

N° d'ordre : 41125

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE I**

Spécialité :

Laser, Molécules et Rayonnement atmosphérique

soutenue le 14/06/2013 par

Zheng LIU

Pour obtenir le grade de

Docteur de L'UNIVERSITÉ DE LILLE I

Sujet de la thèse

**Instabilité modulationnelle et brisure de
symétrie dans les systèmes à fibre optique**

Directeur de thèse :

Majid Taki

Jury composé de :

Léo Brevdo	Rapporteur	Université de Strasbourg
Mustapha Tlidi	Rapporteur	Université libre de Bruxelles
Saliya Coulibaly	Examineur	Université de Lille I

Remerciements

La réalisation de cette thèse n'a été possible que grâce à l'aide de nombreuses personnes que je tiens à remercier chaleureusement ici.

Ayant effectué ma thèse au sein du laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM), les remerciements que je dois à son Directeur, M. WLODARCZAK, ne sont pas uniquement dus à la convenance. Ils émanent d'un sentiment profond de reconnaissance pour celui qui m'a aidé lors de ma recherche d'une prolongation de titre de séjours.

Bien naturellement, l'expression de ma gratitude la plus élevée revient à mon directeur de Thèse, M. Majid Taki, qui m'a fait partager ses qualités de physicien. La science exige de nombreuses qualités qui doivent être coordonnées et j'ai pu apprécier chez lui la rigueur, la culture, la compréhension, l'inspiration. De plus, en tant que thésard d'origine chinoise, la correction de mon rapport en français a exigé une énorme patience de sa part.

Je remercie également M. Saliya Coulibaly pour les discussions que nous avons eues ensemble et l'aide précieuse qu'il m'a fournie permettant de débloquer les nombreuses situations dans ma thèse. Sa vision juste et ses grandes qualités de modélisateur ont été pour moi une source majeure d'inspiration.

Je tiens à remercier l'ensemble du jury, M. Léo Brevdo et M. Mustapha Tlidi, qui ont accepté de juger mon travail. C'est également un grand honneur pour moi que des scientifiques d'une telle envergure participent à mon jury de thèse.

Ces trois ans de thèse ont été aussi une aventure humaine que j'ai partagée avec de nombreux thésards et docteurs, je souhaite donc remercier Béa, Benoit, Constant, Vincent, Wang, Paf, Ophélie et les autres pour leur soutien et leurs encouragements. Ici je voudrai remercier particulièrement Alfredo et sa femme Analia qui m'ont beaucoup aidé lors de mon séjour de trois mois au Mexique.

Je voudrais remercier ma famille en Chine pour m'avoir encouragé et avoir toujours cru en moi durant mes études universitaires.

Enfin, mille merci à ma femme Zhang Yue qui m'a accompagné et supporté pendant toutes ces années d'études et qui a merveilleusement bien assuré l'organisation mon pot de thèse.

Table des matières

Introduction générale	9
1 Contexte et position du problème	13
1.1 La fibre optique	13
1.1.1 Structure de la fibre optique	13
1.1.2 Les pertes linéaires	14
1.1.3 La dispersion chromatique	15
1.1.4 Les effets non linéaires dans les fibres optiques	16
1.1.4.1 L'effet Kerr optique	17
1.1.4.2 La diffusion Raman stimulée	18
1.1.4.3 La diffusion Brillouin stimulée	19
1.1.5 L'équation de Schrödinger non linéaire généralisée	19
1.1.5.1 La transformée de Fourier de la polarisation linéaire	21
1.1.5.2 La transformée de Fourier de la polarisation non linéaire	23
1.1.5.3 La constante diélectrique	25
1.1.5.4 La méthode de séparation des variables	26
1.1.5.5 L'équation non linéaire de Schrödinger généralisée (GNLSE)	29
1.1.6 L'instabilité modulationnelle dans la fibre optique	32
1.2 La cavité fibrée	34
1.2.1 La modélisation	34
1.2.2 Le modèle réduit de Lugiato-Lefever	35
1.3 Le principe de simulation : méthode de "split-step"	35
2 Propagation d'ondes dans les fibres optiques non linéaires	39
2.1 Analyse de stabilité linéaire standard	40
2.2 Analyse de stabilité linéaire spatio-temporelle : Perturbations localisées	43
2.2.1 Cas de la dispersion de la vitesse de groupe (β_2) seule	44
2.2.2 Effet de la dispersion d'ordre trois	45
2.2.3 Effet de la diffusion Raman stimulée	48
2.2.4 Compensation des effets de la dispersion d'ordre trois et de la diffusion Raman stimulée	49
2.3 Instabilités convective et absolue	51
2.3.1 Approche théorique de l'instabilité convective et absolue	51
2.3.1.1 Méthode du point selle	53
2.3.1.2 Instabilité convective dans les systèmes dissipatifs	56
2.3.1.3 Instabilité absolue dans les systèmes dissipatifs	57

2.3.2	Méthode pour trouver la dérive des fronts du paquet d'ondes . . .	58
2.3.3	La dérive des fronts montant et descendant du paquet d'ondes en propagation libre	59
2.3.3.1	La dérive des fronts en absence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman – Taux d'élargissement du paquet d'ondes	59
2.3.3.2	La dérive des fronts en présence de la dispersion d'ordre trois seule	61
2.3.3.3	La dérive des fronts en présence de la diffusion Raman stimulée seule	63
2.3.3.4	La dérive des fronts à l'issue de la compensation de la dérive de l'ensemble du paquet d'ondes	63
2.3.3.5	Le seuil absolu dans la fibre optique en propagation libre	64
2.4	Conclusion	65
3	Etude de la dynamique non linéaire dans une cavité fibrée	67
3.1	Analyse de stabilité linéaire standard du modèle de Lugiato-Lefever . .	68
3.1.1	Instabilité modulationnelle dans la cavité fibrée en absence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman	70
3.1.2	Instabilité modulationnelle dans la cavité fibrée en présence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman	74
3.2	Analyse de stabilité linéaire spatio-temporelle : Perturbations localisées	76
3.2.1	Cas de la dispersion de la vitesse du groupe seule	77
3.2.2	Effet de la dispersion d'ordre trois seule	78
3.2.3	Effet de la diffusion Raman stimulée seule	81
3.2.4	Compensation des effets de la dispersion d'ordre trois et de la diffusion Raman stimulée	83
3.3	Etude des instabilités absolue et convective dans une cavité fibrée . . .	85
3.3.1	Instabilités absolue et convective dans la cavité en présence de la dispersion d'ordre trois	87
3.3.1.1	Changement de régime d'instabilité en fonction de B_3 avec I constante	89
3.3.1.2	Changement de régime d'instabilité en fonction de I avec B_3 constante	92
3.3.2	Instabilités absolue et convective en présence de la diffusion Ra- man stimulée	94
3.3.3	Instabilités absolue et convective en présence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman	95
3.4	Instabilité secondaire d'Eckhaus-Benjamin-Feir	97
3.4.1	Equation aux amplitudes du modèle de Lugiato-Lefever	97
3.4.2	Instabilité secondaire d'Eckhaus-Benjamin-Feir	100
3.4.2.1	Instabilité secondaire d'Eckhaus ($b = c = 0$)	102
3.4.2.2	Instabilité secondaire de Benjamin-Feir ($b \neq 0, c \neq 0$) .	105
3.5	Conclusion	113

4	Fibres optiques biréfringentes à cristaux photoniques	115
4.1	Instabilité de polarisation	116
4.2	Perturbation localisée	121
4.3	Résultats numériques	122
4.4	Conclusion	125
	Conclusion générale	127
A	Propagation d'ondes dans une fibre optique non linéaire	133
B	Développement linéaire de l'effet Raman dans une fibre optique	135
C	Dérivation du modèle réduit de Lugiato-Lefever	137
D	Etablissement de la relation de dispersion approchée dans la fibre optique	141
E	Etablissement de la relation de dispersion approchée dans la cavité fibrée	145
F	Publication	149

Introduction générale

Face à la complexité du vrai monde, l'homme aspire à comprendre la nature, il se sert de la science comme outil pour comprendre notre monde. Mais la science n'est pas le vrai monde, elle n'est que des modèles mathématiques construits par l'homme pour simuler le vrai monde. Confronter aux phénomènes réels, l'homme perfectionne sans cesse ces modèles pour approcher de plus en plus la réalité, au fond de leur coeur ils croient toujours que notre monde n'est pas là par hasard, il doit obéir à certaines lois. Aujourd'hui, nombreux scientifiques dispersés dans le monde, travaillent sur des sujets extrêmement pointus, qui ne semblent pas importants, mais l'ensemble de leurs travaux peut changer notre point de vue sur le monde et révolutionner notre vie quotidienne. J'ai eu le bonheur de faire partir de ce monde de recherche scientifique pendant 3 ans en effectuant une thèse dans le domaine de l'optique non linéaire.

Avant la mise en place des moyens de télécommunication basés sur les nouveaux concepts scientifiques, les moyens simples naturels anciens comme la parole ou les signaux à vue, permettent de communiquer entre les individus à courte distance, mais la transmission d'information à longue distance est très difficile à réaliser. Le besoin de communiquer à plus grande distance dans les sociétés humaines a amené très vite à développer des systèmes de communication primitifs en utilisant les porteurs de message comme cheval ou pigeon qui voyagent vite. Au fil du temps, les hommes comprennent qu'il existe autres porteurs de message potentiels dans la nature qui voyagent beaucoup plus vite que toutes les vitesses déjà connues, par exemple, la lumière. Il a fallu attendre la fin du XVIII^{ième} siècle pour assister à l'invention du télégraphe optique qui fut véritablement un système de transmission d'information à longue distance en utilisant la lumière comme porteuse de l'information. Les messages peuvent être transmis sur une longue distance par l'intermédiaire de relais espacés d'une dizaine de kilomètres et situés sur des hauteurs qui permettent de transmettre les messages en quelques heures dans toute la France. Mais la lumière n'est pas si simple à maîtriser, ce système était impossible de fonctionner durant la nuit et lors de mauvaise visibilité notamment à cause du temps, de plus, l'utilisation d'un tel système nécessite la mobilisation de beaucoup d'opérateurs puisqu'un dispositif était installé tous les 15 kilomètres environ et totalement manuel. Par conséquent, en 1855 le télégraphe optique est supplanté par le télégraphe électrique qui utilise le câble coaxial pour les transmissions d'information. Ce dernier offre les avantages d'une capacité de transmission plus élevée et d'une exploitation permanente quelles que soient les conditions météorologiques, il a autorisé les premières télécommunications trans-océaniques. Dès lors, les innovations se sont très vite développées, de telle sorte que de nos jours, la majorité des populations peut facilement communiquer avec une personne qui se trouve à l'autre bout de la planète. Il a fallu attendre les années 60, grâce à l'invention des lasers et des

guides d'ondes lumineuses à faibles pertes, notamment le développement des fibres optiques avec des facteurs d'atténuation assez faibles (de 1960 à 1984 les pertes passèrent de 1000 dB/km à 0.2 dB/km), la transmission d'information avec la lumière réapparaît dans le domaine de télécommunication. Parallèlement, la découverte théorique du soliton optique en 1973 par Hasegawa et Tappert [1], puis de son observation expérimentale en 1980 par Mollenauer et ses collaborateurs [2] sont des points marquants de l'histoire de télécommunication optique. En effet, les chercheurs et les industriels cherchent toujours à faire propager une impulsion sans déformation à la vitesse de la lumière, sur de très longues distances et avec une large bande passante. La porte à la transmission d'informations sous forme optique était enfoncée et ce fut le point de départ de la course au débit. Le développement des télécommunications par fibre optique de 1978 jusqu'au milieu des années 1980 permet progressivement d'atteindre des débits de transmission largement supérieurs à ceux des systèmes sur câble coaxial (de l'ordre du Gbit/s). Par an, le taux de croissance du flux de transmission est estimé à 25% [3]. En effet, dans un système de transmission de l'information par fibre optique, l'information initiale, par exemple, une photo, une video ou un mp3... est d'abord codée sous forme optique à l'aide d'une source laser modulée. Les séquences d'impulsions optiques ainsi formées se propagent au sein d'un système constitué principalement par la fibre optique. Ce système comporte aussi des amplificateurs pour compenser les pertes du système. Finalement, une fois arrivée au récepteur, l'information est retraduite sous sa forme initiale. Poussé par le développement de l'internet, les laboratoires cherchent toujours à compacter plus d'information dans un même laps du temps ce qui veut dire l'augmentation du débit. Les impulsions de durée plus courte deviennent une solution inévitable, mais la propagation d'une telle impulsion qui possède un spectre assez large dans la fibre optique nécessite la prise en compte des nouveaux effets linéaires et non linéaires comme la dispersion d'ordre supérieurs et la diffusion Raman stimulée qui sont négligés jusque là. L'étude fondamentale de ces effets dans la fibre optique devient indispensable pour l'utilisation des impulsions ultracourtes dans le système de télécommunication optique.

Face à l'augmentation sans cesse du débit des télécommunications optiques, les informations sont codées à des fréquences de plus en plus élevées. Il est donc important de disposer de sources lumineuses capables de délivrer des impulsions avec des taux de répétition de l'ordre de la centaine de gigabits par seconde. Les lasers dits à instabilité modulationnelle (MI¹) sont particulièrement adaptés pour répondre à cette demande. La MI est un processus par lequel un état homogène se transforme en un état périodique [4]. Au cours de ces 40 ans d'histoire, la MI a été rapportée dans les domaines spatial et temporel à l'aide de nombreux systèmes physiques, y compris l'hydrodynamique, physique des plasmas, optique non linéaire, et la condensation de Bose-Einstein... Au point de vue technologique, la MI joue un rôle important dans les systèmes de télécommunication optique. En effet, sa présence dans les fibres optiques a été prouvée théoriquement et expérimentalement [5], il a été démontré que la MI engendre la génération de train d'impulsions [6, 7]. Depuis lors, les autres applications potentiels de la MI dans la fibre optique ont été rapportées dans les domaines de l'amplificateurs paramétriques [8, 9], la génération de supercontinuum (SC) [10], et la formation des ondes scélérates optiques [11]. Dans la fibre optique, la MI peut être

1. MI : modulational instability.

interprétée physiquement comme un équilibre entre les effets non linéaires et la dispersion linéaire au cours de la propagation d'un champ optique. Il ne peut que apparaître dans le domaine de la dispersion de la vitesse de groupe (GVD²) anormal ($\beta_2 < 0$). Néanmoins, la condition d'accord de phase sous-jacente de la MI peut être réalisée en ajoutant un degré de liberté supplémentaire du système. Ce degré de liberté peut être extrinsèque, par exemple, Coen and Haelterman ont prédit et observé expérimentalement la MI dans une cavité fibrée en régime de dispersion normal ($\beta_2 > 0$) qui impose les conditions aux limites sur une longueur de fibre optique [12] ou intrinsèque comme la biréfringence dans la fibre optique.

Dans le contexte de l'impulsion ultracourte, les effets de la diffusion Raman stimulée et de la dispersion chromatique d'ordres supérieurs deviennent comparables à celui de GVD (β_2). La prise en compte de ces effets dans le modèle mathématique devient indispensable pour une description complète de la dynamique d'un système constitué principalement par la fibre optique. L'objet de ce mémoire de thèse est d'étudier l'impact de la pente de la dispersion (TOD³) et/ou de l'effet Raman sur l'instabilité spatio-temporel dans une fibre optique standard, une cavité fibrée et une fibre optique biréfringente.

Ce manuscrit se décompose en 4 chapitres. Dans le premier nous présentons d'abord brièvement les caractéristiques fondamentales de la fibre optique, ainsi que les effets linéaires et non linéaires pendant la propagation de l'onde lumineuse. Puis, nous consacrons une partie spéciale à la démonstrations de l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée (GNLSE) qui décrit la propagation de l'onde lumineuse dans une fibre optique monomode, dans laquelle, nous détaillons tous les calculs importants qui sont souvent omis dans la littérature [13], c'est pourquoi cette partie figure dans le premier chapitre et non pas dans les annexes. De plus, le modèle réduit de Lugiato-Lefever qui décrit la propagation de l'onde lumineuse dans une cavité fibrée est également établi. En dernier lieu, la méthode numérique utilisée est présentée.

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par une étude analytique et numérique de l'impact de la TOD et de l'effet Raman sur le processus de la MI au sein d'une fibre optique dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire initialisée par une perturbation monochromatique étendue. En seconde lieu, les concepts généraux d'instabilités convective et absolue sont détaillés dans le cadre de la fibre optique. En nous appuyant sur ces concepts, nous développons une méthode qui permet de distinguer la nature de l'instabilité selon la dérive des fronts avant et arrière d'un paquet d'ondes. Pour finir, la nature d'instabilité en présence de la TOD et de l'effet Raman dans la fibre optique est étudiée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la cavité fibrée. Premièrement, une étude similaire à celle du deuxième chapitre est effectuée dans le but de comprendre l'impact de la TOD et de l'effet Raman sur le processus de la MI et sur la nature de l'instabilité dans la cavité fibrée. De plus, l'instabilité secondaire (après celle primaire qui donne les seuils) de la cavité fibrée est également étudiée, ainsi que l'effet de la TOD sur cet instabilité secondaire.

Dans le quatrième chapitre, nous revenons à la fibre optique mais en tenant compte

2. GVD : group velocity dispersion.

3. TOD : third-order dispersion.

de la biréfringence. En premier lieu, nous rappelons les équations vectorielles décrivant la propagation des composantes orthogonales d'une lumière polarisée arbitrairement dans une fibre biréfringente monomode, ainsi que l'analyse de stabilité linéaire et la solution générale de l'équation linéarisée à partir d'une perturbation initiale. Puis nous nous consacrons à un calcul explicite de la forme d'une impulsion Gaussienne amplifiée par la MI. Enfin ces résultats sont comparés aux simulations numériques des équations vectorielles.

Le manuscrit de thèse se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Contexte et position du problème

L'objectif de ce chapitre est de rappeler brièvement les notions physiques et les outils essentiels aux études développées dans ce manuscrit. Dans un premier temps, nous représentons d'une façon simple la structure d'une fibre optique et de ses propriétés intrinsèques, ainsi que les effets linéaires et non linéaires pendant la propagation de l'onde optique dans la fibre. Dans un deuxième temps, nous cherchons à modéliser mathématiquement la propagation des impulsions courtes dans les fibres optiques monomodes et dans une cavité fibrée. Finalement, nous décrivons la méthode numérique que nous allons utiliser pour intégrer les modèles mathématiques de la fibre optique et de la cavité fibrée.

1.1 La fibre optique

1.1.1 Structure de la fibre optique

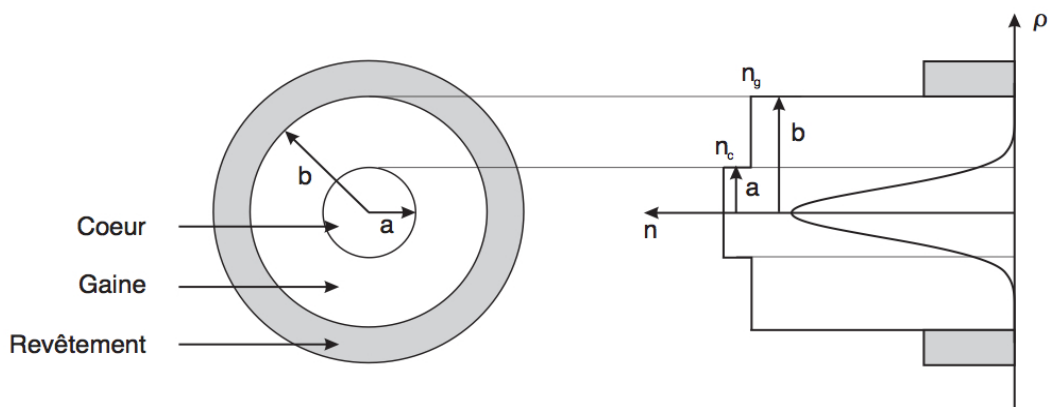


FIGURE 1.1: Schéma de la section transverse d'une fibre conventionnelle et de sa distribution d'indice. La figure de droite montre le profil du mode fondamental dans la fibre. (Extrait de [14])

La fibre optique est un guide d'onde qui exploite l'indice de réfraction du milieu. Parmi les nombreux types de fibre optique, la plus répandue est la fibre optique conventionnelle, elle est constituée d'une partie centrale (coeur) d'indice de réfraction n_c entourée d'une gaine dont l'indice de réfraction n_g est légèrement plus petit (voir figure 1.1). Le coeur, constitué d'un matériau diélectrique transparent, généralement de la silice dopée en oxyde de germanium GeO_2 et/ou de potassium P_2O_5 , a pour fonction de guider la lumière sur de longues distances. Le principe de base de ce guidage est basé sur la réflexion totale interne sur l'interface entre le coeur et la gaine qui permet de confiner la lumière à l'intérieur de la fibre. La fibre optique permet d'exacerber les effets non-linéaires grâce à l'utilisation d'un confinement transversal (grande puissance par unité de surface) sur de grandes longueurs de propagation (cumulation de l'effet non-linéaire sur une grande longueur) et elle présente des pertes optiques très faibles. Les paramètres (n_c , n_g , a et b) permettent à une fibre optique de supporter plusieurs modes de propagation de la lumière. Dans notre travail, nous nous restreignons au cas d'une fibre monomode. A part la fibre optique conventionnelle, une autre grande famille de fibres optiques est celle de la fibre optique micro-structurée qui possède une structure plus complexe que la fibre conventionnelle, l'avantage de travailler avec ce genre de fibre est que nous pouvons changer certaines caractéristiques de la fibre (par exemple, la dispersion chromatique, l'indice non linéaire...) en modifiant la structure de la fibre et/ou en ajoutant des matériaux spécifiques.

1.1.2 Les pertes linéaires

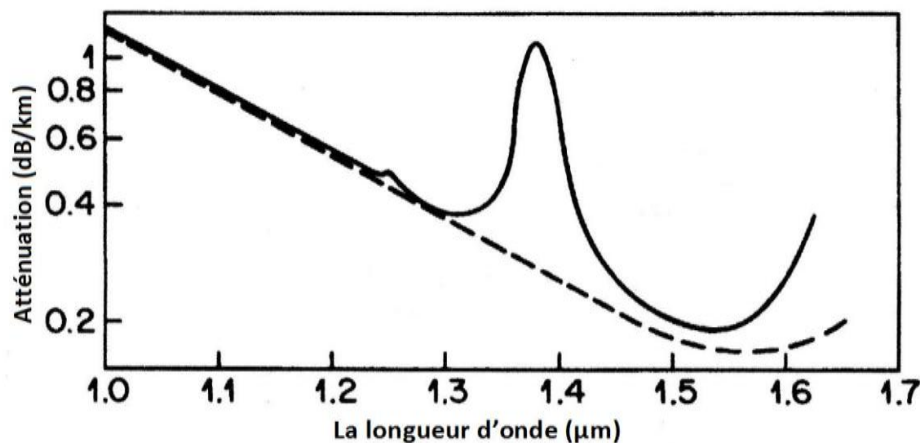


FIGURE 1.2: L'atténuation en fonction de la longueur d'onde d'une fibre conventionnelle monomode. La courbe en pointillé représente la contribution de la diffusion Rayleigh. (Extrait de [13])

Plusieurs facteurs contribuent aux atténuations du signal dans la fibre optique. Parmi ces facteurs, l'absorption des impuretés (OH^-), la diffusion de Rayleigh et la résonance IR constituent les plus significatifs [13]. Après la propagation sur une distance L dans la fibre optique, la puissance du signal à la sortie P_S est donné par

$$P_S = P_E \exp(-\alpha L)$$

où, P_E est la puissance du signal à l'entrée de la fibre et α est le coefficient de l'atténuation calculé à partir de tous les contributions. Par définition, l'atténuation α en dB/km s'exprime par :

$$\alpha_{dB} = -\frac{10}{L} \log\left(\frac{P_S}{P_E}\right)$$

La figure 1.2 illustre la courbe d'atténuation spectrale pour les fibres optiques à base de silice. Dans le domaine visible, l'atténuation peut atteindre des valeurs plus grand que 1 dB/km. En revanche, pour les longueurs d'onde comprises dans la région spectrale 1.3–1.6 μm , l'atténuation est beaucoup plus faible et passe par un minimum d'environ 0,2 dB/km autour de 1.55 μm , c'est pourquoi les longueurs d'onde dans cette zone sont utilisé en télécommunication optique. Cependant, l'atténuation présente un maximum local situé autour de 1.4 μm , causé par la présence d'ions OH^- .

1.1.3 La dispersion chromatique

Dans une fibre optique, la dispersion chromatique est la conséquence de la dépendance de l'indice de réfraction linéaire n de la fréquence, elle dépend non seulement des propriétés dispersives de la silice, mais aussi de la dispersion induite par la géométrie du guide, ainsi, chaque composante spectrale se propage avec une vitesse de phase spécifique telle que

$$v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{\beta(\omega)} \quad (1.1)$$

où $\beta(\omega)$ est la constante de propagation correspondant à la fréquence ω et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Lors de la propagation d'un paquet d'ondes, les différentes composantes spectrales se propagent avec des vitesses de phase différentes, ce qui induit un étalement temporel du paquet d'ondes durant sa propagation. Il convient alors de développer la constante de propagation $\beta(\omega)$ en série de Taylor autour de la fréquence centrale ω_0 du paquet d'ondes :

$$\beta(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (1.2)$$

avec

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (m = 1, 2, 3\dots) \quad (1.3)$$

Les limitations concernant ce formalisme sont discutées en référence [15], mais ne s'appliquent pas dans ce manuscrit. En particulier, nous avons $\beta_1 = 1/v_g$ avec v_g est la vitesse de groupe qui décrit la vitesse de l'enveloppe du paquet d'ondes, β_2 est le terme qui caractérise la dispersion de la vitesse de groupe (GVD), ce paramètre est responsable de l'élargissement temporel des paquets d'ondes. Par commodité, il est beaucoup plus fréquent de décrire la GVD par le coefficient de dispersion $D(\lambda)$ [13] :

$$D(\lambda) = \frac{-2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (\text{ps/nm} \cdot \text{km}) \quad (1.4)$$

Ce coefficient de dispersion permet d'obtenir rapidement le retard entre 2 impulsions de fréquences différentes. L'évolution de D en fonction de la longueur d'onde dans une fibre conventionnelle est représentée dans la figure 1.3, nous observons que D s'annule

(β_2 s'annule aussi) et change de signe au voisinage de $1.3 \mu\text{m}$, la longueur d'onde correspondant au zéro de la GVD est noté λ_D . Lorsque $\lambda < \lambda_D$ [$D(\lambda) < 0$, $\beta_2(\lambda) > 0$], les petites longueurs d'onde voyagent moins vite que les grandes longueurs d'onde, nous parlons de région de dispersion normale et pour $\lambda > \lambda_D$ [$D(\lambda) > 0$, $\beta_2(\lambda) < 0$], les petites longueurs d'onde voyagent plus vite que les grandes longueurs d'onde, nous parlons de région de dispersion anormale, notons que c'est la région dans la quelle l'instabilité modulationnelle (MI) a lieu dans la fibre optique non biréfringente. Pour travailler près du zéro de dispersion ($\beta_2 \sim 0$), nous devons aussi tenir compte des termes de dispersion d'ordre supérieur, qui ne sont plus négligeables. Dans ce manuscrit, nous limitons la dispersion à l'ordre trois (β_3) qui permet d'inclure la pente de la courbe de dispersion (TOD).

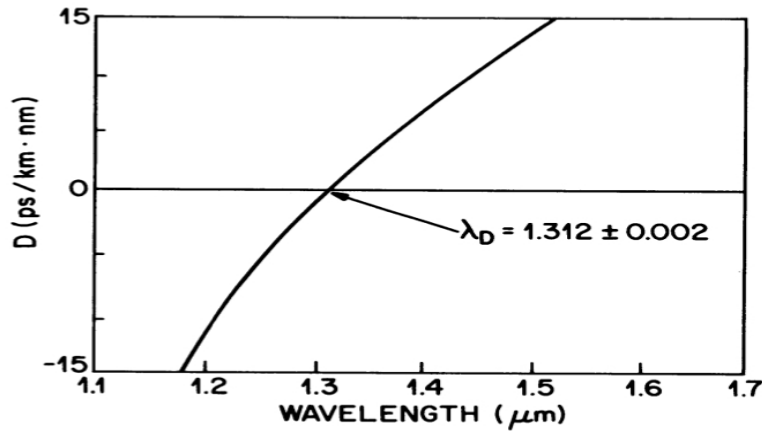


FIGURE 1.3: La variation de D mesurée en fonction de la longueur d'onde pour une fibre monomode. (Extrait de [13])

1.1.4 Les effets non linéaires dans les fibres optiques

Lorsque un champ optique intense se propage dans un milieu transparent, il est susceptible de modifier les propriétés de ce milieu, soit en déformant l'équilibre électronique de ses nuages d'électrons, soit en modifiant celui des atomes qui composent ses molécules. La susceptibilité du matériau devient alors dépendante du ou des champs en présence [16]. Par conséquent, la réponse du milieu par rapport aux champs incidents n'est plus linéaire et la polarisation \vec{P} possède maintenant une contribution linéaire et une autre contribution non linéaire. Le formalisme classique exprime le vecteur polarisation de la façon suivante :

$$\vec{P} = \vec{P}_L^{(1)} + \vec{P}_{NL}^{(2)} + \vec{P}_{NL}^{(3)} + \dots \quad (1.5)$$

où $\vec{P}_L^{(1)}$ désigne la polarisation linéaire, $\vec{P}_{NL}^{(2)}$ et $\vec{P}_{NL}^{(3)}$ désignent les polarisations non linéaires du second et du troisième ordres respectivement. En général, ces trois termes

sont définis comme [13, 17, 18, 19] :

$$\vec{P}_L^{(1)} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t - t_1) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t_1) dt_1 \quad (1.6)$$

$$\vec{P}_{NL}^{(2)} = \varepsilon_0 \iint_{-\infty}^t \chi^{(2)}(t - t_1, t - t_2) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.7)$$

$$\vec{P}_{NL}^{(3)} = \varepsilon_0 \iiint_{-\infty}^t \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (1.8)$$

où ε_0 est la permittivité du vide et $\chi^{(n)}$ est le tenseur de susceptibilité d'ordre n ; les symboles ":" et ":" désignent les produits tensoriels de première et deuxième espèces. La susceptibilité linéaire $\chi^{(1)}$ représente la réponse dominante du milieu diélectrique, elle est à l'origine de l'indice de réfraction linéaire et du coefficient d'atténuation linéaire. La susceptibilité d'ordre deux ($\chi^{(2)}$) est responsable des effets non linéaires tels que la génération de seconde harmonique et la conversion paramétrique de fréquences dans les milieux non centro-symétriques. Ce terme est généralement nul pour la silice comme tous les matériaux centro-symétriques, en raison de la symétrie d'inversion au niveau moléculaire. Par conséquent, les effets non linéaires à l'origine de la susceptibilité d'ordre deux sont absents dans la fibre optique, la contribution dominante de la polarisation non linéaire vient donc de la susceptibilité d'ordre trois $\chi^{(3)}$, qui est responsable des phénomènes tels que l'effet Kerr optique, les diffusions Brillouin et Raman stimulées, le mélange à quatre ondes ou l'instabilité modulationnelle [17]. Puisque les effets non linéaires liés aux susceptibilités d'ordre supérieur sont négligeables devant celui de la susceptibilité d'ordre trois $\chi^{(3)}$, nous pouvons écrire de nouveau la polarisation de la fibre optique, en supprimant les termes nuls et négligeables, telle que

$$\vec{P} = \vec{P}_L^{(1)} + \vec{P}_{NL}^{(3)} \quad (1.9)$$

1.1.4.1 L'effet Kerr optique

Sous l'effet d'un champ optique intense, l'indice de réfraction du milieu possède une dépendance de l'intensité du champ incident ; ce phénomène non linéaire est connu sous le nom de l'effet Kerr optique. Dans une fibre optique, il est considéré comme la réponse instantanée électronique des molécules de silice aux champs incidents. Dans le cas le plus simple, l'indice de réfraction s'écrit [13],

$$\tilde{n}(\omega, |E|^2) = n(\omega) + n_2 |E|^2$$

avec n_2 est l'indice de réfraction non linéaire qui est relié à la partie réelle de $\chi^{(3)}$ par

$$n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}[\chi_{xxxx}^{(3)}]$$

L'effet Kerr est élastique dans le sens où il n'y a pas d'énergie échangée entre le champ optique et le milieu diélectrique, il conduit à de nombreux phénomènes non-linéaires comme l'automodulation de phase, la modulation de phase croisés et le mélange à 4 ondes.

1.1.4.2 La diffusion Raman stimulée

Au contraire de l'effet Kerr, la diffusion Raman stimulée est un processus inélastique dans lequel les molécules de silice absorbent les photons de l'onde incidente et émettent des photons de fréquence plus basse (onde Stokes), le reste de l'énergie optique est transformée en vibration moléculaire du milieu sous forme de phonons optiques. Le diagramme d'énergie est représenté dans la figure 1.4 et la relation de conservation de l'énergie correspondante s'écrit :

$$\hbar\omega_{pompe} = \hbar\omega_{stokes} + E_{vibration}$$

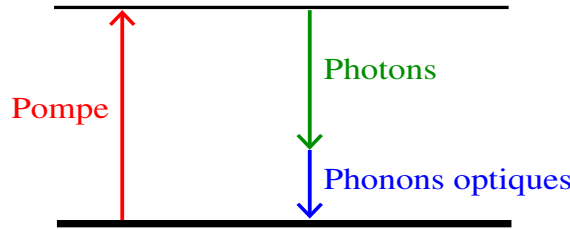


FIGURE 1.4: Diagramme d'énergie de la diffusion Raman stimulée.

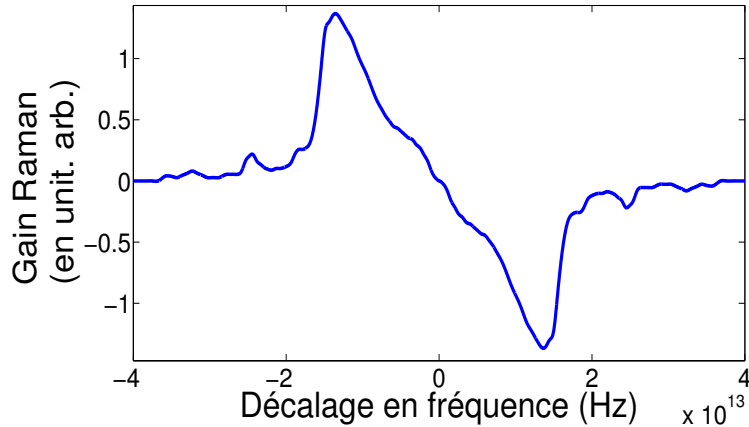


FIGURE 1.5: Allure du gain Raman en fonction du décalage de fréquence par rapport à la fréquence de pompe dans une fibre de silice.

L'effet Raman dépend de la partie imaginaire de $\chi^{(3)}$, elle est considérée comme la réponse des noyaux de la molécule de silice aux champs incidents, son temps de réponse est de l'ordre de 60–70 fs dans les fibres de silice [13, 20]. Ce temps de réponse se manifeste par une courbe de gain spectrale anti-symétrique par rapport à la fréquence de pompe. Nous observons un transfert d'énergie de pompe aux basses fréquences par rapport à la fréquence de pompe. Dans la silice, la bande des fréquences amplifiées s'étend jusqu'à 40 THz avec un maximum de gain à $\nu_m = -13.2$ THz de la fréquence de pompe (voir le domaine des fréquences négatives de la figure 1.5). Par conséquent, dès qu'une onde lumineuse de fréquence ν_0 , suffisamment intense se propage dans une fibre optique, une onde Stokes se développe autour de la fréquence $\nu_0 - \nu_m$ et croît

exponentiellement. La puissance de cette onde devient comparable à celle de la pompe (i.e. le processus devient stimulé) à partir de seuil [13]

$$P_{Raman}^{seuil} > \frac{16A_{\text{eff}}}{g_R L_{\text{eff}}}$$

avec A_{eff} est l'aire effective du mode de la fibre, nous allons détailler ce paramètre dans la section 1.1.5, g_R le gain Raman qui vaut environ $1 \times 10^{-13} \text{ m} \cdot \text{W}^{-1}$ pour une fibre en silice, $L_{\text{eff}} = [1 - \exp(-\alpha L)]/\alpha$ est la longueur effective et α est le coefficient de l'atténuation. Lorsque cette onde Stokes est elle-même suffisamment intense, elle joue alors le rôle de pompe secondaire, et stimule des ondes Stokes d'ordres supérieurs, successivement décalées en fréquence de la même quantité ν_m , on parle alors de cascade Raman. D'autre part, du côté des hautes fréquences (onde anti-Stokes) par rapport à la fréquence de pompe, l'effet Raman induit une bande d'absorption (voir le domaine des fréquences positives de la figure 1.5), en raison de la nature anti-symétrique de la susceptibilité Raman, qui transfère l'énergie des fréquences anti-Stokes sur la pompe [21].

1.1.4.3 La diffusion Brillouin stimulée

En plus de la diffusion Raman stimulée, il existe une autre diffusion connue sous le nom de la diffusion Brillouin stimulée, qui consiste en l'excitation synchrone de vibrations collectives acoustiques, onde hypersonore, qui forme un réseau de Bragg acoustique se déplaçant à la vitesse du son. Par réflexion sur ce réseau, une onde Stokes est rétrodiffusée et s'amplifie au cours de son trajet en sens inverse de la fibre. Le décalage en fréquence de cette onde par rapport à l'onde excitatrice est d'environ une dizaine de GHz et sa largeur spectrale intrinsèque à mi-hauteur est de l'ordre de 50 MHz dans la silice [22]. Comme la durée de vie du phonon acoustique est de l'ordre de 20 ns, nous pouvons négliger ce phénomène en régime picoseconde ou femtoseconde, la diffusion Brillouin stimulée ne sera pas prise en compte dans notre travail.

1.1.5 L'équation de Schrödinger non linéaire généralisée

Cette section consiste à établir l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée (GNLSE) qui décrit la propagation des impulsions courtes dans une fibre optique monomode dans laquelle le spectre de l'impulsion est assez large pour tenir compte de la TOD et de l'effet Raman. Notre point de départ est l'équation de propagation des ondes sous forme vectorielle [13, 23] obtenue à partir des équations de Maxwell que nous ne rappelons pas ici,

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

avec $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est le vecteur champ électrique, $\vec{P}(\vec{r}, t)$ est le vecteur polarisation du milieu, ∇^2 est l'opérateur laplacien, μ_0 est la perméabilité du vide et $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ est la vitesse de la lumière dans le vide. Comme nous avons déjà vu dans l'équation (1.9), la polarisation dans la fibre possède des contributions linéaire et non linéaire,

l'équation (1.10) peut être développée comme suit :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L^{(1)}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Avant tout, plusieurs approximations sont nécessaires et il est important d'en avoir connaissance. La première est que la polarisation non linéaire doit être traitée comme une perturbation de la polarisation linéaire, cette approximation est valable pour les fibres optiques qui sont faiblement non linéaires même à très haute puissance. Deuxièmement, le champ optique est supposé maintenir sa polarisation le long de l'axe de propagation de la fibre et, troisièmement, le champ électrique est quasi-monochromatique, c'est à dire que le spectre de l'impulsion centré à ω_0 doit posséder une largeur spectral $\Delta\omega$ satisfaisant $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, ce qui est vérifié pour des ondes continues ou pour des impulsions de durée supérieure à la picoseconde. Dans notre analyse, nous adoptons l'approximation de l'enveloppe lentement variable ce qui permet de séparer la partie lentement variable et la partie rapidement variable du champ électrique en l'écrivant sous la forme suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{x} [E(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.12)$$

où nous avons supposé que le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est polarisé suivant l'axe unitaire \vec{x} , $E(\vec{r}, t)$ représente une fonction lentement variable de t , $c.c.$ dénote le complexe conjugué, ω_0 est la pulsation centrale de l'impulsion. De la même façon, nous pouvons écrire $\vec{P}_L^{(1)}(\vec{r}, t)$ et $\vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t)$ sous la forme similaire

$$\vec{P}_L^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{x} [P_L^{(1)}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.13)$$

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{x} [P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.14)$$

A partir des expressions (1.12-1.14), nous pouvons calculer la dérivé seconde de $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{P}_L^{(1)}(\vec{r}, t)$ et $\vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t)$ par rapport à t telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \vec{x} \left\{ \left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} - \omega_0^2 E \right] e^{-i\omega_0 t} + c.c. \right\} \\ \frac{\partial^2 \vec{P}_L^{(1)}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \vec{x} \left\{ \left[\frac{\partial^2 P_L^{(1)}}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial P_L^{(1)}}{\partial t} - \omega_0^2 P_L^{(1)} \right] e^{-i\omega_0 t} + c.c. \right\} \\ \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \vec{x} \left\{ \left[\frac{\partial^2 P_{NL}^{(3)}}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial P_{NL}^{(3)}}{\partial t} - \omega_0^2 P_{NL}^{(3)} \right] e^{-i\omega_0 t} + c.c. \right\} \end{aligned}$$

Nous remplaçons ces expressions et la relation (1.12) dans l'équation (1.11). Puisque tous les termes de l'équation (1.11) sont alignés sur \vec{x} , nous pouvons simplifier le vecteur unitaire \vec{x} et le facteur commun $1/2$, une forme scalaire de l'équation (1.11) est obtenue :

$$\begin{aligned} \left[\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} - \omega_0^2 E \right) - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 P_L^{(1)}}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial P_L^{(1)}}{\partial t} - \omega_0^2 P_L^{(1)} \right) \right. \\ \left. - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 P_{NL}^{(3)}}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial P_{NL}^{(3)}}{\partial t} - \omega_0^2 P_{NL}^{(3)} \right) \right] e^{-i\omega_0 t} + [c.c.] e^{i\omega_0 t} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

La première partie de l'équation (1.15) oscille en ω_0 et la seconde partie est la complexe conjuguée de la première, elle oscille donc en $-\omega_0$, les termes qui oscillent en deux fréquences différentes ne peuvent pas s'annuler entre eux, donc nous pouvons séparer l'équation (1.15) en une première équation qui ne contient que les termes oscillants en ω_0 et une deuxième équation qui est le complexe conjugué de la première. Dans la suite de notre analyse, nous nous intéressons uniquement aux termes qui oscillent en ω_0 telle que

$$\begin{aligned} \nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial E}{\partial t} - \omega_0^2 E \right) - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 P_L^{(1)}}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial P_L^{(1)}}{\partial t} - \omega_0^2 P_L^{(1)} \right) \\ - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 P_{NL}^{(3)}}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial P_{NL}^{(3)}}{\partial t} - \omega_0^2 P_{NL}^{(3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ensuite, nous transformons l'équation (1.16) dans l'espace de Fourier en utilisant la définition de la transformée de Fourier ci-dessous

$$\tilde{B}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \text{TF}[B(\vec{r}, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} B(\vec{r}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (1.17)$$

$$\text{TF}\left[\frac{\partial^n B(\vec{r}, t)}{\partial t^n}\right] = [-i(\omega - \omega_0)]^n \tilde{B}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \quad (1.18)$$

A partir de ces définitions, nous avons

$$\text{TF}\left[\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial B}{\partial t} - \omega_0^2 B\right] = -\omega^2 \tilde{B}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \quad (1.19)$$

où B représente E , $P_L^{(1)}$ et $P_{NL}^{(3)}$. En utilisant les relations (1.17) et (1.19), nous pouvons enfin écrire l'équation (1.16) dans l'espace de Fourier telle que

$$(\nabla^2 + k_0^2) \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) + \mu_0 \omega^2 \tilde{P}_L^{(1)}(\vec{r}, \omega - \omega_0) + \mu_0 \omega^2 \tilde{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = 0 \quad (1.20)$$

avec $k_0 = \omega/c$. Dans la suite, nous cherchons à exprimer la polarisation linéaire et non linéaire dans l'espace de Fourier $\tilde{P}_L^{(1)}(\vec{r}, \omega - \omega_0)$ et $\tilde{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, \omega - \omega_0)$ en utilisant les définitions (1.6) et (1.8).

1.1.5.1 La transformée de Fourier de la polarisation linéaire

D'une manière générale, nous pouvons décomposer le vecteur polarisation linéaire [expression (1.6)] dans un repère cartésien en utilisant les composantes de la susceptibilité linéaire $\chi^{(1)}(t - t_1)$ et du champ électrique \vec{E} . En nous appuyant sur les définitions dans [21, 24, 25], nous écrivons

$$\vec{P}_L^{(1)} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \left[\sum_i^{x,y,z} \sum_j^{x,y,z} \chi_{ij}^{(1)}(t - t_1) E_j(\vec{r}, t_1) \vec{i} \right] dt_1 \quad (1.21)$$

avec $E_i(\vec{r}, t_1)$ représente la composante de $\vec{E}(\vec{r}, t_1)$ sur l'axe \vec{i} . Puisque le champ électrique est polarisé uniquement selon l'axe \vec{x} , la seule composante de susceptibilité

linéaire $\chi^{(1)}(t - t_1)$ qui intervient dans le calcul est $\chi_{xx}^{(1)}(t - t_1)$, l'équation (1.21) est simplifié à la forme suivante

$$\vec{P}_L^{(1)} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_1) dt_1 \quad (1.22)$$

En remplaçant les relations (1.12) et (1.13) dans l'équation (1.22), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \vec{x} [P_L^{(1)}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] = \frac{\varepsilon_0 \vec{x}}{2} \int_{-\infty}^t \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) [E(\vec{r}, t_1) e^{-i\omega_0 t_1} + c.c.] dt_1$$

Par identification, l'équation précédente peut être divisée en deux équations, une contient tous termes oscillants en ω_0 et l'autre contient tous termes oscillants en $-\omega_0$, nous ne considérons que ceux oscillants en ω_0 , en simplifiant le vecteur unitaire \vec{x} et le facteur commun $1/2$, la polarisation linéaire s'écrit

$$P_L^{(1)}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) E(\vec{r}, t_1) e^{i\omega_0(t-t_1)} dt_1 \quad (1.23)$$

L'intégrale dans l'équation (1.23) s'annule dans l'intervalle de $[t, \infty]$ pour une raison de causalité, nous pouvons donc étendre la borne de cette intégrale jusqu'à l'infini :

$$P_L^{(1)}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) E(\vec{r}, t_1) e^{i\omega_0(t-t_1)} dt_1 \quad (1.24)$$

or la transformée de Fourier inverse du champ s'écrit :

$$E(\vec{r}, t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t_1} d\omega \quad (1.25)$$

En remplaçant $E(\vec{r}, t_1)$ par la relation (1.25) dans l'équation (1.24), nous mettons tous les termes indépendant de t_1 en dehors de l'intégral par rapport à t_1 , la polarisation linéaire prend la forme suivante

$$P_L^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) e^{i\omega_0 t} \left[\int_{t_1=-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 \right] d\omega \quad (1.26)$$

Selon les propriétés de la transformée de Fourier, nous avons aussi la relation suivante

$$\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t - t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 \quad (1.27)$$

En substituant la relation (1.27) dans l'équation (1.26), la polarisation linéaire s'écrit

$$P_L^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \quad (1.28)$$

D'après la définition de la transformée de Fourier, $P_L^{(1)}(\vec{r}, t)$ s'exprime comme

$$P_L^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_L^{(1)}(\vec{r}, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega$$

Par identification, nous trouvons la transformée de Fourier de la polarisation linéaire suivante

$$\tilde{P}_L^{(1)}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \quad (1.29)$$

1.1.5.2 La transformée de Fourier de la polarisation non linéaire

Quant à la polarisation non linéaire, nous avons déjà montré que la polarisation non linéaire d'ordre trois est dominante dans la fibre optique (section 1.1.4), son expression est donnée par l'équation (1.8). Dans un premier temps, nous constatons que la plus grande difficulté d'analyse de cette polarisation non linéaire vient de la susceptibilité $\chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3)$ et du produit tensoriel. Néanmoins, en tenant compte de la structure spéciale de la molécule de silice et les hypothèses du départ, nous pouvons simplifier les calculs. Tout d'abord, nous écrivons $\chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3)$ sous la forme [13, 21, 26] :

$$\chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi^{(3)} R(t - t_1) \delta(t_1 - t_2) \delta(t - t_3) \quad (1.30)$$

où $\chi^{(3)}$ est indépendant du temps, $\delta(t)$ est la fonction de Dirac et $R(t)$ est la fonction normalisée de la réponse non linéaire du milieu avec $\int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt = 1$, notant que $R(t)$ doit être égale à zéro pour t négatif en raison de la causalité, nous avons donc $\int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt = 1$. Dans la silice, $\chi^{(3)}$ s'écrit de la forme suivante [13, 25]

$$\chi^{(3)} = \chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \chi_{xyxy}^{(3)} \delta_{ik} \delta_{jl} + \chi_{xyyx}^{(3)} \delta_{il} \delta_{jk}$$

et le produit tensoriel de deuxième espèce entre la susceptibilité d'ordre trois et le champ électrique s'écrit comme [13, 21, 25]

$$\begin{aligned} \chi^{(3)} : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) &= \sum_i \sum_j^{x,y,z} [\chi_{xxyy}^{(3)} E_i(\vec{r}, t_1) E_j(\vec{r}, t_2) E_j(\vec{r}, t_3) \\ &+ \chi_{xyxy}^{(3)} E_j(\vec{r}, t_1) E_i(\vec{r}, t_2) E_j(\vec{r}, t_3) + \chi_{xyyx}^{(3)} E_j(\vec{r}, t_1) E_j(\vec{r}, t_2) E_i(\vec{r}, t_3)] \vec{i} \end{aligned} \quad (1.31)$$

avec $E_i(\vec{r}, t)$ représente la composante de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ sur l'axe \vec{i} . Puisque nous avons supposé que le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est polarisé selon l'axe \vec{x} , la plupart des termes de l'expression (1.31) s'annulent dans notre cas et le produit tensoriel s'écrit sous une forme plus simple

$$\begin{aligned} \chi^{(3)} : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) \\ = [\chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)}] E_x(\vec{r}, t_1) E_x(\vec{r}, t_2) E_x(\vec{r}, t_3) \vec{x} \end{aligned} \quad (1.32)$$

or la silice est un milieu isotrope, nous avons aussi l'égalité suivante [13, 21, 25]

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)} \quad (1.33)$$

En remplaçant $E_x(\vec{r}, t_1) E_x(\vec{r}, t_2) E_x(\vec{r}, t_3) \vec{x}$ par $\vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3)$ et la relation (1.33) dans l'expression (1.32), le produit tensoriel de deuxième espèce est transformé en un produit standard telle que

$$\chi^{(3)} : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) = \chi_{xxxx}^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) \quad (1.34)$$

Maintenant nous remplaçons les relations (1.30) et (1.34) dans l'expression de la polarisation non linéaire [Equation (1.8)], puisque la composante de la susceptibilité d'ordre

trois $\chi_{xxxx}^{(3)}$ est indépendant du temps, elle n'intervient pas dans le calcul de l'intégrale. Nous obtenons :

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} \int_{-\infty}^t R(t - t_1) \vec{E}^2(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t) dt_1 \quad (1.35)$$

En remplaçant le champ électrique par son expression (1.12), nous développons le terme $\vec{E}^2(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t)$ comme

$$\begin{aligned} & \vec{E}^2(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{\vec{x}}{8} [2|E(\vec{r}, t_1)|^2 E(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + E^2(\vec{r}, t_1) E^*(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0(2t_1-t)} + \dots + c.c.] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Dans la fibre, la réponse de l'effet Raman est extrêmement rapide ($t_1 \approx t$), nous pouvons donc faire l'approximation suivante

$$E^2(\vec{r}, t_1) E^*(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0(2t_1-t)} \approx |E(\vec{r}, t_1)|^2 E(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t}$$

En tenant compte de cette approximation, le développement (1.36) peut être simplifié,

$$\vec{E}^2(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{3}{8} \vec{x} [|E(\vec{r}, t_1)|^2 E(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.37)$$

où nous avons aussi négligé les termes rapides oscillants à la fréquence de la troisième harmonique $3\omega_0$, car les termes en $3\omega_0$ nécessitent un accord de phase et ils sont en général négligeables dans la fibre optique [13]. En remplaçant les relations (1.14) et (1.37) dans l'équation (1.35), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} \vec{x} [P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \\ &= \frac{3}{8} \vec{x} \varepsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} \int_{-\infty}^t R(t - t_1) [|E(\vec{r}, t_1)|^2 E(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] dt_1 \end{aligned}$$

Par identification nous obtenons l'expression de $P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t)$ qui après le changement de variable $t' = t - t_1$, prend la forme suivante

$$P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} E(\vec{r}, t) \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt'$$

où nous définissons une constante diélectrique non linéaire comme

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt' \quad (1.38)$$

et la nouvelle forme de la polarisation non linéaire s'écrit

$$P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\vec{r}, t)$$

Dans cette approche, ε_{NL} est traitée comme une constante au cours de la dérivation de l'équation de propagation. Ceci est justifié par l'approximation de l'enveloppe lentement variable et la nature perturbatrice de $P_{NL}^{(3)}$ par rapport à la polarisation linéaire. La transformée de Fourier de $P_{NL}^{(3)}$ s'écrit donc

$$\tilde{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \quad (1.39)$$

1.1.5.3 La constante diélectrique

Dans les analyses précédentes, nous avons réussi d'exprimer la polarisation linéaire et la polarisation non linéaire dans l'espace de Fourier en remplaçant leurs expressions (1.29) et (1.39) dans l'équation (1.20), nous obtenons une équation qui ne contient que $\tilde{E}(r, \omega - \omega_0)$ telle que

$$\nabla^2 \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) + \varepsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = 0 \quad (1.40)$$

avec $\varepsilon(\omega)$ la constante diélectrique (ou la permittivité relative) du milieu définie par :

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL} \quad (1.41)$$

Les parties réelle et imaginaire de $\varepsilon(\omega)$ sont liés respectivement à l'indice de réfraction $\tilde{n}(\omega)$ et au coefficient d'absorption en puissance $\tilde{\alpha}(\omega)$. Par définition, nous avons [13]

$$\varepsilon(\omega) = [\tilde{n}(\omega) + \frac{i\tilde{\alpha}(\omega)c}{2\omega}]^2 \quad (1.42)$$

ici c'est utile d'introduire l'indice de réfraction total $\tilde{n}(\omega)$ et le coefficient d'absorption total $\tilde{\alpha}(\omega)$ de la fibre qui sont définis comme

$$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + n_2(\omega) \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt' \quad (1.43)$$

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha(\omega) + \alpha_2(\omega) \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt' \quad (1.44)$$

où $n(\omega)$ et $\alpha(\omega)$ représentent l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption linéaire, $n_2(\omega)$ et $\alpha_2(\omega)$ représentent l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption non linéaire qui dépendent de l'intensité de l'onde incidente, et nous avons $n(\omega) \gg n_2(\omega)$ et $\alpha(\omega) \gg \alpha_2(\omega)$; en général, la partie imaginaire de $\varepsilon(\omega)$ est petite devant sa partie réelle à cause des faibles pertes optiques de la fibre dans la région des longueurs d'onde considérées. En tenant compte de ces conditions, nous développons l'expression (1.42) de la façon suivante

$$\varepsilon(\omega) \approx n(\omega)^2 + 2n_2(\omega)n(\omega) \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt' + \frac{in(\omega)\tilde{\alpha}(\omega)c}{\omega} \quad (1.45)$$

En comparant l'équation précédente à l'équation (1.41), et en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, nous trouvons

$$1 + \text{Re}[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)] + \text{Re}[\varepsilon_{NL}] = n(\omega)^2 + 2n_2(\omega)n(\omega) \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt' \quad (1.46)$$

$$\text{Im}[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)] + \text{Im}[\varepsilon_{NL}] = \frac{n(\omega)\tilde{\alpha}(\omega)c}{\omega} \quad (1.47)$$

A partir de l'équation (1.46) et l'expression de ε_{NL} [équation (1.38)], nous déduisons les expressions de $n(\omega)$ et $n_2(\omega)$ en tenant compte de la condition $\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \ll 1$ telle que

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \text{Re}[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)]} \approx 1 + \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)]$$

$$n_2(\omega) = \frac{3 \text{Re}[\chi_{xxxx}^{(3)}]}{8 n(\omega)}$$

A partir de l'équation (1.47), l'expression de ε_{NL} [équation (1.38)] et la définition de $\tilde{\alpha}(\omega)$ [équation (1.44)], nous déduisons l'expression de $\alpha(\omega)$ et $\alpha_2(\omega)$ telle que

$$\alpha(\omega) = \frac{\text{Im}[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)]\omega}{n(\omega)c}$$

$$\alpha_2(\omega) = \frac{3\omega}{4cn(\omega)} \text{Im}[\chi_{xxxx}^{(3)}]$$

Puisque $\alpha_2(\omega)$ est relativement petit devant les pertes linéaires [$\alpha(\omega)$] dans la fibre de silice, il est ignoré dans notre calcul et nous avons

$$\tilde{\alpha}(\omega) \approx \alpha(\omega)$$

1.1.5.4 La méthode de séparation des variables

Maintenant nous cherchons à résoudre l'équation de propagation dans l'espace de Fourier [équation (1.40)] par la méthode de séparation de variable. D'abord, nous posons la solution sous la forme :

$$\tilde{E}(r, \omega - \omega_0) = F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z} \quad (1.48)$$

avec $F(x, y)$ représente la distribution transverse du champ électrique, et $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ représente l'enveloppe lentement variable du champ électrique dans l'espace de Fourier. En remplaçant la solution (1.48) dans l'équation (1.40), nous multiplions cette équation par le terme $1/[F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z}]$, l'équation (1.40) devient

$$\frac{1}{F(x, y)} \left[\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right] + \varepsilon(\omega)k_0^2 = -\frac{2i\beta_0}{\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)} \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} + \beta_0^2 \quad (1.49)$$

Puisque $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ est une fonction lentement variable de z , nous avons négligé le terme $\partial^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)/\partial z^2$ dans l'équation (1.49). Les termes de gauche et de droite de l'équation (1.49) dépendent de variables différentes et indépendantes, par conséquent, ils ne peuvent être égaux que si elles sont égales à une constante $\tilde{\beta}^2$. Cela nous permet de séparer l'équation (1.49) en deux équations qui décrivent l'évolution de la distribution transverse du champ électrique $F(x, y)$ et l'enveloppe lentement variable du champ électrique $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2]F(x, y) = 0 \quad (1.50)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0 \quad (1.51)$$

Dans l'équation (1.50), nous pouvons écrire $\varepsilon(\omega)$ comme suit :

$$\varepsilon(\omega) = [n(\omega) + \Delta n(\omega)]^2 \approx n(\omega)^2 + 2n(\omega)\Delta n(\omega)$$

Cette approximation est généralement valable car $\Delta n(\omega)$ représente une faible quantité perturbative devant $n(\omega)$. Selon l'équation (1.45), $\Delta n(\omega)$ s'écrit

$$\Delta n(\omega) = n_2(\omega) \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt' + \frac{i\tilde{\alpha}(\omega)}{2k_0} \quad (1.52)$$

où nous avons inclus la réponse non linéaire du milieu. A partir de l'expression (1.48), nous pouvons déduire le champ électrique :

$$E(\vec{r}, t) = F(x, y)A(z, t)e^{i\beta_0 z} \quad (1.53)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{x}[F(x, y)A(z, t)e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c.] \quad (1.54)$$

En substituant la nouvelle expression de $E(\vec{r}, t)$ [équation (1.53)] dans l'équation (1.52), nous pouvons exprimer $\Delta n(\omega)$ en fonction de $F(x, y)$ et $A(z, t)$,

$$\Delta n(\omega) = n_2(\omega)|F(x, y)|^2 \int_0^\infty R(t')|A(z, t-t')|^2 dt' + \frac{i\tilde{\alpha}(\omega)}{2k_0} \quad (1.55)$$

En revenant à l'équation (1.50), nous pouvons la résoudre par une méthode perturbative et où nous nous arrêtons à l'ordre le plus bas [27]. Dans un premier temps, nous ne tenons pas compte de la non linéarité et nous remplaçons $\varepsilon(\omega)$ par $n(\omega)^2$ dans l'équation (1.50) telle que

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = -[n(\omega)^2 k_0^2 - \beta^2]F(x, y) \quad (1.56)$$

en résolvant l'équation (1.56), nous obtenons la distribution modal linéaire $F(x, y)$ et le nombre d'onde linéaire $\beta(\omega)$. Ensuite, nous tenons compte de la non linéarité $\Delta n(\omega)$, puisque nous avons restreint le calcul au cas d'une fibre monomode, $\Delta n(\omega)$ n'affecte pas $F(x, y)$ et elle correspond à la distribution transverse du mode fondamental dans la fibre. Quant à la constante diélectrique, nous remplaçons $\varepsilon(\omega)$ par $n(\omega)^2 + 2n(\omega)\Delta n(\omega)$ dans l'équation (1.50) telle que

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + [n(\omega)^2 k_0^2 + 2n(\omega)\Delta n(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2]F(x, y) = 0 \quad (1.57)$$

Nous multiplions l'équation (1.57) par $F^*(x, y)$, ensuite nous l'intégrons par rapport à x et y :

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} F^* \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] dx dy \\ & + \iint_{-\infty}^{\infty} [n(\omega)^2 k_0^2 + 2n(\omega)\Delta n(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2] |F|^2 dx dy = 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

De l'équation (1.56), nous pouvons remplacer $\partial^2 F/\partial x^2 + \partial^2 F/\partial y^2$ par $-[n(\omega)^2 k_0^2 - \beta^2]F$ et substituons dans l'équation (1.58), nous obtenons alors

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \beta^2 |F|^2 dx dy + \iint_{-\infty}^{\infty} [2n(\omega)\Delta n(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2] |F|^2 dx dy = 0$$

L'équation précédente nous permet d'exprimer la différence entre $\tilde{\beta}^2$ et β^2 sous la forme suivante

$$\tilde{\beta}^2 - \beta^2 = \frac{2n(\omega)k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta n(\omega) |F|^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy} \quad (1.59)$$

Dans ce calcul, $\tilde{\beta}(\omega)$ est le nombre d'onde total, il est obtenu comme une somme entre le nombre d'onde linéaire $\beta(\omega)$ et une petite correction $\Delta\beta(\omega)$ induite par la perturbation non linéaire $\Delta n(\omega)$ telle que

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) \quad (1.60)$$

$$\tilde{\beta}^2 - \beta^2 \approx 2\beta\Delta\beta(\omega) \quad (1.61)$$

En identifiant les termes des équations (1.59) et (1.61), $\Delta\beta(\omega)$ est exprimée par

$$\Delta\beta(\omega) = \frac{n(\omega)k_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta n(\omega) |F|^2 dx dy}{\beta \iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy} \quad (1.62)$$

où $k_0 = \omega/c$. Nous remplaçons la relation (1.55) dans l'équation (1.62) et posons $\beta(\omega) \approx n(\omega)\omega/c$, l'expression de $\Delta\beta(\omega)$ est réécrite sous la forme suivante

$$\Delta\beta(\omega) = \gamma(\omega) \int_0^{\infty} R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' + \frac{i\alpha(\omega)}{2} \quad (1.63)$$

où nous avons remplacé $\tilde{\alpha}(\omega)$ par $\alpha(\omega)$ et le coefficient non linéaire $\gamma(\omega)$ est défini par

$$\gamma(\omega) = \frac{n_2(\omega)\omega \iint_{-\infty}^{\infty} |F|^4 dx dy}{c \iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy} \quad (1.64)$$

Quant à l'équation qui décrit l'évolution de $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ [équation (1.51)], nous faisons l'approximation $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$ et remplacer $\tilde{\beta}$ par la relation (1.60), l'équation (1.51) devient

$$\frac{\partial \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} - i[\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0] \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0 \quad (1.65)$$

Puisque la forme exacte de fonction $\beta(\omega)$ est rarement connue, nous développons $\beta(\omega)$ en séries de Taylor autour de la fréquence centrale ω_0 telle que

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 + \dots \quad (1.66)$$

avec $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ et où les coefficients sont définis par

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Les termes d'ordre supérieur à 2 de l'équation (1.66) sont souvent négligeables en raison de leurs faibles valeurs. Mais dans les cas spécifiques, par exemple pour les fréquences proche de zéro dispersion de la vitesse de groupe ($\beta_2 \approx 0$), leur inclusion est indispensable pour faire une analyse complète de la fibre. Dans ce manuscrit, le développement est restreint à l'ordre 3 pour $\beta(\omega)$. Un développement similaire a été effectué pour $\Delta\beta(\omega)$, mais nous ne retenons que les deux premiers termes telle que

$$\Delta\beta(\omega) \approx \Delta\beta_0 + (\omega - \omega_0)\Delta\beta_1 \quad (1.67)$$

avec

$$\Delta\beta_0 = \Delta\beta(\omega_0), \quad \Delta\beta_1 = \left(\frac{d\Delta\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}$$

En utilisant l'expression (1.63) et (1.67), nous pouvons identifier les termes dans le développement de Taylor de $\Delta\beta(\omega)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \Delta\beta_0 &= \gamma_0 \int_0^\infty R(t') |A(z, t-t')|^2 dt' + \frac{i\alpha_0}{2} \\ \Delta\beta_1 &= \gamma_1 \int_0^\infty R(t') |A(z, t-t')|^2 dt' + \frac{i\alpha_1}{2} \end{aligned} \quad (1.68)$$

où $\gamma(\omega)$ et $\alpha(\omega)$ sont aussi exprimés sous forme du développement de Taylor autour de ω_0 :

$$\gamma(\omega) \approx \gamma_0 + \gamma_1(\omega - \omega_0), \quad \gamma_0 = \gamma(\omega_0), \quad \gamma_1 = \left(\frac{d\gamma}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (1.69)$$

$$\alpha(\omega) \approx \alpha_0 + \alpha_1(\omega - \omega_0), \quad \alpha_0 = \alpha(\omega_0), \quad \alpha_1 = \left(\frac{d\alpha}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (1.70)$$

Maintenant nous remplaçons les relations (1.66) et (1.67) dans l'équation (1.65), l'équation de propagation de \tilde{A} devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} - i[(\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3\beta_3 \\ + \Delta\beta_0 + (\omega - \omega_0)\Delta\beta_1] \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

1.1.5.5 L'équation non linéaire de Schrödinger généralisée (GNLSE)

Dans la suite de notre étude, nous nous intéressons à l'évolution temporelle de l'amplitude lentement variable $A(z, t)$ du champ électrique décrite par l'équation (1.71). Pour cela, il suffit d'appliquer l'opération de transformée de Fourier inverse définie par l'expression (1.25) dont $\omega - \omega_0$ est remplacé par l'opérateur différentiel $i\partial/\partial t$. Nous obtenons une équation qui décrit l'évolution de $A(z, t)$ suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - i\Delta\beta_0 A + \Delta\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

En insérant les expressions (1.68) dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \\ - i(\gamma_0 + i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial t}) [A \int_0^\infty R(t') |A(\vec{r}, t-t')|^2 dt'] + \frac{1}{2}(\alpha_0 + i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}) A = 0 \end{aligned} \quad (1.72)$$

où l'amplitude de l'enveloppe du champs électrique A est exprimée en unité de champ électrique (Volt/mètre), pour des raisons pratiques, il est courant de normaliser A tel que $|A|^2$ représente la puissance optique (W). Pour cela, nous introduisons A' telle que $|A'|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n c A_m |A|^2$ avec $A_m = \iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy$ représente l'aire du mode considéré.

Il est facile de vérifier que A' satisfait également l'équation (1.72) à condition que le coefficient non linéaire $\gamma(\omega)$ est redéfini par (voir l'annexe A)

$$\gamma(\omega) = \frac{\omega \bar{n}_2}{c A_{\text{eff}}}, \quad \bar{n}_2 = \frac{2n_2}{\varepsilon_0 n c} \quad (1.73)$$

et l'aire effective du mode de la fibre est introduite en tant que

$$A_{\text{eff}} = \frac{(\iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy)^2}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F|^4 dx dy}$$

La quantité \bar{n}_2 est parfois appelée le coefficient Kerr non linéaire et possède l'unité m^2/W , par conséquent, l'unité de $\gamma(\omega)$ est W^{-1}/m . Selon le développement de Taylor de $\gamma(\omega)$ autour de ω_0 [équation (1.69)] et la nouvelle définition de $\gamma(\omega)$ [équation (1.73)], le terme γ_1 de l'équation (1.72) inclut automatiquement la dépendance en fréquence de \bar{n}_2 et A_{eff} , ici, c'est important de noter que le rapport γ_1/γ_0 est composé des trois termes suivants

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\bar{n}_2} \left(\frac{d\bar{n}_2}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} - \frac{1}{A_{\text{eff}}} \left(\frac{dA_{\text{eff}}}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}$$

Le premier terme provient de la contribution dominante, mais la seconde et troisième termes deviennent importants pour des largeurs spectrales supérieures à 100 THz. Si l'élargissement spectral est limité à 20 THz ou moins, on peut se contenter de $\gamma_1 \approx \gamma_0/\omega_0$.

La fonction représentant la réponse non linéaire $R(t)$ devrait inclure à la fois les contributions électroniques et nucléaires. En supposant que la contribution électronique est presque instantanée, $R(t)$ peut s'écrire comme [13, 21, 26]

$$R(t) = (1 - f_{\text{R}})\delta(t) + f_{\text{R}}h_{\text{R}}(t)$$

où f_{R} représente la contribution fractionnaire de la réponse tardive Raman dans la polarisation non linéaire. La forme de la fonction de la réponse Raman h_{R} est déterminée par des vibrations des molécules de la silice induites par le champ optique. En général, il n'est pas facile de calculer h_{R} en raison de la nature amorphe des fibres de silice, mais avec une approche expérimentale indirecte, nous pouvons relier la partie imaginaire de la transformée de Fourier de h_{R} au spectre du gain Raman de la façon suivante [13]

$$g_{\text{R}}(\Delta\omega) = \frac{f_{\text{R}}\omega_0}{cn(\omega_0)} \chi_{xxxx}^{(3)} \text{Im}[\tilde{h}_{\text{R}}(\Delta\omega)]$$

où $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\tilde{h}_{\text{R}}(\Delta\omega)$ est la transformée de Fourier de h_{R} . La figure 1.6 montre (a) le spectre du gain Raman mesurée expérimentalement et (b) la forme temporelle de h_{R} déduite à partir de (a). En plus de l'approche expérimentale discuté ci-dessus, la détermination d'une forme analytique approchée de la fonction de la réponse Raman est aussi introduite dans quelques travaux.

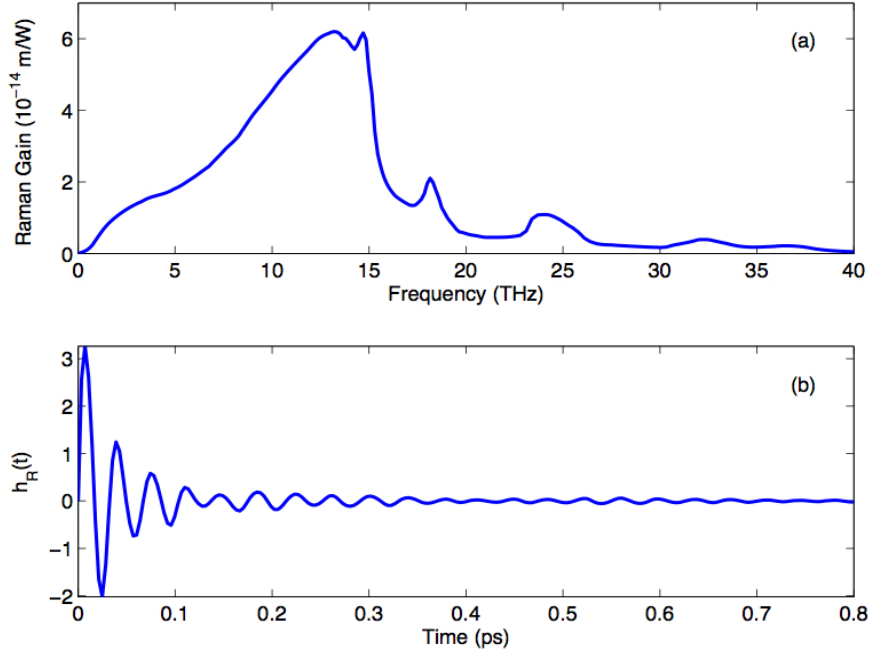


FIGURE 1.6: (a) Le spectre de gain de Raman pour la fibre de silice; (b) Forme temporelle de la fonction de réponse Raman déduite à partir des données du gain (Extrait de [13]).

Pour les impulsions assez larges qui peuvent contenir de nombreux cycles optiques (largeur d'impulsion > 0.1 ps), nous pouvons simplifier l'équation (1.72) en posant $\alpha_1 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_0/\omega_0$ et utiliser le développement de Taylor suivant

$$|A(z, t - t')|^2 \approx |A(z, t)|^2 - t' \frac{\partial |A(z, t)|^2}{\partial t}$$

Cette approximation est raisonnable si l'enveloppe de l'impulsion évolue lentement dans la fibre. Par conséquent, l'intégral dans l'équation (1.72) peut se ramener à la forme suivante (la démonstration est montrée dans l'annexe B)

$$\int_0^\infty R(t') |A(\vec{r}, t - t')|^2 dt' = |A(z, t)|^2 - T_R \left(\frac{\partial |A(z, t)|^2}{\partial t} \right) \quad (1.74)$$

avec

$$T_R = \int_0^\infty t' R(t') dt' = f_R \int_0^\infty t' h_R(t') dt' = f_R \left. \frac{d(\text{Im}[\tilde{h}_R(\Delta\omega)])}{d(\Delta\omega)} \right|_{\Delta\omega=0} \quad (1.75)$$

où T_R est le coefficient lié à la pente de la partie linéaire du gain Raman au voisinage de la fréquence centrale ω_0 , sa valeur numérique $T_R \approx 3$ fs est déduite expérimentalement pour les longueurs d'onde proche de $1.5 \mu\text{m}$. La partie linéaire du gain Raman ne couvre plus toute la bande spectrale de l'impulsion pour les impulsions de largeur temporelle plus courte que 0.5 ps, par conséquent, l'utilisation des équations (1.74) et (1.75) devient discutable pour de telles impulsions courtes. Dans le cas où l'impulsion possède une largeur temporelle plus grande que 0.5 ps, nous pouvons continuer le calcul

en tenant compte de toutes les simplifications et approximations ci-dessus, l'équation (1.72) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}A + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \\ - i\gamma|A|^2A + i\gamma T_R A \frac{\partial|A|^2}{\partial T} + \frac{\gamma}{\omega_0}\frac{\partial(A|A|^2)}{\partial T} - \frac{\gamma T_R}{\omega_0}\frac{\partial A}{\partial T}\frac{\partial^2|A|^2}{\partial T^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

Dans l'équation (1.76) et la suite de notre calcul, nous adoptons les notations γ et α au lieu de γ_0 et α_0 pour avoir une correspondance avec les travaux antérieurs. Nous avons aussi effectué un changement de variable $T = t - z/v_g = t - \beta_1 z$ pour se placer dans le référentiel de l'impulsion qui se déplace à la vitesse de groupe $v_g = 1/\beta_1$. Le terme $\gamma T_R/\omega_0$ est un terme d'ordre 2, il peut être négligé. En outre, nous avons choisi de travailler avec des longueurs d'onde faiblement atténuées (section 1.1.2), par conséquent, les pertes dans la fibre (terme de α) peut être aussi négligé dans notre cas. Le terme γ/ω_0 devient important pour des impulsions ultracourtes, mais dans notre cas $T_0 > 0.5$ ps, ce terme est aussi négligeable. En négligeant les trois termes discutés précédemment, nous obtenons l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée (GNLSE) qui décrit la propagation des impulsions (largeur temporelle satisfaisant $0.5 \text{ ps} < T_0 < 5 \text{ ps}$) dans la fibre optique à la forme finale suivante

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial T^3} - i\gamma|A|^2A + i\gamma T_R A \frac{\partial|A|^2}{\partial T} = 0 \quad (1.77)$$

Pour les impulsions de largeur temporelle $T_0 > 5$ ps, nous pouvons considérer que la réponse non linéaire Raman est instantanée, donc le terme de γT_R devient petit devant le terme Kerr ($\gamma|A|^2A$). En plus la contribution du terme de la dispersion d'ordre trois (TOD) est également assez faible pour de telles impulsions (tant que la longueur d'onde centrale de l'impulsion n'est pas trop proche de la longueur d'onde du zéro dispersion). Ce n'est que dans ce cas que l'équation (1.77) prend la forme la plus simple du type Schrödinger non linéaire :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - i\gamma|A|^2A = 0 \quad (1.78)$$

1.1.6 L'instabilité modulationnelle dans la fibre optique

L'instabilité modulationnelle (MI) dans la fibre optique se manifeste par l'automodulation d'amplitude d'une onde se propageant dans un milieu non-linéaire et dispersif subissant une faible perturbation extérieur. Dans la fibre optique, la dynamique de l'enveloppe du champ électrique en absence de la TOD et de l'effet Raman est décrite par l'équation de Schrödinger non linéaire (1.78) ci-dessus, et la solution stationnaire de cette équation est donnée par

$$A_s = \sqrt{P_0} \exp(i\gamma P_0 z)$$

où P_0 est la puissance incidente. La stabilité de cette solution stationnaire est étudiée en la soumettant à des fluctuation de la façon suivante

$$A = (\sqrt{P_0} + a) \exp(i\gamma P_0 z)$$

avec

$$\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0^* \end{pmatrix} e^{-i(kz - \omega'T)}$$

où a_0 représente l'amplitude initiale de la perturbation qui satisfait la condition $a_0 \ll \sqrt{P_0}$, $\omega' = \omega - \omega_0$ est le décalage spectral par rapport à la fréquence de l'onde incidente, elle représente la pulsation de la perturbation et k est le nombre d'onde de la perturbation. En effectuant une analyse de stabilité linéaire¹, nous pouvons obtenir la relation de dispersion comme suit [13]

$$k = \pm \frac{1}{2} |\beta_2 \omega'| \sqrt{\omega'^2 + \text{sgn}(\beta_2) \left(\frac{4P_0\gamma}{|\beta_2|} \right)} \quad (1.79)$$

La partie imaginaire de k est relié au gain spectral en puissance g de la perturbation défini comme

$$g(\omega') = 2\text{Im}[k]$$

La solution stationnaire est instable, lorsqu'il existe des fréquences ω' déstabilisantes : par lesquelles le gain $g(\omega') > 0$. Selon la relation de dispersion (1.79), on montre que la MI existe seulement en régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$) pour les fréquences $|\omega'| < (4\gamma P_0/|\beta_2|)^{1/2}$.

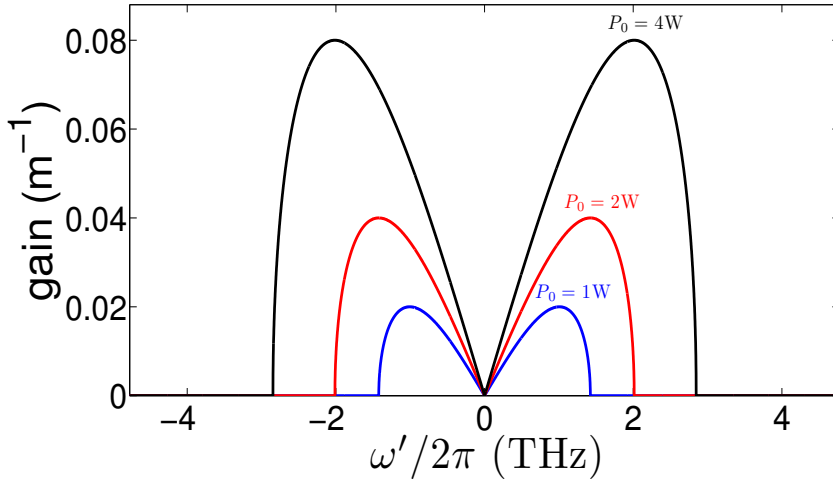


FIGURE 1.7: Le gain en fonction de la fréquence $\omega'/2\pi$ pour trois valeurs de P_0 différentes avec $\beta_2 = -5 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$ et $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$.

Les courbes du gain paramétrique sont représentées dans la figure 1.7 pour différentes valeurs de puissance de pompe P_0 , nous observons que plus la puissance de pompe est grande plus la bande de gain est large, plus le gain maximum est grand et plus les fréquences du gain maximum s'éloignent de la fréquence de pompe. Lorsque nous envoyons une onde continue de fréquence ω_0 en présence de bruit dans une fibre, la MI implique ici l'apparition spontanée de deux bandes symétriques des fréquences par rapport à la fréquence de pompe ω_0 , autour des fréquences du gain maximum $\omega_0 + \omega'_c$

1. L'analyse de stabilité linéaire sera détaillée dans le chapitre 2.

et $\omega_0 - \omega'_c$ avec $\omega'_c = (2\gamma P_0/|\beta_2|)^{1/2}$ correspondant à la pulsation de gain maximum dans la figure 1.7. Au cours de la propagation, l'onde continue initiale est converti en une série d'impulsions périodique dans le domaine temporel dont la période T_c est donnée par

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega'_c}$$

1.2 La cavité fibrée

1.2.1 La modélisation

Une cavité fibrée est constituée d'une fibre optique de longueur L et d'un coupleur qui relie les deux extrémités de la fibre (voir figure 1.8). Nous disposons d'un laser de pompe E_i . Après chaque tour de cavité, le champ laser se superpose de façon cohérente au champ électrique E ayant effectué un tour dans la cavité, les fréquences qui vérifient la condition d'interférences constructives sont amplifiées tour à tour.

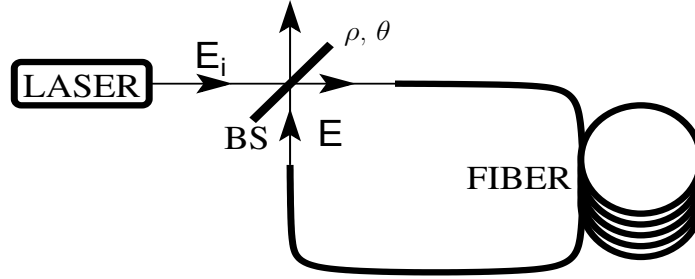


FIGURE 1.8: Schéma de principe de la cavité fibrée. BS, coupleur. ρ et θ sont les coefficients de réflexion et transmission en amplitude de BS avec $(\rho^2 + \theta^2 = 1)$.

L'élément non linéaire de la cavité fibrée est donc la fibre optique. La dynamique de cette cavité fibrée peut être décrite par un système des deux équations qui est connu sous le nom anglais "mapping" dont la première équation est GNLSE qui décrit la propagation libre de l'enveloppe du champ électrique dans la fibre, et la deuxième équation impose les conditions aux limites de la cavité qui permettent de relier le champ incident au champ intra-cavité à chaque tour ($z=0$ correspond au point de rencontre des champs). Ce modèle est représenté sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} - i\gamma|A|^2 A + i\gamma T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} = 0 \\ A_{n+1}(z=0, T) = \theta A_i + \rho e^{-i\delta_0} A_n(z=L, T) \end{cases} \quad (1.80)$$

A_i : Amplitude lentement variable du champ incident (pompe).

A_n : Amplitude lentement variable du champ intra-cavité au nième tour.

δ_0 : Déphase linéaire induit après un tour de la cavité.

L : Longueur de la cavité.

T : La variable temporelle dans le référentiel retardé.

1.2.2 Le modèle réduit de Lugiato-Lefever

Le modèle originel (1.80) permet de décrire la dynamique de la cavité fibrée, mais l'étude analytique de ce modèle est assez complexe, ce qui limite nos investigations à des simulations numériques. Pour pouvoir effectuer une étude analytique de la dynamique de la cavité fibrée, nous appliquons à ce modèle originel les approximations et l'hypothèse du champ moyen ce qui suppose que l'enveloppe du champ intra-cavité varie peu au cours de la propagation d'un tour de la cavité. Ceci se traduit par le fait que les longueurs de la dispersion et la longueur non linéaire sont très grandes par rapport à la longueur de la cavité, $L \ll L_{d2}, L_{d3}, L_{nl}$ avec $L_{d2} = T_0^2/|\beta_2|$, $L_{d3} = T_0^3/|\beta_3|$, $L_{nl} = 1/(\gamma P_0)$, T_0 est la durée temporelle du signal et P_0 est l'intensité du signal d'entrée. A partir de ces approximations on aboutit à un modèle réduit simple (Modèle réduit de Lugiato-Lefever [28]) qui capture la dynamique faiblement non-linéaire de la cavité. Les étapes de ces approximations ainsi que la démonstration du modèle réduit sont détaillés dans l'annexe (C). Il en résulte l'équation d'évolution de l'enveloppe du champ suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = S - (1 + i\Delta)\psi - is \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} + B_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau'^3} + i|\psi|^2 \psi - iR\psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \tau'} \quad (1.81)$$

avec $s = \text{sign}(\beta_2)$, $t' = t\theta^2/2t_R$ est une variable de temps lent normalisée où t_R représente la durée pour que le signal parcourt un tour dans la cavité et t est la durée de la propagation du signal dans la cavité, $\tau' = T\theta/(L|\beta_2|)^{1/2}$ est une variable de temps rapide normalisée, $\psi = A(2\gamma L)^{1/2}/\theta$ est l'amplitude normalisée du champ intra cavité, $S = 2A_i(2\gamma L)^{1/2}/\theta^2$ est l'amplitude normalisée de la pompe, $B_3 = \beta_3\theta/(3L^{1/2}|\beta_2|^{3/2})$ est le coefficient normalisée de la TOD, $\Delta = 2\delta_0/\theta^2$ est le déphasage normalisé de la cavité et $R = T_R\theta/(L|\beta_2|)^{1/2}$ est le coefficient normalisée de l'effet Raman. L'étude analytique de cette équation nous permet d'interpréter les résultats des simulations numériques du modèle réduit de Lugiato-Lefever et du modèle originel [équation (1.80)] dans la suite de notre étude.

1.3 Le principe de simulation : méthode de "split-step"

L'équation GNLSE [équation (1.77)] est une équation différentielle partielle non linéaire qui généralement ne se résout pas analytiquement à l'exception des cas spécifiques. Une approche numérique est donc souvent nécessaire pour comprendre les effets non linéaires dans les fibres optiques. Parmi l'ensemble des méthodes numériques développés (méthode des éléments finis, méthodes de faisceau propagé...), nous avons choisit la méthode de split-step qui est basée sur l'utilisation des algorithmes de transformée de Fourier rapide (FFT²), en raison de sa rapidité d'exécution par rapport aux autres méthodes. Pour comprendre la philosophie derrière la méthode de split-step, il est utile d'écrire l'équation (1.77) formellement sous la forme suivante [13]

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\widehat{D} + \widehat{N})$$

2. FFT : fast Fourier transform

où \widehat{D} est l'opérateur différentiel qui inclut les termes de dispersion et \widehat{N} est l'opérateur qui prend en compte les effets non linéaires. Dans notre cas, ils sont exprimés comme

$$\begin{aligned}\widehat{D} &= -\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3}{\partial T^3} \\ \widehat{N} &= i\gamma|A|^2 - i\gamma T_R \frac{\partial|A|^2}{\partial T}\end{aligned}$$

En général, la dispersion et la non linéarité agissent ensemble le long de la fibre. La méthode de split-step donne une solution approchée en supposant que dans la propagation de l'impulsion sur une petite distance h , les effets dispersifs et non-linéaires agissent de façon indépendante. Pour plus de détails, la propagation de z à $z+h$ peut être divisée en deux étapes, dans la première étape, la dispersion agit seule, et $\widehat{N} = 0$, dans la seconde étape, la non linéarité agit seule, et $\widehat{D} = 0$. Mathématiquement, la résolution de l'équation revient à écrire

$$A(z+h, T) \approx \exp(h\widehat{D})\exp(h\widehat{N})A(z, T) \quad (1.82)$$

L'opérateur $\exp(h\widehat{D})$ peut être évalué dans l'espace de Fourier en utilisant la relation :

$$\exp(h\widehat{D})A(z, T) = F_T^{-1}\exp[h\widehat{D}(-i\omega)]F_TA(z, T) \quad (1.83)$$

où F_T désigne l'opération de transformée de Fourier, $\widehat{D}(-i\omega)$ est la transformée de Fourier de l'opérateur \widehat{D} dans laquelle nous avons transformé $\partial/\partial T$ en $-i\omega$, et ω est la fréquence dans le domaine de Fourier. La précision de la méthode de split-step peut être améliorée par l'adoption d'une autre procédure de propagation de l'impulsion optique sur un segment de z à $z+h$. Dans cette procédure, nous remplaçons l'équation (1.82) par

$$A(z+h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\widehat{D}\right)\exp(h\widehat{N})\exp\left(\frac{h}{2}\widehat{D}\right)A(z, T) \quad (1.84)$$

La mise en œuvre de la méthode split-step est relativement simple, et elle est représentée dans la figure 1.9. La longueur de la fibre est divisée en un grand nombre de segments de largeur h . L'impulsion optique se propage d'un segment à l'autre à l'aide de l'équation (1.84). Plus précisément, le champ optique $A(z, T)$ se propage d'abord dans une distance $h/2$ avec la dispersion uniquement en utilisant l'algorithme FFT et l'équation (1.83). Au plan médian $z+h/2$, le champ est multiplié par un terme non linéaire qui représente l'effet non linéaire sur l'ensemble de la longueur du segment h . Enfin, le champ se propage dans la distance restante $h/2$ avec la dispersion uniquement pour obtenir $A(z+h, T)$. En effet, la non linéarité est supposée être regroupée au plan médian de chaque segment (lignes en pointillés dans la figure 1.9).

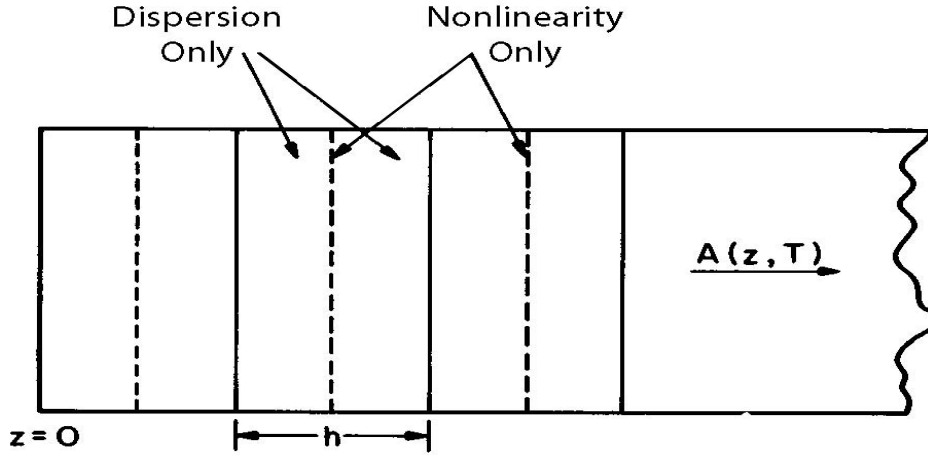


FIGURE 1.9: Illustration schématique de la méthode de split-step utilisée pour les simulations numériques. La longueur des fibres est divisée en un grand nombre de segments de largeur h . Dans un segment, l'effet de la non linéaire est inclus dans le plan médian représenté par une ligne pointillée (Extrait de [13]).

Bien que cette méthode numérique soit relativement directe à mettre en oeuvre, l'utilisation de la transformée de Fourier successive nécessite un échantillonnage des domaines temporel et spectral en plus de la segmentation de la longueur de fibre. Le choix des pas d'échantillonnage, en fonction de la complexité du problème, est le premier inconvénient de cette méthode. Pour le deuxième inconvénient de cette méthode, l'utilisation de la FFT impose une condition au bord périodique; dans le pratique, nous choisissons la largeur de la fenêtre temporelle suffisamment grande par rapport à la largeur de l'impulsion (typiquement 10 à 20 fois la largeur de l'impulsion). Dans quelques cas, une partie de l'énergie de l'impulsion peut s'étendre si rapidement qu'elle atteint les frontières de la fenêtre, ceci peut mener à des instabilités numériques. Il est alors possible d'utiliser une "fenêtre absorbante" dans laquelle la radiation atteignant les bords de la fenêtre est artificiellement absorbée, bien qu'une telle mise en oeuvre ne préserve pas l'énergie de l'impulsion.

Quant à la simulation numériques du modèle originel [équation (1.80)] et modèle réduit de Lugiato-Lefever [équation (1.81)] de la cavité fibrée, nous pouvons aussi utiliser la méthode de split-step, mais dans le modèle réduit de Lugiato-Lefever, nous devons redéfinir les opérateurs de la façon suivante

$$\begin{aligned}\widehat{D}' &= -is\frac{\partial^2}{\partial\tau'^2} + B_3\frac{\partial^3}{\partial\tau'^3} \\ \widehat{N}' &= -(1 + i\Delta) + i|\psi|^2 - iR\frac{\partial|\psi|^2}{\partial\tau'}\end{aligned}$$

où nous avons inclus les pertes de la cavité, le detuning linéaire Δ et les effets non linéaires dans l'opérateur \widehat{N}' . A part les opérateurs \widehat{N}' et \widehat{D}' , nous devons compléter le procédé avec le terme de pompe S qui est différent par rapport aux autres termes car il n'est proportionnel ni à ψ ni à une dérivée de ψ . En première approximation, la

propagation de t' à $t' + h'$ est décrite comme suit :

$$\psi(t' + h', \tau') \approx \exp\left(\frac{h'}{2}\widehat{D}'\right)\exp(h'\widehat{N}')\exp\left(\frac{h'}{2}\widehat{D}'\right)\psi(t', \tau') + h'S \quad (1.85)$$

où la durée de propagation t' dans la cavité est divisée en un grand nombre de segments de largeur h' . L'équation (1.85) est optimal uniquement pour h' suffisamment petit.

Chapitre 2

Propagation d'ondes dans les fibres optiques non linéaires

Une étude préliminaire de l'instabilité modulationnelle (MI) dans une fibre optique a fait l'objet de la section 1.1.6. Il en résulte que l'écart entre la fréquence de la pompe et les fréquences instables est inversement proportionnelle à $\sqrt{|\beta_2|}$, en conséquence, lorsque nous nous plaçons dans la région de faible GVD ($\beta_2 \approx 0$), les fréquences amplifiées par la MI sont loins de la pompe, et engendrent un large spectre. Ce résultat favorise la génération de trains d'impulsions ultracourtes et de supercontinuum. Cependant, les effets de la dispersion d'ordre supérieur deviennent comparables à celui de la GVD, de plus, le spectre large généré couvre une partie importante du gain Raman et l'effet de celui-ci n'est plus négligeable. Par conséquent, la prise en compte de ces effets est indispensable pour une description complète de la dynamique au sein de la fibre. Dans ce manuscrit, nous développons la dispersion jusqu'à l'ordre trois (β_3) qui permet d'inclure l'effet de la pente de la GVD (TOD). La nature absolue de la MI dans la fibre en absence de la TOD et de l'effet Raman a été prouvée par L. Brevdo [29]. Cependant, les effets induits par la présence de la TOD et de l'effet Raman pourrait éventuellement basculer le système vers les régimes d'instabilité convective.

Notre travail dans ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première, nous étudions l'impact de la TOD et du Raman sur la MI dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire initialisée par une perturbation monochromatique étendue, ensuite les résultats sont testés numériquement en utilisant le programme numérique basé sur l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée (GNLSE). En deuxième partie, nous détaillons d'abord les concepts d'instabilité convective et absolue dans la fibre, et puis nous étudions le changement des régimes d'instabilité éventuel causé par la présence de la TOD et du Raman.

Nous démarrons ce chapitre avec l'équation de Schrödinger non linéaire généralisée que nous avons établi dans la section 1.1.5, elle s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + i\gamma|A|^2A - i\gamma T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \quad (2.1)$$

avec $T_R = 3 \times 10^{-15}$ s. Pour simplifier le problème, il convient d'effectuer des changements de variables permettant d'aboutir à l'équation normalisée sans dimension

suivante

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = -is \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + b_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + i|u|^2 u - iR_T u \frac{\partial |u|^2}{\partial \tau} \quad (2.2)$$

avec $u = A\sqrt{2\gamma L_{d2}}$, $\tau = T/T_0$, $Z = z/(2L_{d2})$, $\beta_2 = s|\beta_2|$, $s = \text{sgn}(\beta_2)$, $b_3 = \beta_3/(3T_0|\beta_2|)$ et $R_T = T_R/T_0$, où $L_{d2} = T_0^2/|\beta_2|$ représente la longueur de la dispersion d'ordre deux, T_0 est la durée temporelle du signal. Une unité de la nouvelle variable Z signifie une longueur réelle de propagation équivalente à deux fois la longueur de la dispersion d'ordre deux. De plus, le coefficient R_T permet de relier l'ordre de grandeur du terme de l'effet Raman ($u\partial|u|^2/\partial\tau$) à la durée temporelle du signal T_0 . En effet, le terme du Raman ne peut que devenir comparable à celui de l'effet Kerr ($|u|^2 u$) lorsque nous travaillons avec des signaux de l'ordre de la femto seconde $R_T \sim 1$, et il est négligeable lorsque $T_0 \gg T_R$. Dans mon travail, les signaux sont de l'ordre de la pico seconde, et le terme du Raman est petit devant celui de l'effet Kerr, mais il n'est pas négligeable. Pour toutes les simulations numériques nous utilisons les paramètres physiques correspondant à des expériences réelles. Ces paramètres sont $|A|^2 \sim 10^{-2} \text{ W}$, $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $\beta_3 \sim 10^{-40} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$, $T_0 \sim 10^{-12} \text{ s}$, cela correspondent à $|u|^2 \sim 1$, $b_3 \sim 10^{-1}$, $R_T \sim 10^{-3}$. Dans ce chapitre, l'équation (2.2) constitue le point départ de notre étude dans la fibre optique.

2.1 Analyse de stabilité linéaire standard

L'équation (2.2) possède une solution stationnaire sous la forme

$$u_s = \sqrt{P} e^{iPZ} \quad (2.3)$$

où P représente l'intensité normalisée initiale de l'équation (2.2) définie par

$$P = |u_0|^2 = 2\gamma L_{d2} |A_0|^2 \quad (2.4)$$

avec $|A_0|^2$ est l'intensité à l'entrée de la fibre. En utilisant la définition de la longueur non linéaire $L_{nl} = 1/(\gamma|A_0|^2)$, nous pouvons réécrire l'expression (2.4) telle que $P = 2L_{d2}/L_{nl}$. Ainsi, P n'est rien d'autre que le rapport entre la longueur de la dispersion d'ordre deux et la longueur non linéaire. La stabilité de la solution stationnaire (2.3) peut être étudiée en la soumettant à des fluctuations de la forme

$$\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u_0 \\ \delta u_0^* \end{pmatrix} e^{-i(KZ - \Omega\tau)} \quad (2.5)$$

où K et Ω sont respectivement le nombre d'onde normalisé et la pulsation normalisée de la perturbation, δu_0 représente l'amplitude normalisée initiale de la perturbation qui satisfait la condition $\delta u_0 \ll \sqrt{P}$. Pour effectuer l'analyse de stabilité linéaire de notre système, nous remplaçons la solution $u = (\sqrt{P} + \delta u)e^{iPZ}$ dans l'équation (2.2), en supprimant tous les termes d'ordre supérieur à 1 en δu , nous obtenons une équation décrivant l'évolution de la perturbation δu en régime linéaire (problème linéarisé)

$$\frac{\partial \delta u}{\partial Z} = -is \frac{\partial^2 \delta u}{\partial \tau^2} + b_3 \frac{\partial^3 \delta u}{\partial \tau^3} + iP(\delta u^* + \delta u) - iPR_T \left(\frac{\partial \delta u}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta u^*}{\partial \tau} \right) \quad (2.6)$$

Nous pouvons également obtenir une équation en δu^* qui est la complexe conjuguée de l'équation (2.6) telle que

$$\frac{\partial \delta u^*}{\partial Z} = is \frac{\partial^2 \delta u^*}{\partial \tau^2} + b_3 \frac{\partial^3 \delta u^*}{\partial \tau^3} - iP(\delta u^* + \delta u) + iPR_T \left(\frac{\partial \delta u}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta u^*}{\partial \tau} \right) \quad (2.7)$$

En insérant l'expression (2.5) dans l'équation (2.6) et (2.7) nous obtenons une forme matricielle de ces deux équations

$$\begin{pmatrix} B+C & H \\ -H & B-C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_0 \\ \delta u_0^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

avec

$$\begin{aligned} B &= iK - ib_3\Omega^3, & C &= is\Omega^2 + iP + PR_T\Omega \\ H &= iP + PR_T\Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

Des solutions $(\delta u_0, \delta u_0^*) \neq (0, 0)$ existent si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} B+C & H \\ -H & B-C \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

La relation de dispersion correspondante peut être obtenue à partir de la relation (2.10), elle s'écrit finalement

$$K = b_3\Omega^3 \pm i\sqrt{-2sP\Omega^2 - \Omega^4 + 2isR_TP\Omega^3} \quad (2.11)$$

Puisque l'instabilité est seulement possible en régime de dispersion anormal ($s < 0$) dans la fibre, nous pouvons remplacer s par -1 dans la relation de dispersion (2.11) pour la suite de notre analyse

$$K = b_3\Omega^3 + i\sqrt{2P\Omega^2 - \Omega^4 - 2iR_TP\Omega^3} \quad (2.12)$$

Le signe de la partie imaginaire de K représente le gain en amplitude de la MI qui permet de déterminer la stabilité de la solution stationnaire : la perturbation s'amplifie pour $\text{Im}[K] > 0$ et s'atténue si $\text{Im}[K] < 0$. Dans l'expression (2.12), seul le signe "+" est conservé devant la racine car c'est le seule cas où $\text{Im}[K]$ pourrait devenir positive impliquant l'apparition de l'instabilité dans le système. Dans la relation de dispersion (2.12), le terme correspondant à l'effet Raman est complexe et se trouve sous la racine ce qui rend les calculs plus compliqués. Cependant, un développement de Taylor de la relation de dispersion (2.12) autour d'une fréquence intéressante nous permettra de simplifier le problème. Ici nous considérons d'abord le cas sans la TOD et l'effet Raman, la relation de dispersion (2.12) prend une forme plus simple :

$$K_b = +i\sqrt{2P\Omega^2 - \Omega^4} \quad (2.13)$$

avec K_b est le nombre d'onde normalisé en absence de la TOD et de l'effet Raman. Les fréquences $\Omega_c = \pm\sqrt{P}$ correspondent au gain maximum de la MI qui sont calculés à partir de la relation suivante

$$\left. \frac{\partial \text{Im}[K_b]}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_c} = 0 \quad (2.14)$$

et le gain de la MI de Ω_c s'écrit

$$\text{Im}[K_b(\Omega_c)] = P \quad (2.15)$$

Nous pouvons développer la relation de dispersion (2.12) autour de la fréquence Ω_c , ce qui nous permet d'obtenir une expression approchée de K sous la forme suivante [30]

$$K_a \approx K_c + K'_c \Omega' + \frac{1}{2} K''_c \Omega'^2 \quad (2.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Omega - \Omega_c \\ K_c &= K(\Omega_c) \approx b_3 P^{\frac{3}{2}} + P^{\frac{3}{2}} R_T + i(P + \frac{1}{2} P^2 R_T^2) \\ K'_c &= \left. \frac{\partial K}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_c} \approx 3Pb_3 + 3PR_T \\ K''_c &= \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} \right|_{\Omega_c} \approx 6\sqrt{P}b_3 - 4i \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les expressions de la relation (2.17) sont calculées dans l'annexe D en supposant $\Omega' \ll \Omega_c$ et $R_T \ll 1$ (ceci est justifié en régime picoseconde). Nous remplaçons la relation (2.17) dans l'équation (2.16), et la relation de dispersion approchée autour de Ω_c s'écrit finalement

$$\begin{aligned} K_a &= b_3 P^{\frac{3}{2}} + P^{\frac{3}{2}} R_T + (3Pb_3 + 3PR_T)\Omega' + 3\sqrt{P}b_3 \Omega'^2 \\ &\quad + i(P + \frac{1}{2} P^2 R_T^2 - 2\Omega'^2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'après la relation de dispersion approchée (2.18), nous constatons que la fréquence de gain maximum Ω_c n'a pas été modifiée par la présence de la TOD et de l'effet Raman soit :

$$\left. \frac{\partial \text{Im}[K_a]}{\partial \Omega'} \right|_{\Omega'_c} = 0 \implies \Omega'_c = 0 \quad (2.19)$$

Mais le gain de Ω_c est légèrement modifié par l'effet Raman (voir figure 2.1),

$$\text{Im}[K_a(\Omega_c)] = P + \frac{1}{2} P^2 R_T^2 \quad (2.20)$$

A partir des relations de dispersion (2.12) et (2.13), nous avons tracé le gain de la MI ($\text{Im}[K]$) en fonction de Ω en absence et en présence de la TOD et de l'effet Raman dans la figure 2.1. La faible différence autour de $\pm\Omega_c$ peut être interprétée facilement en examinant les relations (2.15) et (2.20). Cependant, la principale différence dans le gain de la MI entre ces deux cas est l'amplification des hautes fréquences par l'effet Raman. En revenant à GNLSSE [équation (2.1)] avec les paramètres physiques donnés au début de cette section, la pulsation normalisée à gain maximum $\Omega_c \sim 1$ correspond à un décalage spectral par rapport à la fréquence de l'onde incidente $\Delta f \sim 0.16$ THz.

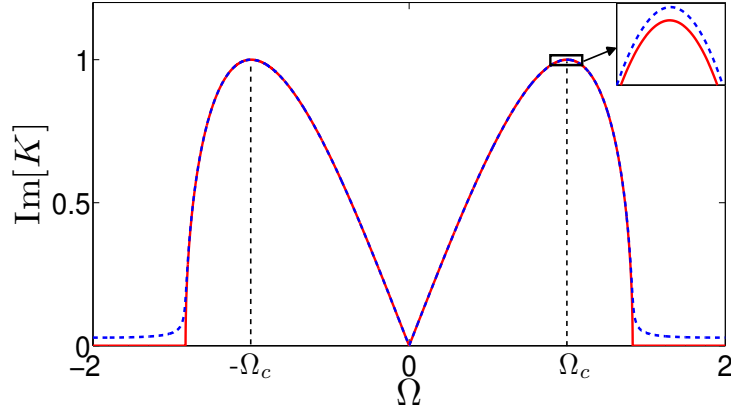


FIGURE 2.1: La partie imaginaire de K en fonction de Ω en absence de la TOD et de l'effet Raman (courbe rouge solide) et en présence de la TOD et de l'effet Raman (courbe bleue en pointillé) avec $b_3 = 0.9$, $R_T = 0.008$, $P = 1$ et $\Omega_c = 1$.

2.2 Analyse de stabilité linéaire spatio-temporelle : Perturbations localisées

Si la partie imaginaire de K représente le gain de la MI, la partie réelle de K représente l'oscillation de la perturbation suivant Z , et le terme $\partial \text{Re}[K]/\partial \Omega|_{\Omega_c}$ définit une dérive normalisée V_c suivant τ en fonction de Z du paquet d'onde centré en Ω_c qui n'est rien d'autre que l'inverse de la vitesse du groupe du paquet d'ondes. Puisque la partie réelle de K n'est pas explicite, nous utilisons l'expression approchée K_a , et V_c s'écrit alors :

$$V_c = \left. \frac{\partial \text{Re}[K_a]}{\partial \Omega'} \right|_{\Omega'_c} = V_{cD} + V_{cR} \quad (2.21)$$

avec $V_{cD} = 3Pb_3$ est la contribution de la TOD (β_3).

$V_{cR} = 3PR_T$ est la contribution de l'effet Raman.

Pour tester numériquement notre analyse sur la dérive nous considérons une perturbation localisée sous forme Gaussienne comme condition initiale dans le programme numérique d'intégration d'équation (2.2), et suivons son évolution au cours de la propagation. L'expression mathématique de cette perturbation s'écrit

$$u = \sqrt{P} + \delta u_0 e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2} \cos(\Omega_c \tau) \quad (2.22)$$

où δu_0 est l'amplitude initiale de la perturbation avec $\delta u_0 \ll \sqrt{P}$ et τ_0 est la demi-largeur (en $1/e$) de la perturbation. Afin d'avoir l'effet de la MI sur l'évolution du paquet d'ondes, nous adoptons la condition $2\tau_0 \gg \tau_c = 2\pi/\Omega_c$ avec Ω_c est la fréquence du mode le plus instable. Dans la figure 2.2, nous montrons un exemple de cette perturbation initiale et son spectre ainsi que l'enveloppe temporel de la perturbation (courbe rouge) qui est obtenu à partir de la transformée de Hilbert. Puisque nous nous intéressons au déplacement de l'ensemble de la perturbation, le traitement de son enveloppe temporel est plus précis et pratique. Au niveau du spectre, les deux

pics qui représentent $-\Omega_c$ et Ω_c sont bien présents et symétriques par rapport au pic central qui correspond à la composante continue du signal \sqrt{P} (ici $\Omega = 0$).

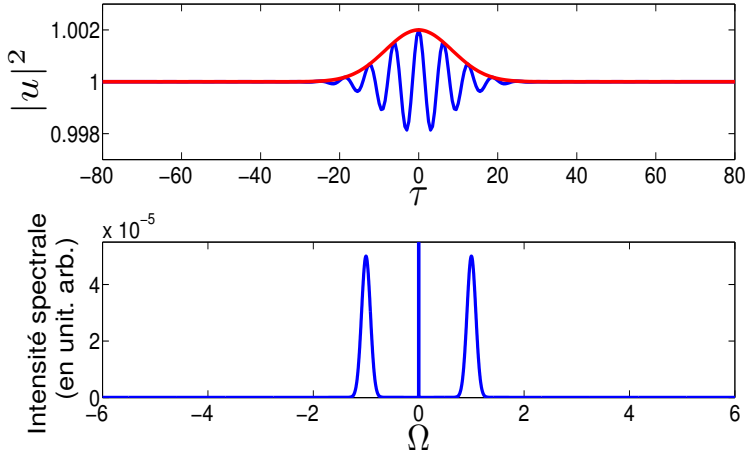


FIGURE 2.2: La forme de la perturbation initiale dans le domaine temporel et spectral avec $\tau_0 = 12$, $\delta u_0 = 0.001$, $P = 1$ et $\Omega_c = 1$, la courbe rouge représente l'enveloppe temporel de la perturbation.

2.2.1 Cas de la dispersion de la vitesse de groupe (β_2) seule

En absence de la TOD et de l'effet Raman, l'équation (2.1) devient l'équation de Schrödinger non linéaire originelle, la MI correspondant à cette situation a été traitée dans [13]. Selon l'analyse précédente, la dérive V_c est nulle dans ce cas, une condition initiale localisée (paquet d'ondes) ne doit pas avoir un déplacement d'ensemble au cours de la propagation. En numérique, nous représentons l'évolution d'une perturbation localisée [expression (2.22)] dans un diagramme spatio-temporel [figure 2.3(a)], les franges noir et blanc montrent la modulation de fréquence Ω_c du signal, la perturbation s'élargit de façon symétrique par rapport à la position $\tau = 0$, ce résultat est conforme au résultat analytique $V_c = 0$. La figure 2.3(b) montre les profils d'intensité correspondant à trois distances de propagation. Nous observons l'amplification du signal causée par le gain de la MI et l'immobilité de l'ensemble de signal au cours de la propagation. La figure 2.4 montre le spectre final du signal, les deux pics initiaux sont amplifiés symétriquement et les harmoniques des pics principaux sont aussi formées de façon symétrique. En outre, nous observons l'amplification des composantes spectrales autour de la composante continue. En fait, les pics de $-\Omega_c$ et Ω_c ne sont des pics de Dirac, ils possèdent certains largeur spectral, dans un régime non linéaire, le mélange à plusieurs ondes issu de la largeur spectral de pic de $-\Omega_c$ et Ω_c forme les harmoniques et les composantes autour de la composante continue.

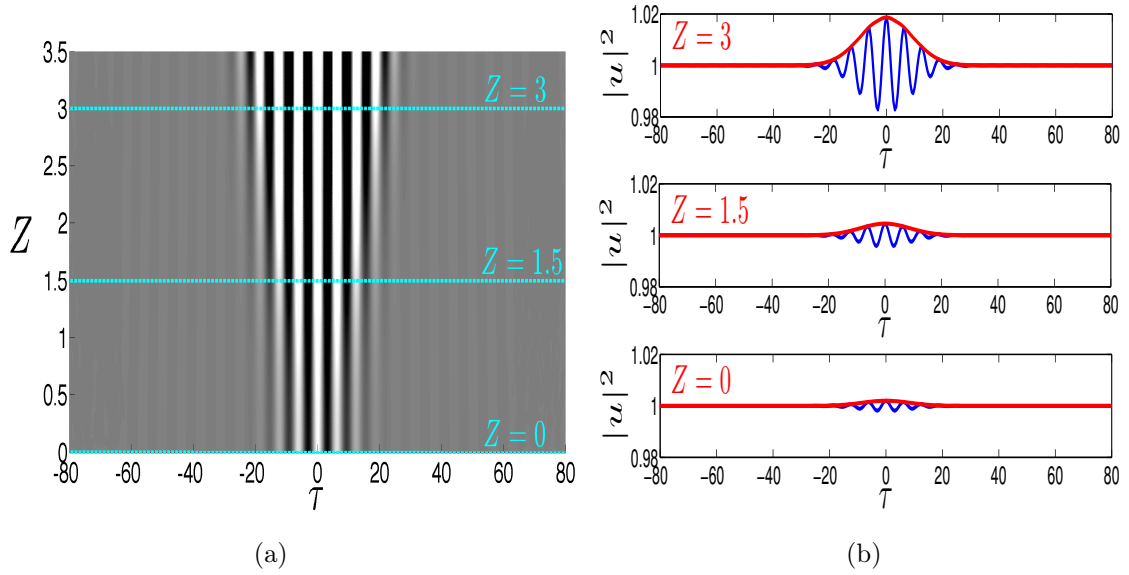


FIGURE 2.3: (a) Evolution de la perturbation dans le plan (τ, Z) . (b) Profils d'intensité des lignes en pointillés bleus correspondant aux trois distances de propagations avec $P = 1$, $b_3 = 0$ et $R_T = 0$.

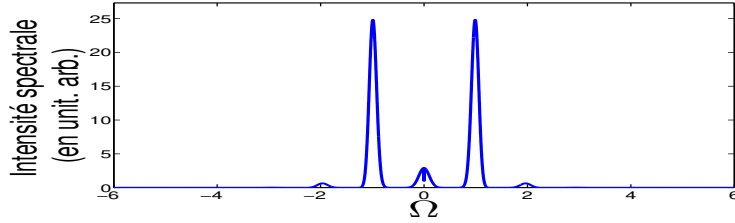


FIGURE 2.4: Spectre final de la perturbation avec $P = 1$, $b_3 = 0$, $R_T = 0$ et $Z = 7$.

2.2.2 Effet de la dispersion d'ordre trois

La présence de la TOD ramène un terme réel dans la relation de dispersion générale (2.12). Ce terme brise la symétrie d'inversion ($\tau \leftrightarrow -\tau$) du système et génère une dérive du paquet d'onde. Dans ce cas, la dérive s'écrit sous la forme suivante

$$V_c = V_{cD} = 3Pb_3 \quad (2.23)$$

La dérive dépend du signe de β_3 , elle se dirige dans le sens des τ croissants si β_3 est positif, et dans le sens des τ décroissants si β_3 est négatif. D'une manière similaire au cas précédent, nous injectons une perturbation localisée de la forme (2.22) comme condition initiale dans la simulation numérique. L'évolution de la perturbation et ses profils d'intensité sont tracés dans la figure 2.5 pour $b_3 > 0$ et dans la figure 2.6 pour $b_3 < 0$. Ces résultats nous montrent que la perturbation s'élargit et dérive dans le domaine temporel, le sens de la dérive dépend du signe de b_3 , la perturbation dérive vers les τ croissants pour b_3 positif et dérive vers les τ décroissants pour b_3 négatif, ce phénomène est en bon accord avec la prédiction analytique.

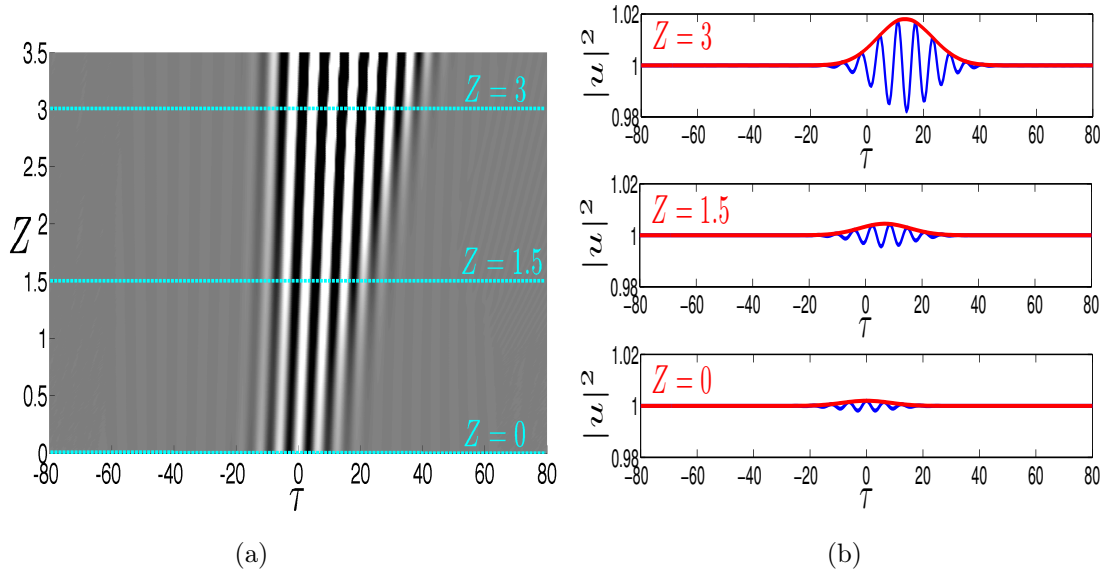


FIGURE 2.5: (a) Evolution de la perturbation dans le plan (τ, Z) . (b) Profils d'intensité des lignes en pointillés bleus correspondant aux trois distances de propagation avec $P = 1$, $b_3 = 0.9$ et $R_T = 0$.

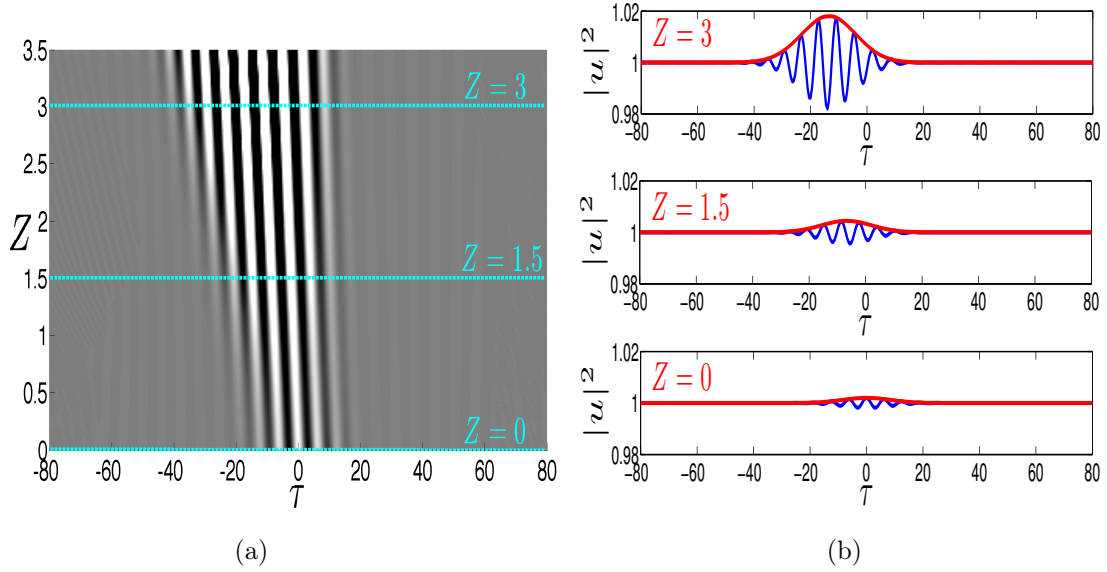


FIGURE 2.6: (a) Evolution de la perturbation dans le plan (τ, Z) . (b) Profils d'intensité des lignes en pointillés bleus correspondant aux trois distances de propagation avec $P = 1$, $b_3 = -0.9$ et $R_T = 0$.

En utilisant les relations de normalisation de l'équation (2.2), nous pouvons exprimer le rapport entre la longueur de la dispersion d'ordre deux ($L_{d2} = T_0^2/|\beta_2|$) et la longueur de la dispersion d'ordre trois ($L_{d3} = T_0^3/|\beta_3|$) par

$$\frac{L_{d2}}{L_{d3}} = 3|b_3| \quad (2.24)$$

où nous constatons que ce rapport est directement relié au coefficient de la TOD (b_3). Or la longueur normalisée de la simulation Z est directement reliée à la longueur de la dispersion d'ordre deux L_{d2} [$Z = z/(2L_{d2})$], à partir de la relation (2.24), nous en déduisons $Z = z/(6|b_3|L_{d3})$ qui signifie qu'une unité de Z correspond à une longueur réelle de propagation équivalente à $6|b_3|L_{d3}$.

Au niveau de spectre, nous observons une asymétrie, comme le montre la figure 2.7, les deux fréquences de départ et leurs harmoniques ne sont pas amplifiées symétriquement au cours de la propagation. En comparant les figures 2.7(a) et 2.7(b), nous concluons que le sens de l'asymétrie de spectre dépend aussi du signe de b_3 .

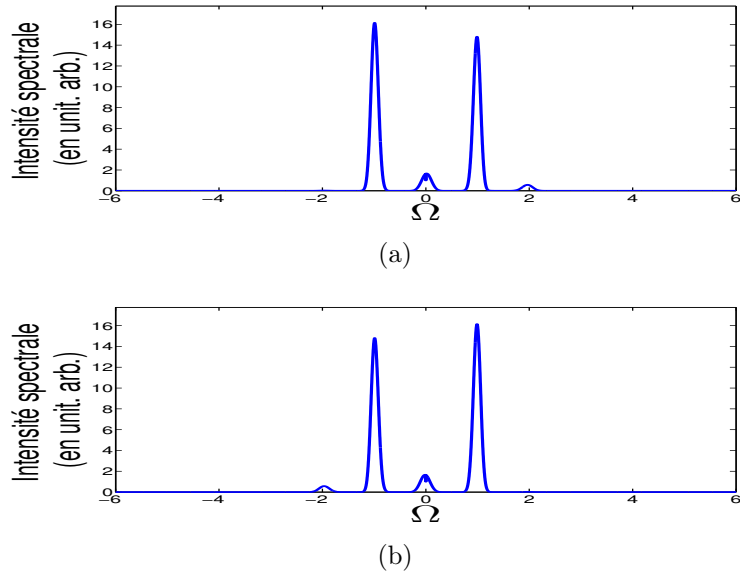


FIGURE 2.7: Spectre final de la perturbation (a) $b_3 = 0.9$ et (b) $b_3 = -0.9$ avec $P = 1$, $R_T = 0$ et $Z = 7$.

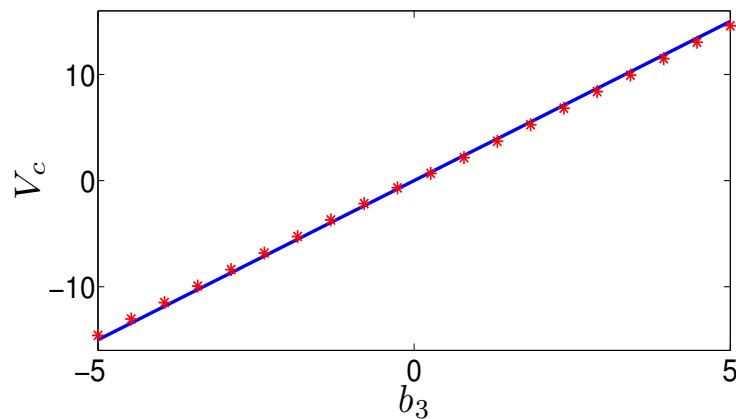


FIGURE 2.8: L'évolution de V_c en fonction de b_3 en absence de l'effet Raman ($R_T = 0$) avec $P = 1$, la courbe bleue solide représente la courbe analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques.

Selon l'expression (2.23), la dérive générée par la TOD est proportionnel à b_3 , nous

mesurons cette dérive pour différentes valeurs de b_3 ce qui nous permet de tracer numériquement l'évolution de cette dérive en fonction de b_3 . Pour mesurer la dérive dans la simulation numérique, nous traçons l'évolution du point de l'intensité maximale de la perturbation dans le plan (τ, Z) , et l'inverse de la pente de cette courbe d'évolution nous donne la valeur numérique de cette dérive de la perturbation. Dans la figure 2.8, nous observons que les valeurs numériques sont en très bon accord avec la courbe analytique qui est tracée à partir de l'expression (2.23).

2.2.3 Effet de la diffusion Raman stimulée

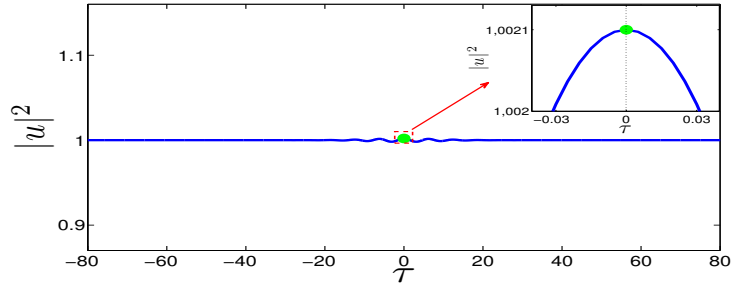
L'inclusion de l'effet Raman dans notre modèle ajoute un terme imaginaire pur dans la racine de la relation de dispersion générale (2.12), où nous avons réussi d'obtenir la relation de dispersion approchée (2.18),

$$K_a = b_3 P^{\frac{3}{2}} + P^{\frac{3}{2}} R_T + (3Pb_3 + 3PR_T)\Omega' + 3\sqrt{P}b_3\Omega'^2 + i\left(P + \frac{1}{2}P^2 R_T^2 - 2\Omega'^2\right)$$

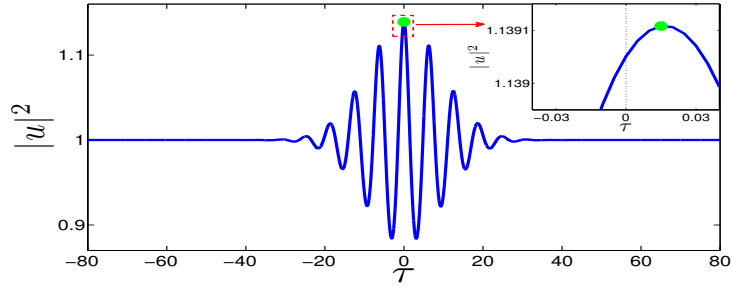
En première approximation, l'effet Raman ramène un terme imaginaire et deux termes réels dans la relation de dispersion approchée. Cela signifie qu'elle affecte aussi le gain de la MI en plus de la brisure de la symétrie d'inversion du système qui se traduit par une dérive. Dans cette section nous vérifions numériquement la dérive provoquée par l'effet Raman qui est donnée sous la forme suivante

$$V_c = V_{cR} = 3PR_T \quad (2.25)$$

Puisque R_T est un terme positif, la dérive induite par l'effet Raman se dirige toujours dans le sens des τ croissants. En effet, R_T est très petit devant 1 dans notre cas (régime picosecond), par conséquent, la dérive induite est très faible, il nécessite une distance de propagation plus longue pour être visible. En simulation numérique, une perturbation localisée qui se trouve à $\tau = 0$ à l'instant initial [voir figure 2.9(a)] est considérée comme condition initiale. Au cours de sa propagation dans la fibre, nous observons l'amplification et l'élargissement de cette perturbation, ainsi qu'un faible changement de la position du maximum de la perturbation causé par l'effet Raman [voir l'agrandissement de la figure 2.9(b)]. Dans les figures 2.9(a) et 2.9(b), les maxima des perturbations sont pointés par un point vert dans le but de visualiser clairement leurs positions. En utilisant la relation (2.25), nous avons trouvé la dérive correspondante $V_c = 0.003$ avec $P = 1$, $R_T = 0.001$, en multipliant par la distance de la propagation $Z = 5$, nous obtenons analytiquement le changement de la position du maximum de la perturbation causé par l'effet Raman $\Delta\tau = 0.015$ qui est en bon accord avec la simulation numérique [voir l'agrandissement de la figure 2.9(b)]. Au niveau de spectre, nous observons une asymétrie similaire à celle du cas de $b_3 > 0$ [figure 2.7(a)]. Dans la relation (2.25), nous constatons que la dérive induite dépend linéairement de l'intensité normalisée initiale P . Cette dépendance est vérifiée numériquement dans la figure 2.10, malgré la petitesse des dérives induites par l'effet Raman, les résultats numériques de l'équation (2.2) sont en très bon accord avec la courbe analytique.



(a)



(b)

FIGURE 2.9: (a) Le signal initial perturbé avec $P = 1$, $\delta u_0 = 0.001$, $\Omega_c = 1$ et $\tau_0 = 12$. (b) Le signal à $Z = 5$ avec $R_T = 0.001$, $b_3 = 0$. Le point vert indique la position du maximum de la perturbation.

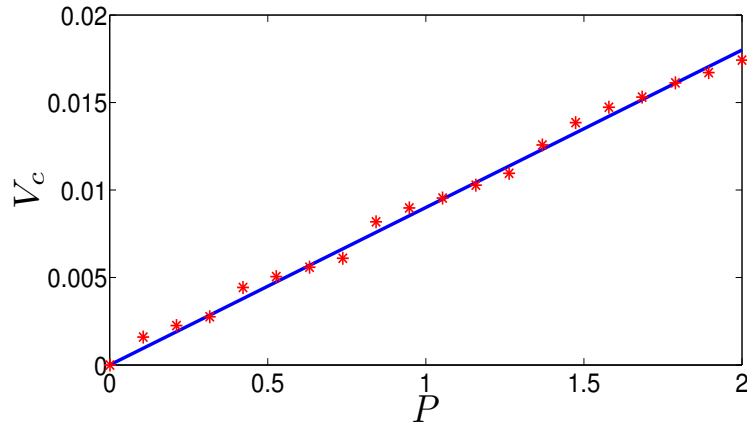


FIGURE 2.10: L'évolution de V_c en fonction de P en absence de la TOD ($b_3 = 0$) avec $R_T = 0.003$, la courbe bleue solide représente la courbe analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques.

2.2.4 Compensation des effets de la dispersion d'ordre trois et de la diffusion Raman stimulée

Théoriquement, les deux contributions de la dérive s'ajoutent lorsqu'elles possèdent le même signe et se compensent lorsque elles ont des signes opposés. Puisque le coefficient de l'effet Raman (R_T) est une constante positive, il s'ajoute à l'effet de la TOD

pour $\beta_3 > 0$ et diminue l'effet de la TOD pour $\beta_3 < 0$. Ici nous nous intéressons à un cas particulier où $V_c = V_{cD} + V_{cR} = 0$ qui permet d'éliminer complètement l'effet de la dérive par conséquent améliorer la qualité du signal à la sortie de fibre. Selon l'expression (2.21), il suffit d'avoir $-b_3 = R_T$ pour annuler la dérive. Pour tester une telle situation, nous considérons la même condition initiale que dans la section précédente [figure 2.9(a)]. La simulation avec les paramètres satisfaisant à la condition de la compensation ($R_T = 0.001 = -b_3$), montre bien que la dérive est éliminée de sorte que le maximum de la perturbation reste à $\tau = 0$ pendant la propagation dans la fibre (voir figure 2.11).

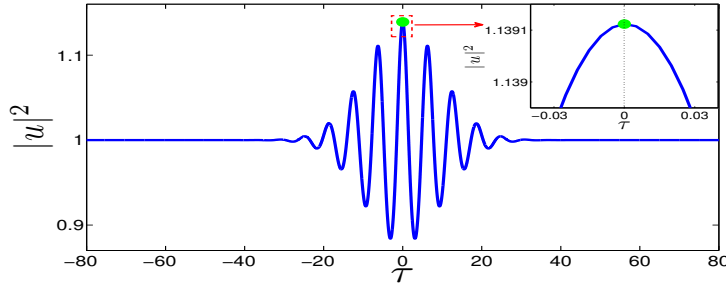


FIGURE 2.11: Le signal à $Z = 5$ avec $P = 1$, $b_3 = -0.001$ et $R_T = 0.001$. Le point vert indique la position du maximum de la perturbation.

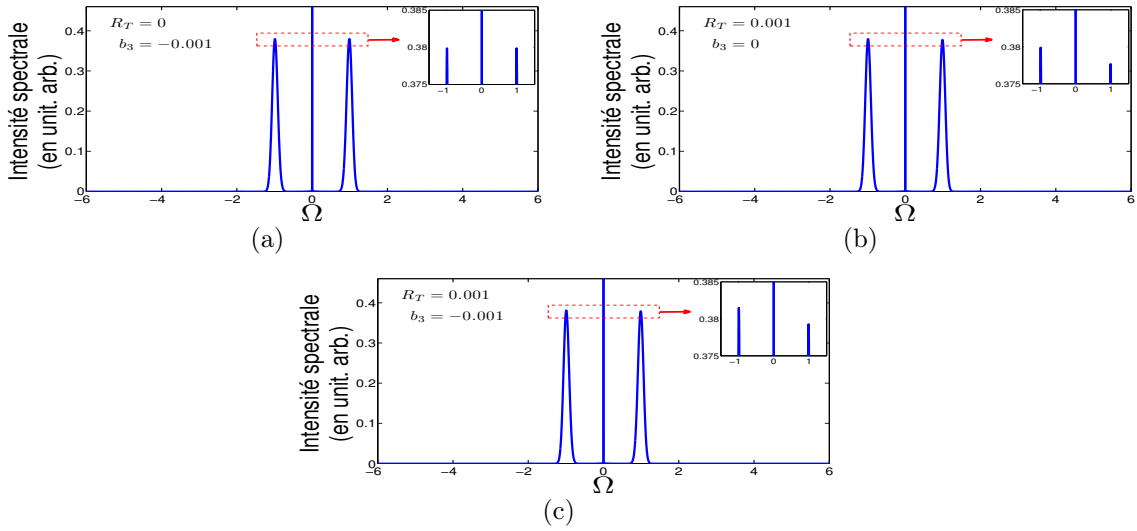


FIGURE 2.12: (a) Spectre du signal à la sortie de la fibre avec $P = 1$, $b_3 = -0.001$ et $R = 0$. (b) Spectre du signal à la sortie de la fibre avec $P = 1$, $b_3 = 0$ et $R = 0.001$. (c) Spectre du signal à la sortie de la fibre à l'issue de la compensation avec $P = 1$, $b_3 = -0.001$ et $R_T = 0.001$. Tous ces trois spectres sont obtenus à $Z = 5$.

Mais cette compensation n'est pas totale dans le spectre [figure 2.12]. En effet, à la compensation de la dérive totale, l'asymétrie générée par l'effet linéaire (la TOD) est assez faible [figure 2.12(a)] et ne compense qu'en partie celle générée par l'effet non

linéaire (Raman) qui est plus importante spectralement [figure 2.12(b)]. L'interprétation de l'asymétrie dans le spectre nécessite une étude non linéaire de l'impact de la TOD et de l'effet Raman dans le domaine spectral que nous ne traitons pas dans ce manuscrit.

En utilisant les normalisations au début de ce chapitre, nous pouvons réécrire la condition de la compensation avec les paramètres physiques comme suit :

$$\beta_3 = -3|\beta_2|T_R \quad (2.26)$$

où $T_R = 3 \times 10^{-15}$ s. Dans une fibre optique, nous pouvons donc ajuster la pente de la GVD (β_3) pour annuler la dérive du signal. Par exemple, pour $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, il faut avoir $\beta_3 = -2.7 \times 10^{-42} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$ pour annuler la dérive induite par l'effet Raman. Cette valeur de β_3 est largement accessible expérimentalement.

2.3 Instabilités convective et absolue

Dans de nombreux systèmes non linéaires, l'instabilité spatio-temporelle pourrait être complètement modifiée par la présence d'une dérive dans le système. En effet, nous constatons non seulement l'amplification de la perturbation dans ces systèmes, mais aussi sa propagation. En conséquence, lorsque une instabilité se produit, il peut être soit convective ou absolue. Les concepts d'instabilités convective et absolue ont d'abord été développés dans le cadre de la physique des plasmas [31, 32], et plus tard appliqués avec succès en hydrodynamique [33]. Dans cette section, nous cherchons dans un premier temps à détailler les concepts d'instabilités convective et absolue de façons similaires à [33] mais appliqués à la fibre optique. Ensuite nous développons d'une manière générale une méthode qui permet de déterminer le seuil absolu, ainsi que la nature convectif ou absolu de l'instabilité en fonction de la dérive des fronts avant et arrière de la perturbation localisée afin de délimiter la zone d'instabilité. En dernier lieu, l'application de cette méthode à la fibre optique sera présentée.

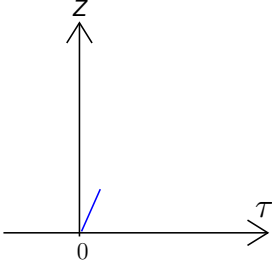
2.3.1 Approche théorique de l'instabilité convective et absolue

Tout d'abord nous cherchons à mettre en évidence les régimes convectif et absolu. Pour réussir cela, il suffit de suivre l'évolution d'une perturbation localisée au cours de la propagation. Pour déterminer mathématiquement les seuils de ces deux régimes, une analyse de stabilité linéaire classique n'est plus suffisante. En effet, nous ne nous intéressons plus uniquement à la réponse spatiale (suivant Z) à une perturbation, mais à la réponse spatio-temporelle. Lorsque le système est dans un état instable, une perturbation appliquée en $\tau = 0$ à l'entrée de la fibre ($Z = 0$) va entraîner les points voisins hors de leur état stationnaire. Afin d'étudier l'évolution de cette perturbation, nous introduisons la fonction de Green causale $G(\tau, Z)$, qui est la réponse impulsionnelle de l'instabilité considérée [33], définie par

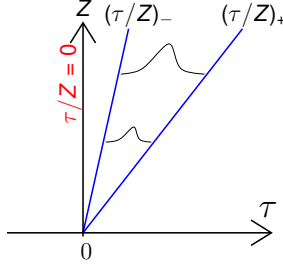
$$D \left[-i \frac{\partial}{\partial \tau}, i \frac{\partial}{\partial Z}; \mu \right] G(\tau, Z) = \delta(\tau) \delta(Z) \quad (2.27)$$

où $D[-i\partial/\partial\tau, i\partial/\partial Z; \mu]$ est un opérateur différentiel de l'espace physique (τ, Z) directement associé à la relation de dispersion $D[\Omega, K, \mu] = 0$ définie dans l'espace spectral (Ω, K) , μ est le paramètre de contrôle du système et δ est la fonction delta de Dirac.

(a) Régime stable



(b) Instabilité convective



(c) Instabilité absolue

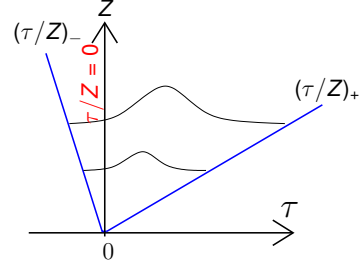


FIGURE 2.13: L'évolution de l'enveloppe de la perturbation dans le plan (τ, Z) dans les régimes stable (a), convectivement instable (b) et absolument instable (c). La perturbation est limitée par les rayons (τ/Z) de croissance temporelle nulle : $(\tau/Z)_-$ pour le front montant, $(\tau/Z)_+$ pour le front descendant.

Le système est :

- linéairement stable si $\lim_{Z \rightarrow \infty} G(\tau, Z) = 0$ le long de tous les rayons $\tau/Z = \text{constante}$ [figure 2.13(a)] ;
- linéairement instable si $\lim_{Z \rightarrow \infty} G(\tau, Z) = \infty$ suivant au moins un rayon $\tau/Z = \text{constante}$ [figures 2.13(b)-(c)].

En d'autres termes, linéairement stable ou instable revient à identifier s'il y a une amplification suivant un des rayons τ/Z qui représentent les directions d'évolution du paquet d'onde dans l'espace (τ, Z) . Parmi les situations linéairement instables, nous distinguons les deux types de réponses impulsionnelles différentes suivantes

- le système est convectivement instable si $\lim_{Z \rightarrow \infty} G(\tau, Z) = 0$ suivant le rayon $\tau/Z = 0$ [figure 2.13(b)] ;
- le système est absolument instable si $\lim_{Z \rightarrow \infty} G(\tau, Z) = \infty$ suivant le rayon $\tau/Z = 0$ [figure 2.13(c)].

L'équation (2.27) peut être immédiatement résolue dans l'espace (Ω, K) et la fonction de Green $G(\tau, Z)$ est exprimée comme une double intégrale de Fourier telle que [33]

$$G(\tau, Z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_F \int_L \frac{e^{i(\Omega\tau - KZ)}}{D[\Omega, K, \mu]} dK d\Omega \quad (2.28)$$

ou le chemin d'intégration L dans l'espace complexe des nombres d'onde K est une ligne horizontale qui se localise au dessus de tous les singularités de l'intégrale de manière à satisfaire le principe de causalité, à savoir $G(\tau, Z) = 0$ pour tous τ lorsque $Z < 0$. Et le chemin d'intégration F dans l'espace complexe des fréquences Ω est initialement pris le long de l'axe réel. En supposant le cas d'un seul mode discret spatial $K(\Omega)$ présent dans le système pour la simplicité, nous pouvons simplifier l'intégrale spatiale

dans la fonction de Green [équation (2.28)] à partir d'un calcul de résidu dans l'espace complexe des K au point $K = K(\Omega)$. $G(\tau, Z)$ prend donc la forme suivante [33]

$$G(\tau, Z) = -\frac{i}{(2\pi)} H(Z) \int_F \frac{e^{i[\Omega\tau - K(\Omega)Z]}}{\frac{\partial D}{\partial K}[\Omega, K(\Omega), \mu]} d\Omega \quad (2.29)$$

où $H(Z)$ est la fonction de Heaviside. L'enjeu est de déterminer le comportement asymptotique ($Z \rightarrow +\infty$) de la fonction de Green, c'est à dire de l'intégrale (2.29). En déformant le chemin d'intégration F pour qu'il passe par le point selle Ω^s qui domine la fonction de Green aux temps longs, nous pouvons évaluer asymptotiquement la fonction de Green $G(\tau, Z)$ en utilisant la méthode de steepest descent. En suivant la démarche standard, nous obtenons [33]

$$G(\tau, Z) \sim -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{e^{i[\Omega^s\tau - K(\Omega^s)Z]}}{\left. \frac{\partial D}{\partial K} \right|_{\Omega^s} \left(\left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} \right|_{\Omega^s} Z \right)^{1/2}} \quad (2.30)$$

La fonction de Green prend une forme de paquet d'ondes dans le plan (τ, Z) . Suivant chaque rayon τ/Z dans le paquet d'ondes, la réponse est dominée par une fréquence complexe spécifique Ω^s définie comme suit

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \Omega} \right|_{\Omega^s} = V \quad (2.31)$$

où $V = \tau/Z$ représente la dérive, c'est une grandeur purement réelle.

2.3.1.1 Méthode du point selle

La condition (2.31) n'est autre qu'une généralisation à K et Ω complexes de la méthode de la phase stationnaire [34]. En effet, la constance de la phase s'écrit comme

$$KZ - \Omega\tau = \text{constant}, \quad \forall \Omega \quad (2.32)$$

et la dérivée de cette phase constante $\partial(KZ - \Omega\tau)/\partial\Omega|_{\Omega^s} = 0$ nous permet de trouver la relation (2.31). En général, K et Ω sont tous les deux complexes

$$K = K_r + iK_i \quad (2.33)$$

$$\Omega = \Omega_r + i\Omega_i \quad (2.34)$$

En tenant compte du caractère complexe de K et Ω , la relation (2.31) peut se développer de deux manières différentes grâce aux conditions de Cauchy,

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \Omega} \right|_{\Omega^s} = \left. \frac{\partial K_r}{\partial \Omega_r} \right|_{\Omega^s} + i \left. \frac{\partial K_i}{\partial \Omega_r} \right|_{\Omega^s} = V \quad (2.35)$$

$$= \left. \frac{\partial K_i}{\partial \Omega_i} \right|_{\Omega^s} - i \left. \frac{\partial K_r}{\partial \Omega_i} \right|_{\Omega^s} = V \quad (2.36)$$

Or nous avons déjà mentionné que V est une grandeur purement réelle, les équations (2.35) et (2.36) peuvent se transformer en deux conditions en isolant la partie réelle et

la partie imaginaire de la façons suivante

$$\left. \frac{\partial K_r}{\partial \Omega_r} \right|_{\Omega^s} = \left. \frac{\partial K_i}{\partial \Omega_i} \right|_{\Omega^s} = V \quad (2.37)$$

$$\left. \frac{\partial K_i}{\partial \Omega_r} \right|_{\Omega^s} = \left. \frac{\partial K_r}{\partial \Omega_i} \right|_{\Omega^s} = 0 \quad (2.38)$$

Pour mieux caractériser les régimes convectif et absolu, nous faisons intervenir une grandeur importante $\sigma(\Omega)$ qui représente le gain total spatio-temporel de la perturbation. L'expression de $\sigma(\Omega)$ est obtenue en remplaçant les expressions complexes de K et Ω dans la partie exponentielle de l'expression de la perturbation (2.5) telle que

$$e^{-i(KZ - \Omega\tau)} = e^{(K_i - \Omega_i V)Z} e^{-i(K_r Z - \Omega_r \tau)} = e^{\sigma(\Omega)Z} e^{-i(K_r Z - \Omega_r \tau)} \quad (2.39)$$

$$\sigma(\Omega) = K_i(\Omega) - \Omega_i V \quad (2.40)$$

En effet, à chaque fréquence dominante Ω^s est associée une dérive V . Pour les dérivés V bénéficiant de gain total positif $\sigma(V) > 0$, leur fréquences Ω^s correspondantes sont déstabilisées et amplifiées au cours de la propagation, l'ensemble des Ω^s déstabilisées forme un paquet d'ondes et chaque composante Ω^s de ce paquet d'onde évolue avec sa dérive correspondante dans le plan (τ, Z) . Parmi toutes ces dérivés activées (déstabilisées), nous nous intéressons en particulier aux deux dérivés V_- et V_+ qui possèdent un gain total $\sigma(V_-) = \sigma(V_+) = 0$. Ces deux dérivés correspondent aux dérivés des fronts avant et arrière du paquet d'ondes, elles limitent l'évolution du paquet d'ondes dans le diagramme spatio-temporel (τ, Z) . V_- désigne la dérive du front montant du paquet d'ondes, elle est la plus petite parmi toutes les dérivés activées et V_+ désigne la dérive du front descendant du paquet d'ondes, elle est la plus grande parmi toutes les dérivés activées. Avant d'entrer dans les détails de l'étude de l'instabilité convective et absolue, nous essayons de donner un point de vue simple sur ces deux régimes d'instabilité. Pour cela, nous pouvons faire intervenir deux vitesses d'un paquet d'ondes, la première est la vitesse de l'élargissement du paquet d'ondes et la deuxième est la vitesse de déplacement de l'ensemble du paquet d'ondes. Lorsque la vitesse de l'élargissement est inférieur à celle du déplacement de l'ensemble, le paquet d'ondes quitte le domaine d'observation avant qu'il se développe, le système est convectivement instable (régime convectif). Au cas contraire, le paquet d'ondes se développe plus rapidement que sa vitesse de déplacement, il finit par envahir tout le domaine d'observation et entraîne une instabilité globale, le système est absolument instable (régime absolu). La figure 2.14 représente le gain total σ en fonction de la dérive V pour différents régimes et seuils d'instabilité ainsi que l'évolution du paquet d'ondes dans le plan (τ, Z) . Dans la suite, nous allons caractériser chacun de ces régimes et seuils d'instabilité avec la courbe du gain total σ en fonction de V et les dérivés des fronts montant et descendant, respectivement V_- et V_+ .

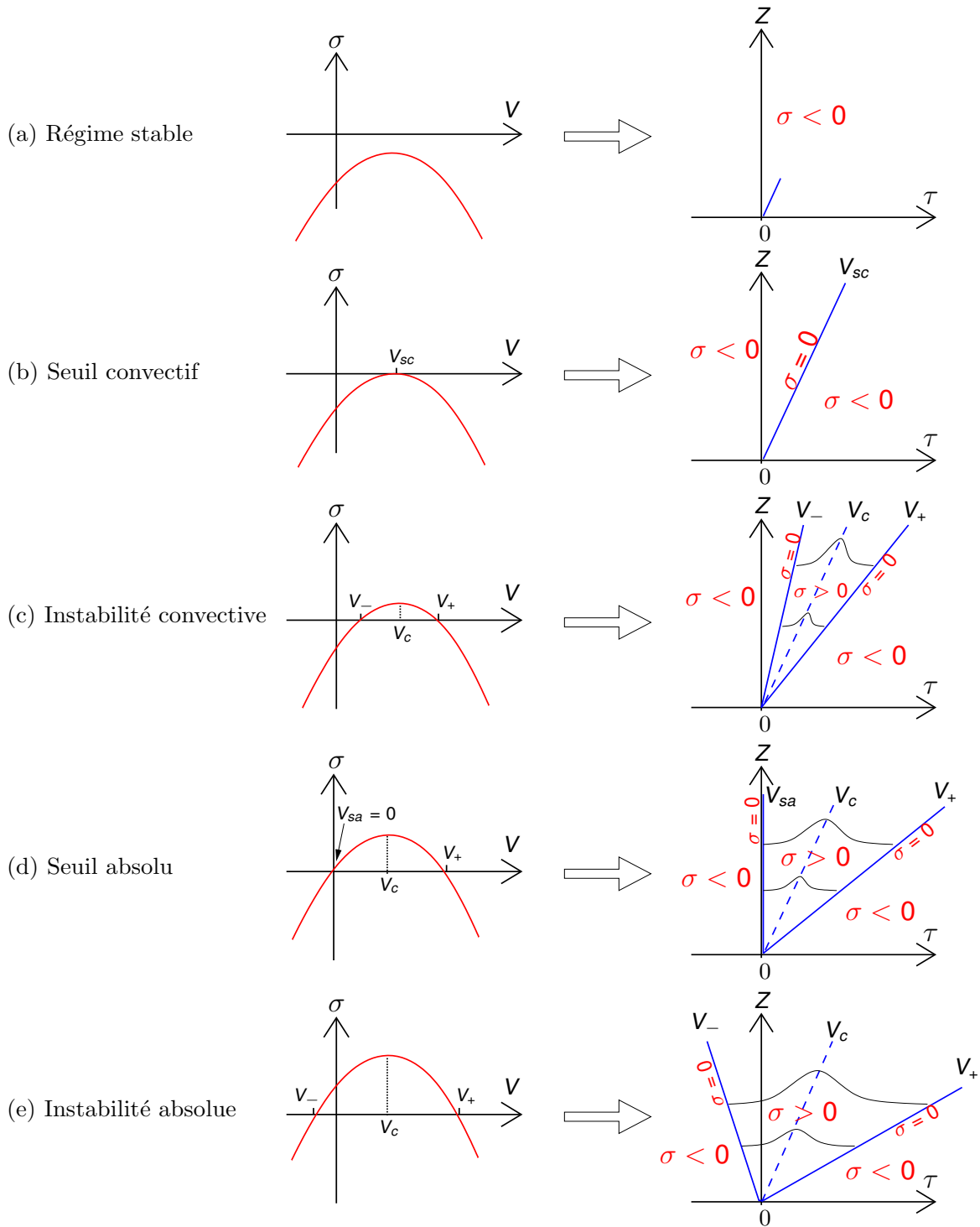


FIGURE 2.14: En première colonne : la courbe de gain total ainsi que la dérive des fronts V_- et V_+ des différents régimes dynamiques. En deuxième colonne : l'évolution de l'enveloppe de la perturbation limitée par la dérive des fronts V_- et V_+ dans le plan (τ, Z) pour chaque régime dynamique de la première colonne. V_{sc} et V_{sa} désignent respectivement les dérives au seuil convectif et absolu. V_c est la dérive à gain total maximum, elle représente aussi la dérive de l'ensemble du paquet d'ondes. Le paramètre de contrôle croît de (a) à (e). Noter que le régime absolu est caractérisé par $V_-V_+ < 0$, alors qu'en régime convectif $V_-V_+ > 0$.

2.3.1.2 Instabilité convective dans les systèmes dissipatifs

L'instabilité convective apparaît lorsqu'au moins une fréquence Ω^s (associé à une dérive V) possède un gain total σ positif. Lors du passage du régime stable vers le régime convectif, une partie de la courbe de gain total passe d'une valeur négative vers une valeur positive, le seuil convectif désigne le moment où le maximum de la courbe de gain total σ devient nul. La dérive qui correspond au maximum de gain total est la dérive qui apparaît au seuil, nous la notons V_{sc} et sa fréquence associée est notée Ω^{sc} . Sous ces conditions, toutes les composantes spectrales d'une perturbation localisée s'atténuent sauf Ω^{sc} qui n'est ni atténuée ni amplifiée et elle se propage avec la dérive V_{sc} [voir figure 2.14(b)]. Le maximum de gain total est défini par $\partial\sigma/\partial V|_{\Omega^s} = 0$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial V}\Big|_{\Omega^s} &= \frac{\partial K_i}{\partial V}\Big|_{\Omega^s} - \Omega_i^s - V \frac{\partial\Omega_i}{\partial V}\Big|_{\Omega^s} = 0 \\ &= \frac{\partial K_i}{\partial\Omega_r}\Big|_{\Omega^s} \frac{\partial\Omega_r}{\partial V}\Big|_{\Omega^s} + \frac{\partial K_i}{\partial\Omega_i}\Big|_{\Omega^s} \frac{\partial\Omega_i}{\partial V}\Big|_{\Omega^s} - \Omega_i^s - V \frac{\partial\Omega_i}{\partial V}\Big|_{\Omega^s} = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Selon les relations (2.37) et (2.38), nous avons $\partial K_i/\partial\Omega_i|_{\Omega^s} = V$ et $\partial K_i/\partial\Omega_r|_{\Omega^s} = 0$, ce qui nous permet de simplifier des termes dans l'expression (2.41) et il ne reste plus qu'un seul terme

$$\frac{\partial\sigma}{\partial V}\Big|_{\Omega^s} = -\Omega_i^s = 0 \quad (2.42)$$

La relation (2.42) nous permet de déduire que la fréquence de gain total maximum Ω^{sc} est purement réelle,

$$\Omega_i^{sc} = 0, \quad (2.43)$$

$$\Omega^{sc} \in \mathbf{R} \quad (2.44)$$

A partir de la méthode de point de selle, nous avons

$$\frac{\partial K}{\partial\Omega}\Big|_{\Omega^{sc}} = \frac{\partial K_r}{\partial\Omega}\Big|_{\Omega^{sc}} + i \frac{\partial K_i}{\partial\Omega}\Big|_{\Omega^{sc}} = V_{sc} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial K_r}{\partial\Omega}\Big|_{\Omega^{sc}} = V_{sc} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial\Omega}\Big|_{\Omega^{sc}} = 0 \quad (2.47)$$

Or $\sigma = 0$ au seuil convectif, en tenant compte des relations (2.40) et (2.43), nous obtenons

$$\sigma = K_i(\Omega^{sc}) - \Omega_i^{sc} V_{sc} = 0 \implies K_i(\Omega^{sc}) = 0 \quad (2.48)$$

La démarche analytique pour déterminer la valeur du paramètre de contrôle au seuil convectif consiste à trouver d'abord la fréquence Ω^{sc} à partir des conditions (2.46) et (2.47), ensuite injecter sa valeur dans l'équation (2.48). En résumé, au seuil convectif c'est bien le mode le plus instable qui apparaît avec une dérive qui maximise le gain total σ . Après le seuil convectif, le système entre en régime convectif et l'augmentation

du paramètre de contrôle conduit à la déstabilisation de plus en plus de fréquences Ω^s (le gain total correspondant devient positif). Au cours de la propagation, la perturbation initiale donne naissance à un paquet d'ondes (l'ensemble de Ω^s déstabilisés) borné dans le plan (τ, Z) par V_- et V_+ [voir figure 2.14(c)]. En régime convective, toutes les dérivées déstabilisées V [$\sigma(V) \geq 0$] possèdent le même signe, y compris V_- et V_+ , ce qui signifie que la perturbation s'éloignera à l'infini de sa position initiale aux temps longs, elle finira par quitter le domaine d'observation : le système est convectivement instable.

2.3.1.3 Instabilité absolue dans les systèmes dissipatifs

Contrairement au cas précédent, les dérivées déstabilisées ($\sigma > 0$) peuvent avoir des signes différents en régime absolu. V_- et V_+ se dirigent dans des sens opposés, la perturbation s'étend donc dans tout l'espace [voir figure 2.14.(e)], ceci provoque une instabilité globale. Le seuil absolu, quand il existe, correspond au moment où V_- ou V_+ s'annule pour changer de signe, dans notre exemple, c'est V_- qui s'annule [voir figure 2.14.(d)]. Nous nous intéressons donc à la fréquence qui est associée à $V_- = 0$ au seuil absolu, elle est notée Ω^{sa} , son gain total $\sigma(\Omega^{sa})$ est nul au seuil absolu. Cette fréquence ne correspond plus au maximum du gain total, elle est donc complexe,

$$\Omega^{sa} \in \mathbf{C} \quad (2.49)$$

Nous appliquons la méthode du point selle complexe (2.37) et (2.38) à cette fréquence Ω^{sa} comme suit

$$\left. \frac{\partial K_r}{\partial \Omega_r} \right|_{\Omega^{sa}} = \left. \frac{\partial K_i}{\partial \Omega_i} \right|_{\Omega^{sa}} = 0 \quad (2.50)$$

$$\left. \frac{\partial K_i}{\partial \Omega_r} \right|_{\Omega^{sa}} = \left. \frac{\partial K_r}{\partial \Omega_i} \right|_{\Omega^{sa}} = 0 \quad (2.51)$$

Deux de ces 4 relations suffisent à définir $\Omega^{sa} = \Omega_r^{sa} + i\Omega_i^{sa}$, néanmoins il faut en choisir une dans chaque ligne pour ne pas avoir d'informations répétitives. En effet, l'annulation simultanée des dérivées $\partial K_i / \partial \Omega_i |_{\Omega^{sa}} = 0$ et $\partial K_i / \partial \Omega_r |_{\Omega^{sa}} = 0$ montre que Ω^{sa} est un point selle. Cela implique l'existence de point double dans l'espace complexe de Ω (voir figure 2.15). Du point de vue de la dynamique (existence du réelle instabilité absolue), cette condition est nécessaire mais non suffisante. Il faut y ajouter une condition de pincement (pinching condition) où les courbe pincent le chemin d'intégration F dans l'espace complexe de Ω et venant de part et d'autre de l'axe réel ($\Omega_i = 0$) [figure 2.15], l'intégrale (2.29) donnant la réponse impulsionnelle $G(\tau, Z)$ du système à une perturbation localisée n'est plus calculable, il se produit un changement de nature de l'instabilité, le régime devient absolu. Cette condition de pincement sert souvent à vérifier le seuil absolu qui est trouvé par les relations (2.50) et (2.51), pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [29, 33].

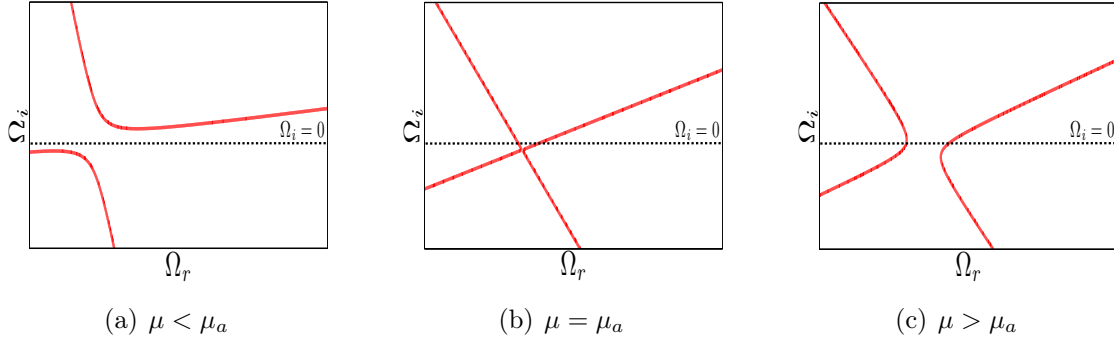


FIGURE 2.15: Exemple de procédure de pincement suivant l'augmentation du paramètre de contrôle μ . Dans chaque cas, la courbe $K_i = 0$ est représentée dans l'espace complexe (Ω_r, Ω_i) . (a) Les deux courbes arrivent de part et d'autre de l'axe réel ($\Omega_i = 0$); (b) un des deux courbes a traversé l'axe réel avant le pincement; (c) séparation des branches après le pincement.

2.3.2 Méthode pour trouver la dérive des fronts du paquet d'ondes

Dans cette section, nous cherchons à démontrer une méthode qui nous permet de trouver les expressions de V_+ et V_- en utilisant uniquement la relation de dispersion quelque soit le système non linéaire. Notre point de départ est la relation de dispersion approchée qui est un développement de Taylor autour de la fréquence à gain maximum Ω_c de la relation de dispersion générale tel que

$$K_a(\Omega) \approx K_c + K'_c(\Omega - \Omega_c) + \frac{1}{2}K''_c(\Omega - \Omega_c)^2 \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{aligned} K_c &= K(\Omega_c) = K_{cr} + iK_{ci} \\ K'_c &= \left. \frac{\partial K}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_c} = K'_{cr} = V_c \\ K''_c &= \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} \right|_{\Omega_c} = K''_{cr} + iK''_{ci} \\ \Omega &= \Omega_r + i\Omega_i \end{aligned} \quad (2.53)$$

En remplaçant l'équation (2.52) dans l'équation (2.31), nous pouvons exprimer la fréquence dominante aux temps longs Ω^s en fonction des termes de (2.53) de la façons suivante

$$\Omega_i^s = \frac{K''_{ci}(V_c - V)}{|K''_c|^2} \quad (2.54)$$

$$\Omega_r^s = -\frac{K''_{cr}(V_c - V)}{|K''_c|^2} + \Omega_c \quad (2.55)$$

Ici nous faisons intervenir le gain total σ correspondant à Ω^s :

$$\sigma(V) = K_i^s - V\Omega_i^s \quad (2.56)$$

où K_i^s peut être calculé en remplaçant Ω par Ω^s dans l'équation (2.52). Les fronts montant et descendant du paquet d'ondes ont un gain total nul et leur dérivées V_- et V_+ sont calculées en résolvant l'équation $\sigma(V = V_{\pm}) = 0$. V_- et V_+ s'écrivent finalement

$$V_{\pm} = V_c \pm \sqrt{-\frac{2K_{ci}|K_c''|^2}{K_{ci}''}} \quad (2.57)$$

Ici $K_{ci}'' < 0$, car K_{ci} est le maximum de K_i . Dans l'expression (2.57), nous avons exprimé la dérive des fronts du paquet d'ondes d'une manière générale sans connaître l'expression précise de la relation de dispersion. Cela signifie que ces expressions sont génériques.

2.3.3 La dérive des fronts montant et descendant du paquet d'ondes en propagation libre

En utilisant les expressions déjà calculées de la relation (2.17), nous remplaçons chaque terme de l'expression (2.57) par l'expression correspondante à la fibre pour obtenir l'expression de la dérive des fronts dans la fibre comme suit

$$V_{\pm} = 3b_3P + 3PR_T \pm \sqrt{2(4 + 9b_3^2P)(P + \frac{1}{2}P^2R_T^2)} \quad (2.58)$$

L'expression en dehors de la racine représente la dérive de l'ensemble du paquet d'ondes V_c qui est déjà étudiée dans la section 2.2. Dans la racine nous avons les termes de la TOD (b_3) et de l'effet Raman (R_T). Selon l'expression (2.58), les dérivées des fronts V_- et V_+ sont symétriques par rapport à la dérive V_c et peuvent avoir le même signe ou des signes opposés, tout dépend de la nature d'instabilité ($V_+V_- < 0$ pour l'instabilité absolue, $V_+V_- > 0$ pour l'instabilité convective). Dans la suite de cette section, nous allons étudier les différentes contributions à cette dérive des fronts en considérant l'évolution d'un paquet d'ondes initialisée par une perturbation localisée.

2.3.3.1 La dérive des fronts en absence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman – Taux d'élargissement du paquet d'ondes

En absence de la TOD et de l'effet Raman, la dérive des fronts limitant le paquet d'ondes n'est pas nulle, mais son expression (2.58) prend une forme beaucoup plus simple

$$V_{\pm} = \pm 2\sqrt{2P} \quad (2.59)$$

où la dérive des fronts ne dépend que de l'intensité normalisée de la pompe P . Puisque la dérive de l'ensemble du paquet d'onde V_c est nulle, V_- et V_+ sont symétriques par rapport à $V_c = 0$, ce qui signifie que $V_- = -V_+$ et représentent simplement le taux d'élargissement du paquet d'ondes causé par la GVD (β_2) et l'effet Kerr.

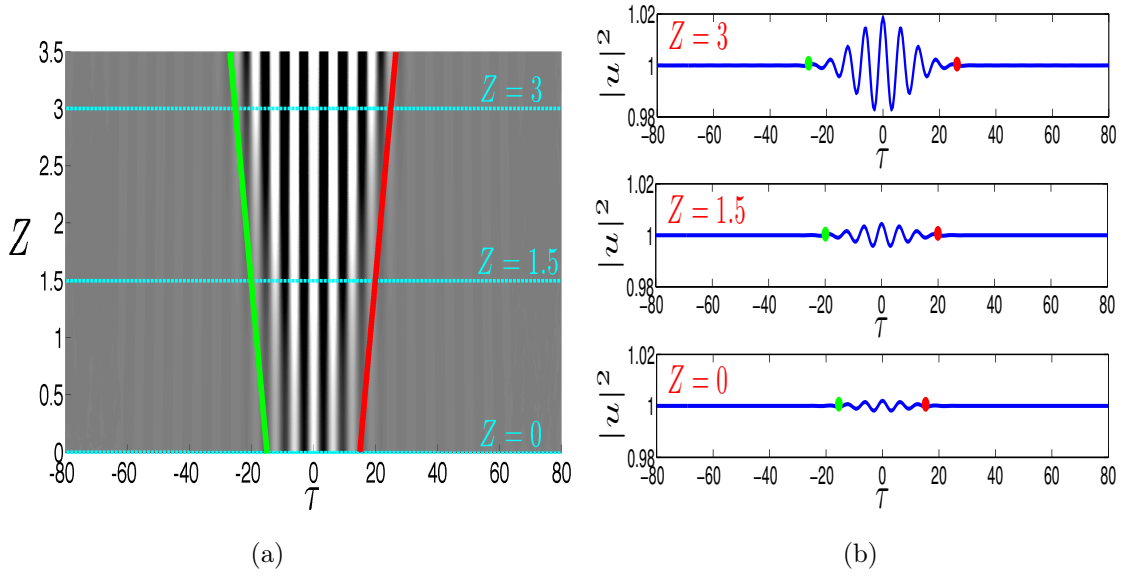


FIGURE 2.16: (a) L'évolution du paquet d'ondes dans le plan (τ, Z) , les droites verte et rouge représentent respectivement l'évolution des fronts montant et descendant, limitant la zone d'amplification du paquet d'ondes. (b) Les profils d'intensité des lignes en pointillés bleus correspondant aux trois distances de propagations avec $P = 1$, $b_3 = 0$ et $R_T = 0$. Les points vert et rouge pointent respectivement les fronts montant et descendant du paquet d'ondes.

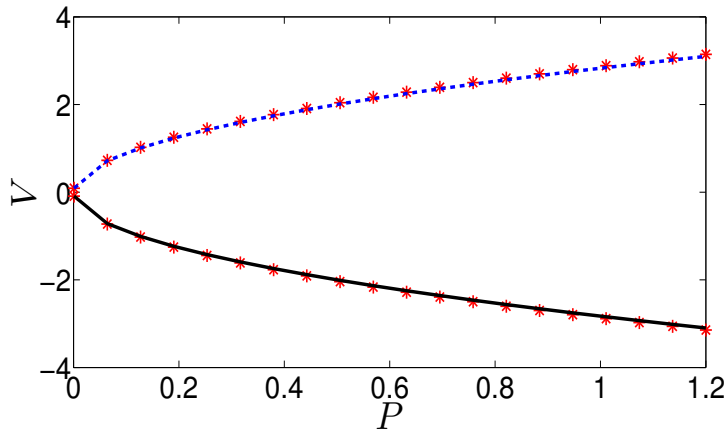


FIGURE 2.17: V_{\pm} en fonction de P avec $b_3 = R_T = 0$. La courbe noire solide représente V_- analytique, la courbe bleue en pointillé représente V_+ analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques.

L'évolution des deux fronts du paquet d'ondes est représentée dans la figure 2.16 où l'amplification du paquet d'ondes au cours de sa propagation dans la fibre optique est bien limitée par deux droites symétrique par rapport à la ligne $\tau = 0$ dans l'espace spatio-temporel. Entre ces deux droites toutes les composantes spectrales bénéficient du gain total positif $\sigma > 0$, c'est la zone d'instabilité où la perturbation est amplifiée. En dehors de cette zone la solution stationnaire est stable avec un gain total négatif

$\sigma < 0$. Pour mesurer numériquement la dérive d'un point du paquet d'onde, il suffit de tracer son évolution dans le diagramme spatio-temporel (τ, Z) , l'inverse de la pente de cette courbe d'évolution nous donne la valeur de la dérive de ce point. Par conséquent, V_- et V_+ sont égales respectivement à l'inverse de la pente des droites verte et rouge dans la figure 2.16. L'évolution analytique et numérique de V_- et de V_+ en fonction de P est représentée dans la figure 2.17 dont les résultats numériques sont obtenus en intégrant l'équation (2.2). Comme nous pouvons le voir sur la figure, l'accord entre les prédictions analytiques (étoiles) et les résultats numériques (courbes) est excellent.

2.3.3.2 La dérive des fronts en présence de la dispersion d'ordre trois seule

L'expression de la dérive des fronts correspondants à cette situation prend la forme suivante

$$V_{\pm} = 3b_3P \pm \sqrt{2P(4 + 9b_3^2P)} \quad (2.60)$$

où les deux fronts du paquet d'ondes ne dérivent plus de façon symétrique dans le plan (τ, Z) et le sens de l'asymétrie change en fonction du signe de la TOD : pour $b_3 < 0$ l'ensemble du paquet d'ondes dérive vers les τ décroissants, cela implique que le front montant dérive plus rapidement que le front descendant en valeur absolue [voir figure 2.18(a)]; pour $b_3 > 0$ l'ensemble du paquet d'ondes dérive vers les τ croissants, cela implique que le front montant dérive moins rapidement que le front descendant en valeur absolue [voir figure 2.18(b)].

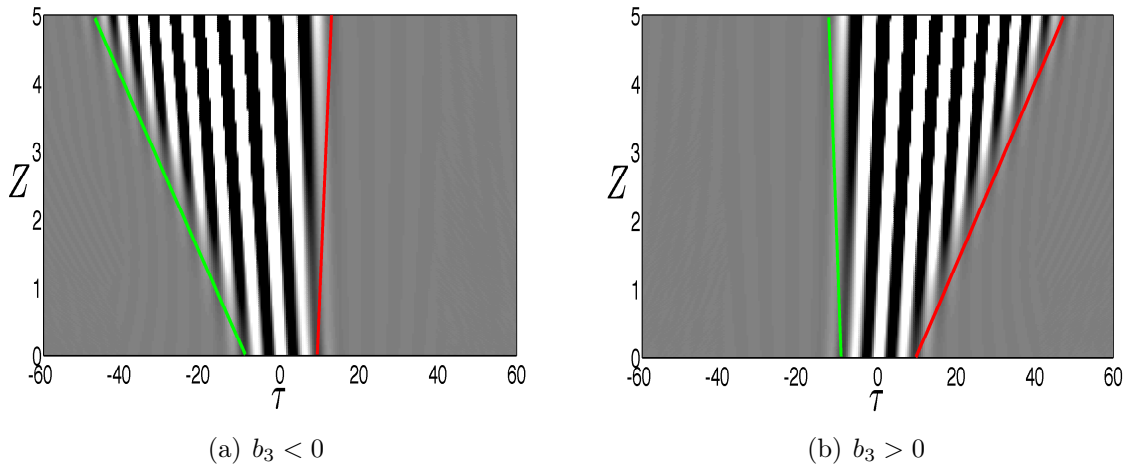


FIGURE 2.18: L'évolution de la perturbation dans le plan (τ, Z) en présence de la TOD. Les droites verte et rouge représentent respectivement l'évolution du front montant et descendant.

D'après l'expression (2.60), V_- et V_+ dépendent à la fois de l'intensité de la pompe P et du coefficient de la TOD (b_3). Leurs dépendances sont testées séparément à l'aide de simulations numériques. La figure 2.19 montre l'évolution de V_{\pm} en fonction de b_3 . Dans le domaine de $b_3 < 0$, nous observons que $|V_-|$ est plus importante que $|V_+|$, lorsque b_3 diminue, $|V_-|$ augmente beaucoup plus vite que $|V_+|$. Dans le domaine de $b_3 > 0$, $|V_+|$ est plus importante que $|V_-|$, lorsque b_3 augmente, $|V_+|$ augmente beaucoup plus vite que $|V_-|$. En effet, quand b_3 change de signe, V_+ se transforme en

V_- et réciproquement. Pour $|b_3|$ petit, l'effet de la TOD est assez faible, de sorte que V_- et V_+ sont proches l'un de l'autre en valeur absolue. Quant à $|b_3|$ grand, l'effet de la TOD devient dominant, par conséquent, V_- et V_+ sont très différentes en valeur absolue. Les résultats numériques sont également représentés dans la même figure, où l'accord avec les prédictions analytiques est excellent. Ensuite, la dépendance de V_{\pm} en P est tracée dans la figure 2.20 avec $b_3 = 1 > 0$. Nous observons que l'augmentation de P entraîne l'augmentation de $|V_+|$ beaucoup plus vite que $|V_-|$ (nous obtenons des résultats similaires pour $b_3 < 0$), et les résultats numériques sont ici aussi en très bon accord avec les prédictions analytiques.

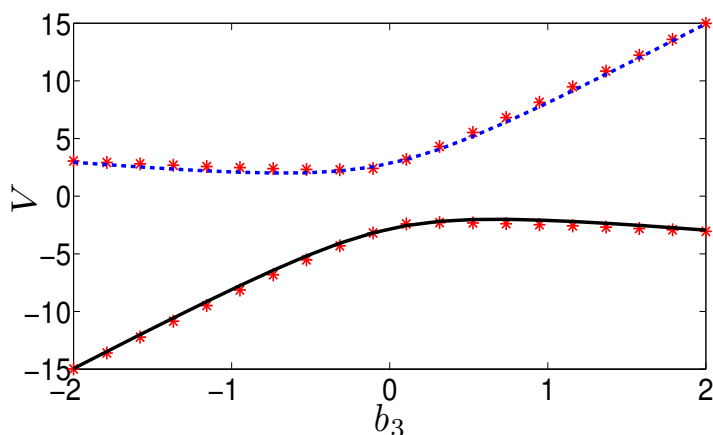


FIGURE 2.19: V_{\pm} en fonction de b_3 avec $P = 1$, $R_T = 0$. La courbe noire solide représente V_- analytique, la courbe bleue en pointillé représente V_+ analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques.

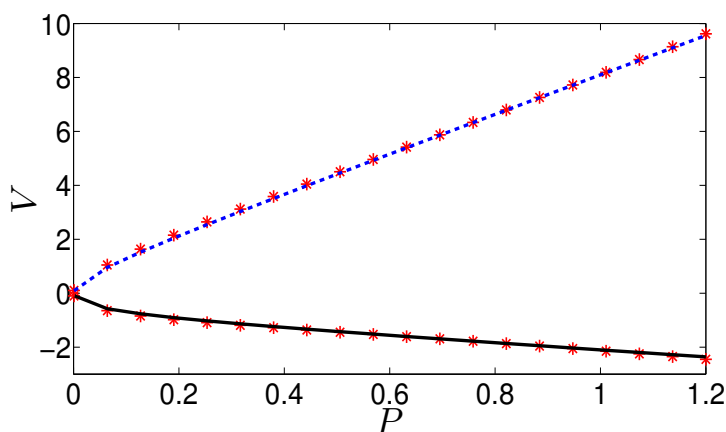


FIGURE 2.20: V_{\pm} en fonction de P avec $b_3 = 1$, $R_T = 0$. La courbe noire solide représente V_- analytique, la courbe bleue en pointillé représente V_+ analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques.

2.3.3.3 La dérive des fronts en présence de la diffusion Raman stimulée seule

Puisque le coefficient de l'effet Raman est toujours positif ($R_T > 0$), l'effet Raman sur les fronts du paquet d'ondes est semblable au cas $b_3 > 0$: la dérive du front descendant V_+ est plus importante par rapport à celle du front montant V_- en valeur absolue. L'expression de V_{\pm} dans ce cas s'écrit

$$V_{\pm} = 3PR_T \pm \sqrt{8\left(P + \frac{1}{2}P^2R_T^2\right)} \quad (2.61)$$

où V_{\pm} dépendent de l'intensité normalisée de la pompe P et le coefficient de l'effet Raman (R_T). Or comme cela a été discuté dans la section 2.2.3, R_T est très petit devant 1 en régime picoseconde ($R_T \sim 0.001$), ce qui implique que la dérive induite par l'effet Raman est faible. Les évolutions de V_- et de V_+ en fonction de P sont représentées dans la figure 2.21 avec $R_T = 0.003$, dans la quelle il semble que les deux fronts évoluent de façon symétrique. Mais en effet la différence est assez faible. En valeur numérique, l'asymétrie causée par l'effet Raman donne $V_- = -3.056$ et $V_+ = 3.078$ à $P = 1.2$. La différence entre $|V_-|$ et $|V_+|$ est de l'ordre de 0.01 ce qui n'est pas visible dans la figure 2.21.

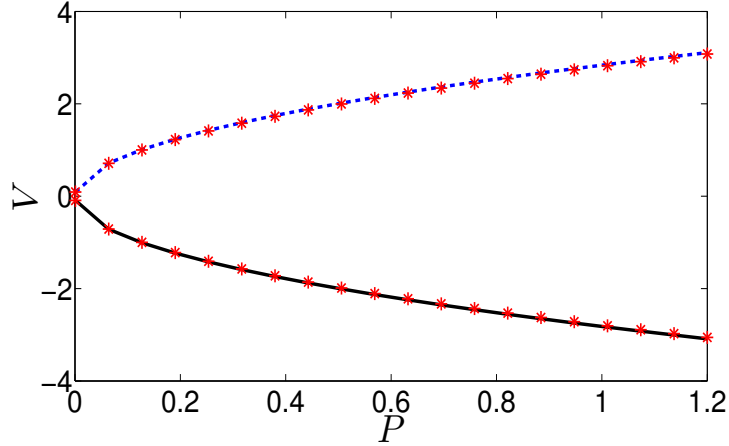


FIGURE 2.21: V_{\pm} en fonction de P avec $R_T = 0.003$, $b_3 = 0$. La courbe noire solide représente V_- analytique, la courbe bleue en pointillé représente V_+ analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques.

2.3.3.4 La dérive des fronts à l'issu de la compensation de la dérive de l'ensemble du paquet d'ondes

Dans la section 2.2.4, nous avons étudié la compensation des dérives provoquées par la TOD et l'effet Raman sur l'ensemble du paquet d'ondes dans une fibre optique, maintenant nous souhaitons savoir comment la dérive des fronts du paquet d'ondes est modifiée pendant cette compensation. Nous revenons d'abord à l'équation générale de la dérive des fronts [équation (2.58)], dans laquelle nous appliquons la condition de la compensation $b_3 = -R_T$, l'expression de V_{\pm} devient

$$V_{\pm} = \pm \sqrt{2(4 + 9b_3^2P)\left(P + \frac{1}{2}P^2R_T^2\right)} \quad (2.62)$$

Nous constatons que la dérive des fronts redevient symétrique par rapport à $V = 0$ comme dans le cas où la TOD et l'effet Raman étaient absents (section 2.3.3.1). Mais les expressions de V_{\pm} sont différentes. Dans la section 2.3.3.1, V_- et V_+ ne dépendent que de l'intensité normalisée de la pompe P , elles décrivent simplement le taux d'élargissement du paquet d'ondes causé par la GVD (β_2) et l'effet Kerr. Cependant, dans le cas de la compensation, V_- et V_+ dépendent à la fois de P , b_3 et R_T , elles décrivent maintenant un taux d'élargissement du paquet d'ondes plus complexe qui inclut aussi l'effet de la TOD et celui de la diffusion Raman stimulée.

2.3.3.5 Le seuil absolu dans la fibre optique en propagation libre

Un système dissipatif est un système qui subit des pertes d'énergie. Dans un tel système, l'instabilité apparaît, lorsque nous disposons d'assez d'énergie pour compenser les pertes, c'est donc le seuil d'instabilité. L'approche théorique de l'instabilité convective et absolue (section 2.3.1) et la méthode pour trouver la dérive des fronts d'un paquet d'ondes (section 2.3.2) sont relativement facilement applicables aux systèmes dissipatifs. Dans ce chapitre, nous les avons appliquées à la fibre optique en propagation libre. En effet, la fibre optique atténue le signal en propagation par absorption linéaire ou non linéaire, néanmoins dans une fibre il est possible de réduire considérablement ces pertes de sorte que nous pouvons les négliger dans le modèle mathématique de la fibre optique (GNLSE). La fibre optique est donc considérée comme un système conservatif. Les résultats des sections précédentes montrent que la méthode que nous avons développée pour trouver la dérive des fronts d'un paquet d'ondes fonctionne aussi bien dans la fibre optique. Quant à l'instabilité, puisque les pertes ne sont pas considérées dans notre modèle de la fibre, elle apparaît dès que la pompe est non nulle, ce qui se traduit par une absence du seuil. En l'absence de la TOD et de l'effet Raman, quelque soit la valeur de l'intensité de la pompe P , V_- et V_+ sont toujours symétriques par rapport à $V = 0$ et possèdent des signes opposées. Par conséquent, le système de fibre optique en propagation libre est toujours en régime d'instabilité absolue. En présence de la TOD et/ou de l'effet Raman, V_- et V_+ deviennent asymétriques ($V_- \neq -V_+$), nous souhaitons donc savoir s'il existe une valeur de b_3 ou R_T qui permet de faire basculer l'instabilité de la fibre optique du régime absolu vers le régime convectif. Dans la suite de notre analyse, nous introduisons le produit V_-V_+ pour caractériser mathématiquement le régime d'instabilité : l'instabilité est convective pour $V_-V_+ > 0$ (V_- et V_+ évoluent dans le même sens) ; elle est absolue si $V_-V_+ < 0$ (V_- et V_+ évoluent dans des sens opposés) et elle est au seuil absolu pour $V_-V_+ = 0$ (V_- ou V_+ s'annule pour changer de signe). En utilisant l'expression de V_{\pm} [équation (2.58)], nous trouvons l'expression du produit V_-V_+ comme suit

$$V_-V_+ = -8P - 9b_3^2P^2 - 9b_3^2P^3R_T^2 + 5P^2R_T^2 + 18b_3P^2R_T \quad (2.63)$$

Pour $b_3 = 0$ et $R_T = 0$, nous avons $V_-V_+ = -8P < 0$ avec P l'intensité de la pompe qui est toujours positive. Par conséquent, la fibre optique est en régime d'instabilité absolue, cette conclusion conforme les résultats précédents. Concernant le cas où $b_3 \neq 0$ et $R_T \neq 0$, nous traitons les problèmes séparément. Tout d'abord, nous considérons b_3 seul ($R_T = 0$), l'équation (2.63) devient $V_-V_+ = -8P - 9b_3^2P^2$ qui est toujours négative. La fibre incluant la TOD seule est toujours en régime absolu quelque soit la valeur de

b_3 , c'est un résultat surprenant, car la TOD peut induire des dérives importantes avec $b_3 \sim 1$ correspondant aux valeurs accessibles expérimentalement ($\beta_3 \sim 10^{-40} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$). Quant à l'effet Raman seul ($b_3 = 0$), l'équation (2.63) devient $V_- V_+ = -8P + 5P^2 R_T^2$, le produit $V_- V_+$ n'est pas forcément négatif avec la présence d'un terme positif venant de l'effet Raman ($5P^2 R_T^2$). En effet, ce terme est très faible à cause de la faible valeur de R_T ($R_T \sim 10^{-3}$) et nous avons $5P^2 R_T^2 \ll 8P$. Par conséquent, le produit $V_- V_+$ reste négatif. En dernier lieu, nous traitons le cas où la TOD et l'effet Raman sont présentés simultanément dans la fibre ($b_3 \neq 0, R_T \neq 0$). D'après l'expression (2.63), les deux derniers termes du membre de droite qui correspondent aux termes croisés entre la TOD et l'effet Raman rendent l'analyse plus complexe. A l'aide de logiciels mathématiques, nous avons constaté que $V_- V_+$ est toujours négatif pour $R_T \sim 0.001$. Nous pouvons donc conclure que l'instabilité de la fibre optique en propagation libre est toujours absolue, malgré la présence de la TOD et de l'effet Raman, une transition du régime absolu vers le régime convectif n'est pas possible.

2.4 Conclusion

En nous appuyant sur la relation de dispersion obtenue dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire de la solution stationnaire soumise à des perturbations monochromatiques étendues et sa forme approchée autour de la fréquence la plus instable, nous avons montré que la TOD n'affecte pas le gain de la MI. Tandis que l'effet Raman modifie légèrement le gain autour de la fréquence la plus instable et prolonge la bande de gain de la MI aux hautes fréquences par rapport à la fréquence de la pompe. De plus, la TOD et l'effet Raman induisent chacun de son côté une dérive dans le domaine temporel qui se traduit par une asymétrie dans le spectre. En simulant la propagation libre d'une perturbation localisée au sein d'une fibre optique dans le programme numérique basé sur GNLS, nous avons mise en évidence la dérive induite par la TOD et l'effet Raman. En cas de dérive indésirable, la compensation des dérives de la TOD et de l'effet Raman permet de réduire considérablement la dérive globale du signal, pourtant son spectre reste asymétrique. L'étude de l'instabilité convective et absolue nous a permis d'identifier la nature de l'instabilité du système en utilisant la dérive des fronts du paquet d'ondes. En outre, nous avons réussi d'exprimer d'une manière générale la dérive des fronts du paquet d'ondes à partir d'un développement de la relation de dispersion autour de la fréquence la plus instable. Enfin, l'application de ces méthodes au cas de la fibre optique en propagation libre montre que la fibre est toujours absolument instable malgré la présence de la TOD et de l'effet Raman.

Chapitre 3

Etude de la dynamique non linéaire dans une cavité fibrée

Contrairement à la dynamique non linéaire liée à la propagation libre dans une fibre optique que nous avons étudiée dans le chapitre précédent, la cavité fibrée impose les conditions aux limites sur une longueur de fibre optique. Elle représente un système optique dissipatif dans lequel l'apparition de la MI nécessite que l'énergie de la pompe compense les pertes dans la cavité. La conséquence directe de cette condition est l'existence d'un seuil d'instabilité pour la puissance de pompe injectée. Puisque l'élément non linéaire de la cavité fibrée est la fibre optique, la MI dans la cavité est aussi physiquement interprétée comme un équilibre entre les effets non linéaires et celui de la dispersion linéaire au cours de la propagation du champ optique. Mais la différence par rapport à la propagation libre dans la fibre optique est que la MI dans la cavité existe aussi en régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$) [12]. L'inclusion des termes des dispersions d'ordres supérieurs et de l'effet Raman dans le modèle de la cavité est indispensable pour travailler dans la région de faible GVD ($\beta_2 \approx 0$). En fait, ces termes peuvent introduire des effets importants sur la dynamique de la cavité, par exemple, la prise en compte de la dispersion d'ordre trois β_3 (TOD) conduit à l'apparition d'une instabilité convective et d'un spectre asymétrique du signal à la sortie de la cavité fibrée [35]. L'inclusion de la dispersion d'ordre quatre β_4 permet le contrôle de la MI dans la cavité fibrée [36, 37]. En limitant la dispersion à l'ordre trois et en incluant l'effet Raman dans notre modèle, nous nous attendons à avoir des effets similaires à ceux observés dans le cas de la propagation libre. En nous appuyant sur les concepts d'instabilité convective et absolue de la section 2.3, nous pouvons identifier la nature et le seuil de l'instabilité dans la cavité. Au dessus du seuil d'instabilité de la cavité, une solution de type structure dissipative est susceptible d'apparaître, la forme analytique de cette solution a été démontrée par F. Leo en faisant une analyse faiblement non linéaire sur le modèle réduit de Lugiato-Lefever sans tenir compte de l'effet Raman [38]. Cette solution subit elle-même une instabilité secondaire connue sous le nom de l'instabilité d'Eckhaus dans le cas d'ondes stationnaires (en absence de la TOD) et l'instabilité de Benjamin-Feir dans le cas d'ondes progressives (en présence de la TOD) [39].

Dans ce chapitre, notre étude est divisée en trois parties, la première est similaire à celle du chapitre précédent, elle est dédiée à l'étude de l'impact de la TOD et de

l'effet Raman sur la MI dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire initialisée par une perturbation monochromatique. Dans la deuxième partie, nous cherchons le seuil d'instabilité absolue éventuel induit par la présence de la TOD et de l'effet Raman. Et la troisième partie est consacrée à une étude des instabilités secondaires dans le cas du modèle réduit de Lugiato-Lefever.

3.1 Analyse de stabilité linéaire standard du modèle de Lugiato-Lefever

D'après l'étude de la section 1.2.2, la dynamique de la cavité fibrée est décrite par l'équation sans dimension (modèle réduit de Lugiato-Lefever) suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = S - (1 + i\Delta)\psi - is \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} + B_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau'^3} + i|\psi|^2 \psi - iR\psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \tau'} \quad (3.1)$$

avec $s = \text{sign}(\beta_2)$, $t' = t\theta^2/2t_R$ où t_R représente la durée de vol du signal dans la cavité et t est le temps de propagation du signal dans la cavité, $\tau' = T\theta/(L|\beta_2|)^{1/2}$, $\psi = A(2\gamma L)^{1/2}/\theta$, $S = 2A_i(2\gamma L)^{1/2}/\theta^2$, $B_3 = \beta_3\theta/(3L^{1/2}|\beta_2|^{3/2})$, $\Delta = 2\delta_0/\theta^2$ et $R = T_R\theta/(L|\beta_2|)^{1/2}$. Pour toutes les simulations numériques, nous utilisons les paramètres physiques correspondant à des expériences réelles. Ces paramètres sont : $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $\beta_3 \sim 10^{-40} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$. Nous obtenons avec ces derniers, les paramètres normalisés suivants $\Delta = 1.026$, $B_3 \sim 1$, $R = 1.92 \times 10^{-2}$, et une unité de la variable t' signifie une propagation de $n \approx 16$ tours dans la cavité avec $n = t/t_R$ le nombre de tours effectués par le signal dans la cavité. Dans la suite de ce manuscrit, nous désignons par modèle LL, le modèle réduit de Lugiato-Lefever [équation (3.1)] pour alléger les notations. L'équation (3.1) admet des solutions stationnaires satisfaisant la relation suivante

$$S_s = [1 + i(\Delta - |\psi_s|^2)]\psi_s \quad (3.2)$$

Nous introduisons l'intensité normalisée de la pompe incidente stationnaire $X = |S_s|^2$ et l'intensité normalisée du champ intra-cavité stationnaire $I = |\psi_s|^2$, la relation (3.2) devient

$$X = I^3 - 2\Delta I^2 + (\Delta^2 + 1)I \quad (3.3)$$

En étudiant la relation (3.3), nous montrons que pour $\Delta < \sqrt{3}$ et pour une valeur donnée de X , $I(X)$ admet une seule solution et la cavité est en régime monostable. Pour $\Delta > \sqrt{3}$, $I(X)$ présente une courbe en « S » présentant un cycle de bistabilité (voir figure 3.1) et la cavité est alors en régime bistable. Les solutions stationnaires qui sont sur la branche de pente négative sont instables (segments des courbes en pointillés dans la figure 3.1).

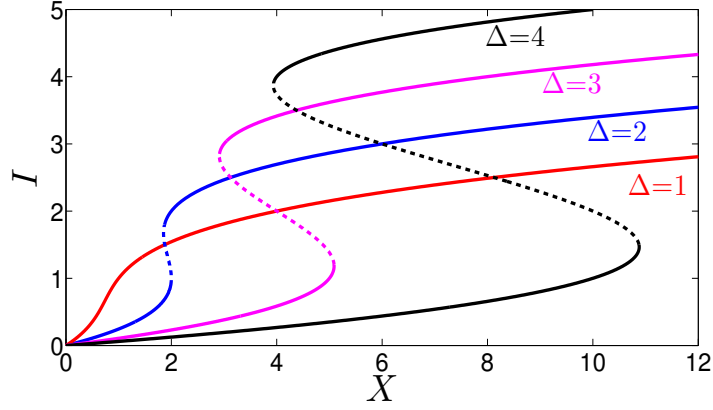


FIGURE 3.1: Les solutions stationnaires de la cavité fibrée pour $\Delta = 1, 2, 3, 4$. Les lignes en pointillés représentent les solutions instables.

Pour étudier la stabilité de la solution stationnaire (3.2), il convient d'introduire le complexe conjugué de l'équation (3.1) telle que

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t'} = S^* - (1 - i\Delta)\psi^* + is \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \tau'^2} + B_3 \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial \tau'^3} - i|\psi^*|^2 \psi^* + iR\psi^* \frac{\partial |\psi^*|^2}{\partial \tau'} \quad (3.4)$$

Nous injectons les solutions de la forme $\psi = \psi_s + \delta\psi$ et $\psi^* = \psi_s^* + \delta\psi^*$ dans l'équation (3.1) et son complexe conjugué (3.4), avec $\delta\psi$ et $\delta\psi^*$ représentant des petites perturbations de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\psi_0 \\ \delta\psi_0^* \end{pmatrix} e^{-i(\tilde{K}t' - \tilde{\Omega}\tau')}$$

où $\delta\psi_0$ est l'amplitude initiale de la perturbation qui est petite devant ψ_s , \tilde{K} est le nombre d'onde normalisé, $\tilde{\Omega}$ est le décalage en pulsation normalisée par rapport à la pulsation de la pompe. A partir du problème linéarisé, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi_0 \\ \delta\psi_0^* \end{pmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} A &= a + ib + R\tilde{\Omega}I, & B &= (i + R\tilde{\Omega})\psi_s^2 \\ C &= -(i + R\tilde{\Omega})\psi_s^{*2}, & D &= a - ib - R\tilde{\Omega}I \end{aligned}$$

avec

$$a = -1 + i\tilde{K} - iB_3\tilde{\Omega}^3, \quad b = -\Delta + s\tilde{\Omega}^2 + 2I$$

Des solutions $(\delta\psi_0, \delta\psi_0^*) \neq (0, 0)$ existent si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

La relation de dispersion peut être obtenue en résolvant la relation précédente, elle s'écrit

$$\tilde{K} = B_3 \tilde{\Omega}^3 + i \left[-1 \pm \sqrt{I^2 - b^2 - 2iR\tilde{\Omega}I(I-b)} \right] \quad (3.6)$$

Seul le nombre d'onde avec le signe + devant la racine de l'expression (3.6) contribue à l'instabilité de la solution stationnaire. Nous retenons donc la relation de dispersion

$$\tilde{K} = B_3 \tilde{\Omega}^3 + i \left[-1 + \sqrt{I^2 - b^2 - 2iR\tilde{\Omega}I(I-b)} \right] \quad (3.7)$$

La partie imaginaire de \tilde{K} représente le taux de croissance en amplitude de la perturbation, son signe permet de déterminer la stabilité de celle-ci : la perturbation s'amplifie pour $\text{Im}[\tilde{K}] > 0$ et s'atténue si $\text{Im}[\tilde{K}] < 0$.

3.1.1 Instabilité modulationnelle dans la cavité fibrée en absence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman

L'analyse de la relation de dispersion (3.7) n'est pas simple avec les termes complexes présents dans la racine. Pour mieux comprendre la dynamique de la cavité, nous procédons par étapes. Dans un premier temps, nous ne considérons pas la TOD et l'effet Raman dans notre analyse, la relation de dispersion prend une forme plus simple

$$\tilde{K}_b = i(-1 + \sqrt{I^2 - b^2}) \quad (3.8)$$

avec \tilde{K}_b est le nombre d'onde en absence de la TOD et de l'effet Raman, il est imaginaire pur. La solution stationnaire ψ_s est instable s'il existe des valeurs réelles de $\tilde{\Omega}$ qui satisfont la condition $\text{Im}[\tilde{K}(\tilde{\Omega})] > 0$, l'instabilité marginale aura lieu pour les $\tilde{\Omega}$ réelles pour lesquelles $\text{Im}[\tilde{K}(\tilde{\Omega})] = 0$. La résolution de l'équation $\text{Im}[\tilde{K}] = 0$ permet de délimiter la bande des fréquences instables

$$\tilde{\Omega} = \pm \sqrt{\frac{(\Delta - 2I) \pm \sqrt{I^2 - 1}}{s}} \quad (3.9)$$

En analysant la relation (3.9), nous trouvons que la MI existe dans les domaines suivants [40, 41] :

- $1 < I < \Delta/2$, $\Delta > 2$ en régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$, $s = 1$).
- $I > 1$, $\Delta \leq 2$ et $I > \Delta/2$, $\Delta > 2$ en régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$, $s = -1$).

Les zones d'instabilité sont représentées en rouge dans la figure 3.2. Nous rappelons que l'étude de la MI en propagation libre dans une fibre optique (section 1.1.6) montre que la MI a lieu uniquement en régime de dispersion anormale, ici elle a bien lieu dans les deux régimes de dispersion normale et anormale (voir figure 3.2). Cette différence montre que la MI peut changer drastiquement d'un système conservatif (la fibre optique) à un système dissipatif (la cavité fibrée).

En revenant à l'expression (3.8), nous cherchons les $\tilde{\Omega}_c$ de gain maximum (c'est-à-dire les $\tilde{\Omega}$ correspondant au maximum de $\text{Im}[\tilde{K}_b]$). L'expression de $\tilde{\Omega}_c$ est trouvée en

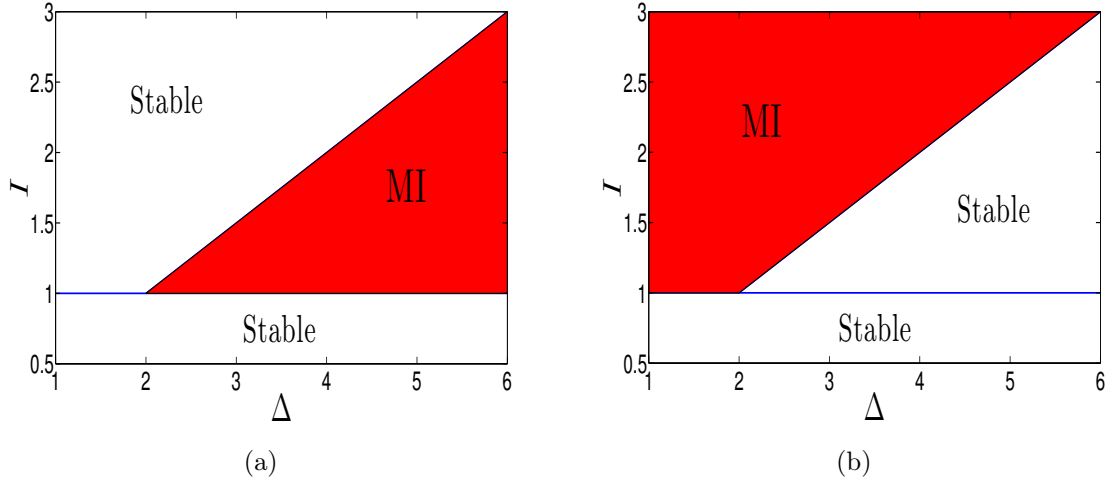


FIGURE 3.2: La région de la MI dans le plan des paramètres (Δ, I) , (a) $\beta_2 > 0$ et (b) $\beta_2 < 0$.

résolvant l'équation $d(\text{Im}[\tilde{K}_b])/d\tilde{\Omega}|_{\tilde{\Omega}_c} = 0$, elle s'écrit

$$\tilde{\Omega}_c = \pm \sqrt{\frac{\Delta - 2I}{s}} \quad (3.10)$$

L'intensité au seuil d'instabilité I_s correspond à l'intensité intra-cavité minimale qu'il faut atteindre pour que le système devient instable. Au seuil, nous avons $I = I_s$, les maximums de la courbe $\text{Im}[\tilde{K}_b]$ passent par zéro, et les deux pulsations de gain nul sont

$$\tilde{\Omega}_{cs} = \pm \sqrt{\frac{\Delta - 2I_s}{s}} \quad (3.11)$$

Les deux pulsations au seuil définies par l'équation (3.11) ne sont ni atténuées ni amplifiées au cours de la propagation de l'onde dans la cavité, cependant, les autres pulsations sont toutes stables car leurs gains ($\text{Im}[\tilde{K}_b]$) correspondants sont négatifs (voir la courbe de $I = I_s$ de figure 3.3). Au seuil d'instabilité, nous trouvons que

$$\text{Im}[\tilde{K}_b(\tilde{\Omega}_{cs}, I_s)] = 0 \quad \implies \quad I_s = 1$$

où I_s est exprimée en unité normalisée. En unités physiques, la pulsation normalisée de gain maximum $\tilde{\Omega}_c \sim \sqrt{(\Delta - 2)/s}$ correspond à un décalage spectral par rapport à la fréquence de l'onde incidente de l'ordre de $\omega' \sim 10^{12} \text{ s}^{-1}$. En dessous de ce seuil, toutes les pulsations présentent un gain négatif ($\text{Im}[\tilde{K}_b] < 0$). La courbe pour $I = 0.9$ de figure 3.3 montre que la solution stationnaire est stable. En dépassant ce seuil, nous observons l'amplification des pulsations normalisées autour de $\tilde{\Omega}_c$ et $-\tilde{\Omega}_c$, plus nous augmentons I au dessus du seuil, plus nous avons une large bande des pulsations déstabilisantes sous forme de 2 lobes symétriques par rapport à la pulsation de pompe (voir la courbe de $I = 1.1$ de figure 3.3).

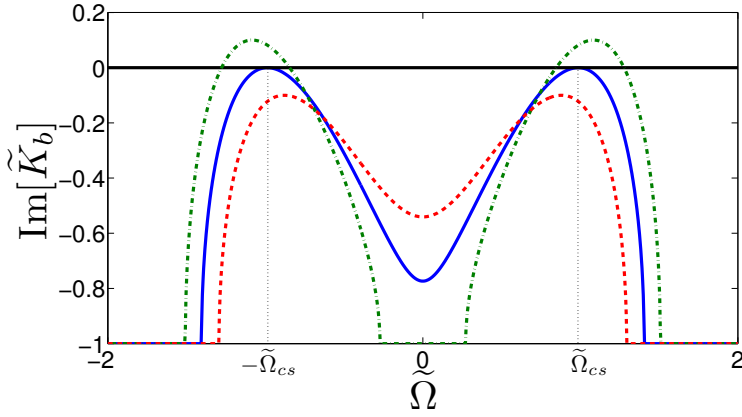


FIGURE 3.3: Le gain de MI ($\text{Im}[\tilde{K}_b]$) en fonction de la pulsation normalisée $\tilde{\Omega}$ pour $I = 0.9$ (la courbe en pointillé rouge), $I = I_s$ (la courbe bleue solide) et $I = 1.1$ (la courbe en pointillé vert) avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $\tilde{\Omega}_{cs} = 0.987$.

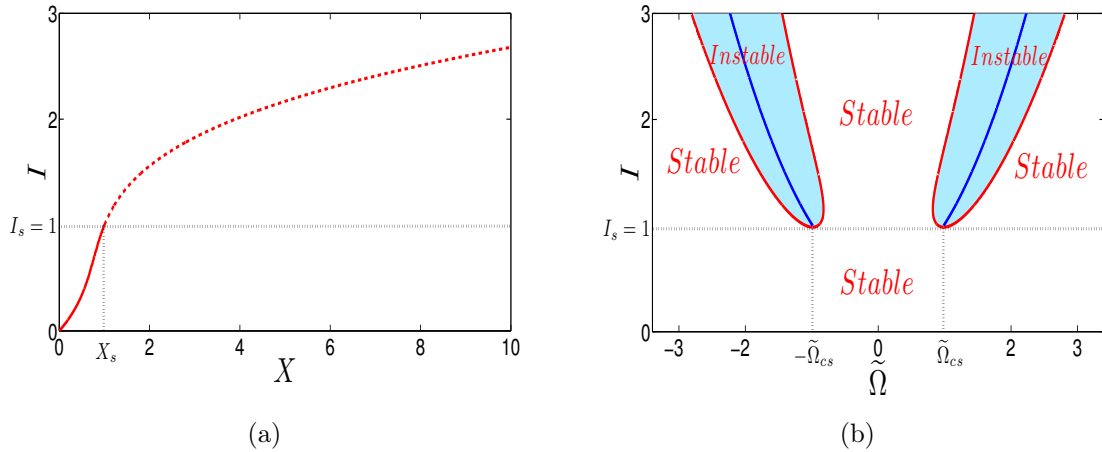


FIGURE 3.4: (a) L'évolution de l'intensité du champ intra-cavité stationnaire I en fonction de l'intensité du champ incident X pour $\Delta = 1.026$. La courbe solide représente les solutions stables et la courbe en pointillé représente les solutions instables. (b) Les domaines d'instabilité dans le plan des paramètres $(\tilde{\Omega}, I)$. La courbe rouge représente la courbe neutre d'instabilité et la courbe bleue représente l'évolution des pulsations à gain maximum $\tilde{\Omega}_c$ avec $\Delta = 1.026$ et $s = -1$; I_s , X_s et $\tilde{\Omega}_{cs} = 0.987$ sont respectivement les valeurs au seuil de l'intensité du champ intra-cavité, l'intensité du champ incident et les pulsations instables.

La stabilité de la solution stationnaire en régime monostable ($\Delta < \sqrt{3}$) est montrée dans la figure 3.4(a), où l'instabilité a lieu lorsque $I > I_s$. Et la figure 3.4(b) caractérise les domaines d'instabilité délimités par la courbe neutre de la stabilité marginale (où la perturbation n'est ni atténuée ni amplifiée) obtenue avec le gain nul ($\text{Im}[\tilde{K}_b]=0$).

Pour vérifier les résultats de l'analyse de stabilité, nous effectuons des simulations numériques en considérant une onde incidente bruitée dans le programme numérique intégrant le modèle LL en utilisant la méthode SSF (section 1.3). Nous fixons $s = -1$

et $\Delta = 1.026$.

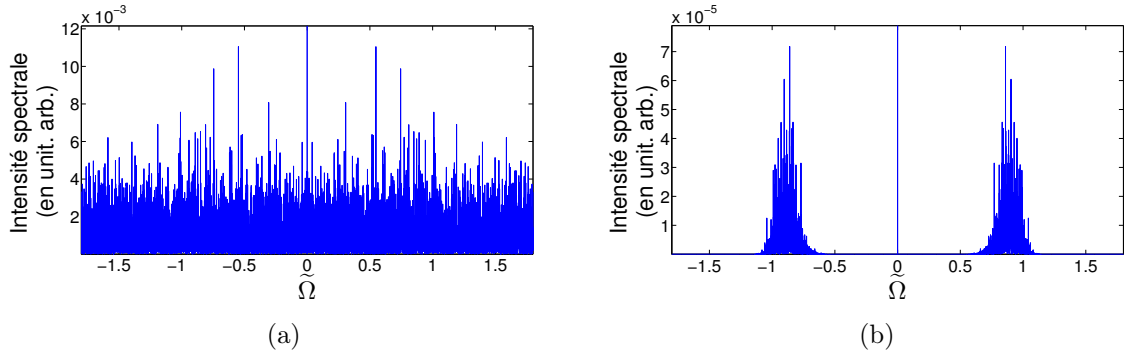


FIGURE 3.5: (a) Le spectre du champ intra-cavité initial bruité avec $I = 0,9$. (b) Le spectre du champ intra-cavité à $t' = 25$.

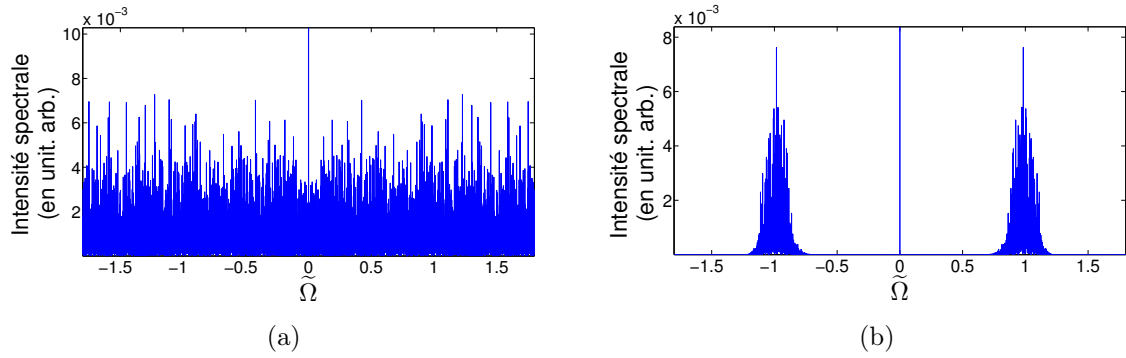


FIGURE 3.6: (a) Le spectre du champ intra-cavité initial bruité avec $I = I_s$. (b) Le spectre du champ intra-cavité à $t' = 25$.

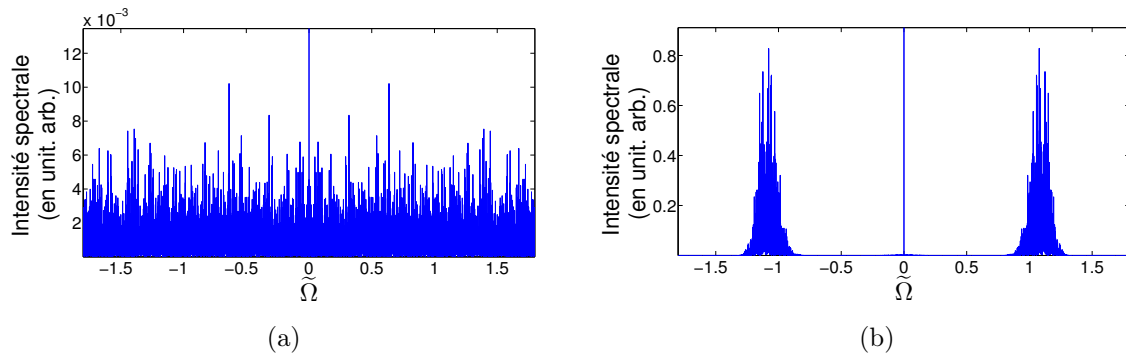


FIGURE 3.7: (a) Le spectre du champ intra-cavité initial bruité avec $I = 1.1$. (b) Le spectre du champ intra-cavité à $t' = 25$.

Pour $I = 0.9$, le spectre du champ de pompe est montré dans la figure 3.5(a). Au cours de la simulation, toutes les pulsations sont atténuées comme le montre la figure

3.5(b), donc la solution stationnaire est stable. A noter que la discrimination spectrale observée [figure 3.5(b)] est un phénomène connu sous le nom de précurseur : malgré le fait que la valeur de l'intensité est sous le seuil, la zone des pulsations instables est moins atténuée par rapport au reste des pulsations du spectre. En effet ces précurseurs annoncent l'apparition des zones d'instabilité [42].

Pour $I = I_s$, le résultat de la simulation est représenté dans la figure 3.6, nous constatons que les pulsations sont moins atténuées, la cavité est bien autour du seuil de l'instabilité. Les valeurs numériques des deux pulsations les plus instables dans la figure 3.6 sont ± 0.984 , elles sont en excellent accord avec les valeurs théoriques qui sont données par la relation (3.11) : $\tilde{\Omega}_{cs} = \pm 0.987$.

Pour $I = 1.1$, nous observons l'amplification de deux lobes des pulsations symétriques par rapport à la pulsation de pompe (ici $\tilde{\Omega} = 0$) dans la figure 3.7; la cavité est donc instable. Les deux pulsations à gain maximum numériques sont $\tilde{\Omega}_c = \pm 1.078$; elles sont en bon accord avec les valeurs théoriques qui sont données par la relation (3.10) : $\tilde{\Omega}_c = \pm 1.084$.

En cas d'instabilité ($I > I_s$), la solution stationnaire bruitée du champs intra-cavité bifurque (pour t' assez grand) en une série d'impulsions périodiques (voir figure 3.8). Ce phénomène de génération d'impulsions est la conséquence directe de la MI. La période τ'_c de la série d'impulsions dans le domaine temporel est donnée par

$$\tau'_c \approx \frac{2\pi}{\tilde{\Omega}_c} \quad (3.12)$$

Dans la figure 3.8(b), la période numérique de la série d'impulsions est $\tau'_c = 5.77$, elle est en bon accord avec la valeur théorique $\tau'_c = 5.80$ calculée à partir de la relation (3.12). En unités physiques, ceci correspond à une série d'impulsions de période temporelle $T_c = 0.91$ ps.

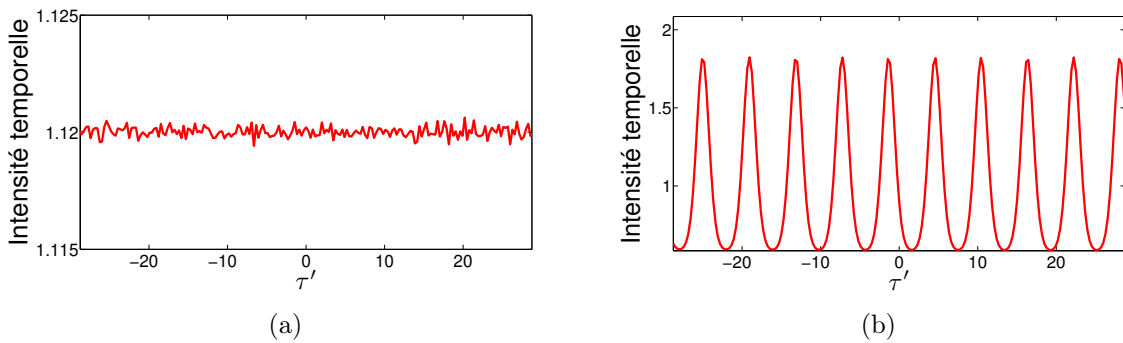


FIGURE 3.8: (a) L'intensité du champ intra-cavité initial bruitée. (b) L'intensité du champ intra-cavité à $t' = 300$ avec $I = 1.1$, $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $\tilde{\Omega}_c = 1.084$.

3.1.2 Instabilité modulationnelle dans la cavité fibrée en présence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman

En revenant à la relation de dispersion générale [expression (3.7)], le terme de la TOD est purement réel et il n'affecte pas le gain de la MI dans la cavité. Quant au

terme de l'effet Raman il est purement imaginaire et se trouve sous la racine. Cette relation de dispersion a été approchée en utilisant le développement de Taylor comme précédemment. En développant donc l'expression (3.7) autour de $\tilde{\Omega}_c$ qui est la pulsation à gain maximum de \tilde{K}_b , nous obtenons

$$\tilde{K}_a \approx \tilde{K}_c + \tilde{K}'_c \tilde{\Omega}' + \frac{1}{2} \tilde{K}''_c \tilde{\Omega}'^2 \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}' &= \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}_c \\ \tilde{K}_c &= \tilde{K}(\tilde{\Omega}_c) \approx B_3 \tilde{\Omega}_c^3 + I \tilde{\Omega}_c R + i(I - 1 + \frac{1}{2} I \tilde{\Omega}_c^2 R^2) \\ \tilde{K}'_c &= \left. \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}} \right|_{\tilde{\Omega}_c} \approx 3B_3 \tilde{\Omega}_c^2 + (5I - 2\Delta)R \\ \tilde{K}''_c &= \left. \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}^2} \right|_{\tilde{\Omega}_c} \approx 6B_3 \tilde{\Omega}_c + \frac{i4s(2I - \Delta)}{I} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les expressions (3.14) sont calculées dans l'annexe (E) en développant autour de $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_c$ ($\tilde{\Omega}' \ll \tilde{\Omega}_c$) et en tenant compte de la valeur de $R \ll 1$ ($R = 1.92 \times 10^{-2}$). Nous remplaçons les expressions (3.14) dans l'équation (3.13), la relation de dispersion approchée autour de $\tilde{\Omega}_c$ s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \tilde{K}_a &\approx B_3 \tilde{\Omega}_c^3 + I \tilde{\Omega}_c R + i(I - 1 + \frac{1}{2} I \tilde{\Omega}_c^2 R^2) + \tilde{\Omega}' [3B_3 \tilde{\Omega}_c^2 + (5I - 2\Delta)R] \\ &+ \tilde{\Omega}'^2 [3B_3 \tilde{\Omega}_c + \frac{i2s(2I - \Delta)}{I}] \end{aligned} \quad (3.15)$$

A partir de la relation de dispersion approchée (3.15), nous vérifions d'abord que la pulsation à gain maximum $\tilde{\Omega}_c$ n'a pas été modifiée par la présence de la TOD et de l'effet Raman comme suit

$$\left. \frac{\partial \text{Im}[\tilde{K}_a]}{\partial \tilde{\Omega}'} \right|_{\tilde{\Omega}'_c} = 0 \implies \tilde{\Omega}'_c = 0 \quad (3.16)$$

mais le gain de $\tilde{\Omega}_c$ est légèrement modifié par l'effet Raman,

$$\text{Im}[\tilde{K}_a(\tilde{\Omega}' = 0)] = I - 1 + \frac{1}{2} I \tilde{\Omega}_c^2 R^2 \quad (3.17)$$

Par conséquent, le seuil d'instabilité est aussi modifié de la façon suivante

$$\text{Im}[\tilde{K}_a(\tilde{\Omega}' = 0, I_{as})] = 0 \implies I_{as} = \frac{1}{I_s + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_c^2 R^2} \quad (3.18)$$

où I_{as} est l'intensité intra-cavité au seuil d'instabilité en présence de la TOD et de l'effet Raman. Or la modification du gain autour de $\tilde{\Omega}_c$ par l'effet Raman est très

faible devant 1 ($\tilde{\Omega}_c^2 R^2 \sim 10^{-4} \ll 1$ avec $R = 1.92 \times 10^{-2}$, $\tilde{\Omega}_c \sim 1$), nous pouvons donc la négliger autour de $\tilde{\Omega}_c$ telle que

$$\text{Im}[\tilde{K}_a(\tilde{\Omega}' = 0)] = I - 1, \quad I_{as} \approx I_s = 1 \quad (3.19)$$

A partir de la relation de dispersion générale (3.7), nous représentons le gain de la MI ($\text{Im}[\tilde{K}]$) dans la figure 3.9 en présence de la TOD et de l'effet Raman. La TOD n'affecte pas le gain de la MI et la modification du gain induite par l'effet Raman est uniquement significative pour les pulsations élevées (voir figure 3.9). La courbe du gain en présence de l'effet Raman (courbe bleue solide) présente un ouverture vers les pulsations élevées au delà de la bande d'instabilité de la MI standard (courbe en pointillé rouge).

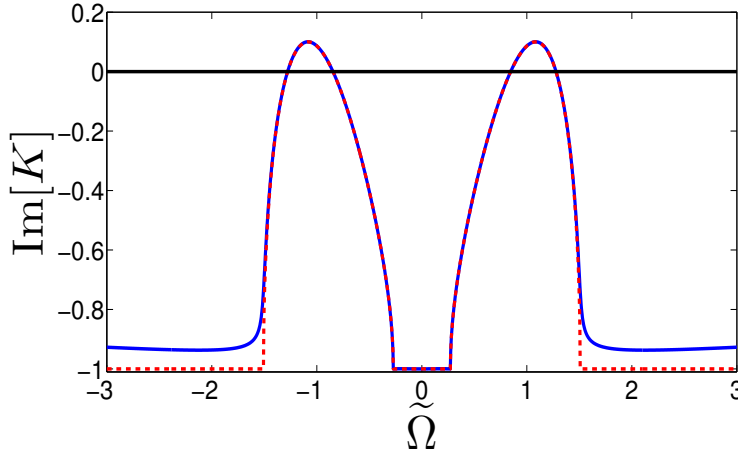


FIGURE 3.9: Le gain de la MI ($\text{Im}[\tilde{K}]$) en absence de la TOD et de l'effet Raman (la courbe en pointillé rouge) et en présence de la TOD et de l'effet Raman (la courbe bleue solide) avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$, $R = 1.92 \times 10^{-2}$, $B_3 = 1$, $I = 1.1$ et $\tilde{\Omega}_c = 1.084$.

3.2 Analyse de stabilité linéaire spatio-temporelle : Perturbations localisées

D'une manière similaire à ce que nous avons déjà vu dans la section 2.2, la partie réelle de \tilde{K}_a nous permet de définir une dérive normalisée d'un paquet d'onde centrée en $\tilde{\Omega}_c$. Pour calculer cette dérive, nous utilisons toujours la relation de dispersion approchée (3.15), elle est notée \tilde{V}_c et son expression s'écrit

$$\tilde{V}_c = \left. \frac{\partial \text{Re}[\tilde{K}_a]}{\partial \tilde{\Omega}'} \right|_{\tilde{\Omega}'_c} = \tilde{V}_{cD} + \tilde{V}_{cR} \quad (3.20)$$

avec $\tilde{V}_{cD} = 3B_3\tilde{\Omega}_c^2$ est la contribution de la TOD (β_3).

$\tilde{V}_{cR} = (5I - 2\Delta)R$ est la contribution de l'effet Raman.

Pour mettre en évidence cette dérive dans la cavité fibrée, nous développons deux

programmes pour la simulation numérique. Un basé sur le modèle LL [équation (3.1)] qui permet de vérifier rapidement les résultats issus de l'analyse du même modèle, et un autre intégrant le modèle originel [équation (1.80)]. Ce dernier permet de vérifier les résultats analytiques et numériques issus du modèle LL et les valider. En considérant une perturbation localisée sous forme Gaussienne modulée à la pulsation de gain maximum $\tilde{\Omega}_c$ autour de la solution stationnaire comme condition initiale. Nous suivrons son évolution au cours de la simulation. L'expression de l'onde initiale intra-cavité s'écrit

$$\psi = \sqrt{I} + \delta\psi_0 e^{-\left(\frac{\tau'}{\tau'_0}\right)^2} \cos(\tilde{\Omega}_c \tau') \quad (3.21)$$

où $\delta\psi_0$ est l'amplitude normalisée initiale de la perturbation avec $\delta\psi_0 \ll \sqrt{I}$, τ'_0 est la demi-largeur (à $1/e$) de la perturbation. Afin d'observer l'effet de la MI sur l'évolution du paquet d'ondes, nous adoptons la condition $2\tau'_0 \gg \tau'_c = 2\pi/\tilde{\Omega}_c$, où $\tilde{\Omega}_c$ est la fréquence du mode le plus instable. Les paramètres des simulations numériques sont fixés à : $s = -1$ et $\Delta = 1.026$.

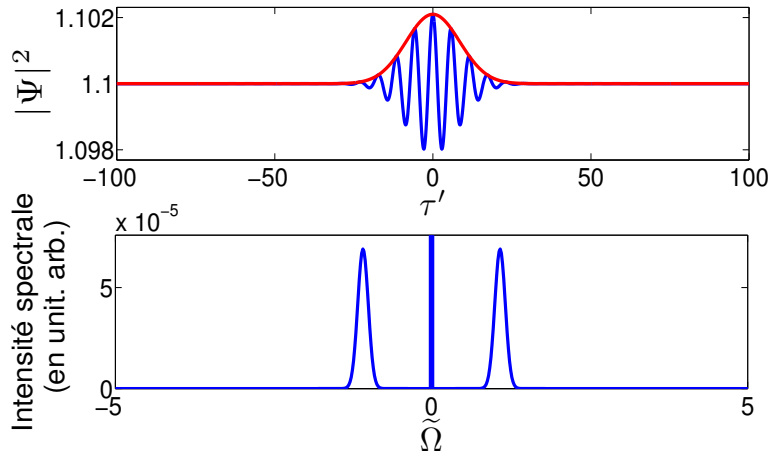


FIGURE 3.10: L'intensité de l'onde initiale perturbée [équation (3.21)] dans le domaine temporel et spectral avec $\tau'_0 = 12$, $\delta\psi_0 = 0.001$, $I = 1.1$ et $\tilde{\Omega}_c = 1.084$, la courbe rouge représente l'enveloppe temporel de la perturbation.

Dans la figure 3.10, nous présentons l'intensité d'une telle perturbation dans le domaine temporel et spectral. L'enveloppe de cette perturbation (la courbe rouge dans la figure 3.10) est obtenue à l'aide de la transformée de Hilbert pour augmenter la précision de mesure de la dérive. Au niveau de spectre, les deux pics qui représentent $-\tilde{\Omega}_c$ et $\tilde{\Omega}_c$ sont bien présents et symétriques par rapport au pic central qui correspond à la composante continue du signal I (la solution stationnaire). L'étude suivante consiste à vérifier numériquement les caractéristiques de \tilde{V}_c dans différents cas. La plupart des explications et arguments sont similaires à ceux de la section 2.2, pour éviter trop de répétitions, nous rédigeons les sections suivantes, concernant la dérive du paquet d'ondes, d'une façon moins développée.

3.2.1 Cas de la dispersion de la vitesse du groupe seule

En absence de la TOD et de l'effet Raman, l'expression (3.20) donne une dérive nulle ($\tilde{V}_c = 0$). De manière similaire au cas de la fibre optique (section 2.2.1), l'ensemble

de la perturbation localisée est immobile par rapport à sa position initiale au cours de la propagation dans la cavité. De plus, elle s'amplifie et s'élargit symétriquement par rapport à la position $\tau' = 0$ (voir figure 3.11). Au niveau du spectre du signal, les deux pics initiaux sont amplifiés symétriquement grâce au gain apporté par la MI (voir figure 3.12).

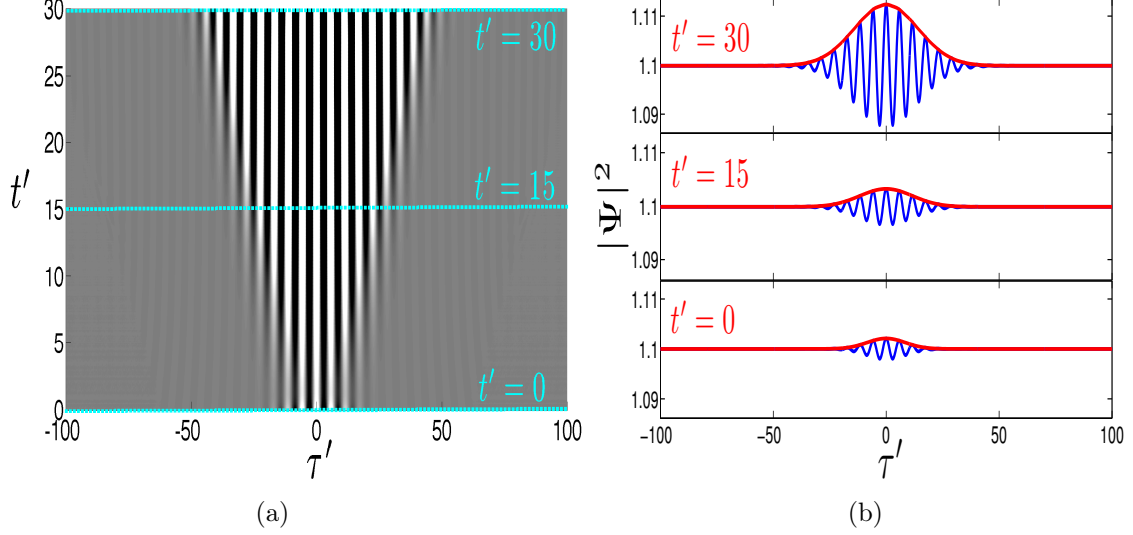


FIGURE 3.11: Simulation numérique du modèle LL [équation (3.1)], (a) L'évolution de la perturbation dans le plan (τ', t') . (b) Profils d'intensité correspondant aux trois durées de simulation t' (lignes en pointillés bleus) avec $I = 1.1$, $B_3 = 0$ et $R = 0$.

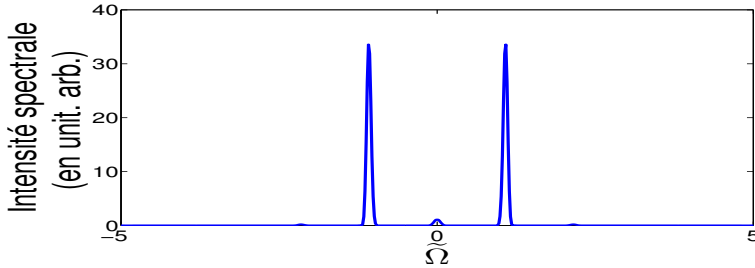


FIGURE 3.12: Le spectre de l'onde intra-cavité à $t' = 30$ obtenue par intégration numérique du modèle LL [équation (3.1)] avec $I = 1.1$, $B_3 = 0$ et $R = 0$.

3.2.2 Effet de la dispersion d'ordre trois seule

La présence de la TOD dans notre modèle introduit un terme réel dans la relation de dispersion générale (3.7). Ce terme brise la symétrie d'inversion ($\tau' \leftrightarrow -\tau'$) du système et génère une dérive du paquet d'onde. Dans ce cas, l'expression (3.20) prend la forme suivante

$$\tilde{V}_c = 3B_3\tilde{\Omega}_c^2 \quad (3.22)$$

où $\tilde{\Omega}_c^2$ est toujours positive. Par conséquent, la dérive provoquée par la TOD peut être positive ou négative selon le signe de la dispersion d'ordre trois β_3 (B_3 est proportionnelle à β_3).

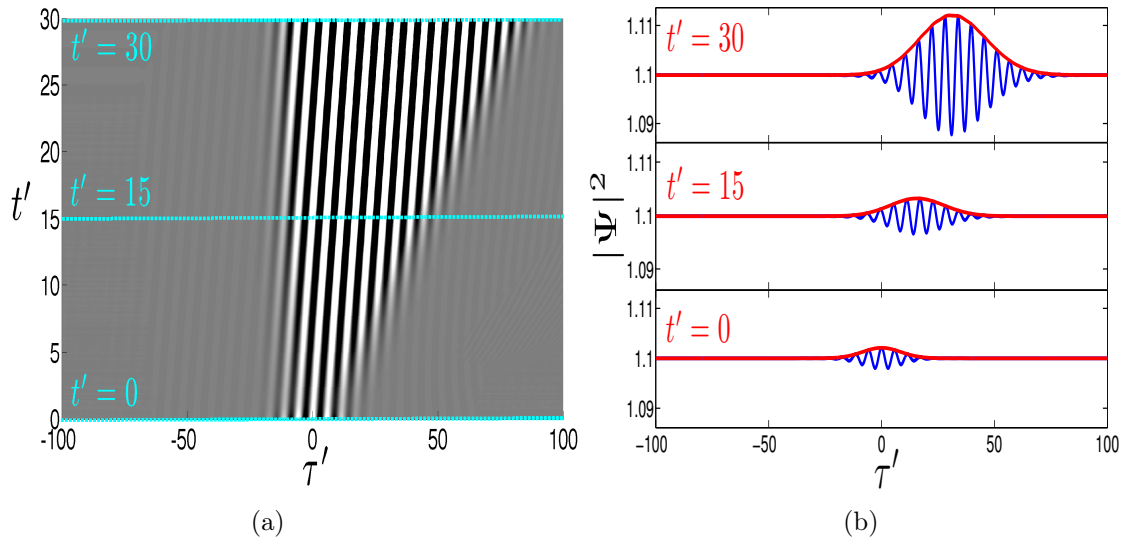


FIGURE 3.13: Simulation numérique du modèle LL [équation (3.1)], (a) L'évolution de la perturbation dans le plan (τ', t') . (b) Profils d'intensité correspondant aux trois durées de simulation t' (lignes en pointillés bleus) avec $I = 1.1$, $B_3 = 0.3$ et $R = 0$.

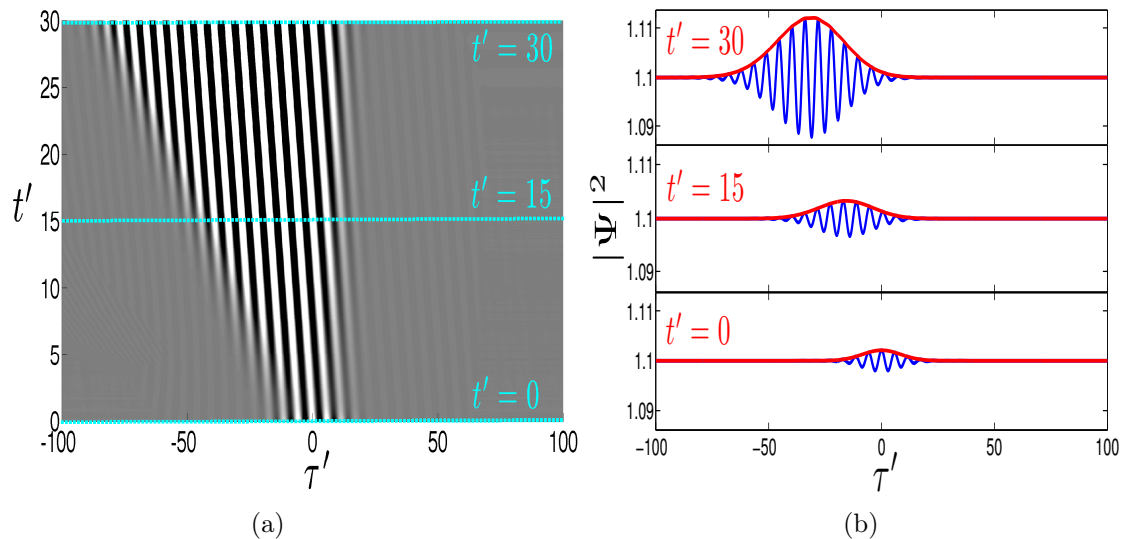


FIGURE 3.14: Simulation numérique du modèle LL [équation (3.1)], (a) L'évolution de la perturbation dans le plan (τ', t') . (b) Profils d'intensité correspondant aux trois durées de simulation t' (lignes en pointillés bleus) avec $I = 1.1$, $B_3 = -0.3$ et $R = 0$.

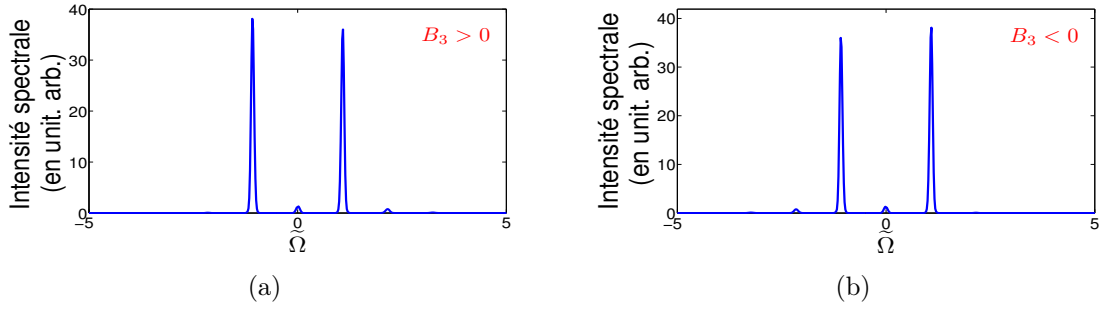


FIGURE 3.15: Le spectre de l'onde intra-cavité à $t' = 70$ obtenue par intégration numérique du modèle LL [équation (3.1)] (a) $B_3 = 0.3$ et (b) $B_3 = -0.3$ avec $I = 1.1$ et $R = 0$.

L'évolution de la perturbation et ses profils d'intensité sont tracés dans la figure 3.13 pour $B_3 > 0$ ($\beta_3 > 0$) et dans la figure 3.14 pour $B_3 < 0$ ($\beta_3 < 0$). Ces résultats nous montrent que la perturbation s'élargit et dérive dans le domaine temporel (τ'), et le sens de la dérive dépend du signe de B_3 : la perturbation dérive vers les τ' croissants pour B_3 positif et dérive vers les τ' décroissants pour B_3 négatif, ce phénomène est en bon accord avec les prédictions analytiques. Cependant, en présence de la TOD seule, nous observons une asymétrie dans le spectre du signal à la sortie de la cavité, les deux fréquences de départ et leurs harmoniques ne sont pas amplifiées symétriquement. En comparant les figures 3.15(a) et 3.15(b), nous concluons que le sens de l'asymétrie dans le spectre dépend aussi du signe de B_3 . Pour une description détaillée de cette asymétrie spectral induite par la TOD, nous renvoyons le lecteur à [38, 43] .

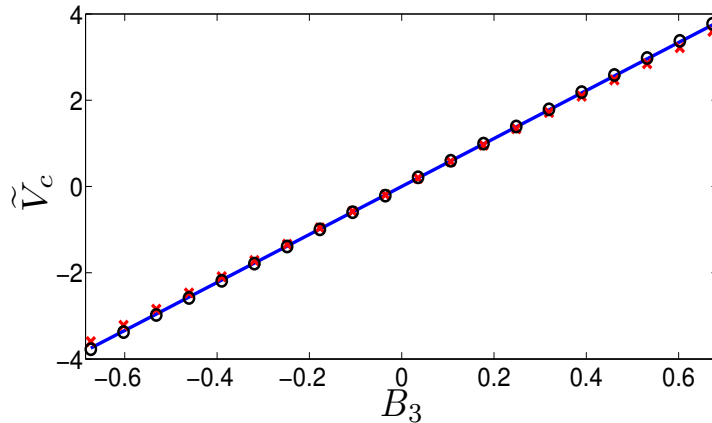


FIGURE 3.16: L'évolution de \tilde{V}_c en fonction de B_3 en absence de l'effet Raman ($R = 0$) avec $I = 1.44$. La courbe bleue solide représente les valeurs théoriques issues de la relation (3.22), les points ronds noirs sont les résultats numériques du modèle LL [équation (3.1)] et les croix rouges montrent les résultats numériques du modèle originel [équations (1.80)]. Les paramètres physiques utilisés dans le modèle originel sont $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$, l'intensité de pompe = 32 mW et β_3 varie de $-9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$ à $9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$.

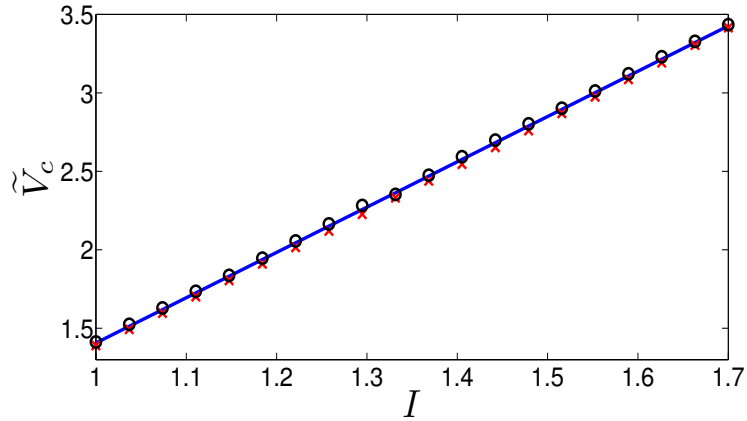


FIGURE 3.17: L'évolution de \tilde{V}_c en fonction de I en absence de l'effet Raman ($R = 0$) avec $B_3 = 0.48$. La courbe bleue solide représente les valeurs théoriques issues de la relation (3.22), les points ronds noirs sont les résultats numériques du modèle LL [équation (3.1)] et les croix rouges montrent les résultats numériques du modèle originel [équations (1.80)]. Les paramètres physiques utilisés dans le modèle originel sont $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$, $\beta_3 = 6.76 \times 10^{-41} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 46 mW.

L'expression (3.22) montre que la dérive générée par la TOD dépend à la fois du coefficient de la TOD (B_3) et de l'intensité normalisée intra-cavité I ($\tilde{\Omega}_c$ est une fonction de I). A l'aide des simulations numériques du modèle LL et du modèle originel, nous testons l'évolution de \tilde{V}_c en fonction de B_3 avec I constante et l'évolution de \tilde{V}_c en fonction de I avec B_3 constant. Les résultats numériques sont représentés dans les figures 3.16 et 3.17, et nous observons un très bon accord entre les valeurs numériques et la courbe analytique issue de la relation (3.22).

3.2.3 Effet de la diffusion Raman stimulée seule

En première approximation, l'effet Raman introduit également un terme réel dans la relation de dispersion approchée (3.15) qui brise la symétrie d'inversion du système et génère une dérive du paquet d'ondes. Cette dérive s'écrit

$$\tilde{V}_c = (5I - 2\Delta)R \quad (3.23)$$

où le coefficient de Raman R est positif. Par conséquent, le signe de la dérive dépend de l'expression $5I - 2\Delta$ qui peut être positive (pour $\Delta < 5I/2$) ou négative (pour $\Delta > 5I/2$), et même égale 0 (pour $\Delta = 5I/2$). Or la dérive est induite uniquement en cas d'instabilité $I > I_s = 1$, les cas où la dérive est négative ($\Delta > 5I/2$) ou nulle ($\Delta = 5I/2$) ne peut avoir lieu qu'en régime bistable ($\Delta > \sqrt{3}$) et dans le domaine de la GVD normale $\beta_2 > 0$ (voir figure 3.2). Puisque nous travaillons en régime monostable ($\Delta < \sqrt{3}$) et dans le domaine de la GVD anormale $\beta_2 < 0$, la dérive induite par l'effet Raman est toujours positive dans notre cas.

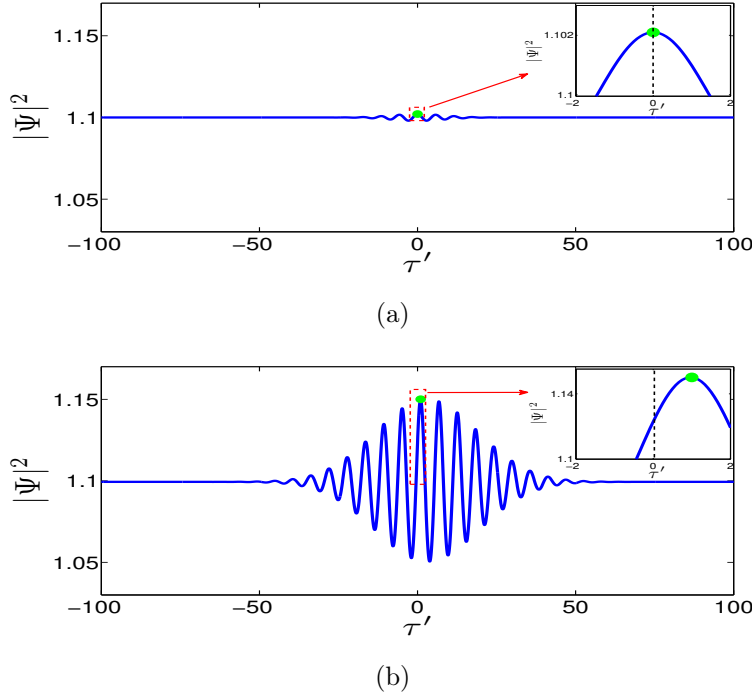


FIGURE 3.18: (a) L'onde intra-cavité initiale perturbée avec $I = 1.1$, $\delta\psi_0 = 0.001$, $\tilde{\Omega}_c = 1.084$ et $\tau'_0 = 12$. (b) L'onde intra-cavité à $t' = 45$ avec $R = 1.92 \times 10^{-2}$. Le point vert indique la position du maximum de la perturbation.

Dans la simulation numérique, nous observons que l'évolution de la perturbation localisée est similaire à celle de la figure 3.13 : la dérive provoquée par l'effet Raman se dirige vers les τ' croissants. C'est un résultat n'a rien de surprenant car la dérive provoquée par l'effet Raman possède le même signe que celle trouvée au cas $B_3 > 0$ selon les expressions (3.23) et (3.22). Mais la dérive induite est très faible en raison de la faible valeur du coefficient de Raman ($R = 1.92 \times 10^{-2}$) et ne devient significative qu'après un temps de propagation assez long. Dans la figure 3.18, nous montrons un résultat numérique de la dérive induite par l'effet Raman, où les maxima des perturbations sont pointés par un point vert dans le but de visualiser clairement leurs positions. La perturbation qui se trouve à $\tau' = 0$ à l'instant initial [voir figure 3.18(a)] dérive au cours de la propagation dans la cavité. A la fin de la propagation, nous récupérons une perturbation amplifiée et élargie, ainsi qu'un faible changement de la position du maximum de la perturbation causé par l'effet Raman [voir l'agrandissement de la figure 3.18(b)]. Au niveau de spectre, nous observons une asymétrie similaire à celle du cas de $B_3 > 0$ [figure 3.15(a)]. Dans la relation (3.23), nous constatons que la dérive induite \tilde{V}_c est proportionnelle à I car R est une constante. Cette proportionnalité est vérifiée numériquement dans la figure 3.19, où les résultats numériques du modèle LL [équation (3.1)] sont en très bon accord avec la courbe analytique. La figure 3.19 montre aussi un très bon accord entre les simulations numériques obtenues par intégration du modèle original [équations (1.80)] et les prédictions analytiques, excepté pour les valeurs d'intensités intra-cavité assez élevées.

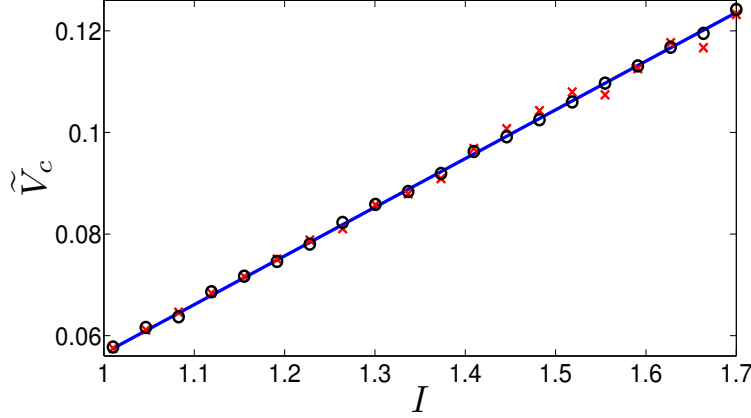


FIGURE 3.19: L'évolution de \tilde{V}_c en fonction de I en absence de la TOD ($B_3 = 0$) avec $R = 1.92 \times 10^{-2}$, les points ronds noirs sont les résultats numériques du modèle LL [équation (3.1)] et les croix rouges montrent les résultats numériques du modèle originel [équations (1.80)]. Les paramètres physiques utilisés dans le modèle originel sont $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$, $T_R = 3 \times 10^{-15} \text{ s}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 46 mW.

3.2.4 Compensation des effets de la dispersion d'ordre trois et de la diffusion Raman stimulée

Il résulte des paragraphes précédents que les deux contributions à la dérive s'ajoutent lorsque \tilde{V}_{cD} et \tilde{V}_{cR} possèdent le même signe et se compensent lorsque ils possèdent des signes opposés. Au cas où la dérive induite par la TOD est égale à celle induite par l'effet Raman en valeur absolue, mais elle se dirige vers les τ' décroissants ($B_3 < 0$), nous pouvons avoir une compensation de la dérive totale avec $\tilde{V}_c = \tilde{V}_{cD} + \tilde{V}_{cR} = 0$. A partir de cette condition, nous obtenons B_3 correspondant en fonction de R :

$$B_3 = -\frac{R(5I - 2\Delta)}{3|\Delta - 2I|} \quad (3.24)$$

Dans le cas des simulations numériques ci-dessus ($I = 1.1$, $\Delta = 1.026$ et $R = 1.92 \times 10^{-2}$), nous avons $B_3 = -1.88 \times 10^{-2}$. Pour tester une telle situation, nous considérons la même condition initiale que dans la section précédente [figure 3.18(a)]. Les simulations avec les paramètres satisfaisant à la condition de la compensation ($R = 1.92 \times 10^{-2}$ et $B_3 = -1.88 \times 10^{-2}$), montrent bien que la dérive est éliminée de sorte que le maximum de la perturbation reste à $\tau' = 0$ pendant la propagation dans la cavité (voir figure 3.20).

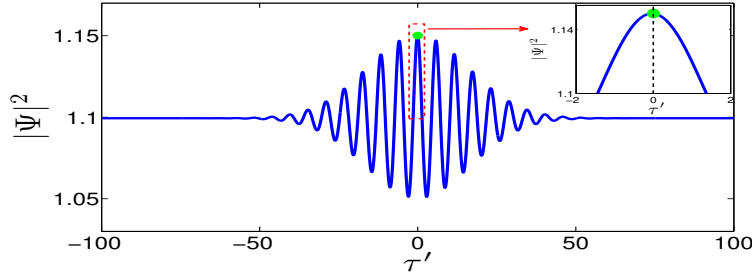


FIGURE 3.20: L'onde intra-cavité à la sortie de la cavité dans le modèle LL [équation (3.1)] après une propagation de $t' = 45$ avec $I = 1.1$, $B_3 = -1.88 \times 10^{-2}$ et $R = 1.92 \times 10^{-2}$. Le point vert indique la position du maximum de la perturbation.

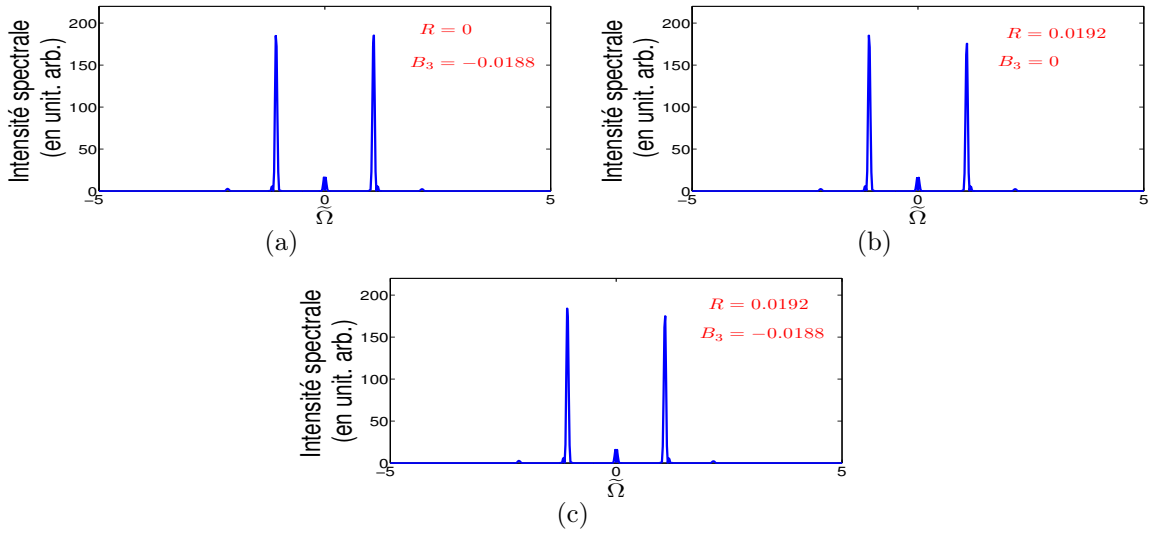


FIGURE 3.21: (a) Spectre de l'onde intra-cavité à la sortie de la cavité avec $I = 1.1$, $B_3 = -0.0188$ et $R = 0$. (b) Spectre de l'onde intra-cavité à la sortie de la cavité avec $I = 1.1$, $B_3 = 0$ et $R = 0.0192$. (c) Spectre de l'onde intra-cavité à la sortie de la cavité à l'issue de la compensation avec $I = 1.1$, $B_3 = -0.0188$ et $R = 0.0192$. Tous ces trois spectres sont obtenus à $t' = 90$.

Mais cette compensation n'est pas totale dans le spectre [figure 3.21(c)]. En effet, à la compensation de la dérive totale, l'asymétrie générée par l'effet linéaire (la TOD) est assez faible [figure 3.21(a)] et ne compense qu'en partie celle générée par l'effet non linéaire (Raman) qui est plus importante spectralement [figure 3.21(b)]. L'interprétation de l'asymétrie dans le spectre nécessite une étude non linéaire de l'impact de la TOD et de l'effet Raman dans le domaine spectral que nous ne traitons pas dans ce manuscrit.

En paramètres physiques, la condition de la compensation (3.24) devient

$$\beta_3 = -\frac{T_R |\beta_2| (5I - 2\Delta)}{|\Delta - 2I|}$$

Les paramètres que nous utilisons dans notre simulation ($\Delta = 1.026$, $I = 1.1$) permettent de trouver la dispersion d'ordre trois correspondante $\beta_3 = 2.643 \times 10^{-42} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$

avec $T_R = 3 \times 10^{-15}$ s, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28}$ s²m⁻¹. Cette valeur de β_3 est largement accessible expérimentalement.

3.3 Etude des instabilités absolue et convective dans une cavité fibrée

Lorsque les termes de type non local comme celui de la TOD ou de l'effet Raman sont présents dans le modèle de la cavité, une perturbation localisée initialement injectée autour de la solution stationnaire pourrait à la fois s'amplifier et dériver (voir section 3.2). Par conséquent, l'instabilité qui en découle peut être soit convective ou absolue. Afin de distinguer ces deux régimes d'instabilité dans la cavité, une étude est développée en se basant sur les concepts qui sont détaillés dans la section 2.3.1. En premier lieu, l'effet de la TOD sur ces régimes est mis en évidence. Puis, une simple analyse concernant l'effet de la diffusion Raman stimulée et de l'effet mixte combinant la TOD et la diffusion Raman stimulée est présentée. Toutes nos études dans la suite de cette section sont limitées au régime monostable ($\Delta < \sqrt{3}$) et au domaine de la GVD anormale ($\beta_2 < 0, s = -1$). Au niveau des notations, les lettres que nous avons utilisées pour les concepts des instabilités absolue et convective dans la section 2.3.1 seront désormais notées avec un tilde. Elles désigneront, dans le cas de la cavité, les même grandeurs que précédemment. Le gain total dans la cavité est défini donc par [voir l'équation (2.40)]

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\Omega}^s) = \tilde{K}_i^s(\tilde{\Omega}^s) - \tilde{\Omega}_i^s \tilde{V} \quad (3.25)$$

où $\tilde{\Omega}_i^s$ désigne la partie imaginaire de $\tilde{\Omega}^s$, \tilde{K}_i^s est la partie imaginaire de $\tilde{K}(\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^s)$ et $\tilde{\Omega}^s$ représente les fréquences dominantes aux temps longs dans la cavité définies comme suit

$$\left. \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}} \right|_{\tilde{\Omega}^s} = \tilde{V} \quad (3.26)$$

avec $\tilde{V} = \tau'/t'$ est la dérive normalisée dans la cavité, elle est réelle. L'expression de la dérive des fronts d'un paquet d'ondes dans la cavité [d'après l'expression (2.57)] s'écrit

$$\tilde{V}_{\pm} = \tilde{V}_c \pm \sqrt{-\frac{2\tilde{K}_{ci}|\tilde{K}_c''|^2}{\tilde{K}_{ci}''}} \quad (3.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{K}_c &= \tilde{K}(\tilde{\Omega}_c) = \tilde{K}_{cr} + i\tilde{K}_{ci} \\ \tilde{K}_c' &= \left. \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}} \right|_{\tilde{\Omega}_c} = \tilde{K}_{cr}' = \tilde{V}_c \\ \tilde{K}_c'' &= \left. \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}^2} \right|_{\tilde{\Omega}_c} = \tilde{K}_{cr}'' + i\tilde{K}_{ci}'' \\ \tilde{V}_c &= 3B_3\tilde{\Omega}_c^2 + (5I - 2\Delta)R \end{aligned} \quad (3.28)$$

En remplaçant les termes de la relation (3.27) par leurs expressions qui sont déjà calculées dans la relation (3.14), nous obtenons

$$\tilde{V}_{\pm} = \tilde{V}_c \pm \sqrt{2(I + \frac{1}{2}I\tilde{\Omega}_c^2 R^2 - 1)[9B_3^2 I + \frac{4s(\Delta - 2I)}{I}]} \quad (3.29)$$

En l'absence de la TOD et de l'effet Raman, l'ensemble du paquet d'ondes est immobile ($\tilde{V}_c = 0$). Et les fronts du paquet d'ondes dérivent symétriquement avec

$$\tilde{V}_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{8s(\Delta - 2I)(I - 1)}{I}} \quad (3.30)$$

où \tilde{V}_+ et \tilde{V}_- possèdent toujours des signes opposés ($\tilde{V}_+ \tilde{V}_- < 0$). Les deux fronts du paquet d'ondes dérivent suivant des sens opposés, ce qui provoque une extension du paquet d'ondes dans tout l'espace, l'instabilité est donc absolue. De plus, d'après l'expression (3.30), nous constatons que l'instabilité ne peut pas être convective ($\tilde{V}_+ \tilde{V}_- > 0$) quelque soit la valeur de l'intensité intra-cavité I . La figure 3.22 montre la courbe analytique de la dérive des fronts [expression (3.30)] en fonction de I et les résultats numériques des simulations du modèle LL [équation (3.1)] et du modèle originel [équations (1.80)]. Ces résultats sont en très bon d'accord. En outre, nous observons que le paquet d'ondes s'étend de plus en plus rapidement que I augmente.

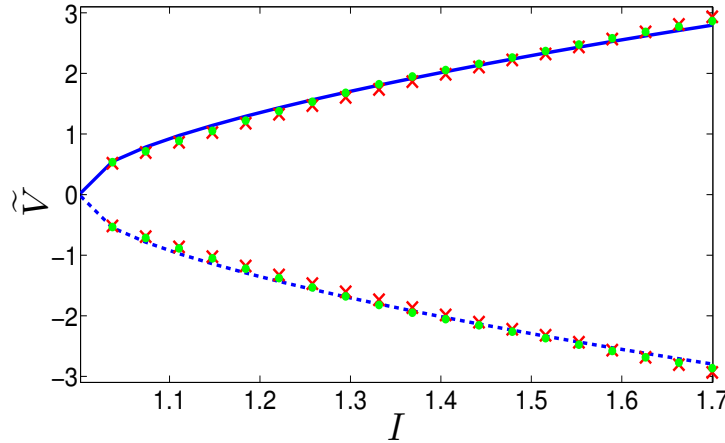


FIGURE 3.22: \tilde{V}_{\pm} en fonction de I en absence de la TOD et de l'effet Raman avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$. Les courbes bleues solide et pointillée représentent respectivement les valeurs théoriques de \tilde{V}_+ et de \tilde{V}_- , les points verts représentent les résultats numériques du modèle LL, et les croix rouges montrent les résultats numériques du modèle originel. Les paramètres physiques utilisés dans le modèle originel sont $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $\beta_3 = 0 \text{ s}^3\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$, $T_R = 0 \text{ s}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 46 mW.

3.3.1 Instabilités absolue et convective dans la cavité en présence de la dispersion d'ordre trois

En incluant le terme de la TOD (B_3) dans notre analyse, l'expression de la dérive des fronts du paquet d'ondes devient

$$\tilde{V}_\pm = 3B_3\tilde{\Omega}_c^2 \pm \sqrt{2(I-1)\left[9B_3^2I + \frac{4s(\Delta-2I)}{I}\right]} \quad (3.31)$$

où nous constatons que \tilde{V}_+ et \tilde{V}_- ne sont plus *symétriques*. Les deux fronts du paquet d'ondes peuvent dériver dans le même sens ce qui symbolise l'existence d'une instabilité convective. Pour caractériser les deux régimes d'instabilité en fonction des paramètres de la cavité, nous introduisons le produit $\tilde{V}_+\tilde{V}_-$ tel que

$$\tilde{V}_+\tilde{V}_- = 9B_3^2\tilde{\Omega}_c^4 - 2(I-1)\left[9B_3^2I + \frac{4s(\Delta-2I)}{I}\right] \quad (3.32)$$

La relation (3.32) est représentée dans la figure 3.23 avec les domaines d'instabilité convective et absolue tracés dans le plan des paramètres (I, B_3) et les régimes d'instabilités convective et absolue correspondent respectivement aux $\tilde{V}_+\tilde{V}_- > 0$ et $\tilde{V}_+\tilde{V}_- < 0$. Ces deux domaines sont séparés par la courbe rouge correspondant au seuil absolu qui est obtenu à partir de la relation $\tilde{V}_+\tilde{V}_- = 0$. Nous constatons que les domaines d'instabilités convective et absolue sont symétriques par rapport à la droite $B_3 = 0$ dans le plan (I, B_3) . Par conséquent, la dynamique dans le demi-plan $B_3 > 0$ est identique à celle dans le demi-plan $B_3 < 0$. L'étude dans un seul demi-plan suffit à comprendre la dynamique dans tout le plan (I, B_3) , alors nous choisissons $B_3 > 0$ dans l'étude suivante. Pour distinguer les différents régimes d'instabilité, nous décrivons les évolutions spatio-temporelles du paquet d'ondes correspondant à 4 situations dynamiques dans la figure 3.24. En absence de la TOD ($\beta_3 = 0, B_3 = 0$), l'instabilité est en régime absolu, les deux fronts du paquet d'ondes évoluent symétriquement dans des sens opposés ($\tilde{V}_+ = -\tilde{V}_-$) comme le montre la figure 3.24(a), où le paquet d'ondes est en expansion dans l'ensemble de l'espace. Après une durée d'évolution assez longue, l'instabilité affectera l'ensemble du système et entraîne une instabilité globale. Dès que la TOD est présente dans la cavité ($\beta_3 \neq 0, B_3 \neq 0$), les évolutions des deux fronts du paquet d'ondes ne sont plus symétriques, en fonction des valeurs de B_3 et de I choisies, l'instabilité peut rester en régime absolu comme le montre la figure 3.24(b). En régime convectif, les deux fronts dérivent dans le même sens comme nous pouvons le voir sur la figure 3.24(d), où le paquet d'onde se développe uniquement dans la moitié de l'espace. Après une durée d'évolution assez longue, l'instabilité quitte le domaine d'observation et nous retrouvons la solution stationnaire qui est pourtant instable. C'est tout l'intérêt des régimes convectifs : toute perturbation est amplifiée mais en même temps éjectée de telle sorte que dans l'absence de source de bruit, le système revient constamment à l'état stationnaire. Les effets du bruit sur la dynamique ne seront pas traités dans ce manuscrit. Le seuil absolu signifie le passage d'un régime à l'autre, c'est donc le moment du changement de signe de \tilde{V}_+ ou de \tilde{V}_- . La figure 3.24(c) montre un exemple où \tilde{V}_- s'annule pour changer de signe. Dans la suite, nous choisissons de faire varier les valeurs de B_3 et/ou de I pour étudier les changements d'instabilité dans la cavité.

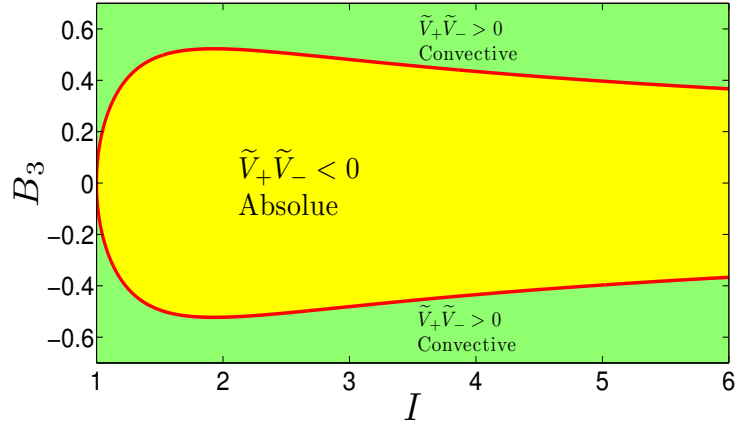


FIGURE 3.23: Les domaines d'instabilités convective et absolue dans le plan (I, B_3) avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$. En paramètres physiques, β_3 varie de $-9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$ à $9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 2.9 W avec $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$ et $T_R = 0 \text{ s}$.

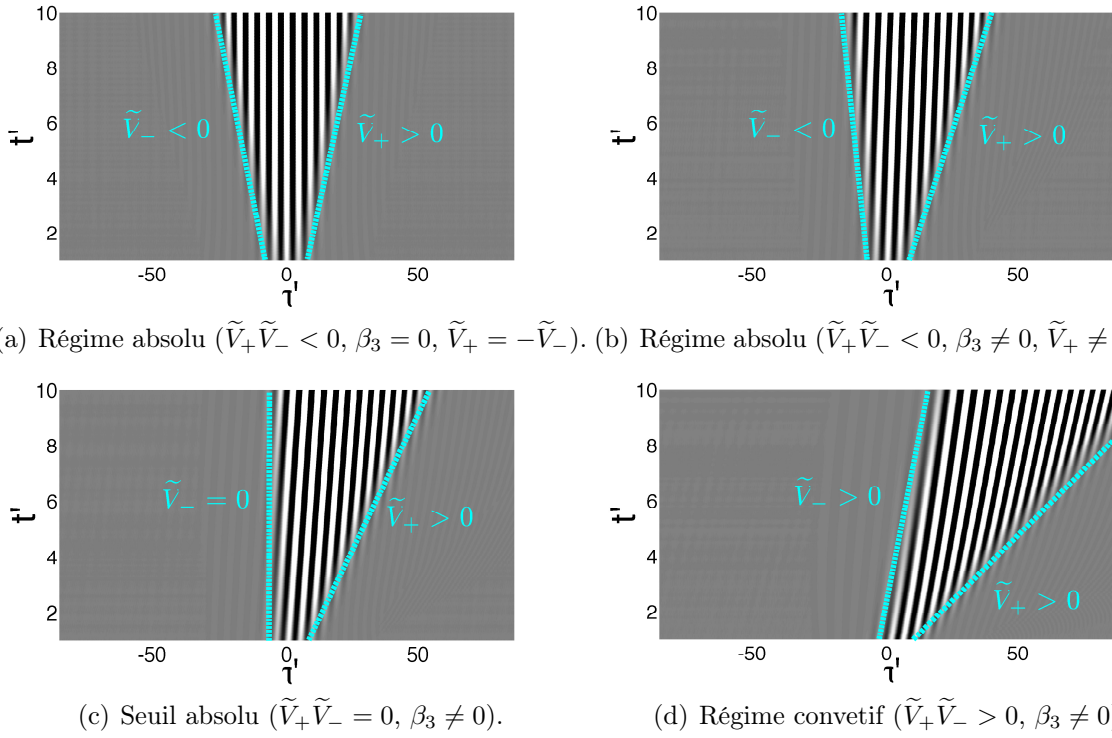


FIGURE 3.24: L'évolution du paquet d'ondes dans le plan (τ', t') dans 4 situations dynamiques différentes. Les droites bleues en pointillés représentent les évolutions des deux fronts du paquet d'ondes, \tilde{V}_+ et \tilde{V}_- .

3.3.1.1 Changement de régime d'instabilité en fonction de B_3 avec I constante

D'après la figure 3.23, le régime d'instabilité dépend à la fois de I et de B_3 . Nous considérons d'abord un cas où I est constante ($I = 1.44$) et B_3 augmente de 0, ce qui représente une droite verticale en pointillé dans la figure 3.25. Cette droite coupe la courbe $V_+V_- = 0$ à $B_{3a} = 0.48$ donnant le seuil absolu. La cavité est donc en régime absolu pour $B_3 < B_{3a}$ et en régime convectif pour $B_3 > B_{3a}$.

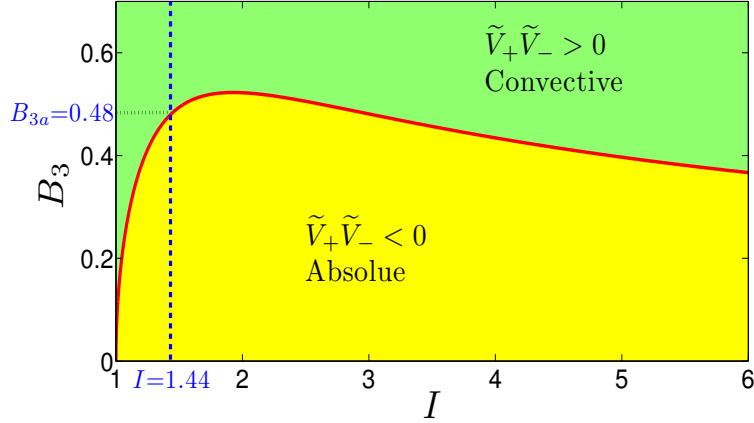


FIGURE 3.25: Les domaines d'instabilités convective et absolue dans le demi-plan (I , B_3) et $B_3 > 0$ avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$. En paramètres physiques, β_3 varie de $0 \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$ à $9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 2.9 W avec $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$ et $T_R = 0 \text{ s}$. Le seuil absolu se trouve à $\beta_{3a} = 6.76 \times 10^{-41} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$ pour une intensité de pompe égale 32 mW.

L'existence du seuil absolu peut aussi être confirmé par d'autres méthodes, par exemple, dans la figure 3.26, nous montrons l'existence du seuil absolu par le déplacement de la courbe de gain total $\tilde{\sigma}(\tilde{V})$. Il faut noter que seules les dérives \tilde{V} qui bénéficient de gain total positif sont déstabilisées. A $B_3 = 0$, la cavité est en régime absolu, la courbe de gain total est symétrique par rapport à $\tilde{V} = 0$. Dès que B_3 dépasse 0, la courbe de gain total commence à se décaler vers des \tilde{V} positives (négatives) pour B_3 positive (négative). Dans notre cas ($B_3 > 0$), lorsque $B_3 < B_{3a}$, une partie des dérives négatives bénéficient encore de gain total positif, l'instabilité reste absolue [figure 3.26(a)]. A $B_3 = B_{3a}$, toutes les dérives négatives possèdent un gain total négatif et la limite ($\tilde{\sigma} = 0$) gauche de la partie positive de la courbe de gain total se trouve à $\tilde{V} = 0$, c'est le seuil du changement de régime [figure 3.26(b)]. Puis, la partie positive de la courbe de gain total passe complètement dans le domaine des \tilde{V} positives lorsque $B_3 > B_{3a}$, la cavité est donc en régime convectif [figure 3.26(c)].

En outre, la condition du pincement expliquée dans la section 2.3.1.3 est nécessaire pour le changement du régime (seuil absolu). En utilisant la relation de dispersion approchée de la cavité [relation (3.15)], nous traçons la courbe $\tilde{K}_i = 0$ dans le plan complexe ($\tilde{\Omega}_r$, $\tilde{\Omega}_i$) avec $I = 1.44$ pour trois valeurs différentes de B_3 . Les résultats sont rassemblés dans la figure 3.27. Et le pincement est bien observé à $B_{3a} = 0.48$ qui

prouve l'existence du seuil absolu.

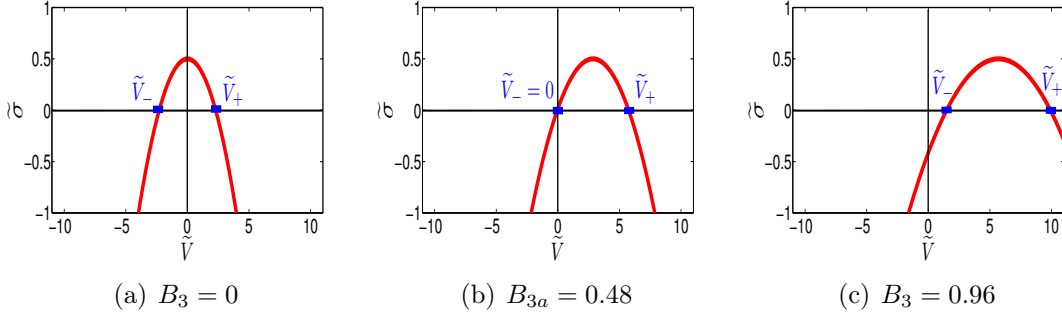


FIGURE 3.26: Le gain total $\tilde{\sigma}$ en fonction de \tilde{V} pour trois valeurs différentes de B_3 avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $I = 1.44$. Les figures montrent l'évolution des dérivés \tilde{V}_+ et \tilde{V}_- des fronts montant et descendant du paquet d'ondes quand B_3 (β_3) varie. (a) $\tilde{V}_+ \tilde{V}_- < 0$ avec $\tilde{V}_+ = -\tilde{V}_-$, (b) $\tilde{V}_+ \tilde{V}_- = 0$ avec $\tilde{V}_- = 0$, (c) $\tilde{V}_+ \tilde{V}_- > 0$.

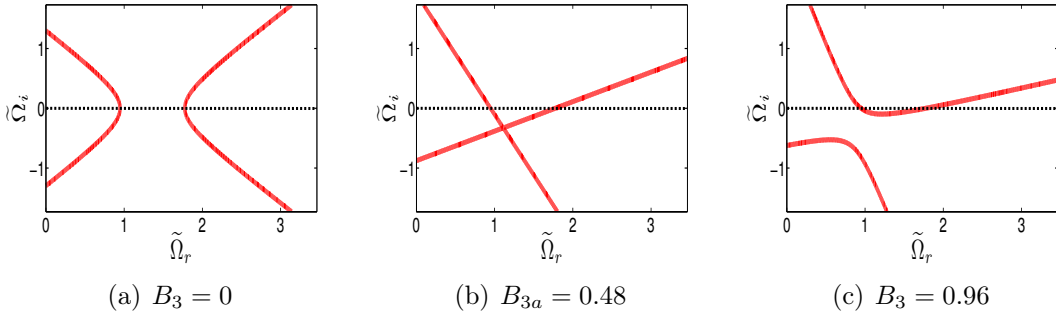


FIGURE 3.27: Le procédure du pincement dans le plan $(\tilde{\Omega}_r, \tilde{\Omega}_i)$, les courbes rouges correspondent à $\text{Im}[\tilde{K}_a] = 0$ pour trois valeurs différentes de B_3 avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $I = 1.44$. Deux branches s'approchent (a) pour se croiser au point selle (b) et repartent de part de d'autre de l'axe réel ($\tilde{\Omega}_i = 0$).

Pour tester nos prédictions analytiques ci-dessus, des simulations numériques ont été réalisées pour trouver l'évolution numérique de \tilde{V}_\pm en fonction de B_3 . Les résultats numériques et l'évolution analytique de \tilde{V}_\pm en fonction de B_3 [expression (3.31)] sont représentés dans la figure 3.28. Nous constatons que les résultats numériques issus du modèle LL sont en très bon accord avec les prédictions analytiques, cependant les résultats numériques issus du modèle originel sont légèrement décalés par rapport aux résultats analytiques. Nous rappelons que le modèle LL qui a servi pour les calculs analytiques n'est qu'un modèle approximatif du modèle originel, par conséquent, ces écarts restent acceptables. De plus, nous observons aussi que les valeurs analytiques et numériques de \tilde{V}_- passent de négatives à positives au alentours de $B_3 = 0.48$ ce qui confirme le seuil absolu prédit par l'analyse précédente.

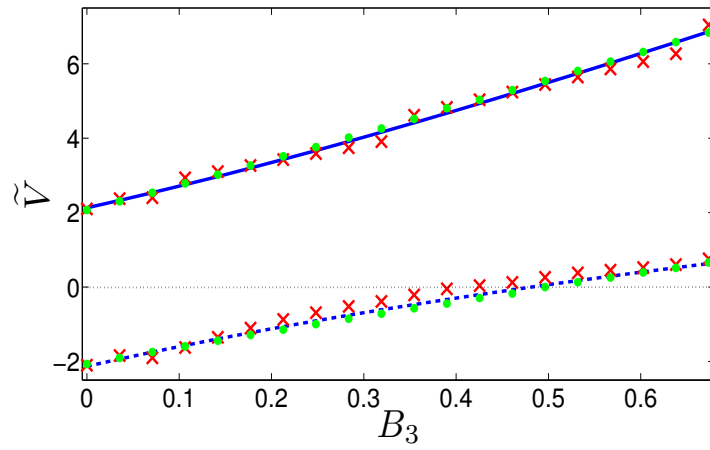


FIGURE 3.28: V_{\pm} en fonction de B_3 avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $I = 1.44$. Les courbes bleues solide et pointillée représentent respectivement les valeurs théoriques de \tilde{V}_+ et \tilde{V}_- . Les points verts représentent les résultats numériques du modèle LL, et les croix rouges montrent les résultats numériques du modèle originel. Les paramètres physiques utilisés dans le modèle originel sont $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$, $T_R = 0 \text{ s}$, l'intensité de pompe est fixée à 32 mW et β_3 varie de $0 \text{ s}^3\text{m}^{-1}$ à $9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$.

3.3.1.2 Changement de régime d'instabilité en fonction de I avec B_3 constante

Ici nous fixons B_3 et augmentons I à partir du seuil d'instabilité ($I_s = 1$), ce qui est représenté par une droite en pointillé horizontale dans le plan des paramètres (I, B_3) (figure 3.29). Selon la valeur de B_3 choisie, cette droite coupe une seule fois ou deux fois la courbe $\tilde{V}_+ \tilde{V}_- = 0$, ce qui veut dire qu'il peut exister un ou deux seuils absolus au cours de l'augmentation de I . Dans la plupart des problèmes des instabilités convective et absolue, le système ne franchit qu'une seule fois le seuil absolu pendant que le paramètre de contrôle évolue dans un seul sens. Il est donc intéressant de choisir une valeur de B_3 qui peut avoir deux seuils absolus. Dans la suite de notre analyse, nous fixons $B_3 = 0.48$, les seuils se trouvent aux $I_{a1} = 1.44$ et $I_{a2} = 3$, comme indiqué sur la figure 3.29.

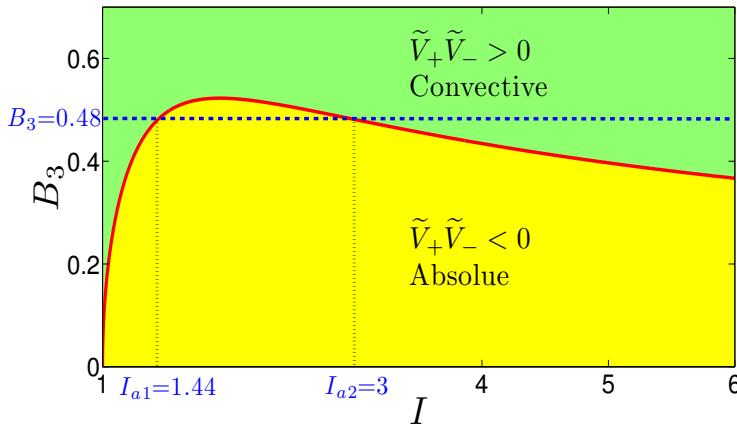


FIGURE 3.29: Les domaines d'instabilités convective et absolue dans le demi-plan (I, B_3) et $B_3 > 0$ avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$. En paramètres physiques, β_3 varie de $0 \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$ à $9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 2.9 W avec $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$ et $T_R = 0 \text{ s}$. Pour $\beta_3 = 6.76 \times 10^{-41} \text{ s}^3 \text{ m}^{-1}$, le premier seuil absolu se trouve à une intensité de pompe de 32 mW et le deuxième se trouve à une intensité de pompe de 276 mW .

D'une manière similaire à la section précédente, la méthode du déplacement de la courbe de gain total est utilisée pour mettre en évidence les seuils absolus (figure 3.30). Initialement à $I = 1.1$, seule les \tilde{V} positives commence à se déstabiliser (les gains correspondants sont positifs), c'est donc le régime convectif [figure 3.30(a)]. En augmentant I , la limite ($\tilde{\sigma} = 0$) à gauche de la partie positive de la courbe de gain total franchit deux fois de suite la position $\tilde{V} = 0$ [figures 3.30(b) et 3.30(d)] de façon que la partie positive de la courbe de gain total s'étende dans le domaine des \tilde{V} négatives après le premier franchissement, l'instabilité devient absolue [figure 3.30(c)]; après le second franchissement, la partie positive de la courbe de gain total repasse complètement dans le domaine des \tilde{V} positives, l'instabilité redevient convectif [figure 3.30(e)]. De plus, nous observons que la courbe de gain total se déplace aussi verticalement lorsque I augmente, ceci est dû à la proportionnalité entre le gain total et I .

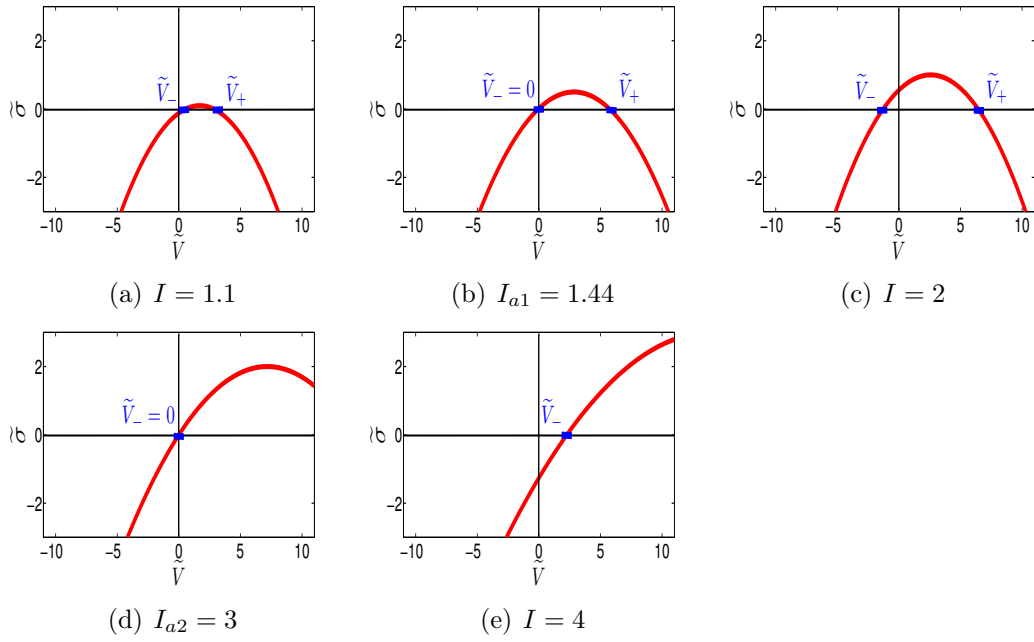


FIGURE 3.30: Le gain total $\tilde{\sigma}$ en fonction de \tilde{V} pour cinq valeurs différentes de I avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $B_3 = 0.48$. A noter le passage par $\tilde{V}_- = 0$ deux fois en (b) et en (d) pour deux valeurs différentes de I .

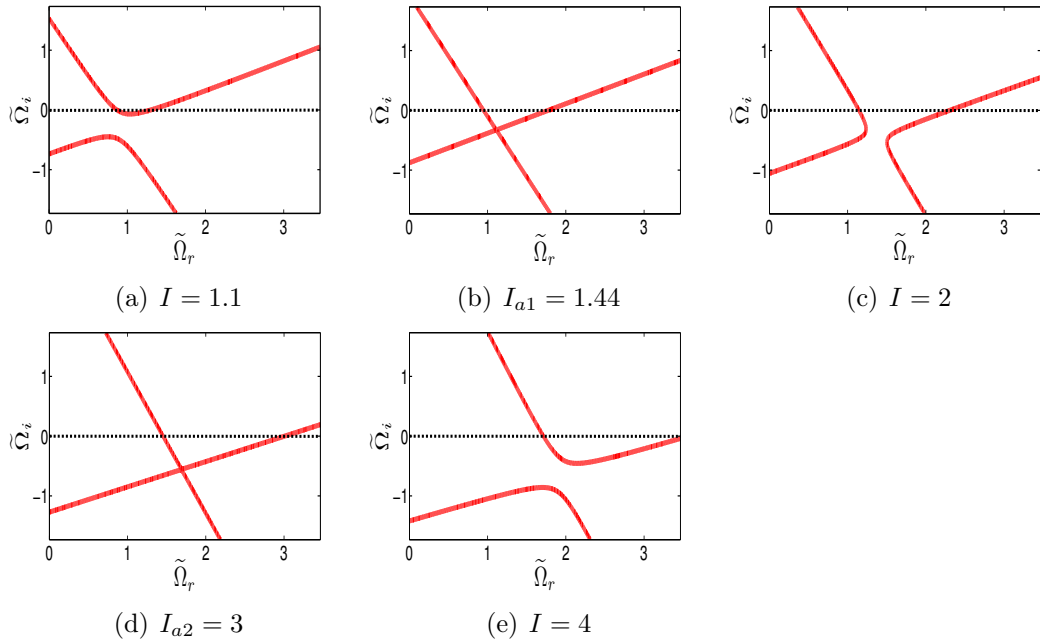


FIGURE 3.31: Le procédé du pincement dans le plan $(\tilde{\Omega}_r, \tilde{\Omega}_i)$, les courbes rouges correspondent à $\text{Im}[\tilde{K}_a] = 0$ pour cinq valeurs différentes de I avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $B_3 = 0.48$. A noter les deux pincements en (b) et en (d).

Le procédé de pincement est également montré dans la figure 3.31 pour confirmer l'existence de deux seuils à $I_{a1} = 1.44$ et $I_{a2} = 3$ pour $B_3 = 0.48$ [les deux pincements

sont clairs sur les figures 3.31(b) et 3.31(d)]. Par des simulations numériques, nous vérifions l'évolution de \tilde{V}_\pm en fonction de I pour $B_3 = 0.48$ dans la figure 3.32, mais nous n'avons pas pu aller plus loin en I . En fait, l'effet non linéaire devient rapidement trop important pour des valeurs de I loin du seuil d'instabilité I_s ce qui complique la mesure de la dérive des fronts. Par conséquent, nous avons arrêté les simulations à $I = 1.7$ ce qui ne permet pas de vérifier numériquement le second seuil $I_{a2} = 3$. Mais nous avons réussi de confirmer que \tilde{V}_- passe par 0 à une valeur de I proche de $I_{a1} = 1.44$ dans les simulations numériques issues de deux modèles.

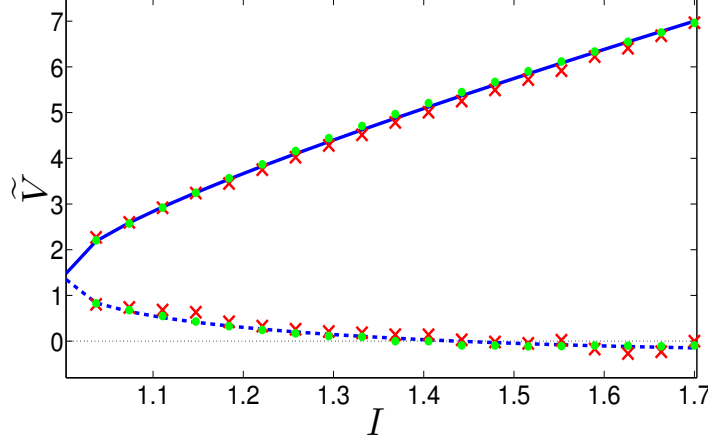


FIGURE 3.32: \tilde{V}_\pm en fonction de I avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $B_3 = 0.48$. Les courbes bleues solide et en pointillé représentent respectivement les valeurs théoriques de \tilde{V}_+ et \tilde{V}_- , les points verts représentent les résultats numériques du modèle LL, et les croix rouges montrent les résultats numériques du modèle originel. Les paramètres physiques utilisés dans le modèle originel sont $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$, $T_R = 0 \text{ s}$, $\beta_3 = 6.76 \times 10^{-41} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 46 mW.

3.3.2 Instabilités absolue et convective en présence de la diffusion Raman stimulée

Quant à l'effet de la diffusion Raman stimulée sur les instabilités absolue et convective dans la cavité, nous commençons aussi par réécrire l'expression de la dérive des fronts du paquet d'ondes correspondante comme suit

$$\tilde{V}_\pm = (5I - 2\Delta)R \pm \sqrt{\frac{8s(I + \frac{1}{2}I\tilde{\Omega}_c^2R^2 - 1)(\Delta - 2I)}{I}} \quad (3.33)$$

et le produit $\tilde{V}_+\tilde{V}_-$ s'écrit

$$\tilde{V}_+\tilde{V}_- = (5I - 2\Delta)^2R^2 - \frac{8s(I + \frac{1}{2}I\tilde{\Omega}_c^2R^2 - 1)(\Delta - 2I)}{I} \quad (3.34)$$

Par résolution numérique, nous montrons que le produit $\tilde{V}_+\tilde{V}_-$ est toujours négatif en régime monostable ($\Delta < \sqrt{3}$) et au domaine de la GVD anormale ($\beta_2 < 0$, $s = -1$).

Ce résultat est vérifié par toutes nos simulations numériques. Nous pouvons donc conclure que l'inclusion de l'effet Raman dans la cavité rend la dérive des fronts du paquet d'ondes asymétrique [selon l'expression (3.33)], mais l'instabilité de la cavité reste absolue quelque soit la valeur de I et R , l'effet Raman seul ne permet pas de changer le signe de la dérive d'un des fronts du paquet d'ondes pour faire apparaître un domaine d'instabilité convective. Nous pouvons expliquer ce résultat par le fait que l'effet Raman est relativement faible pour basculer le système d'un régime à l'autre.

3.3.3 Instabilités absolue et convective en présence de la dispersion d'ordre trois et de l'effet Raman

D'après les études des deux précédentes sections, la présence de la TOD seule dans la cavité crée un domaine d'instabilité convective, cependant l'effet Raman seul ne permet pas d'avoir l'instabilité convective dans la cavité. En incluant la TOD et l'effet Raman simultanément dans notre modèle, nous nous intéressons à l'impact de l'effet Raman sur le domaine d'instabilité convective qui est généré par la TOD seule. Tout d'abord, nous calculons le produit $\tilde{V}_+\tilde{V}_-$ à partir de l'expression (3.29) tel que

$$\begin{aligned} \tilde{V}_+\tilde{V}_- = & [3B_3\tilde{\Omega}_c^2 + (5I - 2\Delta)^2R^2]^2 \\ & - 2\left(I + \frac{1}{2}I\tilde{\Omega}_c^2R^2 - 1\right)\left[9B_3^2I + \frac{4s(\Delta - 2I)}{I}\right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

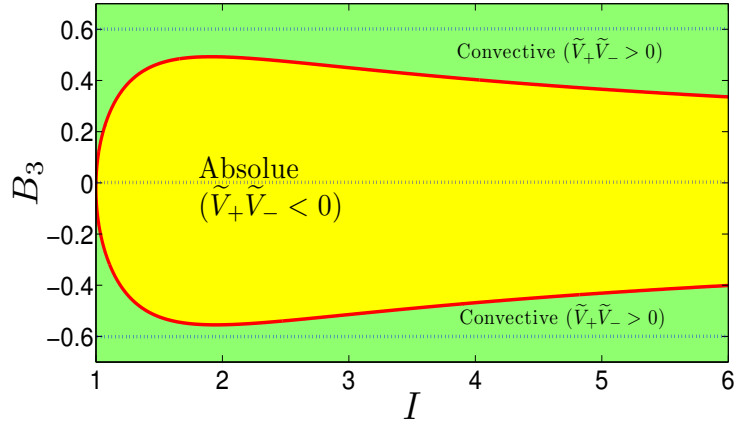


FIGURE 3.33: Les domaines d'instabilités convective et absolue dans le plan (I, B_3) en présence de l'effet Raman avec $\Delta = 1.026$, $s = -1$ et $R = 0.0192$. En paramètres physiques, β_3 varie de $0 \text{ s}^3\text{m}^{-1}$ à $9.44 \times 10^{-41} \text{ s}^3\text{m}^{-1}$ et l'intensité de pompe varie de 19 mW à 2.9 W avec $\gamma = 0.01 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\delta_0 = 0.06$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$, $L = 10 \text{ m}$, $\theta = 0.35$ et $T_R = 3 \times 10^{-15} \text{ s}$.

En nous appuyant sur la relation (3.35), les domaines d'instabilités convective et absolue dans le plan (I, B_3) , en présence de l'effet Raman, sont représentés dans la figure 3.33. Par rapport au cas sans l'effet Raman (figure 3.23), nous observons que les domaines d'instabilité ne sont plus symétriques par rapport à $B_3 = 0$ (ligne en pointillé dans la figure 3.33) et l'ensemble des domaines d'instabilité est déplacé vers

les valeurs négatives de B_3 . Ceci n'est pas surprenant car l'effet Raman introduit un effet similaire à B_3 positive sur la dérive des fronts. Lorsque $B_3 > 0$, elle s'ajoute à l'effet de la TOD de telle manière que le seuil absolu est atteint pour de faibles valeurs de B_3 . Lorsque $B_3 < 0$, elle annule partiellement l'effet de la TOD et le seuil absolu est atteint pour des valeurs de B_3 plus grandes en valeur absolue. Mais l'asymétrie des domaines d'instabilités convective et absolue dans le plan (I, B_3) reste faible en raison de la faiblesse de la dérive induite par l'effet Raman.

3.4 Instabilité secondaire d'Eckhaus-Benjamin-Feir

En dépassant le seuil d'instabilité de la solution non linéaire stationnaire ($I > I_s$), une solution modulée de type structure dissipative est susceptible d'apparaître. L'instabilité de cette solution bifurquée est communément appelé l'instabilité secondaire. Mon travail dans cette section consiste à étudier analytiquement et numériquement cette instabilité secondaire en présence de la TOD. En effet, la présence de la TOD change drastiquement la dynamique de la solution modulée et conduit à l'apparition des instabilités convective et absolue. Notre étude est limitée au régime monostable ($\Delta < \sqrt{3}$) et ne tient pas compte de l'effet de la diffusion Raman stimulée. En supprimant le terme de l'effet Raman dans l'équation (3.1), nous obtenons l'équation du modèle LL correspondante

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = S - (1 + i\Delta)\psi - is \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} + B_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau'^3} + i|\psi|^2 \psi \quad (3.36)$$

3.4.1 Equation aux amplitudes du modèle de Lugiato-Lefever

Notre étude théorique est basée sur la méthode standard des bifurcations, proposée dans le cadre de l'étude des cellules de Rayleigh-Benard [44] et appliquée depuis à la chimie non linéaire [45] et à l'optique non linéaire [28]. Cette méthode permet de déterminer l'expression analytique des solutions modulées au-delà du seuil d'instabilité. Pour une description détaillée de la méthode et l'application à des systèmes plus simples, nous renvoyons le lecteur à [46, 47]. Dans notre cas, nous appliquons la méthode multi-échelle au modèle LL [équation (3.36)] afin d'obtenir une équation aux amplitudes valable proche du seuil d'instabilité. La solution modulée au-delà du seuil d'instabilité est supposée de prendre la forme suivante

$$\psi = \psi_s + a \quad (3.37)$$

où a est la correction au-dessus du seuil. Nous pouvons développer a comme suit $a = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^3 a_3 + \dots$ avec ε un petit paramètre mesurant l'écart au seuil d'instabilité : $\varepsilon^2 = I - I_s$, $I_s = 1$ et $I = |\psi_s|^2 = \psi_s^2$ (où ψ_s est supposée réelle). Cela fixe le choix des échelles des temps t' et τ' à $t' = t'_0 + \varepsilon t'_1 + \varepsilon^2 t'_2 + \dots$ et $\tau' = \tau'_0 + \varepsilon \tau'_1 + \dots$. La résolution du problème au premier ordre en ε nous permet d'obtenir

$$a_1 = (1 + i)[A_1 e^{i(\tilde{\Omega}_{cs}\tau' + k_{cs}t')} + A_1^* e^{-i(\tilde{\Omega}_{cs}\tau' + k_{cs}t')}] \quad (3.38)$$

avec $\tilde{\Omega}_{cs} = \sqrt{(\Delta - 2I_s)/s}$ est la fréquence la plus instable au seuil d'instabilité et $k_{cs} = -B_3 \Omega_{cs}^3$. A_1 et son complexe conjugué A_1^* sont les amplitudes lentement variables de la solution modulée. L'évolution de A_1 est décrite par l'équation suivante

$$\frac{\partial S}{\partial t'} + 3B_3 \tilde{\Omega}_{cs}^2 \frac{\partial S}{\partial \tau'} = (\psi_s^2 - 1)S + (2\tilde{\Omega}_{cs}^2 + 3iB_3 \tilde{\Omega}_{cs}) \frac{\partial^2 S}{\partial \tau'^2} + (d_1 + id_2)|S|^2 S \quad (3.39)$$

La dérivation de l'équation (3.39) a été effectuée par François Léo et les détails des calculs se trouvent dans son manuscrit de thèse [38]. La variable S et les paramètres

sont définis par

$$\begin{aligned}
S &= \varepsilon A_1 \\
d_1 &= 24 \frac{2G+3}{G^2} + 4 \frac{G^2(1-2G) + H^2(2G-3)}{(G^2-H^2)^2 + 4H^2} \\
d_2 &= \frac{4H[2(1-2G) + G^2 - H^2]}{(G^2-H^2)^2 + 4H^2} \\
G &= 3(\Delta - 2) \\
H &= -6B_3\tilde{\Omega}_{cs}^3
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Dans l'équation (3.39), nous cherchons d'abord la solution modulée au-dessus du seuil sous la forme suivante

$$S_\omega = |S_\omega| e^{i(k_\omega t' + \omega \tau')} \tag{3.41}$$

En injectant cette solution dans l'équation (3.39), nous trouvons

$$|S_\omega|^2 = \frac{1}{d_1} [2\tilde{\Omega}_{cs}^2 \omega^2 - (I-1)] \tag{3.42}$$

$$k_\omega = -3B_3\tilde{\Omega}_{cs}\omega^2 - 3B_3\tilde{\Omega}_{cs}^2\omega + d_2|S_\omega|^2 \tag{3.43}$$

Commençons par nous intéresser à la solution centrale $\omega = 0$ qui s'écrit

$$\begin{aligned}
|S_0|^2 &= -\frac{(I-1)}{d_1} \\
k_0 &= -\frac{d_2(I-1)}{d_1}
\end{aligned}$$

Nous nous restreignons au cas de la bifurcation super-critique où $d_1 < 0$. Pour $d_1 > 0$ (Bifurcation sous-critique), le terme cubique de l'équation (3.39) n'est plus saturant et il faut alors pousser le développement asymptotique à l'ordre supérieur pour tenir compte des termes non linéaires d'ordre cinq. En limitant notre analyse au premier ordre de ε [$a = \varepsilon a_1 + O(\varepsilon^2)$], la forme de cette solution centrale dans le modèle de LL est obtenue à partir des expressions (3.37) et (3.38), elle s'écrit :

$$\psi_0 = \psi_s + (1+i)|S_0| [e^{i(\tilde{\Omega}_{cs}\tau' + (k_{cs}+k_0)t')} + e^{-i(\tilde{\Omega}_{cs}\tau' + (k_{cs}+k_0)t')}] \tag{3.44}$$

L'expression (3.44) décrit la solution modulée au-delà du seuil qui dérive à la "vitesse" $v = k/\tilde{\Omega}_{cs}$ induite par la TOD. Un premier résultat intéressant est que la TOD introduit un terme de phase k_0 dépendant de l'écart au seuil $(I-1)$. Celui-ci vient s'ajouter au terme k_{cs} , de sorte que le terme de phase corrigé s'écrit comme $k = k_{cs} + k_0$. Par conséquent, la vitesse de dérive de la solution modulée est modifiée et dépend donc de l'écart au seuil. La vitesse corrigée s'écrit [48]

$$v = \frac{k_{cs} + k_0}{\tilde{\Omega}_{cs}} = v_{cs} - \frac{d_2}{\tilde{\Omega}_{cs}d_1}(I-1) \tag{3.45}$$

avec $v_{cs} = k_{cs}/\tilde{\Omega}_{cs} = -B_3\tilde{\Omega}_{cs}^2$ est la vitesse de dérive de la solution modulée au seuil.

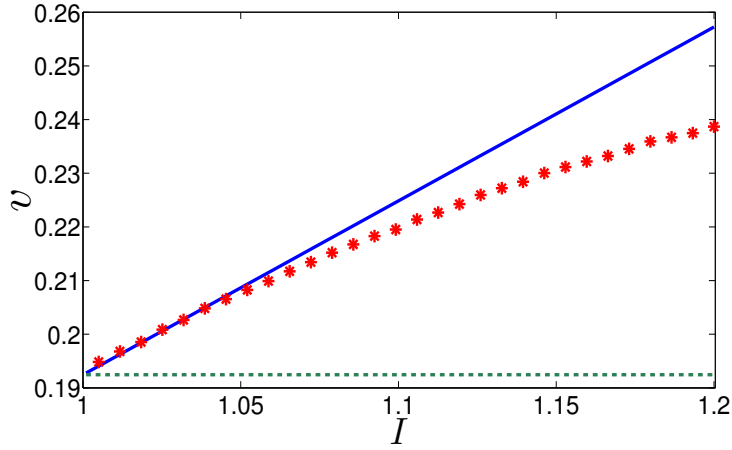


FIGURE 3.34: La vitesse de dérive de l'onde modulée corrigée en fonction de I dans le modèle LL. La courbe bleue représente v analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques avec $s = -1$, $\Delta = 1$, $B_3 = -0.19$. La vitesse au seuil v_{cs} est tracée en pointillé vert et à comparer avec v .

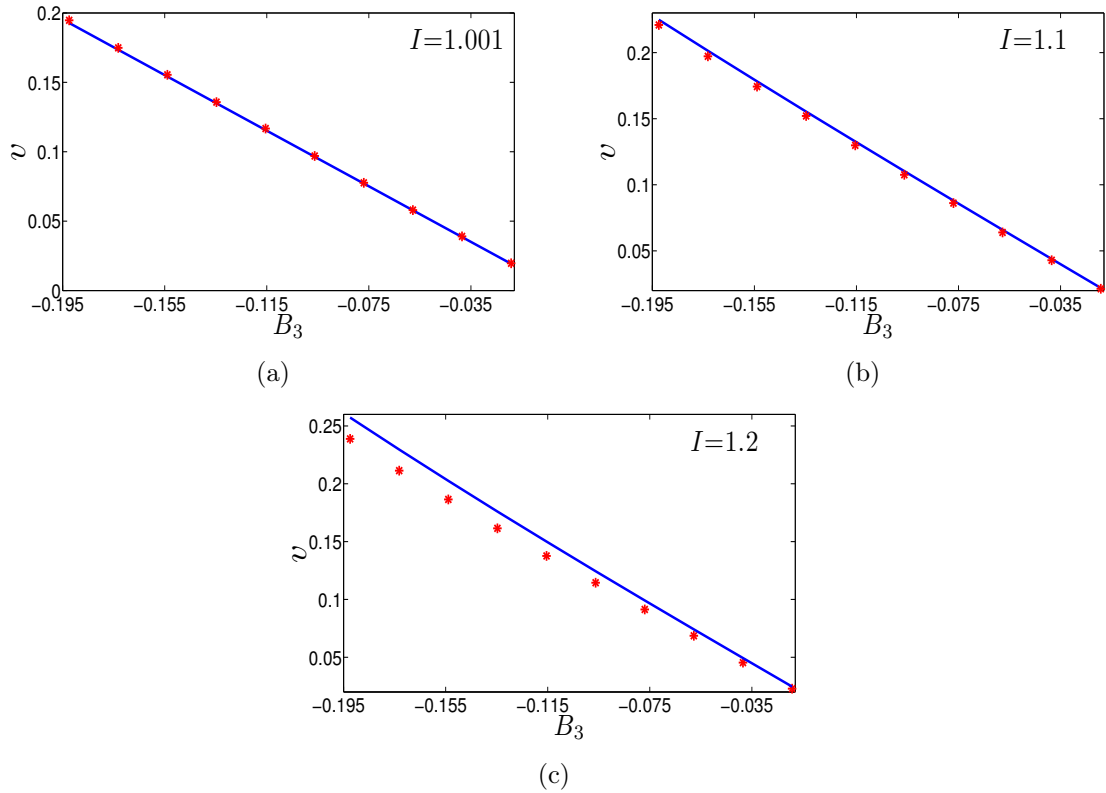


FIGURE 3.35: La vitesse de dérive de l'onde modulée corrigée en fonction de B_3 pour trois valeurs différentes de I dans le modèle LL. La courbe bleue représente v analytique et les étoiles rouges sont des résultats numériques avec $s = -1$ et $\Delta = 1$.

Selon l'expression (3.45), la vitesse corrigée dépend à la fois de l'écart au seuil $I - 1$ et de B_3 . En utilisant un programme d'intégration numérique du modèle LL [équation (3.36)], nous mettrons en évidence numériquement ces dépendances. La figure 3.34

représente les évolutions analytique et numérique de v en fonction de I . Un très bon accord entre les résultats numériques et analytiques de v est observé pour les valeurs de I qui sont assez proche du seuil (ici $I < 1.1$). En augmentant I , les résultats numériques sont en moins bon accord avec les résultats analytiques. Pour expliciter ce désaccord, nous calculons l'incertitude $\Delta v = |v_{analytique} - v_{numerique}|/v_{analytique}$, ce qui nous donne une incertitude de $\Delta v = 7\%$ à $I = 1.2$, elle est presque 3 fois plus grande que celle à $I = 1.1$ ($\Delta v = 2\%$). En effet, nous avons fait les calculs avec l'écart au seuil $I - 1$ petit (régime faiblement non linéaire), ce qui explique ce désaccord loin du seuil. En outre, v_{cs} est également tracée dans la même figure, elle est constante et indépendante de l'écart au seuil $I - 1$. Nous constatons qu'elle ne peut plus décrire la vitesse de propagation de la solution modulée au-delà du seuil sans la correction venant du calcul multi-échelle. Dans la figure 3.35, nous montrons l'évolution de v en fonction de B_3 pour trois valeurs différentes de I . Ici les figures montrent un bon accord entre les résultats numériques et les prédictions analytiques.

3.4.2 Instabilité secondaire d'Eckhaus-Benjamin-Feir

Jusqu'ici nous nous sommes concentrés sur la solution centrale S_0 , néanmoins, d'après la relation (3.42) d'autres solutions S_ω sont susceptibles d'apparaître pour $(I - 1) > 2\tilde{\Omega}_{cs}^2\omega^2$. Nous allons montrer que certaines de ces solutions sont instables vis-à-vis des perturbations de la forme $e^{i\delta\omega t'}$. Cette instabilité est appelée l'instabilité d'Eckhaus dans le cas des ondes stationnaires correspondant ici au cas $B_3 = 0$ ($\beta_3 = 0$) et l'instabilité de Benjamin-Feir dans le cas des ondes progressives correspondant ici au cas $B_3 \neq 0$ ($\beta_3 \neq 0$) [39]. Nous commençons par normaliser l'équation (3.39) en utilisant les normalisations proposées par F. Leo dans [38]. Nous posons

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \sqrt{\frac{-d_1}{\varepsilon^2}} S \\ \tilde{t} &= \varepsilon^2 t' \\ \tilde{\tau} &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2\tilde{\Omega}_{cs}^2}} (\tau' + 3B_3\tilde{\Omega}_{cs}^2 t') \\ b &= \frac{3B_3}{2\tilde{\Omega}_{cs}} \\ c &= \frac{d_2}{d_1}\end{aligned}\tag{3.46}$$

Avec ces normalisations, nous transformons l'équation (3.39) à une équation de type Ginzburg-Landau complexe [39] comme suit

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{S} + (1 + ib) \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{\tau}^2} - (1 + ic) |\tilde{S}|^2 \tilde{S}\tag{3.47}$$

La solution à amplitude constante de l'équation normalisée (3.47) est

$$\tilde{S}_\omega = \sqrt{1 - \tilde{\omega}^2} e^{i(\tilde{\omega}\tilde{\tau} - \tilde{k}_\omega\tilde{t})}\tag{3.48}$$

avec

$$\tilde{k}_{\tilde{\omega}} = c(1 - \tilde{\omega}^2) + b\tilde{\omega}^2$$

Cette solution existe pour

$$\tilde{\omega}^2 < 1$$

La stabilité linéaire de la solution (3.48) est étudiée en injectant dans l'équation (3.47) une solution de la forme suivante

$$\tilde{S} = (|\tilde{S}_{\tilde{\omega}}| + \delta a)e^{i(\tilde{\omega}\tilde{\tau} - \tilde{k}_{\tilde{\omega}}\tilde{t})} \quad (3.49)$$

avec

$$\delta a = \delta a_+ e^{(\lambda\tilde{t} + iq\tilde{\tau})} + \delta a_- e^{(\lambda^*\tilde{t} - iq\tilde{\tau})} \quad (3.50)$$

En supprimant tous les termes d'ordre supérieur à 1, nous obtenons une équation qui décrit l'évolution de la perturbation δa en régime linéaire telle que

$$\frac{\partial \delta a}{\partial \tilde{t}} = (1 + ib) \left(\frac{\partial^2 \delta a}{\partial \tilde{\tau}^2} + 2i\tilde{\omega} \frac{\partial \delta a}{\partial \tilde{\tau}} \right) - (1 + ic) |\tilde{S}|^2 (\delta a + \delta a^*) \quad (3.51)$$

Nous pouvons également écrire le complexe conjugué de l'équation (3.51) comme suit

$$\frac{\partial \delta a^*}{\partial \tilde{t}} = (1 - ib) \left(\frac{\partial^2 \delta a^*}{\partial \tilde{\tau}^2} - 2i\tilde{\omega} \frac{\partial \delta a^*}{\partial \tilde{\tau}} \right) - (1 - ic) |\tilde{S}|^2 (\delta a^* + \delta a) \quad (3.52)$$

En remplaçant l'expression (3.50) dans l'équation (3.51), nous pouvons obtenir une équation en $e^{(\lambda\tilde{t} + iq\tilde{\tau})}$ et une autre équation en $e^{(\lambda^*\tilde{t} - iq\tilde{\tau})}$, nous ne gardons que l'équation en $e^{(\lambda\tilde{t} + iq\tilde{\tau})}$. Ensuite nous pouvons faire le même calcul avec l'équation (3.52) pour obtenir une deuxième équation en $e^{(\lambda\tilde{t} + iq\tilde{\tau})}$. Nous représentons ces deux équations en $e^{(\lambda\tilde{t} + iq\tilde{\tau})}$ sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \lambda + A & B \\ C & \lambda + D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_+ \\ \delta a_-^* \end{pmatrix} = 0 \quad (3.53)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= (q^2 + 2\tilde{\omega}q)(1 + ib) + (1 + ic) |\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^2 \\ B &= (1 + ic) |\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^2 \\ C &= (1 - ic) |\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^2 \\ D &= (q^2 - 2\tilde{\omega}q)(1 - ib) + (1 - ic) |\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^2 \end{aligned}$$

Des solutions $(\delta a_+, \delta a_-^*) \neq (0, 0)$ existent si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + A & B \\ C & \lambda + D \end{pmatrix} = 0 \quad (3.54)$$

L'expression de λ peut être obtenue en résolvant la relation précédente, elle s'écrit

$$\lambda_{\pm} = -|\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^2 - 2ibq\tilde{\omega} - q^2 \pm \sqrt{(1 + c^2) |\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^4 - (bq^2 - 2i\tilde{\omega}q + c|\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^2)^2} \quad (3.55)$$

Dans la suite, nous considérons uniquement λ_+ , car c'est le seul cas où nous pouvons avoir l'instabilité, pour q proche de zéro (point de bifurcation).

3.4.2.1 Instabilité secondaire d'Eckhaus ($b = c = 0$)

Tout d'abord, nous considérons un cas où la TOD est absente. Par conséquent, nous avons $b = c = 0$ [voir l'équation (3.40) pour d_2]. D'après l'équation (3.48), la solution d'amplitude stationnaire correspondante s'écrit

$$\tilde{S}_{\tilde{\omega}} = \sqrt{1 - \tilde{\omega}^2} e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}} \quad (3.56)$$

et λ [expression (3.55)] prend donc une forme plus simple

$$\lambda_E = -|\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^2 - q^2 + \sqrt{|\tilde{S}_{\tilde{\omega}}|^4 + 4\tilde{\omega}^2 q^2} \quad (3.57)$$

L'analyse de la partie réelle de λ_E permet de montrer que la solution (3.56) est instable ($\text{Re}[\lambda_E] > 0$) pour

$$\tilde{\omega}^2 > \frac{1}{3} \quad (3.58)$$

Le mode le plus instable par rapport à q est calculé à partir de la relation $(\partial \text{Re}[\lambda_E]/\partial q)|_{q_{max}} = 0$, et son expression analytique est donnée par

$$q_{max}^2 = \frac{3}{4}(\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{3})(1 + \tilde{\omega}^2)\tilde{\omega}^{-2} \quad (3.59)$$

Nous remarquons que $q_{max} \rightarrow 0$, lorsque $\tilde{\omega} \rightarrow 1/3$ et $q_{max} \rightarrow 1$, lorsque $\tilde{\omega} \rightarrow 1$. Cette instabilité est connue sous le nom d'instabilité d'Eckhaus, elle a été abondamment étudiée dans le cas des cellules de convection de Rayleigh-Benard (voir [49] et les références qui s'y trouvent). Lorsque la fréquence de la modulation initiale satisfait la critère (3.58), l'instabilité provoque la disparition de la modulation initiale en fréquence $\tilde{\omega}$ et l'amplification d'un domaine des fréquences autour de la fréquence la plus instable $\tilde{\omega} - q_{max}$ ($\tilde{\omega} + q_{max}$) dans le cas $\tilde{\omega} > 0$ ($\tilde{\omega} < 0$). Les simulations numériques d'une fréquence stable ($\tilde{\omega} = \sqrt{1/4}$) et d'une fréquence instable ($\tilde{\omega} = \sqrt{2/3}$) sont montrées dans la figure 3.36. Dans cet exemple, les figures 3.36(a) et 3.36(b) montrent clairement la stabilité de solution modulée avec $\tilde{\omega} = \sqrt{1/4}$. Pour la solution à $\tilde{\omega} = \sqrt{2/3} \approx 0.81$, les calculs ci-dessus montre qu'elle est instable aux modulations q autour de la modulation $q_{max} = 5/8 \approx 0.79$, la solution bifurquée aura donc comme modulation $\tilde{\omega} - q_{max} \approx 0.02$, proche de zéro avec une période lente de $2\pi/(\tilde{\omega} - q_{max}) \approx 300$. La figure 3.36(d) est en excellent accord à la fois qualitatif et surtout quantitatif avec nos prédictions. Puisque l'instabilité d'Eckhaus est observée dans la simulation numérique de l'équation aux amplitudes normalisée (3.47), nous nous intéressons maintenant à retrouver cet instabilité dans le modèle LL (3.36). En utilisant les normalisations dans l'expression (3.46), nous pouvons obtenir une relation qui permet de relier la fréquence normalisée $\tilde{\omega}$ à la fréquence ω de la solution (3.41) du modèle LL telle que

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon^2}{2\tilde{\Omega}_{cs}^2} \tilde{\omega}^2 \quad (3.60)$$

où $\varepsilon^2 = I - I_s = I - 1$ mesure l'écart au seuil d'instabilité. A l'aide de la relation (3.60), nous exprimons les conditions d'existence de la solution ($\tilde{\omega}^2 < 1$) et d'instabilité de la solution ($\tilde{\omega}^2 > 1/3$) dans les paramètres du modèle LL comme suit

$$\varepsilon^2 > 2\omega^2 \tilde{\Omega}_{cs}^2 \quad (3.61)$$

$$\varepsilon^2 < 6\omega^2 \tilde{\Omega}_{cs}^2 \quad (3.62)$$

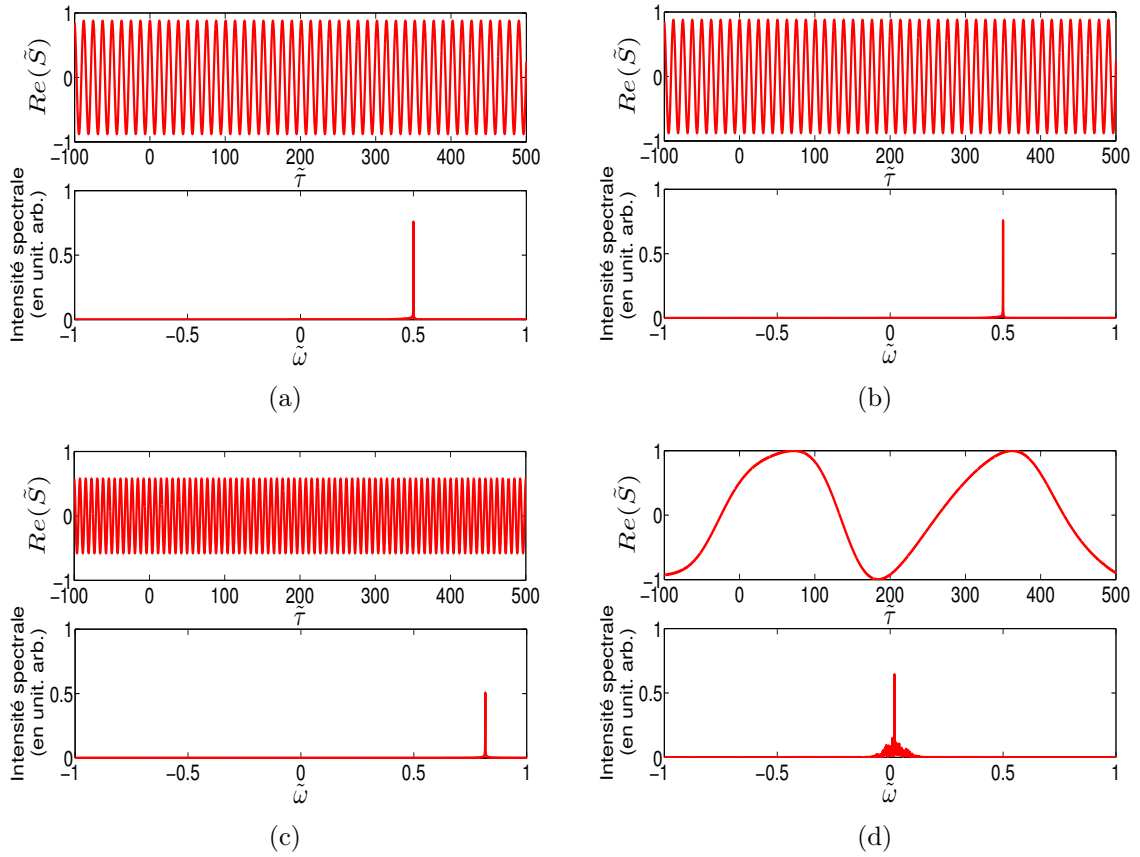


FIGURE 3.36: La partie réelle du signal dans le domaine temporel et spectral. Les figures (a) et (b) montrent le signal initial et final (à $\tilde{t} = 1000$) avec une fréquence stable $\tilde{\omega} = \sqrt{1/4}$ et les figures (c) et (d) montrent le signal initial et final (à $\tilde{t} = 1000$) avec une fréquence instable $\tilde{\omega} = \sqrt{2/3}$.

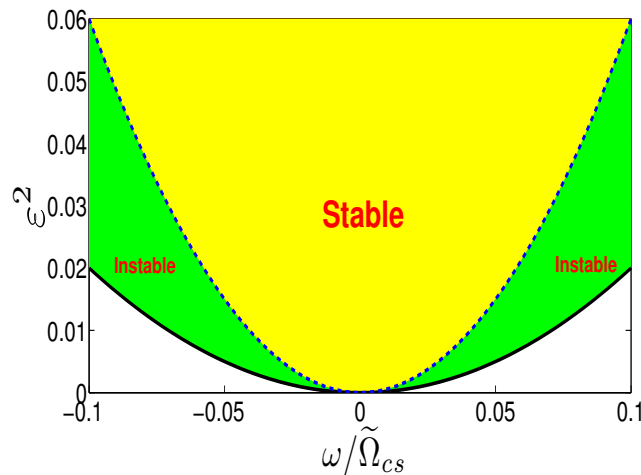


FIGURE 3.37: Le domaine d'instabilité dans le plan $(\omega/\tilde{\Omega}_{cs}, \varepsilon^2)$. La relation $\varepsilon^2 = 2\omega^2\tilde{\Omega}_{cs}^2$ est représentée par la courbe noire solide qui délimite la zone d'existence de la solution et la relation $\varepsilon^2 = 6\omega^2\tilde{\Omega}_{cs}^2$ est représentée par la courbe bleue en pointillé qui délimite la zone des solutions stables avec $s = -1$, $\Delta = 1$ et $\tilde{\Omega}_{cs} = 1$.

La figure 3.37 montre que l'instabilité d'Eckhaus est possible dans le modèle LL si les paramètres sont compris dans la zone verte qui est délimitée par la courbe noire solide et la courbe bleue pointillée. Pour observer l'instabilité d'Eckhaus dans le modèle LL, il faut d'abord trouver la forme de la solution (3.56) liée à ce modèle. En utilisant les expressions (3.37), (3.38) et les normalisations (3.46), nous obtenons

$$\psi_\omega = \psi_s + (1 + i) \frac{|\tilde{S}_\omega|}{\sqrt{-d_1}} [e^{i[(\tilde{\Omega}_{cs} + \omega)\tau' + (k_{cs} + k_\omega)t']} + e^{-i[(\tilde{\Omega}_{cs} + \omega)\tau' + (k_{cs} + k_\omega)t']}] \quad (3.63)$$

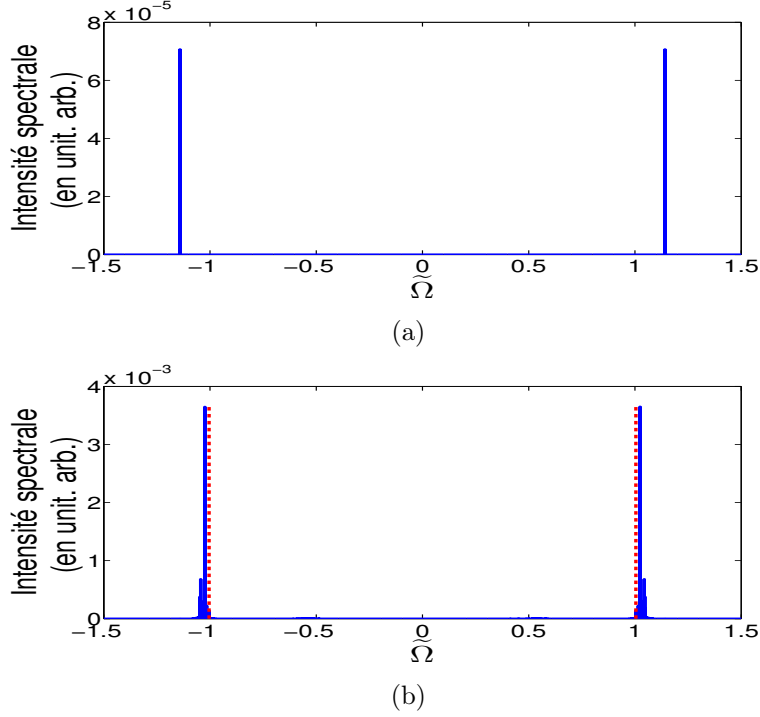


FIGURE 3.38: Le spectre du signal ψ initial (a) et à $t' = 2500$ (b) du modèle LL avec $\tilde{\omega} = \sqrt{2/3}$, $s = -1$, $\Delta = 1$, $I = 1.06$ et $\tilde{\Omega}_{cs} = 1$. Les droites verticales en pointillés rouges dans la figure (b) indiquent $\tilde{\Omega}_{max}$ et $-\tilde{\Omega}_{max}$ calculées analytiquement.

La solution (3.63) possède deux fréquences $\tilde{\Omega}_{cs} + \omega$ et $-\tilde{\Omega}_{cs} - \omega$ avec $\tilde{\Omega}_{cs} > 0$ [figure 3.38(a)]. En simulant cette solution dans le modèle LL, nous observons que les deux fréquences initiales s'atténuent et deux bandes de fréquences autour des fréquences de gain maximum $\tilde{\Omega}_{max} = \tilde{\Omega}_{cs} + \omega - Q_{max}$ et $-\tilde{\Omega}_{max} = -\tilde{\Omega}_{cs} - \omega + Q_{max}$ s'amplifient [figure 3.38(b)], où Q_{max} est le mode Eckhaus le plus instable dans le modèle LL avec $Q_{max}^2 = q_{max}^2 \varepsilon^2 / 2\tilde{\Omega}_{cs}^2$. Dans la figure 3.38(b), les deux fréquences numériques de gain maximum (en solide bleu) provoquées par l'instabilité d'Eckhaus sont légèrement décalées par rapport aux fréquences calculées analytiquement (en pointillé rouge). Deux facteurs contribuent à ce léger désaccord : en premier, nous avons limité le calcul au premier ordre [voir l'équation (3.38)] pour retrouver la solution du modèle LL ; en deuxième, puisque le calcul multi-échelle est effectué avec $I - I_s$ petit, le résultat peut être très sensible aux valeurs de I que nous avons choisies pour faire la simulation dans

le modèle LL. A partir des expressions (3.59) et (3.60), nous pouvons aussi exprimer Q_{max} en fonction des paramètres du modèle LL comme suit

$$Q_{max}^2 = \frac{3I-1}{8} \frac{I-1}{\tilde{\Omega}_{cs}^2} \left(1 - \frac{I-1}{6\tilde{\Omega}_{cs}^2\omega^2}\right) \left(1 + \frac{I-1}{2\tilde{\Omega}_{cs}^2\omega^2}\right) \quad (3.64)$$

3.4.2.2 Instabilité secondaire de Benjamin-Feir ($b \neq 0$, $c \neq 0$)

Lorsque la TOD est présente dans notre modèle, les paramètres b et c de l'équation aux amplitudes normalisées (3.47) sont tous les deux non nuls, par conséquent, la dynamique de notre système devient plus complexe. La TOD induit une dérive à la solution modulée qui était stationnaire [c'est à dire à $\tilde{k}_{\tilde{\omega}} = 0$ dans l'équation (3.65)] dans le cas où $b = 0$ et $c = 0$. Cette dérive engendre l'apparition de deux régimes différents d'instabilité : un régime convectif et un régime absolu. Nous avons déjà utilisé ces concepts dans les sections 2.3 et 3.3 pour étudier l'instabilité convective et absolue d'une solution stationnaire dans une fibre optique en propagation libre et une cavité fibrée. Cependant, ces concepts sont aussi valables pour étudier l'instabilité d'une solution modulée non stationnaire. Nous commençons par réécrire la solution modulée avec sa forme complète

$$\tilde{S}_{\tilde{\omega}} = \sqrt{1 - \tilde{\omega}^2} e^{i(\tilde{\omega}\tilde{\tau} - \tilde{k}_{\tilde{\omega}}\tilde{t})} \quad (3.65)$$

avec

$$\tilde{k}_{\tilde{\omega}} = c(1 - \tilde{\omega}^2) + b\tilde{\omega}^2$$

La vitesse de dérive de la solution modulée (3.65) est donnée par $\tilde{v} = \tilde{k}_{\tilde{\omega}}/\tilde{\omega}$. A noter que cette vitesse peut être positive ou négative selon les valeurs de b , c et $\tilde{\omega}$. L'analyse de l'expression générale de la valeur propre λ [relation (3.55)] permet de comprendre la dynamique dans des différents régimes d'instabilité de la solution (3.65). Nos prédictions analytiques seront confrontées, par la suite aux simulations numériques de l'équation aux amplitudes normalisées [équation (3.47)] et du modèle LL [équation (3.36)]. Dans un premier temps, nous développons λ pour $q \rightarrow 0$ afin d'obtenir une expression approchée comme suit [39, 50]

$$\lambda_a = -iV_d q - Dq^2 + O(q^3) \quad (3.66)$$

avec

$$V_d = 2(b - c)\tilde{\omega} \quad (3.67)$$

$$D = 1 + bc - \frac{2(1 + c^2)\tilde{\omega}^2}{1 - \tilde{\omega}^2} \quad (3.68)$$

L'expression approchée de λ [expression (3.66)] nous permet d'avoir rapidement une idée sur la stabilité de la solution (3.65). En effet, le signe de D permet de déterminer la stabilité de cette solution : elle est stable ($\text{Re}[\lambda_a] < 0$) lorsque $D > 0$. En utilisant l'expression (3.68), nous exprimons cette critère de stabilité en fonction de $\tilde{\omega}$ tel que

$$\tilde{\omega}^2 < \frac{1 + bc}{3 + 2c^2 + bc} \quad (3.69)$$

La critère (3.69) est la généralisation de la relation (3.58), la solution \tilde{S}_0 (la solution correspond à $\tilde{\omega} = 0$) sera donc stable si le critère de Benjamin-Feir-Newell $1 + bc > 0$ est satisfait [39]. Nous pouvons chercher le mode le plus instable (mode Eckhaus) en utilisant la relation suivante

$$\left. \frac{\partial \text{Re}[\lambda]}{\partial q} \right|_{q_{max}} = 0 \quad (3.70)$$

En nous appuyant sur la valeur propre approchée λ_a , la relation (3.70) nous permet de trouver $q_{max} = 0$. Dans le domaine stable, ce résultat montre que le mode le plus instable correspond à la fréquence de la solution modulée marginalement stable. Quant à l'étude de l'instabilité convective et absolue, la condition $\tilde{\omega}^2 = (1 + bc)/(3 + 2c^2 + bc)$ est considérée comme le seuil convectif, mais l'analyse de λ_a n'est pas capable de prédire ni l'existence du seuil absolu ni le mode le plus instable (mode Eckhaus), il faut donc revenir à l'expression générale de λ [expression (3.55)]. En général, λ et q sont tous les deux complexes à savoir $\lambda = \text{Re}[\lambda] + i\text{Im}[\lambda]$ et $q = \text{Re}[q] + i\text{Im}[q]$, en remplaçant ces deux expressions dans la partie exponentielle de l'expression de la perturbation (3.50), nous obtenons

$$\delta a \propto e^{(\lambda \tilde{t} + iq \tilde{\tau})} = e^{(\text{Re}[\lambda] - \text{Im}[q] \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{t}}) \tilde{t}} e^{i(\text{Im}[\lambda] \tilde{t} + \text{Re}[q] \tilde{\tau})} \quad (3.71)$$

Nous définissons une dérive \hat{V} et un gain total $\hat{\sigma}$ de la perturbation comme suit

$$\hat{V} = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{t}} \quad (3.72)$$

$$\hat{\sigma} = \text{Re}[\lambda] - \text{Im}[q] \hat{V} \quad (3.73)$$

Les fréquences q_s qui dominent aux temps longs sont définies par la méthode du point selle suivante

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial q} \right|_{q_s} = \hat{V} \quad (3.74)$$

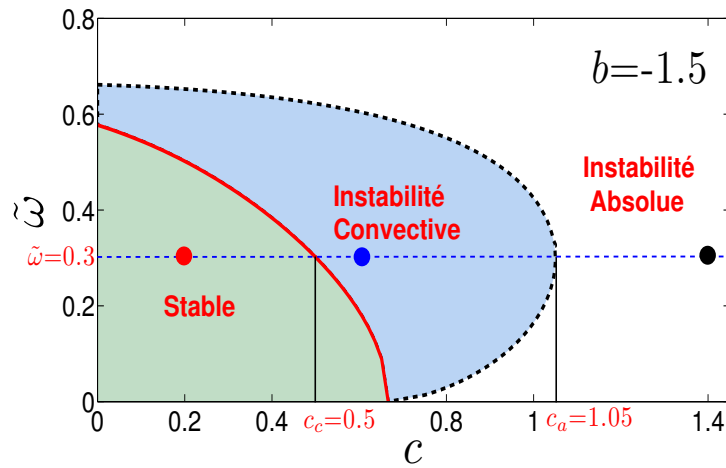
Au seuil absolu, nous avons la condition $\hat{V}(q_{sa}) = 0$. La fréquence correspondante q_{sa} peut être trouvée en utilisant les deux conditions suivantes [50, 39]

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial q} \right|_{q_{sa}} = 0 \quad (3.75)$$

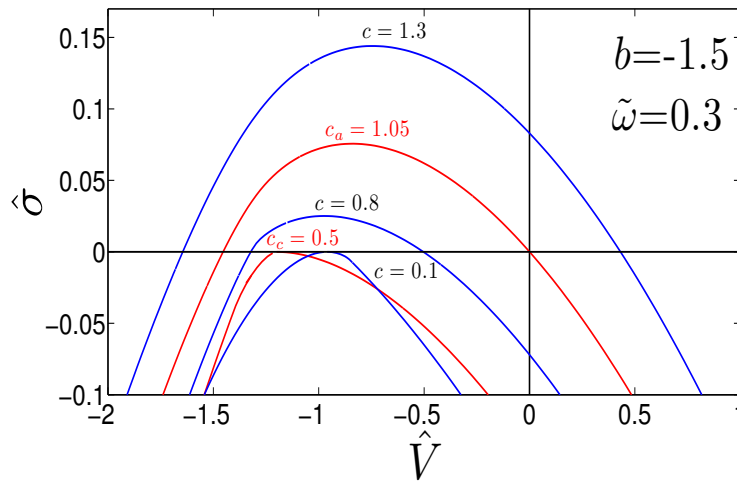
$$\text{Re}[\lambda(q_{sa})] = 0 \quad (3.76)$$

En utilisant un code numérique, nous avons résolu numériquement les équations algébriques (3.75) et (3.76). Un exemple est donné dans la figure 3.39(a) où le seuil absolu est tracé en pointillé noir dans le plan $(\tilde{\omega}, c)$ pour $b = -1.5$. Un chemin avec $\tilde{\omega}$ fixe ($\tilde{\omega} = 0.3$) est choisi pour tester les seuils convectif et absolu obtenus. Ce chemin est représenté en pointillé bleu, il coupe la courbe du seuil convectif à $c_c = 0.5$ et la courbe du seuil absolu à $c_a = 1.05$. La solution modulée (3.65) est stable en dessous du seuil d'instabilité convective, mais le gain total n'est pas négatif pour toutes les dérivées, il existe toujours une dérive bénéficiant du gain total $\hat{\sigma} = 0$ et elle correspond à la dérive du mode le plus instable $q_{max} = 0$ par laquelle $\hat{V} = V_d = 2(b - c)\tilde{\omega}$. Dans la figure 3.39(b) nous montrons la courbe du gain total $\hat{\sigma}$ en fonction de la dérive \hat{V} pour 5 valeurs de c sur la droite en pointillé bleu de la figure 3.39(a) pour examiner la transition entre les régimes d'instabilité. Lorsque $c \leq c_c$, le gain total est négatif pour

toutes \hat{V} sauf une seule dérive \hat{V} qui correspond à celle de la solution modulée stable, son gain total est nul ($\hat{\sigma} = 0$) [voir la courbe de $c = 0.1$ dans la figure 3.39(b)], elle n'est ni atténuée ni amplifiée. En modifiant c , la courbe du gain total ne déplace pas verticalement mais horizontalement, cela signifie que la solution modulée est toujours stable mais sa dérive peut changer en fonction de c . Après le seuil convectif, la courbe du gain total monte verticalement suivant l'augmentation de c , nous avons maintenant un domaine des \hat{V} bénéficiant de $\hat{\sigma}$ positif [voir la courbe de $c = 0.8$ dans la figure 3.39(b)], elles sont instables et possèdent même signe ($\hat{V} < 0$ dans notre exemple), cela signifie que la perturbation se développe uniquement dans la moitié de l'espace, nous sommes bien à l'instabilité convective. Au seuil absolu, une des deux limites de la partie positive de la courbe de gain total ($\hat{\sigma} = 0$) atteint $\hat{V} = 0$ [voir la courbe de $c_a = 1.05$ dans la figure 3.39(b)], puis, suivant l'augmentation de c , la partie positive de la courbe de gain total s'étend simultanément dans les domaines de $\hat{V} < 0$ et $\hat{V} > 0$ [voir la courbe de $c = 1.3$ dans la figure 3.39(b)], maintenant la perturbation se développe dans l'ensemble de l'espace, le système est absolument instable.



(a)



(b)

FIGURE 3.39: La figure (a) montre les domaines d'instabilité convective et absolue dans le plan $(\tilde{\omega}, c)$ avec $b = -1.5$. La courbe rouge solide représente la limite de l'instabilité d'Eckhaus $\tilde{\omega}^2 = (1 + bc)/(3 + bc + 2c^2)$ pour $q \rightarrow 0$ et la courbe en pointillé noir représente la courbe marginale qui sépare les domaines d'instabilité convective et absolue, elle est obtenue à partir des relations (3.75) et (3.76). La figure (b) représente le gain total $\hat{\sigma}$ en fonction de \hat{V} pour 5 valeurs de c .

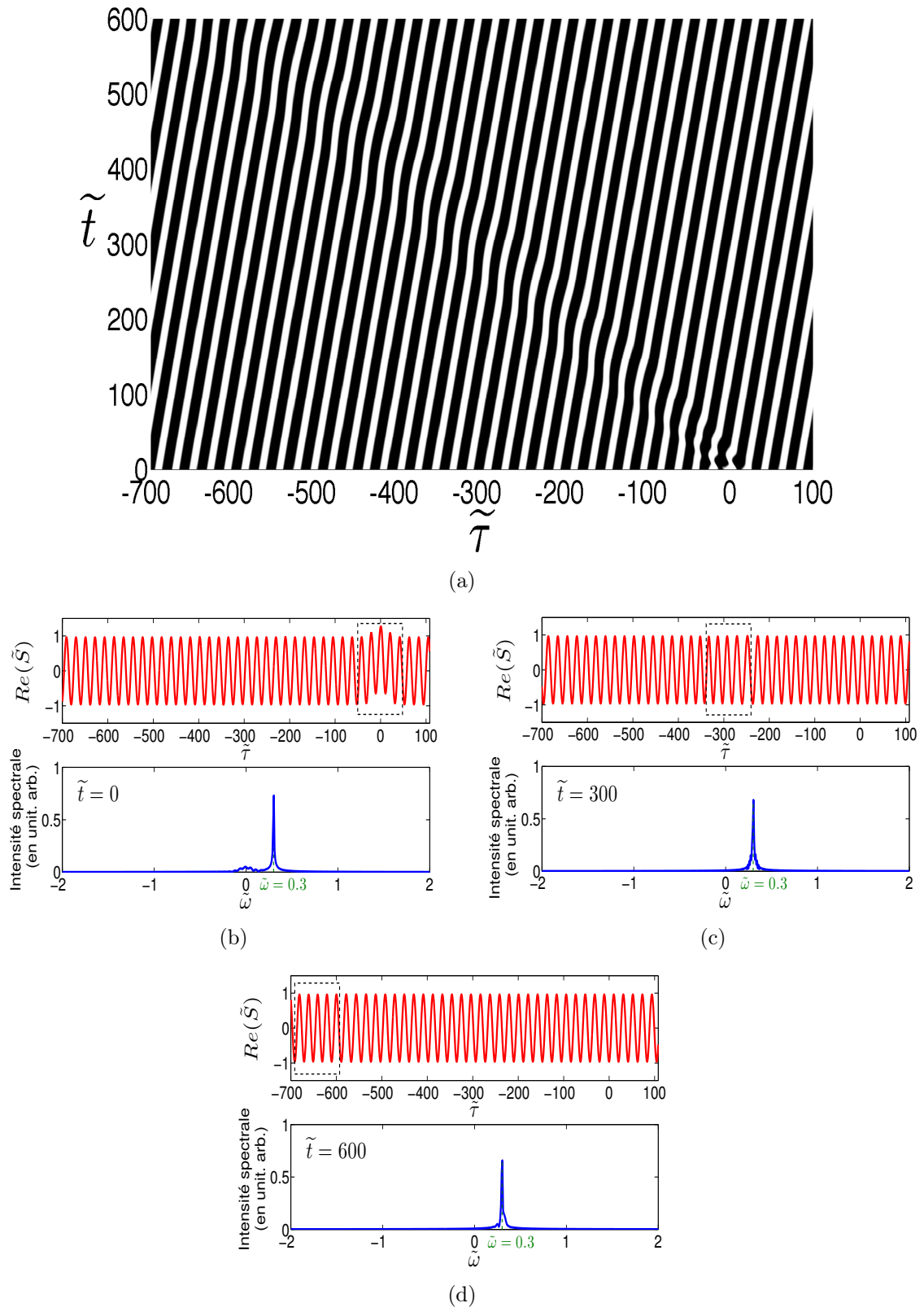


FIGURE 3.40: La simulation numérique de l'équation aux amplitudes normalisées [équation (3.47)]. La figure (a) montre l'évolution du signal perturbé dans l'espace spatio-temporel. Les figures (b), (c) et (d) représentent respectivement les profils temporels et les spectres du signal à $\tilde{t} = 0$, $\tilde{t} = 300$ et $\tilde{t} = 600$ avec $\tilde{\omega} = 0.3$, $b = -1.5$, $c = 0.2$.

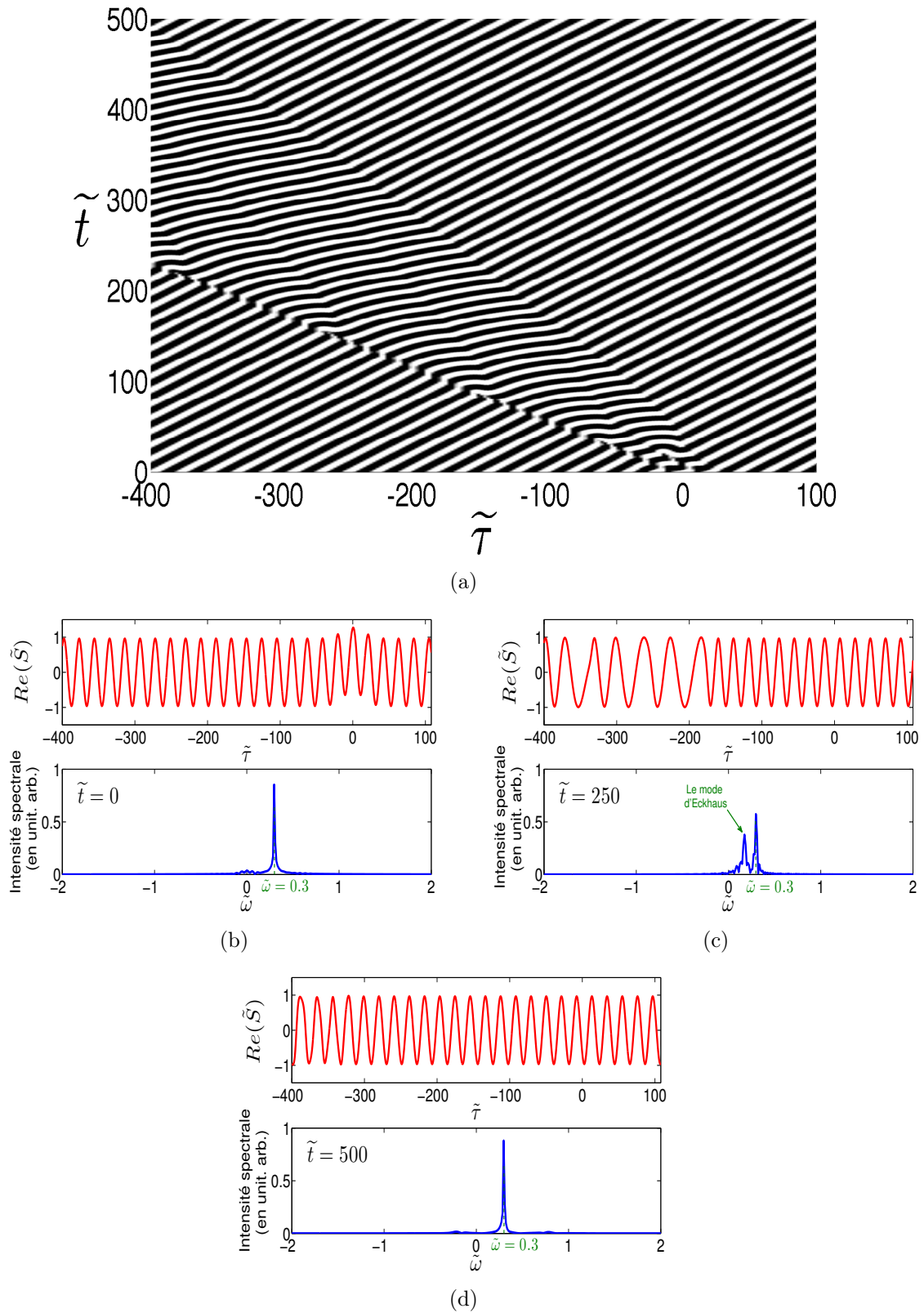


FIGURE 3.41: La simulation numérique de l'équation aux amplitudes normalisées [équation (3.47)]. La figure (a) montre l'évolution du signal perturbé dans l'espace spatio-temporel. Les figures (b), (c) et (d) représentent respectivement les profils temporels et les spectres du signal à $\tilde{t} = 0$, $\tilde{t} = 250$ et $\tilde{t} = 500$ avec $\tilde{\omega} = 0.3$, $b = -1.5$, $c = 0.6$.

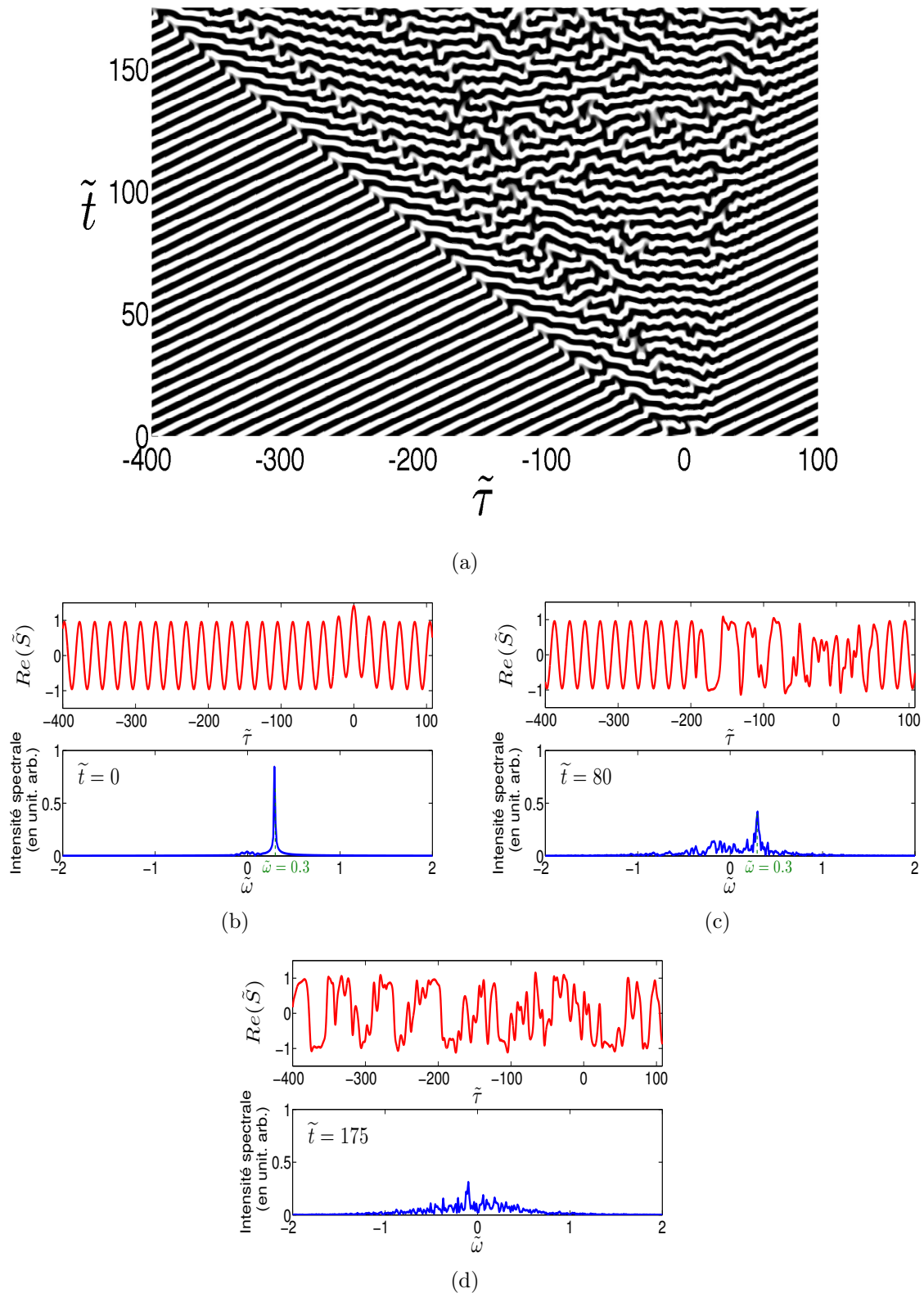


FIGURE 3.42: La simulation numérique de l'équation aux amplitudes normalisées [équation (3.47)]. La figure (a) montre l'évolution du signal perturbé dans l'espace spatio-temporel. Les figures (b), (c) et (d) représentent respectivement les profils temporels et les spectres du signal à $\tilde{t} = 0$, $\tilde{t} = 80$, $\tilde{t} = 175$ avec $\tilde{\omega} = 0.3$, $b = -1.5$ et $c = 1.4$.

Pour mettre en évidence ces régimes d'instabilité, nous procédons à trois simulations numériques significatives dans le programme intégrant l'équation (3.47), la première dans le domaine stable, la deuxième dans le régime convectif et une dernière dans le régime absolu, ces trois simulations sont notées par des ronds en rouge ($c = 0.2$), en bleu ($c = 0.6$) et en noir ($c = 1.4$) respectivement sur la figure 3.39(a). Dans toutes les trois simulations, nous envoyons une perturbation localisée à la solution (3.48) autour de la position $\tilde{\tau} = 0$ à l'instant initial [figures 3.40(b), 3.41(b) et 3.42(b)], puis, nous suivons son évolution. Dans le domaine stable, la perturbation s'atténue et dérive dans le plan $(\tilde{\tau}, \tilde{t})$ comme le montre la figure 3.40(a) où la dérive de la perturbation est donnée par $V_d = 2(b - c)\tilde{\omega}$. À noter que les franges noir et blanc représentent l'oscillation de la solution modulée à la fréquence $\tilde{\omega} = 0.3$. En effet, l'inclinaison de ces franges dans le plan $(\tilde{\tau}, \tilde{t})$ signifie que la solution modulée dérive elle-même suivant $\tilde{\tau}$, et cette dérive est donnée par $\tilde{v} = k_{\tilde{\omega}}/\tilde{\omega}$. Dans les profils temporels et les spectres du signal à $\tilde{t} = 300$ [figure 3.40(c)] et $\tilde{t} = 600$ [figure 3.40(d)], nous constatons que la perturbation s'est atténuée et le système retrouve la solution modulée (les positions de la perturbations sont encadrées par les rectangles noir en pointillé). En régime convectif, l'évolution du signal dans le plan $(\tilde{\tau}, \tilde{t})$ est décrite dans la figure 3.41(a). Nous observons que la partie perturbée du signal s'étend et dérive uniquement dans la moitié de l'espace au cours de la simulation, et elle quitte complètement le domaine d'observation sous l'effet de la dérive à $\tilde{t} = 500$. À noter que la dérive est bien négative comme le montre la figure 3.39(b). Les profils temporels et les spectres du signal montrent que la partie perturbée du signal a tendance à former une oscillation de la fréquence d'Eckhaus [figure 3.41(c)], mais cette fréquence finit par disparaître et le spectre retrouve son état initial lorsque la partie perturbée du signal quitte complètement le domaine d'observation sous l'effet de la dérive [figure 3.41(d)]. Ceci est en parfait accord avec nos résultats analytiques d'existence de régime convectif où le système retrouve son état initial asymptotiquement. En régime absolu, nous représentons l'évolution du signal dans le plan $(\tilde{\tau}, \tilde{t})$ dans la figure 3.42(a) où la partie perturbée du signal se développe dans tout l'espace, elle envahit finalement tout le domaine d'observation. Au cours de l'évolution, la fréquence initiale $\tilde{\omega}$ disparaît, mais nous n'observons pas l'amplification de la fréquence d'Eckhaus, et la partie perturbée du signal a perdu complètement la forme modulée [figures 3.42(c) et 3.42(d)]. Une étude avancée non linéaire est nécessaire pour expliquer ce résultat et tenir compte des interactions entre tous les modes instables et de leurs stabilités relatives.

Après avoir observé la solution modulée non stationnaire et ses instabilités dans l'équation aux amplitudes normalisée [équation (3.47)], nous revenons au modèle LL [équation (3.36)]. En réalité, la nature de l'instabilité d'un système dépend directement du référentiel dans lequel nous observons l'instabilité, elle peut être convective dans un référentiel et absolue dans un autre, ici le facteur clé est la dérive du référentiel que nous avons choisi. Dans notre cas, nous devons d'abord reconsidérer les relations de normalisation [relation (3.46)] dont la variable temporelle τ' du modèle LL est reliée à la variable normalisée $\tilde{\tau}$ par la relation suivante

$$\tau' = \sqrt{\frac{2\tilde{\Omega}_{cs}^2}{\varepsilon^2}} \left(\tilde{\tau} - \frac{3B_3\tilde{\Omega}_{cs}}{\sqrt{2\varepsilon}} \tilde{t} \right) \quad (3.77)$$

où nous avons constaté que le référentiel du modèle LL se déplace par rapport au

référentiel de l'équation aux amplitudes normalisée à la dérive $3B_3\tilde{\Omega}_{cs}/\sqrt{2\varepsilon}$, nous la notons \tilde{V}_{cs} . Ici nous introduisons les dérivées des fronts du paquet d'ondes de l'équation aux amplitudes normalisée [équation (3.47)], nous les notons \hat{V}_- pour la dérive du front montant et \hat{V}_+ pour la dérive du front descendant, elles sont définies par $\hat{\sigma}(\hat{V}_-) = \hat{\sigma}(\hat{V}_+) = 0$. Selon le principe mentionné dans [51], si $\hat{V}_- < \tilde{V}_{cs} < \hat{V}_+$, nous observons l'instabilité absolue dans le modèle LL, autrement, nous observons l'instabilité convective. Avec les paramètres de notre analyse, \tilde{V}_{cs} est toujours très grande par rapport à \hat{V}_- et \hat{V}_+ , ce qui veut dire que quelque soit le régime d'instabilité de la solution (3.48) observé dans l'équation aux amplitudes normalisée [équation (3.47)], elle est toujours convectivement instable dans le modèle LL. Une étude numérique basée sur le modèle LL [équation (3.36)] avec les paramètres correspondants aux régimes d'instabilité absolue et convective de l'équation aux amplitudes normalisée confirme la conclusion précédente. Pour terminer cette section, nous avons effectué également des simulations numériques dans le modèle originel de la cavité [équation (1.80) sans le terme de l'effet Raman], et l'instabilité secondaire d'Eckhaus-Benjamin-Feir est aussi observée dans ce modèle.

3.5 Conclusion

Dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire initialisée par une perturbation monochromatique étendue, nous avons montré que la TOD n'affectent pas le gain de la MI, alors que l'effet Raman modifie légèrement le seuil d'instabilité, mais cette modification reste négligeable. De manière similaire à la fibre optique, la TOD et l'effet Raman induisent aussi chacun de son côté une dérive dans le domaine temporel qui se traduit par une asymétrie dans le spectre. L'analyse de la dérive est vérifiée numériquement à la fois dans le programme intégrant le modèle LL et le programme intégrant le modèle originel. L'étude de la compensation de la dérive nous a permis de délimiter le domaine des paramètres conduisant à une détermination des valeurs optimales afin de réduire considérablement les dérivées du signal à la sortie de la cavité, mais le spectre du signal reste asymétrique. En second lieu, nous avons montré que la solution non linéaire stationnaire de la cavité fibrée est absolument instable en absence de la TOD et de l'effet Raman, mais la présence de la TOD fait apparaître effectivement un domaine d'instabilité convective. En modifiant l'intensité de pompe et/ou le coefficient de la TOD, la solution stationnaire peut être convectivement instable ou absolument instable, et le seuil absolu prédit par notre analyse est justifié par les différentes méthodes d'analyse et les simulations numériques. Quant à l'effet Raman, en raison de la faiblesse de sa dérive induite, il ne permet pas de changer la nature de l'instabilité. En effet, sa présence ne fait que modifier légèrement le domaine d'instabilité convective induit par la TOD. En dernier lieu, nous avons étudié la solution modulée de type structure dissipative qui est susceptible d'apparaître au-dessus du seuil d'instabilité de la cavité, son évolution est décrite par une équation aux amplitudes de type Ginzburg-Landau dérivée à partir du modèle LL. L'instabilité de cette solution correspond à une instabilité secondaire de type Eckhaus-Benjamin-Feir. En absence de la TOD, cette solution modulée est stationnaire et l'instabilité secondaire provoque un changement de la fréquence de la solution modulée. En re-

vanche, la présence de la TOD induit une dérive de la solution modulée qui rend la dynamique plus complexe. Une étude préliminaire analytique et numérique a montré que la TOD engendre l'apparition de domaines d'instabilité convective et absolue dans l'équation aux amplitudes. En simulant l'évolution d'une solution modulée perturbée, nous avons distingué les différents régimes d'instabilité de la solution modulée. Dans le cas d'instabilité convective, la partie perturbée de la solution modulée a tendance à former une oscillation à la fréquence d'Eckhaus, mais la perturbation finit par quitter le domaine d'observation sous l'effet de la dérive. Pour l'instabilité absolue, nous avons montré numériquement que la solution modulée bifurque vers une nouvelle solution oscillante à la fréquence d'Eckhaus sous l'effet de la perturbation. Pour des temps longs, les résultats de la simulation ont montré que la solution modulée perd complètement sa forme modulée sous l'effet des interactions non linéaires. En effet nous n'avons pas observé que l'amplification de la fréquence d'Eckhaus mais l'amplification d'une large bande de fréquences autour de celle d'Eckhaus. Une étude non linéaire avancée est nécessaire pour expliquer ce résultat. Cette étude avancée sort du cadre de cette thèse et peut être une perspective pour la suite. Nos prédictions analytiques sur l'équation aux amplitudes de type Ginzburg-Landau nous ont permis de conclure que dans tout le domaine des paramètres physiques explorés dans cette étude, l'instabilité des solutions modulées du modèle LL est convectives.

Chapitre 4

Fibres optiques biréfringentes à cristaux photoniques

Dans ce chapitre, nous considérons une caractéristique intrinsèque de la fibre optique - la biréfringence comme un degré de liberté supplémentaire pour réaliser la condition d'accord de phase sous-jacente de la MI dans le domaine de GVD normal ($\beta_2 > 0$). En effet, l'équation de Schrödinger non linéaire de la section 1.1.5 est basée sur une simplification qui suppose que l'état de polarisation de la lumière ne change pas au cours de sa propagation. Il est bien connu que les fibres réelles présentent une biréfringence modale avec des changements aléatoires dans sa grandeur et son orientation le long de la longueur de la fibre. Dans les fibres à cristaux photoniques (PCF) spécialement conçues, avec une biréfringence qui peut être beaucoup plus importante que la biréfringence aléatoire, par conséquent, il faut considérer la nature vectorielle de la propagation des ondes dans ces fibres fortement biréfringentes. Dans ce cas, la MI existe dans les cas de la GVD normal et anormal pour les champs co-propagatifs polarisés orthogonalement [13, 52, 53, 54]. D'un point de vue théorique, l'avantage de traiter les champs polarisés orthogonalement est que nous pouvons les comparer facilement au cas où deux ondes continues interagissent à l'intérieur d'une fibre optique idéale à travers la modulation de phase croisée [13]. En cas de la GVD normale et anormale, le gain de la MI a été communément considéré comme non affecté par les dispersions d'ordre impair au cours de la propagation de la lumière dans un milieu Kerr non linéaire. En fait, le gain de la MI est généralement obtenu par une analyse de stabilité linéaire standard applicable uniquement lorsque le processus est lancé par une perturbation monochromatique étendue. Récemment, il a été démontré que la prise en compte des effets de la distorsion linéaire et des interactions entre les différentes composantes spectrales d'impulsion entraîne une réduction spectaculaire du gain de la MI en présence de la dispersion d'ordre trois (TOD) [30]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'effet de la TOD sur le processus de la MI d'une impulsion dans une fibre faiblement biréfringente. Nous montrons que, outre la réduction du gain de la MI précédemment prédite, la distorsion de la forme d'impulsion sous l'effet de la TOD est décrite par une fonction d'Airy. Plus important encore, nous montrons ici que les caractéristiques de l'impulsion (largeur, chirp, etc) peuvent être contrôlées par l'interaction entre la TOD et la MI.

Nous organisons l'étude de ce chapitre de la façon suivante : dans la première partie,

nous rappelons les équations vectorielles décrivant la propagation des composantes orthogonales d'une lumière polarisée arbitrairement dans une fibre biréfringente mono-mode, ainsi que l'analyse de stabilité linéaire et la solutions générale de l'équation linéarisée à partir d'une perturbation initiale; la deuxième partie est consacrée aux calculs de la forme d'une impulsion Gaussienne amplifiée par la MI, et ces résultats sont comparés aux simulations numériques des équations vectorielles dans la dernière partie.

4.1 Instabilité de polarisation

Nous commençons par les équations couplées NLS généralisées décrivant les composantes orthogonalement polarisées d'une impulsion dans une fibre optique biréfringente [13, 52, 53, 54] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial U}{\partial t} &= i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) U + i\gamma \left(|U|^2 + \frac{2}{3} |V|^2 \right) U \\ &\quad + i \frac{\gamma}{3} U^* V^2 e^{-2i\Delta\beta z} \end{aligned} \quad (4.1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial V}{\partial t} &= i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) V + i\gamma \left(|V|^2 + \frac{2}{3} |U|^2 \right) V \\ &\quad + i \frac{\gamma}{3} U^2 V^* e^{2i\Delta\beta z} \end{aligned} \quad (4.1b)$$

où $U(z, t)$ et $V(z, t)$ représentent les deux composantes orthogonales de la polarisation d'un champ optique $\vec{E}(z, t)$ centré autour de la fréquence ω_0 définie par

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} [U(z, t) \vec{x} + V(z, t) \vec{y}] e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c.$$

avec $\beta_0 = (\beta_{0x} + \beta_{0y})/2$ est la constante de propagation moyennée, $\Delta\beta = (\beta_{0x} - \beta_{0y})/2 = 2\pi/L_B$ est une mesure de la biréfringence modale, et L_B est la longueur de la biréfringence. Le coefficient non linéaire γ est proportionnel à l'indice de réfraction non linéaire à l'origine de l'effet Kerr et l'opérateur de la dispersion $\beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)$ est donné par

$$\beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) = \sum_{n \geq 2} \frac{\beta_n}{n!} \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^n$$

Puisque nous considérons dans cette section des fibres optiques avec une biréfringence relativement faible, les paramètres de la vitesse de groupe sur les deux axes de la polarisation β_{1x} et β_{1y} sont presque identiques, nous pouvons donc poser $\beta_{1x} \approx \beta_{1y} = \beta_1$. En introduisant $\bar{U} = U \exp(i\Delta\beta z/2)$ et $\bar{V} = V \exp(-i\Delta\beta z/2)$, les équations couplées décrivant les polarisations circulaires gauche et droite $A_{\pm} = (\bar{U} \pm i\bar{V})/\sqrt{2}$ sont analogues à celles de la modulation de phase croisée [13].

Les équations (4.1) possèdent une solution stationnaire correspondant à un mode de puissance constante dont l'état de la polarisation est orienté selon l'un des axes principaux. Dans ce qui suit, nous choisissons cet état de polarisation le long de l'axe \vec{y} qui représente l'axe rapide (lent) pour $\Delta\beta > 0$ ($\Delta\beta < 0$). La solution stationnaire est donnée par $(U_0, V_0) = [0, \sqrt{P_0} \exp(i\gamma P_0 Z)]$, où P_0 est la puissance de pompe incidente.

Pour examiner la stabilité de cette solution, nous la soumettons à des fluctuations comme suit

$$U(Z, t) = u(Z, t) \quad (4.2a)$$

$$V(Z, t) = \left[\sqrt{P_0} + v(Z, t) \right] e^{i\gamma P_0 Z} \quad (4.2b)$$

avec $u(Z, t)$ and $v(Z, t)$ sont prises faibles par rapport à $\sqrt{P_0}$ et $Z = z - t/\beta_1$. En insérant les solutions (4.2) dans l'équation (4.1) et en linéarisant en u et v , nous obtenons les équations découplées suivantes

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} = i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{u} + i \left(\Delta\beta - \frac{\gamma_0}{3} \right) \bar{u} + i \frac{\gamma_0}{3} \bar{u}^* \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial Z} = i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) v + i\gamma_0 (v + v^*) \quad (4.3b)$$

où nous avons posé $\bar{u} = u \exp [i(\Delta\beta - \gamma_0) Z]$ et $\gamma_0 = \gamma P_0$. Les instabilités suivants l'axe \vec{x} et l'axe \vec{y} peuvent être étudiées en analysant indépendamment les équations (4.3a) ou (4.3b).

Pour l'axe \vec{x} , nous écrivons l'équation (4.3a) et son complexe conjugué dans le domaine spectral sous la forme matricielle suivante

$$\partial_Z \begin{bmatrix} \tilde{u}(Z, \Omega) \\ \tilde{u}^*(Z, -\Omega) \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} \tilde{u}(Z, \Omega) \\ \tilde{u}^*(Z, -\Omega) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

avec

$$X = \begin{bmatrix} M(\Omega) & i\gamma_0/3 \\ -i\gamma_0/3 & M^*(-\Omega) \end{bmatrix}$$

où $M(\Omega) = i[\beta(\Omega) + \Delta\beta - \gamma_0/3]$ et $\beta(\Omega)$ est la transformée de Fourier de l'opérateur de dispersion, elle est réelle. Puisque la perturbation \tilde{u} et son complexe conjugué \tilde{u}^* sont proportionnelles au terme $\exp(\lambda_x Z - i\Omega t)$ avec Ω représentant la pulsation en décalage par rapport à la pulsation de pompe et λ_x est la valeur propre de la matrice X , la stabilité de la solution stationnaire sur l'axe \vec{x} est liée au signe de la partie réelle de λ_x . L'expression de λ_x peut être obtenue en résolvant la relation suivante

$$\det \begin{bmatrix} M(\Omega) - \lambda_x & i\gamma_0/3 \\ -i\gamma_0/3 & M^*(-\Omega) - \lambda_x \end{bmatrix} = 0$$

et elle s'écrit

$$\lambda_{x\pm} = i\beta_a(\Omega) \pm g_x(\Omega) \quad (4.5)$$

où $g_x(\Omega) = \sqrt{[\beta_s(\Omega) + \Delta\beta][2\gamma_0/3 - \Delta\beta - \beta_s(\Omega)]}$ représente le gain en amplitude de la MI, la solution stationnaire sur l'axe \vec{x} est instable lorsque $g_x(\Omega)$ est réel et positif. Les parties symétrique et asymétrique de $\beta(\Omega)$ sont définies par

$$\beta_a(\Omega) = [\beta(\Omega) - \beta(-\Omega)] / 2 \quad (4.6)$$

$$\beta_s(\Omega) = [\beta(\Omega) + \beta(-\Omega)] / 2 \quad (4.7)$$

Quant à l'axe \vec{y} , en faisant les mêmes calculs que ceux de l'axe \vec{x} , nous pouvons obtenir la valeur propre correspondante λ_y ci-dessous

$$\lambda_{y\pm} = i\beta_a(\Omega) \pm g_y(\Omega) \quad (4.8)$$

où $g_y(\Omega) = \sqrt{-\beta_s(\Omega) [\beta_s(\Omega) + 2\gamma_0]}$ représente le gain en amplitude de la MI sur l'axe \vec{y} . Or la dispersion est restreinte à l'ordre trois dans notre analyse, nous pouvons donc écrire $\beta(\Omega)$ comme

$$\beta(\Omega) = \frac{\beta_2\Omega^2}{2} + \frac{\beta_3\Omega^3}{6} \quad (4.9)$$

A partir de l'expression (4.9), nous déduisons $\beta_s(\Omega) = \beta_2\Omega^2/2$ et $\beta_a(\Omega) = \beta_3\Omega^3/6$, en remplaçant ces expressions dans $g_x(\Omega)$ et $g_y(\Omega)$, nous obtenons

$$g_x(\Omega) = \sqrt{\left(\frac{\beta_2\Omega^2}{2} + \Delta\beta\right) \left(2\gamma_0/3 - \Delta\beta - \frac{\beta_2\Omega^2}{2}\right)} \quad (4.10)$$

$$g_y(\Omega) = \sqrt{-\frac{\beta_2\Omega^2}{2} \left(\frac{\beta_2\Omega^2}{2} + 2\gamma_0\right)} \quad (4.11)$$

Puisque nous nous intéressons ici à l'amplification (ou l'atténuation) de la perturbation dans la région de dispersion normale, nous devrions considérer les valeurs propres possédant les parties réelles non nulles avec $\beta_2 > 0$, ce qui correspond à $g_{x,y}(\Omega) \in \mathbb{R}$. Pour l'axe \vec{y} , $g_y(\Omega)$ est toujours imaginaire pour $\beta_2 > 0$, nous pouvons donc exclure l'instabilité de la composante sur l'axe \vec{y} de la perturbation, par conséquent, l'instabilité de la perturbation dans la région de dispersion normale peut être complètement décrite par sa composante sur l'axe \vec{x} . Dans la suite de notre analyse, nous notons $g(\Omega)$ et λ à la place de $g_x(\Omega)$ et λ_x pour la simplification des notations.

Au cours de la propagation dans la fibre biréfringente, l'évolution en régime linéaire de la perturbation sur l'axe \vec{x} est décrite par l'équation (4.3b). Nous pouvons trouver la solution analytique de cette équation en cherchant d'abord les vecteurs propres \vec{V} de la matrice X qui satisfont la relation suivante

$$\begin{bmatrix} M(\Omega) - \lambda_{\pm} & i\gamma_0/3 \\ -i\gamma_0/3 & M^*(-\Omega) - \lambda_{\pm} \end{bmatrix} \vec{V} = 0$$

et ils s'écrivent

$$\vec{V}_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ H_{\pm} \end{bmatrix}$$

où \vec{V}_+ et \vec{V}_- représentent respectivement les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_+ et λ_- avec H_{\pm} donné par

$$H_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm} - M(\Omega)}{i\gamma_0/3} \quad (4.12)$$

A partir des deux vecteurs propres obtenues (\vec{V}_+ et \vec{V}_-), nous définissons une matrice de passage P et sa matrice inverse P^{-1} de la façon suivante

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ H_+ & H_- \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{H_- - H_+} \begin{bmatrix} H_- & -1 \\ -H_+ & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant les matrices P et P^{-1} , nous pouvons projeter les équations (4.4) dans l'espace des vecteurs propres de la matrice X comme suit

$$\partial_Z \begin{bmatrix} b_1(Z, \Omega) \\ b_2(Z, \Omega) \end{bmatrix} = X' \begin{bmatrix} b_1(Z, \Omega) \\ b_2(Z, \Omega) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

où nous avons

$$X' = P^{-1}XP = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1(Z, \Omega) \\ b_2(Z, \Omega) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{u}(Z, \Omega) \\ \tilde{u}^*(Z, -\Omega) \end{bmatrix}$$

Les équations (4.13) permettent d'exprimer $b_1(Z, \Omega)$ et $b_2(Z, \Omega)$ en fonction des conditions initiales $b_1(0, \Omega)$ et $b_2(0, \Omega)$ comme suit

$$\begin{bmatrix} b_1(Z, \Omega) \\ b_2(Z, \Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_+ Z} b_1(0, \Omega) \\ e^{\lambda_- Z} b_2(0, \Omega) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Pour retrouver la solution $[\tilde{u}(Z, \Omega), \tilde{u}^*(Z, -\Omega)]$ dans notre base de départ, nous appliquons la matrice de passage P sur la solution (4.14) telle que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{u}(Z, \Omega) \\ \tilde{u}^*(Z, -\Omega) \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} b_1(Z, \Omega) \\ b_2(Z, \Omega) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_+ Z} b_1(0, \Omega) + e^{\lambda_- Z} b_2(0, \Omega) \\ H_+ e^{\lambda_+ Z} b_1(0, \Omega) + H_- e^{\lambda_- Z} b_2(0, \Omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Or les conditions initiales de notre problème sont données dans la base de départ mais pas dans la base des vecteurs propres, nous devons exprimer $b_1(0, \Omega)$ et $b_2(0, \Omega)$ en fonction de $\tilde{u}(0, \Omega)$ et $\tilde{u}^*(0, -\Omega)$ par l'opération suivante

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_1(0, \Omega) \\ b_2(0, \Omega) \end{bmatrix} &= P^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{u}(0, \Omega) \\ \tilde{u}^*(0, -\Omega) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{H_- - H_+} \begin{bmatrix} H_- \tilde{u}(0, \Omega) - \tilde{u}^*(0, -\Omega) \\ -H_+ \tilde{u}(0, \Omega) + \tilde{u}^*(0, -\Omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

En insérant la relation (4.16) dans l'expression (4.15), nous obtenons une forme analytique de la solution $[\tilde{u}(Z, \Omega), \tilde{u}^*(Z, -\Omega)]$. Puisque $\tilde{u}^*(Z, -\Omega)$ est le complexe conjugué de $\tilde{u}(Z, \Omega)$, nous ne considérons que $\tilde{u}(Z, \Omega)$ dans notre analyse. En remplaçant λ_{\pm} et H_{\pm} par leurs expressions, nous écrivons la solution correspondante de la forme suivante

$$\tilde{u}(Z, \Omega) = F(Z, \Omega) \tilde{u}(0, \Omega) + G(Z, \Omega) \tilde{u}^*(0, -\Omega) \quad (4.17)$$

avec

$$F(Z, \Omega) = e^{i\beta_a Z} \left(\cosh [g(\Omega) Z] + i \frac{\beta_s + \Delta\beta - \gamma_0/3}{g(\Omega)} \times \sinh [g(\Omega) Z] \right) \quad (4.18a)$$

$$G(Z, \Omega) = i e^{i\beta_a Z} \frac{\gamma_0/3}{g(\Omega)} \sinh [g(\Omega) Z] \quad (4.18b)$$

En définissant un paramètre sans dimension $p = P_0/P_c$ avec $P_c = 3|\Delta\beta|/2\gamma$, le gain paramétrique en amplitude $g(\Omega)$ prend la forme explicite suivante

$$g(\Omega) = |\Delta\beta| \sqrt{\left(\mu \frac{\Omega^2}{\Omega_{c1}^2} + 1 \right) \left(\mu p - 1 - \mu \frac{\Omega^2}{\Omega_{c1}^2} \right)} \quad (4.19)$$

où $\mu = \text{sgn}(\Delta\beta) = \pm 1$ et $\Omega_{c1} = \sqrt{2|\Delta\beta|/\beta_2}$. Pour $\mu = 1$, l'état de polarisation est sur l'axe rapide, la bande spectrale instable est $-\Omega_{c1}\sqrt{p-1} \leq \Omega \leq \Omega_{c1}\sqrt{p-1}$, par conséquent, $p > 1$ est la condition nécessaire pour avoir la MI dans la fibre en régime de dispersion normal. La fréquence correspondant au gain maximum est $\Omega_c = \pm\Omega_{c1}\sqrt{(p-2)/2}$. Lorsque $p \leq 2$, le gain est maximum à $\Omega_c = 0$ (la courbe noire de la figure 4.1), ce qui indique que les fluctuations à basse fréquence peuvent se développer en premier. Cependant, le gain maximum se produit pour deux valeurs finies de Ω pour $p > 2$ (la courbe rouge de la figure 4.1). Lorsque la polarisation est sur l'axe lent ($\mu = -1$), nous observons deux bandes spectrales instables $\Omega_{c1} \leq \Omega \leq \Omega_{c1}\sqrt{p+1}$ et $-\Omega_{c1}\sqrt{p+1} \leq \Omega \leq -\Omega_{c1}$ dans lesquelles le gain est maximum à $\Omega_c = \pm\Omega_{c1}\sqrt{(p+2)/2}$ (voir figure 4.2). Par conséquent, la condition pour avoir la MI est $p \geq 0$. Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer comment les termes impairs de la dispersion (la TOD) affectent considérablement la dynamique dès que les perturbations localisées (les impulsions) sont concernées .

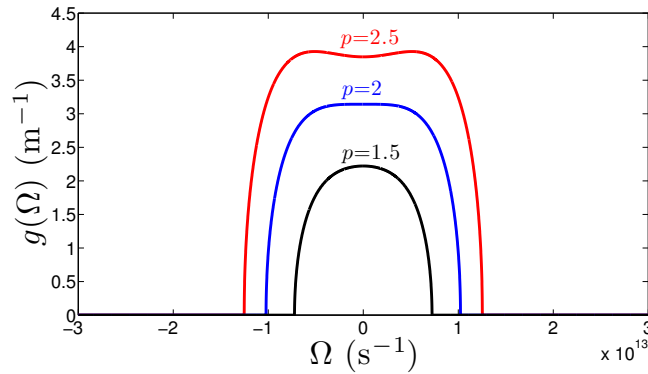


FIGURE 4.1: Le gain spectral en amplitude de la MI [$g(\Omega)$] correspondant aux trois valeurs de p , $p = 1.5$ (courbe noire), $p = 2$ (courbe bleue) et $p = 2.5$ (courbe rouge) pour une pompe continue polarisée suivant l'axe rapide de la fibre ($\Delta\beta > 0$) avec $\beta_2 = 6 \times 10^{-26} \text{ s}^2/\text{m}$ et $L_B = 2 \text{ m}$.

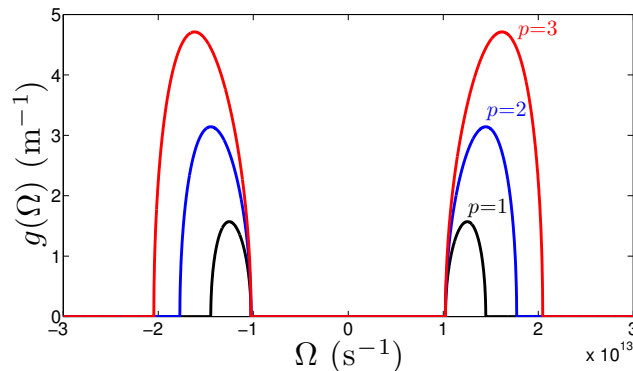


FIGURE 4.2: Le gain spectral en amplitude de la MI [$g(\Omega)$] correspondant aux trois valeurs de p , $p = 1$ (courbe noire), $p = 2$ (courbe bleue) et $p = 3$ (courbe rouge) pour une pompe continue polarisée suivant l'axe lent de la fibre ($\Delta\beta < 0$) avec $\beta_2 = 6 \times 10^{-26} \text{ s}^2/\text{m}$ et $L_B = 2 \text{ m}$.

4.2 Perturbation localisée

D'après la solution (4.17), nous pouvons calculer la forme de la solution à la sortie de la fibre avec une perturbation initiale de forme connue. Cependant, pour étudier les effets de la TOD, nous considérons un cas simple pour lequel les calculs analytiques peuvent être effectués. Plus précisément, nous considérons une perturbation initiale de forme Gaussienne définie par

$$\bar{u}(Z=0, t) = \bar{u}_0 \exp \left[- \left(\frac{t}{2t_0} \right)^2 + i\Omega_0 t \right] \quad (4.20)$$

dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{u}(Z=0, \Omega) = 2 \sqrt{\pi} t_0 \bar{u}_0 \exp \left[-t_0^2 (\Omega - \Omega_0)^2 \right] \quad (4.21)$$

En supposant que la largeur spectrale de la perturbation est plus petite que la bande spectrale instable provoquée par la MI et la fréquence centrale Ω_0 est assez proche de la fréquence à gain maximum Ω_c , nous pouvons écrire $\Omega_0 = \Omega_c + \delta\omega$ avec $|\delta\omega| \ll |\Omega_c|$. Par conséquent, le gain paramétrique peut être représenté par le développement de Taylor suivant

$$g_a(\Omega) = g_c + \frac{g''}{2} (\Omega - \Omega_c)^2 + O \{ (\Omega - \Omega_c)^3 \} \quad (4.22)$$

avec

$$\begin{aligned} g_c &= g(\Omega_c) = p |\Delta\beta| / 2 \\ g' &= \partial g(\Omega) / \partial \Omega |_{\Omega_c} = 0 \Rightarrow (\beta_s + \Delta\beta - \gamma_0/3) |_{\Omega_c} = 0 \\ g'' &= \partial^2 g(\Omega) / \partial \Omega^2 |_{\Omega_c} = -8 |\Delta\beta| \Omega_c^2 / p \Omega_{c1}^4 \end{aligned} \quad (4.23)$$

En tenant compte de $g_a(\Omega)$, les coefficients F et G dans l'expression (4.17) prennent aussi les formes approchées suivantes

$$F(Z, \Omega) \simeq F_c = \exp \left(i \frac{\beta_3}{6} \Omega^3 Z \right) \cosh [g_a(\Omega) Z] \quad (4.24a)$$

$$G(Z, \Omega) \simeq G_c = i \exp \left(i \frac{\beta_3}{6} \Omega^3 Z \right) \sinh [g_a(\Omega) Z] \quad (4.24b)$$

Dans ce qui suit, nous ne considérons que la partie croissante de F_c et de G_c . En insérant F_c , G_c et la condition initiale sous forme gaussienne [équation 4.21] dans l'expression (4.17), nous obtenons la solution finale $\tilde{u}(Z, \Omega)$. En appliquant l'opération de la transformée de Fourier inverse, nous obtenons la solution explicite de la perturbation amplifiée dans le domaine temporel, elle a été représentée sous une forme spéciale comme suit [55, 56]

$$\begin{aligned} \bar{u}(Z, t) &= \frac{2\bar{u}_0}{\sqrt{\pi}} \exp \left[i \frac{\beta_3}{6} \Omega_c^3 Z + \frac{p |\Delta\beta|}{2} Z - (\delta\omega t_0)^2 \right] \\ &\times \left\{ e^{i\Omega_c t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[iA\omega_- - \frac{i}{3} B\omega_-^3 - (1 + iC)\omega_-^2 \right] d\omega_- \right. \\ &\left. + i e^{-i\Omega_c t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[iA^*\omega_+ - \frac{i}{3} B\omega_+^3 - (1 - iC^*)\omega_+^2 \right] d\omega_+ \right\} \quad (4.25) \end{aligned}$$

où nous avons posé $\omega_{\pm} = (\Omega \pm \Omega_c) t_0$ et

$$A = \frac{t}{t_0} - \frac{\beta_3 \Omega_c^2 Z + 4i\delta\omega t_0^2}{2t_0} \quad (4.26a)$$

$$B = \frac{\beta_3}{2t_0^3} Z = \frac{Z}{L_{TOD}} \quad (4.26b)$$

$$C = \frac{\beta_3 \Omega_c + ig''}{2t_0^2} Z = \frac{\Omega_c t_0}{L_{TOD}} Z - i \frac{(\beta_2 \Omega_c)^2}{p\Delta\beta\tau_0^2} Z \quad (4.26c)$$

avec $L_{TOD} = 2t_0^3/\beta_3$ est la longueur de dispersion d'ordre trois. Les intégrales dans l'équation (4.25) peuvent être calculées en utilisant la définition de la fonction d'Airy, et nous obtenons

$$\bar{u}(Z, t) = \frac{\bar{u}_0 \sqrt{\pi}}{|B|^{-1/3}} e^{\frac{p|\Delta\beta|}{2} Z - (\delta\omega t_0)^2} [\bar{u}_+ e^{i\Omega_c t} + i\bar{u}_- e^{-i\Omega_c t}] \quad (4.27)$$

avec

$$\bar{u}_+ = e^{i\Psi} \text{Ai} [(1 - AB - C^2 + 2iC) B^{-4/3}] \quad (4.28a)$$

$$\bar{u}_- = e^{-i\Psi^*} \text{Ai} [(1 - A^*B - C^{*2} - 2iC^*) B^{-4/3}] \quad (4.28b)$$

$$\Psi = i \frac{\beta_3}{6} \Omega_c^3 Z + \frac{2 - 3AB - 6C^2}{3B^2} - iC \frac{3AB + 2C^2 - 6}{3B^2} \quad (4.28c)$$

où $\text{Ai}(x)$ représente la fonction d'Airy. Contrairement à la solution obtenue dans le cadre de l'élargissement de l'impulsion [56], ici toutes les fonctions de la longueur de propagation figurant dans l'équation (4.27) sont proportionnelles à la TOD, ce qui suggère que presque toutes les caractéristiques de la perturbation peuvent être affectées par celle-ci pendant la propagation. En outre, l'interaction entre la MI et la taille d'impulsion autorise des degrés de liberté supplémentaires pour le "réglage" des effets de la TOD. Dans l'expression (4.25), l'impact drastique de la TOD sur les caractéristiques (par exemple, l'amplitude, la taille, la vitesse de groupe) du signal pendant la propagation est inclu, mais reste compliqué à extraire. Toutefois, pour les petites ou grandes valeurs de B [voir l'expression (4.26b)], des expressions asymptotiques peuvent être trouvées [56]. Cette approche est développée dans la partie suivante et les prédictions sont comparées aux simulations numériques.

4.3 Résultats numériques

Pour les simulations numériques, nous considérons une fibre optique biréfringente avec $L_B = 2$ m et $\gamma = 0.05 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$. La figure 4.3 montre la solution (4.27) après une propagation d'une longueur de biréfringence (L_B) en fonction du coefficient de la TOD (β_3). Les résultats de l'intégration numérique des équations (4.1) sont également tracés sur la même figure.

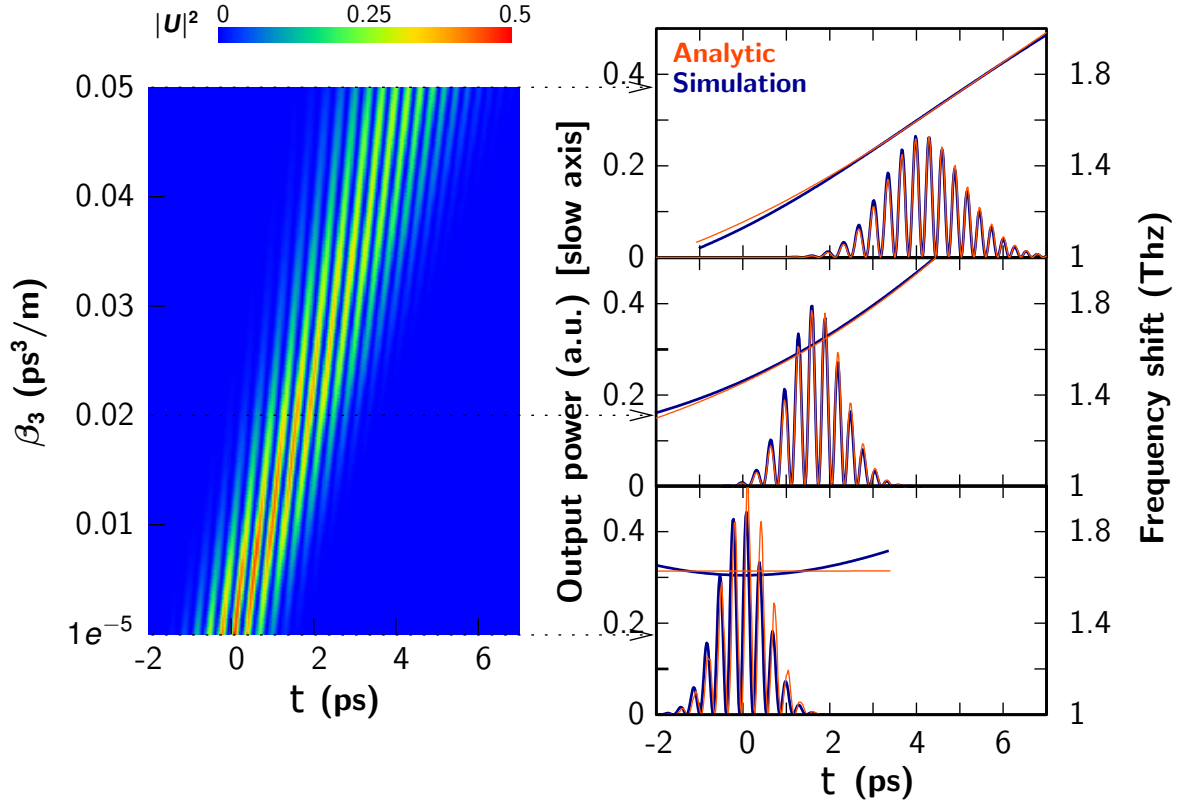


FIGURE 4.3: La puissance à la sortie sur l'axe lent ($|U|^2$) en fonction de β_3 (figure à gauche). Le profil d'impulsion (l'axe de gauche) et la fréquence instantanée en décalage (l'axe de droite) pour $\beta_3 = 0.05, 0.02$ et $10^{-5} \text{ ps}^3/\text{m}$ du haut vers le bas (figure à droite). Les paramètres sont : $\beta_2 = 0.06 \text{ ps}^2/\text{m}$, $t_0 = 0.5 \text{ ps}$, $P_0 = 4P_c$ et la puissance initiale de la perturbation est $u_0 = 1 \text{ nW}$. Les courbes en bleue et en rouge sont produites respectivement à partir de l'intégration numérique des équations (4.1) et les prédictions analytiques de la solution (4.27).

Comme nous pouvons nous y attendre dans la figure 4.3, les solutions numériques sont en très bon accord avec les prédictions analytiques. A noter que dans cette gamme des paramètres, notre solution est différente par rapport à celle prédite dans [30]. En effet, le principal résultat attendu est une réduction drastique du gain de la MI en présence de la TOD. Cette réduction du gain est accompagnée par un changement de la vitesse de groupe et un élargissement de l'impulsion dans le temps. L'origine de ces effets peut être comprise en considérant la dépendance de A , B et C en fonction de la TOD. Pour la simplicité, nous considérons $\delta\omega = 0$, alors A n'est rien d'autre qu'une variable temporelle normalisée par la largeur d'impulsion initiale. L'origine du temps est maintenant donnée par $t_{max} = (\beta_3\Omega_c^2/2)Z$. Ce décalage est le résultat d'un changement de la vitesse du groupe de l'impulsion induit par la TOD.

L'impact de la TOD sur le profil d'impulsion résulte d'une compétition entre les termes provenant de B et de C . Nous nous concentrons d'abord au cas où $C = 0$, cette condition peut être réalisée lorsque $\beta_2 = 0$ ou $\Omega_c = 0$. Toutefois, la présence de

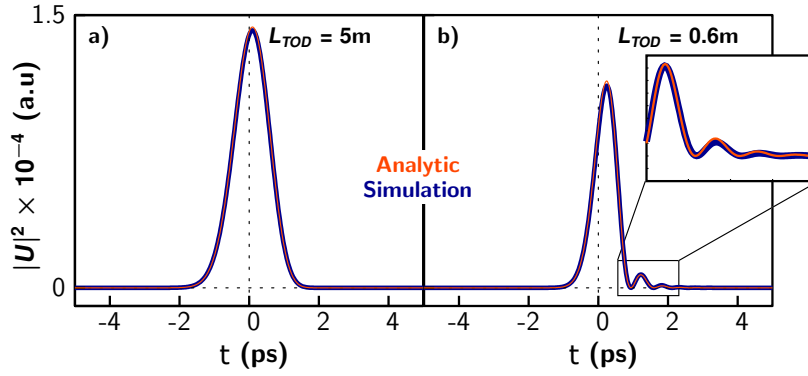


FIGURE 4.4: Les formes numérique (courbe bleue) et analytique (courbe rouge) d'impulsion suivant l'axe lent après d'avoir propagé 2 m pour $\tau_0 = 0.5$ ps (gauche) and 0.25 ps (droite). Les autres paramètres sont les mêmes que dans la figure 4.3.

β_2 est nécessaire pour le processus de la MI, nous ne considérerons que le cas $\Omega_c = 0$, qui correspond à $1 \leq p \leq 2$ lorsque $\Delta\beta > 0$. B mesure la distance de propagation en unité de longueur de la TOD. La figure 4.4(a) montre les profils analytiques et numériques du signal pour $Z/L_{TOD} < 1$. Nous observons que le profil du signal de sortie reste Gaussienne. Toutefois, lorsque $Z/L_{TOD} > 1$, les oscillations d'Airy deviennent pertinentes et l'impulsion affiche un profil asymétrique [voir la figure 4.4(b)]. Dans le domaine spectral, un profil temporel d'Airy introduit un "chirp" en fréquence. Une évolution typique de la fréquence instantanée du faisceau à la sortie est représentée dans la figure 4.3 (voir l'axe gauche de la figure gauche). Nous constatons que le "chirp" non linéaire en fréquence du signal est très bien décrit par notre prédiction analytique.

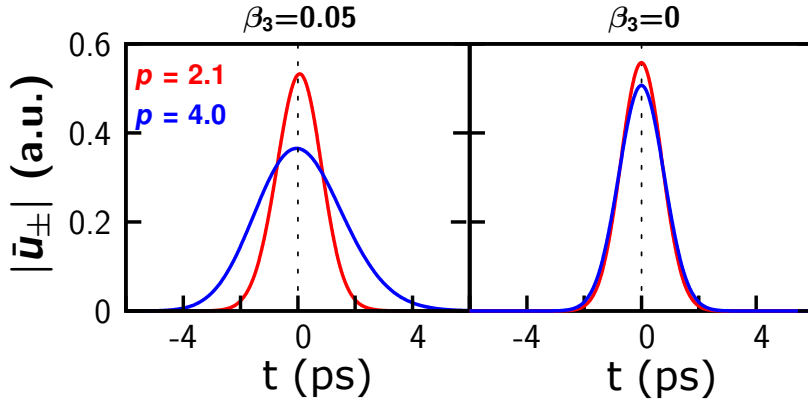


FIGURE 4.5: L'amplitude $|\bar{u}_{\pm}|$ sur l'axe lent après une propagation de 1.6 m pour $p = 2.1$ (courbe rouge) correspondant à $\Omega_c = 2.3$ THz et $p = 4$ (courbe bleue) correspondant à $\Omega_c = 10.2$ THz, avec (gauche) et sans (droite) le terme de la TOD. Les autres paramètres sont les mêmes que dans la figure 4.3.

Nous allons maintenant étudier les effets provenant du paramètre C lorsque la distance de propagation est beaucoup plus petits que L_{TOD} (l'effet venant de B est faible). Pour $\Delta\beta > 0$, les parties réelle et imaginaire de C peuvent être considérées de façon indépendante, car la TOD n'apparaît que dans la partie réelle [voir l'équation

(4.26c)]. En gardant $Z/L_{TOD} < 1$ et le paramètre de décalage $\delta\omega = 0$, l'impact de C peut être distingué en faisant varier Ω_c par l'intermédiaire de p et en considérant la propagation avec ou sans le terme de la TOD. Dans la figure 4.5, nous montrons l'impact des parties réelle et imaginaire de C sur \bar{u}_{\pm} en augmentant la puissance d'entrée (de $p = 2.1$ à $p = 4$) et par conséquent, Ω_c ($\Omega_c = \sqrt{|\Delta\beta|(p+2)/\beta_2}$). Comme le montre la figure 4.5, en absence de la TOD [graphe à droite ; $\text{Re}(C) = 0$ avec $\beta_3 = 0$], il n'y a pas de changement significatif sur le profil de l'enveloppe d'impulsion lorsque la partie imaginaire de C varie due au changement de valeur de p (de $p = 2.1$ à $p = 4$). En revanche, en présence de la TOD [graphe à gauche ; $\text{Re}(C) \neq 0$ avec $\beta_3 \neq 0$], nous observons que l'enveloppe de l'impulsion se répand, en suggérant que la contribution majeure de C à l'étalement d'impulsion vient de la partie réelle, ce qui représente une interaction entre la TOD et la fréquence de la MI.

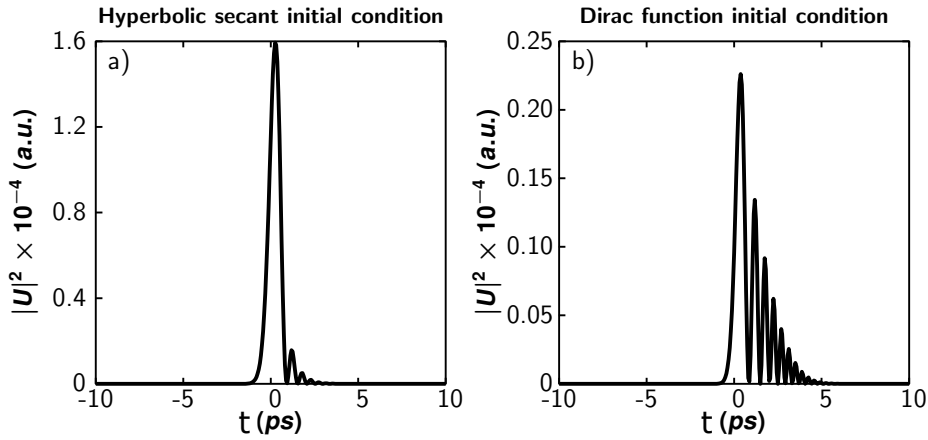


FIGURE 4.6: L'intensité à la sortie $|U|$ de l'axe lent après une propagation de 1.6 m pour $p = 2.1$, correspondant à la condition initiale de (a) la sécante hyperbolique et (b) la fonction de Dirac. Les autres paramètres sont les mêmes que dans la figure 4.3.

Enfin, nous soulignons que les résultats obtenus ici ne sont pas spécifiques à la condition initiale de forme Gaussienne. La figure 4.6 illustre la dynamique des impulsions générée à partir de deux différentes conditions initiales, une sécante hyperbolique [figure 4.6(a)] et une fonction de Dirac [figure 4.6(b)]. Comme le montre la figure 4.6, dans les deux cas, les oscillations d'Airy se développent.

4.4 Conclusion

Nous avons effectué une analyse théorique de la MI en régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$) à l'intérieur d'une fibre biréfringente avec une perturbation localisée en présence de la TOD. Le résultat analytique montre que la TOD induit un profil en forme d'Airy dans le cas général, notre résultat numérique est cohérent avec ce dernier. L'interaction entre la TOD et la MI diminue le gain de la MI et provoque l'étalement de l'impulsion. Le gain est très sensible à la taille initiale de la perturbation. En plus, nos résultats analytiques montrent que l'étalement de l'impulsion peut aussi être contrôlé par le profil de la pompe. Nous avons également montré que le chirp en fréquence

venant du profil d'Airy temporel est plutôt non linéaire, et nos prédictions fournissent une bonne description du phénomène.

Conclusion générale

Les travaux de recherche menés au cours de cette thèse ont majoritairement portés sur une étude théorique et numérique de l'effet de la dispersion d'ordre trois (TOD) et/ou de la diffusion Raman stimulée sur l'instabilité dans trois systèmes optiques différents : la fibre optique standard en propagation libre, la cavité fibrée et la fibre optique biréfringente.

Dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire initialisée par une perturbation monochromatique étendue, nous avons montré que la TOD n'affecte pas le gain de la MI dans la fibre optique en propagation libre et dans la cavité fibrée. En revanche, l'effet Raman induit une modification du gain de la MI qui est uniquement significatif pour les pulsations élevées. En effet, la courbe du gain en présence de l'effet Raman présente un ouverture vers les pulsations élevées au delà de la bande d'instabilité de la MI standard (en absence de l'effet Raman). De plus, la TOD et l'effet Raman induisent chacun de son côté une dérive de l'ensemble du paquet d'ondes dans le domaine temporel qui se traduit par une asymétrie dans le spectre. En cas de dérive indésirable, nous avons montré que la compensation de l'effet de la TOD et de l'effet Raman permet de réduire considérablement la dérive du signal à la sortie de la fibre ou de la cavité fibrée, alors que le spectre du signal reste asymétrique.

En utilisant les concepts d'instabilité convective et absolue, nous avons montré que la solution stationnaire de la fibre optique en propagation libre est toujours absolument instable en présence de la TOD et de l'effet Raman. En revanche, la présence de la TOD fait apparaître effectivement un domaine d'instabilité convective dans la cavité fibrée, en modifiant l'intensité de pompe et/ou le coefficient de la TOD, la solution stationnaire de la cavité peut être convectivement instable ou absolument instable.

Au-dessus du seuil d'instabilité de la cavité, l'équation aux amplitudes de type Ginzburg-Landau dérivée à partir du modèle de Lugiato-Lefever admet une solution modulée de type structure dissipative. En absence de la TOD, cette solution modulée est stationnaire et son instabilité correspond à une instabilité secondaire de type Eckhaus. En revanche, la présence de la TOD induit une dérive de la solution modulée qui rend la dynamique plus complexe. Une étude préliminaire analytique et numérique a montré que la TOD conduit à l'apparition de domaines d'instabilité convective et absolue dans l'équation aux amplitudes. En simulant l'évolution d'une solution modulée perturbée localement, nous avons distingué les différents régimes d'instabilité de la solution modulée. Dans le cas d'instabilité convective, la partie perturbée de la solution modulée a tendance à former une oscillation à la fréquence d'Eckhaus, mais la perturbation finit par quitter le domaine d'observation sous l'effet de la dérive. Pour l'instabilité absolue, nous avons montré numériquement que la solution modulée bifurque vers une nouvelle solution oscillante à la fréquence d'Eckhaus sous l'effet de la

perturbation. Pour des temps longs, les résultats de la simulation ont montré que la solution modulée perd complètement sa forme modulée sous l'effet des interactions non linéaires. En effet nous n'avons pas observé que l'amplification de la fréquence d'Eckhaus mais l'amplification d'une large bande de fréquences autour de celle d'Eckhaus. Une étude non linéaire avancée est nécessaire pour expliquer ce résultat. De plus, nos prédictions analytiques sur l'équation aux amplitudes de type Ginzburg-Landau nous ont permis de conclure que dans tout le domaine des paramètres physiques explorés dans cette étude, l'instabilité des solutions modulées du modèle de Lugiato-Lefever est convectives.

A l'issue d'une analyse théorique de la MI en régime de dispersion normale dans le cas d'une fibre biréfringente avec une perturbation localisée sous forme Gaussienne en présence de la TOD, nous avons montré que celle-ci induit une dérive sur l'ensemble de la perturbation, elle rend asymétrique le profil de la perturbation et génère les oscillations d'Airy induisant à un "chirp" non linéaire en fréquence. En outre, l'interaction entre la TOD et la MI diminue le gain de la MI et provoque l'étalement de l'impulsion. En plus, nos résultats analytiques ont montré que l'étalement de l'impulsion est sensible à la taille initiale de la perturbation et le profil de la pompe. Enfin, l'originalité de cette étude réside dans le fait qu'une fibre biréfringente est un bon milieu pour contrôler le couplage entre la MI et les termes d'ordres supérieurs de la dispersion, car elle offre plus de degrés de liberté par rapport à fibre standard. En outre, puisque les faisceaux laser expérimentaux émettent des impulsions Gaussiennes, la méthode peut être appliquée avec succès à une large classe de systèmes non linéaires multi-composantes soumis à une brisure de symétrie d'inversion en temps, ou éventuellement en espace.

Finalement, nos travaux numériques montre l'existence d'une dynamique non linéaire riche et complexe en régime absolu. Cette dynamique complexe est caractérisée par des interactions non linéaires entre modes et conduit, pour certains valeurs des paramètres, à des comportements chaotiques. L'étude de ces régimes fortement non linéaires peut constituer une perspective du travail présenté dans cette thèse.

Bibliographie

- [1] A. Hasegawa and F. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23 :142, Apr 1973.
- [2] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 45 :1095–1098, Sep 1980.
- [3] A. Mussot. *Amplification paramétrique dans les fibres optiques pour les télécommunications à haut débit*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2004.
- [4] T. B. Feir and J. E. Benjamin. The disintegration of wave trains on deep water part 1. theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(3) :417–430, Feb 1967.
- [5] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita. Observation of modulational instability in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, 56(2) :135–138, Jan 1986.
- [6] E. J. Greer, D. M. Patrick, P. G. Wigley, and J. R. Taylor. Generation of 2 thz repetition rate pulse trains through induced modulational instability. *Electron. Lett.*, 25 :1246, 1989.
- [7] A. Hasegawa. Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers. *Optics Letters*, 9(7) :288–290, 1984.
- [8] J. E. Stolen and R. H. Bjorkholm. Parametric amplification and frequency conversion in optical fibers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 18(7) :1062 –1072, Jul 1982.
- [9] M. E. Marhic, N. Kagi, T. K. Chiang, and L. G. Kazovsky. Broadband fiber optical parametric amplifiers. *Optics Letters*, 21 :573–575, 1996.
- [10] J. M. Dudley, G. Genty, and S. Coen. Supercontinuum generation in photonic crystal fiber. *Rev. Mod. Phys.*, 78 :1135–1184, Oct 2006.
- [11] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, and B. Jalali. Optical rogue waves. *Nature*, 450 :1054–1057, Dec 2007.
- [12] S. Coen and M. Haelterman. Modulational instability induced by cavity boundary conditions in a normally dispersive optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :4139–4142, Nov 1997.
- [13] G. P. AGRAWAL. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, fourth edition, 2007.
- [14] L. Provino. *Génération et amplification contrôlées dans les fibres optiques conventionnelles et microstructurées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2002.

- [15] K. E. Oughstun and H. Xiao. Failure of the quasimonochromatic approximation for ultrashort pulse propagation in a dispersive, attenuative medium. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :642–645, Jan 1997.
- [16] N. Bloembergen. *Nonlinear Optics*. World Scientific, New York, fourth edition, 1996.
- [17] Y. R. Shen. *Principles of Nonlinear Optics*. Wiley, New York, 1984.
- [18] M. Schubert and B. Wilhelmi. *Nonlinear optics and quantum electronics*. Wiley, New York, 1986.
- [19] P. N. Butcher and D. Cotter. *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [20] R.H. Stolen, J. P. Gordon, W. J. Tomlinson, and H. A. Haus. Raman response function of silica-core fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6 :1159–1166, 1989.
- [21] R. W. Hellwarth. Third-order optical susceptibilities of liquids and solids. *Prog. Quantum Electron.*, 5 :1–68, 1977.
- [22] Y. Aoki, K. Tajima, and I. Mito. Input power limits of single-mode optical fibers due to stimulated scattering in optical communication systems. *J. Lightwave Technol.*, 6 :710–719, 1988.
- [23] P. V. Mamyshev and S. V. Chernikov. Ultrashort-pulse propagation in optical fibers. *Optics Letters*, 15 :1076–1078, 1990.
- [24] A. Lacourt. Cours d’optique non linéaire.
- [25] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 1992.
- [26] K. J. Blow and D. Wood. Theoretical description of transient stimulated raman scattering in optical fibers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 25(12) :2665–2673, Dec 1989.
- [27] Morse and Feshbach. *Methods of Theoretical Physics, Part II*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1 edition, 1953.
- [28] L. A. Lugiato and R. Lefever. Spatial dissipative structures in passive optical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :2209–2211, May 1987.
- [29] L. Brevdo and T. J. Bridges. Absolute and convective instabilities of temporally oscillating flows. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 48 :290–309, 1997.
- [30] A. Mussot, A. Kudlinski, E. Louvergneaux, M. Kolobov, and M. Taki. Impact of the third-order dispersion on the modulation instability gain of pulsed signals. *Optics Letters*, 35 :1194–1196, 2010.
- [31] P. A. Sturrock. *Amplifying and evanescent waves : convective and non-convective instabilities*. MacGraw-Hill New York, 1961.
- [32] R. J. Briggs. *Electron-Stream Interaction with Plasmas*. MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- [33] P. Huerre and P. A. Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 :473–537, 1990.
- [34] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, 1974.

- [35] A. Mussot, E. Louvergneaux, N. Akhmediev, F. Reynaud, L. Delage, and M. Taki. Optical fiber systems are convectively unstable. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :113904, Sep 2008.
- [36] M. Tlidi, A. Mussot, E. Louvergneaux, G. Kozyreff, A. G. Vladimirov, and M. Taki. Control and removal of modulational instabilities in low-dispersion photonic crystal fiber cavities. *Optics Letters*, 32 :662–664, 2007.
- [37] G. Kozyreff, M. Tlidi, A. Mussot, E. Louvergneaux, M. Taki, and A. G. Vladimirov. Localized beating between dynamically generated frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :043905, 2009.
- [38] F. Leo. *Étude des structures dissipatives dans les cavités optiques passives*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 2011.
- [39] I. S. Aranson and L. Kramer. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1) :99, Feb 2002.
- [40] S. Coen. *Passive Nonlinear Optical Fiber Resonators Fundamentals and Applications*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 2000.
- [41] M. Haelterman, S. Trillo, and S. Wabnitz. Dissipative modulation instability in a nonlinear dispersive ring cavity. *Optics Communications*, 91(5–6) :401–407, 1992.
- [42] G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux. Noisy precursors in one-dimensional patterns. *Phys. Rev. A*, 66 :063805, Dec 2002.
- [43] F. Leo, A. Mussot, P. Kockaert, P. Emplit, M. Haelterman, and M. Taki. Nonlinear symmetry breaking induced by third-order dispersion in optical fiber cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :104103, Mar 2013.
- [44] W. V. R. Malkus and G. Veronis. Finite amplitude cellular convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 4 :225–260, 1958.
- [45] G. Nicolis and I. Prigogine. *Self-organization in nonequilibrium systems : from dissipative structures to order through fluctuations*. John Wiley, first edition, 1977.
- [46] Paul Manneville. *Instabilities, chaos and turbulence*. Imperial College Press, London, 1994.
- [47] G. Nicolis. *Introduction to nonlinear science*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [48] R. Zambrini, M. S. Miguel, C. Durniak, and M. Taki. Convection-induced nonlinear symmetry breaking in wave mixing. *Phys. Rev. E*, 72 :025603, Aug 2005.
- [49] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 65(3) :851–1112, Jul 1993.
- [50] I. S. Aranson, L. Aranson, L. Kramer, and A. Weber. Stability limits of spirals and traveling waves in nonequilibrium media. *Phys. Rev. A*, 46(6) :2992–2995, Sep 1992.
- [51] G. S. Triantafyllou. Note on the kelvin–helmholtz instability of stratified fluids. *Physics of Fluids*, 6 :164–171, Sep 1993.
- [52] S. Wabnitz. Modulational polarization instability of light in a nonlinear birefringent dispersive medium. *Phys. Rev. A*, 38 :2018–2021, Aug 1988.

- [53] J. E. Rothenberg. Modulational instability for normal dispersion. *Phys. Rev. A*, 42 :682–685, Jul 1990.
- [54] G. Millot, E. Seve, S. Wabnitz, and M. Haelterman. Observation of induced modulational polarization instabilities and pulse-train generation in the normal-dispersion regime of a birefringent optical fiber. *J. Opt. Soc. Am. B*, 15 :1266–1277, 1998.
- [55] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1970.
- [56] M. Miyagi and S. Nishida. Pulse spreading in a single-mode fiber due to third-order dispersion. *Applied Optics*, 18 :678–682, 1979.
- [57] M. D. Turner, T. M. Monro, and S. Afshar V. A full vectorial model for pulse propagation in emerging waveguides with subwavelength structures part II : Stimulated raman scattering. *Optics Express*, 17(14) :11565–11581, 2009.

Annexe A

Propagation d'ondes dans une fibre optique non linéaire

L'évolution de l'enveloppe du champ électrique A dans la fibre optique est décrite par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \\ - i(\gamma_0 + i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial t}) [A \int_0^\infty R(t') |A(\vec{r}, t - t')|^2 dt'] + \frac{1}{2} (\alpha_0 + i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}) A = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où A est exprimée en unité du champ électrique (Volt/mètre), pour des raisons pratiques, il est courant de normaliser A tel que $|A|^2$ représente la puissance optique. Pour cela, nous introduisons une amplitude normalisée A' , définie par [13]

$$|A'|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n c A_m |A|^2 \quad (\text{A.2})$$

où $A_m = \iint_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy$ représente l'aire du mode considéré. A partir de la relation (A.2), nous déduisons que A' est reliée à A par un coefficient W indépendant de t et de z comme suit

$$A' = WA \quad (\text{A.3})$$

Pour vérifier que l'amplitude A' satisfait également l'équation (A.1), nous multiplions d'abord l'équation (A.1) par W et nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A'}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A'}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A'}{\partial t^3} \\ - i(\gamma_0 + i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial t}) [A' \int_0^\infty R(t') |A'(\vec{r}, t - t')|^2 dt'] + \frac{1}{2} (\alpha_0 + i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}) A' = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Puis, en nous appuyant sur la relation (A.2), nous exprimons $|A(\vec{r}, t - t')|^2$ en fonction de $|A'(\vec{r}, t - t')|^2$ dans l'équation (A.4) comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A'}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A'}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A'}{\partial t^3} \\ - i(\gamma_0 + i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial t}) \frac{2}{\varepsilon_0 n c A_m} [A' \int_0^\infty R(t') |A'(\vec{r}, t - t')|^2 dt'] + \frac{1}{2} (\alpha_0 + i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}) A' = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où A' satisfait l'équation (A.1) si et seulement si nous posons les nouveaux paramètres γ'_0 et γ'_1 tels que

$$\gamma'_0 = \frac{2}{\varepsilon_0 n c A_m} \gamma_0 \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma'_1 = \frac{2}{\varepsilon_0 n c A_m} \gamma_1 \quad (\text{A.7})$$

Or nous savons que le coefficient non linéaire γ s'exprime comme un développement de Taylor autour de ω_0 ,

$$\gamma(\omega) \approx \gamma_0 + \gamma_1(\omega - \omega_0), \quad \gamma_0 = \gamma(\omega_0), \quad \gamma_1 = \left(\frac{d\gamma}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (\text{A.8})$$

Par conséquent, le nouveau coefficient non linéaire $\gamma'(\omega)$ s'écrit comme suit

$$\gamma'(\omega) = \frac{2}{\varepsilon_0 n c A_m} \gamma(\omega) \quad (\text{A.9})$$

En remplaçant la forme exacte de $\gamma(\omega)$ dans l'expression (A.9), nous obtenons

$$\gamma'(\omega) = \frac{2}{\varepsilon_0 n c A_m} \cdot \frac{n_2 \omega \iint_{-\infty}^{\infty} |F|^4 dx dy}{c \iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy} = \frac{\omega \bar{n}_2}{c A_{\text{eff}}} \quad (\text{A.10})$$

où

$$\bar{n}_2 = \frac{2n_2}{\varepsilon_0 n c}, \quad A_{\text{eff}} = \frac{(\iint_{-\infty}^{\infty} |F|^2 dx dy)^2}{\iint_{-\infty}^{\infty} |F|^4 dx dy}$$

avec A_{eff} représente l'aire effective du mode de la fibre, la quantité \bar{n}_2 est parfois appelée le coefficient Kerr non linéaire et possède l'unité m^2/W , par conséquent, l'unité de $\gamma'(\omega)$ est W^{-1}/m .

Annexe B

Développement linéaire de l'effet Raman dans une fibre optique

Dans l'équation (1.72), la réponse non linéaire du milieu est donnée par $\int_0^\infty R(t')|A(\vec{r}, t-t')|^2 dt'$. Pour les impulsions assez larges qui peuvent contenir de nombreux cycles optiques (largeur d'impulsion > 0.1 ps), nous pouvons utiliser le développement de Taylor suivant

$$|A(z, t-t')|^2 \approx |A(z, t)|^2 - t' \frac{\partial |A(z, t)|^2}{\partial t} \quad (\text{B.1})$$

Cette approximation est raisonnable si l'enveloppe de l'impulsion évolue lentement dans la fibre. Par conséquent, la réponse non linéaire du milieu devient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R(t')|A(\vec{r}, t-t')|^2 dt' &= |A(z, t)|^2 \int_0^\infty R(t') dt' - \frac{\partial |A(z, t)|^2}{\partial t} \int_0^\infty t' R(t') dt' \\ &= |A(z, t)|^2 - \frac{\partial |A(z, t)|^2}{\partial t} \int_0^\infty t' R(t') dt' \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où $R(t)$ est la fonction normalisée de la réponse non linéaire du milieu avec $\int_0^\infty R(t') dt' = 1$. $R(t)$ devrait inclure à la fois les contributions électroniques et nucléaires. En supposant que la contribution électronique est presque instantanée, $R(t')$ peut s'écrire comme [13, 21, 26]

$$R(t') = (1 - f_R)\delta(t') + f_R h_R(t') \quad (\text{B.3})$$

où f_R représente la contribution fractionnaire de la réponse Raman dans la polarisation non linéaire, $\delta(t')$ est la réponse instantanée du milieu et $h_R(t')$ représente la fonction de la réponse Raman. Pour déterminer l'intégral de l'expression (B.2), nous remplaçons $R(t')$ par l'expression (B.3) comme suit

$$\int_{-\infty}^\infty t' R(t') dt' = (1 - f_R) \int_{-\infty}^\infty t' \delta(t') dt' + f_R \int_{-\infty}^\infty t' h_R(t') dt' \quad (\text{B.4})$$

où nous avons étendu la borne de l'intégrale à $-\infty$, car $R(t)$ doit être égale à zéro pour t' négatif en raison de la causalité. Selon la propriété de la fonction de Dirac $\delta(t)$, nous avons $\int_{-\infty}^\infty t' \delta(t') dt' = 0$, l'équation (B.4) devient

$$\int_{-\infty}^\infty t' R(t') dt' = f_R \int_{-\infty}^\infty t' h_R(t') dt' \quad (\text{B.5})$$

L'intégral au coté droit de l'égalité de l'équation (B.5) est possible à calculer si nous l'écrivons sous la forme suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} t' h_R(t') dt' = \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} it' h_R(t') e^{i\Delta\omega t'} dt' \right]_{\Delta\omega=0} \quad (\text{B.6})$$

où $e^{i\Delta\omega t'}$ tend vers 1, lorsque $\Delta\omega$ tend vers zéro. Or la propriété de la transformée de Fourier montre que

$$\text{TF}[it' \cdot f(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} it' \cdot f(t') e^{i\omega t'} dt' = \frac{d\tilde{f}(\omega)}{d\omega} \quad (\text{B.7})$$

avec $\tilde{f}(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(t')$. En utilisant les relations (B.6) et (B.7), nous réécrivons l'équation (B.5) à la forme suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} t' R(t') dt' = -i f_R \left. \frac{d\tilde{h}_R(\Delta\omega)}{d\Delta\omega} \right|_{\Delta\omega=0} \quad (\text{B.8})$$

La partie imaginaire de \tilde{h}_R nous donne le gain Raman, et sa partie réelle conduit au changement d'indice de réfraction induit par l'effet Raman que nous ne considérons pas ici [57]. En ne conservant que la partie imaginaire de \tilde{h}_R , l'équation (B.8) devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} t' R(t') dt' = f_R \left. \frac{d(\text{Im}[\tilde{h}_R(\Delta\omega)])}{d(\Delta\omega)} \right|_{\Delta\omega=0} = T_R \quad (\text{B.9})$$

où T_R est le coefficient lié à la pente de la partie linéaire du gain Raman au voisinage de la fréquence centrale ω_0 , sa valeur numérique $T_R \approx 3$ fs est déduite expérimentalement pour les longueurs d'onde proche de $1.5 \mu\text{m}$. La partie linéaire du gain Raman ne couvre plus toute la bande spectrale de l'impulsion pour les impulsions de largeur temporelle plus courte que 0.5 ps, par conséquent, l'utilisation de l'équation (B.9) devient discutable pour des impulsions courtes. En remplaçant l'équation (B.9) dans l'équation (B.2), nous obtenons enfin

$$\int_0^{\infty} R(t') |A(\vec{r}, t - t')|^2 dt' = |A(z, t)|^2 - T_R \frac{\partial |A(z, t)|^2}{\partial t} \quad (\text{B.10})$$

Annexe C

Dérivation du modèle réduit de Lugiato-Lefever

Le but de la démonstration ci-dessous est de trouver un modèle simplifié du modèle original qui décrit la propagation de l'enveloppe du champ électrique dans une cavité fibrée

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + i\gamma|A|^2 A - i\gamma T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \\ A_{n+1}(z=0, T) = \theta A_i + \rho e^{-i\delta_0} A_n(z=L, T) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

$$A_{n+1}(z=0, T) = \theta A_i + \rho e^{-i\delta_0} A_n(z=L, T) \quad (\text{C.2})$$

En posant un opérateur $G(A)$ qui est défini par

$$G(A) = \left(-\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3}{\partial T^3} + i\gamma|A|^2 - i\gamma T_R \frac{\partial |A|^2}{\partial T} \right) A \quad (\text{C.3})$$

L'équation (C.1) devient

$$\frac{\partial A}{\partial z} = G(A) \quad (\text{C.4})$$

Au nième tour dans la cavité, nous pouvons en déduire $A_n(z=L, T)$ l'enveloppe lentement variable du champ électrique de position $z=L$ à partir de $A_n(z=0, T)$ l'enveloppe lentement variable du champ électrique de position $z=0$ de la façon suivante

$$A_n(z=L, T) = L \cdot G(A) + A_n(z=0, T) \quad (\text{C.5})$$

En introduisant la relation précédente dans l'équation (C.2), nous obtenons

$$A_{n+1}(z=0, T) = \theta A_i + \rho e^{-i\delta_0} [L \cdot G(A) + A_n(z=0, T)] \quad (\text{C.6})$$

Ici nous définissons une nouvelle variable temporelle $t = n \cdot t_R$, où t_R représente la durée pour laquelle le signal parcourt un tour dans la cavité. Avec cette nouvelle variable temporelle, nous pouvons convertir les notations comme suit

$$A_n(z=0, T) = A(z=0, T, t) \quad (\text{C.7})$$

$$A_n(z=L, T) = A(z=L, T, t) \quad (\text{C.8})$$

$$A_{n+1}(z=0, T) = A(z=0, T, t + t_R) \quad (\text{C.9})$$

En tenant compte de ces nouvelles notations, nous réécrivons l'équation (C.6) de la forme suivante

$$A(z = 0, T, t + t_R) = \theta A_i + \rho e^{-i\delta_0} [L \cdot G(A) + A(z = 0, T, t)] \quad (\text{C.10})$$

Dans notre analyse, nous supposons que t_R est une grandeur assez petite devant t pour que nous fassions l'approximation $t_R \approx \partial t$ qui nous permet d'écrire la relation suivante

$$\frac{A(z = 0, T, t + t_R) - A(z = 0, T, t)}{t_R} \approx \frac{\partial A(z = 0, T, t)}{\partial t} \quad (\text{C.11})$$

A partir de l'équation (C.11), nous exprimons $A(z = 0, T, t + t_R)$ en fonction de $A(z = 0, T, t)$ et de sa dérivée telle que

$$A(z = 0, T, t + t_R) = t_R \frac{\partial A(z = 0, T, t)}{\partial t} + A(z = 0, T, t) \quad (\text{C.12})$$

Nous remplaçons l'expression (C.12) dans l'équation (C.10) et notons A à la place de $A(z = 0, \tau, t)$ pour la légèreté de notation, une équation qui ne contient que les termes en A est obtenue comme suit

$$t_R \frac{\partial A}{\partial t} = \theta A_i - A + \rho e^{-i\delta_0} [L \cdot G(A) + A] \quad (\text{C.13})$$

Or nous savons que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude ρ et θ dans notre cavité satisfont les conditions $\rho^2 \approx 1$ et $\theta^2 \ll 1$ ce qui nous permet de faire l'approximation suivante

$$\rho = \sqrt{1 - \theta^2} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (\text{C.14})$$

Par ailleurs, le déphasage linéaire induit par un tour de propagation dans la cavité est très faible devant 1 ($\delta_0 \ll 1$), nous pouvons remplacer le terme exponentiel $e^{-i\delta_0}$ par l'expression approchée ci-dessous

$$e^{-i\delta_0} \approx 1 - i\delta_0 \quad (\text{C.15})$$

En tenant compte des approximations que nous avons introduites dans les équations (C.14) et (C.15), le terme $\rho e^{-i\delta_0}$ est développé et prend la forme suivante

$$\rho e^{-i\delta_0} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)(1 - i\delta_0) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} - i\delta_0 \quad (\text{C.16})$$

où nous avons négligé le terme d'ordre supérieur $i\frac{\theta^2}{2}\delta_0$. En remplaçant l'expression (C.16) dans l'équation (C.13), nous obtenons

$$t_R \frac{\partial A}{\partial t} = \theta A_i + L \cdot G(A) - \left(\frac{\theta^2}{2} + i\delta_0\right) [L \cdot G(A) + A] \quad (\text{C.17})$$

Pour aboutir au modèle réduit de Lugiato-Lefever, nous appliquons l'hypothèse du champ moyen ce qui suppose que l'enveloppe du champ intra-cavité A varie peu au cours de la propagation d'un tour de cavité, c'est-à-dire que les longueurs de dispersion et la longueur non linéaire sont très grandes par rapport à la longueur de la cavité,

$L \ll L_{d2}, L_{d3}, L_{nl}$ avec $L_{d2} = T_0^2/|\beta_2|$, $L_{d3} = T_0^3/|\beta_3|$, $L_{nl} = 1/(\gamma P_0)$, T_0 est la largeur temporelle du signal et P_0 est l'intensité du signal d'entrée. Par conséquent, la relation ci-dessous est valable

$$L \cdot G(A) \ll A \quad (\text{C.18})$$

En tenant compte de la condition (C.18), nous développons l'équation (C.17). Les termes d'ordre supérieur comme $-\frac{\theta^2}{2}[L \cdot G(A)]$ et $i\delta_0[L \cdot G(A)]$ sont très petits devant les autres termes, nous pouvons donc les négliger et obtenir

$$t_R \frac{\partial A}{\partial t} = \theta A_i - \left(\frac{\theta^2}{2} + i\delta_0\right)A + L \cdot G(A) \quad (\text{C.19})$$

Dans l'équation (C.19), nous remplaçons $G(A)$ par son expression [équation (C.3)] et posons les changements de variable $t' = t\theta^2/2t_R$ qui est une variable de temps normalisée lente, et $\tau' = T\theta/(L|\beta_2|)^{1/2}$ qui est une variable de temps normalisée rapide, l'équation normalisée du modèle réduit de Lugiato-Lefever est enfin obtenue sous la forme suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = S - (1 + i\Delta)\psi - is \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} + B_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau'^3} + i|\psi|^2 \psi - iR\psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \tau'} \quad (\text{C.20})$$

avec $s = \text{sign}(\beta_2)$, $\psi = A(2\gamma L)^{1/2}/\theta$ est l'amplitude normalisée du champ intra-cavité, $\Delta = 2\delta_0/\theta^2$ est le déphasage normalisé de la cavité, $S = 2A_i(2\gamma L)^{1/2}/\theta^2$ est l'amplitude normalisée de la pompe, $B_3 = \beta_3\theta/(3L^{1/2}|\beta_2|^{3/2})$ est le coefficient normalisé de la TOD et $R = T_R\theta/(L|\beta_2|)^{1/2}$ est le coefficient normalisé de l'effet Raman.

Annexe D

Etablissement de la relation de dispersion approchée dans la fibre optique

La relation de dispersion normalisée dans la fibre s'écrit [voir équation (2.12) du chapitre 2]

$$K = b_3\Omega^3 + i\sqrt{2P\Omega^2 - \Omega^4 - 2iPR_T\Omega^3} \quad (\text{D.1})$$

Nous cherchons un développement de Taylor de la relation (D.1) autour de la pulsation $\Omega_c = \sqrt{P}$ comme suit

$$K_a = K_c + K'_c\Omega' + \frac{1}{2}K''_c\Omega'^2 + O(\Omega'^2) \quad (\text{D.2})$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Omega - \Omega_c \ll \Omega_c \\ K_c &= K(\Omega_c) \\ K'_c &= \left. \frac{\partial K}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_c} \\ K''_c &= \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} \right|_{\Omega_c} \end{aligned}$$

Nous nous intéressons d'abord à K_c qui s'écrit initialement sous la forme suivante

$$K_c = b_3P^{\frac{3}{2}} + iP\sqrt{1 - 2i\sqrt{P}R_T} \quad (\text{D.3})$$

Pour séparer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe présent sous la racine de l'expression (D.3), nous pouvons utiliser la méthode ci-dessous

$$\begin{aligned} A + iB &= \sqrt{a + ib} \\ A &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \\ B &= \pm \left(\frac{\text{sign}(b)}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

où A , B , a et b sont tous réels. En revenant à l'équation (D.3), nous avons $a = 1$ et $b = -2\sqrt{PR_T}$, les expressions de A et B sont obtenues en appliquant les relations (D.4) :

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + 4PR_T^2} + 1}$$

$$B = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + 4PR_T^2} - 1}$$

En réalité, le coefficient normalisé de l'effet Raman (R_T) est assez faible devant 1 ($R_T \ll 1$) en régime picoseconde et P est de l'ordre de 1 avec les paramètres physiques qui sont utilisés dans les expériences réelles. Cela implique que le terme PR_T^2 est très petit devant 1 ($PR_T^2 \ll 1$). Nous pouvons donc utiliser l'approximation $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ avec $x \ll 1$, ce qui nous permet d'obtenir les expressions suivantes

$$A \approx \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + 2PR_T^2} \approx \pm \left(1 + \frac{1}{2}PR_T^2\right)$$

$$B \approx \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2PR_T^2} = \mp \sqrt{PR_T}$$

Les termes sous la racine dans l'équation (D.3) deviennent

$$\sqrt{1 - 2i\sqrt{PR_T}} \approx \pm \left(1 + \frac{1}{2}PR_T^2 - i\sqrt{PR_T}\right) \quad (\text{D.5})$$

En substituant l'expression (D.5) dans la relation (D.3), nous pouvons réécrire l'expression approchée de K_c mais plus facile à analyser telle que

$$K_c = b_3 P^{\frac{3}{2}} \pm \left[P^{\frac{3}{2}} R_T + i \left(P + \frac{1}{2} P^2 R_T^2 \right) \right] \quad (\text{D.6})$$

Puisque l'instabilité existe uniquement pour $\text{Im}(K_c)$ positif, nous ne gardons que le signe "+" dans les expressions (D.5) et (D.6), K_c prend enfin la forme suivante

$$K_c = b_3 P^{\frac{3}{2}} + P^{\frac{3}{2}} R_T + i \left(P + \frac{1}{2} P^2 R_T^2 \right) \quad (\text{D.7})$$

Ensuite, la dérivé première de K par rapport à Ω au point $\Omega = \Omega_c$ s'écrit comme

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_c} = 3Pb_3 + \frac{3PR_T}{\sqrt{1 - 2i\sqrt{PR_T}}} \quad (\text{D.8})$$

Nous remplaçons la relation (D.5) dans l'expression (D.8) et collectons les termes en puissance de R_T . Comme nous avons $R_T \ll 1$, les termes d'ordre supérieur à 1 en R_T peuvent être négligés, l'expression (D.8) devient

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_c} \approx 3Pb_3 + 3PR_T \quad (\text{D.9})$$

De même nous avons trouvé l'expression approchée de K_c'' telle que

$$\left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} \right|_{\Omega_c} \approx 6\sqrt{P}b_3 - 4i + 10\sqrt{PR_T} \quad (\text{D.10})$$

En remplaçant les expressions (D.7), (D.9) et (D.10) dans l'équation (D.2), nous obtenons l'expression approchée de K ,

$$K_a \approx b_3 P^{\frac{3}{2}} + P^{\frac{3}{2}} R_T + i(P + \frac{1}{2} P^2 R_T^2) + \Omega' (3Pb_3 + 3PR_T) + \frac{1}{2} \Omega'^2 (6\sqrt{P}b_3 - 4i + 10\sqrt{P}R_T)$$

De plus, $\Omega' \ll \Omega_c = \sqrt{P}$, nous pouvons donc négliger le terme de $\Omega'^2 R_T$ à cause de son faible valeur par rapport aux autres termes, la relation de dispersion approchée dans la fibre s'écrit finalement

$$K_a \approx b_3 P^{\frac{3}{2}} + P^{\frac{3}{2}} R_T + (3Pb_3 + 3PR_T)\Omega' + 3\sqrt{P}b_3\Omega'^2 + i(P + \frac{1}{2} P^2 R_T^2 - 2\Omega'^2)$$

Annexe E

Etablissement de la relation de dispersion approchée dans la cavité fibrée

La relation de dispersion normalisée dans la cavité fibrée s'écrit [voir équation (3.7) du chapitre 3]

$$\tilde{K} = B_3 \tilde{\Omega}^3 + i[-1 + \sqrt{I^2 - b^2 - 2iR\tilde{\Omega}I(I - b)}] \quad (\text{E.1})$$

avec $b = -\Delta + s\tilde{\Omega}^2 + 2I$. Nous cherchons un développement de Taylor de la relation (E.1) autour de la pulsation $\tilde{\Omega}_c = \pm\sqrt{(\Delta - 2I)/s}$ comme suit

$$\tilde{K}_a \approx \tilde{K}_c + \tilde{K}'_c \tilde{\Omega}' + \frac{1}{2} \tilde{K}''_c \tilde{\Omega}'^2 \quad (\text{E.2})$$

avec

$$\tilde{\Omega}' = \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}_c \ll \tilde{\Omega}_c$$

$$\tilde{K}_c = \tilde{K}(\tilde{\Omega}_c)$$

$$\tilde{K}'_c = \left. \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}} \right|_{\tilde{\Omega}_c}$$

$$\tilde{K}''_c = \left. \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}^2} \right|_{\tilde{\Omega}_c}$$

Pour $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_c$ nous avons $b = 0$ et \tilde{K}_c s'écrit

$$\tilde{K}_c = B_3 \tilde{\Omega}_c^3 + i(-1 + I\sqrt{1 - 2iR\tilde{\Omega}_c}) \quad (\text{E.3})$$

Pour séparer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe présent sous la racine de l'expression (E.3), nous pouvons utiliser la même méthode que précédemment

$$A + iB = \sqrt{a + ib}$$

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \quad (\text{E.4})$$

$$B = \pm \left(\frac{\text{sign}(b)}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}$$

où A , B , a et b sont tous réels. En revenant à l'équation (E.3), nous avons $a = 1$ et $b = -2R\tilde{\Omega}_c$, les expressions de A et B sont obtenues en appliquant l'équation (E.4) :

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + (2R\tilde{\Omega}_c)^2} + 1}$$

$$B = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + (2R\tilde{\Omega}_c)^2} - 1}$$

En effet, le coefficient renormalisé de l'effet Raman (R) est très faible devant 1 ($R \ll 1$) et $\tilde{\Omega}_c$ est ici de l'ordre de 1 avec les paramètres physiques qui sont utilisés dans les expériences réelles. Cela implique que le terme $(2R\tilde{\Omega}_c)^2$ est aussi très petit devant 1 [$(2R\tilde{\Omega}_c)^2 \ll 1$]. Nous pouvons donc utiliser l'approximation $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ avec $x \ll 1$, ce qui nous permet d'obtenir les expressions suivantes

$$A \approx \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + 2(R\tilde{\Omega}_c)^2} \approx \pm \left[1 + \frac{1}{2}(R\tilde{\Omega}_c)^2\right]$$

$$B \approx \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(R\tilde{\Omega}_c)^2} = \mp R\tilde{\Omega}_c$$

Les termes sous la racine dans l'équation (E.3) deviennent

$$\sqrt{1 - 2iR\tilde{\Omega}_c} \approx \pm \left[1 + \frac{1}{2}(R\tilde{\Omega}_c)^2 - iR\tilde{\Omega}_c\right] \quad (\text{E.5})$$

En substituant l'expression (E.5) dans la relation (E.3), nous pouvons réécrire l'expression approchée de \tilde{K}_c ,

$$\tilde{K}_c = B_3\tilde{\Omega}_c^3 + i\left[-1 \pm I\left(1 + \frac{1}{2}R^2\tilde{\Omega}_c^2 - iR\tilde{\Omega}_c\right)\right] \quad (\text{E.6})$$

Puisque l'instabilité existe uniquement pour $\text{Im}(\tilde{K}_c)$ positif, nous ne gardons que le signe "+" dans les expressions (E.5) et (E.6), \tilde{K}_c prend enfin la forme suivante

$$\tilde{K}_c = B_3\tilde{\Omega}_c^3 + I\tilde{\Omega}_c R + i\left(I - 1 + \frac{1}{2}I\tilde{\Omega}_c^2 R^2\right) \quad (\text{E.7})$$

Ensuite, la dérivé première de \tilde{K} par rapport à $\tilde{\Omega}$ au point $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_c$ s'écrit comme

$$\left. \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}} \right|_{\tilde{\Omega}_c} = 3B_3\tilde{\Omega}_c^2 - \frac{R(2\Delta - 5I)}{\sqrt{1 - 2iR\tilde{\Omega}_c}} \quad (\text{E.8})$$

En remplaçant la relation (E.5) dans l'expression (E.8), nous collectons les termes en puissance de R . Puisque nous avons $R \ll 1$, nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur à 1 en R , l'expression (E.8) devient

$$\left. \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}} \right|_{\tilde{\Omega}_c} \approx 3B_3\tilde{\Omega}_c^2 + (5I - 2\Delta)R \quad (\text{E.9})$$

De même nous avons l'expression approchée de \tilde{K}_c'' telle que

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial \tilde{\Omega}^2} \right|_{\tilde{\Omega}_c} \approx 6B_3 \tilde{\Omega}_c + \frac{i4s(2I - \Delta)}{I} \quad (\text{E.10})$$

où nous avons négligé tous les termes qui contiennent R , car dans l'expression de \tilde{K}_a [équation (E.2)], ces termes sont multipliés par $\tilde{\Omega}'^2$ qui est aussi une quantité très faible devant 1 ($\tilde{\Omega}' \ll \tilde{\Omega}_c \sim 1$). En remplaçant les expressions (E.7), (E.9) et (E.10) dans l'équation (E.2), nous obtenons enfin l'expression approchée de \tilde{K} telle que

$$\begin{aligned} \tilde{K}_a \approx & B_3 \tilde{\Omega}_c^3 + I \tilde{\Omega}_c R + i(I - 1 + \frac{1}{2} I \tilde{\Omega}_c^2 R^2) + \tilde{\Omega}' [3B_3 \tilde{\Omega}_c^2 + (5I - 2\Delta)R] \\ & + \tilde{\Omega}'^2 [3B_3 \tilde{\Omega}_c + \frac{i2s(2I - \Delta)}{I}] \end{aligned}$$

Annexe F

Publication

Parametric gain control of a pulse in birefringent photonic crystal fibers, S. Coulibaly, **Z. Liu**, M. Taki, and G. P. Agrawal, Phys. Rev. A 86, 033802 (2012)

Parametric gain control of a pulse in birefringent photonic crystal fibers

S. Coulibaly,¹ Z. Liu,¹ M. Taki,¹ and G. P. Agrawal²

¹Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CNRS UMR 8523, Université de Lille 1 Sciences et Technologies, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

²The Institute of Optics, University of Rochester, Rochester, New York 14627, USA

(Received 11 May 2012; published 4 September 2012)

Propagation of a modulationally amplified Gaussian pulse is considered inside a birefringent optical fiber. We show analytically that, in addition to a reduction in the parametric gain and a change in the pulse's group velocity, the third-order dispersion allows the generation of a temporal Airy-shaped pulse. Furthermore, pulse spreading in the temporal domain and chirping in the spectral domain both can be controlled through an interplay between third-order dispersion and modulational instability.

DOI: [10.1103/PhysRevA.86.033802](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.033802)

PACS number(s): 42.65.Sf, 42.55.Tv, 42.55.Wd, 42.81.-i

I. INTRODUCTION

The process by which a homogeneous state breaks up into a periodic state is known as modulational instability (MI) [1,2]. During its 40-year history, MI has been reported in both the space and time domains using numerous physical systems, including hydrodynamics, plasma physics, nonlinear optics, and Bose-Einstein condensation, just to cite a few. From a technological point of view, MI plays an important role in telecommunication systems. Indeed, in the experimental evidence for its occurrence in optical fibers, MI was shown to initiate pulse-train generation [3]. Since then, other potential applications of MI have been reported in the context of fiber-optic parametric amplifiers [4,5], supercontinuum (SC) generation [6], and optical rogue-wave formation [7].

In the context of fiber optics, MI is physically understood as a balance between the nonlinear and linear dispersive effects experienced by an optical field during its propagation. Mathematically, the propagation of light in a single-mode fiber is commonly modeled by the nonlinear Schrödinger (NLS) equation, and MI can only rise in the anomalous group-velocity-dispersion (GVD) regime. However, in the normal-dispersion regime the phase-matching condition underlying MI can be realized by adding an additional degree of freedom to the system. For example, Coen and Haelterman [8] predicted and experimentally observed that MI can be produced in a normally dispersive optical fiber by applying specific boundary conditions. An intrinsic characteristic of the optical fiber can also be used to obtain a supplementary degree of freedom. Indeed, the usual scalar NLS model results from a simplification that assumes that the polarization state of light does not change during its propagation. It is well known that real fibers exhibit modal birefringence with random changes in its magnitude and orientation along the fiber length.

In specifically designed photonic crystal fibers (PCF), the built-in birefringence can be made much larger than random birefringence variations, and one must consider the vectorial nature of wave propagation in such strongly birefringent fibers. In this case, the copropagating orthogonally polarized fields are found to exhibit the MI in cases of both normal and anomalous GVD [9–12]. From a theoretical point of view the case of orthogonally polarized fields has the advantage that it can be easily compared to the case of two continuous-wave (cw) pumps interacting inside an ideal optical fiber through cross-phase modulation [12].

In cases of both normal and anomalous GVD, MI gain was commonly thought to be unaffected by odd-order dispersion experienced by light during its propagation in a nonlinear Kerr medium. In fact, the MI gain is generally obtained through a standard linear stability analysis applicable only when the process is initiated by a monochromatic extended perturbation (cw pumping). Very recently, it has been shown that a proper accounting of the linear distortion effects and interactions experienced by different spectral components of a pulse yields a dramatic reduction of the MI gain in the presence of the third-order dispersion (slope of the GVD curve) [13].

In this paper we are interested in the third-order dispersion (TOD) effects on the pulse-seeded modulational instability process in a weakly birefringent fiber. We show that, in addition to a reduction of the MI gain previously predicted, distortion of the pulse shape under the TOD effects is described by an Airy function. More importantly, we show here that the pulse characteristics (width, chirp, etc.) can be controlled by an interplay between TOD and MI. This paper is organized as follows. In Sec. II, we recall the vectorial equations governing the propagation of orthogonal components of an arbitrary polarized light in a single-mode birefringent fiber. The background of linear stability analysis and general solutions of the linearized equation, given an initial perturbation, are presented. Section III is devoted to explicit calculations of the shape of a modulationally amplified Gaussian pulse, and the results are compared with numerical investigations of the vectorial equations in Sec. IV. Finally, the main results are summarized in Sec. IV.

II. POLARIZATION INSTABILITY

We start with the coupled generalized NLS equations satisfied by the orthogonally polarized components of a pulse in a lossless, birefringent optical fiber [9–12]:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial U}{\partial \tau} = i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) U + i\gamma \left(|U|^2 + \frac{2}{3} |V|^2 \right) U + i \frac{\gamma}{3} U^* V^2 e^{-2i\Delta\beta z}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial V}{\partial \tau} = i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) V + i\gamma \left(|V|^2 + \frac{2}{3} |U|^2 \right) V + i \frac{\gamma}{3} U^2 V^* e^{2i\Delta\beta z}. \quad (1b)$$

Here $U(z, \tau)$ and $V(z, \tau)$ stand for the two orthogonal components of an arbitrary polarized optical field $\mathbf{E}(z, t)$ at the carrier frequency ω_0 , i.e.,

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} [U(z, \tau) \hat{x} + V(z, \tau) \hat{y}] e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + \text{c.c.},$$

where $\beta_0 = (\beta_{0x} + \beta_{0y})/2$ is the average propagation constant, $\Delta\beta = (\beta_{0x} - \beta_{0y})/2 = 2\pi/L_B$ is a measure of the modal birefringence, and L_B is the birefringence length. The nonlinear parameter γ is proportional to the nonlinear refractive index responsible for the Kerr effect, and the dispersion operator $\beta(i \frac{\partial}{\partial \tau})$ is given by

$$\beta \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) = \sum_{n \geq 2} \frac{\beta_n}{n!} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^n.$$

Since we consider in this paper optical fibers with a relatively low birefringence, the group velocities β_{1x} and β_{1y} are nearly identical, and we set $(\beta_{1x} \approx \beta_{1y} = \beta_1)$. Introducing $\bar{U} = U \exp(i \Delta\beta z/2)$ and $\bar{V} = V \exp(-i \Delta\beta z/2)$, the coupled equations describing the left and right circular polarizations $A_{\pm} = (\bar{U} \pm i \bar{V})/\sqrt{2}$ are analogous to that of cross-phase modulation [12].

Equations (1) have a homogeneous cw solution corresponding to a constant-power mode whose polarization state is oriented along one of the principal axes. In what follows, we choose this polarization state along the y axis, which represents the fast (slow) axis for $\Delta\beta > 0$ ($\Delta\beta < 0$). Then the cw solution is given by $(U_0, V_0) = [0, \sqrt{P_0} \exp(i\gamma P_0 Z)]$, where P_0 is the mode power. To examine the stability of this state, let us introduce the perturbations to U_0 and V_0 in the following form:

$$U(Z, \tau) = u(Z, \tau), \quad (2a)$$

$$V(Z, \tau) = [\sqrt{P_0} + v(Z, \tau)] e^{i\gamma P_0 Z}, \quad (2b)$$

with $u(Z, \tau)$ and $v(Z, \tau)$ taken to be small in comparison to P_0 and $Z = z - \tau/\beta_1$. Inserting Eqs. (2) in Eqs. (1) and linearizing in u and v , we obtain the following uncoupled equations:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} = i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{u} + i \left(\Delta\beta - \frac{\gamma_0}{3} \right) \bar{u} + i \frac{\gamma_0}{3} \bar{u}^*, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial Z} = i\beta \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) v + i\gamma_0(v + v^*), \quad (3b)$$

where we have set $\bar{u} = u \exp[i(\Delta\beta - \gamma_0)Z]$ and $\gamma_0 = \gamma P_0$. Equation (3b) is typically obtained when the scalar NLS equation is considered. Since we are concerned here with the normal-dispersion region, this equation excludes polarization instability of perturbations of the fast-axis component. Hence, the polarization instability in this case can be completely described by its component along the x axis.

In the frequency domain, Eq. (3a) together with its complex conjugate can be written in the form

$$\partial_Z \begin{bmatrix} \bar{u}(Z, \Omega) \\ \bar{u}^*(Z, -\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\Omega) & i\gamma_0/3 \\ -i\gamma_0/3 & M^*(-\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}(Z, \Omega) \\ \bar{u}^*(Z, -\Omega) \end{bmatrix},$$

where $M(\Omega) = i[\beta(\Omega) + \Delta\beta - \gamma_0/3]$ and $\beta(\Omega)$ is the Fourier transform of the dispersion operator. Looking for

solutions of the form

$$\begin{bmatrix} \bar{u}(Z, \Omega) \\ \bar{u}^*(Z, -\Omega) \end{bmatrix} = e^{\lambda Z} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

we find that the eigenvalues λ can be written in the form

$$\lambda_{\pm} = -i\beta_a(\Omega) \pm g(\Omega), \quad (4)$$

where $g(\Omega) = [\beta_s(\Omega) + \Delta\beta][2\gamma_0/3 - \Delta\beta - \beta_s(\Omega)]$ and we have defined the symmetric and asymmetric parts of $\beta(\Omega)$ as $\beta_a = [\beta(\Omega) - \beta(-\Omega)]/2$ and $\beta_s = [\beta(\Omega) + \beta(-\Omega)]/2$. Since we are interested in the amplification (or damping) of perturbations, we should consider only the eigenvalues with a nonzero real part, which correspond to $g(\Omega) \geq 0$. The corresponding solutions can be written as

$$\bar{u}(Z, \Omega) = F(Z, \Omega) \bar{u}(0, \Omega) + G(Z, \Omega) \bar{u}^*(0, -\Omega), \quad (5)$$

with

$$F(Z, \Omega) = e^{i\beta_a Z} \left(\cosh[g(\Omega)Z] + i \frac{\beta_s + \Delta\beta - \gamma_0/3}{g(\Omega)} \sinh[g(\Omega)Z] \right), \quad (6a)$$

$$G(Z, \Omega) = i e^{i\beta_a Z} \frac{\gamma_0/3}{g(\Omega)} \sinh[g(\Omega)Z]. \quad (6b)$$

Keeping the dispersion terms up to third order, $\beta(\Omega)$ can be written as $\beta(\Omega) = \beta_2 \Omega^2/2 + \beta_3 \Omega^3/6$. Then we have $\beta_a(\Omega) = \beta_3 \Omega^3/6$ and $\beta_s(\Omega) = \beta_2 \Omega^2/2$. Next, defining a dimensionless parameter $p = P_0/P_c$ with $P_c = 3|\Delta\beta|/2\gamma$, the parametric gain $g(\Omega)$ takes the explicit form

$$g(\Omega) = |\Delta\beta| \sqrt{\left(\mu \frac{\Omega^2}{\Omega_{c1}^2} + 1 \right) \left(\mu p - 1 - \mu \frac{\Omega^2}{\Omega_{c1}^2} \right)}, \quad (7)$$

where $\mu = \text{sgn}(\Delta\beta) = \pm 1$ and $\Omega_{c1} = \sqrt{2|\Delta\beta|/\beta_2}$. For $\mu = 1$ corresponding to the polarization state along the fast axis, the instability band is given by $-\Omega_{c1}\sqrt{p-1} \leq \Omega \leq \Omega_{c1}\sqrt{p-1}$, and the maximum gain is obtained at $\Omega_c = \Omega_{c1}\sqrt{(p-2)/2}$. Modulation instability with $\Omega_c \neq 0$ is possible only when $p \geq 2$; otherwise, for $p \leq 2$, $\Omega_c = 0$. When the polarization is along the slow axis $\mu = -1$, one may observe two sidebands such that $-\Omega_{c1} \leq \Omega \leq \Omega_{c1}\sqrt{p+1}$ and $-\Omega_{c1}\sqrt{p+1} \leq \Omega \leq \Omega_{c1}$, and the gain is maximum at $\Omega_c = \pm \Omega_{c1}\sqrt{(p+2)/2}$. In this case, modulation instability occurs whenever $p \geq 0$. In the following we show how the TOD affects drastically the dynamics as soon as perturbations are localized (in the form of pulses).

III. TIME-DEPENDENT PERTURBATIONS

According to Eq. (5), we can compute the output solution given any known form of the initial perturbation. To stress on the effects of the TOD, we consider a simple case for which analytical calculations can be performed. More specifically, we set the initial perturbation in the form of a Gaussian shape,

$$\bar{u}(Z=0, \tau) = \bar{u}_0 \exp \left[-\left(\frac{\tau}{2\tau_0} \right)^2 + i\Omega_0 \tau \right], \quad (8)$$

whose Fourier transform is given by

$$\tilde{u}(Z=0, \Omega) = 2\sqrt{\pi}\tau_0\tilde{u}_0 \exp[-\tau_0^2(\Omega - \Omega_0)^2]. \quad (9)$$

Assuming the spectral bandwidth of the Fourier transform to be smaller than the MI bandwidth and the central frequency Ω_0 to be close to the most amplified frequency, we write $\Omega_0 = \Omega_c + \delta\omega$, with $|\delta\omega| \ll |\Omega_c|$. Consequently, the parametric gain can be represented by its Taylor expansion

$$g_a(\Omega) = g_c + \frac{g''}{2}(\Omega - \Omega_c)^2 + O\{(\Omega - \Omega_c)^3\}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(Z, \tau) = \frac{2\tilde{u}_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left[i\frac{\beta_3}{6}\Omega_c^3 Z + \frac{P}{2}|\Delta\beta|Z - (\delta\omega\tau_0)^2\right] & \left\{ e^{i\Omega_c\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iA\omega_- - \frac{i}{3}B\omega_-^3 - (1+iC)\omega_-^2\right] d\omega_- \right. \\ & \left. + i e^{-i\Omega_c\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iA^*\omega_+ - \frac{i}{3}B\omega_+^3 - (1-iC^*)\omega_+^2\right] d\omega_+ \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

where we have set $\omega_{\pm} = (\Omega \pm \Omega_c)\tau_0$ and

$$A = \frac{\tau}{\tau_0} - \frac{\beta_3\Omega_c^2 Z + 4i\delta\omega\tau_0^2}{2\tau_0}, \quad (13a)$$

$$B = \frac{\beta_3}{2\tau_0^3} Z = \frac{Z}{L_{\text{TOD}}}, \quad (13b)$$

$$C = \frac{\beta_3\Omega_c + ig''}{2\tau_0^2} Z = \frac{\Omega_c\tau_0}{L_{\text{TOD}}} Z - i\frac{(\beta_2\Omega_c)^2}{\rho\Delta\beta\tau_0^2} Z. \quad (13c)$$

Performing the integrals, we finally obtain

$$\bar{u}(Z, \tau) = \frac{\tilde{u}_0\sqrt{\pi}}{|B|^{-1/3}} e^{P|\Delta\beta|Z/2 - (\delta\omega\tau_0)^2} [\bar{u}_+ e^{i\Omega_c\tau} + i\bar{u}_- e^{-i\Omega_c\tau}], \quad (14)$$

where

$$\bar{u}_+ = e^{i\psi} \text{Ai}[(1 - AB - C^2 + 2iC)B^{-4/3}], \quad (15a)$$

$$\bar{u}_- = e^{-i\psi^*} \text{Ai}[(1 - A^*B - C^{*2} - 2iC^*)B^{-4/3}], \quad (15b)$$

$$\psi = i\frac{\beta_3}{6}\Omega_c^3 Z + \frac{2 - 3AB - 6C^2}{3B^2} - iC\frac{3AB + 2C^2 - 6}{3B^2}, \quad (15c)$$

and $\text{Ai}(x)$ is the Airy function. In contrast to the solution obtained in the context of pulse spreading [14], here all functions of the propagation length appearing in Eq. (14) are proportional to the TOD, suggesting that almost all characteristics may be affected by the latter. In addition, interplay between MI and pulse size allows further degrees of freedom for tuning the effects of the TOD. Of course in the expression (12), the drastic impact of TOD on the characteristics (e.g., amplitude, size, group velocity) of the output are included but hidden. However, for small or large values of B [see (13b)] asymptotic expressions can be found [14]. This approach is developed in the following and the predictions are compared with numerical simulations.

with $g_c = g(\Omega_c)$ and $g'' = \partial^2 g(\Omega)/\partial\Omega^2|_{\Omega_c}$. The eigenvectors U and V take the form

$$F(Z, \Omega) \simeq F_c = \exp\left[i\frac{\beta_3}{6}\Omega^3 Z\right] \cosh[g_a(\Omega)Z], \quad (11a)$$

$$G(Z, \Omega) \simeq G_c = i \exp\left[i\frac{\beta_3}{6}\Omega^3 Z\right] \sinh[g_a(\Omega)Z]. \quad (11b)$$

Considering only the growing parts of the eigenvectors, we obtain the following explicit solution for the amplified perturbation [14,15]:

IV. NUMERICAL RESULTS

For numerical investigations we consider a birefringent fiber with a beat length of 2 m and γ value of $0.05 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Figure 1 shows solution (14) for increasing values of β_3 after one beat length. We also plot on the same graphs the results of numerical integration of Eqs. (1).

As can be expected and seen in Fig. 1, the numerical solutions are in very good agreement with analytical predictions. Note that in this range of parameters our solution is different from the one predicted in [13]. Indeed, the main expected result is a drastic reduction of the gain in the presence of the TOD. This reduction of the gain is accompanied by a change in the group velocity and a spreading of the pulse in time. The

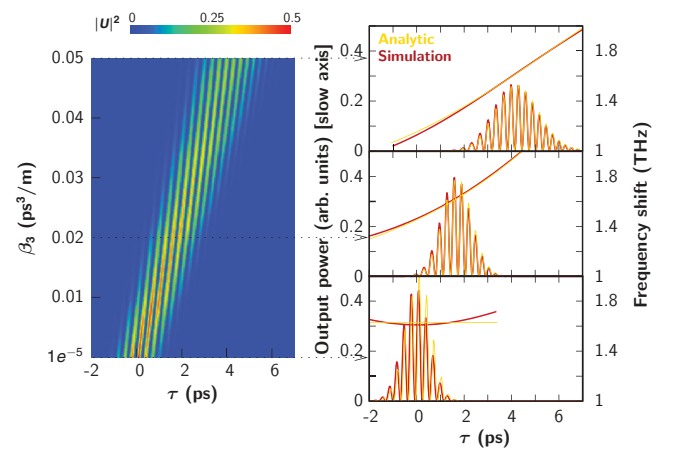


FIG. 1. (Color online) (left) Slow-axis power $|u(\tau)|^2$ as a function of β_3 . (right) The pulse profiles (left axis) and instantaneous frequency shift (right axis) for $\beta_3 = 0.05, 0.02$, and 10^{-5} (from top to bottom). The parameters are $\beta_2 = 0.06 \text{ ps}^2/\text{m}$, $\tau_0 = 0.5 \text{ ps}$, $P_0 = 4P_c$, and perturbation is initialized to $u_0 = 1nW$. Red (dark gray) and yellow (light gray) lines are produced from numerical integration of Eqs. (1) and analytical predictions from (14), respectively.

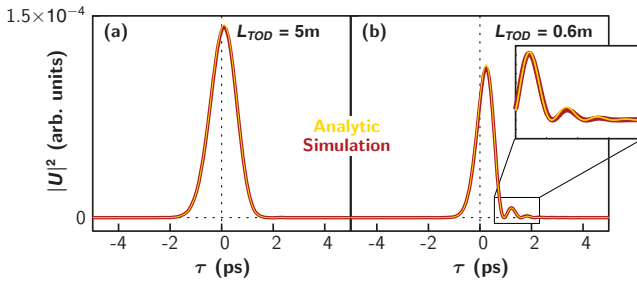


FIG. 2. (Color online) Numerical [yellow (light gray) lines] and analytical [red (dark gray) lines] pulse shapes along the slow axis after 2 m for (a) $\tau_0 = 0.5$ ps and (b) 0.25 ps. The other parameters are the same as in Fig. 1.

origin of these effects can be understood by considering the dependence of A , B , and C on the TOD parameter. For the sake of simplicity, let us consider $\delta\omega = 0$. Then, A is nothing but the time variable normalized by the initial pulse width. Notice that time origin is now given by $\tau_{\max} = (\beta_3\Omega_c^2/2)Z$. This shift is the result of a TOD-induced change in the group velocity of the pulse.

The impact of TOD on the pulse profile results from a competition between the terms coming from B and C . Let us focus first on the case $C = 0$. This condition can be achieved when $\beta_2 = 0$ or $\Omega_c = 0$. However, since the presence of β_2 is necessary for the MI gain process, we will consider only the case $\Omega_c = 0$, which corresponds to $1 \leq p \leq 2$ when $\Delta\beta > 0$. B measures the propagation distance in units of the TOD length defined as $L_{\text{TOD}} = 2\tau_0^3/\beta_3$. Figure 2(a) shows the analytical and numerical profiles for $Z/L_{\text{TOD}} < 1$. As can be seen from Fig. 2(a) the pulse profile remains Gaussian. However, when $Z/L_{\text{TOD}} > 1$ Airy oscillations become relevant, and the pulse displays an asymmetric profile seen in Fig. 2(b). In the spectral domain, a temporal Airy profile is known to introduce a frequency chirp. A typical evolution of the instantaneous frequency of the output beam is shown in Fig. 1 (see left axis of left panel). We can observe that the nonlinear chirp on the signal frequency is very well described by our analytical predictions.

Let us now investigate the effects of C when the propagation distances are much smaller than L_{TOD} . When $\Delta\beta > 0$, the real

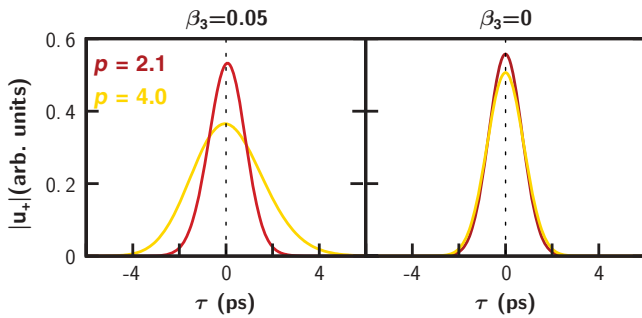


FIG. 3. (Color online) Amplitudes $|u_{\pm}|$ on the slow axis after 1.6 m for $p = 2.1$ [yellow (light gray) lines], corresponding to $\Omega_c = 2.3$ THz, and $p = 4$ [red (dark gray) lines], corresponding to $\Omega_c = 10.2$ THz, (left) with and (right) without the TOD term. The other parameters are the same as in Fig. 1.

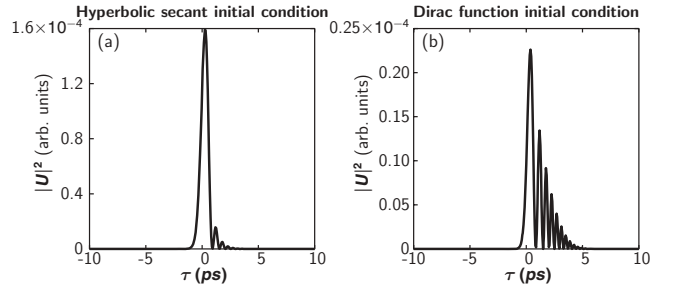


FIG. 4. Output intensity $|U|$ on the slow axis after 1.6 m for $p = 2.1$, corresponding to (a) a hyperbolic secant and (b) Dirac function initial conditions. The other parameters are the same as in Fig. 1.

and imaginary parts of C can be considered independently since the TOD appears in the real part [see Eq. (13c)]. Keeping $Z/L_{\text{TOD}} < 1$ and the mismatch parameter $\delta\omega = 0$, the impact of C can be singled out by varying Ω_c by means of p and considering the propagation with or without the TOD term. In Fig. 3 we show the impact of the real and imaginary parts of C on \bar{u}_{\pm} by increasing the input power and, consequently, Ω_c . As can be seen from Fig. 3, in the absence of the TOD term [right graph; $\text{Re}(C) = 0$], there is no significant change on the profile of the envelope when the imaginary part of C increases. In contrast, in the presence of the TOD [left graph; $\text{Re}(C) \neq 0$] we observe that the envelope spreads out, suggesting that the major contribution of C to the pulse spreading comes from the real part, representing an interplay between the TOD and the MI frequency.

Finally, we emphasize that the results obtained here are not specific to the Gaussian shape of the initial condition. Figure 4 illustrates the pulse dynamics generated from two different initial conditions, namely, a hyperbolic secant [Fig. 4(a)] and a Dirac δ function [Fig. 4(b)]. As can be seen from Fig. 4, in both cases Airy oscillations develop.

V. CONCLUSIONS

We have carried out a theoretical description of the MI inside a birefringent fiber in the presence of the TOD term and a pulse-shape localized perturbation. Although the general case is characterized by an Airy-shaped profile, our result is consistent with previous results for a small value of the ratio between the propagation length and the TOD length. We have shown that the interplay between the TOD term and MI is responsible for a spreading of the pulse. The latter is very sensitive to the size of the initial pulse-like perturbation. In addition, our analytical results show that the pulse spreading can also be controlled by the input pump profile. We have also shown that the frequency chirp coming from the temporal Airy profile is rather nonlinear, and our predictions provide a good description of the phenomenon. Finally, we can assert that a birefringent fiber is a good medium for investigations of coupling between the MI and higher-order dispersion terms as it offers more degrees of freedom than a standard fiber. Finally, since almost all laser beams emit Gaussian pulses, the method can be successfully applied to a wide class of nonlinear multicomponent systems subject to time-reversal symmetry breaking.

- [1] T. B. Feir and J. E. Benjamin, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
- [2] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 135 (1986).
- [3] E. J. Greer, D. M. Patrick, P. G. Wigley, and J. R. Taylor, *Electron. Lett.* **25**, 1246 (1989).
- [4] J. E. Stolen and R. H. Bjorkholm, *IEEE J. Quantum Electron.* **18**, 1062 (1982).
- [5] M. E. Marhic, N. Kagi, T.-K. Chiang, and L. G. Kazovsky, *Opt. Lett.* **21**, 573 (1996).
- [6] J. M. Dudley, G. Genty, and S. Coen, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1135 (2008).
- [7] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, and B. Jalali, *Nature (London)* **450**, 1054 (2007).
- [8] S. Coen and M. Haelterman, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4139 (1997).
- [9] S. Wabnitz, *Phys. Rev. A* **38**, 2018 (1988).
- [10] J. E. Rothenberg, *Phys. Rev. A* **42**, 682 (1990).
- [11] G. Millot, E. Seve, S. Wabnitz, and M. Haelterman, *J. Opt. Soc. Am. B* **15**, 1266 (1998).
- [12] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd ed. (Academic, Boston, 2008).
- [13] A. Mussot, A. Kudlinski, E. Louvergneaux, M. Kolobov, and M. Taki, *Opt. Lett.* **35**, 1194 (2010).
- [14] M. Miyagi and S. Nishida, *Appl. Opt.* **18**, 678 (1979).
- [15] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1970), pp. 446–475.