

n° d'ordre : 41805

UNIVERSITÉ DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
**ÉCOLE DOCTORALE SMRE**  
UFR DE PHYSIQUE  
LABORATOIRE PhLAM

# THÈSE

pour obtenir le titre de

## Docteur en Physique

de l'Université de Lille 1 - Sciences et technologies  
Spécialité : OPTIQUE ET LASERS, PHYSICO-CHIMIE, ATMOSPHERE

Présentée et soutenue par

Benoit SÉVIGNY

# Fibres à cristaux photoniques et génération d'ultraviolets par mélange à quatre ondes

Thèse dirigée par Géraud BOUWMANS et Yves QUIQUEMPOIS

préparée au Laboratoire PhLAM, IRCICA

soutenue le 29 septembre 2015

### Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Thierry CHARTIER	-	Professeur, ENSSAT Lannion
	Réal VALLÉE	-	Professeur, Université Laval (Québec)
<i>Directeur :</i>	Géraud BOUWMANS	-	Professeur, Université Lille 1
<i>Co-directeur :</i>	Yves QUIQUEMPOIS	-	Professeur, Université Lille 1
<i>Président :</i>	Marc DOUAY	-	Directeur du PhLAM, Université Lille 1
<i>Examineurs :</i>	Pierre SANSONETTI	-	Responsable des collaborations et projets extérieurs, R&D Fibre, Prysmian Group
	Thibaut SYLVESTRE	-	Chargé de recherche, Institut Femto-ST, Besançon



## Remerciements

À mes collègues du quotidien tout au long de cette thèse, je voudrais dire merci. Merci à Maxime, entre autres pour les quelques mots de chti ; merci à Léa pour le côté ludique du bureau et son penchant pour Kaamelott ; merci à Na Chen pour m'avoir apporté un peu de culture asiatique ; merci à Julie pour les délires musicaux et les soirées démentes ; merci à Aurélie d'avoir enduré qu'on parle de welsh à 9h du matin sur une base régulière ; merci à Laure que je n'ai pas eu le temps de connaître suffisamment mais avec qui j'ai passé de très bons moments et qui m'a apporté beaucoup de support moral ; merci à Mattéo pour son aptitude à déceler toutes sortes d'allusions dans de simples conversations ; merci à Flavie pour son support moral et son sourire époustoufflant ; merci à Carina pour la couleur que tu m'as apportée ; merci à Pierre pour de très bons moments partagés entre deux TARDIS ; merci à Stéphane pour les nombreuses discussions sur la psychologie et les jeux de rôle ; merci à Rémi pour son amitié et les découvertes musicales ; merci à Antoine pour ses talents de chanteur ; merci à Karim pour les discussions et pour m'avoir aiguillé plus d'une fois sur quel film ne *pas* aller voir.

À mes directeurs, je voudrais dire un merci des plus profonds pour avoir contribué à me pousser plus loin, de par leur rigueur et leur haut standard de qualité en matière de contenu scientifique. Également, je voudrais vous dire merci, Yves et Géraud, pour avoir accepté de me recevoir, un étranger avec un parcours atypique, et de m'avoir fait confiance pour mener à bien cette thèse. Un énorme merci également à Olivier qui a été d'une aide extraordinaire. Un merci bien spécial aux rapporteurs, Thierry CHARTIER et Réal VALLÉE, ainsi qu'aux autres membres du jury, Marc DOUAY, Pierre SANSONETTI et Thibaut SYLVESTRE pour avoir accepté l'invitation et participé à l'examen de cette thèse. Merci aussi à Andy qui, en plus d'avoir fourni une bonne dose d'humour, a été à la source de plusieurs discussions fort intéressantes.

Merci également aux autres membres du laboratoire avec qui j'ai pu travailler et qui ont également fait de mon séjour au laboratoire une expérience des plus agréables : Alexandre, Arnaud, Constance, Karen, Laurent, Rémi et Gilbert. Merci d'avoir été là et de m'avoir appuyé et encouragé à plusieurs occasions.

Merci à Guillaume, Assaad, Jean-Baptiste et Sara, qui sont devenus pour moi des frères et sœur, ainsi qu'à ma famille adoptive française, la famille Le Cocq pour trop de choses pour que je puisse les lister ici. Merci à Jean-Paul pour toutes les discussions. Merci à Damien, entre autres pour m'avoir fait découvrir Marillion, la Bretagne, et m'avoir fait voir ce qui était important à plusieurs moments. Merci aussi à Quentin et sa petite famille pour m'avoir fait découvrir une quantité hallucinante de trucs et pour avoir passé plusieurs soirées philosophie en mode célibataire.

Merci finalement à mes parents, Danielle et François, ainsi qu'à Michel, Marlène, Mélanie, Laurence, Anastasia, Eloïse et Fanny pour leur support moral inconditionnel, dans les bons moments comme dans les moins bons.

Merci à vous tous, du plus profond de mon cœur, car sans vous, cette thèse aurait été impossible.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Fondamentaux des fibres optiques et du mélange à quatre ondes</b>	<b>5</b>
1.1	Principes de base des fibres optiques . . . . .	5
1.1.1	Optique géométrique et réflexion totale interne . . . . .	5
1.1.2	Guidage et optique ondulatoire . . . . .	7
1.1.3	Relation de dispersion . . . . .	9
1.2	Fibres microstructurées . . . . .	11
1.2.1	Fibres en régime de réflexion totale inter modifiée (RTIM) . . . . .	12
1.2.2	Fibres à bandes interdites photoniques . . . . .	13
1.2.3	Guidage en régime hybride . . . . .	16
1.3	Contexte et état de l'art, mélange à quatre ondes . . . . .	19
1.3.1	Première présentation concise du mélange à quatre ondes . . . . .	21
1.3.2	Choix de la pompe . . . . .	22
1.3.3	Accord de phase intramodal . . . . .	23
1.3.4	Accord de phase intermodal . . . . .	27
1.4	Conclusion . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Effets non-linéaires et conversion de longueurs d'onde</b>	<b>35</b>
2.1	Contexte et motivation . . . . .	35
2.2	Théorie du mélange à quatre ondes . . . . .	36
2.2.1	Non-linéarité et équations du mélange à quatre ondes . . . . .	36
2.2.2	Mélange à quatre ondes en approximation scalaire . . . . .	39
2.2.3	Mélange à quatre ondes vectoriel . . . . .	40
2.2.4	Mélange à quatre ondes en pompage dégénéré modalement et spectralement . . . . .	41
2.2.5	Mélange à quatre ondes inter-modal mixte . . . . .	42
2.3	Perturbations stochastiques et espérance de gain . . . . .	44
2.3.1	Processus stochastiques . . . . .	44
2.3.2	Perturbations stochastiques appliquées au MQO . . . . .	45
2.3.3	Exemple de stabilité d'une dispersion simple pour une fluc- tuation d'échelle . . . . .	49
2.3.4	Discussion théorique sur le point de stabilité - double zéro de dispersion . . . . .	52
2.3.5	Impact de la longueur de corrélation . . . . .	55
2.4	Discussion et perspectives . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Approches de designs pour génération d'UV et réalisations</b>	<b>59</b>
3.1	Contexte et motivation . . . . .	59
3.2	Accord de phase inter-bande . . . . .	60
3.3	Exploitation du point de stabilité . . . . .	65
3.3.1	Perturbations d'échelle et stabilité . . . . .	67

3.3.2	Fluctuations des trous . . . . .	78
3.3.3	Fluctuations de la tension de fibrage . . . . .	81
3.3.4	Discussion sur le design et l'aspect expérimental . . . . .	83
3.4	Fibre à dispersion oscillante et réseaux à long pas en régime non-linéaire	87
3.5	Mélange à quatre ondes non-dégénéré modalement . . . . .	89
3.5.1	Simulations . . . . .	89
3.5.2	Caractérisations expérimentales . . . . .	95
3.5.3	Discussion . . . . .	96
3.6	Conclusion et perspective . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Caractérisation de contenu modal par imagerie résolue spectrale-</b>	
	<b>ment et spatialement <math>S^2</math></b>	<b>103</b>
4.1	Contexte et motivation . . . . .	104
4.2	Revue des méthodes actuelles d'analyse de contenu modal . . . . .	105
4.2.1	Méthode des filtres de corrélation . . . . .	106
4.2.2	Famille de méthodes d'analyse par distribution d'intensité . . . . .	109
4.2.3	Imagerie d'inter-corrélation $C^2$ . . . . .	109
4.2.4	$S^2$ standard . . . . .	111
4.3	L'interféromètre multi-onde . . . . .	113
4.3.1	Analyse de l'interféromètre . . . . .	115
4.3.2	Reformulation de l'interféromètre : un isomorphisme . . . . .	118
4.4	Première étape : analyse par composantes principales (ACP) . . . . .	120
4.4.1	Propriétés de la corrélation spectrale . . . . .	122
4.4.2	Obtention de $\mathbf{C}$ à partir des données expérimentales . . . . .	123
4.4.3	Application de l'ACP . . . . .	124
4.4.4	Matrice de corrélation spatiale $\mathbf{C}'$ et composantes principales spectrales . . . . .	126
4.4.5	Résultats expérimentaux et discussion . . . . .	127
4.5	Deuxième étape : analyse par composantes indépendantes (ACI) . . . . .	130
4.5.1	Notion d'indépendance . . . . .	131
4.5.2	Pré-conditionnement des signaux . . . . .	135
4.5.3	Récupération des figures de battement . . . . .	138
4.6	Troisième étape : détermination des profils transverses de champ $F_k(x, y)$ . . . . .	144
4.6.1	Principe général . . . . .	144
4.6.2	Méthode de reconstruction modale des « anneaux » et aspects vectoriels . . . . .	145
4.6.3	Détermination d'enveloppes additionnelles . . . . .	147
4.7	Facultatif : battements manquants et amplitudes . . . . .	147
4.8	Dernière étape : détermination de la distribution modale de puissance	150
4.9	Discussion et perspectives . . . . .	155
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspective</b>	<b>159</b>

---

<b>A Point de stabilité</b>	<b>161</b>
A.1 Condition générale de stabilité . . . . .	161
<b>B Réseaux long pas en régime non-linéaire par chauffage CO<sub>2</sub></b>	<b>165</b>
B.1 Modélisation du chauffage . . . . .	165
B.2 Cas d'une fibre de silice . . . . .	166
B.3 Dynamique de chauffe . . . . .	168
B.4 Résultats expérimentaux préliminaires . . . . .	169



# Introduction

Les fibres microstructurées, introduites dans les années 1990[1, 2], ont modifié radicalement le paysage des fibres optiques en permettant une plus grande flexibilité de design et en offrant de nouveaux mécanismes de guidage comme le guidage par bande interdite photonique. Ces avancements ont entre autres permis d'obtenir des guides très petits à haut contraste d'indice, particulièrement adaptés à la génération d'effets non-linéaires. Cette plateforme technologique est donc toute indiquée pour l'exploitation des effets non-linéaires dans un but de conversion de longueur d'onde. Plusieurs parties du spectre ont été peuplées ainsi par des sources fibrées, mais la bande des ultraviolets<sup>1</sup> reste évasive, la génération de lumière dans cette bande étant exigeante au niveau des designs, peu efficace et souvent limitée aux environs de 350 nm. Plus récemment, de nouveaux développements, faits entre autres au PhLAM à l'IRCICA, sur les designs de fibre, comme les fibres hybrides[3], ont permis d'ouvrir davantage l'espace de paramètres en permettant notamment des combinaisons de différents régimes de guidage; ces nouveaux développements permettent entre autres d'envisager maintenant de nouvelles solutions facilitant la conversion d'énergie d'une pompe dans le visible vers l'ultraviolet. Parallèlement, d'autres équipes ont récemment exploité les effets non-linéaires dans les fibres microstructurées pour générer des UV avec succès dans des modes d'ordre supérieur[4, 5].

Bien qu'il existe des sources fournissant une radiation dans l'UV à plusieurs longueurs d'onde discrètes et fixes (comme les lasers Ar+, les excimers, les lasers à l'état solide, etc.), elles sont toutes des sources en espace libre et ne permettent pas vraiment d'ajustement sur la longueur d'onde si cela était désiré. De même, à part les lasers à l'état solide, les autres sources occupent un espace conséquent et rendent ainsi difficile d'envisager des solutions compactes, voire mobiles, pour des applications qui nécessiteraient ces propriétés. Or, les fibres présentent une solution toute indiquée pour ce genre d'application, en plus d'offrir une robustesse (mécanique et électrique, entre autres) difficile à obtenir avec les autres solutions. De plus, certaines applications de spectroscopie ou d'imagerie non-linéaire, notamment pour des applications d'imagerie in-situ, pourraient grandement bénéficier d'avoir des sources fibrées, en particulier si elles sont à grande qualité de faisceau, dans le but d'exciter plus efficacement certains tissus ou molécules et ainsi nécessiter encore moins de puissance pour un meilleur contraste par exemple. Il en va des mêmes arguments pour les applications à caractère industriel.

En se penchant sur la fibre comme source d'UV, deux grandes familles d'applications sont à considérer, soit les sources à spectre très large (pour des applications de spectroscopie par exemple), ou les sources cohérentes, à spectre fins. Pour arriver à produire ces deux familles à l'aide de fibres optiques, l'exploitation des effets

---

1. Nous entendons ici par ultraviolets, tout rayonnement lumineux sous la barre des 400 nm en longueur d'onde mais supérieure à 100 nm

non-linéaire est très prometteuse car elle permet entre autres de générer des supercontinuum allant même du proche infrarouge jusqu'à environ 350 nm[6, 7, 8, 9, 10] (et même en-dessous[11]) via différents mécanismes de pompage comme le mélange à quatre ondes en cascade[12], le pompage dans l'UV[13] ou la modification longitudinale des propriétés non-linéaires. La génération de longueurs d'ondes discrètes dans la bande UV cependant semble être plus évasive, la recherche étant plutôt récente et présentant diverses approches comme la génération d'ondes dispersives par pompage femtoseconde dans des fibres à cœur creux contenant des gaz sous pression (produisant des longueurs d'onde dans les environs de 150 nm[14]) ou l'exploitation d'accords de phase dans des modes d'ordre élevés d'une fibre air-silice à grand trous[4, 5] par pompage à 532 nm (produisant un signal allant jusqu'à 347 nm). Bien que d'autres études aient été réalisées, utilisant du mélange à quatre ondes dans différentes configurations de pompage, dégénéré en longueur d'onde des pompes ou non[15, 16, 17, 18, 19], dans le visible ou l'infra-rouge (ou les deux[20, 21]), aucun de ces concepts n'a su produire de lumière sous la barre des 400 nm[5]. De plus, des calculs d'accord de phase intramodal dans le mode fondamental (meilleure qualité de faisceau) illustrent que des cœurs de taille inférieure au micron en diamètre seraient nécessaire, ce qui pose problème car la fluence élevée ainsi obtenue risquerait d'endommager le matériau[22]. Le triplage de fréquences de sources dans le proche infra-rouge serait également une possibilité, mais les réalisations de ce type d'effet ont généralement de très faibles efficacités ou sont très délicats à réaliser, les rendant plus ou moins intéressants[23, 24, 25].

Or, l'utilisation d'une fibre plutôt conventionnelle et de sources simples (comme un laser à 532 nm par exemple) présente un intérêt certain pour plusieurs applications, ce que ne peuvent vraiment satisfaire les fibres à cœur creux sous pression étant donné l'infrastructure et les sources nécessaires pour produire l'effet désiré. De la même manière, une source dans le mode fondamental serait souhaitable pour relâcher les contraintes sur les optiques et optimiser au maximum l'efficacité de focalisation (i.e. la résolution).

Différentes stratégies de mélange à quatre ondes dans les fibres ont été explorées au laboratoire pour générer des UV en pompant à 532 nm, basées surtout sur l'ingénierie de la dispersion, entre autres dans des fibres hybrides présentant souvent des inclusions inférieures au micron[3]. Certaines caractérisations ont été effectuées, mais le processus de génération d'UV par accord de phase n'a pas donné de bon résultat et nous avons alors voulu développer un modèle de calcul de gain prenant en compte les fluctuations stochastiques et qui ont montré une dégradation du gain en présence de fluctuations, mais également la présence de certains points insensibles aux fluctuations, suggérant qu'un gain important pourrait être obtenu très loin de la pompe[26]. La conception d'une fibre air-silice standard nous a également permis de constater la présence d'un accord de phase intéressant générant des UV dans le mode fondamental en distribuant la pompe sur deux modes[15, 13]. Ces sujets sont abordés aux chapitres 2 et 3. En parallèle, une méthode utilisant des quasi-accords de phases dans une fibre à dispersion oscillante avec un pas très court (de l'ordre du millimètre) et en particulier une méthode de fabrication des dites modulations

est également proposée.

Finalement, l'utilisation de fibres multimode nécessite de développer des méthodes de caractérisation de contenu modal permettant de connaître, entre autres, la distribution de puissance entre les modes. Plusieurs méthodes ont déjà été publiées dans la littérature [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33] (explicitées au chapitre 4) qui cependant nécessitent de connaître à l'avance la structure modale de la fibre ou présentent un certain côté arbitraire dans le traitement des données. C'est dans cette optique que nous avons développé une nouvelle méthode d'analyse puissante, basée sur l'analyse statistique multivariée, pour extraire l'information sur le contenu modal dans les fibres multimodes.



# Fondamentaux des fibres optiques et du mélange à quatre ondes

---

## Sommaire

---

<b>1.1 Principes de base des fibres optiques</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1 Optique géométrique et réflexion totale interne . . . . .	5
1.1.2 Guidage et optique ondulatoire . . . . .	7
1.1.3 Relation de dispersion . . . . .	9
<b>1.2 Fibres microstructurées</b> . . . . .	<b>11</b>
1.2.1 Fibres en régime de réflexion totale interne modifiée (RTIM) . .	12
1.2.2 Fibres à bandes interdites photoniques . . . . .	13
1.2.3 Guidage en régime hybride . . . . .	16
<b>1.3 Contexte et état de l'art, mélange à quatre ondes</b> . . . . .	<b>19</b>
1.3.1 Première présentation concise du mélange à quatre ondes . .	21
1.3.2 Choix de la pompe . . . . .	22
1.3.3 Accord de phase intramodal . . . . .	23
1.3.4 Accord de phase intermodal . . . . .	27
<b>1.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>34</b>

---

## 1.1 Principes de base des fibres optiques

Dans le but d'aborder les divers sujets de cette thèse, il importe tout d'abord de définir les différents concepts physiques en optique linéaire et non-linéaire qui seront réutilisés tout au long de ce manuscrit. Dans un premier temps, nous allons aborder les notions de modes et de dispersion. Dans un second temps, nous présenterons une brève exploration des différents types de fibres ainsi que leurs mécanismes de guidage propre. Dans un troisième temps seront introduites les notions d'optique non-linéaire qui jetteront les bases du travail présenté sur la conversion de longueur d'onde.

### 1.1.1 Optique géométrique et réflexion totale interne

Pour introduire le principe de l'optique guidée ainsi que quelques notions fondamentales de façon plus intuitive, un exemple simple de guide d'onde à saut d'indice

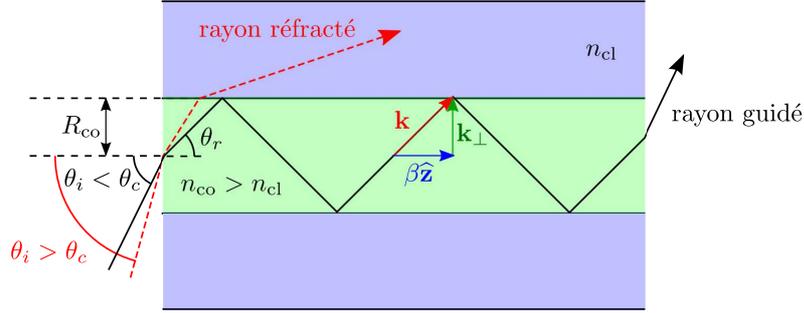


FIGURE 1.1 – Illustration d’une fibre dans l’approximation de l’optique géométrique.

en optique géométrique est tout indiqué. Un exemple de ce genre de guide, s’appuyant sur la *réflexion totale interne* (RTI), est illustré à la figure 1.1.

A partir de cet exemple très simple, on peut déduire plusieurs caractéristiques importantes ayant trait aux conditions de guidage. On peut visualiser la fibre comme une superposition de couches diélectriques, en l’occurrence un cœur d’indice  $n_{co}$  et une gaine d’indice  $n_{cl} < n_{co}$ . Pour un rayon se propageant dans le cœur, la condition de réflexion totale interne s’écrit (dans l’approximation des petits angles)  $n_{co}\theta_r \approx n_{cl}$ . En rapportant cette condition à l’angle d’incidence  $\theta_i$  du faisceau dans la fibre par la loi de la réfraction, on peut définir un angle critique d’injection,  $\theta_c$ , lié à l’ouverture numérique (ON) de la fibre et donné par :

$$ON = \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \approx \theta_c \quad (1.1)$$

On constate alors que tout faisceau arrivant avec un angle supérieur à  $\theta_c$  sera réfracté dans la gaine (faisceau en rouge sur la figure 1.1) ; autrement, le faisceau est guidé par réflexion totale interne (faisceau noir, figure 1.1). Un faisceau ainsi guidé peut être caractérisé par la projection de son vecteur quantité de mouvement selon l’axe  $z$  de la fibre, soit

$$\beta = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (1.2)$$

En considérant que l’angle d’incidence d’un faisceau guidé est compris entre zéro et  $\theta_c$ , on constate que  $\beta$  peut prendre n’importe quelle valeur dans l’intervalle  $kn_{cl} < \beta < kn_{co}$ , avec  $k = 2\pi/\lambda$  la quantité de mouvement de la lumière dans le vide et  $\lambda$  sa longueur d’onde. Dans l’approximation de l’optique géométrique, on considère essentiellement la longueur d’onde comme étant infiniment plus courte que toutes les dimensions caractéristiques du système (i.e.,  $\lambda \ll R_{co}$ ). Cependant, si la dimension du cœur devient comparable à la longueur d’onde, l’optique géométrique est insuffisante pour décrire correctement le comportement du système et on doit voir la lumière comme une onde ; une conséquence de ceci est que pour que celle-ci soit guidée, il doit y avoir interférence constructive dans la direction transverse de sorte à ce que la solution soit invariante dans la direction de propagation ; ceci implique ainsi une discrétisation des  $\mathbf{k}_\perp$  et, conséquemment, des  $\beta$ . Ce sont justement ces conditions qui introduisent la notion de *modes*.

Bien que cette dernière nous ait déjà fourni beaucoup d'information intuitive sur le guidage par RTI, nous laisserons maintenant de côté l'optique géométrique pour nous concentrer sur les équations de propagation de la lumière en optique ondulatoire.

### 1.1.2 Guidage et optique ondulatoire

Si l'on considère un milieu diélectrique parfait, on peut dériver, à partir des équations de Maxwell, l'équation différentielle donnant la propagation des champs électriques  $\mathbf{E}$  et magnétiques  $\mathbf{H}$ [34]. Mais pour ce faire de façon adéquate, il faut tout d'abord passer dans l'espace de Fourier sur la variable du temps. En effet, la réponse linéaire de la polarisation du matériau  $\mathbf{P}_L$  intervenant dans le vecteur déplacement électrique  $\mathbf{D}$  s'exprime temporellement comme une convolution :

$$\mathbf{P}_L = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

qui, dans l'espace de Fourier, se traduit par un simple produit  $\varepsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ . Le vecteur déplacement électrique s'écrit ainsi  $\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \tilde{\chi}(\omega)] \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  où le facteur  $[1 + \tilde{\chi}(\omega)]$  représente la permittivité relative du matériau  $\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \tilde{n}^2(\omega)$  avec  $\tilde{n}(\omega)$  l'indice de réfraction. On note que la réponse temporelle de la polarisation du matériau engendre une dépendance en fréquence de l'indice de réfraction, c'est ce que l'on identifie à la *dispersion chromatique du matériau*. Pour faciliter la lecture, nous supposons des solutions monochromatiques de la forme  $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}(x, y, z) \exp(-i\omega t)$  (et de façon analogue,  $\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{h}(x, y, z) \exp(-i\omega t)$ ) et nous omettons le tilde de la transformée de Fourier sur l'indice de réfraction, dénotant simplement qu'il est fonction de la pulsation optique  $\omega$  et de l'espace.

Dans ces conditions, on peut calculer, à partir des équations de Maxwell, la quantité  $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E})$ , ce qui nous donne l'équation d'onde générale pour le champ électrique<sup>1</sup> :

$$\left[ \nabla^2 + k^2 n^2(\omega) \right] \mathbf{e}(x, y, z) = -\nabla \left[ \mathbf{e} \bullet \nabla \ln(n^2) \right] \quad (1.4)$$

et, par un développement analogue, on obtient pour le champ magnétique :

$$\left[ \nabla^2 + k^2 n^2(\omega) \right] \mathbf{h}(x, y, z) = -(\nabla \wedge \mathbf{h}) \wedge \nabla \ln(n^2) \quad (1.5)$$

où  $\nabla$  dénote l'opérateur gradient et  $\nabla^2$  dénote l'opérateur *laplacien vectoriel*. Pour simplifier davantage le problème, nous allons tirer profit de la géométrie cylindrique de la fibre pour chercher des solutions invariantes en  $z$  si ce n'est d'un terme de phase dû à la propagation, en posant  $\mathbf{e}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y) \exp(i\beta z)$  (*idem* pour le champ  $\mathbf{h}$ ); c'est ce type de solution que nous appelons les *modes de la fibre*. En utilisant la définition du laplacien en coordonnées cylindrique, on trouve facilement

---

1. On considère ici un matériau parfaitement isolant, sans charge de volume, conductivité ou absorption. Ceci a pour effet de rendre la densité de courant  $\mathbf{J}$  apparaissant dans les équations de Maxwell identiquement nulle.

la forme usuelle des équations donnant les enveloppes de champ électromagnétique dans un guide d'onde en coordonnées cylindriques :

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 + (k^2 n^2 - \beta^2) \right] \mathbf{F}(x, y) = -(\nabla_{\perp} + i\beta \hat{\mathbf{z}}) \left[ \mathbf{F} \bullet \nabla_{\perp} \ln(n^2) \right] \quad (1.6)$$

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 + (k^2 n^2 - \beta^2) \right] \mathbf{G}(x, y) = -[(\nabla_{\perp} + i\beta \hat{\mathbf{z}}) \wedge \mathbf{G}] \wedge \nabla_{\perp} \ln(n^2) \quad (1.7)$$

où le symbole «  $\perp$  » l'attribution au plan transverse  $(x, y)$ <sup>2</sup>.

Ces équations sont très générales et peuvent s'appliquer à tous les cas de figure. Le facteur  $\nabla \ln(n^2)$  est lié aux conditions de continuité des champs et entraîne un couplage entre les composantes des champs  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{h}$  (ainsi que l'apparition de composantes des champs non-nulles dans la direction de propagation) et n'a d'impact que lorsque les différences d'indice de réfraction sont importantes (par exemple, pour un barreau de silice dans l'air). Dans les cas où la différence d'indice est relativement faible, ce terme peut être négligé et les deux champs sont alors décrits par une unique équation différentielle, l'équation de Helmholtz :

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 + k^2 n^2 - \beta^2 \right] \mathbf{F}(x, y) = 0 \quad (1.8)$$

Cette formulation a plusieurs conséquences :

- Le champ a une polarisation linéaire et peut s'exprimer comme le produit d'un profil transverse (scalaire) d'amplitude de champ et d'un vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{p}}$  indiquant la direction de la polarisation dans le plan  $(x, y)$  :  $\mathbf{F}(x, y) = F(x, y)\hat{\mathbf{p}}$  (les six premiers modes scalaires sont illustrés pour un guide avec  $\Delta n = 4.5 \times 10^{-3}$  à la figure 1.2) ;
- Les champs électrique et magnétique sont proportionnels et forment un trièdre droit avec la direction de propagation comme pour une onde plane ;
- Le champ et ses dérivées doivent être continus *en particulier aux interfaces*.

La dernière condition engendrera une discrétisation des solutions et on aura donc un nombre de modes guidés discret avec des constantes de propagation dans l'intervalle  $kn_{\text{cl}} < \beta < kn_{\text{co}}$  dans le cas d'un guidage conventionnel par RTI. On pourra donc associer au mode un *indice effectif*  $n_{\text{eff}} = \beta/k$  qui, incidemment, se trouvera entre l'indice de cœur et l'indice de gaine pour un mode guidé. A titre d'exemple, la figure 1.3 illustre les solutions vectorielles de quelques modes guidés pour une fibre classique à fort contraste d'indice.

Pour une fibre à saut d'indice, on peut également définir une *fréquence normalisée* qui la caractérise et s'écrit :

$$V = kR_{\text{co}}\text{ON} = \frac{2\pi R_{\text{co}}}{\lambda} \sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2} \quad (1.9)$$

Cette quantité permet entre autre de déterminer le nombre de modes guidés ; en effet, plus  $V$  est élevé, plus grand sera le nombre de modes guidés. On note ainsi que, à longueur d'onde fixe, l'augmentation du contraste d'indice entre le cœur et la gaine et/ou un rayon de cœur plus gros contribueront à accroître le nombre de

---

2. Par exemple, le laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit alternativement  $\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

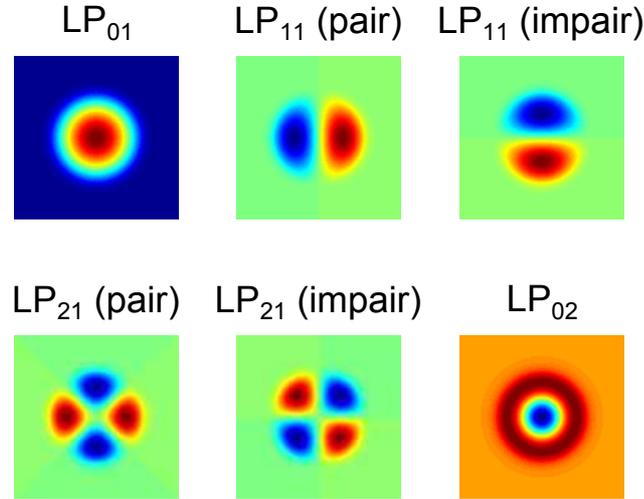


FIGURE 1.2 – Six premiers modes scalaires d’une fibre multimode ayant  $\Delta n = 4.5 \times 10^{-3}$ . Sur les images, la couleur de fond indique une champ nul, la couleur bleu indiquant le minimum et rouge le maximum. L’origine des angles est prise sur l’axe horizontal, d’où l’on tire la nomenclature quant à la parité du mode.

modes. Aussi, en gardant constants le saut d’indice et le rayon, une réduction de la longueur d’onde fera apparaître de nouveaux modes.

Bien qu’il ne soit pas toujours possible de définir un analogue à  $V$  pour tous types de designs de fibre, la tendance d’augmentation du nombre de mode pour :

- de plus grands contrastes d’indice ;
- de plus grandes dimensions (comme  $R_{co}$ ) ;
- de plus courtes longueurs d’onde,

reste vérifiée. Nous présenterons une discussion plus détaillée concernant les différents types de guidage dans les fibres microstructurées à la section §1.2.

### 1.1.3 Relation de dispersion

À  $\omega$  fixe, ce sont les conditions de continuité des champs aux interfaces qui vont ultimement déterminer la valeur de  $\beta$  ; ainsi,  $\beta$  est dépendant de la géométrie du guide, ce qui engendrera une contribution additionnelle à la dispersion, soit *la dispersion du guide d’onde*. La relation de dispersion  $\beta(\omega)$  compte alors une contribution de la dispersion chromatique du matériau et du guide d’onde. En conséquence, on peut imaginer pouvoir modifier les propriétés de dispersion du mode en modifiant le guide d’onde. Un moyen pratique d’écrire la dispersion consiste à utiliser un développement de Taylor autour d’une pulsation  $\omega_0$  :

$$\beta(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \beta_m \cdot (\omega - \omega_0)^m \quad (1.10)$$

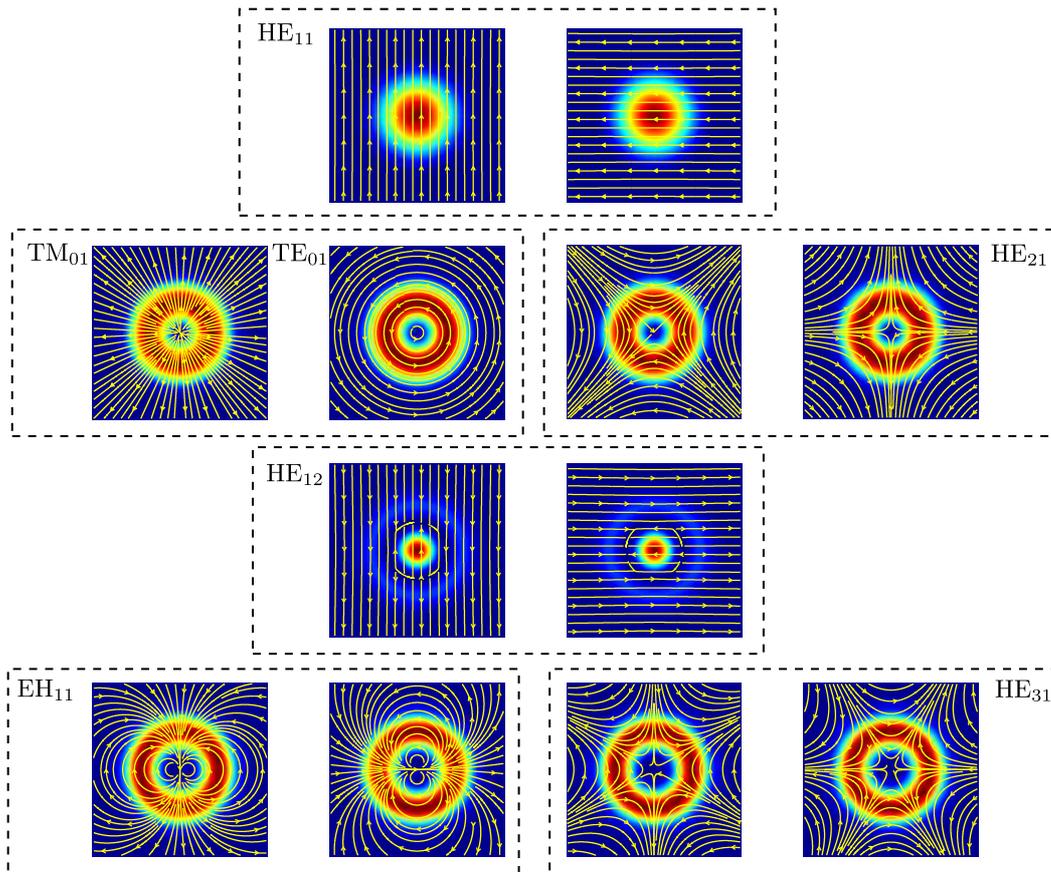


FIGURE 1.3 – Exemples de modes (vectoriels) guidés dans une fibre à saut d'indice ( $\Delta n = 16 \times 10^{-3}$ ), classés par familles de modes. Le fond coloré représente la distribution d'intensité lumineuse et les traits jaunes illustrent les lignes de champ électrique.

avec les coefficients donnés par :

$$\beta_m = \left. \frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (1.11)$$

En pratique, le développement est tronqué à un ordre en particulier, selon les besoins, mais évidemment, plus l'écart en fréquence  $\omega - \omega_0$  est important, plus on doit conserver de termes. Dans les cas que nous aborderons plus loin, il est souvent nécessaire d'aller jusqu'à  $m = 6$ , voire plus, pour avoir une représentation de la dispersion réaliste. Pour étudier les effets non-linéaires comme le mélange à quatre ondes (MQO), on peut aller à l'ordre 4 pour déjà comprendre une bonne partie de la dynamique des accords de phase, sujet sur lequel nous reviendrons à la section §1.3.

Les deux premières dérivées de la série ont un sens physique précis. En particulier,  $\beta_1$  est associé à la vitesse de groupe :

$$\beta_1(\omega) = \frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left[ n_{\text{eff}} + \omega \frac{\partial n_{\text{eff}}}{\partial \omega} \right] = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{v_g} \quad (1.12)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $n_g$  est l'indice de groupe et  $v_g$  représente la vitesse de groupe. En calculant la dérivée seconde  $\beta_2$  on obtient alors la *dispersion chromatique des vitesses de groupe* responsable entre autre de l'élargissement des impulsions dans les transmissions longues distances. Le *signe* de  $\beta_2$  a aussi une grande importance en optique non-linéaire[35] ; en effet, lorsque  $\beta_2 < 0$ , on est en régime *anormal* et la dispersion peut compenser l'auto-modulation de phase et donner naissance à des solutions invariantes temporellement, les *solitons*. Autrement ( $\beta_2 > 0$ ) la dispersion est dite *normale*. Dans ce régime, on peut générer des longueurs d'onde très éloignées par MQO, ce qui est d'intérêt pour nous et nous y reviendrons à la §1.3.

## 1.2 Fibres microstructurées

Dans les sections suivantes, nous explorerons brièvement différents types de design de fibre microstructurées qui nous seront utiles pour la suite. Les propriétés de ces structures périodiques sont tirées à partir de celle d'un réseau bidimensionnel périodique infini idéal constitué de zones d'indice élevé  $n_h$  et d'indice bas  $n_b$  (illustré à la figure 1.4) dans lequel on vient placer un défaut. Les différents cas de figure donneront lieu à deux mécanismes de guidage distincts que nous détaillerons dans les sections suivantes. Notons de suite que l'indice effectif le plus élevé dans la structure périodique sans défaut représente le mode partout en phase dans cette dernière et remplissant tout l'espace avec la distribution de champ la plus uniforme possible (se rapprochant ainsi le plus de l'onde plane), d'où son appellation de « *fundamental space-filling mode* » dont l'indice effectif est dénoté  $n_{\text{FSM}}$ . Notons que  $n_{\text{FSM}}$  est toujours strictement inférieur à l'indice élevé  $n_h$  de la structure infinie périodique associée

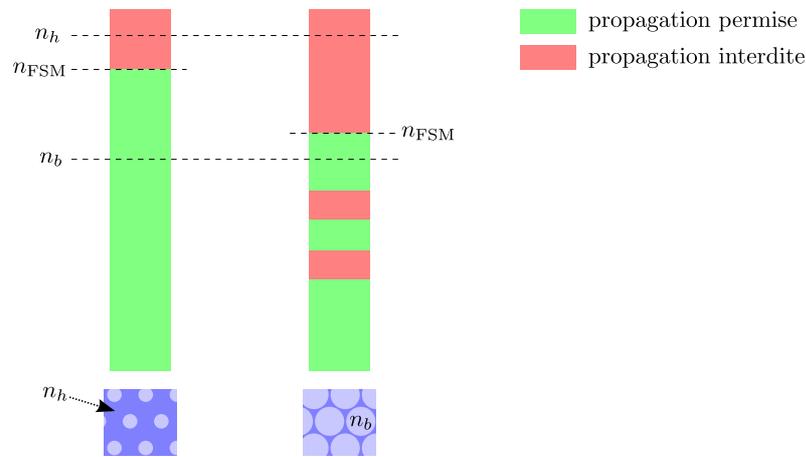


FIGURE 1.4 – Illustration des zones de transmission par propagation permises et interdites dans des structures périodiques infinies servant à représenter la gaine dans les fibres microstructurées. On note que, pour les milieux ayant de petites inclusions (i.e. petit  $d/\Lambda$ ), la propagation est permise dans le milieu pour tous les indices sous  $n_{\text{FSM}}$ . Or, dans le cas de grosses inclusions, on remarque l'ouverture de bandes interdites photoniques sous la barre des  $n_{\text{FSM}}$ .

### 1.2.1 Fibres en régime de réflexion totale inter modifiée (RTIM)

La première classe de fibres microstructurées que nous aborderons ici présente un indice de cœur *supérieur* à l'indice *moyen* de la gaine. Un exemple de ce type de fibre est illustré à la figure 1.5. Ce type de fibre est caractérisé par un indice élevé  $n_h$  du matériau de base (ici, la silice), un indice bas  $n_b$  des inclusions dans la structure (ici, de l'air), un diamètre des inclusions  $d$  ainsi qu'un pas de structure  $\Lambda$ . La maille utilisée ici est une maille hexagonale très simple à fabriquer par empilement de capillaires et de barreaux de même diamètre (méthode « *stack and draw* »[2, 36]).

La figure 1.6 montre la densité d'état[37] des modes pouvant se propager dans la structure périodique considérée infinie. La figure 1.7 représente schématiquement les zones où la lumière est propagative dans cette structure. Si on utilise cette structure comme gaine pour un défaut de silice (dans lequel la lumière peut avoir un indice effectif allant jusqu'à la valeur de l'indice de la silice), la lumière sera guidée si celle-ci a un indice effectif compris entre  $n_{\text{FSM}}$  et l'indice de la silice (zone en bleu sur la figure pour laquelle la propagation est permise dans le cœur mais interdite dans la gaine).

Si on imagine maintenant un mode dans un guide à saut d'indice standard dont l'indice effectif passerait sous l'indice de gaine ; dans ce cas, le mode deviendrait propagatif dans la gaine et ne serait alors plus guidé. Il en serait de même avec de la lumière se propageant dans un défaut d'indice  $n_h$ , si son indice effectif passe sous  $n_{\text{FSM}}$ , elle pourra alors se propager dans la gaine, rendant  $n_{\text{FSM}}$  alors tout à fait analogue à un indice de gaine dans une structure à saut d'indice.

Ainsi, on peut faire une analogie entre ce type de structure et un guide conven-

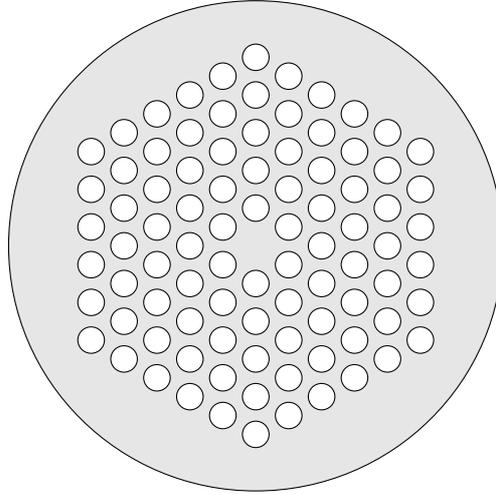


FIGURE 1.5 – Fibre microstructurée à trous d’air et cœur solide. Le fond gris représente de la silice et les cercles blancs représentent des trous d’air. L’indice *moyen* de la gaine est donc inférieur à celui du cœur et cette fibre opérera donc principalement en mode RTIM. La fibre présente ici un pas de  $\Lambda = 1 \mu\text{m}$  et un diamètre de trou normalisé  $d/\Lambda = 0.7$ .

tionnel ; en effet, en considérant un indice de gaine  $n_{\text{cl}} = n_{\text{FSM}}$ , un indice de cœur  $n_{\text{co}}$  et un rayon équivalent de cœur  $R_{\text{co}} = \Lambda/\sqrt{3}$ , on peut alors représenter le défaut (le cœur) comme un guide cylindrique à saut d’indice. Or il est important de noter ici que  $n_{\text{FSM}}$  change avec la longueur d’onde ; ainsi, une sélection adéquate du diamètre des trous ( $d/\Lambda \approx 0.4$ ) permet d’obtenir un guide d’onde opérant dans le mode fondamental sur toute la plage de transmission de la silice.

Ce type de fibre est notamment utilisé pour la génération d’effets non-linéaires, en particulier les supercontinuum qui peuvent alors opérer dans le mode fondamental sur de très grandes plages spectrales. Par ailleurs, ce type de fibre à cœur de haut indice avec de grands rapports  $d/\Lambda$  ( $n_{\text{FSM}} \approx n_{\text{air}}$ ) permet d’atteindre un cas de guidage s’apparentant à un barreau de silice dans l’air permettant d’effectuer des accords de phase avec de très grands espacements spectraux grâce au fort contraste d’indice.

Également, dans le cas de structures à grands trous, on constate l’apparition de *bandes interdites photoniques* (ou BIP) visibles comme des zones en noir sur la figure 1.7, mais celles-ci ne guident efficacement la lumière que lorsque l’indice de cœur descend sous celui des trous d’air (comme pour les fibres à cœur creux[1, 38]). Ce mécanisme de guidage est tout à fait analogue à celui des fibres BIP toutes solides que nous aborderons à la section suivante.

### 1.2.2 Fibres à bandes interdites photoniques

Les fibres BIP ont un principe de fonctionnement différent de celui des fibres opérant en mode RTIM. En effet, l’indice du cœur étant dans ce cas inférieur à

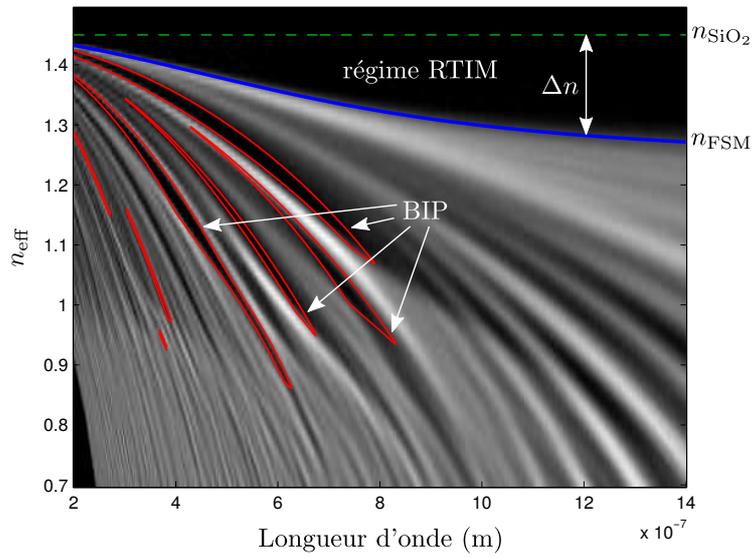


FIGURE 1.6 – Densité d'état des modes de structure pour la fibre présentée à la figure 1.5. On considère un indice haut  $n_h = n_{\text{SiO}_2} = 1.45$  (en omettant la dispersion du matériau) et un indice bas  $n_b = n_{\text{Air}} = 1$ . Les zones grises indiquent la densité d'état des modes de structure et les zones en noir indiquant que la propagation est interdite dans la structure. Les bandes interdites sont indiquées en rouge mais présentent généralement beaucoup de pertes dans ce genre de structure. La zone d'intérêt ici pour le guidage dans le cœur de silice est située entre  $n_{\text{FSM}}$  et l'indice de la silice où les modes peuvent être guidés par réflexion totale interne modifiée (RTIM). On note aussi que  $n_{\text{FSM}}$  varie avec la longueur d'onde.

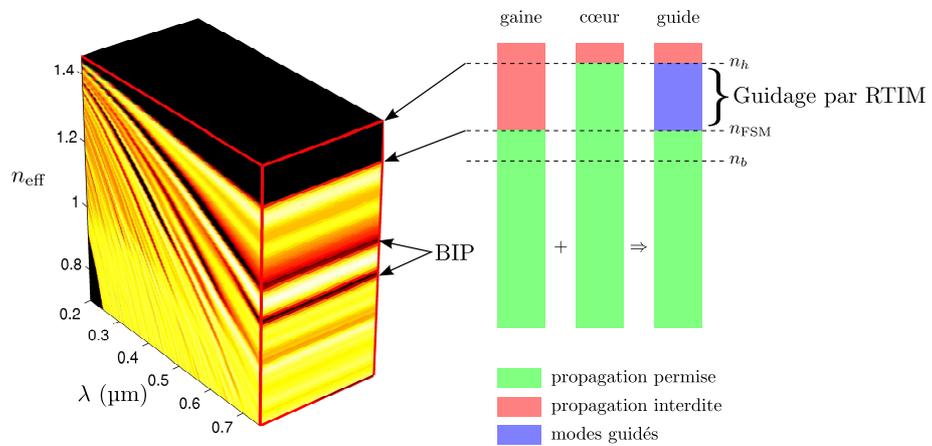


FIGURE 1.7 – Illustration d’une coupe de la densité d’état des modes de structure à une longueur d’onde de 750 nm. Les zones colorées représentent la présence de modes de structure et les zones en noir dénotent les régions où la propagation à travers la structure est interdite. En introduisant un défaut, un mode injecté dans le défaut avec un indice effectif dans la zone noir sera guidé, ne pouvant s’échapper. La zone en noir au-dessus des modes de structure opère comme un guide d’onde standard dont le saut d’indice irait de  $n_{FSM}$  à l’indice de la silice. On note aussi la présence de *bandes interdites*, mais celles-ci ne guident pas efficacement dans ce type de fibre, le mode RTIM étant dominant pour la transmission.

$n_{\text{FSM}}$ , le mécanisme de guidage ne peut être expliqué par la RTIM. Dans ce cas de figure, la structure périodique dans la gaine agit en quelque sorte comme un réflecteur sélectif en longueur d'onde, un peu à la manière d'un Pérot-Fabry ou un réseau de Bragg. Il existe donc des longueurs d'onde pour lesquelles les multiples réflexions dans le réseau sont « en phase », confinant la lumière dans le cœur, et d'autres pour lesquelles il y a transmission à travers la structure.

Fixons d'abord les idées en prenant une véritable structure présentée à la figure 1.8. Le fond gris dans cette figure représente de la silice, les zones en bleu représentent des plots de silice dopée germanium avec un profil à gradient d'indice dont la différence d'indice au maximum est de  $32 \times 10^{-3}$ . La structure hexagonale formée par les plots a un pas de  $1 \mu\text{m}$  et les plots ont un diamètre normalisé de  $d/\Lambda = 0.7$ .

Pour connaître la position des bandes de transmission en longueur d'onde, on calcule la densité d'état de la structure périodique infinie représentant la gaine et on constate l'apparition de zones (sous  $n_{\text{FSM}}$ ) où il n'y a aucun mode propagatif : ce sont les BIP (voir figure 1.9 de la densité d'état des modes propagatifs). En introduisant un défaut d'indice inférieur à  $n_{\text{FSM}}$  (un défaut tout en silice par exemple), si on y injecte de la lumière dont l'indice effectif se situe dans la BIP, celle-ci ne pourra se propager dans la gaine et demeurera confinée dans le défaut. Si on effectue une coupe de la densité d'état pour cette fibre à une longueur d'onde de 400 nm, on constate l'apparition d'une bande où n'existe aucun mode propagatif (en noir sur la figure 1.10.) Il y aura donc guidage dans le défaut, à cette longueur d'onde, avec un indice effectif compris dans cette BIP. Cependant, la structure étant de taille finie, les modes de BIP auront généralement des pertes par confinement devenant de plus en plus importantes au fur et à mesure que l'indice effectif se rapproche des bords de la BIP<sup>3</sup>. On peut également noter la présence d'un zéro de dispersion pour les modes propres à chaque BIP, ce qui présente un aspect intéressant au niveau de l'ingénierie de la dispersion pour les effets non-linéaires par exemple. Finalement, on note que, à courte longueur d'onde, les modes guidés dans la BIP s'appuient asymptotiquement sur les courbes de dispersion des modes des plots de haut indice.

Ce type de fibre à faible contraste d'indice a été démontré pour la première fois par l'Université de Bath[39] et la première réalisation avec faible pertes a été produite au PhLAM à l'IRCICA[40]. Une des applications de cette famille de fibre est la fabrication de fibres à grande aires effectives opérant en régime monomode pour les lasers à fibre[41].

### 1.2.3 Guidage en régime hybride

La fibre hybride que nous allons introduire ici exploite à la fois le guidage en régime RTIM ainsi que l'effet de bande interdite photonique. La structure de cette

---

3. On note que les fibres guidant par RTIM présentent aussi des pertes par confinement dépendant du nombre de couches, l'indice du milieu à l'extérieur de la structure étant souvent le même que celui du cœur ; or, celles-ci sont souvent relativement faible en comparaison avec la transmission par BIP.

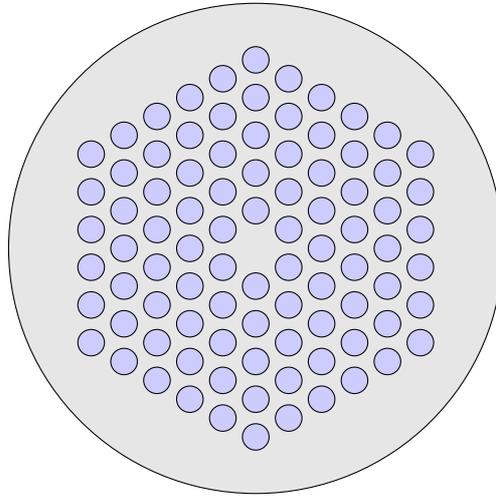


FIGURE 1.8 – Fibre microstructurée toute solide guidant par BIP. La zone grise représente la silice et les zones bleues représentent des plots d'indice élevé (dopés Ge) à profil parabolique ayant une différence d'indice maximale au centre de  $32 \times 10^{-3}$ . La structure présente un défaut en son centre d'indice *inférieure* à l'indice moyen de la gaine ; c'est pourquoi le mécanisme de guidage s'effectue à travers les BIP. Le pas de structure ici est  $\Lambda = 1 \mu\text{m}$  et le diamètre normalisé des inclusions est  $d\Lambda = 0.7$ .

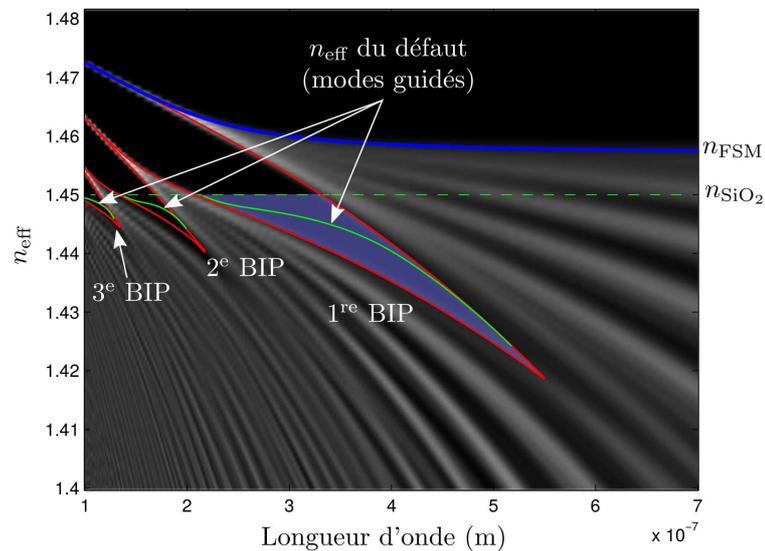


FIGURE 1.9 – Densité d'état des modes de la structure périodique infinie associée à la gaine de la fibre toute solide à bande interdite photonique décrite à la figure 1.8. Les modes de propagation dans le défaut sont illustrés par les courbes vertes pleines. Le tireté vert indique la dispersion du matériau (considérée constante pour fins d'illustration). La zone du cœur en bleutée indique la première BIP.

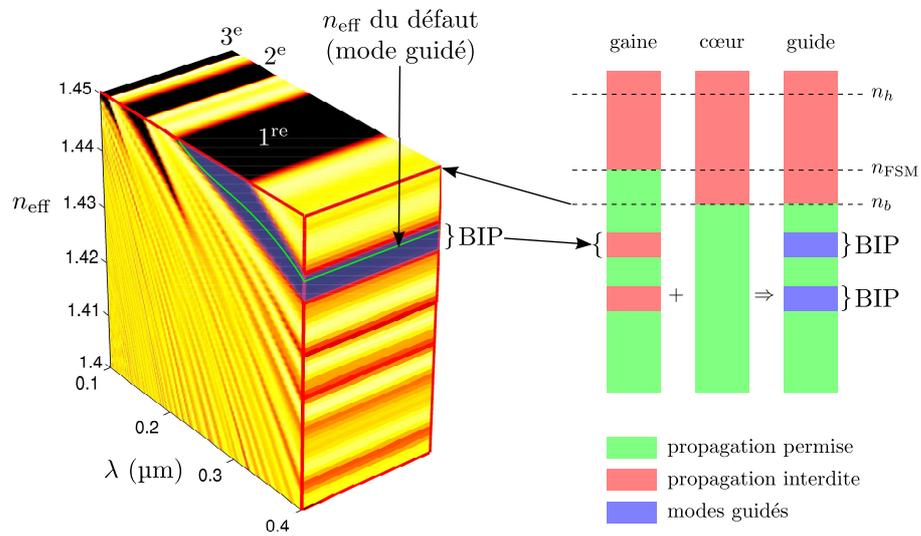


FIGURE 1.10 – Illustration d’une coupe de la densité d’état à une longueur d’onde de 400 nm. La zone en bleu identifie la première BIP et on constate que celle-ci représente effectivement une bande d’indice effectif permis pour le guidage ; pour des indices effectifs en-dehors de la bande, les modes sont propagatifs dans la structure périodique infinie.

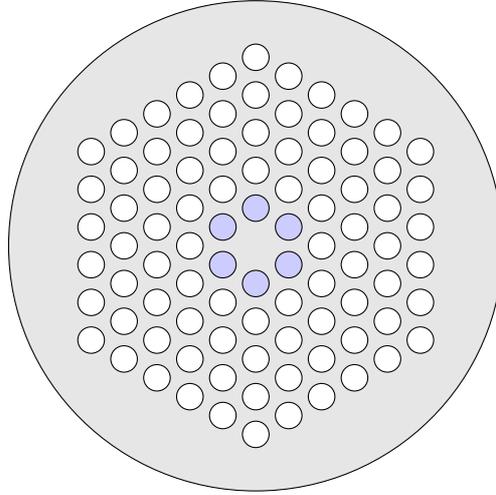


FIGURE 1.11 – Fibre hybride telle que définie dans l'article OULD-AGHA et al.[3] avec un rapport  $d_{\text{Air}}/\Lambda = 0.7$  pour les trous (en blanc) et un rapport  $d_{\text{Ge}}/\Lambda = 0.7$  pour les plots dopés germanium (en bleu). Les plots dopés ont des profils paraboliques en gradient d'indice avec un saut d'indice  $n_{\text{max}} - n_{\text{SiO}_2} = 0.032$ .

fibre est illustrée à la figure 1.11. Cette structure peut être vue comme une fibre à trous d'air ayant un défaut de 7 cellules dans laquelle on insère la première couronne d'une fibre BIP ayant un défaut unique en son centre (cœur de silice). À courte longueur d'onde, la lumière injectée verra la structure de plots d'indice élevé et suivra asymptotiquement le comportement du mode de BIP associé (voir figure 1.12). En progressant vers les plus hautes longueurs d'onde, la courbe d'indice effectif effectuera une transition vers la dispersion du mode correspondant<sup>4</sup> en RTIM de la structure de trous.

Ce régime hybride est très intéressant car il permet à la fois d'ajuster la dispersion à courtes longueurs d'onde et à haute longueur d'onde *de façon indépendante*. En effet, on peut modifier les propriétés de la dispersion en jouant sur les plots de silice dopée germanium ou sur la taille des trous, permettant par exemple d'ajuster simultanément la position du zéro de dispersion. Également, ce type de structure permet d'avoir de très grandes plages de guidage, ce qui peut s'avérer utile pour générer des accords de phase très éloignés spectralement en MQO. Un design détaillé de cette fibre est présenté dans [3].

### 1.3 Contexte et état de l'art, mélange à quatre ondes

Comme nous avons pu le voir dans l'introduction, il existe diverses méthodes pour générer de la lumière bleue ou des ultraviolets (UV) dans les fibres optiques. Entre autres furent mentionnés la génération de troisième harmonique (GTH[25]), la génération par ondes dispersives dans les fibres à cœurs creux en régime pulsé

4. On parle ici du mode ayant la même géométrie.

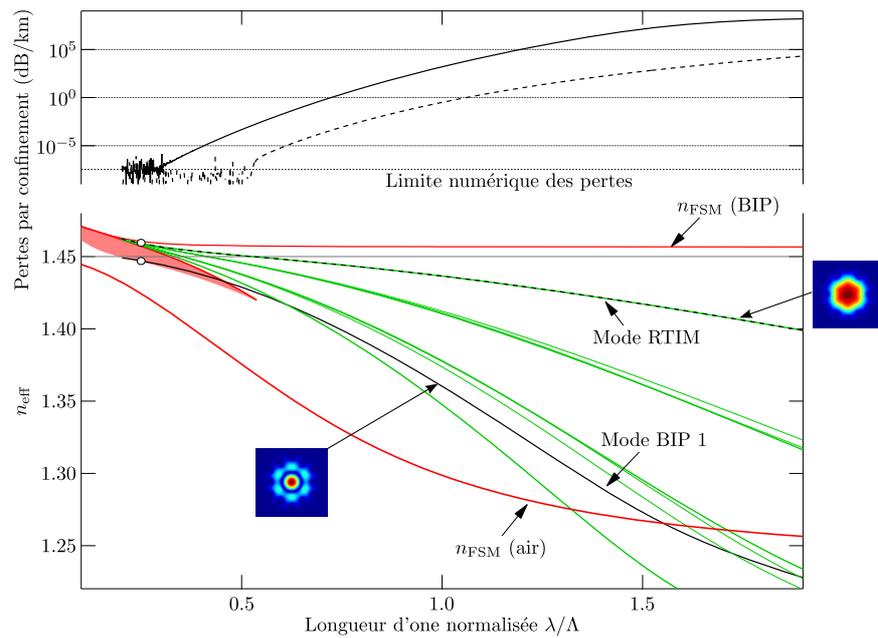


FIGURE 1.12 – Dispersion de la fibre hybride présentée à la figure 1.2.3 (extrait de [3]). Le mode fondamental de la première quasi-BIP continue d'exister bien au-delà des limites de bandes habituelles illustrées par la zone hachurée en rouge. On trouve également un mode en régime RTIM pour le défaut de 7 de la structure de trous d'air. Le mode de la seconde BIP existe également et un accord de phase entre une pompe dans la première BIP, le signal dans la seconde BIP et l'idler dans le mode RTIM est envisageable pour compenser la dispersion du matériau. Les dispersions en vert sont associées aux supermodes de la structure à six plots de haut indice. Les modes de BIP et RTIM sont illustrés par des figures d'intensité montrant la différence de leur géométrie.

femtoseconde[14], ainsi que la génération de supercontinuum s'étendant jusqu'aux environs de  $\sim 350$  nm[13] (le cas du supercontinuum générant des spectres très larges, nous nous attarderons plutôt ici aux méthodes donnant des spectres fins). Or, la GTH est généralement peu efficace, nécessite des structure extrêmement fines (des fibres effilées de diamètre inférieur au micron par exemple) et conduisent à des accords de phase à courte longueur d'onde dans des modes d'ordre élevé. La génération d'UV dans les fibres à cœur creux sous atmosphère de gaz inertes fonctionnent sur la base d'impulsions à puissance crête très élevée et exigent des assemblages relativement complexes pour maintenir l'atmosphère dans la structure de la fibre sous pression ; ainsi, les très courtes longueurs d'onde atteintes ( $\sim 150$  nm) au prix d'un système relativement complexe et coûteux (laser de pompe). Il reste alors comme alternative prometteuse d'utiliser le mélange à quatre ondes (MQO) dans les fibres comme plate-forme de conversion de longueur d'onde.

Les sections suivantes auront pour but, non pas de rentrer dans le détail des mécanismes qui seront traités dans les chapitres suivants, mais de rappeler les notions de bases de MQO et la problématique liée à la génération d'ondes UV via notamment un état de l'art.

### 1.3.1 Première présentation concise du mélange à quatre ondes

Le mélange à quatre ondes, comme son nom l'indique, est un effet non-linéaire qui régit l'interaction de quatre champs  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_3$  et  $\mathbf{E}_4$ , chacun oscillant à sa pulsation respective  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  et  $\omega_4$  et ayant une quantité de mouvement ou constante de propagation propre  $\beta_1(\omega_1)$ ,  $\beta_2(\omega_2)$ ,  $\beta_3(\omega_3)$  et  $\beta_4(\omega_4)$ . On attribue généralement aux champs 1 et 2 le rôle de pompe, c'est à dire des champs intenses qui seront à la source des effets non-linéaires qui convertiront alors de l'énergie de ces pompes vers les ondes 3 et 4, que l'on nomme communément *signal* et *idler*. Nous couvrirons en détail plus loin les équations régissant le transfert d'énergie entre les quatre ondes, mais nous pouvons tout de même ici glisser un aperçu des tenants et aboutissants de la technique et identifier les points importants à considérer.

Le processus général de génération d'onde par mélange à quatre ondes de deux pompes intenses peut s'illustrer simplement comme l'annihilation d'un photon de chaque pompe pour générer un photon de signal et un autre d'idler. A partir de cette hypothèse, on doit conserver l'énergie ainsi que la quantité de mouvement, soit, pour l'énergie :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (1.13)$$

et

$$\beta_1(\omega_1) + \beta_2(\omega_2) = \beta_3(\omega_3) + \beta_4(\omega_4) \quad (1.14)$$

pour la quantité de mouvement, s'exprimant comme  $\beta_i = 2\pi n_{\text{eff}}(\omega_i)\omega_i/c = 2\pi n_{\text{eff}}/\lambda^5$  ; c'est également une condition que l'on nomme *accord de phase*. On constate donc que le seul élément sur lequel on peut travailler pour arriver aux

---

5. On note ici que  $n_{\text{eff}}(\omega_i)$ ,  $c$  et  $\lambda$  représentent respectivement l'indice effectif du mode, la vitesse de la lumière dans le vide et la longueur d'onde dans le vide.

accords de phases que l'on souhaite est la dispersion à travers les indices effectifs  $n_{\text{eff}}$ . Or, cette formulation très simple permet déjà de constater qu'il existe de multiples possibilités permettant de satisfaire ces deux équations ; en effet, pour une longueur d'onde signal recherchée par exemple, on peut ajuster les deux longueurs d'onde de pompe (fixant automatiquement la longueur d'onde de l'idler) et avoir des dispersion différentes  $\beta_i(\omega_i)$  pour les quatre ondes dans le but de conserver la quantité de mouvement. De façon générale, on parle d'accord de phase lorsque la quantité suivante s'annule :

$$\Delta k = \beta_3 + \beta_4 - (\beta_1 + \beta_2) \quad (1.15)$$

il n'y a que dans les environs de  $\Delta k = 0$  qu'on observe un échange d'énergie des pompes vers les signaux et idler ; on parle alors de *gain*. Toutefois, le gain maximum obtenu par MQO ne se produit pas exactement à  $\Delta k = 0$  à cause de la contribution non-linéaire (auto-modulation de phase et modulation de phase croisée) qui contribue à modifier la phase de chacune des ondes. Ainsi, on sépare habituellement le désaccord de phase effectif en trois composantes, en comptant la contribution non-linéaires[35] :

$$\kappa = \Delta k_M + \Delta k_G + \Delta k_{\text{NL}} \quad (1.16)$$

où les trois termes  $\Delta k_M$ ,  $\Delta k_G$  et  $\Delta k_{\text{NL}}$  représentent respectivement les contributions de la dispersion du matériau, de la dispersion du guide d'onde et la contribution non-linéaire (fréquemment représentée par le terme  $2\gamma P_p$  où  $\gamma$  est le coefficient non-linéaire de la fibre et  $P_p$  la puissance de pompe). Lorsqu'on travaille à courtes longueurs d'onde dans la silice (dans le visible pour la pompe) et qu'on tente d'obtenir de très grands désaccords de phase ( $> 200$  THz), la variation importante de la dispersion du matériau pose un réel problème et on doit faire appel à différentes stratégies, qui seront discutées dans les différentes sous-parties. Notons de suite que  $\Delta k_{\text{NL}}$  est ci-après négligé, le terme linéaire l'emportant largement dans l'expression de l'accord de phase dans les cas qui seront étudiés.

### 1.3.2 Choix de la pompe

Précisons aussi que s'il existe une variété de sources très communes à 1064 nm (lasers fibrés, semi-conducteur ou à l'état solide) assez puissante pour être utilisées comme pompe dans des applications non-linéaires, la limite physique du processus de MQO est la seconde harmonique dans le cas d'une pompe unique (i.e.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_p$  et  $\omega_3 \approx 2\omega_p$ ). Ainsi, il est impossible de descendre sous la barre des 532 nm à l'aide d'une telle source

Une autre technique envisageable pour la génération de courtes longueurs d'ondes consiste à utiliser deux pompes de longueurs d'ondes différentes dans le but de s'écarter davantage les longueurs d'ondes de signal et d'idler produites[20, 21]. Les sources utilisées pour ce faire sont par exemple une pompe à 1064 nm et une autre à 532 nm. On utilise par exemple un multiplexeur ou une conversion partielle de seconde harmonique d'un laser de base à 1064 nm à l'aide d'un doubleur de

fréquence, certains étant particulièrement efficace à cette longueur d'onde, comme le niobate de lithium pôle périodiquement (NLPP, [42, 43]). Les deux montages décrits ici pour effectuer ce type de MQO sont illustrés à la figure 1.13(a) et (b) respectivement. Pour ce cas de figure, l'énergie totale de pompe est équivalente à celle de trois photons à 1064 nm, fixant ainsi la limite inférieure absolue du signal à environ 355 nm. Or, pour les mêmes raisons évoquées à la section précédente, les limitations quant à la longueur d'onde de l'idler et à la dispersion font en sorte qu'il est généralement impossible de descendre sous la barre des 400 nm en utilisant cette technique. L'utilisation d'un tel schéma de pompage peut entre autres avoir comme avantage d'être versatile (comme on peut le voir d'ailleurs sur les accords de phase présentés à la figure 1.14) et d'amoindrir l'effet de la dispersion en faisant en sorte que la quantité de mouvement effective de la pompe soit à mi-chemin entre celle de chacune des pompes, ce qui peut relaxer la contrainte sur la dispersion de la fibre. On peut d'ailleurs voir un exemple de spectres générés pour trois fibres différentes avec un pompage mixte à la figure 1.15. Néanmoins, ce montage demeure assez complexe et n'est pas en mesure de produire des longueurs d'ondes discrètes dans l'UV pour une fibre de silice. Aussi, le couplage de deux longueurs d'onde simultanément dans la fibre et ce, dans le même mode et de manière efficace, n'est pas une tâche aisée.

Ces constatations nous ont amené à sélectionner une unique pompe à 532 nm pour effectuer la conversion vers les courtes longueurs d'onde par MQO.

### 1.3.3 Accord de phase intramodal

Afin de fixer les idées, prenons l'exemple classique de MQO intramodal (toutes les ondes sont dans un seul mode et on utilise une seule pompe) de l'équation (1.10). Pour faciliter l'écriture, nous allons considérer le développement autour de la pompe et écrire l'espacement spectral  $\omega_s - \omega_p = -(\omega_i - \omega_p) = \Omega$ . Dans ces conditions, on a :

$$\beta_p = \beta_0 \quad (1.17)$$

$$\beta_s = \beta_0 + \beta_1\Omega + \frac{\beta_2}{2}\Omega^2 + \frac{\beta_3}{6}\Omega^3 + \frac{\beta_4}{24}\Omega^4 + \dots \quad (1.18)$$

$$\beta_i = \beta_0 - \beta_1\Omega + \frac{\beta_2}{2}\Omega^2 - \frac{\beta_3}{6}\Omega^3 + \frac{\beta_4}{24}\Omega^4 + \dots \quad (1.19)$$

Ainsi, en calculant le désaccord de phase, les termes de degré impair s'annulent et on peut approximativement écrire :

$$\Delta k \approx \frac{\beta_2}{2}\Omega^2 + \frac{\beta_4}{24}\Omega^4 \quad (1.20)$$

Si on s'attarde ici à la condition d'accord de phase ( $\Delta k = 0$ ), on notera qu'il existe une racine double en  $\Omega = 0$  et une autre paire de racines données par :

$$\Omega = \pm \sqrt{-\frac{12\beta_2}{\beta_4}} \quad (1.21)$$

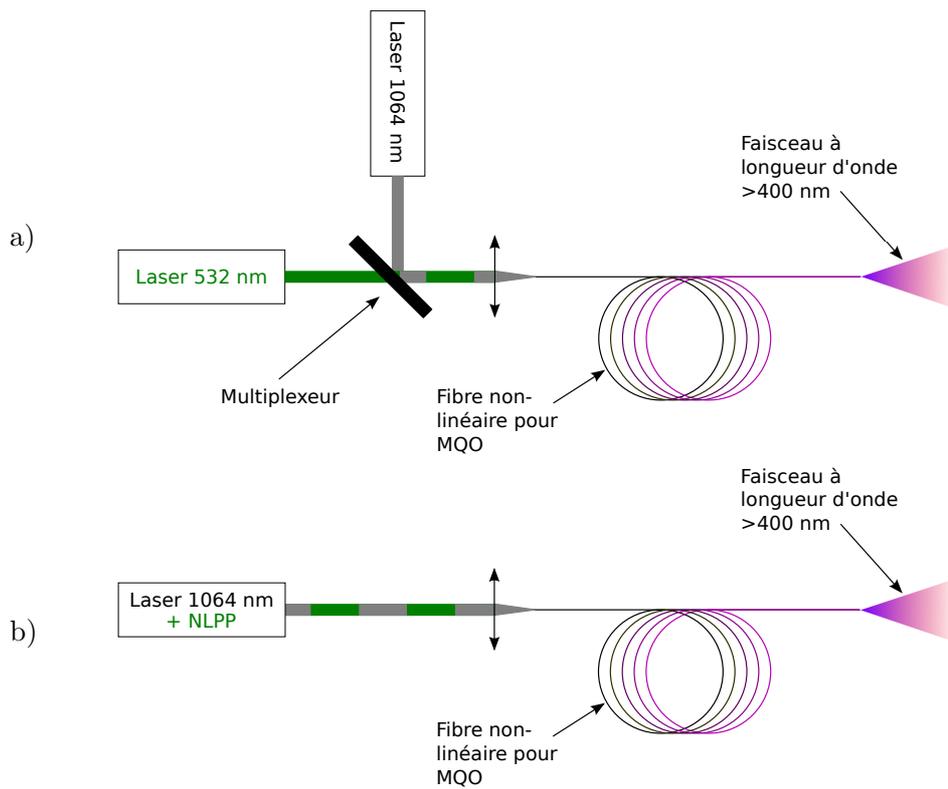


FIGURE 1.13 – Illustration de montage de conversion de longueur d’onde par pompage non-dégénéré en longueur d’onde. Ici, deux pompes à différentes longueurs d’onde sont utilisées dans le but de générer un signal à longueur d’onde plus courte ; (a) Montage utilisant deux lasers et un système de multiplexage ; (b) Montage utilisant un cristal doubleur pour convertir une partie de la pompe à 1064 nm en une seconde pompe à 532 nm subséquentment couplées ensemble dans la fibre.

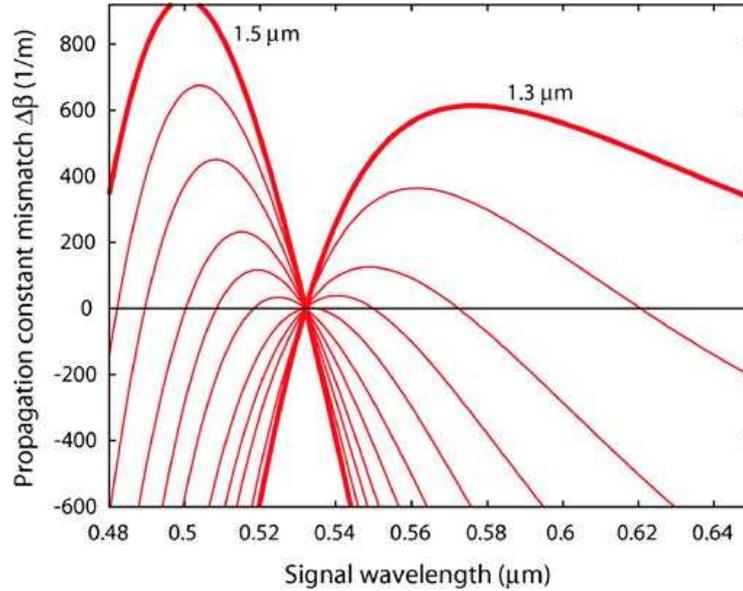


FIGURE 1.14 – Désaccord de phase en fonction de la longueur d'onde signal d'une fibre microstructurée air-silice pour un pas  $\Lambda$  allant de  $1.3 \mu\text{m}$  à  $1.5 \mu\text{m}$  par pas de  $0.02 \mu\text{m}$ . Le rapport de diamètre des trous au pas  $d/\Lambda$  est de  $0.74$  et les pompes sont à  $\lambda_1 = 532 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 1064 \text{ nm}$  (tiré de[20])

Ce résultat nous indique que, pour avoir des solutions d'accord de phase linéaire (autre qu'autour de la pompe en prenant en compte le déphasage non-linéaire), on doit avoir une dispersion au moins d'ordre 4 et, pour que la solution soit réelle,  $\beta_2$  et  $\beta_4$  doivent être de signes opposés. Généralement, dans les fibres,  $\beta_4$  est négatif et ces accords de phase apparaissent alors en régime de dispersion *normale*. La conséquence principale de cela est de permettre de générer des spectres discrets de signal et d'idler loin de la pompe, ce qui est particulièrement intéressant dans un contexte de conversion de longueurs d'onde. Cependant, l'utilisation de ce type d'accord de phase dans des fibres microstructurées est parfois problématique. En effet, CHEN, WADSWORTH et BIRKS[5] ont démontré par calcul, comme on peut le voir sur la figure 1.16(a), qu'un tel accord de phase dans une fibre microstructurée air-silice nécessiterait des cœurs de dimension inférieure au micron et aussi que la courbe d'accord de phase est relativement évasée, ne permettant pas un pompage profondément en zone de dispersion normale. Or, la fabrication de fibres avec de si petites dimensions, en particulier en regard à leur uniformité, est problématique, sans compter que les intensités importantes dans de si petits guides sont susceptibles d'endommager le matériau par absorption de plusieurs photons[44, 22]. Néanmoins, la modélisation de la fibre comme un barreau de silice dans l'air a permis de montrer, dans la même référence, qu'il est possible de générer des ultraviolets dans la zone de dispersion normale d'un mode d'ordre supérieur, et ce, pour un cœur de taille raisonnable avoisinant les  $2 \mu\text{m}$  de diamètre, limitant ainsi les problèmes évoqués ci-dessus pour un accord dans le mode fondamental. Une longueur d'onde aussi basse

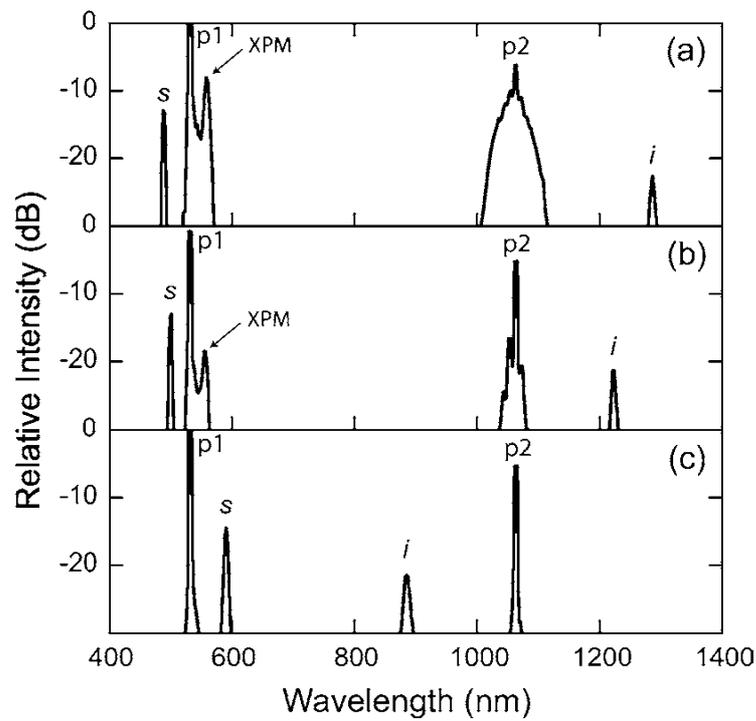


FIGURE 1.15 – Spectres obtenus par pompage non-dégénéré 532 nm/1064 nm pour différentes fibres en (a), (b) et (c) ayant respectivement des pas de 1.37  $\mu\text{m}$ , 1.45  $\mu\text{m}$  et 1.35  $\mu\text{m}$ , des  $d/\Lambda$  de 0.67, 0.74 et 0.74 ainsi que des longueurs de 1.5 m, 1 m et 1 m (tiré de[20]).

que 347 nm a ainsi été obtenue dans le mode  $LP_{02}$ , en régime intramodal (i.e. toutes les ondes étant dans ce mode). Cette avenue est cependant problématique sur deux fronts : tout d'abord, elle implique un mode d'ordre supérieur ayant une qualité de faisceau moindre que le mode fondamental ( $LP_{02}$  étant un mode peu brillant) et ensuite, elle nécessite l'utilisation d'un convertisseur de mode[4] dont la fabrication est complexe, nécessitant un contrôle adéquat de l'ouverture des trous d'air d'une fibre microstructurée en plusieurs étapes.

### 1.3.4 Accord de phase intermodal

Une technique alternative se présentant dans le cas de fibres multimodes pour assouplir les conditions d'accord de phase consiste à opérer en régime multimode (cas où les quatre ondes peuvent être dans des modes différents) rapporté entre autres par STOLEN, BJORKHOLM et ASHKIN[16]. Le principe de base consiste à profiter de la dispersion intermodale du guide (comprise dans  $\Delta k_G$ ) pour compenser la dispersion du matériau  $\Delta k_M$ .<sup>6</sup>

Nous décrivons ci-dessous trois configurations possibles de MQO intermodal : pompage dégénéré, pompage mixte en polarisation et pompage mixte en modes spatiaux.

#### 1.3.4.1 Pompage dégénéré

Le cas le plus simple correspond à celui du pompage dégénéré pour lequel les deux photons de pompe appartiennent au même mode alors que les ondes signal et idler sont générées dans au moins un autre mode. Un exemple particulier correspondant à l'une des premières observations historiques en 1974 par STOLEN, BJORKHOLM et ASHKIN[16] est illustré en détail aux figures 1.17(a) et (b) où l'on peut voir l'évolution des indices effectifs et de  $\Delta k$  en fonction de la fréquence (et de la longueur d'onde) une pompe et l'idler dans le mode fondamental  $LP_{01}$  et le signal (à courte longueur d'onde) dans le mode d'ordre supérieur  $LP_{02}$ . Un résumé sur une courbe en fréquence normalisée  $V$  est également illustrée à la figure 1.18. On constate, en particulier sur la figure 1.17(b), que la dispersion chromatique est importante sur la plage considérée, même plus importante que la différence d'indice effectif en les modes. L'utilisation d'un mode d'ordre supérieur à courte longueur d'onde a permis ici de compenser la forte dispersion du matériau  $\Delta k_M$  par la dispersion intermodale du guide (comprise dans  $\Delta k_G$ ), permettant ainsi l'accord de phase.

Les fibres air-silice à fort contraste d'indice de réfraction permettent d'obtenir des différences d'indice entre modes bien plus importantes (pouvant atteindre  $10^{-2}$ ) que dans les fibres conventionnelles et sont donc des bonnes candidates pour la génération de grand décalage de fréquence par MQO. Ainsi des décalages  $\approx 250$  THz[18]

---

6. Précisons que bien que le recouvrement entre certains modes est a priori mauvais (ce qui pourrait présager d'un faible gain du MQO) il a été démontré expérimentalement que si l'espacement en longueur d'onde est suffisamment grand (la forme du mode étant dépendante de la fréquence) il est possible d'atteindre dans de telles configurations des efficacités pouvant aller jusqu'à 20%[19].

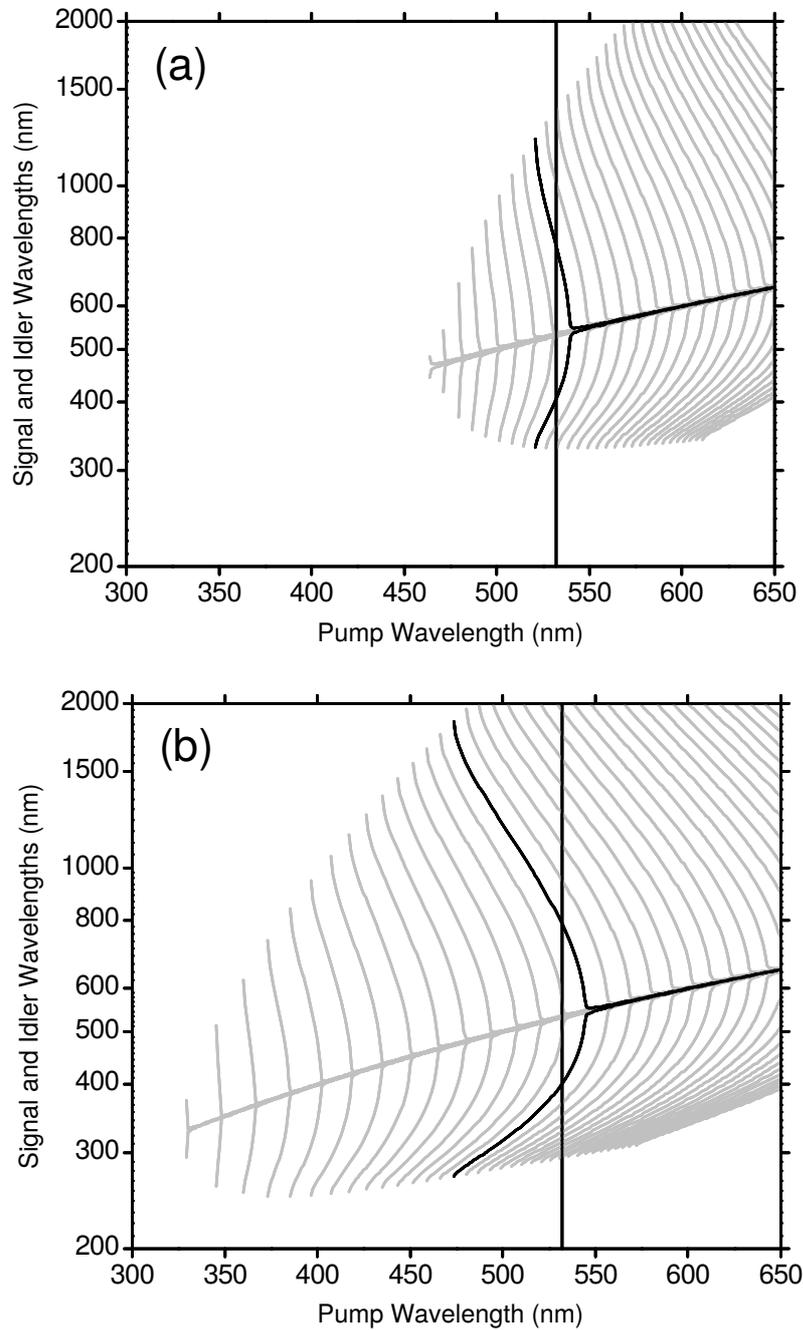


FIGURE 1.16 – Simulations indiquant la position de l'accord de phase pour plusieurs pas de microstructure  $\Lambda$  en fonction de la longueur d'onde de pompe pour un accord de phase intermodal dans le mode fondamental (a) et dans le mode LP<sub>02</sub> (b), les courbes en noir indiquant respectivement des diamètres de cœur équivalents de 0.952  $\mu\text{m}$  et 2.86  $\mu\text{m}$ . Dans le premier cas, le pas de structure est inférieur au micron, posant problème tant au niveau de la fabrication que de l'utilisation (tiré de [5])

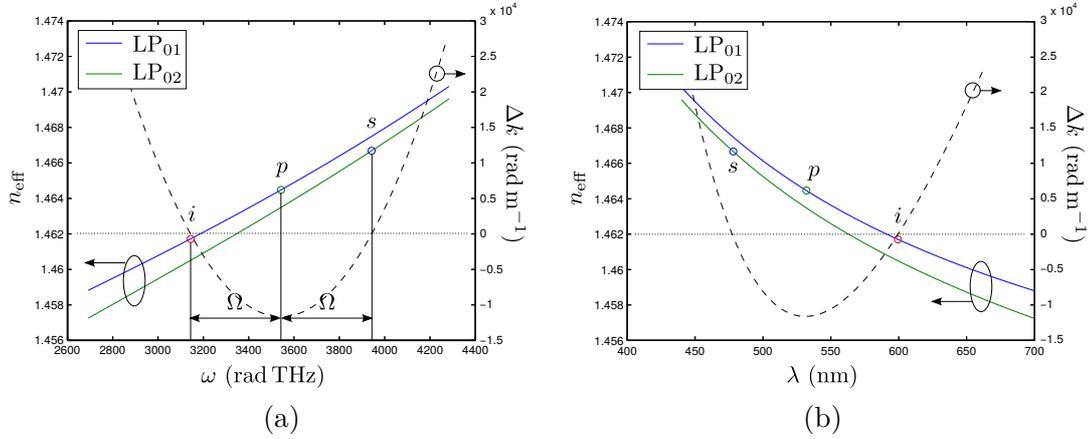


FIGURE 1.17 – Illustration d'un accord de phase intermodal pour une fibre multimode; (a) évolution des indices effectifs et de l'accord de phase linéaire  $\Delta k$  en fonction de la pulsation; (b) évolution des indices effectifs et de l'accord de phase linéaire  $\Delta k$  en fonction de la longueur d'onde signal et idler pour une pompe fixée à 532 nm. On constate en (b) que la dispersion du chromatique occupe une grande place ici, le changement de mode pour le signal étant un moyen de compenser son effet. L'espacement en fréquence optique obtenu, soit  $\Delta\nu = \Omega/(2\pi)$  est d'environ 67 THz. Les indices  $s$ ,  $p$  et  $i$  font référence respectivement au signal, à la pompe et à l'idler.

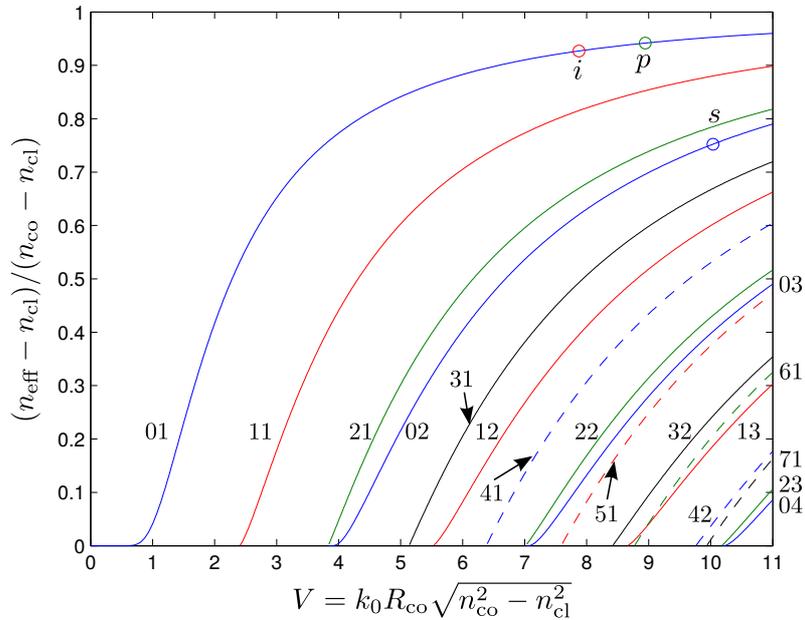


FIGURE 1.18 – Représentation de l'accord de phase en fréquence normalisée, tel que rapportée dans [16].

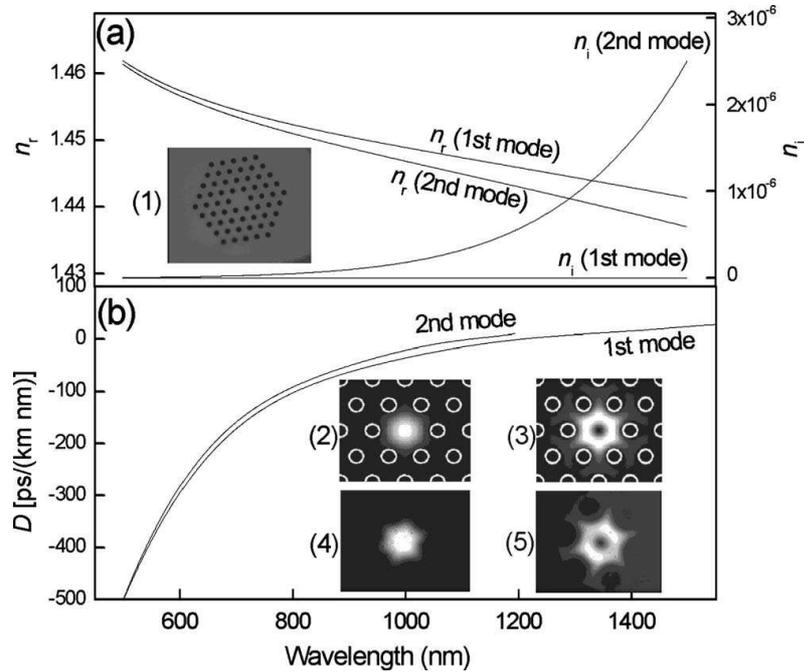


FIGURE 1.19 – (a) Indices effectif  $n_r + in_i$  des deux premiers modes de la fibre en encart (LMA-10 de Crystal Fiber,  $\Lambda = 6.6 \mu\text{m}$  et  $d/\Lambda = 0.47$  [ndlr]). (b) Coefficient de dispersion  $D$  des deux premiers modes. Les encarts (2) et (3) représentent respectivement les modes simulés de pompe et de signal (respectivement à 808 nm et 586 nm) et les champs proches observés pour ces mêmes modes sont illustrés aux encarts (4) et (5) (tiré de [18]).

ont pu être obtenus (cf. figures 1.19 et 1.20). Bien que l’exploitation des modes d’ordre supérieur pour aider à accommoder la condition d’accord de phase soit en théorie prometteuse et largement étudiée, cette dernière produit souvent les courtes longueurs d’onde dans les modes d’ordre supérieur (le sens naturel tendant à compenser la dispersion chromatique[12]) et n’ont pas su produire jusqu’à maintenant de longueurs d’onde sous la barre des 400 nm pour des pompes visibles ( $\lambda_p \approx 532 \text{ nm}$ ).

Afin d’élargir encore les possibilités d’obtention d’accord de phase, il est intéressant de considérer des solutions alternatives pour modifier la dispersion : c’est là qu’intervient le pompage en superposition de modes. Deux techniques principales nous donnent ainsi accès à de nouvelles familles d’accords de phase, soit le pompage sur deux polarisations ou sur deux modes spatiaux, voire même les deux simultanément. Nous allons maintenant détailler le mécanisme derrière chacune de ces approches.

### 1.3.4.2 Pompage mixte en polarisation

Un cas classique de pompage en régime mixte modalement consiste à envoyer une pompe dans une fibre biréfringente avec une polarisation à 45° des axes propres.

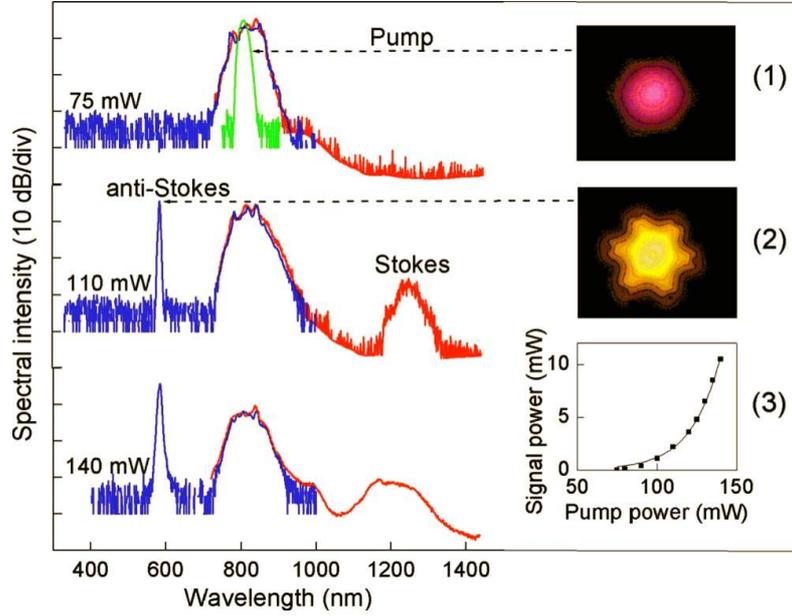


FIGURE 1.20 – Transmission mesurée pour différentes puissances de pompe. En vert, on observe le spectre de la pompe et le champ proche correspondant dans l’encart (1). L’encart (2) illustre le champ lointain du signal (tiré de [18]).

La pompe est alors partagée entre deux courbes de dispersion, celles des axes lent et rapide, faisant en sorte qu’il existe alors quatre possibilité d’accord de phase qui sont illustrées à la figure 1.21. Une nouvelle famille d’accords de phase fait alors son apparition, soit celles pour lesquelles un photon de pompe selon chaque polarisation est pris pour générer le signal et l’idler séparément sur les polarisations lentes et rapides. Les deux types d’accord de phase pour ce type d’injection peuvent s’écrire comme suit :

$$\beta_{px} + \beta_{py} = \beta_{sx} + \beta_{iy} \quad (1.22)$$

$$\beta_{px} + \beta_{py} = \beta_{sy} + \beta_{ix} \quad (1.23)$$

où  $p$ ,  $s$  et  $i$  font respectivement référence à la pompe, au signal et à l’idler, et les indices  $x$  et  $y$  aux axes propres de la fibre. Dans le cas illustré ici, la pompe est dégénérée en longueur d’onde, mais on pourrait également ajouter à cela des pompes à différentes longueurs d’onde, chacune selon leur axe de biréfringence par exemple.

Lorsqu’on s’attarde au MQO mettant en jeu une seule polarisation pour toutes les ondes (par exemple, toutes selon l’axe  $x$ ), on parle d’*instabilité de modulation scalaire*, ou SMI. Lorsqu’on parle des autres familles de courbes où un photon de pompe est pris sur chaque polarisation et les signaux et idlers sont générés dans des polarisations différentes, on réfère aux accords de phase obtenus comme étant de l’*instabilité de modulation en polarisation croisée*, ou XPMI<sup>7</sup>[49, 50]. Ces courbes

7. Il existe également un autre type de MQO en polarisation, soit la modulation d’instabilité

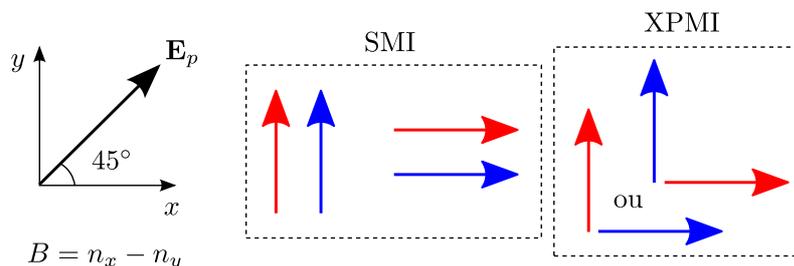


FIGURE 1.21 – Illustration du pompage mixte en polarisation. On pompe ici à  $45^\circ$  des axes propres d’une fibre ayant une biréfringence  $B$ . On obtient alors quatre combinaisons possible d’accords de phase dont deux relèvent de l’instabilité de modulation scalaire (SMI) et deux de l’instabilité de modulation en polarisations croisées (XPMI) qui donne accès à une nouvelle famille d’accords de phase.

d’accord de phase présentent généralement un pic de gain à proximité de la pompe et un autre près de la branche extérieure de l’accord de phase SMI (en dispersion normale). La différence entre la SMI et la XPMI est généralement d’autant plus important que l’écart entre la dispersion des deux axes de polarisation est élevée, ce qui est traduit dans ce cas par la biréfringence  $B = n_x - n_y$  où  $x$  est ici orienté selon l’axe lent. Dans les fibres biréfringentes,  $B$  est habituellement de l’ordre de quelques  $10^{-4}$ , faisant en sorte que l’impact est relativement faible pour des accords de phase ayant lieu très loin de la pompe. Les différentes familles de courbes d’accord de phase en régime biréfringent sont illustrées à la figure 1.22.

### 1.3.4.3 Pompage mixte en mode spatiaux

Comme nous l’avons vu à la section précédente, la distribution de la pompe sur différents modes en polarisation dans une fibre biréfringente permet de créer de nouvelles conditions d’accord de phase dont les positions dépendent de la biréfringence. Or, dans les fibres air-silice, la différence d’indice entre modes spatiaux peut atteindre  $10^{-2}$ , dépassant généralement très largement la biréfringence, ce qui permet d’imaginer toute une panoplie de nouveaux accords de phase impliquant différents modes de pompe et offrant plusieurs possibilités d’atteindre certaines longueurs d’ondes (idéalement dans l’UV) dans un mode donné (idéalement le mode fondamental). Ce type d’accord de phase est connu depuis plus de 40 ans (figure 1.23) et a permis récemment de générer des UV dans le mode fondamental (figure 1.24). Toutefois les décalages en fréquence rapportés sont faibles[15, 13, 17], typiquement quelques THz et sont donc très éloignés de ce que l’on cherche à obtenir.<sup>8</sup>

Nous verrons toutefois dans le chapitre 3 qu’il est possible à l’aide d’un choix

---

en polarisation (PMI) [45, 46, 47, 48], pour laquelle le signal et l’idler sortent orthogonaux à la pompe. Or, cette forme de MQO n’est généralement visible que dans les fibres très faiblement biréfringentes et parce qu’il possède un seuil de puissance pour être visible. Nous n’allons donc pas l’élaborer ici.

8. Le décalage est de 205 THz entre une pompe à 532 nm et un signal à 390 nm.

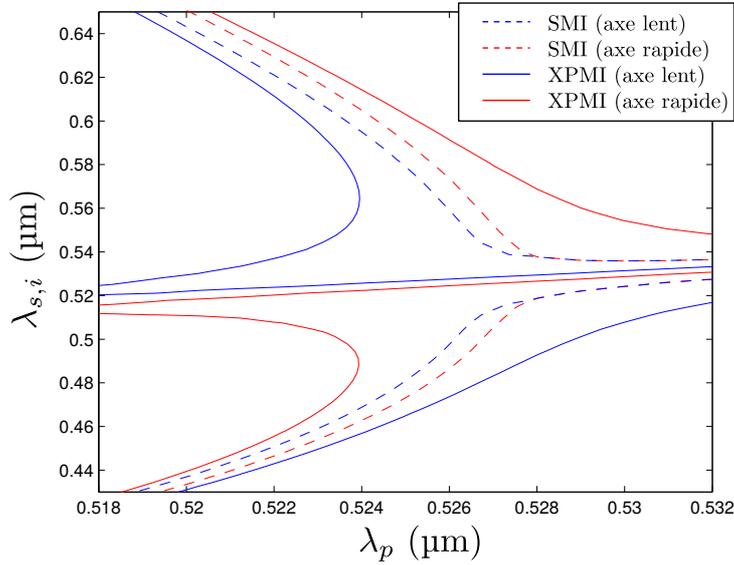


FIGURE 1.22 – Illustration de courbes d'accord de phase pour la modulation d'instabilité scalaire (SMI) et d'instabilité de modulation en polarisations croisées (XPMI) pour une fibre biréfringente.

judicieux de structure d'obtenir des décalages supérieurs à 200 THz en pompant à 532 nm selon 2 modes spatiaux et de générer le signal basse longueur d'onde dans le mode fondamental recherché tout en ayant un cœur de dimensions raisonnables

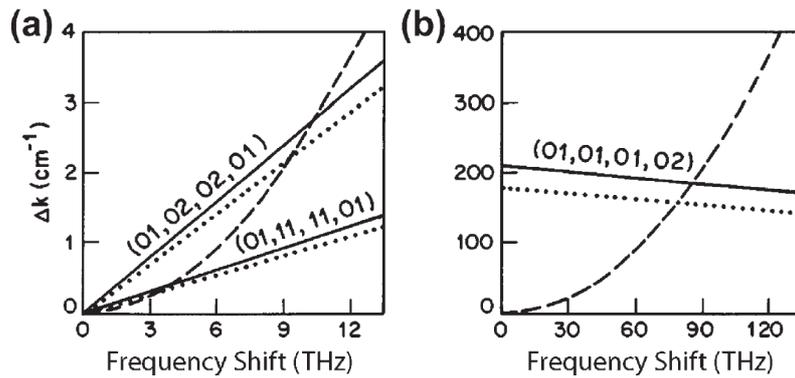


FIGURE 1.23 – Exemples d'accords de phases en régime multimode (tirés de[35], adapté de[15]). En particulier, on note que le pompage dégénéré modalement (graphe (b)) peut produire des accords de phase ayant des espacements spectraux très grands alors que le pompage mixte modalement est souvent associé à de petits écartements spectraux, comme on peut le voir en (a).

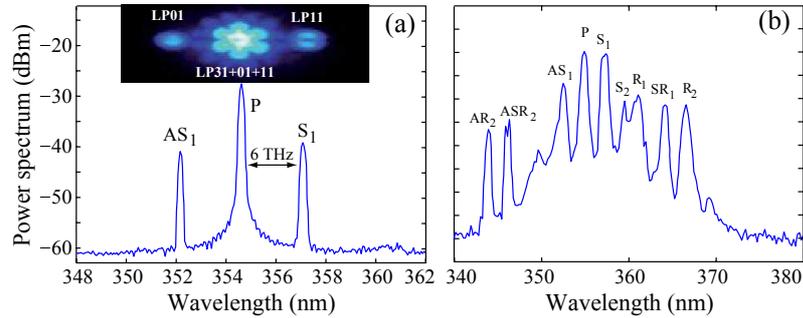


FIGURE 1.24 – Exemple d’observation d’accord de phase en pompage mixte; une pompe est distribuée sur un ensemble de modes dont les modes  $LP_{01}$  et  $LP_{11}$  et engendre l’apparition d’un signal à courte longueur d’onde dans le mode fondamental et de l’idler dans le mode d’ordre supérieur. Le décalage en fréquence ici est très petit, de l’ordre de 7 THz (tiré de[13]).

## 1.4 Conclusion

Nous avons revu plusieurs techniques d’accord de phase ici mais aucune n’a pu démontrer une conversion vers l’ultraviolet d’une pompe à 532 nm dans le mode fondamental d’une fibre à cœur solide, entre autres car les designs envisagés le permettant en théorie sont problématiques en pratique, tant au niveau de la fabrication que du risque d’endommager le matériau. Dans les chapitres suivants, nous explorerons donc diverses stratégies développées au laboratoire pour tenter de contourner ces problèmes, entre autres par des schémas d’accord de phase novateurs, comme le pompage mixte modalement dans une fibre air-silice, l’utilisation de fibres hybrides ou encore l’étude de points de stabilité de l’accord de phase avec fluctuations d’échelle de la structurante guidante.

# Effets non-linéaires et conversion de longueurs d'onde

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Contexte et motivation</b>	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Théorie du mélange à quatre ondes</b>	<b>36</b>
2.2.1	Non-linéarité et équations du mélange à quatre ondes	36
2.2.2	Mélange à quatre ondes en approximation scalaire	39
2.2.3	Mélange à quatre ondes vectoriel	40
2.2.4	Mélange à quatre ondes en pompage dégénéré modalement et spectralement	41
2.2.5	Mélange à quatre ondes inter-modal mixte	42
<b>2.3</b>	<b>Perturbations stochastiques et espérance de gain</b>	<b>44</b>
2.3.1	Processus stochastiques	44
2.3.2	Perturbations stochastiques appliquées au MQO	45
2.3.3	Exemple de stabilité d'une dispersion simple pour une fluctuation d'échelle	49
2.3.4	Discussion théorique sur le point de stabilité - double zéro de dispersion	52
2.3.5	Impact de la longueur de corrélation	55
<b>2.4</b>	<b>Discussion et perspectives</b>	<b>56</b>

---

## 2.1 Contexte et motivation

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la conversion de longueurs d'onde nécessite des caractéristiques de dispersion particulière et la conception de la fibre pouvant générer les signaux et idlers désirés, dans les modes souhaités pour une pompe particulière n'est pas du tout triviale. Nous avons également survolé une panoplie de stratégies employées jusqu'à maintenant pour la génération de courtes longueurs d'onde mais aucune d'entre elles n'a su générer des ultraviolets dans le mode fondamental.

Pour approfondir notre étude et développer les outils de calcul dont nous aurons besoin tout au long du chapitre 3, nous allons d'abord déterminer l'expression des coefficients d'interaction entre les modes, dénotés  $f_{mk}$  et  $f_{ijkl}$ , que nous calculerons dans l'approximation des modes scalaires, puis pour le cas général vectoriel qui

nous sera utile pour les structures réelles air-silice, et ce en particulier lorsque la nature des modes est très différente<sup>1</sup>, ce qui sera le cas pour le pompage mixte modalement.

Finalement, nous présenterons un modèle stochastique détaillé servant à modéliser l'impact des fluctuations des paramètres opto-géométriques de la fibre sur l'espérance du gain des processus de mélange à quatre ondes. Ce modèle servira de base à la fois pour interpréter des données expérimentales décrites au chapitre 3 ainsi que pour proposer de nouveaux designs, plus robustes aux perturbations stochastiques.

## 2.2 Théorie du mélange à quatre ondes

La mélange à quatre ondes, comme nous l'avons brièvement mentionné à la section précédente, est une conséquence des effets non-linéaires (d'ordre trois) qui engendrent un couplage entre quatre champs à travers la polarisation non-linéaire du matériau. Pour mieux comprendre son fonctionnement, revenons un instant aux équations dans le but de décrire en détail les différentes équations nécessaires à la description du phénomène et établir les différents coefficients dont nous aurons besoin par la suite et dont les expressions ne sont pas toujours données clairement dans la littérature voire pas du tout dans le cas du pompage mixte spatialement.

### 2.2.1 Non-linéarité et équations du mélange à quatre ondes

Le mélange à quatre ondes est une conséquence de la polarisation non-linéaire du matériau. Dans les fibres de silice (ou faites à partir de matériau centrosymétriques), c'est effectivement le premier terme important de la polarisation non-linéaire, les effets de second ordre étant à toutes fins pratiques absents. Pour expliquer le lien entre ces effets et le MQO, observons attentivement le terme de polarisation non-linéaire dans le cadre d'une réponse non-linéaire locale et instantanée [51, 35] :

$$P_{\text{NL},i}(x, y, z, t) = \varepsilon_0 \sum_j \sum_k \sum_\ell \chi_{ijkl}^{(3)} E_j(x, y, z, t) E_k(x, y, z, t) E_\ell(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

où  $\chi_{ijkl}^{(3)}$  est le tenseur de susceptibilité électrique d'ordre 3,  $E_m$  dénote les composantes du champ électrique avec  $i, j, k$  et  $\ell$  prenant les valeurs de l'ensemble  $\{x, y, z\}$ . Les propriétés de symétrie du matériau font en sorte que, des 81 coefficients du tenseur de susceptibilité, seul 21 sont non-nuls et ces derniers peuvent être exprimés à l'aide d'une seule constante, que nous noterons  $\chi_3$  [51]. Ainsi, l'expression de l'intégralité du tenseur peut s'effectuer à l'aide du *Delta* de Kronecker :

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \frac{\chi_3}{3} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.2)$$

---

1. Par exemple, lorsqu'on considère un mode linéairement polarisé et un mode transverse électrique

avec  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et zéro autrement. Cette formulation permet d'exprimer simplement la polarisation non-linéaire qui, après simplification, s'écrit :

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \varepsilon_0 \chi_3 (\mathbf{E} \bullet \mathbf{E}) \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Pour la suite du développement, nous allons nous placer, comme au chapitre précédent, dans le cas d'ondes monochromatiques et nous allons exprimer le champ total comme la somme de quatre champs :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^4 \mathbf{E}_j \exp(-i\omega_j t) + \text{conjugué complexe} \right] = \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^4 \mathbf{E}_j \exp(-i\omega_j t) \right] \quad (2.4)$$

En ajoutant à l'équation d'onde la contribution non-linéaire à la polarisation, (en négligeant le gradient de la polarisation non-linéaire, étant beaucoup plus faible que l'effet du guide), puis en passant dans le domaine de Fourier sur le temps, la transformée de Fourier s'exprime alors comme une convolution du produit des champs :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{\text{NL}} = \iint_{\mathbb{R}^2} \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^4 \mathbf{E}_j \delta(\omega - \omega' - \omega'' - \omega_j) \right] \cdot \text{Re} \left[ \sum_{k=1}^4 \mathbf{E}_k \delta(\omega' - \omega_k) \right] \\ \cdot \text{Re} \left[ \sum_{\ell=1}^4 \mathbf{E}_\ell \delta(\omega'' - \omega_\ell) \right] d\omega' d\omega'' \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec  $\delta(\omega)$  la distribution de Dirac. Ainsi, pour qu'une onde située en  $\delta(\omega - \omega_m)$  soit affectée par la polarisation non-linéaire, on doit avoir :

$$\omega_m \pm \omega_j \pm \omega_k \pm \omega_\ell = 0 \quad (2.6)$$

où les signes dépendent de la nature de la contribution du terme de somme correspondant (négatif pour le terme direct, positif pour le conjugué). Cette relation nous donne donc que seuls les termes qui conservent l'énergie pour nos quatre ondes peuvent interagir. Ainsi, on peut grouper les termes de polarisation non-linéaire également par fréquences (correspondant aux fréquences de nos quatre champs), telle que :

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^4 \mathbf{P}_j \exp(-i\omega_j t) + \text{c. c.} \right] = \text{Re} \left[ \sum_{j=1}^4 \mathbf{P}_j \exp(-i\omega_j t) \right] \quad (2.7)$$

Dans le cas où deux des champs sont à la même fréquence (i.e. les deux photons de pompe,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_p$ ), la conservation d'énergie s'écrit  $2\omega_p = \omega_s + \omega_i$ , les indices  $s$  et  $i$  référant respectivement au signal et à l'idler et on peut facilement identifier la combinaison de termes oscillant aux différentes fréquences pour la polarisation non-linéaire. Nous reviendrons sur la nature de leur expressions dans les sections suivantes pour la cas en approximation scalaire et le cas général vectoriel.

Si on laisse maintenant varier l'amplitude du champ le long de la fibre, on peut modifier les solutions de l'équation d'onde, par exemple pour le signal :

$$\mathbf{E}_s = A_s(z)\mathbf{F}_s(x, y) \exp[i(\beta_s z - \omega_s t)] \quad (2.8)$$

Nous considérerons cependant que la variation de l'amplitude est bien plus lente que l'oscillation du champ, c'est-à-dire que  $\partial_z A(z) \ll \beta$  et  $\partial_z^2 A \ll \beta^2$ . Prenant tout cela en compte, on peut écrire pour le champ électrique :

$$\left( \left\{ \left[ \nabla_{\perp}^2 + (k^2 n^2 - \beta_s^2) \right] \mathbf{F}_s(x, y) + (\nabla_{\perp} + i\beta_s \hat{\mathbf{z}}) \left[ \mathbf{F}_s \bullet \nabla_{\perp} \ln(n^2) \right] \right\} A_s + 2i\beta_s \frac{\partial A_s}{\partial z} \mathbf{F}_s \right) \times \exp(i\beta_s z) = -\mu_0 \omega_s^2 \mathbf{P}_s \quad (2.9)$$

où la partie entre accolade est précisément l'équation différentielle homogène s'annulant pour les modes  $\mathbf{F}_s$ . On peut alors réécrire l'équation ainsi :

$$\frac{\partial A_s}{\partial z} \mathbf{F}_s \approx \frac{i\mu_0 \omega_s c}{2n} \mathbf{P}_s \exp(-i\beta_s z) \quad (2.10)$$

Pour compléter le travail, nous allons faire intervenir deux relations ayant trait à l'énergie d'un mode, soit la quantité d'énergie emmagasinée dans le champ électromagnétique  $\mathcal{W}$  et la puissance moyenne traversant la surface transverse au guide  $P$ . Tout d'abord, définissons le vecteur de Poynting moyen  $\mathbf{S}_j$  [34] :

$$\mathbf{S}_j = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*). \quad (2.11)$$

On peut également calculer la puissance moyenne traversant le plan transverse à en intégrant le flux du vecteur de Poynting à travers le plan transverse :

$$\mathcal{P}_j = \iint_{A_{\perp}} \mathbf{S}_j \bullet \hat{\mathbf{z}} dA_{\perp} \quad (2.12)$$

Pour un seul mode, L'énergie totale emmagasinée par unité de volume est donnée par la somme des énergies emmagasinées dans le champ électrique (indice  $e$ ) et magnétique (indice  $h$ ) :

$$\mathcal{W}_j = \mathcal{W}_{ej} + \mathcal{W}_{hj} = \iiint_V \frac{\varepsilon_0}{4} n^2 |\mathbf{F}_j|^2 + \frac{\mu_0}{4} |\mathbf{G}_j|^2 dV \quad (2.13)$$

avec  $|\mathbf{F}_j| = \mathbf{F}_j \bullet \mathbf{F}_j^*$  et, en considérant le guide invariant en  $z$ , on peut exprimer cette quantité en *énergie par unité de longueur* :

$$\mathcal{W}_j = \mathcal{W}_{ej} + \mathcal{W}_{hj} = \iint_{A_{\perp}} \frac{\varepsilon_0}{4} n^2 |\mathbf{F}_j|^2 + \frac{\mu_0}{4} |\mathbf{G}_j|^2 dA_{\perp} \quad (2.14)$$

En supposant les correctement normalisés, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{2} \iint_{A_{\perp}} \text{Re}(\mathbf{F}_j \wedge \mathbf{G}_j^*) \bullet \hat{\mathbf{z}} dA_{\perp} = 1 \quad (2.15)$$

on peut montrer à l'aide du théorème de réciprocity que  $\mathcal{W}_{ej} = \mathcal{W}_{hj}$ . Or, il existe un lien entre  $\mathcal{P}_j$  et  $\mathcal{W}_j$  à travers la vitesse de groupe, soit :

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \frac{\mathcal{P}_j}{\mathcal{W}_j} \quad (2.16)$$

et on peut alors écrire

$$\frac{1}{2} \iint_{A_\perp} \text{Re}(\mathbf{F}_j \wedge \mathbf{G}_j^*) \bullet \hat{\mathbf{z}} dA_\perp = \frac{1}{2n_g Z_0} \iint_{A_\perp} n^2 |\mathbf{F}_j|^2 dA_\perp \quad (2.17)$$

avec  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  l'impédance caractéristique du vide. Ainsi, en effectuant le produit scalaire par  $\mathbf{F}_s^*$  et en multipliant des deux côtés par  $n^2$  l'équation (2.10), puis en intégrant sur la surface transverse, on trouve finalement :

$$\frac{\partial A_s}{\partial z} = \frac{\exp(-i\beta_s z)}{Z_0} \iint_{A_\perp} \frac{i\mu_0 \omega_s c}{4} (\mathbf{P}_s \bullet \mathbf{F}_s^*) dA_\perp \quad (2.18)$$

en considérant  $n \approx n_g$ , ce qui est valable pour un mode confiné dans le cœur. On peut répéter la même opération pour toutes les ondes et ainsi obtenir quatre équations différentielles couplées distinctes. Le développement de la polarisation non-linéaire fait apparaître différents termes proportionnels aux amplitudes des différentes ondes (ou de leur conjuguée complexe) et on peut les regrouper en trois catégories :

- le terme d'interaction d'une onde avec elle-même, c'est *l'auto-modulation de phase* (proportionnel à  $f_{mm}$ )
- les termes d'interaction des autres ondes sur elle-même via leurs intensités, c'est *la modulation de phase croisée* (proportionnel à  $f_{mk}$ )
- le terme d'interaction entre les quatre ondes et faisant intervenir l'accord de phase, c'est le *terme de mélange à quatre ondes* (proportionnel à  $f_{ijkl}$ ).

La séparation des différentes contributions selon ces termes donne des équations classiques pour le MQO dont celle pour le signal est donnée par[35] :

$$\frac{\partial A_s}{\partial z} = \frac{i\omega_s}{c} \left[ \left( f_{ss} |A_s|^2 + 2 \sum_{k \neq s} f_{sk} |A_k|^2 \right) A_s + 2f_{12si} A_1 A_2 A_i^* \exp(i\Delta k z) \right] \quad (2.19)$$

où  $\Delta k = \beta_s + \beta_i - \beta_1 - \beta_2$  est le désaccord de phase et les  $f_{k\dots\ell}$  sont des coefficients provenant du produit  $\mathbf{P}_s \bullet \mathbf{F}_s^*$  et qui seront explicités dans les sections suivantes<sup>2</sup>. Notons que nous considérerons toujours les pompes à la même fréquence mais que celles-ci peuvent être dans deux champs différents (ici, les champs dénotés 1 et 2).

### 2.2.2 Mélange à quatre ondes en approximation scalaire

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, lorsqu'on est en approximation de guidage faible, on peut utiliser la base des modes linéairement polarisés (ou LP) pour

<sup>2</sup> Ces coefficients sont explicités dans d'autres cas de figure autre part[52]. Nous allons donc les développer pour nos applications avec une notation harmonisée.

décrire le champ dans la fibre. Cette approximation est aussi appelée approximation scalaire car, à un vecteur d'orientation de la polarisation près  $\hat{\mathbf{p}}$ , toutes les équations sont essentiellement scalaires. Dans ce cas, le produit  $(\mathbf{E} \bullet \mathbf{E})\mathbf{E} \approx E^3 \hat{\mathbf{p}}$ . Pour le reste du développement dans cette section, nous allons donc laisser tomber l'orientation de la polarisation et passer en mode scalaire.

Pour expliciter les coefficients, on procède tout d'abord par regrouper les termes oscillant à la fréquence de l'onde qui nous intéresse. On a alors, pour le coefficient d'auto-modulation de phase :

$$f_{mm} = \iint_{A_{\perp}} \frac{3\chi_3}{4Z_0} |F_m|^4 dA_{\perp} = \iint_{A_{\perp}} \frac{3\chi_3}{4nZ} |F_m|^4 dA_{\perp} \quad (2.20)$$

où  $Z = Z_0/n$  est l'impédance du matériau. On notera au passage que l'indice non-linéaire du matériau (en intensité) tel que  $n = n_{\text{lin}} + n_2 I$  est défini par :

$$n_2 = \frac{3\chi_3 Z}{4n} \quad (2.21)$$

On peut alors, en regroupant les constantes, écrire :

$$f_{mm} = \iint_{A_{\perp}} \frac{n_2}{Z^2} |F_m|^4 dA_{\perp} \quad (2.22)$$

Cet effet traduit la perturbation de phase de l'onde sur elle-même. Dans ces équations et suivant la normalisation que nous avons utilisé, une analyse dimensionnelle révèle que les unités d'amplitude  $A$  sont des  $[A] = W^{1/2}$  et donc  $|A|^2$  donnent directement une puissance.

Le coefficient de modulation de phase croisée, traduisant la perturbation de phase d'une onde  $m$  sur une onde  $k$  (et inversement) est donné par :

$$f_{mk} = \iint_{A_{\perp}} \frac{n_2}{Z^2} |F_m|^2 |F_k|^2 dA_{\perp} \quad (2.23)$$

Finalement, le coefficient de mélange à quatre ondes est simplement donné par :

$$f_{ijkl} = \iint_{A_{\perp}} \frac{n_2}{Z^2} F_i F_j F_k^* F_l^* dA_{\perp} \quad (2.24)$$

Un problème survient cependant dans le cas où les deux pompes sont à la même longueur d'onde. En effet, la dégénérescence en longueur d'onde entraînera l'apparition éventuelle de termes additionnels dans l'équation différentielle pour les pompes, entraînant un couplage entre celles-ci si elles ne sont pas dans le même mode. Nous adresserons cette question délicate dans la section sur le pompage distribué modalement.

### 2.2.3 Mélange à quatre ondes vectoriel

Dans le cas où nous ne pouvons utiliser l'approximation scalaire, en particulier quand il y a levée de dégénérescence comme pour un guide à très fort contraste

d'indice, on doit conserver les solutions générales pour les modes et effectuer le calcul de la polarisation non-linéaire à partir de l'équation vectorielle. Dans ce cas de figure on peut exprimer les coefficients d'auto-modulation de phase, de modulation de phase croisée et de mélange à quatre ondes comme suit :

$$f_{mm} = \frac{1}{3} \iint_{A_{\perp}} \frac{n_2}{Z^2} [(\mathbf{F}_m \bullet \mathbf{F}_m)(\mathbf{F}_m^* \bullet \mathbf{F}_m^*) + 2|\mathbf{F}_m|^4] dA_{\perp} \quad (2.25)$$

$$f_{mk} = \frac{1}{3} \iint_{A_{\perp}} \frac{n_2}{Z^2} [(\mathbf{F}_m \bullet \mathbf{F}_k)(\mathbf{F}_m^* \bullet \mathbf{F}_k^*) + (\mathbf{F}_m^* \bullet \mathbf{F}_k)(\mathbf{F}_m \bullet \mathbf{F}_k^*) + |\mathbf{F}_m|^2 |\mathbf{F}_k|^2] dA_{\perp} \quad (2.26)$$

$$f_{ijkl} = \frac{1}{3} \iint_{A_{\perp}} \frac{n_2}{Z^2} [(\mathbf{F}_\ell^* \bullet \mathbf{F}_i)(\mathbf{F}_j \bullet \mathbf{F}_k^*) + (\mathbf{F}_\ell^* \bullet \mathbf{F}_j^*)(\mathbf{F}_i \bullet \mathbf{F}_k^*) + (\mathbf{F}_i \bullet \mathbf{F}_j)(\mathbf{F}_\ell^* \bullet \mathbf{F}_k)] dA_{\perp} \quad (2.27)$$

Ces expressions étant plus complexes, on peut néanmoins noter que, pour des modes linéairement polarisés (ou scalaire), ces coefficients retombent sur les coefficients scalaires détaillés à la section précédente. De la même façon, des termes additionnels feront surface lorsque la fréquence des pompes est dégénérée, ce qui sera étudié plus loin.

#### 2.2.4 Mélange à quatre ondes en pompage dégénéré modalement et spectralement

Lorsque la fréquence de pompe est dégénérée et que cette dernière est injectée dans un seul mode, le mélange à quatre ondes est en fait basé sur trois ondes, la pompe participant à l'interaction exclusivement sous forme quadratique puisqu'elle y implique deux photons. Pour simplifier le calcul, nous allons également considérer que la pompe est intense et les signaux et idlers faibles en comparaison. On peut alors écrire l'équation différentielle pour la pompe qui ne subit alors que l'auto-modulation de phase :

$$\frac{\partial A_p}{\partial z} = \frac{i\omega_p}{c} f_{pp} |A_p|^2 A_p \quad (2.28)$$

qui a simplement pour solution

$$A_p(z) = A_{p0} \exp(i\gamma_p P_p z) \quad (2.29)$$

où  $\gamma_p = \omega_p f_{pp}/c$ . En substituant dans les équations pour le signal et l'idler, on trouve :

$$\frac{\partial A_s}{\partial z} = \frac{2iP_p\omega_s}{c} [f_{ps}A_s + f_{ppsi}A_i^* \exp(-i\kappa z)] \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial z} = \frac{2iP_p\omega_i}{c} [f_{pi}A_i + f_{ppis}A_s^* \exp(-i\kappa z)] \quad (2.31)$$

avec  $\kappa = \beta_s + \beta_i - 2\beta_p - 2\gamma_p P_p$ . Ce sont les deux équations différentielles couplées qui seront utilisées pour le MQO *intramodal*. Il est également à noter que ces équations

sont parfaitement valables pour tout autre accord de phase possible lorsque *la pompe est dans un seul mode*. C'est ce cas de figure qui serait traité en détail, lors du développement du modèle incluant les perturbations stochastiques des paramètres optomécaniques de la fibre lors de la propagation.

### 2.2.5 Mélange à quatre ondes inter-modal mixte

La point délicat ici est la condition de dégénérescence spectrale pour la pompe (i.e. la même longueur d'onde) qui est maintenant distribuée sur deux modes différents  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  tels que pour des raisons de symétrie (en particulier sur le plan des parties azimutales) :

$$\iint_{A_\perp} \mathbf{F}_1 \bullet \mathbf{F}_2^* dA_\perp = 0 \quad (2.32)$$

Dans ce cas, on doit garder deux équations différentielles pour les pompes, qui s'écrivent alors :

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{i\omega_p}{c} \left[ (f_{11}|A_1|^2 + 2f_{12}|A_2|^2)A_1 + f_{2211}A_2^2A_1^* \exp[2i(\beta_2 - \beta_1)z] \right] \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{i\omega_p}{c} \left[ (f_{22}|A_2|^2 + 2f_{21}|A_1|^2)A_2 + f_{1122}A_1^2A_2^* \exp[2i(\beta_1 - \beta_2)z] \right] \quad (2.34)$$

Le dernier terme de ces équations provient de la dégénérescence spectrale des deux pompes et suggère qu'il serait possible d'échanger de l'énergie entre les deux ondes. Or, pour que ce processus s'effectue de manière efficace, il faudrait que les ondes soient en phase, ce qui impliquerait que la contribution non-linéaire ( $\approx \gamma P_p$ ) soit de taille à rivaliser avec la fréquence de l'exponentielle complexe  $2(\beta_2 - \beta_1)$  qui est très grande pour deux modes différents en comparaison avec des valeurs réalistes de  $\gamma P_p$ . On peut alors négliger ces termes dans l'intégration des équations. On se retrouve alors avec un système d'équation très simple :

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{i\omega_p}{c} \left[ (f_{11}|A_1|^2 + 2f_{12}|A_2|^2)A_1 \right] \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{i\omega_p}{c} \left[ (f_{22}|A_2|^2 + 2f_{21}|A_1|^2)A_2 \right] \quad (2.36)$$

On peut montrer facilement à partir de ces équations que

$$\frac{\partial |A_1|^2}{\partial z} = \frac{\partial |A_2|^2}{\partial z} = 0 \quad (2.37)$$

et qu'ainsi on a conservation de la puissance dans chaque pompe et, incidemment, de la puissance totale de pompe  $|A_1|^2 + |A_2|^2 = P_p$ . On peut alors combiner les équations différentielles pour les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  en une seule<sup>3</sup> :

$$\frac{\partial \ln(A_1 A_2)}{\partial z} = i \left[ (\bar{\gamma}_p + 2\gamma_{12})P_p + \Delta_{12}(|A_1|^2 - |A_2|^2) \right] \quad (2.38)$$

---

3. On note que  $\partial_z A/A = \partial_z \ln(A)$

avec

$$\bar{\gamma}_p = \frac{\omega_p}{2c}(f_{11} + f_{22}) \quad (2.39)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\omega_p}{c}f_{12} \quad (2.40)$$

$$\Delta_{12} = \frac{\omega_p}{2c}(f_{11} - f_{22}) \quad (2.41)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, on pompe avec une répartition de puissance égale à l'entrée de la fibre (incidence on a  $|A_1|^2 - |A_2|^2$  qui est petit devant  $P_p$ ) et le rapport

$$\frac{\Delta_{12}}{(\bar{\gamma}_p + 2\gamma_{12})} \approx 20\% \quad (2.42)$$

pour le mode fondamental et le mode  $TE_{01}$  en calcul vectoriel pour un barreau de silice dans l'air (avec  $R_{co} = 1.05 \mu\text{m}$ ) à  $\lambda_p = 532 \text{ nm}$ . On peut donc considérer que le second terme du membre de droite de l'équation (2.38) est négligeable et on peut alors solutionner directement l'équation pour obtenir le produit  $A_1 A_2$  :

$$A_1 A_2 = [A_1(0)A_2(0)] \exp \left[ i(\bar{\gamma}_p + 2\gamma_{12})P_p z \right] \quad (2.43)$$

Nous considèrerons également que le signal est dans le même mode que la pompe 1 (fondamental) et que l'idler est dans le mode de la pompe 2 (mode  $TE_{01}$ ). Les équations différentielles pour le signal et l'idler s'écrivent alors :

$$\frac{\partial A_s}{\partial z} \approx (2\gamma_{s1}|A_1| + 2\gamma_{s2}|A_2|)A_s + \gamma_{FWM}A_1(0)A_2(0)A_i^* \exp(-i\kappa z) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial z} \approx (2\gamma_{i1}|A_1| + 2\gamma_{i2}|A_2|)A_i + \gamma_{FWM}A_1(0)A_2(0)A_s^* \exp(-i\kappa z) \quad (2.45)$$

$$(2.46)$$

où  $\kappa = \beta_s + \beta_i - 2\bar{\beta}_p - (\bar{\gamma}_p + 2\gamma_{12})P_p$  avec la quantité de mouvement moyenne de la pompe :

$$\bar{\beta}_p = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}. \quad (2.47)$$

L'accord de phase se comporte donc comme si la pompe était un autre mode dont la courbe de dispersion serait situé entre celles des deux modes sur lesquels la pompe est envoyée. La figure 2.1 illustre les différents coefficients et on constate que ce sont les coefficients de modulation de phase croisée entre les pompes et l'onde de même mode qui sont maximum. On note également que l'amplitude du terme de mélange à quatre ondes est maximale (pour une puissance de pompe fixée) lorsque le produit  $A_1(0)A_2(0)$  est lui-même maximal, c'est-à-dire lorsque les deux pompes ont la même amplitude, soit  $A_1(0) = A_2(0) = \sqrt{P_p/2}$ . Cette configuration offre donc une nouvelle opportunité pour la génération d'un signal dans le mode fondamental et sera étudiée au chapitre 3.

Nous avons également eu besoin, dans le cadre de ce travail, de développer des outils pour estimer l'impact des perturbations des paramètres optogéométriques de la fibre sur le gain du mélange à quatre ondes. Pour ce faire, nous avons généralisé le modèle proposé par KARLSSON[53], travail faisant l'objet de la section suivante.

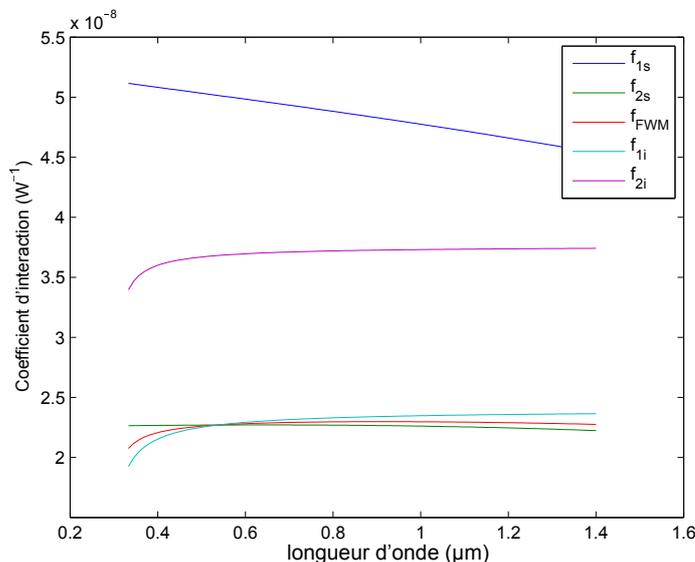


FIGURE 2.1 – Coefficients  $f$  des équations de mélange à quatre ondes avec pompage distribué sur deux modes et les signaux et idlers sur les mêmes modes que la pompe. On constate que ce sont les coefficients de modulation de phase croisée entre le signal ou l'idler et la pompe du même mode qui dominent, quoique tous les coefficients soient du même ordre de grandeur.

## 2.3 Perturbations stochastiques et espérance de gain

Les processus non-linéaires dans les fibres sont souvent très sensibles aux accords de phase entre les différentes ondes mises en jeu, que ce soit dans le cadre du mélange à quatre ondes ou de la génération d'harmoniques. Bien que le fait d'utiliser des fibres est avantageux au niveau du gain puisque les ondes sont spatialement en interaction sur une grande longueur, les fluctuations des propriétés de la fibre peuvent avoir des conséquences néfastes sur le gain. Or, ces perturbations ont un certain caractère aléatoire et, pour estimer correctement l'impact attendu (l'espérance) sur le gain, on doit considérer les distributions de probabilité des perturbations ainsi que leurs dynamiques. On appelle généralement une évolution de ce type «processus stochastique» (PS). C'est à l'aide de ce type de processus que nous parviendrons à modéliser les fluctuations de propriétés de la fibre et déterminer l'impact sur le gain. Il convient donc de prendre un instant pour développer davantage les PS avant de passer aux applications.

### 2.3.1 Processus stochastiques

Un *processus stochastique*, ou *processus aléatoire*, peut être défini comme un ensemble de variables aléatoires caractérisant l'évolution d'un système de valeurs aléatoires au cours du temps[54]. Autrement dit, un processus aléatoire est l'équivalent

probabiliste d'un système d'équations différentielles déterministes. De façon tout-à-fait analogue d'ailleurs, un processus stochastique peut souvent être formulé comme une *équation différentielle stochastique* (EDS)[55]. Des exemples bien connus de PS en physique sont, la chaîne de Markov [56], un PS discret, et le processus de Weiner, un PS continu comme celui qui sera utilisé ici, qui permet entre autre d'expliquer le mouvement brownien[57]. Le PS particulier auquel nous nous attarderons ici est le *processus d'Ornstein-Uhlenbeck* (PO-U) qui représente une *relaxation bruité*[58]. Le choix de ce processus pour représenter les fluctuations de paramètres de fabrication de la fibre est plutôt approprié car ceux-ci dépendent souvent de contrôleurs en boucle fermées qui ont des comportements analogues à des relaxations vers une valeur cible, en particulier en ce qui concerne le contrôle des dimensions de la fibre. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut être modélisé par la variable aléatoire  $X(t)$  via l'EDS suivante :

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = \theta[\mu - X(t)] + \sigma \frac{\partial W(t)}{\partial t} \quad (2.48)$$

où  $W(t)$  représente le processus de Weiner[59]. On note dans cette équation la présence d'un terme tendant à ramener la valeur de  $X(t)$  vers une valeur moyenne  $\mu$  avec une constante de rappel  $\theta$  ainsi qu'une composante aléatoire donnée par  $W(t)$ . En effet, on note que, dans le cas déterministe où il n'y a pas de fluctuations aléatoires (i.e.  $\sigma = 0$ ), on a bien une relaxation :

$$x(t) - \mu = x_0 \exp(-\theta t); \quad (2.49)$$

le rôle de  $W(t)$  ici est de modéliser la fluctuation aléatoire de  $X$  en tout instant. Deux propriétés importantes du processus de Weiner sous-jacent seront à prendre en compte pour définir le PO-U, soit l'écart-type de la distribution gaussienne associée,  $\sigma_W$ , liée à l'amplitude des perturbations, et la longueur de corrélation  $L_c$  traduisant la longueur après laquelle le processus n'est plus corrélé à lui-même. Autrement dit, si on a une distribution  $X(z)$  en un point  $z$  le long de la fibre, la perturbation  $X(z + L_c)$  est indépendante de la perturbation en  $X(z)$ . Plus formellement, ces deux concepts sont liés à la *fonction d'autocorrélation*,  $R(\zeta)$ , définie comme suit :

$$R(\zeta) = \langle [X(z) - \mu][X(z + \zeta) - \mu] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [X(z) - \mu][X(z + \zeta) - \mu] dz \quad (2.50)$$

On remarque évidemment par la définition que :

$$R(0) = \langle [X(z) - \mu]^2 \rangle = \sigma_W^2 \quad (2.51)$$

On peut donc, à partir de ces définitions, intégrer ce processus stochastique au sein des équations différentielles de mélange à quatre ondes dans le but d'étudier l'effet de la fluctuation sur le gain final, par exemple. Pour ce faire, nous allons donc nous pencher sur le cas du mélange à quatre ondes intramodal.

### 2.3.2 Perturbations stochastiques appliquées au MQO

Nous avons vu aux équations (2.30) et (2.31) que les équations différentielles du MQO intramodal, dans l'approximation de la pompe non-déplétée, s'expriment

essentiellement comme un système de deux équations différentielles couplées, celle de la pompe se résolvant exactement. On peut, sans perte de généralité, ajouter une perturbation longitudinale sur l'accord de phase,  $\Delta k_{\text{var}}(z)$ , en remplaçant le désaccord de phase composé par l'expression :

$$\kappa' = \kappa + \Delta k_{\text{var}}(z) \quad (2.52)$$

et, en posant le changement de variable suivant :

$$B_s = A_s \exp\left(\frac{i}{2} \left[ \int_0^z \kappa'(\zeta) d\zeta \right]\right) \quad (2.53)$$

on peut reformuler les équations différentielles (2.30) et (2.31) de la façon suivante :

$$i \frac{\partial B_s}{\partial z} = \frac{\kappa'_{sp}}{2} B_s - k_s f_{sipp} P_p B_i^* \quad (2.54)$$

$$i \frac{\partial B_i^*}{\partial z} = -\frac{\kappa'_{ip}}{2} B_i^* + k_i f_{ispp}^* P_p B_s \quad (2.55)$$

où

$$\kappa'_{sp} = 2(k_p f_{pp} - 2k_s f_{sp}) P_p - \Delta k_{\text{moy}} - \Delta k_{\text{var}}(z) \quad (2.56)$$

$$\kappa'_{ip} = 2(k_p f_{pp} - 2k_i f_{ip}) P_p - \Delta k_{\text{moy}} - \Delta k_{\text{var}}(z) \quad (2.57)$$

avec  $\Delta k_{\text{moy}} = \beta_s + \beta_i - 2\beta_p$ ,  $P_p = |A_p|^2$  la puissance de pompe et  $k_m = \omega_m/c$ . En regroupant les termes constants, on peut écrire  $\kappa'_{mp} = \Delta_{mp} + W(z)$ , où  $\Delta_{mp} = (2(k_p f_{pp} - 2k_m f_{mp}) P_p - \Delta k_{\text{moy}})/2$  et  $W(z) = \Delta k_{\text{var}}(z)/2$ , pour finalement exprimer le système d'équations différentielles sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = [\mathbf{G} + \mathbf{H}W(z)] \mathbf{B} \quad (2.58)$$

où l'on définit les matrices  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{H}$  par les expressions suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_s \\ B_i^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -i\Delta_{sp} & ik_s f_{sipp} P_p \\ -ik_i f_{ispp}^* P_p & i\Delta_{ip}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Or, puisque  $W(z)$  est une variable stochastique, l'équation (2.58) doit maintenant être considérée comme une EDS [55], et sa solution doit incidemment être un processus stochastique. L'expression des équations présentée ici est en quelque sorte une généralisation du développement effectué par KARLSSON [53] de par le fait qu'elle conserve l'expression générale des intégrales d'interaction  $f \dots$  et peut également sans problème intégrer les termes de pertes dans le désaccord de phase (sous la forme d'une partie imaginaire aux  $\beta$  des différentes ondes et donc de  $\Delta_{mn}$ ), termes qui peuvent avoir une incidence sur le gain global. En effet, ce cas plus général est plus approprié pour les cas d'accord de phase très loin de la pompe où la forme de mode et les aires effectives (via les coefficients  $f \dots$ ) ne sont pas constantes en fonction de la fréquence optique.

Une question très intéressante qui se pose maintenant concerne la nature de la variable stochastique  $W(z)$ . En effet, on peut considérer que la perturbation de l'accord de phase provient d'abord et avant tout de la perturbation de la dispersion qui peut être due à plusieurs facteurs. On peut penser, par exemple, à des fluctuations d'échelle (dus aux fluctuations du diamètre de la fibre pendant le tirage par exemple), de la fluctuation de l'indice ou du diamètre des trous (dans le cas d'une fibre PCF) ou de la fluctuation de la tension de tirage qui aura un effet sur l'indice transverse vu par les modes lors de la propagation [60]. Si ces différentes fluctuations peuvent être considérées comme indépendantes, la fluctuation totale sera donnée par la somme de toutes les fluctuations, ainsi, l'écart-type de la distribution de la variable  $W(z)$  sera donnée par :

$$\sigma_W^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta k}{\partial X_i} \Big|_{X_i=X_{i,0}} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (2.60)$$

où les  $X_i$  représentent les diverses contributions à la variation de la dispersion (et les  $X_{i,0}$  représentent leurs valeurs moyennes respectives) ou plus simplement, de l'accord de phase linéaire  $\Delta k$ . Pour fixer les idées, nous présenterons un exemple d'application de cette méthode d'analyse en prenant comme unique perturbation la fluctuation d'échelle le long de la fibre. Dans le cas d'une fibre microstructurée, le pas de la structure  $\Lambda$  sera considéré pour la fluctuation d'échelle. Dans ce cas de figure, la fluctuation  $\sigma_W$  de la variable  $W(z)$  s'exprime simplement par :

$$\sigma_W^2 = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta k}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=\Lambda_0} \right)^2 \sigma_\Lambda^2 \quad (2.61)$$

L'intégration de l'équation (2.58) peut s'effectuer simplement à l'aide du calcul stochastique en employant l'intégrale de Stratonovitch[55] pour obtenir le résultat suivant :

$$\mathbf{B}(z) = \exp(\mathbf{G}z + \mathbf{H}J(z)) \mathbf{B}(0) \quad (2.62)$$

où

$$J(z) = \int_0^z W(\zeta) d\zeta \quad (2.63)$$

et  $\mathbf{B}(0)$  représente les valeurs initiales de  $\mathbf{B}(z)$ . Or, puisque  $W(z)$  a une distribution gaussienne de moyenne nulle,  $J(z)$  a aussi une distribution gaussienne de même moyenne. Si nous voulons calculer l'espérance de l'amplitude,  $\langle \mathbf{B}(z) \rangle$ , on doit développer l'exponentielle en série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}^k}{k!} \langle J^k(z) \rangle \quad (2.64)$$

et, sachant que tous les moments impairs d'une gaussienne sont nuls et que les moments pairs sont donnés par[61] :

$$\langle J^{2k}(z) \rangle = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma_J^{2k} \quad (2.65)$$

la série se réduit à

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}^k}{k!} \langle J^k(z) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}^{2k}}{2^k k!} \langle J^{2k}(z) \rangle \quad (2.66)$$

et on peut réécrire l'espérance de l'amplitude comme :

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{z}) \rangle = \exp \left( \mathbf{G}z + \frac{\mathbf{H}^2}{2} f(z) \right) \mathbf{B}(0) \quad (2.67)$$

où  $f(z)$  peut être calculée en utilisant des relations de transformée de Laplace, pour finalement obtenir :

$$f(z) = 2L_c^2 \sigma_W^2 \left[ \exp \left( -\frac{z}{L_c} \right) - 1 + \frac{z}{L_c} \right] \quad (2.68)$$

On peut calculer exactement la matrice résultante de l'exponentielle de matrice dans la mesure où son argument est diagonalisable (ce qui est le cas ici). Pour fixer les idées sur l'effet de la partie stochastique, prenons l'exemple d'une onde se propageant dans un guide avec une fluctuation de sa constante de propagation suivant un processus  $W(z)$ . L'équation différentielle dans ce cas est :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = iW(z)A, \quad (2.69)$$

en intégrant cette équation puis en calculant l'espérance, on obtient :

$$\langle A(z) \rangle = A_0 \exp \left[ -\frac{f(z)}{2} \right] \quad (2.70)$$

Si on examine ce résultat, on se rend compte que l'espérance de l'amplitude tend vers zéro pour de grandes valeurs de  $z$  (car  $f(z)$  croît avec  $z$ ). Bien que ceci semble étrange à première vue, ce résultat reflète le fait qu'après une certaine longueur de fibre parcourue, la phase est complètement incertaine ; ainsi l'espérance tend vers la valeur moyenne, qui est nulle pour l'amplitude. Autrement dit, on ne peut tirer d'information sur le gain en puissance à partir de ces équations. Pour arriver aux expressions exprimant l'évolution de la puissance portée par le signal et l'idler, on doit développer le système de quatre équations différentielles couplées à partir des expressions de la puissance et non des amplitudes, soit  $P_s = |B_s|^2$  et  $P_i = |B_i|^2$ . Le système d'équations peut être représenté encore une fois sous forme matricielles à partir du vecteur  $\mathbf{P} = [P_s, P_i, 2\text{Re}(B_s B_i), 2\text{Im}(B_s B_i)]^T$  et les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  sont maintenant de dimension  $4 \times 4$  ayant comme expression pour  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2\text{Im}(\Delta_{sp}) & 0 & 0 & \omega_s h P_p \\ 0 & 2\text{Im}(\Delta_{ip}) & 0 & \omega_i h P_p \\ 0 & 0 & \text{Im}(\Delta_{sp} + \Delta_{ip}) & \text{Re}(\Delta_{sp} + \Delta_{ip}) \\ 2\omega_i h P_p & 2\omega_s h P_p & -\text{Re}(\Delta_{sp} + \Delta_{ip}) & \text{Im}(\Delta_{sp} + \Delta_{ip}) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

et  $\mathbf{H}$  n'a que deux éléments non-nuls, soient  $H_{34} = -H_{43} = 2$ . On peut évidemment intégrer cette équation tel que vu précédemment pour obtenir la solution :

$$P(z) = \exp(\mathbf{G}z + \mathbf{H}J(z)) \mathbf{P}(0), \quad (2.72)$$

dont l'espérance est donnée par :

$$\langle \mathbf{P}(z) \rangle = \exp \left( \mathbf{G}z + \frac{\mathbf{H}^2}{2} f(z) \right) \mathbf{P}(0). \quad (2.73)$$

Cette solution est complexe et on ne peut généralement pas obtenir de forme analytique pour le gain, sauf dans certains cas particuliers. Par exemple, si l'on considère le cas sans perte, les  $\Delta_{mp}$  sont réels, ainsi tous les éléments diagonaux de  $\mathbf{G}$  sont nuls ; on note aussi au passage que les  $f_{mnp}$  sont également réels. De plus, si on se place au cas d'accord de phase nominal, on a  $\Delta_{sp} + \Delta_{ip} = 0$ . Dans ce cas précis, on peut effectivement diagonaliser l'argument de l'exponentielle de façon analytique et trouver, par le fait même, la forme explicite de l'exponentielle matricielle. En cherchant l'espérance du gain petit signal,  $\langle G \rangle = \langle P_s(z) \rangle / P_s(0)$ , on pose comme condition initiale  $\mathbf{P}(0) = [P_{s0}, 0, 0, 0]^T$  et on trouve alors l'expression[53] :

$$\langle G \rangle = \frac{1}{2} \left( 1 + \left\{ \cosh[g(z)] + \frac{f(z)}{g(z)} \sinh[g(z)] \right\} \exp[-f(z)] \right) \quad (2.74)$$

où  $g(z) = [k_s k_i (2f_{mnp} P_p z)^2 + f^2(z)]^{1/2}$ . On peut montrer que cette fonction est maximale pour  $f(z) = 0$ , comme on peut le voir sur la figure 2.2, ce qui survient lorsque  $\sigma_W = 0$  ou dans la limite où  $L_c$  tend vers zéro. Une longueur de corrélation nulle représente le cas où l'on a un bruit blanc avec un contenu en fréquences donc infini, ce qui a peu de sens au sein d'une application physique, mais nous reviendrons plus tard au cas limite des faibles longueur de corrélation. Le cas de figure  $\sigma_W = 0$  peut cependant survenir dans le cas où  $\sigma_\Lambda = 0$  (ce qui représente une fibre parfaitement uniforme, cas peu réaliste) ou que :

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial \Lambda} = 0. \quad (2.75)$$

Comme on pouvait si attendre, si on trouve un point où l'accord de phase est invariant en fonction des fluctuations d'échelles, on peut espérer obtenir un gain maximum et on peut, à l'aide de la théorie développée ici, calculer ce gain. Il sera donc intéressant d'examiner l'existence de ces *points de stabilité* de l'accord de phase dans le but de voir si on peut exploiter cette propriété pour faciliter la conception de fibres optimisées pour les effets non-linéaires. Nous allons également examiner à l'annexe A quels sont, d'un point de vue théorique, les conditions permettant de vérifier la stabilité d'une transformation arbitraire de la dispersion.

### 2.3.3 Exemple de stabilité d'une dispersion simple pour une fluctuation d'échelle

La nature de  $W(z)$  est intimement liée à celle du processus selon lequel l'accord de phase varie, processus qui, à son tour, est lié à la variation des dimensions. Pour nous aider dans l'analyse, développons l'accord de phase autour du désaccord de

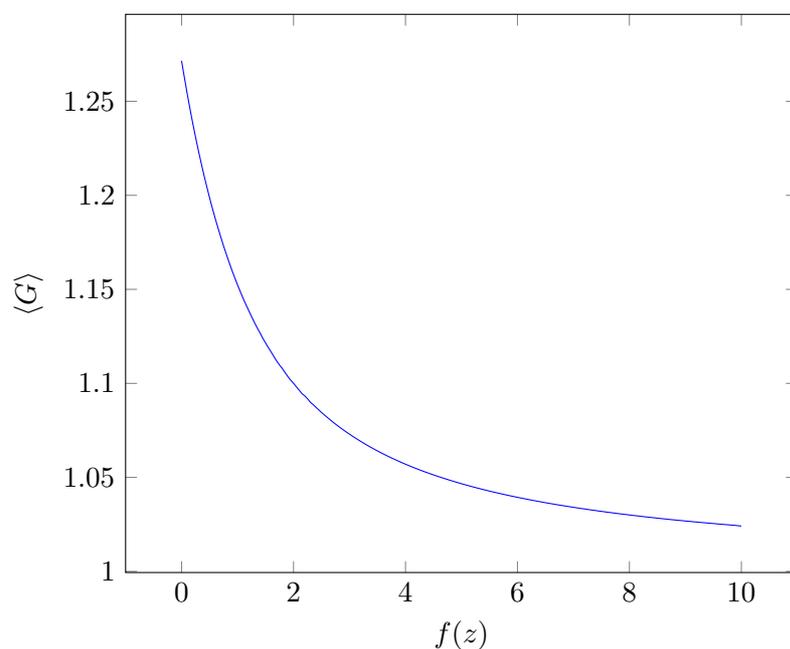


FIGURE 2.2 – Illustration de l'évolution du gain moyen en fonction de la variable  $f(z)$ . Pour fins d'illustration, nous avons pris la valeur  $g(z) = \sqrt{1 + f(z)^2}$ .

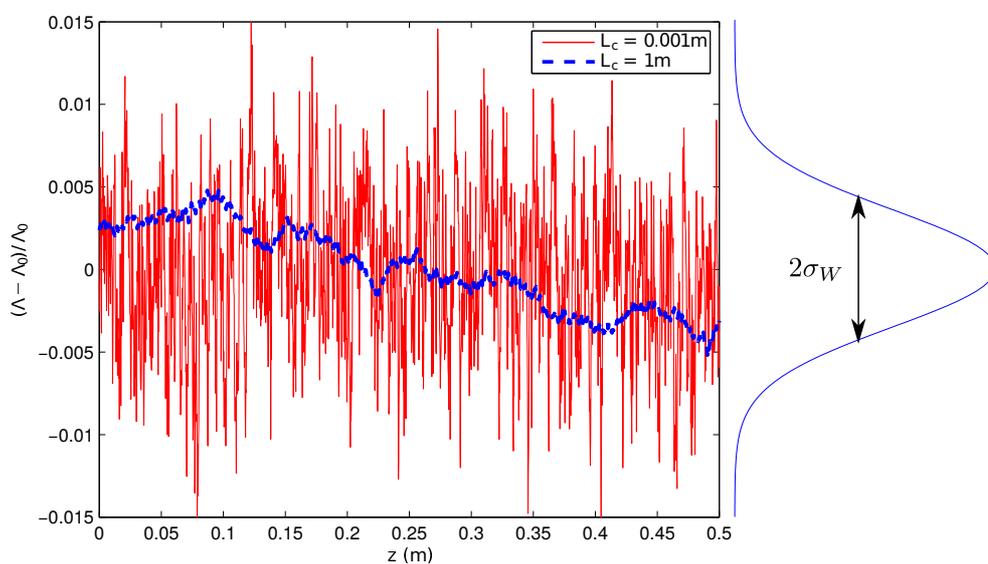


FIGURE 2.3 – Processus d'Ornstein-Uhlenbeck appliqué au facteur d'échelle de la structure de la fibre, ici le pas du réseau  $\Lambda$ . Deux processus ayant la même distribution de probabilité gaussienne avec un écart-type  $\sigma_\Lambda$  mais ayant des longueurs de corrélation différentes sont illustrés.

fréquence  $\Omega_0 = (\omega_p - \omega_s)$  tel que  $\Delta k(\Omega_0) = 0$ . Si on exprime l'accord de phase en fonction du désaccord de fréquence par rapport à la pompe, on a :

$$\Delta k \approx \beta_2 \Omega^2 + \frac{\beta_4}{12} \Omega^4 \quad (2.76)$$

avec les  $\beta_i$  évalués à la longueur d'onde de pompe, on trouve :

$$\Omega_0 = \pm \sqrt{-\frac{12\beta_2}{\beta_4}} \quad (2.77)$$

qui n'a de racines réelles que si  $\beta_2$  et  $\beta_4$  ne sont pas de même signe. Dérivons maintenant  $\Delta k$  par rapport à  $\Omega$  et évaluons autour de  $\Omega_0$  :

$$\left. \frac{\partial \Delta k}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_0} = 2\Omega_0(\beta_2 + \frac{\beta_4}{6}\Omega_0^2) = -2\beta_2\Omega_0 \quad (2.78)$$

d'où on écrit :

$$\Delta k \approx -2\beta_2\Omega_0(\Omega - \Omega_0) \quad (2.79)$$

Si on exprime maintenant  $\Delta k$  comme un développement limité autour d'une longueur d'onde de pompe moyenne  $\bar{\lambda}_p$  en considérant bien  $\Omega$  fixe (i.e.  $\partial\Omega/\partial\lambda_p = 0$ ), en se plaçant à  $\Omega = \Omega_0$ , on trouve :

$$\Delta k \approx -\frac{2\pi c}{\lambda_p} \beta_3 \Omega_0^2 (\lambda_p - \bar{\lambda}_p) \quad (2.80)$$

Or, puisque les courbes de dispersion demeurent inchangées si le rapport des dimensions et de la longueur d'onde demeure le même (à la dispersion du matériau près) on peut écrire :

$$\frac{\lambda_p - \bar{\lambda}_p}{\lambda_p} = \frac{R - R_0}{R_0} \quad (2.81)$$

où  $R$  est une dimension caractéristique de la fibre (comme le rayon de cœur par exemple) et  $R_0$  est sa valeur moyenne. Ainsi, on peut faire le lien entre la variation des dimensions et la variation de l'accord de phase :

$$\Delta k \approx -\frac{2\pi c}{\lambda_{p0} R_0} \beta_3 \Omega_0^2 (R - R_0) \quad (2.82)$$

Ceci nous permet ainsi de faire le lien entre le processus stochastique de dimension  $R(z)$  et le  $W(z)$  qui est en fait  $\Delta k/2$  et donc ce processus stochastique a essentiellement comme propriété d'avoir une fonction d'autocorrélation  $R_W(\zeta)$  et une variance telle que :

$$R_W(0) \equiv L_d^{-2} = \sigma_W^2 = \sigma_R^2 \left( \frac{\pi c}{\lambda_{p0} R_0} \beta_3 \Omega_0^2 \right)^2 \quad (2.83)$$

Tout le reste de l'analyse présentée dans [53] à partir de l'équation (8) moyennant la substitution pour  $R_W(\zeta)$  (et ses conséquences) devrait donc demeurer valide autour de  $\Omega_0$ . Il est donc théoriquement possible de solutionner l'espérance du gain en fonction des paramètres de fluctuation des dimensions de la fibre en suivant la même méthode.

### 2.3.4 Discussion théorique sur le point de stabilité - double zéro de dispersion

Cette section vise à avancer une explication sur le fonctionnement du phénomène de stabilisation en fonction des paramètres de dispersion. Nous supposons ici que la dispersion est d'abord une mise à l'échelle (pour fins de vérification) mais le concept peut être généralisé, ce qui sera également discuté.

Supposons que la constante de propagation  $\beta(\omega)$  puisse s'écrire comme une développement en polynôme de degré quatre autour de la longueur d'onde de pompe, soit :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_p) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_p)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\omega - \omega_p)^3 + \frac{\beta_4}{24}(\omega - \omega_p)^4 \quad (2.84)$$

Dans ces conditions, le désaccord de phase peut s'écrire (avec  $\Omega = \omega - \omega_p$ ) :

$$\Delta k(\omega) = \beta_2(\omega_p)\Omega^2 + \frac{\beta_4}{12}\Omega^4 \quad (2.85)$$

Supposons maintenant que la forme est exacte, ne nécessitant pas d'ordres supérieurs de dispersion, (i.e.  $\beta_4$  est constant) et que  $\beta_2$  est tel qu'il existe deux zéros de dispersion,  $\omega_{01}$  et  $\omega_{02}$ . On peut alors développer  $\beta_2(\omega_p)$  comme suit :

$$\beta_2(\omega_p) = \frac{\beta_4}{2}(\omega_p - \omega_{01})(\omega_p - \omega_{02}) \quad (2.86)$$

Ainsi, le désaccord de phase devient

$$\Delta k = \frac{\beta_4\Omega^2}{2} \left[ (\omega_p - \omega_{01})(\omega_p - \omega_{02}) - \frac{1}{6}\Omega^2 \right] \quad (2.87)$$

Dans ce cas de figure, il est clair que l'accord de phase survient en :

$$\Omega = \pm [-6(\omega_p - \omega_{01})(\omega_p - \omega_{02})] \quad (2.88)$$

qui a des solutions réelles pour  $\omega_p \in [\omega_{01}, \omega_{02}]$  en supposant les  $\omega_{0i}$  classés en ordre croissant. Si on étudie maintenant la variation du désaccord de phase en fonction d'un paramètre (peu importe lequel) qui fait varier légèrement la dispersion, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta k}{\partial X} &= \frac{\partial \beta_4}{\partial X} \frac{\Omega^2}{2} \left[ (\omega_p - \omega_{01})(\omega_p - \omega_{02}) - \frac{1}{6}\Omega^2 \right] \\ &\quad - \frac{\beta_4\Omega^2}{2} \left[ \frac{\partial \omega_{01}}{\partial X} (\omega_p - \omega_{02}) + \frac{\partial \omega_{02}}{\partial X} (\omega_p - \omega_{01}) \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

En considérant maintenant qu'on se place dans une condition d'accord de phase,  $\Omega = \Omega_0$  telle que  $\Delta k = 0$ , le premier terme s'annule et seul le deuxième demeure. Si on prend comme exemple que la dispersion varie comme un facteur d'échelle, ou suivant l'invariant de Maxwell,

$$\frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{\lambda_0}{\Lambda_0} \Rightarrow \Lambda\omega = \Lambda_0\omega_0 \quad (2.90)$$

On peut mettre la dispersion à l'échelle en effectuant la transformation suivante :

$$\beta_i(\Lambda) = \beta_i(\Lambda_0) \left( \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^i \quad (2.91)$$

et, du même coup, calculer les dérivées des pulsations qui seront proportionnelles auxdites pulsations via l'invariance ci-dessus,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \Lambda} = -\frac{\omega}{\Lambda} \quad (2.92)$$

d'où

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial \Lambda}(\Omega = \Omega_0) = \frac{\beta_4 \Omega_0^2}{2\Lambda} [\omega_{01}(\omega_p - \omega_{02}) + \omega_{02}(\omega_p - \omega_{01})] \quad (2.93)$$

La variation de désaccord de phase nulle survient donc quand :

$$\omega_p = \omega_{p,S} = \frac{\omega_{01}\omega_{02}}{\bar{\omega}_0} \quad (2.94)$$

et l'accord de phase aura lieu en :

$$\Omega_S = \sqrt{\frac{3\omega_{01}\omega_{02}}{2}} \left( \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{\bar{\omega}_0} \right) \quad (2.95)$$

avec

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2} \quad (2.96)$$

La condition de stabilité est illustrée pour un cas fictif à la figure 2.4. On peut noter effectivement que, en appliquant une variation de  $\pm 1\%$  sur le facteur d'échelle  $\Lambda$ , toutes les courbes se croisent au point où l'accord de phase est invariant à la fluctuation de  $\Lambda$ . Nous avons également calculé la variation de l'accord de phase en fonction du pas autour de l'accord nominal à l'équation (2.93), d'où nous pouvons tirer  $\sigma_W$  puis estimer le gain nominal à partir de l'équation (2.74). Le résultat est illustré à la figure 2.5, où l'on constate clairement l'intérêt d'avoir un point d'invariance de l'accord de phase; en effet, on constate une décroissance du gain en général lorsque  $\Omega$  augmente, sauf autour du point d'invariance où l'on observe tout de même un gain maximal. Nous avons donc, pour un cas très simple ( $\Delta k = f(\beta_2, \beta_4)$  seulement), qu'il existe, pour une dispersion ayant deux zéros, un point d'invariance de l'accord de phase nul en fonction des fluctuations d'échelle. Nous avons également montré que le gain est effectivement maximal dans ces conditions, ce qui justifie d'envisager des designs de fibre exploitant cette propriété pour exalter le gain à un accord de phase en particulier, ce qui fera l'objet du prochain chapitre. Or, la question demeure à savoir s'il existe un principe général pour déterminer quels sont les conditions à imposer sur les variations de la dispersion pour déterminer l'existence d'un point de stabilité. La réponse à cette question est en fait relativement simple, et fera l'objet de l'annexe A.

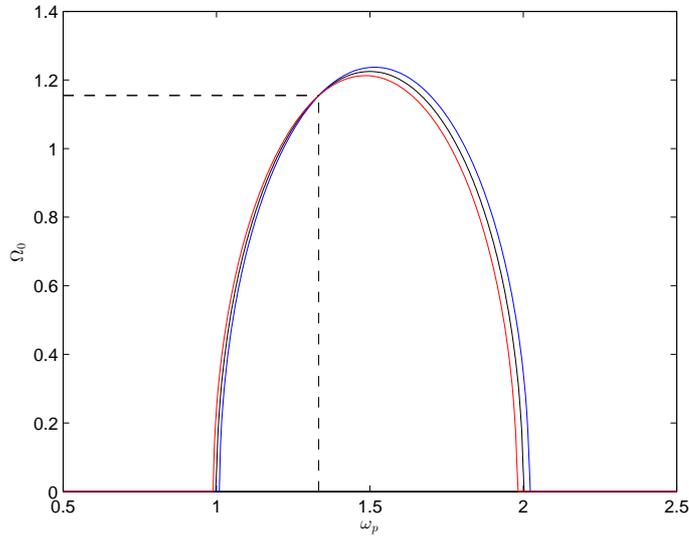


FIGURE 2.4 – Illustration de la stabilité pour deux zéros de dispersion en considérant  $\beta_4 = -1$ ,  $\omega_{01} = 1$  et  $\omega_{02} = 2$ .

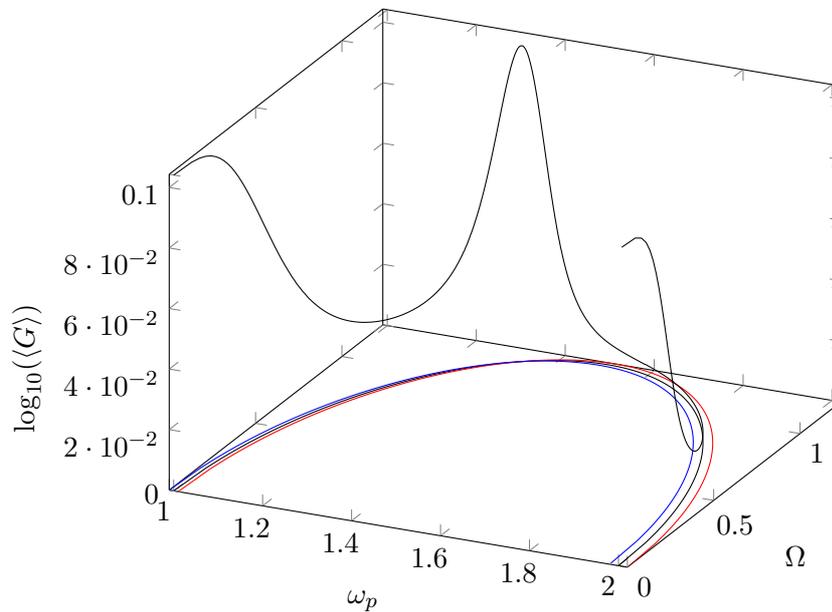


FIGURE 2.5 – Illustration de l'évolution du gain moyen le long de la courbe d'accord de phase de la figure 2.4. On note bien ici l'intérêt du point de stabilité. La partie stochastique ajoutée a été choisie arbitrairement pour fins d'illustration.

### 2.3.5 Impact de la longueur de corrélation

L'impact de la longueur de corrélation ( $L_c$ ) des processus stochastiques sur la dégradation du gain dans le MQO a déjà été rapporté dans plusieurs publications[53, 62]; on note en particulier qu'il est généralement connu pour être pire pour de grandes longueurs de corrélation. Pour illustrer cet effet, on peut s'attarder aux limites de  $f(z)$ , donnée à l'équation (2.68) en fonction du rapport  $L_c$ . Dans la limite où l'on considère le rapport  $z/L_c$  très grand (c'est-à-dire,  $L_c$  courte par rapport à  $z$ ), on aura  $f(z) \approx 2zL_c\sigma_W^2$ . Dans le cas inverse, soit pour  $L_c \gg z$ , on obtient  $f(z) \approx (z\sigma_W)^2$ , tel qu'illustré dans[53]. Pour être tout à fait rigoureux, on peut démontrer que la fonction  $f(z)$  est monotone croissante en  $L_c$  en montrant que sa dérivée est strictement positive. Pour ce faire, calculons cette dérivée :

$$\frac{\partial f(z)}{\partial L_c} = 2\sigma_W^2 \left\{ 2L_c \left[ \exp\left(-\frac{z}{L_c}\right) - 1 \right] + z \left[ \exp\left(-\frac{z}{L_c}\right) + 1 \right] \right\} \quad (2.97)$$

On note que le premier terme, que nous noterons  $A$  :

$$A = 2L_c \left[ \exp\left(-\frac{z}{L_c}\right) - 1 \right] \quad (2.98)$$

est strictement négatif ( $z$  et  $L_c$  étant définies positives) et compris dans l'intervalle  $[-2L_c, 0]$ . De manière analogue, le second terme, que nous noterons  $B$  :

$$B = z \left[ \exp\left(-\frac{z}{L_c}\right) + 1 \right] \quad (2.99)$$

est strictement positif et compris entre dans l'intervalle  $[z, 2z]$ . Or, puisque ces deux quantités n'ont pas le même signe, il est difficile de juger directement du signe final de la dérivée. Un peu de travail peut cependant nous permettre de rapidement montrer que le terme positif l'emporte toujours sur le terme négatif. En effet, pour que le résultat de la somme  $A + B$  des deux termes soit toujours positif, on doit nécessairement avoir que :

$$\left| \frac{B}{A} \right| \geq 1 \quad (2.100)$$

On peut montrer simplement que :

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \frac{x}{\tanh x}, \quad x = \frac{z}{2L_c} \quad (2.101)$$

qui, comme on peut le voir à la figure 2.6, est en effet toujours supérieure ou égale à 1. Ainsi,  $\partial f/\partial L_c$  est strictement positive, indiquant que  $f$  est monotone croissante avec  $L_c$ . Puisque nous avons vu que le gain est maximum pour  $f = 0$ , il en va de soi que le gain décroît de façon monotone en fonction de  $L_c$ . Bien que toute cette discussion soit théorique à la base, cette conclusion a été démontrée expérimentalement en découpant une fibre en petits segments qui furent ensuite soudés dans un ordre aléatoire[62]. Cette opération a pour conséquence de réduire directement la longueur de corrélation et une amélioration des performances a été

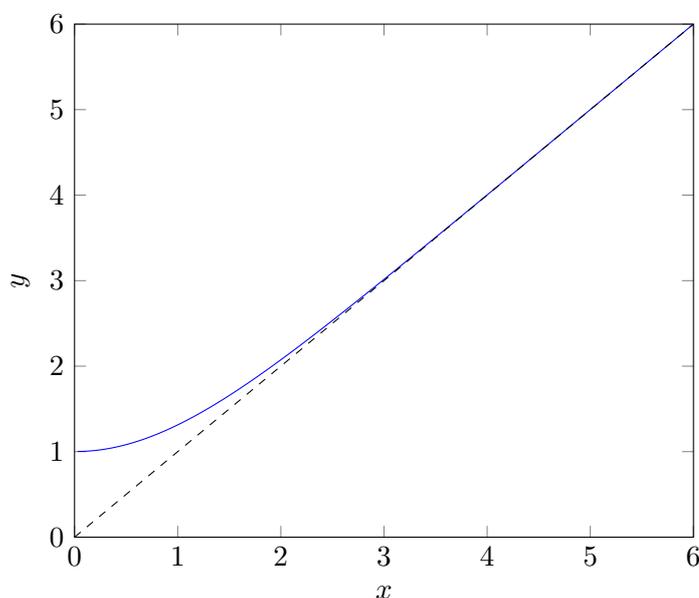


FIGURE 2.6 – Illustration de la fonction  $y = x \cdot \tanh^{-1}(x)$  pour  $x$  défini positif.

constatée. Bien que ceci ne soit pas possible à faire dans la plupart des cas pratiques, cette expérience confirme néanmoins la tendance obtenue par calcul. Un résumé de l'évolution de la fonction  $f(L_c, z)$  ainsi que les formes asymptotiques est présenté à la figure 2.7.

## 2.4 Discussion et perspectives

Nous avons développé dans ce chapitre les outils théoriques sur le MQO dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants. En particulier, la nature exacte des coefficients d'interaction non-linéaire  $f_{mn}$  et  $f_{ijkl}$  ainsi que le modèle stochastique de calcul de gain nous seront utiles à l'analyse des différents designs envisagés pour générer des UV dans les fibres.

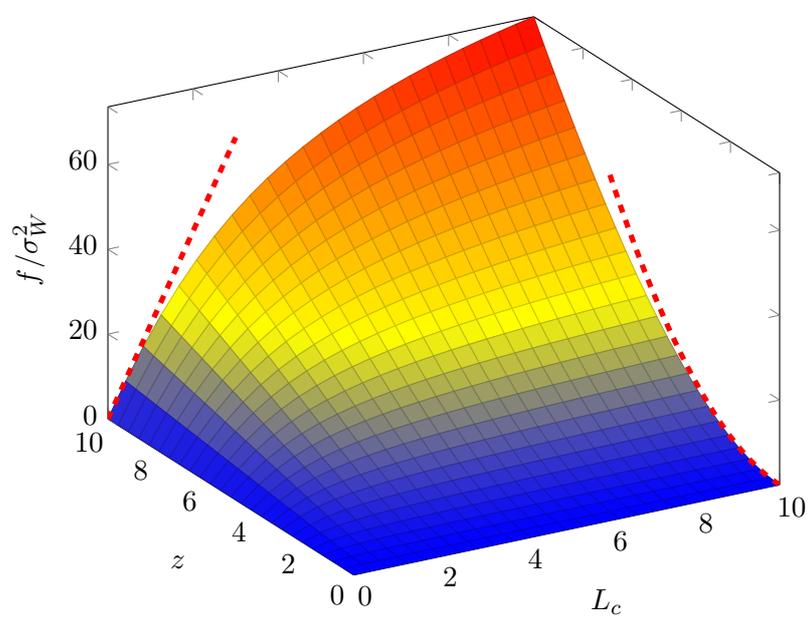


FIGURE 2.7 – Illustration de l'évolution de la fonction  $f$  et des formes asymptotiques ( $z \gg L_c$  et  $L_c \gg z$ , tiretés rouges).



# Approches de designs pour génération d'UV et réalisations

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Contexte et motivation</b>	<b>59</b>
<b>3.2</b>	<b>Accord de phase inter-bande</b>	<b>60</b>
<b>3.3</b>	<b>Exploitation du point de stabilité</b>	<b>65</b>
3.3.1	Perturbations d'échelle et stabilité	67
3.3.2	Fluctuations des trous	78
3.3.3	Fluctuations de la tension de fibrage	81
3.3.4	Discussion sur le design et l'aspect expérimental	83
<b>3.4</b>	<b>Fibre à dispersion oscillante et réseaux à long pas en régime non-linéaire</b>	<b>87</b>
<b>3.5</b>	<b>Mélange à quatre ondes non-dégénéré modalement</b>	<b>89</b>
3.5.1	Simulations	89
3.5.2	Caractérisations expérimentales	95
3.5.3	Discussion	96
<b>3.6</b>	<b>Conclusion et perspective</b>	<b>99</b>

---

## 3.1 Contexte et motivation

Nous avons déjà mentionné précédemment tout l'intérêt technologique pouvant motiver le développement de source fibrées dans l'ultraviolet. Or, bien qu'en théorie il serait possible de générer des UV grâce à la génération de seconde harmonique (impossible dans la silice à cause de la symétrie d'inversion du matériau) ou de troisième harmonique, ces systèmes sont généralement plus complexes, nécessitant de cascader des systèmes de doublage de fréquence, ou sont très peu efficaces dû à la sensibilité de l'accord de phase qui, comme nous l'avons vu, dégrade rapidement le gain à cause des perturbations de la dispersion induites entre autres par le procédé de fabrication de la fibre optique. Reste alors le mélange à quatre ondes comme solution de génération de fréquences. Le mélange à quatre ondes, permet de générer des sources très larges (des supercontinua) pouvant couvrir tout le spectre de l'infrarouge aux UV, mais on peut également, en se plaçant par exemple en régime de dispersion normale et en exploitant la dispersion d'ordre élevée, générer des bandes de gain fines et très loin de la pompe. Nous allons nous attarder ici à ce deuxième

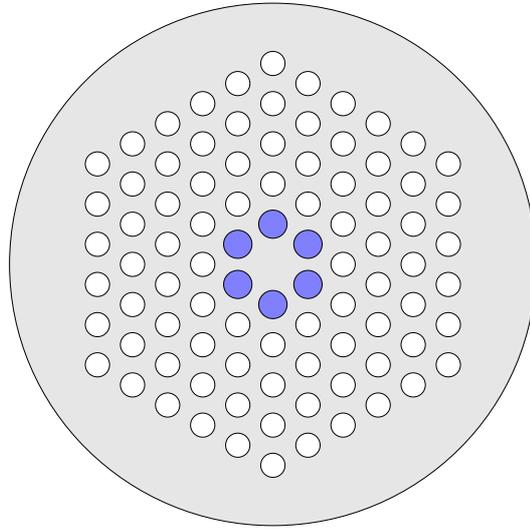


FIGURE 3.1 – Rappel de design de la fibre hybride H1 pour génération d'UV. Les zones en blanc dénote les trous d'air, les plots à gradient d'indice dopés germanium sont identifiés en bleu et la surface grise représente la silice. Le pas de la structure est environ  $\Lambda = 1 \mu\text{m}$ , le diamètre normalisé des trous d'air est  $d_{\text{Air}}/\Lambda = 0.7$  et celle des plots dopés est de  $d_{\text{Ge}}/\Lambda = 0.7$ .

cas de figure dans le but de générer des UV à partir d'une pompe à 532 nm ; ces pompes étant elles-mêmes le fruit d'un processus de génération de seconde harmonique basé sur des cristaux de niobate de lithium pôlés périodiquement (PPNL) sont maintenant si efficaces qu'on peut essentiellement les considérer comme sources de premier plan puisqu'elle sont maintenant répandues et abordables. Dans ce chapitre nous allons tout d'abord aborder le cas original de l'accord de phase inter-bande dans une fibre hybride, puis l'étude de designs présentant un point de stabilité (ie une sensibilité réduite aux fluctuations stochastiques), une approche basée sur une modulation périodique de la dispersion de la fibre et enfin le cas d'une fibre air-silice permettant de générer une onde UV dans le mode fondamental à l'aide d'un pompage mixte en modes spatiaux.

### 3.2 Accord de phase inter-bande

Tout d'abord, rappelons le design de la fibre hybride présenté au chapitre 1 (et décrit dans[3]) à la figure 3.1. Nous allons, pour la suite de ce travail, référer à ce type de fibre par la dénomination H1.

Le design original de la fibre H1 avait pour but de générer de courtes longueurs d'onde par un accord de phase impliquant trois modes : une pompe dans le mode fondamental de la première BIP à 532 nm devant générer un idler dans le mode fondamental RTIM et un signal à courte longueur d'onde dans le mode fondamental de la seconde BIP. Cette approche avait été choisie pour principalement deux rai-

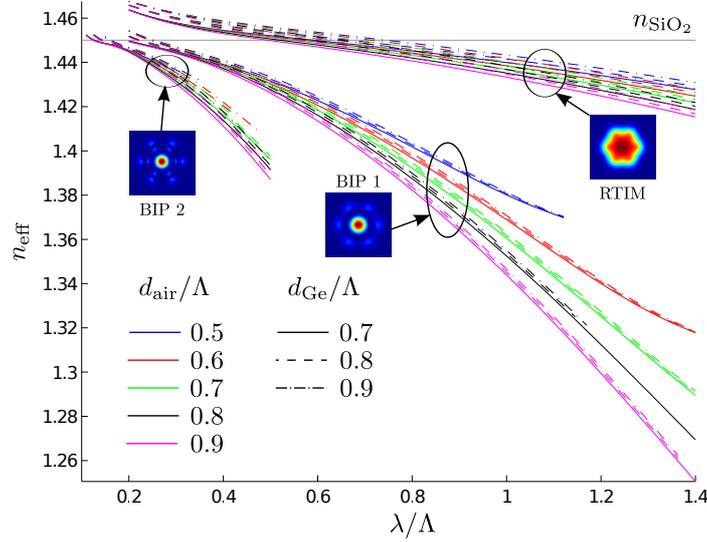


FIGURE 3.2 – Dispersions calculées par la méthode des éléments finis (COMSOL) pour le design de fibre hybride présenté dans[3] avec différents paramètres de structure normalisés. On constate que l’impact des plots de germanium n’est considérable qu’à courte longueur d’onde.

sions. Tout d’abord elle permettait d’obtenir des accords de phase avec des décalages spectraux importants tout en couplant entre eux des modes de types fondamentaux (et donc potentiellement avec des gains plus forts qu’en couplant des modes d’ordre supérieur et fondamentaux). Un second avantage est la possibilité, comme indiqué au chapitre 1, de contrôler séparément les dispersions aux courtes et grandes longueurs d’onde. Plusieurs simulations ont été effectuées pour modéliser la dispersion des différents modes pour différents paramètres normalisés de structure (i.e.  $d/\Lambda$  des trous d’air allant de 0.5 à 0.9 par pas de 0.1 et  $d/\Lambda$  des inclusions de germanium allant de 0.7 à 0.9). On suppose que les inclusions de germanium ont un profil d’indice parabolique avec un saut d’indice au centre de  $\Delta n = 32 \times 10^{-3}$ . Les dispersions des trois modes pour cet espace de paramètres sont illustrées à la figure 3.2.

En supposant un pas de  $1 \mu\text{m}$  puis en ajoutant la dispersion du matériau de manière perturbative, on peut calculer les courbes d’accord de phase linéaire pour le régime de pompage intramodal sur la BIP 1 et le régime intermodal avec le signal, la pompe et l’idler dans la seconde BIP, la première BIP et le régime RTIM respectivement. Les résultats de ce calcul sont illustrés à la figure 3.3. On constate l’existence de solutions pour le régime intermodal seulement pour de grandes valeurs de  $d_{\text{air}}/\Lambda$ ; en effet, pour des trous trop petits, le mode de la seconde BIP n’existe que sur une très courte plage de longueur d’onde et ne permet pas d’accord de phase.

Une fibre de type H1 a été réalisée et une image par microscope électronique à balayage (MEB) de la structure obtenue est représentée à la figure 3.4. Pour

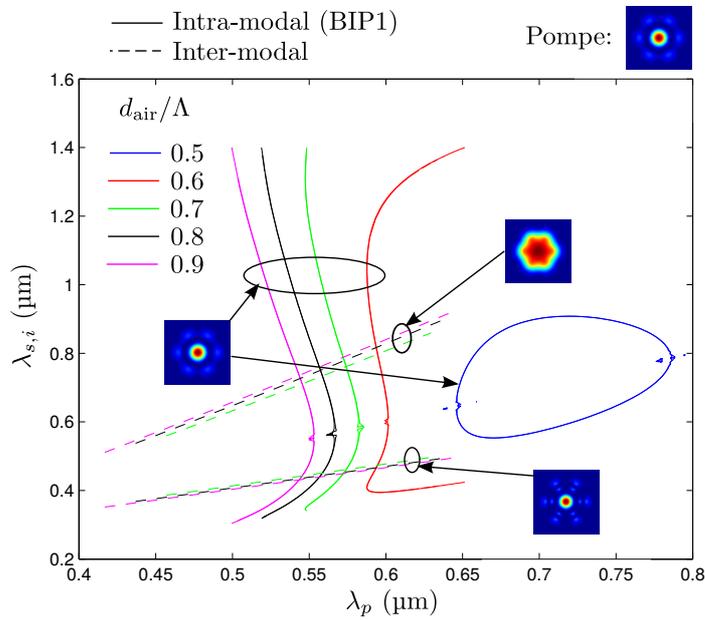
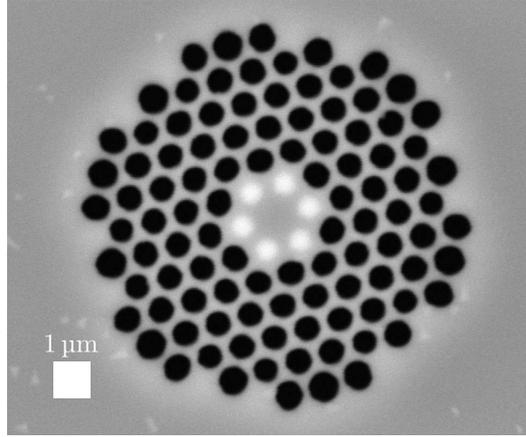


FIGURE 3.3 – Accords de phase linéaires pour la fibre hybride en régime intra et intermodal. Le domaine d'existence de solutions pour le mélange intermodal est surtout limité par le mode de la seconde BIP, d'une part par le point où son indice effectif passe sous celui de la silice et d'autre part par sa coupure due au  $n_{FSM}$  des trous d'air. Les courbes sont tracées pour  $d_{Ge}/\Lambda = 0.7$ .

Paramètre	Valeur
Temps d'impulsion	550 ps
Taux de répétition	7 kHz
Puissance crête	11 kW

TABLE 3.1 – Paramètres du laser microchip *Teem Photonics* SNG-05EFIGURE 3.4 – Image MEB de la fibre H1 fabriquée au laboratoire. Cette fibre a un pas  $\Lambda = 0.93 \mu\text{m}$ , un diamètre de trous (zones noires)  $d_{\text{air}}/\Lambda = 0.75$  et d'inclusions dopées (zones claires) de  $d_{\text{Ge}}/\Lambda = 0.74$ . Le fond gris représente la silice.

caractériser cette fibre, nous avons injecté la pompe, un microchip dont les détails techniques sont colligés au tableau 3.1, pour constater que le seul accord de phase visible était l'accord de phase intra-BIP1, comme on peut le voir à la figure 3.5. En effet, en filtrant la pompe, on constate principalement la présence de trois pics sur le spectre : la raie Stokes Raman (identifiée par SR sur la figure) et deux pics de mélange à quatre ondes à  $\pm 30$  THz de la pompe (identifiés par « s » et « i » sur la figure). L'observation du champ lointain de ces pics nous montre clairement qu'on a affaire au MQO intramodal. Une acquisition sur un spectre très large (en encart) nous permet également de constater qu'il n'y a aucun autres pics alors qu'on se serait attendu à observer l'accord de phase inter-bande à de plus grandes valeurs de décalage spectral.

Ainsi, malgré le fait que le design devrait normalement supporter les deux régimes, soit MQO intra et intermodal, malheureusement, seul le MQO intramodal se manifeste. A ce moment, des simulations numériques de propagation (utilisant l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée modifiée [63, 64, 65]) incluant une petite variation sinusoidale de diamètre ont montré que de telles perturbations annihilait complètement le gain de mélange à quatre ondes intermodal. Cette constatation constitue la motivation principale au développement du modèle de calcul de gain incluant les perturbations stochastiques de l'accord de phase présenté au chapitre précédent. Nous avons donc appliqué ce modèle à nos différentes simulations de

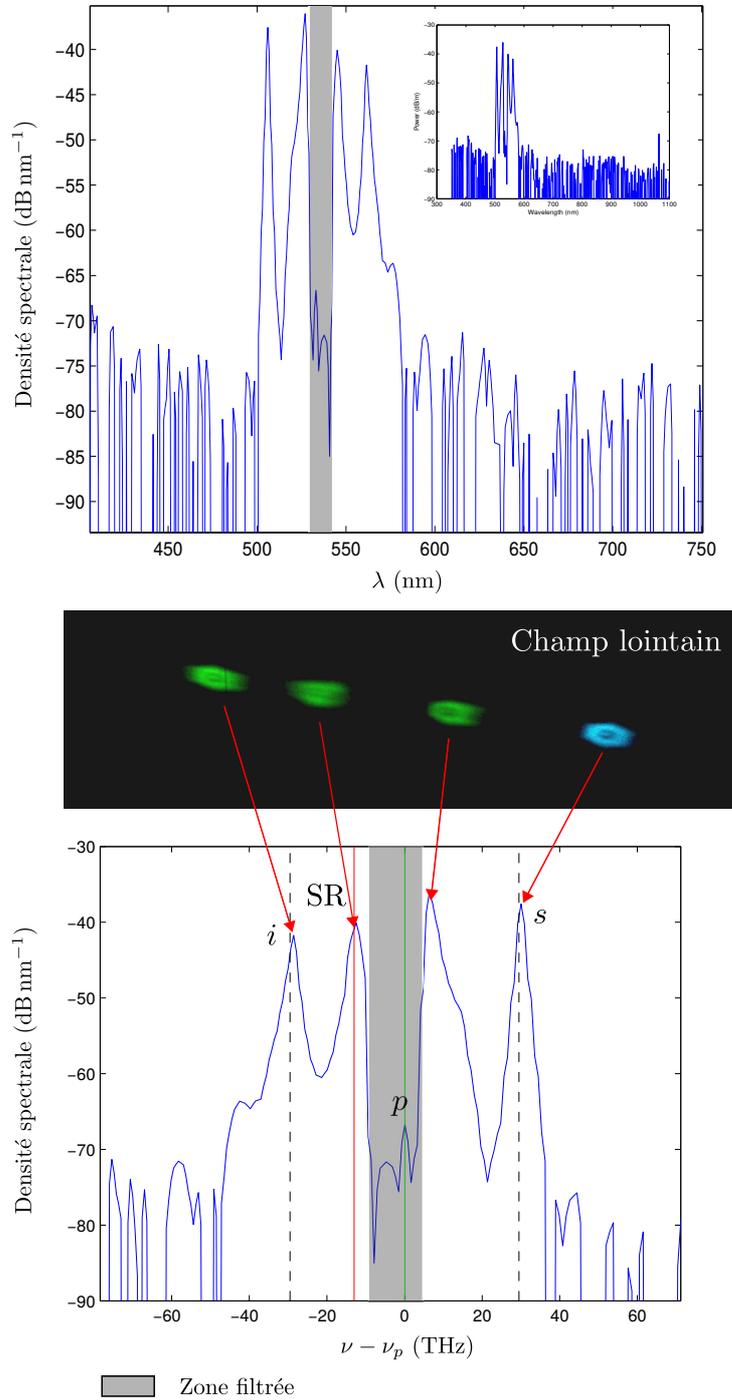


FIGURE 3.5 – Mesure de spectre de transmission au bout d'environ 1 m de fibre H1. On constate la présence de MQO intramodal dans le mode fondamental de la première BIP (dont on peut voir les champs lointains résolus en longueur d'onde) et la raie Stokes provenant de l'effet Raman. La pompe a été filtrée pour éviter la saturation du système de détection. Une acquisition très large spectralement, visible en encart, montre qu'aucun autre effet n'est visible en-dehors de la plage illustrée.

design en utilisant l'équation (2.74). Pour effectuer le calcul de  $f(z)$ , nous avons utilisé  $z = 50$  cm,  $L_c = 1$  mm,  $\sigma_\Lambda = 1\%$  du pas nominal et  $\sigma_W = |\partial\Delta k/\partial\Lambda|\sigma_\Lambda/\sqrt{2}$  où la dérivée de l'accord de phase par rapport au pas est calculée pour chaque point de la courbe d'accord de phase. La puissance de pompe utilisée est  $P_p = 500$  W. Nous avons également considéré le coefficient de mélange à quatre ondes  $f_{ppsi}$  constant en fonction de la longueur d'onde, mais celui-ci a été estimé à l'aide des véritables profils de champs des modes impliqués (seul le champ du mode de BIP 1 pour le mélange intramodal et les trois champs pour le régime intermodal). Les valeurs des coefficients  $f_{ppsi}$  pour les deux régimes étant du même ordre, c'est véritablement  $\sigma_W$  qui déterminera le comportement du système.

En appliquant ce modèle aux deux types d'accord de phase pour la fibre H1, nous avons pu constater une différence majeure entre les deux régimes de MQO quant à leur gain. En effet, comme nous l'illustre la figure 3.6, le gain du mélange à quatre ondes intermodal est largement inférieur au gain du MQO intramodal par un rapport d'environ 450 dB (au point où les deux régimes se croisent). Le régime de phase intramodal semble donc plus intéressant *a priori* pour avoir un gain plus important et plus robuste aux imperfections liées au procédé de fabrication. On constate par contre ici que le gain a tendance à diminuer au fur et à mesure que l'on augmente l'espacement spectral  $\Omega$ . Or, l'analyse des autres designs nous a permis de remarquer la présence de points ayant un gain maximal, et ce, même très loin de la pompe comme le montre la figure 3.7. Nous avons donc décidé d'étudier ce *point de stabilité* pour tenter d'en tirer profit et générer des longueurs d'onde très loin de la pompe tout en ayant un gain élevé. Nous allons maintenant présenter cette étude dans la section suivante.

### 3.3 Exploitation du point de stabilité

Nous avons noté au chapitre théorique sur le MQO (ce qui est également montré dans un cas plus spécifique dans l'article de KARLSSON de 1998), que le gain attendu diminue généralement au fur et à mesure que l'écartement des fréquences  $\Omega$  est grand. Dans le cas de la génération d'UV à partir de lumière visible, l'écartement est généralement supérieur à 100 THz, ce qui peut devenir problématique. Or, comme nous l'avons démontré au chapitre 2, il existe parfois certaines conditions qui permettent d'obtenir un remonté du gain provenant de l'insensibilité de l'accord de phase à certaines perturbations. Dans le cas présent, une des perturbations les plus communes du processus de tirage sont liées à l'instabilité du facteur d'échelle de la structure dues aux fluctuations de vitesse et de température pendant le processus de tirage. Mais il existe cependant d'autres fluctuations de la dispersion que nous parcourrons également ici comme les fluctuations de tension de tirage (ou de contraintes normales axiales  $\sigma_z$ ) et également une variabilité au niveau de la taille des trous. Nous considérerons également que toutes ces perturbations peuvent être modélisées comme des processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et donc la théorie donnant l'espérance du gain pour les processus stochastiques considérés indépendants

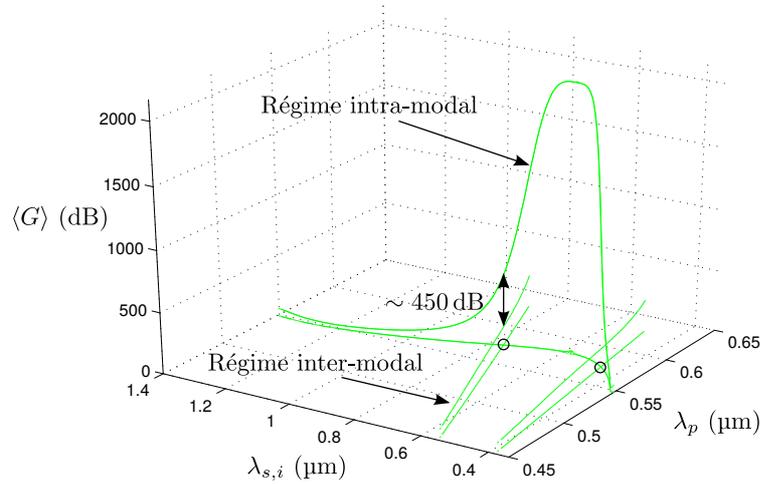


FIGURE 3.6 – Comparaison du gain entre les régimes d'accord de phase intra et intermodal pour la fibre H1  $d_{\text{air}}/\Lambda = 0.7$ . Pour le calcul, nous avons utilisé  $\sigma_{\Lambda} = 1\%$ ,  $z = 50$  cm,  $L_c = 1$  mm et  $P_p = 500$  W. En observant le point corrGBoù les deux régimes produisent la même longueur d'onde (en dispersion normale pour le mode de BIP 1), on constate que le gain est bien supérieur pour le régime intra-bande par une différence d'environ 450 dB.

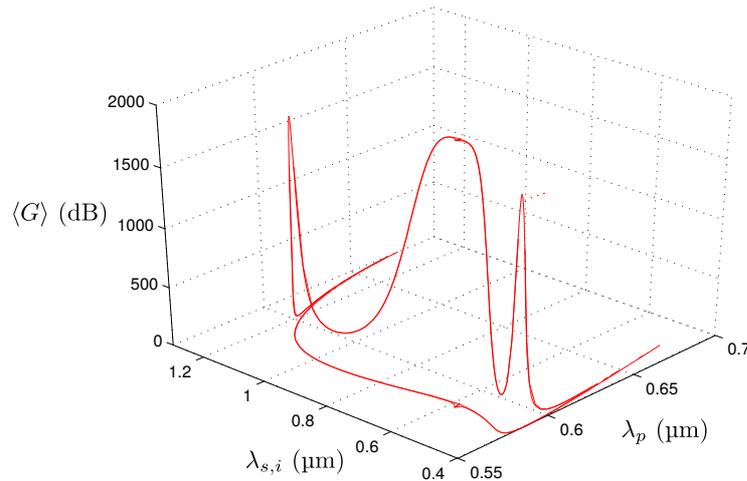


FIGURE 3.7 – Exemple de gain stable pour un design ayant  $d_{\text{air}}/\Lambda = 0.6$ . Les paramètres de calculs sont les mêmes que ceux utilisés pour la figure 3.6.

que nous avons développée, pourra être utilisée. Pour commencer, nous allons nous attarder aux fluctuations d'échelles.

### 3.3.1 Perturbations d'échelle et stabilité

Comme nous avons pu le voir au chapitre 2, l'écart-type de la variable stochastique  $W(z)$  peut s'exprimer par l'équivalent du *théorème de Perceval*, soit que son carré est donné par la somme des carrés des écarts-types des différents processus sous-jacents, pourvu que ceux-ci ne soient pas corrélés ou, autrement dit, qu'ils soient indépendants. Pour simplifier l'analyse et bien comprendre la nature des différentes perturbations sur l'accord de phase, ceux-ci seront traités les uns après les autres. Nous allons débiter par l'analyse de l'impact des perturbations d'échelle dans deux cas de figure ; dans un premier temps, l'accord de phase original derrière le design de la fibre hybride sera étudié dans le cas de, soit l'accord intermodal où la pompe est injectée dans le premier mode de BIP, le signal (UV) est généré dans le mode fondamental de la deuxième BIP et l'idler (IR) est généré dans le mode RTI. Dans un deuxième temps, l'accord de phase intramodal de la première BIP sera également étudié, et cette étude sera ensuite étendue à une fibre PCF standard air-silice à un défaut.

Rappelons d'abord la définition de l'écart-type de la variable aléatoire  $W(z)$  pour une fluctuation d'échelle, définition qui sera utilisée subséquemment dans les calculs :

$$\sigma_W^2 = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta k}{\partial \Lambda} \right)^2 \sigma_\Lambda^2 \quad (3.1)$$

La condition de stabilité correspond ainsi à

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial \Lambda} = 0 \quad (3.2)$$

#### 3.3.1.1 Accord de phase intra-BIP 1

Lorsqu'on regarde l'accord de phase intra-BIP 1, on utilise donc la même courbe de dispersion pour la pompe, le signal et l'idler, ce qui nous ramène au cas dégénéré en fréquence et modalement homogène du chapitre 2. On peut alors calculer l'accord de phase,  $\Delta k$ , et sa dérivée par rapport au pas de la structure,  $\partial_\Lambda \Delta k$ . On peut ensuite tracer pour différents pas les courbes  $\lambda_s = f(\lambda_p)$  satisfaisant l'accord de phase ( $\Delta k = 0$ ) et les courbes  $\partial_\Lambda \Delta k = 0$  associées. S'il existe un point d'intersection entre ces deux courbes, ce point est alors stable et on devrait y observer un gain maximal ; la démarche en question est illustrée à la figure 3.8.

Il y a au total quatre paramètres à parcourir pour étudier le comportement du point de stabilité, soit  $d_{Ge}/\Lambda$ , le diamètre des zones dopées germanium sur le pas de la structure,  $d_{air}/\Lambda$ , le diamètre des trous normalisé au pas de la structure,  $\Lambda$ , le pas de la structure lui-même et la longueur d'onde de pompe. Si on trace la position du point de stabilité dans cet espace, on obtient les courbes de la figure 3.9. Par soucis de simplicité, la variation d'indice est appliquée de manière perturbative pour la

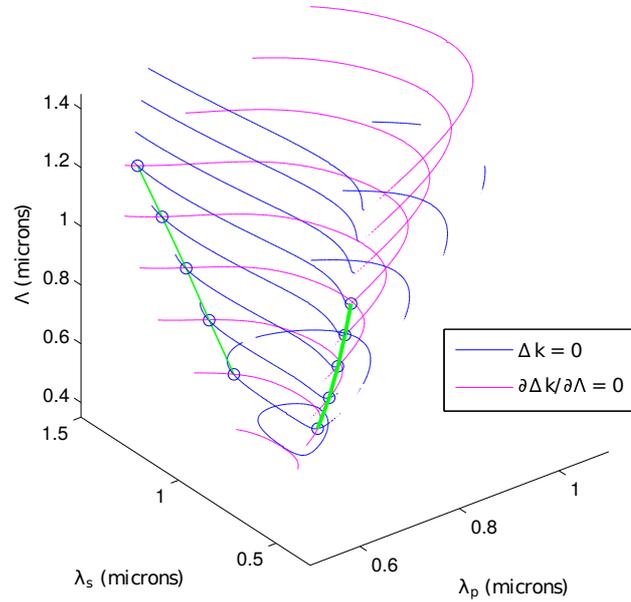


FIGURE 3.8 – Exemple d’algorithme permettant de retrouver les coordonnées du point de stabilité à partir des intersections des courbes où l’accord de phase  $\Delta k$  et sa dérivée par rapport à la perturbation,  $\partial_{\Lambda} \Delta k$ , s’annulent. Les résultats affichés sont ceux de la fibre H1, les cercles indiquant les points d’intersection de l’accord de phase et de sa dérivée par rapport au pas; la courbe en vert définit ainsi la trajectoire de la longueur d’onde du signal (ou de l’idler) au point de stabilité en fonction de la longueur d’onde de pompe et du pas.

variation de pas, c’est à dire que, en partant d’un pas  $\Lambda$  pour obtenir la dispersion à un pas  $\Lambda'$ , on utilise l’équation suivante :

$$\beta(\beta' - \beta) = k_0^2 n(n' - n) \quad (3.3)$$

On remarque immédiatement, on observant la figure 3.9, que l’impact relatif d’une variation de diamètre normalisé de germanium sur la position de l’accord de phase (correspondant aux différents types de traits) est bien moins important que celui de la même fluctuation appliquée aux trous (associée aux différentes couleurs). Ceci n’est pas étonnant car le saut d’indice des trous (environ égal à  $n_{\text{SiO}_2} - 1 \approx 0.45$ ) est bien plus important que celui des plots de germanium (de l’ordre de  $32 \times 10^{-3}$ ). Nous allons alors reprendre la même analyse, cette fois avec un pas plus fin en terme de diamètre normalisé des trous et en omettant les variations des plots de germanium, tel qu’illustré à la figure 3.10.

On peut noter un certain nombre de caractéristiques importantes à partir de ce graphe (et de ses projections 2D) qui seront exploitables pour comprendre la façon dont le point de stabilité est mis à l’échelle. Un premier constat (à partir de la

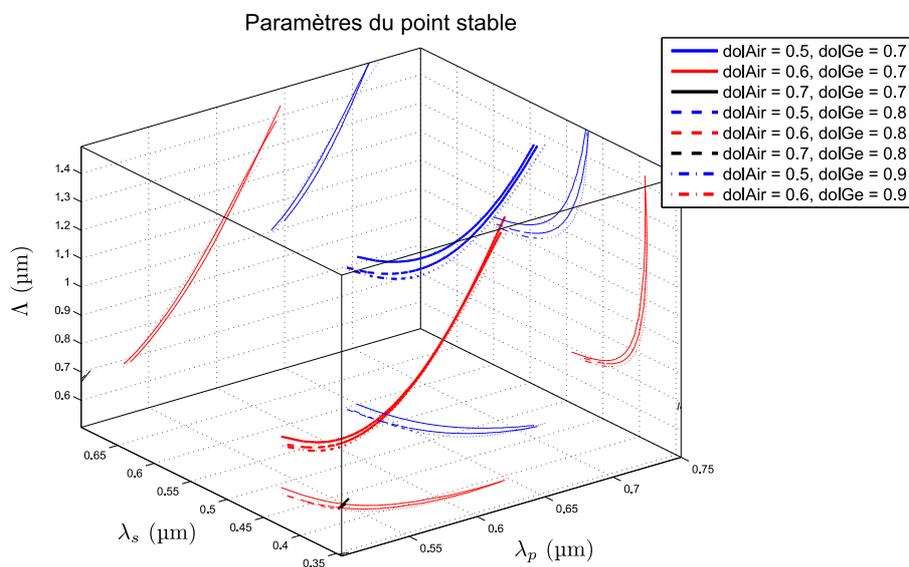


FIGURE 3.9 – Coordonnées du point de stabilité pour différents designs.

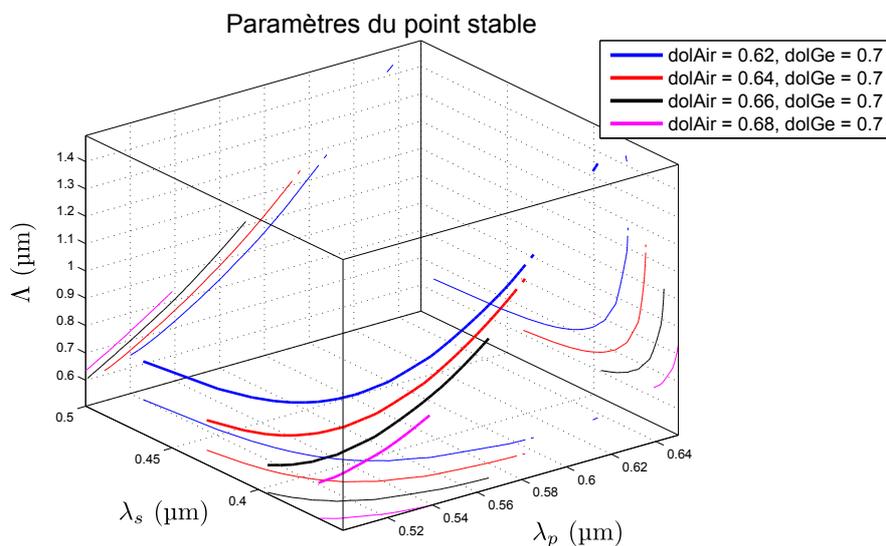


FIGURE 3.10 – Cartographie du point de stabilité en fonction des différents paramètres de design. La variation des plots de germanium a été négligée et un pas plus fin en diamètre normalisé des trous a été utilisé.

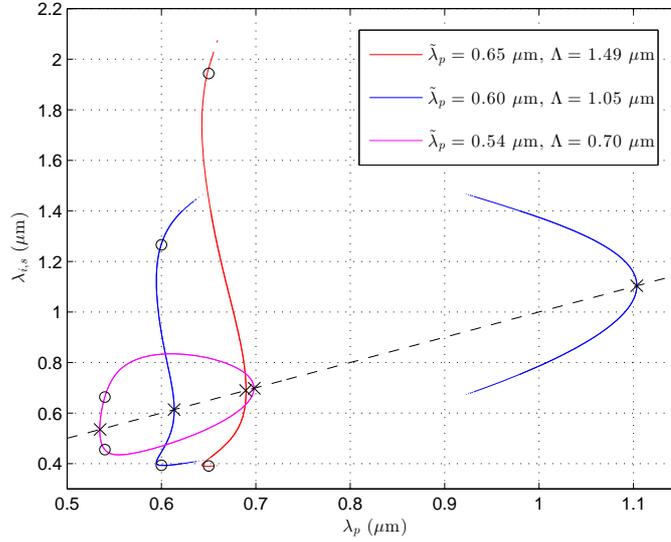


FIGURE 3.11 – Accords de phases et point stable pour trois designs différents. Les paramètres de la fibre sont  $d_{\text{Air}}/\Lambda = 0.6$  et  $d_{\text{Ge}}/\Lambda = 0.7$ . Les croix indiquent la position des zéros de dispersion et les cercles identifient la position du point de stabilité.

projection dans le plan  $(\lambda_s, \lambda_p)$  est qu'un plus gros diamètre de trou a pour effet d'éloigner davantage le point de stabilité de la pompe, c'est à dire que, plus  $d/\Lambda$  est important, plus l'espacement spectral  $\Omega$  au point de stabilité sera important. En soit, cela n'est pas étonnant car de plus gros trous repoussent le second zéro de dispersion du mode est, ainsi, ouvrent au maximum la courbe d'accord de phase; le point de stabilité étant sur la branche extérieure pour un accord intramodal, celui-ci se retrouvera alors plus loin.

La projection dans le plan  $(\Lambda, \lambda_p)$  montre que la relation entre la longueur d'onde de pompe de stabilité et le pas de la structure est à toute fin pratique linéaire. Compte tenu de l'invariance des propriétés de dispersion modale en fonction du rapport  $\lambda/\Lambda$  (à la dispersion matérielle près), cela n'est pas étonnant. Or, malgré cela, cette relation est néanmoins très intéressante à exploiter comme outil de design.

Un autre point intéressant à noter dans le plan  $(\lambda_s, \lambda_p)$  concerne la faible variation de la longueur d'onde signal en fonction de la longueur d'onde de pompe pour des longueurs d'onde de pompe relativement grandes. Ceci est très intéressant; en effet, cela implique que, pour de grands trous d'air, la longueur d'onde signal au point de stabilité est relativement indépendante du pas, comme on peut le constater sur les projections dans les espaces  $(\lambda_s, \lambda_p)$  et  $(\lambda_s, \Lambda)$  de la figure 3.10 ainsi que sur la figure 3.11; la longueur d'onde signal au point stable sera ainsi principalement fonction de la taille des trous. Cette propriété présente un intérêt au niveau de la fabrication car par exemple, pour générer une longueur d'onde signal donnée pour une pompe donnée, on peut réaliser une longue fibre effilée et choisir le segment

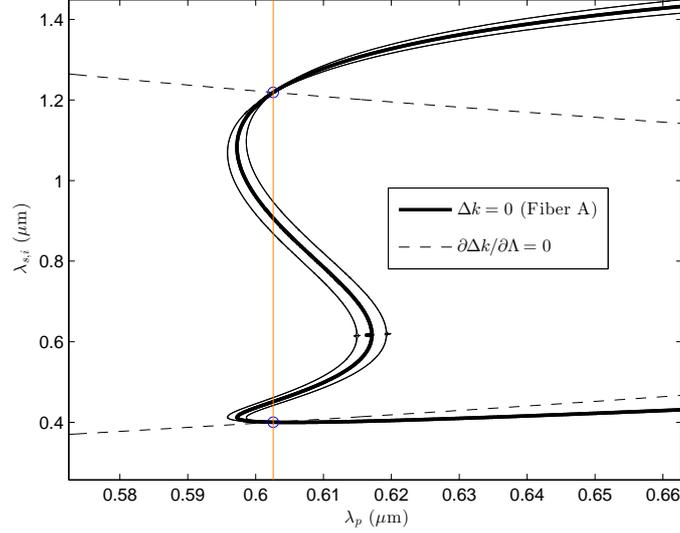


FIGURE 3.12 – Illustration de la courbe d’accord de phase pour le design de fibre hybride H1 présenté à la figure 3.1. La courbe en gras représente l’accord de phase pour un pas nominal de  $\lambda_0 = 1.03 \mu\text{m}$  et les courbes en trait fin sont associées aux pas  $\Lambda = \Lambda_0 \pm 1\%$ . On constate que les trois courbes se croisent au point précis (identifié par des cercles) où la courbe d’accord de phase croise celle représentant la condition  $\partial_\Lambda \Delta k = 0$ ; c’est le point de stabilité.

ayant le bon pas pour obtenir la longueur d’onde désirée avec le plus grand gain. On note d’ailleurs ce phénomène de longueur d’onde signal constante pour les grands pas à la figure 3.11 (courbes bleue et rouge).

### 3.3.1.2 Impact de la longueur de corrélation $L_c$

A l’aide des relations du chapitre 2 développées pour les accords de phase intramodaux, on peut étudier l’influence de divers paramètres sur la fluctuation du gain au point de stabilité en cas de fluctuations d’échelles (notons que ces remarques s’appliqueront également aux autres perturbations). De toute évidence, via la définition de  $f(z)$  (c.f. Eq. (2.68), chapitre 2), la dégradation du gain sera toujours proportionnelle à la fluctuation de la variable stochastique  $W(z)$ , mais l’autre paramètre ayant une influence est la longueur de corrélation  $L_c$ . Examinons tout d’abord son effet sur le gain pour un cas où deux accords de phase sont présents, dont un, celui le plus loin de la pompe, est au point de stabilité. Pour ce faire, nous allons nous placer dans le cas de figure de la fibre hybride H1 ayant un pas nominal de  $1.03 \mu\text{m}$ , un  $d_{\text{Air}}/\Lambda = 0.6$  pour les trous et un  $d_{\text{Ge}}/\Lambda = 0.7$  pour les plots de germanium. La courbe d’accord de phase et le point de stabilité sont illustrés à la figure 3.12. On note que le point de stabilité a comme longueur d’onde de pompe stable  $\tilde{\lambda}_p = 602.6 \text{ nm}$  et des longueurs d’onde générées  $\lambda_s = 400.2 \text{ nm}$  et

$\lambda_i = 1219.8$  nm. On note aussi la présence d'un autre accord de phase, plus près de la pompe et n'étant pas à un point de stabilité. Les longueurs d'onde signal et idler de ce second accord de phase sont respectivement  $\lambda_s = 451.2$  nm et  $\lambda_i = 906.7$  nm.

On doit également, pour bien évaluer le gain,

$$\langle G \rangle = \frac{1}{2} \left( 1 + \left\{ \cosh[g(z)] + \frac{f(z)}{g(z)} \sinh[g(z)] \right\} \exp[-f(z)] \right) \quad (3.4)$$

où  $g(z) = [k_s k_i (2f_{mnp} P_p z)^2 + f^2(z)]^{1/2}$ , prendre en compte la variation des intégrales  $f_{pp}$ ,  $f_{pm}$  et  $f_{ppmn}$ . Ici, les indices  $m$  et  $n$  (mais  $m \neq n$ ) peuvent prendre les valeurs  $s$  ou  $i$ , désignant le signal et l'idler respectivement. Comme pour le cas des équations simplifiées, où  $\gamma P_p$  joue un rôle important sur le gain, ici les différents facteurs auront aussi une influence. Les équations développées au chapitre 2 prennent bien entendu en compte ces effets. Le calcul exact des intégrales a été effectué et les résultats sont illustrés à la figure 3.13. On note que ces courbes convergent toutes vers la même valeur à la longueur d'onde de pompe, ce qui justifie l'utilisation classique d'un unique  $\gamma = n_2 f_{pp} \omega_p / c$  dans les équations de mélange à quatre ondes où les longueurs d'onde d'accord de phase considérées sont très proches de la pompe, ce qui n'est pas valable ici étant donné le grand espacement en fréquence. En effet, comme on peut voir, les valeurs des coefficients sont significativement différentes aux longueurs d'onde d'accord de phase, les points en questions étant indiqués par des cercles à la figure 3.13. De plus, le terme  $g(z)$  de l'équation (2.74) du chapitre 2 nous montre aussi que le gain doit être proportionnel à la moyenne géométrique des fréquences du signal et de l'idler, soit  $\sqrt{\omega_s \omega_i}$  qui sera d'autant plus petit (à  $\omega_p$  fixe) que l'espacement entre les fréquences  $\Omega = \omega_s - \omega_p = \omega_p - \omega_i$  sera grand car, en effet,  $\omega_i \omega_s = \omega_p^2 - \Omega^2 \leq \omega_p^2$ . Tous ces facteurs contribueront à une diminution du gain en fonction de l'écartement en fréquence, cependant l'impact est relativement faible, les coefficients demeurant dans le même ordre de grandeur sur toute la plage.

En utilisant le modèle de mélange à quatre ondes développé au chapitre 2, on peut tracer le gain spectral, défini comme :

$$\langle G \rangle = \frac{\langle P_s(z) \rangle}{P_s(0)} \quad (3.5)$$

pour différentes longueurs de corrélation  $L_c$  allant de 0 m (cas du bruit blanc (si  $\sigma_\Lambda \neq 0$ ) ou d'une fibre parfaitement uniforme (si  $\sigma_\Lambda = 0$ )) à 10 m. Les résultats de ces simulations sont illustrés à la figure 3.14. Pour effectuer ce calcul, on utilise un bruit d'un photon par longueur d'onde (ce qui équivaut à un bruit d'amplitude proportionnel à  $\sqrt{\hbar\omega}$ ) et une phase aléatoire en fonction de la fréquence comme condition initiale  $\mathbf{P}(0)$ . Évidemment, comme on peut s'en attendre, le comportement du gain aux deux accords de phase est très différent étant donné que l'un d'entre eux (celui le plus loin de la pompe) est invariant aux fluctuations ( $\partial\Delta k / \partial\Lambda = 0$ ). On note sur la fibre ayant  $L_c = 0$  que l'accord de phase intérieur présente un gain supérieur à l'accord de phase extérieur, ce qui n'est pas étonnant étant donné tous ce que nous avons mentionné plus haut qui contribue à dégrader le gain en fonction de l'espacement spectral. Or, lorsqu'on augmente la longueur de corrélation à

1 mm, on s'aperçoit que l'accord de phase intérieur voit son gain diminuer et s'élargir, comparativement au gain à l'accord de phase extérieur qui ne subit à toutes fins pratiques aucune dégradation. A partir de  $L_c = 10$  cm, l'espérance du gain sur l'accord de phase interne est déjà nulle, mais l'accord de phase externe est toujours bien présent. En poussant la longueur de corrélation jusqu'à 10 m, on note en fait une diminution de l'espérance du gain d'à peine 15 %.

Pour terminer la discussion sur les courbes obtenues à l'aide du modèle stochastique, on peut noter un fait étrange observable sur les mesures à grandes longueurs de corrélation ( $L_c > 10$  cm). En effet, de très larges lobes de gain semblent apparaître à des endroits où il n'y est pas sensé normalement y avoir accord de phase. La raison derrière ceci est simplement due au fait que, pour de faibles retards de phase, il existe une probabilité que l'intégrale de la perturbation de l'accord de phase sur la longueur de fibre compense le désaccord de phase, donnant ainsi lieu à un accord de phase *effectif* nul et, ainsi, à un peu de gain. Or, ces valeurs de gain sont très faibles et concentrées autour de la pompe. Une étude plus approfondie serait nécessaire pour déterminer si cette propriété pourrait être exploitable en pratique. Le bruit autour de la longueur d'onde de pompe, quant à lui, est attribuable à des erreurs numériques dans le calcul de l'exponentielle complexe puisque, le désaccord de phase autour de la pompe étant quasi-nulle, la matrice dans l'exponentielle est quasi-singulière et le calcul est numériquement instable (ce qui est confirmé par le fait que l'amplitude de ces « lobes » est indépendant de la puissance de pompe, voir figure 3.16).

Pour valider que le modèle stochastique est en accord avec des méthodes de modélisation plus robustes (quoique bien plus gourmandes en moyens de calcul), des simulations numériques utilisant l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée modifiée [63, 64, 65] effectuées par Olivier VANVINCQ à partir de profil de pas bruités obtenus d'un modèle numérique du processus stochastique d'O-U. Elles nous ont également permis de constater cette tendance, comme on peut le voir à la figure 3.15. Il n'est généralement pas conseillé de simuler des processus stochastiques à l'aide d'équations différentielles déterministes pour plusieurs raisons (comme le problème d'intégrer numériquement des variations discontinues des paramètres opto-géométriques de la fibre), et entre autres parce que cela implique qu'on doit effectuer une moyenne sur plusieurs résultats pour plusieurs profils longitudinaux de pas ayant la même longueur de corrélation, ce qui représente une tâche colossale de simulation. Dans le cas ici, nous nous sommes limités à 10 simulations pour  $L_c = 1$  mm et 30 simulations pour  $L_c = 10$  cm. Bien que les résultats soient quantitativement différents entre le modèle stochastique et les simulations MGNLSE, la tendance qualitative est néanmoins clairement vérifiée, autant au point de stabilité (qui a toujours un gain fort, indépendamment de  $L_c$ ) qu'à l'accord de phase interne, qui lui voit son gain moyen diminuer et s'élargir.

On remarque donc, pour conclure, qu'en plus des amplitudes de fluctuations, la longueur de corrélation de celles-ci joue un rôle *crucial* dans la dégradation du gain et que généralement, plus la longueur de corrélation est grande, pires sont les effets. Bien que certaines valeurs aient été suggérées dans la littérature (allant du

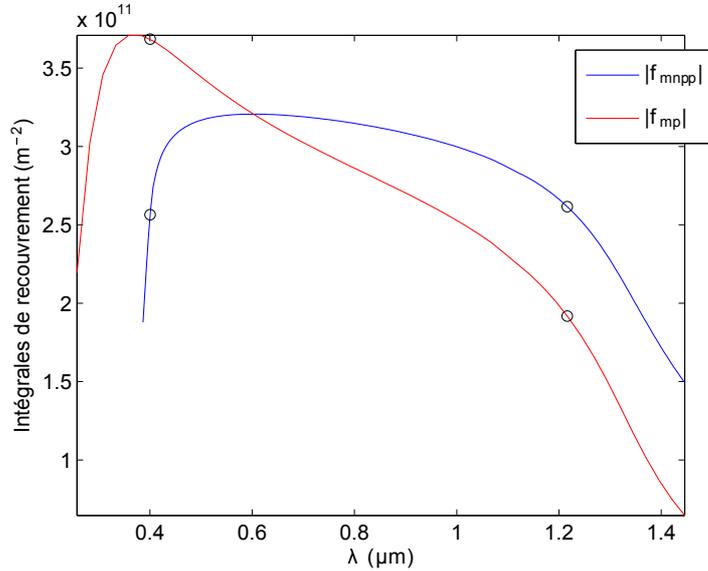


FIGURE 3.13 – Courbes des différentes intégrales  $f_{pm}$  et  $f_{ppmn}$  en fonction de la longueur d’onde pour le design de fibre H1 présenté à la figure 3.1. Les courbes se croisent en  $f_{pm} = f_{ppmn} = f_{pp}$  à la longueur d’onde de pompe ( $\lambda_p = 602.6 \text{ nm}$ ). Des cercles indiquent les valeurs des intégrales de recouvrement aux longueurs d’onde d’accord de phase.

mètre au kilomètre[53]), aucune mesure expérimentale de la longueur de corrélation des fluctuations d’échelle n’est disponible pour comparer les résultats de simulation avec la réalité. Notons que  $L_c$  doit dépendre des conditions de tirage, notamment des vitesses utilisées et de la tension de fibrage appliquée.

### 3.3.1.3 Impact de la puissance de pompe $P_p$

La puissance de pompe a évidemment un rôle à jouer dans le gain que l’on peut s’attendre à obtenir par mélange à quatre ondes. En effet, de façon générale, le gain est d’autant plus important que la puissance de pompe est importante[35]. Egalement, la longueur d’onde d’accord de phase a tendance à bouger en fonction de la puissance de pompe car les lobes de gain sont ancrés du côté des faibles décalages sur l’accord de phase linéaire alors que le maximum (côté grands décalages) quant à lui se déplace au fur et à mesure que le gain augmente et que la courbe de gain s’élargit[35]. Or, en présence de fluctuations, on peut se demander quelle sera la performance du système en fonction de la puissance de pompe et quelles seront les conséquences de la présence de fluctuations. Afin de répondre à ces questions, nous avons réalisé quatre simulations pour des puissances de pompe allant de 100 W à 5 kW (voir figure 3.16).

On peut tout d’abord noter sur les courbes que, à faibles puissance (100 W), l’accord de phase interne n’est à toutes fins pratiques pas présent dû aux fluctuations.

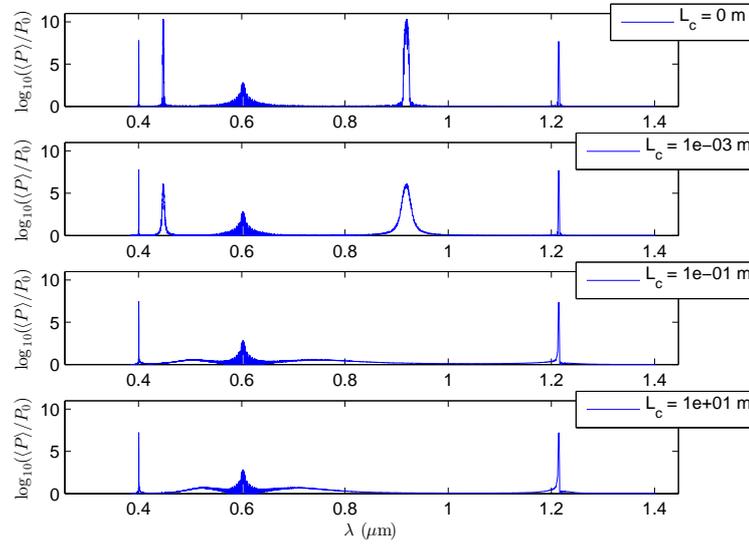


FIGURE 3.14 – Influence de la longueur de corrélation sur le gain dans le cas de la fibre H1. La puissance de pompe utilisée pour les simulations est  $P_p = 1 \text{ kW}$ , la variation relative d'échelle est  $\sigma_\Lambda/\Lambda = 0.5\%$  et la longueur de fibre est  $z = 20 \text{ cm}$

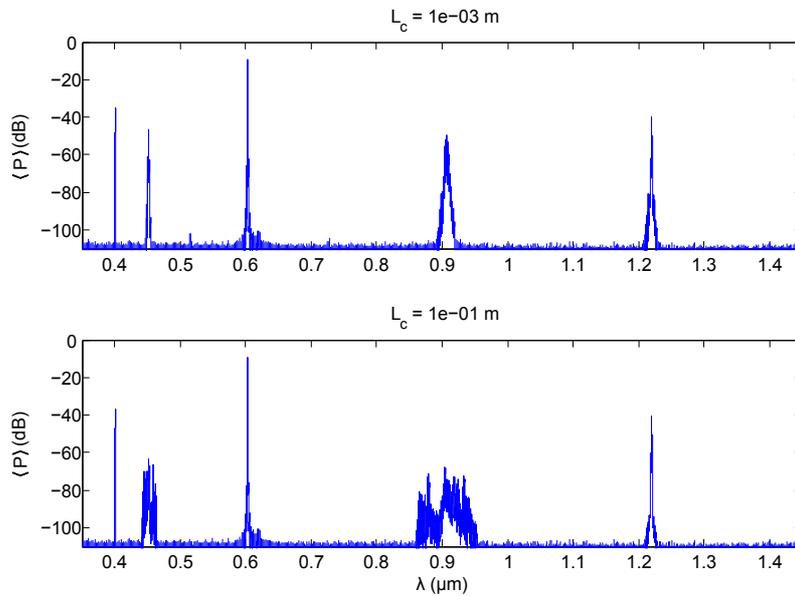


FIGURE 3.15 – Simulation numérique de propagation non-linéaire pour des pas bruités avec différentes longueurs de corrélation dans le cas de la fibre H1.

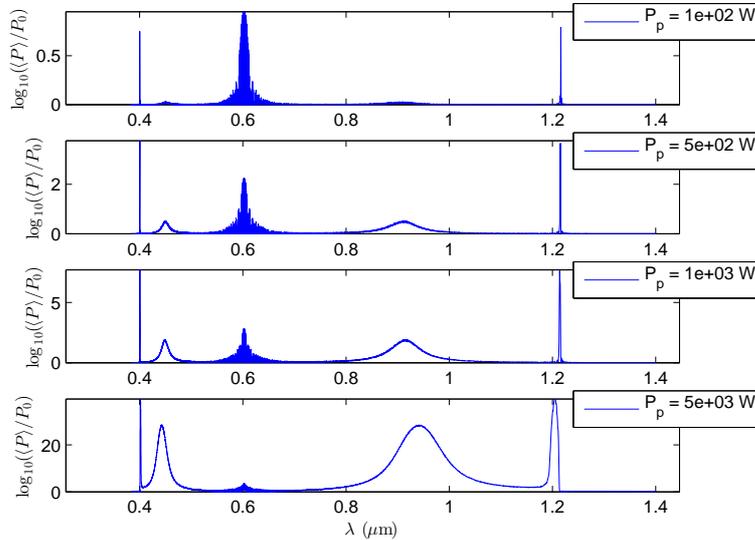


FIGURE 3.16 – Influence de la puissance de pompe sur le gain. Ces calculs ont été réalisés avec  $z = 20$  cm,  $L_c = 5$  mm et  $\sigma_\Lambda/\Lambda = 5\%$  dans le cas de la fibre H1.

Or, le fait d'augmenter la puissance a plusieurs effets. Premièrement, la gain de l'accord de phase interne augmente avec la puissance de pompe, indiquant que cette augmentation permet en quelque sorte de compenser la dégradation du gain due aux fluctuations. Deuxièmement, le gain s'élargit progressivement lorsque la puissance de pompe augmente, et ce, pour les deux accords de phase. Troisièmement, la position du maximum de gain de l'accord de phase intérieur s'éloigne davantage de la longueur d'onde de pompe alors que le contraire se produit pour l'accord de phase au point stable. De plus, on note que ce déplacement est beaucoup plus important pour l'accord de phase interne. Ceci s'explique par le fait que, classiquement, la contribution non-linéaire à l'accord de phase diminue par rapport à la contribution linéaire lorsque l'écartement spectral  $\Omega$  augmente. Cette explication est confirmée par l'étude de l'évolution des courbes d'accord de phase pour plusieurs puissances de pompe présentée à la figure 3.17. On peut également noter que les erreurs numériques autour de la pompe (figure 3.16) ne dépendent effectivement pas de la puissance de pompe.

Globalement, et comme on pouvait s'y attendre, on peut donc voir l'influence des fluctuations d'échelle comme une perte d'efficacité de conversion de puissance entre les longueurs d'onde, ici de l'accord de phase interne, puisque le gain est tout de même présent, mais des puissances beaucoup plus élevées sont nécessaires pour le faire apparaître.

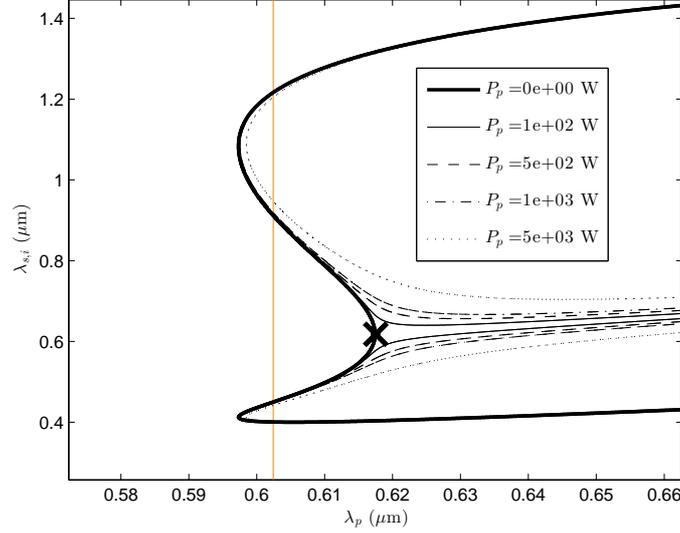


FIGURE 3.17 – Dépendance de l'accord de phase à la puissance de pompe  $P_p$  pour le cas de la fibre H1.

### 3.3.1.4 Impact de la longueur d'onde de pompe $\lambda_p$

Un autre point important à connaître en ce qui concerne le point de stabilité est l'étendue de l'amélioration du gain autour de celui-ci en fonction de la longueur d'onde de pompe (ou du pas nominal  $\Lambda_0$ ). En effet, cette information est importante pour déterminer les tolérances du design de point stable en fonction de ces deux paramètres. Pour illustrer ce point, nous avons déterminé le gain de MQO pour plusieurs longueurs d'onde de pompe en dispersion normale et en présence de fluctuations. Les résultats de ces calculs sont illustrés à la figure 3.18.

En examinant le graphe, on note que, sauf autour du point de stabilité, le gain diminue au fur et à mesure que les longueurs d'onde générées sont loin de la pompe, ce qui est dû au fait que la dérivée  $\partial\Delta k/\partial\Lambda$  est d'abord croissante avec l'espacement en fréquences. Or, à proximité du point de stabilité, la dérivée diminue progressivement et on note une augmentation du gain qui passe par un maximum au point de stabilité. La pleine largeur à mi-hauteur de la zone d'augmentation du gain autour du point de stabilité est  $\Delta\lambda_p = 6$  nm. Compte tenu de la longueur d'onde de la pompe au point de stabilité, ceci équivaut à une tolérance d'environ un pourcent. Or, puisque les courbes de dispersion sont à peu près invariantes avec le rapport  $\lambda/\Lambda$  (à la dispersion de la silice près, ce qui a peu d'effet sur de très petites plages), on aura donc également  $\Delta\Lambda/\Lambda \approx 1\%$ . Ainsi, pour bien arriver au point de stabilité avec ce design de fibre (ou un design similaire), on doit s'attendre à devoir obtenir en fabrication le pas nominal c'est-à-dire la valeur *moyenne* du pas au pourcent près les fluctuations autour de cette valeur, elles, pouvant être supérieures, le gain étant maximum au point de stabilité. Cette technique demeure néanmoins avantageuse en

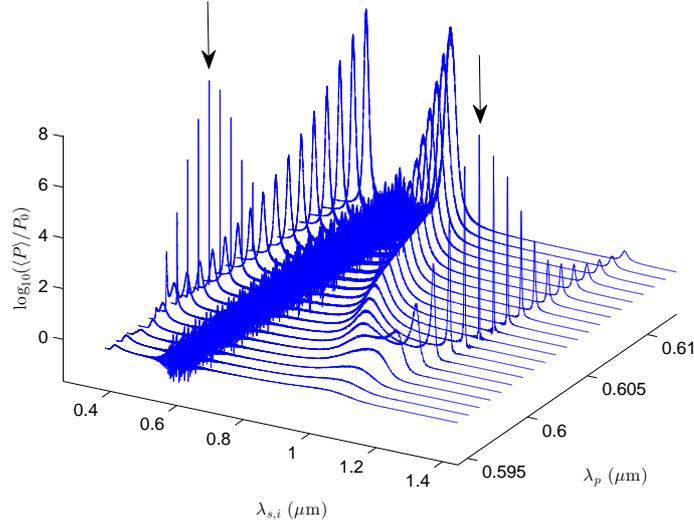


FIGURE 3.18 – Impact de la longueur d’onde de pompe sur le gain  $\langle G \rangle$  pour la fibre H1. Le point de stabilité est illustré par des flèches. Les paramètres de calcul sont  $\sigma_{\Lambda} = 5\%$ ,  $z = 0.2$  m,  $P_p = 1$  kW et  $L_c = 5$  mm.

comparaison avec l’utilisation d’un accord de phase « standard » (comme l’accord de phase intérieur) aux mêmes longueurs d’onde comme nous le montre la figure 3.19.

### 3.3.2 Fluctuations des trous

La fluctuation du diamètre des trous est un autre point extrêmement important lié au procédé. Comment nous l’avons vu dans le chapitre sur la théorie des fibres et, en particulier, des fibres microstructurées, plusieurs types de phénomènes sont à prendre en compte pour les propriétés des trous, en particulier le phénomène d’ondelettes de surfaces[66]. Dans le cas étudié ici, c’est surtout à grande longueur d’onde que l’effet se fera sentir, la taille des trous ayant un impact sur l’indice « moyen » de gaine vu par le mode. Pour entrer plus loin dans les détails, nous allons effectuer le développement de l’analyse de la variation des trous plutôt à travers la fraction de surface  $\phi$  représentée par ceux-ci dans la gaine. L’expression de cette valeur est fonction du diamètre des trous et du pas de la structure, tel qu’on peut le voir par la relation suivante :

$$\phi = \pi(d/\Lambda)^2/(2\sqrt{3}) \quad (3.6)$$

d’où l’on peut tirer l’indice moyen de la gaine à suffisamment grande longueur d’onde :

$$\bar{n}_{cl} \approx \sqrt{\phi + (1 - \phi)n_{SiO_2}^2}. \quad (3.7)$$

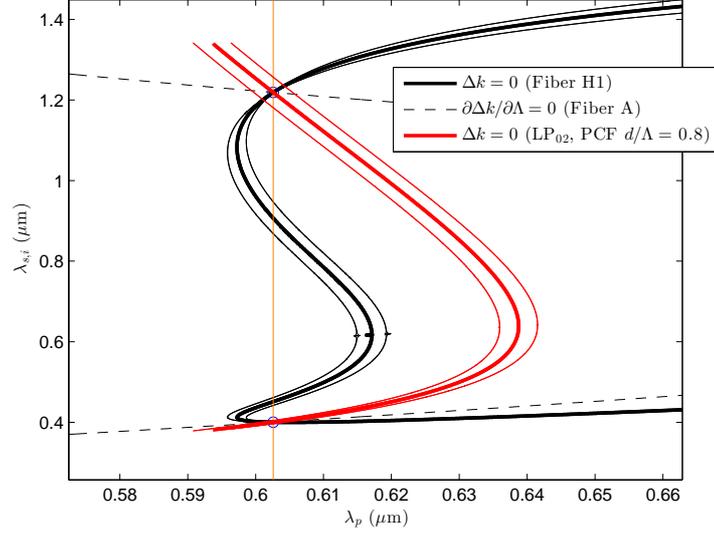


FIGURE 3.19 – Accord de phase pour deux fibres ayant les mêmes longueurs d’ondes signal et idler à une pompe de 603 nm. L’accord de phase présentant le point de stabilité est celui de la fibre H1, l’autre étant celui d’une PCF à un défaut ayant un  $d/\Lambda$  de 0.8 et opérée dans le mode  $LP_{02}$ . Les fluctuations relatives du pas représentées par les courbes en trait fin sont de 1 %

La fréquence normalisée effective  $V_{\text{eff}}$  du guide RTI peut alors s’exprimer de la façon suivante (en prenant comme rayon de cœur  $R_{\text{eq}} = \sqrt{2}\Lambda$ [67]) :

$$V_{\text{eff}} = \frac{2\pi R_{\text{eq}}}{\lambda} \sqrt{\bar{n}_{\text{co}}^2 - \bar{n}_{\text{cl}}^2} = \frac{2\sqrt{2}\pi\Lambda}{\lambda} \sqrt{\bar{n}_{\text{co}}^2 - \bar{n}_{\text{cl}}^2} \quad (3.8)$$

où le rayon de cœur équivalent a été développé en utilisant un modèle de fibre microstructurée ayant un défaut de 7 inclusions, ce qui est assez représentatif étant donné la faible différence d’indice plot-silice en comparaison avec la différence entre la silice et les trous d’air. Au final, cela revient à dire que l’on considère l’indice moyen du cœur comme étant égal à celui de la silice ( $\bar{n}_{\text{co}} \approx n_{\text{SiO}_2}$ )

Un autre fait important à mentionner et que la conservation de la quantité de matière lors du tirage aura tendance à faire en sorte qu’une variation de la taille des trous sera accompagnée d’une déformation de la structure ou du pas local. C’est pourquoi, dans ces conditions, il vaut mieux raisonner en termes de fraction de surface occupée par l’air que sur le diamètre des trous directement. De la même manière, le diamètre effectif du cœur changera peu avec la déformation de la structure des trous, on considérera alors qu’il n’est pas fonction de la fraction d’air dans la gaine, ou autrement dit, que  $R_{\text{eq}} \neq f(\phi)$ . En prenant tout cela en compte, on peut ainsi exprimer simplement la fluctuation des constantes de propagation en fonction d’un modèle à saut d’indice (c.f. chapitre 1 section 1.1.2). Le calcul nous

donne l'expression suivante :

$$\frac{\delta\beta}{\beta} = \left(\frac{U}{\beta R_{\text{eq}}}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{V}{U} \frac{\partial U}{\partial V}\right) \frac{\delta R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} - \frac{1}{2} \left(\frac{V}{U} \frac{\partial U}{\partial V}\right) \frac{\delta\phi}{\phi} \right]. \quad (3.9)$$

Cette expression nous montre que la variation de constante de propagation est maximale aux environs de la coupure, là où  $U \approx V$  et la dérivée  $\partial U/\partial V$  est maximale. De la même façon, on constate que la variation de l'accord de phase sera donc d'autant plus importante que l'espacement spectral  $\Omega$  sera grand, une des ondes se rapprochant nécessairement de la coupure. La variation de l'accord de phase avec  $\phi$  sera donc, à toutes fins pratique, une fonction monotone croissante de  $\Omega$  et on *n'a donc pas de point de stabilité* pour cette perturbation. Des simulations numériques ont également confirmé cette tendance pour des pompes loin de la coupure (ce qui est le cas ici), les écarts à ce constat se passant là où la pompe approche de la coupure. En appliquant le calcul développé ici à l'accord de phase intramodal discuté ici, on obtient la figure 3.20. La variation relative de diamètre des trous a été fixée à 1 %, ce qui équivaut à une variation relative de la fraction de surface de 2 %. Comme on peut le voir sur les courbes, l'impact de la perturbation est effectivement d'autant plus grand que l'espacement spectral est grand, l'effet à petit écartement étant plutôt assimilable à une fluctuation de la position du zéro de dispersion (tel qu'étudiée dans[53]).

La question se pose maintenant à savoir, entre les perturbations d'échelle et de fraction d'air, est-ce que le point de stabilité aux fluctuations d'échelle aura toujours son intérêt pour améliorer le gain du MQO ? *A priori*, si les deux processus sont indépendants, ce sera toujours un avantage d'opérer au point de stabilité car les contributions des perturbations sont additives. Cependant, qu'en est-il de leurs amplitudes ? En supposant des fluctuations relatives du pas  $\Lambda$  et de la fraction d'air  $\phi$  de 1 %, on obtient le graphe de la figure 3.21 qui explicite les différentes contributions à  $\sigma_W$  ainsi que sa valeur globale. On constate que la fluctuation d'échelle est globalement dominante sauf aux environs du point de stabilité. Des cercles noirs ont également été ajoutés sur la figure pour illustrer la position des accords de phase auxquels nous nous attardons ici. Comme on peut le constater, à amplitude relative de variation égale, le  $\sigma_W$  résultant est tout de même deux fois plus important à l'accord de phase interne qu'il ne l'est au point de stabilité de fluctuation d'échelle, ce qui suggère qu'il est envisageable d'utiliser un tel design même en présence de fluctuation des trous, il suffit de trouver les paramètres de procédé pouvant assurer des fluctuations telles que l'on peut espérer avoir une meilleure performance au point de stabilité. Bien entendu, les longueurs de corrélation des deux paramètres peuvent différer, ce qui aura un impact supplémentaire au final, mais raisonner sur la base des amplitudes de fluctuation nous donne déjà une première idée de la faisabilité.

Nous avons mentionné auparavant les ondelettes de surface, d'origine thermodynamique, apparaissant à l'interface air-silice. Ces ondelettes ont été largement étudiées autre part[66] et on a montré, entre autre, que leur contenu en fréquence n'est pas compatible avec un procédé d'O-U, la fonction d'auto-corrélation n'étant

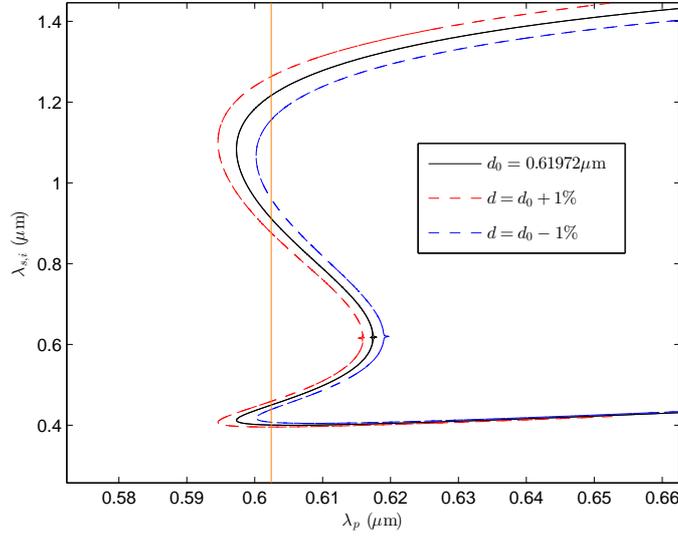


FIGURE 3.20 – Impact de la variation de la fraction d'air  $\phi$  sur l'accord de phase.

pas de la forme attendue. Ainsi, leur effet est difficile à estimer, mais on peut s'attendre à trois phénomènes :

- Une perturbation de la phase au cours de la propagation ;
- Des pertes additionnelles par diffusion.

Bien que tous ces phénomènes sont probablement présents à une certaine échelle, leur importance dans une fibre comme celle qui est décrite ici n'est pas claire, leur impact étant plus important dans des fibres où le champ est contact considérable avec les interfaces, comme dans le cas des fibres à cœur creux par exemple, où le couplage vers les modes de surface, entre autres, peut devenir problématique[68]. On peut cependant s'attendre à ce que les pertes et la perturbation de phase puissent dégrader le gain, or il nous est impossible de le quantifier et un autre modèle devrait être développé pour en prédire les effets.

### 3.3.3 Fluctuations de la tension de fibrage

Un autre point important du procédé pouvant être source de variabilité au niveau des propriétés de la fibre concerne la tension de fibrage. En effet, la tension de fibrage peut évoluer au cours d'une fabrication, à cause de fluctuations soit de vitesse de tirage (auquel cas elle pourrait s'avérer être corrélée à la fluctuation d'échelle), soit de température comme le traduit l'équation suivante donnant la tension de fibrage en fonction de ces paramètres[69] :

$$\tau = -6\eta(T) \frac{v_f R_f^2}{R^3(z)} \frac{dR(z)}{dz} \quad (3.10)$$

où on suppose une vitesse de préforme constante. Ici,  $v_f$  représente la vitesse de tirage de la fibre,  $R(z)$  est le rayon de la forme de l'écoulement, et  $R_f$  est le rayon

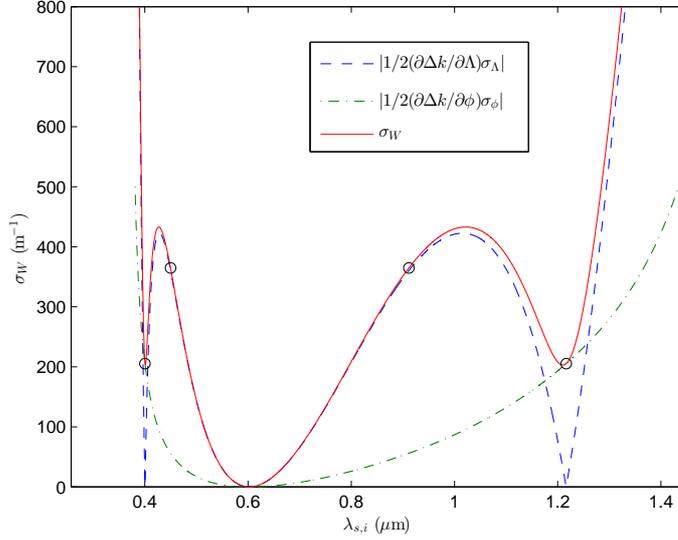


FIGURE 3.21 – Fluctuations globales de l'accord de phase comprenant les fluctuations d'échelle et de fraction d'air des trous.

final de la fibre.

Or, ces variations temporelles de la tension de fibrage peuvent entraîner des variations longitudinales de l'indice[60] et donc une modification des courbes d'accord de phase. La variation de l'indice de réfraction,  $n_{\perp}$ , dans le plan transverse de la fibre associée aux contraintes résiduelles liées à la tension de fibrage peut s'exprimer sous la forme [60] :

$$\Delta n_{\perp} = n_{\perp} - n_{\text{SiO}_2} = - \left( \frac{n_{\text{SiO}_2}^3 p_{12}}{2} \right) \frac{\chi_{\text{rel}}(T_{\text{fictive}})}{3} \tau = C' \tau \quad (3.11)$$

où  $p_{12}$  est un des deux coefficients d'anisotropie optique due aux déformations,  $\tau$  est la contrainte axiale de tirage (approximativement donné par la tension de fibrage divisé par la surface totale de verre dans la section transverse de la fibre) et  $\chi_{\text{rel}}(T_{\text{fictive}}) = 0.0568 \text{ GPa}^{-1}$  [70] est la composante de relaxation de la compressibilité de la silice à la température de vitrification. Il a été démontré également que le coefficient élasto-optique  $C$  de la silice suit les mêmes lois de normalisation en fonction de la longueur d'onde que la biréfringence du quartz[71, 72]. Ce coefficient est défini par :

$$C = \frac{n_{\text{SiO}_2}^3}{2} \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) (p_{12} - p_{11}). \quad (3.12)$$

avec  $\nu$  le coefficient de Poisson de la silice,  $E$  son module d'Young, puis  $p_{11}$  et  $p_{12}$  les coefficients d'anisotropie optique due aux déformations. Si on suppose que  $n_{\text{SiO}_2}^3 p_{11}$  et  $n_{\text{SiO}_2}^3 p_{12}$  suivent individuellement les mêmes lois de normalisation que  $C$ , ce qui est raisonnable étant donné la linéarité entre la biréfringence et les contraintes[73], on peut déduire que  $C'$  suit également la même loi de normalisation. Ainsi, on a,

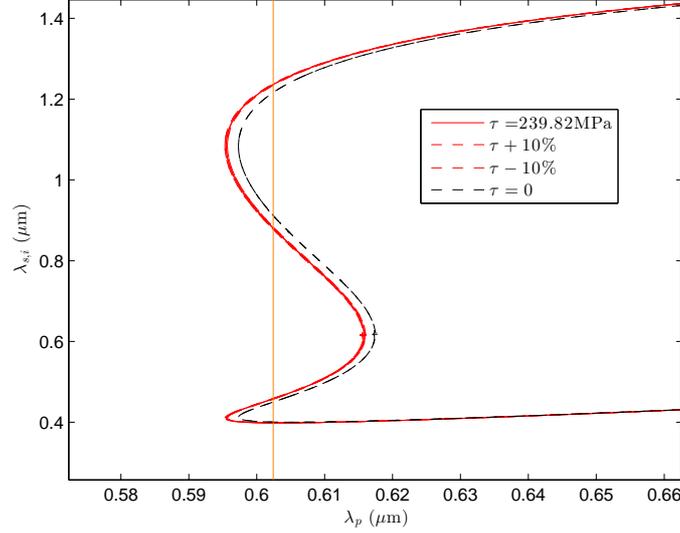


FIGURE 3.22 – Impact de la tension du tirage sur l'accord de phase dans le cas de la fibre H1.

pour le proche infra-rouge ( $\lambda_0 \approx 1 \mu\text{m}$ ),  $p_{12} = 0.27$ [74] et  $n_{\text{SiO}_2}(\lambda_0) \approx 1.45$ , on trouve  $C'(\lambda_0) = -7.8 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$ , et on peut calculer sa dispersion à l'aide de la relation suivante :

$$C'(\lambda) = C'(\lambda_0) \left[ \frac{n_{\text{SiO}_2}(\lambda_0)}{n_{\text{SiO}_2}(\lambda)} \left( \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right) \left( \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \right) \left( \frac{\lambda^2 - \lambda_2^2}{\lambda_0^2 - \lambda_2^2} \right) \right] \quad (3.13)$$

où  $\lambda_1 = 0.1215 \mu\text{m}$  et  $\lambda_2 = 6.900 \mu\text{m}$ [75]. Si on suppose une tension de tirage de 3 N pour une fibre ayant un diamètre de  $125 \mu\text{m}$ , en négligeant la surface des trous d'air de la structure, on trouve une contrainte axiale de tirage  $\tau_0 \approx 240 \text{ MPa}$ . Ainsi, en combinant les équations (3.11) et (3.13), on peut calculer la perturbation d'indice et tracer les nouvelles courbes d'accord de phase pour  $\tau_0$  et  $\tau = \tau_0 \pm 10\%$ , tel qu'illustré à la figure 3.22.

On note sur la figure que l'introduction des contraintes dans le calcul ne fait que légèrement translater la courbe d'accord de phase vers les courtes longueurs d'onde et que ce décalage est faible. De la même façon, une fluctuation de  $\pm 10\%$  est à toutes fins pratiques non-significative et n'aura pas de grand effet sur le gain comparativement aux deux autres contributions étudiées jusqu'ici.

### 3.3.4 Discussion sur le design et l'aspect expérimental

Nous venons d'examiner dans cette section l'impact sur le gain de mélange à quatre ondes de plusieurs éléments clés du procédé de fabrication. Nous avons isolé, entre autres, que la dimension des trous (ou, plus précisément, la fraction d'air  $\phi$ ) et la fluctuation d'échelle sont les deux principaux facteurs contribuant à la dégradation du gain d'un point de vue stochastique. Bien que cela puisse expliquer la

Paramètre	Valeur
Temps d'impulsion	10 ns
Taux de répétition	100 Hz
Energie de pulse (max)	2 mJ

TABLE 3.2 – Paramètres du l'OPO *Opolette* de *Opotek*

Composant	Fournisseur	Référence
Expanseur de faisceau	Thorlabs	BE02R/M
Polariseur large bande	Thorlabs	WP25M-UB
Rotateur de polarisation	Newport	PR-550
Objectif achromatique	Thorlabs (Nikon)	N40X-PF
Spectromètre	Ocean Optics	USB2000 + XR1-ES
Caméra	Basler	ACA130060GMNIR

TABLE 3.3 – Références du matériel clé pour le montage de caractérisation

dégradation de gain dans une fibre hybride avec un pas inférieur au micron comme celle de la figure 3.1, le design que nous avons en main, originalement optimisé pour un accord de phase intermodal, n'a jamais produit les résultats escomptés, même en accord de phase intramodal, en particulier parce que le gain semblait toujours se dégrader assez rapidement après l'injection, sans que nous n'ayons toutefois d'explications sur la dynamique sous-jacente.

Dans le but d'enlever des incertitudes au niveau des plots de germanium et de limiter les instabilités de fabrication, tant au niveau des trous que de la structure, nous avons réalisé un design PCF air-silice à un défaut avec un pas cible raisonnable de  $\Lambda_0 = 1.9 \mu\text{m}$  et de grand trous ( $d/\Lambda = 0.8$ ) nous permettant d'avoir un point de stabilité à 532 nm (en régime intramodal sur le mode  $\text{HE}_{12}$ ) tout en étant plus confortable sur le plan de la fabrication à travers la réduction (du moins en théorie) des amplitudes relatives de fluctuation pour une dispersion somme toute similaire. En parallèle, plusieurs améliorations ont été effectuées au montage de caractérisation dans le but d'améliorer la stabilité d'injection et l'acquisition de données. Le montage final utilisé pour toutes les expériences est illustré à la figure 3.23. Ce montage permet en l'occurrence de contrôler précisément la position du spot d'injection sur la face de la fibre d'entrée, la puissance injectée (via le polariseur) et l'orientation de la polarisation à l'aide de rotateur de polarisation large-bande. Les sources utilisées sont un microchip à 532 nm (dont la spécification est donnée au tableau 3.1) ou un oscillateur paramétrique optique (OPO) accordable dans le visible dont la description est donnée au tableau 3.2. Une des difficultés de ce montage et que la majorité des optiques doivent être achromatiques sur une très grande plage, surtout à l'injection, pour assurer que celle-ci demeure le plus possible inchangée même lors d'un balayage de la longueur d'onde d'injection (avec l'OPO par exemple). Les caractéristiques des pièces entrant dans le montage ainsi que leur numéros sont colligées au tableau 3.3.

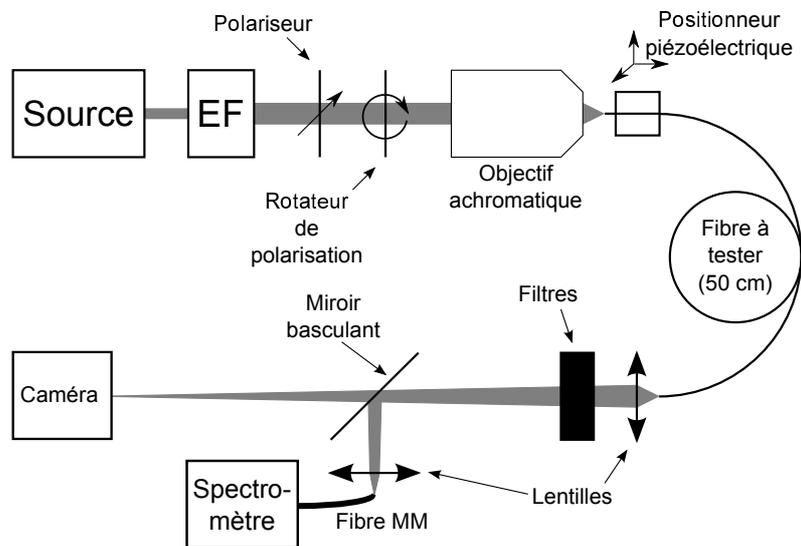


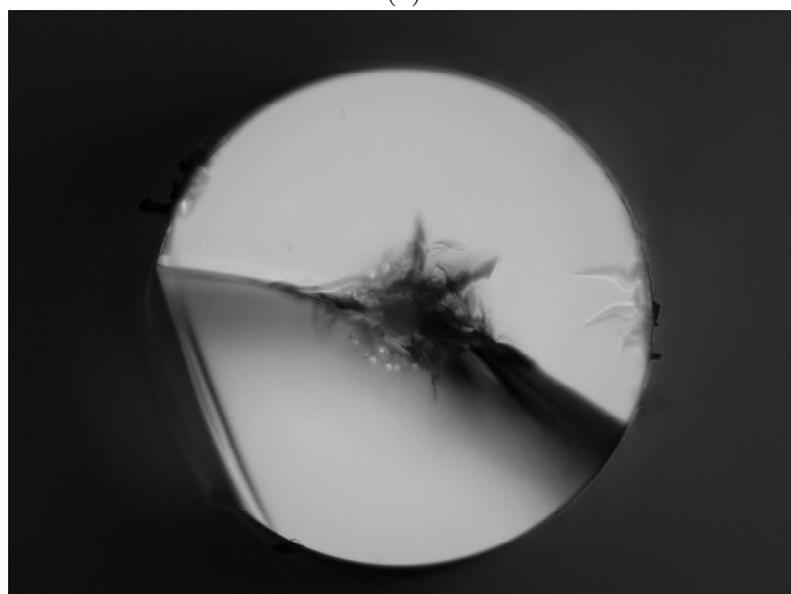
FIGURE 3.23 – Schéma du montage expérimental de caractérisation de transmission non-linéaire.

Or, malgré l'utilisation d'un expandeur de faisceau, la qualité de faisceau de l'OPO laisse beaucoup à désirer de sorte à ce que l'excitation du mode  $HE_{12}$  à l'aide de cette source de façon suffisamment efficace pour observer les effets de MQO dans ce mode fut à toutes fins pratiques impossible. De plus, l'intensité crête très importante de cette source limitait la puissance moyenne injectée (nécessaire à la visualisation) en atteignant rapidement le seuil de dommage de l'interface air-silice au point d'injection. Le problème était en fait tel que même l'utilisation d'une fibre à très grande aire effective avec un MFD de  $40\ \mu\text{m}$  (aire effective d'environ  $1260\ \mu\text{m}^2$ )[76] et une lentille de 30 cm de focale pour effectuer un filtrage spatial directement en sortie de l'OPO s'avérait impossible, cette fibre claquant également avant d'être à pleine puissance, comme le montre l'image de la figure 3.24. La seule solution disponible pour l'instant en terme de filtrage spatial est alors d'utiliser une fibre grande aire effective à puissance réduite ou un système de filtrage spatial en espace libre conventionnel, mais placé sous vide, comme on en voit souvent pour des lasers ayant des très fortes puissances crête. Ceci pourrait être une amélioration éventuelle à apporter au montage.

Nonobstant les difficultés à injecter dans le mode  $HE_{12}$  (mode d'ordre supérieur requis pour observer l'accord de phase recherché) à l'aide de l'OPO dues à la qualité de faisceau, cet accord de phase était bien visible lors de l'injection à l'aide du microchip, celui-ci ayant une bien meilleure qualité de faisceau. De plus, quoique l'injection fut améliorée, le gain semblait toujours se dégrader dans le temps, ce qu'on ne s'expliquait toujours pas. De plus, le point de stabilité n'était pas visible, sans doute à cause du fait qu'un des paramètres de fibre n'était pas tout à fait à la valeur nominale. Un balayage de l'injection en fonction de la longueur d'onde de pompe nous aurait donc éventuellement permis d'observer un éventuel point de



(a)



(b)

FIGURE 3.24 – Fibre à grande aire effective détruite par claquage via l'OPO. (a) Vue de la surface en réflexion ; (b) vue en transmission. On note bien la présence des inclusions dopées germanium (points lumineux associés à la fibre de Bragg pixélisée utilisée[76]) et du trou causé par l'OPO, bien circulaire et centré dans la structure.

stabilité, pourvu qu'on ait pu injecter dans le bon mode. Cependant, ce balayage de l'injection en fonction de la longueur d'onde de pompe nous a permis d'observer un accord de phase pour un pompage non-dégénéré modalement, tel que celui décrit au chapitre 2 et permettant de générer la courte longueur d'onde dans le mode fondamental. Etant bien plus avantageux en terme de qualité de faisceau, une investigation expérimentale de ce MQO a été entreprise et les résultats nous ont indiqué qu'il serait possible de générer des ultraviolets dans le mode fondamental à partir de ce schéma de pompage à 532 nm, comme nous pourrions le voir vers la fin de ce chapitre. Dans l'intervalle, nous allons présenter une autre méthode pour générer des accords de phase loin des pompes et qui consiste à utiliser des fibres à dispersion oscillante.

### 3.4 Fibre à dispersion oscillante et réseaux à long pas en régime non-linéaire

Toujours à la recherche de méthodes pour générer des ultraviolets dans les fibres à partir d'une pompe à 532 nm, une autre technologie très bien maîtrisée au laboratoire et qui offre un degré de liberté supplémentaire pour la génération de longueurs d'onde consiste à faire varier les propriétés de dispersion des fibres de manière périodique, d'où le terme *fibres à dispersion oscillante*. Dans ce type de fibre, la dispersion est modélisée comme étant :

$$\beta_2 = \bar{\beta}_2 + \beta_2^A \sin\left(\frac{2\pi}{Z_0}z\right) \quad (3.14)$$

où  $Z_0$  est le pas de l'oscillation,  $\bar{\beta}_2$  est la valeur moyenne de  $\beta_2$  et  $\beta_2^A$  est l'amplitude de modulation de  $\beta_2$ . En effet, lorsqu'on introduit ce type de variation dans les équations différentielles de MQO dégénéré pour une fibre monomode, le terme d'accord de phase contient alors, après linéarisation des équations, un développement discret de quasi-accords de phase provenant du formalisme des ondes de Bloch (solutions périodiques); ainsi, le terme d'accord de phase pour ce type de fibre s'écrit :

$$\beta_s + \beta_i = 2\beta_p + \beta_{\text{réseau}} \quad (3.15)$$

qui, en développant autour de la valeur moyenne de  $\beta_2$  et en incluant le terme de phase non-linéaire, nous donne la nouvelle relation :

$$\Delta k = \bar{\beta}_2 \Omega^2 + 2\gamma P_p - \frac{2k\pi}{Z_0} \quad (3.16)$$

Qui nous donne finalement, pour l'entier  $k$ ,

$$\Omega_k = \sqrt{\frac{\frac{2\pi k}{Z_0} - 2\gamma P_p}{\bar{\beta}_2}}. \quad (3.17)$$

Ainsi, pour générer des longueurs d'ondes très éloignées de la pompe (i.e.  $\Omega_k$  très grand), on a le choix d'utiliser un ordre élevé du développement (une grande valeur

de  $k$ ) ou alors un petit pas de modulation  $Z_0$ . Bien que l'apparition des quasi-accords de phase soit indépendante de la forme de la modulation, pourvu que celle-ci soit périodique, l'amplitude des divers pics de gain sera fonction de l'enveloppe de modulation. Or, c'est généralement le premier ordre (i.e.  $k = 1$ ) qui offre la gain maximum ; il est donc plus avantageux, pour générer des longueurs d'onde loin de la pompe, d'utiliser le pas le plus petit possible.

La méthodologie actuelle utilisée pour induire des modifications périodique de la dispersion consiste à faire évoluer le diamètre (ou le facteur d'échelle) de la structure de façon périodique. La technique utilisée pour arriver à ce résultat est basée sur la conservation de matière dans un écoulement (quasi-)incompressible. Dans ces conditions, le flux de matière par unité de temps à travers une surface transverse à l'écoulement du verre est constant tout le long du tirage ; en particulier, ces quantités sont conservées au niveau de la préforme et de la fibre, de sorte que l'on a :

$$v_f R_f^2 = v_p R_p^2 \quad (3.18)$$

où les indices  $f$  et  $p$  indiquent la fibre et la préforme respectivement. Si on isole le rayon de fibre et qu'on considère la vitesse d'injection de la préforme et son rayon comme constants, on se rend compte qu'une modulation de la vitesse de tirage de la fibre donnera une variation de rayon donnée par :

$$R_f(t) = \sqrt{\frac{v_p R_p^2}{v_f(t)}} \quad (3.19)$$

Et ainsi, si l'on veut un évolution particulière du rayon, on obtient la fonction d'évolution de la vitesse par la même relation :

$$v_f(t) = v_p \left( \frac{R_p}{R_f(t)} \right)^2 \quad (3.20)$$

Or, ce procédé est limité dynamiquement d'une part par la rhéologie du verre fondu (qui a un comportement viscoélastique[60]) et d'autre part par le temps de réponse du cabestan servant à contrôler la vitesse de tirage de la fibre. Tout cela a pour effet de limiter en fréquence (et donc en fréquence spatiale) la modulation qui peut être appliquée. Jusqu'à maintenant, on peut appliquer des modulations ayant des pas aussi faibles qu'une dizaine de centimètre. Or, pour attendre de grand espacement en fréquence, on a besoin de pas beaucoup plus faibles, se rapprochant des pas typiques de réseaux à long pas (LPG) utilisés en régime linéaire pour la conversion de modes, soit de quelques centaines de microns. Or, une technique de réalisation de LPG dans les PCF consiste à utiliser un laser CO<sub>2</sub> pour refermer localement les trous de façon périodique, changeant ainsi la dispersion de manière périodique.

Une idée est alors apparue au fil de discussion qu'il serait peut-être envisageable d'installer un laser CO<sub>2</sub> directement sur la tour pour effectuer cette modulation pendant le tirage de la fibre. La présente constitue l'étude de faisabilité effectuée pour démontrer qu'il serait possible d'utiliser une telle technique pour atteindre

des pas de l'ordre du millimètre, augmentant ainsi de deux ordres de grandeur la résolution spatiale atteignable par le système. Cette approche, étant encore en état préliminaire de développement, a tout de même fait l'objet d'une étude de cas qui a été colligée à l'annexe B. Son implémentation est en cours et actuellement en attente de résultats.

Pour terminer, la dernière technique que nous allons étudier consiste en un pompage non-dégénéré modalement et permettant de générer de courtes longueurs d'onde dans le mode fondamental. Le détail de l'approche et une caractérisation détaillée sont présentées aux sections suivantes.

### 3.5 Mélange à quatre ondes non-dégénéré modalement

Comme nous l'avons mentionné dans la section sur le point de stabilité, le design final adopté pour faciliter la fabrication et, idéalement, minimiser les incertitudes au niveau du dopage et les fluctuations relatives des propriétés, consiste en une fibre PCF standard air-silice à un défaut (voir figure 3.25). Les fibres ont été fabriquées par l'auteur, suivant son design, par la méthode « *stack-and-draw* ». Des tubes de verre de haute pureté ayant le bon rapport des diamètres extérieur et intérieur (de l'ordre de 0.8) ont d'abord été étirés en capillaires d'environ 2 mm de diamètre, puis assemblés en structures hexagonale compacte. Une tige de verre de très haute pureté a été utilisée pour le cœur de la fibre et les capillaires aux coins de la structure ont été retirés avant l'insertion de l'assemblage dans un tube. Une fois inséré, des barreaux de verre de petit diamètre ont été insérés pour remplir l'espace dans les coins et assurer une bonne stabilité mécanique. La structure a été soudé dans le tube puis tirée en cannes d'environ 2.7 mm de diamètre. Ces cannes ont ensuite été introduite dans un assemblage de deux tubes de verre (double manchonnage) et étirée en fibre de différents diamètres (globalement autour de 140  $\mu\text{m}$ ), entre autres ceux ayant produit les fibres A et B. Lors de l'excitation de cette fibre dans le but d'observer l'accord de phase intramodal du mode  $\text{HE}_{12}$ , c'est en fait un autre accord de phase qui est apparu avec beaucoup de gain. Après observation du processus, il est devenu clair que l'accord est en fait causé par la distribution de la pompe sur deux modes différents (suivant donc la théorie présentée au chapitre 2, §2.2.5). Les sections suivantes présenteront donc les designs qui ont été étudiés ainsi que le résultats des simulations de dispersion que nous avons effectuées. Aussi, les résultats expérimentaux seront présentés, suivis d'une discussion.

#### 3.5.1 Simulations

Dans le but d'atteindre des accords de phase très éloignés de la pompe, nous avons choisi une fibre avec de grands trous d'air, nous approchant ainsi du cas d'un barreau de silice dans l'air, utile pour la modélisation préliminaire rapide, mais qui nous permet également d'élargir les courbes d'accord de phase en repoussant la coupure des modes d'ordre supérieurs le plus loin possible en longueur d'onde. Un autre effet notable de ce choix de design est qu'on observe une levée de dégénéres-

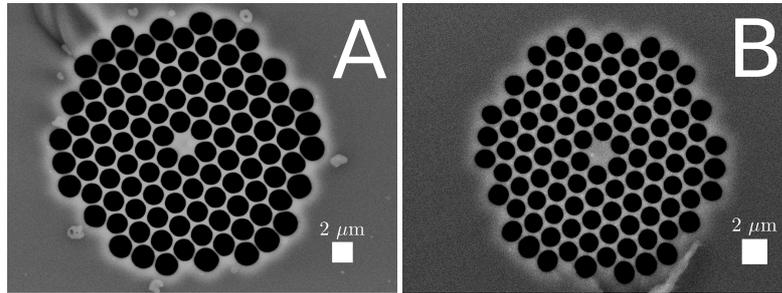


FIGURE 3.25 – Images par microscope électronique à balayage des deux fibres étudiées pour la génération d’ultraviolets par pompage non-dégénéré modalement.

cence des modes vectoriels, ce qui s’avérera d’ailleurs être un avantage significatif. Les projections du vecteur de Poynting le long de la fibre ainsi que les lignes de champ électrique pour les premiers modes d’intérêt sont illustrés à la figure 3.26 et identifiés selon leurs familles. Les indices effectifs correspondants sont illustrés à la figure 3.27.

Quelques détails intéressants sont à noter sur les modes calculés, en particulier au niveau de l’excitation de la fibre avec le montage expérimental de la figure 3.23. En effet, une source linéairement polarisée va se coupler nécessairement dans une *combinaison linéaire* des modes  $HE_{21}$  (l’une ou l’autre des polarités),  $TE_{01}$  et  $TM_{01}$ [34]. La proportion de puissance dans les modes dépendra évidemment des conditions de focalisation (i.e. de la taille du spot) mais aussi de l’orientation de la polarisation. Ainsi, à l’aide du polariseur et du rotateur de polarisation, on peut contrôler quels modes sont excités. Par exemple, si l’on décale le spot par rapport au centre du cœur dans une direction  $x$ , une polarisation parallèle à la direction de translation excitera uniquement la combinaison de modes comportant  $TM_{01}$  et un des deux modes  $HE_{21}$ , alors qu’une polarisation orthogonale par rapport à la direction du décentrement excitera uniquement la combinaison  $HE_{21}$  avec le mode  $TE_{01}$ . Ceci est très utile, comme nous le verrons plus loin, pour exciter sélectivement l’un ou l’autre de ces modes.

Deux simulations ont été effectuées, basées sur le pas nominal visé pour les deux fibres ( $2\ \mu\text{m}$  pour la fibre A et  $1.85\ \mu\text{m}$  pour la fibre B). Les pas mesurés pour les fibres A et B sont respectivement  $2.1\ \mu\text{m}$  et  $1.88\ \mu\text{m}$  (donnant des diamètres de cœur équivalents respectifs de  $2.42\ \mu\text{m}$  et  $2.17\ \mu\text{m}$ ). Ces pas ont été utilisés, en combinaison avec les pas visés et les courbes de dispersion calculées numériquement, pour ajuster de manière perturbative (voir chapitre 3 équation (3.3)) les accords de phase théoriques obtenus par pompage distribué. Pour fixer les idées de façon préliminaire, nous avons utilisé les coefficients développés au chapitre 2 §2.2.5 (en supposant les champs correctement normalisés) pour le calcul du terme de phase non-linéaire<sup>1</sup> et une puissance de 1 kW, ce qui s’avère bien représentatif de la puis-

1. La valeur de ces coefficients est relativement peu importante pour calculer la position de l’accord de phase car celle-ci est peu sensible au terme non-linéaire

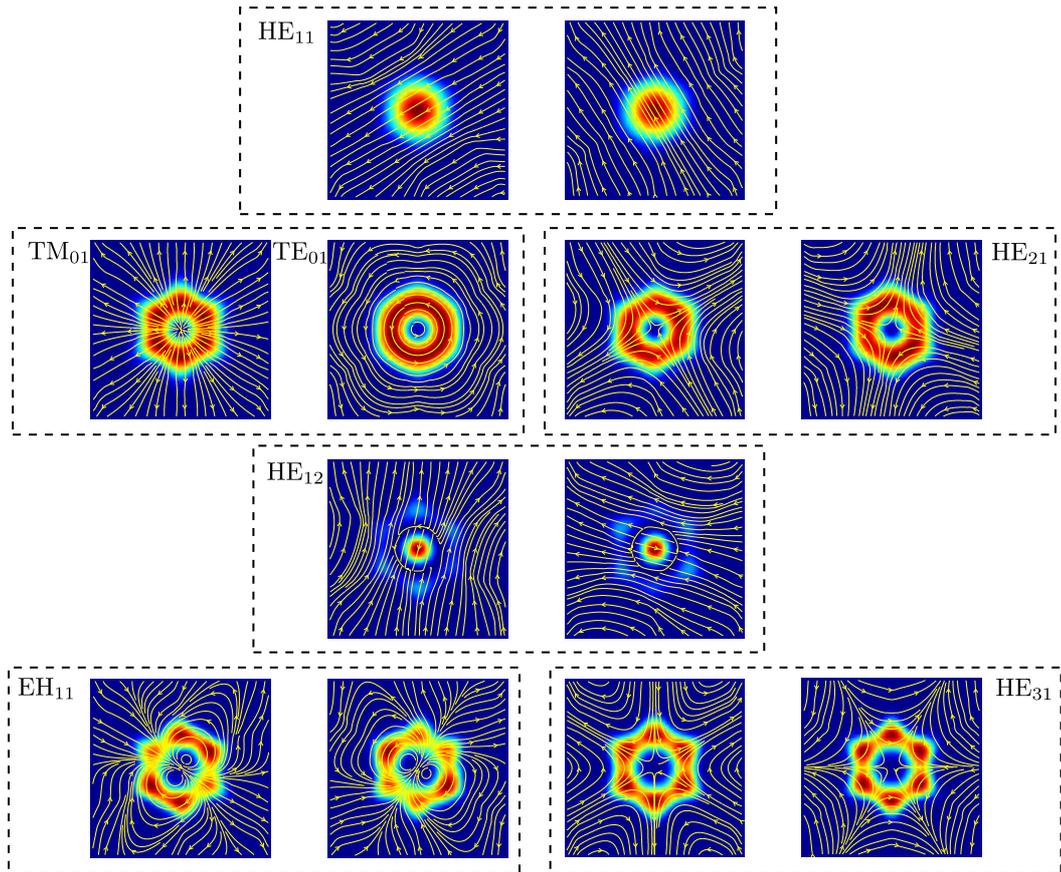


FIGURE 3.26 – Premiers modes d'intérêt dans les fibres présentées à la figure 3.25. L'image couleur correspond à l'amplitude du vecteur de Poynting selon l'axe de la fibre et les lignes de champ (en jaune) suivent l'orientation du champ électrique. Le calcul a été effectué par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel COMSOL. Les caractéristiques nominales utilisées pour la simulation sont un  $d/\Lambda = 0.85$  et un pas  $\Lambda = 1.85 \mu\text{m}$ . La dispersion de la silice a été prise en compte via les équations de Sellmeier pour la silice[77, 78].

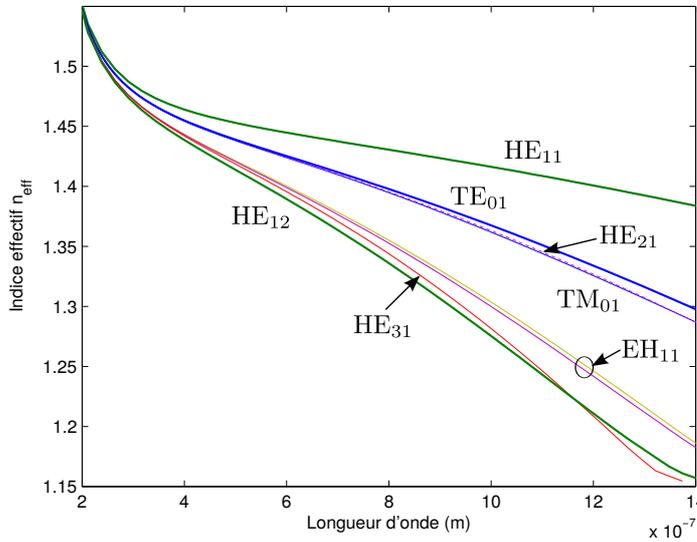


FIGURE 3.27 – Indices effectifs des modes d'intérêt présentés à la figure 3.26 avec leur identification.

sance estimée couplée dans le mélange de mode d'intérêt. Les accords de phase théoriques calculés sont illustrés par les courbes en bleu (pour le pompage distribué) et noir (pour l'accord de phase intramodal HE<sub>12</sub>) aux figures 3.28 et 3.29 pour les fibres A et B respectivement. On note bien deux courbes différentes pour les régimes de pompage TE<sub>01</sub>+HE<sub>11</sub> et TM<sub>01</sub>+HE<sub>11</sub>, ce qui est attribuable à la levée de dégénérescence entre les modes. On remarque également que les courbes de régime de pompage distribué se replient sur elle-même, donnant théoriquement une paire d'accord de phase. Également, on note que, pour la fibre A, on est en dispersion normale pour le mode HE<sub>12</sub> à  $\lambda_p = 532$  nm, alors que pour la fibre B, on est en dispersion anormale à la même longueur d'onde de pompe étant donné que le zéro de dispersion de ce mode est situé autour de 526 nm pour cette fibre. On remarque aussi que, pour la fibre B, il n'y a que la combinaison TE<sub>01</sub>+HE<sub>11</sub> qui présente un accord de phase, la courbe pour l'accord de phase impliquant TM<sub>01</sub> rebroussant chemin à des longueurs d'onde inférieures à 532 nm. Pour la fibre B, il n'y aura donc qu'un seul accord de phase possible.

Nous avons voulu valider que le gain du processus d'accord de phase que nous cherchons ensuite à observer serait dominant. Pour notre système d'injection, une injection optimale mais réaliste serait représentée par une superposition de deux modes linéairement polarisés LP<sub>01</sub> et LP<sub>11</sub> en parts égales (ce qui correspond à une injection décentrée avec un spot de taille idéale pour avoir le bon mélange). Or, dans une telle fibre, le mode LP<sub>11</sub> est en fait une combinaison linéaire d'un mode hybride HE<sub>21</sub> et d'un mode transverse (soit TE ou TM, selon la direction de la polarisation). Pour effectuer les simulations, nous nous sommes placés dans le cas de la fibre B avec la moitié de la puissance dans le mode fondamental et

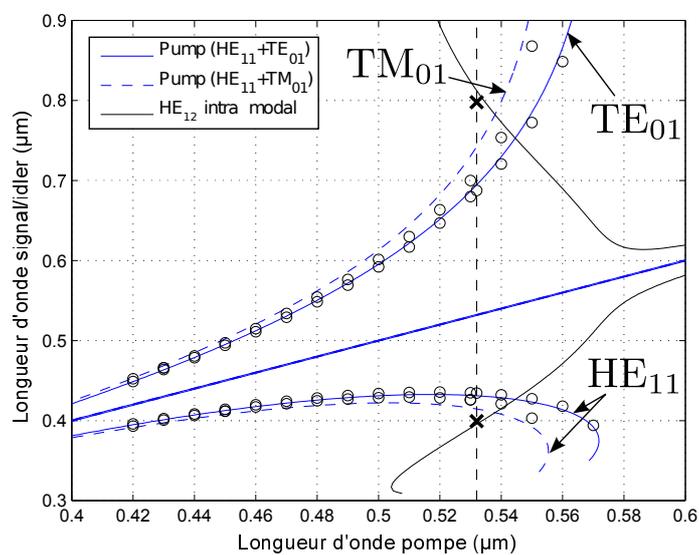


FIGURE 3.28 – Accords de phase théoriques et expérimentaux obtenus pour la fibre A. Les courbes en **bleu** illustrent les accords de phase théoriques pour la pompe distribuée sur une combinaison  $\text{TE}_{01} + \text{HE}_{11}$  (trait plein) ou  $\text{TM}_{01} + \text{HE}_{11}$  (trait tireté). La courbe en noir représente l'accord de phase intramodal du mode  $\text{HE}_{12}$ . Les points expérimentaux sont illustrés par des cercles noirs pour le régime de pompage mixte et par une croix noire pour l'accord de phase  $\text{HE}_{12}$  à 532 nm.

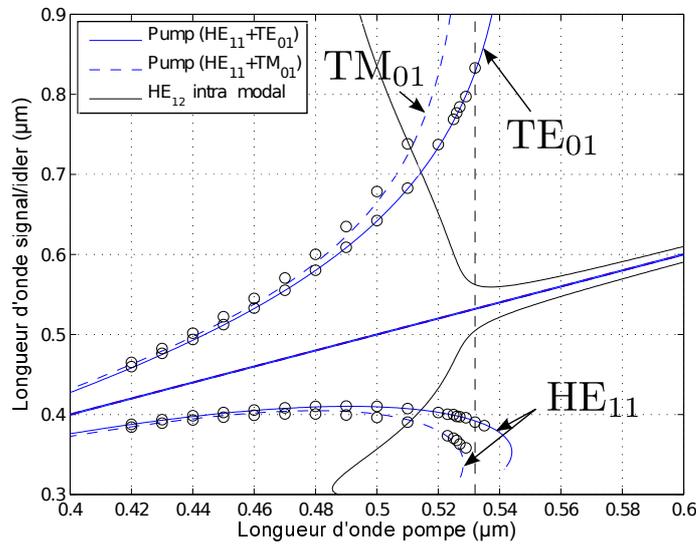


FIGURE 3.29 – Accords de phase théoriques et expérimentaux obtenus pour la fibre B. Les courbes en **bleu** illustrent les accords de phase théoriques pour la pompe distribuée sur une combinaison TE<sub>01</sub>+HE<sub>11</sub> (trait plein) ou TM<sub>01</sub>+HE<sub>11</sub> (trait tireté). La courbe en noir représente l'accord de phase intramodal du mode HE<sub>12</sub>. Les points expérimentaux sont illustrés par des cercles noirs pour le régime de pompage mixte.

le reste réparti également sur le mode  $TE_{01}$  et  $HE_{21}$ . Des simulations de propagations via l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée modifiée multimode (MMGNLSE, [79])<sup>2</sup> en utilisant ces trois modes ainsi que le mode  $HE_{12}$  ont été réalisées dans le but d'observer le couplage éventuel de la puissance de pompe vers ce dernier (voir figure 3.30). Ainsi, nous avons considéré comme conditions initiales une pompe de 200 ps à 532 nm ayant une puissance crête de 1 kW distribuée sur les modes  $HE_{11}$ ,  $TE_{01}$ ,  $HE_{21}$  et  $HE_{12}$  ayant respectivement 500 W, 250 W, 250 W et 0 W. La propagation a été effectuée sur une longueur de 34 cm. En parallèle, cette simulation nous permet d'observer le gain relatif des autres processus non-linéaires comme l'effet Raman. On note en particulier que le gain le plus élevé est celui que nous cherchons à observer (i.e. la conversion vers le mode fondamental dans l'ultraviolet). De la même façon, même si le mode  $HE_{21}$  est excité, son gain par MQO est d'environ 60 dB inférieur au MQO dans les modes  $HE_{11}$  et  $TE_{01}$ . En parallèle, on note l'apparition de gain Raman dans le mode  $HE_{12}$  même pour une puissance nulle à l'injection.

Rappelons qu'à partir des profils de modes, on peut également estimer le facteur  $M^2$  du faisceau résultant [80, 81] qui nous donne une excellente idée de l'efficacité de focalisation que l'on puisse atteindre. En particulier, le mode  $HE_{12}$  (qui était jusqu'à maintenant l'état de l'art en terme de sources d'ultraviolets par MQO [5]), a un  $M^2$  d'environ 3, tandis que le mode fondamental a un  $M^2$  de 1.09. A divergence égale, le rapport des étranglements de faisceaux et des surfaces effectives de faisceaux sont alors donnés par :

$$\frac{w_{HE_{12}}}{w_{HE_{11}}} = \frac{M_{HE_{12}}^2}{M_{HE_{11}}^2}, \Rightarrow \frac{A_{HE_{12}}^{(eff)}}{A_{HE_{11}}^{(eff)}} = \left( \frac{M_{HE_{12}}^2}{M_{HE_{11}}^2} \right)^2 \quad (3.21)$$

Ainsi, à puissance égale, le flux de photons obtenu en passant au mode fondamental est augmenté d'environ un ordre de grandeur tandis que la résolution est améliorée d'un facteur 3, ce qui est très intéressant pour une panoplie d'applications. C et accord de phase par pompage distribué sur les modes TE, TM et sur le mode fondamental s'avère donc être une excellente base de travail dans le but de développer de nouvelles sources UV pour des applications industrielles et biomédicales (chirurgie ou imagerie non-linéaire). Les résultats expérimentaux obtenus pour les deux fibres réalisées sont présentés à la prochaine section.

### 3.5.2 Caractérisations expérimentales

Dans un premier temps, nous avons voulu vérifier les courbes d'accord de phase prédites numériquement en balayant la longueur d'onde de notre OPO injecté dans 50 cm de fibre sous test. L'OPO est un *Opolette* de la société *Opotek* émettant un train d'impulsion de 10 ns avec un taux de répétition de 100 Hz et d'énergie allant

---

2. La méthode MMGNLSE généralise l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée mono-mode (GNLSE) au cas de figure multimode, permettant de considérer les effets de polarisation, la dispersion d'ordre élevée, les non-linéarités Kerr et Raman, le « *self-steepening* » ainsi que les coefficients non-linéaires et de couplage dépendants en longueur d'onde.

jusqu'à 2 mJ. Les résultats sont colligées sur les figures 3.28 et 3.29 par des cercles noirs. On constate un très bon accord avec la théorie à la fois pour les deux fibres et pour les levées de dégénérescence.

Un microchip à 532 nm de la société *Teem Photonics* (modèle SNG-05E) et émettant des impulsions d'une durée de  $\sim 550$  ns et de 11 kW en puissance crête à un taux de répétition de 7 kHz a également été utilisé pour faire l'acquisition des spectres et des images en champ proche en sortie de fibre, que l'on peut voir à la figure 3.31. Des filtres passe-bas et passe-bande en longueur d'onde ont été utilisés pour isoler les pics dans le but de résoudre le champ proche pour les pics d'intérêt. L'alignement de l'injection a été effectué en maximisant le gain en sortie.

Dans le cas de la fibre A (figure 3.31(a)), on note bien la présence des accords de phase de la pompe distribuée  $TE_{01}+HE_{11}$  ainsi que l'accord de phase intramodal  $HE_{12}$ . L'accord de phase correspondant au pompage distribué se produit aux longueurs d'onde de 425.1 nm et 712.2 nm pour le signal et l'idler respectivement. L'accord de phase intramodal conduit quant à lui à un signal à 399 nm et l'idler, à 797.8 nm. Les pics correspondant au pompage distribué sont plus fins que les pics de MQO en  $HE_{12}$ , mais on constate bien la nature des modes lorsqu'on observe le champ proche correspondant.

Dans le cas de la fibre B (figure 3.31(b)), tel que prévu, un seul accord de phase est visible dans le régime de pompage distribué et correspond à un signal dans le mode fondamental à 390.5 nm et un idler dans le mode  $TE_{01}$  à 833.1 nm. C'est, à notre connaissance, la plus basse longueur d'onde obtenue dans le mode fondamental pour un MQO à 532 nm dans une fibre de silice. Ces résultats ont d'ailleurs fait l'objet de d'une publication[82] et d'un oral en conférence.

### 3.5.3 Discussion

Nous avons vu dans cette section qu'il est possible, à l'aide d'un pompage distribué sur deux modes, d'obtenir des ultraviolets dans le mode fondamental. On a également noté que le gain théorique de ce processus est largement supérieur aux autres effets non-linéaires indésirables, en particulier ici l'effet Raman. Bien que les efficacités de conversion de processus comparables de MQO aient été rapportés comme étant de l'ordre de 6% pour le  $HE_{12}$ [5], le fait de passer dans le mode fondamental augmente d'environ un ordre de grandeur l'intensité atteignable à puissance égale et augmente la résolution spatiale d'un facteur 3, ce qui est très prometteur sur le plan des applications, sans compter le fait qu'il est envisageable de produire un composant fibré pour injecter exactement le bon mélange de mode et ainsi grandement augmenter l'efficacité globale du système.

Toutefois, l'exposition prolongée d'une fibre à une radiation intense peut engendrer le même type de dommage au matériau que ce qui est observé dans le *photodarkening* (ou *photo-noircissement*) pour les fibres actives, lié au bris de certaines liaisons moléculaires qui, en retour, créent des bandes d'absorption ayant des spectres très particuliers[22]. En effet, il a été démontré que la génération d'un supercontinuum dans une PCF en pompant à 1060 nm produit une bande d'absorption

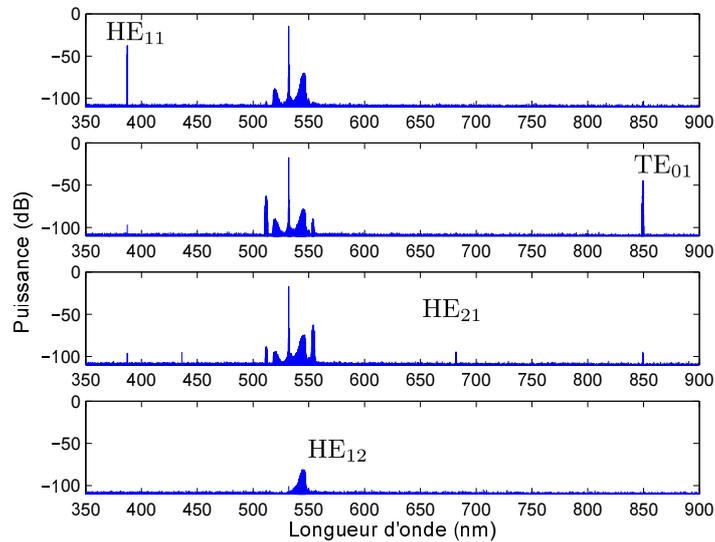


FIGURE 3.30 – Intégration numérique de l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée modifiée en régime multimode (MMGNLSE) en considérant l'injection optimale d'une source linéairement polarisée dans la fibre B. On constate que le processus de mélange à quatre ondes ayant le gain dominant est bien celui que l'on cherche à observer. On note également que le couplage de puissance vers le mode  $HE_{12}$  (qui est pour nous l'équivalent d'une perte) est très faible.

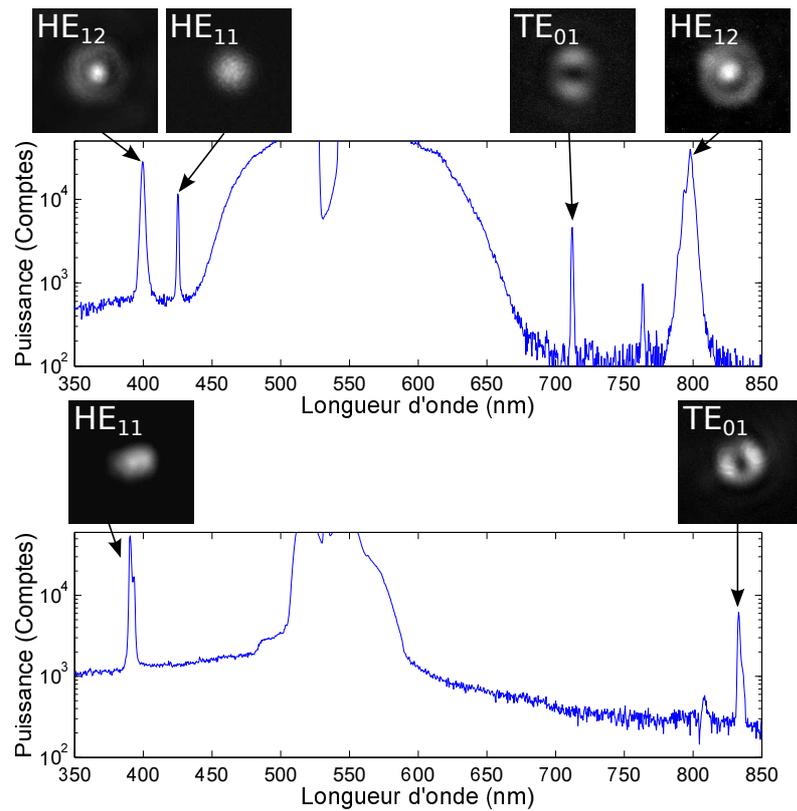


FIGURE 3.31 – Spectres obtenus lors du pompage à 532 nm pour par les fibres A (haut) et B (bas) ainsi que les champs proches pour les différents pics observés. Pour la fibre A, seul l'accord de phase impliquant le mode TE a été excité pour faciliter le filtrage spectral du champ proche. Pour la fibre A, les deux types d'accords de phase sont visible simultanément (intermodal en TE<sub>01</sub> et HE<sub>11</sub> et intramodal en HE<sub>12</sub>) tandis que seul l'accord de phase intermodal est visible en sortie de la fibre B, ce qui est en accord avec les prédictions théoriques.

dans le visible autour de 630 nm (correspondant également à la bande d'absorption générée par photodarkening) qui est due à une forte absorption dans les quelques premiers centimètres du segment de fibre. Or, les bandes d'absorption de la silice réputée pour causer le genre de défaut mis en cause ici (comme les défauts de bris de lien Si-O et les centres E', soit de volume ou de surface[83, 84]) sont situés dans l'ultraviolet, aux alentours de 213 nm (les spectres d'absorption étant relativement larges). Le mécanisme suggéré pouvant être responsable de cette dégradation par pompage à 1060 nm serait l'absorption multi-photon. Si tel est le cas, un pompage à 532 nm serait encore plus néfaste, le nombre de photons nécessaires pour passer la bande d'énergie d'absorption étant diminué d'un facteur deux. Aussi, cet effet pourrait grandement être exacerbé par la présence de germanium, ce qui pourrait expliquer la chute rapide de gain observée dans la fibre hybride. De manière analogue, mais moins marquée, cette perte de gain a également été observée dans la PCF air-silice. Également, l'utilisation prolongée d'un segment tendait à voir le gain chuter progressivement ; la seule façon de le récupérer ensuite était de cliver un petit bout de fibre du côté de l'injection ou carrément de changer de segment de fibre. Ceci a fait en sorte que les mesures ont été très difficiles à réaliser.

Pour vérifier si le pompage endommageait la fibre, nous avons réalisé une première expérience simple à savoir la comparaison des spectres de transmission avant et après l'injection pendant 60 heures de source microchip à 532 nm avec une puissance crête injectée estimée à 3 kW. La mesure du spectre de transmission a été effectuée à l'aide d'une source supercontinuum allant jusque dans les environs de 350 nm et d'un analyseur de spectre optique. Le résultat obtenu est présenté à la figure 3.32. Bien que cette mesure ne soit que qualitative, l'injection pouvant avoir évolué pendant la mesure nous empêchant ainsi de pouvoir lier les pertes à une échelle temporelle avec assurance, on note clairement une augmentation des pertes à basse longueur d'onde et la présence du fameux pic d'absorption à 630 nm, pic qui confirme la présence de liens Si-O rompus dans la matrice de silice, tout comme on le voit dans le cas du photo-noircissement et du pompage à 1060 nm. On note également la présence de pics de pertes correspondant au MQO dans la fibre A mais le mécanisme sous-jacent à leur apparition nous reste inconnu. En résumé, il apparaît donc clair qu'une stratégie doit être établie sur le plan matériaux pour faire en sorte de diminuer cet effet si l'on veut espérer avoir une génération efficace d'UV dans les fibres. Cette stratégie doit passer par une caractérisation du phénomène, une exploration de sa réversibilité ainsi qu'un recensement des types de silice disponibles et étant potentiellement plus susceptibles de résister aux dommages causés par la pompe.

### 3.6 Conclusion et perspective

Dans ce chapitre, nous avons abordé différentes stratégies pour la génération d'ultraviolets dans les fibres de silice par pompage à 532 nm. Nous avons également, en parallèle, étudié la sensibilité du MQO à plusieurs aspects du procédé de

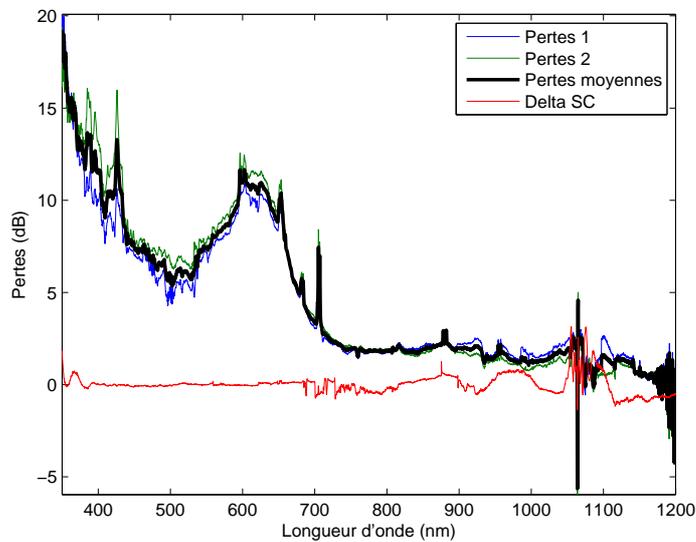


FIGURE 3.32 – Pertes induites par pompage à 532 nm dans la fibre A exposée durant 60 heures à une puissance crête estimée à 3 kW. Les deux courbes (verte et bleue) représentent deux mesures distinctes (pour assurer la répétabilité de la mesure) et la courbe en rouge représente l'évolution de la source supercontinuum (qui n'a à toutes fins pratiques pas bougé). On note clairement une augmentation de pertes à courte longueur d'onde ainsi que la présence d'un pic caractéristique de défauts dans la silice à 630 nm. Bien que la mesure ait été faite sur un segment de deux mètres, le dommage induit est situé dans les quelques centimètres au début de la fibre[22].

fabrication, comme la fluctuation du diamètre (i.e. du facteur d'échelle), de la fraction d'air dans la gaine (via la grosseur des trous) ainsi que de la tension de fibrage. Nous avons noté, en résumé, que la fluctuation d'échelle est très néfaste au niveau de la diminution du gain de MQO mais qu'elle offre des points de stabilité (tels que discutés au chapitre 2) qui permettent d'obtenir un gain maximum malgré la présence de fluctuations, ce qui a été démontré par une étude détaillée de l'impact des processus de fluctuation. Également, nous avons pu noter que l'effet de la fraction d'air dans la gaine est d'autant plus néfaste que l'espacement spectral est grand et que celui-ci est généralement monotone. Finalement, nous avons également constaté que la fluctuation de tension de tirage n'est pas très significative comparativement aux autres et ne devrait pas contribuer à la perte de gain.

Nous avons aussi introduit une étude de faisabilité pour l'utilisation d'un laser CO<sub>2</sub> dans le but d'effectuer des perturbations périodiques de la dispersion avec de très petites périodes permettant d'améliorer la résolution spatiale possible du système de fibre de 1 à 2 ordres de grandeur. Ce système, installé sur la tour, peut également être utilisé pour fabriquer des réseaux long pas directement sur la fibre pendant le tirage. Bien que ce procédé soit encore en phase préliminaire, quelques essais ont permis d'obtenir des changements mesurables de structure avec des petites périodes, ce qui est encourageant pour la suite.

Finalement, nous avons présenté une troisième méthode pour la génération d'ultraviolets qui consiste à envoyer la pompe dans une combinaison de modes. Une étude numérique et expérimentale font écho dans cette étude à la théorie développée au chapitre 2. Des ultraviolets à 390 nm ont ainsi été générés avec succès. De plus, cette technique offre l'avantage majeur de produire les ultraviolets dans le mode fondamental, permettant ainsi d'avoir une efficacité de focalisation environ un ordre de grandeur plus importante que celle obtenue avec les plus récentes sources fibrées de même type[5] et une résolution trois fois supérieure. Tout ceci rend cette plateforme très intéressante pour le développement d'applications.

Bien que nous ayons effectivement généré des ultraviolets dans une fibre microstructurée à base de silice, le problème principal que nous avons rapporté est que le pompage endommage la silice de manière analogue au photo-noircissement dans les lasers et amplificateurs. Il n'est pas clair quelle serait la meilleure stratégie à l'heure actuelle pour améliorer la performance du matériau mais certains autres types de silices pourraient éventuellement être utilisées. Une étude de matériaux devrait cependant être effectuée pour étudier en détail la dynamique de dégradation.



# Caractérisation de contenu modal par imagerie résolue spectralement et spatialement

$S^2$

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Contexte et motivation</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>4.2</b>	<b>Revue des méthodes actuelles d'analyse de contenu modal</b>	<b>105</b>
4.2.1	Méthode des filtres de corrélation . . . . .	106
4.2.2	Famille de méthodes d'analyse par distribution d'intensité . . . . .	109
4.2.3	Imagerie d'inter-corrélation $C^2$ . . . . .	109
4.2.4	$S^2$ standard . . . . .	111
<b>4.3</b>	<b>L'interféromètre multi-onde</b> . . . . .	<b>113</b>
4.3.1	Analyse de l'interféromètre . . . . .	115
4.3.2	Reformulation de l'interféromètre : un isomorphisme . . . . .	118
<b>4.4</b>	<b>Première étape : analyse par composantes principales (ACP)</b>	<b>120</b>
4.4.1	Propriétés de la corrélation spectrale . . . . .	122
4.4.2	Obtention de $\mathbf{C}$ à partir des données expérimentales . . . . .	123
4.4.3	Application de l'ACP . . . . .	124
4.4.4	Matrice de corrélation spatiale $\mathbf{C}'$ et composantes principales spectrales . . . . .	126
4.4.5	Résultats expérimentaux et discussion . . . . .	127
<b>4.5</b>	<b>Deuxième étape : analyse par composantes indépendantes (ACI)</b> . . . . .	<b>130</b>
4.5.1	Notion d'indépendance . . . . .	131
4.5.2	Pré-conditionnement des signaux . . . . .	135
4.5.3	Récupération des figures de battement . . . . .	138
<b>4.6</b>	<b>Troisième étape : détermination des profils transverses de champ <math>F_k(x, y)</math></b> . . . . .	<b>144</b>
4.6.1	Principe général . . . . .	144
4.6.2	Méthode de reconstruction modale des « anneaux » et aspects vectoriels . . . . .	145
4.6.3	Détermination d'enveloppes additionnelles . . . . .	147
<b>4.7</b>	<b>Facultatif : battements manquants et amplitudes</b> . . . . .	<b>147</b>

---

4.8 Dernière étape : détermination de la distribution modale de puissance . . . . .	150
4.9 Discussion et perspectives . . . . .	155

---

## 4.1 Contexte et motivation

L'utilisation de fibres optiques dites monomodes s'est imposée très tôt comme la norme dans presque tous les secteurs d'industries basées sur cette technologie. En effet, autant dans le secteur des télécommunications, où la course au débit rendait toute dispersion gênante, que dans le secteur des sources lumineuses, comme, par exemple, les lasers à fibre pour lesquels la qualité de faisceau est un paramètre crucial, choisir une fibre monomode permet d'éliminer plusieurs problèmes à la source. Nonobstant le caractère pratique des fibres monomodes, les applications ont, au cours des 15 dernières années, poussé les designs de fibres à leurs limites, de sorte que, par choix dans certains cas et par nécessité dans d'autres, le passage aux fibres multimodes s'est avéré obligatoire. Deux exemples très pertinents de ce cas de figure portent sur les mêmes secteurs d'activités mentionnés plus haut : en télécommunications, l'augmentation de la densité d'information portée par une fibre est problématique et une solution envisagée pour dissoudre le problème est de passer au multiplexage spatial (ou modal) car les canaux sont maintenant saturés ; de la même façon, la montée en puissance crête des lasers à fibre pulsés requiert d'augmenter les aires effectives dans le but de minimiser les non-linéarités. Or, cette augmentation d'aire effective tout en gardant la fibre strictement monomode présente souvent des problèmes pratiques (fibres trop sensibles en courbure par exemple) ou technologiques (le degré de contrôle du profil d'indice requis est bien supérieur aux capacités des technologies de fabrication). De la même façon, la continuelle extension des bandes spectrales d'opération des fibres à cristaux photonique à base de silice exige, comme nous avons pu le voir (ref à section), d'opérer en régime multimode pour avoir accès à des dispersions intéressantes.

Or, l'utilisation de fibres multimodes implique souvent d'être en mesure de caractériser le contenu modal de cette fibre, et ce sous plusieurs aspects : la *géométrie* des modes, leurs *dispersion d'indice de groupe* ainsi que la *distribution de puissance* entre les différents modes. Diverses techniques, souvent interférométriques, permettent de caractériser l'un ou l'autre de ces aspects mais très peu de techniques sont en mesure de caractériser tous les aspects, celle offrant la caractérisation la plus complète jusqu'à maintenant est la méthode d'imagerie résolue *spectralement* et *spatialement*, aussi connue sous le nom de méthode  $S^2$  [27, 85]. Introduite en 2008, elle permet de caractériser de manière très simple la géométrie des champs, la différence des indices de groupe entre les modes et la distribution de puissance entre les différents modes. Cependant, son utilité est limitée par deux facteurs : un mode doit clairement dominer les autres (sa puissance relative doit être supérieure à 90 % de la puissance totale) et les différences d'indice de groupes de ce mode avec

les autres ne doivent comporter aucune dégénérescence, auquel cas l'information sur ces deux modes est confondue et indissociable. Bien que les fibres à large aire effective conventionnelles utilisées dans les lasers à fibre répondent souvent à ces deux conditions car elles comportent généralement peu de modes et sont opérées principalement dans le mode fondamental, l'application de la technique à des cas de figures où, par exemple, plusieurs modes sont excités avec des puissances comparables ou que le nombre de modes est grand et que certaines différences d'indice de groupe sont dégénérées, les prémisses de base s'effondrent et la technique est inutilisable et d'autres techniques, beaucoup plus complexes d'utilisation, doivent être employées. Il serait donc intéressant de voir s'il existe un moyen d'utiliser les données d'une simple mesure  $S^2$  standard et d'étendre les capacités de l'analyse pour extraire les informations additionnelles que nous cherchons à obtenir et qui sont noyées dans la mesure. Nous proposons donc une nouvelle méthode d'analyse, *l'imagerie  $S^2$  avancée* [86, 87], qui permet de combler ces lacunes et qui sera explicitée à partir la section 4.3.

Dans le but de fixer les idées et d'exposer le processus dans le détail, un tour d'horizon des méthodes interférométriques actuelles sera d'abord effectué, puis la méthode  $S^2$  avancée proprement dite sera élaborée en détail. L'attention sera particulièrement portée sur la formulation des termes de l'interféromètre. Une introduction graduelle des outils mathématiques (c.f. *analyse par composantes principales* et *analyse par composantes indépendantes*) nécessaires à la séparation des composantes de ces différents termes sera faite, avec comme support un jeu de données expérimental violant les prémisses de base du  $S^2$  standard.

## 4.2 Revue des méthodes actuelles d'analyse de contenu modal

Comme il fut mentionné plus haut, plusieurs méthodes existent pour caractériser au moins partiellement l'information sur les modes d'une fibre en supportant plusieurs ; un exemple simple à visualiser consiste à observer la trace obtenue en utilisant un réflectomètre sur une fibre multimode. En effet, les modes ayant des temps de groupe différents, un choix judicieux des paramètres d'impulsions nous permet de voir plusieurs pics au réflectomètre pour un seul événement sur la ligne (une clive par exemple). Bien que cela ne nous donne *a priori* aucune information sur la nature des modes en jeu, elle permet dans une certaine mesure de visualiser le nombre de modes ayant des indices de groupe différents. Or, pour une fibre arbitraire par exemple, on peut être intéressé à connaître la distribution du champ pour chaque mode (spatial) ce qui est fastidieux, à moins que l'on sache exciter un seul mode à la fois, auquel cas cela implique que l'on soit déjà bien renseigné sur la nature des modes et que le problème ait déjà été élucidé. Donc, en pratique, dans tous les cas autres que ceux d'une fibre monomode, il y aura de l'énergie dans quelques modes qui interféreront au cours de leur propagation, laissant en sortie une image en champ proche correspondant à la somme cohérente de tous les

modes excités. De toute évidence, cette interférence sera résolue spatialement (via la forme des modes) et spectralement (via les différentes dispersions de chaque modes). Il apparaît donc ainsi que l'utilisation d'une technique interférométrique résolue spatialement *et* spectralement permettrait de reconstruire l'information sur la distribution des champs ainsi que sur leur dispersion. Quatre méthodes se sont particulièrement illustrées dans les dernières années pour reconstruire l'information (totale ou partielle) sur le contenu modal dans une fibre, chacune avec ses avantages et ses inconvénients, soit la méthode des filtres de corrélation, la famille de méthodes d'analyse par distribution d'intensité, l'imagerie d'inter-corrélation (où  $C^2$ ), et le  $S^2$ , qui seront maintenant présentées succinctement.

#### 4.2.1 Méthode des filtres de corrélation

Au-delà de la caractérisation pure et simple du contenu modal, il est parfois souhaitable de connaître en temps réel la distribution de puissance dans les modes. Les méthodes purement interférométriques impliquent généralement un balayage en longueur d'onde ou en délai, ce qui demande un certain temps d'acquisition, et nécessite souvent un traitement post-acquisition pour reconstruire l'information recherchée. Bien que la méthode de filtres par corrélation nécessite une composante interférométrique pour reconstruire la phase des modes (nous y reviendrons plus loin), le principe de base repose sur l'interférence du faisceau à la sortie de la fibre avec un hologramme généré par ordinateur (HGO, tels qu'illustrés à la figure 4.2) qui a été spécialement encodé pour que les ordres de diffraction de chaque modes soient spatialement délocalisés par exemple. Or, le calcul de cet hologramme nécessite de connaître par avance la forme des enveloppes de champ, ce qui implique qu'on les ait calculées ou mesurées autre part. Ainsi, en effectuant la diffraction du faisceau successivement par les hologrammes propres à chaque mode, on obtient des figures d'intensités distinctes (dont le résumé est illustré à la figure 4.3). Un exemple de montage type de mesure de contenu modal par filtre de corrélation, tel que décrit dans [29, 88], est illustré à la figure 4.1.

En appliquant la méthode, on se retrouve donc avec un ensemble de figures d'intensité des modes imagées qui, dans la limite de l'efficacité de diffraction du modulateur, permet de calculer la puissance portée par chaque mode en prenant l'intensité du point central de la surmodulation (croix jaunes sur la figure 4.3). La limitation principale de cette méthode réside dans la qualité de l'hologramme généré; en effet, le choix des fonctions de modulations et du facteur d'échelle requiert une connaissance préalable de la géométrie des modes et des propriétés du système optique entre la fibre et le modulateur spatial de lumière (MSL) servant à créer l'hologramme. La résolution du MSL est également à prendre en compte dans les limitations du système. Un exemple de faisceau test (à gauche) et sa reconstruction obtenue par la méthode des filtres de corrélation (à droite) est illustré sur la figure 4.4.

Ce type de mesure s'avère être très performant expérimentalement [29] mais il

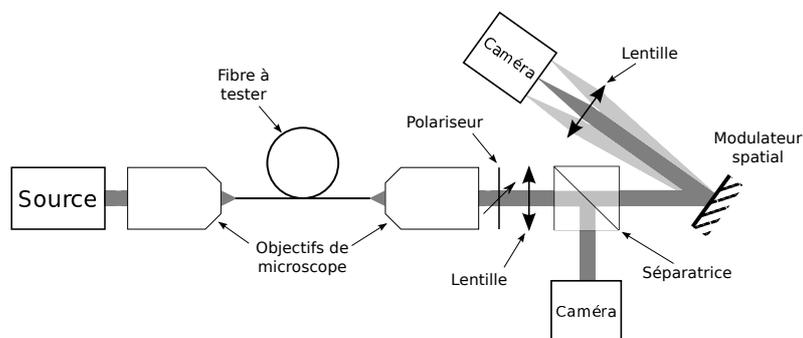


FIGURE 4.1 – Montage typique de mesure de contenu modale par filtre de corrélation. Le faisceau de sortie est imagé intégralement et les modes sont décomposés à l'aide d'un hologramme généré par ordinateur puis imagés simultanément sur une seconde caméra pour visualiser le champ proche.

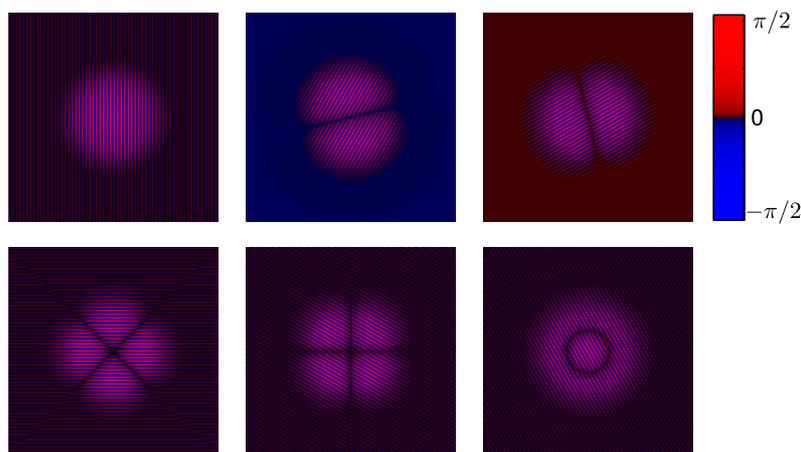


FIGURE 4.2 – Exemples d'hologrammes en phase générés pour les six premiers modes guidés d'une fibre à saut d'indice. La surmodulation a pour but de déporter la figure de diffraction pour permettre la mesure de puissance portée par ce mode.

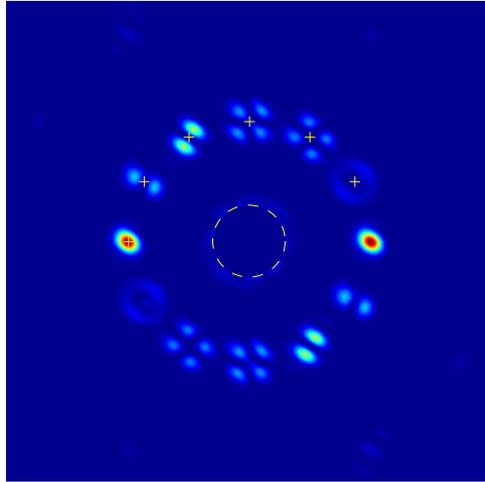
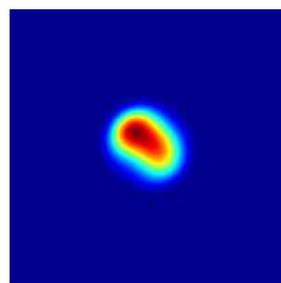
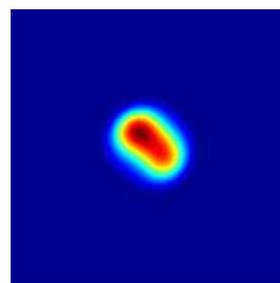


FIGURE 4.3 – Illustration simultanée des figures de diffractions d'un faisceau multimodes décomposé à l'aide des hologrammes présentés à la figure 4.2. Les croix jaunes illustrent la position du point où la mesure de puissance est effectuée (un pixel de caméra par exemple). L'ordre central, situé à l'intérieur du cercle tireté, a été filtré pour plus de clarté.



Faisceau initial



Faisceau reconstruit

FIGURE 4.4 – Exemple de faisceau reconstruit par la méthode des filtres de corrélation. Le faisceau test (à gauche) est décomposé à l'aide de chacun des hologrammes de la figure 4.2, puis reconstruit (à droite) à l'aide des intensités et phases aux centres des figures de diffraction propres à chaque modes (croix jaunes de la figure 4.3).

a été montré qu'il peut être avantageux de l'utiliser en complément d'une autre méthode d'analyse de contenu modal[88], d'autant plus que, utilisée seule, cette méthode ne fournit aucune information sur la dispersion modale. Or, en faisant interférer les modes en sortie de système avec un mode de référence, on peut additionnellement déterminer la phase relative entre le mode de référence et les différents modes et ainsi récupérer l'information sur la dispersion.

#### 4.2.2 Famille de méthodes d'analyse par distribution d'intensité

Il existe une série de méthode de quantification du contenu modal qui repose sur l'analyse de la figure d'intensité en champ proche, avec comme particularité que ces méthodes sont généralement appliquées aux cas de sources *incohérentes*. Ces méthodes utilisent différentes approches comme la régression[31, 32], l'analyse de Fourier[32], l'analyse par facteur d'images[30] et d'autres encore[33]. En résumé, la plupart de ces méthodes reviennent à minimiser une fonction d'erreur en optimisant des coefficients pour exprimer la figure d'intensité comme une somme de contributions individuelles de chaque « mode » et ainsi minimiser le résidu, les modes utilisés pour ce faire étant aussi pour cette méthode des solutions obtenues autre part (par exemple, en solutionnant l'équation d'onde pour une profil d'indice mesuré ou estimé). Bien que certaines de ces analyses puissent également être utilisées dans le cas où l'interférence est tout de même prise en compte (en ajoutant la phase comme paramètre de régression), le nombre de termes à utiliser devient important et la solution n'est a priori pas unique. Or, la prise en compte de l'interférence, même si elle augmenterait considérablement la dimensionnalité du système, permettrait de donner accès à l'information sur la dispersion.

Le point problématique de ces méthodes réside d'une part dans le fait que la structure modale de la fibre doit être estimée séparément pour faire l'analyse et d'autre part parce qu'elle impose des contraintes sur la source à utiliser pour s'assurer d'être en régime incohérent, ce qui nécessite soit une vérification expérimentale qu'il n'y a bien pas d'interférence ou d'avoir une connaissance de la dispersion des modes. En bref, bien que ces méthodes soient très pratiques, rapides et relativement précises, elles ne sont utiles que dans les cas où la fibre est relativement bien caractérisée car beaucoup d'information doivent être connues *a priori* pour avoir des résultats de qualité.

#### 4.2.3 Imagerie d'inter-corrélation $C^2$

Comme nous l'avons mentionné en introduction, une mesure en réflectométrie sur une fibre multimode permet, si les paramètres sont bien choisis, de noter la présence de différents modes par l'apparition d'une multitude de pics de contraste pour un seul événement (une clive droite, par exemple). Si on étend ce concept pour prendre en compte la distribution *spatiale* de ces courbes de contraste, on obtiendra directement, en fonction du délai, des images de contraste maximum qui correspondront au produit des amplitudes de champ du mode de la fibre avec le

mode du bras de référence. Pour mieux illustrer le principe, le montage expérimental typique est illustré à la figure 4.5[28, 89].

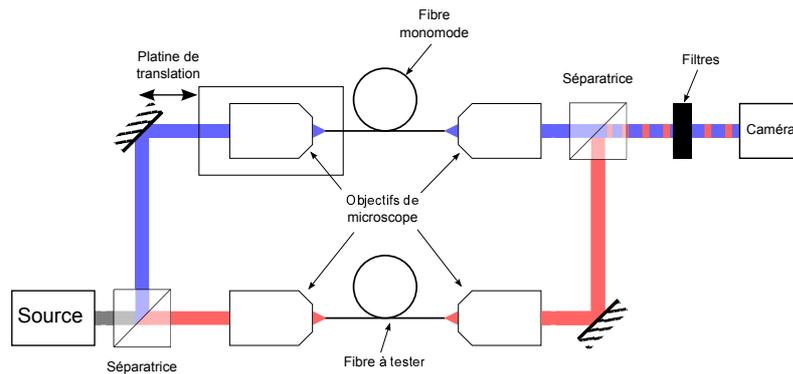


FIGURE 4.5 – Montage typique de la méthode de mesure de contenu modal par interférométrie ( $C^2$ ). Un interféromètre de Mach-Zehnder a dans son bras de référence (en bleu) une fibre monomode à compensation de dispersion et dans son autre bras (en rouge), la fibre multimode à tester (de longueur comparable à la fibre de référence). Une platine de translation permet de faire varier la différence de marche entre les deux bras.

Un étage de translation sur le bras de référence permet de faire varier la différence de marche. Lorsqu'on utilise une source large-bande et qu'on mesure le contraste de l'interférence (en chaque point de la caméra) en fonction de la différence de marche, on peut noter que le contraste sera maximum à différence de marche nulle et que la résolution du pic de contraste maximum sera, en théorie, inversement proportionnelle à la largeur de bande de la source. Or, la dispersion de la fibre peut limiter la résolution si elle est importante. Un autre facteur important à prendre en compte est la taille relative des modes ; en effet, si le mode de la fibre de référence est trop petit, les figures d'interférence seront rognées là où l'intensité du mode fondamental de la fibre monomode est faible, gênant ainsi la reconstruction des amplitudes de champ.

Dans les faits, cette méthode est l'analogue *temporel* de la mesure  $S^2$  qui revêt un caractère *spectral* ; mathématiquement, les jeux de données obtenus par ces deux

méthodes sont analogues. L'avantage principal de cette méthode est de pouvoir comparer la fibre à tester avec une fibre dont la dispersion peut être connue. Aussi, les interférences entre modes d'ordre supérieur n'apparaissent pas dans ces mesures si la fibre de référence est monomode, ce qui peut simplifier l'analyse. Cependant, le montage est plus complexe que celui de la méthode  $S^2$  qui nécessite uniquement d'utiliser la fibre à tester, ce qui simplifie grandement les contraintes pratiques de stabilité de l'interféromètre, entre autres choses.

#### 4.2.4 $S^2$ standard

La technique  $S^2$  consiste à mesurer le spectre transmis par une fibre multimode en fonction de la position transverse en champ proche (voir figure 4.6). En effet, puisque les modes ont des temps de propagation différents et que ceux-ci ont une géométrie bien précise, on obtiendra, pour une source large, des spectres cannelés qui varieront selon la position en champ proche en fonction de l'enveloppe de champ des modes et dans la différence de temps de groupe entre ceux-ci. Comme il a été mentionné plus haut, cette technique et la technique dite  $C^2$  sont réciproques car elles sont reliées par une transformée de Fourier. La première version introduite en 2008 de la méthode  $S^2$  [27, 85] utilise une fibre monomode et un analyseur de spectre pour recueillir les données sur une image agrandie du champ proche en sortie de fibre. On forme ainsi un cube de données, avec un spectre pour chaque position transverse du champ proche (voir figure 4.7). Or, il existe une technique beaucoup plus simple du point de vue expérimental introduite par NGUYEN et al. [90] et dont le montage est illustré à la figure 4.8. En effet, très peu de matériel est requis dans ce cas de figure pour effectuer l'acquisition des données, soit la fibre à tester, un laser accordable fibré, un système d'imagerie en champ proche, une caméra et un système d'enregistrement automatique. C'est d'ailleurs la simplicité de cette méthode, par rapport aux autres détaillées jusqu'ici, qui lui donne un caractère pratique. Aussi, un avantage de la méthode  $S^2$  sur le  $C^2$  consiste en la conservation de l'intégralité de l'information spectrale autrement détruite par la perte de visibilité de l'interférence dans la mesure  $C^2$ . La conservation de cette information permet également de récupérer l'information sur la dispersion des vitesses de groupe des modes en traitant les données en spectrogramme [91].

La technique d'analyse traditionnelle consiste simplement à effectuer la transformée de Fourier sur les fréquences optiques, nous laissant donc avec la même information que pour la méthode de mesure précédente, soit la visibilité des interférences en fonction des délais de groupe, et partageant donc les mêmes inconvénients. En effet, si certains modes partagent les mêmes différences de délai de groupe, leurs figures de battement seront superposées et *a priori* indissociables. Dans son cadre normal, comme il fut mentionné, cette technique devrait s'utiliser dans le cas où l'on veut mesurer la « pollution modale » dans un système où l'on souhaite opérer idéalement dans un seul mode [85]. En effet, si l'excitation des modes devient importante, des interférences entre modes d'ordre supérieurs apparaîtront et gêneront le traitement habituel des données, entre autres en polluant l'image de l'intensité moyenne

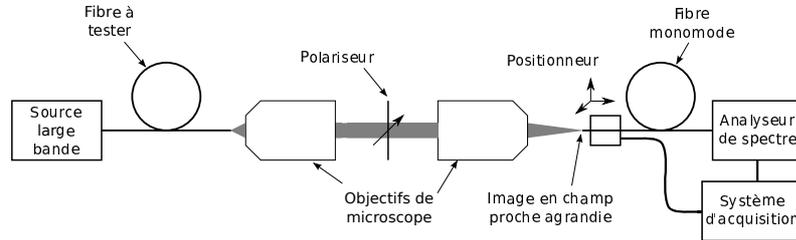


FIGURE 4.6 – Montage expérimental de la méthode  $S^2$  originale. Une source large bande est couplée à la fibre multimode à tester et une fibre monomode est utilisée pour recueillir le spectre en chaque position transverse du champ proche en sortie de fibre. Le polariseur illustré dans ce montage est typiquement inclus dans la littérature et peut être utilisé, par exemple, pour effectuer des mesures de biréfringence mais n'est pas obligatoire.

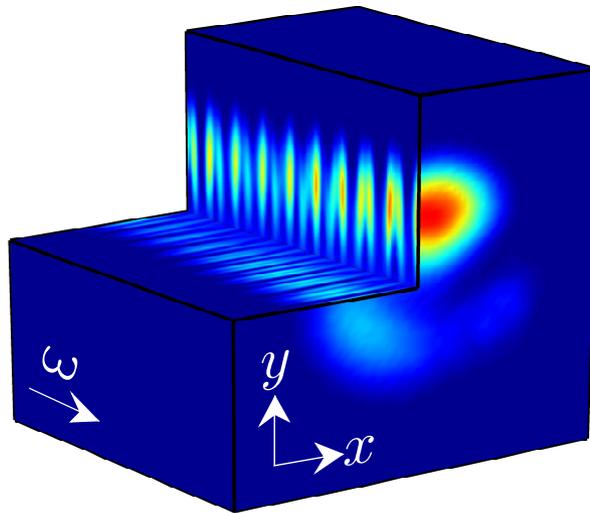


FIGURE 4.7 – Illustration en coupe du cube de données enregistré lors d'une acquisition de type  $S^2$ . Des images en champ proche dans l'espace  $(x, y)$  sont concaténées en fonction de la longueur d'onde qui est ensuite transformée en axe de pulsation  $\omega$ . Ce cube a été généré à partir de véritables données expérimentales qui seront traitées tout au long de cette section. Seul l'axe des fréquences a été tronqué pour permettre de visualiser les battements.

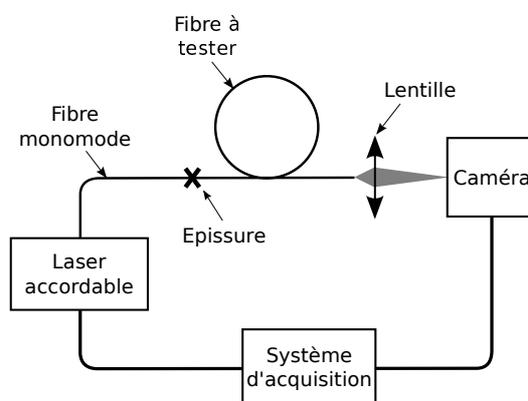


FIGURE 4.8 – Seconde version de la méthode  $S^2$ . Le montage consiste à utiliser une source accordable couplée à une fibre monomode qui est ensuite soudée à la fibre à tester. L'image en champ proche est ensuite enregistrée sur la caméra pour chaque longueur d'onde de la plage de mesure pour reconstituer le cube de données.

qui est habituellement assimilée à l'intensité du mode fondamental. Bien que cela puisse être évité par l'utilisation d'une fibre de référence monomode en  $C^2$ , la complexité additionnelle du montage suggère de chercher des solutions pour rendre la méthode d'analyse plus souple dans le but de contourner les différents problèmes, tout en conservant la simplicité du montage  $S^2$ . Les sections suivantes détailleront le développement de cette technique ayant fait l'objet de publications[87, 86] tout en présentant un exemple de son application. Il est à noter que le montage expérimental employé pour tout le travail présenté plus ici est celui décrit à la figure 4.8.

### 4.3 L'interféromètre multi-onde

Plusieurs des méthodes étudiées dans la section précédente, dont la méthode  $S^2$ , sont basées sur l'interférence entre les différents modes se propageant dans la fibre. Pour bien expliquer toutes les notions mises en jeu dans l'analyse, il est tout d'abord nécessaire de formuler l'expression de l'interféromètre multi-onde constitué par l'ensemble des modes dans une fibre. Ensuite, un soin particulier sera apporté à la formulation des équations dans le but de faciliter la compréhension des concepts à la base des méthodes développées ici sans toutefois alourdir la lecture. Pour fixer les idées, nous utiliserons un calcul scalaire (applicable aux modes linéairement polarisés, ou LP) et nous supposons qu'il n'y a aucun couplage entre les modes. Dans ces conditions, le champ proche en sortie de fibre à la pulsation  $\omega$  peut s'exprimer comme suit :

$$E = \sum_{k=1}^M \sqrt{P_k} F_k(x, y) \left( e^{i(\beta_k L - \omega t)} + \text{conjugué complexe} \right) \quad (4.1)$$

où  $P_k$  représente la puissance dans le  $k$ -ième mode,  $F_k(x, y)$  est son profil transverse de champ,  $\beta_k = 2\pi n_{\text{eff},k}/\lambda$  sa constante de propagation<sup>1</sup> et  $M$  est le nombre total de modes supportés par la fibre. Or, la quantité mesurée est l'intensité, que l'on peut calculer à partir du carré du champ<sup>2</sup> :

$$I \propto \sum_{k=1}^M P_k F_k^2(x, y) + \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{\ell=k+1}^M 2\sqrt{P_k P_\ell} F_k(x, y) F_\ell(x, y) \cos(\Delta\beta_{k\ell} L) \quad (4.2)$$

où  $\Delta\beta_{k\ell} = \beta_k - \beta_\ell$  est la différence des constantes de propagation des deux modes considérés. Dans un cadre interférométrique, on peut caractériser l'interférence en changeant la longueur  $L$ , qui est ici fixe (c'est la longueur de fibre) ou la fréquence optique (via la longueur d'onde). En effet, si on effectue un développement limité en fréquence au premier ordre de la dispersion :

$$\beta(\omega) \approx \beta_0(\omega_0) + \beta_1(\omega_0) \times (\omega - \omega_0) \quad (4.3)$$

où

$$\beta_1(\omega_0) = \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (4.4)$$

Ainsi,  $\Delta\beta_{k\ell}$  peut s'exprimer ainsi :

$$\Delta\beta_{k\ell} \approx (\beta_{1,k} - \beta_{1,\ell})\omega + [\beta_{0,k} - \beta_{0,\ell} - (\beta_{1,k} - \beta_{1,\ell})\omega_0] \quad (4.5)$$

$$= (\beta_{1,k} - \beta_{1,\ell})\omega + \frac{\phi_{k\ell}}{L} \quad (4.6)$$

On connaît que le premier terme du développement de la dispersion  $\beta(\omega)$  représente l'inverse de la vitesse de groupe  $v_g$ . Ainsi,  $\beta_1 = n_g/c$  où  $n_g$  est l'indice de groupe. On peut donc écrire :

$$\beta_{1,k} - \beta_{1,\ell} = \frac{n_{g,k} - n_{g,\ell}}{c} = \frac{\Delta n_{g,k\ell}}{c} \quad (4.7)$$

En substituant dans l'équation (4.2) et en notant que  $n_g L/c$  est le *délai de groupe*  $\tau$ , on peut écrire

$$I \propto \sum_{k=1}^M P_k F_k^2(x, y) + \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{\ell=k+1}^M 2\sqrt{P_k P_\ell} F_k(x, y) F_\ell(x, y) \cos(\tau_{k\ell}\omega + \phi_{k\ell}) \quad (4.8)$$

avec

$$\tau_{k\ell} = \tau_k - \tau_\ell = \frac{\Delta n_{g,k\ell} L}{c} \quad (4.9)$$

---

1.  $F(x, y)$  et  $\beta$  sont réels pour les modes guidés dans une structure non-absorbante  
 2. On rappelle que, en scalaire, les champs normalisés  $F(x, y)$  sont définis tels que  $\frac{1}{2n_g Z_0} \iint_{A_\infty} n^2(x, y) F^2(x, y) dA_\perp = 1$ , avec  $Z_0$  l'impédance du vide et  $n_g$  l'indice de groupe du mode.

Il est maintenant utile de noter que l'expression (4.8) peut se découper en différentes parties de façon assez intuitive. Prenons par exemple la première somme dans l'expression, soit :

$$\bar{I}(x, y) \propto \sum_{k=1}^M P_k F_k^2(x, y) \quad (4.10)$$

qui équivaut à prendre la moyenne sur les pulsations  $\omega$ . On note que ce terme ne dépend pas de la pulsation optique  $\omega$  et représente *l'intensité moyenne* sur la plage de mesure. Les autres termes de (4.8) contiennent des fonctions oscillantes de moyenne nulle. Notons également que tous ces autres termes peuvent être représentés comme le produit d'une fonction ne dépendant que de l'espace, soit le produit des enveloppes de champ  $F_k(x, y)F_\ell(x, y)$  et d'une fonction ne dépendant que de la pulsation optique,  $\cos(\tau_{k\ell}\omega + \phi_{k\ell})$ . Cette propriété s'avérera fort utile pour la formulation du système en aval. Pour le moment, contentons-nous d'examiner les propriétés à la base de la méthode standard du  $S^2$  (puis du  $C^2$ ) avant de pousser l'analyse plus loin.

### 4.3.1 Analyse de l'interféromètre

Une façon de visualiser le concept derrière la mesure est de partir des équations de l'interféromètre telles que décrites en (4.8) et de considérer une plage de longueur d'onde infinie ( $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} \rightarrow \infty$ ) et une dispersion des vitesses de groupe nulle (ce qui revient à dire que les  $\tau_{k\ell}$  sont indépendants de  $\omega$ ). Sous cette hypothèse, effectuons la transformée de Fourier<sup>3</sup> de l'interféromètre :

$$\hat{I} \propto \bar{I}\delta(\tau) + \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{\ell=k+1}^M \sqrt{P_k P_\ell} F_k(x, y) F_\ell(x, y) [\delta(\tau - \tau_{k\ell}) + \delta(\tau + \tau_{k\ell})] \quad (4.11)$$

Dans cet espace, on trouve que les interférences sont localisées à certains temps particuliers  $\tau_{k\ell}$  et que, en ces temps, le profil spatial est précisément donné par les enveloppes de battement  $F_k(x, y)F_\ell(x, y)$  des deux modes qui interfèrent. De la même façon, à fréquence nulle, on trouve le terme d'intensité moyenne  $\bar{I}(x, y)$ . Comme nous l'avons vu plus haut, cette formulation est à la base de la mesure de type  $C^2$  qui effectue directement la mesure des figures de battement dans l'espace temporel. La figure 4.9 fournit un exemple de ce genre de mesure pour une fibre bimode (i.e. LP<sub>01</sub> et LP<sub>11</sub>) excitée majoritairement dans le mode fondamental ; on trouve en effet la figure d'intensité moyenne au délai nul ( $\tau = 0$ ) et un pic à la différence de délai de groupe entre les deux modes, soit  $\tau_{01-11}$ , le pic n'étant pas infiniment étroit dû à la taille finie de la fenêtre de données dans cet exemple.

Bien qu'en réalité les deux hypothèses ne sont pas respectées, on en demeure néanmoins assez proche de sorte que, si l'on effectue la transformée de Fourier du signal en intensité selon les fréquences optiques d'une acquisition, on obtient bien

3. On notera ici que la définition de la transformée de Fourier employée est  $\delta(\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) d\omega$ .

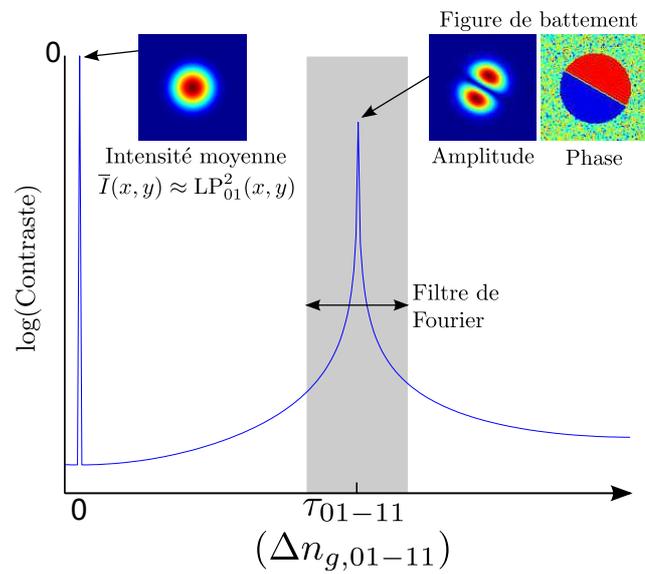


FIGURE 4.9 – Illustration des données traitées selon la méthode  $S^2$  standard à partir de données simulant une fibre bimode. Le trait bleu représente la somme des amplitudes spectrales sur chaque pixel. On note bien l'apparition de la figure d'intensité moyenne à fréquence nulle (correspondant approximativement à l'intensité du mode fondamental dans le cas d'une excitation quasi-monomode) et la présence d'un pic de battement correspondant à l'interférence des deux premiers modes. La figure de battement des deux modes, obtenue sur la tranche  $(x, y)$  du jeu de données à la position du délai  $\tau_{01-11}$  est également illustrée en amplitude et en phase ; on note en effet bien l'inversion de signe présente dans le profil de phase.

une série de pics sur chaque pixels. Généralement, pour faire l'analyse telle qu'illustrée à la figure 4.9, les spectres sont calculés pour chaque pixels et leur amplitudes sommées de sorte à ce que toutes les contributions spectrales se cumulent, ce qui permet de voir tous les pics simultanément. La méthode standard prévoit également qu'un mode, souvent le mode fondamental, est *largement dominant* sur les autres, c'est à dire qu'il porte plus de 90 % de la puissance totale. Dans ce cas de figure, tous les termes de l'interféromètre faisant apparaître des produits d'amplitudes de modes d'ordre supérieurs deviennent négligeables par rapport aux termes faisant intervenir le mode fondamental. Ainsi, l'interféromètre prend la forme simplifiée suivante :

$$I \approx P_{01}F_{01}^2 + 2\sqrt{P_{01}}F_{01} \sum_{k=2}^M \sqrt{P_k}F_k(x, y) \cos(\tau_{01-k}\omega + \phi_{01-k}) \quad (4.12)$$

Cette forme simplifiée a un avantage certain sur le cas plus général car elle permet directement d'extraire beaucoup d'information, en particulier sur le mode fondamental. Prenons par exemple le terme moyen (ou apparaissant à délai nul après transformée de Fourier), son amplitude sommée sur tous les pixels donnera directement sa puissance  $P_{01}$  et la distribution spatiale du pic à fréquence nulle donnera sa distribution d'intensité  $F_{01}^2$ , d'où l'on tire l'amplitude simplement en prenant la racine carrée. Dans le cas idéal, tous les autres pics seront proportionnels au produit du mode fondamental (dont l'enveloppe est maintenant connue), de son amplitude (aussi connue) et des puissances et enveloppes des autres modes présents dans la fibre. Dans le cas où les pics étaient infiniment fins, l'enveloppe des modes d'ordre supérieurs et leur puissance pourraient être obtenues en divisant la figure de battement par l'enveloppe du mode fondamental et la puissance obtenue par intégration dans l'espace  $(x, y)$ . Cette version simplifiée est donc *exactement* équivalente à la méthode  $C^2$  où le bras de référence serait le mode fondamental de la fibre elle-même.

En pratique, la dispersion des vitesses de groupe (i.e.  $\beta_2$ ), la distribution spectrale d'intensité de la source ainsi que la distribution longitudinale de la dispersion de la fibre provoqueront un élargissement supplémentaire des pics<sup>4</sup>, faisant en sorte que le calcul de la puissance nécessite une intégration aussi dans le domaine temporel. La façon habituelle de traiter ce problème est de définir un « filtre de Fourier » (en gris sur la figure 4.9) qu'on utilise comme intervalle pour intégrer sous le pic. Or, cette définition présente un certain côté arbitraire, ce qui n'est pas pleinement satisfaisant. De plus, dans le cas général d'une excitation fortement multimode, les dégénérescences et pics d'interférence entre modes d'ordre supérieurs rendent ardue la tâche d'interpréter les figures de battement intégrées sur les pics.

Pour démontrer le genre de difficultés que présente l'analyse standard du  $S^2$ , nous avons effectué une mesure avec injection fortement multimode à l'aide du montage présenté à la figure 4.8. La fibre caractérisée supporte six modes LP et son profil d'indice (mesuré sur préforme) est illustré à la figure 4.10. Les résultats

---

4. Notons que d'autres effets comme le couplage distribué peuvent provoquer l'élargissement des pics et provoquer l'apparition de pics supplémentaires dans le cas de couplage localisé.

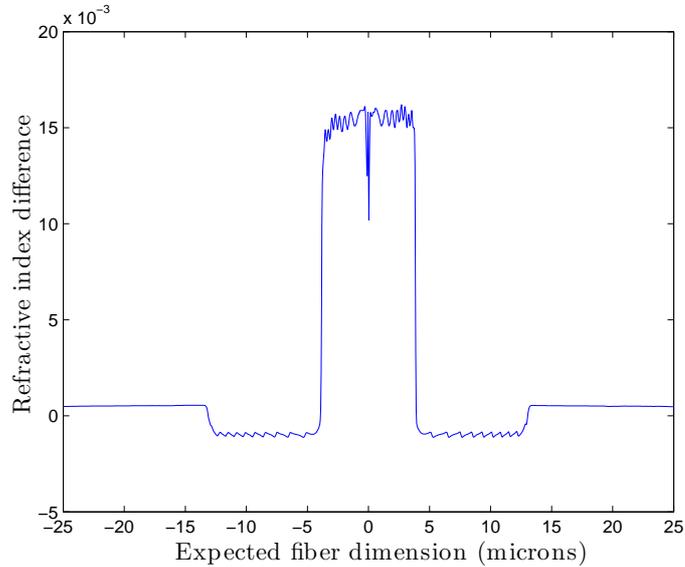


FIGURE 4.10 – Profil d’indice de réfraction mesuré sur préforme de la fibre caractérisée, l’abscisse ayant été ici redimensionnée pour refléter la géométrie de la fibre.

de la mesure sont présentés à la figure 4.11. On peut constater que l’injection est multimode par l’allure de l’intensité associée au pic à  $\Delta n_g = 0$  et que l’interprétation des figures de battements intégrées sur les filtres de Fourier est parfois difficile. En particulier, l’allure des distributions en champ proche pour chaque point de la courbe dans l’intervalle du filtre de Fourier est très variée et suggère parfois des mélanges de modes de nature différentes (voir figure 4.11 (b)). On peut donc se poser la question à savoir si on peut espérer tirer des informations quantitatives, ou même qualitatives, quant au contenu modal de cette fibre à partir de cette mesure. En effet, il semble *a priori* y avoir un manque d’information pour arriver à séparer les différentes composantes présentes dans les interférences. Dans les faits, le jeu de données contient *beaucoup plus d’information* que nécessaire pour séparer toutes les interactions que nous cherchons. Pour arriver à tirer profit au maximum des données, il est important d’introduire des concepts d’analyse statistiques multivariées, ce qui sera facilité par une reformulation des équations de l’interféromètre faisant l’objet de la section suivante.

### 4.3.2 Reformulation de l’interféromètre : un isomorphisme

L’équation (4.8) fait apparaître clairement que chaque interférence est fonction d’une *paire de modes*, soit les modes  $k$  et  $\ell$  ayant une différence de délai de groupe  $\tau_{k\ell}$  propre. Un *isomorphisme* est alors suggéré par cette constatation où l’on pourrait numéroter chaque paire de modes séparément, ce qui revient à identifier chaque battement de façon unique avec un seul indice tout en conservant la correspondance

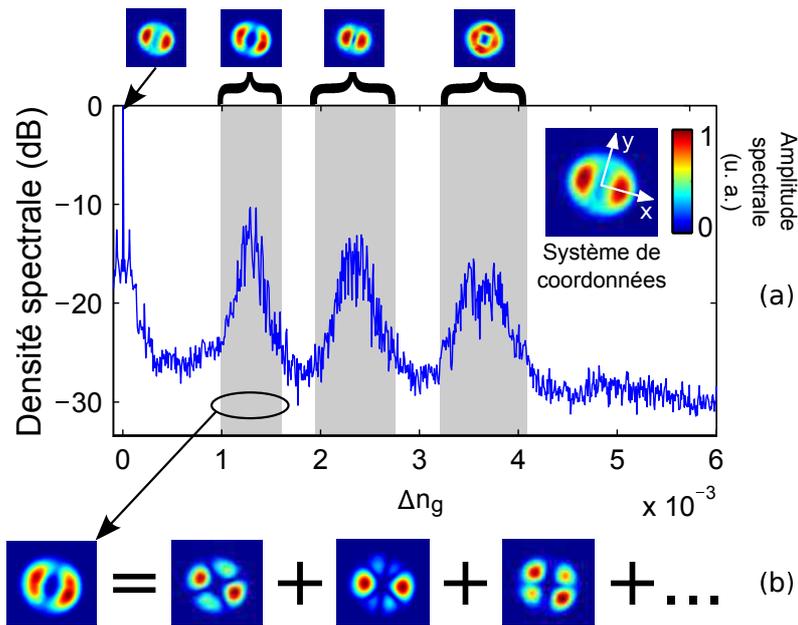


FIGURE 4.11 – Analyse  $S^2$  standard pour la mesure de la fibre présentée en figure 4.10; (a) somme des amplitudes de spectre (trait bleu), filtres de Fourier (zone grises) et intégrale du champ proche sur le filtre (illustrées au-dessus de la figure). On note aussi que l'excitation est fortement multimode par la figure d'intensité moyenne (en  $\Delta n_g = 0$ ). (b) illustration de différentes figures en transverse à différents points du premier filtre de Fourier ( $\Delta n_g \approx 1,2 \times 10^{-3}$ ). On constate que les figures en chaque point sont très différentes et parfois difficiles à interpréter, tout comme la figure résultante intégrée sur le pic. La figure d'intensité moyenne  $\bar{I}(x, y)$  ainsi que le système d'axe défini par rapport à son orientation sont illustrés en encart.

de ce nouvel indice avec le couple de modes «  $k\ell$  » sous-jacent :

$$k\ell \leftrightarrow \mu \quad (4.13)$$

Nous allons également en profiter pour simplifier l'écriture de l'équation de l'interféromètre en reformulant les parties spatiales et spectro-temporelles en suivant cet isomorphisme :

$$F_k(x, y)F_\ell(x, y) \leftrightarrow v_\mu(x, y) \quad (4.14)$$

$$\cos(\tau_{k\ell}\omega + \phi_{k\ell}) \leftrightarrow u_\mu(\tau_\mu, \omega) \quad (4.15)$$

En utilisant cette notation, l'équation de l'interféromètre peut s'écrire ainsi :

$$I(x, y, \omega) = \bar{I}(x, y) + \sum_{\mu=1}^N \Pi_\mu v_\mu(x, y) u_\mu(\tau_\mu, \omega) \quad (4.16)$$

où  $\Pi_\mu = 2\sqrt{P_k P_\ell}$  est un coefficient d'amplitude et le nombre total de battements est exprimé par  $N = M(M-1)/2$ . Bien que cette reformulation soit plus abstraite, son caractère simple sera un atout dans le cadre de certains calculs et, en particulier, dans l'expression de la méthode de traitement du jeu de données. Pour le moment, abordons les méthodes d'analyse statistiques multivariées appliquées au  $S^2$ .

#### 4.4 Première étape : analyse par composantes principales (ACP)

Afin de poursuivre l'analyse, appuyons-nous sur l'analogie entre le  $S^2$  et un autre problème de mélange de signaux. En effet, les données récoltées à l'aide de cette méthode ne sont ni plus ni moins qu'un mélange de signaux qu'on voudrait idéalement parvenir à séparer. Un analogue connu de ceci est le fameux « *cocktail party problem* » : un groupe de personnes discutent lors d'un apéritif et l'on utilise plusieurs micros disposés un peu partout dans la salle pour les enregistrer. De cette façon, chaque microphone recevra un signal légèrement différent (le délai et le volume des conversations n'étant pas le même en fonction des distances des gens aux microphones, etc.) Chaque signal ainsi obtenu pourra s'exprimer comme un mélange unique des signaux que l'on cherche à séparer. Toute la problématique de « comment séparer les signaux de base à l'aide des signaux mélangés » a donné lieu à toute une science nommée *séparation des sources à l'aveugle*, ou « *blind source separation* », qui regroupe différentes techniques faisant intervenir différentes méthodes d'analyse statistiques multivariées. Dans le cas des enregistrements audio de conversations, on se rend compte que, dimensionnellement parlant, on a besoin d'autant d'enregistrements qu'il y a de sources à séparer. Or, dans le cas du  $S^2$ , si on considère chaque pixel comme étant l'équivalent d'un microphone, le nombre de pixels utiles (i.e. qui reçoivent de l'intensité lors de la mesure) est généralement *beaucoup plus grand* que le nombre de battements que l'on cherche à isoler. On a

donc possiblement accès à largement plus d'informations que nécessaire pour solutionner le système. Dans ce cas précis, l'idée de départ est d'observer la *corrélation*, spectrale et spatiale, des signaux obtenus sur chaque pixels, pourvu que ceux-ci aient un signal moyen supérieur au niveau de bruit. Pour voir ce que cela peut apporter, effectuons d'abord quelques calculs. La corrélation du signal interférométrique dans l'espace des fréquences optiques, s'écrit de la manière suivante :

$$C(x, y, x', y') = \frac{1}{\Delta\omega} \int [I(x, y, \omega) - \bar{I}(x, y)][I(x', y', \omega) - \bar{I}(x', y')]d\omega \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\eta=1}^N \Pi_{\mu} \Pi_{\eta} v_{\mu}(x, y) v_{\eta}(x', y') \int u_{\mu}(\tau_{\mu}, \omega) u_{\eta}(\tau_{\eta}, \omega) d\omega \quad (4.18)$$

où  $\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min}$  représente la largeur de l'intervalle de mesure (ou d'intégration dans le cas d'un sous-échantillonnage d'un ensemble de données plus grand) et la corrélation est prise ici entre les points  $(x, y)$  et  $(x', y')$ . D'après l'isomorphisme que l'on a défini à l'équation (4.15), on peut réécrire l'intégrale de l'équation précédente de la façon suivante :

$$\frac{1}{\Delta\omega} \int u_{\mu}(\tau_{\mu}, \omega) u_{\eta}(\tau_{\eta}, \omega) d\omega = \frac{1}{\Delta\omega} \int \cos(\tau_{\mu}\omega + \phi_{\mu}) \cos(\tau_{\eta}\omega + \phi_{\eta}) d\omega \quad (4.19)$$

Si l'intervalle d'intégration comprend plusieurs périodes d'oscillation des cosinus, c'est-à-dire, si  $\Delta\omega \gg 2\pi/\tau$ , l'intégrale prend une forme très simple :

$$\frac{1}{\Delta\omega} \int u_{\mu}(\tau_{\mu}, \omega) u_{\eta}(\tau_{\eta}, \omega) d\omega \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\phi_{\mu} - \phi_{\eta}) & \text{si } \tau_{\mu} = \tau_{\eta} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.20)$$

Comme dans beaucoup de cas où des équations avec une multitude de sommes surviennent, il est souvent beaucoup plus léger d'utiliser une écriture matricielle pour les représenter et cela s'avérera particulièrement utile ici. En prenant un peu de recul, on se rend compte que, en pratique,  $C$  est une quantité à deux dimensions (i.e. deux points du même domaine  $(x, y)$ ). Si on linéarise l'image, tel qu'illustré à la figure 4.12 par exemple, la quantité  $C$  peut être calculée entre le pixel  $i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$  et le pixel  $j$  de coordonnées  $(x_j, y_j)$ . On peut donc voir la corrélation  $C$  entre ces deux points de l'espace comme une matrice,  $\mathbf{C}$  ou  $C_{ij}$  que l'on peut exprimer très facilement et qui rend très visuelle l'expression (4.18). Pour ce faire, définissons d'abord la matrice  $\mathbf{V}$  ayant pour colonnes les fonctions spatiales  $v_{\mu}(x, y)$  :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1(x_1, y_1) & \dots & v_{\mu}(x_1, y_1) & \dots & v_N(x_1, y_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_1(x_i, y_i) & \dots & v_{\mu}(x_i, y_i) & \dots & v_N(x_i, y_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_1(x_{\mathfrak{N}}, y_{\mathfrak{N}}) & \dots & v_{\mu}(x_{\mathfrak{N}}, y_{\mathfrak{N}}) & \dots & v_N(x_{\mathfrak{N}}, y_{\mathfrak{N}}) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

avec  $\mathfrak{N}$  le nombre total de points spatiaux, ou pixels, considérés et  $N$  représente le nombre de battements. Nous aurons également besoin de la matrice de coefficients

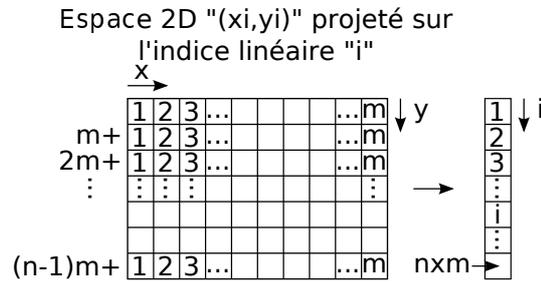


FIGURE 4.12 – Illustration de la conversion d’une image en vecteur ; on attribue à chaque pixel un indice  $i$  pour établir la correspondance entre l’espace  $(x_i, y_i)$  et le  $i$ -ème élément du vecteur correspondant.

donnée par le produit des facteurs d’amplitude  $\Pi_\mu$  avec les intégrales de corrélation données par (4.20), soit :

$$\mathcal{B} = B_{\mu\eta} = \begin{cases} \frac{\Delta\omega\Pi_\mu\Pi_\eta}{2} \cos(\phi_\mu - \phi_\eta) & \text{si } \tau_\mu = \tau_\eta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.22)$$

qui est symétrique. Ainsi, la matrice de corrélation  $\mathbf{C}$ , représentant donc la corrélation *entre* les pixels  $i$  et  $j$  du signal interférométrique, est donnée par :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\Delta\omega} \mathbf{V}\mathcal{B}\mathbf{V}^T \quad (4.23)$$

où «  $T$  » dénote la transposition de matrice. Cette expression très simple présente plusieurs avantages desquels on peut tirer profit et sur lesquels est basée l’*analyse par composantes principales* (ACP). Un survol de ces propriétés sera fait dans un premier temps (§4.4.1) puis le raccordement de ce qui a été développé jusqu’ici avec la théorie de l’ACP sera formellement effectué (§4.4.3).

Mentionnons pour terminer que  $\mathcal{B}$  est le fruit de l’intégration d’une variable continue. Or, dans un cadre expérimental, l’échantillonnage se fait à des pulsations  $\omega_i$  discrètes. Dans ce cas, on peut exprimer approximativement  $\mathcal{B}$  comme :

$$\mathcal{B} \approx \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \cos(\tau_\mu\omega_i - \phi_\mu) \cos(\tau_\eta\omega_i - \phi_\eta) \delta\omega \approx \begin{cases} \frac{\mathcal{N}\delta\omega}{2} \cos(\phi_\mu - \phi_\eta) & \text{si } \tau_\mu = \tau_\eta, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.24)$$

avec  $\Delta\omega = \mathcal{N}\delta\omega$ ,  $\mathcal{N}$  est le nombre de points de pulsation et  $\delta\omega$  représente le pas en pulsation, présumé constant, ce qui est le cas ici car les données sont, après acquisition, interpolées sur un domaine en pulsation d’espacement constant  $\delta\omega$ .

#### 4.4.1 Propriétés de la corrélation spectrale

Certaines propriétés de la matrice de corrélation que nous avons développée à la section précédente sont très utiles et ont plusieurs conséquences d’intérêt qui faciliteront le raccordement entre le principe de l’interféromètre qui est étudié ici et l’ACP abordée mathématiquement comme un outil d’analyse statistique. Pour

débuter, il faut noter que, pour une matrice symétrique, comme  $\mathbf{B}$  par exemple, on a  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$  ; en effet, dans le cas de  $\mathbf{B}$ , permuter  $\mu$  et  $\eta$  ne change en rien le résultat. En utilisant cette propriété, on peut également montrer que  $\mathbf{C}$  est symétrique :

$$\mathbf{C}^T = \frac{1}{\mathcal{N}}(\mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{V}^T)^T \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}}(\mathbf{V}^T)^T \mathbf{B}^T \mathbf{V}^T \quad (4.26)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}}\mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{V}^T \quad (4.27)$$

$$= \mathbf{C} \quad (4.28)$$

Or, les matrices symétriques ont comme propriété d'être *diagonalisable* avec des valeurs propres *réelles* par une *matrice orthogonale* ; autrement dit, une matrice symétrique a un ensemble de vecteurs orthogonaux en guise de base de vecteurs propres. Bien que cette propriété ne semble pas avoir de conséquences immédiates, elle interviendra plus tard dans la compréhension de certains phénomènes qui seront mis en évidence par l'analyse des données expérimentales. Mais d'abord, il convient d'expliquer comment on peut former la matrice  $\mathbf{C}$  à partir des données expérimentales.

#### 4.4.2 Obtention de $\mathbf{C}$ à partir des données expérimentales

A la base, l'ACP tourne autour de l'étude des corrélations qui ont été développées jusqu'ici. Le point de départ de l'idée, tel que mentionné, est d'utiliser la corrélation *entre pixels* des spectres obtenus en chaque pixels pour extraire davantage d'information à partir du jeu de données puisque, *a priori*, celui-ci est surdimensionné (i.e. il y a beaucoup plus de pixels éclairés que de battements recherchés). C'est exactement ce qui est fait à l'équation (4.17) et ce qui sera appliqué au jeu de données proprement formaté.

Pour commencer, les images doivent être linéarisées (voir figure 4.12) de sorte à former des vecteurs lignes pour chaque fréquence optique. La concaténation de ces vecteurs formera alors une matrice signal, que nous nommerons  $\mathbf{X}$ , comme celle-ci :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} I(x_1, y_1, \omega_1) & \dots & I(x_i, y_i, \omega_1) & \dots & I(x_{\mathfrak{N}}, y_{\mathfrak{N}}, \omega_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ I(x_1, y_1, \omega_j) & \dots & I(x_i, y_i, \omega_j) & \dots & I(x_{\mathfrak{N}}, y_{\mathfrak{N}}, \omega_j) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ I(x_1, y_1, \omega_{\mathcal{N}}) & \dots & I(x_i, y_i, \omega_{\mathcal{N}}) & \dots & I(x_{\mathfrak{N}}, y_{\mathfrak{N}}, \omega_{\mathcal{N}}) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

où  $\mathcal{N}$  est le nombre de point en fréquences et  $\mathfrak{N}$  le nombre de pixels<sup>5</sup>. On peut

5. Bien entendu, ici l'utilisation de l'intensité  $I(x_i, y_i)$  est un abus de langage. En effet, il s'agit plutôt d'une puissance correspondant à l'intégration de l'intensité sur la surface d'un pixel centré en  $(x_i, y_i)$ , soit  $\iint_{A_{\text{pix},i}} I(x, y) dA_{\text{pix},i}$  qui, pour de petits pixels, est essentiellement proportionnelle à l'intensité sur ce pixel :  $I(x_i, y_i) \approx A_{\text{pix},i} [I(x, y)]_{x=x_i, y=y_i}$ . Il en va également de même pour les produits de champs, c'est à dire qu'on sous-entend  $v_{\mu}(x_i, y_i) = F_k(x_i, y_i)F_{\ell}(x_i, y_i) \approx A_{\text{pix},i} [F_k(x, y)F_{\ell}(x, y)]_{x=x_i, y=y_i}$

également retrancher à chaque colonne sa valeur moyenne pour obtenir l'équivalent de  $I - \bar{I}$  que nous nommerons  $\bar{\mathbf{X}}$ . La corrélation sur les fréquences dans ce cas apparaît donc comme le produit scalaire de deux colonnes ; ainsi, si  $\mathbf{x}_a$  est la colonne de  $\bar{\mathbf{X}}$  représentant le signal au pixel  $a$ , alors l'expression de l'équation (4.17) devient :

$$C(x_a, y_a, x_b, y_b) = \frac{1}{\mathcal{N}} \mathbf{x}_a^T \mathbf{x}_b \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [I(x_a, y_a, \omega_i) - \bar{I}(x_a, y_a)][I(x_b, y_b, \omega_i) - \bar{I}(x_b, y_b)] \delta\omega \quad (4.31)$$

et, par extension, la matrice de corrélation entière peut être formée de la même façon :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\mathcal{N}} \bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{X}} \quad (4.32)$$

qui est une matrice  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$  et qui est bien symétrique car :

$$\mathbf{C}^T = \frac{1}{\mathcal{N}} (\bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{X}})^T \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \bar{\mathbf{X}}^T (\bar{\mathbf{X}}^T)^T \quad (4.34)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{X}} \quad (4.35)$$

$$= \mathbf{C} \quad (4.36)$$

### 4.4.3 Application de l'ACP

La matrice de corrélation que nous venons de calculer à partir des données  $S^2$  constitue la base de l'application de l'ACP[92]. Or, la dernière étape, qui consiste à diagonaliser la matrice pour obtenir lesdites composantes principales, mérite d'être expliquée plus en détail. Pour ce faire, repartons des équations (4.22) et (4.23). Supposons pour commencer que toutes les différences de délai de groupe  $\tau_\mu$  sont distinctes. Ceci a automatiquement pour conséquence de rendre la matrice  $\mathbf{B}$  diagonale car cela revient à dire  $\tau_\mu = \tau_\eta$  si et seulement si  $\mu = \eta$ . Or, la formulation de la diagonalisation d'une matrice s'exprime généralement ainsi :

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} \quad (4.37)$$

alors que l'équation (4.23) fait intervenir la *transposée* de  $\mathbf{V}$  et non pas son *inverse*. Cela pose a priori un problème : comment pourrait-on parler de l'inverse de  $\mathbf{V}$  qui n'est pas une matrice carrée ? En effet,  $\mathbf{V}$  est une matrice  $\mathfrak{N} \times N$  et pour pouvoir l'inverser, nous allons la compléter par une base quelconque du complément orthogonal de l'espace formé par les vecteurs de  $\mathbf{V}$ , auxquels nous associerons des valeurs propres arbitrairement petites mais non-nulles pour étendre  $\mathbf{B}$ . Cette opération, équivalente à l'intégration de bruit représenté par le complément orthogonal de  $\mathbf{V}$ , assure que le rang de la matrice corresponde à la dimension des vecteurs  $\mathbf{v}$ . Ceci est tout à fait en accord avec ce qui se produit expérimentalement, la matrice  $\mathbf{C}$  n'étant

presque jamais singulière<sup>6</sup>[93]. On peut maintenant dire que, à peu de choses près, (4.23) est une forme diagonale mais, comme nous l'avons mentionnée, une matrice symétrique est diagonalisable par un ensemble de vecteurs propres *orthonormaux*. Nous allons donc introduire un facteur de normalisation qui nous sera utile pour la suite :

$$S_{k\ell} = \iint [F_k(x, y)F_\ell(x, y)]^2 dx dy \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

et redéfinir les battements  $v$  :

$$\hat{v}_\mu(x, y) = \frac{F_k(x, y)F_\ell(x, y)}{\sqrt{S_{k\ell}}} = \frac{v_\mu(x, y)}{\sqrt{S_{k\ell}}} \quad (4.40)$$

et, si l'on travaille en espace discret, les vecteurs de la matrice  $\mathbf{V}$  :

$$S_{k\ell} = \sum_{i=1}^{\mathfrak{N}} [F_k(x_i, y_i)F_\ell(x_i, y_i)]^2 \quad (4.41)$$

$$= \sum_{i=1}^{\mathfrak{N}} v_\mu^2(x_i, y_i) \quad (4.42)$$

$$= \mathbf{v}_\mu \bullet \mathbf{v}_\mu \quad (4.43)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_\mu = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{S_{k\ell}}} \quad (4.44)$$

Pour fixer les idées, supposons également que nous sommes dans un cas tel que les  $v_\mu$  sont orthogonaux (i.e. les figures de battements sont spatialement orthogonales), c'est-à-dire :

$$\iint \hat{v}_\mu(x, y)\hat{v}_\eta(x, y) dx dy = \delta_{\mu\eta} \quad (4.45)$$

avec  $\delta$  le delta de Kronecker ou, en version matricielle :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{\mathfrak{N}} \quad (4.46)$$

avec  $\mathbf{I}_{\mathfrak{N}}$  la matrice identité de dimension  $\mathfrak{N}$ . Pour conserver l'égalité en (4.23), il faut maintenant faire passer le facteur de normalisation sur les valeurs diagonales de  $\mathbf{B}$  et on a alors véritablement une forme diagonale avec  $\mathbf{P} = \mathbf{V}$  et  $\mathbf{D} = (\Delta\omega)^{-1}\mathbf{B}$ , l'expression des vecteurs propres et valeurs propres étant :

$$\hat{v}_\mu(x, y) = \frac{F_k(x, y)F_\ell(x, y)}{\sqrt{S_{k\ell}}} \quad (4.47)$$

$$\Lambda_\mu = \frac{S_{k\ell}\Pi_\mu^2}{2} = 2S_{k\ell}P_kP_\ell \quad (4.48)$$

En résumé, pour retrouver les figures de battement et les amplitudes de ceux-ci, il suffit simplement diagonaliser la matrice  $C$  que l'on peut facilement construire

---

6. Par exemple, une matrice carrée formée de nombre aléatoires n'est presque jamais singulière.

à partir des données  $S^2$ . Laissons de côté un instant les équations pour essayer de comprendre plus intuitivement ce qui vient de se passer. L'analyse par composantes principales a pour but d'exprimer un mélange de variables aléatoires en composantes *complètement décorrelées* les unes des autres, ce qu'on appelle les *composantes principales*. En effet, on peut voir dans le cas présenté ici l'analogie entre l'orthogonalité et l'absence de corrélation. On est donc parvenu, en observant la corrélation des spectres entre chaque pixel, à isoler les figures de battement correspondantes. Tout le processus est très simple et passe par la construction de la matrice de corrélation suivi d'une simple diagonalisation. Autrement dit, si chaque terme de l'équation de l'interféromètre n'est corrélé à aucun autre *ni spectralement, ni spatialement*, on peut effectivement les séparer par ACP. Pour aller encore plus loin, on peut penser effectuer exactement la même analyse en observant les corrélations spatiales des champs proches entre différentes fréquences  $\omega$ , ce que nous allons faire à la section suivante.

#### 4.4.4 Matrice de corrélation spatiale $C'$ et composantes principales spectrales

De la même façon que nous avons su exploiter l'orthogonalité des battements dans le domaine spectral pour récupérer les composantes principales spatiales, nous allons voir qu'il est également possible de récupérer les composantes principales spectrales en exploitant les corrélations spatiales. Pour ce faire, posons l'équation de la corrélation spatiale de l'interféromètre <sup>7</sup> :

$$C'(\omega, \omega') = \frac{1}{\Delta\omega} \iint [I(x, y, \omega) - \bar{I}(x, y)][I(x, y, \omega') - \bar{I}(x, y)] dx dy \quad (4.49)$$

$$= \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\eta=1}^N \Pi_{\mu} \Pi_{\eta} u_{\mu}(\omega) u_{\eta}(\omega') \iint v_{\mu}(x, y) v_{\eta}(x, y) dx dy \quad (4.50)$$

puis, définissons la matrice  $\mathbf{U}$ , ayant pour colonnes les différents battements :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1(\omega_1) & \dots & u_{\mu}(\omega_1) & \dots & u_N(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1(\omega_i) & \dots & u_{\mu}(\omega_i) & \dots & u_N(\omega_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1(\omega_{\mathcal{N}}) & \dots & u_{\mu}(\omega_{\mathcal{N}}) & \dots & u_N(\omega_{\mathcal{N}}) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

On peut aussi définir la matrice de coefficients  $\mathbf{B}'$  dont les éléments sont les

---

<sup>7</sup> Ici, le facteur  $(\Delta\omega)^{-1}$  est choisi pour faire en sorte que  $C'$  partage les mêmes valeurs propres que  $C$ .

intégrales du produit de figures de battement :

$$B'_{\mu\eta} = \iint \Pi_\mu \Pi_\eta v_\mu(x, y) v_\eta(x, y) dx dy \quad (4.52)$$

$$= \iint 4\sqrt{P_k P_\ell P_m P_n} F_k(x, y) F_\ell(x, y) F_m(x, y) F_n(x, y) dx dy \quad (4.53)$$

ce qui nous permet d'exprimer la corrélation spatiale sous forme matricielle :

$$\mathbf{C}' = \frac{1}{\Delta\omega} \mathbf{U} \mathbf{B}' \mathbf{U}^T \quad (4.54)$$

qui s'obtient facilement à partir des données expérimentales par :

$$\mathbf{C}' = \frac{1}{\mathcal{N}} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \quad (4.55)$$

Si on se place dans un cas où les figures de battement sont orthogonales comme dans le cas de l'équation (4.45), la matrice  $\mathbf{B}'$  devient diagonale et on peut effectuer exactement les mêmes raisonnements et traitements effectués dans la section précédente pour la corrélation spectrale. De plus, si toutes les différences de temps de groupe sont distinctes, on se retrouve dans la situation où la matrice  $\mathbf{U}$  est déjà orthogonale (voir équation (4.20) et le carré de la norme des vecteurs de battement est :

$$\int u_\mu^2(\tau_m u, \omega) d\omega = \frac{\Delta\omega}{2} \quad (4.56)$$

En normalisant les vecteurs et en distribuant la norme sur la diagonale de  $\mathbf{B}'$ , on obtient comme vecteurs propres et valeurs propres :

$$\hat{u}_\mu(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\Delta\omega}} \cos(\tau_{k\ell}\omega + \phi_{k\ell}) \quad (4.57)$$

$$\Lambda_\mu = 2S_{k\ell} P_k P_\ell \quad (4.58)$$

On constate alors que les deux matrices de corrélation partagent les *mêmes valeurs propres* et que les vecteurs propres sont cette fois les battements eux-mêmes ! Ainsi, par simple diagonalisation des matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}'$ , on peut reconstruire tous les termes de l'interféromètre, pourvu que ceux-ci sont non-corrélés *à la fois dans l'espace et dans le spectre*<sup>8</sup>. Comme nous l'avons mentionné, dans plusieurs cas de figure, en particulier dans le cas de  $S^2$  standard où un mode domine largement les autres, cette condition est vérifiée et l'application de l'ACP permettra de séparer tous les battements d'un seul trait. Pour valider le développement fait ici, la méthode sera appliquée ci-dessous à la mesure présentée à la section §4.3.1.

#### 4.4.5 Résultats expérimentaux et discussion

Comme nous avons pu le constater à la figure 4.11, il n'est pas aisé de faire l'analyse d'une mesure  $S^2$  pour une excitation arbitraire et on souhaite tirer profit

8. Notons que cette hypothèse sera levée à partir de la section 4.5.

de l'analyse par composantes principales pour tenter d'extraire plus d'information et, ultimement, de séparer les différents termes de l'interféromètre. Dans un premier temps, illustrons les résultats bruts obtenus par diagonalisation des matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}'$  (voir équations (4.23) et (4.54)), et qui sont illustrés respectivement aux figures 4.13 et 4.14. Comme nous avons vu, les deux matrices de corrélation partagent les mêmes valeurs propres (i.e. équations (4.48) et (4.58)) qui sont illustrées à la figure 4.15. Notons immédiatement que les images du jeu de données ont été normalisées avant le traitement, c'est à dire que la somme de chaque ligne de  $\mathbf{X}$  est normalisée à 1 (ou que la somme de chaque ligne de  $\overline{\mathbf{X}}$  est nulle). Bien que ceci permet de nous affranchir de la variation de la puissance de la source avec  $\omega$ , les variations importantes du niveau de bruit pourrait causer des perturbations qui se répercuteraient dans les données d'intérêt à cause de la normalisation, il faut donc examiner la stabilité du niveau de bruit (le « zéro » des figures de battements) pour vérifier qu'il ne présente pas de variations importantes le long de la mesure (ce qui n'est pas le cas ici).

En observant les figures de battements qui devraient correspondre aux  $\hat{v}_\mu(x, y)$  et les spectres qui devraient correspondre aux transformées de Fourier des signaux  $\hat{u}_\mu(\omega)$ , on constate que l'identification directe à partir des résultats de l'ACP ne semble pas si simple. En effet, certains battements présentent bien un seul pic important (les figures 2, 4, 5, 7 et 8 par exemple) auxquelles on peut rattacher des figures de battements correspondant à des modes précis, mais plusieurs spectres montrent plus d'un pic, ce qui ne devrait pas se produire selon les équations car chaque battement a bien une seule et unique différence de délai de groupe  $\tau_{kl}$ , et certaines figures de battement ne paraissent pas si simple à interpréter (par exemple, les première et troisième). La figure 4.16 résume la situation en séparant les battements déjà bien isolés par l'ACP de ceux qui semblent toujours être un mélange. On peut tout de même ici noter qu'il a déjà été possible d'extraire plus d'information du jeu de données qu'avec la méthode  $S^2$  standard ; en effet, on arrive à *séparer les figures de battements et leurs spectres individuels*, ce qui était impossible avec l'analyse standard, et ce, *de manière automatique*, sans intervention arbitraire de l'expérimentateur. En particulier, en présence de dégénérescences spectrales, l'attribution d'un pic à un battement donné (cas du pic près de  $\Delta n_g = 1.2 \times 10^{-3}$  de la figure 4.11), entraînerait une erreur. Aussi, nous le verrons plus loin, les valeurs propres permettent directement d'extraire la distribution de puissance sans définition de filtre de Fourier ni d'intégration.

On constate également que les figures montrant plusieurs pics importants sont également celles pour lesquelles les figures de battement sont difficiles à interpréter. On peut donc s'interroger sur la validité des hypothèses que nous avons formulées en développant les équations.

Pour démarrer cette analyse, il est plus intuitif d'examiner la formulation de  $\mathbf{C}'$ . On a noté que les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}'$  sont données par l'intégrale du produit des quatre champs des modes mis en jeu dans les deux battements, pondérée par le produit des coefficients d'amplitude  $\Pi_\mu$  et  $\Pi_\eta$  des deux battements, soit l'équation (4.53). Or, si on considère que tous les modes sont excités avec des puissances comparables, pour une fibre à 6 modes comportant 15 battements, on

se rend rapidement compte, à partir des modes théoriques, que *plusieurs de ces intégrales croisées sont non-nulles*, comme nous l'illustre la figure 4.17. Ainsi,  $\mathbf{B}'$  contiendra alors plusieurs éléments hors-diagonale non-nuls qui donneront lieu au mélange des composantes spectrales lors de la diagonalisation. Pour rendre ceci transparent, posons cette situation en termes d'équations. On sait que la matrice  $\mathbf{B}'$  est symétrique car elle n'est pas modifiée sous la permutation des indices  $\mu$  et  $\eta$ . Si elle n'est pas déjà diagonale, on peut donc la diagonaliser et l'exprimer comme suit :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{PDP}^T \quad (4.59)$$

où  $\mathbf{P}$  est une matrice de transformation unitaire, qui nous donne, en substituant dans (4.54) :

$$\mathbf{C}' = \frac{1}{\Delta\omega} \mathbf{U}(\mathbf{PDP}^T) \mathbf{U}^T \quad (4.60)$$

$$= \frac{1}{\Delta\omega} (\mathbf{UP}) \mathbf{D} (\mathbf{UP})^T. \quad (4.61)$$

Ainsi, on obtient que la nouvelle matrice de vecteurs propres de  $\mathbf{C}'$  sera  $\mathbf{U}' = \mathbf{UP}$  et sera alors formée de combinaisons linéaires des composantes oscillantes  $\hat{u}_\mu(\tau_\mu, \omega)$  ; ainsi, l'apparition de spectres mélangés tels que ceux illustrés à la figure 4.16(c) implique la présence de battements *dont la corrélation spatiale est non-nulle*. Il est également simple de constater ceci en raisonnant directement à partir du jeu de données : si on admet deux battements partageant des zones spatiales éclairées communes (i.e. ils sont linéairement dépendants, ou *corrélés spatialement*) mais ayant des différences de délai de groupe distinctes, alors la seule façon de les exprimer comme des composantes décorréelées sera de les orthogonaliser, et ainsi de les exprimer comme deux combinaisons linéaires orthogonales des deux battements recherchés. Donc, si l'on cherche à exprimer tout le jeu de données à partir de ces combinaisons orthogonales, nous devons également prendre en compte le mélange dans les expressions des oscillations qui leurs sont associées puisque chaque combinaison linéaire mettra en jeu les deux battements qui ont des différences de délai de groupe distinctes ! Ainsi, on aurait par exemple :

$$\hat{v}'_\mu = \frac{\hat{v}_\mu + \hat{v}_\eta}{\sqrt{2}} \quad (4.62)$$

$$\hat{v}'_\eta = \frac{\hat{v}_\mu - \hat{v}_\eta}{\sqrt{2}} \quad (4.63)$$

$$\hat{u}'_\mu = \frac{\hat{u}_\mu + \hat{u}_\eta}{\sqrt{2}} \quad (4.64)$$

$$\hat{u}'_\eta = \frac{\hat{u}_\mu - \hat{u}_\eta}{\sqrt{2}} \quad (4.65)$$

Ainsi, les deux nouveaux vecteurs propres spectraux présenteraient tous les deux des spectres très similaires mettant en jeu les deux fréquences  $\tau_\mu$  et  $\tau_\eta$ . Mais comment faire alors pour retrouver  $\mathbf{U}$  à partir des vecteurs propres donnés par  $\mathbf{UP}$  ? D'après

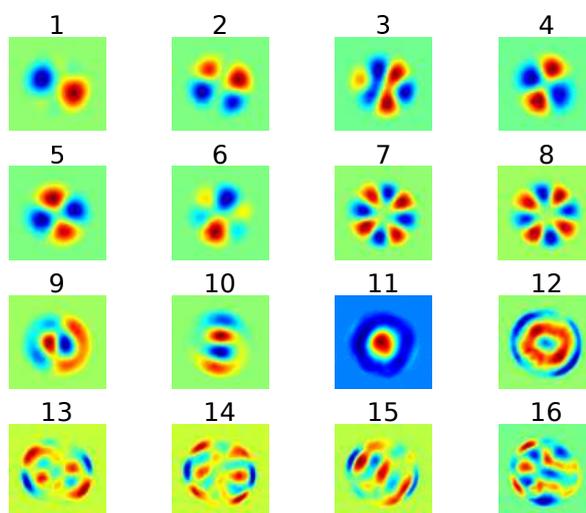


FIGURE 4.13 – Figures de battements bruts obtenus par ACP. La lecture s’effectue de gauche à droite puis de haut en bas, les résultats étant ordonnés en ordre décroissant de valeurs propres.

ce que l’on vient de dire, les spectres mélangés devraient présenter le même ensemble de pics et ainsi, on pourrait les regrouper par *similarité spectrale*. Une autre propriété statistique des signaux, soit l’*indépendance*, sera également très utile pour développer une technique visant à retrouver  $\mathbf{U}$  sans a priori avoir quelques informations que ce soit sur l’allure du contenu modal (et donc, sur la corrélation entre les figures de battement). Cette analyse fera l’objet de la prochaine section.

#### 4.5 Deuxième étape : analyse par composantes indépendantes (ACI)

L’application de l’ACP au jeu de données nous a permis déjà de tirer beaucoup plus d’information des données, le tout automatiquement. Or, il reste un certain nombre de solutions qui ne s’expriment pas selon le modèle que l’on cherche à reproduire, c’est à dire celui de l’interféromètre. En effet, on devrait normalement observer un seul pic en  $\Delta n_g$  pour chaque battement, et pourtant certains en montrent au moins deux, ce qui indique que les figures de battement associées sont corrélées spatialement. Il nous faudra donc effectuer une analyse plus poussée pour espérer parvenir à séparer les composantes qui demeurent mélangées. Pour fixer les idées, rappelons un peu ce que fait l’ACP.

Lorsqu’on applique l’ACP à un jeu de données, par construction les composantes principales selon les deux dimensions (c’est-à-dire spectralement et spatialement) doivent être orthogonales vu la symétrie des matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}'$ . Pour visualiser cela,

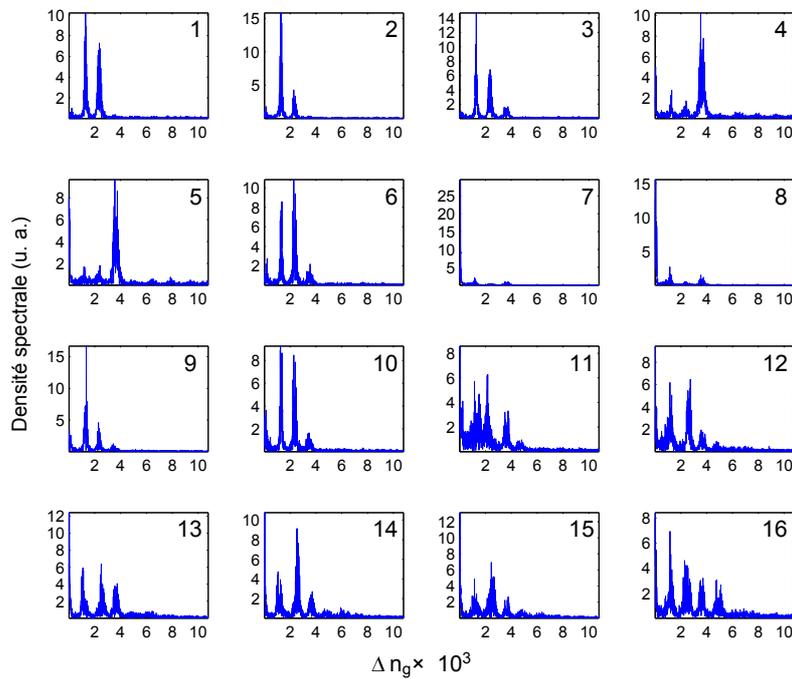


FIGURE 4.14 – Spectres principaux bruts obtenus par ACP. La lecture s’effectue de gauche à droite puis de haut en bas, les résultats étant ordonnés en ordre décroissant de valeurs propres.

utilisons des cartes à jouer. La figure 4.18 nous montre le type de solutions que l’ACP parvient à séparer. Lorsqu’on a un jeu de données comme celui à gauche, on peut voir que les cartes que l’on cherche à récupérer n’ont pas la même distribution spatiale des *symboles* (caractère spatial) et leur enseigne ou *couleur* (caractère spectral) et peuvent donc sans problème être récupérées par l’ACP. Or, certaines solutions ne peuvent être séparées par l’ACP et doivent être exprimées comme une combinaison linéaire car leur corrélation spatiale est trop forte. Un exemple est illustrée à la figure 4.19, où l’on voit clairement que les deux cartes pourraient être triées sur la base de leur couleurs, mais la superposition presque intégrale des symboles rend leur séparation impossible par l’ACP qui exige des solutions non-corrélées. Or, il existe un outil de prédilection qui permet de séparer des spectres mélangés, soit l’*analyse par composantes indépendantes* (ACI).

#### 4.5.1 Notion d’indépendance

Pour bien comprendre l’essentiel de la méthode, il est important de commencer par expliquer la notion d’*indépendance*. En effet, cette notion est assez intuitive dans la vie de tous les jours : l’indépendance entre deux événements se résume à dire que l’occurrence ou non d’un événement n’a aucune influence sur l’autre et inversement. Pour expliquer en détail le phénomène, commençons par définir la

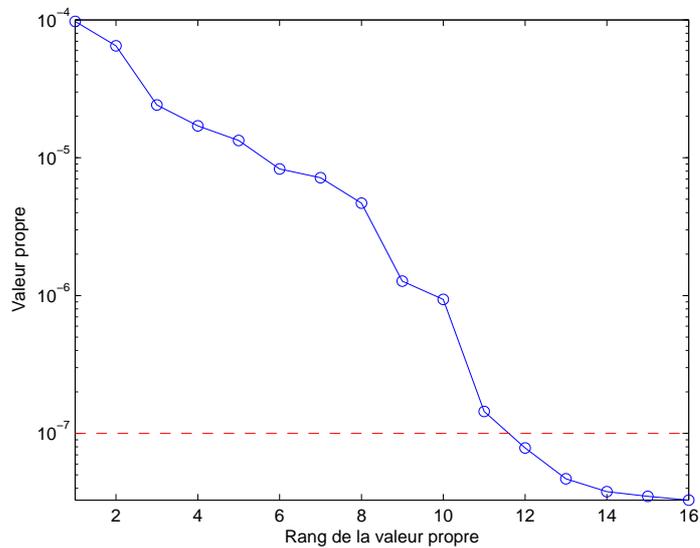


FIGURE 4.15 – Valeurs propres obtenues par ACP. La ligne rouge indique le seuil en-deçà duquel on considérera que les composantes principales correspondent au bruit. En termes de rapports de carrés des amplitudes de la première et de la douzième composantes principales, on obtient une différence de plus de 60 dB, ce qui rivalise de précision avec la méthode  $S^2$  standard sans toutefois être limité par les mêmes hypothèses.

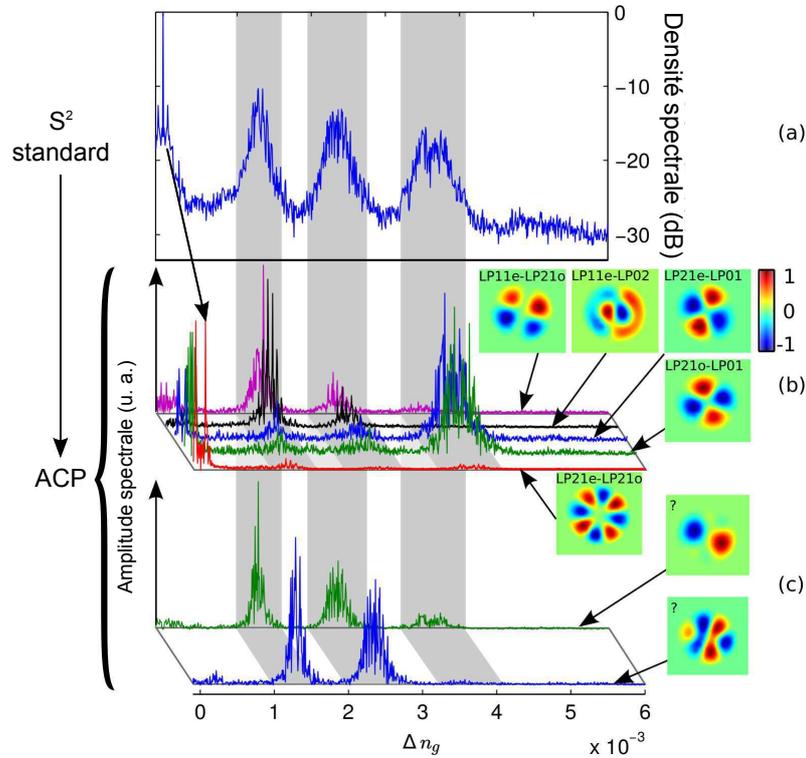


FIGURE 4.16 – Résumé des résultats d’ACI ; (a) On rappelle le résultat de la somme des amplitudes de battement sur tous les pixels pour identifier les positions principales de pics qui seront reportées sur les autres figures ; (b) Les composantes principales des battements présentant un seul pic important ; (c) Les composantes principales mélangées difficiles à interpréter.

$$C'(\omega) = \begin{bmatrix} \cos(\tau_{1,2}\omega + \phi_{1,2}) \\ \cos(\tau_{1,3}\omega + \phi_{1,3}) \\ \cos(\tau_{1,4}\omega + \phi_{1,4}) \\ \dots \\ \cos(\tau_{4,5}\omega + \phi_{4,5}) \\ \cos(\tau_{4,6}\omega + \phi_{4,6}) \\ \cos(\tau_{5,6}\omega + \phi_{5,6}) \\ \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} kl \rightarrow \\ \begin{matrix} \text{Matrix of } \Pi_{kl}\Pi_{mn}(F_k F_l)(F_m F_n) \text{ with } 0 \text{ on diagonal} \end{matrix} \\ mn \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \cos(\tau_{1,2}\omega + \phi_{1,2}) \\ \cos(\tau_{1,3}\omega + \phi_{1,3}) \\ \cos(\tau_{1,4}\omega + \phi_{1,4}) \\ \vdots \\ \cos(\tau_{mn}\omega + \phi_{mn}) \\ \vdots \\ \cos(\tau_{4,5}\omega + \phi_{4,5}) \\ \cos(\tau_{4,6}\omega + \phi_{4,6}) \\ \cos(\tau_{5,6}\omega + \phi_{5,6}) \end{bmatrix}$$

$$\iint \Pi_{kl}\Pi_{mn}(F_k F_l)(F_m F_n) dx dy$$

FIGURE 4.17 – Illustration de la forme quadratique que représente la matrice de corrélation spatiale  $C'$  dans le cas d’une excitation fortement multimode. On constate en effet la présence de plusieurs coefficients hors-diagonale non-nuls dans la matrice des coefficients donnée par les intégrales de recouvrement des figures de battement. Il y a donc corrélation spatiale de figures de battement.

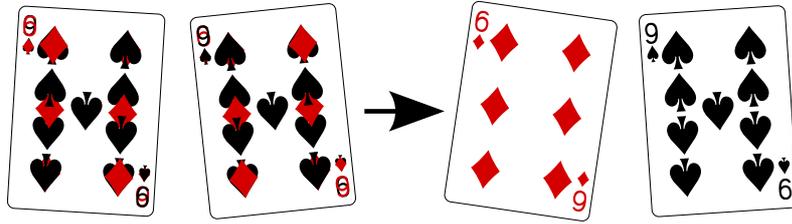


FIGURE 4.18 – Illustration du principe de fonctionnement de l'ACP. Les cartes de gauche sont le mélange des cartes de droite qui peuvent bien être récupérées car la distribution de leurs symboles (spatiale) et de leurs couleurs (spectrale) ne sont pas corrélées.

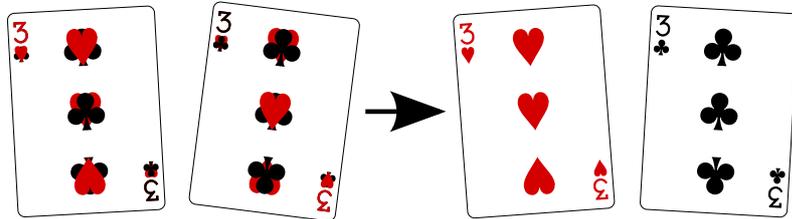


FIGURE 4.19 – Illustration de mélanges non-corrélés obtenues par ACP qui, malgré le fait qu'elle pourrait facilement être séparées selon la couleur, demeurent mélangées dû à leur forte corrélation spatiale (la position des symboles). L'analyse par composante indépendantes permettra d'effectuer la séparation.

densité de probabilité conjointe de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :

$$f_{X,Y}(x, y) \equiv f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) \quad (4.66)$$

où  $f_{X|Y}(x|y)$  désigne la densité de probabilité de la variable  $X$  sachant la variable  $Y$  (et inversement pour  $f_{Y|X}(y|x)$ ). Bien entendu, si on considère l'indépendance, la valeur que prendra  $X$  n'a aucun impact sur la valeur que peut prendre  $Y$  et inversement, et ainsi :

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad (4.67)$$

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \quad (4.68)$$

et donc :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (4.69)$$

On peut alors facilement montrer que la condition d'indépendance implique l'absence de corrélation. En considérant les valeurs moyennes  $\mu_X$  et  $\mu_Y$  des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  respectivement, on a :

$$\begin{aligned} \iint (x - \mu_X)(y - \mu_Y)f_{X,Y}(x, y)dxdy &= \int (x - \mu_X)f_X(x)dx \int (y - \mu_Y)f_Y(y)dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bien que cette définition formelle d'indépendance soit d'une importance capitale pour l'ACI, la notion d'*information mutuelle minimale* joue également un rôle essentiel ici. En effet, considérons un certain nombre de signaux indépendants, que l'on mélangerait en effectuant des combinaisons linéaires, ce qui est tout à fait analogue aux équations (4.62) à (4.65). On constate immédiatement que les nouveaux vecteurs obtenus par ce mélange qui peut s'écrire comme

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U}\mathbf{P}, \quad (4.70)$$

où  $\mathbf{P}$  joue ici le rôle de *matrice de mélange*, partagent plus d'information mutuelle que les signaux d'origine puisqu'ils en sont des mélanges, et ce, même si leur covariance est nulle. Aussi, si l'on considère que les signaux indépendants ont des distributions de probabilité similaire, ce qui est le cas dans une certaine mesure car les  $\hat{u}_\mu(\tau_\mu, \omega)$  sont tous de moyenne nulle et de variance unitaire ( $\int \hat{u}_\mu^2 d\omega = 1$ ), on peut se reposer sur le *théorème central limite* qui nous dit que la distribution d'une somme de variables indépendantes de même distribution tend vers une distribution gaussienne. Ainsi, chaque signal indépendant pris séparément aura une distribution *moins gaussienne* que les combinaisons linéaires qui le constituent. L'information mutuelle minimale et le caractère non-gaussien sont donc des notions équivalentes dans ce contexte et définissent deux stratégies de recherche de solutions[94]. Les algorithmes étant essentiellement tous des méthodes numériques d'optimisation, c'est la fonction de mérite qui changera de forme selon la stratégie employée[94, 95]. L'algorithme qui sera utilisé ici est celui du *FastICA*[95] qui est basé sur l'optimisation du caractère non-gaussien des signaux à rechercher. Une fois l'optimisation effectuée, le résultat obtenu peut être décrit par :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}'\mathbf{W} \quad (4.71)$$

où  $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}$  est aussi fourni par l'algorithme.

L'application de l'ACI peut s'avérer délicate et plusieurs facteurs doivent être pris en considération pour assurer son bon fonctionnement. Un certain conditionnement des données peut s'avérer nécessaire et mérite d'être expliqué plus en détail.

#### 4.5.2 Pré-conditionnement des signaux

La méthode d'ACI, pour être utilisée à bon escient, doit être appliquée dans le bon contexte et il est parfois utile d'appliquer d'autres techniques de manière complémentaire (comme le filtrage spectral par exemple[94],) pour arriver au résultat souhaité. Bien que cela semble impliquer un caractère arbitraire que nous cherchons à éviter, dans les faits, la plupart des processus se font avec un minimum de supervision se limitant souvent à valider les conditions de tri des solutions (une forme de « *supervised learning* ».) Nous verrons donc ici l'essentiel des méthodes de pré-conditionnement qui devront être appliquées aux données pour maximiser les chances de séparer adéquatement les battements recherchés.

Le premier point à soulever concernant le postulat d'indépendance des signaux est que celui-ci implique l'absence de corrélation entre ceux-ci. Or, cette condition

est déjà vérifiée par l'ACP, mais nous avons tout de même toujours des problèmes avec certaines solutions. Que se passerait-il alors si l'on donnait à l'algorithme l'intégralité des solutions de l'ACP à traiter ? Imaginons qu'on puisse trouver un nouveau vecteur solution  $\hat{u}'_\mu$ , s'exprimant nécessairement comme une combinaison linéaire des solutions de l'ACP, mais répondant mieux aux critères de l'ACI (non-gaussien, etc.). Ce nouveau vecteur peut s'exprimer comme une rotation appliquée à la solution originale et, par soucis de non-corrélation, l'orthogonalisation des autres solutions aura l'effet d'une rotation sur tout le reste de l'espace. Globalement, d'itération en itération, le nouveau jeu de solutions s'exprimera généralement comme une rotation de l'ensemble original de solutions. Or, cela pose plusieurs problèmes dont, en particulier, le fait que certaines solutions que nous avons trouvées sont déjà sous la forme que nous souhaitons obtenir (voir figure 4.16(b)) et qu'un changement sur une des autres solutions pourrait détruire la première. Or, cette affirmation justement suggère de grouper les solutions dans le but de traiter ensemble celles qui sont similaires sur le plan spectral sans altérer les autres, ce qui revient à faire la rotation d'un sous-espace autour de son complément orthogonal (les nouvelles solutions étant nécessairement des combinaisons linéaires des anciennes), ce qui assure que les nouvelles solutions demeurent orthogonales à toutes les autres. On parle ici de *partitionnement* ou de *regroupement* des données (en anglais « *clustering* »)[96].

Globalement parlant, le partitionnement des données consiste à définir une « distance » entre des éléments que l'on cherche à isoler puis de les grouper en fonction de cette distance. Dans notre cas de figure, c'est la similarité spectrale que l'on utilisera et qui peut s'écrire :

$$d_{\mu\eta} = \text{norm}(|\mathcal{F}\{\hat{u}'_\mu(\omega)\}| - |\mathcal{F}\{\hat{u}'_\eta(\omega)\}|)_{\mathcal{M}} \quad (4.72)$$

où  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier sur les fréquences  $\omega$  et  $\mathcal{M}$  désigne la métrique utilisée pour définir la norme[97]. On peut ensuite tracer un diagramme des distances entre les éléments, appelé *dendrogramme*, qui permet de visualiser les distances entre les différents éléments et, incidemment, comment ceux-ci sont groupés en fonction du nombre de groupes. La figure 4.20 illustre le dendrogramme obtenu pour les spectres obtenus par ACP (figure 4.14).

Le seul côté quelque peu arbitraire ici est de définir le nombre de groupes selon lequel les données doivent être classées, quoique celui-ci peut être estimé directement à partir du dendrogramme. Un autre point à considérer, pas vraiment arbitraire celui-là, est le choix de la métrique à utiliser pour calculer la distance et qui est le plus souvent une simple considération de maximiser la discrimination entre les différents éléments. Pour la plupart des jeux de données destinés à être regroupés, la métrique de Manhattan[97] (voir figure 4.21) offre souvent de meilleurs résultats en exacerbant la distance entre les éléments, assurant ainsi une meilleure discrimination ; c'est donc celle-là qui sera utilisée pour le regroupement.

Une fois les groupes formés, l'ACI sera appliquée à *l'intérieur de chaque groupe individuellement*. Le résultat ainsi obtenu pour le premier groupe constitué des solutions 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 et 10 de l'ACP est colligé à la figure 4.23. On remarque

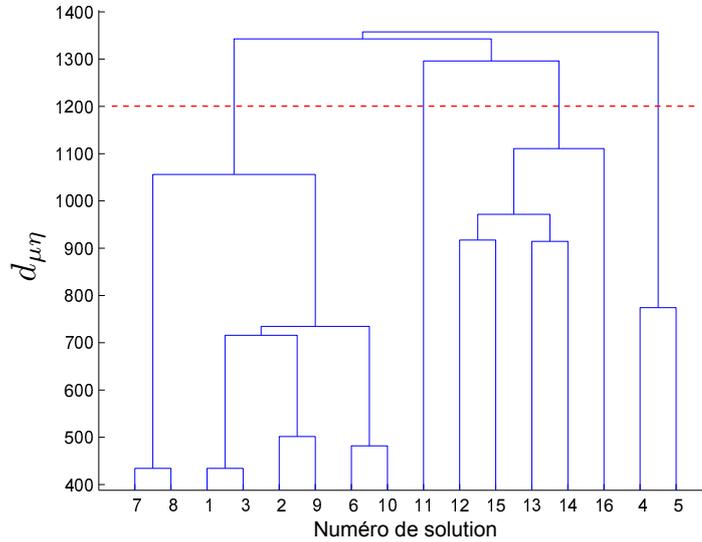


FIGURE 4.20 – Dendrogramme des amplitudes spectrales  $|\mathcal{F}\{\hat{u}'_{\mu}(\omega)\}|$ . Les chiffres en abscisse identifient le numéro des solutions trouvées à la figure 4.14 et chaque symbole «  $\square$  » lie les éléments entre eux, le haut du symbole indiquant, en ordonné, la distance entre les éléments sous-jacents. Le partage en groupe s’effectue en observant le nombre de bras verticaux des «  $\square$  » traversés par une droite horizontale à une certaine distance ; tous les éléments connectés à chacune de ces lignes verticales formeront alors un groupe distinct. Ici en particulier, nous avons gardé les solutions correspondant au bruit (12 à 16) que nous voulons garder à part, on choisira donc de séparer les données en 4 groupes, correspondant à une distance d’environ 1200 indiquée par le trait rouge tireté sur le graphe.

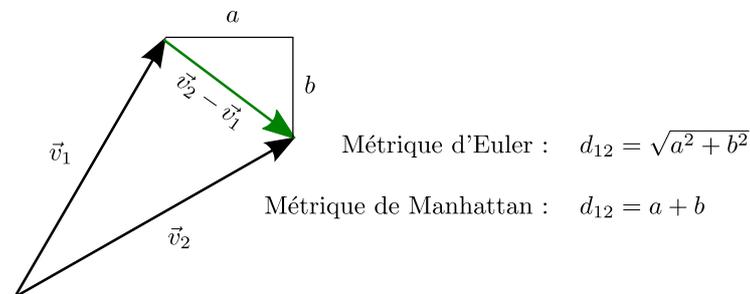


FIGURE 4.21 – Illustration de la métrique eulérienne et dite « de Manhattan » dans un espace à deux dimensions.

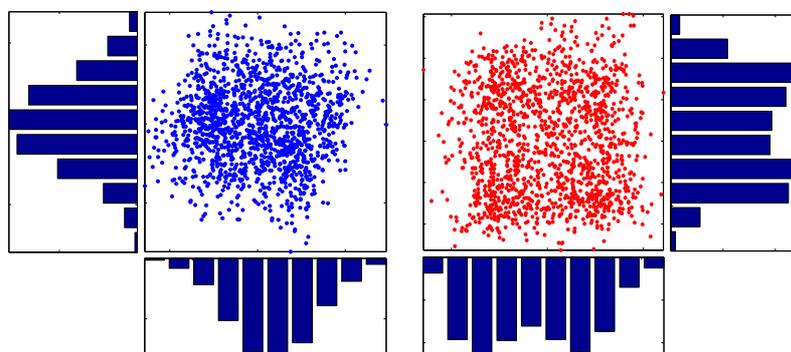


FIGURE 4.22 – Illustration du caractère non-gaussien des signaux indépendants ; à gauche (en **bleu**), les points  $(\hat{u}'_1(\omega_i), \hat{u}'_3(\omega_i))$  des signaux des première et troisième composantes de l'ACP puis les distributions correspondantes (quasi-gaussiennes) et à droite (en **rouge**) les signaux indépendants correspondants obtenus par ACI et ayant des distributions non-gaussiennes.

ainsi que les solutions qui contenaient préalablement plusieurs pics ont bien été séparées et que chacune des nouvelles solutions contient bien un seul pic. La présence de plusieurs spectres présentant les mêmes pics n'est pas gênante puisque ceux-ci correspondent aux deux composantes en quadrature ayant la même différence de délai de groupe (i.e. cela correspond à  $\phi_\mu - \phi_\eta = \pm\pi/2$  dans l'équation (4.20)). Pour fins d'illustration du caractère non-gaussien des signaux indépendants obtenus par ACI, la figure 4.22 montre les signaux 1 et 3 avant et après traitement ainsi que la distribution des points selon les deux axes ; on constate effectivement que le mélange montre une caractéristique gaussienne alors que les signaux indépendants récupérés ont des distributions très différentes. Une fois l'opération effectuée pour tous les groupes de modes, tous les battements devraient normalement être isolés du moins spectralement. Or, on aimerait bien pouvoir exploiter cette séparation également dans le domaine spatial puisque, comme nous l'avons vu, le mélange des signaux est une conséquence de l'orthogonalisation de la corrélation entre les figures de battement recherchées et qui donnent des figures de battements également mélangées (voir figure 4.16(c)). Or, il est possible d'utiliser les spectres que nous venons d'obtenir pour démêler les figures de battements en les utilisant en combinaison avec le jeu de données, ce qui est résumé à la figure 4.24. C'est ce que nous allons maintenant voir.

### 4.5.3 Récupération des figures de battement

Après l'application de l'ACI, les différents spectres indépendants ont été isolés avec succès mais l'information sur les figures de battement correspondantes n'a pas été traitée simultanément. On pourrait penser reconstruire la matrice  $\mathbf{P}$  de l'équation (4.59) que l'on pourrait récupérer par morceaux à partir des matrices de mélanges  $\mathbf{W}$  de chaque groupe ou, plus simplement, directement à partir du

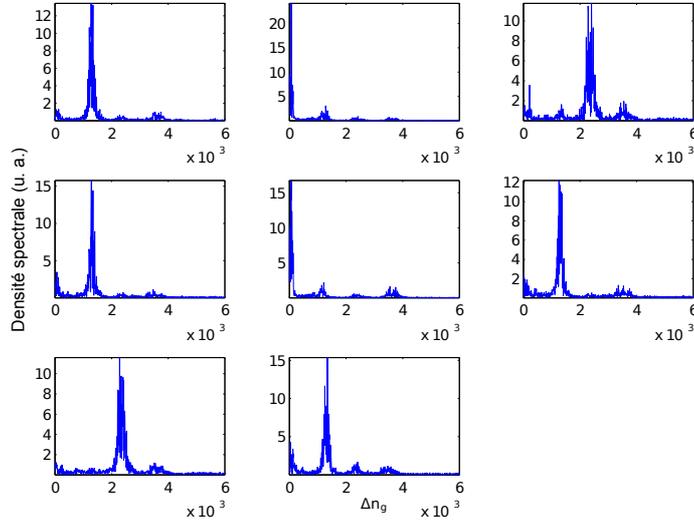


FIGURE 4.23 – Spectres des signaux en sortie d'ACI pour le premier groupe constitué des solutions 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 et 10 de l'ACP. On note en observant les spectre qu'on a effectivement bien un seul pic par spectre et que plusieurs spectres sont dégénérés en  $\Delta n_g$  ce qui n'est pas du tout gênant, indiquant simplement deux composantes en quadrature.

jeu de données. Pour fixer les idées, imaginons dans un premier temps que nous sommes dans une situation où tous les battements  $u_\mu(\tau_\mu, \omega)$  sont non-corrélés (ou orthogonaux) entre eux (c.-à-d. par exemple que  $\tau_\mu \neq \tau_\eta \forall \mu \neq \eta$ ) et qu'il en va de même pour les figures de battement  $v_\mu(x, y)$ . On sait aussi qu'ainsi, les vecteurs normalisés  $\hat{\mathbf{v}}_\mu$  et  $\hat{\mathbf{u}}_\mu$  sont vecteurs propres de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}'$  respectivement. On peut alors écrire :

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{v}}_\mu = \frac{1}{\mathcal{N}}\overline{\mathbf{X}}^T\overline{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}}_\mu \quad (4.73)$$

$$= \Lambda_\mu\hat{\mathbf{v}}_\mu \quad (4.74)$$

En multipliant à gauche par  $\overline{\mathbf{X}}$ , on obtient :

$$\Lambda_\mu(\overline{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}}_\mu) = \frac{1}{\mathcal{N}}\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{X}}^T(\overline{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}}_\mu) \quad (4.75)$$

$$= \mathbf{C}'(\overline{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}}_\mu) \quad (4.76)$$

à partir de quoi il est clair de voir que  $(\overline{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}}_\mu)$  est un vecteur propre de  $\mathbf{C}'$  et, puisque ceux-ci partagent les mêmes valeurs propres que leur homologue  $\hat{\mathbf{v}}_\mu$ , il vient automatiquement que :

$$\overline{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}}_\mu \propto \hat{\mathbf{u}}_\mu. \quad (4.77)$$

On peut démontrer de façon tout à fait analogue que

$$\overline{\mathbf{X}}^T\hat{\mathbf{u}}_\mu \propto \hat{\mathbf{v}}_\mu. \quad (4.78)$$

Bien que ce résultat semble n'être qu'une conséquence mathématique, il a en fait un sens physique bien précis. En effet, prenons l'exemple ici de nos spectres. Si on effectue la corrélation d'un spectre précis  $u_\mu(\tau_\mu, \omega)$  avec chaque pixel, nous obtiendront en chaque point de l'espace une valeur proportionnelle à l'amplitude du battement ayant la fréquence  $\tau_\mu$  en ce pixel, ce qui correspond *précisément* à l'amplitude de la figure de battement  $v_\mu(x, y)$  en ce point. Autrement dit, corréler l'ensemble des données avec un signal  $u_\mu$  revient à filtrer spectralement l'ensemble des données. De manière analogue, on peut filtrer dans le domaine spatial à partir des figures de battement  $v_\mu$  pour obtenir une distribution spectrale correspondante. C'est un peu ce que l'on fait, de façon plus rudimentaire, lorsqu'on observe point-par-point le champ transverse dans le spectre en  $S^2$  standard.

Si on considère maintenant qu'on ne peut compter sur l'orthogonalité des figures de battement dans notre modèle, comme nous avons pu le constater après l'application de l'ACP, on peut tout de même appliquer la même technique que l'on vient de développer, au moins pour obtenir les profils spatiaux associées aux spectres que nous avons isolés par ACI. Pour récupérer les distributions spatiales correspondantes, il suffit donc de corréler les résultats  $\mathbf{u}_\mu$  de l'ACI avec le jeu de données :

$$\mathbf{v}'_\mu \propto \overline{\mathbf{X}}^T \mathbf{u}_\mu \quad (4.79)$$

ce qui donne, pour le premier groupe de solutions, les résultats illustrés à la figure 4.25. De façon analogue, on peut récupérer le signal correspondant à une certaine distribution spatiale en se basant sur l'équation (4.77) :

$$\mathbf{u}'_\mu \propto \overline{\mathbf{X}} \mathbf{v}_\mu \quad (4.80)$$

Comme nous l'avons vu, cette relation est stable seulement si les  $\mathbf{v}_\mu$  et  $\mathbf{u}_\mu$  sont respectivement des vecteurs propres de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}'$  ; autrement, l'utilisation de la technique utilisée pour récupérer les figures de battement associées aux spectres risque de faire ressortir les corrélations entre battements. En particulier, on le constate à la figure 4.25 où les figures de battement 3 et 7 récupérées à partir des spectres semblent s'exprimer comme des combinaisons linéaires des figures de battement entre les modes LP<sub>01</sub>-LP<sub>11a</sub> et LP<sub>01</sub>-LP<sub>11b</sub> qui ne sont pas orthogonales. Or, elles le sont bien spectralement (en quadrature). Ceci n'est pas nécessairement embêtant étant donné que ce qui est véritablement important est d'avoir suffisamment d'indépendance linéaire entre les différents vecteurs spatiaux ainsi obtenus pour pouvoir reconstruire le bon nombre de battements. En termes plus concrets, il est possible que les deux interférences entre le mode LP<sub>01</sub> et les deux LP<sub>11</sub> ne soient pas en quadrature, mais le fait de les orthogonaliser (un résultat de l'ACI) aura pour effet de mixer les figures de battement obtenues ensuite par l'équation 4.79. L'important est alors ici de prioriser si on privilégie l'orthogonalité spectrale ou spatiale. Par soucis de se rattacher à la base orthogonale habituelle des modes, l'orthogonalité spatiale sera priorisée pour la suite des travaux. Aussi, un système d'axes sera défini en fonction des orientations propres de la figure d'intensité moyenne (voir l'encart de la figure 4.11) que nous utiliserons aussi pour aligner les composantes paires et impaires des battements impliquant des modes LP<sub>ℓm</sub> ayant  $\ell \neq 0$ .

Pour procéder à cette opération, on doit d'abord regrouper les battements et leurs figures correspondantes par différence de délai de groupe (ou d'indice de groupe). Pour ce faire, on pourrait procéder à un deuxième partitionnement des données à l'aide des outils présentés plus haut ou procéder manuellement si le nombre de battements à traiter est raisonnable. Dans certains cas, les figures de battements extraites de l'ACP ont déjà la bonne orientation, alors nous allons les conserver. Dans les autres cas, on procède à la réorientation. Par exemple, en prenant les solutions 3 et 7 de la figure 4.25, on peut trouver la combinaison de spectres donnant une orientation proche de l'image moyenne par une méthode de moindres carrés à deux coefficients  $a$  et  $b$  en minimisant la fonction suivante :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{N}} \left\{ \left[ \overline{\mathbf{X}}^T (a\hat{\mathbf{u}}_3 + b\hat{\mathbf{u}}_7) \right]_i^2 - \overline{I}_i \right\}^2 \quad (4.81)$$

ce qui implique que le spectre correspondant est  $\hat{\mathbf{u}}_{01-11a} = (a\hat{\mathbf{u}}_3 + b\hat{\mathbf{u}}_7) / \sqrt{a^2 + b^2}$  et on récupère la nouvelle figure de battement simplement par  $\mathbf{v}_{01-11a} = \overline{\mathbf{X}}(a\hat{\mathbf{u}}_3 + b\hat{\mathbf{u}}_7)$  que l'on normalise par la suite. De manière analogue, on trouve la figure de battement orthogonale par orthogonalisation par exemple :

$$\mathbf{v}_{01-11b} = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \bullet \hat{\mathbf{v}}_{01-11a})\hat{\mathbf{v}}_{01-11a} \quad (4.82)$$

On récupère ensuite les nouveaux spectres correspondants à l'aide de l'équation (4.77), soit  $\mathbf{u}'_{01-11b} = \overline{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{v}}_{01-11b}$ , qui peut ne pas être orthogonal à  $\hat{\mathbf{u}}_{01-11a}$  et présenter éventuellement plusieurs pics dans le cas où  $\hat{\mathbf{v}}_{01-11b}$  serait corrélée à d'autres figures de battement (ce qui est le cas ici). Pour terminer, on orthogonalise les spectres du groupe (dans notre cas, l'interférence LP<sub>01</sub>-LP<sub>11a,b</sub>) par rapport à tous les autres groupes :

$$\mathbf{u}_{01-11b} = \mathbf{u}'_{01-11b} - \sum_{\tau_\mu \neq \tau_{01-11}} (\mathbf{u}'_{01-11b} \bullet \hat{\mathbf{u}}_\mu)\hat{\mathbf{u}}_\mu \quad (4.83)$$

que l'on normalise par la suite et qui laisse un seul pic présent dans le spectre. On peut noter au passage ici que  $\hat{\mathbf{u}}_{01-11a}$  et  $\hat{\mathbf{u}}_{01-11b}$  ne sont pas orthogonaux, mais qu'en revanche  $\hat{\mathbf{v}}_{01-11a} \perp \hat{\mathbf{v}}_{01-11b}$  par construction. La figure 4.24 illustre bien le processus terminé sur les deux solutions de la figure 4.16(c). On peut également faire une contre-vérification en testant le spectre obtenu avec l'équation (4.79) pour vérifier qu'on récupère bien la bonne figure de battement. Une fois cette étape complétée, on se retrouve avec un ensemble de battements qui sont bien séparés spatialement et spectralement et alignés selon le système d'axe que nous avons défini (figure 4.26). Il est possible cependant que certaines figures de battement manquent toujours à l'appel, comme les interférences LP<sub>02</sub>-LP<sub>21</sub> par exemple. Cela peut s'expliquer par exemple par la trop faible amplitude de certains battements qui font en sorte que ceux-ci ne ressortent pas bien de l'ACP en comparaison au bruit. Qu'à cela ne tienne, il demeure à notre disposition un certain nombre d'outils qui nous permettront de récupérer ces informations, en particulier à partir de la reconstruction des modes que nous verrons à l'instant.

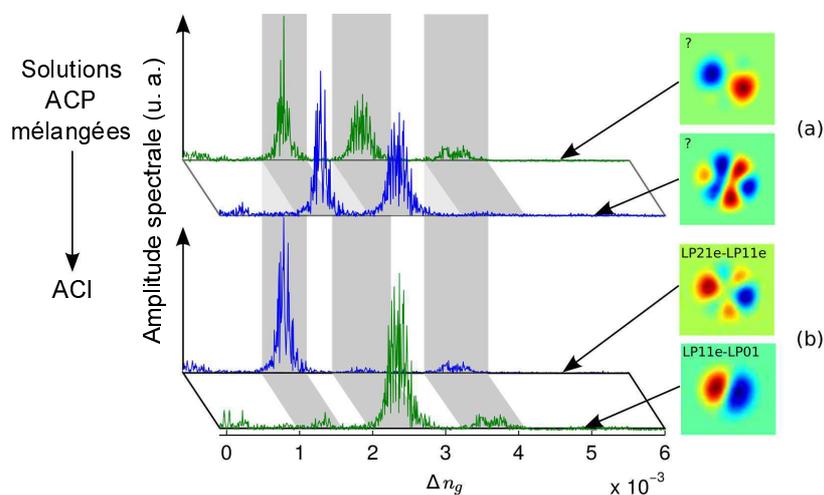


FIGURE 4.24 – Illustration de la séparation des solutions de la figure 4.16(c) par ACI.

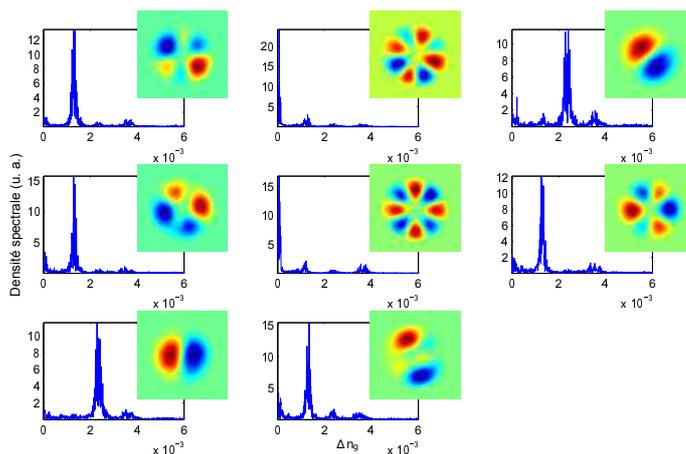


FIGURE 4.25 – Distributions spatiales correspondant aux battements isolés par ACI pour le premier groupe de solutions.

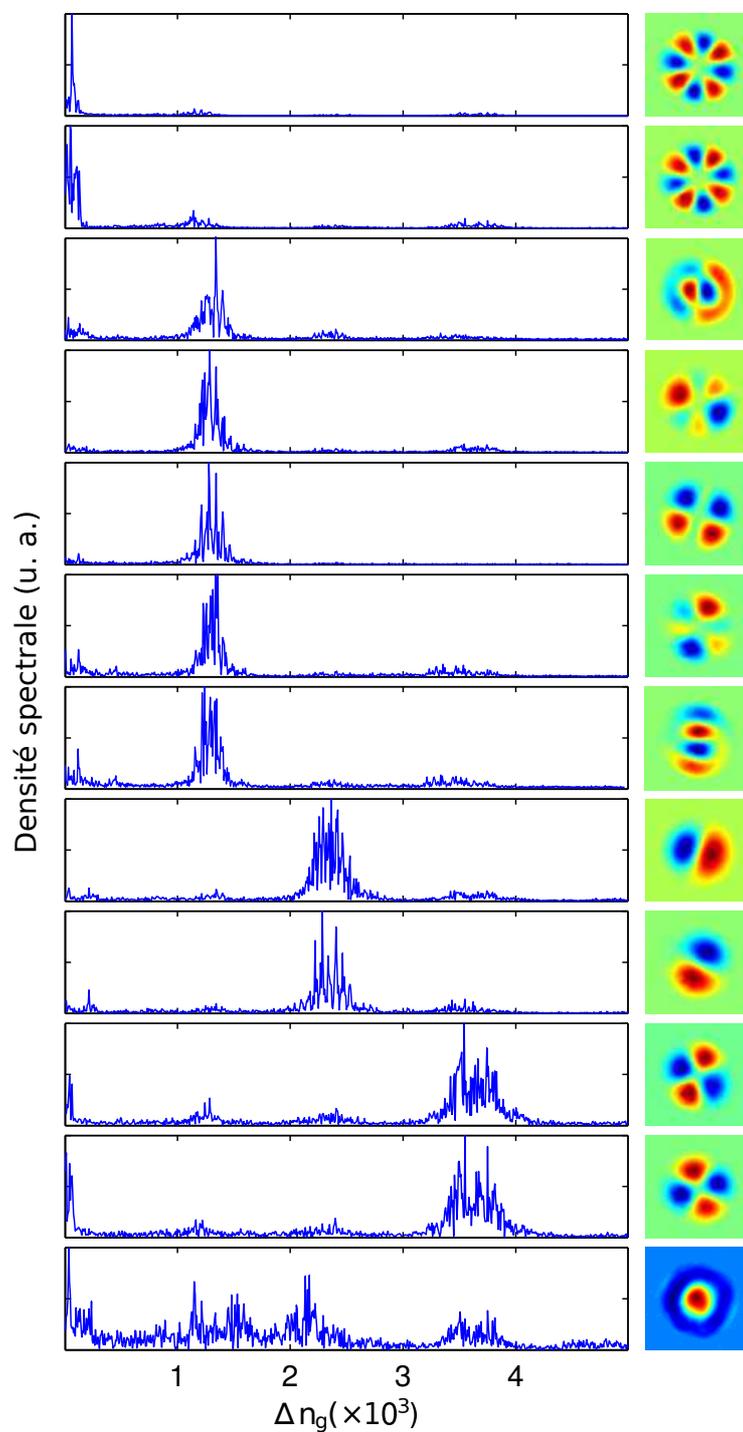


FIGURE 4.26 – Résumé des battements obtenus après ACI (l'ordre de lecture est du haut vers le bas).

## 4.6 Troisième étape : détermination des profils transverses de champ $F_k(x, y)$

Cette section présentera les différentes alternatives, disponibles dans la littérature et développées dans le cadre de ce travail, permettant de récupérer les profils transverses de mode  $F_k(x, y)$  à partir des figures de battement.

### 4.6.1 Principe général

Comme nous l'avons vu à la section §4.3.1, lorsqu'on est dans une configuration largement dominée par le mode fondamental, il est relativement facile de récupérer l'information sur la forme des champs car on a déjà la forme du mode fondamental à partir de la figure d'intensité moyenne. Or, lorsque l'excitation de la fibre est fortement multimode, comme c'est le cas ici, on ne peut se reposer sur la figure d'intensité moyenne en la considérant à toutes fins pratiques comme la distribution d'intensité du mode fondamental. Cela n'est pas nécessairement un problème cependant car, malgré tout, comme le montre un article de OTTO et al. dans lequel les auteurs expliquent qu'il suffit d'avoir trois figures de battements entre trois modes pour extraire tous les champs impliqués[98]. En effet, imaginons que l'on ait les figures de battement entre les modes  $k$  et  $\ell$ ,  $m$  et  $\ell$  puis finalement  $k$  et  $m$ . Il est alors facile de constater que :

$$F_k(x, y) = \sqrt{\frac{[F_k(x, y)F_m(x, y)] \cdot [F_k(x, y)F_\ell(x, y)]}{F_m(x, y)F_\ell(x, y)}} \quad (4.84)$$

Et, une fois  $F_k(x, y)$  récupéré, il devient facile de récupérer  $F_\ell(x, y)$  et  $F_m(x, y)$  par simple division. Or, en pratique, cela n'est pas si simple car tous les modes d'ordre supérieur présentent des zéros dans leurs distributions, ce qui va poser problème lorsqu'on prend le rapport.

Il existe toutefois une méthode qui, en théorie, devrait permettre de récupérer la distribution d'intensité de n'importe quel mode en utilisant la figure d'intensité moyenne et tous les battements impliquant ce mode[98]. Pour l'expliquer, on doit d'abord exprimer le terme d'intensité moyenne en mettant en évidence un mode particulier  $\ell$  par exemple :

$$\bar{I} = P_\ell F_\ell^2(x, y) + \sum_{i, i \neq \ell}^M P_i F_i^2(x, y). \quad (4.85)$$

En multipliant de part et d'autre de l'équation par  $I_\ell = P_\ell |F_\ell(x, y)|^2$ , on peut écrire :

$$I_\ell^2 + \left( \sum_{i, i \neq \ell}^M P_\ell P_i [F_\ell(x, y)F_i(x, y)]^2 \right) - I_\ell \bar{I} = 0 \quad (4.86)$$

où, dans notre formalisme plus général, le terme entre parenthèses s'écrit :

$$\sum_{i, i \neq \ell}^M P_\ell P_i [F_\ell(x, y)F_i(x, y)]^2 = \sum_{i, i \neq \ell}^M \frac{\Lambda_{i\ell}}{2} \hat{v}_{i\ell}^2(x, y). \quad (4.87)$$

On remarque que (4.86) est une équation quadratique en  $I_\ell$  ; on peut alors écrire :

$$I_\ell = \frac{1}{2} \left[ \bar{T} \pm \left( \bar{T}^2 - 2 \sum_{i, i \neq \ell}^M \Lambda_{i\ell} \hat{v}_{i\ell}^2(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.88)$$

Bien que cette méthode soit très attirante par sa simplicité, celle-ci s'applique relativement mal à certains modes lorsque la fibre est très fortement excitée dans les modes d'ordre supérieurs. En effet, tous les battements d'un mode avec les autres ne sont pas toujours disponibles pour effectuer le calcul si celui-ci n'est pas dominant en puissance. De plus, l'erreur accumulée, due entre autres au bruit ainsi qu'à l'erreur sur les vecteur propres  $\hat{v}_\mu$  et celle sur les valeurs propres  $\Lambda_\mu$  dans la somme entre parenthèses, fait en sorte que l'on obtient parfois des racines de nombres négatifs par endroit rendant le calcul difficile à interpréter, voire inutilisable.

Néanmoins il suffit d'arriver à récupérer qu'une seule distribution de champ à partir d'une où l'autre des méthodes pour rapidement déduire toutes les autres en cascade. Un peu plus de travail sera nécessaire cependant si le mode fondamental n'est pas dominant à cause des zéros présents dans toutes les figures de battement. Bien entendu, on peut rogner les données problématiques de façon automatisée (en calculant le laplacien de l'image et en imposant un critère par exemple) puis, subséquemment, « raccommoier » les zones ainsi rognées par interpolation, mais il est toujours mieux d'avoir le moins de zones de zéros lorsqu'on fait la division d'une figure de battement par l'enveloppe d'un mode pour en déduire l'autre. Or, nous avons développé une méthode (décrite ci-après) pour minimiser le nombre de zéros présents dans beaucoup de cas de figures, et même dans certains cas, nous permettant directement d'obtenir certaines formes de champ.

#### 4.6.2 Méthode de reconstruction modale des « anneaux » et aspects vectoriels

Pour une fibre où l'on peut résoudre les modes comme un produit de fonctions radiales et azimutales (cas largement répandu), respectivement  $\psi(r)$  et  $\Phi_\nu(\phi)$ , on peut écrire le champ comme  $F_\nu(r, \phi) = \psi(r)\Phi_\nu(\phi)$ , les fonctions angulaires s'exprimant sous la forme (voir chapitre 1) :

$$\Phi_\nu(\phi) = \begin{cases} \cos(\nu\phi) \\ \sin(\nu\phi) \end{cases} \quad (4.89)$$

Si on a accès aux figures de battement des deux composantes de  $LP_{11}$  avec le mode  $LP_{01}$  par exemple, on peut effectuer la somme quadratique des deux figures de battements (qui sont normalisées) pour obtenir :

$$F_{01}^2 F_{11p}^2 + F_{01}^2 F_{11i}^2 = \psi_0^2(r) \psi_1^2(r) [\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2] = \psi_0^2(r) \psi_1^2(r) \quad (4.90)$$

où les indices  $p$  et  $i$  indiquent les solutions paires et impaires, et ainsi de suite pour  $LP_{21}$  avec  $LP_{01}$  pour obtenir  $\psi_0^2(r) \psi_2^2(r)$  etc. Il s'avère également intéressant

ici d'introduire des éléments relatifs à la nature *vectorielle* des modes. En effet, on peut noter quelque chose de surprenant dans les figures de battement que nous avons obtenues par ACP, en particulier les solutions 7 et 8 de la figure 4.13. En effet, si l'on était dans un cas de figure purement scalaire, on s'attendrait à observer dans l'interféromètre une seule figure de battement pour l'interférence éventuelle  $LP_{21p}$ - $LP_{21i}$  qui serait proportionnelle à  $\cos(2\phi) \sin(2\phi) \propto \sin(4\phi)$ . Or, on observe en fait que les solutions 7 et 8 sont deux composantes *en quadrature* de ce qu'on s'attendrait à retrouver comme une seule et même figure de battement. La figure 4.27 présente les figures de battements théoriques d'une fibre supportant les modes jusqu'à  $\nu = 1$  (le nombre de mode ayant été limité pour avoir un nombre de battements raisonnable.) On peut y constater que les figures de battements mettant en jeu les combinaisons de modes  $TE_{01}$ ,  $TM_{01}$  et  $HE_{21}$  (pair et impair) montrent justement les deux orientations angulaires, chacune dégénérées deux fois. C'est la nature vectorielle des modes qui fait en sorte que ces figures de battement apparaissent dans nos résultats d'analyses car, même si elles sont spectralement dégénérées, elles sont spatialement orthogonales. Pour expliquer cela, considérons les battements entre modes ayant  $\nu = 2$  (solutions 7 et 8 de la figure 4.13), qui sont constitués des  $HE_{31}$  et  $EH_{11}$  pairs et impairs s'exprimant comme suit pour les composantes du champ électrique transverse  $\mathbf{e}_t$ [34] :

$$\mathbf{e}_t \{HE_{31}\} = \begin{cases} [\hat{\mathbf{x}} \cos(2\phi) - \hat{\mathbf{y}} \sin(2\phi)] \psi_2(r) \\ [\hat{\mathbf{x}} \sin(2\phi) + \hat{\mathbf{y}} \cos(2\phi)] \psi_2(r) \end{cases} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{e}_t \{EH_{11}\} = \begin{cases} [\hat{\mathbf{x}} \cos(2\phi) + \hat{\mathbf{y}} \sin(2\phi)] \psi_2(r) \\ [\hat{\mathbf{x}} \sin(2\phi) - \hat{\mathbf{y}} \cos(2\phi)] \psi_2(r) \end{cases} \quad (4.92)$$

puis, pour le champ magnétique transverse  $\mathbf{h}_t$  :

$$\mathbf{h}_t \{HE_{31}\} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\beta}{k}\right) \begin{cases} [\hat{\mathbf{x}} \sin(2\phi) + \hat{\mathbf{y}} \cos(2\phi)] \psi_2(r) \\ -[\hat{\mathbf{x}} \cos(2\phi) - \hat{\mathbf{y}} \sin(2\phi)] \psi_2(r) \end{cases} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{h}_t \{EH_{11}\} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\beta}{k}\right) \begin{cases} -[\hat{\mathbf{x}} \sin(2\phi) - \hat{\mathbf{y}} \cos(2\phi)] \psi_2(r) \\ [\hat{\mathbf{x}} \cos(2\phi) + \hat{\mathbf{y}} \sin(2\phi)] \psi_2(r) \end{cases} \quad (4.94)$$

Si on considère les modes vectoriels, l'interféromètre s'exprimera comme la composante en longitudinale du vecteur de Poynting,  $\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}}$  dont les composants croisés entre les modes  $k$  et  $\ell$  seront donnés, en amplitude, par[34] :

$$v_{k\ell}(x, y) = (\mathbf{e}_{t,k} \wedge \mathbf{h}_{t,\ell}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \propto (e_{x,k} h_{y,\ell} - e_{y,k} h_{x,\ell}) \quad (4.95)$$

Ainsi, si on observe ce résultat pour le battement entre  $HE_{31p}$  et les deux  $EH_{11}$ , on obtient :

$$\mathbf{e}_t \{HE_{31p}\} \wedge \mathbf{h}_t \{EH_{11p}\} = [\cos^2(2\phi) - \sin^2(2\phi)] \psi_2^2(r) = \psi_2^2(r) \cos(4\phi) \quad (4.96)$$

$$\mathbf{e}_t \{HE_{31p}\} \wedge \mathbf{h}_t \{EH_{11i}\} = [2 \cos(2\phi) \sin(2\phi)] \psi_2^2(r) = \psi_2^2(r) \sin(4\phi) \quad (4.97)$$

Ces deux figures correspondent donc exactement à ce que l'on observe aux solutions 7 et 8 de l'ACP. Ainsi, on peut écrire :

$$v_7^2 + v_8^2 \propto \psi_2^4(r) [\cos^2(4\phi) + \sin^2(4\phi)] = \psi_2^4(r) \quad (4.98)$$

$$\Rightarrow \psi_2^2(r) \propto \sqrt{v_7^2 + v_8^2} \quad (4.99)$$

On a donc récupéré directement la distribution radiale de l'amplitude du champ des modes ayant le nombre azimutal  $\ell = 2$ , soit  $\psi_2(r)$ .

### 4.6.3 Détermination d'enveloppes additionnelles

Comme explicité à la section §4.6.1, une fois un profil de battement déterminé, nous pouvons retrouver les autres profils via les figures de battement. A titre d'exemple, on peut récupérer le produit  $\psi_0(r)\psi_2(r)$  en utilisant les solutions 4 et 5 de l'ACP :

$$v_4^2 + v_5^2 \propto \psi_0^2(r)\psi_2^2(r) [\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)] = \psi_0^2(r)\psi_2^2(r) \quad (4.100)$$

Ainsi, on peut récupérer la distribution du mode fondamental,  $F_{01}(r) = \psi_0(r)$  facilement à partir des équations (4.99) et (4.100) :

$$F_{01}(r) \propto \frac{\sqrt{v_4^2 + v_5^2}}{(v_7^2 + v_8^2)^{1/4}} = \frac{\psi_0(r)\psi_2(r)}{\psi_2(r)} = \psi_0(r) \quad (4.101)$$

L'avantage de cette méthode est d'éliminer complètement les zéros dans la direction angulaires, permettant ainsi une meilleure reconstruction modale en éliminant plusieurs points proches du bruit qui poseraient problème au dénominateur de l'équation (4.84). Bien entendu il demeure un zéro au centre, mais on peut définir un critère de rognage en fonction de l'amplitude pour éliminer certains points aberrants au centre de la reconstruction de  $F_{01}$  pour les remplacer par une interpolation sur le reste des données du mode ou de données récupérées par d'autres reconstructions telles que celles qui ont été mentionnées plus haut[98].

La figure 4.28 illustre l'ensemble des champs reconstruits pour les données étudiées ici. Il demeure encore un peu de travail à faire pour trouver les battements manquants dans l'éventualité où ceux-ci seraient nécessaires pour récupérer plus d'information sur la dispersion (par exemple, pour faire des recoupements de différences d'indice de groupe dans le but d'identifier les modes). Ces opérations, lorsque nécessaires, constitueront la dernière étape de l'analyse qui permettra de déterminer le maximum d'information sur le mélange modal contenu dans la fibre.

## 4.7 Facultatif : battements manquants et amplitudes

Jusqu'à maintenant, notre reconstruction nous a fourni une grande quantité d'information sur les différents termes de battement entre les modes, mais certains

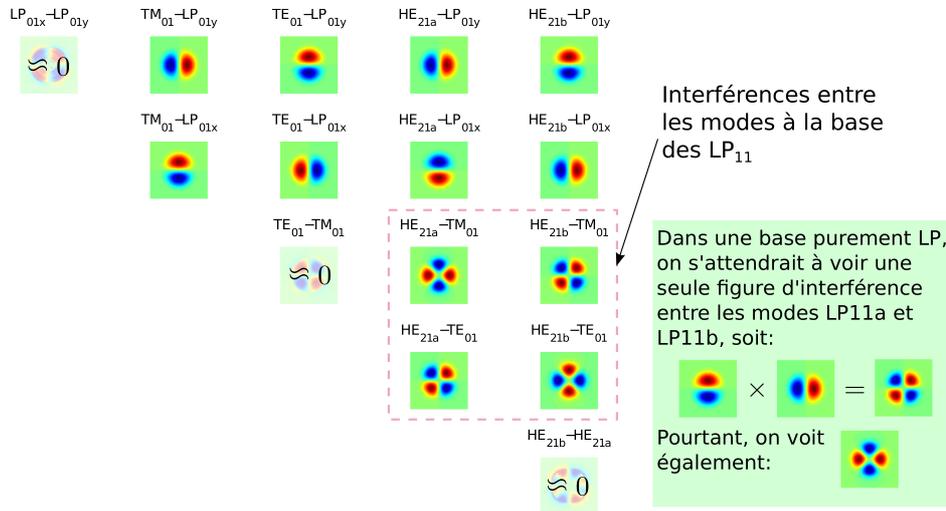


FIGURE 4.27 – Figures de battements théoriques pour les modes vectoriels d’une fibre à saut d’indice supportant les modes jusqu’à  $\ell = 1$ . Les figures de battements sont obtenues par  $\mathbf{P}_z \approx \mathbf{e}_t \wedge \mathbf{h}_t$ . On remarque que plusieurs figures de battement sont dégénérées et, également, on constate la présence des deux composantes en quadrature des figures de battements entre modes correspondants à  $\ell = 1$  alors qu’en théorie scalaire, une seule devrait être visible.

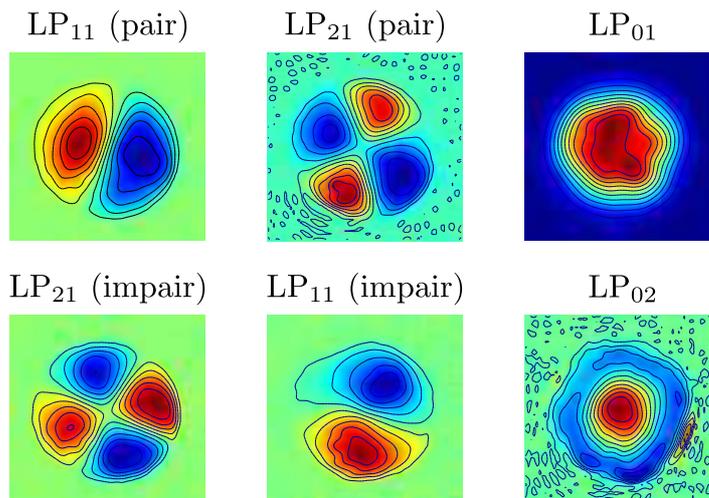


FIGURE 4.28 – Modes résolus à partir des données expérimentales.

de ces termes manquent toujours à l'appel, comme cela fut mentionné à la section §4.5.3, le plus souvent parce qu'ils ont des amplitudes de battement se rapprochant du niveau de bruit. Cependant, cela ne nous a pas empêché de reconstruire la formes des enveloppes des champs (ni de retrouver leur puissance, comme nous le verrons ci-après) car, le nombre de battements étant beaucoup plus grand que le nombre de modes recherchés, il nous a été facile d'isoler au moins un facteur  $F_k(x, y)$  puis, en cascade, de récupérer tous les autres. Ayant en main tous ces modes, il nous est maintenant facile, dans l'esprit de vouloir être exhaustif, de *synthétiser les figures de battements manquantes* et de les utiliser, en conjonction avec le jeu de données, pour récupérer les spectres associées et, itérativement, la véritable figure de battement associée à partir du jeu de données.

Les champs en main, il est facile de construire une figure de battement par simple multiplication des champs des modes impliqués. Pour récupérer le spectre associé, il suffit ensuite simplement d'obtenir le spectre à partir de la relation (4.77). On orthogonalise ensuite ce spectre par rapport à tous les autres déjà amassés à l'aide d'un algorithme de Gram-Schmidt[99], puis on génère une nouvelle figure de battement à partir de l'équation (4.79). La raison principale pour laquelle on génère une seconde fois la figure de battement mais cette fois à partir du spectre s'inscrit dans un souci de rester le plus proche possible du jeu de données initial. En effet, toutes les opérations que nous effectuons ici peuvent être vues de manière analogue à un algorithme de compression de données[92]; en effet, on décompose ici un énorme jeu de données en un nombre beaucoup plus petit d'éléments constituants qui nous permettent d'approximer le jeu de données avec une certaine précision. Cette précision dépend ultimement de la quantité d'éléments choisis pour représenter le jeu de données. De plus, la reconstruction modale ajoute souvent des imprécisions, soit via la correction de données aberrantes, soit tout simplement par la combinaison des erreurs sur les figures de battement qui la constituent. En effet, prenons l'exemple de l'erreur relative sur une enveloppe de champ obtenue par l'équation (4.84) et au minimum donnée par<sup>9</sup> :

$$\frac{\Delta F_k(x, y)}{F_k(x, y)} = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\Delta v_{k\ell}}{v_{k\ell}} \right| + \left| \frac{\Delta v_{km}}{v_{km}} \right| + \left| \frac{\Delta v_{\ell m}}{v_{\ell m}} \right| \right) = \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} \quad (4.102)$$

où  $\bar{\varepsilon}$  dénote l'erreur relative moyenne des trois figures de battement mises en jeu dans le calcul de  $F_k(x, y)$ . Donc, dès le départ, l'erreur relative sur l'enveloppe de champ est supérieure à la moyenne de celles des figures de battements utilisées pour le calculer. Le processus de normalisation de  $F_k(x, y)$  ajoutera également des imprécisions. D'éventuelles figures de battements synthétisées à partir des enveloppes de champs pourraient donc avoir des corrélations non-nulles avec d'autres éléments de notre représentation réduite et, dans le but de trouver une solution stable, nous devons procéder de manière itérative. Plus précisément, ce que nous entendons ici par *solution stable* est que l'application consécutive des opérations de l'équation (4.77),

---

9. On suppose ici que l'erreur provient principalement du bruit de la mesure et donc, celle-ci devrait normalement être indépendante pour chaque battement, ce qui explique les valeurs absolues dans l'expression qui sera alors maximale.

suiwi d'une orthogonalisation avec les spectres des autres groupes de battements, suivi de l'utilisation de la relation (4.79) nous redonne la même figure de battement que nous avons au départ. En pratique, une seule itération est généralement nécessaire pour que la solution soit déjà stable.

Un autre point important sur les battements manquants concerne les fortes dégénérescences entre certaines figures d'interférence mettant en jeu des modes de nature différents, comme on a pu le voir à la figure 4.27. En particulier, les figures de battement impliquant le mode fondamental et les modes  $HE_{31}$  et  $EH_{11}$  (à la base de  $LP_{21}$ ) ont une corrélation quasi-unitaire avec les figures de battements entre modes composant le  $LP_{11}$  ( $TE_{01}$ ,  $TM_{01}$  et les  $HE_{21}$ ). Or, les différences d'indice de groupe entre les deux groupes donnant les mêmes figures sont importantes, la première étant liée à la différence de délai de groupe entre le mode fondamental et des modes d'ordre supérieurs (grands  $\tau_{k\ell}$ ), alors que l'autre est la conséquence d'une levée de dégénérescence (petits  $\tau_{k\ell}$ ). Ainsi, les pics correspondants peuvent être facilement séparés par filtrage spectral (passe-haut, passe-bas) et la vérification de la justesse des figures de battement effectuée grâce à l'équation (4.79). Notons au passage que, comme dans le cas des interférences entre les modes vectoriels composant les  $LP_{21a}$  et  $LP_{21b}$  donnant lieu à deux figures de battement orthogonales de même géométrie alors qu'on en attendrait normalement une seule, les interférences entre les modes  $TE_{01}$ ,  $TM_{01}$  et les  $HE_{21}$  font également naître deux figures de battements orthogonales, les spectres des interférences  $HE_{31}$  et  $EH_{11}$  montrant tous deux des pics près de  $\Delta n_g \approx 0$ . Ceci suggère l'interférence des composantes vectorielles à la base des modes  $LP_{11}$ . La figure 4.29 représente l'intégralité des battements obtenues à l'aide de toutes les méthodes décrites jusqu'ici. La toute première représente le cas qui vient tout juste d'être abordé et les deux suivantes, absentes des résultats jusqu'ici ( $LP_{02}$  avec  $LP_{21a}$  et  $LP_{21b}$ ), ont été obtenues à partir de figures de battements synthétisées sur la base des amplitudes de champ récupérées précédemment, puis stabilisées par la suite.

## 4.8 Dernière étape : détermination de la distribution modale de puissance

Une fois les spectres, figures de battements et enveloppes de champ extraites du jeu de données, nous avons maintenant les informations nécessaires pour récupérer les coefficients d'amplitude de battements. Deux situations peuvent se présenter à nous : soit on a réussi à séparer toutes les informations directement à partir de l'ACP, auquel cas les valeurs propres contiennent déjà toute l'information nécessaire, ou alors nous avons dû avoir recours à l'ACI pour obtenir notre groupe de solutions. Dans les deux cas cependant, le facteur  $S_{k\ell}$  que nous avons vu à l'équation (4.38), doit être déterminé pour pouvoir isoler les puissances  $P_k$  et  $P_\ell$ . Pour effectuer ce calcul, on doit utiliser les enveloppes de champ et s'assurer qu'elles sont

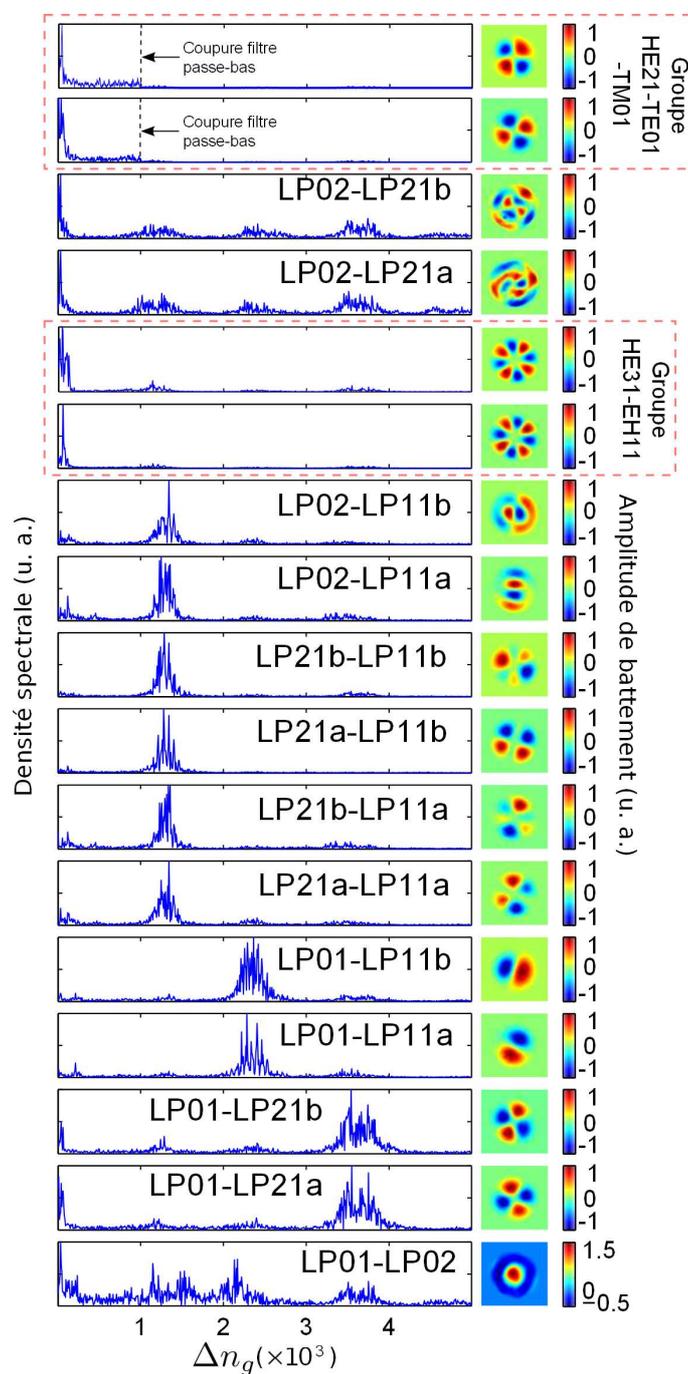


FIGURE 4.29 – L'intégralité de tous les battements obtenues après l'application de toutes les techniques décrites jusqu'ici.

bien normalisées, c'est à dire que :

$$\iint F_k^2(x, y) dx dy = 1, \quad \forall k \in [1, M] \quad (4.103)$$

Si l'ACP a été suffisante pour isoler toutes les solutions, les valeurs propres sont alors données par l'équation (4.48) et on peut extraire la puissance dans un mode de manière similaire aux enveloppes de champ :

$$P_k = \sqrt{\left(\frac{\Lambda_{k\ell}\Lambda_{km}}{2\Lambda_{\ell m}}\right) \left(\frac{S_{\ell m}}{S_{k\ell}S_{km}}\right)} \quad (4.104)$$

et ensuite, en déduire les autres directement à partir des valeurs propres :

$$P_\ell = \frac{\Lambda_{k\ell}}{2P_k S_{k\ell}} \quad (4.105)$$

Dans le cas où l'ACP s'est avérée insuffisante pour séparer toutes les composantes du signal, la procédure est un peu plus délicate. Pour démarrer la discussion, observons l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I}_\mu = \sqrt{\frac{2}{\Delta\omega S_{k\ell}}} \iiint \hat{v}_\mu(x, y) [I - \bar{I}] \hat{u}_\mu(\tau_\mu, \omega) dx dy d\omega \quad (4.106)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mathcal{N} S_{k\ell}}} \hat{\mathbf{u}}_\mu^T \bar{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_\mu \quad (4.107)$$

On sait par construction que l'intégrale sur  $\omega$  sera nulle pour tous les termes dont la différence de délai de groupe est différente de  $\tau_\mu$ . Autrement dit, l'intégration a pour effet d'isoler les termes ayant  $\tau = \tau_\mu$ . Si, à l'intérieur de la zone spectrale toutes les figures de battement sont orthogonales, c'est à dire que :

$$\hat{v}_\mu(x, y) \perp \hat{v}_\eta(x, y) \quad \text{et} \quad \tau_\mu = \tau_\eta, \quad \mu \neq \eta \quad (4.108)$$

alors l'intégrale en (4.106) est effectivement *non-nulle pour un seul terme de l'interféromètre*, celui du battement d'indice  $\mu$  (ou, par bijection, le double-indice associé  $k\ell$ ). Ainsi, l'intégrale se résume à :

$$\mathcal{I}_\mu = \Pi_\mu \iint \hat{v}_\mu^2(x, y) dx dy \int \hat{u}_\mu^2(\tau_\mu, \omega) d\omega \quad (4.109)$$

$$= \Pi_\mu \cdot 1 \cdot 1 \quad (4.110)$$

$$= \Pi_{k\ell} = 2\sqrt{P_k P_\ell} \quad (4.111)$$

résultat à partir duquel il devient très simple d'extraire la puissance dans un mode en particulier :

$$P_k = \frac{\mathcal{I}_{k\ell}\mathcal{I}_{km}}{2\mathcal{I}_{\ell m}} \quad (4.112)$$

Par analogie avec les enveloppes de champ, on peut traiter les modes un peu dans n'importe quel ordre et cela ne devrait avoir aucune importance. Cependant,

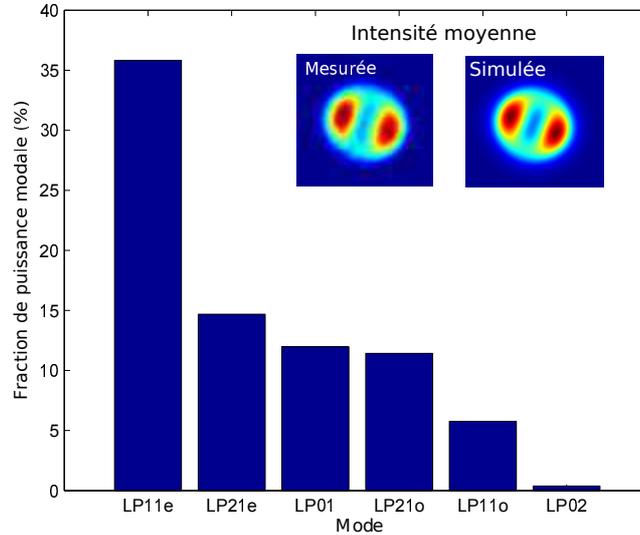


FIGURE 4.30 – Distribution de puissance dans les modes. En encart, on voit (à gauche) la figure d’intensité moyenne extraite de la mesure puis (à droite) une reconstruction à partir des profils de mode théorique de la fibre pondérés par la distribution de puissance mesurée. On constate que la reconstruction est très fidèle aux données expérimentales et que, comme prévu, la puissance est largement distribuée sur tous les modes; il n’y a donc pas de mode nettement dominant.

il est parfois souhaitable d’isoler les modes faisant partie des battements de plus forte amplitude dans le but de minimiser l’incertitude grâce à leur meilleur rapport signal sur bruit, l’erreur se propageant autrement à tous les autres modes.

Puisque nous avons maintenant l’information sur tous les modes et tous les battements dans notre mesure, on peut désormais appliquer l’équation (4.112) pour récupérer tous les coefficients de puissance. La figure 4.30 montre la répartition de puissance entre les modes ainsi obtenue à partir des battements de la figure 4.29; on peut constater que le plus excité est le  $LP_{11p}$  (avec un peu plus de 35 % de la puissance totale) et que la puissance distribuée dans les quatre modes suivants varie entre 5 et 15 % environ. Le mode le moins excité est le mode  $LP_{02}$  avec moins de 1 % de la puissance. En encart de la figure, on peut également voir l’image du terme d’intensité moyenne expérimental,  $\bar{I}(x, y)$  (à gauche), puis une reconstruction de ce terme d’intensité à partir de la distribution de puissance extraite des données et des solutions analytique des champs (à droite). On note que la reconstruction est très fidèle à l’image moyenne expérimentale. De même, il est important de mentionner que, malgré le fait que nous nous sommes mis expressément dans un cas où aucun mode n’est fortement dominant (i.e.  $P_k < 90\%, \forall k$ ) et que nous l’avons démontré expérimentalement par la mesure de la distribution de puissance, notre analyse a tout de même permis d’isoler toutes les informations de l’interféromètre avec succès tout en mettant en évidence le caractère vectoriel de certains battements.

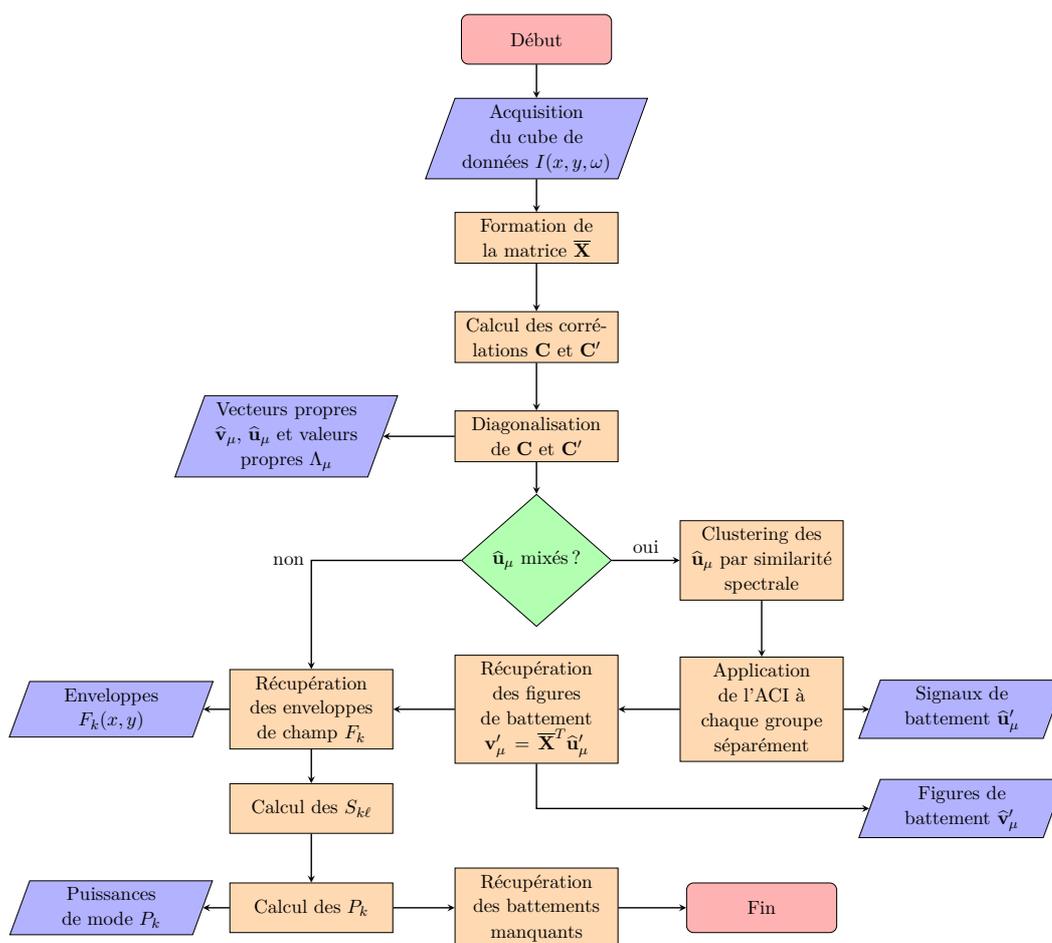


FIGURE 4.31 – Algorithme de résolution des battements par la méthode présentée dans ce chapitre.

## 4.9 Discussion et perspectives

Dans les sections qui ont précédé, nous avons systématiquement séparé toutes les composantes de tous les battements d'une fibre supportant 12 modes (en incluant les polarisations) dans le cas d'excitation le plus général possible. Une représentation graphique de l'algorithme de la méthode est d'ailleurs illustré à la figure 4.31. La question se pose maintenant à savoir quelles sont les caractéristiques du jeu de données qui peuvent permettre de reconstruire l'entièreté des informations sur le contenu modal de la fibre ainsi que les informations sur les différents battements. De façon très générale, on peut représenter les termes de battements dans un espace tel que celui illustré à la figure 4.32. Les termes qui sont décorrélés spatialement *et* spectralement à tous les autres (et donc, séparables par ACP) sont dans la zone en blanc ; les zones vertes regroupent, de façon mutuellement exclusive, les termes corrélés spatialement ou spectralement à au moins un autre terme et la zone en rouge indiquent les termes qui sont corrélés spatialement *et* spectralement à au moins un autre terme.

On peut expliquer assez simplement les conditions nécessaires pour pouvoir séparer tous les termes de l'interféromètre à partir de ce diagramme et en se basant sur la méthode décrite récupérer les coefficients d'amplitude de battement à l'équation (4.106). Prenons pour commencer les solutions qui sont dans l'espace «extérieur» de la figure 4.32 : celles-ci sont orthogonales spectralement et spatialement à toutes les autres ; elles sont ainsi séparées dès l'application de l'ACP. Tous les autres termes se retrouvent soit dans une zone verte, soit dans une zone rouge. Les solutions de la zone verte sont celles que l'on obtient après application de l'ACI et sont corrélées exclusivement spectralement ou spatialement avec au moins un autre terme. Or, que cela signifie-t-il sur le plan de l'équation (4.106) ? La question qu'on se pose vraiment ici est « quel est le critère qui me permette de déterminer l'amplitude d'un terme de battement de façon *unique* » ? La réponse est simple : si un terme est corrélé spectralement avec un autre, il doit absolument être orthogonal spatialement avec lui et inversement. Par exemple, les deux interférences  $LP_{01}$   $LP_{11}$  sont corrélées spectralement (pratiquement dégénérées en différence de délai de groupe) mais sont orthogonales spatialement. Or, ces mêmes battements sont corrélés spatialement avec les interférences  $LP_{11}$   $LP_{21}$  par exemple, mais dans ce cas-là, elles sont décorrélées spectralement (différents  $\tau_{k\ell}$ ). Ainsi, la projection du jeu de données sur le spectre correspondant au battement  $LP_{11p}$  évacuera tous les autres termes ayant des  $\tau_{k\ell}$ , retirant des termes restants tous ceux qui sont spatialement corrélés à la figure de battement  $LP_{01}$   $LP_{11p}$ , laissant ultimement uniquement deux termes dans l'expression, soit celui que l'on cherche à isoler ( $LP_{01}$   $LP_{11p}$ ) et celui qui est spectralement dégénéré  $LP_{01}$   $LP_{11i}$ . Or, si on projette maintenant ces deux termes sur la figure de battement  $LP_{01}$   $LP_{11p}$ , le terme impair sera orthogonal et on aura avec succès récupéré un coefficient d'amplitude unique. Toutefois, si on imagine que les termes restants étaient corrélés spatialement, la projection spatiale demeurerait une combinaison linéaire de deux coefficients d'amplitude. Pour arriver à les séparer, on devrait fournir au système de l'information additionnelle nous

permettant d'inverser l'orthogonalisation effectuées par nos techniques de reconstruction. En effet, une orthogonalisation est par définition irréversible (le retrait de la projection d'un vecteur sur l'autre engendrant une perte d'information sur leur colinéarité initiale) et le seule moyen d'inverser le processus est de connaître la projection par un autre moyen.

Ce critère très stricte d'orthogonalité « douce<sup>10</sup> » entre les termes (soit spectrale ou spatiale mais au moins une des deux) s'applique seulement à la détermination unique des coefficients d'amplitude des termes de battement. Dans les faits, ce critère est très strict et le système est en fait bien plus tolérant car, comme nous l'avons vu, le nombre de battements est bien plus important que le nombre de modes que nous cherchons à isoler. De plus, un fait intéressant à remarquer est que la corrélation spatiale entre figures de battement est en fait un indicateur, si l'accord de phase existe, qu'il est possible d'effectuer du mélange à quatre ondes entre les modes mis en jeu. En effet, la corrélation spatiale entre figures de battements implique que l'équation (4.53) est non-nulle, et le facteur de mélange à quatre ondes  $f_{ijkl}$  est précisément proportionnel à cette intégrale. Il est aussi important de noter que les équations développées ici sont générales et n'ont comme seule prémisses que les battements doivent démontrer une orthogonalité soit spectrale ou spatiale avec tous les autres. Par exemple, le couplage ou les fluctuations de dispersion qui pourraient donner spectralement des distributions plutôt que des pics distincts n'empêcherait pas d'extraire les différents battements à condition que ceux-ci soient orthogonaux aux autres termes dans au moins un des deux espaces.

Pour résumer, nous avons développé une méthode d'analyse des données  $S^2$  qui permet d'isoler les battements individuellement spectralement et spatialement, et ce de façon automatique, et dans des cas généraux d'injection. En effet, l'hypothèse sous-jacente du  $S^2$  standard quant à l'opération quasi-monomode n'est absolument plus nécessaire pour ce type d'analyse. Aussi, l'extraction des figures de battements et spectres de battement permet d'échapper au côté arbitraire de la définition des filtres de Fourier pour déterminer l'amplitude des pics (et pouvant conduire à des interprétations erronées). De plus, la méthode proposée permet de séparer des battements dégénérés, même spectralement, ce qui est impossible à faire avec l'analyse habituelle. Enfin, la quantité d'information qui puisse être extraite des jeux de données est souvent largement supérieure à la quantité d'information que l'on cherche à isoler ; alors même dans les cas où l'on est en présence de dégénérescences, il est bien souvent possible d'extraire les enveloppes de champ et la distribution de puissance dans chaque modes, les seuls cas problématiques étant ceux qui sont trop fortement dégénérés (cas des fibres multimodes fortement couplées par exemple).

Les méthodes employées ici pour la séparation aveugle des sources sont généralement employées dans la construction automatique de modèles et on pourrait penser qu'avec un minimum de règles d'analyse et de regroupement, il serait possible d'implémenter un algorithme permettant de reconstruire automatiquement la dispersion

---

10. On entend ici que l'orthogonalité doit être spectrale *ou* spatiale, sans toutefois l'être sur les deux plans simultanément.

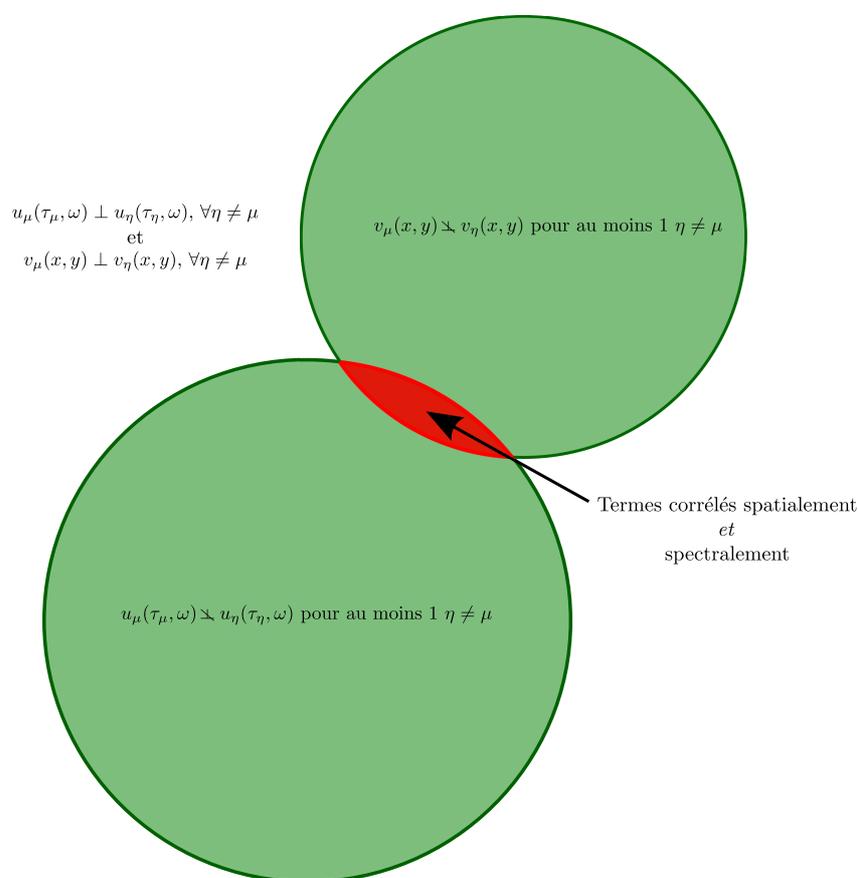


FIGURE 4.32 – Représentation en ensembles des différents termes de battement d'un interféromètre, classés par orthogonalité avec les autres solutions. Dans la zone en blanc, les termes ne sont corrélés ni spectralement ni spatialement avec aucun des autres termes. Dans les ensembles en vert, les termes sont corrélés à d'autres soit exclusivement spatialement ou spectralement. La zone en rouge regroupe les termes qui sont à la fois corrélés spectralement et spatialement à d'autres termes.

d'une fibre arbitraire sans aucune connaissance préalable de ses propriétés.



# Conclusion et perspective

---

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons travaillé sur la génération d'UV dans les fibres hybrides et microstructurées ainsi que sur une méthode de caractérisation de contenu modal dans les fibres multimodes.

En premier lieu, nous avons étudié la génération d'UV dans une fibre hybride microstructurée et l'absence de gain notable nous a poussés à nous pencher sur l'impact des fluctuations des propriétés de dispersion sur le gain. En particulier, nous avons développé une théorie très générale permettant de prendre en compte les fluctuations stochastiques de plusieurs paramètres, comme la fluctuation de l'échelle, la taille des trous ainsi que la variation de la tension de fibrage le long de la fibre pour déterminer l'espérance du gain en fonction des caractéristiques de ces fluctuations. Cette étude nous a permis de vérifier que les points d'invariance de l'accord de phase par rapport aux fluctuations d'échelle présentent le potentiel d'offrir un gain maximum, même à très grand espacement en fréquence entre les composants du mélange à quatre ondes. Des fibres ont été fabriquées pour vérifier cette propriété, cependant ces points n'ont pas été observés, soit parce que le pas de la structure était mal ajusté ou alors parce que d'autres fluctuations de la dispersion présentes étaient dominantes par rapport à celles de l'échelle globale, annulant ainsi l'avantage de l'invariance.

Cependant, ces fibres nous ont permis de constater la présence d'un autre type d'accord de phase pour une pompe distribuée sur deux modes dont le signal dans l'UV est dans le mode fondamental et l'idler dans le mode d'ordre supérieur pour une pompe à 532 nm. Une nouvelle fibre a alors été tirée pour pousser la longueur d'onde générée dans le mode fondamental à 390.5 nm, plus basse longueur d'onde discrète générée dans ce mode pour du mélange à quatre ondes à 532 nm, et ce, avec des tailles de cœurs comparables à celles des fibres les plus récentes produisant de l'UV dans un mode d'ordre supérieur. En complément, le fait d'opérer dans le mode fondamental augmente d'environ un ordre de grandeur l'efficacité de focalisation et d'un facteur trois la résolution optimale que l'on peut espérer obtenir par rapport à l'état de l'art. Nous avons également proposé une méthode de fabrication de fibres à dispersion oscillante avec des pas millimétriques susceptibles de générer des quasi-accords de phases très loin de la pompe, des essais de fabrication étant en cours de réalisation. Rappelons toutefois que le verrou technologique majeur que nous avons rencontré concerne le dommage du matériau, probablement dû à l'absorption multi-photon au niveau de la pompe, causant des problèmes similaires au photo-noircissement et causant une diminution du gain. Une étude approfondie est cependant nécessaire pour bien identifier les mécanismes mis en jeu dans le but

de les éliminer. Une piste possible serait déjà d'évaluer l'utilisation de verres ayant des compositions différentes permettant d'inhiber la création desdits défauts.

Une méthode a également été élaborée permettant de caractériser le contenu modal, applicable à n'importe quelle fibre multimode, sans contraintes sur l'excitation et sans hypothèses ou informations supplémentaires quant au contenu modal de la fibre. Cette méthode puissante, basée sur l'analyse statistique multivariée, surpasse toutes les méthodes d'analyse rapportées jusqu'à maintenant et pourrait permettre de caractériser des fibres inconnues, de façon quasi-automatique, sans aucune information préalable ou mode particulièrement dominant, le tout en utilisant un montage très simple. Cette méthode pourrait en particulier être utilisée pour caractériser des effets non-linéaires (comme le mélange à quatre ondes), le couplage entre modes, la dispersion des indices de groupe ainsi que la levée de dégénérescence des modes vectoriels près des coupures.

Pour terminer, rappelons l'importance d'explorer les possibilités de la génération d'UV dans les fibres de silice. L'utilisation de systèmes fibrés, compacts et robustes dans les applications industrielles et biomédicales serait certainement un atout pour le développement de systèmes plus performants. La technologie présentée ici est prometteuse car elle permettrait éventuellement d'élaborer une solution toute fibrée pour générer des UV avec une qualité de faisceau exceptionnelle ainsi qu'une efficacité comparable aux designs de fibres de l'état de l'art opérant sur les mêmes phénomènes physiques, le tout à coût modeste étant donné la simplicité du design. Cette nouvelle vision de la génération d'UV, présentée dans le cadre de ce travail de thèse, constitue certainement une plateforme de développement et un levier très intéressant pour l'expansion de l'utilisation des fibres dans la génération de sources cohérentes UV.

# Point de stabilité

---

Nous développerons ici certains détails ayant trait au point de stabilité, sur le plan général.

## A.1 Condition générale de stabilité

Une formulation permettant d'analyser les accords de phase ainsi que l'impact de perturbations à la dispersion est de travailler dans un espace vectoriel, en observant la relation entre deux vecteurs, soit  $\mathfrak{B} = [\beta_2, \beta_4/12, \beta_6/360, \dots, 2\beta_n/n!]^T$  et  $\mathfrak{W} = [1, \Omega^2, \Omega^4, \dots, \Omega^{n-2}]^T$ . Dans ces conditions, l'accord de phase s'écrit comme un produit scalaire :

$$\Delta k = \mathfrak{B} \bullet \mathfrak{W}. \quad (\text{A.1})$$

Il convient de normaliser ces vecteurs pour faciliter le travail ou la visualisation. Egalement, exprimer les fréquences dans une échelle appropriée permet de supprimer le décalage entre les ordres de grandeur des  $\beta_i$  et rend le processus plus stable numériquement. On note que la condition d'accord de phase survient lorsque  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{W}$  sont orthogonaux. Ainsi, si on définit un espace vectoriel  $\Omega$  défini par une droite orientée selon le vecteur  $\mathfrak{W}$ , alors il y a accord de phase si la dispersion  $\mathfrak{B}$  se trouve dans le complément orthogonal de  $\Omega$ , noté  $\Omega^\perp$ . Observons maintenant ce qui se produit si on applique une perturbation à  $\mathfrak{B}$  :

$$\Delta k = \left( \mathfrak{B} + \left. \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} \right|_{X_0} \Delta X \right) \bullet \mathfrak{W} \quad (\text{A.2})$$

Si on se place à l'accord de phase,  $\mathfrak{B} \bullet \mathfrak{W} = 0$ . Aussi, si on considère la perturbation non-nulle ( $\Delta X \neq 0$ ) et qu'on cherche le point où l'on est toujours à l'accord de phase, il faut que soit  $\partial \mathfrak{B} / \partial X = 0$  en  $X = X_0$  ou alors que :

$$\left. \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} \right|_{X_0} \bullet \mathfrak{W} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Autrement dit, il faut que la condition  $\partial \mathfrak{B} / \partial X \in \Omega^\perp$  soit remplie. Il est difficile de trouver le cas général de stabilité, mais on peut le trouver en fonction de l'ordre maximal de dispersion que l'on veut considérer. Dans le cas qui nous intéresse, il est suffisant que de garder jusqu'à l'ordre 6 de dispersion, ce qui fait que tout le problème est à trois dimensions et qu'on peut le visualiser, tel qu'illustré à la figure A.1.

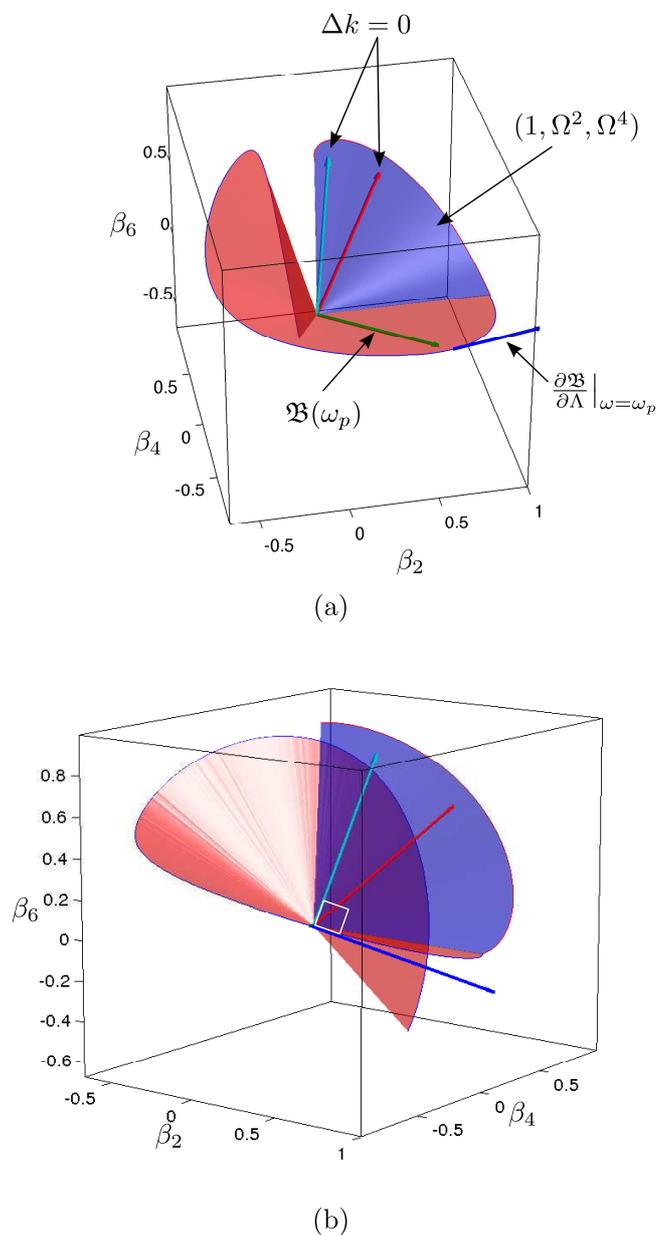


FIGURE A.1 – Illustration de la dispersion (rouge) et de la surface donnée par  $[1, \Omega^2, \Omega^4]^T$  (bleu); (a) Le vecteur vert indique le vecteur de la dispersion à la pompe, les vecteurs cyan et rouge indiquent les deux racines et le vecteur bleu indique la direction de la dérivée de la dispersion à la pompe par rapport au pas; (b) Illustration de l'orthogonalité de la transformation de la dispersion avec l'accord de phase au point stable (cyan).

Ainsi, dans un problème qui serait limité à deux dimensions, la seule transformation permettant d'avoir un point de stabilité est une mise à l'échelle de la dispersion, c'est à dire :

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} = a \mathfrak{B} \quad (\text{A.4})$$

où  $a$  est un scalaire. Dans le cas d'un problème à trois dimensions (i.e. jusqu'à  $\beta_6$ ), on peut avoir une combinaison d'une mise à l'échelle et d'une rotation autour de la solution  $\mathfrak{W}$ , ce qui assurera que la variation de la dispersion (et donc, la nouvelle dispersion) demeurera dans le complément orthogonal de  $\mathfrak{W}$ . De façon générale, pour une transformation quelconque de la dispersion  $T(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$  pour laquelle on peut définir une variation infinitésimale autour de la dispersion initiale,  $\vec{\delta}T(\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}$ , tant que cette variation est orthogonale à la solution  $\mathfrak{W}$ , cet accord de phase sera invariant à la transformation  $T$  :

$$\vec{\delta}T(\mathfrak{B}) \bullet \mathfrak{W} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Ainsi, toutes perturbations peuvent être modélisées de manière différentielle pour déterminer s'il existe ou non une condition de stabilité en observant si la transformation demeure dans le complément orthogonal de la solution  $\mathfrak{B} \bullet \mathfrak{W} = 0$ . Bien que cette forme générale ne sera pas exploitée ici, le résultat est néanmoins intéressant, en particulier pour des perturbations complexes, comme des cisaillements de la section transverse de la fibre par exemple.



# Réseaux long pas en régime non-linéaire par chauffage CO<sub>2</sub>

---

## B.1 Modélisation du chauffage

Selon l'équation de la chaleur[100] :

$$\frac{\partial T(r, \phi, z, t)}{\partial t} = D \nabla^2 T(r, \phi, z, t) + \frac{P(r, \phi, z, t)}{\rho C_p} \quad (\text{B.1})$$

où  $D$  est la diffusivité thermique dans le matériau (que nous considérerons constante), et étant donné la condition de transfert de chaleur à la frontière dans le plan transverse, nous chercherons une solution de la forme  $T(r, \phi, z, t) = F(r, \phi) \Theta(z, t)$ . Nous allons également effectuer une transformation de Laplace sur le temps  $t$  et de Fourier sur  $z$ . On peut également noter que la composante transverse du laplacien nous donne l'équation de Bessel et nous obtenons que (les fonctions en cosinus seulement étant considérées pour simplifier, ce qu'on considère possible pour des raisons de symétrie) :

$$F(r, \phi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} J_{\mu}(b_{\mu\nu} r) \cos(\mu\phi) \quad (\text{B.2})$$

où les  $J_{\mu}(x)$  sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $\mu$ . Les coefficients  $b_{\mu\nu}$  peuvent être trouvés à l'aide de la condition de transfert de chaleur à l'interface, qui donne :

$$\rho C_p D b_{\mu\nu} J'_{\mu}(b_{\mu\nu} R_f) + h J_{\mu}(b_{\mu\nu} R_f) = 0 \quad (\text{B.3})$$

où  $\rho$ ,  $C_p$ ,  $R_f$  et  $h$  sont respectivement la densité, la chaleur massique, le rayon de la fibre et le coefficient de transfert thermique. En substituant dans l'équation (B.1) et, notant que les fonctions  $J_{\mu}(x)$  sont des fonctions propres de l'opérateur  $\nabla^2$ , on obtient :

$$s \tilde{\Theta}(\kappa, s) - \tilde{\Theta}(\kappa, 0) = -D(b_{\mu\nu}^2 + \kappa^2) \tilde{\Theta}(\kappa, s) + \frac{\tilde{P}(r, \phi, \kappa, s)}{\rho C_p} \quad (\text{B.4})$$

le tilde «  $\tilde{\cdot}$  » indiquant la transformation de Fourier sur  $z$  (dont la variable conjuguée est  $\kappa$ ) et l'accent circonflexe «  $\hat{\cdot}$  » dénotant la transformation de Laplace sur le temps. La condition initiale  $\tilde{\Theta}(\kappa, 0)$  est considérée nulle. On peut donc solutionner dans le temps aisément pour trouver :

$$\tilde{\Theta}(\kappa, t) = \int_0^{\infty} \exp[-D(b_{\mu\nu}^2 + \kappa^2)(t - \tau)] \frac{\tilde{P}(r, \phi, \kappa, \tau)}{\rho C_p} d\tau \quad (\text{B.5})$$

Par la transformée de Fourier inverse, on trouve :

$$\Theta(z, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \exp \left[ - \left( \frac{z^2}{4D(t-\tau)} + Db_{\mu\nu}^2(t-\tau) \right) \right] * \frac{P(r, \phi, z, \tau)}{\rho C_p} d\tau \quad (\text{B.6})$$

où « \* » dénote le produit de convolution. Si on prend comme distribution de température initiale la chaleur générée par un faisceau gaussien de waist  $w$  beaucoup plus grand que le diamètre de la fibre, (i.e.  $w \gg 2R_f$ ), on peut exprimer la source de chaleur par :

$$P(r, \phi, z, t) = \alpha I_0 \Pi(r, \phi) \exp \left( - \frac{2(z - v_f t)^2}{w^2} \right) \quad (\text{B.7})$$

où  $v_f$  est la vitesse de tirage de la fibre (en considérant le faisceau fixe),  $\alpha$  est le coefficient d'absorption,  $\Pi(r, \phi)$  est le profil transverse (par rapport à l'axe de la fibre) d'intensité normalisée du laser dans le matériau et  $I_0$  est l'intensité maximale. On peut donc écrire la solution complète :

$$\Theta(z, t) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\alpha I_0 \sqrt{w^2/2}}{\rho C_p \sqrt{4D(t-\tau) + w^2/2}} \times \exp \left[ - \left( \frac{(z - v_f \tau)^2}{4D(t-\tau) + w^2/2} + Db_{\mu\nu}^2(t-\tau) \right) \right] \right\} d\tau \quad (\text{B.8})$$

Les coefficients de la série de Fourier-Bessel sont donnés par :

$$a_{\mu\nu} = \left( \frac{2}{\pi R_f^2} \right) \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_f} \Pi(r, \phi) J_{\mu}(b_{\mu\nu} r) \cos(\mu\phi) r dr d\phi}{J_{\mu}^2(b_{\mu\nu} R_f) - J_{\mu+1}(b_{\mu\nu} R_f) J_{\mu-1}(b_{\mu\nu} R_f)} \quad (\text{B.9})$$

et  $I_0$  est donné par :

$$I_0 = \frac{4P_{\text{CO}_2}}{\pi w^2} \quad (\text{B.10})$$

## B.2 Cas d'une fibre de silice

Dans le cas d'une fibre de silice de 125 microns de diamètre, les différentes constantes physiques du problème peuvent être trouvées dans le tableau B.1. Nous allons aussi considérer une géométrie particulière du problème, dont les paramètres sont colligés au tableau B.2. Nous considérerons que la fibre défile à faible vitesse et que le laser est opéré par un obturateur laissant passer le faisceau pendant un temps  $\tau_p$ , devenant ainsi la borne supérieure de l'intégrale de convolution sur le temps.

On peut calculer le nombre de Biot du système,  $\text{Bi} = 2hR_f/4\rho C_p D = 2.5 \times 10^{-6} \ll 0.1$  nous indiquant ainsi que les gradients thermiques devraient pouvoir être négligés sur la section transverse, ce que nous vérifierons dans la prochaine section.

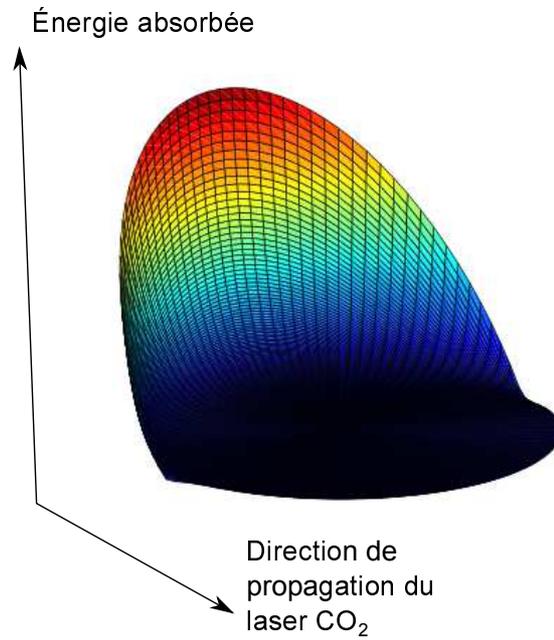


FIGURE B.1 – Exemple de profil transverse de source de chaleur volumique  $\Pi(r, \phi)$  pour le laser CO<sub>2</sub>.

Paramètre	Valeur	Unités
$\alpha$	$4\pi \times 10^5$	$\text{m}^{-1}$
$\rho$	2200	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$C_p$	730	$\text{J}\cdot(\text{kg}\cdot\text{K})^{-1}$
$D$	$1.5567 \times 10^{-5}$	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
$h$	300	$\text{W}\cdot(\text{m}^2\cdot\text{K})^{-1}$

TABLE B.1 – Constantes physiques utiles de la silice

Paramètre	Valeur	Unités
$w$	600	$\mu\text{m}$
$P_{\text{CO}_2}$	3.5	W
$R_f$	62.5	$\mu\text{m}$
$\tau_p$	0.12	s
$v_f$	0.1	m/s

TABLE B.2 – Paramètres de géométrie du problème

$\mu \downarrow, \nu \rightarrow$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>0</b>	0.23952	2.4464e-05	7.2982e-06	3.4707e-06	2.0235e-06
<b>1</b>	0.0001059	1.2637e-05	4.9296e-06	2.6214e-06	1.626e-06
<b>2</b>	3.8497e-05	7.9873e-06	3.6142e-06	2.0709e-06	1.3442e-06
<b>3</b>	2.0349e-05	5.5913e-06	2.7904e-06	1.6885e-06	1.1352e-06
<b>4</b>	1.2702e-05	4.169e-06	2.2335e-06	1.4095e-06	9.7484e-07

TABLE B.3 – Exemple de temps caractéristiques  $\tau_{\mu\nu}$  (en secondes) pour les différentes fonctions de Bessel pour une fibre ayant les propriétés et la géométrie données aux tableaux B.1 et B.2

### B.3 Dynamique de chauffe

Les temps caractéristiques de thermalisation de la fibre doivent être étudiés pour comprendre les mécanismes dominants et les différentes échelles de temps en jeux. Pour ce faire, notons les deux mécanismes de thermalisation principaux : la dissipation thermique le long de la fibre par diffusion et le refroidissement à travers la surface de contact air-verre par convection. En ce qui concerne la dissipation thermique par diffusion le long de la fibre, on peut définir le temps caractéristique associé par le temps pris pour que l'écart-type de la gaussienne de température augmente d'un facteur  $\sqrt{2}$  :

$$\tau_z = \frac{w^2}{4D} \tag{B.11}$$

qui, dans notre cas, donne  $\tau_z = 23.1$  ms. En ce qui concerne les temps caractéristiques sur la section transverse, ils sont donnés par  $\tau_{\mu\nu} = (Db_{\mu\nu}^2)^{-1}$  et sont colligés au tableau B.3. En observant bien les valeurs, on se rend compte que le temps le plus lent est  $\tau_{01}$ , qui est environ un ordre de grandeur supérieur à  $\tau_z$  qui lui-même est au moins supérieur de deux ordres de grandeur à  $\tau_{11}$ , le second plus grand temps du tableau B.3. Tous les autres temps sont très courts, soit trois ordres de grandeur ou plus sous  $\tau_z$ . Ces relations nous indiquent quels parties de l'équation (B.8) dominera dans l'intégrale. En particulier, si  $\tau_p > \tau_z$ , on peut poser l'approximation suivante :

$$\exp[-Db_{\mu\nu}^2(t - \tau)] \approx \tau_{\mu\nu}\delta(t - \tau), \quad \mu, \nu \neq 0, 1 \tag{B.12}$$

Ainsi, en intégrant l'équation (B.8) et en supposant un pulse centré ( $v_f = 0$ ), on trouve que pour toutes les solutions  $\mu, \nu \neq 0, 1$ , on a :

$$\Theta(z, t) = \begin{cases} \left( \frac{\tau_{\mu\nu}\alpha I_0}{\rho C_p} \right) \exp\left(-\frac{2z^2}{w^2}\right) & , \quad t \leq \tau_p \\ 0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{B.13}$$

Ceci nous indique que les mécanismes qui domineront donc le processus de thermalisation sont liés aux temps caractéristiques  $\tau_z$  et  $\tau_{01}$  uniquement, puisque la quantité d'énergie emmagasinable dans les hautes fréquences spatiales est au maximum proportionnelle à son temps caractéristique et deviendra vite négligeable par rapport au premier terme, comme nous le montre la figure B.2. On constate également que,

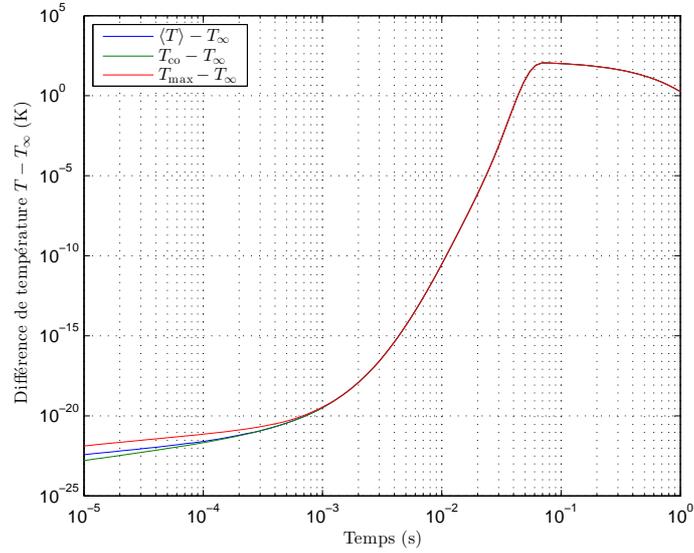


FIGURE B.2 – Dynamique de chauffe en fonction du temps sur une grande plage de temps pour les paramètres présentés aux tableaux B.1 et B.2. On note la disparition rapide des fréquences spatiales élevées, le problème devenant essentiellement ainsi un problème à une dimension. Ici,  $\langle T \rangle$  représente la température moyenne sur la section transverse,  $T_{co}$  représente la température au centre de la section transverse,  $T_{max}$  représente la température du point le plus chaud de cette même section et  $T_\infty$  représente la température du bain thermique (milieu extérieur).

sous ces conditions, le mécanisme est aussi essentiellement dominé par la convection au centre de la zone, comme nous le montre la figure B.3.

## B.4 Résultats expérimentaux préliminaires

Des tests préliminaires ont été faits après installation du laser  $CO_2$  est des optiques sur la tour de fibrage. La fibre était tirée en régime continu à une vitesse de  $2.15 \text{ m s}^{-1}$ , la puissance du laser utilisée était 10 W et la durée des créneaux  $\tau_p$  de 29 ms. On peut effectivement remarquer une modification au niveau de la microstructure, comme le montre la figure B.4.

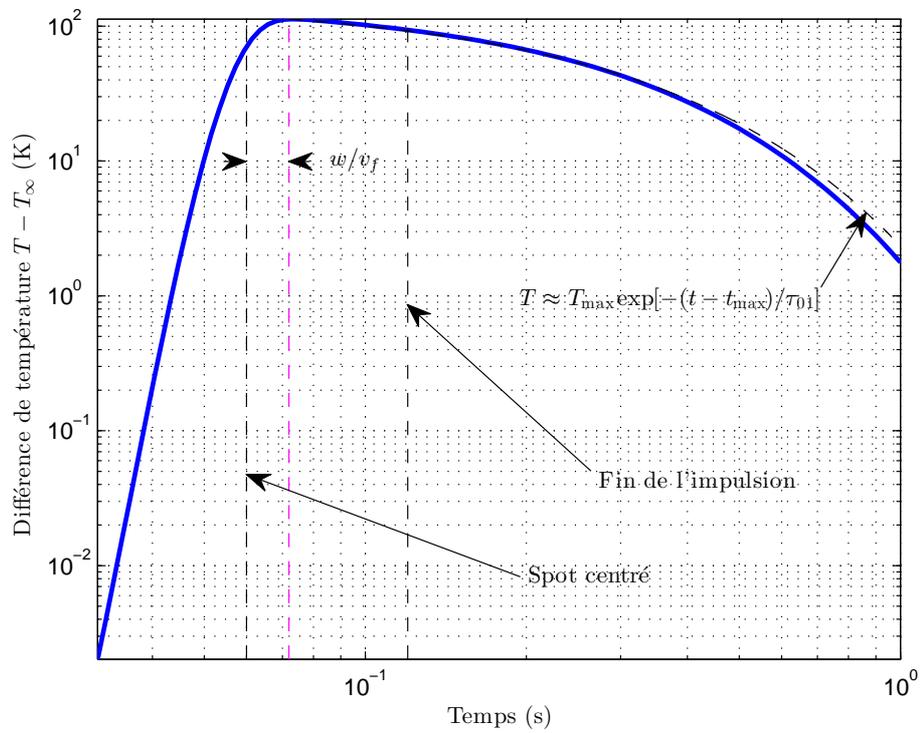


FIGURE B.3 – Dynamique principale de chauffe illustrant le caractère dominant de la convection comme mécanisme de refroidissement au centre de la zone irradiée.

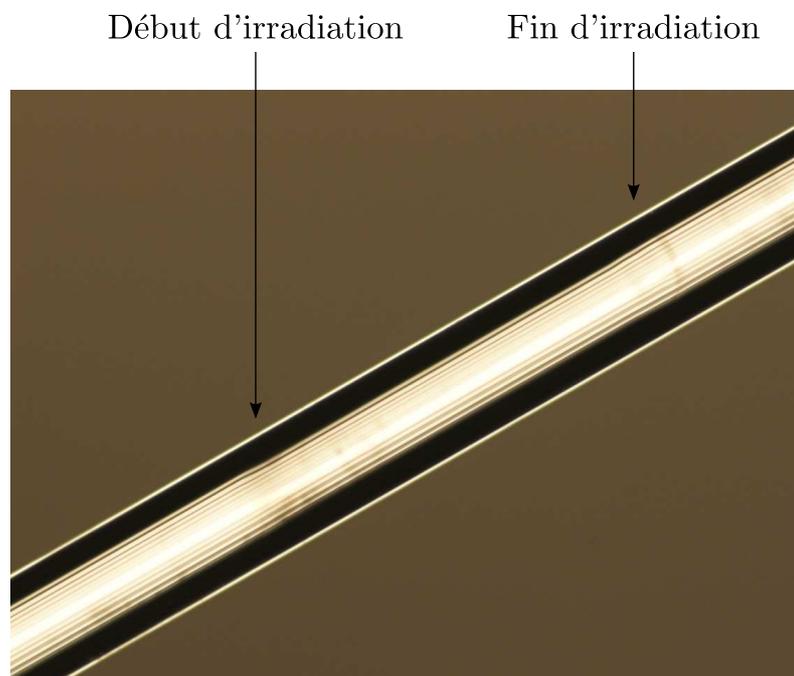


FIGURE B.4 – Irradiation périodique d'une fibre de diamètre externe  $\phi = 250 \mu\text{m}$  par laser  $\text{CO}_2$  pour obtenir des crénaux de 1 mm. L'irradiation ici a permis de changer la dimension des trous d'une valeur allant jusqu'à 10 % et la taille globale de la structure d'environ 5 %.



# Bibliographie

- [1] T.A. BIRKS, P.J. ROBERTS, P.S.J. RUSSELL, D.M. ATKIN et T.J. SHEPHERD. « Full 2-D photonic bandgaps in silica/air structures ». In : *Electronics Letters* 31.22 (oct. 1995), p. 1941–1943. ISSN : 0013-5194. DOI : [10.1049/el:19951306](https://doi.org/10.1049/el:19951306).
- [2] J. C. KNIGHT, T. A. BIRKS, P. St. J. RUSSELL et D. M. ATKIN. « All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding ». In : *Opt. Lett.* 21.19 (oct. 1996), p. 1547–1549. DOI : [10.1364/OL.21.001547](https://doi.org/10.1364/OL.21.001547). URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-21-19-1547>.
- [3] Yacoub OULD-AGHA, Aurelie BÉTOURNÉ, Olivier VANVINCQ, Géraud BOUWMANS et Yves QUIQUEMPOIS. « Broadband bandgap guidance and mode filtering in radially hybrid photonic crystal fiber. ». In : *Opt. Express* 20.6 (2012), p. 6746–60. URL : <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/22418559>.
- [4] Y. CHEN, Z. CHEN, W. J. WADSWORTH et T. A. BIRKS. « Nonlinear optics in the LP<sub>02</sub> higher-order mode of a fiber ». In : *Opt. Express* 21.15 (juil. 2013), p. 17786–17799. DOI : [10.1364/OE.21.017786](https://doi.org/10.1364/OE.21.017786). URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-21-15-17786>.
- [5] Y. CHEN, W. J. WADSWORTH et T. A. BIRKS. « Ultraviolet four-wave mixing in the LP<sub>02</sub> fiber mode ». In : *Opt. Lett.* 38.19 (oct. 2013), p. 3747–3750. DOI : [10.1364/OL.38.003747](https://doi.org/10.1364/OL.38.003747). URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-38-19-3747>.
- [6] J.H.V. PRICE, T.M. MONRO, K. FURUSAWA, W. BELARDI, J.C. BAGGETT, S. COYLE, C. NETTI, J.J. BAUMBERG, R. PASCHOTTA et D.J. RICHARDSON. « UV generation in a pure-silica holey fiber ». English. In : *Applied Physics B* 77.2-3 (2003), p. 291–298. ISSN : 0946-2171. DOI : [10.1007/s00340-003-1174-y](https://doi.org/10.1007/s00340-003-1174-y). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-003-1174-y>.
- [7] Anatoly EFIMOV, Antoinette TAYLOR, Fiorenzo OMENETTO, Jonathan KNIGHT, William WADSWORTH et P. RUSSELL. « Nonlinear generation of very high-order UV modes in microstructured fibers ». In : *Opt. Express* 11.8 (avr. 2003), p. 910–918. DOI : [10.1364/OE.11.000910](https://doi.org/10.1364/OE.11.000910). URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-11-8-910>.
- [8] A. KUDLINSKI, A. K. GEORGE, J. C. KNIGHT, J. C. TRAVERS, A. B. RULKOV, S. V. POPOV et J. R. TAYLOR. « Zero-dispersion wavelength decreasing photonic crystal fibers for ultraviolet-extended supercontinuum generation ». In : *Opt. Express* 14.12 (juin 2006), p. 5715–5722. DOI : [10.1364/OE.14.005715](https://doi.org/10.1364/OE.14.005715). URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-14-12-5715>.

- [9] J. M. STONE et J. C. KNIGHT. « Visibly “white” light generation in uniform photonic crystal fiber using a microchip laser ». In : *Opt. Express* 16.4 (fév. 2008), p. 2670–2675. DOI : 10.1364/OE.16.002670. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-4-2670>.
- [10] S. P. STARK, A. PODLIPENSKY, N. Y. JOLY et P. St. J. RUSSELL. « Ultraviolet-enhanced supercontinuum generation in tapered photonic crystal fiber ». In : *J. Opt. Soc. Am. B* 27.3 (mar. 2010), p. 592–598. DOI : 10.1364/JOSAB.27.000592. URL : <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-27-3-592>.
- [11] N AKÖZBEK, S A TRUSHIN, A BALTUŠKA, W FUSS, E GOULIELMAKIS, K KOSMA, F KRAUSZ, S PANJA, M UIBERACKER, W E SCHMID, A BECKER, M SCALORA et M BLOEMER. « Extending the supercontinuum spectrum down to 200 nm with few-cycle pulses ». In : *New Journal of Physics* 8.9 (2006), p. 177. URL : <http://stacks.iop.org/1367-2630/8/i=9/a=177>.
- [12] C. LESVIGNE, V. COUDERC, A. TONELLO, P. LEPROUX, A. BARTHÉLÉMY, S. LACROIX, F. DRUON, P. BLANDIN, M. HANNA et P. GEORGES. « Visible supercontinuum generation controlled by intermodal four-wave mixing in microstructured fiber ». In : *Opt. Lett.* 32.15 (août 2007), p. 2173–2175. DOI : 10.1364/OL.32.002173. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-32-15-2173>.
- [13] T. SYLVESTRE, A. R. RAGUEH, M. W. LEE, B. STILLER, G. FANJOUX, B. BARVIAU, A. MUSSOT et A. KUDLINSKI. « Black-light continuum generation in a silica-core photonic crystal fiber ». In : *Opt. Lett.* 37.2 (jan. 2012), p. 130–132. DOI : 10.1364/OL.37.000130. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-37-2-130>.
- [14] John C. TRAVERS, Wonkeun CHANG, Johannes NOLD, Nicolas Y. JOLY et Philip St. J. RUSSELL. « Ultrafast nonlinear optics in gas-filled hollow-core photonic crystal fibers [Invited] ». In : *J. Opt. Soc. Am. B* 28.12 (déc. 2011), A11–A26. DOI : 10.1364/JOSAB.28.000A11. URL : <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-28-12-A11>.
- [15] Rogers H. STOLEN. « Phase-matched-stimulated four-photon mixing in silica-fiber waveguides ». In : *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 11.3 (mar. 1975), p. 100–103. ISSN : 0018-9197. DOI : 10.1109/JQE.1975.1068571.
- [16] R. H. STOLEN, J. E. BJORKHOLM et A. ASHKIN. « Phase-matched three-wave mixing in silica fiber optical waveguides ». In : *Appl. Phys. Lett.* 24.7 (1974), p. 308–310. DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.1655195>. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/24/7/10.1063/1.1655195>.

- [17] R. PINI, R. SALIMBENI, M. MATERA et Chinlon LIN. « Ultraviolet four-photon mixing in a multimode silica fiber Raman amplifier ». In : *Optics Communications* 47.3 (1983), p. 226–229. ISSN : 0030-4018. DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018\(83\)90123-2](http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018(83)90123-2). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401883901232>.
- [18] H TU, Z JIANG, D L MARKS et S a BOPPART. « Intermodal four-wave mixing from femtosecond pulse-pumped photonic crystal fiber. » In : *Appl. Phys. Lett.* 94.10 (mar. 2009), p. 101109. ISSN : 0003-6951. DOI : [10.1063/1.3094127](https://doi.org/10.1063/1.3094127). URL : <http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=2682756%5C&tool=pmcentrez%5C&rendertype=abstract>.
- [19] Ji CHENG, Martin E V PEDERSEN, Kriti CHARAN, Ke WANG, Chris XU, Lars GRÜNER-NIELSEN et Dan JAKOBSEN. « Intermodal four-wave mixing in a higher-order-mode fiber. » In : *Appl. Phys. Lett.* 101.16 (oct. 2012), p. 161106. ISSN : 0003-6951. DOI : [10.1063/1.4759038](https://doi.org/10.1063/1.4759038). URL : <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23152639>.
- [20] E. RÄIKKÖNEN, S.C. BUCHTER et M. KAIVOLA. « Generation of monochromatic visible light in microstructured optical fiber by nondegenerate four-wave mixing ». English. In : *Applied Physics B* 91.3-4 (2008), p. 461–465. ISSN : 0946-2171. DOI : [10.1007/s00340-008-3017-3](https://doi.org/10.1007/s00340-008-3017-3). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-008-3017-3>.
- [21] V. TOMBELAINE, P. LEPROUX, V. COUDERC et A. BARTHELEMY. « Visible Supercontinuum Generation in Holey Fibers by Dual-Wavelength Subnanosecond Pumping ». In : *IEEE Photon. Technol. Lett.* 18.23 (déc. 2006), p. 2466–2468. ISSN : 1041-1135. DOI : [10.1109/LPT.2006.886859](https://doi.org/10.1109/LPT.2006.886859).
- [22] J M STONE, W J WADSWORTH et J C KNIGHT. « 1064 nm laser-induced defects in pure SiO<sub>2</sub> fibers. » In : *Opt. Lett.* 38.15 (2013), p. 2717–9. ISSN : 1539-4794. DOI : [10.1364/OL.38.002717](https://doi.org/10.1364/OL.38.002717). URL : <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23903121>.
- [23] J. A. ARMSTRONG, N. BLOEMBERGEN, J. DUCUING et P. S. PERSHAN. « Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric ». In : *Phys. Rev.* 127 (6 sept. 1962), p. 1918–1939. DOI : [10.1103/PhysRev.127.1918](https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.1918). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.1918>.
- [24] H. PUELL et C. VIDAL. « Optimum conditions for nonresonant third harmonic generation ». In : *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 14.5 (mai 1978), p. 364–373. ISSN : 0018-9197. DOI : [10.1109/JQE.1978.1069790](https://doi.org/10.1109/JQE.1978.1069790).
- [25] Shahraam Afshar V., M. A. LOHE, Timothy LEE, Tanya M. MONRO et Neil G. R. BRODERICK. « Efficient third and one-third harmonic generation in nonlinear waveguides ». In : *Opt. Lett.* 38.3 (fév. 2013), p. 329–331. DOI : [10.1364/OL.38.000329](https://doi.org/10.1364/OL.38.000329). URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-38-3-329>.

- [26] J LÆGSGAARD. « Phase-matching conditions for single-pump parametric amplification in photonic crystal fibers ». In : *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 9.11 (nov. 2007), p. 1105–1112. ISSN : 1464-4258. DOI : [10.1088/1464-4258/9/11/023](https://doi.org/10.1088/1464-4258/9/11/023). URL : <http://stacks.iop.org/1464-4258/9/i=11/a=023?key=crossref.3dc898ca7df8a9a4e903089c96d26317>.
- [27] J W NICHOLSON, A D YABLON, S RAMACHANDRAN et S GHALMI. « Spatially and spectrally resolved imaging of modal content in large-mode-area fibers ». In : *Opt. Express* 16.10 (2008), p. 989–991.
- [28] D N SCHIMPF, R A BARANKOV et S RAMACHANDRAN. « Cross-correlated ( $C^2$ ) imaging of fiber and waveguide modes ». In : *Opt. Express* 19.14 (2011), p. 345–353.
- [29] Daniel FLAMM, Darryl NAIDOO, Christian SCHULZE et Andrew FORBES. « Mode analysis with a spatial light modulator as a correlation filter ». In : *Opt. Express* 37.13 (2012), p. 2478–2480.
- [30] Jean-Joseph MAX, Bertrand GAUVREAU, Benoit SÉVIGNY et Mathieu FAUCHER. « LMA fibers modal decomposition using image factor analysis ». In : *SPIE LASE*. International Society for Optics et Photonics. 2011, p. 79142M–79142M.
- [31] Guo-zhen YANG, Bi-zhen DONG, Ben-yuan GU, Jie-yao ZHUANG et Okan K. ERSOY. « Gerchberg–Saxton and Yang–Gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system: a comparison ». In : *Appl. Opt.* 33.2 (jan. 1994), p. 209–218. DOI : [10.1364/AO.33.000209](https://doi.org/10.1364/AO.33.000209). URL : <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-33-2-209>.
- [32] Robert BRÜNING, Philipp GELSZINNIS, Christian SCHULZE, Daniel FLAMM et Michael DUPARRÉ. « Comparative analysis of numerical methods for the mode analysis of laser beams ». In : *Appl. Opt.* 52.32 (nov. 2013), p. 7769–7777. DOI : [10.1364/AO.52.007769](https://doi.org/10.1364/AO.52.007769). URL : <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-52-32-7769>.
- [33] Daniel Beom Soo SOH, Johan NILSSON, Seungin BAEK, Christophe CODEMARD, Yoonchan JEONG et Valery PHILIPPOV. « Modal power decomposition of beam intensity profiles into linearly polarized modes of multimode optical fibers ». In : *J. Opt. Soc. Am. A* 21.7 (juil. 2004), p. 1241–1250. DOI : [10.1364/JOSAA.21.001241](https://doi.org/10.1364/JOSAA.21.001241). URL : <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-21-7-1241>.
- [34] A.W. SNYDER et J. LOVE. *Optical Waveguide Theory*. Science paperbacks. Springer, 1983. ISBN : 9780412099502. URL : [http://books.google.fr/books?id=gIQB%5C\\_hzB0SMC](http://books.google.fr/books?id=gIQB%5C_hzB0SMC).
- [35] Govind P. AGRAWAL. *Nonlinear Fiber Optics*. 4th. Academic Press, 2006, p. 552. ISBN : 978-0123695161.

- [36] T. A. BIRKS, J. C. KNIGHT et P. St.J. RUSSELL. « Endlessly single-mode photonic crystal fiber ». In : *Opt. Lett.* 22.13 (juil. 1997), p. 961–963. DOI : 10.1364/OL.22.000961. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-22-13-961>.
- [37] J. POTTAGE, David BIRD, T. HEDLEY, J. KNIGHT, T. BIRKS, P. RUSSELL et P. ROBERTS. « Robust photonic band gaps for hollow core guidance in PCF made from high index glass ». In : *Opt. Express* 11.22 (nov. 2003), p. 2854–2861. DOI : 10.1364/OE.11.002854. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-11-22-2854>.
- [38] R. F. CREGAN, B. J. MANGAN, J. C. KNIGHT, T. A. BIRKS, P. St. J. RUSSELL, P. J. ROBERTS et D. C. ALLAN. « Single-Mode Photonic Band Gap Guidance of Light in Air ». In : *Science* 285.5433 (1999), p. 1537–1539. DOI : 10.1126/science.285.5433.1537. eprint : <http://www.sciencemag.org/content/285/5433/1537.full.pdf>. URL : <http://www.sciencemag.org/content/285/5433/1537.abstract>.
- [39] A. ARGYROS, T. A. BIRKS, S. G. LEON-SAVAL, C. M. B. CORDEIRO, F. LUAN et P. St.J. RUSSELL. « Photonic bandgap with an index step of one percent ». In : *Opt. Express* 13.1 (jan. 2005), p. 309–314. DOI : 10.1364/OPEX.13.000309. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-1-309>.
- [40] G. BOUWMANS, L. BIGOT, Y. QUIQUEMPOIS, F. LOPEZ, L. PROVINO et M. DOUAY. « Fabrication and characterization of an all-solid 2D photonic bandgap fiber with a low-loss region (< 20 dB/km) around 1550 nm ». In : *Opt. Express* 13.21 (oct. 2005), p. 8452–8459. DOI : 10.1364/OPEX.13.008452. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-21-8452>.
- [41] Assaad BAZ, Laurent BIGOT, Géraud BOUWMANS et Yves QUIQUEMPOIS. « Single-Mode, Large Mode Area, Solid-Core Photonic BandGap Fiber With Hetero-Structured Cladding ». In : *J. Lightwave Technol.* 31.5 (mar. 2013), p. 830–835. URL : <http://jlt.osa.org/abstract.cfm?URI=jlt-31-5-830>.
- [42] G. D. MILLER, R. G. BATCHKO, W. M. TULLOCH, D. R. WEISE, M. M. FEJER et R. L. BYER. « 42%-efficient single-pass cw second-harmonic generation in periodically poled lithium niobate ». In : *Opt. Lett.* 22.24 (déc. 1997), p. 1834–1836. DOI : 10.1364/OL.22.001834. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-22-24-1834>.
- [43] D. TAVERNER, P. BRITTON, P. G. R. SMITH, D. J. RICHARDSON, G. W. ROSS et D. C. HANNA. « Highly efficient second-harmonic and sum-frequency generation of nanosecond pulses in a cascaded erbium-doped fiber:periodically poled lithium niobate source ». In : *Opt. Lett.* 23.3 (fév. 1998), p. 162–164. DOI : 10.1364/OL.23.000162. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-23-3-162>.

- [44] S. LEON-SAVAL, T. BIRKS, W. WADSWORTH, P. St. J. RUSSELL et M. MASON. « Supercontinuum generation in submicron fibre waveguides ». In : *Opt. Express* 12.13 (juin 2004), p. 2864–2869. DOI : [10.1364/OPEX.12.002864](https://doi.org/10.1364/OPEX.12.002864). URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-12-13-2864>.
- [45] A. L. BERKHOER et V. E. ZAKHAROV. « Self excitation of waves with different polarizations in nonlinear media ». In : *Sov. Phys. JETP* 31.3 (sept. 1970), p. 486.
- [46] S. G. MURDOCH, R. LEONHARDT et J. D. HARVEY. « Polarization modulation instability in weakly birefringent fibers ». In : *Opt. Lett.* 20.8 (avr. 1995), p. 866–868. DOI : [10.1364/OL.20.000866](https://doi.org/10.1364/OL.20.000866). URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-20-8-866>.
- [47] G. MILLOT, E. SEVE, S. WABNITZ et M. HAELTERMAN. « Observation of induced modulational polarization instabilities and pulse-train generation in the normal-dispersion regime of a birefringent optical fiber ». In : *J. Opt. Soc. Am. B* 15.4 (avr. 1998), p. 1266–1277. DOI : [10.1364/JOSAB.15.001266](https://doi.org/10.1364/JOSAB.15.001266). URL : <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-15-4-1266>.
- [48] P. KOCKAERT, M. HAELTERMAN, S. PITOIS et G. MILLOT. « Isotropic polarization modulational instability and domain walls in spun fibers ». In : *Applied Physics Letters* 75.19 (1999), p. 2873–2875. DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.125175>. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/75/19/10.1063/1.125175>.
- [49] Joshua E. ROTHENBERG. « Modulational instability for normal dispersion ». In : *Phys. Rev. A* 42 (1 juil. 1990), p. 682–685. DOI : [10.1103/PhysRevA.42.682](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.42.682). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.42.682>.
- [50] P.D. DRUMMOND, T.A.B. KENNEDY, J.M. DUDLEY, R. LEONHARDT et J.D. HARVEY. « Cross-phase modulational instability in high-bi-refractive-index fibers ». In : *Optics Communications* 78.2 (1990), p. 137–142. ISSN : 0030-4018. DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018\(90\)90110-F](http://dx.doi.org/10.1016/0030-4018(90)90110-F). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003040189090110F>.
- [51] Robert W. BOYD. *Nonlinear Optics, Third Edition*. 3rd. Academic Press, 2008. ISBN : 0123694701, 9780123694706.
- [52] Shahraam Afshar V. et Tanya M. MONRO. « A full vectorial model for pulse propagation in emerging waveguides with subwavelength structures part I: Kerr nonlinearity ». In : *Opt. Express* 17.4 (fév. 2009), p. 2298–2318. DOI : [10.1364/OE.17.002298](https://doi.org/10.1364/OE.17.002298). URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-4-2298>.
- [53] Magnus KARLSSON. « Four-wave mixing in fibers with randomly varying zero-dispersion wavelength ». In : *J. OSA B* 15.8 (1998), p. 2269–2275. URL : <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?%5C&id=35539>.

- [54] Athanasios PAPOULIS. *Probability, random variables, and stochastic processes*. Boston : McGraw-Hill, 2002. ISBN : 0072817259.
- [55] B. ØKSENDAL. *Stochastic differential equations (6th Ed.)* Universitext. Berlin : Springer, 2003, p. 360. ISBN : 3-540-04758-1.
- [56] Michiel HAZEWINDEL. *Encyclopaedia of mathematics : an updated and annotated translation of the Soviet "Mathematical encyclopaedia*. Dordrecht Boston Norwell, MA, U.S.A : Reidel Sold, distributed in the U.S.A. et Canada by Kluwer Academic Publishers, 1988. ISBN : 9781556080104.
- [57] Albert EINSTEIN. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Edited with notes by R. Fürth, Translated by A. D. Cowper. New York, NY, USA : Dover, 1956, p. vi + 122. ISBN : 0-486-60304-0.
- [58] Enrico BIBBONA, Gianna PANFILO et Patrizia TAVELLA. « The Ornstein-Uhlenbeck process as a model of a low pass filtered white noise ». In : *Metrologia* 45.6 (2008), S117. URL : <http://stacks.iop.org/0026-1394/45/i=6/a=S17>.
- [59] Henry STARK. *Probability and random processes with applications to signal processing*. Upper Saddle River, N.J : Prentice Hall, 2002. ISBN : 0130200719.
- [60] AD YABLON, MF YAN et P. WISK. « Refractive index perturbations in optical fibers resulting from frozen-in viscoelasticity ». In : *Appl. Phys. Lett.* 84.1 (2004), p. 19. ISSN : 00036951. DOI : 10.1063/1.1638883. URL : [http://link.aip.org/link/APPLAB/v84/i1/p19/s1%5C&Agg=doi%20http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs%5C\\_all.jsp?arnumber=4877568](http://link.aip.org/link/APPLAB/v84/i1/p19/s1%5C&Agg=doi%20http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs%5C_all.jsp?arnumber=4877568).
- [61] K. PROTASSOV. *Analyse statistique de données expérimentales*. Grenoble Sciences. EDP Sciences, 2012. ISBN : 9782759801138. URL : <https://books.google.fr/books?id=yW0H1TkVMZ4C>.
- [62] K INOUE. « Arrangement of fiber pieces for a wide wavelength conversion range by fiber four-wave mixing ». In : *Opt. Lett.* 19.16 (1994), p. 1189–1191. URL : <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?id=12480>.
- [63] Jesper LAEGSGAARD. « Mode profile dispersion in the generalized nonlinear Schrödinger equation ». In : *Opt. Express* 15.24 (nov. 2007), p. 16110–16123. DOI : 10.1364/OE.15.016110. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-15-24-16110>.
- [64] Johan HULT. « A Fourth-Order Runge–Kutta in the Interaction Picture Method for Simulating Supercontinuum Generation in Optical Fibers ». In : *J. Lightwave Technol.* 25.12 (déc. 2007), p. 3770–3775. URL : <http://jlt.osa.org/abstract.cfm?URI=jlt-25-12-3770>.
- [65] P. L. FRANÇOIS. « Nonlinear propagation of ultrashort pulses in optical fibers : total field formulation in the frequency domain ». In : *J. OSA B* 8.2 (1991), p. 276–293.

- [66] P. J. ROBERTS, F. COUNY, H. SABERT, B. J. MANGAN, D. P. WILLIAMS, L. FARR, M. W. MASON, A. TOMLINSON, T. A. BIRKS, J. C. KNIGHT et P. St.J. RUSSELL. « Ultimate low loss of hollow-core photonic crystal fibres ». In : *Opt. Express* 13.1 (jan. 2005), p. 236–244. DOI : 10.1364/OPEX.13.000236. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-1-236>.
- [67] Kunimasa SAITOH, Yukihiro TSUCHIDA, Masanori KOSHIBA et Niels Asger MORTENSEN. « Endlessly single-mode holey fibers: the influence of core design ». In : *Opt. Express* 13.26 (déc. 2005), p. 10833–10839. DOI : 10.1364/OPEX.13.010833. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-26-10833>.
- [68] James WEST, Charlene SMITH, Nicholas BORRELLI, Douglas ALLAN et Karl KOCH. « Surface modes in air-core photonic band-gap fibers ». In : *Opt. Express* 12.8 (avr. 2004), p. 1485–1496. DOI : 10.1364/OPEX.12.001485. URL : <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-12-8-1485>.
- [69] Benoit SEVIGNY. *Caractérisation des contraintes et déformations résiduelles dans les fibres optiques et composants tout-fibre*. T. 45. 05. 2007.
- [70] D. M. KROL, K. B. LYONS, S. A. BRAWER et C. R. KURKJIAN. « High-temperature light scattering and the glass transition in vitreous silica ». In : *Phys. Review B* 33 (6 mar. 1986), p. 4196–4202. DOI : 10.1103/PhysRevB.33.4196. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.33.4196>.
- [71] NK SINHA. « Dispersion of birefringence in glasses and its measurement with the Babinet compensator using white light ». In : *Physics and Chemistry of Glasses* 737 (1977). URL : <http://www.nrc-cnrc.gc.ca/obj/irc/doc/pubs/nrcc16264/nrcc16264.pdf>.
- [72] Nirmal Kumar SINHA. « Normalised dispersion of birefringence of quartz and stress optical coefficient of fused silica and plate glass ». In : *Physics and Chemistry of Glasses* 19.4 (1978), p. 69–77.
- [73] Max Mark FROCHT et M. M. LEVEN. *Photoelasticity*. J. Wiley et Sons, 1965.
- [74] M. GOTTLIEB. *CRC Handbook of Laser Science and Technology Vol. IV: Optical Materials: Part 2*. Sous la dir. de M. WEBER. CRC, 1986.
- [75] A BARLOW et D PAYNE. « The stress-optic effect in optical fibers ». In : *Journal of Quantum Electronics* 5 (1983), p. 834–839. URL : [http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs%5C\\_all.jsp?arnumber=1071934](http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs%5C_all.jsp?arnumber=1071934).
- [76] Jean-Paul YEHOUESSI, Assaad BAZ, Laurent BIGOT, Geraud BOUWMANS, Olivier VANVINCQ, Marc DOUAY et Yves QUIQUEMPOIS. « Design and realization of flexible very large mode area pixelated Bragg fibers ». In : *Opt. Lett.* 40.3 (fév. 2015), p. 363–366. DOI : 10.1364/OL.40.000363. URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-40-3-363>.

- [77] W. SELLMIEER. « Zur Erklärung der abnormen Farbenfolge im Spectrum einiger Substanzen ». In : *Annalen der Physik und Chemie* 219 (1871), p. 272–282.
- [78] I. H. MALITSON. « Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica ». In : *J. Opt. Soc. Am.* 55.10 (oct. 1965), p. 1205–1208. DOI : 10.1364/JOSA.55.001205. URL : <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-55-10-1205>.
- [79] Francesco POLETTI et Peter HORAK. « Description of ultrashort pulse propagation in multimode optical fibers ». In : *J. Opt. Soc. Am. B* 25.10 (oct. 2008), p. 1645–1654. DOI : 10.1364/JOSAB.25.001645. URL : <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-25-10-1645>.
- [80] Anthony E. SIEGMAN. « Defining, measuring, and optimizing laser beam quality ». In : t. 1868. 1993, p. 2–12. DOI : 10.1117/12.150601. URL : <http://dx.doi.org/10.1117/12.150601> (visité le 08/09/2014).
- [81] A. E. SIEGMAN. « How to (Maybe) Measure Laser Beam Quality ». In : *DPSS (Diode Pumped Solid State) Lasers: Applications and Issues*. DPSS (Diode Pumped Solid State) Lasers: Applications and Issues. Sous la dir. de M. DOWLEY. T. 17. OSA Trends in Optics and Photonics. Optical Society of America, 1<sup>er</sup> jan. 1998, MQ1. DOI : 10.1364/DLAI.1998.MQ1. URL : <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=DLAI-1998-MQ1> (visité le 08/09/2014).
- [82] Benoit SÉVIGNY, Andy CASSEZ, Olivier VANVINCQ, Yves QUIQUEMPOIS et Géraud BOUWMANS. « High-quality ultraviolet beam generation in multimode photonic crystal fiber through nondegenerate four-wave mixing at 532 nm ». In : *Optics Letters* 40.10 (2015), p. 2389–2392.
- [83] A ANEDDA, C.M CARBONARO, R CORPINO et A SERPI. « Vacuum ultraviolet absorption of silica samples ». In : *Journal of Non-Crystalline Solids* 245.1?3 (1999), p. 183–189. ISSN : 0022-3093. DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-3093\(98\)00882-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-3093(98)00882-5). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022309398008825>.
- [84] E. C. BEDER, C. D. BASS et W. L. SHACKLEFORD. « Transmissivity and Absorption of Fused Quartz Between 0.22  $\mu$  and 3.5  $\mu$  from Room Temperature to 1500°C ». In : *Appl. Opt.* 10.10 (oct. 1971), p. 2263–2268. DOI : 10.1364/AO.10.002263. URL : <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-10-10-2263>.
- [85] Jeffrey W NICHOLSON, Andrew D YABLON, John M FINI et Marc D MERMELSTEIN. « Measuring the Modal Content of Large-Mode-Area Fibers ». In : *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* 15.1 (2009), p. 61–70.

- [86] Benoit SEVIGNY, Guillaume LE COCQ, Carmen Carina Castineiras CARRERO, Pierre SILLARD, Constance VALENTIN, Geraud BOUWMANS, Laurent BIGOT et Yves QUIQUEMPOIS. « A novel take on the  $S^2$  dataset modal analysis ». In : *Optical Communication (ECOC), 2014 European Conference on*. IEEE, 2014, p. 1–3.
- [87] Benoit SÉVIGNY, Guillaume LE COCQ, Carmen Carina Castineiras CARRERO, Constance VALENTIN, Pierre SILLARD, Géraud BOUWMANS, Laurent BIGOT et Yves QUIQUEMPOIS. « Advanced  $S^2$  Imaging: Application of Multivariate Statistical Analysis to Spatially and Spectrally Resolved Datasets ». In : *Journal of Lightwave Technology* 32.23 (2014), p. 4004–4010.
- [88] C. JOLLIVET, D. FLAMM, M. DUPARRE et A SCHULZGEN. « Detailed Characterization of Optical Fibers by Combining  $S^2$  Imaging With Correlation Filter Mode Analysis ». In : *Journal of Lightwave Technology* 32.6 (mar. 2014), p. 1068–1074. ISSN : 0733-8724. DOI : [10.1109/JLT.2013.2297337](https://doi.org/10.1109/JLT.2013.2297337).
- [89] Marko LAURILA, Roman BARANKOV, Thomas T ALKESKJOLD, Jes BROENG et Siddharth RAMACHANDRAN. « Cross-correlated imaging of single-mode photonic crystal rod fiber with distributed mode filtering ». In : 21.8 (2013), p. 1073–1075. DOI : [10.1364/OE.21.009215](https://doi.org/10.1364/OE.21.009215).
- [90] Duc Minh NGUYEN, Thanh Nam NGUYEN, Sy Dat LE, Laurent PROVINO, Monique THUAL et Thierry CHARTIER. « Modal decomposition technique for multimode fibers ». In : *Appl. Opt.* 51.4 (2012).
- [91] J JASAPARA et A D YABLON. « Spectrogram approach to  $S^2$  fiber mode analysis to distinguish between dispersion and distributed scattering ». In : *Opt. Lett.* 37.18 (2012), p. 3906–3908.
- [92] I T JOLLIFFE. *Principal Component Analysis*. 2nd. Springer Series in Statistics. Springer, 2002. ISBN : 978-0-387-22440-4.
- [93] Roger HORN. *Matrix analysis*. Cambridge Cambridgehire New York : Cambridge University Press, 1985. ISBN : 9780521386326.
- [94] Aapo HYVÄRINEN, Juha KARHUNEN et Erkki OJA. *Independent Component Analysis*. Wiley, 2001. ISBN : 978-0-471-40540-5.
- [95] A HYVÄRINEN. « Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis ». In : *Neural Networks, IEEE Transactions on* 10.3 (mai 1999), p. 626–634. ISSN : 1045-9227. DOI : [10.1109/72.761722](https://doi.org/10.1109/72.761722).
- [96] Kenneth D. BAILEY. *Typologies and Taxonomies: An Introduction to Classification Techniques*. T. 102. SAGE Publications Inc, 1994. ISBN : 9780803952591.
- [97] Jean-Luc VERLEY. « Dictionnaire des mathématiques; algèbre, analyse, géométrie ». In : Albin Michel, 1997. Chap. Espaces métriques, p. 651.
- [98] H OTTO, Florian JANSEN, Fabian STUTZKI et Cesar JAUREGUI. « Improved modal reconstruction for spatially and spectrally resolved imaging ». In : *Journal of Lightwave Technology* 31.8 (2013), p. 1295–1299.

- [99] Lloyd TREFETHEN. *Numerical linear algebra*. Philadelphia, PA : Society for Industrial et Applied Mathematics, 1997. ISBN : 9780898713619.
- [100] E. BUTKOV. *Mathematical physics*. Addison-Wesley series in advanced physics. Addison-Wesley Pub. Co., 1968. URL : [https://books.google.fr/books?id=aGwN1A%5C\\_i3pkC](https://books.google.fr/books?id=aGwN1A%5C_i3pkC).



---

**Résumé :** L'objectif de cette thèse est, dans un premier temps, d'étudier la génération d'ultraviolets dans les fibres microstructurées par mélange à quatre ondes d'une pompe à 532nm, en particulier en fonction des fluctuations des propriétés de dispersion dues au procédé de fabrication et en explorant différents régimes de pompage ; puis, dans un second temps, le développement d'une méthode versatile de caractérisation du contenu modal.

Nous utiliserons le calcul différentiel stochastique pour représenter l'espérance du gain qu'on peut obtenir par mélange à quatre ondes en fonction du procédé de fabrication. Ensuite, de nouveaux schémas de pompages sont étudiés pour générer des UV avec une grande qualité de faisceau.

Dans le cadre de l'étude des perturbations du procédé de fabrication, nous avons confirmé que l'invariance de l'accord de phase en fonction des fluctuations d'échelle permet d'obtenir un gain maximum en ces points, et ce même si les fréquences générées sont situées très loin de la pompe.

En ce qui concerne la génération d'UV proprement dite, nous avons isolé un schéma de pompage qui consiste à distribuer la pompe sur deux modes d'une fibre microstructurée et d'exploiter l'accord de phase obtenu pour la dispersion de pompe moyenne entre les deux modes. Ce processus permet, comme nous l'avons confirmé expérimentalement, de générer des UV dans le mode fondamental.

Enfin, le développement d'une méthode avancée d'analyse statistique multivariée de l'interférence entre les modes a permis de séparer, de façon quasi-automatique, tous les battements inter-modaux et de reconstruire les enveloppes de champ et la distribution modale de puissance, et ce, sans faire appel à aucune des hypothèses propres aux méthodes existantes.

**Mots clés :** Mélange à quatre ondes, génération d'ultraviolets, contenu modal, fibres microstructurées.

---

---

## Photonic crystal fibers and ultraviolet generation through four-wave mixing

**Abstract :** The main objective of this thesis is, firstly, to study the generation of ultraviolet light in photonic crystal fibers through four-wave mixing of a 532 nm pump, in particular in the presence of dispersion fluctuations due to the fabrication process and by exploring different pumping schemes; secondly, the aim was to develop a versatile analysis method of the modal content of multimode fibers.

We used stochastic calculus to model the expected gain value of four-wave mixing as a function of the fluctuations of the fiber drawing process. Furthermore, alternative pumping schemes were studied to aim at producing high-quality UV beams.

While studying the impact of stochastic fluctuations of the fiber drawing process, we confirmed that phase-matching points showing an invariance with respect to scale fluctuations should indeed provide maximum gain at that point, even for very large frequency detunings with respect to the pump.

Concerning the generation of UV light with very high beam quality, we have isolated a pumping scheme in which the pump is split across two spatial modes of a photonic crystal fiber and take advantage of the phase-matching condition of the averaged pump dispersion of the two pump modes. We have shown experimentally that this process can produce ultraviolet light in the fundamental mode.

Finally, the elaboration of an advanced multivariate statistical analysis method applied to inter-modal interference allowed one to separate, in a semi-automatic fashion, all the interferences and reconstruct the mode envelopes and modal power distribution without any of the hypotheses required by other methods.

**Keywords :** Four-wave mixing, ultraviolet light generation, modal content, photonic crystal fibers.

---