\rho}_2)$, которые (2.49) принимают положительные значения, и, таким образом, ничего нельзя сказать о перепутанности между модами с частотами ω_1 и ω_3.

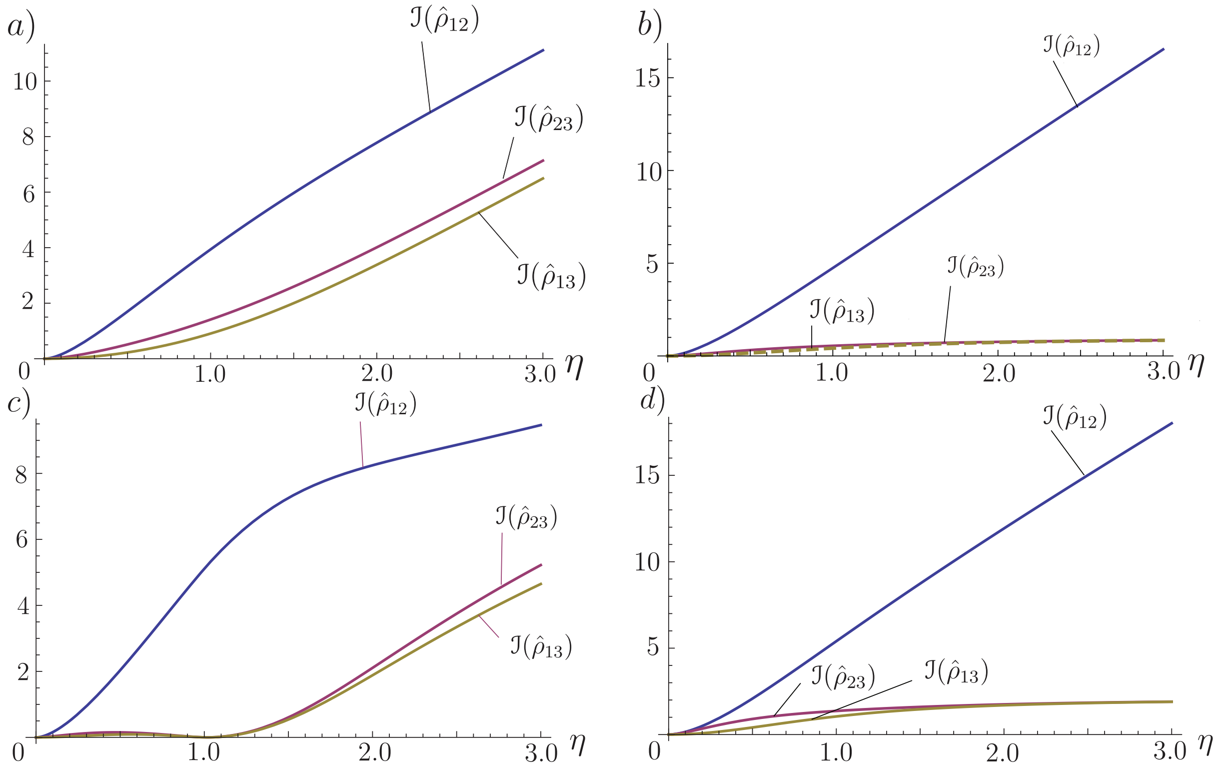

Рис. 2.4. Зависимость взаимной информации $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{jl})$ от нормированной длины взаимодействия η для различных значений параметров ξ_d и ξ_u: a) $\xi_d = 0.5$, $\xi_u = 0$, b) $\xi_d = \xi_u = 0.5$, c) $\xi_d = 0.5$, $\xi_u = 1.0$, d) $\xi_d = \xi_u = 1.0$

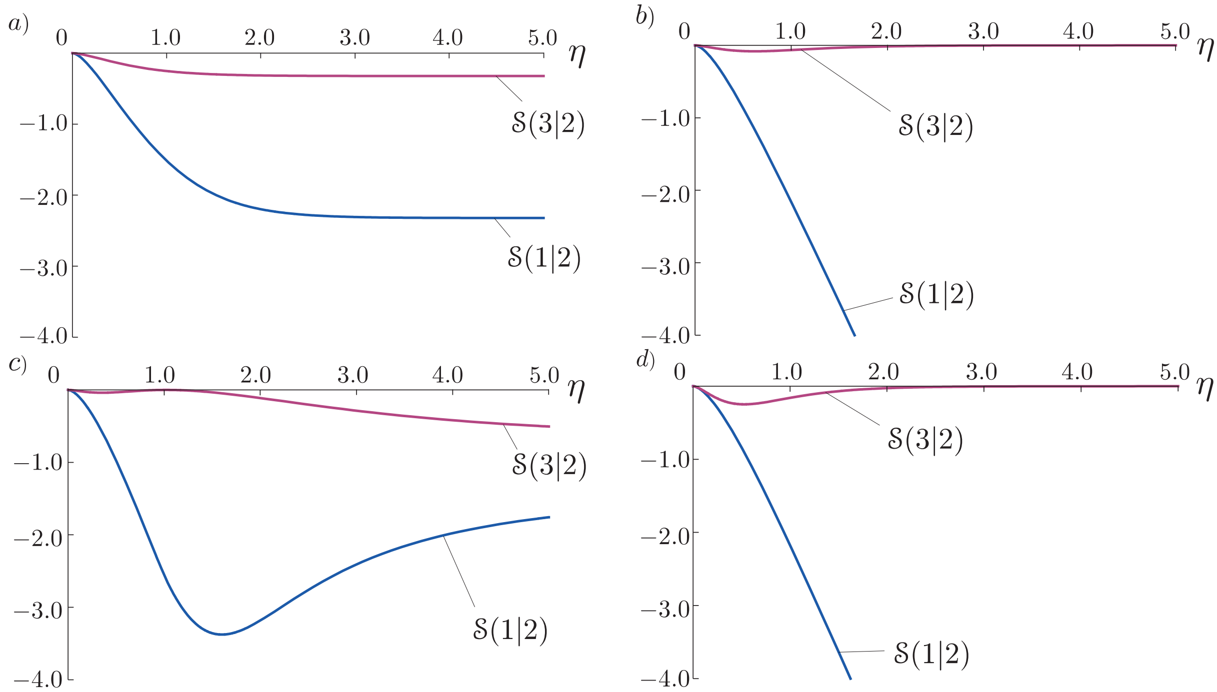

Рис. 2.5. Зависимость условных энтропий $\mathcal{S}(1|2) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_1|\hat{\rho}_2)$ и $\mathcal{S}(3|2) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_3|\hat{\rho}_2)$ от нормированной длины взаимодействия η для различных значений параметров ξ_d и ξ_u: a) $\xi_d = 0.5$, $\xi_u = 0$, b) $\xi_d = \xi_u = 0.5$, c) $\xi_d = 0.5$, $\xi_u = 1.0$, d) $\xi_d = \xi_u = 1.0$

2.3. Корреляции квадратурных компонент в трехмодовых состояниях

Обратимся теперь к изучению ЭПР-корреляций, то есть парных квантовых корреляций между модами рассматриваемого связанного процесса в терминах квадратурных компонент.

Определим квадратурные компоненты как:

$$\hat{x}_j = \frac{\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{y}_j = \frac{\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger}{i\sqrt{2}}, \tag{2.50}$$

где нижний индекс относится к соответствующей несущей частоте. Для квадратур квантованного электромагнитного поля справедливы коммутационные соотношения:

$$[\hat{x}_m, \hat{y}_n] = i\delta_{mn}. \tag{2.51}$$

Для анализа парных квантовых корреляций между квадратурами поля обратимся к следующим дисперсиям:

$$V_{jl,x} = \mathrm{Var}(\hat{x}_j + \hat{x}_j^{est}), \quad V_{jl,y} = \mathrm{Var}(\hat{y}_j - \hat{y}_j^{est}), \tag{2.52}$$

где $\hat{x}_j^{est} = g_x \hat{x}_l$, $\hat{y}_j^{est} = g_y \hat{y}_l$ — «оценочные» (предполагаемые) значения квадратур поля на частоте ω_j, полученные на основе знания квадратур поля на частоте ω_l, а в выборе параметров g_x и g_y существует произвол. В нашем рассмотрении мы будем полагать

$$g_x = -\frac{\langle \Delta\hat{x}_j \Delta\hat{x}_l \rangle}{V(\hat{x}_l)}, \quad g_y = \frac{\langle \Delta\hat{y}_j \Delta\hat{y}_l \rangle}{V(\hat{y}_l)}, \tag{2.53}$$

которые, как легко убедиться, минимизируют дисперсии (2.52). В работе [23] показано, что в этом случае дисперсии (2.52) определяют ошибку в оценке квадратур одной моды на основе знания квадратура другой. Дисперсия ошибки при этом равна:

$$\begin{aligned} V_{jl,x}^{cond} &= \mathrm{Var}(\hat{x}_j)\left(1 - \frac{\langle \Delta\hat{x}_j \Delta\hat{x}_l \rangle^2}{\mathrm{Var}(\hat{x}_j)\mathrm{Var}(\hat{x}_l)}\right), \\ V_{jl,y}^{cond} &= \mathrm{Var}(\hat{y}_j)\left(1 - \frac{\langle \Delta\hat{y}_j \Delta\hat{y}_l \rangle^2}{\mathrm{Var}(\hat{y}_j)\mathrm{Var}(\hat{y}_l)}\right). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Условие перепутанности записывается в следующем виде:

$$V_{jl,x}^{cond} V_{jl,y}^{cond} < \frac{1}{4}, \tag{2.55}$$

причем при идеальной перепутанности выражение в левой части неравенства (2.55) равно нулю, то есть в этом случае можно узнать значение квадратур одной моды по квадратурам другой моды без ошибки. В дальнейшем дисперсии (2.54) будем называть условными дисперсиями.

Следует заметить, что в случае $\mathrm{Var}(\hat{x}_j) = \mathrm{Var}(\hat{x}_l) = V_{j,x}$ и $\mathrm{Var}(\hat{y}_j) = \mathrm{Var}(\hat{y}_l) = V_{l,y}$ для исследования на перепутанность оправдано также использовать дисперсии (2.52) при значениях параметров $g_x = g_y = 1$. Действительно, в такой ситуации условные дисперсии

$$V_{jl,x}^{cond} = V_{j,x} \left(1 - \left(\frac{\langle \Delta\hat{x}_j \Delta\hat{x}_l \rangle}{V_{j,x}} \right)^2 \right), V_{jl,y}^{cond} = V_{j,y} \left(1 - \left(\frac{\langle \Delta\hat{y}_j \Delta\hat{y}_l \rangle}{V_{j,y}} \right)^2 \right)$$

и дисперсии (2.52) при $g_x = g_y = 1$:

$$V_{jl,x} = 2V_{j,x} \left(1 - \frac{\langle \Delta\hat{x}_j \Delta\hat{x}_l \rangle}{V_{l,x}} \right)$$

подобно описывают корреляции квадратурных компонент.

Будем полагать, что на вход нелинейного кристалла подаются только волны накачки, а состояние входного поля на остальных частотах — вакуумное:

$$\hat{a}_{j0} = \hat{v}_j, \quad \langle \hat{v}_j^\dagger \hat{v}_j \rangle = 0, \quad (j = 1, 2, 3),$$

тогда, пользуясь передаточными коэффициентами (2.15), соотношениями (2.16) и (2.18), получим такие выражения для условных дисперсий:

$$\begin{aligned}
V_{12}^{cond} &= V_{12,x}^{cond} = V_{12,y}^{cond} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\langle \hat{n}_1 \rangle}{\langle \hat{n}_2 \rangle + 1/2} \right) \leq \frac{1}{2}, \\
V_{32}^{cond} &= V_{32,x}^{cond} = V_{32,y}^{cond} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\langle \hat{n}_3 \rangle}{\langle \hat{n}_2 \rangle + 1/2} \right) \leq \frac{1}{2}, \\
V_{13}^{cond} &= V_{13,x}^{cond} = V_{13,y}^{cond} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\langle \hat{n}_1 \rangle}{\langle \hat{n}_3 \rangle + 1/2} \right) \geq \frac{1}{2}, \\
V_{31}^{cond} &= V_{31,x}^{cond} = V_{31,y}^{cond} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\langle \hat{n}_3 \rangle}{\langle \hat{n}_1 \rangle + 1/2} \right) \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Из (2.56) видно, что между модами на частотах ω_1 и ω_2 и между модами на частотах ω_1 и ω_2 может проявляться перепутанность, тогда как между модами с частотами ω_1 и ω_3 перепутанность не проявляется при любых параметрах ξ_d, ξ_u и η.

При отсутствии процесса смешения частот ($\xi_u = 0$) приходим к следующим выражениям для (2.56):

$$\begin{aligned} V_{12}^{cond} &= \frac{1/\operatorname{ch}(2\eta\sqrt{1+\xi_d^2}) + \xi_d^2}{2(1+\xi_d^2)} \xrightarrow{\eta\to\infty} \frac{\xi_d^2}{2(1+\xi_d^2)}, \\ V_{32}^{cond} &= \frac{\xi_d^2/\operatorname{ch}(2\eta\sqrt{1+\xi_d^2}) + 1}{2(1+\xi_d^2)} \xrightarrow{\eta\to\infty} \frac{1}{2(1+\xi_d^2)} \end{aligned} \tag{2.57}$$

Из (2.57) следует, что два связанных процесса преобразования частоты вниз оказывают влияние друг на друга: с ростом длины взаимодействия степень перепутанности между парами мод, связанными параметрическими процессами преобразования частоты вниз, монотонно увеличивается и стремиться к пределу, определяемому коэффициентом ξ_d.

На Рис. 2.6 представлены графики зависимостей условной дисперсии V_{12}^{cond} в зависимости от приведенной длины взаимодействия η и нормированного коэффициента связи ξ_u при различных значениях нелинейного коэффициента ξ_d. Из Рис. 2.6 видно, что с точки зрения перепутанности между состояниями мод с частотами ω_1 и ω_2, случай наибольшей перепутанности (наименьшего значения V_{12}^{cond}) реализуется при $\xi_u = \xi_d = \xi$. В этом случае функция V_{12}^{cond} стремиться к нулю с ростом длины взаимодействия, что свидетельствует об усилении перепутанности.

Таким образом, результаты анализа ЭПР-корреляций квадратурных компонент поля находятся в соответствии с результатами, полученными при рассмотрении информационных характеристик. Можно сделать вывод, что наличие процесса смешения частот между модами с частотами ω_1 и ω_3 приводит к подавлению шума, внесенного параметрическим процессом преобразования частоты вниз, протекающего в поле удвоенной волны накачки.

На Рис. 2.7 представлены графики зависимости дисперсии V_{32}^{cond} от длины взаимодействия η и нелинейного коэффициента ξ_u для различных значениях нелинейного коэффициента ξ_d. Из Рис. 2.7 видно, что в отличие от

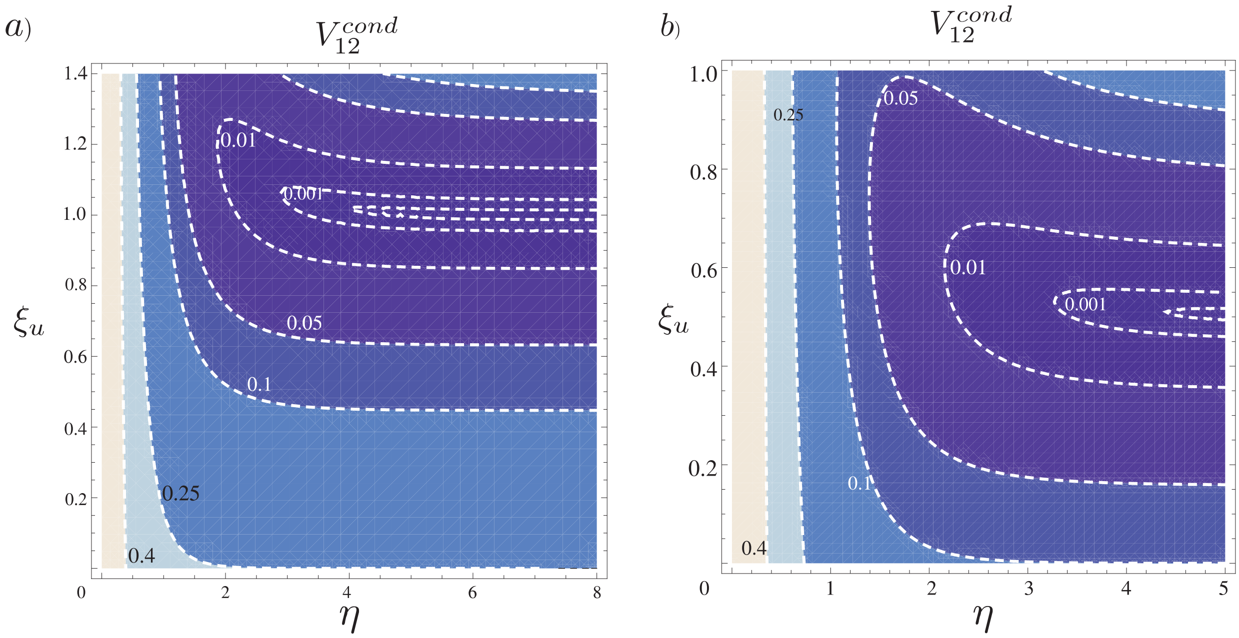

Рис. 2.6. Условная дисперсия V_{12}^{cond} в зависимости от приведенной длины взаимодействия η и нормированного коэффициента связи ξ_u при a) $\xi_d = 1.0$, b) $\xi_d = 0.5$

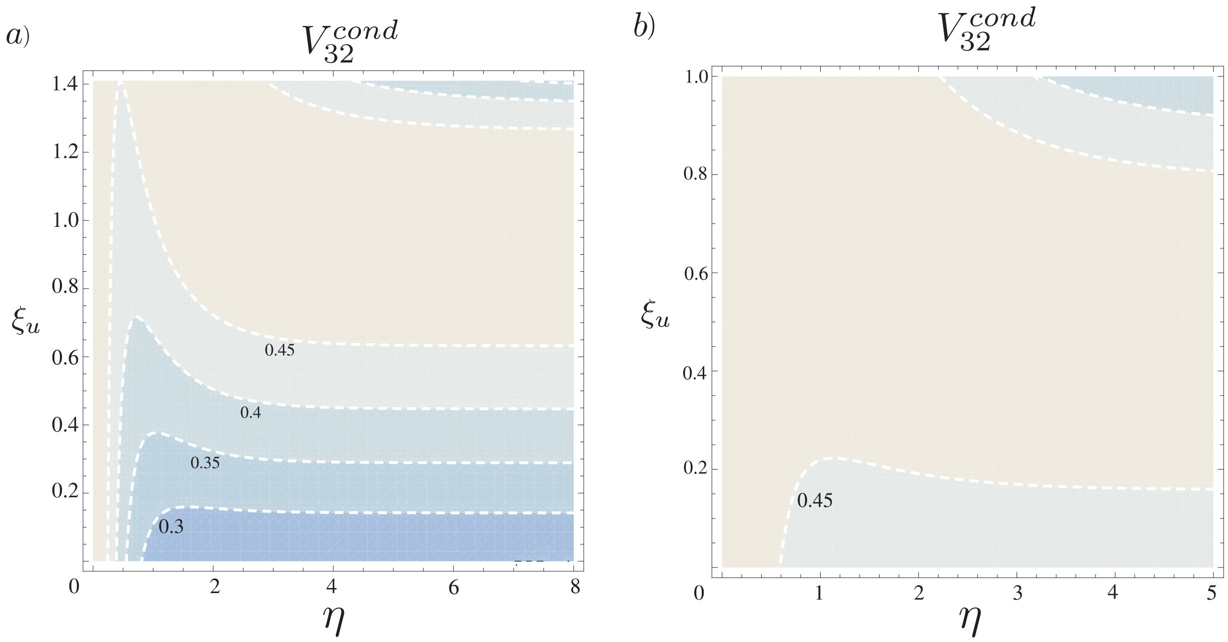

Рис. 2.7. Условная дисперсия V_{32}^{cond} в зависимости от приведенной длины взаимодействия η и нормированного коэффициента связи ξ_u при a) $\xi_d = 1.0$, b) $\xi_d = 0.5$

дисперсии V_{12}^{cond} дисперсия V_{32}^{cond} оказывается больше при данных значениях параметров, что свидетельствует о малой перепутанности между модами с частотами ω_2 и ω_3. Видно также, что с ростом эффективности процесса смешения частот перепутанность между модами на частотах ω_2 и ω_3 пропадает полностью.

2.4. Четырехмодовые перепутанные состояния, генерируемые в связанных параметрических процессах; квантовые уравнения, гамильтониан взаимодействия

2.4.1. Квантовые уравнения, гамильтониан взаимодействия

В этом разделе мы будем изучать три связанных невырожденных параметрических процесса, состоящих из одного процесса преобразования частоты вниз и двух процессов преобразования частоты вверх, одновременно протекающих в поле одной волны накачки с частотой ω_p. Речь будет идти о взаимодействии волн с частотами ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4 такими, что

$$\begin{aligned} \omega_p &= \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_1 + \omega_p &= \omega_3, \\ \omega_2 + \omega_p &= \omega_4, \end{aligned} \tag{2.58}$$

В работах [39, 40, 46] показано, что в кристаллах с апериодической модуляцией знака нелинейности для рассматриваемых связанных процессов возможно скомпенсировать фазовые расстройки:

$$\begin{aligned} \Delta k_1 &= k_p - k_1 - k_2, \\ \Delta k_2 &= k_p + k_1 - k_3, \\ \Delta k_3 &= k_p + k_2 - k_4. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Таким образом, полагая условия квазисинхронизма выполненными, а также, что все взаимодействующие волны плоские и монохроматические мы можем записать укороченные уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн. Далее, пользуясь процедурой, изложенной в разделе 2.1.2, можно перейти к квантовому описанию процесса. Гамильтониан взаимодействия для рассматриваемых связанных процессов (2.58) имеет вид

$$\hat{H}_{int} = i\hbar\frac{n}{c}\left[\beta(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_2) + \gamma_1(\hat{a}_1\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_3) + \gamma_2(\hat{a}_2\hat{a}_4^\dagger - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_4)\right]. \tag{2.60}$$

Уравнения Гейзенберга, соответствующие гамильтониану (2.60),

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_1}{dz} &= -\beta\hat{a}_2^\dagger + \gamma_1\hat{a}_3, \\ \frac{d\hat{a}_2^\dagger}{dz} &= -\beta\hat{a}_1 + \gamma_2\hat{a}_4^\dagger, \\ \frac{d\hat{a}_3}{dz} &= -\gamma_1\hat{a}_1, \\ \frac{d\hat{a}_4^\dagger}{dz} &= -\gamma_2\hat{a}_2^\dagger, \end{aligned} \tag{2.61}$$

где нелинейные коэффициенты связи

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi\sqrt{\omega_1\omega_2}}{cn}g_1 d_{\text{eff}}^{(1)}|A_p|e^{i(\varphi_p-\pi/2)}, \\ \gamma_1 &= \frac{2\pi\sqrt{\omega_1\omega_3}}{cn}g_2 d_{\text{eff}}^{(2)}|A_p|e^{i(\varphi_p-\pi/2)}, \\ \gamma_2 &= \frac{2\pi\sqrt{\omega_2\omega_4}}{cn}g_3 d_{\text{eff}}^{(3)}|A_p|e^{i(\varphi_p-\pi/2)}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

здесь n — показатель преломления для генерируемых мод, $|A_p|$, φ_p — амплитуда и фаза волны накачки, g_m — амплитуда фурье-компоненты апериодической структуры для соответствующего процесса. Здесь мы также, как и в разд. 2.1.2, пренебрегли в нелинейных коэффициентах различием показателей преломления на частотах взаимодейтсвующих волн: $n_j = n$ $(j = 1\ldots4)$.

2.4.2. Решение уравнений

Решение уравнений (2.61) представим в матричном виде:

$$\hat{\mathbf{a}}(z) = \mathcal{Q}(z)\hat{\mathbf{a}}_0,$$

где $\hat{\mathbf{a}}(z) = (\hat{a}_1(z), \hat{a}_2^\dagger(z), \hat{a}_3(z), \hat{a}_3^\dagger(z))^T$ — столбец, составленный из операторов генерируемых мод на выходе кристалла длиной z, $\hat{\mathbf{a}}_0 = \hat{\mathbf{a}}(z=0)$ — столбец, соответствующий входным значениям операторов, $\mathcal{Q}(z)$ — 4×4 матрица, с передаточными коэффициентами Q_{mn}, связывающими оператор на частоте ω_m на выходе кристалла с оператором на частоте ω_n на входе кристалла:

$$\mathcal{Q}(z) = \begin{pmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & Q_{13}(z) & Q_{14}(z) \\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) & Q_{23}(z) & Q_{24}(z) \\ Q_{31}(z) & Q_{32}(z) & Q_{33}(z) & Q_{34}(z) \\ Q_{41}(z) & Q_{42}(z) & Q_{43}(z) & Q_{44}(z) \end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

Передаточные коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
Q_{11}(z) &= \left((\Gamma_1^2+\gamma_2^2)\,\mathrm{ch}(\Gamma_1 z) - (\Gamma_2^2+\gamma_2^2)\,\mathrm{ch}(\Gamma_2 z)\right)/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{12}(z) &= \beta(\Gamma_2\,\mathrm{sh}(\Gamma_2 z) - \Gamma_1\,\mathrm{sh}(\Gamma_1 z))/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{13}(z) &= \gamma_1\left(\frac{\Gamma_1^2+\gamma_2^2}{\Gamma_1}\,\mathrm{sh}(\Gamma_1 z) - \frac{\Gamma_2^2+\gamma_2^2}{\Gamma_2}\,\mathrm{sh}(\Gamma_2 z)\right)/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{14}(z) &= \beta\gamma_2(\mathrm{ch}(\Gamma_2 z) - \mathrm{ch}(\Gamma_1 z))/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{22}(z) &= ((\Gamma_1^2+\gamma_1^2)\,\mathrm{ch}(\Gamma_1 z) - (\Gamma_2^2+\gamma_1^2)\,\mathrm{ch}(\Gamma_2 z))/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{23}(z) &= \beta\gamma_1(\mathrm{ch}(\Gamma_2 z) - \mathrm{ch}(\Gamma_1 z))/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{24}(z) &= \gamma_2\left(\frac{\Gamma_1^2+\gamma_1^2}{\Gamma_1}\,\mathrm{sh}(\Gamma_1 z) - \frac{\Gamma_2^2+\gamma_1^2}{\Gamma_2}\,\mathrm{sh}(\Gamma_2 z)\right)/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{33}(z) &= \gamma_1^2\left(\frac{\Gamma_2^2+\gamma_2^2}{\Gamma_2^2}\,\mathrm{ch}(\Gamma_2 z) - \frac{\Gamma_1^2+\gamma_2^2}{\Gamma_1^2}\,\mathrm{ch}(\Gamma_1 z)\right)/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{34}(z) &= \beta\gamma_1\gamma_2\left(\frac{\mathrm{sh}(\Gamma_1 z)}{\Gamma_1} - \frac{\mathrm{sh}(\Gamma_2 z)}{\Gamma_2}\right)/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),\\
Q_{44}(z) &= \gamma_2^2\left(\frac{\Gamma_2^2+\gamma_1^2}{\Gamma_2^2}\,\mathrm{ch}(\Gamma_2 z) - \frac{\Gamma_1^2+\gamma_1^2}{\Gamma_1^2}\,\mathrm{ch}(\Gamma_1 z)\right)/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2),
\end{aligned} \tag{2.64}$$

где инкременты:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,2} =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\beta^2-\gamma_1^2-\gamma_2^2 \pm \sqrt{(\beta^2-\gamma_1^2-\gamma_2^2)^2-4\gamma_1^2\gamma_2^2}\right]^{1/2} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\beta^2-(\gamma_1-\gamma_2)^2} \pm \sqrt{\beta^2-(\gamma_1+\gamma_2)^2}\right].
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Для остальных передаточных функций справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
Q_{21}(z) = Q_{12}(z), Q_{31}(z) = -Q_{13}(z), Q_{32}(z) = -Q_{23}(z),\\
Q_{41}(z) = -Q_{14}(z), Q_{42}(z) = -Q_{24}(z), Q_{43}(z) = Q_{34}(z).
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Из коммутационных соотношения для бозе-операторов поля: $[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn}$, вытекают соотношения, связывающие передаточные коэффициенты:

$$\sum_{j=1}^{4}(-1)^{m+j}Q_{mj}Q_{nj} = \delta_{mn}, \quad (m, n = 1\dots 4). \tag{2.67}$$

Как было сказано Разд. 2.1.3, с точки зрения получения интенсивных полей интерес представляют такие значения коэффициентов нелинейной связи, при которых инкременты действительные. Условие действительности инкрементов (2.65) требует, чтобы нелинейные коэффициенты связи удовлетворяли неравенству:

$$\beta \geq (\gamma_1 + \gamma_2), \tag{2.68}$$

или, иначе, чтобы суммарная эффективность преобразования частот вверх не превосходила эффективности процесса преобразования частоты вниз. В случае, когда нелинейные коэффициенты не удовлетворяют неравенству (2.68), гиперболические функции в передаточных коэффициентах заменяются на тригонометрические. Если же нелинейные коэффициенты связи таковы, что выполняется равенство $\beta = \gamma_1 + \gamma_2$, то эволюция всех параметрических процессов протекает с одним фактором усиления:

$$\Gamma = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}. \tag{2.69}$$

Вместо коэффициентов β, γ_1, γ_2 и длины взаимодействия z введем нормированные коэффициенты: $\xi_1 = \gamma_1/\beta$, $\xi_2 = \gamma_2/\beta$, которые характеризуют эффективность процессов смешения частот по отношению к процессу преобразования частоты вниз, и нормированную длину взаимодействия: $\eta = \beta z$. Таким образом, для аргументов гиперболических функций имеем:

$$\Gamma_{1,2}z = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-(\xi_1-\xi_2)^2} \pm \sqrt{1-(\xi_1+\xi_2)^2}\right]\eta. \tag{2.70}$$

Из (2.70) легко видеть, что разность $\xi_1 - \xi_2$ уменьшает инкременты для связанных параметрических процессов (2.58). Таким образом, с точки зрения интенсивности генерируемых полей случай равных эффективностей процессов смешения частот ($\xi_1 = \xi_2 = \xi$) является оптимальным. В режиме равных эффективностей процессов смешения частот уравнения (2.61) обладают дополнительной симметрией, которая проявляется в равенствах следующих передаточных функций:

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z), Q_{33}(z) = Q_{44}(z), Q_{13}(z) = Q_{24}(z). \tag{2.71}$$

Далее мы проведём квантовый статистический анализ расматриваемого связанного процесса во многом аналогичный таковому, выполненному в разделе 2.3.

2.4.3. Корреляции квадратурных компонент

Обратимся теперь к исследованию парных корреляций с точки зрения квадратурных компонент поля. Как уже было сказано, случай $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ является оптимальным с точки зрения получения интенсивных квантовых полей. Исследуем сначала ЭПР-корреляции между модами с частотами ниже частоты накачки (частоты ω_1 и ω_2) и между модами с частотами выше частоты накачки (частоты ω_3 и ω_4). Для дальнейших расчетов нам понадобятся корреляции квадратурных компонент для различных пар мод поля. Пользуясь (2.64), приходим к следующим выражениям для корреляций:

$$\langle \hat{x}_j \hat{x}_l \rangle = (-1)^{j+l} \langle \hat{y}_j \hat{y}_l \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} Q_{jk} Q_{kl} \tag{2.72}$$

Расчитаем дисперсии (2.52) при $g_x = g_y = 1$. Используя (2.72), приходим к следующим выражениям для дисперсий

$$\begin{aligned}
V_d =& V(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) = V(\hat{y}_1 - \hat{y}_2) = \\
&= \frac{e^{-\eta}}{1 - 4\xi^2} \left[\mathrm{ch}(\sqrt{1 - 4\xi^2}\eta) - \sqrt{1 - 4\xi^2}\, \mathrm{sh}(\sqrt{1 - 4\xi^2}\eta) - 4\xi^2 \right], \\
V_u =& V(\hat{x}_3 + \hat{x}_4) = V(\hat{y}_3 - \hat{y}_4) = \\
&= \frac{e^{-\eta}}{1 - 4\xi^2} \left[\mathrm{ch}(\sqrt{1 - 4\xi^2}\eta) + \sqrt{1 - 4\xi^2}\, \mathrm{sh}(\sqrt{1 - 4\xi^2}\eta) - 4\xi^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.73}$$

На рис. 2.8 представлены зависимости дисперсий (2.73) для пар мод с частотами ниже частоты накачки (a) и с частотами выше частоты накачки (b). Нетрудно видеть, что увеличение эффективности преобразования частоты

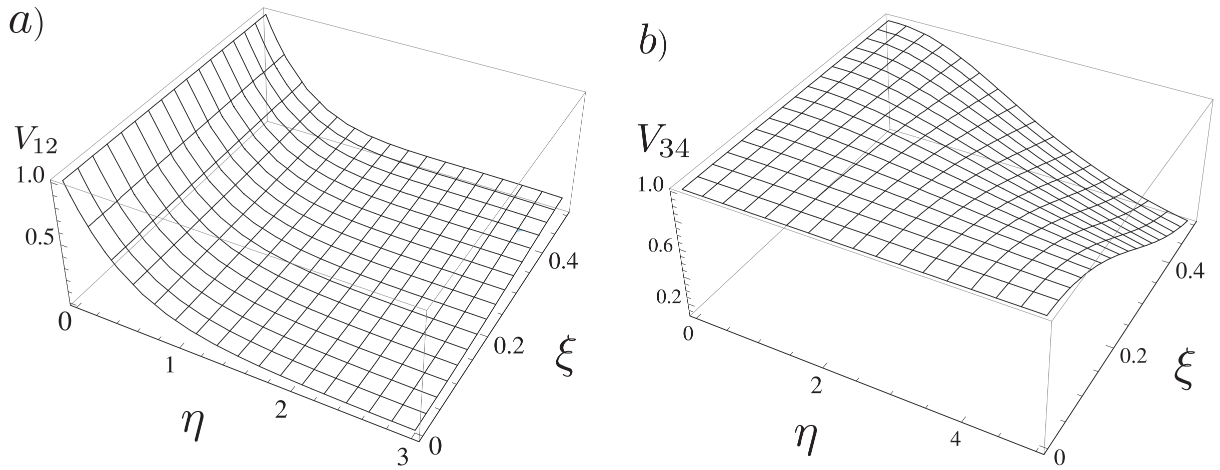

Рис. 2.8. Зависимость дисперсий (2.73) для различных пар мод от длины взаимодействия и нормированного нелинейного коэффициента $\xi = \xi_1 = \xi_2$ для различных пар мод: a) V_{12}, b) V_{34}

вверх (увеличение ξ) ведет к снижению перепутанности между модами (росту дисперсий) с частотами ниже частоты накачки. В то же время увеличение ξ приводит к усилению квантовых корреляций между модами с частотами выше частоты накачки. Это можно объяснить таким образом. В параметрическом процессе распада фотонов накачки происходит генерация перепутанных световых полей являются источниками перепутанности для мод на частотах выше частоты накачки. Процессы смешения частот при этом играют роль потерь для этих мод. С другой стороны, процессы смешения частот являются источниками перепутанности для мод на частотах выше частоты накачки.

Как следует из рис. 2.8, максимальная перепутанность между модами с частотами ω_3 и ω_4 достигается при отношении нелинейных коэффициентов $\xi = 1/2$. Исследуемые дисперсии в таком случае даются формулами:

$$\begin{aligned} V_d^{opt} &= \frac{1}{2}e^{-\eta}(\eta^2 - 2\eta + 2), \\ V_u^{opt} &= \frac{1}{2}e^{-\eta}(\eta^2 + 2\eta + 2). \end{aligned} \tag{2.74}$$

Обратимся к ЭПР-корреляциям между остальными парами мод. Дисперсии квадратур на частотах ниже и выше частоты накачки отличны друг от друга, поэтому для выявления квантовых корреляций будем пользоваться условными дисперсиями (2.54). Громоздкость выражений для V_{31}^{cond} и V_{41}^{cond} не позволяет записать их в наглядном виде подобно (2.73). На Рис. 2.9 пред-

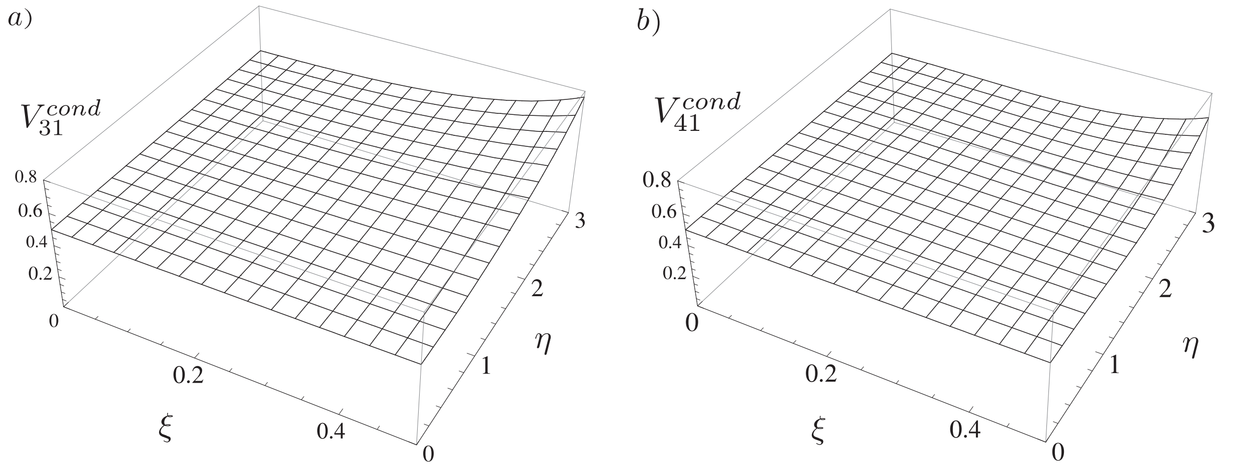

Рис. 2.9. Зависимость условных дисперсий $V_{31}^{cond} = V_{31,x}^{cond} = V_{31,y}^{cond}$ и $V_{41}^{cond} = V_{41,x}^{cond} = V_{41,y}^{cond}$ от длины взаимодействия η и коэффициента $\xi = \xi_1 = \xi_2$

ставлены графики зависимостей дисперсий V_{31}^{cond} и V_{41}^{cond} от длины взаимодействия η и нелинейного коэффициента $\xi = \xi_1 = \xi_2$. Из Рис. 2.9 видно, что при рассматриваемых параметрах условные дисперсии $V_{31}^{cond} \geq 1/2$, $V_{41}^{cond} \geq 1/2$, что свидетельствует об отсутствии ЭПР-корреляций между модами с частотами ниже и выше частоты накачки. Из Рис. 2.9 также видно, что в отличие от дисперсий V_{12} и V_{34}, изученных выше, при $\xi = 1/2$ дисперсии V_{31}^{cond} и V_{41}^{cond} принимают максимальные значения, которые даются выражениями:

$$V_{31}^{cond} = \frac{2 + 4\eta^2 + \eta^4 + 2\,\mathrm{ch}(2\eta)}{4\left(2\eta\,\mathrm{sh}\,\eta + (2+\eta^2)\,\mathrm{ch}\,\eta\right)},\qquad V_{41}^{cond} = \frac{1 + 2\eta^2 + 2\,\mathrm{ch}(2\eta)}{4\left(2\eta\,\mathrm{sh}\,\eta + (2+\eta^2)\,\mathrm{ch}\,\eta\right)} \tag{2.75}$$

2.5. Блочное перепутывание

В предыдущих разделах с помощью анализа парной перепутанности показано, что в связанном нелинейно-оптическом взаимодействии, состоящем из одного параметрического процесса преобразования частоты вниз и двух процессов смешения частот, формируются две пары перепутанных мод: перепутанные моды с частотами ω_1 и ω_2 и перепутанные моды с частотами ω_3 и ω_4. В настоящем разделе мы будем исследовать перепутывание между двумя парами мод, то есть будет исследоваться блочное перепутывание. Для анализа перепутанности между блоками будем пользоваться критерием, основанным на рассмотрении симплектических собственных значений корреляционной матрицы квадратурных компонент. Детальное изложение этого критерия перепутанности можно найти в работе [53].

Согласно этому критерию для анализа на перепутание N-модовой системы необходимо рассчитать матрицу $\tilde{\sigma}$, которая получается из корреляционной матрицы квадратурных компонент поля σ с помощью частичного преобразования квадратурных компонент поля. Частичное преобразование квадратур зависит от типа исследуемой перепутанности. Так, например, при исследовании перепутанности между двумя подсистемами для получения матрицы $\tilde{\sigma}$ следует изменить знаки квадратур $\hat{y}_l$, отвечающим модам одной из этих подсистем. Дальнейший анализ перепутанности строится на расчете собственных значений ν_i $(i = 1 \dots N)$ матрицы $i\Omega\tilde{\sigma}$, где Ω — симплектическая матрица, имеющая вид:

$$\Omega = \omega^{\oplus N}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мерой перепутанности является величина

$$\mathcal{N}(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} \prod\limits_l \nu_l^{-1}, & \text{если } \exists l : \nu_l < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \nu_l \geq \dfrac{1}{2} \quad \forall l. \end{cases} \tag{2.76}$$

Рассчитаем элементы корреляционной матрицы квадратурных компонент (2.50). Пользуясь (2.63), имеем следующие выражения для корреляций:

$$\begin{aligned} &\sigma_{x_j x_l} = \langle \hat{x}_j \hat{x}_l \rangle = (-1)^{j+l} \langle \hat{y}_j \hat{y}_l \rangle = \sum_{k=1}^{4} Q_{jk}(z) Q_{lk}(z), \\ &\sigma_{x_j y_l} = \langle \hat{x}_j \hat{y}_l \rangle = 0, \qquad (j, l = 1 \dots 4). \end{aligned} \tag{2.77}$$

В нашем случае мы исследуем перепутанность между двумя подсистемами — блоком мод с частотами ниже частоты накачки и блоком мод с частотами выше частоты накачки, поэтому воспользуемся преобразованием квадратур $\hat{y}_1 \to -\hat{y}_1$, $\hat{y}_2 \to -\hat{y}_2$, либо $\hat{y}_3 \to -\hat{y}_3$, $\hat{y}_4 \to -\hat{y}_4$.

В результате всех преобразований имеем два четырехкратно вырожденных собственных значения матрицы $|i\Omega\tilde{\sigma}|$:

$$\nu_{\pm} = \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - 1/4}}{2}}, \tag{2.78}$$

где

$$A = \frac{1}{4\mu_{12}} + \frac{1}{4\mu_{34}} - 2(\sigma^2_{x_1x_3} - \sigma^2_{x_1x_4}). \tag{2.79}$$

Здесь

$$\mu_{12} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2_{12}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\sigma_{12})}}, \quad \mu_{34} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2_{34}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\sigma_{34})}} \tag{2.80}$$

— величины, характеризующие степень чистоты состояния блока мод на частотах ниже частоты накачки и блока мод на частотах выше частоты накачки соответственно, обладающие свойствами: $0 \leq \mu \leq 1$, причем $\mu = 1$ отвечает чистому квантовому состояния. $\hat{\rho}_{12}$, $\hat{\rho}_{34}$ и σ_{12}, σ_{34} — операторы плотности и корреляционные матрицы квадратур для исследуемых блоков мод поля.

При $\mu_{12} = \mu_{34} = 1$ мы имеем блоки мод, соответствующие чистым состояниям. Таким образом в этой ситуации блоки мод не связаны друг с другом, и, следовательно $\nu_- = \nu_+ = \frac{1}{2}$. Заметим, что в случае неперепутанных блоков квадратурные корреляции между ними отсутствуют: $\sigma_{x_1x_3} = \sigma_{x_1x_4} = 0$.

На Рис. 2.10 представлен график зависимостей собственного значения ν_- от нормированной длины взаимодействия η и приведенного нелинейного коэффициента ξ. Из Рис. 2.10 видно, что с ростом длины взаимодействия величина ν_- стремится к нулю, что свидетельствует об увеличении перепутанности между блоком мод с частотами ω_1 и ω_2 и блоком мод с частотами ω_3 и ω_4. Видно также, что с увеличением ξ, то есть с ростом темпа взаимодействия между блоками мод, перепутанность между частотами ниже и выше частоты накачки растет.

2.5.1. Проявление блочного перепутывания

В Разд. 2.4.3 показано, что моды поля на частотах ниже частоты накачки и моды поля на частотах выше частоты накачки, формируемые в связанном процессе, проявляют ЭПР-корреляции, тогда как корреляции между остальными парами мод отсутствуют. Как отмечалось во Введении, двухмодовые перепутанные состояния (операторы $\hat{a}_j$ и $\hat{a}_l$) непрерывных переменных могут быть получены с помощью смешения на светоделителе двух сжатых состояний; пусть они описываются операторами $\hat{b}_j$ и $\hat{b}_l$. Однако можно показать, что смешение полученных таким образом перепутанных полей $\hat{a}_j$, $\hat{a}_l$ на другом светоделителе приводит к их распутыванию:

$$\hat{b}_j = \frac{\hat{a}_j + \hat{a}_l}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_l = \frac{\hat{a}_j - \hat{a}_l}{\sqrt{2}}. \tag{2.81}$$

Для состояний $\hat{a}_j$, $\hat{a}_l$, полученных в традиционном параметрическом процессе преобразования частоты вниз, квантовые флуктуации сжатых состояний $\hat{b}_j$, $\hat{b}_l$ некоррелированны. Покажем, что в нашем случае квантовые флуктуации сжатых состояний, создаваемых с помощью преобразования (2.81) мод $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ и мод $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$, сформированных в связанном процессе (2.58) коррелированны между собой, что является проявлением перепутанности между блоками, состоящих из этих мод.

На Рис. 2.11 изображена схема, в которой генерируются сжатые состояния с коррелированными квантовыми флуктуациями. В этой схеме моды полей $\hat{a}_l$ ($l = 1 \ldots 4$), полученные в АНФК, преобразуются на светоделителях BS_1 и BS_2. Заметим, что при этом должно быть $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_3 = \omega_4$, но моды с одинаковыми частотами имеют разную поляризацию, а светоделители поляризационные. Таким образом, преобразования (2.81) всегда можно осуществить.

Рассчитаем дисперсии квадратур преобразованных мод (2.81). Имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_{b1} - \hat{x}_{b3}) = V(\hat{y}_{b2} - \hat{y}_{b4}) = V(\hat{x}_{b1}) + V(\hat{x}_{b3}) - 2\langle \hat{x}_{b1}\hat{x}_{b3}\rangle = \\ = \left(V(\hat{x}_{b1}) + V(\hat{x}_{b3})\right) K, \end{aligned} \tag{2.82}$$

где

$$K = 1 - \frac{2\langle \hat{x}_{b1}\hat{x}_{b3}\rangle}{V(\hat{x}_{b1}) + V(\hat{x}_{b3})} = 1 - \frac{4(\sigma_{x_1x_3} + \sigma_{x_1x_4})}{V(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + V(\hat{x}_3 + \hat{x}_4)} \tag{2.83}$$

— величина, характеризующая ЭПР-корреляции между блоками мод. При

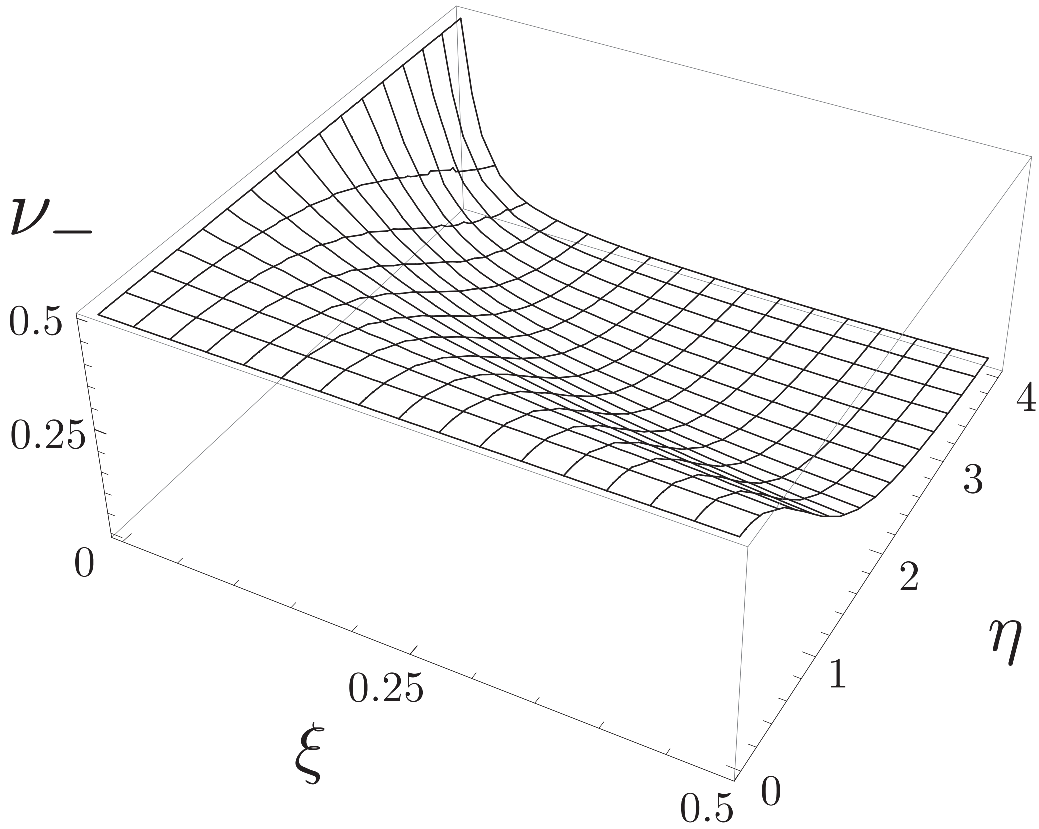

Рис. 2.10. Зависимость собственного значения ν_- от нормированной длины взаимодействия η и нелинейного коэффициента $\xi = \xi_1 = \xi_2$

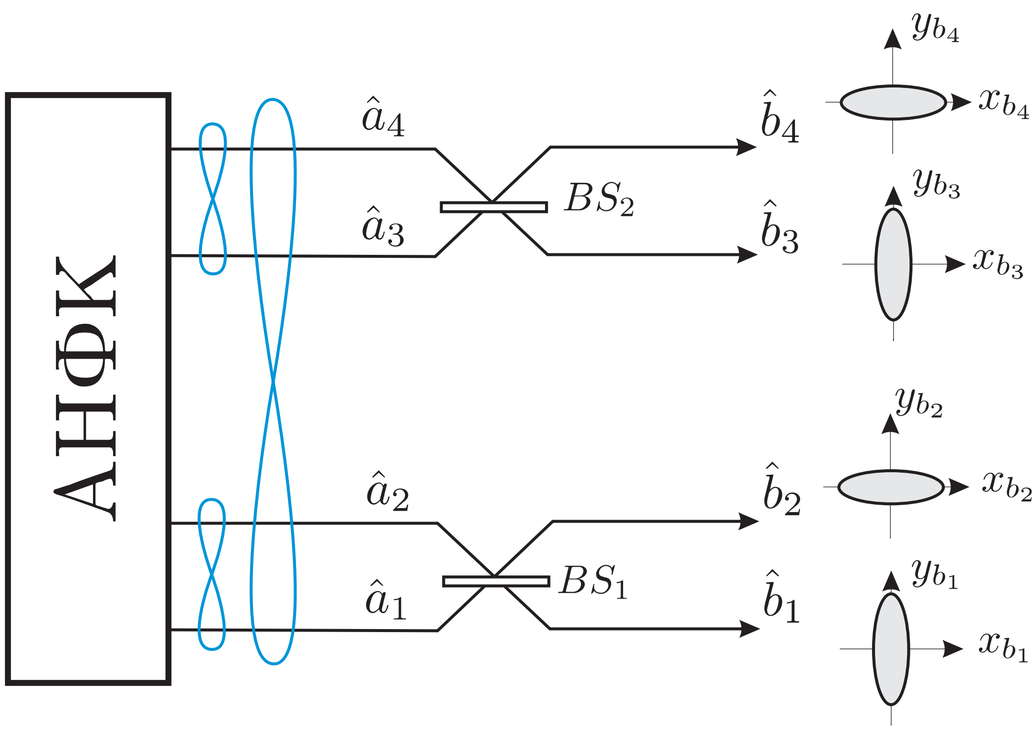

Рис. 2.11. Схема получения сжатых состояний с коррелированными флуктуациями. Подавленные флуктуации квадратур коррелируют между модами $\hat{b}_1$ и $\hat{b}_3$, а $\hat{b}_2$ с $\hat{b}_4$

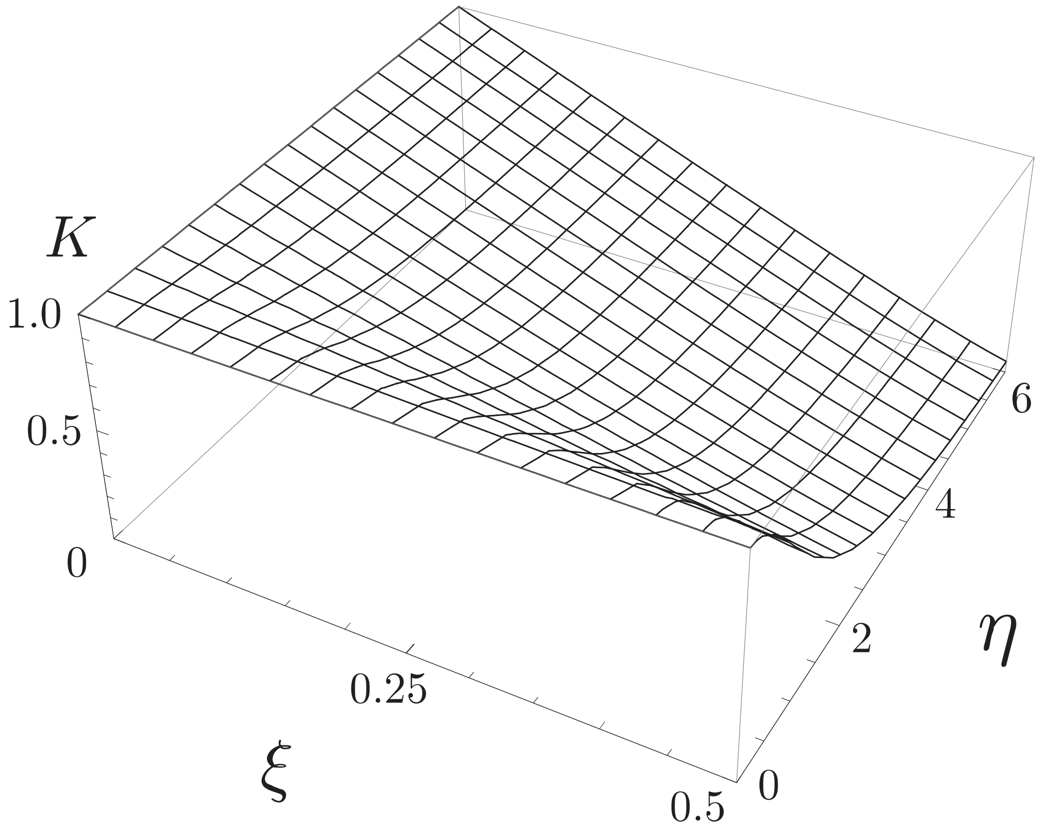

Рис. 2.12. Корреляция между блоками мод с частотами выше и ниже частоты накачки

отсутствии корреляций между блоками $\sigma_{x_1x_3} = \sigma_{x_1x_4} = 0$ величина $K = 1.0$, перепутанности между блоками нет. При $\sigma_{x_1x_3} > 0$, $\sigma_{x_1x_4} > 0$ имеем $K < 1$, что свидетельствует о наличии перепутанности между блоками.

На Рис. 2.12 представлен график зависимости параметра K от нормированной длины взаимодействия η и приведенного нелинейного коэффициента ξ. Из сравнения Рис. 2.12 с Рис. 2.11 видно, что характер зависимости параметра K совпадает с характером зависимости симплектического собственного значения ν_- (2.78).

2.6. Приложение к Главе 1.

Возможность реализации связанных трехчастотных квазисинхронных оптических взаимодействий в АНФК и оценки нелинейных длин

Как упоминалось ранее, несколько трехчастотных параметрических процессов удается одновременно реализовать в апериодических нелинейных фотонных кристаллах (АНФК). Структура таких кристаллов, определяемая функцией модуляции знака нелинейности $g(z)$, может быть сравнительно просто рассчитана с помощью метода суперпозиции модуляции нелинейной восприимчивости. Подробное исследование этого метода можно найти в [38]. Согласно этому методу, функция $g(z)$ нелинейной структуры кристалла, в котором могут эффективно протекать N связанных трехчастотных параметрических процессов дается выражением:

$$g(z) = \mathrm{sign}\left[\sum_{j=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda_j} z + \varphi_j\right)\right], \tag{2.84}$$

где $\mathrm{sign}(x)$ — знакопеременная функция $\mathrm{sign}(x) = 1$ при $x > 0$, $\mathrm{sign}(x) = -1$ при $x < 0$ и $\mathrm{sign}(x) = 0$ при $x = 0$, a_j, φ_j — амплитуда и фаза модулирующих гармоник, $\Lambda_j = 2\pi/|\Delta k_j|$ — период нелинейной структуры для реализации j-го процесса с волновой расстройкой Δk_j.

Амплитуды a_j определяют темп нелинейного взаимодействия j-го процесса, то есть нелинейный коэффициент связи волн в этом процессе. Таким образом, при создании АНФК рассматриваемым методом имеется возможность изменять эффективность процессов, задействованных в связанных взаимодействиях. Отметим, что динамически менять a_j не представляется возможным, эти коэффициенты выбираются на этапе создания кристалла. Как показано в [38], изменение значений фаз φ_j не отражается на эффективности нелинейного преобразования, хотя оно может влиять на динамику процесса, так как эквивалентно изменению начальных фаз волн, участвующих в связанном процессе. В работе [40] показано, что можно получить аналитические зависимости $g_m(a_1, \ldots, a_N)$, что позволяет находить необходимые пространственные амплитуды a_j по заданным коэффициентам нелинейной связи.

Оценим реальные длины кристаллов, которые соответствуют приведенным длинам взаимодействия, рассмотренным в настоящей главе.

В общем случае эффективные нелинейные коэффициенты связи $d_{\text{eff}}^{(m)}$ в нелинейных коэффициентах (2.3) зависят от дисперсии кристалла и геометрии волнового взаимодействия. Для связанного процесса, состоящего из двух параметрических преобразования частоты вниз и одного процесса смешения частот (2.1) имеем эффективные нелинейности [18]:

$$\begin{aligned} d_{\text{eff}}^{(1)} &= \mathbf{e}_1(\chi^{(2)}(\omega_1 = \omega_p - \omega_2) : \mathbf{e}_p\mathbf{e}_2) = \\ &= \mathbf{e}_2(\chi^{(2)}(\omega_2 = \omega_p - \omega_1) : \mathbf{e}_p\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_p(\chi^{(2)}(\omega_p = \omega_1 + \omega_2) : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} d_{\text{eff}}^{(2)} &= \mathbf{e}_2(\chi^{(2)}(\omega_2 = \omega_{2p} - \omega_3) : \mathbf{e}_{2p}\mathbf{e}_3) = \\ &= \mathbf{e}_3(\chi^{(2)}(\omega_3 = \omega_{2p} - \omega_2) : \mathbf{e}_{2p}\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_{2p}(\chi^{(2)}(\omega_{2p} = \omega_2 + \omega_3) : \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3), \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} d_{\text{eff}}^{(3)} &= \mathbf{e}_1(\chi^{(2)}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_p) : \mathbf{e}_3\mathbf{e}_p) = \\ &= \mathbf{e}_3(\chi^{(2)}(\omega_3 = \omega_p + \omega_1) : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_p) = \mathbf{e}_p(\chi^{(2)}(\omega_p = \omega_3 - \omega_1) : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3), \end{aligned} \tag{2.87}$$

где $\chi^{(2)}$ — тензор квадратичной нелинейности кристалла, $\mathbf{e}_m$ — вектор поляризации моды на m-ой частоте ($m = 1, 2, 3, p, 2p$).

В качестве нелинейного среды рассмотрим кристалл ниобата лития, принадлежащий к группе симметрии $3m$. Как известно, тензор нелинейной восприимчивости всегда симметричен относительно перестановки двух последних индексов $\chi_{ijk} = \chi_{ikj}$, и традиционно тензор представляется матрицей d_{il} ($i = 1, 2, 3, l = 1, 2, \ldots 6, \chi_{ijk} = 2d_{il}$). Для $\mathrm{LiNbO_3}$ отличны от нуля восемь компонент: $d_{22} = -d_{16} = -d_{21} = 2,46$ пм/В, $d_{31} = d_{15} = d_{24} = d_{32} = -4,64$ пм/В, $d_{33} = -41,46$ пм/В. Формулы эффективных нелинейностей для различных типов трехчастотных взаимодействий следующие:

$$\begin{aligned} ee - e: &\quad \chi^{(2)} = -(3d_{15}\cos^2\theta\sin\theta + d_{33}\sin^3\theta + d_{22}\cos^3\theta\sin 3\varphi), \\ oo - e: &\quad \chi^{(2)} = d_{15}\sin\theta - 2d_{22}\cos\theta\sin 3\varphi, \\ oo - o: &\quad \chi^{(2)} = -d_{22}\cos\varphi(2\cos 2\varphi - 1), \\ ee - o: &\quad \chi^{(2)} = -d_{22}\cos^2\theta\cos\varphi(2\cos 2\varphi - 1). \end{aligned} \tag{2.88}$$

Здесь углы θ и φ в сферических координатах определяют направление распространения волны накачки, d_{il} — компоненты тензора нелинейной восприимчивости (см. рис. 2.13). Символ o соответствует волне с обыкновенной поляризацией, e — с необыкновенной поляризацией.

Как видно из формул (2.88), наибольшую нелинейность (d_{33}) удается задействовать, когда все взаимодействующие волны имеют необыкновенную поляризацию. Будем считать, что направление распространения волн перпундикулярно оптической оси, то есть $\theta = \pi/2$. В этом случае $\chi^{(2)} = -d_{33}$, то есть коэффициент нелинейной связи волн максимально возможный и нет зависимости от угла φ.

Проведем оценки нелинейных длин для кристалла $\mathrm{LiNbO_3}$. Считаем, что амплитуда вектора обратной решетки $g_m = 2/\pi$, который компенсирует фазовую расстройку 1. Пользуясь (2.10) и учитывая выражение для интенсивности волны накачки:

$$I_p = \frac{c}{n}\frac{|A_p|^2}{8\pi}$$

имеем следующее выражение для так называемой нелинейной длины взаимодействия:

$$L_{nl} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{4\pi^2 d_{\text{eff}}}\sqrt{\frac{c\lambda_1\lambda_2}{8\pi n I_p}}. \tag{2.89}$$

Здесь λ_1 и λ_2 — длины взаимодействующих волн. Для оценки положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Как уже говорилось, для кристала $\mathrm{LiNbO_3}$ наибольшая эффективная нелинейность может быть задействована когда взаимодействующие волны имеют необыкновенную поляризацию. Этот тип взаимодействия может быть реализован для обоих рассмотренных связанных процессов (2.1) и (2.58). Для такого случая при $I_p = 100$ МВт/см^2 и $\lambda = 1.064$ мкм нелинейная длина $L_{nl} \approx 0.1$ см. Однако, как видно из (2.88), в связанном процессе (2.58) волны имеют разную поляризацию при типе взаимодействия оо-е: $\omega_p^o = \omega_1^o + \omega_2^e$, $\omega_p^o + \omega_1^o = \omega_3^e$, $\omega_p^o + \omega_1^e = \omega_3^o$. Хотя в этой ситуации задействована меньшая эффективная нелинейность, чем в ее-е взаимодействии, вырождение волн по поляризации позволяет реализовать связанные взаимодействия с частотами $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_3 = \omega_4$, что позволяет упростить преобразование и регистрацию квантовых полей,

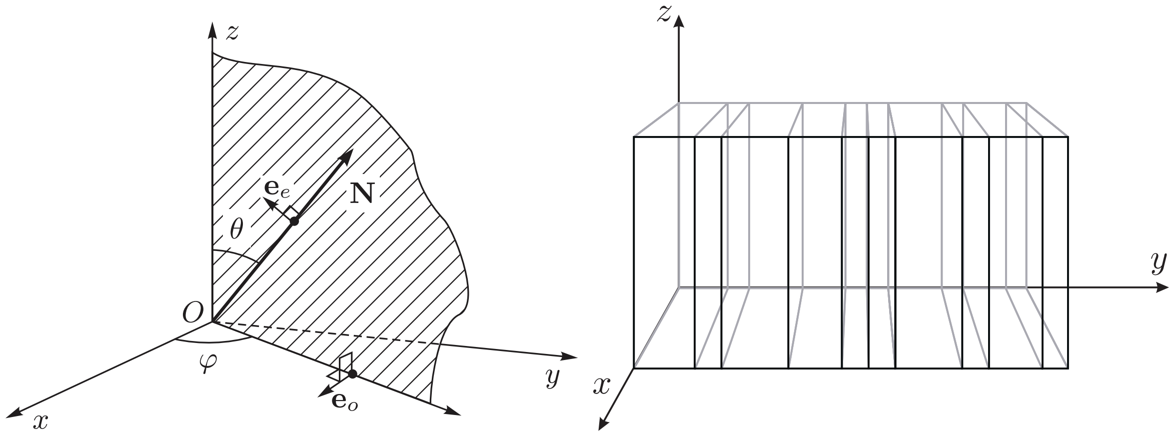

Рис. 2.13

генерируемых в связанном взаимодействии. В этой ситуации при параметрах, указанных выше, оценки дают значение $L_{nl} \approx 1.0$ см.

2.7. Выводы

В настоящей Главе детально исследованы квантовые корреляции двух пятичастотных связанных параметрических взаимодействия: 1) взаимодействия, состоящего из двух параметрических процессов преобразования частоты вниз и одного процесса смешения частот, протекающего в поле двух волн накачек с кратными частотами, и 2) взаимодействия, протекающего в поле одной волны накачки, состоящего из одного процесса преобразования частоты вниз и двух процессов смешения частот.

Исследования перепутанности в первом связанном взаимодействии, проведенные с помощью рассмотрения корреляций квадратурных компонент поля и информационных характеристик, показали что в нем формируются трехмодовые перепутанные состояния. Показано, что процессы преобразования частоты вниз оказывают шумовое влияние друг на друга: с увеличением эффективности одного процесса преобразования частоты вниз перепутанность, формируемая в другом процессе преобразования частоты вниз уменьшается. Показано также, что процесс смешения частот может уменьшить шумовое влияние одного параметрического процесса преобразования частоты вниз на другой. Причем оптимальное уменьшение шумового влияния достигается когда эффективность процесса смешения частот равна эффективности процесса преобразования частоты вниз, шумовое действие которого необходимо уменьшить. Это свойство связанного процесса может быть использовано, например, в схемах управляемого сверхплотного кодирования (см., например, [62, 63]).

Исследования перепутанности в связанном взаимодействии, состоящем из одного параметрического процесса преобразования частоты вниз и двух процессов смешения частот, показали, что в нем формируются два двухмодовых перепутанных состояния. Показано, что оптимальный случай с точки зрения величины перепутанности реализуется, когда эффективности процессов смешения частот равны друг другу. Этот процесс может служить источником перепутанных состояний между высокочастотными модами, когда перепутанность между ними нельзя получить в традиционном параметрическом процессе из-за поглощения накачки в нелинейном кристалле.

Показано также, что в связанном процессе, протекающем в поле одной волны накачки, блоки мод на частотах ниже (частоты ω_1 и ω_2) и выше (частоты ω_3 и ω_4) частоты накачки перепутанны между собой. Этот тип перепутанности может быть использован, например, в секретных протоколах передачи информации, в которых для передачи и получения сообщения необходимы действия двух действующих лиц, как с отправляющей, так и с получающей сторон.

Глава 3

Телепортация перепутанных двухчастотных пространственно-одномодовых состояний

Телепортация — передача квантового состояния из одного места в другое без непосредственного участия в этой передаче носителя квантового состояния, играет важную роль в квантовой информации. Основное свойство квантовой телепортации — передача неизвестного квантового состояния без нарушения его состояния, находит широкое применение в схемах квантовой информации как для передачи состояния квантовых систем между отдельными частями квантового компьютера, так и непосредственно для выполнения квантовых вычислений [86, 87]. Использование телепортации в квантовой коммуникации позволяет увеличить пропускную способность канала связи, что находит применения в схемах сверхплотного кодирования [60].

Алгоритм телепортации был впервые предложен в работах [69, 70]. На сегодняшний день осуществлены эксперименты по телепортации состояний одиночных фотонов [72–76], атомов [77–79] и непрерывных переменных [80, 81, 81, 82]. Теоретические исследования телепортации рассмотрены в работах [83, 84, 90].

В настоящей Главе исследуется схема телепортации перепутанных двухмодовых состояний, в которой в качестве вспомогательного квантового перепутанного состояния используется четырехчастотное поле, генерируемое в связанном параметрическом взаимодействии.

3.1. Схема телепортации

3.1.1. Алгоритм телепортации квантовых состояний

Рассмотрим сначала, не вдаваясь в детали, алгоритм телепортации квантового состояния [69]. На рис. 3.1 представлены основные шаги алгоритма телепортации. В схеме телепортации перепутанного состояния два действу-

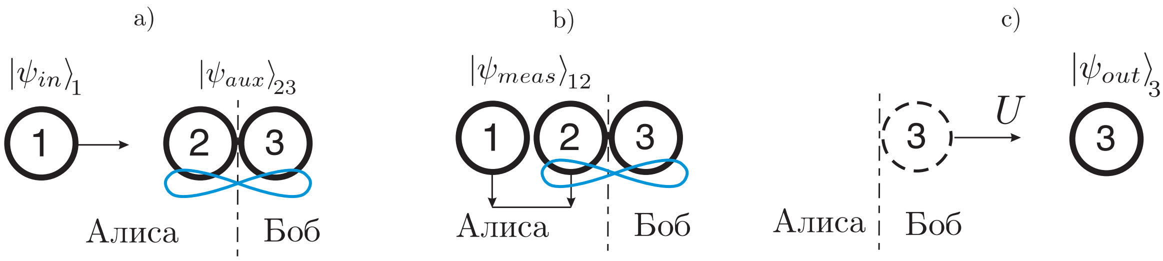

Рис. 3.1. Схема алгоритма телепортации квантового состояния.

ющих лица: отправитель состояния, традиционно называемый в литературе Алисой, и получатель состояния, называемый Бобом. Алиса обладает неизвестным ей состоянием $|\psi_{in}\rangle_1$, носителем которого является квантовая система 1. Алиса хочет передать квантовое состояние $|\psi_{in}\rangle_1$ Бобу. Для этой цели между Алисой и Бобом устанавливается квантовый канал связи (рис. 3.1a), которым служит вспомогательное состояние $|\psi_{aux}\rangle_{23}$ двух перепутанных квантовых систем: система 2, принадлежащая Алисе, и система 3, принадлежащая Бобу. Затем Алиса комбинирует телепортируемое состояние $|\psi_{in}\rangle_1$ со своей частью перепутанного вспомогательного состояния $|\psi_{aux}\rangle_{23}$, после чего проводит измерения над комбинированным состоянием $|\psi_{meas}\rangle_{12}$ (рис. 3.1b). Результаты своих измерений Алиса посылает Бобу, который, в свою очередь, проводит унитарное преобразование U своей части вспомогательного состояния в соответствии с результатами измерений Алисы. В конечном итоге Боб получает состояние $|\psi_{out}\rangle_3$ (рис. 3.1c).

Для описания соответствия телепортированного состояния $|\psi_{out}\rangle_3$ изначальному состоянию $|\psi_{in}\rangle_1$ пользуются величиной, называемой точностью. Для чистых состояний точность определяется как

$$F = |\langle\psi_{in}|\psi_{out}\rangle|^2, \qquad 0 \leq F \leq 1, \tag{3.1}$$

и при идеальной телепортации принимает максимальное значение $F = 1$. Заметим, что в англоязычной литературе параметр F называется fidelity. Установившегося его перевода на русский язык пока нет. Иногда его называет верностью или достовеностью, нам же представляется более адекватный перевод как точность.

В общем случае, однако, телепортируемое состояние не является чистым и описывается оператором плотности $\hat{\rho}_{out}$. В таком случае пользуются параметром точности, который определяется следующим образом:

$$F = \langle \psi_{in} | \hat{\rho}_{out} | \psi_{in} \rangle. \tag{3.2}$$

Для успешной передачи перепутанного состояния необходимо передать квантовые корреляции между модами. Поэтому одного параметра точности для описания качества передачи состояния может быть недостаточно. Таким образом, для описание свойств перепутанности между частями телепортируемого состояния, помимо параметра точности, следует воспользоваться и другими характеристиками, описывающей квантовые корреляции. Такой характеристикой может служить любая величина, с помощью которой можно сравнить перепутанность посылаемого состояния с перепутанностью полученного. Например, в случае телепортации двухмодового состояния можно сравнивать ЭПР-корреляции телепортированного состояния с ЭПР-корреляциями исходного перепутанного состояния.

3.1.2. Схема телепортации двухмодовых перепутанных состояний

На рис. 3.2а представлена схема телепортации двухмодовых перепутанных состояний. Перепутанное двухмодовое состояние генерируется в традиционном параметрическом процессе преобразования частоты вниз:

$$\omega_p' = \omega_s + \omega_i, \tag{3.3}$$

где ω_s, ω_i — частота сигнальной и холостой волны соответственно, ω_p' — частота накачки. Состояние поля, генерируемое в параметрическом процессе (3.3) передается Алисе. Обозначим через $\hat{a}_s$, $\hat{a}_i$ бозе-операторы для сигнальной и холостой волны.

Между Алисой и Бобом устанавливается квантовый канал связи. Для этого используются состояния, генерируемые в связанных процессах (2.58): $\omega_p = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + \omega_p = \omega_3$, $\omega_2 + \omega_p = \omega_4$. На рис. 3.2а операторы поля, формируемого в связанных взаимодействиях обозначены через $\hat{a}_j$, где индекс j соответствует генерируемой частоте ω_j ($j = 1 \dots 4$). Состояние поля на несущих частотах ω_1 и ω_4 посылается Алисе, а состояние поля на частотах ω_2 и ω_3 — Бобу. Как было сказано в предыдущем разделе, на следующем этапе телепортации необходимо провести измерения над комбинированным состоянием перепутанного состояния Алисы и ее частью вспомогательного состояния. В нашем случае необходимо произвести измерения квадратурных компонент поля. С точки зрения простоты измерения квадратур комбинированного состояния поля наилучший случай реализуется, когда частоты ω_1 и ω_4 совпадают с несущими частотами телепортируемого состояния ω_s и ω_i:

$$\omega_1 = \omega_s, \quad \omega_4 = \omega_i. \tag{3.4}$$

На рис.3.2b представлена возможная схема реализации алгоритма телепортации с установкой, использующей один задающей генератор. В этой схеме задающий генератор — лазер — генерирует когерентное интенсивное излучение на частоте ω_p. Затем это излучение делится светоделительной пластинкой на 2 части. Одна часть подается на апериодический нелинейный фотонный кристалл (АНФК), в котором генерируются рассматриваемые связанные взаимодействия, а другая часть подается на генератор второй гармоника (ГВГ). Излучение на удвоенной частоте $2\omega_p$ подается на нелинейный кристалл (таким кристаллом может быть НФК), в котором происходит генерация перепутанного состояния на частотах ω_s и ω_i. Легко заметить, что при данных частотах накачек условие равенства частот (3.4) удается реализовать. Чтобы убедиться в этом, достаточно сложить первое и третье равенство из частотных соотношений (2.58): $\omega_p + \omega_2 + \omega_p = \omega_1 + \omega_2 + \omega_4$, откуда сразу следует: $2\omega_p = \omega_1 + \omega_4$. Таким образом, в этой схеме $\omega_p' = 2\omega_p$. Задающий генератор может давать излучение, например, с длиной волны $\lambda_p = 1.06$ мкм, при этом длины волн для генерируемых волн: $\lambda_1 = \lambda_s = 2.0$ мкм, $\lambda_2 = 2.26$ мкм, $\lambda_3 = 0.69$ мкм, $\lambda_4 = \lambda_i = 0.72$ мкм.

3.2. Измерения и преобразования квантовых полей

3.2.1. Измерение, проводимые Алисой

На следующем этапе протокола квантовой телепортации Алиса сбивает на светоделителях BS_1, BS_2 перепутанное состояние, которое она хочет передать Бобу, с модами поля $\hat{a}_1$ $\hat{a}_4$, полученными из связанных взаимодействий.

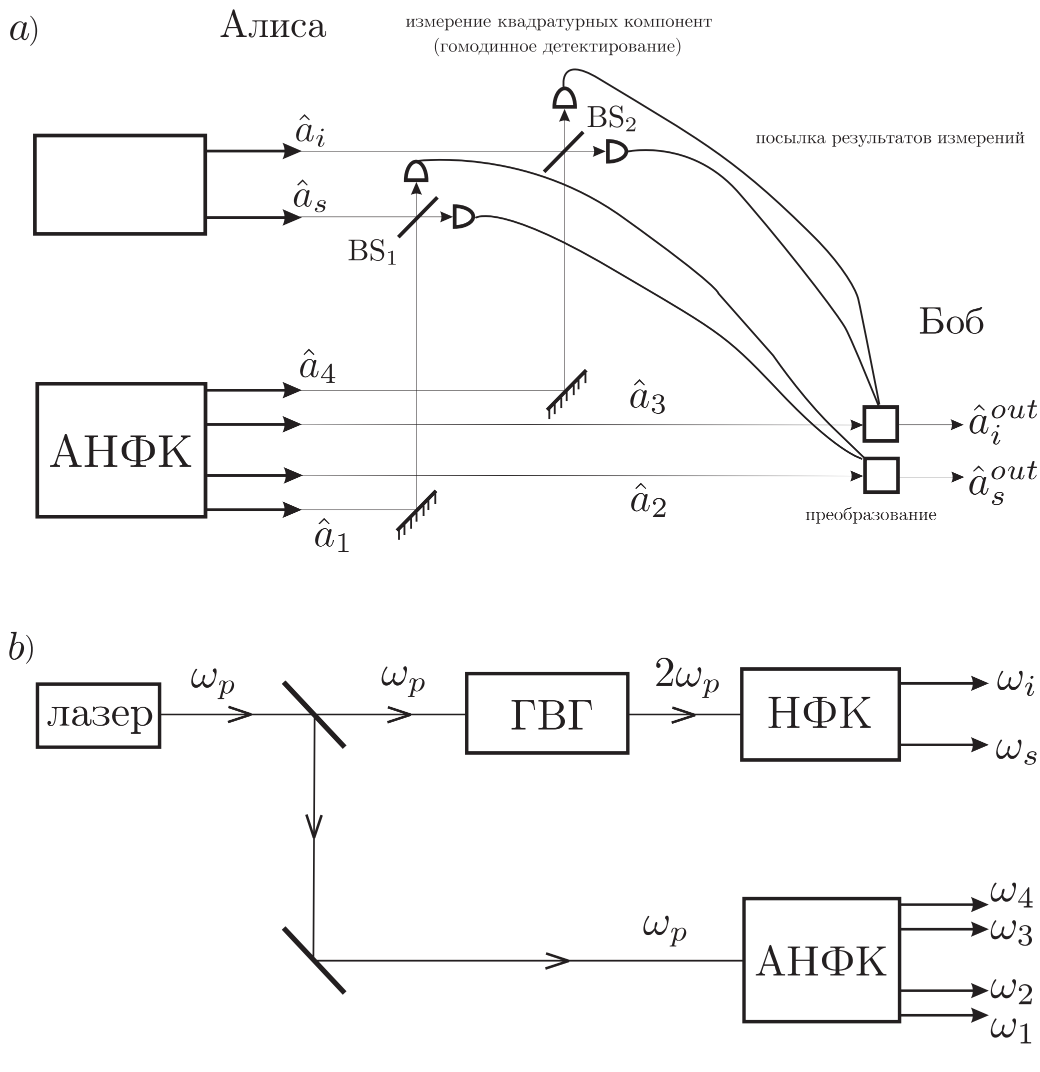

Рис. 3.2. a) Схема телепортации перепутанного состояния с использованием связанных процессов (предполагается выполнение следующих соотношений для частот: $\omega_1 = \omega_s$, $\omega_4 = \omega_i$), b) Возможная схема телепортации с использованиме одного задающего генератора — лазера

Без ограничения общности будем полагать все светоделители полностью симметричными по пропусканию/отражению. Для преобразования операторов поля светоделителями имеем для BS_1:

$$\hat{b}_{s1} = \frac{\hat{a}_s + \hat{a}_1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_{s2} = \frac{\hat{a}_s - \hat{a}_1}{\sqrt{2}}, \tag{3.5}$$

и для BS_2:

$$\hat{b}_{i1} = \frac{\hat{a}_i + \hat{a}_4}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_{i2} = \frac{\hat{a}_i - \hat{a}_4}{\sqrt{2}}, \tag{3.6}$$

Здесь $\hat{b}_{sm}$, $\hat{b}_{im}$ операторы, связанные с преобразованными полями на выходе светоделителей BS_1 и BS_2 соответственно, индекс m соответствует определенному выходному порту светоделителя $(m = 1, 2)$.

После этого Алиса проводит измерения квадратурных компонент. Традиционной методикой измерения квадратурных компонент поля на сегодняшний день является техника балансного гомодинного детектирования, которая представлена на рис. 3.3. В этой схеме измеряемое поле, описываемое бозе-оператором $\hat{a}$, смешивается с интенсивным полем гомодина на светоделителе BS, несущая частота которого совпадает с несущей частотой измеряемого поля. Интенсивное поле гомодина позволяет описывать его классической амплитудой поля $A = |A|e^{i\varphi}$. На выходе BS имеем поля с операторами

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{a} + A}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_2 = \frac{\hat{a} - A}{\sqrt{2}}. \tag{3.7}$$

Проводятся измерения фотонов поля $\hat{b}_1$ и $\hat{b}_2$; их среднее число

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_1 \rangle &= \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle = \frac{1}{2}(|A|^2 + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + A\hat{a}^\dagger + A^*\hat{a}), \\ \langle \hat{n}_2 \rangle &= \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle = \frac{1}{2}(|A|^2 - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - A\hat{a}^\dagger - A^*\hat{a}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Сигналы, полученные с детекторов , вычитаются:

$$\langle \hat{n}_1 \rangle - \langle \hat{n}_2 \rangle = \sqrt{2}|A|\langle \hat{x}^{(\varphi)} \rangle, \tag{3.9}$$

где $\hat{x}^{(\varphi)} = (\hat{a}e^{i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi})/\sqrt{2}$ — измеряемая квадратурная компонента поля $\hat{a}$. Из (3.9) видно, что измеряемая квадратура зависит от фазы φ поля гомодина, при этом $\hat{x}^{(0)} = \hat{x}$, $\hat{x}^{(\pi/2)} = \hat{y}$.

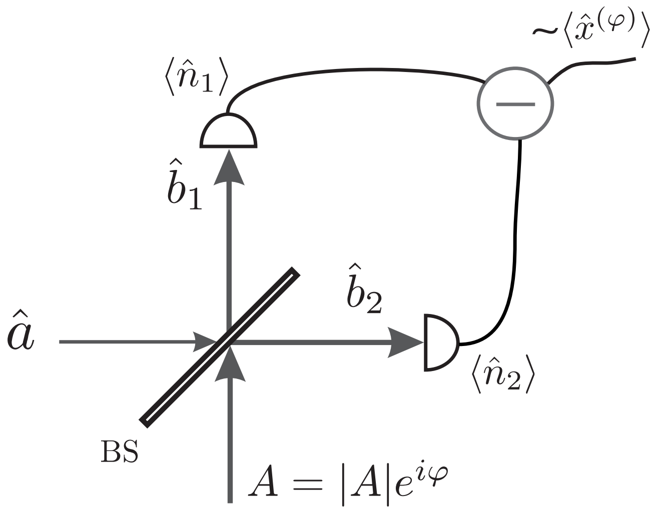

Рис. 3.3. Схема балансного гомодинного измерения квадратурных компонент поля.

Для поля на выходе светоделителя с произвольной степенью точности возможно провести лишь такие измерения квадратур, в которых в измеряется либо квадратура $\hat{x}$, либо квадратура $\hat{y}$ (см. ниже). Таким образом для одного светоделителя имеем два варианта измерений. В нашем случае 2-х светоделителей имеем 4 варианта возможных измерений. Один из таких вариантов измеряемых комбинаций для сигнального плеча (светоделитель BS_1):

$$\hat{X}_{s1} = \frac{\hat{x}_s + \hat{x}_1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{Y}_{s2} = \frac{\hat{y}_s - \hat{y}_1}{\sqrt{2}} \tag{3.10}$$

и для холостого плеча (светоделитель BS_1):

$$\hat{X}_{i1} = \frac{\hat{x}_i + \hat{x}_4}{\sqrt{2}}, \quad \hat{Y}_{i2} = \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_4}{\sqrt{2}}. \tag{3.11}$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что коммутаторы $\left[\hat{X}_{s1}, \hat{Y}_{s2}\right] = 0$, $\left[\hat{X}_{i1}, \hat{Y}_{i2}\right] = 0$, что свидетельствует о возможности одновременного измерения квадратур $\hat{X}_{(s,i)m}$, $\hat{Y}_{(s,i)m}$.

Проведя измерения, Алиса посылает результаты своих измерений X_{s1}, Y_{s2}, X_{i1}, Y_{i2} Бобу по классическому каналу связи.

3.2.2. Преобразование Боба

После получения сообщения от Алисы с результатами ее измерений Боб выполняет следующий этап алгоритма квантовой телепортации. Заметим, что Боб знает заранее какие измерения проводила Алиса. Боб проделывает преобразования его части вспомогательного перепутанного состояния (моды $\hat{a}_2$ и $\hat{a}_3$). Эти преобразования имеют следующий вид для квадратур моды $\hat{a}_2$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_s^{out} &= \hat{x}_2 + \sqrt{2}\hat{X}_{s1} = \hat{x}_s + \hat{x}_1 + \hat{x}_2, \\ \hat{y}_s^{out} &= \hat{y}_2 + \sqrt{2}\hat{Y}_{s2} = \hat{y}_s - \hat{y}_1 + \hat{y}_2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

и для моды $\hat{a}_3$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i^{out} &= \hat{x}_3 + \sqrt{2}\hat{X}_{i1} = \hat{x}_i + \hat{x}_3 + \hat{x}_4, \\ \hat{y}_i^{out} &= \hat{y}_3 + \sqrt{2}\hat{Y}_{i2} = \hat{y}_i - \hat{y}_3 + \hat{y}_4. \end{aligned} \tag{3.13}$$

На рис. 3.4 представлена схема с помощью которой можно выполнять смещения (3.12), (3.13). В этой схеме поле $\hat{a}$, которое необходимо преобразовать, подается на светоделитель BS с коэффициентом пропускания $t \ll 1$. На другой входной порт светоделителя подается интенсивное поле с амплитудой A. В результате в одном выходном порте BS имеем

$$\hat{b} = \sqrt{1-t^2}\hat{a} + tA \approx \hat{a} + tA. \tag{3.14}$$

Таким образом смещением можно управлять с помощью измерения амплитуды A.

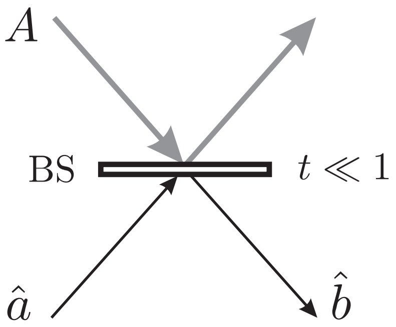

Рис. 3.4. Схема смещения.

Учитывая (3.10), (3.11), преобразования (3.12), (3.13) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^{out} &= \hat{a}_s + \hat{f}_1, \\ \hat{a}_i^{out} &= \hat{a}_i + \hat{f}_2, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2, \\ \hat{f}_2 &= \hat{a}_3 + \hat{a}_4^\dagger \end{aligned} \tag{3.16}$$

вклады вспомогательных состояний, формируемых в связанных взаимодействиях. Из (3.15) следует, что при $\hat{f}_j = 0 \quad (j = 1, 2)$ Боб получает точную копию состояния, которое имела Алиса до измерений. Другими словами, в этом случае реализуется идеальная телепортация. Пользуясь (3.16), можно показать, что вклады $\hat{f}_j$ являются коммутирующими:

$$[\hat{f}_j, \hat{f}_m^\dagger] = 0, \quad (j, m = 1, 2). \tag{3.17}$$

Таким образом, операторы $\hat{f}_j$, в отличие от остальных операторов, могут рассматриваться как классические величины. Так как вспомогательное состояние генерируется независимо от телепортируемого состояния, операторы $\hat{f}_j$ коммутируют с операторами телепортируемого состояния:

$$[\hat{a}_m, \hat{f}_j] = 0, \quad (m = s, i; j = 1, 2). \tag{3.18}$$

3.3. Характеристики телепортированного состояния

3.3.1. Ковариационные матрицы квадратурных компонент

Выше упоминалось, что рассматриваемые квантовые состояния являются гауссовыми, которые полностью описываются средними значениями, дисперсиями и корреляциями квадратурных компонент поля [21].

Пользуясь (3.12), (3.13) и условием независимости вклада вспомогательного состояния от вклада телепортируемых состояний (3.18), приходим к следующим выражениям для корреляций квадратурных компонент поля:

$$\begin{aligned}
V(\hat{x}_s^{out}) &= V(\hat{x}_s) + V(\hat{x}_1 + \hat{x}_2),\\
V(\hat{y}_s^{out}) &= V(\hat{y}_s) + V(\hat{y}_1 - \hat{y}_2),\\
V(\hat{x}_i^{out}) &= V(\hat{x}_i) + V(\hat{x}_3 + \hat{x}_4),\\
V(\hat{y}_i^{out}) &= V(\hat{y}_i) + V(\hat{y}_3 - \hat{y}_4),\\
\langle \hat{x}_s^{out}\hat{x}_i^{out}\rangle &= \langle \hat{x}_s\hat{x}_i\rangle + \langle (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)(\hat{x}_3 + \hat{x}_4)\rangle,\\
\langle \hat{y}_s^{out}\hat{y}_i^{out}\rangle &= \langle \hat{y}_s\hat{y}_i\rangle + \langle (\hat{y}_1 - \hat{y}_2)(\hat{y}_3 - \hat{y}_4)\rangle,\\
\langle \hat{x}_s^{out}\hat{y}_s^{out}\rangle &= \langle \hat{x}_i^{out}\hat{y}_i^{out}\rangle = \langle \hat{x}_s^{out}\hat{y}_i^{out}\rangle = \langle \hat{x}_i^{out}\hat{y}_s^{out}\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

где $V(\hat{A}) = \langle \hat{A}^2\rangle - \langle \hat{A}\rangle^2$ — дисперсия.

Записывая формулы (3.19) в матричном виде, для корреляционной матрицы телепортированного состояния имеем:

$$\sigma_{out} = \sigma_{in} + \sigma_N, \tag{3.20}$$

где

$$\sigma_{in} = \begin{pmatrix} V(\hat{x}_s) & 0 & \langle \hat{x}_s\hat{x}_i\rangle & 0\\ 0 & V(\hat{y}_s) & 0 & \langle \hat{y}_s\hat{y}_i\rangle\\ \langle \hat{x}_s\hat{x}_i\rangle & 0 & V(\hat{x}_i) & 0\\ 0 & \langle \hat{y}_s\hat{y}_i\rangle & 0 & V(\hat{y}_i) \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

— корреляционная матрица квадратурных компонент состояния Алисы,

$$\sigma_N = \begin{pmatrix} V_d & 0 & C & 0\\ 0 & V_d & 0 & C\\ C & 0 & V_u & 0\\ 0 & C & 0 & V_u \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

— шумовая корреляционная матрица, где $V_d = V(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) = V(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)$ — дисперсии суммы и разности квадратурных компонент между модами на частотах ниже частоты накачки, $V_u = V(\hat{x}_3 + \hat{x}_4) = V(\hat{y}_3 - \hat{y}_4)$ — дисперсии суммы и разности квадратурных компонент между модами на частотах выше частоты накачки, $C = \langle (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)(\hat{x}_3 + \hat{x}_4)\rangle = \langle (\hat{y}_1 - \hat{y}_2)(\hat{y}_3 - \hat{y}_4)\rangle$ — ковариация между комбинациями квадратурных компонент.

Будем полагать, что на вход кристалла, в котором происходит генерация телепортируемых перепутанных состояний подается только волна накачки. Таким образом, формирование перепутанных состояний начинается от вакуумных флуктуаций: $|\psi\rangle_{si0} = |0\rangle_{s0}|0\rangle_{i0}$. Для нахождения элементов корреляционной матрицы квадратурных компонент исходного состояния (состояние, которым обладает Алиса) воспользуемся решением уравнений Гейзенберга (1.9) для гамильтониана параметрического преобразования частоты вниз (3.3):

$$\hat{a}_s = \hat{a}_{s0}\operatorname{ch}\zeta + \hat{a}^\dagger_{i0}\operatorname{sh}\zeta, \quad \hat{a}^\dagger_i = \hat{a}_{s0}\operatorname{sh}\zeta + \hat{a}^\dagger_{i0}\operatorname{ch}\zeta, \tag{3.23}$$

где ζ — нормированная длина взаимодействия для процесса (3.3).

Пользуясь решением (3.23), для корреляционной матрицы входного состояния имеем

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}2\zeta & 0 & \operatorname{sh}2\zeta & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}2\zeta & 0 & -\operatorname{sh}2\zeta \\ \operatorname{sh}2\zeta & 0 & \operatorname{ch}2\zeta & 0 \\ 0 & -\operatorname{sh}2\zeta & 0 & \operatorname{ch}2\zeta \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Рассчитаем элементы шумовой корреляционной матрицы σ_N. Из (3.22) видно, что связанные процессы добавляют дополнительный шум к корреляциям телепортируемого состояния. Диагональные элементы этой матрицы соответствуют ЭПР-корреляциям между модами на соответствующих частотах. Недиагональные элементы шумовой матрицы соответствуют добавленному шуму в корреляции между квадратурами телепортируемого состояния. Выражения для диагональных элементов этой матрицы (ЭПР-корреляции) были найдены в Главе 2 (см. формулы (2.73)). Для нахождения оставшихся элементов воспользуемся (2.63) и (2.64):

$$\begin{aligned} &\langle\hat{x}_1\hat{x}_3\rangle = \langle\hat{y}_1\hat{y}_3\rangle = \langle\hat{x}_2\hat{x}_4\rangle = \langle\hat{y}_2\hat{y}_4\rangle = Q_{13}(z)(Q_{33}(z) - Q_{11}(z)), \\ &\langle\hat{x}_1\hat{x}_4\rangle = -\langle\hat{y}_1\hat{y}_4\rangle = \langle\hat{x}_2\hat{x}_3\rangle = -\langle\hat{y}_2\hat{y}_3\rangle = Q_{13}(z)Q_{34}(z) - Q_{11}(z)Q_{14}(z). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Здесь $Q_{mn}(\eta)$ — элементы передаточной матрицы, описывающей решение уравнений Гейзенберга для связанного процесса.

Для недиагональных элементов шумовой матрицы имеем следующие выражения:

$$\langle(\hat{x}_1+\hat{x}_2)(\hat{x}_3+\hat{x}_4)\rangle = \langle(\hat{y}_1-\hat{y}_2)(\hat{y}_3-\hat{y}_4)\rangle = 2(\sigma_{x_1x_3}-\sigma_{x_1x_4}). \tag{3.26}$$

3.3.2. Точность телепортации

Обратимся к расчету точности телепортации. Определим точность телепортации как перекрытие вигнеровских функций распределения в фазовом пространстве (x_1, y_1, x_2, y_2):

$$F = (2\pi)^2 \int W_{in}(\boldsymbol{\xi}) W_{out}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \tag{3.27}$$

где W_{in}, W_{out} — функции Вигнера для входного, телепортируемого состояния и телепортированного состояния соответственно, $\boldsymbol{\xi} = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ — вектор в фазовом пространстве двух мод.

Известно, что для состояний с гауссовой функцией распределения функции Вигнера можно рассчитать с помощью корреляционной матрицы квадратурных компонент (см., например, [12]). Функции Вигнера для входного и выходного состояний имеют следующий вид:

$$W_{in}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\sigma_{in})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\sigma_{in}^{-1}\boldsymbol{\xi}^T\right) \tag{3.28}$$

$$W_{out}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\sigma_{out})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\sigma_{out}^{-1}\boldsymbol{\xi}^T\right) \tag{3.29}$$

где верхний индекс «-1»означает обратную матрицу, а «T»— транспонирование. Вигнеровские функции (3.28), (3.29) нормированны:

$$\int W_{in}^2(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1, \quad \int W_{out}^2(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1 \tag{3.30}$$

Подставляя (3.28) и (3.29) в (3.27) и производя интегрирование по «двухмодовой» фазовой плоскости, приходим к следующему выражению для точности телепортации:

$$F = \frac{1}{\sqrt{\det(\sigma_{out}+\sigma_{in})}} = \frac{1}{\sqrt{\det(2\sigma_{in}+\sigma_N)}}. \tag{3.31}$$

Из (3.31) видно, что, когда «шумовая» матрица σ_N является нулевой, для точности имеем выражение:

$$F = \frac{1}{\sqrt{\det(2\sigma_{in})}}. \tag{3.32}$$

В нашем случае двухмодовое перепутанное состояние является чистым, поэтому выражение(3.32) в согласии с (3.30) тождественно равно единице, что соответствует идеальной телепортации с точки зрения параметра точности. При $\eta = 0$ и $\zeta = 0$, то есть при отсутствии нелинейного взаимодействия, корреляционные матрицы принимают следующий вид:

$$\sigma_{in}^{vac} = \frac{1}{2} I_4, \quad \sigma_{out}^{vac} = I_4, \tag{3.33}$$

где I_4 — диагональная единичная 4×4 матрица. Выражения для корреляционных матриц (3.33) для вакуумных состояний совпадают с выражениями для корреляционным матриц неперепутанных когерентных входных состояний:

$$\begin{aligned} &|\psi\rangle_{si} = |\alpha_s\rangle_s |\alpha_i\rangle_i, \\ &\hat{a}_s |\alpha_s\rangle_s = \alpha_s |\alpha_s\rangle_s, \quad \hat{a}_i |\alpha_i\rangle_i = \alpha_i |\alpha_i\rangle_i, \end{aligned}$$

где α_m — среднее значение амплитуды m-го когерентного состояния ($m = s, i$). В таком случае для параметра точности имеем:

$$F_{vac} = \frac{1}{\sqrt{\det(2I_4)}} = \frac{1}{4}. \tag{3.34}$$

Этот результат совпадает с классической границей для параметра точности при телепортации двух независимых одномодовых когерентных состояний, для которых этот параметр не может принимать меньшие значения [16].

На рис. 3.5 представлен график зависимости параметра точности телепортации перепутанных состояний от длины взаимодействия η для связанных процессов (2.58), в которых получено вспомогательное состояние, и от длины взаимодействия ζ для процесса (3.3), в котором формируются телепортируемые перепутанные состояния. Из рис. 3.5 видно, что при увеличении длины взаимодействия ζ точность телепортации падает, тогда как увеличение длины

η ведет к ее росту. Таким образом, повышение перепутанности телепортируемого состояния, при прочих неизменных параметрах, ведет к снижению параметра точности телепортации. Сплошная кривая на рис. 3.5 соответствует значению классического предела для телепортации когерентных состояний, равному 1/4. Заметим, что значение параметра точности может принимать значения ниже, чем классический предел для телепортации когерентных состояний. Это объясняется тем, что каждая мода телепортируемого перепутанного состояния не является когерентной, а находится в тепловом состоянии.

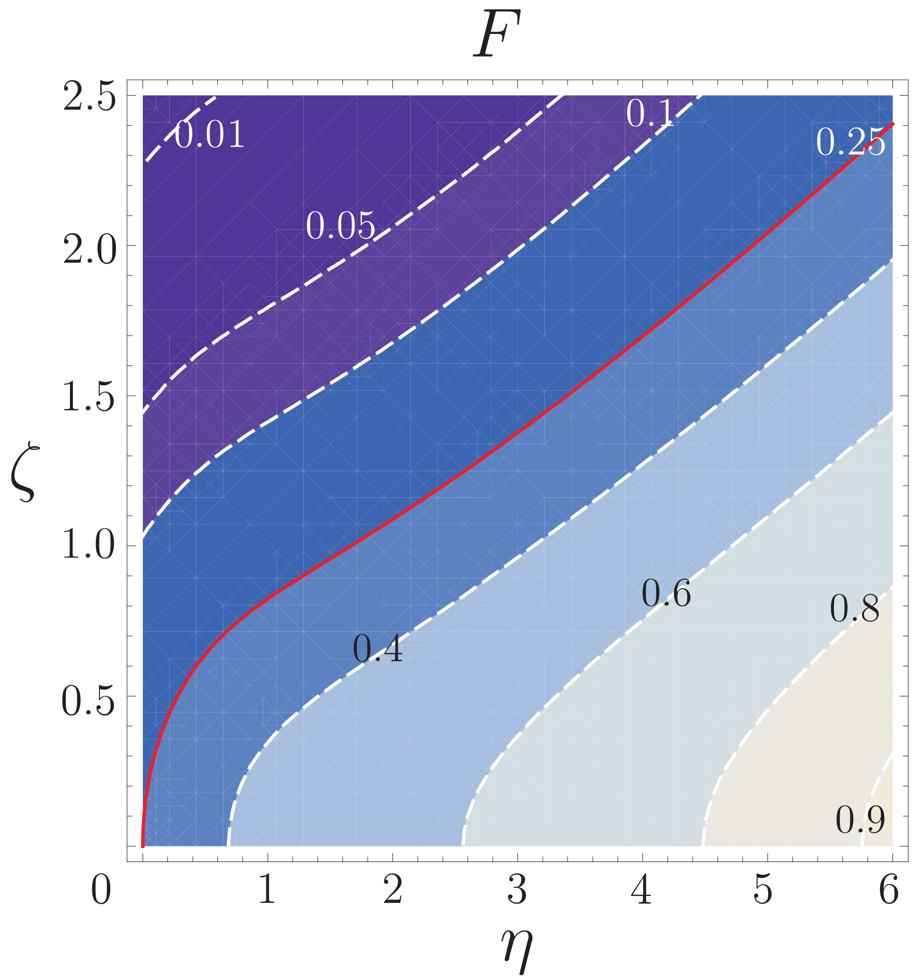

Рис. 3.5. Зависимость точности телепортиции от нормированных длин взаимодействия η и ζ при $\xi = 0.5$

3.3.3. Перепутанность телепортированного состояния

Обратимся к анализу качества телепортации с точки зрения соответствия степени перепутанности телепортированного состояния начальному, которым обладала Алиса. Для этого рассмотрим дисперсии ЭПР-комбинаций квадратурных компонент для состояния Боба. Используя выражения для квадратур телепортированного состояния (3.12) и (3.13), имеем

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_s^{out} + \hat{x}_i^{out}) &= V(\hat{x}_s + \hat{x}_i + \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 + \hat{x}_4), \\ V(\hat{y}_s^{out} - \hat{y}_i^{out}) &= V(\hat{y}_s - \hat{y}_i - (\hat{y}_1 - \hat{y}_2) - (\hat{y}_3 - \hat{y}_4)). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Далее запишем выражения (3.35) в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_s + \hat{x}_i + &\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 + \hat{x}_4) = \\ &= V(\hat{x}_s + \hat{x}_i) + V(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + V(\hat{x}_3 + \hat{x}_4) + 2\langle(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)(\hat{x}_3 + \hat{x}_4)\rangle, \\ V(\hat{y}_s - \hat{y}_i - &(\hat{y}_1 - \hat{y}_2) - (\hat{y}_3 - \hat{y}_4)) = \\ &= V(\hat{y}_s - \hat{y}_i) + V(\hat{y}_1 - \hat{y}_2) + V(\hat{y}_3 - \hat{y}_4) + 2\langle(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)(\hat{y}_3 - \hat{y}_4)\rangle, \end{aligned} \tag{3.36}$$

где использовано условие независимости генерации вспомогательного состояния и телепортируемых состояний (3.18).

Из (3.35) и (3.36) находим:

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_s^{out} + \hat{x}_i^{out}) &= V(\hat{x}_s + \hat{x}_i) + \Delta V, \\ V(\hat{y}_s^{out} - \hat{y}_i^{out}) &= V(\hat{y}_s - \hat{y}_i) + \Delta V. \end{aligned} \tag{3.37}$$

где ΔV — вклад связанных процессов в дисперсию квадратурных компонент телепортированных состояний. Шумовой вклад ΔV в (3.37) выражается через элементы шумовой матрицы (3.22):

$$\Delta V = V_d + V_u + 2C. \tag{3.38}$$

Из (3.38) видно, что корреляционный член $C = \langle(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)(\hat{x}_3 + \hat{x}_4)\rangle$ увеличивает шумовой вклад в добавленную дисперсию квадратур, когда он является положительной величиной и уменьшает его, если отрицательный.

На рис. 3.6 представлен график зависимости корреляционного коэффициента C (формула (3.26)) от длины взаимодействия η и нелинейного коэффициента ξ. Как видно из рис. 3.6, корреляции между ЭПР-комбинациями являются положительной величиной. Таким образом, член C увеличивает шумовой вклад в ΔV.

На практике возможно изменить знак C на противоположный. Это можно сделать, если поместить полуволновую пластинку на пути мод либо с частотами ниже частоты накачки, либо на пути мод с частотами выше частоты накачки. В результате такой операции за счет изменения фазы на π мод $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ или мод $\hat{a}_3$ и $\hat{a}_4$ знак C изменится на противоположный.

Пользуясь выражениями для ЭПР-корреляций (**??**), для корреляционного члена (3.26) и передаточных коэффициентов (2.64) получаем следующие выражения для ΔV:

$$\Delta V = \frac{2e^{-\eta}}{1 \mp 2\xi}\left(\mathrm{ch}(\sqrt{1-4\xi^2}\eta) \mp 2\xi\right), \tag{3.39}$$

где верхний знак соответствует случаю с неизмененным знаком корреляционного члена C, а нижний — измененному знаку корреляционного члена C.

Рассмотрим случай, когда эффективность процессов смешения частот максимально возможная для режима экспоненциального нарастания взаимодействующих волн, то есть $\xi = 0.5$. Выполняя предельный переход $\xi \to 0.5$ в (3.39), для случая со сменой знака C имеем такое выражение для шумового вклада:

$$\Delta V = 2e^{-\eta}. \tag{3.40}$$

В случае без измерения знака C шумовой вклад:

$$\Delta V = 2e^{-\eta}(1+\eta^2). \tag{3.41}$$

Сравнивая (3.40) с (3.39), приходим к выводу, что режим максимальной эффективности процессов смешения частот является наиболее оптимальным, так как в этом случае величина шумового вклада в ЭПР-корреляции минимальна. Действительно, пользуясь свойством $\mathrm{ch}\, x \geq 1$ приходим к неравенству:

$$\frac{2e^{-\eta}}{1 \mp 2\xi}\left(\mathrm{ch}(\sqrt{1-4\xi^2}\eta) \mp 2\xi\right) > 2e^{-\eta} = \Delta V_{opt}, \quad \text{при } \eta > 0. \tag{3.42}$$

Идеальная телепортация перепутанного состояния, с точки зрения передачи

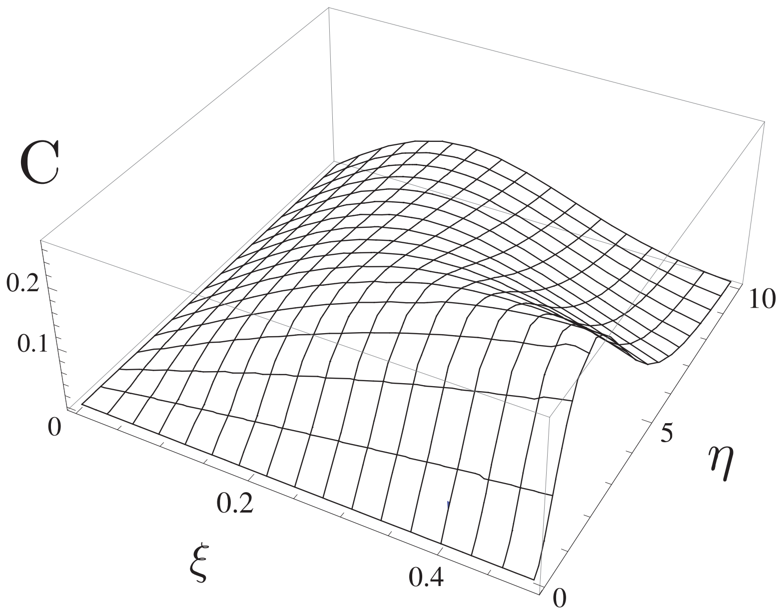

Рис. 3.6. Зависимость корреляции C во вкладе ΔV от нормированной длины взаимодействия η и нелинейного коэффициента ξ

перепутанности этого состояния, реализуется при $\Delta V = 0$. На практике это неосуществимо, так как требует бесконечно большой длины взаимодействия. С другой стороны, в ситуации, когда $\Delta V \geq 1$ телепортация не может считаться удачной, так как перепутанность между частями телепортированного состояния в таком случае отсутствует. Оценка длин взаимодействия, при которых возможна телепортация с сохранением перепутанности ($\Delta V_{opt} < 1$) начального состояния для оптимальных параметров, согласно (3.40) должна превосходить значение η_0:

$$\eta_0 = \ln 2. \tag{3.43}$$

Запишем корреляцию состояния Боба как

$$V_{si}^{out} = V_{si}(1 + \varepsilon), \tag{3.44}$$

где введен параметр

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V_{si}}. \tag{3.45}$$

Перепутанное состояние от Алисы к Бобу передается с минимальным разрушением перепутанности при $\varepsilon \ll 1$.

Пользуясь дисперсиями и корреляциями квадратур из (3.24), для дисперсий суммы и разности квадратур сигнальной и холостой моды телепорти-

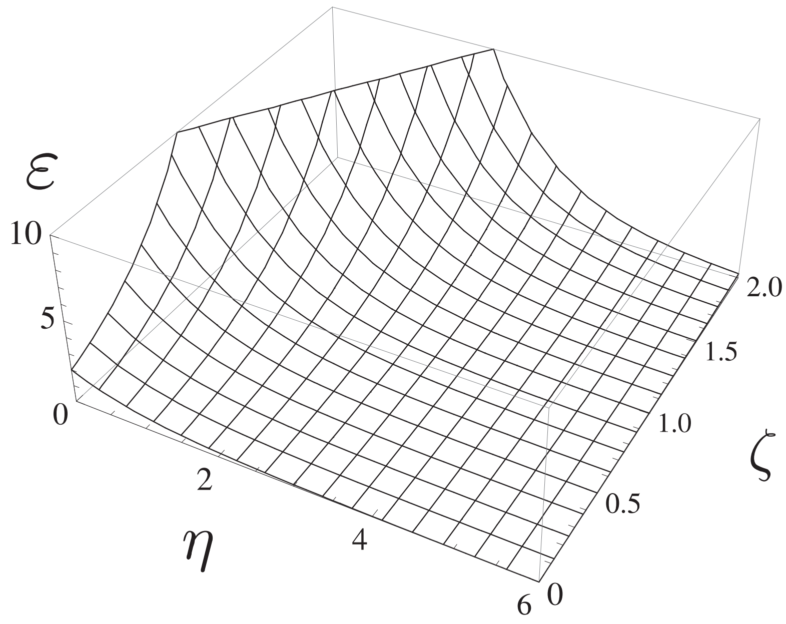

Рис. 3.7. Зависимость оптимального значения параметра ε от длин взаимодействия η и ζ

руемого состояния имеем:

$$V_{si} = V(\hat{x}_s + \hat{x}_i) = V(\hat{y}_s - \hat{y}_i) = e^{-2\zeta}. \tag{3.46}$$

Подставляя (3.46) и (3.40) в (3.45), приходим к выражению для «оптимального» параметра ε для случая $\xi = 0.5$:

$$\varepsilon_{opt} = 2e^{-(\eta - 2\zeta)}. \tag{3.47}$$

На рис. 3.7 изображена зависимость ε_{opt} от длин взаимодействия η и ζ. Как видно, в обсуждаемой схеме возможно телепортировать перепутанное состояние с малым добавлением шума.

Заметим, что в работе [92] авторы предложили иную схему для телепортации перепутанных двухчастотных состояний. В этой схеме вспомогательные перепутанные состояния получаются с помощью двух параметрических процессов преобразования частоты вниз и двух светоделителей. По нашему мнению схема, предложенная в [92], не является в полной мере схемой телепортации, в которой можно передать перепутанность без искажений. Так, в этой схеме в случае телепортируемых когерентных состояниях (телепортируемое состояние сепарабельное) Боб может получить перепутанное состояние. В добавок к этому, в такой схеме максимальная точность телепортации не превосходит значения 0.38.

3.4. Выводы

В настоящей Главе рассмотрена схема телепортации перепутанных невырожденных по частоте состояний, в которой используются квантовые состояния, полученные в связанном параметрическом процессе в однопроходной конфигурации, протекающем в кристалле в поле одной волны накачки и состоящем из одного параметрического процесса преобразования частоты вниз и двух параметрических процессов смешения частот. Передаваемые перепутанные состояния приготовляются в традиционном параметрическом процессе при высокочастотной накачке.

Получены аналитические выражения для параметра точности телепортации и для добавленного шума в дисперсии ЭПР-комбинаций, вносимого связанными процессами. Расчет параметра точности телепортации и добавленного шума в квантовые корреляции телепортированных состояний показал, что в рассмотренной схеме удается достичь высокого качества телепортации при умеренных длинах взаимодействия.

В работе предложена возможная экспериментальная схема для реализации телепортации перепутанных состояний, в которой как передаваемое, так и вспомогательное состояние генерируется с использованием излучения от одного задающего генератора. Использование схемы для телепортации частотно невырожденных перепутанных состояний с общим задающим лазером для приготовления телепортируемых состояний и для накачки связанных процессов позволяет обойти проблему синхронизации генератора перепутанных состояний и генератора вспомогательного состояний. Использование связанных процессов, протекающих в одном АНФК, является компактным способом для передачи квантовой информации в схемах квантовой информации.

Глава 4

Одновременная параметрическая генерация и преобразование частот вверх перепутанных оптических изображений в связанных параметрических взаимодействиях

В предыдущих главах связанные параметрические взаимодействия рассматривались в приближении плоских монохроматических волн, то есть все квантовые поля, генерируемые в этих взаимодействиях, считались одномодовыми. Вместе с тем в последнее десятилетие интенсивно развивается область исследований, в которой используют квантовые особенности пространственно-многомодовых полей — оптических изображений. Использование оптических изображений в схемах квантовой информации обладает преимуществами по сравнению с пространственно-одномодовыми полями: оперирование изображениями позволяет обрабатывать большие объемы квантовых данных за один подход. Следует отметить, что первые исследования применения нелинейно-оптических методов для преобразования оптических изображений проводились в конце 1960-х годов. Эти исследования были стимулированы созданием новых типов ИК-приемников, основанных на нелинейном взаимодействии интенсивной волны накачки со слабым ИК-сигналом [99–102]. В 1970-х годах были подробно исследованы различные характеристики нелинейных ИК-приемников, такие как чувствительность, пространственное разрешение, шумы, корреляционные свойства и т.п. [103, 104].

Началом исследований, относящихся к квантовой обработке изображений, явились работы [114–116] (см. также обзор [98]), которые показали возможность подавления квантовых флуктуаций в пространстве в традиционном процессе оптического параметрического усиления (ОПУ). Авторы работ [114–116] использовали подход, впервые развитый в работах Ахманова с соавторами [117, 118], для описания генерации сжатых состояний при параметрическом взаимодействии дифрагирующих световых пучков. К настоящему времени теоретические и экспериментальные исследования пространственно перепутанных оптических изображений выполнены в подавляющем большинстве работ при параметрческом усилении в поле высокочастотной накачки [105]. Генерация перепутанных оптических изображений при четырехчастотных взаимодействиях в средах с кубической нелинейностью изучена в [129]. Квантовые расчеты связанных параметрического процесса преобразования частоты вниз и процесса смешения частот выполнены в [122, 123], а об экспериментальном наблюдении оптических изображений в таких взаимодействиях сообщается в [42].

Как показано в Главе 2, в связанном параметрическом процессе, состоящем из одного параметрического преобразования частоты вниз и двух параметрических процессов смешения частот, формируются две пары перепутанных двухмодовых состояний: на частотах ниже и на частотах выше частоты накачки. Рассмотрение было выполнено для случая взаимодействия плоских волн. В настоящей Главе для этих процессов разрабатывается квантовая теория генерации, преобразования и усиления оптических изображений с конечным пространственным спектром. Уравнения, описывающие взаимодействие изображений в связанных процессах, учитывают дифракционные эффекты. Рассмотрены две схемы формирования перепутанных четырёхчастотных оптических изображений: схема с близко расположенным объектом и схема с далеко расположенным объектом. Исследуются квантовые характеристики оптических изображений и проводится сравнение этих схем.

4.1. Классические и квантовые связанные параметрические уравнения с учетом дифракции

Обратимся снова к связанным параметрическим процессам (2.58):

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 + \omega_p = \omega_3, \quad \omega_2 + \omega_p = \omega_4 \tag{4.1}$$

В предыдущих двух главах процесс (4.1) рассмотрен в приближении плоских монохроматических волн. В общем случае оптические поля, формируемые

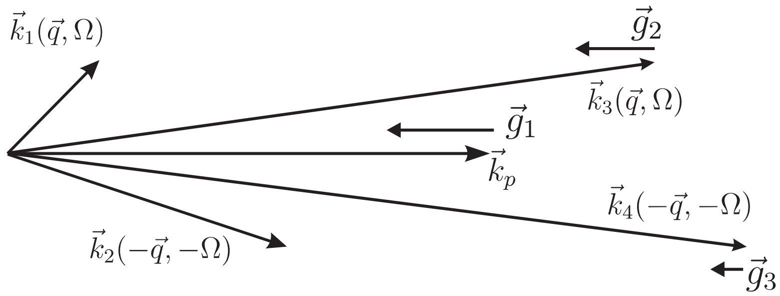

Рис. 4.1. Векторная диаграмма для волновых векторов взаимодействующих волн. Здесь $\mathbf{g}_m$ — вектора обратной решетки АНФК ($m = 1, 2, 3$)

при параметрических процессах, таковыми не являются, а имеют определенные пространственный и частотный спектр некоторой ширины. Для этой ситуации на рис. 4.1 представлена векторная диаграмма для волновых векторов взаимодействующих волн.

Считая, что волна накачки является плоской и монохроматической, можно записать продольные волновые расстройки для процессов (4.1):

$$\begin{aligned}\Delta k_{1z} &= k_p - k_{1z}(\boldsymbol{q},\Omega) - k_{2z}(-\boldsymbol{q},-\Omega),\\ \Delta k_{2z} &= k_{3z}(\boldsymbol{q},\Omega) - k_{1z}(\boldsymbol{q},\Omega) - k_p,\\ \Delta k_{3z} &= k_{4z}(-\boldsymbol{q},-\Omega) - k_{2z}(-\boldsymbol{q},-\Omega) - k_p.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\mathbf{q}$ — поперечная компонента волнового вектора, Ω — отстройка от несущей частоты. В дальнейшем полагаем, что фазовые расстройки (4.2) компенсируются векторами обратной решетки АНФК для волн с $\mathbf{q} = 0$, $\Omega = 0$ (см. разд. 2.4.1).

В первом приближении теории дисперсии с учетом явления дифракции эволюция классических комплексных амплитуд взаимодействующих волн описывается следующими параболическими уравнениями (ср. с (2.61)):

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{u_1}\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{i}{2k_1}\Delta_\perp\right) A_1(\boldsymbol{\rho},t;z) = i\beta A_2^*(\boldsymbol{\rho},t;z) + i\gamma_1 A_3(\boldsymbol{\rho},t;z),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{u_2}\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{i}{2k_2}\Delta_\perp\right) A_2(\boldsymbol{\rho},t;z) = i\beta A_1^*(\boldsymbol{\rho},t;z) + i\gamma_2 A_4(\boldsymbol{\rho},t;z),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{u_3}\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{i}{2k_3}\Delta_\perp\right) A_3(\boldsymbol{\rho},t;z) = i\gamma_1 A_1(\boldsymbol{\rho},t;z),\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{u_4}\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{i}{2k_4}\Delta_\perp\right) A_4(\boldsymbol{\rho},t;z) = i\gamma_2 A_2(\boldsymbol{\rho},t;z),\end{cases} \tag{4.3}$$

где $A_j(\boldsymbol{\rho}, t; z)$ — медленно-меняющаяся амплитуда поля на несущей частотой ω_j (здесь $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ — радиус-вектор в поперечной плоскости), β, $\gamma_{1,2}$ — нелинейные коэффициенты связи, которые имеют такой же вид, как и для случая монохроматических волн (2.62), u_j — групповая скорость волны на несущей частоте ω_j, $k_j = n(\omega_j)\omega_j/c$ — волновое число для частоты ω_j ($j = 1\ldots 4$), $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — поперечный лапласиан.

Для получения квантовых уравнений, описывающих эволюцию бозе-операторов поля, произведем замену классических амплитуд $A_j(\boldsymbol{\rho}, t; z)$ на соответствующие операторы $\hat{A}_j(\boldsymbol{\rho}, t; z)$ (см. выше разд. 2.1.2). При этом комплексно-сопряженным амплитудам $A_j^*(\boldsymbol{\rho}, t; z)$ соответствуют эрмитово-сопряженные операторы $\hat{A}_j^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t; z)$. Операторы $\hat{A}_j(\boldsymbol{\rho}, t; z)$ подчиняются коммутационным соотношениям:

$$[\hat{A}_m(\boldsymbol{\rho}', t'; z), \hat{A}_n^\dagger(\boldsymbol{\rho}'', t''; z)] = \delta(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'')\delta(t' - t'')\delta_{mn}, \quad (m, n = 1\ldots 4), \quad (4.4)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, δ_{mn} — символ Кронекера. Таким образом, уравнения для операторов $\hat{A}_j$ будут иметь такой же вид, как уравнения для амплитуд A_j.

4.1.1. Оператор импульса поля

Уравнения для медленно-меняющихся операторов (4.3) взаимодействующих волн можно получить также из уравнений эволюции Гейзенберга

$$i\hbar \frac{\partial \hat{A}_j(\boldsymbol{\rho}, t; z)}{\partial z} = [\hat{G}_{int}, \hat{A}_j(\boldsymbol{\rho}, t; z)], \quad (j = 1\ldots 4), \quad (4.5)$$

которые получаются из оператора импульса поля. Оператор импульса поля, включающий рассматриваемые нелинейные процессы, дифракцию и частотную дисперсию среды, имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{G}_{int} =&\hbar \iint \Big[\beta \hat{A}_1^\dagger(\boldsymbol{\rho},\tau;z)\hat{A}_2^\dagger(\boldsymbol{\rho},\tau;z) + \gamma_1 \hat{A}_1(\boldsymbol{\rho},\tau;z)\hat{A}_3^\dagger(\boldsymbol{\rho},\tau;z)+ \\ &+\gamma_2 \hat{A}_2(\boldsymbol{\rho},\tau;z)\hat{A}_4^\dagger(\boldsymbol{\rho},\tau;z)\Big] d\boldsymbol{\rho} d\tau + \text{э.с.}+ \\ &+\sum_{j=1}^{4} \iint \left[\frac{\hbar}{2u_j}\left(i\hat{A}_j^\dagger(\boldsymbol{\rho},\tau;z)\frac{\partial \hat{A}_j(\boldsymbol{\rho},\tau;z)}{\partial \tau} + \text{э.с.}\right) - \right. \\ &\left. -\frac{\hbar}{2k_j}\frac{\partial \hat{A}_j^\dagger(\boldsymbol{\rho},\tau;z)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\frac{\partial \hat{A}_j(\boldsymbol{\rho},\tau;z)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right] d\boldsymbol{\rho} d\tau.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Первые три слагаемых в правой части (4.6) ответственны за нелинейные взаимодействия волн (4.1), первое слагаемое под знаком суммы учитывает распространение волн с групповой скоростью, а второе — явление дифракции.

4.2. Решение уравнений

Для решения системы уравнений (4.3) для получающихся при указанной замене операторов воспользуемся пространственно-временным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}\hat{A}_j(\boldsymbol{\rho},t;z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}_j(\mathbf{q},\Omega;z)e^{i(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}-\Omega t)}d\mathbf{q}d\Omega, \\ \hat{a}_j(\mathbf{q},\Omega;z) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}_j(\boldsymbol{\rho},t;z)e^{-i(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}-\Omega t)}d\boldsymbol{\rho} dt.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь оператор $\hat{a}_j^\dagger(-\mathbf{q},-\Omega;z)(\hat{a}_j(\mathbf{q},\Omega;z))$ имеют смысл оператора рождения (уничтожения) фотона с частотой $\omega_j+\Omega$ $(\omega_j-\Omega)$ и поперечным волновым вектором $\mathbf{q}$ $(-\mathbf{q})$.

Уравнения для фурье-компонент операторов принимают простой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{a}_1}{dz} = -i\epsilon_1\hat{a}_1 + i\beta\hat{a}_2^\dagger + i\gamma_1\hat{a}_3, \\ \dfrac{d\hat{a}_2^\dagger}{dz} = -i\beta\hat{a}_1 + i\epsilon_2\hat{a}_2^\dagger - i\gamma_2\hat{a}_4^\dagger, \\ \dfrac{d\hat{a}_3}{dz} = i\gamma_1\hat{a}_1 - i\epsilon_3\hat{a}_3, \\ \dfrac{d\hat{a}_4^\dagger}{dz} = -i\gamma_2\hat{a}_2^\dagger + i\epsilon_4\hat{a}_4^\dagger. \end{cases} \tag{4.8}$$

где z — длина взаимодействия,

$$\epsilon_j = \left(\frac{q^2}{2k_j} - \frac{\Omega}{u_j}\right) \tag{4.9}$$

— фазовый набег на единичной длине для фурье-компоненты, обусловленный дифракцией и отличием частоты от несущей.

Формально решение системы (4.8) можно представить в матричной форме:

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{q},\Omega;z) = \mathcal{Q}^{(1)}(\mathbf{q},\Omega;z)\hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{q},\Omega) \tag{4.10}$$

где $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_3, \hat{a}_4^\dagger)^T$ — столбец операторов рождения и уничтожения на соответствующих частотах (с отстройками от несущих и поперечными волновыми векторами) на выходе кристалла, $\hat{\mathbf{a}}_0 = \hat{\mathbf{a}}(z=0)$ — столбец операторов на входе кристалла, $\mathcal{Q}^{(1)}$ — 4×4-матрица, состоящая из передаточных функций $Q_{mn}(\mathbf{q},\Omega;z)$ (см. ниже разд. 4.2.2). Символ T означает транспонирование. Передаточные функции $Q_{mn}(\mathbf{q},\Omega;z)$ имеют следующий физический смысл. В случае $m=n$ элементы Q_{mn} связаны с самопреобразованием и описывают изменение оператора на частоте ω_m. При $m\neq n$ функция Q_{mn} описывает преобразование с несущей частоты ω_n на частоту ω_m.

Из коммутационных соотношений (4.4) получаем коммутационные соотношения для фурье-компонент:

$$[\hat{a}_m(\mathbf{q}',\Omega';z), \hat{a}_n^\dagger(-\mathbf{q}',-\Omega';z)] = \delta_{mn}\delta(\mathbf{q}'+\mathbf{q}'')\delta(\Omega'+\Omega'')/(2\pi)^3, \tag{4.11}$$

из которых следуют соотношения, которым должны удовлетворять элементы матрицы Ω (ср. с формулой (2.67)):

$$\sum_{j=1}^{4}(-1)^{m+j}Q_{mj}(\mathbf{q},\Omega;z)Q^*_{nj}(-\mathbf{q},-\Omega;z)=\delta_{mn},\quad (m,n=1,\ldots,4). \qquad (4.12)$$

4.2.1. Используемые упрощения

Как и в предыдущих двух главах, будем рассматривать процесс (4.1) с одинаковыми эффективностями процессов смешения частот. Как уже отмечалось выше, это всегда можно сделать при конструировании нелинейных структур, в которых могут протекать связанные взаимодействия, то есть можно создать неоднородные нелинейные структуры с нелинейными коэффициентами $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$.

Система уравнения (4.8) является системой 4-го порядка. Как известно, для нахождения собственных значений системы дифференциальных уравнений, определяющих инкременты задачи, необходимо решить характеристическое уравнение. В нашем случае, характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением 4-го порядка. Аналитический вид решений этого уравнения является довольно громоздким, поэтому в дальнейшем будем пользоваться следующими физически разумные упрощения. Будем полагать, что разность несущих частот ω_1 и ω_2 мала по сравнению с самими частотами. Это же справедливо для частот ω_3 и ω_4. При этих допущениях разность фазовых $\Delta\varphi$ набегов на единичной длине, например, между волнами на частотах ниже частоты накачки, равна

$$\Delta\varphi/z=\Delta\epsilon_{12}=\epsilon_1-\epsilon_2=\frac{(k_2-k_1)q^2}{2k_1k_2}+\Omega\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}\right), \qquad (4.13)$$

В рамках используемых квазиоптических приближений (квазиплоских пучков) и первого приближения теории дисперсии величина $\Delta\epsilon_{12}$ гораздо меньше единицы ($\Delta\epsilon_{12}\ll 1$): первое слагаемое в правой части (4.13) будет меньше, чем величина $q^2/2k_1$, которая имеет значение около 0.2 для $k_1\approx 6\cdot 10^4$ см$^{-1}$, $q=0.5\cdot 10^3$ см$^{-1}$ (см.ниже). Второе слагаемое в (4.13) можно оценить как 10^{-2} при $\Omega=10^{10}$ Гц для групповой расстройки $(1/u_2-1/u_1)\approx 10^{-11}$ с/см. Подобные оценки справедливы и для частот, превышающих частоту накачки.

Таким образом, мы можем пренебречь различием дифракционных эффектов и групповых скоростей для волн с частотами, лежащими ниже частоты накачки, и для волн с частотами, лежащими выше частоты накачки. Поэтому далее полагаем

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_d, \quad \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_u.$$

При этом считаем волновые числа $k_d = (k_1 + k_2)/2$, $k_u = (k_3 + k_4)/2$ и групповые скорости $u_d = (u_1 + u_2)/2$, $u_u = (u_3 + u_4)/2$ для волн с частотами ниже (индекс d) и выше (индекс u) частоты накачки соответственно.

4.2.2. Передаточные функции

Передаточная матрица $\mathcal{Q}^{(1)}$ в общем случае состоит из 16 передаточных функций. Однако соотношения (4.12), вытекающие из коммутационных соотношений, для фурье-компонент (4.11), и выражения, следующие из симметрии задачи, сокращают число независимых функций Q_{mn}. Для рассматриваемого связанного процесса при одинаковых эффективностях процессов смешения частот шесть передаточных функций полностью описывают решение системы связанных уравнений:

$$\begin{aligned}
Q_{11}(q,\Omega) = \big[(\Gamma_1^2 + \gamma^2 + \epsilon_d^2 - \beta^2)C_2 - (\Gamma_2^2 + \gamma^2 + \epsilon_d^2 - \beta^2)C_1 + \\
+ i(\epsilon_d\Gamma_2^2 + 2\epsilon_d\gamma^2 + \epsilon_u\gamma^2 + \epsilon_d^3 - \epsilon_d\beta^2)\frac{S_1}{\Gamma_1} - \\
- i(\epsilon_d\Gamma_1^2 + 2\epsilon_d\gamma^2 + \epsilon_u\gamma^2 + \epsilon_d^3 - \epsilon_d\beta^2)\frac{S_2}{\Gamma_2}\Bigg] / (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2),
\end{aligned}$$

$$Q_{12}(q,\Omega) = i\beta\left[(\Gamma_1^2 + 2\gamma^2 + \epsilon_d^2 - \beta^2)\frac{S_2}{\Gamma_2} - (\Gamma_2^2 + 2\gamma^2 + \epsilon_d^2 - \beta^2)\frac{S_1}{\Gamma_1}\right] / (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2),$$

$$\begin{aligned}
Q_{13}(q,\Omega) = \gamma\Bigg[(\epsilon_d + \epsilon_u)(C_1 - C_2) + i(\Gamma_1^2 + \gamma^2 + \epsilon_u^2 + \epsilon_d\epsilon_u + \epsilon_d^2 - \beta^2)\frac{S_2}{\Gamma_2} - \\
- i(\Gamma_2^2 + \gamma^2 + \epsilon_u^2 + \epsilon_d\epsilon_u + \epsilon_d^2 - \beta^2)\frac{S_1}{\Gamma_1}\Bigg] / (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2),
\end{aligned}$$

$$Q_{14}(q,\Omega) = \beta\gamma\left[(C_1 - C_2) + i\epsilon_u\left(\frac{S_1}{\Gamma_1} - \frac{S_2}{\Gamma_2}\right)\right] / (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2),$$

$$
\begin{aligned}
Q_{33}(q,\Omega) = \big[&(\Gamma_1^2+\gamma^2+\epsilon_u^2)C_2 - (\Gamma_2^2+\gamma^2+\epsilon_u^2)C_1 + \\
&+ i(\epsilon_u\Gamma_2^2+\gamma^2\epsilon_d+2\gamma^2\epsilon_u+\epsilon_u^3)\frac{S_1}{\Gamma_1} - \\
&- i(\epsilon_u\Gamma_1^2+\gamma^2\epsilon_d+2\gamma^2\epsilon_u+\epsilon_u^3)\frac{S_2}{\Gamma_2}\bigg] /(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2), \\
Q_{34}(q,\Omega) =& i\beta\gamma^2\left(\frac{S_1}{\Gamma_1}-\frac{S_1}{\Gamma_1}\right)/(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{1,2} =& \frac{1}{2}\left[\left((\beta^2-2\gamma^2-\epsilon_d^2-\epsilon_u^2)+\sqrt{(\gamma^2-\epsilon_d\epsilon_u)^2-\epsilon_u^2}\right)^{1/2} \pm \right. \\
&\left. \pm\left((\beta^2-2\gamma^2-\epsilon_d^2-\epsilon_u^2)-\sqrt{(\gamma^2-\epsilon_d\epsilon_u)^2-\epsilon_u^2}\right)^{1/2}\right]
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

— инкременты, $C_j = \mathrm{ch}(\Gamma_j z)$, $S_j = \mathrm{sh}(\Gamma_j z)$ $(j=1,2)$. Заметим, что из-за аксиальной симметрии задачи в выражениях для передаточных коэффициентов вместо поперечных волновых векторов фигурируют волновые числа.

Для остальных передаточных функций справедливы соотношения:

$$
\begin{aligned}
&Q_{22}(q,\Omega) = Q_{11}^*(q,\Omega), \quad Q_{44}(q,\Omega) = Q_{33}^*(q,\Omega), \\
&Q_{21}(q,\Omega) = Q_{12}^*(q,\Omega), \quad Q_{43}(q,\Omega) = Q_{34}^*(q,\Omega), \\
&Q_{13}(q,\Omega) = Q_{31}(q,\Omega) = Q_{24}^*(q,\Omega) = Q_{42}^*(q,\Omega), \\
&Q_{14}(q,\Omega) = -Q_{41}(q,\Omega) = Q_{23}^*(q,\Omega) = -Q_{32}^*(q,\Omega).
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

В выражениях для инкрементов (4.15) входят дифракционные коэффициенты $\epsilon_{d,u}$. Легко видеть, что величины $\epsilon_{d,u}$ уменьшают значение фактора усиления. На рис. 4.2 представлены модули передаточных коэффициентов Q_{mn} в зависимости от нормированной длины взаимодействия $\eta = \beta z$ и поперечной компоненты волнового вектора q. Из рис. 4.2 видно, что при рассматриваемых условиях области пространственного спектра, в которых возможны эффективное усиление и преобразование изображений, составляют порядка $q_0 = 250$ см$^{-1}$. Эти области отвечают действительным значениям инкрементов (4.15), тогда как области, в которых не происходит эффективное усиление и преобразование, соответствуют мнимым значениям инкрементов.

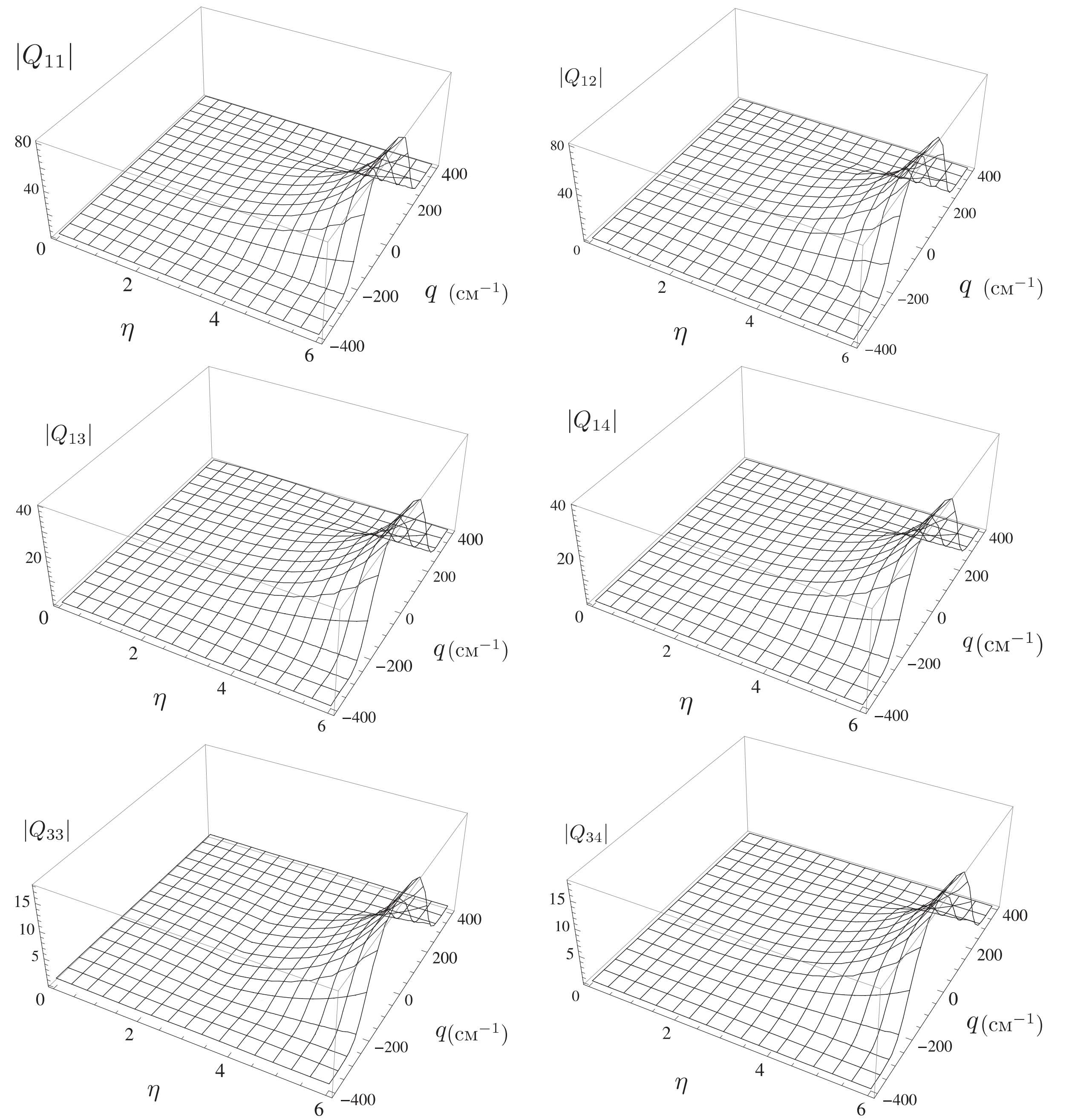

Рис. 4.2. Модули коэффициентов передачи Q_{mn} в зависимости от нормированной длины взаимодействия $\eta = \beta z$ и поперечной компоненты волнового вектора q для $\xi = \gamma/\beta = 0.4$, $\Omega = 0$. Расчеты выполнены для длин волн $\lambda_p = 1.06$ мкм, $\lambda_1 = 2.0$ мкм, $\lambda_2 = 2.26$ мкм, $\lambda_3 = 0.69$ мкм, $\lambda_4 = 0.72$ мкм

4.3. Схема с близко расположенным объектом

В схеме для генерации перепутанных оптических изображений в случае близко расположенного объекта на вход нелинейного кристалла непосредственно подается изображение, которое необходимо преобразовать и усилить. Рассматриваемая схема представлена на рис. 4.3. Объект, формирующий исходное изображение, расположен в объектной плоскости P_1. Изображение от объекта проецируется на АНФК с помощью двух линз L_1 и L_2. В АНФК происходит усиление и генерация изображения на новых частотах в связанных нелинейно-оптических процессах (4.1). Затем изображение с выхода кристалла проецируется на плоскость изображений линзами L_3 и L_4. Расстояния между объектной плоскостью и линзой L_1, между линзой L_2 и плоскостью P_2, между плоскостью P_3 и линзой L_3, а также между линзой L_4 и плоскостью изображений P_4 равны фокусному расстоянию f этих линз. Расстояние между линзами L_1 и L_2, а также между L_3 и L_4 равно двум фокусным расстояниям.

Обозначим бозе-операторы в объектной плоскости и плоскости изображений соответственно как $\hat{A}_j^{(obj)}(\boldsymbol{\rho},t)$ и $\hat{A}_j^{(im)}(\boldsymbol{\rho},t)$, а на выходе и входе нелинейного кристалла — как $\hat{A}_j^{(in)}(\boldsymbol{\rho},t)$ и $\hat{A}_j^{(out)}(\boldsymbol{\rho},t;z)$, где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной направлению распространения z, а нижний индекс относится к несущей частоте.

Для рассматриваемой оптической системы (рис. 4.3) справедливы следующие соотношения:

$$\hat{A}_j^{(in)}(\boldsymbol{\rho},t) = \hat{A}_j^{(obj)}(-\boldsymbol{\rho},t), \tag{4.17}$$

$$\hat{A}_j^{(im)}(\boldsymbol{\rho},t;z) = \hat{A}_j^{(out)}(-\boldsymbol{\rho},t;z). \tag{4.18}$$

В аргументах операторов мы пренебрегаем временным запаздыванием, которое несущественно для изучаемых далее вопросов.

Величина $\langle \hat{n}_j(\boldsymbol{\rho},t;z)\rangle = \langle \hat{A}_j^{\dagger}(\boldsymbol{\rho},t;z)\hat{A}_j(\boldsymbol{\rho},t;z)\rangle$ определяет среднюю плотность потока фотонов в сечении среды z.

Пусть в плоскости объекта P_1 расположен объект, подсвечиваемый когерентной волной. Возможны два случая: объект, формирующий входное изоб-

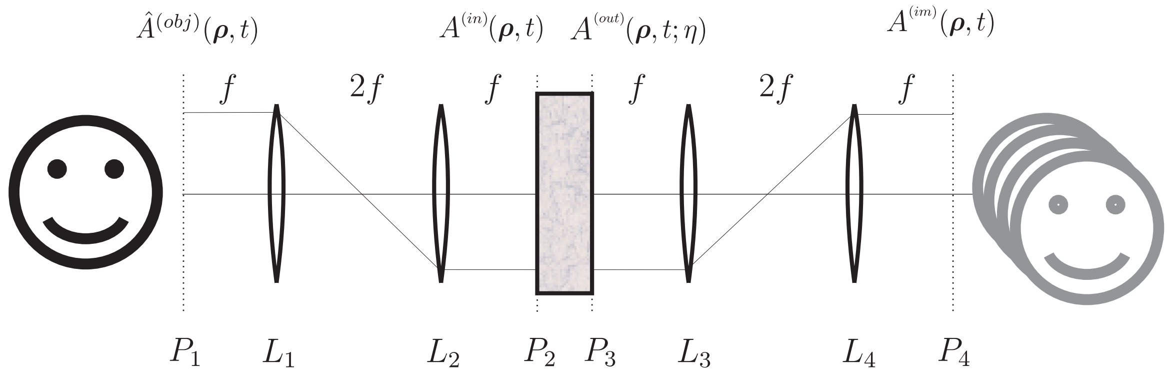

Рис. 4.3. Схема параметрической генерации и преобразования частоты вверх перепутанных оптических изображения для случая близко расположенного объекта

ражение, может подсвечиваться волной на центральной частоте, лежащей ниже частоты накачки (ω_1 или ω_2), с другой стороны, изображение на вход схемы может подаваться на частоте, лежащей выше частоты накачки (ω_3 или ω_4).

При входном изображении с центральной частотой ω_1

$$\hat{A}_1^{(obj)}(\boldsymbol{\rho}, \Omega)|\alpha_{10}(\boldsymbol{\rho}, \Omega)\rangle = \alpha_{10}(\boldsymbol{\rho}, \Omega)|\alpha_{10}(\boldsymbol{\rho}, \Omega)\rangle. \tag{4.19}$$

Полагая эту волну монохроматической, имеем

$$\alpha_{10}(\boldsymbol{\rho}, \Omega) = \delta(\Omega)\alpha_{10}(\boldsymbol{\rho}), \tag{4.20}$$

$$\hat{A}_1^{(obj)}(\boldsymbol{\rho})|\alpha_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle = \alpha_{10}(\boldsymbol{\rho})|\alpha_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \tag{4.21}$$

где $\alpha_{10}(\boldsymbol{\rho})$ имеет смысл амплитуды изображения в плоскости объекта, в точке с поперечным радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$.

В случае входного изображения на частоте ω_3 имеем:

$$\hat{A}_3^{(obj)}(\boldsymbol{\rho})|\alpha_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle = \alpha_{30}(\boldsymbol{\rho})|\alpha_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \tag{4.22}$$

Помимо изображения, на вход кристалла подается плоская интенсивная волна накачки с частотой ω_p, рассматриваемая классически. Остальные моды на входе кристалла находятся в вакуумном состоянии.

Из-за наличия вакуумных флуктуаций мод пространственно-временной спектр флуктуаций изображений на выходе АНФК определяется усиливаемыми полосами частотного и пространственного спектров. Для уменьшения влияния усиленного шума необходимо использовать частотные фильтры.

Обозначим через $F_j(\Omega)$ функцию пропускания фильтра с центральной частотой пропускания ω_j. Для простоты можно считать все функции пропускания фильтров одинаковыми: $F_j(\Omega) = F(\Omega)$. Тогда после прохождения фильтров для фурье-компонент операторов поля справедливы соотношения:

$$\hat{b}_j(\mathbf{q}, \Omega; z) = F(\Omega)\hat{a}_j^{(im)}(\mathbf{q}, \Omega; z), \tag{4.23}$$

а соответствующие выражения для операторов амплитуд имеют вид

$$\hat{B}_j(\boldsymbol{\rho}, t; z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{b}_j(\mathbf{q}, \Omega; z) e^{i(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \Omega t)} d\mathbf{q} d\Omega. \tag{4.24}$$

Средние значения операторов величин, измеряемых фотодетекторами, определяются выражением

$$\langle \hat{N}_j(\boldsymbol{\rho}, t)\rangle = \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} dt' \int\limits_{S_p} d\boldsymbol{\rho}' \langle \hat{B}_j^{\dagger}(\boldsymbol{\rho}', t')\hat{B}_j(\boldsymbol{\rho}', t')\rangle, \tag{4.25}$$

где интегрирование производится по площади пиксела S_p в окрестности точки $\boldsymbol{\rho}$ и по времени регистрации детектора T в окрестности момента времени t (детекторы считаем идеальными). В дальнейшем будем считать, что пространственные полосы коэффициентов передачи шире пространственного спектра входного изображения:

$$q_0 > q_{im}. \tag{4.26}$$

Следовательно, передаточные функции можно считать почти постоянными в пределах пространственного спектра входного изображения. Например, для параметров, представленных на рис. 4.2, ширина пространственного спектра входного изображения не должна превышать величины ≈ 200 см$^{-1}$ или, переходя к размерам зерна изображения, зерно изображения не должно быть меньше $\delta r \approx 300$ мкм. В этом случае для средней плотности потока фотонов $\langle \hat{n}_j(\boldsymbol{\rho}, t)\rangle = \langle \hat{N}_j(\boldsymbol{\rho}, t)\rangle / S_p T$ на выходе оптической системы (в плоскости изображений P_4) на рассматриваемых частотах получаем:

$$\langle \hat{n}_j(\boldsymbol{\rho})\rangle = \langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \langle \hat{n}_j^{(b)}\rangle, \tag{4.27}$$

где $\langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle$ — плотность фотонов усиленного (или преобразованного) изображения, $\langle \hat{n}_j^{(b)}(\boldsymbol{\rho})\rangle$ — плотность шумовых фотонов на соответствующей частоте. Для сигнального слагаемого при входном изображении на частоте ω_1 имеем:

$$\langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle = \mathcal{N}_j^{(d)}\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \tag{4.28}$$

где $\mathcal{N}_j^{(d)} = |Q_{1j}(0,0;z)|^2$ — коэффициент усиления ($j=1$) или преобразования ($j \neq 1$). Для сигнального слагаемого при входном изображении на частоте ω_3:

$$\langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle = \mathcal{N}_j^{(u)}\langle \hat{n}_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \tag{4.29}$$

где $\mathcal{N}_j^{(u)} = |Q_{j1}(0,0;z)|^2$.

Соответствующие шумовые слагаемые имеют вид:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_j^{(b)}(\boldsymbol{\rho})\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iint |F(\Omega)|^2 W_d(q,\Omega;z)d\mathbf{q}d\Omega \quad \text{при } j=1,2,\\
\langle \hat{n}_j^{(b)}(\boldsymbol{\rho})\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iint |F(\Omega)|^2 W_u(q,\Omega;z)d\mathbf{q}d\Omega \quad \text{при } j=3,4.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
W_d(q,\Omega;z) &= |Q_{12}(q,\Omega;z)|^2 + |Q_{14}(q,\Omega;z)|^2,\\
W_u(q,\Omega;z) &= |Q_{14}(q,\Omega;z)|^2 + |Q_{34}(q,\Omega;z)|^2
\end{aligned} \tag{4.31}$$

— спектральные компоненты шумовых вкладов, обусловленных вакуумными флуктуациями, которые существуют в отсутствии когерентного сигнального изображения.

Расчет дисперсии плотности числа фотонов $\sigma_j^2(\boldsymbol{\rho}) = \langle \hat{n}_j^2(\boldsymbol{\rho})\rangle - \langle \hat{n}_j(\boldsymbol{\rho})\rangle^2$ приводит к структуре выражений аналогичной (4.27):

$$\sigma_j^2(\boldsymbol{\rho}) = \sigma_j^{(s)2}(\boldsymbol{\rho}) + \sigma_j^{(b)2}(\boldsymbol{\rho}). \tag{4.32}$$

Для полезных компонент дисперсий, связанных с когерентным изображением, имеем следующие выражения в случае входного изображения на частоте ω_1:

$$\begin{aligned}
\sigma_j^{(s)2}(\boldsymbol{\rho}) &= \langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle + 2|Q_{1j}(0,0;z)|^2 W_d(0,0;z)\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \quad \text{при } j=1,2,\\
\sigma_j^{(s)2}(\boldsymbol{\rho}) &= \langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle + 2|Q_{1j}(0,0;z)|^2 W_u(0,0;z)\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \quad \text{при } j=3,4.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Для входного изображения на частоте ω_3:

$$\begin{aligned} \sigma_j^{(s)2}(\boldsymbol{\rho}) &= \langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle + 2|Q_{j3}(0,0;z)|^2 W_d(0,0;z)\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \quad \text{при } j=1,2, \\ \sigma_j^{(s)2}(\boldsymbol{\rho}) &= \langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle + 2|Q_{j3}(0,0;z)|^2 W_u(0,0;z)\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle, \quad \text{при } j=3,4. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Шумовые вклады совпадают между собой для обоих случаев:

$$\begin{aligned} \sigma_j^{(b)2}(\boldsymbol{\rho}) &= \langle \hat{n}_j^{(b)}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \frac{1}{(2\pi)^3}\iint |F(\Omega)|^4 W_d(q,\Omega;z)^2 d\mathbf{q}d\Omega, \quad \text{при } j=1,2, \\ \sigma_j^{(b)2}(\boldsymbol{\rho}) &= \langle \hat{n}_j^{(b)}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \frac{1}{(2\pi)^3}\iint |F(\Omega)|^4 W_u(q,\Omega;z)^2 d\mathbf{q}d\Omega, \quad \text{при } j=3,4, \end{aligned} \tag{4.35}$$

что является следствием независимости некогерентного шума от сигнального изображения. Величины $\langle \hat{n}_j^{(b)}(\boldsymbol{\rho})\rangle$ и $\sigma_j^{(b)2}(\boldsymbol{\rho})$ можно измерить до поступления изображения на нелинейный кристалл. После чего при наличии входного изображения вычесть измеренный шумовой фон, получив таким образом полезные величины средних и дисперсий фотонов.

Из (4.28), (4.29), (4.33) и (4.34) следует, что в рамках сделанного предположения (4.26) полезные вклады $\langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle$ совпадают с вкладами, которые можно получить, рассчитывая их в приближении плоских волн, так как передаточные функции $Q_{mn}(q,\Omega;z)$ для $q=0$, $\Omega=0$ совпадают с передаточными функциями для случая плоских волн.

4.3.1. Отношение сигнал/шум

В теории квантового изображения отношение сигнала к шуму определяют следующим образом:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_j^{(out)} = \frac{\langle \hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle^2}{\sigma_j^{(s)2}(\boldsymbol{\rho})}. \tag{4.36}$$

Для входного когерентного изображения $\alpha_{j0}(\boldsymbol{\rho})$ $(j=1,3)$ отношение сигнал/шум равно:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_j^{(in)} = |\alpha_{j0}(\boldsymbol{\rho})|^2 = \langle \hat{n}_{j0}(\boldsymbol{\rho})\rangle. \tag{4.37}$$

Для случая входного изображения на частоте ω_1, используя (4.28), (4.29), (4.33) и (4.34), получаем такие выражения для отношения сигнал/шум на выходе:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(out)} &= \frac{|Q_{11}(0,0;z)|^2}{1+2W_d(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_2^{(out)} &= \frac{|Q_{12}(0,0;z)|^2}{1+2W_d(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(out)} &= \frac{|Q_{13}(0,0;z)|^2}{1+2W_u(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_4^{(out)} &= \frac{|Q_{14}(0,0;z)|^2}{1+2W_u(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

В случае же входного изображения на частоте ω_3 расчеты приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(out)} &= \frac{|Q_{13}(0,0;z)|^2}{1+2W_d(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_2^{(out)} &= \frac{|Q_{14}(0,0;z)|^2}{1+2W_d(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(out)} &= \frac{|Q_{33}(0,0;z)|^2}{1+2W_u(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_4^{(out)} &= \frac{|Q_{34}(0,0;z)|^2}{1+2W_u(0,0;z)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

На рис. 4.4 представлены графики зависимостей нормированного отношения сигнал/шум

$$\left(\frac{S}{N}\right)_j = \left(\frac{S}{N}\right)_j^{(out)} \Big/ \left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)}, \quad (j = 1,2,3,4;)$$

для входного оптического изображения на частоте ω_1 от приведенной длины взаимодействия $\eta = \beta z$ и нормированного нелинейного коэффициента $\xi = \gamma/\beta$. Из рис. 4.4 видно, что при усилении входного изображения отношение сигнал/шум для него уменьшается, тогда как для изображений на генерируемых частотах, наряду с ростом среднего числа фотонов, имеет место

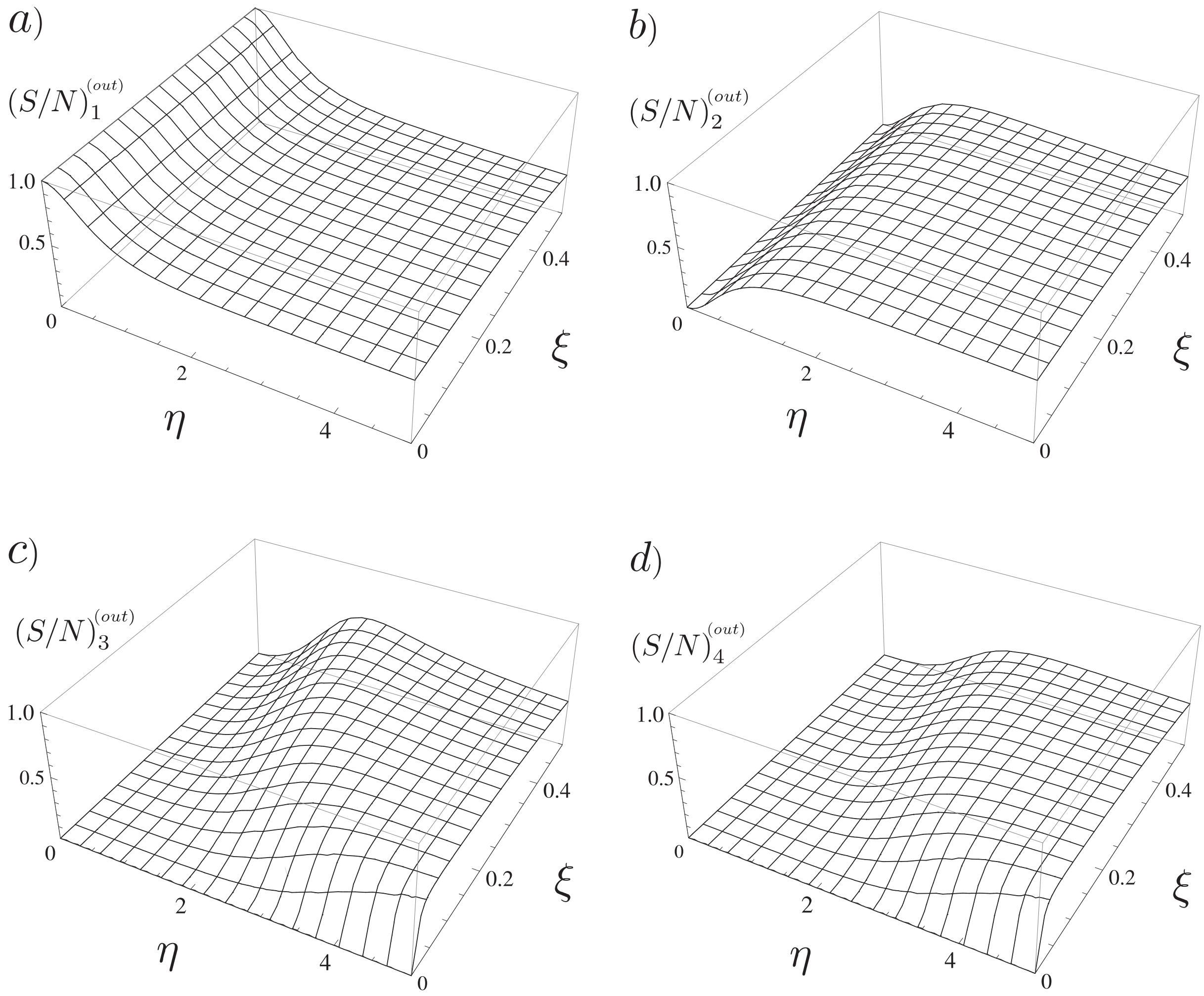

Рис. 4.4. Зависимость приведенного отношения сигнал/шум на частотах ω_1 (a), ω_2 (b), ω_3 (c), ω_4 (d) от приведенной длины взаимодействия $\eta = \beta z$ и нормированного нелинейного коэффициента $\xi = \gamma/\beta$ при входном изображении на частоте ω_1. Зависимости построена для таких же длин волн, что и на рис. 4.2

рост отношения сигнал/шум. Из графиков также видно, что отношение сигнал/шум для изображений на частотах ниже частоты накачки слабо зависит от нелинейного коэффициента ξ (рис. 4.4 a,b), тогда как для изображений с частотами выше частоты накачки отношение сигнал/шум зависит существенно от ξ (рис. 4.4 c,d).

На рис. 4.5 представлены зависимости нормированного отношения сигнал/шум в случае, когда входное изображение имеет частоту ω_3. Из рис. 4.5 следует, что с увеличением длины взаимодействия отношение сигнал/шум для генерируемого изображения на частоте ω_3 падает (рис. 4.5c). Это объясняется тем, что процесс генерации и усиления добавляет шум в исходное изображение. Отношение сигнал/шум для изображения на частоте ω_3 при определенных параметрах может принимать значение равное нулю. Это соответствует нулевому передаточному коэффициенту Q_{33}. В этом случае изображение на выходе кристалла на частоте ω_3 отсутствует. Далее отношение сигнал/шум для изображения на частоте ω_3 растет. Отношения сигнал/шум для изображений на частотах ω_1, ω_2 и ω_4 увеличивается с ростом η и ξ. Следует заметить, что эти отношения растут не так быстро, как в случае исходного изображения на частоте ниже частоты накачки. Это следует из неравенств:

$$|Q_{11}| \geq |Q_{33}|, \quad |Q_{12}| \geq |Q_{34}|. \tag{4.40}$$

Неравенства (4.40) являются следствием того факта, что в рассматриваемом связанном процессе наличие фотонов в модах на частотах выше частоты накачки (частоты ω_3 и ω_4) не может иметь место без наличия таковых для мод на частотах ниже частоты накачки (частоты ω_1 и ω_2).

Можно показать, что при больших длинах взаимодействия отношение сигнал к шуму для каждого изображения стремиться к 1/4. Рассмотрим, например, отношение сигнал/шум для изображения на частоте ω_1 для случая исходного изображения на этой же частоте. Учитывая, что $Q_{mn} \to \infty$ при $z \to \infty$ имеем:

$$\frac{|Q_{11}|^2}{1+2(|Q_{12}|^2+|Q_{14}|^2)} = \frac{|Q_{11}|^2}{1+2(|Q_{11}|^2+|Q_{12}|^2-1)} \longrightarrow \frac{1}{2(1+|Q_{13}|^2/|Q_{11}|^2)}. \tag{4.41}$$

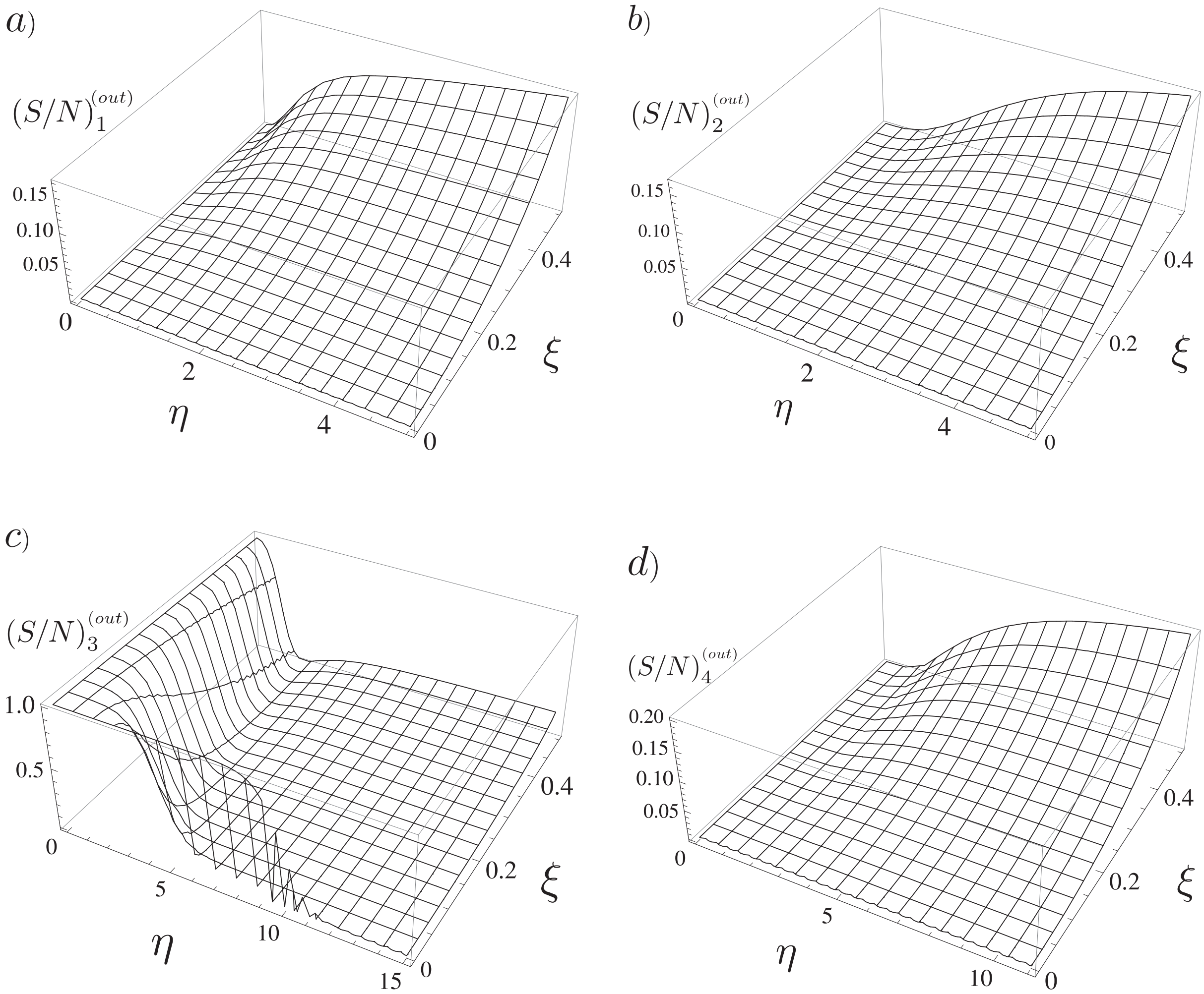

Рис. 4.5. Зависимость приведенного отношения сигнал/шум на частотах ω_1 (a), ω_2 (b), ω_3 (c), ω_4 (d) от приведенной длины взаимодействия $\eta = \beta z$ и нормированного нелинейного коэффициента $\xi = \gamma/\beta$ при входном изображении на частоте ω_3. Зависимости построены для таких же длин волн, что и на рис. 4.2

Далее, из выражений для передаточных коэффициентов (4.14) следует: $|Q_{13}|^2/|Q_{11}|^2 \to 1$, отсюда получаем:

$$\lim_{z\to\infty} \left(\frac{S}{N}\right)_1^{(out)} / \left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)} = \frac{1}{4}. \tag{4.42}$$

4.3.2. Корреляции и перепутанность изображений

Рассматриваемый связанный процесс в приближении плоских волн изучен в Главе 2, где в терминах квадратурных компонент показано, что перепутанными оказываются квадратуры не только на частотах ω_1 и ω_2, но и на частотах ω_3 и ω_4. В настоящей главе мы имеем дело с числом фотонов — величинами, которые не зависят от фазы моды поля.

Будем характеризовать связь между изображениями на различных частотах нормированной дисперсией разности чисел фотонов [132, 133]:

$$K_{jk} = \frac{\langle(\hat{n}_j - \hat{n}_k)^2\rangle - \langle(\hat{n}_j - \hat{n}_k)\rangle^2}{\langle\hat{n}_j\rangle + \langle\hat{n}_k\rangle} = \frac{\sigma_j^2 + \sigma_k^2 - 2R_{jk}}{\langle\hat{n}_j\rangle + \langle\hat{n}_k\rangle}, \tag{4.43}$$

где R_{jk} — коэффициент корреляции чисел фотонов:

$$R_{jk} = \langle\hat{n}_j\hat{n}_k\rangle - \langle\hat{n}_j\rangle\langle\hat{n}_k\rangle. \tag{4.44}$$

В соответствии с (4.43) для независимых классических полей $\sigma_j^2 \geq \langle\hat{n}_j\rangle$, следовательно $K_{jk} \geq 1$. Для независимых когерентных полей $K_{jk} = 1$, так как $R_{jk} = 0$, $\sigma_j^2 = \langle\hat{n}_j\rangle$. Для коррелированных полей $R_{jk} > 0$ и, следовательно $K_{jk} < 1$, причем для полностью коррелированных полей $K_{jk} = 0$. Если $K_{jk} < 1$, то статистика разности чисел фотонов $(\hat{n}_j - \hat{n}_k)$ субпуассоновская и флуктуации ниже уровня стандартного квантового предела, равного $\langle\hat{n}_j\rangle + \langle\hat{n}_k\rangle$. Субпуассоновская статистика разности чисел фотонов, в свою очередь, свидетельствует о квантовой перепутанности состояний.

Для неклассических полей удобно ввести параметр:

$$\mathcal{E}_{jk} = 1 - K_{jk}, \tag{4.45}$$

характеризующий степень перепутанности полей на частотах ω_j и ω_k. В случае коррелированных квантовых полей: $0 < \mathcal{E}_{jk} \leq 1$, при этом для полностью коррелированных полей $\mathcal{E}_{jk} = 1$. Для некоррелированных классических полей $\mathcal{E}_{jk} \leq 0$.

Для анализа параметра K_{jk} в рассматриваемой нами ситуации необходимо знать величины R_{jk} (4.43). Их расчеты приводят к следующим выражениям:

$$
\begin{aligned}
&R_{12}(\boldsymbol{\rho}) = (2|Q_{11}|^2|Q_{12}|^2 + Q_{11}Q_{12}Q_{13}^*Q_{14}^* + Q_{11}^*Q_{12}^*Q_{13}Q_{14})\langle\hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{11}(q,\Omega;z)Q_{12}(q,\Omega;z) + Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{14}(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega, \\
&R_{34}(\boldsymbol{\rho}) = (2|Q_{13}|^2|Q_{14}|^2 + Q_{14}Q_{33}Q_{34}Q_{13}^* + Q_{14}^*Q_{33}^*Q_{34}^*Q_{13})\langle\hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{14}^*(q,\Omega;z) + Q_{33}(q,\Omega;z)Q_{34}(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega, \\
&R_{13}(\boldsymbol{\rho}) = (Q_{11}Q_{13}^*Q_{14}^*(Q_{34} - Q_{12}^*) + Q_{11}^*Q_{13}Q_{14}(Q_{34}^* - Q_{12}))\langle\hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{14}^*(q,\Omega;z) + Q_{33}(q,\Omega;z)Q_{34}(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega, \\
&R_{14}(\boldsymbol{\rho}) = (2|Q_{11}|^2|Q_{14}|^2 - Q_{11}Q_{14}Q_{13}^*Q_{34}^* - Q_{11}^*Q_{14}^*Q_{13}Q_{34})\langle\hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{11}(q,\Omega;z)Q_{14}(q,\Omega;z) - Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{34}(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

В выражениях (4.46) для упрощения записи опущены аргументы функций Q_{mn} для множителей перед $\langle\hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle$. В этих множителях $q = 0$, $\Omega = 0$.

Интегральные выражения в (4.46), как и в (4.28), (4.29), (4.33) и (4.34), определяют фоновое значение корреляций фотонов $K_{jk}^{(b)}$ в отсутствие входного изображения. Полезные корреляции $K_{jk}^{(s)}$ связаны со средним числом фотонов входного изображения $\langle\hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle$.

На рис. 4.6 представлены параметры неклассичности для различных пар частот изображения в зависимости от длины взаимодействия η и нелинейного коэффициента $\xi = \gamma/\beta$, рассчитанные при подстановке в (4.43) и (4.45) значений $\langle\hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle$, $\sigma_j^{(s)2}(\boldsymbol{\rho})$ и $R_{jk}^{(s)}(\boldsymbol{\rho})$. Из рис. 4.5 следует, что между изображениями на частотах ω_1 и ω_2 и изображениями на частотах ω_3 и ω_4 имеются квантовые корреляции ($\mathcal{E}_{12} > 0$, $\mathcal{E}_{34} > 0$), т.е. изображения на этих парах частот оказываются перепутанными. Перепутанность между изображениями на остальных парах частот отсутствует ($\mathcal{E}_{13} < 0$, $\mathcal{E}_{14} < 0$). При этом с увели-

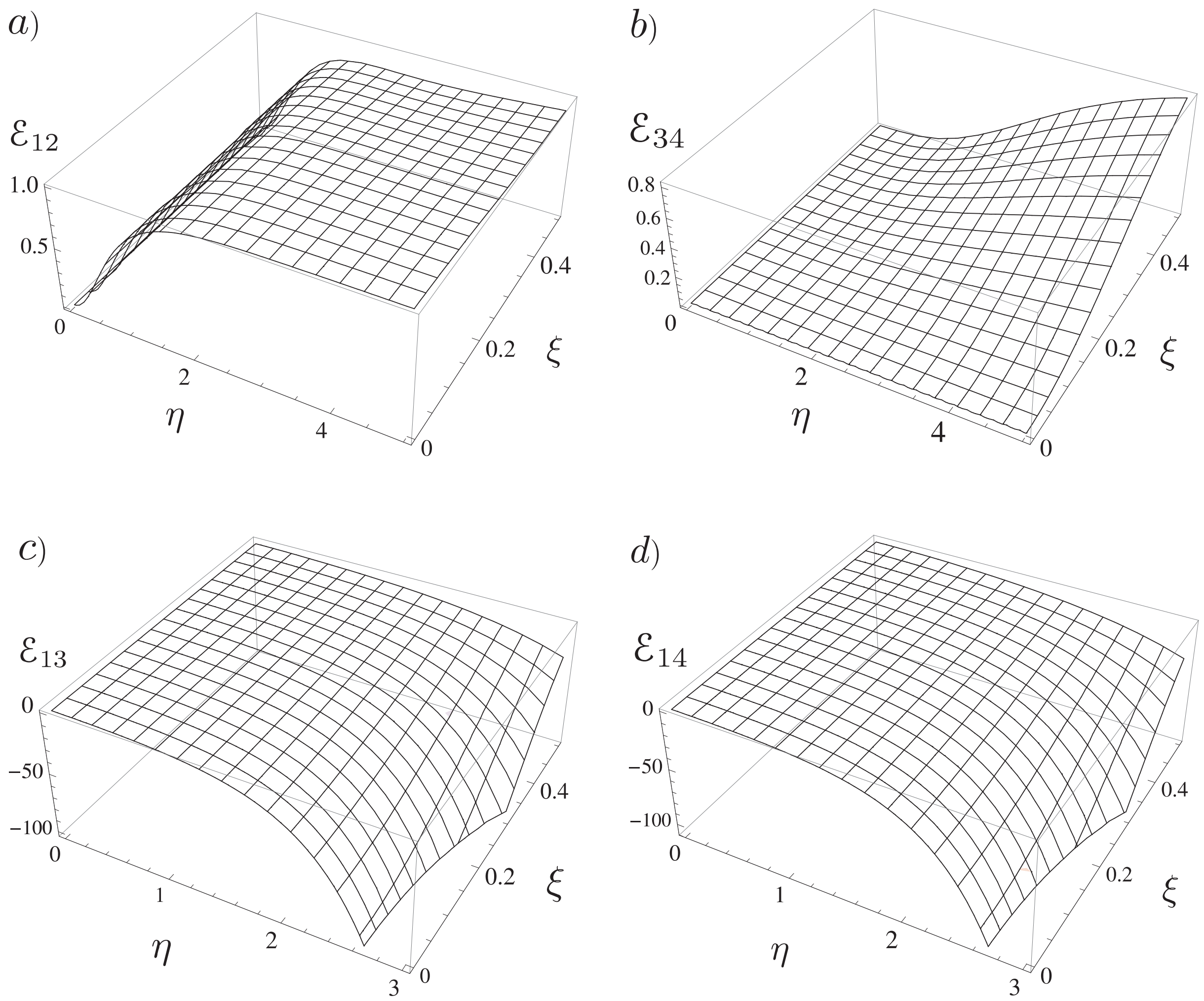

Рис. 4.6. Зависимость параметра неклассичности $\mathcal{E}_{jk}$ между изображениями на частотах ω_j и ω_k от нормированной длины взаимодействия $\eta = \beta z$ и приведенного нелинейного коэффициента $\xi = \gamma/\beta$ при входном изображении на частоте ω_1. Зависимости построены для таких же длин волн, что и на рис. 4.2

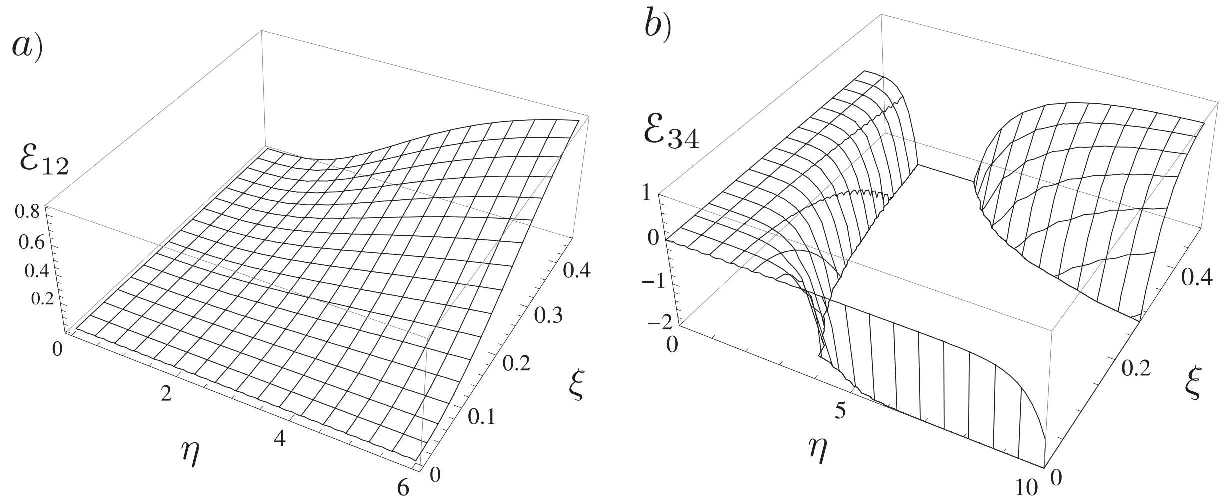

Рис. 4.7. Зависимость параметра неклассичности $\mathcal{E}_{jk}$ для изображений между изображениями на частотах ω_j и ω_k от нормированной длины взаимодействия $\eta = \beta z$ и приведенного нелинейного коэффициента $\xi = \gamma/\beta$ при входном изображении на частоте ω_3. Зависимости построена для таких же длин волн, что и на рис. 4.2

чением длины взаимодействия η перепутанность растет. Увеличения эффективности процессов смешения частот (нелинейный коэффициент ξ) ведет к увеличению неклассичности между изображениями на частотах ω_3 и ω_4, существенно не уменьшая неклассичность между изображениями на частотах ω_1 и ω_2. Этот вывод совпадает с результатами раздела 2.4.3 , полученными для квадратурных компонент.

Корреляции чисел фотонов для случая входного изображения на частоте

ω_3 имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&R_{12}(\boldsymbol{\rho}) = (2|Q_{13}|^2|Q_{14}|^2 + Q_{11}Q_{12}Q_{13}^*Q_{14}^* + Q_{11}^*Q_{12}^*Q_{13}Q_{14})\langle\hat{n}_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{11}(q,\Omega;z)Q_{12}(q,\Omega;z) + Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{14}(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega, \\
&R_{34}(\boldsymbol{\rho}) = (2|Q_{33}|^2|Q_{34}|^2 + Q_{13}Q_{34}Q_{14}^*Q_{33}^* + Q_{13}^*Q_{34}^*Q_{14}Q_{33})\langle\hat{n}_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{14}^*(q,\Omega;z) + Q_{33}(q,\Omega;z)Q_{34}^*(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega, \\
&R_{13}(\boldsymbol{\rho}) = (2|Q_{13}|^2|Q_{33}| + Q_{11}Q_{33}Q_{13}^{*2} + Q_{11}^*Q_{33}^*Q_{13})^2\langle\hat{n}_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{11}(q,\Omega;z)Q_{13}^*(q,\Omega;z) + Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{33}^*(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega, \\
&R_{14}(\boldsymbol{\rho}) = (2|Q_{13}|^2|Q_{34}|^2 + Q_{11}Q_{34}Q_{13}^*Q_{14}^* + Q_{11}^*Q_{34}^*Q_{13}Q_{14})\langle\hat{n}_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \\
&+\frac{1}{(2\pi)^6}\iint |F(\Omega)|^4|Q_{11}(q,\Omega;z)Q_{14}^*(q,\Omega;z) + Q_{13}(q,\Omega;z)Q_{34}^*(q,\Omega;z)|^2 d\mathbf{q}d\Omega
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

На рис.4.7 представлены графики зависимостей параметра неклассичности для изображений на частотах ниже ($\mathcal{E}_{12}$) и выше ($\mathcal{E}_{34}$) частоты накачки. Из рис. 4.7a видно, что с увеличением длины взаимодействия и эффективности преобразования частоты вверх перепутанность между изображениями на частотах ниже частоты накачки монотонно растет. Зависимость неклассичности изображений на частотах выше частоты накачки (см. рис. 4.7b) сложнее. Рис. 4.7b свидетельствует, что на начальном этапе эволюции полей в нелинейном взаимодействии статистика разности числа фотонов для изображений на частотах ω_3 и ω_4 суперпуассоновская ($\mathcal{E}_{34} < 0$). Однако при больших длинах взаимодействия статистика разности чисел фотонов становится субпуассоновской ($\mathcal{E}_{34} > 0$), что свидетельствует о проявлении неклассичности между изображениями.

4.4. Схема с далеко расположенным объектом

Оптическая схема с далеко расположенным объектом представлена на рис. 4.8. Оптическое изображение, расположенное в плоскости P_1 (рис. 4.8), проецируется на АНФК с помощью линзы L_1. В АНФК происходит усиле-

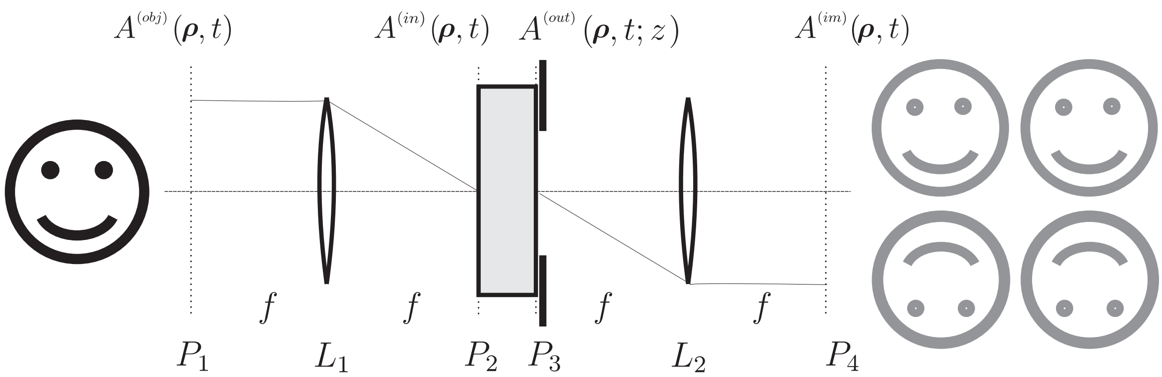

Рис. 4.8. Схема параметрической генерации и преобразования частоты вверх перепутанных оптических изображения для случая далеко расположенного объекта

ние и генерация оптического изображения на новых частотах в связанных нелинейно-оптических процессах (4.1). Затем изображение с выхода кристалла проецируется на плоскость изображений P_4 линзой L_2. Расстояния между объектной плоскостью P_1 и линзой L_1, между линзой L_1 и входной плоскостью кристалла P_2, выходной плоскостью кристалла P_3 и линзой L_2, а также линзой L_2 и плоскостью изображений P_4 равны фокусному расстоянию этих линз f.

Бозе-операторы медленно-меняющихся амплитуд поля $\hat{A}_j^{(obj)}(\boldsymbol{\rho}, t)$, $\hat{A}_j^{(in)}(\boldsymbol{\rho}, t)$, $\hat{A}_j^{(out)}(\boldsymbol{\rho}, t)$, $\hat{A}_j^{(im)}(\boldsymbol{\rho}, t)$ связаны между собой фурье-преобразованием, выполняемым линзой L_1 (ср. с (4.17) и (4.18)):

$$\hat{A}_j^{(in)}(\boldsymbol{\rho}, t) = \frac{1}{i\lambda_j f} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}_j^{(obj)}(\boldsymbol{\rho}', t) \exp\left(-i\frac{k_j}{f}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}'\right) d\boldsymbol{\rho}', \tag{4.48}$$

и линзой L_2:

$$\hat{A}_j^{(im)}(\boldsymbol{\rho}, t) = \frac{1}{i\lambda_j f} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}_j^{(out)}(\boldsymbol{\rho}', t) P(\boldsymbol{\rho}') \exp\left(-i\frac{k_j}{f}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}'\right) d\boldsymbol{\rho}'. \tag{4.49}$$

Здесь $P(\boldsymbol{\rho})$ — функция пропускания диафрагмы, располагаемой на выходе АНФК. Как и выше, в аргументах операторов мы пренебрегаем временным запаздыванием.

Учитывая преобразования линз (4.48) и (4.49), для фурье-компонент изображений на взаимодействующих частотах получим:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(im)}(\boldsymbol{\rho}, \Omega; z) = \mathcal{Q}^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \Omega; z) \hat{\mathbf{A}}^{(obj)}(\boldsymbol{\rho}, \Omega) \tag{4.50}$$

где

$$\hat{\mathbf{A}}^{(obj)}(\boldsymbol{\rho},\Omega) = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^{(obj)}(\boldsymbol{\rho},\Omega) \\ \hat{A}_2^{(obj)\dagger}(-\boldsymbol{\rho},-\Omega) \\ \hat{A}_3^{(obj)}(\boldsymbol{\rho},\Omega) \\ \hat{A}_4^{(obj)\dagger}(-\boldsymbol{\rho},-\Omega) \end{pmatrix}, \tag{4.51}$$

и

$$\hat{\mathbf{A}}^{(im)}(\boldsymbol{\rho},\Omega;z) = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^{(im)}(\boldsymbol{\rho},\Omega;z) \\ \hat{A}_2^{(im)\dagger}(-\boldsymbol{\rho},-\Omega;z) \\ \hat{A}_3^{(im)}(\boldsymbol{\rho},\Omega;z) \\ \hat{A}_4^{(im)\dagger}(-\boldsymbol{\rho},-\Omega;z) \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

— столбцы операторов рождения и уничтожения фотонов с соответствующими частотами и поперечными координатами. Элементы матрицы $\mathcal{Q}^{(2)}(\rho,\Omega;z)$ получаются из элементов матрицы $\mathcal{Q}^{(1)}(q,\Omega;z)$ для схемы с близко расположенным объектом заменой: $q \longrightarrow \frac{k}{f}\rho$, причем в рамках приближения, использованного в разделе 4.2.1, считаем $k = k_d$ для $\hat{A}_{1,2}^{(im)}$ и $k = k_u$ для $\hat{A}_{3,4}^{(im)}$. Из (4.51) и (4.52) следует, что изображения, генерируемые на частотах ниже частоты накачки, как и изображения на частотах выше частоты накачки будут перевернутыми относительно друг друга.

Из (4.50) и вида передаточных функций (см. рис. 4.2) следует, что без искажений усиливаться и преобразовываться будут только такие изображения, размер которых не превосходит масштаба разрешения. В нашем случае оно равно радиусу ρ_0, который определяется поперечно-волновой полосой Δq параметрического усиления:

$$\rho_0 = \frac{f}{k}\Delta q. \tag{4.53}$$

В соответствии с (4.53) в рассматриваемой схеме есть два характерных масштаба ρ_0: для волн с частотами ниже частоты накачки $(k = k_d)$ и для волн с частотами выше частоты накачки $(k = k_u)$.

На рис. 4.8 показана диафрагма (функция зрачка $P(\boldsymbol{\rho})$), расположенная на выходе кристалла и которая ограничивает полосу шума. Вычисления $\hat{A}^{(im)}$ с учетом диафрагмы приводят к свертке ее фурье-образа $\tilde{P}(\boldsymbol{q})$ и выходных операторов $\hat{a}^{(out)}(\mathbf{q})$. Естественно полагать, что пространственный спектр диафрагмы $\tilde{P}(\boldsymbol{q})$ гораздо уже пространственной полосы усиления, что позволяет полагать ее размер достаточно большим. Влияние диафрагмы на разрешающую способность схемы можно оценить по размеру дифракционного пятна, в которое расплывается точка начального изображения: для излучения с длиной волны λ точка входного изображения преобразуется в пятно площадью $S_d = (f\lambda)^2/S_p$ в выходном изображении (S_p — площадь диафрагмы).

Далее полагаем, что диафрагма выбрана таким образом, что справедливы следующие неравенства:

$$\sqrt{S_d} \ll \rho_{el} < \rho_0, \tag{4.54}$$

где ρ_{el} — характерный размер элементов входного изображения, которые необходимо преобразовать без искажений. В (4.54) левое неравенство требует, чтобы дифракционное расплывание на апертуре диафрагмы не «смазывало» элементы изображения. Правое неравенство в (4.54) налагает очевидное ограничение на размер минимального элемента изображения — в области эффективного преобразования и усиления (радиусом ρ_0) должен «помещаться» хотя бы один элемент. Помимо этого, будем полагать, что размер пикселей детекторов Δ не превосходит характерного размера элементов изображения: $\Delta \leq \rho_{el}$.

4.4.1. Статистические характеристики изображений

Как и при рассмотрении схемы с близко распложенным объектом, рассмотрим случай, когда на вход схемы с далеко расположенным объектом подается входное когерентное изображение на частоте ниже и выше частоты накачки. Как и прежде, входное изображение считаем монохроматическим (см. выражения (4.21) и (4.22)).

Для входного изображения на частоте ω_1 выражения для плотности потока фотонов на выходе оптической системы (плоскость P_4 на рис. 4.7) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_1(\boldsymbol{\rho})\rangle &= \left|Q_{11}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle + +\frac{1}{2\pi S_d^{(d)}}\int |F(\Omega)|^2 W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,\Omega;z\right)d\Omega,\\
\langle \hat{n}_2(\boldsymbol{\rho})\rangle &= \left|Q_{12}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2\langle \hat{n}_{10}(-\boldsymbol{\rho})\rangle + \frac{1}{2\pi S_d^{(d)}}\int |F(\Omega)|^2 W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,\Omega;z\right)d\Omega,\\
\langle \hat{n}_3(\boldsymbol{\rho})\rangle &= \left|Q_{13}\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\right|^2\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle + \frac{1}{2\pi S_d^{(u)}}\int |F(\Omega)|^2 W_u\left(\frac{k_d}{f}\rho,\Omega;z\right)d\Omega,\\
\langle \hat{n}_4(\boldsymbol{\rho})\rangle &= \left|Q_{14}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2\langle \hat{n}_{10}(-\boldsymbol{\rho})\rangle + \frac{1}{2\pi S_d^{(u)}}\int |F(\Omega)|^2 W_u\left(\frac{k_d}{f}\rho,\Omega;z\right)d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Здесь $S_d^{(d,u)} = S_p^{-1}(2\pi f/k_{d,u})^2$ — площадь дифракционного пятна для волн с частотами ниже (d) и выше (u) частоты накачки, $W_{d,u}$ — функции, описывающие шумовой вклад (4.31), $F(\Omega)$ — функция пропускания фильтров, использующихся в рассматриваемой схеме.

Расчет дисперсии плотности потока фотонов приводит к выражениям

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2(\boldsymbol{\rho}) =&\langle \hat{n}_1(\boldsymbol{\rho})\rangle + 2\left|Q_{11}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2 W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle+\\
&+\frac{1}{2\pi S_d^{(d)}}\int |F(\Omega)|^4 W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,\Omega;z\right)^2 d\Omega,\\
\sigma_2^2(\boldsymbol{\rho}) =&\langle \hat{n}_2(-\boldsymbol{\rho})\rangle + 2\left|Q_{12}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2 W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\langle \hat{n}_{10}(-\boldsymbol{\rho})\rangle+\\
&+\frac{1}{2\pi S_d^{(d)}}\int |F(\Omega)|^4 W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,\Omega;z\right)^2 d\Omega,\\
\sigma_3^2(\boldsymbol{\rho}) =&\langle \hat{n}_3(\boldsymbol{\rho})\rangle + 2\left|Q_{13}\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\right|^2 W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle+\\
&+\frac{1}{2\pi S_d^{(u)}}\int |F(\Omega)|^4 W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,\Omega;z\right)^2 d\Omega,\\
\sigma_4^2(\boldsymbol{\rho}) =&\langle \hat{n}_4(-\boldsymbol{\rho})\rangle + 2\left|Q_{14}\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\right|^2 W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\langle \hat{n}_{10}(-\boldsymbol{\rho})\rangle+\\
&+\frac{1}{2\pi S_d^{(u)}}\int |F(\Omega)|^4 W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,\Omega;z\right)^2 d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Выражения (4.55), (4.56) по форме похожи на соответствующие выражения для схемы с близко расположенным объектом. В отличие от конфигурации с близким оптическим изображением в выражениях для далеко расположенного изображения передаточные функции Q_{mn} зависят от поперечной координаты в плоскости изображений.

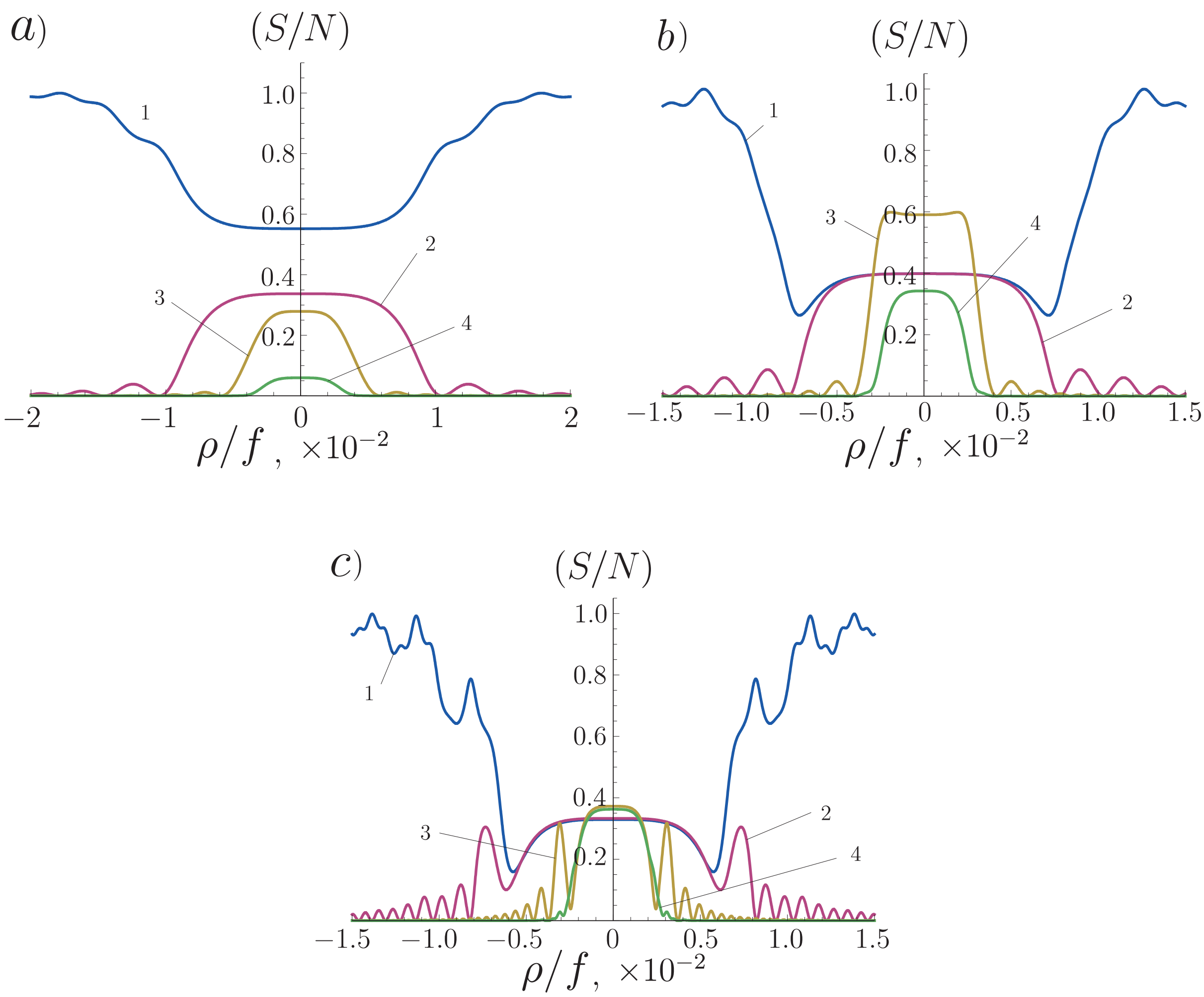

Рис. 4.9. Нормированное отношение сигнал/шум при входном изображении на частоте ω_1 для изображений на длинах волн λ_1 (1), λ_2 (2), λ_3 (4), λ_4 (4) в зависимости от ρ/f в плоскости изображения для приведенных длин взаимодействия $\eta = \beta z$: a) 1.0, b) 2.0, c) 5.0. Кривые построена для таких же длин волн, что и на рис. 4.2 для $\xi = 0.5$

Выражения для плотностей потоков фотонов и дисперсий в случае входного изображения на частоте ω_3 получаются из (4.55) и (4.56) с помощью замены передаточных коэффициентов в полезных вкладах (множители перед $\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho}) \rangle$):

$$Q_{11} \to Q_{13}, \quad Q_{12} \to Q_{14}, \quad Q_{13} \to Q_{33}, \quad Q_{14} \to Q_{34}, \tag{4.57}$$

и замены $\langle\hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle \to \langle\hat{n}_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle$.

Для описания шумовых свойств генерируемых изображений рассмотрим отношение сигнал к шуму (4.36), которое будем определять по полезным величинам $\langle\hat{n}_j^{(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle$, $\langle\sigma_j^{2(s)}(\boldsymbol{\rho})\rangle$. Пользуясь (4.55) и (4.56), приходим к следующим выражениям для случай входного изображения на частоте ω_1:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(out)} &= \frac{\left|Q_{11}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)},\\
\left(\frac{S}{N}\right)_2^{(out)} &= \frac{\left|Q_{12}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)},\\
\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(out)} &= \frac{\left|Q_{13}\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)},\\
\left(\frac{S}{N}\right)_4^{(out)} &= \frac{\left|Q_{14}\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(in)}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Зависимости (4.58) представлены на рис. 4.9. Как следует из рис. 4.9, на начальном этапе взаимодействия изображение на исходной частоте ω_1 обладает большим отношением сигнал к шума, тогда как изображения на остальных частотах только начинают формироваться. При этом наиболее быстро формируется изображение на частоте ω_2, так как между модами этой частоты и частоты исходного изображеня имеется непосредованная связь — эти частоты связаны общим процессов деления частоты накачки, которые служит источником фотонов для всего процесса. Далее формируется изображение на частоте ω_3 и медленнее всех генерируется изображение на частоте ω_4. Рис. 4.9c иллюстрирует случай сформировавшихся изображений. Видно, что отношение (S/N) для изображений на суммарных частотах ω_3 и ω_4 область эффективной генерации шире таковой для изображений на частотах ω_1 и ω_2. Для параметров, представленных на рис. 4.9, оценки для масштабов эффективной генерации и преобразования для частот ω_1 и ω_2: $\rho_0^{(d)}/f \approx 0.2$, для частот ω_3 и ω_4: $\rho_0^{(u)}/f \approx 0.5$. Установившееся отношение сигнал/шум для изображений на генерируемых частотах имеет значение ≈ 0.4.

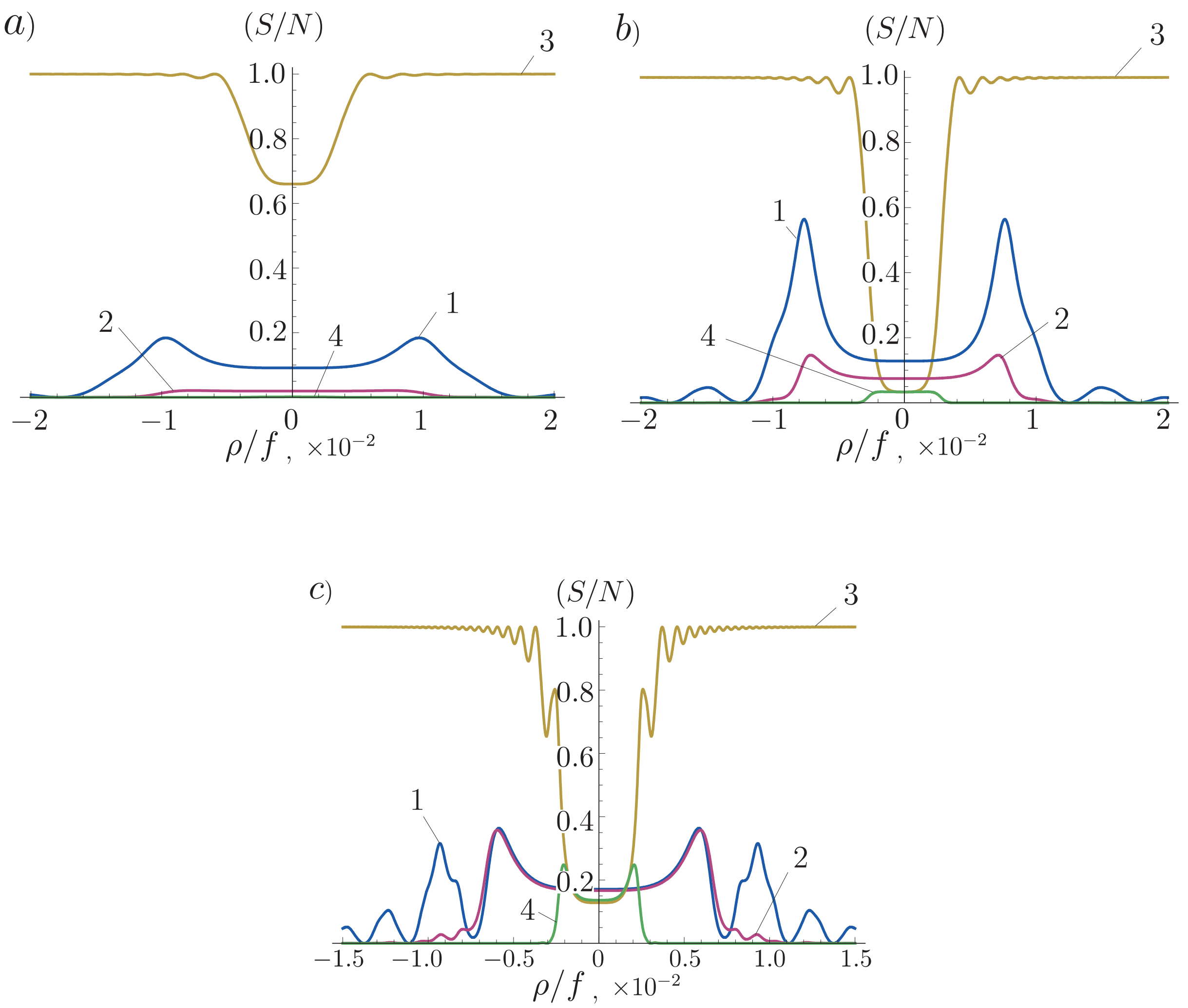

Рис. 4.10. Зависимость нормированного отношения сигнал/шум при входном изображении на частоте ω_3 от приведенной поперечной координаты ρ/f в плоскости изображения. Номер кривой связан с соответствующей длиной волны. Зависимости построена для таких же длин волн, что и на рис. 4.2 для $\xi = 0.5$

Пользуясь (4.57), приходим к выражениям для отношения сигнал/шум в случае входного изображения на частоте ω_3:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S}{N}\right)_1^{(out)} &= \frac{\left|Q_{13}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_2^{(out)} &= \frac{\left|Q_{14}\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_d\left(\frac{k_d}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(out)} &= \frac{\left|Q_{33}\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}, \\
\left(\frac{S}{N}\right)_4^{(out)} &= \frac{\left|Q_{34}\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)\right|^2}{1+2W_u\left(\frac{k_u}{f}\rho,0;z\right)}\left(\frac{S}{N}\right)_3^{(in)}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

На рис. 4.10 представлены зависимости (4.59) нормированного отношения сигнал/шум от приведенной поперечной координаты ρ/f. Сравнение зависимостей, представленных на рис. 4.10, с зависимостями для отношения сигнал/шум в случае входного изображения на частоте, лежащей ниже частоты накачки (4.5), показывает, что отношения сигнал/шум для входного изображения на частоте, лежащей выше частоты накачки, стремиться к предельному значению 1/4 медленнее, чем для первого случая.

Заметим, что на рис. 4.9 и рис. 4.10 в периферийных областях нормированное отношение сигнал/шум для усиливаемого изображения ≈ 1, в то время как отношения сигнал/шум для генерируемых изображений очень малы. Это свидетельствует о том, что генерация и усиление в периферийных областях пространства практически отсутствует и, таким образом, моды входного изображения проходят через кристалл без изменений.

4.4.2. Корреляции и перепутанность оптических изображений

Рассмотрим квантовые корреляции оптических изображений, генерируемых в схеме с далеко расположенным объектом. В схеме с близко расположенным объектом для изучения квантовых корреляций исследовалось поведение дисперсии разности чисел фотонов. Для этого использовался параметр K_{jk}

(4.43), который характеризовал статистику разности чисел фотонов на частотах ω_j и ω_k. При этом если $K_{jk} < 1$, то статистика разности чисел фотонов субпуассоновская, что свидетельствует о перепутанности состояний. Для исследования перепутанности между изображениями в рассматриваемой схеме также будем использовать параметр $\mathcal{E}_{jk}$ (4.45).

Рассмотрим параметры неклассичности $\mathcal{E}_{jk}$ в исследуемой схеме: $\mathcal{E}_{12}$ — для изображений на частотах ω_1 и ω_2, и $\mathcal{E}_{34}$ — для изображений на частотах ω_3 и ω_4. Выражения для этих величин получаются из (4.46), (4.47) с помощью подстановки:

$$Q_{mn}(0, 0; z) \to Q_{mn}\left(\frac{k}{f}\rho, 0; z\right)$$

для передаточных функций, стоящими перед сигнальными плотностями фотонов $\langle \hat{n}_{10}(\boldsymbol{\rho})\rangle$ и $\langle \hat{n}_{30}(\boldsymbol{\rho})\rangle$, и замены

$$Q_{mn}(q, \Omega; z) \to Q_{mn}\left(\frac{k}{f}\rho, \Omega; z\right)$$

в передаточных функциях, стоящих под знаком интеграла ($k = k_d$ для $m = 1, 2$, $k = k_u$ для $m = 3, 4$). При этом в выражениях, представляющих шумовые вклады в измеряемые величины, интегрирование проводится только по временной частоте Ω.

На рис. 4.11 представлены зависимости параметра $\mathcal{E}_{jk}$ для пар изображений с частотами ниже и выше частоты накачки. Из рис. 4.11 следует, что для указанных пар частот имеет место перепутанность оптических изображений: $\mathcal{E}_{12}, \mathcal{E}_{34} > 0$. На малых длинах взаимодействия перепутанность изображений на высоких частотах значительно меньше, чем перепутанность на низких частотах. С увеличением длины взаимодействия степень перепутанности рассмотренных пар изображений растет. При этом на больших длинах взаимодействия как степень перепутанности, так и пространственный масштаб эффективного перепутывания $\mathcal{E}_{jk} \approx 1$ становятся почти одинаковыми.

Параметры неклассичности для случая, когда на вход схемы с далеко расположенным объектом подается изображение на частоте, лежащей выше частоты накачки изображены на рис. 4.12, из которого видно, что при малых длинах взаимодействия параметр неклассичности $\mathcal{E}_{12} > 0$, тогда как $\mathcal{E}_{34} < 0$

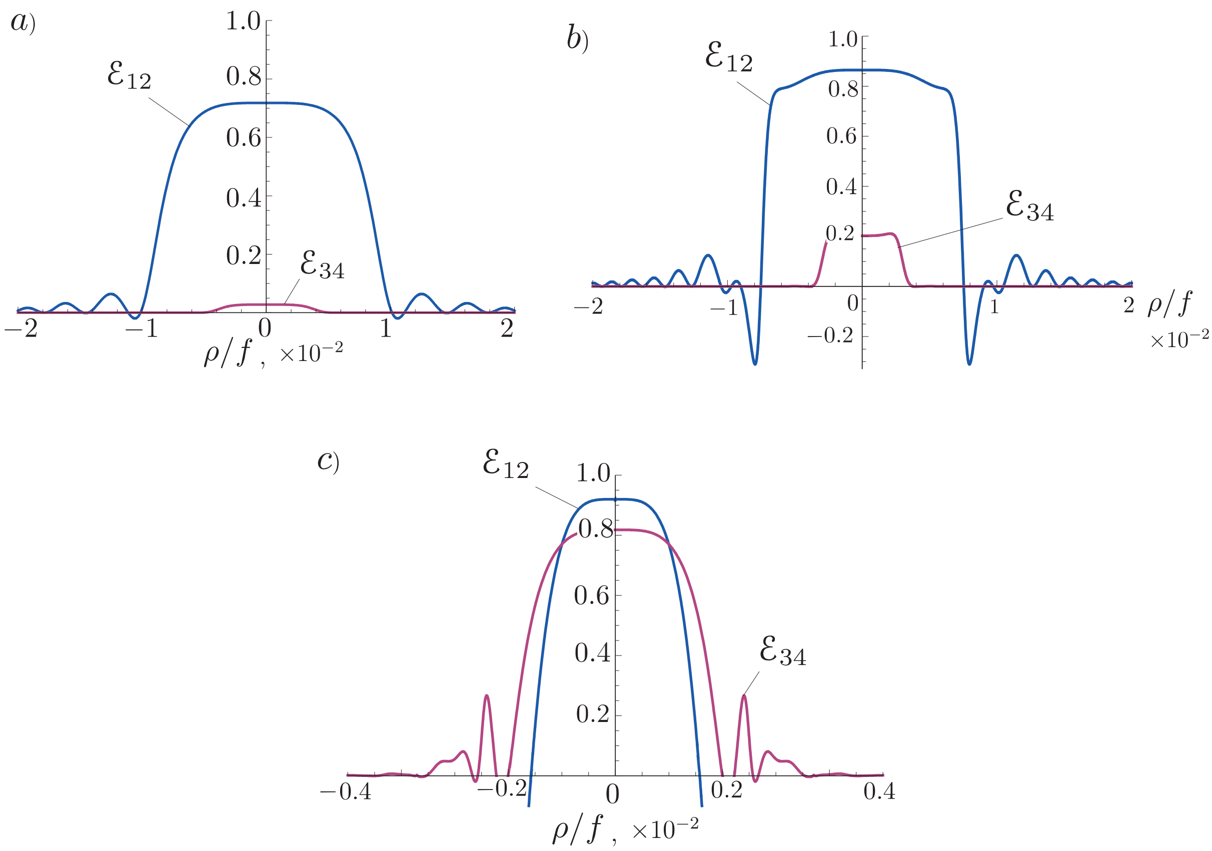

Рис. 4.11. Зависимость параметра неклассичности для изображений на частотах ниже частоты накачки ($\mathcal{E}_{12}$) и на частотах выше частоты накачки ($\mathcal{E}_{34}$) от приведенной поперечной координаты ρ/f при входном изображении на несущей частоте ω_1. Зависимости построена для таких же длин волн, что и на рис. 4.2 для $\xi = 0.5$

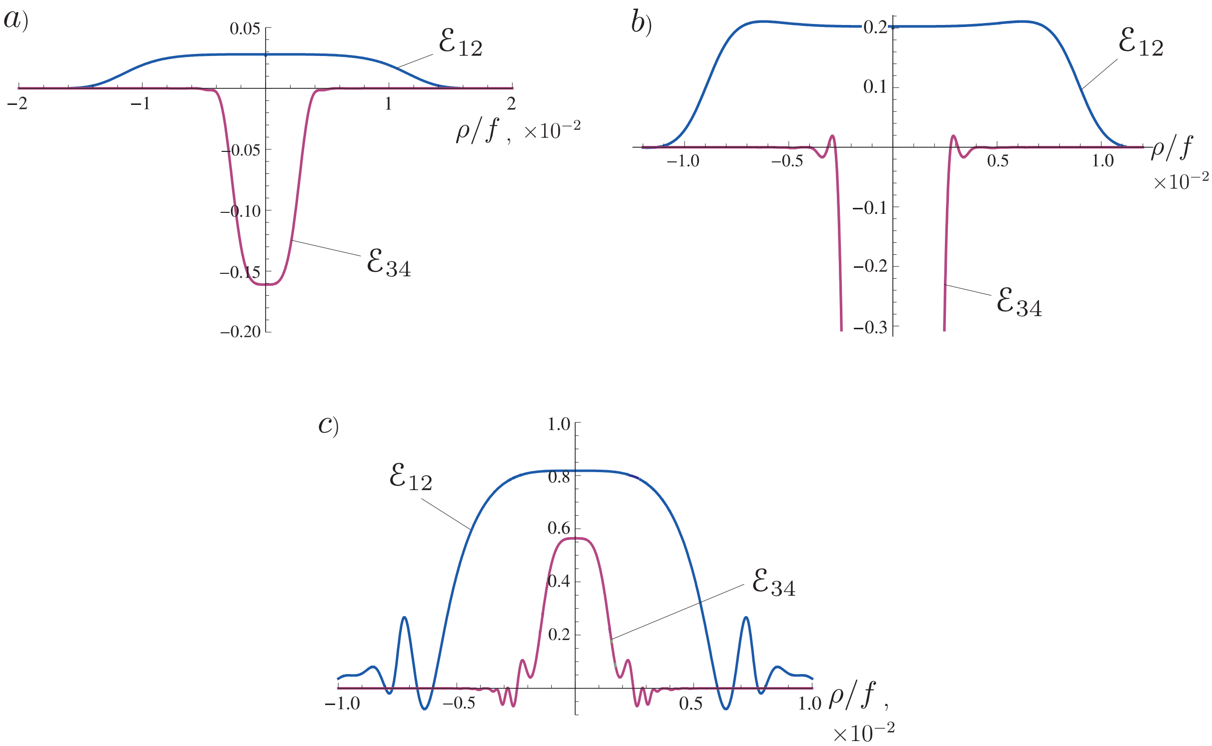

Рис. 4.12. Зависимость параметра неклассичности для изображений на частотах выше частоты накачки ($\mathcal{E}_{12}$) и на частотах выше частоты накачки ($\mathcal{E}_{34}$) от приведенной поперечной координаты ρ/f при входном изображении на несущей частоте ω_3. Зависимости построена для таких же длин волн, что и на рис. 4.2 для $\xi = 0.5$

(рис. 4.12a,b). При больших длинах взаимодействия параметр $\mathcal{E}_{34}$ становится положительным. Таким образом, изображения, генерируемые на частотах ω_3 и ω_4 становятся перепутанными. Сравнение зависимостей на рис. 4.11 с зависимостями на рис. 4.12 показывает, что установление перепутанности между усиливаемыми и преобразовываемыми изображениями в случае входного изображения на частоте, лежащей выше частоты накачки происходит медленнее, чем для входного изображения на частоте, лежащей выше частоты накачки.

4.5. Выводы

В настоящей Главе рассмотрены две схемы для усиления и преобразования оптического изображения: схема с близко расположенным объектом и схема с далеко расположенным объектом. В рассмотренных схемах усиливаемые и преобразовываемые изображения формируются в связанном нелинейно-оптическом процессе (4.1). Изучены квантовые характеристики полей в обеих схемах как для случая входного изображения на частоте, лежащей ниже частоты накачки, так и для случая входного изображения с частотой выше частоты накачки. Подробно изучены отношение сигнал/шум для генерируемых в этих схемах изображений. Показано, что асимптотические значения нормированного отношения сигнал/шум в обеих схемах для выходных изображениях как для низкочастотного, так и высокочастотного входного изображения равны 1/4.

Детально исследован пространственное перепутывание генерируемых оптических изображений для обеих схем. Анализ пространственной перепутанности изображений в терминах чисел фотонов показал, что на выходе из обеих схем формируются две пары перепутанных оптических изображений: на частотах, лежащих ниже частоты накачки, и на частотах, лежащих выше частоты накачки.

В схеме с близко расположенным объектом конечная полоса пространственного захвата параметрических процессов, протекающих в АНФК, определяет минимальный размер элемента изображений, которые могут усиливаться и преобразовываться без искажений. В приближении плоской волны накачки размер изображений, которые может усиливать и преобразовывать конфигурация с близко расположенным объектом, неограничена. В действительности же максимальный размер изображения определяется поперечным размером накачки.

В схеме с далеко расположенным объектом параметрическая полоса захвата определяет размер изображений, которые могут без искажений формироваться в этой схеме, тогда как минимальный размер этих изображений определяется дифракционными эффектами на апертурах элементов, составляющих эту схему (диафрагмы, линзы). Установлено, что в обеих схемах перепутывание между изображениями имеет место во всей области эффективного усиления и преобразования изображений. С увеличением длины взаимодействия происходит уменьшение области эффективного перепутывания для всех генерируемых изображений.

Глава 5

Голографическая телепортация перепутанных оптических изображений

В Главе 3 рассматривалась схема телепортации одномодовых перепутанных состояний, в которой вспомогательное состояние генерируется в связанном параметрическом процессе, состоящем из одного параметрического процесса преобразования частоты вниз и двух процессов смешения частот (2.58). Было показано, что в такой схеме возможно осуществить телепортацию перепутанных пространственно-одномодовых состояний с большой точностью и с малым добавлением шума в перепутанность этих состояний.

Вместе с тем, как упоминалось в Главе 1, к настоящему времени получила развитие и интенсивно исследуется область квантовой оптики — квантовое изображение, которая имеет дело с пространственно-многомодовыми полями. Использование изображений в алгоритмах квантовой информации позволяет обрабатывать большие объемы квантовых данных за один подход квантового алгоритма. Впервые детальное исследование телепортации изображений проводилось в работе [127], где рассматривалась телепортация когерентного изображения с помощью пространственно-многомодовых полей, генерируемых в традиционном параметрическом процессе преобразования частоты вниз. В настоящей Главе детально исследуется голографическая телепортация перепутанных оптических изображений в схеме, использующей связанный процесс (2.58) для получения вспомогательных перепутанных пространственно-многомодовых полей. Анализируется влияние различия ширин пространственных спектров телепортируемых изображений и вспомогательных квантовых полей на качество телепортации. В практических реализациях квантовых алгоритмов измерения проводятся детекторами, представляющими собой массивы пикселей. В связи с этим изучается влияние размера пикселя на качество телепортации.

5.1. Генерация перепутанных двухчастотных изображений

При телепортации одномодовых перепутанных состояний мы полагали, что перепутанные состояния формируются в параметрическом процессе преобразования частоты вниз:

$$\omega_p' = 2\omega_p = \omega_s + \omega_i, \tag{5.1}$$

где ω_s, ω_i — несущие частоты сигнального и холостого изображений, $\omega_p' = 2\omega_p$ — частота волны накачки, являющяяся второй гармоникой излучения задающего лазера. Будем полагать, что телепортируемые перепутанные изображения генерируются в процессе (5.1). При этом интенсивную волну накачки будем считать плоской и монохроматической. В таком случае решение уравнений, описывающих взаимодействие в нелинейном кристалле, для фурье-компонент можно записать в виде [98, 105]:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s(\mathbf{q}; z) &= \mathcal{U}_s(q; z)\hat{a}_{s0}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_s(q; z)\hat{a}_{i0}^\dagger(-\mathbf{q}), \\ \hat{a}_i^\dagger(-\mathbf{q}; z) &= \mathcal{U}_i(q; z)\hat{a}_{s0}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_i(q; z)\hat{a}_{i0}^\dagger(-\mathbf{q}), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\hat{a}_{s0}(\mathbf{q})$, $\hat{a}_{i0}(\mathbf{q})$ — бозе-операторы уничтожения фотонов с поперечным волновым вектором $\mathbf{q}$ на сигнальной и холостой частоте соответственно на входе нелинейного кристалла, $\hat{a}_s(\mathbf{q}; z)$, $\hat{a}_i(\mathbf{q}; z)$ — операторы на выходе, $\mathcal{U}_{s,i}(q; z)$, $\mathcal{V}_{s,i}(q; z)$ — передаточные коэффициенты, связывающие операторы на входе нелинейного кристалла с операторами на выходе кристалла длиной z. Заметим, что, вообще говоря, функции $\mathcal{U}_{s,i}, \mathcal{V}_{s,i}$ зависят от отстройки частоты Ω от несущей, но в нашем случае мы полагаем ее равной нулю, что соответствует времени измерения детекторов гораздо больше времени когерентности поля. Передаточные функции могут быть найдены также как частный случай передаточных функций (4.14) при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$: $Q_{11}(q, 0; z) \to \mathcal{U}_s(q; z)$, $Q_{12}(q, 0; z) \to \mathcal{V}_s(q; z)$, $Q_{21}(q, 0; z) \to \mathcal{U}_i(q; z)$, $Q_{22}(q, 0; z) \to \mathcal{V}_i(q; z)$.

Фактор усиления для процесса (5.1) равен (ср. с (4.15)):

$$G = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\epsilon_s + \epsilon_i}{2}\right)^2}, \tag{5.3}$$

где

$$\epsilon_j = \frac{q^2}{2k_j}, \quad (j = s, i) \tag{5.4}$$

— коэффициенты, учитывающие отклонение фурье-компонент от коллинеарного распространения, k_j — волновой вектор.

Из коммутационных соотношения для фурье-компонент полей сигнального и холостого изображений

$$\begin{gathered} [\hat{a}_s(\mathbf{q}'; z), \hat{a}_s^\dagger(-\mathbf{q}''; z)] = [\hat{a}_i(\mathbf{q}'; z), \hat{a}_i^\dagger(-\mathbf{q}''; z)] = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q}''), \\ [\hat{a}_s(\mathbf{q}'; z), \hat{a}_i(\mathbf{q}''; z)] = 0. \end{gathered} \tag{5.5}$$

следуют соотношения, которым удовлетворяют передаточные коэффициенты

$$|\mathcal{U}_s(q; z)|^2 - |\mathcal{V}_s(q; z)|^2 = 1, \tag{5.6}$$

$$|\mathcal{U}_i(q; z)|^2 - |\mathcal{V}_i(q; z)|^2 = -1, \tag{5.7}$$

$$\mathcal{U}_s(q; z)\mathcal{U}_i^*(q; z) = \mathcal{V}_s(q; z)\mathcal{V}_i^*(q; z). \tag{5.8}$$

5.1.1. Перепутанность телепортируемых изображений

Рассмотрим ЭПР-корреляции между фурье-компонентами сигнального $\hat{a}_s(\mathbf{q}; z)$ и холостого $\hat{a}_i(\mathbf{q}; z)$ изображений, следуя [127]. Пользуясь (5.8), запишем (5.2) в виде:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s(\mathbf{q}; z) &= e^{i\theta(q;z)}(|\mathcal{U}_s(q; z)|e^{i\psi(q;z)}\hat{a}_{s0}(\mathbf{q}) + |\mathcal{V}_s(q; z)|e^{-i\psi(q;z)}\hat{a}_{i0}^\dagger(-\mathbf{q})), \\ \hat{a}_i^\dagger(-\mathbf{q}; z) &= e^{i\theta(q;z)}(|\mathcal{U}_i(q; z)|e^{i\psi(q;z)}\hat{a}_{s0}(\mathbf{q}) + |\mathcal{V}_i(q; z)|e^{-i\psi(q;z)}\hat{a}_{i0}^\dagger(-\mathbf{q})), \end{aligned} \tag{5.9}$$

где

$$\theta(q; z) = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_s(q; z)\mathcal{V}_s(q; z)), \quad \psi(q; z) = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_s(q; z)\mathcal{V}_s^*(q; z)) \tag{5.10}$$

— фазы, обусловленные отклонением распространения мод от направления коллинеарного синхронизма (или квазисинхронизма).

Для исследования на перепутанность генерируемых двухчастотных изображений обратимся к квадратурным компонентам:

$$\hat{x}_j^{(\phi)} = \frac{\hat{a}_j e^{i\phi} + \hat{a}_j^\dagger e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{y}_j^{(\phi)} = \frac{\hat{a}_j e^{i\phi} - \hat{a}_j^\dagger e^{-i\phi}}{i\sqrt{2}}, \tag{5.11}$$

где фаза ϕ определяет поворот базиса $(\hat{x}_j^{(\phi)}, \hat{y}_j^{(\phi)})$ в фазовом пространстве. Рассмотрим дисперсии разности и суммы квадратур (5.11) фурье-компонент телепортируемых изображений:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(\hat{x}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) - \hat{x}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q})) = \\ &\qquad = \langle(\hat{x}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) - \hat{x}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q}))^2\rangle - \langle(\hat{x}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) - \hat{x}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q}))\rangle^2, \\ &\mathrm{Var}(\hat{y}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) + \hat{y}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q})) = \\ &\qquad = \langle(\hat{y}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) + \hat{y}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q}))^2\rangle - \langle(\hat{y}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) + \hat{y}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q}))\rangle^2, \end{aligned} \tag{5.12}$$

которые зависят от корреляций между квадратурами фурье-компонент сигнального изображения с поперечным волновым вектором $\mathbf{q}$ и холостого изображения с поперечным волновым вектором $-\mathbf{q}$. Здесь и в последующем для упрощения записи зависимость от длины кристалла z в операторах опущена.

Для анализа степени квантовых корреляций между квадратурами мод сигнального и холостого изображений будем пользоваться следующей величиной [52]:

$$I(\mathbf{q}) = \mathrm{Var}(\hat{x}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) - \hat{x}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q}))\mathrm{Var}(\hat{y}_s^{(\phi)}(\mathbf{q}) + \hat{y}_i^{(\phi)}(-\mathbf{q})). \tag{5.13}$$

Если $I(\mathbf{q}) < 1$, то моды перепутанны, причем чем меньше величина $I(\mathbf{q})$, тем квантовые корреляции сильнее. Случай $I(\mathbf{q}) = 0$ соответствует идеальным квантовым корреляциям.

Значение величины (5.13) зависит от выбора величины угла ϕ. При одних значениях ϕ величина $I(\mathbf{q})$ может не выявлять квантовых корреляций ($I(\mathbf{q}) > 1$), тогда как при другом выборе угла ϕ квантовые корреляции могут проявиться ($I(\mathbf{q}) < 1$), что является свидетельством наличия таковых между полями в целом. Таким образом, необходимо найти такие значения ϕ, которые минимизируют величину $I(\mathbf{q})$. В нашем случае поля описываются выражениями (5.9) и квантовые корреляции проявляются при

$$\phi = \theta(q; z). \tag{5.14}$$

Пусть на вход нелинейного кристалла, в котором происходит генерация перепутанных изображений, подается когерентное изображение $|\alpha(\mathbf{q})\rangle_s$ с сигнальной частотой:

$$\hat{a}_{s0}(\mathbf{q})|\alpha(\mathbf{q})\rangle_s = \alpha(\mathbf{q})|\alpha(\mathbf{q})\rangle_s,$$

а входное состояние поля на холостой частоте — вакуумное:

$$\hat{a}_{i0}(\mathbf{q})|0\rangle_i = 0.$$

Тогда, используя (5.9) и (5.14), приходим к следующим выражениям для дисперсий (5.12):

$$\mathrm{Var}(\hat{x}_s(\mathbf{q}) - \hat{x}_i(-\mathbf{q})) = \mathrm{Var}(\hat{y}_s(\mathbf{q}) + \hat{y}_i(-\mathbf{q})) = (|\mathcal{V}_s(q;z)| - |\mathcal{V}_i(q;z)|)^2. \quad (5.15)$$

На рис. 5.1 представлены графики зависимостей параметра $I(\mathbf{q})$ для фурье-компонент полей, генерируемых в процессе пребразования частоты вниз (5.1). Из рис. 5.1 следует, что в центральных областях квантовые корреляции наиболее сильны. Легко убедиться, что при $\mathbf{q} = 0$ передаточные коэффициенты $\mathcal{V}_{s,i}(q;z)$ переходят в передаточные коэффициенты для случая параметрического преобразования частоты вниз в приближении плоских волн:

$$\mathcal{U}_s(0;z) \to \mathrm{ch}(\beta z), \quad \mathcal{V}_s(0;z) \to \mathrm{sh}(\beta z),$$
$$\mathcal{U}_i(0;z) \to \mathrm{sh}(\beta z), \quad \mathcal{V}_i(0;z) \to \mathrm{ch}(\beta z).$$

Таким образом, для $q = 0$ имеем $I(q = 0) = e^{-4\zeta}$, в согласии с результатом (3.46).

На рис. 5.1 центральные области отвечают экспоненциальному росту интенсивности взаимодействующих волн. Боковые области соответствуют осцилляторному режиму, что связано с мнимым значением фактора усиления. С точки зрения эффективности генерации и формирования перепутанности боковые области не представляют практического интереса. В этой связи будем считать, что пространственный спектр начального сигнального изображения $\alpha(\mathbf{q})$ лежит в пределах полосы параметрического захвата (усиления) шириной q_0.

Определим значение q_0 как пространственную частоту, при которой параметр $I(\mathbf{q})$ в зависимости от $\mathbf{q}$ первый раз принимает значение, равное 1. В этом случае гиперболические функции ch и sh, входящие в передаточные коэффициенты $\mathcal{V}_{s,i}$, $\mathcal{U}_{s,i}$, имеют значения 1 и 0. Это достигается при

$$Gz = i\pi. \quad (5.16)$$

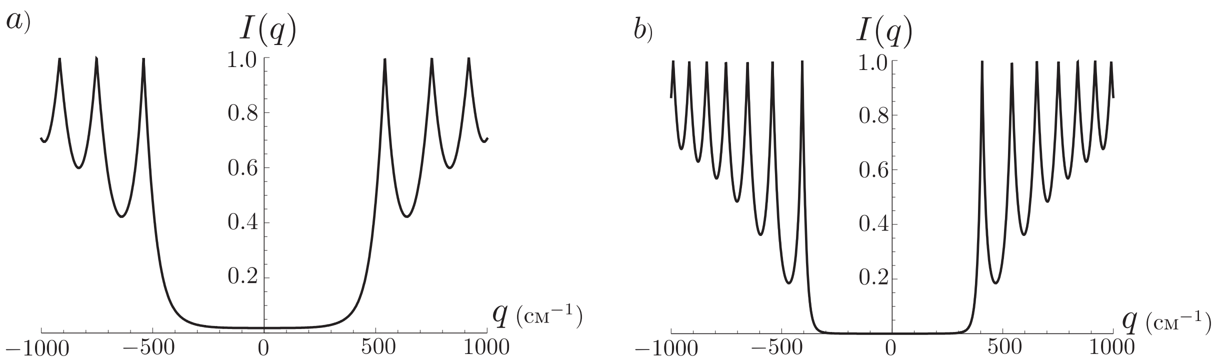

Рис. 5.1. Зависимость параметра $I(\mathbf{q})$ между модами сигнального и холостого изображений для различных длин взаимодействия z: a) $z = 1.0$ b) $z = 2.0$ ($\beta = 1$, $\lambda'_p = \lambda_p/2 = 0.53$ мкм, $\lambda_s = 2.0$ мкм, $\lambda_i = 0.72$ мкм).

Подставляя в (5.16) выражения (5.3) и (5.4), получаем

$$q_0 = 2\sqrt{\frac{k_s k_i}{k_s + k_i}} \left(\beta^2 + \frac{\pi^2}{z^2}\right)^{1/4}. \tag{5.17}$$

Из зависимостей $I(q)$, представленных на рис. 5.1 следует, что ширина параметрической полосы захвата $q_0 = 550$ см$^{-1}$ для рис. 5.1a, и $q_0 = 400$ см$^{-1}$ для рис. 5.1b. В дальнейшем для параметра $I(\mathbf{q})$ мы будем употреблять также термин ЭПР-корреляции.

5.2. Генерация вспомогательных перепутанных четырехчастотных полей

В предыдущей главе показано, что в связанном пятичастотном параметрическом процессе (2.58) генерируются две пары перепутанных изображений. Для выявления перепутанности использовались корреляции чисел фотонов на различных частота. При голографической телепортации, которую мы рассматриваем здесь, будем иметь дело, однако, с квадратурными компонентами поля, поэтому в настоящей главе для описания перепутанности вспомогательных пространственно-многомодовых полей воспользуемся анализом ЭПР-корреляций.

В Главе 4 было найдено решение для параболических уравнений (4.3), описывающих динамику взаимодействия волн в АНФК. Для фурье-амплитуд взаимодействующих полей решение уравнений (в матричном виде) дается (4.10) с передаточными коэффициентами (4.14).

5.2.1. Перепутанность вспомогательных полей

В Главе 3 было показано, что наличие квантовых ЭПР-корреляций между Алисой и Бобом позволяет осуществить квантовую телепортацию перепутанного состояния. При этом шумовую матрицу (3.22) и добавочный шум (3.38) полностью описывают три величины: дисперсия суммы и разности квадратур между модами с частотами ниже частоты накачки (V_d), дисперсия суммы и разности квадратур между модами с частотами выше частоты накачки (V_u) и корреляции между комбинациями квадратур на низких и высоких частотах (C). Соответствующее обобщение указанных характеристик на пространственно-многомодовый случай имеет такой вид:

$$
\begin{aligned}
V_d(\mathbf{q}) &= \mathrm{Var}(\hat{x}_1(\mathbf{q}) - \hat{x}_2(-\mathbf{q})) = \mathrm{Var}(\hat{y}_1(\mathbf{q}) + \hat{y}_2(-\mathbf{q})) = \\
&\qquad = \langle(\hat{x}_1(\mathbf{q}) - \hat{x}_2(-\mathbf{q}))^2\rangle - \langle(\hat{x}_1(\mathbf{q}) - \hat{x}_2(-\mathbf{q}))\rangle^2, \\
V_u(\mathbf{q}) &= \mathrm{Var}(\hat{x}_3(\mathbf{q}) - \hat{x}_4(-\mathbf{q})) = \mathrm{Var}(\hat{y}_3(\mathbf{q}) + \hat{y}_4(-\mathbf{q})) = \\
&\qquad = \langle(\hat{x}_3(\mathbf{q}) - \hat{x}_4(-\mathbf{q}))^2\rangle - \langle(\hat{x}_3(\mathbf{q}) - \hat{x}_4(-\mathbf{q}))\rangle^2, \\
C(\mathbf{q}) &= \langle(\hat{x}_1(\mathbf{q}) - \hat{x}_2(-\mathbf{q}))(\hat{x}_3(\mathbf{q}) - \hat{x}_4(-\mathbf{q}))\rangle = \\
&\qquad = \langle(\hat{y}_1(\mathbf{q}) + \hat{y}_2(-\mathbf{q}))(\hat{y}_3(\mathbf{q}) + \hat{y}_4(-\mathbf{q}))\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Величины $V_d(\mathbf{q})$, $V_u(\mathbf{q})$ и $C(\mathbf{q})$ имеют смысл корреляций между модами с поперечным волновым вектором $\mathbf{q}$ и модами с сопряженным вектором $-\mathbf{q}$. Подобно тому, как это делалось в предыдущем параграфе, при описании перепутанности телепортируемых изображений, для квадратурных корреляций вспомогательных полей полагаем, что корреляции определяются в оптимальном базисе. Это соответствует выражениям для корреляций, содержащим только значения передаточных функций, взятых по модулю. В таком случае выражения (5.18) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} V_d(\mathbf{q}) &= (|Q_{11}(q;z)| - |Q_{12}(q;z)|)^2 + (|Q_{13}(q;z)| - |Q_{14}(q;z)|)^2 , \\ V_u(\mathbf{q}) &= (|Q_{13}(q;z)| - |Q_{14}(q;z)|)^2 + (|Q_{33}(q;z)| - |Q_{34}(q;z)|)^2 , \\ C(\mathbf{q}) &= (|Q_{13}(q;z)| - |Q_{14}(q;z)|)\times \\ &\quad \times (|Q_{11}(q;z)| + |Q_{33}(q;z)| - |Q_{12}(q;z)| - |Q_{34}(q;z)|) . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Можно показать, что в полосе параметрического захвата для связанных процессов имеем

$$V_d(\mathbf{q}) \xrightarrow{z\to\infty} 0, \quad V_u(\mathbf{q}) \xrightarrow{z\to\infty} 0, \quad C(\mathbf{q}) \xrightarrow{z\to\infty} 0.$$

В дальнейшем этим свойством воспользуемся при исследовании качества телепортации.

5.3. Схема телепортации

На рис. 5.2 изображена схема для голографической телепортации перепутанных оптических изображений. Её можно расматривать как синтез схемы рис. 3.2 и схемы, приведённой в работе [127]. В ней отправитель — Алиса, обладает перепутанными изображениями $\hat{a}_s(\mathbf{q})$ и $\hat{a}_i(\mathbf{q})$, которые она хочет передать получателю — Бобу. Изображения $\hat{a}_s(\mathbf{q})$ и $\hat{a}_i(\mathbf{q})$ генерируются в параметрическом процессе преобразования частоты вниз.

В связанном параметрическом процессе (4.1) (блок АНФК) генерируются вспомогательные четырехчастотные пространственно-многомодовые поля, описываемые операторами фурье-компонент поля $\hat{a}_j(\mathbf{q})$ $(j = 1\ldots 4)$. В общем случае ширина пространственного спектра полей, генерируемых в связанном взаимодействии (4.1), не совпадает с шириной телепортируемых оптических изображений, поэтому в схеме используется устройство, которое согласовывает ширину пространственного спектра вспомогательных полей с шириной спектра телепортируемых изображений. Для этого полагаем, что пространственный фурье-спектр вспомогательного поля $\hat{a}_j(\mathbf{q})$ подвергается трансформации в согласователе. Такое действие описывается преобразованием:

$$\hat{a}_j(\mathbf{q}) \longrightarrow \frac{1}{s}\hat{a}_j(\mathbf{q}/s), \quad (j = 1\ldots 4). \tag{5.20}$$

Здесь s имеет смысл параметра расширения спектра при $s > 1$ или его сжатия при $s < 1$. В (5.20) множитель $1/s$ перед оператором введен для того, чтобы преобразование масштаба сохраняло число фотонов.

В результате преобразования (5.20) имеем соотношения

$$\begin{aligned} V(\hat{x}_j(\mathbf{q}) - \hat{x}_k(-\mathbf{q})) &\longrightarrow \frac{1}{s^2} V(\hat{x}_j(\mathbf{q}/s) - \hat{x}_k(-\mathbf{q}/s)), \\ V(\hat{y}_j(\mathbf{q}) + \hat{y}_k(-\mathbf{q})) &\longrightarrow \frac{1}{s^2} V(\hat{y}_j(\mathbf{q}/s) + \hat{y}_k(-\mathbf{q}/s)). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Из (5.21) видно, что условие перепутанности $I(\mathbf{q}) < 1$ в результате преобразования (5.20) переходит в условие $I(\mathbf{q}) < 1/s^4$, что равносильно сдвигу границы перепутанности с 1 до $1/s^4$. Для корректного сравнения дисперсий входных изображений с корреляциями телепортированных изображений необходимо провести их перенормировку полей на выходе согласователя. Для этого достаточно формально считать, что преобразование согласователя имеет такой вид:

$$\hat{a}_j(\mathbf{q}) \longrightarrow \hat{a}_j(\mathbf{q}/s), \quad (j = 1 \ldots 4). \tag{5.22}$$

На следующем этапе моды $\hat{a}_2(\mathbf{q}/s)$ и $\hat{a}_3(\mathbf{q}/s)$ посылаются Алисе, а моды $\hat{a}_1(\mathbf{q}/s)$ и $\hat{a}_4(\mathbf{q}/s)$ поступают Бобу. Полагаем частоты ω_2 и ω_3 совпадающими с несущими частотами перепутанных изображений ω_s и ω_i.

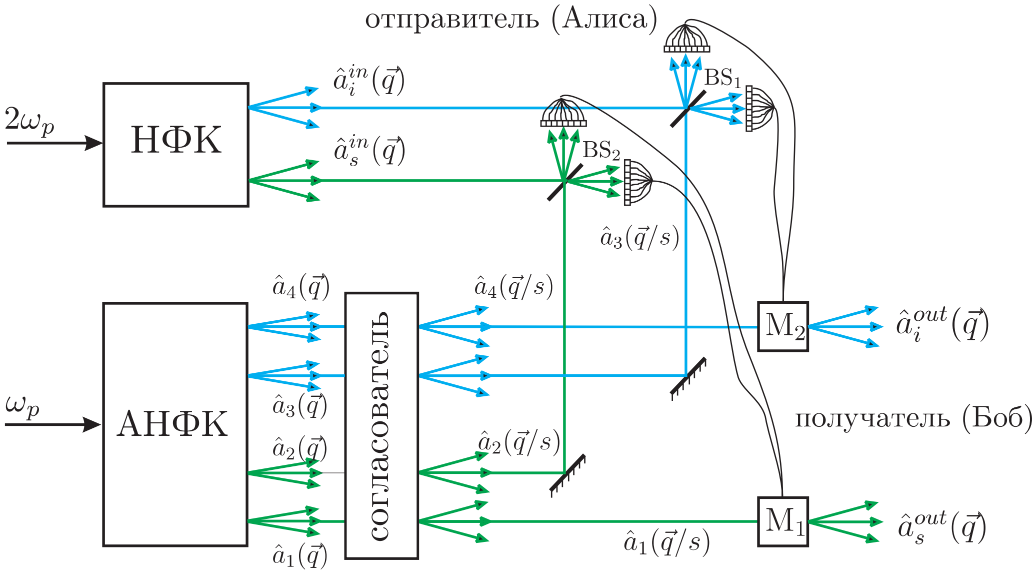

Рис. 5.2. Схема телепортации перепутанных оптических изображений.

Затем Алиса смешивает телепортируемые изображения $\hat{a}_s(\mathbf{q})$, $\hat{a}_i(\mathbf{q})$ с модами $\hat{a}_2(\mathbf{q}/s)$, $\hat{a}_3(\mathbf{q}/s)$ на светоделителях BS_1 и BS_2. Считая светоделители симметричными по отражению/пропусканию и не вносящих потерь, запишем операторы для преобразованных полей Алисы:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{s1}(\mathbf{q}) &= \frac{\hat{a}_s(\mathbf{q}) + \hat{a}_1(\mathbf{q}/s)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_{s2}(\mathbf{q}) = \frac{\hat{a}_s(\mathbf{q}) - \hat{a}_1(\mathbf{q}/s)}{\sqrt{2}}, \\ \hat{b}_{i1}(\mathbf{q}) &= \frac{\hat{a}_i(\mathbf{q}) + \hat{a}_4(\mathbf{q}/s)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_{i2}(\mathbf{q}) = \frac{\hat{a}_i(\mathbf{q}) - \hat{a}_4(\mathbf{q}/s)}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Здесь индекс m соответствует выходному порту светоделителя ($m = 1, 2$).

После этого поля $\hat{b}_{sm}(\mathbf{q})$, $\hat{b}_{im}(\mathbf{q})$ поступают в устройства, проводящие измерения квадратурных компонент поля. В Главе 3 при исследовании телепортации пространственно-одномодовых полей отмечалось, что квадратурные компоненты измеряют методом гомодинного детектирования (см. рис. 3.3). В нашем случае мы имеем дело с пространственно-многомодовыми полями, которые также можно измерять с помощью гомодинного детектирования. Однако при детектировании пространственно-многомодовых полей используют массивы детекторов, например, CCD-камеры [105]. Заметим, что хотя CCD-камера измеряет потоки падающих на них фотонов, при гомодинном детектировании измеряют квадратуры — величины, линейные по полю (3.9). Вследствие этого статистические характеристики измеряемых величин полностью описываются корреляциями измеряемых квадратурных компонент.

На данном этапе анализа схемы телепортации считаем, что Алиса способна измерять квадратурные компоненты всех мод полей $\hat{b}_{sm}$, $\hat{b}_{im}$. Это можно сделать, например, проводя измерения в дальней зоне дифракции CCD-камерами с малыми размерами пикселей. Выберем следующие измеряемые квадратуры поля: $\hat{x}_{s1}(\mathbf{q})$, $\hat{y}_{s2}(\mathbf{q})$, $\hat{x}_{i1}(\mathbf{q})$, $\hat{y}_{i2}(\mathbf{q})$.

Результаты своих измерений, которые содержат величины квадратур для всех мод поля, лежащих в пределах пространственного спектра телепортируемых изображений, Алиса посылает Бобу по классическому каналу связи. Получив сообщение от Алисы, Боб проводит преобразование своей части вспомогательных состояний (см. разд. 3.2.2) и в результате получает телепортированные изображения:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^{out}(\mathbf{q}) &= \hat{a}_s^{in}(\mathbf{q}) + \hat{f}_1(\mathbf{q}), \\ \hat{a}_i^{out}(\mathbf{q}) &= \hat{a}_i^{in}(\mathbf{q}) + \hat{f}_2(\mathbf{q}), \end{aligned} \tag{5.24}$$

где

$$\hat{f}_1(\mathbf{q}) = \hat{a}_1(\mathbf{q}) - \hat{a}_2^\dagger(-\mathbf{q}), \quad \hat{f}_2(\mathbf{q}) = \hat{a}_3(\mathbf{q}) - \hat{a}_4^\dagger(-\mathbf{q})$$

— шумовые вклады, обусловленные неидеальными квантовыми корреляциями вспомогательных полей.

5.4. Качество телепортации

5.4.1. Перепутанность телепортированных изображений

Обратимся к анализу качества телепортации перепутанных изображений. Рассмотрим ЭПР-корреляции телепортированных изображний (5.24). Повторяя выкладки, аналогичные проделанным в Главе 3 при исследовании телепортации одномодовых состояний, приходим к следующему выражению для дисперсий суммы и разности квадратурных компонент телепортированных изображений (ср. с (3.37)):

$$V_{out}(\mathbf{q}) = V_{in}(\mathbf{q}) + \Delta V(\mathbf{q}) \tag{5.25}$$

где

$$\Delta V(\mathbf{q}) = V_d(\mathbf{q}/s) + V_u(\mathbf{q}/s) - 2C(\mathbf{q}/s)$$

— шумовой вклад, обусловленный неидеальностью корреляций вспомогательных квантовых полей.

На рис. 5.3 представлены графики зависимостей дисперсий комбинаций квадратурных компонент телепортированных изображений от отношения q/q_0 для различных значений длин взаимодействия. Из рис. 5.3 видно, что когда согласование ширин пространственных спектров телепортируемых изображений и вспомогательных полей не производится удается передать только центральную часть перепутанности пространственного спектра изображений (область $q/q_0 < 1$), тогда как перепутанность боковых частей спектра передать

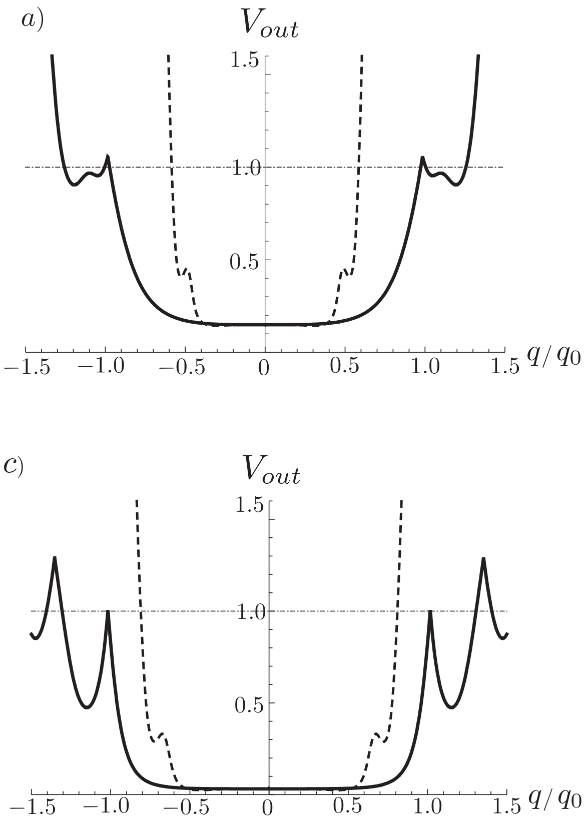

Рис. 5.3. Зависимость дисперсий суммы и разности квадратурных компонент изображений от отношения q/q_0 для различных значений нормированных длин взаимодействия: a) $\zeta = 1$, $\eta = 5$, b) $\zeta = 1$, $\eta = 8$, c) $\zeta = 2$, $\eta = 5$, d) $\zeta = 2$, $\eta = 8$ ($\lambda_p = 1.06$мкм, $\lambda_1 = 2.0$мкм, $\lambda_2 = 2.26$мкм, $\lambda_3 = 0.69$мкм, $\lambda_4 = 0.72$мкм, $\xi = 0.5$). Штриховые кривые соответствуют несогласованным ширинам пространственных спектров ($s = 1$), сплошные кривые — согласованным ширинам спектров, при этом для рисунков a) и b) $s = 2.4$, а для графиков c) и d) — $s = 2.0$.

не удается. Когда же ширины пространственных спектров входных изображений и вспомогательных полей согласованы между собой, то перепутанность имеет место во всей области пространственного спектра телепортируемых изображений, что свидетельствует об успешной передаче квантовой перепутанности от телепортируемых к телепортированным изображениям.

5.4.2. Точность телепортации

Рассмотрим еще одну важную характеристику — точность телепортации. После выкладок, подобным проделанным в Главе 3, приходим к выражению для точности телепортации фурье-компонент изображений:

$$F = \frac{1}{\sqrt{\det(\sigma^{in}(\mathbf{q}) + \sigma^{out}(\mathbf{q}))}} = \frac{1}{\sqrt{\det(2\sigma^{in}(\mathbf{q}) + \sigma^{(N)}(\mathbf{q}))}}, \tag{5.26}$$

где

$$\sigma^{in}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1/2+\nu(q) & 0 & \sqrt{\nu(q)(1+\nu(q))} & 0 \\ 0 & 1/2+\nu(q) & 0 & -\sqrt{\nu(q)(1+\nu(q))} \\ \sqrt{\nu(q)(1+\nu(q))} & 0 & 1/2+\nu(q) & 0 \\ 0 & -\sqrt{\nu(q)(1+\nu(q))} & 0 & 1/2+\nu(q) \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

— корреляционная матрица фурье-компонент квадратур входных изображений, $\nu(q) = |\mathcal{V}_s(q;z)|^2$,

$$\sigma^{(N)}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} V_d(\mathbf{q}) & 0 & C(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & V_d(\mathbf{q}) & 0 & C(\mathbf{q}) \\ C(\mathbf{q}) & 0 & V_u(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & C(\mathbf{q}) & 0 & V_u(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

— шумовая корреляционная матрица, обусловленная неидеальностью квантовых корреляций вспомогательных состояний, а $V_d(\mathbf{q})$, $V_u(\mathbf{q})$ и $C(\mathbf{q})$ определяются выражениями (5.18). Корреляционная матрица телепортированного состояния равна

$$\sigma^{out}(\mathbf{q}) = \sigma^{in}(\mathbf{q}) + \sigma^{(N)}(\mathbf{q}). \tag{5.29}$$

Отметим, что в матрице (5.27) вклады 1/2 в диагональных элементах соответствуют вакуумным или когерентным состояниям на входе кристалла. Корреляционную матрицу (5.27), следовательно, можно записать как

$$\sigma^{in}(\mathbf{q}) = \sigma^{coh} + \delta\sigma^{ent}(\mathbf{q}), \tag{5.30}$$

где $\delta\sigma^{ent}(\mathbf{q})$ — матрица, описывающая перепутанность между модами телепортируемых изображений, σ^{coh} — корреляционная матрица когерентных полей с диагональными элементами, равными 1/2, и с недиагональными нулевыми элементами,.

В случае идеальной телепортации $\sigma^{(N)}(\mathbf{q}) = 0$ и точность телепортации совпадает со степенью чистоты состояния для фурье-компонент изображений [12]:

$$\mu(\mathbf{q}) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2(\mathbf{q})) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\sigma^{in}(\mathbf{q}))}} \equiv 1. \tag{5.31}$$

Выражение (5.31) является следствие того факта, что состояние каждой пары фурье-компонент сигнального и холостого изображений является чистым.

На рис. 5.4 представлены графики зависимостей точности телепортации от отношения q/q_0 для различных значений длин взаимодействия. Штриховые кривые соответствуют случаю несогласованных ширин спектров, сплошные кривые — случаю согласованных. Значения параметра s такие же, как для графиков на рис. 5.3. Из рис. 5.3 видно, что при телепортации изображений без согласования ширин пространственных спектров высокие пространственные частоты изображений передать не удается, тогда как при согласовании ширин спектров можно добиться телепортации всех пространственных мод перепутанных изображений. Из рис. 5.4 также следует, что увеличение длины взаимодействия ζ, а вместе с ней и перепутанности телепортируемых изображений, ведет к уменьшению точности телепортации. Увеличение длины взаимодействия η, то есть увеличение квантовых корреляций вспомогательных пространственных полей, напротив, сопровождается ростом точности телепортации.

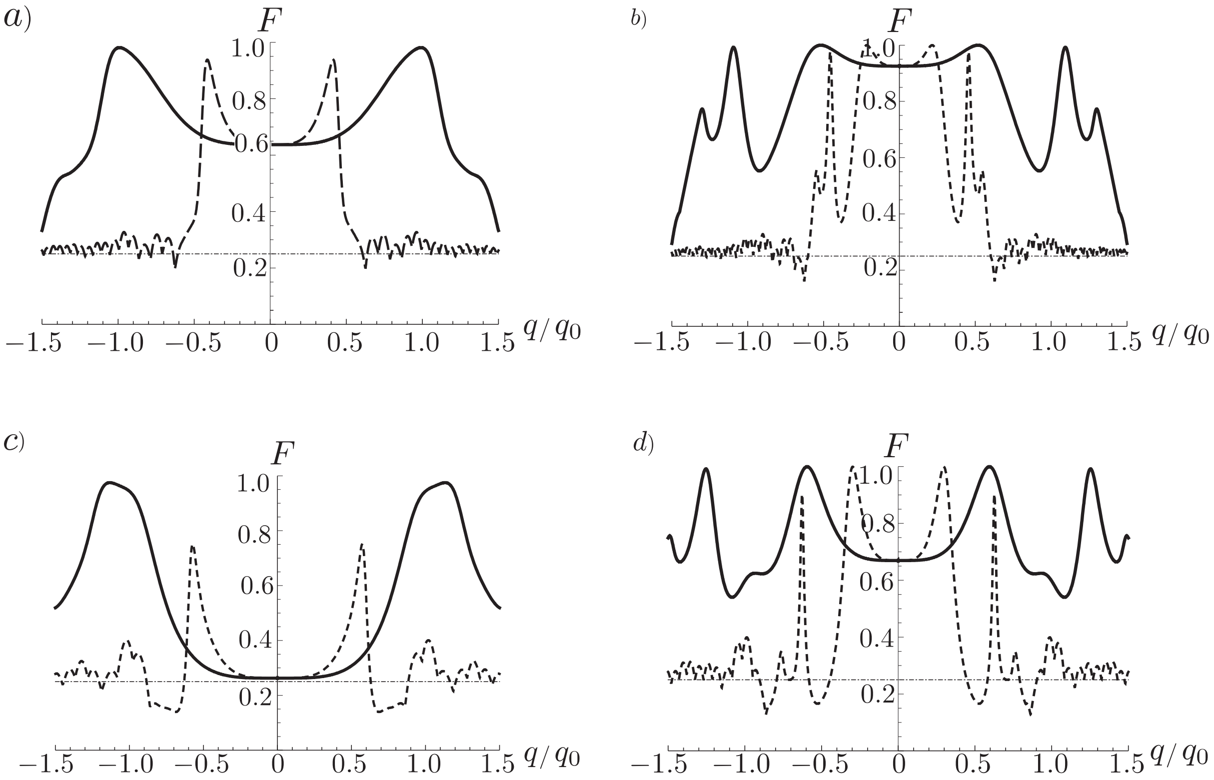

Рис. 5.4. Зависимость точности телепортации от отношения q/q_0. Параметры такие же, как для рис. 5.3.

5.5. Регистрация оптических изображений устройствами с конечными размерами пикселей; влияние размера пикселя на качество телепортации

До сих пор анализ телепортации проводился при условии, что каждая фурье-компонента пространственно-многомодовых полей может быть измерена и преобразована независимо. Однако на практике измерения квадратурных компонент поля проводятся с помощью устройств, представляющих собой массивы детекторов, называемых пикселями. Для учета влияния размера пикселей на качество телепортации необходимо рассматривать усредненные по пикселю поля.

В нашей схеме измерения квадратур проводятся с использованием 4-х детекторов. Пусть детекторы состоят из K пикселей с идеальной квантовой эффективностью и площадью пикселя $S = \Delta^2$. Усреднение квадратурных компонент по площади пикселя с центром в радиус-векторе $\boldsymbol{\rho}_m$ дает:

$$\hat{x}_j(m) = \frac{1}{\sqrt{S}} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_m} \hat{X}_j(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}', \quad \hat{y}_j(m) = \frac{1}{\sqrt{S}} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_m} \hat{Y}_j(\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}'. \tag{5.32}$$

Здесь $\hat{X}_j(\boldsymbol{\rho})$, $\hat{Y}_j(\boldsymbol{\rho})$ — операторы квадратур на несущей частоте ω_j поля в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$, индекс m — номер пикселя ($m = 1 \ldots K$). Заметим, что при выбранной нормировке на $1/\sqrt{S}$ усредненные квадратуры подчиняются стандартным коммутационным соотношениям:

$$\left[\hat{X}_j(m), \hat{Y}_l(n)\right] = i\delta_{jl}\delta_{mn}. \tag{5.33}$$

Для усредненных полей (5.32) можно провести выкладки, аналогичные проделанным для фурье-компонент полей, когда влияние размера пикселя не учитывалось. Для описания качества телепортации теперь необходимо рассчитать корреляции между усредненными квадратурными компонентами поля (5.32):

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_j(m)\hat{x}_l(n)\rangle &= \frac{1}{S} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_m} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_n} \langle \hat{X}_j(\boldsymbol{\rho}')\hat{X}_l(\boldsymbol{\rho}'')\rangle d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho}'', \\
\langle \hat{y}_j(m)\hat{y}_l(n)\rangle &= \frac{1}{S} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_m} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_n} \langle \hat{Y}_j(\boldsymbol{\rho}')\hat{Y}_l(\boldsymbol{\rho}'')\rangle d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho}'', \\
\langle \hat{x}_j(m)\hat{y}_l(n)\rangle &= \frac{1}{S} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_m} \int\limits_{\boldsymbol{\rho}_n} \langle \hat{X}_j(\boldsymbol{\rho}')\hat{Y}_l(\boldsymbol{\rho}'')\rangle d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho}'',
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Разлагая квадратуры поля, стоящие в (5.34) под знаком интеграла, в интеграл Фурье

$$\hat{X}_j(\boldsymbol{\rho}) = \int \hat{x}_j(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d\mathbf{q},$$

и интегрирую по площади пикселя приходим к следующим выражениям для корреляций:

$$\langle \hat{x}_j(m)\hat{x}_l(n)\rangle = \int\int \mathcal{B}_\Delta(\mathbf{q})\langle \hat{x}_j(\mathbf{q})\hat{x}_l(\mathbf{q})\rangle \cos(\mathbf{q}(\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n))d\mathbf{q}, \tag{5.35}$$

$$\langle \hat{y}_j(m)\hat{y}_l(n)\rangle = (-1)^{j+l}\langle \hat{x}_j(m)\hat{x}_l(n)\rangle, \tag{5.36}$$

$$\langle \hat{x}_j(m)\hat{y}_l(n)\rangle = 0, \tag{5.37}$$

где

$$\mathcal{B}_\Delta(\mathbf{q}) = \frac{\Delta^2}{4\pi^2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{q_x\Delta}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{q_y\Delta}{2}\right) \tag{5.38}$$

— функция, появляющаяся в результате усреднения по пикселям. Функция $\mathcal{B}_\Delta(\mathbf{q})$ обладает следующими свойствами. При больших размерах пикселей $\mathcal{B}_\Delta(\mathbf{q})$ играет роль фильтра, вырезающего узкую часть пространственного спектра. В пределе бесконечно большого размера пикселя

$$\mathcal{B}_\Delta(\mathbf{q}) \xrightarrow{\Delta\to\infty} \delta(\mathbf{q}), \tag{5.39}$$

и корреляции квадратур поля совпадают с корреляциями одномодовых состояний (3.24), (3.22). Множитель $\cos(\mathbf{q}(\boldsymbol{\rho}_m-\boldsymbol{\rho}_n))$ в (5.35) описывает зависимость корреляций между пикселями от расстояния между ними.

В рассматриваемой ситуации корреляционные матрицы определяются выражением:

$$\sigma_K^l = \int \mathcal{B}_\Delta(\mathbf{q})\left(\sigma^l(\mathbf{q})\otimes P(\mathbf{q})\right)d\mathbf{q}, \quad (l = in, out, N). \tag{5.40}$$

Здесь $\sigma^l(\mathbf{q})$ — корреляционная матрица квадратур фурье-компонент поля (матрицы (5.27), (5.28) и (5.29)), $P(\mathbf{q})$ — $K\times K$ матрица, учитывающая расположение пикселей в детекторах, с элементами $P_{mn}(\mathbf{q}) = \cos(\mathbf{q}(\boldsymbol{\rho}_m - \boldsymbol{\rho}_n))$, $\otimes$ означает тензорное произведение.

В результате процедуры усреднения поля по пикселям получаем корреляционную матрицу размерности $4K\times 4K$. Усреднение поля по пространству не меняет характер его статистики. Поэтому состояние поля, определенное на пикселях, полностью описывается его корреляционной матрицей. Точность телепортации как перекрытие функций Вигнера входных и выходных изображений определим следующим образом (ср. с (3.27)):

$$F_K = \left[(2\pi)^{2K}\int W_{in}(\boldsymbol{\xi})W_{out}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}\right]^{\frac{1}{K}} \tag{5.41}$$

где $\xi = (\{x_{sm}, y_{sm}\}, \{x_{im}, y_{im}\})$ — вектор, составленный из усредненных квадратур поля ($m = 1\ldots K$). Отметим, что в работе [126] используется другое определение точности. В дальнейшем такой выбор параметра точности будет объяснен подробнее. Используя (5.41), получим выражение для точности:

$$F_K = \left[\frac{1}{\sqrt{\det(2\sigma_K^{in} + \sigma_K^{(N)})}} \right]^{\frac{1}{K}}. \tag{5.42}$$

На рис. 5.5 представлены графики зависимостей точности телепортации для одного, двух и четырех пикселей от отношения размера пикселя к минимальному элементу изображения. Рис. 5.5a соответствует случаю телепортации двух неперепутанных когерентных изображений, рис. 5.5b — телепортации перепутанных изображений, полученных в параметрическом процессе преобразовании частоты вниз. Как видно из рис. 5.5a, параметр точности телепортации для двух когерентных изображений не зависит от числа пикселей в изображении. В то же время в случае перепутанных изображений точность их телепортации зависит от количества пикселей и их размещения в изображениях. Из графиков также видно, что согласование ширин пространственных спектров телепортируемых изображений и вспомогательных перепутанных полей существенно улучшает качество телепортации. Рис. 5.5 свидетельствует, что для перепутанных изображений точность телепортации с ростом размера пикселей растет медленнее, чем точность для случая неперепутанных когерентных изображений. Таким образом, перепутанные изображения телепортируются с меньшей точностью. Однако, как было показано выше, качество телепортации может быть повышено увеличением перепутанности вспомогательных перепутанных полей.

Результаты зависимости точности телепортации от размера пикселей можно объяснить следующим образом. При уменьшении размера пикселей ширина функции $\mathcal{B}_\Delta(\mathbf{q})$ увеличивается, и вместе с ним вклад вакуумных (флуктуационных) мод возрастает, становясь в пределе $\Delta \to 0$ определяющим:

$$F_K = F_{coh} = \frac{1}{4}. \tag{5.43}$$

Значение (5.43) совпадает с нижним пределом точности телепортации двух когерентных состояний. Противоположная ситуация возникает, когда $\Delta/x_0 \gg$

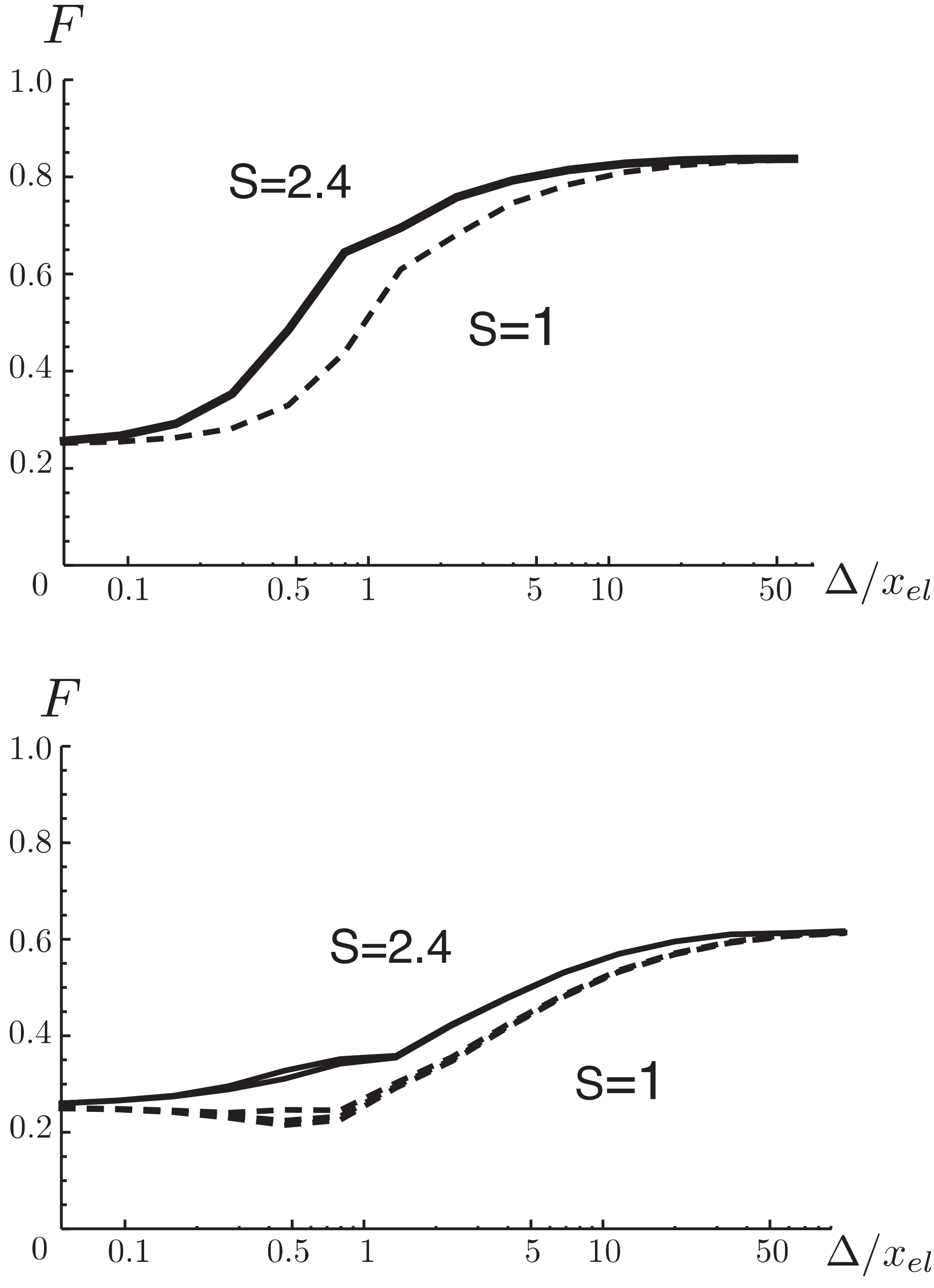

Рис. 5.5. Зависимость точности телепортации от отношения Δ/x_{el} для одного, двух и четырех пикселей в изображении при a) когерентных изображениях ($\zeta = 0$) и b) перепутанных изображениях ($\zeta = 1$). Штриховые кривые соответствуют несогласованным ширинам пространственных спектров, сплошные кривые — согласованным ширинам спектров. Графики приведены для длин волн $\lambda_p = 1.06$ мкм, $\lambda_1 = 2.0$ мкм, $\lambda_2 = \lambda_s = 2.26$ мкм, $\lambda_3 = \lambda_i = 0.69$ мкм, $\lambda_4 = 0.72$ мкм и для коэффициента $\xi = 0.5$.

1. В выражение для точности в этом случае основной вклад вносят корреляции, относящиеся к почти коллинеарным модам. В пределе $\Delta/x_0 \to \infty$ справедливо (5.39) и

$$F_K \to F, \tag{5.44}$$

где F — достоверность телепортации пространственно-одномодовых состояний (см. рис. 3.5). Таким образом, предельные значения параметра точности, определенного формулой (5.41), не зависят от количества пикселей в изображениях. Обратим внимание на следующее обстоятельство. При определении точности без возведения в степень $1/K$ предельные значения зависят от количества пикселей в изображениях, и не описывают, по нашему мнению, качество телепортации корректно. Действительно, при телепортации в которой каждый пиксель изображений передается с большой точностью: $F_1 = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, имеет смысл говорить об очень хорошем качестве передаче изображений в целом. Однако для предельного значения точности телепортации изображений в этом случае имеем $F_K \longrightarrow (F_1)^K \xrightarrow{K\to\infty} 0$.

Как было показано выше, для достижения высокого качества телепортации необходимо использовать детекторы с большим размером пикселей. С другой стороны, размер пикселей не может быть слишком большим по двум причинам. Во-первых, увеличение размера пикселей приводит к огрублению изображения. Это, однако, не представляет принципиальной трудности, так как масштаб изображения можно изменять. Во-вторых, размер телепортируемых изображений, который ограничивает размер пикселей, не может, очевидно, превышать размера накачки волны для вспомогательных связанных процессов.

5.6. Выводы

В настоящей Главе исследована голографическая телепортация перепутанных оптических изображений. Показано, что схема для телепортации перепутанных изображений, в которой в качестве вспомогательных перепутанных состояний используются пространственно-многомодовые поля, генерируемые в связанных параметрических взаимодействиях, может телепортировать изображения с точностью, превышающей классический предел для когерентных полей.

Анализ качества телепортации показал, что увеличение перепутанности между телепортируемыми изображениями ведет к снижению точности телепортации вплоть до значений меньших, чем классический предел для телепортации когерентных полей. Вместе с тем точность телепортации может быть увеличена путем увеличения перепутанности вспомогательных полей. Это может быть достигнуто, например, за счет увеличения длины взаимодействия в АНФК или повышения интенсивности накачки.

Учет влияния размера пикселей измеряющих детекторов показал, что при размере пикселей много меньше минимального элемента телепортируемых изображений (радиуса когерентности) определяющий вклад в точность вносят вакуумные (шумовые) моды. Значение точности телепортации в таком случае имеет значение 1/4. В противоположной ситуации больших размеров пикселей предельное значение точности определяется перепутанностью вспомогательных полей и телепортируемых изображений и совпадает со значениями точности при телепортации пространственно-одномодовых полей.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированны следующим образом.

- Детально исследованы квантовые свойства двух пятичастотных связанных оптических параметрических взаимодействий: 1) взаимодействия, состоящего из двух процессов преобразования частоты вниз и одного процесса смешения частот, протекающих в поле двух волн накачки, и 2) взаимодействия, протекающего в поле одной волны накачки и состоящего из одного процесса преобразования частоты вниз и двух процессов смешения частот.

- Установлено, что в связанном пятичастотном параметрическом взаимодействии, протекающем в поле двух волн накачек, наличие процесса смешения частот уменьшает шумовое влияние одного процесса преобразования частоты вниз на другой. Найдены условия оптимального уменьшения шумового воздействия.

- Показано, что в связанном параметрическом пятичастотном взаимодействии, протекающем в поле одной волны накачки, формируются два двухчастотных перепутанных состояния: на частотах, лежащих ниже частоты накачки и на частотах, лежащих выше частоты накачки. При этом обнаружено, что блоки мод на частотах ниже и выше частоты накачки перепутанны между собой.

- Проанализирована возможность использования перепутанных четырехчастотных состояний, формируемых в связанных параметрических взаимодействиях, протекающих в поле одной волны накачки, для передачи (телепортации) двухчастотных пространственно-одномодовых перепутанных состояний. Подробно исследовано качество этой передачи. Установлено, что с помощью названного пятичастотного параметрического взаимодействия возможно телепортировать перепутанное состояние с большой точностью.

- Развита квантовая теория параметрического усиления и преобразования оптических изображений в поле одной волны накачки в связанном пятичастотном взаимодействии. Исследованы шумовые характеристики и перепутанность изображений в схемах для конфигураций с близко и далеко расположенным объектом для случаев входных изображений на несущих частотах ниже и выше частоты накачки.

- Предложена и детально исследована схема для телепортации перепутанных двухчастотных оптических изображений. Определены факторы, влияющие на качество телепортации. В частности, точность телепортации зависит от соотношения ширин пространственных спектров телепортируемых изображений и вспомогательных пространственно-многомодовых полей.

- Проанализировано влияние размера пикселей регистрирующего устройства на качество телепортации оптических изображений. Показано, что с увеличением размера пикселей вклад квантового шума в точность телепортации уменьшается.

Основные результаты диссертации изложены в следующих статьях:

1. A.S.Chirkin, M.Yu.Saigin, Tripartite entanglement in coupled three-wave interactions // Acta Physica Hungarica B, v. 20/1-2, p. 63-70 (2006).

2. М.Ю. Сайгин, А. С.Чиркин, Квантовые свойства трех связанных параметрических процессов // Современные проблемы статистической радиофизики, т. 5, с. 169-175 (2006).

3. A.S.Chirkin, M.Yu.Saigin, Statistic and information characterization of tripartite entangled states // J. Russian Laser Research, v. 28, p. 505-515 (2007).

4. A.S.Chirkin, M.Yu.Saigin, I.V.Shutov, Parametric amplification at low-frequency pumping and generation of four-mode entangled states // J. Russian Laser Research, v.29, p. 336-346 (2008).

5. A.S.Chirkin, M.Yu.Saigin, Four-mode entangled states in coupled nonlinear optical processes and teleportation of two-mode entangled CV state // Physica Scripta, T135, 014029-5 (2009).

6. М.Ю. Сайгин, А.С.Чиркин, Одновременная параметрическая генерация и преобразование частоты вверх перепутанных оптических изображений // ЖЭТФ, т. 138, с.16-27 (2010).

7. M.Yu.Saygin, A.S. Chirkin, M.I. Kolobov, Teleportation of entangled images with multiwave nonlinear optical interactions // Proceedings SPIE, ICN10-IC200-7, 7993-35 (2010).

8. М.Ю. Сайгин, А.С.Чиркин, Квантовые свойства оптических изображений в связанных невырожденных параметрических процессах // Оптика и спектроскопия, т. 110, с. 102-110 (2011).

и докладывались на российских и международных конференциях: Фундаментальные проблемы оптики-2006, 2008 (Санкт-Петербург, Россия, 2006, 2008); 13th, 15th, 16th, 17th Central European Workshop on Quantum Optics (Vienna, Austria, 2006; Belgrade, Serbia, 2008; Turku, Finland, 2009; St.-Andrews, Scotland, UK, 2010); X Международные Чтения по Квантовой Оптике (Самара, Россия, 2007); 5-й и 6-й семинары памяти Д.Н. Клышко (Москва, Россия, 2007, 2009); The International Conference on Coherent and Nonliner Optics-2007 (Минск, Белоруссия, 2007); 10th, 11th International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations (Bradford, UK, 2007; Olomouc, Czech Republic, 2009); Всероссийская научная школа-семинар «Волны-2008»(Московская область, Красновидово, Россия, 2008); Solvay workshop «Bits, Quanta and Complex Systems. Modern approach to photonic information processing.»(Brussel, Belgium, 2008); 12th Intertational Conference on Quantum Optics and Quantum Information (Vilnius, Lithuania, 2008); Устные выпуски журнала «Лазерные исследования в России»(Москва, Россия, 2009, 2010); Российско-Франко-Германский симпозиум по лазерной физике-2009 (Нижний Новгород, Россия, 2009); The International Conference on Coherent and Nonliner Optics-2010 (Казань, Россия, 2010); Заседание совета РАН по спектроскопии атомов и молекул (Москва, Россия, 2010); Межвузовский семинар по квантовой оптике (Санкт-Петербург, 2011).

Обсуждались на научных семинарах кафедры Общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Литература

[1] G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein, J.I. Cirac, Separability properties of three-mode Gaussian states // Phys. Rev. A, v. 64, 052303 (2001).

[2] D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Shimony // Am. J. Phys., v. 58, 1131 (1990).

[3] М. Нильсен, Н. Чанг, Квантовые вычисления и квантовая информация, — М.: Мир, 2006.

[4] Д. Баумейстер, А. Экерт, А. Цайлингер, Физика квантовой информации, — М.: Постмаркет, 2002.

[5] Д. Прескилл, Квантовая информация и квантовые вычисления, том 1, РХД, 2002.

[6] Yu.I. Bogdanov, M.V. Chekhova, S.P. Kulik, G.A. Maslennikov, A.A. Zhukov, C.H. Oh, M.K. Tey, Qutrit state engineering with biphotons // Phys. Rev. Lett., v. 93, 230503 (2004).

[7] Yu.I. Bogdanov, E.V. Moreva, G.A. Maslennikov, R.F. Galeev, S.S. Straupe, S.P. Kulik, Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons // Phys. Rev. A, v. 73, 063810 (2006).

[8] S.-Y. Baek, S.S. Straupe, A.P. Shurupov, S.P. Kulik, Yoo-Ho Kim, Preparation and characterization of arbitrary states of four-dimensional qudits based on biphotons // Phys. Rev. A, v. 78, 042321 (2008).

[9] А.С. Давыдов, Квантовая механика, М.: Наука, 1973.

[10] D.F. Walls, G.J. Milburn, Quantum optics, 2nd edition,— New York: Springer, 2009.

[11] Д. Н. Клышко, Фотоны и нелинейная оптика, — М.: Наука, 1980.

[12] U. Leonhardt, Measuring the quantum state of light, — Cambridge University Press, 2005.

[13] Р. Лоудон, Квантовая теория света, — М.: Мир, 1976.

[14] Quantun information with continuous variables, edited by S.L. Braunstein, A.K. Pati, New York, Springer, 2003.

[15] Quantun information with continuous variables of atoms and light, edited by N.J. Cerf, G. Leuchs, E.S. Polzik, London: Imperial College Press, 2007.

[16] S.L. Braunstein, P. van Loock, Quantum information with continuous variables // Rev. of Mod. Phys., v. 77, p. 513 (2005).

[17] С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, М.:ВИНИТИ, 1964.

[18] В.Г. Дмитриев, Л.В. Тарасов, Прикладная нелинейная оптика, — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[19] И.Р. Шен, Принципы нелинейной оптики, пер. с англ., М.: Наука, 1989.

[20] G. Adesso, Simple proof of the robustness of Gaussian entanglement in bosonic noisy channels // Phys. Rev. A, v. 83, 024301 (2011).

[21] С.А. Ахманов, Дьяков, А.С. Чиркин, Введение в статистическую радиофизику и оптику, — М.: Наука, 1981.

[22] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, P.A. Volkov, E.V. Moreva, S.S. Straupe, S.P. Kulik, Anisotropically and high entanglement of biphoton states generated in spontaneous parametric down-conversion // Phys. Rev. Lett., v. 99, 063901 (2007).

[23] M.D. Reid, Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification // Phys. Rev. A, v. 40, p. 913-923 (1989).

[24] R. Loudon, P. Knight, Squeezed light // J. Mod. Optics, v. 34, p. 709 (1987).

[25] P. van Loock, S.L. Braunstein, Multipartite entanglement for continuous variables: a quantum teleportation network // Phys. Rev. Lett., v. 84, p. 3482 (2000).

[26] N.C. Menicucci, X. Ma, T.C. Ralph, Arbitrarily large continuous-variable cluster state from a single quantum nondemolition gate // Phys. Rev. Lett., v. 104, 250503 (2010).

[27] А.С. Чиркин, В.В. Волков, Г.Д. Лаптев, Е.Ю. Морозов, Последовательные трехчастотные волновые взаимодействия в нелинейной оптике периодически-неоднородных сред // Квант. электрон., 2000, т. 30, № 10, с. 847-858.

[28] Е.Ю. Морозов, Последовательные взаимодействия световых волн в периодически и случайно неоднородных нелинейно-оптических кристаллах // Канд. дис., МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004.

[29] H.J. Bakker, P.C.M. Planken, L. Kuipers, A. Lagendijk, Simultaneous phase matching of three second-order nonlinear optical processes in $LiNbO_3$ // Opt. Comm. v. 73, p. 398 (1989).

[30] M.H. Chou, K.R. Parameswaran, M.M. Fejer, I. Brener, Multiple-channel wavelength conversion by use of engineered quasi-phase-matching structures in $LiNbO_3$ wavequides // Opt. Lett., v. 24, p. 1157 (1999).

[31] V. Bermudeza, D. Callejoa, R. Vilaplanab, J. Capmanyb, E. Dieguez, Engineering of lithium niobate domain structure through the off-centered Czochralski growth technique // J. of Crystal Growth, v. 237, Part 1, p. 677 (2002).

[32] K.L. Bakera, Single-pass gain in a chirped quasi-phase-matched optical parametric oscillator // Appl. Phys. Lett., v. 82, p. 3841 (2003).

[33] O. Bang, C.B. Clausen, P.L. Christiansen, L. Torner, Engineering competing nonlinearities // Opt. Lett., v. 24, p. 1413 (1999).

[34] G. Marcus, A. Zigler, A. Englander, M. Kats, Y. Ehrlich, Generation of ultrawide-band chirped sources in the infrared through parametric interactions in periodically poled crystals // App. Phys. Lett., v. 82, p. 164 (2003).

[35] Y.B. Chen, C. Zhang, Y.Y. Zhu, S.N. Zhu, H.T. Wang, H.T. Ming, Optical harmonic generation in a quasi-phase-matched three-component Fibonacci superlattice $LiTaO_3$ // Appl. Phys. Lett., v. 78, p. 577 (2001).

[36] J. Feng, Y. Zhu, N. Ming, Harmonic generations in an optical Fibonacci superlattice // Phys. Rev. B, v. 41, p. 5578 (1990).

[37] Y. Zhu, R.F. Xiao, J.S. Fu, G.K.L. Wong, N. Ming, Third harmonic generation through coupled second-order nonlinear optical parametric processes in quasiperiodically domain-inverted $Sr_{0.6}Ba_{0.4}Nb_2O_6$ optical superlattices // Appl. Phys. Lett., v. 73, p. 432 (1998).

[38] И.В. Шутов, Многоволновые нелинейно-оптические взаимодействия в средах с пространственной модуляцией квадратичной восприимчивости // Канд. дис, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009.

[39] А.С. Чиркин, И.В. Шутов, О возможности невырожденного параметрического усиления оптических волн при низкочастотной накачке // Письма в ЖЭТФ, т. 86, с. 803 (2007).

[40] А.С. Чиркин, И.В. Шутов, Параметрическое усиление волн при низкочастотной накачке в апериодических нелинейных фотонных кристаллах // ЖЭТФ, т. 136, вып. 4(10), с. 639 (2009).

[41] И.В. Шутов, А.С. Чиркин, Моделирование случайного нарушения условия квазисинхронизма в оптическом параметрическом процессе // Квант. электрон., т. 39(8), с. 691 (2009).

[42] A. Allevi, A. Andreoni, M. Bondani, A. Ferraro, M.G.A. Paris, E. Puddu, Quantum and classical properties of the fields generated by two interlinked second-order non-linear interactions // J. of Mod. Opt., v. 51, p. 1031 (2004).

[43] D. Daems, N.J. Cerf, Spatial multipartite entanglement and localization of entanglement // Phys. Rev. A, v. 82, 032303 (2010).

[44] D. Daems, F. Bernard, N.J. Cerf, M.I. Kolobov, Tripartite entanglement in parametric down-conversion with spatially-structured pump // arXive:1002.1798v1 (2010).

[45] А.В. Родионов, А.С. Чиркин, // Письма в ЖЭТФ, т. 79, с. 311 (2004).

[46] A.S. Chirkin, M.Yu. Saigin, I.V. Shutov, Parametric amplification at low frequency pumping and generation of four-mode entangled states // J. of Russian Laser Research, т. 29, №4, с. 336-346 (2008).

[47] L.-M. Duan, G. Giedke, J.I. Cirac, P. Zoller, Inseparability criterion for continuous variable systems // Phys. Rev. Lett., v. 84, p. 2722 (2000).

[48] E. Shchukin, W. Vogel, Inseparability criteria for continuous bipartite quantum states // Phys. Rev. Lett., v. 95, 230502 (2005).

[49] E. Shchukin, W. Vogel, Universal measurement of quantum correlations of radiation // Phys. Rev. Lett., v. 96, 200403 (2006).

[50] E. Shchukin, W. Vogel, Conditions for multipartite continuous-variable entanglement // Phys. Rev. A, v. 74, 030302 (2006).

[51] P. van Loock, A. Furusawa, Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement // Phys.Rev.A, v. 67, 052315 (2003).

[52] S.M. Tan, Confirming entanglement in continuous variable quantum teleportation// Phys. Rev. A, v. 60, p. 2752 (1999).

[53] G. Adesso, Entanglement of gaussian states // arXiv:quant-ph/0702069v1 (2007).

[54] J. Appel, P.J. Windpassinger, D. Oblak, U.B. Hoff, N. Kjargaard, E.S. Polzik, Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standart quantum limit // Proc. of the Nat. Acad. of Sciences of the USA, v. 106, p. 10960 (2009).

[55] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit // Science, v. 306, p. 1330 (2004).

[56] J.A. Jones, S.D. Karlen, J. Fitzsimons, A. Ardavan, S.C. Benjamin, G.A.D. Briggs, J.J.L. Morton, Magnetic field sensing beyond the standard quantum limit using 10-spin NOON states // Science Rep., v. 324, p. 1166 (2009).

[57] C.F. Roos, M. Chwalla, K. Kim, M. Reibe, R. Blatt, Precision spectroscopy with entangled states: measurement of electric quadrupole moments // AIP Conf. Proc., v. 869, p. 111 (2006).

[58] G.Y. Xiang, B.L. Higgins, D.W. Berry, H.M. Wiseman, G.J. Pryde, Entanglement-enhanced measurement of a completely unknown optical phase // Nature photonics, v. 5, p. 43 (2011).

[59] C.H. Bennett, S.J. Wiesner, Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states // Phys. Rev. Lett., v. 69, p. 2881 (1992).

[60] S.L. Braunsterin, H.J. Kimble, Dense coding for continuous variables // Phys. Rev. A, v. 61, 042302/1-4 (2000).

[61] X. Li, Q. Pan, J. Jing, J. Zhang, C. Xie, K. Peng, Quantum dense coding exploiting a bright Einstein-Podolsky-Rosen beam // Phys. Rev. Lett, v. 88, №4, 047904 (2002).

[62] J. Zhang, C. Xie, K. Peng, Controlled dense coding for continuous variables using three-particle entangled states // Phys. Rev. A, v. 66, 032318 (2002).

[63] J. Jing, J. Zhang, Y. Yan, F. Zhao, C. Xie, K. Peng, Experimental demonstration of tripartite entanglement and controlled dense coding for continuous variables // Phys. Rev. Lett, v. 90, №16, 167903 (2003).

[64] Quantum communications and cryptography, ed. by A.V. Sergienko, Taylor & Francis Group: USA, 2006.

[65] D.S. Naik, C.G. Peterson, A.G. White, A.J. Berglund, P.G. Kwiat, Entangled state quantum cryptography: eavesdropping on the Ekert protocol // Phys. Rev. Lett., v. 84, p. 4733 (2000).

[66] T. Durt, N.J. Cerf, N. Gisin, M. Zukowski, Security of quantum key distribution with entangled qutrits // Phys. Rev. A, v. 67, 012311 (2003).

[67] R. Raussendorf, H.J. Briegel, A one-way quantum computer // Phys. Rev. Lett., v. 86, p. 5188 (2001).

[68] R. Raussendorf, D.E. Browne, H.J. Briegel, Measurement-based quantum computation on cluster states // Phys. Rev. A, v. 68, 022312 (2003).

[69] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jorza, A. Peres, W.K. Wootters, Teleportation of an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels // Phys. Rev. Lett., v. 70, p. 1895-1899 (1993).

[70] L. Vaidman, Teleportation of quantum states, Phys. Rev. A, v. 49, p. 1473-1476 (1994).

[71] S. Braunstein, H. Kimble, Teleportation of continuous variables // Phys. Rev. Lett., v. 80, p. 869-872 (1998).

[72] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation // Nature, v. 390, 6660, 575-579 (1997).

[73] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, S. Popescu, Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels // Phys. Rev. Lett, v. 80, 6, p. 1121-1125 (1998).

[74] Y.-H. Kim, S.P. Kulik, Y. Shih, Quantum teleportation of a polarization state with a complete bell state measurement // Phys. Rev. Lett., v. 86, 1370 (2001).

[75] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, N. Gisin, Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths // Nature, v. 421, 509 (2003).

[76] X. Jin, J. Ren, B. Yang, Z. Yi, F. Zhou et al, Experimental free-space quantum teleportation // Nature Photonics Letters, v. 4, p. 376-381 (2010).

[77] M. Riebe, H. Häffner, C.F. Roos, W. Hänsel, M. Ruth, J. Benhelm, G.P.T. Lancaster, T.W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D.F.V. James, R. Blatt, Deterministic quantum teleportation with atoms // Nature, v. 429, p. 734 (2004).

[78] M.D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W.M. Itano, J.D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, D.J. Wineland, Deterministic quantum teleportation of atomic qubits // Nature, v. 429, p. 737 (2004).

[79] S. Olmschenk, D.N. Matsukevich, P. Maunz, D. Hayes, L.-M. Duan, C. Monroe, Quantum teleportation between distant matter qubits // Science, v. 323, p. 486 (2009).

[80] A. Furusawa, J.L. Sorensen, S.L. Braunstein, C.A. Fuchs, H.J. Kimble, E.S. Polzik, Unconditional quantum teleportation // Science, v. 282, p. 706 (1998).

[81] H. Yonezawa, T. Aoki, A. Furusawa, Demonstration of a quantum teleportation network for continuous variables // Nature, v. 431, p. 430 (2004).

[82] A. Furusawa, N. Takei, Quantum teleportation for continuous variables and related quantum information processing // Physics Reports, v. 443, p. 97 (2007).

[83] H.F. Hofmann, T. Ide, T. Kobayashi, A. Furusawa, Fidelity and information in the quantum teleportation of continuous variables //Phys. Rev. A, v. 62, 013806 (2000).

[84] T. Ide, H.F. Hofmann, T. Kobayashi, A. Furusawa, Continuous variable teleportation of single photon states// Phys.Rev.A, v. 65, 012313 (2002).

[85] D. Nie, G. He, G, Zeng, Controlled teleportation of continuous variables // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., v. 41, 175504 (2008).

[86] G. Brassard, S.L. Braunstein, R. Cleve, Teleporation as quantum computation // Phys. D, т. 120, с. 43 (1998).

[87] S. Lloyd, S.L. Braunstein, Quantum computation over continuous variables // Phys. Rev. Lett., v. 82, p. 1784 (1999).

[88] G. Rigolin, Quantum teleportation of an arbitrary two-qubit state and its relation to multipartite entanglement // Phys. Rev. A, v. 71, 032303 (2005).

[89] J. Mizuno, K. Wakui, A. Furusawa, M. Sasaki, Experimental demonstration of entanglement assisted coding using a two-mode squeezed vacuum state // Phys. Rev. A , v. 71, 012304 (2005).

[90] L. Mista, Jr., R. Filip, A. Furusawa, Continuous-variable teleportation of a negative Wigner function // Phys. Rev. A, v. 82, 012322 (2010).

[91] A.S. Chirkin, M.Yu. Saigin, Four-mode entangled states in coupled nonlinear optical processes and teleportation of two-mode entangled CV state // Phys. Scr., T135, 014029 (2009).

[92] S. Adhikari, A.S. Majumdar, N. Nayak, Teleportation of two-mode squeezed states // Phys. Rev. A, v. 77, 012337 (2008).

[93] M. Gu, C. Weedbrook, N.C. Menicucci, T.C. Ralph, P. van Loock, Quantum computing with continuous-variable clusters // Phys. Rev. A, v. 79, 062318 (2009).

[94] S.T. Flammia, N.C. Menicucci, O. Pfister, The optical frequency comb as a one-way quantum computer // J. Phys. B, v. 42, 114009 (2009).

[95] N.C. Menicucci, S.T. Flammia, O. Pfister, One-way quantum computing in the optical frequency comb // Phys. Rev. Lett., v. 101, 130501 (2008).

[96] T. Aoki, N. Takei, H. Yonezawa, K. Wakui, T. Hiraoka, A. Furusawa, P. van Loock, Experimental creation of a fully inseparable tripartite continuous-variable state // Phys. Rev. Lett., v. 91, 080404 (2003).

[97] K. Yoshino, T. Aoki, A. Furusawa, Generation of continuous-wave broadband entangled beams using periodically-poled lithium niobate waveguides // Appl. Phys. Lett., v. 90, 041111 (2007).

[98] M.I. Kolobov, The spatial behavior of nonclassical light// Rev. Mod. Physics, v. 71, p. 1539 (1999).

[99] J.E. Midwinter, Image conversion from 1.6 μm to the visible in lithium niobate // Appl. Phys. Lett., v. 12, p. 68 (1968).

[100] J. Warner, Spatial resolution measurements in up-conversion from 10.6 μm to the visible // Appl. Phys. Lett., v. 13, p. 360 (1968).

[101] Э.С. Воронин, М.И. Дивликеев, Ю.А. Ильинский, В.С. Соломатин, Р.В. Хохлов, Инфракрасная голография методами нелинейной оптики // Письма в ЖЭТФ, т. 10, с. 172 (1969); ЖЭТФ, т. 58, с. 51 (1970).

[102] R.A. Andrews, Wide angular aperture image up-conversion // IEEE J. Quant. Electron. QE-5, p. 548 (1969); QE-6, p. 68 (1970).

[103] В.Л. Стрижевский, Э.С. Воронин, Параметрическое преобразование инфракрасного излучения с повышением частоты и его применение // УФН, т. 127, с. 99 (1979).

[104] А.В. Гайнер, Нелинейно-оптические преобразователи инфракрасного излучения, — Н.: Наука, 1990.

[105] Квантовое изображение, под редакцией М.И. Колобова, — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

[106] L.A. Lugiato, A. , E. Brambilla, Quantum imaging // arXiv:quant-ph/0203046v1 (2002).

[107] C. Fabre, U. Andersen, H. Bachor, B. Buchler, S. Gigan, P.K. Lam, A. Maitre, N. Treps, Quantum information processing in optical images// Superlattices and Microstructures, v 32, p. 323 (2002).

[108] R.W. Boyd, Let quantun mechanics improve your images// Science, v. 321, p. 501 (2008).

[109] D.V. Strekalov, A.V. Sergienko, D.N. Klyshko, Y.H. Shih, Observation of two-photon "ghost"interference and diffraction"// Phys. Rev. Lett., v. 74, p. 3600 (1995);

[110] M. Bache, E. Brambilla, A. Gatti, L.A. Lugiato, Ghost imaging using homodyne detection // Phys. Rev. A, v. 70, 023823 (2004).

[111] M. Bache, E. Brambilla, A. Gatti, L. Lugiato, Ghost imaging schemes: fast and broadband // Opt. Express, v. 12, p. 6067 (2004).

[112] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, L.A. Lugiato, Ghost imaging with thermal light: comparing entanglement and classical correlation // Phys. Rev. Lett., v. 93, 093602 (2004).

[113] A.F. Abouraddy, B.E.A. Saleh, A.V. Sergienko, M.C. Teich, Role of entanglement in two-photon imaging // Phys. Rev. Lett., v. 87, 123602 (2001).

[114] М.И. Колобов, И.В. Соколов, Пространственное поведение сжатых состояний света и квантовый шум в оптических изображениях // ЖЭТФ, т. 69, с. 1097 (1989);

[115] M.I. Kolobov and I.V. Sokolov, Squeezed states of light and noise-free optical images //Phys. Lett. A, v. 140, p. 101 (1989).

[116] M.I. Kolobov and I.V. Sokolov, Multimode squeezing, antibunching in space and noise-free optical images //Europhys. Lett., v. 15, p. 271 (1991).

[117] С.А. Ахманов, А.В. Белинский, А.С. Чиркин, Сжатые состояния при параметрическом усилении в дифрагирующих световых пучках // Квантовая электроника, т. 15, с. 873 (1988).

[118] А.В. Белинский, А.С. Чиркин, Четырехфотонное смешение и сжатые состояния в резонаторе // Квантовая электроника, т. 16, с. 2551 (1988); Сжатые состояния в ограниченных световых пучках // Вестник Московского университета, Сер. Физика и астрономия, т. 30, N3, с. 38 (1989).

[119] E. Brambilla, A. Gatti, L.A. Lugiato and M.I. Kolobov, Quantum structures in traveling-wave spontaneous parametric down-conversion// European Journal of Physics D, v. 15, p.127-135 (2001).

[120] E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L. Lugiato, Simultaneous near-field and far-field spatial quantum correlations in the high-gain regime of parametric down-conversion //Phys. Rev. A, v. 69, 023802 (2004).

[121] E.V. Makeev, A.S. Chirkin, Quantum fluctuations of parametrically amplified and up-converted optical images in consecutive wave interactions //J. Russian Laser Research, v. 27, p. 466 (2006).

[122] A.S. Chirkin, E.V. Makeev, Parametric image amplification at low-frequency pumping // J. Modern Optics, v. 53, p. 821 (2006).

[123] A.S. Chirkin, E.V. Makeev, Simultaneous phase-sensitive parametric amplification and up-conversion of an optical image // J. Opt. B: Quantum Semiclass., v. 7, S500 (2005).

[124] М.Ю. Сайгин, А.С. Чиркин, Одновременная параметрическая генерация и преобразование частот вверх перепутанных оптических изображений // ЖЭТФ, т. 138, с. 16 (2010).

[125] М.Ю. Сайгин, А.С. Чиркин, Квантовые свойства оптических изображений в связанных невырожденных параметрических процессах // Опт. и спектр., т. 110, с. 102 (2011).

[126] A. Gatti, I.V. Sokolov, M.I. Kolobov, L.A. Lugiato, Quantum fluctuations in holographic teleportation of optical images // European Journal of Physics D, v 30, p. 123 (2004).

[127] Л.В. Магденко, И.В. Соколов, М.И. Колобов, Квантовая телепортация оптических изображений с преобразованием частоты// Оптика и спектроскопия, v. 103, p. 67 (2007).

[128] L.V. Magdenko, I.V. Sokolov, M.I. Kolobov, Quantum telecloning of optical images: Multiuser parallel quantum channel // Phys. Rev. A, v. 75, p. 2324 (2007).

[129] V. Boyer, A.M. Marino, R.C. Pooser, P.D. Lett, Entangled images from four-wave mixing// Science Reports, v. 321, p. 544 (2008).

[130] K. Wagner, J. Janousek, V. Delaubert, H. Zou, C. Harb, N. Treps, J.F. Morizur, P.K. Lam, H. Bachor, Entangling the spatial properties of laser beam // Science Reports, v. 321, p.541 (2008).

[131] Y. Dong, X. Zhang, Possibility of efficient generation of multiphoton entangled states using a one-dimensional nonlinear photonic crystal // Phys. Rev. A, v. 81, 033806 (2010).

[132] J.C. Jaskula, M. Bonneau, G.B. Partridge, V. Krachmalnicoff, P. Deuar, K.V. Kheruntsyan, A. Aspect, D. Boiron, C.I. Westbrook, Sub-poissonian number differences in four-wave mixing of matter waves // Phys. Rev. Lett., v. 105, 190402 (2010).

[133] I.N. Agafonov, M.V. Chekhova, G. Leuchs, Two-color bright squeezed vacuum // Phys. Rev. A, v. 82, 011801(R) (2010).

