



École doctorale n°104 : SMRE

## Thèse de doctorat de l'Université de Lille

Spécialité Physique - Milieux dilués et optique fondamentale

présentée par

# Vincent Vuatelet

pour obtenir le grade de docteur de l'Université de Lille

Sujet de la thèse :

---

## Localisation dynamique à $N$ -corps d'un gaz de Tonks-Girardeau

---

Directeur de thèse : **Adam Rançon**

soutenue le 06/09/2022 devant le jury composé de :

Mme. Patrizia VIGNOLO (PR – Université de Nice)	Rapporteur
M. Nicolas CHERRORET (CR CNRS – Université Paris Sorbonne)	Rapporteur
Mme. Isabelle BOUCHOULE (DR CNRS – Université Paris Saclay)	Examineur
Mme. Valérie VALLET (DR CNRS – Université de Lille)	Présidente
M. Adam RANÇON (MCF HDR – Université de Lille)	Directeur de thèse



# Remerciements

I did it for me.  
I liked it.  
I was good at it.  
And I was... Really... I was alive.

---

Walter White

Nous y voilà ! J'ai enfin l'occasion de faire les hommages qui se doivent aux gens qui le méritent. Je tâcherais donc de m'exprimer au mieux pour témoigner toute ma sympathie, mon affection et mes amitiés à ces personnes qui se sont retrouvées sur mon chemin, et qui ont su le rendre parfois difficile, tandis que d'autres ont su reconnaître sa complexité, ou le rendre plus doux.

Pour commencer, merci à Adam Rançon d'avoir bien voulu m'encadrer pendant ces trois années. Peut-être parti d'un imprévu, j'ai l'impression que tout le reste n'a pas été un hasard. J'ai un sentiment tout particulier, notamment de penser que j'ai été son premier thésard, et j'apprécie parfois l'idée que je le marquerais comme étant le premier héritier de tout son savoir (et son sarcasme). À vrai dire, tout au long de mon parcours, j'ai souvent ressenti un gap entre moi, et mes enseignants, et à juste titre puisque je n'étais qu'un étudiant sur les bancs de la fac. J'ai alors pensé qu'avec cette thèse, très sûrement à tort, en étant seulement deux, on aurait des choses à s'apprendre mutuellement. Quelle erreur ! Je n'ai fait, du début à la fin, que marcher dans les pas d'un géant. Sa culture scientifique, mais également générale, toujours exprimée avec panache, sont encore une grande leçon pour moi, et j'aspire à lui ressembler un peu un jour, tant les qualités qu'il a me font défaut. Merci d'avoir cru en moi, et de m'avoir donné autant d'opportunités d'aller à des colloques, et de m'exprimer. Merci infiniment.

J'ai eu l'honneur d'avoir un jury composé de personne que j'ai sincèrement admiré tout au long de ma thèse, notamment pour leur contribution scientifique au travers de leurs publications, mais surtout pour leur qualité à savoir transmettre, et discuter. Je remercie ainsi mes rapporteurs, Patrizia Vignolo et Nicolas Cherroret, d'avoir accepté cette lourde tâche.

J'exprime également ma gratitude à Isabelle Bouchoule, avec son regard expérimental (mais aussi théorique !), d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Mille mercis enfin à Valérie Vallet, qui avant d'accepter de présider mon jury, a fait en

sorte (avec Florent !) que mon expérience avec Sakura soit la meilleure, et par extension, que je puisse avoir une thèse particulièrement productive en termes de données.

L'ambiance du labo, quand bien même amputée à cause du C-word, a toujours été grandiose à mes yeux, notamment par les gens qui ont constitué mon entourage. Merci à Pascal Szriftgiser de m'avoir accueillie dans ce merveilleux groupe qu'est l'équipe Atomes Froids. Merci à Jean-Claude Garreau, avec qui les échanges, plus ou moins scientifiques, mais toujours avec une qualité certaine de conteur, ont toujours été agréables. Merci notamment d'avoir été proche de l'écriture de mon manuscrit. Merci à Radu, avec qui les échanges sur l'expérience m'ont été grandement bénéfiques. J'espère t'en avoir un peu apporté sur le gaz de Tonks-Girardeau, et peut-être sur le supermétal. Amitiés à Jeff, qui m'a donné l'occasion d'être enseignant à l'IUT (même si c'étaient des chimistes...), et avec qui cela a toujours été agréable d'échanger. Merci à Daniel et Philippe de m'avoir embarqué dans leur folle aventure de vulgarisation de la physique au contact du grand public lors des Fêtes de la Science. Je suis convaincu que cela m'a rendu meilleur pédagogue dans ma manière d'enseigner. Big up à Charbel aussi ! (sale chauve). Merci également à Clément Hainaut, qui au travers de sa thèse m'a permis de découvrir le Kicked-Rotor d'une manière toute particulière. J'apprécie ses qualités scientifiques, mais également ses qualités à égayer les sorties. Merci d'avoir bien voulu te pencher sur mon manuscrit, la pédagogie du passage sur Lieb-Liniger t'est amplement dû. Merci ensuite aux autres membres du labo, d'une part des autres équipes : Florent, Valérie, qui m'ont initiés à la discussion avec le supercalculateur Sakura. Merci aux thésards, Christelle, Vikas, Martin, Cecilia, Alexandre, Wilken et bien d'autres, que j'ai bien pensé à distraire pendant leur travail, ou avec qui j'ai pu échanger autour d'une bière (peu importe la raison, hein...). Je leur souhaite de la réussite. Je pense évidemment à Samsam, jeune barbu qui est apparu au début de ma troisième année, et qui n'a pas manqué de me montrer les qualités d'un bon ami, et surtout d'un bon thésard, et à qui je souhaite de réussir (j'en doute pas vraiment, mais faut bien qu'il ait du suspens). Merci aussi aux gens de l'ombre, les secrétaires, le personnel du service informatique, du pôle financier, merci à l'école doctorale, et aux responsables des études doctorales Cristian Focsa, puis Céline Toubin. Infini respect à vous.

Là, normalement, il y a deux lascars qui doivent se dire "mais... Il m'a zappé?!". C'est mal me connaître mes amis, Maxime D. et Maxime I.. Je vous attribue carrément ce paragraphe, pour prendre le temps de vous remercier allégrement de tout ce que vous m'avez apporté. Avant cette thèse, j'ai toujours été positif, souriant, et j'ai souvent rejeté ce qui pouvait aller mal, et me rendre peut être plus aigri. Pendant, il faut dire que j'ai eu beaucoup de rancoeur envers moi, à ne pas être meilleur, plus productif, freiné par mes propres limites et les événements. Et si il y en a deux, qui ont bien voulu m'entourer, et m'aider à faire la paix avec mon aigreur, ce sont bien ces voyous. J'ai encore du mal à ne pas être ému en pensant à vous, et à ces années ensemble, rythmées par nos travaux, nos pauses, et nos sorties tous ensemble. Tout n'a pas été facile, mais bon, pour être des frères d'armes, il faut bien une guerre. Alors à vous deux, merci les copains. Je vous suis redevable éternellement.

J'ai encore une flopée de copains à remercier. Merci à mes copains de fac. Je n'ai pas eu l'occasion de tous leur parler et être très régulier dans nos échanges, mais j'ai tout de

même fait en sorte de les stalker sur arXiv pour voir comment ça allait. Merci donc à Pierre, Seb et Nathan. Plus loin encore, je pense à mes potes de lycée, avec qui ça fait, ou va faire, une décennie qu'ils me supportent, et sont actuellement mes colocs : merci Victor, et Rafaël. Je pense bien sûr à d'autres, qui ont été là, et ne le sont peut-être plus, mais ont eu leur rôle.

Avant le passage le plus personnel de ces remerciements, j'ai une pensée toute particulière pour mes profs de Physique, Monsieur Cournet pour mon année de Terminale, qui, pour je ne sais quelle raison, m'a donné la passion de la physique. Merci à Monsieur Martinez de m'avoir modelé en tant qu'élève de prépa. Je pense que c'est à ce monsieur que je dois le fait d'avoir pu jeter mon dévolu entier dans la Physique avec le plus de rigueur possible, et donc avec le plus d'humilité et de respect pour la discipline (merci de ne pas m'avoir trop hurlé dessus quand je galérais pour faire le pendule simple avec le théorème de l'énergie cinétique). Merci également à Madame Leroy, ma prof de mathématiques de prépa, qui a contribué à me rendre finalement amoureux des mathématiques, et qui m'a confié sa rigueur. J'ai toujours admiré sa manière de ne faire qu'un avec les maths, à tel point que, peut-être grâce à l'expérience ou tout simplement son affinité avec les maths, un support était inutile, puisque tout était logique : les cours finissaient par être une histoire. Et puis, je la soupçonne de m'avoir élu son chouchou. Ça m'a évité bien des hontes au tableau quand je ne connaissais pas mon cours, mais le cours de zumba, franchement... Merci à tous mes profs finalement ! Je pense à d'autres (madame Lacoste, madame Franck, monsieur Théval, madame Bellard, madame Martinez) bien sûr, mais il faut de la place pour les autres !

Je vais bientôt clôturer mon blabla, promis. Je finis par remercier mes proches. Merci à mon grand frère Nicolas, qui a toujours été là pour moi, et qui malgré l'écart d'âge, a su me faire sentir protégé et admiratif, comme son petit frère que je suis. Merci à Yvon, d'être un extraordinaire petit frère. Beaucoup de pudeur habille notre relation, mais si je dois résumer le tout, tu donnes et as donné beaucoup de sens à ma vie dans son essence même. Tu es courageux, et je suis fier de toi. Bravo pour tout ce que tu as accompli jusqu'ici. Compte sur moi pour la suite.

Maman... Je te dédie *tout*. J'espère avoir été un bon garçon. Je t'aime.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le Kicked Rotor</b>	<b>7</b>
1.1	Dynamique quantique périodique unidimensionnelle . . . . .	12
1.1.1	Simulation numérique . . . . .	12
1.1.2	Localisation dynamique . . . . .	13
1.1.3	Équivalence avec le modèle d'Anderson . . . . .	13
1.1.4	Localisation des états de Floquet . . . . .	14
1.1.5	Lien entre la localisation dynamique et la localisation des états de Floquet . . . . .	17
1.2	Dynamique quantique du Kicked Rotor quasi-périodique . . . . .	18
1.2.1	La transition d'Anderson et théorie d'échelle . . . . .	18
1.2.2	Exposant critique . . . . .	19
1.2.3	Le Kicked Rotor quasi-périodique et lien avec la transition d'Anderson . . . . .	21
1.2.4	Théorie d'échelle en temps . . . . .	24
1.2.5	Comportement asymptotique de la fonction d'onde au seuil critique - Théorie auto-cohérente . . . . .	27
1.2.6	Dynamique au seuil critique et déviation à la théorie auto-cohérente : la multi-fractalité . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Gaz de Bose unidimensionnel</b>	<b>33</b>
2.1	Le modèle de Lieb-Liniger . . . . .	37
2.1.1	Hamiltonien et ansatz de Bethe . . . . .	37
2.1.2	Limite thermodynamique . . . . .	38
2.1.3	Absence de condensation de Bose-Einstein . . . . .	39
2.2	Gaz de Tonks-Girardeau . . . . .	41
2.2.1	Théorème de correspondance de Bose-Fermi . . . . .	42
2.2.2	La matrice densité réduite à un corps et distribution en impulsion . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Intermezzo : effet des interactions sur la localisation dynamique</b>	<b>51</b>
3.1	Modèles-jouet . . . . .	51
3.2	Approches champ-moyen . . . . .	55
3.2.1	L'équation de Gross-Pitaevskii . . . . .	56
3.2.2	L'approximation diagonale . . . . .	56
3.2.3	Destruction de la localisation dynamique par les interactions . . . . .	58
3.2.4	Le régime diffusif et critique du Kicked Rotor quasi-périodique . . . . .	58
3.3	Au-delà du champ moyen . . . . .	59
3.3.1	La limite à deux corps . . . . .	59
3.3.2	Localisation dynamique à $N$ -corps . . . . .	60

3.4	Synthèse . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Thermalisation effective d'un gaz de Bose localisée dynamiquement à <math>N</math>-corps</b>	<b>63</b>
4.1	Modèle du gaz de Tonks-Girardeau kické . . . . .	63
4.2	Observables dans la phase localisée . . . . .	65
4.2.1	Distribution en impulsion . . . . .	65
4.2.2	Cohérence et matrice densité . . . . .	66
4.3	Thermalisation effective dans la phase localisée . . . . .	66
4.3.1	Fermions . . . . .	67
4.3.2	Implications pour les bosons . . . . .	73
4.4	Arguments pour la thermalisation effective . . . . .	74
4.5	Limites de la thermalisation effective . . . . .	77
4.6	Conclusion . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Transition d'Anderson d'un gaz de Tonks-Girardeau dans un potentiel de kick quasi-périodique</b>	<b>81</b>
5.1	Modèle du gaz de Tonks kické quasi-périodiquement . . . . .	81
5.2	Études de la phase localisée et délocalisée . . . . .	83
5.2.1	Phase localisée . . . . .	83
5.2.2	Phase délocalisée . . . . .	86
5.3	Dynamique d'un gaz de Tonks au seuil critique . . . . .	93
5.3.1	Fermions libres . . . . .	93
5.3.2	Bosons . . . . .	94
5.4	Conclusion . . . . .	102
	<b>Conclusion générale</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Contact de Tan</b>	<b>109</b>
A.1	Expression thermique . . . . .	109
A.2	Non-analyticité de $\rho$ . . . . .	111
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>





# Introduction

Chaque ligne signifie quelque chose.

---

J.-M. Basquiat

L'INTRODUCTION de désordre dans des systèmes quantiques a fait l'objet de nombreuses études, tant théoriquement qu'expérimentalement. En matière condensée, un cristal est dans un premier temps décrit comme un réseau parfaitement périodique, où les électrons peuvent sauter de site en site de manière indépendante. En ce sens, il est prédit que les fonctions d'ondes électroniques associées sont alors délocalisées, ce qui se traduit par un transport balistique des électrons au sein du cristal.

Cependant, de nombreuses conclusions expérimentales contredisent ce type d'approche, qui vient principalement du fait que le système précédemment décrit correspond à un cristal parfait. En réalité, les cristaux réels comportent des impuretés, brisant la périodicité spatiale du réseau. De ce fait, en 1958, P. W. ANDERSON propose de considérer l'effet du désordre, qu'il manifeste par la distribution aléatoire des énergies sur site du réseau cristallin [1]. Les conclusions de son papier sont particulièrement étonnantes et en contradiction totale avec les modèles idéaux décrits plus tôt : au lieu d'un mouvement libre et de fonction d'onde étendue, on a plutôt à faire à un arrêt net de la dynamique, et une fonction d'onde localisée. Ce résultat est une des briques fondamentales de la compréhension de la matière et de ses propriétés macroscopiques, de sa nature isolante ou conductrice.

Débatte jusqu'à dans les années 70, puis admise et étudiée théoriquement et surtout numériquement, de nouveaux phénomènes de la physique d'Anderson sont mis en lumière. En particulier, il est montré qu'en 3D, le modèle d'Anderson présente une transition de phase, permettant à un système d'être tantôt localisé, tantôt diffusif, plus connu sous le nom de transition d'Anderson [2]. Par la suite, ce modèle est mis en lien avec les transitions du second ordre, permettant une description du problème grâce au groupe de renormalisation. L'une des avancées des plus fructueuses, basée sur les idées de Thouless et Landauer [3, 4], joint aux travaux de Wegner [5], est la fameuse théorie d'échelle à un paramètre de la localisation [6]. En particulier, cette théorie repose sur l'hypothèse que, proche de la transition, il suffit d'un unique paramètre d'échelle pour décrire la phase critique.

D'autre part, la théorie d'échelle à un paramètre permet d'expliquer l'influence de la taille et la dimensionnalité du système sur la physique d'Anderson, et indique que la transition d'Anderson n'est observable que pour des dimensions supérieures à deux. Plus particulièrement, elle prédit qu'en dimension deux, qu'importe le degré de désordre du système, la fonction d'onde d'une particule à temps infiniment long sera localisée mais dont la longueur de localisation exponentiellement grande dans la limite de faible désordre. Dans le cas de la troisième dimension qui nous intéresse ici, en dessous d'un seuil critique de désordre, la localisation laisse place à un comportement diffusif, correspondant à un métal. En suivant l'analogie avec les transitions de phase du second ordre, la longueur de localisation dans le régime critique est supposée diverger suivant une loi de puissance :

$$l \sim (W - W_c)^{-\nu}, \quad (1)$$

où  $\nu$  est un exposant critique universel,  $W$  est l'amplitude du désordre et  $W_c$  est l'amplitude critique du désordre. En ayant recourt à des techniques de finite-size scaling, la théorie d'échelle a pu être validée numériquement dans les années 80 [7, 8], en décrivant la longueur de localisation comme une fonction d'échelle à un paramètre. L'exposant critique trouvé par ces méthodes est  $\nu \simeq 1.57$  [9, 10], loin du résultat  $\nu = 1$  des approches auto-cohérentes [11].

## La localisation à $N$ -corps

La description précédente ne prend pas en compte la présence d'interactions, chose non négligeable dans les systèmes réels. L'effet de ces dernières doit donc être pris en compte, et nous mener à savoir si un système désordonné en interaction finira par thermaliser (ou se délocaliser dit autrement), ou atteindre une autre phase de la matière. D'ores et déjà, des physiciens se sont intéressés aux effets des interactions dans le cas de point quantique en dimension 0 [12], mais aussi pour des systèmes à plus hautes dimensionnalités pour des interactions locales [13, 14]. Pour ces exemples, il a été montré des caractéristiques d'isolant parfait, même à des températures non nulles, et donc une robustesse de la localisation d'Anderson face aux interactions, empêchant la thermalisation traduit par une brisure de l'ergodicité du système. Les systèmes présentant ces caractéristiques font partie d'une nouvelle classe de système dit *many-body localized* (MBL). De ces études primaires sont sorties des intuitions quant aux paramètres de désordre et d'interaction pour lesquels la MBL apparaît. Il a été montré plus tard, de manière rigoureuse, que la MBL existe pour des faibles interactions, et des forces de désordre élevées [15].

Les caractéristiques d'une telle phase de la matière se démarquent très nettement des systèmes sujets à la thermalisation. Tout d'abord, les états propres d'un système dans la phase MBL dénotent d'un très faible degré d'intrication, en particulier l'entropie d'intrication d'un sous-système obéit cette fois-ci non pas à une loi de volume, mais à une loi des aires (ce qui est typique des systèmes isolants [16, 17]), et ceci même pour des températures élevées [18, 19]. Il a été montré par la suite que ce faible degré d'intrication des états propres des systèmes MBL implique une forme de quasi-localité des Hamiltoniens. On peut alors utiliser cette quasi-localité pour relier les degrés de liberté de ces sous-secteurs quasi-locaux sur des intégrales du mouvement quasi-locales. L'émergence de

cette intégrabilité explique bien pourquoi l'ergodicité est brisée : les intégrales du mouvement quasi-locales contiennent l'information locale de l'état initial dans leur propre valeurs initiales. D'autre part, la phase MBL, du fait de cette quasi-localité des intégrales du mouvement, est extrêmement robuste à des perturbations, ce qui en fait une phase de la matière à part entière. Le même type de mécanisme explique la brisure d'ergodicité dans des systèmes périodiquement perturbés [20, 21].

## La physique des atomes froids

L'engouement dû aux premiers résultats obtenus et décrit succinctement ci-dessus ont poussé les physiciens à tester ces théories sur des vraies systèmes. Cependant, la localisation d'Anderson s'explique notamment par des effets d'interférence quantique, extrêmement sensibles aux sources de décohérences, ainsi qu'aux interactions entre les électrons du système. À noter aussi que, quand bien même étant née dans le domaine de la matière condensée, la localisation d'Anderson dépasse largement les frontières de la physique du solide et a su progressivement s'étendre à d'autres domaines comme le rayonnement électromagnétique [22-25], les ondes acoustiques [26], la biologie [27, 28], mais aussi la cosmologie [29].

Un autre domaine ayant connu un essor remarquable est le refroidissement par laser des atomes. Le développement de la physique atomique et de l'optique quantique ont permis de créer des expériences où le refroidissement et le piégeage d'atomes, d'ions ou encore de molécules ont permis d'atteindre des températures proches du zéro absolu, à quelques nanoKelvin près. Ces techniques de piégeage, couplées aux techniques de refroidissement évaporatif ont permis l'observation de la fameuse condensation de Bose-Einstein (prédite presque un siècle plus tôt !) en 1995. De plus, les interactions au sein d'un nuage d'atomes froids peuvent être maîtrisées via les résonances de Feshbach. La dimensionnalité effective de l'espace au sein duquel les atomes évoluent peut également être réglée avec des potentiels optiques. Ainsi, les atomes froids cochent un nombre non-négligeable de points du cahier des charges visant à l'observation de phénomènes quantiques, et peuvent être utilisés comme simulateurs quantiques en mesure de traiter une multitude de problèmes de la matière condensée [30, 31]. C'est finalement en 2008 que la localisation d'Anderson 1D a pu être observée pour la première fois au travers d'un condensat sujet à un potentiel lumineux désordonné [32]. L'observation pour les cas en deuxième et troisième dimensions a également été réalisée plus récemment [33, 34]. Enfin, de nombreuses mises en évidence expérimentales de la phase MBL ont été possibles grâce à ce type d'expériences, notamment pour des fermions en dimension 1 [35], des ions [36], ou encore des bosons en dimension 2 [37].

## Chaos quantique

Dans le cadre de ce manuscrit, nous allons nous intéresser à un système également constitué d'atomes froids, mais qui n'est pas désordonné. Ce système, appelé le rotateur frappé quantique (qu'on nommera "Quantum Kicked Rotor" par la suite) est un paradigme du

chaos quantique, en ce sens que sa dynamique classique est chaotique. Les systèmes dont la dynamique classique est chaotique ont fait l'objet d'études théoriques à partir des années 80. C'est en 1979 qu'est décrit pour la première fois la version classique du Kicked Rotor [38], dont l'Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta \sum_n \delta(t - n), \quad (2)$$

où  $p$  est le moment angulaire du rotateur,  $\theta$  sa position,  $t$  le temps et  $K$  l'amplitude des kicks assésés au rotateur. C'est en substance le système le plus simple imaginable, de part le fait qu'il ne présente qu'un degré de liberté et dénote d'une extrême sensibilité aux conditions initiales (qui est la caractéristique principale des systèmes chaotiques). Au delà d'une valeur critique de  $K$ , une particule classique présente un comportement diffusif lié au chaos : la densité de probabilité des impulsions auxquelles elle a accès est une gaussienne, qui s'étend indéfiniment avec le temps. La version quantique quant à elle, dénote totalement de son homologue classique. En effet, à temps court, l'on pourrait croire qu'ils sont semblables : la particule quantique présente une diffusion, sa probabilité de présence s'étend linéairement avec le temps. Pourtant, à temps longs, la nature quantique reprend ses droits. Les tumultueuses interférences quantiques brisent alors la diffusion, forçant la particule quantique, au delà d'un certain temps, à s'immobiliser dans l'espace des impulsions ; c'est la localisation *dynamique* qui s'opère. De ce constat, il est possible et légitime de vouloir connaître la mesure dans laquelle la localisation dynamique en impulsion est en correspondance avec la localisation d'Anderson. C'est en 1984 qu'est fait ce parallèle, où le Kicked Rotor quantique correspond à un modèle d'états désordonnés dans l'espace des impulsions, menant à la localisation dynamique.

Du point de vue expérimental, le Kicked Rotor est également relativement simple à réaliser. En effet le potentiel de kick sinusoïdal est réalisable à l'aide de deux lasers contre-propageants, créant une onde stationnaire qui sera perçue comme un potentiel par les atomes piégés. La simplicité de réalisation de ce modèle a conduit à l'observation de la localisation dynamique en 1995, ce qui en fait la première observation de la localisation d'Anderson à l'aide des ondes de matière [39].

## Dimensionnalité effective et quasi-périodicité

D'autre part, ce type de système simple comporte un autre avantage : sa dimensionnalité effective peut être réglée de façon simple. Ainsi, il suffit seulement de considérer un modèle quasi-périodique à trois fréquences du Kicked Rotor qui se présente comme il suit :

$$\mathcal{H}_{qp} = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta [1 + \varepsilon \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)] \sum_n \delta(t - n), \quad (3)$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des fréquences de modulation temporelle des kicks, qui ont la particularité de vérifier une condition d'incommensurabilité comme suggérée dans les études numériques et théoriques [40], qui ont rapporté la présence d'une transition métal-isolant du même type que celle d'Anderson 3D. Cependant, quand bien même la réalisation expérimentale reste relativement simple par l'ajout de fréquence dans le potentiel de kick,

il n'en reste pas moins de difficultés d'extraire la physique du modèle. En effet, les temps pour lesquels la transition s'opère sont extrêmement longs, et bien au-delà des limites expérimentales, qui sont entre autres causées par des décohérences de phase. Ces limitations à temps fini empêchent ainsi l'observation directe de la transition, qui s'identifie par analogie avec la vraie transition d'Anderson, i.e. par la divergence de la longueur de localisation à la transition en loi de puissance :

$$l \sim |K_c - K|^{-\nu}, \quad (4)$$

où  $K_c$  est la valeur critique de l'amplitude des kicks  $K$ , et dont l'exposant critique  $\nu$  est le même que pour le modèle d'Anderson 3D (1). Dans ce régime, la théorie de la renormalisation montre l'existence d'une loi d'échelle, qui sont à un paramètre dans le cas de la transition d'Anderson. Une première étude numérique est parvenue à montrer l'équivalence entre le modèle de Kicked Rotor quasi-périodique et celui de la transition d'Anderson, mais pour des temps courts et des faibles désordres [41], ce qui n'est pas une démonstration assez forte pour clamer l'équivalence entre les deux modèles. Plus tard, des études rigoureuses tant numériquement qu'expérimentalement montreront que ces deux modèles sont de la même classe d'universalité, et donc que les exposants critiques sont les mêmes, i.e.  $\nu \simeq 1.57$  [42, 43].

## Plan de thèse

Il vient alors une question naturelle : qu'advient-il de la localisation dynamique du Kicked Rotor quantique en présence d'interactions ? Quid de la transition et de la localisation dans la phase localisée pour le Kicked Rotor quasi-périodique ? Nous avons vu que pour un système désordonné d'Anderson, une nouvelle phase de la matière, la MBL, fait son apparition. Une phase de la matière, possiblement localisée *dynamiquement* à N-corps (many-body *dynamically* localized notée MBDL), peut-elle aussi faire surface dans un modèle de Kicked Rotor avec interaction ? En quoi se démarquerait-elle d'une phase MBL ? D'ores et déjà, des physiciens ont contribué à répondre à cette question au travers de modèle de champ moyen et modèles-jouet divers et variés, dont nous présenterons succinctement les tenants et les aboutissants ainsi que les limites.

Ce manuscrit rapporte le travail de thèse effectué pour tenter de répondre à ces questions délicates. Pour ce faire, nous nous sommes penchés sur la physique d'un gaz uni-dimensionnel d'atomes froids dont les interactions sont portées à l'infini, appelé gaz de Tonks, que nous avons soumis à des kicks. Ce régime d'interaction est extrêmement utile, notamment car il offre une dynamique intégrable et une résolution numérique exacte, loin de toute approximation, ainsi qu'une caractérisation des corrélations, et de l'impact des interactions sur la dynamique à temps longs du Kicked Rotor.

Au chapitre 1, nous faisons un retour sur le système paradigmatique du chaos quantique : le Kicked-Rotor uni-dimensionnel. Une rapide discussion sur le système classique permettra de mettre en lumière l'apparition du chaos, et de sa mise en lien avec la localisation dynamique observée dans sa version quantique. Le lien entre ce système et le modèle d'Anderson 1D sera rappelé au travers d'une démonstration formelle de leur équivalence. En particulier, cela nous permettra de décrire le Kicked Rotor comme un système désordonné

de Floquet dans lequel la localisation d'Anderson apparaît dans l'espace des impulsions. Enfin, nous présenterons la version 3D effective du Kicked Rotor, et son équivalence, cette fois-ci, avec un modèle d'Anderson 3D, et notamment leur appartenance à la même classe d'universalité.

Le chapitre 2 comporte une partie sur l'introduction des interactions dans la physique des atomes froids. Pour ce faire, nous proposons une description au travers d'un Hamiltonien de Lieb-Liniger, qui décrit la physique de bosons uni-dimensionnel soumis à un potentiel en présence d'interactions de contact. En particulier, nous présenterons un régime d'interaction fortes, connu sous le nom de gaz de Tonks-Girardeau. Nous montrerons comment la physique de fermions libre et de bosons en interactions infinies devient équivalente et dans quelle mesure, ce qui est fondamental pour la suite du manuscrit et le calcul numérique des observables du système, comme la matrice densité réduite et la distribution en impulsion.

Un troisième chapitre est un intermezzo entre le chapitre 2 et 4 fera le point de l'état de l'art de la recherche des effets des interactions sur la localisation dynamique. Nous présenterons quelques modèles-jouet, et notamment les approches de champ-moyen qui ont été développées dans un premier temps. Dans un second temps, nous présenterons les approches allant au-delà de ces types de modèle, notamment dans le cas uni-dimensionnel où l'approche de champ moyen ne permet pas de capturer toute la phénoménologie des systèmes à basse dimensionnalité. Ceci justifie notre intérêt de chercher une approche exacte en dimension 1 au travers du régime d'interaction de Tonks-Girardeau.

Le chapitre 4 est la contribution majeure du travail de thèse effectuée. Ce chapitre est consacré à l'étude d'un gaz de Tonks kické, dont nous présenterons les principales caractéristiques. En particulier, on montrera ses points communs et ses différences avec une phase MBL, et surtout l'évidence de l'existence d'une phase MBDL. D'autre part, on montrera l'émergence d'une thermalisation effective, qui nous permettra une description quantitative des observables dans la phase MBDL. Nous montrerons numériquement comment il est possible de justifier l'existence de cette thermalisation au sein de cette phase, en montrant l'appartenance du système de gaz de Tonks kické à l'ensemble de Gibbs Généralisé. Une discussion sur les limites de cette description sera également faite.

Le chapitre 5 est consacré au modèle du Kicked Rotor quasi-périodique dans le régime de Tonks. Nous nous intéresserons à décrire chaque régime de ce système (localisé, délocalisé et critique). En particulier, chaque phase en dehors de la transition sera décrite comme une phase thermique effective. Enfin, nous montrerons que la transition n'est pas impactée par la présence des interactions, et même que la multifractalité reste présente à temps longs.

Une conclusion clôturera ce manuscrit. Des perspectives y seront données pour de futures recherches numériques, théoriques ou expérimentales.





## Le Kicked Rotor

Je vous le dis : il faut porter encore en soi un chaos,  
pour pouvoir mettre au monde une étoile dansante.  
Je vous le dis : vous portez en vous un chaos.

---

Friedrich W. Nietzsche

L'OBSERVATION de la localisation d'Anderson dans des systèmes réels désordonnés n'est pas chose aisée, mais a tout de même conduit à une panoplie d'observations expérimentales du phénomène grâce aux améliorations techniques notables et le développement des techniques de piègeages d'atomes froids. Quand bien même, il n'en reste pas moins difficile de générer des vrais désordres, dans le sens où il subsiste des corrélations au sein de ce désordre le rendant déterministe, ce qui a un impact non-négligeable sur le phénomène de localisation.

Pour outrepasser ces limitations, nous nous intéressons au système qui a conduit à la première observation de la localisation d'Anderson [39] avec des ondes de matière, qui est le fameux Kicked Rotor périodique. En effet, la présence de chaos au sein de ce système est analogue à un désordre pseudo-aléatoire, dont les corrélations à très courtes portées permettent d'établir une analogie plus large entre la physique d'Anderson et celle du Kicked Rotor. D'autre part, l'étude théorique de ce système présente également un intérêt pour les expérimentateurs par sa remarquable simplicité de réalisation via une expérience d'atomes froids. Nous montrerons également dans quelle mesure le variant quasi-périodique du Kicked Rotor a permis de caractériser la transition d'Anderson [42, 44].

Nous introduisons d'abord la version classique et unidimensionnelle du Kicked Rotor. Celle-ci a été introduite par Chirikov en 1979 [38], ce qui depuis n'a jamais cessé d'éveiller l'intérêt des physiciens, jusqu'à conférer le statut de paradigme au Kicked Rotor vis-à-vis des systèmes chaotiques.

## Unités réduites et Application Standard

Le modèle originel du Kicked Rotor est celui d'une masselotte tournant autour d'un point fixe, frappée périodiquement, dont la force dépend de la position azimutale de la masselotte. Une version "dépliée", qui permet une description unidimensionnelle du modèle du Kicked Rotor, est une formulation équivalente du modèle de la masselotte, et qui revient à étudier le mouvement d'une particule de masse  $m$  selon un axe, soumise à un potentiel sinusoïdal de période spatiale  $\Lambda$ , dont les kicks s'espacent d'une période  $T$ . L'Hamiltonien associé s'écrit :

$$\mathcal{H}_1(X, P, t') = \frac{P^2}{2m} + V_0 \cos\left(\frac{2\pi X}{\Lambda}\right) \sum_n \delta\left(\frac{t'}{T} - n\right). \quad (1.1)$$

Dans la suite de ce manuscrit, nous utilisons des unités adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\pi}{\Lambda} X, \\ p &= \frac{2\pi T}{m\Lambda} P, \\ t &= \frac{t'}{T}, \end{aligned}$$

ce qui permet, en définissant  $\mathcal{H}(x, p, t) = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2} \mathcal{H}_1(X, P, t')$  et  $K = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2} V_0$  le paramètre de stochasticité, d'écrire l'Hamiltonien en unité adimensionnées du Kicked Rotor :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + K \cos x \sum_n \delta(t - n), \quad (1.2)$$

À partir des équations différentielles d'Hamilton du mouvement nous pouvons passer à une application discrète, qui relie les valeurs au  $n$ -ième pas de temps du couple  $(x_n, p_n)$  aux valeurs au  $n + 1$ -ième pas de temps :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \sin x_n \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Cette application, dénommée l'Application Standard, est l'un des fondements de l'étude des systèmes dynamiques présentant du chaos [38, 45]. Cette dernière est périodique modulo  $2\pi$  en  $x$ , et également en  $p$ . En effet, injecter une valeur de  $p_{n+1}$  à plus ou moins  $2\pi$  renverra une même valeur de  $x_{n+1}$ , puisque périodique modulo  $2\pi$ . Ainsi, il est possible de se restreindre à un espace des phases où  $(x, p) \in [0, 2\pi]^2$ .

Lorsque  $K = 0$ , le système possède un degré de liberté et une constante du mouvement, l'énergie cinétique. A contrario, dès lors que  $K \neq 0$ , la conservation de l'énergie cinétique est brisée, le système rentre alors dans une catégorie de système dit non-intégrable.

La figure 1.1 présente l'Application Standard pour différentes valeurs de  $K$ . Dans le cas où il n'y a pas de kicks, le système présente des trajectoires stables. Dès lors que

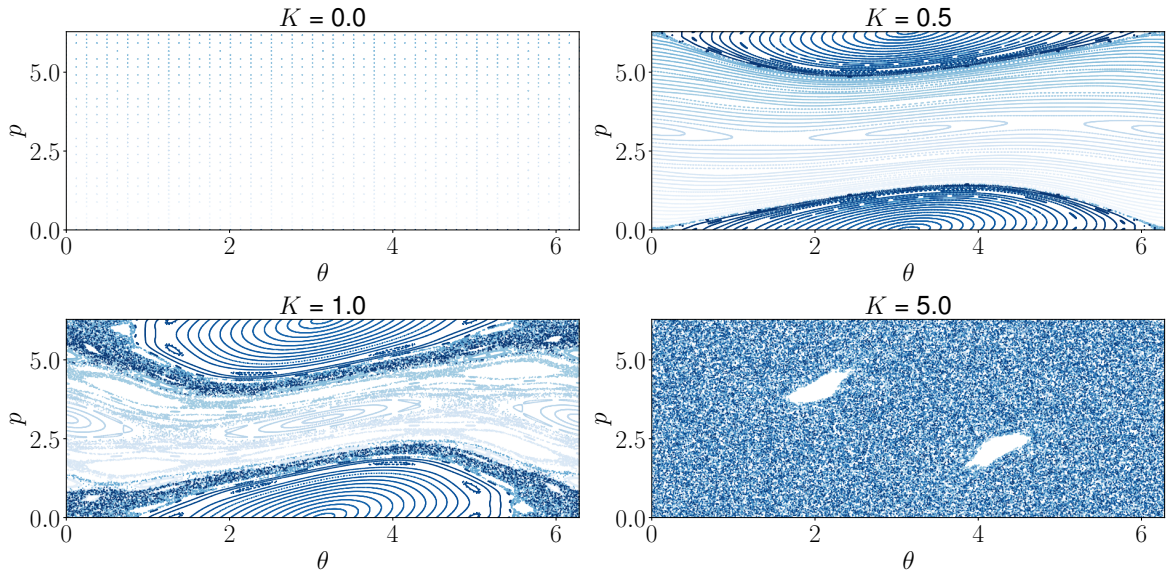


FIGURE 1.1 – Application standard pour différentes valeurs de  $K$ . L'évolution est faite pendant 1000 kicks pour 50 conditions initiales. La périodicité de l'Application Standard modulo  $2\pi$  nous permet de nous restreindre à un modèle replié où  $(x, p) \in [0, 2\pi]^2$ .

les kicks entrent en jeu, comme l'explique le puissant théorème Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), si ceux-ci sont suffisamment faibles, les trajectoires deviennent alors quasi-périodiques. En augmentant encore la force des kicks, l'espace des phases devient un mélange de trajectoires quasi-périodiques et de trajectoires dont la périodicité est brisée : le chaos commence à apparaître ( $K \gtrsim 0.97$ ). Dans la limite des grands  $K$ , le système fini par être totalement chaotique. L'espace des phases est alors peuplé de manière uniforme par les trajectoires, on dit alors que le système est *ergodique* ( $K \gtrsim 5$ ).

## Diffusion chaotique

La dynamique du Kicked-Rotor est donc chaotique pour de grandes amplitudes de kick (on dit aussi que nous sommes dans un régime stochastique). Une particularité des systèmes chaotiques est leur sensibilité aux conditions initiales, illustrée sur la figure 1.2, où nous voyons que pour deux conditions initiales proches, la dynamique est drastiquement différente.

La dynamique du Kicked Rotor peut être assimilée à celle d'une marche aléatoire dans l'espace des impulsions. Dans cette situation, le système voit alors son énergie croître de manière linéaire dans le temps, avec une proportionnalité liée à un coefficient de diffusion. Pour voir cela, nous pouvons exprimer la dépendance temporelle de l'impulsions  $p$  comme :

$$(p_n - p_0)^2 = K^2 \sum_{j,m=0}^{n-1} \sin x_j \sin x_m. \quad (1.4)$$

Or, du fait de l'ergodicité du système, nous pouvons considérer que les  $x_i$  sont uniformé-

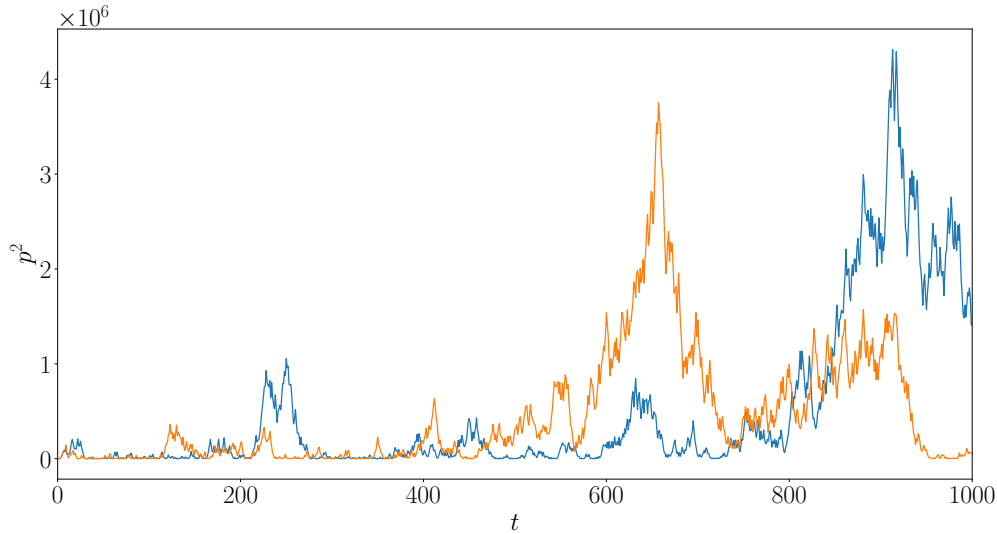


FIGURE 1.2 – Simulation numérique de deux conditions initiales en impulsion soumises à la dynamique du Kicked Rotor. Ici  $K = 100$ , la première conditions initiales est  $(x_0, p_0) = (\pi, 1)$  (bleu), la seconde est  $(x_0, p_0) = (\pi, 1 + 10^{-16})$  (orange).

ment répartis sur la plage  $[0, 2\pi[$ . D'autre part, le Kicked Rotor est connu pour être un système à mémoire courte, en ce sens que dans le régime ergodique ( $K \gg 1$ ), les phases peuvent être considérées indépendantes. Ainsi, l'équation (1.4), une fois moyennée sur les conditions initiales, ne compte que les termes  $j = m$  et il ne reste plus qu'à calculer :

$$\langle p_n^2 \rangle = \left\langle K^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sin^2 x_j \right\rangle, \quad (1.5)$$

qui donne  $K^2/2$  pour tout  $j$ , et la moyenne des impulsions aux carrés, reliée à l'énergie cinétique du système par  $E_c = \langle p^2 \rangle / 2$  est :

$$\langle p^2 \rangle (t) \simeq \frac{K^2}{2} t, \quad (1.6)$$

où  $t$  est compté en nombre de kicks  $n$ . Cette croissance linéaire de l'énergie du système est visible sur la figure 1.3. Enfin, la figure 1.4 représente la densité de probabilité des impulsions visitées par une particule soumise à la physique du Kicked Rotor. Cette dernière est très bien approximée par une fonction gaussienne (en rouge), et est caractéristique d'un transport diffusif.

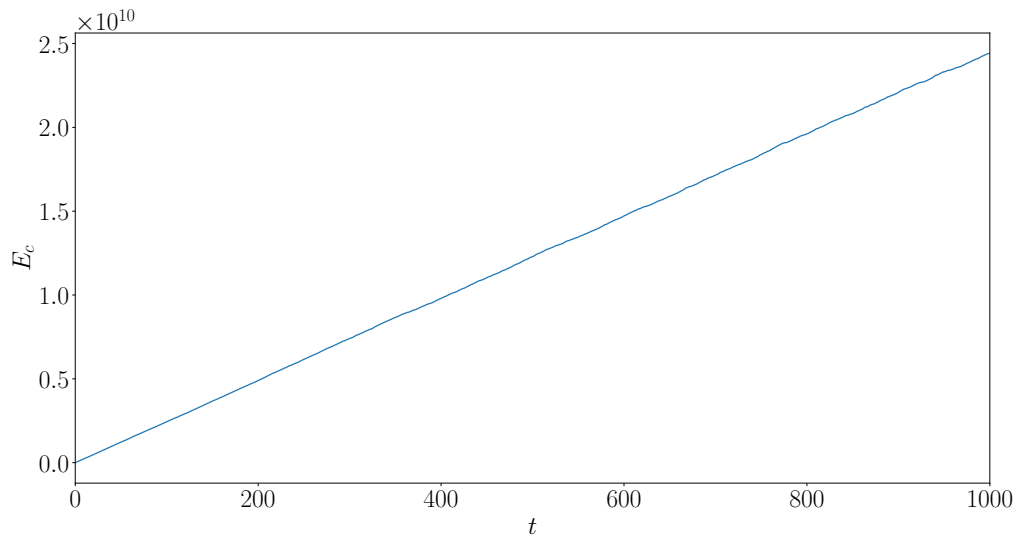


FIGURE 1.3 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique en fonction du nombre de kicks  $n$ , moyennée sur 20000 conditions initiales d'impulsions et position,  $K = 10000$ . Sa croissance linéaire met en lumière le comportement diffusif du Kicked Rotor classique.

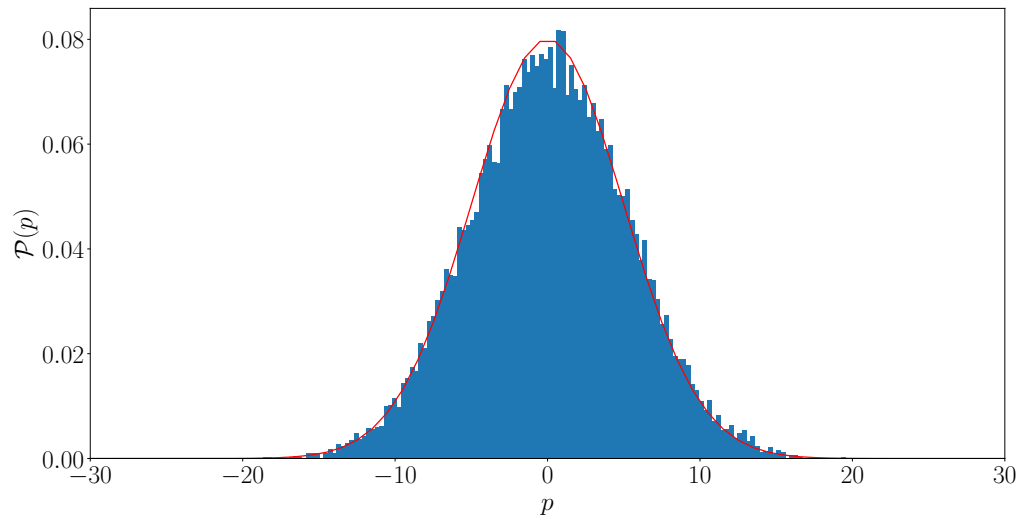


FIGURE 1.4 – Densité de probabilité des impulsions du Kicked Rotor classique. Associée à la dynamique diffusive, on retrouve bien la forme gaussienne (courbe rouge) de la distribution des impulsions. Ici, nous avons moyenné sur 20000 conditions initiales pour 1000 kicks et  $K = 10$ .

## 1.1 Dynamique quantique périodique unidimensionnelle

La version quantique du Kicked Rotor est celle qui nous intéresse plus particulièrement dans ce manuscrit. Pour comprendre les effets quantiques sur la diffusion classique chaotique, nous reprenons l'Hamiltonien (1.2) dans sa version quantique, dont l'équation de Schrödinger associée est :

$$i\bar{k} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\bar{k}^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K \cos \hat{x} \sum_n \delta(t - n) \psi. \quad (1.7)$$

où  $\bar{k}$  est une constante de Planck réduite, définie par  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\bar{k}$ , où  $\bar{k} = \frac{4\pi T}{m\Lambda^2} \hbar$ . Cette quantité est reliée à la période des kicks et peut donc être réglée à volonté dans les expériences d'atomes froids du Kicked Rotor. Nous pouvons formuler la dynamique de manière analogue à ce qui a été présentée pour son pendant classique, c'est-à-dire de manière stroboscopique. En considérant les états  $|\psi(t)\rangle$  au temps  $t$ , le temps  $t+1$  s'obtient en appliquant l'opérateur évolution sur une période :

$$|\psi(t+1)\rangle = \hat{U} |\psi(t)\rangle, \quad (1.8)$$

où  $\hat{U}$  peut s'écrire comme le produit de deux opérateurs unitaires dans la limite des kicks infiniment fins :

$$\hat{U} = \hat{U}_{prop} \hat{U}_{kick} = e^{-i\frac{\bar{p}^2}{2\bar{k}}} e^{-i\frac{K}{\bar{k}} \cos \hat{x}}. \quad (1.9)$$

### 1.1.1 Simulation numérique

Les formes respectives des opérateurs de kick et de propagation libre permettent une simulation numérique simple de la dynamique quantique du Kicked Rotor. D'une part, l'opérateur de kicks  $\hat{U}_{kick}$  est diagonal dans l'espace des positions  $x$ , tandis que l'opérateur de propagation  $\hat{U}_{prop}$  est diagonal dans l'espace des impulsions  $p$ . Nous pouvons montrer que le couplage des états d'impulsions par les kicks se fait comme il suit :

$$\langle p | \hat{U}_{kick} | p' \rangle = \sum_m i^m \mathcal{J}_m\left(\frac{K}{\bar{k}}\right) \delta(p' - p = \bar{k}m). \quad (1.10)$$

On voit ici que l'opérateur  $\hat{U}_{kick}$  couple les états d'impulsions séparés d'une quantité  $\bar{k}k$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ . D'autre part, en prenant l'évolution temporelle d'une onde plane  $|q\bar{k}\rangle$  avec  $q \in [0, 1)$ , la quantité  $q\bar{k}$ , appelée la *quasi-impulsion*, sera alors conservée, ce qui n'est autre que l'application du théorème de Bloch dans l'espace des impulsions. Enfin, la présence de la fonction de Bessel de première espèce indique un couplage à courte portée des états d'impulsion du fait de sa décroissance exponentielle caractéristique.

L'approximation faite dans le cadre de la dynamique quantique du Kicked Rotor est la discrétisation des valeurs de  $x \in [-\pi, \pi[$ , où  $x_k = \frac{2\pi}{N_s} k$ , où les  $k$  sont cette fois compris dans l'intervalle  $[-N_s/2, N_s/2[$ , et où  $N_s$  est le nombre (pair) de sites en impulsion que nous autorisons. Les simulations ont été réalisées dans la mesure où elles ne dépendent

pas de la taille du système (ici  $N_s$ ), régime dans lequel l'approximation est bonne.

Pour procéder à la simulation numérique, nous réalisons l'évolution temporelle des états en impulsion  $\langle \bar{k}(k+q) | \psi(t) \rangle$ , où la fonction d'onde initiale est  $|\psi(t=0)\rangle = |p = q\bar{k}\rangle$ . Ceci permet de réaliser une moyenne sur les quasi-impulsions, en prenant pour chaque réalisation de la dynamique  $q$  choisie aléatoirement avec une probabilité uniforme de tirer une quasi-impulsion dans l'intervalle  $[0, 1]$ . De plus, comme l'illustre la relation de commutation reliant les opérateurs  $\hat{p}$  et  $\hat{x}$ , l'espace des impulsions et des positions sont des espaces conjugués dont le passage entre ces derniers se fait numériquement par des Transformées de Fourier rapide. On peut alors faire la simulation de la dynamique d'un nuage d'atomes froids kickés au sein d'un piège magnéto-optique comme le montre la figure 1.5<sup>1</sup>.

### 1.1.2 Localisation dynamique

Ainsi, tel qu'il est présenté sur la figure 1.5, le pendule quantique du Kicked Rotor se démarque nettement de sa version classique, notamment par l'observation d'une diffusion chaotique sur des temps inférieurs à un temps caractéristique qu'on appelle "temps de localisation"  $t_{loc}$  après quoi, la dynamique se gèle et laisse place à une *localisation dynamique* en référence au fait qu'elle a lieu dans l'espace des impulsions. Dans ce cas, la variance du paquet d'onde dans l'espace des impulsions tend vers une constante lorsque  $t \gg t_{loc}$  :

$$\langle k^2 \rangle = 2k_{loc}^2 \quad (1.11)$$

où  $k_{loc}$  est la "longueur de localisation" associée à la décroissance exponentielle du paquet d'onde

$$|\psi(k)|^2 = \frac{1}{k_{loc}} e^{-2|k|/k_{loc}}. \quad (1.12)$$

### 1.1.3 Équivalence avec le modèle d'Anderson

La dynamique que nous appliquons comme décrite plus tôt est équivalente à modifier légèrement l'Hamiltonien (1.2), en remplaçant  $p$  par  $p + q\bar{k}$  :

$$\mathcal{H}_q = \frac{(\hat{p} + q\bar{k})^2}{2} + K \cos \hat{x} \sum_n \delta(t - n) \quad (1.13)$$

qui est l'Hamiltonien avec lequel nous travaillons par la suite. On note son opérateur d'évolution associé  $\hat{U}_q$ . Cet opérateur est en fait équivalent à celui d'un modèle d'Anderson unitaire [46-48] en présence de désordre pseudo-aléatoire, qui a été lui-même montré localisé [48]. En particulier, l'opérateur  $\hat{U}_q$  peut s'écrire comme une matrice unitaire dans la base des impulsions  $|p = \bar{k}k\rangle$ , dont les éléments extra-diagonaux sont

1. Nous exposerons tout ce qui attrait aux quantités dans l'espace des impulsions en fonction de la quantité  $k$  au lieu de la quantité  $p = (k + q)\bar{k}$

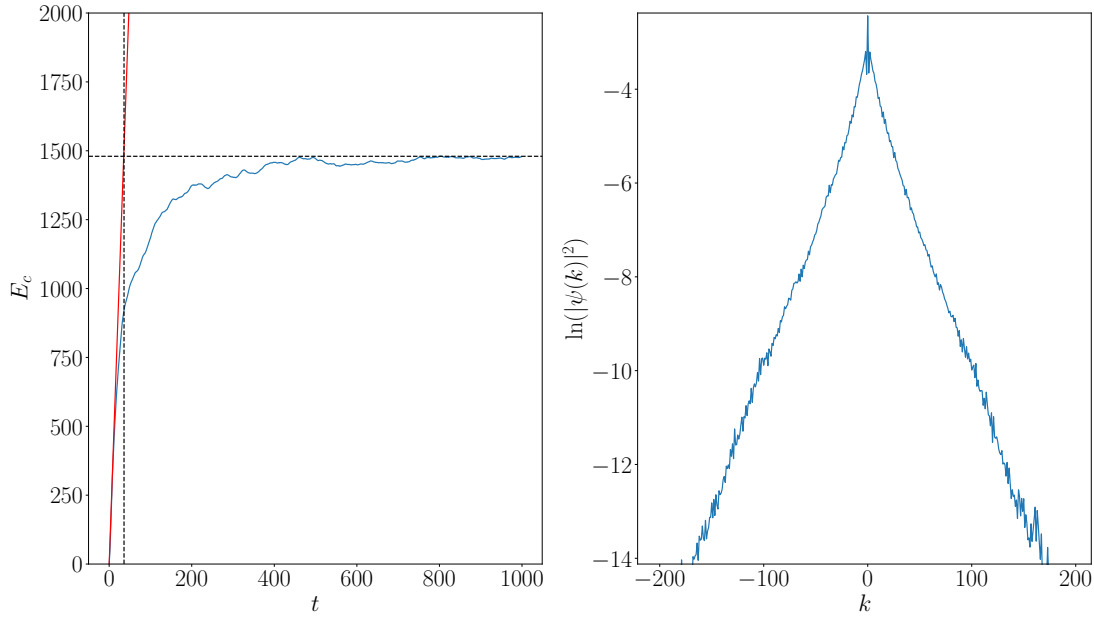


FIGURE 1.5 – Dynamique du Kicked Rotor à temps longs ( $t \gg t_{loc}$ ) pour  $K = 10$ ,  $t = 1000$ , moyennée sur 3000 valeurs de quasi-impulsion. L'énergie cinétique à gauche a d'abord une dynamique diffusive (courbe rouge), puis sature (tirets noirs horizontaux) au delà du temps de localisation  $t_{loc}$  (tirets noirs verticaux). À droite est représentée la fonction d'onde au bout de 1000 kicks en échelle semi-log, qui est exponentiellement localisée.

$(i^{k'-k} \mathcal{J}_{k'-k}(K/\bar{k}))$ , et dont la diagonal comporte un terme multiplicatif de phase pseudo-aléatoire  $(e^{-i\bar{k}(k+q)^2/2} \delta_{k,k'})$ .<sup>2</sup> En particulier, la partie  $(i^{k'-k} \mathcal{J}_{k'-k}(K/\bar{k}))$  comporte une structure de bande particulière ([48]), marqué par la décroissance extrêmement rapide de la fonction de Bessel en fonction des distances relatives  $\kappa = |k' - k|$  dans la limite où  $\kappa$  est grand devant  $K/\bar{k}$  :

$$\mathcal{J}_\kappa(K/\bar{k}) = \frac{1}{(\kappa + 1)!} (K/\bar{k})^{\kappa+1}, \quad (1.14)$$

ce qui implique un couplage à très courte portée des états d'impulsion. Dans cette même limite des  $K/\bar{k}$  grands, les phases de la partie  $(e^{-i\bar{k}(k+q)^2/2} \delta_{k,k'})$  sont distribuées de manière quasi-aléatoire [49, 50].

### 1.1.4 Localisation des états de Floquet

L'Hamiltonien (1.13) est symétrique par translation temporelle. Ainsi, le théorème de Floquet nous autorise à écrire l'opérateur évolution sur une période comme il suit :

$$\hat{U}_q |\Psi_\omega\rangle = e^{-i\omega} |\Psi_\omega\rangle, \quad (1.15)$$

2. l'équivalent de la distribution aléatoire des énergies pour le vrai modèle d'Anderson



où  $\omega$  sont les quasi-énergies associés à chaque état de Floquet  $|\Psi_\omega\rangle$ , et sont distribuées sur  $[0, 2\pi]$ . Il a été montré que les états de Floquet sont exponentiellement localisés dans l'espace des impulsions [51], et nous illustrons cela sur la figure 1.6, où nous montrons l'exemple de deux états de Floquet dont la longueur de localisation est similaire.

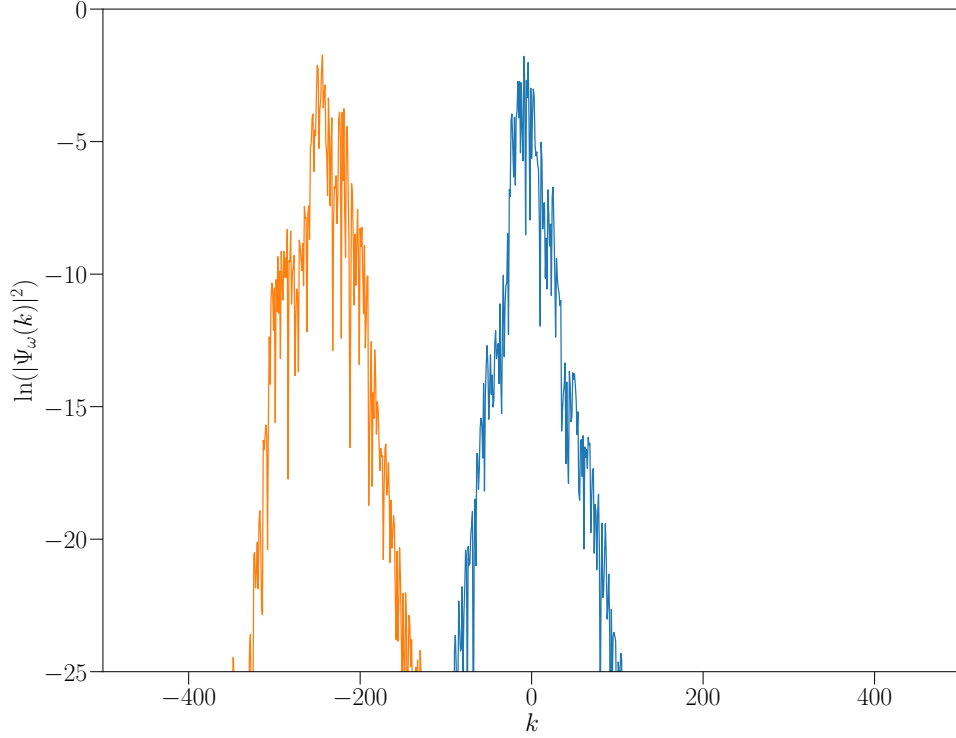


FIGURE 1.6 – Exemple de deux états propres de l'opérateur de Floquet (1.15) en échelle semi-log pour  $K = 15$ ,  $\bar{k} = 2.85$ . La décroissance exponentielle avec des longueurs de localisation similaires est mise en évidence.

Nous montrons à présent que l'opérateur de Floquet simule la même physique qu'un système pseudo-désordonné, menant à la localisation de ses états propres. Dans un premier temps, on écrit le terme de kick comme :

$$e^{-i\frac{K}{\bar{k}} \cos \hat{x}} = \frac{1 - i\hat{t}}{1 + i\hat{t}} \quad (1.16)$$

où on a posé  $\hat{t} = \tan(K \cos \hat{x}/2\bar{k})$ . C'est une fonction périodique en  $\hat{x}$ , qui peut donc être décomposée en série de Fourier :

$$\hat{t} = \sum_k t_k e^{ikx}. \quad (1.17)$$

De même, nous réécrivons l'opérateur de propagation libre :

$$e^{-i\left[\frac{(\hat{p}-\hat{k}q)^2}{2\hat{k}}-\omega\right]} = \frac{1-\hat{\varepsilon}}{1+\hat{\varepsilon}} \quad (1.18)$$

où  $\hat{\varepsilon} = \{\varepsilon_k\}$  est diagonal dans l'espace des impulsions, en particulier  $\varepsilon_k = \tan\left(\frac{1}{2}\left[\omega - \frac{k(k+q)^2}{2}\right]\right)$ . En décomposant les états de Floquet dans la base des impulsions  $(1+i\hat{t})^{-1}|\Psi_\omega\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$ , l'équation des états propres (1.15) peut ainsi se réécrire :

$$\varepsilon_k c_k + \sum_{k' \neq 0} t_k c_{k'-k} = -t_0 c_k. \quad (1.19)$$

Cette dernière équation n'est autre que celle d'un modèle de liaisons fortes avec désordre pseudo-aléatoire. "Pseudo", car malgré qu'elles soient a priori distribuées de manière quasi-aléatoire, cela n'en reste pas moins déterministe puisqu'elles sont distribuées selon une distribution lorentzienne, démontrant également des corrélations à courtes portées entre ces dernières (voir encart figure 1.7). Nous pouvons voir également que pour chaque valeur de quasi-impulsion  $q$  et  $\omega$  correspond une réalisation du désordre, comme le montre la figure 1.7.

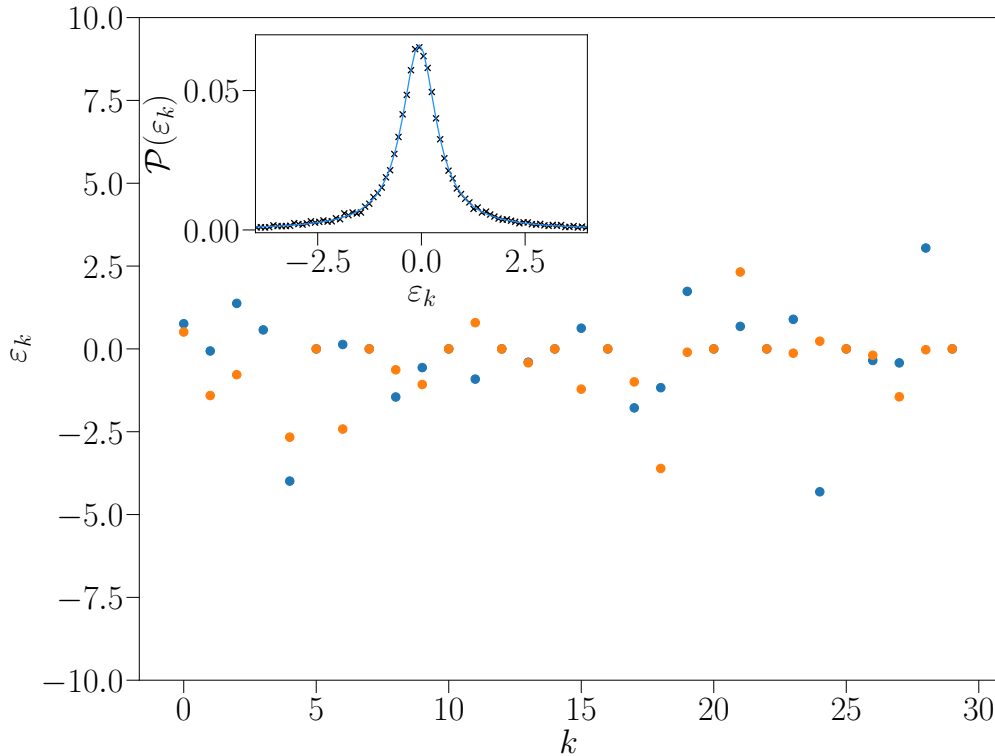


FIGURE 1.7 – Répartition des quasi-énergies  $\varepsilon_k$  en fonction de  $k$  pour les cas  $q = 0$  (bleu) et  $q = 0.5$  (orange). Dans chaque cas,  $\omega = 1.3$ . L'encart représente la densité de probabilité des énergies  $\varepsilon_k$  (croix noirs), fait sur 20000 tirages, que nous avons fittée par une lorentzienne de largeur à mi-hauteur  $\Gamma = 1$  (trait plein bleu).

D'autre part, les termes  $t_k$  de saut entre les différents sites ne se limitent pas aux plus proches voisins, mais décroissent exponentiellement avec les impulsions  $k$ . Le caractère pseudo-aléatoire et la décroissance exponentielle des termes de saut entre sites sont des conditions suffisantes pour observer le phénomène de localisation [49, 50].

### 1.1.5 Lien entre la localisation dynamique et la localisation des états de Floquet

Nous avons montré précédemment que la dynamique quantique du Kicked Rotor se démarque totalement de sa version classique par un gel de la dynamique au-delà du temps de localisation  $t_{loc}$ . Nous avons également montré que l'opérateur évolution lui étant associé reproduit la physique d'un système désordonné analogue à la physique d'Anderson grâce au formalisme de Floquet. Étant donné que les états propres du système sont les états de Floquet de  $\hat{U}_q$ , nous pouvons exprimer la fonction d'onde initiale  $|\psi(t=0)\rangle$  dans la base des états de Floquet  $|\Psi_\omega\rangle$  :

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_i c_i |\Psi_{\omega_i}\rangle. \quad (1.20)$$

Or, la dynamique de  $\psi$  étant gouvernée par l'opérateur  $\hat{U}_q$ , nous pouvons calculer l'évolution temporelle de celle-ci comme il suit :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}_q^t |\psi(t=0)\rangle = \sum_i c_i e^{-i\omega_i t} |\Psi_{\omega_i}\rangle. \quad (1.21)$$

En projetant cette équation dans l'espace des impulsions, i.e.  $\phi(k, t) \equiv \langle k | \psi(t) \rangle$ , nous pouvons calculer la densité de probabilité dans l'espace des impulsions :

$$|\phi(k, t)|^2 = \sum_{i,j} c_i c_j^* e^{-i(\omega_i - \omega_j)t} \langle \Psi_{\omega_i} | k \rangle \langle k | \Psi_{\omega_j} \rangle. \quad (1.22)$$

Ainsi, la dynamique peut se voir comme l'accumulation de terme de phase relative  $e^{-i(\omega_i - \omega_j)t}$ , dont l'argument  $(\omega_i - \omega_j)t$ , à partir d'un certain temps fini  $t_{loc}$ , fini par dépasser  $\pi$ . C'est à partir de ce temps pour lequel les états de Floquet, dont  $\omega_i \neq \omega_j$ , cessent de contribuer à la dynamique. Ainsi, pour  $t \gg \tau$  :

$$|\phi(k, t \gg \tau)|^2 = \sum_i |c_i|^2 \langle \Psi_{\omega_i} | k \rangle \langle k | \Psi_{\omega_i} \rangle = \sum_i |c_i|^2 |\Psi_{\omega_i}(k)|^2. \quad (1.23)$$

Or, nous avons montré plus tôt avec la figure 1.6, que les états de Floquet sont tous localisés autour d'un état d'impulsions  $k_i$  avec une longueur de localisation similaire  $\ell$ ,  $|\Psi_{\omega_i}(k)|^2 \propto \exp(-|k - k_i|/\ell)$ . Ainsi, la distribution en impulsion à temps longs est une somme d'états exponentiellement localisés sur une même plage d'états d'impulsions (fixé par  $t_0$ , qui dépend des paramètres  $K$  et  $\tilde{k}$ ). La contribution de chaque état de Floquet est encodée dans les termes d'expansion  $c_i = \langle \Psi_{\omega_i} | \psi(t=0) \rangle$  et donc par la condition initiale implémentée. De ce fait, si cette dernière est moins large que la longueur de localisation  $\ell$ , l'état à un temps supérieur à  $t_{loc}$  se décomposera dans la base de Floquet, dont la contribution formera un état de largeur de l'ordre  $\ell$ , qui n'est autre que  $k_{t_{loc}}$  présenté sur la figure 1.5.

## 1.2 Dynamique quantique du Kicked Rotor quasi-périodique

L'observation de la transition d'Anderson n'est possible qu'à des dimensions  $d > 2$ . Cette contrainte implique notamment que son observation au sein d'un système tridimensionnel désordonné n'a été rapportée qu'en 2012 dans une expérience d'atomes froids [33]. Avant cela, les expériences dans les cristaux réels sont rudes : les interactions avec les phonons cassent les effets de localisation, et empêchent une claire observation de la transition d'Anderson (et par extension, la détermination de l'exposant critique). De plus, il n'est pas possible de mesurer directement le degré de localisation de la fonction d'onde électronique dans ce type de système, c'est pourquoi on se réfère à des grandeurs macroscopiques comme la conductivité ou la susceptibilité diélectrique. Les premières expériences sont réalisées dans des semi-conducteurs [52-55] et ont permis de réaliser les premières observations et mise en évidence d'une transition. Cependant, l'exposant critique  $\nu$  reste une quantité à déterminer, car ces expériences ne permettent pas une détermination non ambiguë de ce dernier, tantôt donnant des exposants proches de 0.5 [52, 53], tantôt égal à 1 [54] ou plutôt de 2 [55]. Une autre expérience, avec de l'étain, a permis une observation claire de la transition, sans conclusion sur l'exposant critique [56]. Bien plus tard dans les années 2010, se basant sur la correspondance entre un modèle quasi-périodique du Kicked Rotor et un modèle d'Anderson 3D, les équipes atomes froids du laboratoire PhLAM de Lille et du LKB sont parvenues à réaliser la première observation expérimentale de la transition d'Anderson ainsi que la mesure de l'exposant critique  $\nu$  de la transition [42], en ayant également montré l'appartenance à la même classe d'universalité de ces deux systèmes [43], portant leur équivalence du statut de conjecture à correspondance stricte. Nous présentons dans cette section cette version du Kicked Rotor, en donnant les motivations et les enjeux de son étude.

### 1.2.1 La transition d'Anderson et théorie d'échelle

La transition d'Anderson est le passage d'états étendus caractéristiques d'une phase métallique composée d'onde de Bloch, à des états localisés correspondant cette fois-ci à une phase isolante. Cette transition fait partie de la classe des transitions de phases continues, qui, du fait qu'elle ne soit pas due à des fluctuations thermiques, mais des fluctuations quantiques, sont aussi appelées transitions de phases quantiques. Dans cette catégorie de transition existe des sous-familles dont les transitions sont d'origine électronique, comme les transitions de Mott liées aux corrélations entre électrons et les transitions d'Anderson qui, comme nous l'avons discuté plus tôt, sont liées au désordre au sein d'un système électronique.

L'introduction d'une théorie générale étant en mesure de décrire les propriétés des matériaux à l'échelle macroscopique à partir des propriétés microscopiques a été proposée par Thouless en 1974 [2]. L'idée est de construire un hypercube de volume  $(2L)^d$  ( $d$  est la dimension du système,  $L$  est la taille du système en nombre de sites) à partir de cubes de taille  $L^d$ . Son hypothèse est alors assez basique, et consiste à dire que ce qui dicte la nature des états propres du solides de taille  $(2L)^d$ , sont ceux des petits cubes de taille  $L^d$  : les

états localisés dans les petits cubes construisons un isolant à l'échelle de l'hypercube, les états délocalisés se recouvrent et bâtissons un conducteur. C'est en 1979 que Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan [6] introduisent la fameuse théorie d'échelle à un paramètre de la localisation. Cette dernière a permis la prédiction théorique d'une transition de phase uniquement pour les dimensions strictement supérieures à 2. L'hypothèse forte de cette théorie est que, proche de la transition, il suffit d'un paramètre d'ordre qui permet la description complète du comportement critique de la conductivité côté métallique et de la localisation côté isolant. Dans le cas d'un système électronique, les auteurs ont introduit la conductance adimensionnée (aussi appelée "nombre de Thouless") :

$$g(L) = \frac{2\hbar}{e^2} G(L), \quad (1.24)$$

où  $e$  est la charge de l'électron,  $G$  est la conductance réelle du système, mesurable expérimentalement. Ce paramètre peut également être perçu comme une description microscopique du désordre  $W$  inverse  $g \sim 1/W$ , ce qui en fait un paramètre pertinent pour une description du système, puisqu'il sera petit pour un grand désordre, ce qui conduit à la localisation, et grand pour un faible désordre, correspondant à la diffusion. D'autre part, basée sur les travaux de Callan et Symanzik [57] en théorie des champs quantiques, les auteurs introduisent également la dérivée logarithmique  $\beta$  :

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L} = \frac{L}{g} \frac{dg}{dL}, \quad (1.25)$$

supposée croissante et continue. Cette équation nous indique une loi d'échelle  $g \sim e^{L^\beta}$ , mais aussi que  $\beta$  peut être exprimé uniquement en fonction de  $g$ , ce qui en fait par extension un invariant d'échelle. Dans les limites asymptotiques de fort et faible désordre, il est possible d'obtenir une représentation de la fonction  $\beta$  comme présenté sur la figure 1.8, où nous représentons l'évolution de la fonction  $\beta$  en fonction de  $\ln g$  pour les dimensions  $d = 1, 2$  et  $3$ . Deux cas sont alors à distinguer :

- $\beta(g) < 0$ , au quel cas les états sont localisés, i.e.  $g \sim \exp\left(-\frac{L}{\xi}\right)$  avec  $\xi$  la longueur de corrélation, et la conductance diminue avec  $L$ .
- $\beta(g) > 0$ , où cette fois-ci, les états sont délocalisés, i.e.  $g \sim L^{d-2}$  [6], et la conductance augmente avec  $L$ .

Ces deux cas ne sont présents en même temps que pour  $d = 3$  où la fonction  $\beta$  change de signe dès lors que  $g = g_c$ . C'est la fameuse transition métal-isolant.

## 1.2.2 Exposant critique

Les transitions du second ordre sont caractérisées par certaines quantités physiques qui se comportent en loi de puissance, auxquelles on associe un exposant critique. Pour la transition d'Anderson, deux quantités pertinentes caractérisent les phases de par et d'autre de la phase critique :

- le facteur de diffusion côté phase conductrice  $\mathcal{D} \sim (W_c - W)^s$ , avec  $s$  l'exposant associé à la diffusion,
- la longueur de localisation côté phase isolante  $\ell \sim (W - W_c)^{-\nu}$ , avec  $\nu$  l'exposant associé à la localisation.

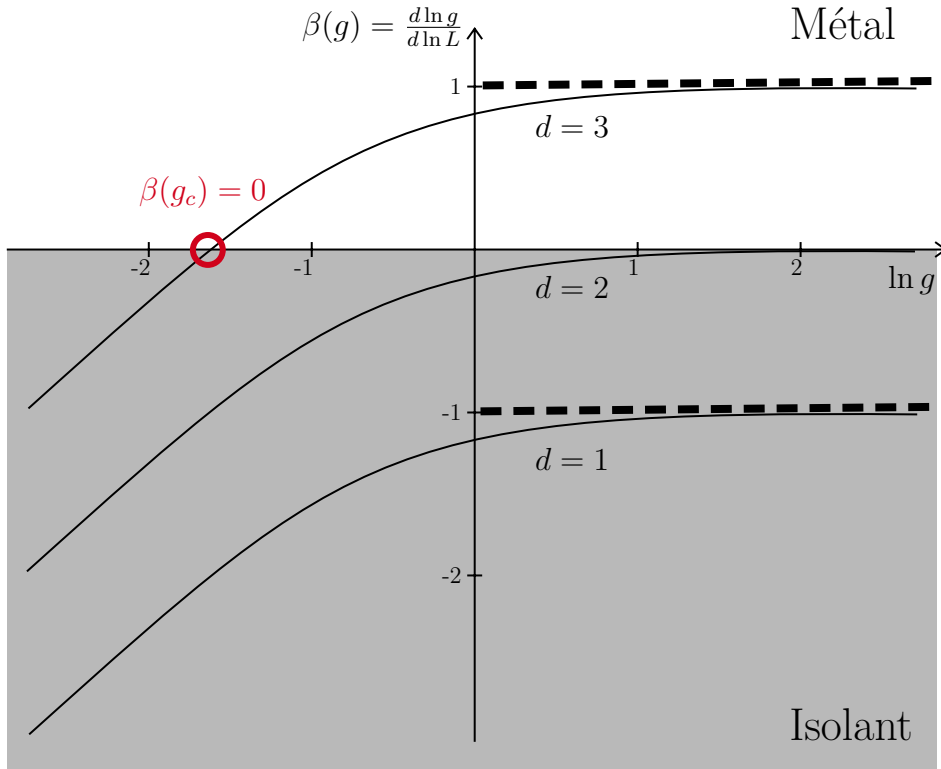


FIGURE 1.8 – Fonction d'échelle  $\beta(g)$  pour  $d = 1, 2, 3$  qui permet la prédiction d'une transition métal-isolant pour  $d = 3$ .

En particulier, ces deux exposants satisfont la loi de Wegner [5]  $s = (d - 2)\nu$ , qui nous indique que, dans le cas de la transition d'Anderson 3D,  $s$  et  $\nu$  sont égaux. Un paramètre physique afin de réunir ces deux aspects est la longueur de corrélation  $\xi$ , connue pour diverger au point de la transition de phase (typique des transitions d'ordre 2, comme la transition superfluide ou la condensation de Bose Einstein dont nous parlerons dans les chapitres suivants). Côté isolant, la longueur caractéristique  $\xi \sim \ell$ , côté conducteur elle sera là inversement proportionnelle à la conductivité, où  $\xi \sim 1/\sigma$ . Ce comportement peut se décrire ainsi :

$$\xi \sim |W - W_c|^{-\nu}. \quad (1.26)$$

Le comportement du système au voisinage de la transition est donc gouverné par l'exposant  $\nu$ . Un enjeu crucial a été dans un premier temps d'être en mesure de déterminer cet exposant de manière théorique. Pour ce faire, des méthodes diagrammatiques auto-consistantes ont été utilisées [5, 58-60], qui ont aboutis à  $\nu = 1$ . Ces outils restent néanmoins des approches, qui, lorsqu'on leur incluent la diffusion anormale prédite à la transition par la théorie d'échelle à un paramètre [61], donnent finalement  $\nu = 1.5$ . Quand bien même, cette valeur théorique est toujours en deçà des prédictions numériques qui ont aboutis à un exposant critique  $\nu = 1.59 \pm 0.01$  [10, 43], qui est la valeur que nous retiendrons par la suite. Ces différences sont notamment associées à la présence de multifractalité (qui se traduit par l'existence de relations d'auto-similarités à différentes échelles) des fonctions d'ondes à la transition [62, 63].

### 1.2.3 Le Kicked Rotor quasi-périodique et lien avec la transition d'Anderson

Au vu de la correspondance que nous avons établie dans le cas unidimensionnel entre le Kicked Rotor et le modèle d'Anderson, il serait naturel de trouver une version du Kicked Rotor qui reproduise la physique des modèles d'Anderson de dimension supérieure. C'est en ce sens qu'a été introduit le modèle du Kicked Rotor quasi-périodique à modulation d'amplitude par D. Shepelyansky, avec un modèle à deux fréquences [64], et par la suite par Casati, Guarneri et Shepelyansky avec un modèle à trois fréquences [40]. En fait, l'addition de fréquences dans le terme de forçage permet l'augmentation de la dimensionnalité effective du système, qui correspondra au nombre de fréquences ajoutées.

Une première manière naturelle de généraliser le modèle du Kicked Rotor périodique est un modèle en dimension  $d$  comme il suit :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^d \omega_i \frac{\hat{p}_i^2}{2} + K \cos \hat{x}_i \sum_n \delta(t - n). \quad (1.27)$$

Formellement, ce modèle est équivalent à un modèle d'Anderson en dimension  $d$  :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{0}} t_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = -t_{\mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} \quad (1.28)$$

où  $\mathbf{k}$  représentent les coordonnées de sites d'un réseau cristallin de dimension  $d$ , en lien avec les impulsions via  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ . Les énergies sur sites sont alors modifiées par rapport au cas 1D :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \tan \left[ \frac{1}{2} \left( \omega - \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i k_i^2 \right) \right], \quad (1.29)$$

également distribuées de manière pseudo-aléatoire avec une densité de probabilité lorentzienne. D'autre part, on remarque que la conditions d'incommensurabilité entre les quasi-énergies et avec  $\pi/\hbar$  apparaît immédiatement pour garantir l'absence de périodicité dans le terme  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ . Le terme de couplage  $t_{\mathbf{k}'}$  est également modifié, car il est non plus restreint au premier voisin, mais décroît exponentiellement vite avec  $|k'|$ . Entre autre, ce couplage est dépendant essentiellement du rapport  $K/\hbar$  qui joue alors le rôle de paramètre de contrôle du désordre.

Ce modèle s'est révélé tout à fait pertinent pour l'étude des propriétés de transport quantiques en dimension  $d$ , notamment car il a été en mesure de redonner des résultats conformes avec les prédictions de la théorie de la localisation. En l'occurrence, en dimension 2, la localisation a lieu qu'importe l'amplitude de forçage  $K$ , et la longueur de localisation croît exponentiellement avec le rapport  $K/\hbar$  [65]. En dimension 3, le système comporte une transition de phase métal-isolant de type Anderson en deçà d'une valeur critique  $K_c$  [66]. Un marqueur de la phase critique est une diffusion dite anormale avec un exposant  $2/3$ , i.e.  $\langle \mathbf{k}^2 \rangle \sim t^{2/3}$ , comme prédit par la théorie d'échelle à un paramètre.

Cependant, ce modèle comporte son lot de désavantages, notamment pour sa simulation numérique. De par sa tridimensionnalité, l'étude numérique est très largement limitée par

des effets de taille finie. Ceci ne permet pas une étude fine des propriétés de transport dans les différentes phases, ainsi que la démonstration de l'universalité des propriétés critiques de la transition. Du point de vue des expériences, il n'a jamais été rapporté la réalisation d'une version du Kicked Rotor au-delà de la dimension 1, ce qui ne permet donc pas de confirmer les prédictions numériques déjà limitées. Ces contraintes nous poussent donc à considérer une version unidimensionnelle de ce modèle, qui comporte trois fréquences de modulation. Cela a pour avantage une simplicité de réalisation expérimentale, modifiant de manière raisonnable le dispositif discuté plus tôt.

Le système que nous considérons à présent est un modèle à trois fréquences du Kicked Rotor périodique [40, 67] :

$$\mathcal{H}_{qp} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos \hat{x} \sum_n \delta(t - n), \quad (1.30)$$

obtenu en rajoutant une modulation de l'amplitude des kicks avec deux fréquences  $\omega_{1,2}$  de modulation :

$$\mathcal{K}(t) = K[1 + \varepsilon \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)]. \quad (1.31)$$

En particulier, on peut montrer que la dynamique de l'Hamiltonien (1.30) est totalement identique à un modèle de Kicked Rotor 3D suivant [44] :

$$\mathcal{H}_{3D} = \frac{p_1^2}{2} + \omega_1 p_2 + \omega_2 p_3 + K \cos x_1 [1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3], \quad (1.32)$$

dont la condition initiale est une source place :

$$\Psi(\mathbf{x}, t = 0) = \psi(x_1, t = 0) \delta(x_2 - \varphi_2) \delta(x_3 - \varphi_3), \quad (1.33)$$

où  $\psi(x_1, t = 0)$  est une condition initiale quelconque pour le Kicked Rotor quasi-périodique (1.30). On peut à nouveau montrer que l'Hamiltonien (1.32) peut être reformulé en terme de modèle d'Anderson 3D analogue à celui présenté en (1.28), où cette fois-ci les énergies sur site  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  sont :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \tan \left[ \frac{1}{2} \left( \omega - k \frac{k_1^2}{2} + \omega_1 k_2 + \omega_2 k_3 \right) \right], \quad (1.34)$$

et les amplitudes de saut  $t_{\mathbf{k}}$ , sont les coefficients d'expansion en triple série de Fourier de la fonction :

$$t(x_1, x_2, x_3) = \tan[K \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3 / 2k)]. \quad (1.35)$$

Ainsi, l'équation (1.34), dans la mesure où le quadruplet  $(k, \omega_1, \omega_2, \pi)$  est incommensurable, les énergies sur site sont pseudo-désordonnées du fait de la dispersion non linéaire selon la direction  $k_1^2$  [40, 68]. D'autre part, on constate également que le Kicked Rotor quasi-périodique ne comporte pas de contrôle du désordre sur site. En revanche, l'équation (1.35) nous indique que le couplage des sites à leur plus proches voisins est gouverné par le couple  $(K, \varepsilon)$ . Autrement dit, le modèle du Kicked Rotor 3D correspond à un modèle d'Anderson 3D où l'amplitude du désordre est fixe, mais les amplitudes de saut sont contrôlées par le paramètre de forçage  $K$  ou l'amplitude de modulation  $\varepsilon$ . À faible



$(K, \varepsilon)$ , on s'attend donc à une correspondance avec un fort désordre et donc un régime localisé, tandis que les grandes valeurs de  $(K, \varepsilon)$  correspondent à des valeurs de désordre plus faibles, engendrant une diffusion. C'est ce que nous montrons de manière synthétique sur la figure 1.9, et plus en détail sur la figure 1.10 où nous voyons un changement de dynamique en fonction du couple  $(K, \varepsilon)$ .

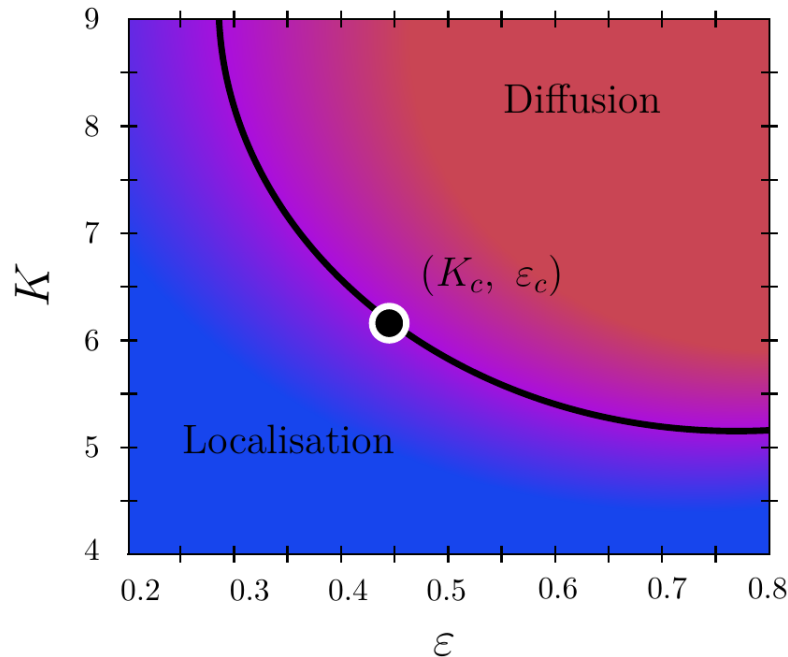


FIGURE 1.9 – Représentation schématique du diagramme de phase du Kicked Rotor quasi-périodique pour  $\hbar k = 2.89$ . La région localisée (isolant) est en bleue, la région diffusive (métal) est en rouge. La région violette correspond au régime critique à temps fini. À noter qu'à temps infini, cette région doit être infiniment fine du fait que la transition est d'ordre 2.

Nous avons montré que le modèle du Kicked Rotor quasi-périodique est tout à fait en mesure de reproduire, dans l'espace des impulsions, la physique d'un modèle d'Anderson 3D<sup>3</sup>. Ceci présente de gros avantages, en premier venant de la dimensionnalité effective. Pour les expérimentateurs, simuler la physique d'Anderson à l'aide des atomes froids s'est vu grandement simplifié, menant à la caractérisation de cette dernière de manière pointilleuse [42-44]. D'autre part, pour les physiciens numériques, résoudre un problème 1D reste toujours plus simple que dans le cas 3D et plus. Un autre avantage cette fois-ci plus subtil, est que dans le cadre de l'étude des systèmes désordonnés, les états propres d'un hamiltonien se répartissent de part et d'autre d'un seuil de mobilité  $E_c$  (plus connu sous le nom *mobility edge*) en fonction de leur énergie  $E$ , tantôt étendues, tantôt localisés pour une réalisation du désordre. Ainsi, dans ce type de système, ils coexistent des états isolants et conducteurs qui rendent plus compliqué l'observation de la transition en 3 dimensions [33, 72]. Or, dans notre modèle l'énergie  $E$  est fixée à  $t_0$  qui est une constante, impliquant

3. Pour être vraiment précis, il est analogue à un modèle d'Anderson 3D anisotrope [69-71].

que la transition est “propre” : les états de Floquet sont soit tous localisés, soit tous délocalisés. Enfin, la dernière pierre apportée à l’édifice en faveur d’une correspondance stricte entre ces deux modèles est la démonstration de leur appartenance à la même classe d’universalité. Le modèle d’Anderson 3D comporte une symétrie fondamentale : l’invariance par renversement du temps. Nous pouvons alors le classer dans l’ensemble Gaussien orthogonal avec les autres systèmes invariants par renversement du temps, dont l’exposant critique  $\nu$  prédit pour cette classe d’universalité vaut  $1.59 \pm 0.01$  [10]. Or, la correspondance stricte n’a pu être proclamée que très récemment par une analyse fine du flot de renormalisation du Kicked Rotor quasi-périodique [43], nous permettant en l’occurrence d’affirmer que ces deux systèmes sont de la même classe d’universalité, ont le même exposant critique  $\nu$ , et donc que le Kicked Rotor quasi-périodique exhibe les mêmes phénomènes critiques que la transition d’Anderson 3D.

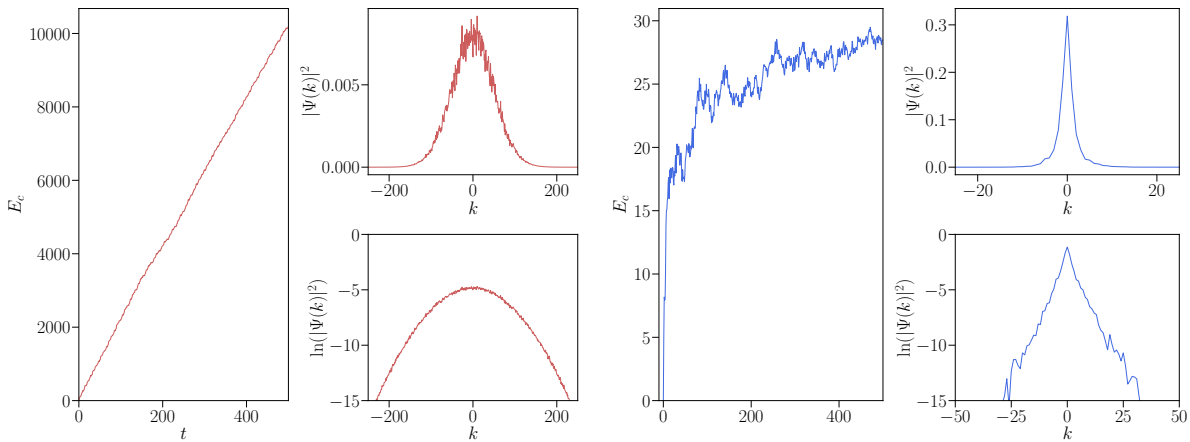


FIGURE 1.10 – Dynamique du Kicked Rotor quasi-périodique dans la phase conductrice et isolante pour  $k = 2.89$ ,  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}$ . À gauche en rouge : ( $K = 8, \varepsilon = 0.8$ ) et nous constatons un comportement diffusif, illustré par une croissance linéaire de l’énergie cinétique, et une forme gaussienne de  $|\Psi(k)|^2$ . À droite en bleu : ( $K = 4, \varepsilon = 0.1$ ) et nous pouvons constater une localisation dynamique à temps longs, illustrée cette fois-ci par la saturation de l’énergie cinétique et la décroissance exponentielle de  $|\Psi(k)|^2$ .

### 1.2.4 Théorie d’échelle en temps

Des études numériques préliminaires ont déjà été menées sur le Kicked Rotor quasi-périodique [40, 68] rapportant d’ores et déjà l’existence d’une transition de type Anderson séparant une phase localisée pour des amplitudes de kick  $K < K_c$  et une phase diffusive pour  $K > K_c$  (voir figure 1.10). Pour mener ces études numériques à notre tour, nous utilisons l’opérateur évolution sur une période suivant :

$$\hat{\mathcal{U}}_{qp} = e^{-i\frac{p^2}{2k}} e^{-i\frac{K}{k} \cos \hat{x} [1 + \varepsilon \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)]}, \quad (1.36)$$

où nous fixons pour la suite  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}$  et  $k = 2.89$  sauf mention contraire. L’étude de la transition en soit n’est pas une sinécure. Numériquement, les temps né-

cessaires pour observer la transition sont autour de  $t \gtrsim 10^5$  kicks<sup>4</sup>, ce qui implique des longs temps de simulation, étant donné qu'elles comportent également des moyennes sur les quasi-impulsions. Pourtant, si nous n'accédons pas à ces temps, la transition, censée être du second ordre et donc marquée d'une discontinuité, ne sera pas observable. Quand bien même cela ait été fait, la question reste entière quant à l'observation expérimentale. En effet, les simulations numériques sont idéales, dépourvues de source décohérence.

Pour ce faire, nous présentons brièvement la théorie d'échelle appliquée au Kicked Rotor quasi-périodique [44]. L'hypothèse forte faite dans le cadre de cette théorie est l'introduction d'une fonction d'échelle  $\mathcal{F}$  qu'on relie à l'évolution temporelle de  $\langle k^2(t) \rangle$  la variance du paquet d'onde comme il suit :

$$\langle k^2(t) \rangle = t^{m_1} \mathcal{F}[(K - K_c)t^{m_2}]. \quad (1.37)$$

En nous plaçant dans chaque phase, nous pourrions déduire les exposants  $m_{1,2}$ . Pour  $K < K_c$ , les fonctions d'ondes étant localisées, on atteint alors un état stationnaire marqueur de la localisation dynamique, et dans ce cas  $\langle k^2 \rangle \sim 2k_{loc}^2$ . Or, dans la phase localisée, proche de la transition  $k_{loc} \sim (K_c - K)^{-\nu}$ , d'où :

$$\langle k^2(t) \rangle \sim (K_c - K)^{-2\nu}. \quad (1.38)$$

Dans ce cas, si l'argument de la fonction d'échelle  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\mathcal{F}(x) \rightarrow (-x)^{-2\nu}$ . En combinant ces conditions :

$$\langle k^2(t) \rangle = t^{m_1 - 2\nu m_2} (K_c - K)^{-2\nu}, \quad (1.39)$$

qui nous mène à la condition  $m_1 - 2\nu m_2 = 0$ . De même du côté diffusif pour  $K > K_c$ , le coefficient de diffusion évolue comme  $\mathcal{D} \sim (K - K_c)^s$ , ce qui implique que  $\langle k^2(t) \rangle \sim (K - K_c)^2 t$ . Cette fois, pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{F}(x) \rightarrow x^s$  et ainsi :

$$\langle k^2(t) \rangle = t^{m_1 + s m_2} (K - K_c)^s, \quad (1.40)$$

qui mène à la condition  $m_1 + s m_2 = 0$ . Ainsi, on peut écrire les exposants critiques en fonction de  $m_{1,2}$  :

$$m_1 = \frac{2\nu}{s + 2\nu}, \quad m_2 = \frac{1}{s + 2\nu}. \quad (1.41)$$

L'utilisation de la loi de Wegner [5] qui impose  $s = \nu$  en dimension trois nous donne alors  $m_1 = \frac{2}{3}$  et  $m_2 = \frac{1}{3\nu}$ , ce qui nous permet d'écrire finalement :

$$\langle k^2(t) \rangle = t^{2/3} \mathcal{F}[(K - K_c)t^{1/3\nu}]. \quad (1.42)$$

Nous avons alors une expression qui unifie les deux comportements du Kicked Rotor quasi-périodique, qui nous permet de faire des prédictions sur la phase critique. En particulier, pour  $K = K_c$ , la fonction d'échelle est une constante  $\mathcal{F}(0)$ , ce qui implique immédiatement que  $\langle k^2(t) \rangle \sim t^{2/3}$ , qui correspond à une diffusion dite anormale au point de transition. D'autre part, il est commode d'introduire la fonction  $\Lambda(K, t) = \langle k^2(t) \rangle t^{-2/3}$ , qui est alors

---

4. Ceci est en analogie avec la vraie transition d'Anderson, où la théorie d'échelle porte sur la taille de l'échantillon considéré.

égale à  $\mathcal{F}$  et sera donc de pente nulle dès lors qu'on sera au point  $K = K_c$ . Si nous réitérons le raisonnement de chaque côté de la transition, une quantité va alors ressortir d'elle-même, qui n'est autre que la longueur de corrélation  $\xi(K) = |K - K_c|^{-\nu}$ . En effet, dans la phase localisée,  $\mathcal{F}(x \rightarrow -\infty) = (-x)^{-2\nu}$  nous mène à :

$$\Lambda(K, t) = (K_c - K)^{-2\nu} t^{-2/3} = \left(\xi(K)t^{-1/3}\right)^2. \quad (1.43)$$

Du côté diffusif,  $\mathcal{F}(x \rightarrow \infty) = x^\nu$  renvoie :

$$\Lambda(K, t) = (K - K_c)^\nu t^{1/3} = \left(\xi(K)t^{-1/3}\right)^{-1}. \quad (1.44)$$

D'une part, remarquons que la théorie d'échelle à un paramètre nous permet, comme attendu, de trouver une quantité qui permet de caractériser le comportement du système au seuil critique. Elle permet entre autre la divergence de la longueur de corrélation  $\xi(K)$  au point  $K = K_c$ , en analogie totale avec le comportement de la longueur de corrélation pour un vrai système désordonné tridimensionnel. D'autre part, les limites asymptotiques exposées ci-dessus nous pousse naturellement à vouloir écrire  $\Lambda$  comme une fonction d'échelle dont l'argument est  $\xi(K)t^{-1/3}$  :

$$\Lambda(K, t) = f\left(\xi(K)t^{-1/3}\right). \quad (1.45)$$

L'aboutissement de la théorie d'échelle appliquée au Kicked Rotor quasi-périodique est le développement de technique de finite-time scaling (analogue du finite-size scaling dans les systèmes désordonnés). Nous n'emploierons pas ces techniques, mais nous invitons avec vigueur un lecteur curieux à s'intéresser à la référence [44], où la procédure y est décrit par Gabriel Lemarié et Dominique Delande, à l'origine de l'élaboration de cette technique et des premiers algorithmes pour effectuer la "mise à l'échelle" de  $\Lambda(K, t)$ , important pour une détermination fine de l'exposant critique  $\nu$  et son caractère universel.

Pour notre part, nous allons exploiter les comportements de  $\Lambda(K, t)$  attendus dans les différentes phases. En effet, nous pouvons relier la longueur de corrélation aux quantités pertinentes de chaque phase. Dans la phase localisée, cette quantité est la longueur de localisation  $k_{loc}$ , en particulier :

$$\Lambda(K, t) = f\left(\xi(K)t^{-1/3}\right) = 2k_{loc}^2 t^{-2/3}, \quad (1.46)$$

qui, par identification avec l'équation (1.43) mène à  $\xi \sim k_{loc}$ . Du côté diffusif, on a cette fois :

$$\Lambda(K, t) = f\left(\xi(K)t^{-1/3}\right) = \mathcal{D}t^{1/3}, \quad (1.47)$$

qui donne cette fois  $\xi(K) \sim 1/\mathcal{D}(K)$  en comparant à l'équation (1.44). Notons d'une part que cela est consistant avec ceux à quoi on s'attend : du côté localisée, à mesure que l'on s'approche de la transition, la longueur de localisation va augmenter avec  $K$ , tandis que du côté diffusif, le facteur de diffusion  $\mathcal{D}$  tendra vers 0 à mesure qu'on se rapproche de  $K_c$ , ce qui est en outre en accord avec une divergence de  $\xi$  au point critique. Ces quantités peuvent facilement être extraites par la variance du paquet d'onde pour la longueur de la localisation, et par la pente de l'énergie pour le facteur de diffusion.

### 1.2.5 Comportement asymptotique de la fonction d'onde au seuil critique - Théorie auto-cohérente

Au point critique de la transition d'Anderson, nous l'avons montré, la fonction d'onde n'est ni sujette à la localisation, ni à la diffusion, mais plutôt à un régime intermédiaire qui est la diffusion anormale. Les propriétés de la fonction d'onde sont non triviales à ce point précis par bien des aspects, comme l'invariance d'échelle ou la multi-fractalité, et ont fait l'objet d'un intérêt particulier aussi bien théoriquement [62] qu'expérimentalement [73]. D'autre part, nous avons montré que le Kicked Rotor quasi-périodique est en mesure de nous offrir la possibilité d'observer la fonction d'onde directement par la mesure, et son caractère uni-dimensionnel simplifie grandement la simulation numérique.

La théorie d'échelle précédemment exposée est extrêmement utile, car elle relie l'exposant critique du système aux propriétés d'une fonction d'échelle qui ne dépend que d'un paramètre. Pour autant, il subsiste une faiblesse de cette théorie qui réside dans le fait qu'elle n'apporte aucune prédiction quant aux fluctuations du système au seuil critique, ce qui est pourtant nécessaire pour capturer toutes les subtilités de la phase critique du système. La théorie auto-cohérente de Vollhart et Wölfe [60] a pour volonté d'être une extension de cette théorie d'échelle, et peut-être vue comme une théorie des champs pour la localisation d'Anderson. Nous en donnons quelques éléments dans cette partie, avant d'aboutir à la forme de la fonction d'onde du Kicked Rotor quasi-périodique à la transition.

Revenons tout d'abord aux propriétés de transport du Kicked Rotor 3D anisotrope au régime critique, qui nous permettra par la suite de déduire les propriétés de la dynamique au seuil critique du Kicked Rotor quasi-périodique.

La théorie auto-cohérente permet de capturer les propriétés de la transition d'Anderson. Elle décrit entre autre la probabilité de diffusion quantique  $\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)$  aux temps longs et aux grandes distances. Pour un désordre faible, i.e.  $K/k \gg 1$ , il est prédit que la dynamique est diffusive et que la transformée de Fourier de  $\mathcal{P}$  par rapport à  $\mathbf{k}$  et au temps comporte un pôle diffusif :

$$\mathcal{P}(\varphi, \omega) = \frac{1}{-i\omega + \mathcal{D}\varphi^2}, \quad (1.48)$$

où  $\mathcal{D}$  est la constante de diffusion classique chaotique telle que  $\langle \mathbf{k}^2(t) \rangle = 2d\mathcal{D}t$ , avec  $d = 3$ . Nous savons aussi qu'en augmentant le désordre, des effets interférentiels quantiques vont restreindre le transport diffusif, ce qui conduit à la localisation d'Anderson qu'on appelle également localisation forte. En particulier, on peut trouver une constante de diffusion  $\mathcal{D}(\omega)$ . Ceci est décrit par une constante de diffusion dépendant de la fréquence  $\mathcal{D}(\omega)$  et vérifiant l'équation auto-cohérente qui suit :

$$\mathcal{D}(\omega) = \mathcal{D} - 2\mathcal{D}(\omega) \int \frac{d^3\Psi}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega + \mathcal{D}(\omega)\Psi^2}. \quad (1.49)$$

Cette équation capture tous les aspects des propriétés dynamiques d'un système sujet à la transition d'Anderson, la localisation comme la diffusion à temps longs, i.e. quand  $\omega \rightarrow 0$ , mais aussi la façon dont le  $\mathcal{D}(\omega)$  converge vers ces asymptotes. Cela justifie également

la nécessité d'atteindre les temps longs pour s'assurer que nous sommes bien au seuil de transition, car proche de ce seuil à temps longs, l'on peut toujours tomber dans une phase localisée ou soit diffusive à mesure que la largeur de la transition s'amenuise pour des temps infinis. D'autre part, il a été montré qu'au seuil de transition d'Anderson, la constante de diffusion  $\mathcal{D}(\omega)$  donnée par (1.49) vérifie la loi d'échelle suivante [74] :

$$\mathcal{D}(\omega) \sim \omega^{1/3} G(\omega \xi^3), \quad (1.50)$$

où  $\xi$  est la longueur de corrélation dans le régime diffusif ou assimilée à la longueur de localisation dans la phase localisée. En particulier, la fonction d'échelle  $G$  vérifie l'équation :

$$G(z) = \pm z^{-1/3} + \pi \sqrt{3} G(z)^{-1/2}. \quad (1.51)$$

C'est là l'aboutissement de la théorie auto-cohérente : elle permet de faire une description complète de la constante de diffusion  $\mathcal{D}(\omega)$ , plus particulièrement au seuil critique, et donne en plus une forme explicite de la fonction d'échelle  $G$  qui nous permet d'ailleurs de donner ses asymptotes.

Non seulement nous sommes en mesure de retrouver les prédictions faites par la théorie d'échelle, mais elle nous permet également de prédire la forme de la fonction d'onde au seuil critique. Entre autre, il est possible de montrer que la probabilité  $\mathcal{P}(k, t) = |\Psi(k, t)|^2$  revêt un pôle diffusif comme il suit :

$$\mathcal{P}(k, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi k} \frac{1}{-i\omega + \mathcal{D}(\omega)\varphi^2}. \quad (1.52)$$

Qui n'est autre que la transformée de Fourier dans la direction de  $\varphi$  et  $\omega$  de l'équation (1.48). En utilisant le théorème des résidus et des changements de variables, on peut montrer que la fonction  $\mathcal{P}$  s'écrit comme une fonction de Airy sous sa forme intégrale :

$$\mathcal{P}(k, t) = \frac{3}{2} \left(3\rho^{3/2}t\right)^{-1/3} \text{Ai} \left[ \left(3\rho^{3/2}t\right)^{-1/3} |k| \right] \quad (1.53)$$

où nous voyons que la probabilité  $\mathcal{P}$  ne dépend plus que d'un paramètre  $\rho$ , dépendant du cut-off ultraviolet de la théorie, qui est dépendant du modèle.

### 1.2.6 Dynamique au seuil critique et déviation à la théorie auto-cohérente : la multi-fractalité

Un paquet d'onde au seuil critique verra sa dynamique marquée par une diffusion anormale, i.e.  $\langle k^2(t) \rangle \sim t^{2/3}$ . De manière plus explicite, on peut relier la variance de ce paquet d'onde au paramètre  $\rho$  évoqué dans (1.53) :

$$\langle k^2(t) \rangle = \frac{3\rho}{\Gamma(\frac{2}{3})} t^{2/3}. \quad (1.54)$$

Nous avons montré que la théorie d'échelle est également en mesure de capturer cette dynamique par le biais de la fonction  $\Lambda$  via  $\langle k^2(t) \rangle = \Lambda_c t^{2/3}$ . Ainsi, on obtient une relation portant sur  $\rho$  et  $\Lambda_c$  comme il suit :

$$\rho = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{3} \Lambda_c. \quad (1.55)$$

De plus, l'équation de la fonction d'onde critique (1.53) nous permet également de déduire le comportement de la probabilité de retour à l'origine, assimilable à la probabilité de présence d'une particule quantique dans l'état  $k = 0$  à un  $t$  donné, i.e.  $\Pi_0(t) = \mathcal{P}(0, t)$ , qui donne immédiatement :

$$\Pi_0(t) \sim t^{-1/3}. \quad (1.56)$$

En joignant toutes les propriétés de la fonction d'onde critique déduites de la théorie auto-cohérente, cette dernière devrait vérifier la loi d'échelle :

$$t^{1/3} \mathcal{P}(k, t) = \mathcal{G}(kt^{-1/3}), \quad (1.57)$$

où la fonction d'échelle  $\mathcal{G}$  est donnée par :

$$\mathcal{G}(x) = \frac{3}{2} (3\rho^{3/2})^{-1/3} \text{Ai} \left[ (3\rho^{3/2})^{-1/3} |x| \right]. \quad (1.58)$$

La figure 1.11 est le résultat de la simulation numérique de la fonction d'onde au seuil critique  $(K_c, \varepsilon_c) = (6.36, 0.43)$ , où les paramètres sont fixés à  $k = 2.85$ ,  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}$ , pour une plage temporelle  $t \in [1000, 50000]$ . Afin de vérifier que les données présentées sur la figure 1.11 obéissent bien la loi d'échelle prédite par la théorie auto-cohérente (1.57), nous effectuons une mise à l'échelle en traçant la fonction d'onde renormalisée  $t^{1/3} |\Psi(kt^{-1/3}, t)|^2$  en fonction de la quantité  $kt^{-1/3}$ , qui est l'objet de la figure 1.12. Nous voyons alors que l'évolution temporelle de la fonction d'onde critique y est figée, mais plus que ça, nous voyons une superposition des données aux différents temps  $t$ , qui est un premier argument en faveur de la loi d'échelle.

Pour autant, rien n'indique à cet instant que la fonction d'échelle visible en figure 1.12 est celle prédite par la théorie auto-cohérente  $\mathcal{G}$ . Pour cela, nous ajustons la fonction  $\mathcal{G}$  prédite aux données une fois mises à l'échelle. Comme nous l'avons montré plus tôt, la fonction  $\mathcal{P}$  comme la fonction  $\mathcal{G}$  ne dépendent que d'un paramètre noté  $\rho$  : c'est sur ce paramètre que se joue l'ajustage de  $\mathcal{G}$  aux données. En particulier, nous procédons à cette ajustage sur le  $\ln[t^{1/3} \mathcal{P}(kt^{-1/3}, t)]$  : la théorie auto-cohérente est valide dans le régime diffusif  $k\varphi, \omega \ll 1$ , qui, pour nous, correspond aux temps longs et aux grandes impulsions  $k$ , d'où l'importance de donner du poids aux données aux grands  $k$  via le logarithme.

La figure 1.13 est le résultat de la procédure d'ajustement. Comme on peut le voir, pour de grandes valeurs de  $kt^{-1/3}$ , le modèle théorique correspond aux données numériques. Cependant, à temps longs, le comportement à basses impulsions est modifié par des corrections multi-fractale, qui ne sont pas capturées par la théorie auto-cohérente.

Les études numériques de la transition d'Anderson ont montrées que la distribution de la conductance est universelle, invariant d'échelle et large, ce qui est une manifestation des grandes fluctuations au point critique. Ces fluctuations sont également visibles dans les états propres critiques, qui sont fortement multi-fractales, se traduisant par des régions où le module carré de ces états propres sont soit successivement grands, ou petits, toujours de

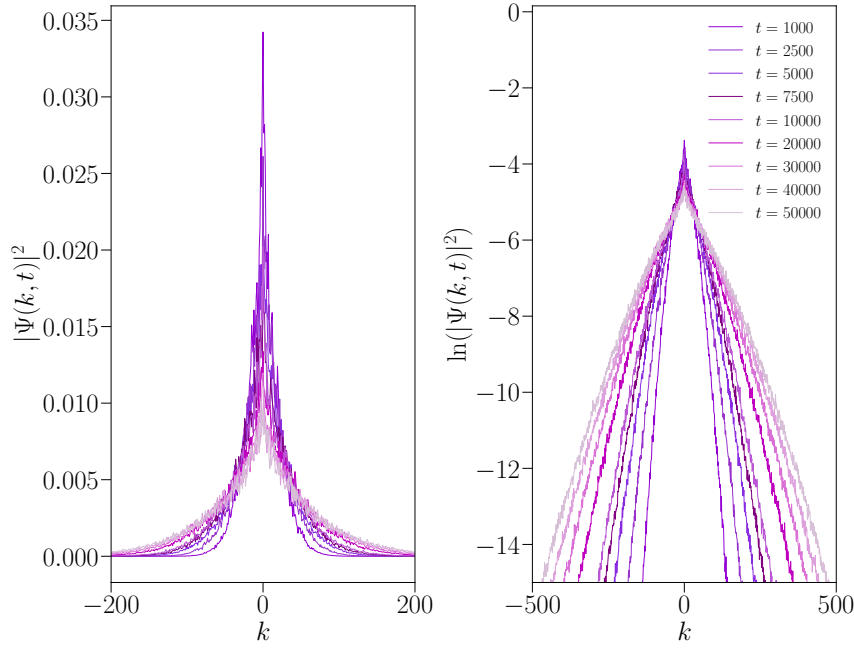


FIGURE 1.11 – Évolution temporelle de la fonction d'onde au seuil critique  $(K_c, \varepsilon_c) = (6.36, 0.43)$ , entre  $t = 1000$  et  $t = 50000$ , en échelle linéaire (à gauche) et échelle semi-log (à droite). Ici,  $\bar{k} = 2.85$ ,  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}$ .

manière inattendue. Cette propriété est bien décrite par le ratio de participation inverse généralisé :

$$P_q = \int_{L^d} d^d \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^{2q}, \quad (1.59)$$

où  $q$  est un nombre réel, et  $L$  est la taille du système. Les analyses multi-fractales consistent en l'étude de  $P_q$  en moyenne, sur les états propres ou les réalisations du désordre. Il en résulte que si la moyenne de  $P_q$  évolue comme  $L^{-\tau_q}$ , on a alors accès à l'exposant multi-fractal  $\tau_q$ , tel que  $d_q = \tau_q/(q-1)$ , où  $d_q$  est la dimension multi-fractale. Dans le cas d'une fonction d'onde délocalisée sur un ensemble de dimensions  $\mathbf{D}$  (fractales ou ordinaires), nous aurons  $d_q = \mathbf{D}$  pour tout  $q$ . Dans la situation d'un état multi-fractal,  $d_q$  est alors une fonction continue de  $q$ , où pour  $q > 0$  correspond les régions où  $|\psi|^2 \gg 1$ , tandis que pour  $q < 0$  correspond les régions où  $|\psi|^2 \ll 1$ .

À l'aide du Kicked Rotor quasi-périodique dans la phase critique à temps longs, nous savons que la fonction d'onde s'étale, mais il est également possible de voir qu'un pic se développe proche de la condition initiale (dans notre cas  $kt^{-1/3} = 0$ ), et peut nous donner accès aux propriétés multifractales du paquet d'onde au seuil critique, en particulier la dimension multifractale  $d_2$ . Il est possible de montrer que la singularité au centre de la fonction d'onde rescalée obéit à la loi :

$$t^{1/3} |\psi(k, t)|^2 = \alpha - \beta |kt^{-1/3}|^{d_2-1}, \quad (1.60)$$

avec  $\alpha, \beta > 0$ . En faisant le fit du pic central, il a été trouvé une dimension multi-fractale



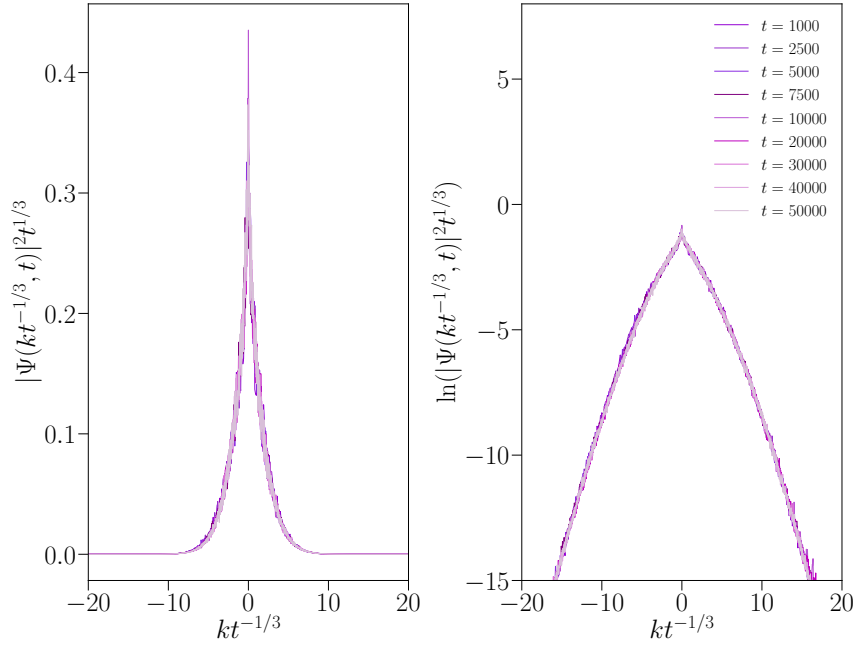


FIGURE 1.12 – Fonction d’onde au seuil critique  $(K_c, \varepsilon_c) = (6.36, 0.43)$  une fois mise à l’échelle : on représente  $|\Psi(kt^{-1/3}, t)|^2 t^{1/3}$  en fonction de  $kt^{-1/3}$  en échelle linéaire (à gauche) et en échelle semi-log (à droite), entre  $t = 1000$  et  $t = 50000$ . La superposition de la fonction d’onde au différents temps une fois mise à l’échelle est un argument en faveur de la loi d’échelle (1.57) prédite par la théorie auto-cohérente. Ici,  $\tilde{k} = 2.85$ ,  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}$ .

$d_2 \simeq 1.24$  [63], qui correspond à celle trouvée pour le vrai modèle tridimensionnel d’Anderson. Ces corrections multi-fractales n’engendrent pas une brisure du scaling en  $kt^{-1/3}$  de la fonction d’onde. Néanmoins, ces corrections ne se stabilisent qu’à des temps longs, de l’ordre de la dizaine de millions de kicks. Pour des temps plus courts, il reste possible d’extraire une dimension multifractale effective  $d_{2,eff}(t)$  dépendante du temps. La transition de la forme de la fonction d’onde, d’une fonction de Airy au comportement multi-fractale, est donnée par la distance moyenne parcourue dans l’espace des impulsions par une particule pendant un temps  $t$ ,  $L_t = l(t/\tau)^{1/3}$ , avec  $l$  le libre parcours-moyen et  $\tau$  le temps de parcours-moyen [63, 75].

Ainsi, le Kicked Rotor périodique dans sa version quantique est un système idéal pour étudier les systèmes désordonnés de type Anderson. Nous avons montré que les états de Floquet, états propres de l’Hamiltonien (1.2), nous permettent de construire l’analogie entre le Kicked Rotor périodique et un modèle de liaisons fortes désordonnés, amenant à la localisation d’Anderson. En d’autres termes, le Kicked Rotor peut être vu comme un système désordonné d’états de Floquet, où la localisation d’Anderson se manifeste dans l’espace des impulsions. Dans sa version quasi-périodique, le Kicked Rotor reproduit la physique d’un système désordonné tridimensionnel où une transition entre régime localisé et diffusif s’opère, avec un régime critique où la multi-fractalité du système se manifeste. Avec l’appui des expériences d’atomes froids, il est possible de caractériser le système au

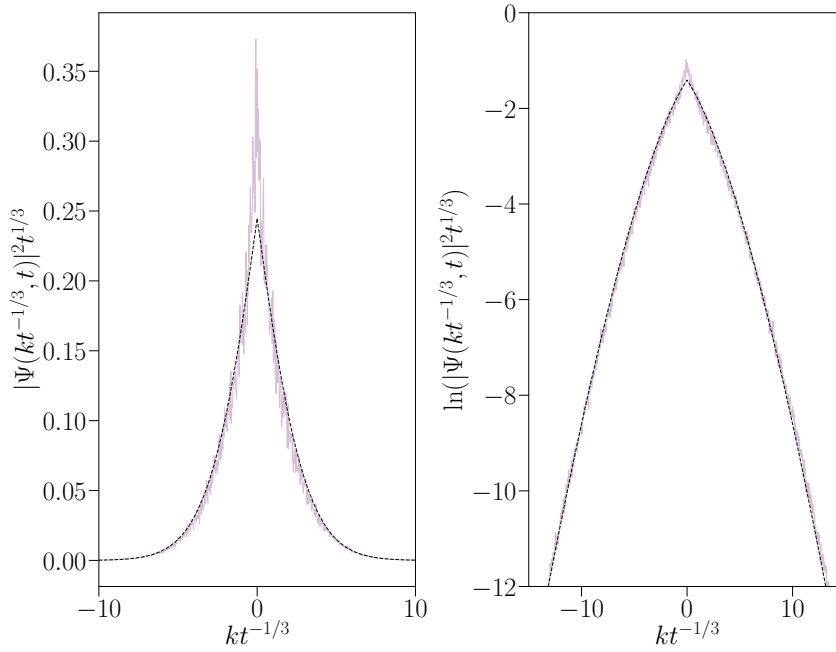


FIGURE 1.13 – Fonction d'échelle  $\mathcal{G}$  (tirets noirs) une fois ajustée aux données pour  $t = 50000$ , en échelle linéaire (à gauche) et en échelle semi-log (à droite). La valeur optimale de  $\rho$ , paramètre d'ajustage, est telle que  $\ln(3\rho/\Gamma(2/3)) \simeq 1.62 \simeq \ln \Lambda_c = 1.60 \pm 0.04$ , en accord avec la détermination de  $\ln \Lambda_c$  issue de [44]. Ici,  $\bar{k} = 2.85$ ,  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}$ .

travers de sa fonction d'onde. Dans le prochain chapitre, nous introduisons la physique des atomes froids, et plus particulièrement celle des gaz de Bose en dimension 1, qui vont nous permettre d'inclure les interactions qui étaient jusqu'ici négligées.



## Gaz de Bose unidimensionnel

Si une idée ne semble pas bizarre, il n'y a rien à espérer d'elle.

---

Niels Bohr

LA physique des atomes froids, système de prédilection pour simuler la physique du Kicked Rotor périodique et quasi-périodique, est en voie de développement depuis les années 90 jusqu'à nos jours, innovant toujours plus pour reproduire la physique de la matière condensée. Nous consacrons ce second chapitre à la présentation de la mise en œuvre expérimentale et la physique liée aux condensats de Bose-Einstein, qui sont des nuages d'atomes tridimensionnelles refroidis à des températures ultra-basses. Rapidement, nous présenterons la physique unidimensionnelle des atomes ultra-froids, dimensionnalité d'intérêt dans ce manuscrit, ainsi que la prise en compte des interactions, notamment dans le fameux régime des interactions fortes, dit de Tonks-Girardeau, qui offre théoriquement une solution exacte, une simplicité (relative) d'implémentation numérique, mais aussi une possibilité d'être réalisé expérimentalement.

### Condensat de Bose-Einstein

En 1925, après l'introduction d'une nouvelle statistique quantique par Bose portant sur les photons (qui a ouvert la voie vers les lasers), Einstein généralise son approche aux atomes [76], et découvre que pour un système de  $N$  bosons sans interaction, en deçà d'une température proche du zéro Kelvin, une transition de phase se produit. Sous cette température de transition, les particules bosoniques identiques peuvent alors se retrouver dans le même état fondamental. Cela se traduit par une occupation de l'état fondamental  $N_0$  devenant macroscopique. En particulier, il est possible de calculer cette fraction théoriquement [77, 78] :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}, \quad (2.1)$$

où  $T$  est la température,  $T_c$  la température de transition, et  $N$  le nombre total de particules.

Cet état de la matière, appelé condensat de Bose-Einstein, a à cette époque laissé dubitatif la communauté scientifique, couplé à la méfiance globale à l'égard de la physique quantique de la part d'Einstein, qui l'a poussé à douter longtemps de la pertinence physique d'une telle phase de la matière. Il faudra attendre 1938, année où les travaux de Kapitza, Allen et Misener ont montré la superfluidité de l'Hélium 4 pour des températures inférieures à 2.17 K, propriété qui a très vite été reliée à la condensation d'une fraction de l'hélium 4 comme l'a suggéré London, pour que les physiciens commencent à croire à la plausibilité de l'existence des condensats. Ce n'est que près de 60 ans plus tard, en 1995, que les progrès techniques permettant de descendre à des températures de l'ordre du nanoKelvin, ont su mener à l'observation d'un nuage d'atome froid condensé [79, 80], en joignant aux techniques de refroidissement laser et de piège magnéto-optique la fameuse technique de refroidissement par évaporation. Depuis, naquit un engouement au sujet des atomes froids, notamment pour leur "maléabilité", qui fait qu'il est possible de les manipuler via des champs magnétiques ou des lasers annexes. De nombreuses thématiques en découlent : l'étude des vortex au sein des condensats, instabilités témoignant du caractère superfluide de ces derniers [81-83], mais aussi la mise en évidence de la transition de Mott [84]. Bien d'autres domaines sont en voie de développement actuellement, comme les condensats dipolaires [85], la transition BEC-BCS du côté des fermions [31] ainsi que l'élaboration de champ magnétique artificiel [86]. Pour décrire la physique des atomes froids en présence d'interactions, de nombreux modèles ont été développés. Le modèle de Gross-Pitaevskii, qui peut être compris comme un modèle de champ moyen, a été par exemple en mesure de capturer la physique des nuages d'atomes froids tridimensionnels. Nous donnons l'équation de Gross-Pitaevskii qui s'écrit comme il suit :

$$i\hbar\partial_t\phi(\mathbf{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{r}) + g_{3D}N|\phi(\mathbf{r})|^2\phi(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

ici  $\phi$  est définie telle que  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\phi(\mathbf{r}) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r})$ , où  $\hat{\Psi}$  est un opérateur de champ, décrit par la présente équation comme un champ scalaire  $\phi$  appelé paramètre d'ordre et ses fluctuations  $\hat{\Psi}'$ . Dans cette procédure de champ-moyen, celle-ci suggère que les atomes condensés sont en mesure d'être décrits par une unique fonction d'onde macroscopique  $\phi$ . D'autre part, l'équation (2.2) suppose également que nous sommes dans le régime dilué et de faibles interactions, mais aussi sous la température critique de condensation, au quel cas les fluctuations de l'opérateur de champ  $\hat{\Psi}'$  sont négligeables. Les interactions sont ici prises en compte au travers d'un terme non-linéaire  $g_{3D}N|\phi(\mathbf{r})|^2$ .

## Réalisation expérimentale de piège unidimensionnel

La physique précédemment décrite se place dans un cadre tridimensionnel, et a valu le prix Nobel aux créateurs du piège magnéto-optique Claude Cohen-Tannoudji, Steven Chu et William D. Phillips en 1997, ainsi que Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle et Carl E. Wieman en 2001 pour la réalisation et l'étude des condensats. La situation que nous allons considérer est quant à elle unidimensionnelle, ce qui demande encore un peu plus de travail. Deux scénarios sont possibles et utilisés pour la réalisations de piège à géométries 1D :

- Piéger les atomes sur une micro-puce. Dans ce cas, les atomes sont piégés par la présence d'un champ magnétique produit par le courant passant dans la micro-puce [87, 88], illustré par la figure 2.1.
- Autrement, il est possible de piéger les atomes dans un réseau optique bidimensionnel [89-92]. Dans ce cas, les atomes sont piégés dans le minimum d'un potentiel optique, qui appliqué dans deux directions de l'espace perpendiculaire, divise le condensat en milliers de tubes (de taille finie) unidimensionnels, comme illustré par la figure 2.2.

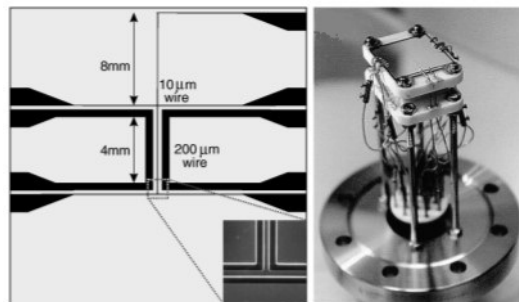


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du montage expérimental pour piéger des atomes sur une micro-puce dédiée, issue de [87].

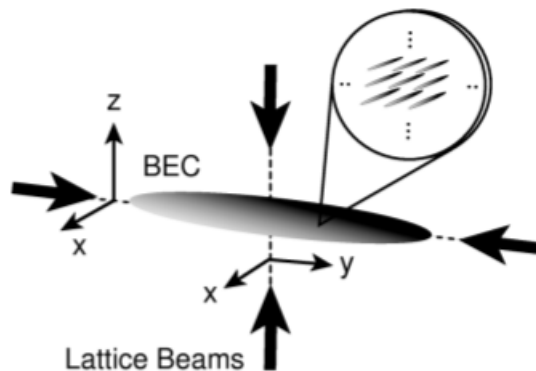


FIGURE 2.2 – Représentation schématique de la réalisation d'un réseau optique 2D, issue de [90]. Le potentiel optique est réalisé par l'interférence d'une paire de lasers perpendiculaires rétro-réfléchis. Cela a pour effet de diviser le condensat en un réseau de tubes unidimensionnels.

Le premier montage expérimental, réalisé sur une puce, rend l'étude des effets des interactions dans les gaz d'atomes froids possible. Pour la limite des fortes interactions qui nous intéresse, nous exposons l'option du réseau optique 2D décrit plus tôt, en lien avec l'expérience d'atomes froids de Lille.

## Le contrôle des interactions : vers le gaz de Tonks-Girardeau

Pour atteindre le régime des fortes interactions, deux routes peuvent être empruntées, qui ont été explorées par Paredes *et al.* [93] et Kinoshita *et al.* [91] respectivement.

La première, réalisée par Paredes *et al.*, consiste à tendre vers le régime des fortes interactions d'un modèle de Bose Hubbard en s'assurant que le système est incommensurable avec le potentiel du réseau (en imposant que le nombre moyen de particules par site  $n_0$  soit inférieur à 1). En présence d'un piège longitudinal harmonique, et en contrôlant avec attention ce potentiel piégant (sans quoi le centre du nuage peut devenir un isolant au sens de Mott), Paredes *et al.* sont parvenus à entrer dans le régime des interactions fortes marqué par la fermionisation du système initialement bosonique. La compréhension théorique de ce type d'approche du régime de Tonks Girardeau a été proposée plus tard par Pollet *et al.* [94], et Wessel *et al.* [95].

La seconde, suivit par Kinoshita et son équipe, a pour première étape de placer les atomes froids dans un piège 2D profond. Un paramètre sans dimension utilisé pour le contrôle des interactions est  $\gamma \sim g/\rho_0$ , où  $g$  est la constante d'interaction, et  $\rho_0$  est la densité moyenne du système. Dans ce cas, nous avons deux options s'offrant à nous : diminuer  $\rho_0$ , ce qui dans une certaine mesure (moins de 10 atomes par tubes) pose des problèmes de détection, ou en augmentant la constante d'interaction  $g_{1D}$  qui dépend entre autre de la longueur de diffusion des atomes, mais aussi de la largeur d'un piège transverse appliqué aux atomes. La première manière est de faire un piège transverse étroit [91, 96], ou bien de contrôler la longueur de diffusion des atomes via les résonances de Feshbach [97].

Afin de décrire la physique d'un nuage d'atomes froids unidimensionnel, nous pouvons utiliser un potentiel de confinement harmonique transverse  $V_{\perp} = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}(y^2 + z^2)$ , où  $y$  et  $z$  sont les directions transverses et  $\omega_{\perp}$  la fréquence de confinement, ce qui aura pour effet de confiner le nuage d'atomes froids dans la direction des  $x$ . Dans ce cas, si la fréquence de piégeage est bien plus grande que la température et le potentiel chimique, le champ quantique  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  dans les directions transverses est très bien approché par l'état fondamental  $\phi_0$  du piège  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}(x)\phi_0(y)\phi_0(z)$ [98, 99], où, dans la limite de champ moyen et à basse température,  $\hat{\Psi}(x) = \sqrt{N}\phi(x)$  et il est possible d'écrire l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle pour  $\phi(x)$  :

$$i\hbar\partial_t\phi(x) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + V(x) \right] \phi(x) + g_{1D}N|\phi(x)|^2\phi(x). \quad (2.3)$$

Cependant, en dimension 1, les approches champ moyen ne sont plus utilisables du fait que les fluctuations quantiques deviennent non négligeables [100]. Dans la limite du continu, atteignable expérimentalement par l'application d'un piège transverse très fort dans les directions  $(y, z)$  pour que la physique opère dans la direction des  $x$ , nous pouvons utiliser le modèle de Lieb-Liniger [101, 102], décrivant la physique de bosons en interaction dans le continuum unidimensionnel. C'est la limite qui nous intéresse dans ce manuscrit, et que nous décrivons en détail dans ce chapitre.

## 2.1 Le modèle de Lieb-Liniger

En physique quantique, nous disposons d'une variété d'hamiltonien infinie, dont découle tout autant d'équations de Schrödinger associées à ces derniers. Pour autant, il est connu que nous disposons rarement d'une solution exacte sans avoir recours à des approximations, sauf dans des cas particuliers simples. La recherche de solutions approximées toujours plus précises est un domaine de recherche à part entière, et a permis au travers des années de décrire certain modèle de manière quasi-exacte dans une certaine mesure. Il reste néanmoins des modèles exactement solubles, dont un des exemples les plus probant en dimension 1 est le modèle de Lieb-Liniger décrit pour la première fois en 1963 pour comprendre la physique des bosons en interactions de contact [101, 102].

### 2.1.1 Hamiltonien et ansatz de Bethe

L'hamiltonien le plus simple afin de décrire un système de  $N$  particules en présence d'interactions de contact peut être écrit comme il suit :

$$\mathcal{H}_{LL} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + g_{1D} \sum_{i < j=1}^N \delta(x_i - x_j), \quad (2.4)$$

où  $g_{1D}$  est la force d'interaction. L'équation de Schrödinger  $\mathcal{H}_{LL}\Psi_B = E\Psi_B$  qui en découle se résout par l'explicitation de la forme de  $\Psi_B$ . La symétrie bosonique de la fonction d'onde requiert qu'elle soit symétrique sous une permutation de deux particules, celle-ci est complètement définie dans le domaine des positions telles que  $0 \leq x_1 \leq x_2 \dots x_N \leq L$ , où  $L$  est la taille totale du système. Dans cette région, on cherche alors une solution de la même forme que celle proposé par H. A. Bethe en 1931 [103] :

$$\Psi_B(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mathcal{P}} a(\mathcal{P}) \exp(i \sum_{j=1}^N k_{\mathcal{P}(j)} x_j) \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{P}$  décrit toutes les permutations possibles des impulsions  $\{k_1, \dots, k_N\}$ , tandis que les coefficients  $a(\mathcal{P})$  sont déterminés par les collisions à deux corps possibles, dépendant des  $k_{\mathcal{P}_j}$ . C'est par ailleurs en 1993 que T. Dornblath montre que toutes les fonctions propres de l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{LL}$  sont de la forme de l'ansatz de Bethe [104]. La détermination précise de  $\Psi_B$  dépend essentiellement des impulsions  $k$ , qui sont elles même déterminées par les conditions périodiques que nous imposons au système. Cela nous mène à  $N$  équations de la forme :

$$Lk_j = 2\pi I_j - 2 \sum_{i=1}^N \arctan \left( \frac{2(k_j - k_i)}{g_{1D}} \right) \quad (2.6)$$

où  $I_1 \leq I_2 \leq \dots \leq I_N$  sont des entiers quand  $N$  est impair, et prennent des valeurs demi-entières lorsque  $N$  est pair, tel que  $I_i = \pm \frac{2i-1}{2}$ . D'autre part, dans l'état fondamental, les nombres  $I$  respectent l'équation :

$$I_{j+1} - I_j = 1, \quad (2.7)$$

pour  $j \in [1, N]$ , et  $I_1 = -I_N$ .



Il existe également dans ce système deux types d'excitations élémentaires décrites par E. Lieb [102]. L'excitation de type I revient à choisir un ensemble  $I_1, \dots, I_{N-1}$  comme auparavant, et d'augmenter  $I_N$  d'une quantité  $n > 0$  (ou de manière équivalente diminuer  $I_1$  de la même quantité  $n$ ). Dans ce cas, les impulsions dans ces états excités sont  $p = 2\pi n/L$ . L'excitation de type II elle revient à choisir un nombre  $n$  entre 0 et  $N/2$ , et d'accroître tous les  $I_i$  de 1 pour  $i \leq n$ . Les impulsions de ces états excités sont  $p = \pi - 2\pi n/L$ , et sont limitées par  $|p| \leq \pi$ . En particulier, ces deux types d'excitations peuvent être combinées, et sont de nature bosonique. En notant  $E_0$  l'énergie de l'état fondamental, l'énergie des excitations relativement à l'état fondamental sont donnés par  $\varepsilon_{1,2} = E_{1,2}(p) - E_0$ , où  $E_{1,2}(p)$  sont les énergies des états excités.

### 2.1.2 Limite thermodynamique

La limite thermodynamique d'un système de particules s'obtient en prenant  $N, L \rightarrow \infty$ , en maintenant le rapport  $\rho = N/L$  constant. Dans ce cas, la résolution dans l'espace des impulsions est fine, et on s'attend à ce que les  $k_j$  soient proches les uns des autres. De ce fait, les sommes discrètes que nous avons fait plus tôt sont remplacées :

$$\sum_k (\dots) = L \int_{-\kappa}^{\kappa} f(k) dk, \quad (2.8)$$

où  $Lf(k)dk$  est le nombre de  $k_j$  entre  $k$  et  $k+dk$ , et  $\pm\kappa$  représente la région des impulsions où la distribution  $f(k)$  des solutions (2.6) est non nulle. La limite dans le continuum de l'équation (2.6) s'écrit ainsi :

$$kL = 2\pi I + L \int_{-\kappa}^{\kappa} \arctan\left(\frac{2(k-k')}{g}\right) f(k') dk' \quad (2.9)$$

En dérivant la précédente équation, et en utilisant le fait que  $\frac{dI}{dk} = Lf(k)$  et que nous voulons une densité fixe dans la limite thermodynamique, la fonction  $f$  respecte donc les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} g \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{f(k')}{\frac{g^2}{4} + (k-k')^2} dk' &= 2\pi f(k) - 1, \\ \int_{-\kappa}^{\kappa} f(k) dk &= \rho. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ces deux équations conjointement donnent une solution unique et positive, et l'énergie du système est déterminée par  $f$  via l'équation suivante :

$$e = \frac{1}{\rho^3} \int_{-\kappa}^{\kappa} k^2 f(k) dk. \quad (2.11)$$

Dans ce cas, l'énergie de l'état fondamental rescalée notée  $e = E_0/N\rho^2$  est une fonction continue de  $\gamma = mgL/(\hbar^2 N)$ , qui est le paramètre adimensionné que nous avons évoqué plus tôt, et qui décrit la force d'interaction entre les particules. Pour  $\gamma = 0$ , l'énergie de l'état fondamental est celui d'un gaz de bosons libres, tandis que pour  $\gamma \rightarrow \infty$ , on retrouve l'énergie d'un gaz de Tonks-Girardeau. Entre ces deux limites qui nous donnent un résultat simple, il est nécessaire de calculer  $E_0$  qui est la seule inconnue qui détermine

l'énergie  $e(\gamma)$  du système.

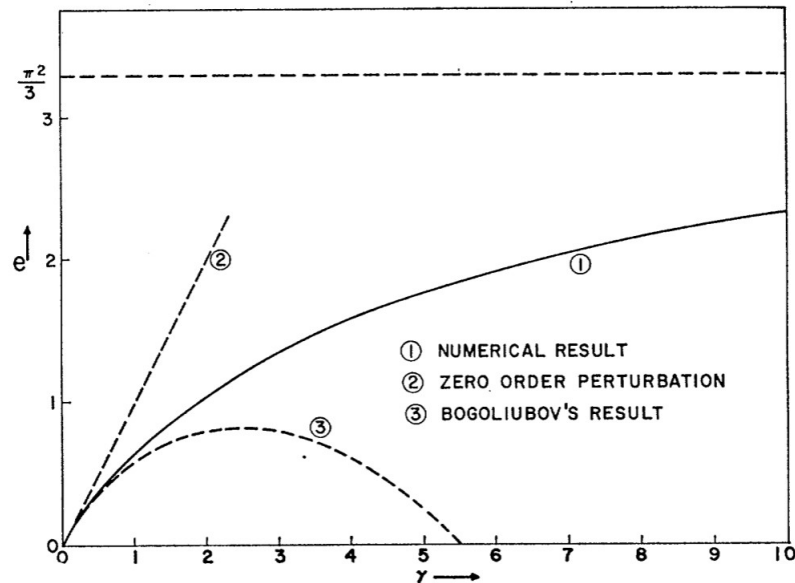


FIGURE 2.3 – Évolution de l'énergie de l'état fondamental rescalée  $e(\gamma)$  en fonction du paramètre d'interaction  $\gamma$  venant de [101]. Le résultat exact est comparé aux résultats des analyses perturbatives à l'ordre 0 et de Bogoliubov dans la limite des  $\gamma$  petits. La théorie perturbative de Bogoliubov donne une bonne approximation de  $e(\gamma)$  jusqu'à  $\gamma \simeq 2$ . Les tirets à la valeur  $\pi^2/3$  donnent la valeur de  $e(\gamma)$  dans le régime de Tonks-Girardeau. Les auteurs précisent que pour arriver aux voisinages de ce régime, il faut aller au minimum à  $\gamma = 37$ , les valeurs en deçà correspondant à un régime d'interaction intermédiaire.

La figure 2.3 représente l'évolution de  $e(\gamma)$ , obtenue numériquement à partir des équations précédentes. À noter que pour  $\gamma = 0$  existe une non-analyticité dans la fonction  $e(\gamma)$ , ce qui implique entre autre que les théories perturbatives ne peuvent au mieux être valides qu'au voisinage des  $\gamma$  faibles. Cela signifie en outre qu'un système en présence d'une force d'interaction d'intensité quelconque est fondamentalement différent de sa version sans interaction. La figure 2.4 quant à elle représente les excitations du modèle de Lieb-Liniger dans le régime des faibles interactions. Nous voyons en particulier que les excitations de type I, dites élémentaires, sont très bien décrites par la théorie perturbative de Bogoliubov dans ce régime. À l'opposé, les excitations de type II, n'a pas d'équivalent via une analyse de type Bogoliubov. Elles peuvent néanmoins être identifiée à l'apparition d'un état de soliton sombre, comme montré dans [105].

### 2.1.3 Absence de condensation de Bose-Einstein

Il existe deux manières équivalentes de caractériser la phase condensée d'un nuage d'atomes froids [106] :

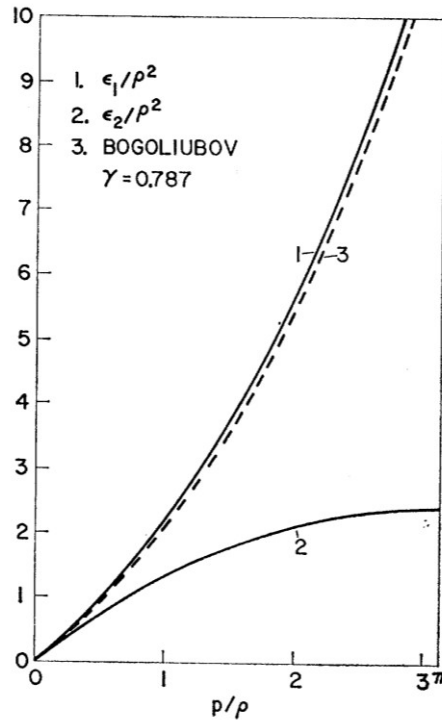


FIGURE 2.4 – États excités de type I et II, venant de [102]. Les énergies des excitations  $\varepsilon_{1,2}$  sont données en fonction des impulsions  $p$  par unité de  $\rho$  pour  $\gamma = 0.787$ . Les tirets représentent le résultat de la théorie de Bogoliubov.

- La matrice densité à un corps  $\rho(x) \sim \langle \Psi^\dagger(x)\Psi(x') \rangle$  tend vers une valeur non nulle en fonction de la distance relative  $r = |x - x'|$  et en particulier quand  $r \rightarrow \infty$ .
- La matrice densité à un corps a une valeur propre de l'ordre du nombre total de particules  $N$ , ce qui indique qu'il y a un nombre macroscopique de particules dans la phase condensée  $N_0 \sim N$ .

Le premier point traduit la présence de corrélation à longue portée, tandis que le second traduit la présence d'un nombre d'occupation macroscopique d'un seul état quantique, ce qui caractérise en effet une phase de condensat de Bose-Einstein comme décrit plus tôt. En dimension 1 cependant, il est nécessaire de revisiter ces caractéristiques au vu de la réduction de dimension. En particulier, deux inégalités fondamentales ont été dérivées, qui assure qu'il n'y a pas de vrai ordre à longue portée en 1D, et ainsi que la condensation n'opère pas en dimension 1. À température  $T > 0$ , l'inégalité de Schwarz dans une forme dite de Bogoliubov, utilisée pour fixer une borne inférieure aux fluctuations d'un opérateur quantique donné, a été employée par Wagner et Mermin [107] ainsi que Hohenberg [108] pour étudier la divergence dans le domaine infrarouge de la distribution en impulsions  $n_k$ . Il en découle l'inégalité suivante :

$$n_k \geq \frac{mk_B T}{k^2} \frac{N_0}{N} - \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Dans ce cas, nous avons besoin de  $N_0 = 0$ , en particulier du fait de la divergence infrarouge en  $1/k^2$  en  $k = 0$  lorsqu'on intègre sur les impulsions  $k$ . Autrement, le nombre de particules

condensées  $N_0$  et non-condensées du fait de la dimensionnalité seraient toutes deux des nombres macroscopiques, ce qui est en contradiction. L'interprétation physique de ce résultat est que les fluctuations thermiques sont responsables de l'absence d'une phase condensée. À température nulle, seules les fluctuations quantiques sont en mesure d'avoir un impact, et l'approche précédente doit donc être généralisée. En partant à nouveau de l'inégalité de Schwartz, Pitaevskii et Stringari ont établi une manière de connecter la distribution en impulsion et le facteur de structure statique  $S(k)$  [109] via une inégalité comme il suit :

$$n_k \geq \frac{1}{2S(k)} \frac{N_0}{N} - \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

En sachant que  $S(k) \leq \hbar k / (2mv_s)$ , où  $v_s$  est la vitesse du son, une divergence infrarouge cette fois-ci linéaire se produit dans la distribution  $n_k$ . Encore une fois, la fraction condensée et non condensée seraient macroscopiques, sauf si  $N_0 = 0$ . Ainsi, un gaz atomique homogène ne présente donc pas de condensation de Bose-Einstein, même à température nulle en 1D.

Il reste tout de même à noter que la dispersion, semblable à celle des phonons, qui caractérise le système, assure la présence d'un ordre à *quasi*-longue portée<sup>1</sup>. Cela implique entre autre que la matrice densité décroît en loi de puissance

$$\langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x') \rangle \rightarrow \frac{2}{|x - x'|^{1/2K}}, \quad (2.14)$$

pour  $|x - x'| \rightarrow \infty$ , où l'exposant dépend de la force d'interaction au travers de l'exposant de Luttinger  $K$ . Pour de faibles interactions,  $K \gg 1$ , et la matrice densité décroît alors lentement du fait de son faible exposant. Dans ce cas, le gaz est alors dans une phase quasi-condensée, avec une physique très proche de la physique d'un condensat. À l'inverse, pour des interactions fortes,  $K = 1$ , l'exposant n'est plus négligeable, et aucun effet de condensation n'est attendu. Nous présentons dans la section suivante les caractéristiques d'un gaz de Tonks-Girardeau, et comment il se démarque d'une phase condensée, notamment au travers de la matrice densité et la distribution en impulsion.

## 2.2 Gaz de Tonks-Girardeau

Au regard de l'Hamiltonien (2.4), deux limites d'interaction triviales ressortent immédiatement :

- $g_{1D} = 0$ , au quel cas le système de bosons sans interaction occupe le même état quantique à un corps, et ainsi la fonction d'onde à  $N$  corps est un produit de ces  $N$  états quantiques à un corps.
- $g_{1D} \rightarrow \infty$ , où cette fois-ci le système entre dans le régime de Tonks-Girardeau, régime d'intérêt pour nous, entre autre car il nous offre une solution exacte du problème via le théorème de Bose-Fermi [110].

---

1. En opposition à l'ordre à longue portée qui se traduit par des corrélations qui s'étendent sur tout le système, comme dans un condensat de Bose-Einstein.

Le gros intérêt de ce dernier régime réside d'une part dans sa solvabilité exacte, mais également dans le fait que n'importe quel potentiel  $V(x, t)$  peut être considéré, indépendant ou dépendant du temps [111], ce qui n'est pas le cas dans d'autres régimes d'interaction résolu par l'ansatz de Bethe. Nous présentons dans cette partie les propriétés du gaz de Tonks, ainsi que les méthodes numériques afin d'obtenir les observables pertinentes telles que la matrice densité ou la distribution en impulsions.

### 2.2.1 Théorème de correspondance de Bose-Fermi

Dans la situation où nous sommes, l'énergie d'interaction voit sa contribution tendre vers l'infini à chaque fois que deux particules  $x_i$  et  $x_j$  sont au même endroit du fait de la présence du potentiel d'interaction de contact  $\delta(x_i - x_j)$ , pondéré par une force d'interaction infinie. Cela n'étant pas souhaitable, notamment parce que cela rendrait le système non-physique, nous avons la main sur la physique de la fonction d'onde à  $N$ -corps  $\Psi_B$ , nous imposons :

$$\Psi_B(x_1, \dots, x_i = x_j, \dots, x_N) = 0. \quad (2.15)$$

Il est alors intéressant à ce stade de remarquer qu'il en va de même pour une fonction d'onde à  $N$ -corps *fermionique* du fait du principe d'exclusion de Pauli. L'idée géniale de Girardeau est alors de considérer que ce même principe d'exclusion peut modéliser l'effet des interactions entre les bosons. Ainsi est fait le lien entre un système de  $N$  bosons en interaction infinies, et un système de  $N$  fermions libres sans spin via la relation de mapping :

$$\Psi_B(x_1, \dots, x_N, t) = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_N) \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [\psi_l(x_m, t)], \quad (2.16)$$

où  $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j < l} \text{sign}(x_j - x_l)$ , qui permet de restaurer la symétrie bosonique lors d'un échange de particules. Le second terme est la forme explicite de la fonction fermionique à  $N$ -corps, qui n'est autre que le déterminant de Slater.

D'autre part, un avantage majeur de cette correspondance vient du fait que la différence entre la fonction d'onde bosonique et fermionique à  $N$ -corps est un terme de phase globale dans les différents secteurs de coordonnées, l'énergie des bosons est alors la même que celle des fermions libres, i.e.  $E = \sum_{i=1}^N p_i^2 / 2m$ . De plus, toutes les quantités dépendantes de la valeur absolue de la fonction d'onde, comme la distribution de densité ou la fonction de corrélation de densité sont ainsi les mêmes pour le gaz de Fermi ou le gaz de Tonks-Girardeau. Cependant, d'autres observables comme la matrice densité, ainsi que la distribution en impulsion sont drastiquement impactées par la phase imposée par la fonction de mapping  $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_N)$ .

### 2.2.2 La matrice densité réduite à un corps et distribution en impulsion

La matrice densité réduite à un corps du système est défini comme il suit :

$$\rho(x, y, t) = N \int dx_2 \dots dx_N \Psi_B^*(x, x_2, \dots, x_N, t) \Psi_B(y, x_2, \dots, x_N, t). \quad (2.17)$$

Ainsi, en suivant les travaux de Girardeau, nous définissons la distribution en impulsion en fonction de  $\rho(x, y, t)$  comme :

$$n(k, t) = \int dx \int dy e^{ik(x-y)} \rho(x, y, t). \quad (2.18)$$

À présent, nous présentons la méthode numérique qui, à partir de la physique d'un gaz de Fermi, nous permet d'obtenir la physique d'un gaz de bosons en interaction.

La première étape est d'abord de discrétiser l'Hamiltonien (2.4), donnant ainsi un Hamiltonien de bosons sur sites suivant :

$$H_{TG} = -t \sum_{i=1}^{N_s} (b_i^\dagger b_{i+1} + \text{h.c.}) + V_\alpha(t) \sum_{i=1}^{N_s} x_i^\alpha n_i, \quad (2.19)$$

où  $n_i = b_i^\dagger b_i$ , et  $N_s$  est le nombre de sites du système. On a là à faire à un Hamiltonien de bosons sur sites, contenu dans un potentiel piégeant quelconque. Pour prendre en compte la nature particulière des bosons en interaction infinies, nous imposons des contraintes sur les opérateurs bosoniques, i.e.  $b_i^{\dagger 2} = b_i^2 = 0$  et  $\{b_i, b_i^\dagger\} = 1$ , qui assurent que deux particules ne puissent pas être au même endroit. Afin de faire le lien entre le système de fermions et de bosons, nous procédons à la transformation de Jordan-Wigner, permettant ce pont via la transformation des opérateurs bosoniques, en opérateurs fermioniques. Pour ce faire, on définit :

$$\begin{aligned} b_i^\dagger &= f_i^\dagger \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi f_\beta^\dagger f_\beta} \\ b_i &= \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi f_\beta^\dagger f_\beta} f_i. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En appliquant cette transformation sur l'Hamiltonien  $H_{TG}$ , on obtient alors un hamiltonien de fermions sur site  $H_F = -t \sum_i (f_i^\dagger f_{i+1} + \text{h.c.}) + V_\alpha(t) \sum_i x_i^\alpha n_i^F$ , avec  $n_i^F = f_i^\dagger f_i$ .

Ensuite, nous devons regarder la fonction de Green associée au système de bosons en interaction. En utilisant la transformation de Jordan-Wigner, on obtient :

$$G_{ij} = \langle \Psi_{TG}^G | b_i b_j^\dagger | \Psi_{TG}^G \rangle = \langle \Psi_F^G | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi f_\beta^\dagger f_\beta} f_i f_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi f_\gamma^\dagger f_\gamma} | \Psi_F^G \rangle, \quad (2.21)$$

où  $|\Psi_{TG}^G\rangle$  et  $|\Psi_F^G\rangle$  représentent respectivement les états fondamentaux des bosons en interaction et des fermions libres. Cette dernière fonctions d'ondes à  $N$ -corps est un déterminant de Slater, et donc comme un produit de fonction d'onde à un corps :

$$|\Psi_F^G\rangle = \prod_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^{N_s} P_{\sigma\delta} f_\sigma^\dagger |0\rangle, \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice des composantes de la fonction d'onde  $|\Psi_F^G\rangle$ , données par les  $N$  fonctions propres de l'Hamiltonien. En posant  $|\Psi_F^B\rangle = f_j^\dagger \prod_{\gamma=1}^{j-1} e^{-i\pi f_\gamma^\dagger f_\gamma} |\Psi_F^G\rangle$  et  $\langle \Psi_F^A | = \langle \Psi_F^G | \prod_{\beta=1}^{i-1} e^{i\pi f_\beta^\dagger f_\beta} f_i$ , nous pouvons ainsi écrire la fonction de Green sous une forme simple :

$$G_{ij} = \langle \Psi_F^A | \Psi_F^B \rangle. \quad (2.23)$$

Afin de calculer  $|\Psi_F^{A,B}\rangle$ , nous notons que :

$$\prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi f_{\beta}^{\dagger} f_{\beta}} = \prod_{\beta=1}^{i-1} [1 - 2f_{\beta}^{\dagger} f_{\beta}] \quad (2.24)$$

De ce fait, l'effet du terme  $\prod_{\beta=1}^{i-1} e^{-i\pi f_{\beta}^{\dagger} f_{\beta}}$  sur l'état fondamental fermionique (2.22) est de changer le signe des éléments  $P_{\sigma\delta}$  pour  $\sigma \leq i-1$ . L'opérateur création au site  $i$  quant à lui implique l'addition d'une colonne à la matrice  $\mathbf{P}$ , avec l'élément  $P_{iN_f+1} = 1$ , et tous les autres égaux à 0. Dans ce cas, on peut réécrire  $|\Psi_F^A\rangle$  et  $|\Psi_F^B\rangle$  comme il suit :

$$\begin{aligned} |\Psi_F^A\rangle &= \prod_{\delta=1}^{N'} \sum_{\sigma=1}^{N_s} P'_{\sigma\delta} f_{\sigma}^{\dagger} |0\rangle, \\ |\Psi_F^B\rangle &= \prod_{\delta=1}^{N'} \sum_{\sigma=1}^{N_s} P'_{\sigma\delta} f_{\sigma}^{\dagger} |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{P}'^A$  et  $\mathbf{P}'^B$  sont obtenues à partir de  $\mathbf{P}$  en changeant le signe et en ajoutant la colonne supplémentaire ( $N' = N + 1$ ). Ainsi, on peut écrire la fonction de Green :

$$G_{ij} = \langle \Psi_F^A | \Psi_F^B \rangle = \det \left[ \left( \mathbf{P}'^A \right)^{\dagger} \mathbf{P}'^B \right]. \quad (2.26)$$

Avec cette dernière relation, nous sommes en mesure d'estimer numériquement la fonction de Green, et la matrice densité à un corps est donnée par :

$$\rho_{ij} = \langle b_i^{\dagger} b_j \rangle = G_{ij} + \delta_{ij} (1 - 2G_{ii}). \quad (2.27)$$

Notre méthode numérique de calcul de la matrice densité repose sur le calcul de déterminant de matrice de taille  $(N+1) \times (N+1)$  [112], tandis que d'autres approches, également se basant sur la transformation de Jordan-Wigner, évaluent la matrice densité à un corps comme le calcul de déterminant de Töplitz de matrice de taille  $(N_s - 1) \times (N_s - 1)$  [93]. D'autres méthodes existent, se basant directement sur l'aspect continu de système bosonique, qui se démarquent totalement de leur version discrète [100]. Ces méthodes calculent alors la matrice densité réduite en exprimant cette dernière dans la base d'état à un corps évoluant dans le temps [113, 114].

## Température nulle

Afin de caractériser les corrélations au sein du système, nous introduisons la fonction de corrélation définit comme il suit :

$$g_1(r) = \frac{1}{L} \int dR \rho(R - r/2, R + r/2), \quad (2.28)$$

où  $R = \frac{x+y}{2}$  et  $r = |x - y|$ . Ainsi, en faisant la moyenne sur les positions moyennes  $R$  de la matrice densité calculée numériquement, il est possible de retrouver les comportements attendus de l'état fondamental d'un gaz de Tonks-Gireardeau. Ceci est montré sur

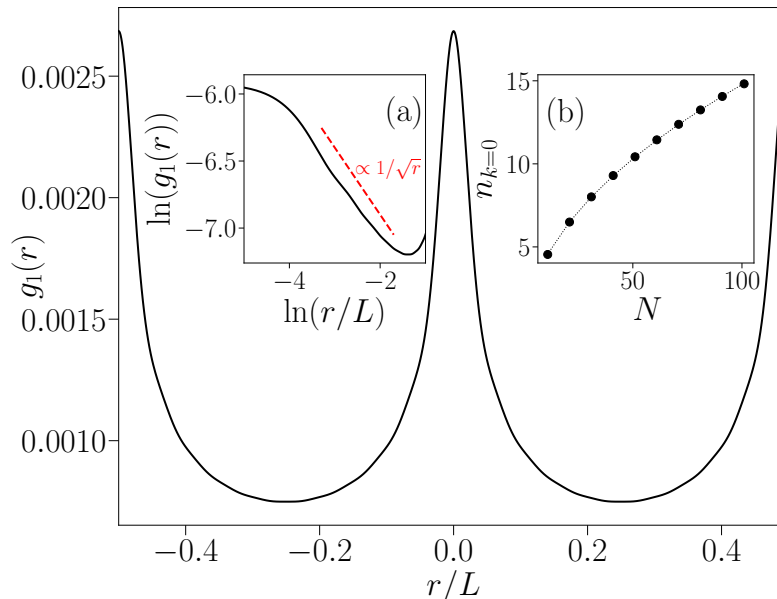


FIGURE 2.5 – Graphique principal : fonction de corrélation  $g_1(r)$  en fonction de  $r/L$  pour  $N = 11$ . Encart (a) : mêmes données, en échelle log-log. Les tirets rouge mettent en lumière la décroissance algébrique à grande distance en  $1/\sqrt{r}$ . Encart (b) : comportement du pic central de la distribution en impulsion  $n_{k=0}$  en fonction du nombre de particules. Les pointillés représentent le comportement attendu en  $1.43\sqrt{N} - 0.56 + 0.12N^{-4/3}$  prédit par [115].

la figure 2.5, notamment dans l’encart (a), où nous voyons clairement une décroissance algébrique en  $1/\sqrt{r}$ , marque des corrélations à quasi-longue portée [100].

D’autre part, en faisant une double transformée de Fourier sur  $\rho_{ij}$ , nous sommes en mesure de calculer numériquement la matrice densité dans l’espace des impulsions, dont la diagonale est la distribution en impulsion du système de  $N$  particules. La figure 2.6 présente la distribution en impulsion bosonique pour 11 particules, comparée à la distribution fermionique correspondante. Nous voyons qu’elles sont toutes deux drastiquement différentes, où la distribution fermionique est une mer de Fermi entre  $-k_F$  et  $k_F$ , tandis que la distribution bosonique quant à elle présente une divergence au voisinage de  $k = 0$  [116], démonstration de la présence d’une quasi-condensation de Bose-Einstein. L’encart (b) de la figure 2.5 montre le comportement du pic central de la distribution, se voyant croître comme  $\sqrt{N}$  [115], une autre marque des corrélations à quasi-longue portée dans le système, qui se retrouve dans la distribution en impulsion pour un grand nombre de particules, où l’on trouve que  $n_{k \rightarrow 0} \propto 1/\sqrt{k}$ , marque d’une quasi-condensation du gaz de Tonks-Girardeau.

Par ailleurs, l’encart de la figure 2.6, graphe de la distribution en impulsion du gaz de Tonks-Girardeau en échelle log-log, montre qu’à grandes impulsions, la distribution bosonique décroît en loi de puissance  $1/k^4$ , prédit par Minguzzi *et al.* [117]. Il est possible de



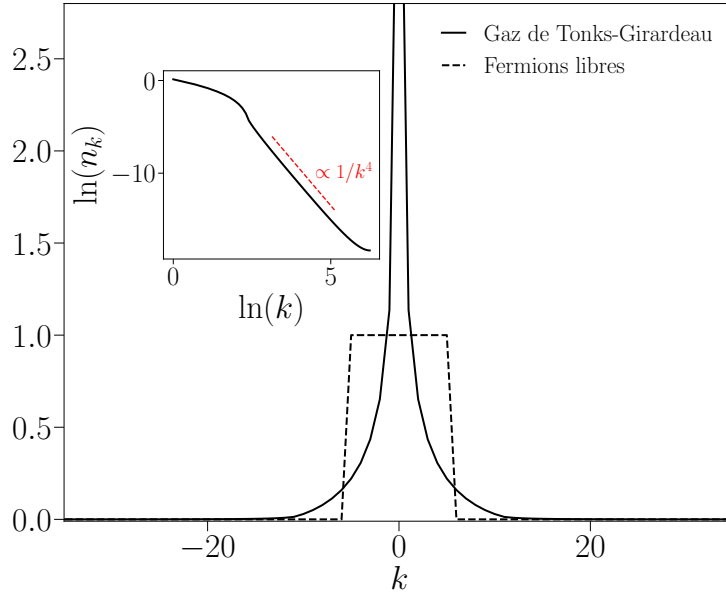


FIGURE 2.6 – Figure principale : Comparaison de la distribution en impulsions des fermions libres et du gaz de Tonks-Girardeau dans l'état fondamental issue de nos simulations numériques. Encart : distribution en impulsion du gaz de Tonks-Girardeau en échelle log-log. Les tirets rouges montrent le comportement en  $1/k^4$  de la distribution à grandes impulsions, marque des interactions. Ici  $N = 11$ .

caractériser cette décroissance par une quantité  $\mathcal{C}$ , plus connue sous le nom de contact de Tan, définie par  $n_k = \mathcal{C}/k^4$ . Celui-ci peut être estimé au travers d'une fonction  $F_{hom}$ , tel que  $\mathcal{C} = \frac{2}{\pi} F_{hom}$  [118], où nous définissons :

$$F_{hom} = \frac{1}{L^2} \sum_{\mu, \nu} f_\nu f_\mu (k_\mu^2 - k_\nu k_\nu). \quad (2.29)$$

où  $f_\mu = 1$  pour  $|\mu| < k_F$  et 0 autrement dans l'état fondamental, et  $k_\mu = 2\pi\mu/L$  avec  $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Dans cette situation, on peut écrire le contact de Tan de l'état fondamental d'un gaz de Tonks-Girardeau composé de  $N$  bosons comme il suit :

$$\mathcal{C}_0 = \frac{2\pi}{3L^3} N^2(N^2 - 1) \quad (2.30)$$

Nous montrons sur la figure 2.7 les distributions en impulsion bosoniques pour différents nombre de particules  $N$ , dont le comportement à grandes impulsions est bien décrit par  $\mathcal{C}_0/k^4$ .<sup>2</sup>

2. À noter qu'à grand nombre de particules, le comportement de nos données à grandes impulsions s'écartent du comportement en  $\mathcal{C}_0/k^4$ , ce qui est lié à des effets de discrétisation numérique.

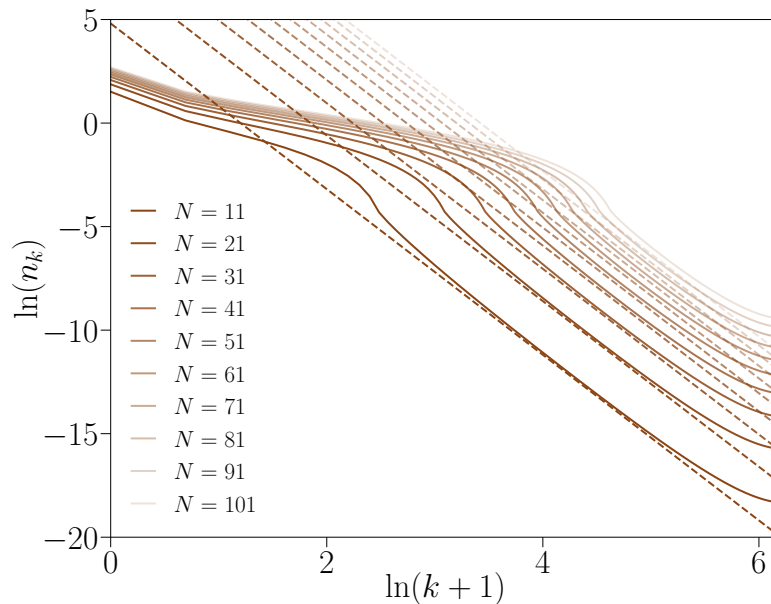


FIGURE 2.7 – Distribution en impulsion d’un gaz de Tonks-Girardeau pour différentes valeurs de  $N$ . En tirets, nous montrons que le comportement à grandes impulsions de la distribution  $\mathcal{C}/k^4$ , très bien fitté par le contact de Tan  $\mathcal{C}_0$  dans l’état fondamental.

Enfin, une ultime observable reliée aux corrélations qui nous intéresse sont les orbitales naturelles, que nous pouvons interpréter comme des états à un corps effectifs. Ces dernières sont définies comme les fonctions propres de la matrice densité [119] :

$$\sum_{j=1}^{N_s} \rho_{ij} \phi_j^\eta = \lambda_\eta \phi_i^\eta, \quad (2.31)$$

où  $\lambda_\eta$  est l’occupation de la  $\eta$ -ème orbitales. Dans le cas périodique où nous sommes, les orbitales naturelles sont des ondes planes dont l’orbitale la plus occupée est celle correspondant à l’impulsion nulle (souvent, on associe celle-ci au quasi-condensat). En particulier, les valeurs propres viendront par paires du fait de la symétrie de translation du système, et vont correspondre dans ce cas à la distribution en impulsion bosonique du système [112].

### Température finie

À température finie, le comportement du gaz de Tonks-Girardeau change, du fait que les occupations des états d’énergies sont alors pondérées par les poids de Boltzmann, changeant drastiquement le comportement des observables. Dans le même esprit que la méthode décrite plus tôt, d’autres ont été développées afin de prendre en compte les effets de température finie [120].

Côté fermions libres à température finie, la distribution en impulsion initialement la mer de Fermi, décrit à présent une distribution de Fermi-Dirac notée  $f_{FD}(T, \mu) = 1/(1 +$

$e^{(E-\mu)/k_B T}$ ), avec  $T$  la température, et  $\mu$  le potentiel chimique. Côté bosons en interaction, le pic central lié à la quasi-condensation est détruit, et arrondi à plus hautes températures. Ceci est montré sur la figure 2.8, où nous voyons l'étalement de la distribution à mesure que la température augmente.

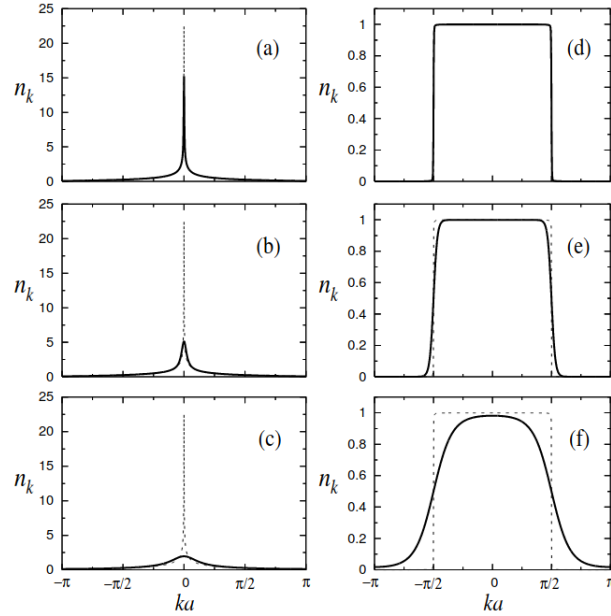


FIGURE 2.8 – Distribution en impulsion du gaz de Tonks-Girardeau (a)-(c), et du système correspondant de fermions libres (d)-(f). La distribution fermionique devient une distribution de Fermi-Dirac, décrit par une température et un potentiel chimique, tandis que la distribution bosonique voit sa phase quasi-condensée complètement détruite, où le pic central se réduit pour s'arrondir peu-à-peu, marque de la décohérence induite par la température. Issue de [120].

D'autre part, le pic central, connu plus tôt pour se comporter en  $\sqrt{N}$  ne se comporte plus comme tel, mais finit par saturer pour à une valeur finie pour  $N \rightarrow \infty$ , jusqu'au point où, à haute température, ce dernier ne dépende même plus du nombre de particules, voir figure 2.9.

Cela traduit également un impact sur les corrélations. En effet, comme nous le voyons sur la figure 2.10, dont la décroissance, non plus algébrique mais exponentielle, met en lumière la destruction des corrélations à quasi-longue portée.

Une quantité alors utile pour quantifier cette perte de cohérence est la longueur de corrélation  $r_c$  du système. Celle-ci est défini à partir de la décroissance exponentielle de la fonction  $g_1(r) \sim e^{-|r|/r_c}$ . Cette dernière peut être estimée en la définissant comme étant le moment d'ordre 2 de la fonction de corrélation [120] :

$$r_c = \sqrt{2 \frac{\sum_r r^2 g_1(r) - (\sum_r r g_1(r))^2}{\sum_r g_1(r)}}. \quad (2.32)$$

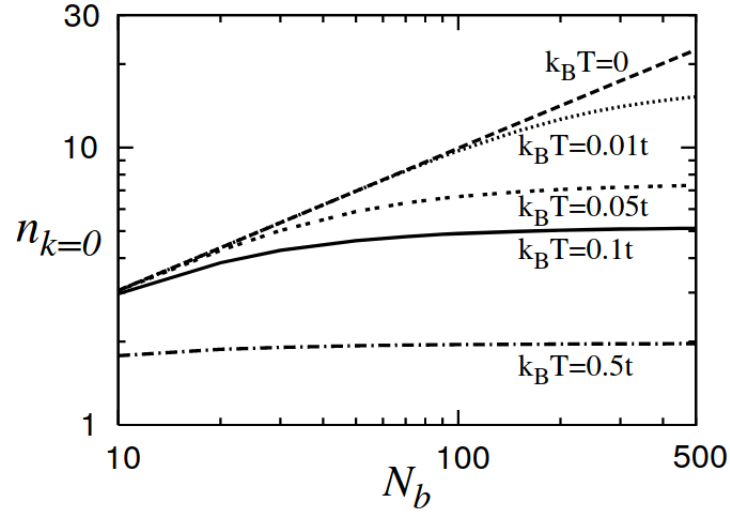


FIGURE 2.9 – Évolution du pic central  $n_{k=0}$  en fonction du nombre de particules  $N$ . Issue de [120].

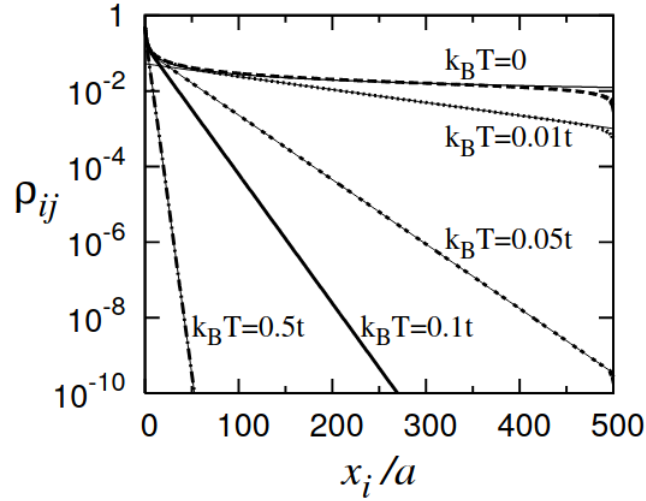


FIGURE 2.10 – Décroissance exponentielle de la matrice densité à un corps en présence d'une température en échelle semi-log. En tiret est montré l'état fondamental du système à  $T = 0$ . Issue de [120].

À basse température, la longueur de corrélation varie avec l'inverse de la température comme  $r_c \sim \frac{\hbar v_F}{k_B T}$  [100], tandis qu'à plus haute température on s'attend à ce que le nuage d'atome froids soit un nuage thermique, dont la longueur de corrélation est de l'ordre de la longueur de De Broglie  $\lambda_{DB} = \hbar/\sqrt{2mk_B T}$  [100]. Enfin, le comportement à grandes impulsions de la distribution en impulsion se voit être impactée au travers du contact de Tan, qui, à partir de l'équation sur  $F_{hom}$  (2.29) est donné par [121] :

$$\mathcal{C}_T = \frac{(2mk_B T)^2 L}{\hbar^4 2\pi} f_{1/2} \left( \frac{\mu}{k_B T} \right) f_{3/2} \left( \frac{\mu}{k_B T} \right) \quad (2.33)$$

où  $f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - x + 1}$  est l'intégrale de Fermi-Dirac. Il est par ailleurs possible de

trouver une expression reliant le contact de Tan à la densité du système et à son énergie. En effet, ces dernières sont reliées à l'intégrale de Fermi-Dirac présente dans l'expression (2.33) :

$$\begin{aligned} N/L &= \frac{\sqrt{m}(k_B T)^{1/2}}{\hbar\sqrt{2\pi}} f_{1/2}\left(\frac{\mu}{k_B T}\right), \\ E/L &= \frac{\sqrt{m}(k_B T)^{3/2}}{2\hbar\sqrt{2\pi}} f_{3/2}\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

ce qui mène à l'expression simple de  $\mathcal{C}_T$  en fonction de  $E$  et  $N$  :

$$\mathcal{C}_T = \frac{8mEN}{\hbar^2 L}. \quad (2.35)$$

Enfin, la quasi-condensation étant détruite, l'orbitale naturelle la plus occupée voit son nombre d'occupation associé décroître, et ceux des autres orbitales s'accroître, ce qui est naturel si on s'en réfère à leur similarité avec la distribution en impulsion qui s'arrondit en son centre, et s'étale sur les états d'impulsions.

Ainsi, les deux chapitres précédents ont mis deux aspects de ce manuscrit en lumière : le Kicked Rotor unidimensionnel quantique périodique et quasi-périodique, et le gaz de Tonks-Girardeau. L'objectif du manuscrit est clair, et cherche à unir ces deux systèmes afin de construire une étude complète d'un gaz de Tonks-Girardeau kické périodiquement et quasi-périodiquement. Ce manuscrit se trouve au bout de plusieurs dizaines d'années de recherches autour de la question de la survie de la localisation dynamique au travers d'une multitude de méthodes donnant lieu à tout autant de résultats et phénomènes explorés. Nous présentons ce cadre et le contexte de notre recherche à l'aide du prochain chapitre, qui rapporte l'état de l'art de la recherche sur l'effet des interactions dans le Kicked Rotor.



## Intermezzo : effet des interactions sur la localisation dynamique

L'avenir étant toujours chargé de passé pour prévoir, c'est-à-dire voir en avant, il faut d'abord regarder en arrière.

Gustave Le Bon

DANS notre approche du Kicked Rotor, il n'a été question que de la physique à un corps, sans interaction. La question de l'impact des interactions sur la localisation dynamique est une question fondamentale, qui, du fait de la correspondance avec un modèle d'Anderson, couplé à l'avènement des expériences d'atomes froids, n'a cessé de challenger les physiciens sur tous les plans - théorique, numérique, et expérimental - au sujet de la compréhension des systèmes perturbés périodiquement.

Cette question a fait l'objet d'une multitude de recherches, avec tout autant de modèles-jouets afin de modéliser le couplage entre particules induit par les interactions. Bien sûr, des approches de champs moyens comme l'équation de Gross-Pitaevskii ont été utilisées, et sont en mesure de capturer la physique d'un gaz d'atomes froids kickés en présence d'interaction faibles. Enfin, des approches au delà du champ moyen ont été employées, notamment pour comprendre la physique en dimension 1, où l'approche de champ moyen n'est plus valide.

Dans ce chapitre, nous présentons l'état de l'art de la recherche des effets des interactions sur la localisation dynamique dans le modèle du Kicked Rotor quantique périodique et quasi-périodique, des modèles-jouet aux méthodes au delà du champ-moyen, en passant par l'équation de Gross-Pitaevskii.

### 3.1 Modèles-jouet

Afin d'explorer les effets des interactions sur un système de rotors kickés périodiquement en temps, des modèles-jouet ont été imaginé afin d'introduire de différentes manières des couplages entre les rotors, et en observer les effets. Un modèle pionnier est proposé par Adachi, Toda et Ikeda au travers de l'Hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2} + \left( \sum_{i=1}^N K_i \cos \hat{\theta}_i + \sum_{i \neq j}^N \varepsilon_{i,j} \cos(\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j) \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n) \quad (3.1)$$

où  $\varepsilon_{ij}$  est la constante de couplage, et  $K_i$  est le paramètre de stochasticité associé au  $i$ -ème rotors. Le premier terme correspond à l'Hamiltonien du Kicked Rotor, tandis que le second est un terme de couplage dépendant de la position de chacun de rotors, ce qui ne va pas sans rappeler les termes de couplages dans le modèle XY, dépendant cette fois-ci de l'angle relatifs des spins couplés.

En 1988, Adachi, Toda et Ikeda [122] travaillent avec cette dynamique, en se concentrant sur un système à deux rotors, tel que  $K_1 = K_2$ , dorénavant noté  $K$ , et les rotors ont la même masse. En particulier, il est connu que dans la version classique du Kicked Rotor, des conditions initiales infiniment proches l'une de l'autre finissent par diverger de par la dynamique chaotique inhérente au système. Cet écart, exponentiel avec le temps, est caractérisé par le fameux exposant de Lyapunov, noté  $\lambda$ . Quand bien même cette divergence n'est plus dans sa version quantique, il est possible de dériver un temps pour lequel les deux systèmes correspondent. En pratique, ce temps est extrêmement court et est appelé temps d'Ehrenfest  $t_E \sim \lambda^{-1} \log(A/\hbar)$ , où  $A$  est l'action classique. Les auteurs s'interrogent alors quant à un potentiel retour de la classicalité dans un système pourtant quantique du fait du couplage des rotors.

Un premier effet notoire présenté par les auteurs est l'apparition d'une diffusion classique. En effet, les auteurs introduisent deux quantités : le moment  $M^{(i)}(t) = \langle \Psi_0 | (\hat{p}_t^{(i)} - \hat{p}_0^{(i)})^2 | \Psi_0 \rangle$ , où  $\Psi_0$  est la fonction d'onde associée à l'état initial, ainsi que la constante de diffusion associé à  $M$ ,  $D^{(i)}(M) = [dM^{(i)}/dt]_{t=t_M}$ , où  $t_M$  est déterminé par  $M^{(i)}(t_M) = M$ . Comme cela est attendu pour le Kicked Rotor quantique,  $M^{(i)}$  tend à saturer à temps longs lorsque  $\varepsilon$  est suffisamment faible. Un état transitoire apparaît lorsque des valeurs intermédiaires de  $\varepsilon$  sont prises, où l'on arrive dans un régime de diffusion fractionnaire, i.e.  $M^{(i)}(t) \propto t^\beta$ , avec  $\beta < 1$ . En augmentant encore le couplage, on atteint enfin  $\beta = 1$ , signe de la diffusion. Ceci se trouve être une diffusion au premier abord classique, du fait que les valeurs des constantes de diffusion associées aux deux rotors sont égales à la constante de diffusion classique.

Cependant, la diffusion apparente du système ne suffit pas pour déclarer qu'il est à présent un système classique. Pour sonder cela, les auteurs font une expérience de renversement du temps, avant quoi ces derniers perturbent le système avec une perturbation  $\zeta$  au temps  $t = T$ . Si le système est classique, et qui plus est chaotique, ce dernier doit perdre mémoire de son état initial, et ne doit plus être en mesure de retourner à cette dernière, et donc briser la réversibilité temporelle du système. Le résultat présenté dans leur papier est sans appel : à mesure que  $\zeta$  augmente, l'irréversibilité temporelle est d'autant plus marquée, signature d'une physique à présent classique et chaotique.

Une question naturelle se pose alors : qu'advient-il du système si on instaure une "asymétrie" au niveau des paramètres choisis ? En effet, les deux rotors sont déjà dans un régime chaotique, avant même que les interactions soient introduites dans le précédent cas. Par exemple, en choisissant des forces de kicks  $K_1 > K_c$  et  $K_2 < K_c$  ( $K_c$  faisant référence à la



force de kicks au delà de laquelle nous sommes dans le régime chaotique), il est possible de montrer que le premier rotor étant dans le régime chaotique, finit par contaminer le second rotor et transformer la physique globale des rotors en physique classique chaotique. D'autre part, une étude [123] propose un modèle prenant en compte des rotors de masses différentes, l'un étant largement plus lourd que l'autre afin de simuler la physique, par exemple, des atomes en interaction ayant des masses différentes. Il y est comparé deux types d'interaction, l'une similaire au modèle de [122], l'autre étant une barrière de potentielle infinie empêchant les rotors de s'éloigner au-delà d'une certaine distance. Dans les deux cas, les conclusions sont somme toutes les mêmes : le premier rotor, pourvu qu'il soit dans un régime de  $K$  où le chaos classique existe, fait transiter le second, plus lourd et hors du régime chaotique, dans la transition quantique-classique.

La limite qui nous intéresse au travers de ce manuscrit est celle pour laquelle nous avons un grand nombre de particules. Une manière de procéder est de faire correspondre notre système avec un système type Anderson désordonné, dont les états propres sont les états de Floquet. C'est l'idée sur laquelle se repose la recherche de Notarnicola *et al.* [124], qui étudient le même modèle avec l'Hamiltonien (3.1), où le couplage est de la forme  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{i,j-1}$ , ce qui donne lieu à la possibilité de faire correspondre le système de  $N$ -rotors avec un système d'Anderson à  $N$ -dimension :

$$\sum_{m \neq m'} W_{mm'} \langle m' | \phi_\alpha \rangle + \varepsilon(m) \langle m | \phi_\alpha \rangle = 2 \cos(\omega_\alpha) \langle m | \phi_\alpha \rangle \quad (3.2)$$

où les  $\phi_\alpha$  sont les états propres de l'opérateur de Floquet associé à l'Hamiltonien (3.1), avec leur quasi-énergies  $\omega_\alpha$ , et sont ici projetés sur la base des impulsions  $\{|m\rangle\}_{m \in \mathbb{Z}^N}$ . Une limite triviale de ce modèle est pour  $N = 1$ , où le système est toujours localisé, comme on l'attend d'un système désordonné d'Anderson à 1D. D'autre part, pour  $N = 2$ , nous savons que le système désordonné voit son énergie croître et éventuellement localiser, mais avec une longueur de localisation qui croît comme l'exponentielle du rapport  $K/k^1$ , ce qui est montré explicitement dans leur papier. Dans la limite  $N = 3$ , les auteurs montrent également la transition d'une phase localisée à délocalisée, ce qui également illustré dans leur papier. Ainsi, pour les premières limites à 1, 2 et 3 corps, la correspondance avec un système d'Anderson respectivement à 1, 2 et 3 dimensions nous permet de faire des déductions et est en accord avec les simulations.

L'objectif ici est de déterminer ce qu'il se passe pour  $N \rightarrow \infty$ . La première chose est de se pencher du côté système désordonné et la physique de l'équation (3.2) en dimension  $N \rightarrow \infty$ . Pour cela, nous savons appliquer la théorie d'échelle [6], dont nous avons parlé au chapitre 1. Nous savons que pour  $N > 2$ , il existe une valeur de la conductance adimensionnée  $g$ , qu'on note  $g_N^*$ , telle que la dérivée logarithmique  $\beta(g_N^*) = 0$ . Il est possible de montrer que le logarithme de  $g_N^*$  s'écrit comme suit :

$$\log(g_N^*) = -N + 3 + \log(2/\pi) - N \log(2\sqrt{2\pi}) - \left(\frac{N}{2} + 1\right) \left[ \log\left(\frac{N}{2} + 1\right) - 1 \right]. \quad (3.3)$$

---

1. Cela n'enlève rien à la véracité des résultats exposés plus tôt, où pour des constantes de couplage relativement faible, la localisation est effectivement conservée.

On peut ainsi déduire le comportement de la quantité  $\log g_N^*$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ , qui dans ce cas diverge vers  $-\infty$ . Cela implique que la valeur critique de  $g$  est toujours nulle dans la limite thermodynamique, impliquant que le système est toujours délocalisé.

Pour mener une étude complète du système avec une approche champ-moyen dans la limite thermodynamique, on s'intéresse aux limites dans laquelle cette approche est valable. En particulier, il est connu que cette approche est exacte pour la limite d'un nombre de coordination infinis, ou des interactions à portées infinies. Pour cela, les auteurs changent la forme du couplage des rotors dans l'Hamiltonien 3.1, en prenant  $\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon}{N-1}$ . Les auteurs font un ansatz de champ-moyen, en supposant qu'en partant d'un état factorisé  $|\Psi_{MF}(0)\rangle = \prod_i |\Psi_i(0)\rangle$ , le système reste dans une forme factorisée tout au long de l'évolution temporelle, ce qui est exact dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . En supposant une symétrie de translation, tous les états  $|\Psi_i(0)\rangle$  peuvent être écrit comme un seul et unique état  $|\Psi(0)\rangle$ . Ainsi, après une évolution temporelle composée de  $n$ -kicks, on obtient alors l'état à un corps  $|\Psi(n)\rangle$ , qui construit la fonction d'onde à  $N$ -corps  $|\Psi_{MF}(n)\rangle$  comme un produit tensoriel de cet états à un corps. Dans cette situation, il est possible d'écrire l'opérateur évolution du système :

$$\hat{U}_{MF}(n) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2}} e^{-\frac{K}{\hbar} [1 - \varepsilon \Psi_{MF}(n)] \cos \hat{\theta}}, \quad (3.4)$$

où ce dernier dépend de l'état du système au  $n$ -ème kicks au travers du paramètres de champ moyen  $\Psi_{MF}(n) = \langle \Psi(n) | e^{i\hat{\theta}} | \Psi(n) \rangle$ . Cette approche à un corps est très pratique, et nous pouvons même nous ramener à un opérateur semblable à celui du Kicked Rotor unidimensionnel (1.9) avec une amplitude de kicks dépendant du temps en posant  $K(n) = K[1 - \varepsilon \Psi_{MF}(n)]$ . À l'aide de cette approche, les auteurs trouvent alors que le système de  $N$ -rotors kickés sont sujets certes à une délocalisation, mais sous la forme de sous-diffusion, i.e.  $E \propto t^\alpha$  avec un exposant  $\alpha \in [0.6, 0.7]$ , en accord avec le fait que le système n'est plus en mesure de localiser dans la limite thermodynamique.

D'autres modèles-jouet ont fait l'objet d'études approfondies. Nous avons précédemment discuté que dans le cas où les rotors sont couplés deux à deux, la localisation est détruite. C'est en 2009 qu'un article est publié [125], où les auteurs, au travers d'un Hamiltonien très général de rotors couplés, clament pour la première fois avoir trouvé des paramètres pour lesquels on trouve une phase localisée dynamiquement à temps longs et de manière robuste. Plus récemment encore [126], les auteurs considèrent un système de rotors couplés dans un cas spécial intégrable linéaire, où la localisation dynamique survit aux interactions de manière robuste : on parle pour la première fois de localisation dynamique à  $N$ -corps.

Le modèle intégrable sur lequel repose le papier est le modèle de Maryland [127, 128], où la partie quadratique usuelle de la propagation en impulsion est remplacée par un terme linéaire en impulsion. Que ce soit du point de vue classique ou quantique, leur dynamique sont intégrables, et la localisation dynamique est cette fois, non plus due aux interférences quantiques, mais à l'existence d'une famille complète d'intégrales du mouvement [129]. Les auteurs considèrent l'Hamiltonien suivant :

$$\hat{\mathcal{H}} = 2\pi \sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{p}_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N J_{ij} (\hat{\theta}_i - \theta_j) + \hat{V} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n), \quad (3.5)$$

où  $\hat{V} = \sum_{i=1}^N K(\hat{\theta}_i)$  un potentiel de modulation des kicks à un corps, et  $J_{ij}$  un potentiel d'interaction à deux corps symétrique par renversement de l'espace. L'opérateur de Floquet est donné par  $\hat{U}_F = e^{-i\hat{V}} e^{-i\hat{H}_0}$  où  $\hat{H}_0$  comprend les deux premiers termes de l'Hamiltonien (3.5). L'énergie après le  $n$ -ème kicks, définit  $E_n = \langle \Psi_n | \hat{H}_0 | \Psi_n \rangle$ , où  $|\Psi_n\rangle = \hat{U}_F^n |\Psi_0\rangle$ , peut être écrit exactement comme suit :

$$E_n = E_0 + \sum_{i=1}^n \sum_m 2\pi \alpha_i \langle \hat{\Gamma}_{mi} \rangle_0 \frac{\sin(mn\pi\alpha_i)}{\sin(m\pi\alpha_i)}, \quad (3.6)$$

où  $E_0 = \langle \Psi_0 | \hat{H}_0 | \Psi_0 \rangle$  correspond à l'énergie moyennée à  $N$ -corps sur les états initiaux. De plus,  $\hat{\Gamma}_{mi} = -imk_m e^{im(\hat{\theta}_i + \pi\alpha_i[N_{kick}+1])}$ , qui dépend de la forme de  $K(\hat{\theta})$  moyennée sur les conditions initiales, et dû à sa nature périodique, est une fonction du nombre de kicks  $N_{kick}$  et est bornée. À temps longs, la croissance de l'énergie est totalement déterminée par la nature rationnelle ou irrationnelle des  $\alpha_i$  qui apparaît dans le ratio des fonctions sinusoidales. De plus, il est à noter que cette expression est indépendante des interactions (démontré dans la référence que nous discutons), ce qui est une conséquence de l'invariance par translation des interactions. L'étude ici repose essentiellement sur la physique du système selon les  $\alpha_i$ , qui conduit dans certaines limites à la localisation ou la délocalisation à l'échelle des rotors individuels, et même à l'échelle du système, extrêmement bien expliqué au travers du calcul des intégrales du mouvement. Il est ainsi montré que deux types de résonances mènent à une délocalisation. L'une vient du fait que les paramètres du système peuvent être commensurables avec le potentiel externe de kicks, là où l'autre type de résonance vient des interactions statiques. De plus, une chose intéressante au sujet de ce modèle, est que l'énergie totale du système n'est pas forcément un indicateur de la physique sous jacente qui peut présenter une physique diffusive pour une condition initiale en impulsion. De plus, ces derniers suggèrent un montage expérimental, où, au travers d'un couplage fort de type Josephson, ainsi qu'une liaison à un supraconducteur macroscopique, nous pourrions être en mesure de simuler la physique du système présenté.

Pour finir, une autre question naturelle à se poser concerne la conditions d'intégrabilité du système. En effet, de récents travaux se sont intéressés à un système de particules de Dirac dont l'Hamiltonien pour chaque particule libre est  $H_0 = 2\pi\alpha\sigma_x p + M\sigma_z$  [130]. Il y est montré en particulier que pour des  $\alpha_i$  irrationnels, le système, quand bien même non-intégrable, présente une localisation dynamique à  $N$ -corps. D'autre part, bien que le nombre de particules soit limité numériquement, la limite des hautes impulsions nous redonne l'Hamiltonien du modèle de Maryland avec interaction, ce qui suggère que la localisation dynamique devrait être robuste dans un certain nombre de cas d'Hamiltonien non-intégrable pour un nombre de rotors extensif.

## 3.2 Approches champ-moyen

Afin de comprendre la physique des condensats de Bose-Einstein, Lev Pitaevskii et Eugene Gross développèrent une équation permettant de capturer la physique des condensats, et

notamment l'apparition des vortex quantiques [131, 132]. Au travers des années, c'est une approche qui a eu des applications multiples et a permis notamment de comprendre une flopée de phénomènes comme l'apparition du régime de Thomas-Fermi ou la propagation de solitons par exemple. Quand bien même, l'hypothèse de champ moyen ne permet pas de capturer tous les régimes d'interaction, comme c'est le cas pour la phase d'isolant de Mott.

### 3.2.1 L'équation de Gross-Pitaevskii

Dans le cas du Kicked Rotor, les mêmes approximations de champ-moyen mentionnées en introduction du chapitre 2 sont faites vis-à-vis de la fonction d'onde. Nous pouvons nous en remettre à un paramètre d'ordre  $\phi(x, t)$ , qui mène à l'équation de Schrödinger non-linéaire dictant la dynamique de  $\phi$  :

$$i\partial_t\phi(x, t) = -\partial_{xx}\phi(x, t) - g|\phi(x, t)|^2\phi(x, t) + K \cos(x)\phi(x, t) \sum_n \delta(t - n) \quad (3.7)$$

qui n'est autre que l'équation (1.7) à laquelle nous avons ajouté un terme d'interaction non-linéaire.

Comme nous le montrons en insistant sur la notation de la précédente équation, le terme d'interaction est local dans l'espace des positions : c'est la fin de l'équivalence des modèles du Kicked Rotor périodique et quasi-périodique avec ceux d'Anderson unidimensionnel et tri-dimensionnel. En effet, le terme d'interaction  $g|\phi(x)|^2$  est un terme local dans l'espace des positions, que ce soit pour le Kicked Rotor (3.7) ou pour le réseau désordonné. Cela nous empêche d'inverser les rôles des impulsions et des positions pour passer d'un modèle à l'autre.

L'influence de la taille du système est cette fois-ci absolument à prendre en compte, car le paquet d'onde se disperse dans l'espace des positions. En effet, considérer un système de taille infini fait tendre le terme non-linéaire vers 0 à mesure que le nombre de kicks augmente. En pratique, il a été montré qu'après moins d'une dizaine de kicks, ce terme devient totalement négligeable [133]. Cela justifie entre autre l'utilisation de conditions aux bords  $2\pi$ -périodiques afin d'étudier l'influence des interactions sur le système.

### 3.2.2 L'approximation diagonale

En revanche, en prenant les conditions périodiques, le paquet d'onde étant confiné, l'étude peut être menée puisque le terme non-linéaire n'est plus alors négligeable. Expérimentalement, cela peut se faire à l'aide d'un piège toroïdal [134]. Côté théorique et surtout numérique, il a été montré pour un système désordonné d'Anderson que la localisation est détruite pour laisser place à une sous-diffusion, où le second moment de la fonction d'onde en position évolue en  $t^{2/3}$  [135, 136]. Pour ce qui est du Kicked Rotor, il a été également montré que la localisation dynamique est détruite, et laisse également place à un régime sous-diffusif [137-140]. Outre les conditions aux bords périodiques, ces papiers font une approximation forte pour gagner du temps de calcul : l'approximation diagonale.

Pour obtenir cette approximation, il faut tout d'abord écrire l'équation de Gross-Pitaeski en représentation impulsions à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sqrt{\frac{\bar{k}}{2\pi}} \sum_k e^{ikx} \phi(p = \bar{k}k), \\ \phi(p = \bar{k}k) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\bar{k}}} \int dx e^{-ikx} \phi(x).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Entre deux kicks, l'équation (3.7) s'écrit :

$$i\bar{k}\partial_t\phi(p, t) = \frac{p^2}{2}\phi(p, t) + \frac{g\bar{k}}{2\pi} \sum_{p_1, p_2} \phi^*(p_1, t)\phi(p_2, t)\phi(p + p_1 - p_2; t).\tag{3.9}$$

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation concernant les interactions correspond à deux effets. Le premier est un effet de couplage pour les impulsions  $p \neq p_1, p_2$  : la part de non-linéarité des interactions affecte comment sont peuplés les états d'impulsions. Jusqu'alors, ces états n'étaient couplés que pendant les kicks, la présence d'interactions les couple également pendant la propagation libre. En second vient un effet de décohérence pour les termes  $p = p_1, p_2$ . En effet, on peut s'intéresser à la fréquence d'oscillation des composantes d'impulsions, qui est donnée par  $\omega(p) \sim p^2/2\bar{k} + g/2\pi|\phi(p)|^2$ , qui possède alors une composante non-linéaire. Si l'on s'en réfère à la correspondance que nous avons établie avec un système désordonné, ce terme non-linéaire intervient alors dans la distribution des énergies du réseau. Couplée à cela l'évolution temporelle de  $|\phi(p)|^2$ , on a alors une redistribution permanente des énergies, entraînant des effets non-triviaux sur les interférences quantiques à l'origine de la localisation dynamique.

L'approximation diagonale quant à elle consiste à ne prendre en compte que les contributions  $p = p_1 = p_2$ , donc les effets de décohérence. Dans ce cas, l'équation (3.9) devient :

$$i\bar{k}\partial_t\phi(p, t) = \frac{p^2}{2}\phi(p, t) + \frac{g\bar{k}}{2\pi}|\phi(p, t)|^2\phi(p, t)\tag{3.10}$$

ce qui nous donne immédiatement l'évolution temporelle de  $\phi(p)$  entre deux kicks :

$$\phi_{t+1}(p) = \exp\left[-\frac{ip^2}{2\bar{k}} - \frac{g\bar{k}}{2\pi}|\phi_{t+}(p)|^2\right]\phi_{t+}(p)\tag{3.11}$$

où  $t^+$  désigne le temps juste après un kick.

À temps longs, c'est-à-dire le régime temporel de mise en place de la sous diffusion de l'ordre de  $t \sim 10^7 - 10^8$  différentes études menées [137-139] suggèrent un exposant de sous diffusion  $\alpha \simeq 0.3 - 0.4$ , considérablement plus lent que celui prédit par le modèle exact  $\alpha \simeq 0.5 - 0.8$ . D'autre part, à temps court, qui serait un régime temporel d'intérêt puisque accessible expérimentalement, une part importante du caractère non-linéaire est négligée, ce qui se voit au travers des calculs d'énergies qui dévient très nettement les uns des autres avec ou sans approximation diagonale.

### 3.2.3 Destruction de la localisation dynamique par les interactions

Une destruction de la localisation se démarque par l'augmentation de la variance du paquet d'onde à mesure que le temps s'écoule. Pour les temps longs, les études que nous citons plus tôt trouvent une expansion de la forme  $\langle p^2(t) \rangle \sim t^\alpha$ , où  $\alpha \in [0, 1]$ . La valeur de cet exposant a été sujet à débat, une fois prédit égale à  $2/5$  [137, 138] basé sur le critère de Chirikov [38], une autre  $1/3$  [139], basé cette fois-ci sur des arguments de faible chaoticté [135]. En se basant sur l'approximation diagonale, les travaux de thèse de Benoît Vermesch démontre qu'à temps longs ( $t \sim 10^7$  kicks), l'exposant de sous-diffusion tend bien vers  $2/5$ , et retrouve également la forme de la fonction d'onde du système, qui, au lieu d'être en exponentielle décroissante, a une structure particulière sous-diffusive marquée par un plateau central, confirmant les résultats de Dima Shepeliansky [137]. Cela n'est pourtant pas vraisemblable de simuler une telle physique expérimentalement, du fait des temps évoqués plus tôt. Une solution imaginée est d'accélérer l'arrivée du régime asymptotique sous-diffusif en augmentant la force des interactions au court du temps [141]. Si cela semble raisonnable pour améliorer la visibilité du régime sous diffusif, rien ne nous indique que le régime asymptotique attendu n'arrive à temps courts et ne soit pas affecté par les interactions. Une étude récente s'est intéressé à ce problème et a notamment pris le parti de prendre en compte les limitations expérimentales [140]. Dans cet article, les auteurs utilisent plutôt l'approximation de phase-moyenne. Cette approximation consiste à considérer la fonction d'onde du système en représentation amplitude-phase  $\phi(p) = A(p)e^{i\psi(p)}$ , et choisir de considérer les phases  $\phi(p)$  distribuées aléatoirement. Le terme de somme sur  $p_{1,2}$  dans l'équation (3.9), qui à l'aide de l'approximation diagonale était devenu  $F(p, \phi) = \frac{kg}{2\pi} |\phi(p, t)|^2 \phi(p, t)$ , est cette fois-ci donné par un terme plus complexe mais produit la même physique. Cela permet de prendre mieux en compte les temps pour lesquels les interactions sont non-négligeables, mais ne permet pas la détermination d'une valeur universelle de l'exposant  $\alpha$  de sous-diffusion.

### 3.2.4 Le régime diffusif et critique du Kicked Rotor quasi-périodique

Nous l'avons vu, il est possible de reproduire la phase diffusif d'un système d'Anderson 3D à l'aide d'un Kicked Rotor quasi-périodique, voir le chapitre 1. En présence d'interaction, cette dernière reste inchangée. En effet, cette phase ne repose pas sur un effet des interférences quantiques à l'origine de la localisation. En calculant la distribution en impulsions pour différents temps et différentes amplitudes d'interaction, il a été montré que la diffusion et la forme gaussienne de la distribution en impulsions demeurent inchangées [133].

Quant à la transition, l'étude des effets des interactions introduit une nouvelle échelle de temps. Ceci indique que pour étudier une éventuelle transition de phase, il faut modifier la loi d'échelle à un paramètre, en une nouvelle à deux paramètres. Autrement dit, il faut trouver une théorie auto-consistante non-linéaire en mesure de décrire le système [142].

L'idée de base est toujours la même, et consiste à décrire le système par une unique fonction d'échelle, ici la dérivée logarithmique  $\beta$  de la conductance  $G$ . Pour  $g = 0$ , la fonction  $\beta$  passe de  $-\infty$  à une valeur finie respectivement pour  $G < 0$  et  $G > 0$ , ce qui est

la marque du passage d'une phase localisée à diffuse. Dès lors que  $g \neq 0$ , cette fonction change drastiquement, et pour chaque valeur de  $g$  est produite une nouvelle fonction  $\beta$ , qui au lieu de diverger vers  $-\infty$  pour  $G < 0$ , a une valeur finie, ce qui est la marque de la disparition de la phase localisée en présence d'interaction. De plus, le fait qu'à une valeur de  $g$  correspond une fonction  $\beta$  signifie qu'une description à un paramètre n'est plus en mesure de capturer la physique du système. Les auteurs introduisent ainsi un paramètre  $\Gamma = g/G$  où cette fois-ci on considère la fonction à deux paramètres  $\beta = \beta(G, \Gamma)$ , dépendant des interactions et prenant en compte son effet sur le système.

### 3.3 Au-delà du champ moyen

L'approximation de champ moyen est en mesure de décrire la physique d'un gaz d'atomes froids tridimensionnel kickés périodiquement (et même quasi-périodiquement) pour un régime d'interactions faibles. En 1D, les fluctuations quantiques ne sont plus négligeables dans la physique du système, et le champ-moyen ne nous permet pas de les prendre en compte. Expérimentalement, les interactions entre deux atomes de la famille des alcalins sont de la forme d'un potentiel de contact  $\delta(x_1 - x_2)$ . Nous discutons à présent l'impact des interactions en employant des méthodes au delà du champ moyen.

#### 3.3.1 La limite à deux corps

Un premier papier de 2017 [143] étudie un système de  $N = 2$  bosons en interaction de contact, dont l'Hamiltonien est donné par :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{LL} + \hat{\mathcal{H}}_K \quad (3.12)$$

où les Hamiltoniens sont donnés par :

$$\hat{\mathcal{H}}_{LL} = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \frac{\hat{p}_2^2}{2} + g\delta(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \quad (3.13)$$

l'Hamiltonien de Lieb-Liniger sans potentiel, et où l'Hamiltonien de kick est :

$$\hat{\mathcal{H}}_K = K[\cos \hat{x}_1 + \cos \hat{x}_2] \sum_n \delta(t - n). \quad (3.14)$$

Les fonctions propres de  $\mathcal{H}_{LL}$  sont des ondes planes notées  $|\phi_\kappa^k\rangle$ , où  $\kappa$  représente les impulsions du centre de masse du système à deux particules, et  $k$  les impulsions relatives. On peut alors calculer l'opérateur évolution dans l'espace des impulsions, qui prend l'expression :

$$\hat{U}_{\kappa P}^{kp} = \langle \phi_P^p | \hat{U} | \phi_\kappa^k \rangle \quad (3.15)$$

ce qui, dans la limite des grandes impulsions relatives et pour des impulsions moyennes  $\kappa$  et  $P$  fixes,

$$|U_{\kappa P}^{kp}| \sim \frac{|\mathcal{M}_2|}{2\pi k^4} \quad (3.16)$$

où dans ce cas,  $|\mathcal{M}_2| \sim \frac{1}{|\kappa - P|!}$  pour  $|\kappa - P| \gg 1$ , ce est qui une décroissance super-exponentielle. Ainsi, dans la direction des impulsions relatives, nous avons un opérateur qui décroît comme une loi de puissance, et comme une super-exponentielle dans la direction des impulsions du centre de masse. Les auteurs s'intéressent également à l'expansion de la fonction d'onde dans l'espace des  $(k, \kappa)$  au travers coefficients d'expansion  $C_\kappa^k(t)$ , qui semblent indiquer une localisation dans la direction des  $\kappa$ , mais une délocalisation dans la direction des  $k$ . En s'intéressant également à la variance du paquet d'onde, les auteurs affirment que cette dernière dévoile une destruction de la localisation dynamique pour des interactions trop fortes, sur la base d'argument selon laquelle la décroissance de l'opérateur évolution comme une super exponentielle selon les  $\kappa$  conduit effectivement à une localisation, tandis que la décroissance algébrique n'est pas une condition suffisante pour conserver la localisation dynamique selon les  $k$ . Cela reste très discutable, d'une part par le fait que les simulations des auteurs ne sont conduites qu'à des temps relativement courts ( $t \sim 10^3$ ). Le paquet d'onde peut tarder à localiser, ceux à quoi on peut s'attendre du fait des interactions, ce qui demanderait de regarder la dynamique à temps longs ( $t \sim 10^{4-6}$ ). D'autre part, le fait que les données ne soient pas moyennées sur les quasi-impulsions comme nous l'avons fait au chapitre 1 peut également expliquer la difficulté à conclure nettement.

Un récent article s'est également intéressé à ce système [144], en réalisant cette fois-ci les moyennes sur les quasi-impulsions, et montre que peu importe la force d'interaction, l'énergie du système sature, et ce sur des temps longs ( $t \sim 10^6$ ). Les auteurs de cette étude étudient également la distribution en impulsion, chose qui n'avait pas été fait, et montre l'apparition d'une décroissance algébrique de la distributions en impulsion à grandes impulsions en  $\mathcal{C}/k^4$ , qui est une particularité universelle des systèmes quantiques en interaction que nous avons vu au chapitre 2.

Le second point de Qin *et al.* [143] se base sur la décroissance en  $k^{-4}$  de l'opérateur évolution, ce sur quoi les auteurs s'accordent, mais ce qui n'est pas un argument pour la délocalisation, ce que montrent Chicireanu et Raçon [144]. En effet, d'autres recherches sur des systèmes désordonnés on montré que pour des sauts à courte portée, correspondant à  $|U_{\kappa P}^{kp}| \sim k^{-\mu}$  pour  $\kappa$ ,  $R$  et  $r$  fixes, voient leurs états propres être localisés pour  $\mu > 3/2$  [145] : la localisation est donc attendu pour  $\mu = 4$  dans notre cas.

Ainsi, nous l'avons vu, le cas à 2 corps est finalement toujours localisé, dans le sens où l'énergie du système sature à temps longs. Comme nous l'avons dit, les interactions de contact sont à grandes portées dans l'espace des impulsions et sont susceptibles de coupler les particules de manière inédite pour un nombre macroscopique de particules. L'avenir de la localisation dynamique dans le cas à  $N$ -corps est l'objet de la prochaine sous-section.

### 3.3.2 Localisation dynamique à $N$ -corps

En 2020, Rylands *et al.* étudient un gaz bosonique de Lieb-Liniger kické périodiquement [146]. Ces derniers justifient analytiquement la présence de localisation, mais aussi numériquement à l'aide de l'hydrodynamique généralisée, qui est une extension de l'hydrodynamique aux systèmes intégrables, construit sur l'ensemble de Gibbs généralisé.



Dans la limite à basse énergie, i.e. lorsque la variation d'énergie du système est toujours inférieure à l'énergie de Fermi, le gaz bosonique de Lieb-Liniger est décrit par la théorie du liquide de Luttinger<sup>2</sup> [147, 148]. Il est montré que dans le cadre de cette théorie, l'énergie du système oscille du fait de la présence des kicks. En effet, la physique à basse énergie du système est dictée par des excitations collectives, qui peuvent être vu comme la propagation d'ondes sonores du liquide de Luttinger ou comme des excitations trou-particule à basses impulsions proches de la surface de Fermi avec une relation de dispersion linéaire  $\varepsilon(k) = v_s|k|$ . Le terme de kicks quant à lui crée et détruit des paires trou-particule avec des impulsions  $\pm k$ , ce qui contribue à l'oscillation de l'énergie. Cette dispersion linéaire apparaît car le système est fortement corrélé, et la cohérence de cette approche est garantie par le fait que le système est localisé.

Le spectre du modèle de Lieb-Liniger est composé de quasi-particules. Dans la limite thermodynamique, i.e.  $N \rightarrow \infty$ , si la variation de la densité de particule oscille doucement en comparaison des temps caractéristiques du système, on peut décrire le système par l'occupation locale des quasi-particules  $n(x, \lambda, t)$ , où  $x$  est la position spatiale et  $\lambda$  est l'impulsion des quasi-particules. En particulier, une approche très récente, appelé hydrodynamique généralisée [149-151], est en mesure de décrire  $n(x, \lambda, t)$  dans la limite des grandes échelles de longueur. L'équation de l'hydrodynamique généralisée est donnée par :

$$[\partial_t + v_{eff}[n]\partial_x]n(x, \lambda, t) = \partial_x V(x, t)\partial_\lambda n(x, \lambda, t), \quad (3.17)$$

où  $v_{eff}[n]$  est la vitesse effective des excitations de quasi-particule du modèle, fonctionnelle de l'occupation  $n$ , et  $V(x, t)$  un potentiel, ici donné par  $V(x, t) = \frac{V_0}{\tau} \cos(qx)$  pour  $T^- < t < T$ , avec  $T^- = T - \tau$ ,  $T$  étant la période des kicks, et  $\tau$  leur durée, et 0 autrement. Dans le cadre de l'étude du Kicked Rotor, il faut donc résoudre l'équation (3.17). Lors de la propagation libre, le terme de potentiel disparaît dans le membre de droite, et on obtient :

$$n(p, \lambda, t + T) = e^{-ipv_{eff}[\langle n \rangle]T} n(p, \lambda, t), \quad (3.18)$$

où  $n(p, \lambda, t)$  est la transformée de Fourier de  $n(x, \lambda, t)$  par rapport à  $x$  et  $v_{eff}[\langle n \rangle]$  la vitesse effective, déterminée par une approximation linéaire des équations de l'hydrodynamique généralisée [152]. Pour les kicks, l'équation 3.17 mène à l'équation :

$$n(x, z, t^+) = e^{iV_0 qz \sin(qx)} n(x, z, t^-). \quad (3.19)$$

où  $n(x, z, t)$  est la transformée de Fourier de  $n(x, \lambda, t)$  par rapport à  $\lambda$ , et  $t^\pm$  sont respectivement les temps juste après et juste avant une propagation libre. Du fait que l'équation (3.17) est une équation de dynamique classique pour  $n(x, \lambda, t)$ , les équations (3.18) et (3.19) nous mène donc à la dynamique classique diffusive du Kicked Rotor. En revanche, les auteurs utilisent une autre expression pour l'évolution temporelle lors des kicks :

$$n(x, z, t^+) = e^{2iV_0 \sin(qz/2) \sin(qx)} n(x, z, t^-), \quad (3.20)$$

---

2. Ce modèle est formulé avec des opérateurs fermioniques de création et d'annihilation avec des relations de commutations analogue à celles d'opérateurs création et annihilation bosoniques, ce qui explique que l'on évoque une énergie de Fermi.

qui est une expression exacte pour les quasi-particules dans le régime de Tonks-Girardeau lorsqu'on calcule l'effet des kicks sur  $n(x, z, t)$ . Les auteurs s'intéressent à la variance de la distribution de vitesse des quasi-particules  $n(\lambda, t) = \int n(x, \lambda, t) dx$  calculée avec les équations (3.18) et (3.20) et est relié à l'énergie du système. Ces derniers trouvent une saturation de la variance à temps longs, ainsi qu'une décroissance exponentielle de  $n(\lambda, t)$ . Avant cela, il est affirmé que la saturation de la variance de  $n(\lambda, t)$  est un indicateur de la localisation exponentielle dans l'espace des  $\lambda$ . Ce n'est pas tout à fait correcte, car nous l'avons vu, des modèles comme le modèle de Maryland localisent aussi, mais la distribution en impulsion associée n'est pas une exponentielle décroissante. D'autre part, les auteurs trouvent une localisation dynamique du système, qui vient du fait qu'ils utilisent l'équation (3.20), qui peut être vue comme l'ajout de termes correctifs à l'équation (3.19), mais est par conséquent hors du cadre des approximations de l'hydrodynamique généralisée.

Enfin, les auteurs discutent de la densité spatiale  $\bar{n}(p, t) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} \bar{n}(p, \lambda, t)$ , quantité qui ne délivre aucune information sur la potentielle localisation dynamique du système, puisque complètement différente de la distribution de vitesse des quasi-particules  $n(\lambda, t)$ .

### 3.4 Synthèse

Pour résumer, nous avons parcouru l'ensemble des recherches visant à caractériser l'effet des interactions sur la localisation dynamique. En premier lieu, nous avons vu qu'il existe toute une zoologie de modèles-jouet, qui selon les régimes de paramètres prédisent une destruction de la localisation dynamique [122, 124], ou sa survie [125, 126] dans le cadre de modèle intégrable. L'approche de champ-moyen a également été utilisée, notamment dans la limite des faibles interactions, et prédit toujours une délocalisation du système. Des études dans la limite à deux corps ont été menées à partir d'un modèle de Lieb-Liniger décrivant des particules en interaction de contact, qui dans ce cas prédit une localisation du système dans n'importe quel régime d'interaction [144]. Enfin, une dernière étude [146] s'intéresse au cas à  $N$ -corps, donnant des arguments analytiques en faveur de la localisation dans les différentes échelle d'énergies et régime d'interaction. Cependant, comme nous l'avons vu, le traitement des kicks via l'approche de l'hydrodynamique généralisée est peu claire, et ne permet pas de parler de localisation dynamique à  $N$ -corps de manière non-ambigüe.

À notre tour, nous allons tenter d'apporter notre pierre à l'édifice. Pour ce faire, nous allons étudier un gaz de Tonks Girardeau soumis à un potentiel de kicks périodique au travers d'une étude numérique. Rylands *et al.* ont discutés rapidement de ce cas dans leur article, argumentant que la localisation dynamique perdura du fait de la correspondance de Bose-Fermi. C'est ce que nous montrons de manière explicite et exacte au cours du prochain chapitre, en apportant à cela une caractérisation complète du système de bosons en interaction, ce qui nous permettra d'affirmer l'existence de la localisation dynamique à  $N$ -corps en présence d'interactions infinies, qui est la contribution principale du travail de thèse réalisé.



# Thermalisation effective d'un gaz de Bose localisée dynamiquement à $N$ -corps

Vous avez une idée aujourd'hui, une meilleure idée demain,  
mais la meilleure de toutes... jamais!

---

Sir Robert Watson-Watt

LES précédents chapitres nous ont permis de comprendre d'une part le phénomène de localisation dynamique, analogue à la localisation d'Anderson mais dans l'espace des impulsions, accessible via une expérience d'atomes froids. D'autre part, nous avons présenté le régime de Tonks-Girardeau, nous offrant un modèle exactement soluble, et nous permet de faire des déductions sur le système de bosons en interaction qui nous intéresse, du fait que des observables sont identiques à celles d'un système de fermions libres, comme l'énergie ou la densité.

Comme nous l'avons discuté dans le chapitre 3, déterminer si les interactions détruisent ou non la localisation dynamique est une question fondamentale. Dans ce chapitre, nous étudions la phase localisée dynamiquement à  $N$ -corps d'un gaz de Lieb-Liniger kické dans le régime d'interactions infinies. Nous montrons en particulier que l'état stationnaire du système est très bien décrit par la matrice densité d'un gaz thermique, a priori en contradiction avec le fait que le système, localisé dynamiquement, est intégrable et a un nombre extensif de charges conservées (l'occupation des états de Floquet dans ce cas). Ce phénomène, que nous nommons thermalisation effective, apparaît alors que le système est toujours périodiquement kickés. En particulier, nous relierons la température effective aux paramètres du système, ce qui nous permet de caractériser quantitativement deux observables essentielles que nous avons présenté au chapitre 2 : la distribution en impulsion et la fonction de corrélation.

## 4.1 Modèle du gaz de Tonks-Girardeau kické

Nous considérons  $N$  particules bosoniques de masse  $m$  en interaction, dont la dynamique est gouvernée par l'Hamiltonien périodique

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \sum_i \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2} + K \cos(\hat{x}_i) \sum_n \delta(t - n) \right) + g \sum_{i < j} \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j), \quad (4.1)$$

où  $g = \frac{2\pi T^2}{mL^3} g_{1D}$  la constante d'interaction en unités réduites. Le terme à un corps correspond à l'Hamiltonien du Kicked Rotor périodique quantique (1.2), tandis que le second terme décrit les interactions de contact (nous définissons entre autre  $\hat{\mathcal{H}}_{TG} = \hat{\mathcal{H}}|_{K=0}$ ). Ici, et pour la suite, les unités employées sont exprimées en unités réduites. Les impulsions sont normalisées telles que  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ . Nous fixons aussi la taille du système  $L = 2\pi$ , et considérons des conditions aux bords périodiques. D'autre part, nous ne moyennons pas les données sur les quasi-impulsions pour obtenir la matrice densité réduite du système de bosons, et ne faisons cela que lorsque nous nous intéressons aux observables liées aux fermions.

Dans le cas  $g = 0$ , nous retrouvons la physique du Kicked Rotor quantique présentée au chapitre 1, où toutes les fonctions d'ondes à un corps sont localisées dans l'espace des impulsions à des temps supérieurs au temps de localisation, et présentent une décroissance exponentielle avec une longueur de localisation  $p_{loc}$ . En particulier, l'énergie totale du système sature à une valeur constante à temps long.

Dans le régime de Tonks-Girardeau  $g \rightarrow \infty$ , nous pouvons écrire la solution exacte dépendante du temps  $\Psi_B(\{x\}, t)$  du système en utilisant le théorème de correspondance de Bose-Fermi (2.16). Nous considérons que le système a pour condition initiale son état fondamental. Cela se traduit par les fonctions d'ondes fermioniques décrivant une mer de Fermi, avec l'impulsion de Fermi  $k_F \propto N$ , et dont l'énergie de l'état fondamental est notée  $E_0$ .

Pour un gaz de Tonks, toutes les observables bosoniques locales, comme l'énergie ou la densité, sont données par celles des fermions libres. Ainsi, puisque la dynamique suivie par les orbitales  $\psi_i(x, t)$  est celle du Kicked Rotor quantique sans interaction, nous déduisons directement qu'à temps longs, ces dernières seront localisées dynamiquement. L'énergie, à la fois des bosons et des fermions, va alors saturer à une valeur finie  $E_f \simeq E_0 + N \frac{p_{loc}^2}{2}$ , pour des temps supérieurs au temps de localisation comme nous le montrons sur la figure 4.1, ce qui est interprété comme la localisation dynamique à  $N$ -corps [146].

Les orbitales fermioniques atteignant un état stationnaire dans la phase localisée, nous nous attendons à pouvoir décrire le système par une matrice densité stationnaire  $\hat{\rho}_{ss}$ , appartenant a priori à l'ensemble de Gibbs généralisé [153], dont nous discutons dans la partie 4.4. Nous nous concentrons ici aux propriétés du système dans cette phase localisée, nous permettant de ne plus prendre en compte la dépendance en temps des observables.

Les observables non-locales, comme la matrice densité et la distribution en impulsion définies respectivement par l'équation 2.28 et 2.18, seront significativement différentes de celles des fermions. Étant donné que la localisation dynamique est un phénomène non-local car dans l'espace des impulsions, nous nous attendons ainsi à ce qu'elles soient totalement

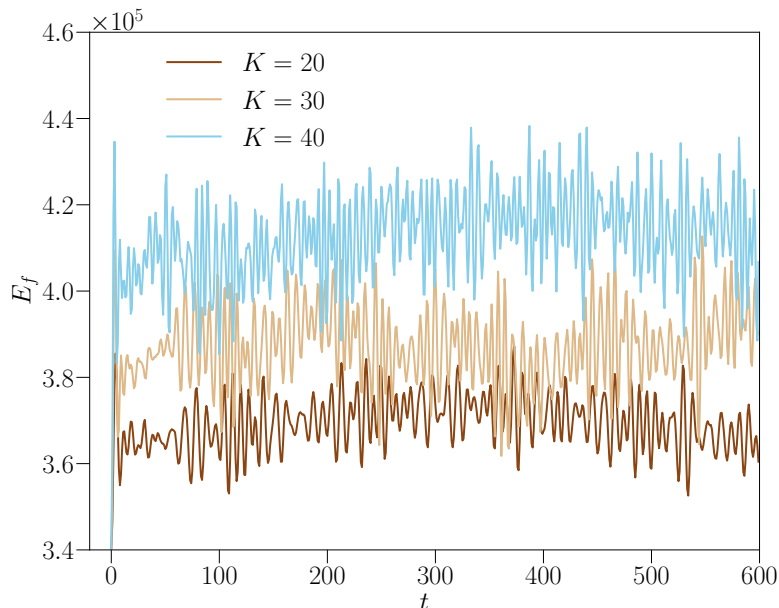


FIGURE 4.1 – Évolution temporelle de l'énergie totale du système  $E_f(t)$  pour  $N = 61$  particules. Ici  $K = 20, 30$  et  $40$  ( $k = 6$ ).

différentes du cas libre<sup>1</sup>. Nous nous concentrons ainsi sur ces observables pour des temps longs.

## 4.2 Observables dans la phase localisée

### 4.2.1 Distribution en impulsion

L'état fondamental d'un gaz de Tonks est caractérisé par un ordre à quasi-longue portée, i.e.  $n_k(t=0) \propto 1/\sqrt{k}$  à basse impulsion, et  $n_{k=0} \propto \sqrt{N}$ , où cette évolution sous-linéaire implique l'absence d'un vrai ordre à longue portée [156]. La figure 4.2 montre la distribution en impulsion dans l'état fondamental et dans la phase localisée pour  $k = 6$ ,  $N = 51$  bosons et différentes valeurs de  $K$ . La divergence présente dans l'état fondamental est arrondie (voir encart), tandis que nous observons une décroissance en loi de puissance à hautes impulsions,  $n_k \simeq \mathcal{C}_{ss}/k^4$ . L'énergie du système atteignant une valeur constante à temps longs, nous déduisons que les interactions ne détruisent pas la localisation dynamique. Pour autant, elles altèrent significativement la décroissance exponentielle de la distribution en impulsions des bosons, en comparaison du cas sans interaction.

1. Ceci est à mettre en contraste avec le cas d'un gaz de Tonks au sein d'un potentiel aléatoire, où la localisation dans l'espace des positions pour les fermions est naturellement conservée pour les bosons [154, 155].

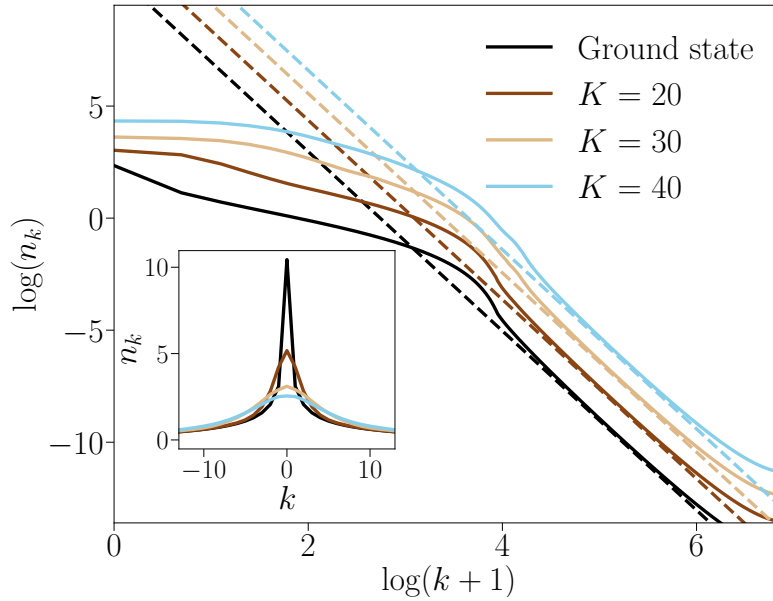


FIGURE 4.2 – Distribution en impulsion dans la phase localisée pour  $N = 51$  particules pour  $k = 6$  et  $K = 20, 30$  et  $40$  en échelle log-log (les distributions ont été shiftées par soucis de visibilité pour le graphique principal). Les lignes pointillés montrent le comportement asymptotique  $n_k \simeq \mathcal{C}_{ss}/k^4$  à hautes impulsions, avec  $\mathcal{C}_{ss}$  calculé en utilisant la matrice densité thermique effective. L'encart présente les mêmes quantités en échelle linéaire.

### 4.2.2 Cohérence et matrice densité

Afin de caractériser la cohérence dans un gaz de Tonks dans la phase localisée, nous définissons la fonction de cohérence :

$$g_1(r) = \frac{1}{L} \int dR \rho(R - r/2, R + r/2), \quad (4.2)$$

où  $R = \frac{x+y}{2}$  la position moyenne, et  $r = |x - y|$  la position relative. Dans l'état fondamental, les corrélations sont algébriques,  $g_1(r, t = 0) \propto 1/\sqrt{r}$ , correspondant à nouveau à l'ordre à quasi-longue portée [100]. La figure 4.3 montre que dans la phase localisée, la fonction de cohérence  $g_1$  décroît exponentiellement vite avec la distance  $r$ , impliquant la destruction de la cohérence au sein du système, et notamment de la phase quasi-condensée, par les kicks. Ceci est d'une part en accord avec l'arrondi de la divergence de la distribution en impulsion, et d'autre part avec le fait que l'occupation de l'état  $n_{k=0}$  n'évolue plus avec le nombre de particules, voir encart (b) de la figure 4.3.

## 4.3 Thermalisation effective dans la phase localisée

L'absence de cohérence à quasi-longue portée du régime localisée est similaire à celle d'un gaz de Tonks thermique [100]. Nous montrons dans cette section que nous sommes en

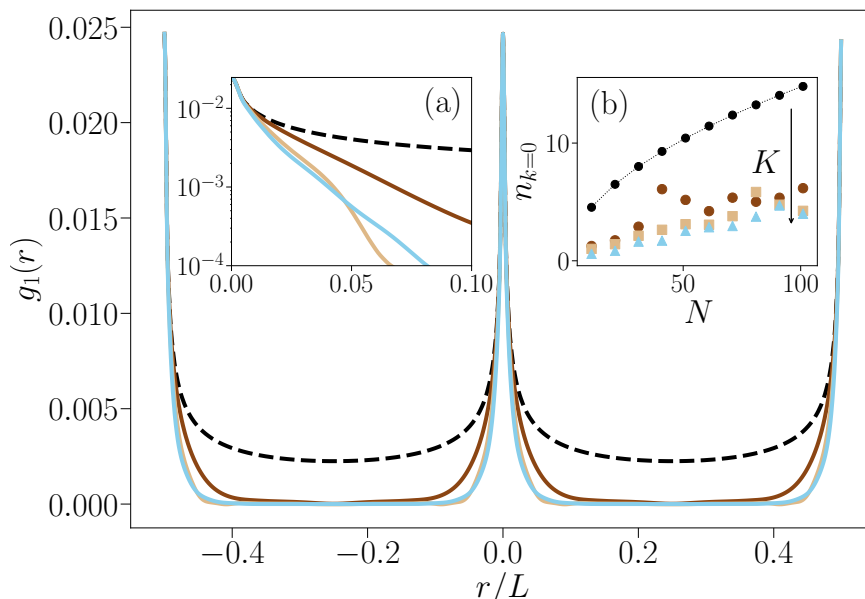


FIGURE 4.3 – Fonction de corrélation  $g_1(r)$  dans la phase localisée pour  $N = 101$  particules pour  $\bar{k} = 6$ ,  $K = 20, 30$  et  $40$ . Encart (a) : mêmes données en échelle semi-log, mettant en avant la décroissance exponentielle dans la phase localisée, comparée à la décroissance algébrique en  $1/\sqrt{r}$  de la condition initiale (courbes en pointillés); (b) : Occupation de l'état  $n_{k=0}$ . L'évolution en  $\sqrt{N}$  de l'état fondamental (lignes pointillés) est présentée, et nous voyons la saturation à une valeur constante dans la phase localisée.

mesure de décrire le système dans la phase localisée par une matrice densité thermique, i.e.  $\hat{\rho}_{ss} \simeq \hat{\rho}_{th}$ , où  $\hat{\rho}_{th}$  est définie comme suit :

$$\hat{\rho}_{th} \propto e^{-(\hat{H}_{TG} - \mu_{eff} \hat{N})/T_{eff}}, \quad (4.3)$$

avec  $T_{eff}$  la température effective, et  $\mu_{eff}$  le potentiel chimique effectif, dépendant des paramètres du système et du nombre de particules.

Grâce à la correspondance de Bose-Fermi, si il y a une thermalisation effective, nous nous attendons alors à ce que la distribution fermionique  $n_k^F$  soit bien décrite par la distribution de Fermi-Dirac, nous permettant ainsi d'extraire une température et un potentiel chimique effectif. Nous analysons alors les propriétés thermiques du gaz de Fermi, afin de déduire celles du gaz de Tonks dans la phase localisée.

### 4.3.1 Fermions

Un exemple de distribution fermionique dans la phase localisée est montrée sur la figure 4.4 (symboles). En comparaison avec la distribution en impulsions bosonique présentée plus tôt, et comme pour les simulations à un corps présentées dans le chapitre 1, on peut



constater la présence de bruit dans les données, typique pour les systèmes désordonnés. Pour contrer cela, nous faisons appel à l'Hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}_q$  (1.13), qui nous permet alors de simuler la physique du Kicked Rotor quantique et lisser les distributions en moyennant sur les quasi-impulsions  $q$ . À noter que nous ne moyennons jamais les observables bosoniques (i.e. on considère toujours la physique pour  $q = 0$  en référence à  $\hat{\mathcal{H}}_q$ ). En effet, les transformations hautement non-linéaire en lien avec le calcul des observables bosoniques moyenne les éventuelles fluctuations venant de la physique du Kicked Rotor.

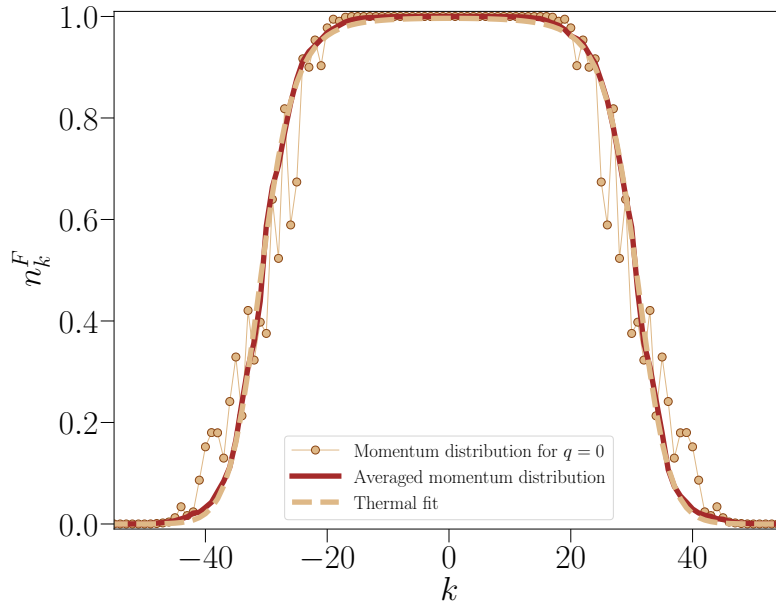


FIGURE 4.4 – Comparaison entre la distribution en impulsions à  $N$ -corps brute et moyennée, ainsi qu'un fit avec une distribution de Fermi-Dirac à une température et un potentiel chimique donnés. Dans ce cas,  $N = 61$ ,  $K = 30$  et  $\bar{k} = 6$ .

En ajout sur la figure 4.4, nous montrons la distribution en impulsions fermionique une fois moyennée sur 150 valeurs de  $q$  (lignes pleines), qui montre à nouveau l'effet de lissage du moyennage sur les quasi-impulsions. Sur cette même figure, nous montrons une distribution de Fermi-Dirac à une température effective  $T_{eff}$  et un potentiel chimique effectif  $\mu_{eff}$ , de sorte que cette distribution thermique concorde avec la distribution en impulsion moyennée.

La température effective et le potentiel chimique effectif sont obtenus en imposant le système de contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{FD}(k, T_{eff}, \mu_{eff}) &= N, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{k}^2 k^2}{2} f_{FD}(k, T_{eff}, \mu_{eff}) &= E_f, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où  $E_f$  est l'énergie obtenue par le moyennage sur les quasi-impulsions de la distribution  $n_k^F$ , et  $f_{FD}$  est la distribution de Fermi-Dirac :

$$f_{FD}(k, T, \mu) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar^2 k^2 / 2 - \mu}{T}} + 1}. \quad (4.5)$$

où  $\tilde{T} = \frac{4\pi^2 T_1^2}{mL^2} T$  la température en unités réduites, que nous notons  $T$  par la suite. Nous observons que la procédure de fit est remarquablement bonne, dans le cas où  $p_{loc} \ll p_F$  (correspondant à des valeurs faibles de  $K/\bar{k}$ ), comme le montre l'encart de la figure 4.8.

Dans la limite où nous kickons plus fort le système de fermions, il arrive que nous ne puissions plus décrire la distribution par celle de Fermi-Dirac, mais par une exponentielle décroissante. Cela vient du fait qu'en utilisant une force de kicks aussi grande, la longueur de localisation  $p_{loc}$  dépasse alors largement  $p_F$ , donnant cette forme caractéristique d'exponentielle décroissante à la distribution en impulsion. Pour illustrer cela, nous montrons sur la figure 4.5 un exemple de régime de paramètres pour lequel l'extraction d'une température et d'un potentiel chimique effectifs n'est pas possible.

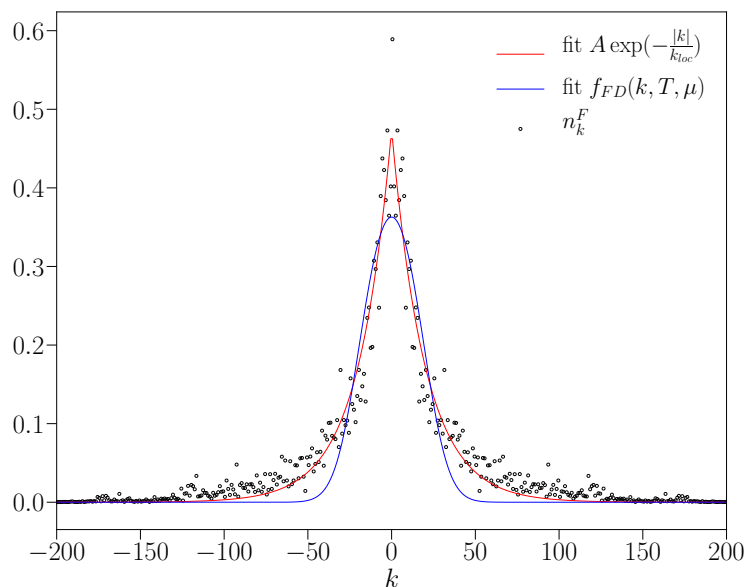


FIGURE 4.5 – Comparaison entre la distribution fermionique, un fit avec une fonction de Fermi-Dirac, et un fit avec une exponentielle décroissante. Ici  $N = 21$ ,  $K = 20$ ,  $\bar{k} = 3$ .

### Régime de validité

Afin de quantifier l'écart entre nos fits thermiques et nos données, nous introduisons la quantité  $\varepsilon$  qui est l'erreur relative entre les deux distributions :

$$\varepsilon = \frac{\| n_k^F - f_{FD}(k, T_{eff}, \mu_{eff}) \|}{\| n_k^F \|}. \quad (4.6)$$

où  $\| \dots \| = \sum_k | \dots |$ . En calculant cette quantité en fonction des paramètres  $K$  et  $N$ , nous sommes en mesure de construire un tableau de valeur. Le seuil à partir duquel nous estimons que les fits n'est plus correctes est fixé à 5%. Nous montrons ce tableau sur la figure 4.6. D'une part, nous voyons que notre description devient de plus en plus robuste lorsque  $N$  augmente, et que  $K$  a des valeurs raisonnables. Afin de comprendre cela, deux quantités sont liées naturellement à  $N$  et  $K$  : l'impulsion de Fermi  $p_F$  et  $p_{loc}$ . Nous montrons alors le même tableau en fonction des valeurs de  $p_F$  et  $p_{loc}$ , et nous constatons ainsi que dans la gamme de paramètres où  $p_{loc} \ll p_F$ , nous pouvons utiliser l'approche de thermalisation effective.

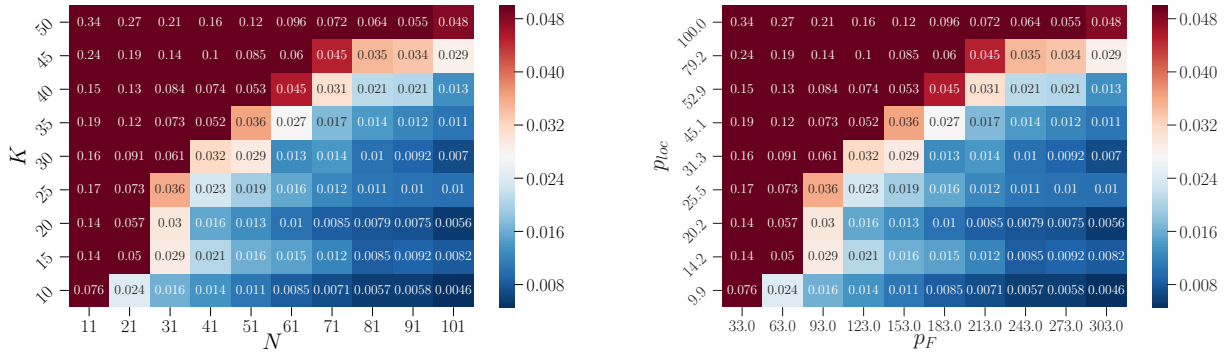


FIGURE 4.6 – À gauche :  $\varepsilon(N, K)$  pour  $k = 6$ . La région rouge foncé correspond à une erreur relative supérieure à 5%. À droite : mêmes données que la figure de gauche, en fonction de  $p_{loc}$  et  $p_F$ .

### Développement de Sommerfeld

Le régime de paramètres où la description thermique marche correspond à des températures effectives basses en comparaison de l'énergie initiale de Fermi  $\varepsilon_F = p_F^2/2$ , ce qui nous permet de dériver une expression explicite de la température effective en fonction des quantités naturelles  $p_{loc}$  et  $p_F$ . Tout d'abord, l'énergie de la condition initiale  $E_0$  correspond à celle de l'état fondamental, ce qui nous permet d'écrire son énergie comme :

$$E_0 = \frac{N\varepsilon_F}{3}, \quad (4.7)$$

qui n'est autre que l'énergie d'un gaz de Fermi, où l'énergie de Fermi  $\varepsilon_F = \frac{N^2}{8}$  ( $N \gg 1$ ) en unité réduite. D'autre part, puisque nous sommes dans le régime localisé, l'énergie du système à temps longs s'écrit :

$$E_f = E_0 + N \frac{p_{loc}^2}{2}. \quad (4.8)$$

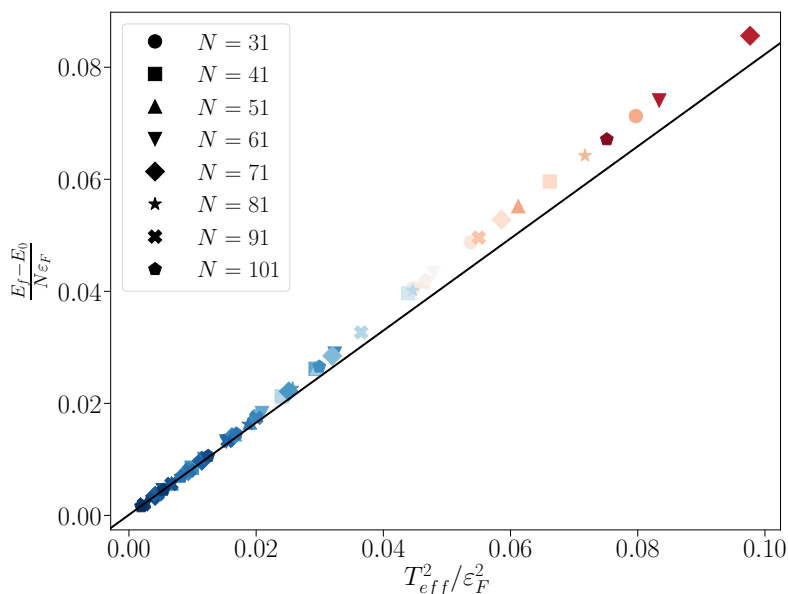


FIGURE 4.7 – Energie  $E_f$  à temps longs en fonction de la température  $T_{eff}$  obtenue des fits pour  $k = 6$  et différentes valeurs de  $N$ . En pratique nous faisons le graphique de  $E_f - E_0/N\varepsilon_F$  en fonction de  $T_{eff}^2/\varepsilon_F^2$ , qui devrait respecter le développement fait à l'équation (4.9). Le code couleur correspond à celui employé sur la figure 4.6.

En faisant la supposition que le système est thermique, nous savons que dans la limite des faibles températures, nous pouvons avoir recourt au développement de Sommerfeld afin de déterminer la dépendance des quantités thermodynamiques du système en fonction de la température. Pour ce qui est de l'énergie, cela donne :

$$E(T_{eff}) \simeq \frac{N\varepsilon_F}{3} + \frac{N\pi^2 T_{eff}^2}{12 \varepsilon_F} + \dots \quad (4.9)$$

Égalisant  $E_f$  et  $E(T_{eff})$ , on obtient l'expression :

$$\frac{T_{eff}}{\varepsilon_F} = \frac{2\sqrt{3} p_{loc}}{\pi p_F} \quad (4.10)$$

On voit grâce à cette expression que la gamme de paramètre vérifiant notre critère de validité correspond à des températures effectives faibles (comparée à l'énergie de Fermi), liée à des faibles valeurs de  $p_{loc}/p_F$ . Afin d'exploiter l'erreur relative  $\varepsilon$ , nous avons associé à chaque donnée correspondant à un set de paramètres une couleur des tableaux de la figure 4.6. D'une part, nous illustrons l'équation (4.9) à l'aide de la figure 4.7 représentant  $E_f - E_0/N\varepsilon_F$  en fonction de  $T_{eff}^2/\varepsilon_F^2$ . En particulier, nous voyons que dans le régime de paramètre où les fits thermiques marchent, région bleue sur notre figure, la droite noire représentant l'équation (4.9) est en mesure de décrire nos données, et est en accord avec notre estimation de la validité de la thermalisation effective.

La figure 4.8 montre que l'équation (4.10) est en mesure d'expliquer le comportement de la température effective pour  $p_{loc}/p_F \ll 1$ . Notons aussi que, tandis que la température effective croît linéairement avec le nombre de particule, l'élargissement relatif thermique de la distribution en impulsion fermionique, mesuré par  $T_{eff}/\varepsilon_F$ , décroît en  $N^{-1}$ . Nous avons également fait le travail de correspondance des couleurs avec les valeurs d'erreur relative  $\varepsilon$ , que nous montrons sur la figure 4.8. À gauche nous montrons de manière visuelle le régime de paramètre de validité de la thermalisation effective, dans la région  $p_{loc}/p_F \ll 1$ .

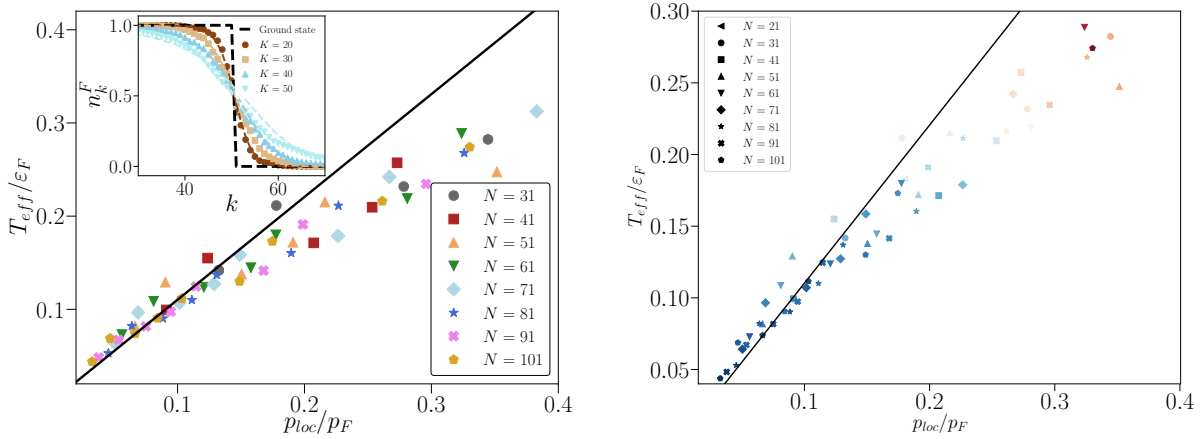


FIGURE 4.8 – À gauche : Température effective  $T_{eff}/\varepsilon_F$  en fonction de  $p_{loc}/p_F$  pour une variété de nombre de particules. Le regroupement des données autour de la ligne noire, illustrant la relation  $T_{eff}/\varepsilon_F \simeq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} p_{loc}/p_F$ , démontre un évolution linéaire pour des valeurs de  $p_{loc}/p_F$  suffisamment faibles. Encart : distribution en impulsions fermionique  $n_k^F$  dans le régime localisé (symbole), fittée par une distributon de Fermi-Dirac. Ici,  $N = 101$  et  $\bar{k} = 6$ . À droite : même données que la figure de gauche, où nous avons fait correspondre les couleurs du tableau 4.6 à nos données.

Par ailleurs, pour tester notre hypothèse de thermalisation effective nous introduisons la fonction de corrélation des fermions, notée  $C(x, y)$  :

$$C(x, y) = \sum_k \psi_k(x) n_k \psi_k^*(y). \quad (4.11)$$

Dans notre hypothèse de thermalisation effective, les fonctions  $\psi_k(x)$  sont des ondes planes. Nous construisons alors trois fonctions suivant la distribution  $n_k$  que nous utilisons. La première est  $C^{q=0}(x, y)$  construite avec la distribution en impulsion fermionique sans moyennage sur les quasi-impulsions. Ensuite,  $C(x, y)$  est la fonction construite avec la distribution moyennée. Enfin,  $C^{th}(x, y)$  est construite avec la distribution de Fermi-Dirac fittée sur la distribution en impulsions des fermions kickés moyennée. D'une part, nous avons comparé  $C^{q=0}(x, y)$  avec  $C^{th}(x, y)$ . C'est ce que nous montrons sur la figure 4.9 où, en tirets noirs, nous voyons une fonction de corrélation d'un système de  $N$  fermions caractérisée par des oscillations à courtes portées, là où la fonction des fermions kickés comporte

des oscillations sur tout l'espace, ce qui est lié aux bruits des données non moyennées. On voit que les oscillations à courtes distances ne correspondent pas tout à fait entre les deux fonctions. À droite, nous comparons cette fois-ci la fonction de corrélation  $C^{th}(x, y)$  à la fonction  $C(x, y)$  avec une distribution des fermions kickés moyennées, où nous voyons une correspondance entre les deux fonctions, d'une part au centre de la figure où nous voyons que les oscillations des deux fonctions s'alignent remarquablement bien, ainsi que le comportement à plus grande distance, du fait que le moyennage sur les quasi-impulsions a réduit les oscillations de la fonction de corrélation. C'est une manière visuelle de se rendre compte de l'impact du moyennage sur les quasi-impulsions des observables fermioniques.

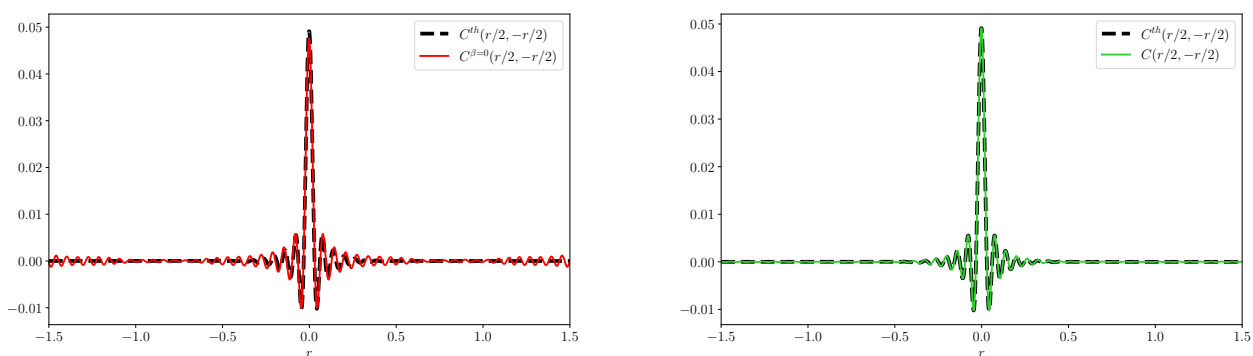


FIGURE 4.9 – À gauche : comparaison entre la fonction de corrélation thermique  $C^{th}(x, y)$ , et  $C^{q=0}(x, y)$  des fermions calculée avec la distribution brute. À droite : Même comparaison, avec cette fois-ci  $C(x, y)$  qui est calculée avec la distribution en impulsion des fermions moyennée. Ici,  $N = 101$ ,  $K = 20$  et  $\hbar = 6$ .

À partir des observables fermioniques moyennées, nous sommes en mesure d'extraire une température effective et un potentiel chimique dans une gamme de paramètre que nous avons déterminé, en fonction de  $K$  et  $N$ . Nous regardons par la suite les conséquences sur les bosons, et testons notre approche sur les observables bosoniques, qui devrait se comporter comme des observables d'un système de bosons à température non nulle.

### 4.3.2 Implications pour les bosons

En supposant que la matrice densité stationnaire  $\hat{\rho}_{ss}$  est thermique, nous utilisons les développements à basse température des observables du système. Cela nous permet de caractériser la distribution en impulsion et la fonction de cohérence du gaz de Tonks dans le régime localisé en utilisant la température et le potentiel chimique effectif extrait des observables fermioniques.

Pour un gaz de Tonks à température non nulle de  $N$  particules, nous rappelons que le contact de Tan est donné par  $\mathcal{C}_{th}(T, N) = \frac{8NE(T, N)}{L^2\hbar^2}$  une fois passé en unité réduite [118]. En suivant notre hypothèse de thermalisation effective, nous prédisons que le contact de Tan  $\mathcal{C}_{ss}$  du régime localisé devrait être donné par  $\mathcal{C}_{th}(T_{eff}, N)$ . Nous montrons sur la figure 4.2 que nous sommes en mesure de reproduire la décroissance en loi de puissance de

la distribution en impulsion bosonique à hautes impulsions via  $\mathcal{C}_{th}(T_{eff}, N)/k^4$ , que nous montrons en lignes pointillées.

À grandes distances par rapport à la taille du système, un gaz de Tonks à température finie verra sa fonction de cohérence décroître exponentiellement vite comme  $g_1 \propto e^{-2|r|/r_c}$  (2). La longueur de corrélation  $r_c$ , dans le régime des basses températures évolue comme l'inverse de la température,  $r_c = \frac{\hbar v_F}{T}$ , où  $v_F = \frac{\hbar \pi N}{mL}$  est la vitesse de Fermi en unités standard. Le passage en unité réduite est fait ainsi pour  $v_F$  et  $r_c$  :

$$\tilde{v}_F = v_F \frac{2\pi}{L} T_1 = \frac{\hbar N}{2}, \quad (4.12)$$

et,

$$\tilde{r}_c = r_c \frac{2\pi}{L} = \frac{\hbar v_F}{T} \quad (4.13)$$

Par la suite, on notera  $\tilde{r}_c$  et  $\tilde{v}_F$  tout simplement  $r_c$  et  $v_F$ . D'autre part, connaissant l'évolution de la température en fonction des paramètres du système donnée par l'équation (4.10), la longueur de corrélation est alors donnée par :

$$r_c p_F = \frac{\hbar \pi}{\sqrt{3}} \frac{p_F}{p_{loc}}. \quad (4.14)$$

La figure 4.10 montre une très bonne description par l'équation (4.14) de nos données. Nous avons calculé directement  $r_c$  sur la fonction  $g_1(r)$  en utilisant la formule 2.32 sur une portion réduite de l'espace  $r \in [-L/4; L/4[$  afin de nous concentrer sur le centre de la fonction. L'encart montre que (4.14) est en mesure de décrire la décroissance exponentielle de la fonction de cohérence  $g_1$ .

## 4.4 Arguments pour la thermalisation effective

Dans cette partie, nous argumentons au sujet la phase localisée dynamiquement à  $N$ -corps, et pourquoi cette dernière apparaît comme thermique. Pour cela, il est plus aisé de s'intéresser aux degrés de liberté fermioniques, étant donné qu'ils sont sans interactions et évoluent suivant la dynamique de  $\hat{\mathcal{H}}_{QKR}$ . Nous introduisons à nouveau l'opérateur évolution sur une période  $\hat{U}_q$  et les états propres de Floquet tels que présenté au chapitre 1 à l'équation (1.15), que nous écrivons en seconde quantification :

$$\hat{U}_q = \exp \left( -i \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \hat{f}_{\alpha}^{\dagger} \hat{f}_{\alpha} \right), \quad (4.15)$$

où les  $\omega_{\alpha}$  sont les quasi-énergies associées à l'état de Floquet  $\phi_{\alpha}$  et  $\hat{f}_{\alpha}^{\dagger} = \sum_k \hat{f}_k^{\dagger} \phi_{\alpha}(k)$ . Le système étant intégrable, nous nous attendons à ce que l'état stationnaire puisse être décrit par l'ensemble généralisé de Gibbs périodique [153, 157],  $\hat{\rho}_{ss} \simeq \hat{\rho}_{GGE}$ . En effet, nous pouvons trouver un nombre extensif de quantités conservées par la dynamique noté  $\hat{I}_{\alpha}$ , et construire la matrice densité  $\hat{\rho}_{GGE}$  avec

$$\hat{\rho}_{GGE} \propto e^{-\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \hat{I}_{\alpha}}, \quad (4.16)$$

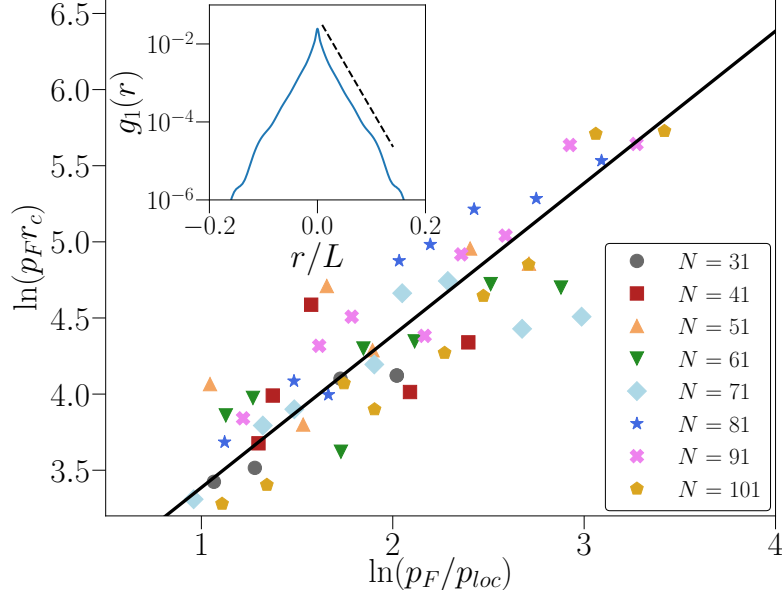


FIGURE 4.10 – Longueur de corrélation  $r_c$  en fonction de  $p_{loc}$  pour une variété de nombre de particules  $N$ . Le regroupement des données signifie que la quantité  $r_c p_F$  est indépendante du nombre de particule. Le trait plein représente l'équation (4.14). Encart : Fonction de corrélation  $g_1(r)$  (traits bleus) et la décroissance exponentielle attendue en imposant  $r_c = \frac{\pi}{3} \frac{k}{p_{loc}}$  (tirets noirs) avec ici  $N = 101$ ,  $K = 40$ ,  $k = 6$ .

où les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_\alpha$  sont fixés par  $\langle \Psi(t=0) | \hat{I}_\alpha | \Psi(t=0) \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_{GGE} \hat{I}_\alpha)$ . Dans ce cas, les occupations des états de Floquet  $n_\alpha = \langle \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\alpha \rangle$  sont des constantes du mouvement, ce qui implique  $\hat{I}_\alpha = \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\alpha$  et  $\lambda_\alpha = \log((1 - n_\alpha)/n_\alpha)$ . Dans un premier temps, il paraît assez surprenant que la matrice densité  $\hat{\rho}_{GGE}$ , dépendante d'un nombre extensif de multiplicateurs de Lagrange, soit bien décrite par une matrice densité thermique, dépendante uniquement de deux paramètres que sont  $T_{eff}$  et  $\mu_{eff}$ . Pour mieux comprendre cela, nous écrivons la matrice densité de l'ensemble de Gibbs généralisé en terme d'opérateurs non-locaux dans l'espace des impulsions :

$$\hat{\rho}_{GGE} \propto e^{-\sum_{p,q} \mathcal{M}_{p,q} \hat{f}_p^\dagger \hat{f}_q}, \quad (4.17)$$

avec  $\mathcal{M}_{p,q} = \sum_\alpha \langle p | \phi_\alpha \rangle \lambda_\alpha \langle \phi_\alpha | q \rangle$ . Ainsi, pour une dynamique générique et des conditions initiales, nous devrions obtenir un large nombre de quantités non-locales conservées, et un départ clair d'un état thermique. Cependant, dans ce cas précis, les états de Floquet sont exponentiellement localisés dans l'espace des impulsions sur une plage de l'ordre de  $p_{loc}$ ,  $\langle p | \phi_\alpha \rangle \simeq e^{-|p-p_\alpha|/p_{loc}}$ . Ceci implique deux choses :

- Seul les états d'impulsions  $|p_\alpha| \lesssim p_F + p_{loc}$  sont occupés. Dans ce cas,  $n_\alpha \simeq 1$  (resp. 0) pour  $|p_\alpha| \ll p_F$  (resp.  $|p_\alpha| \gg p_F$ ), avec un passage de 1 à 0 autour de  $|p_\alpha| \simeq p_F$  sur une largeur  $p_{loc}$  ;



- $\mathcal{M}_{p,q} \simeq 0$  si  $|p-q| \gg p_{loc}$ , ce qui nous indique que la matrice  $\mathcal{M}$  est quasi-diagonale, i.e.  $\mathcal{M}_{p,q} \simeq \delta_{p,q} h_p$ . Dans l'hypothèse d'une thermalisation, nous nous attendons en pratique à trouver  $h_p \simeq \mathcal{F}_p \equiv (-\mu_{eff} + p^2/2)/T_{eff}$  comme une bonne approximation.

La figure 4.11 montre que  $\mathcal{F}_p$  est en mesure d'expliquer la largeur de la diagonale de la matrice  $\mathcal{M}$ , justifiant notre approximation de thermalisation effective,  $\hat{\rho}_{ss} \simeq \hat{\rho}_{th}$ . Il est particulièrement important de respecter le premier point : une autre condition initiale que l'état fondamental, ou une sur-population des états propres brise la thermalisation effective et ne nous permet plus une description de l'état stationnaire en termes de matrice densité thermique.

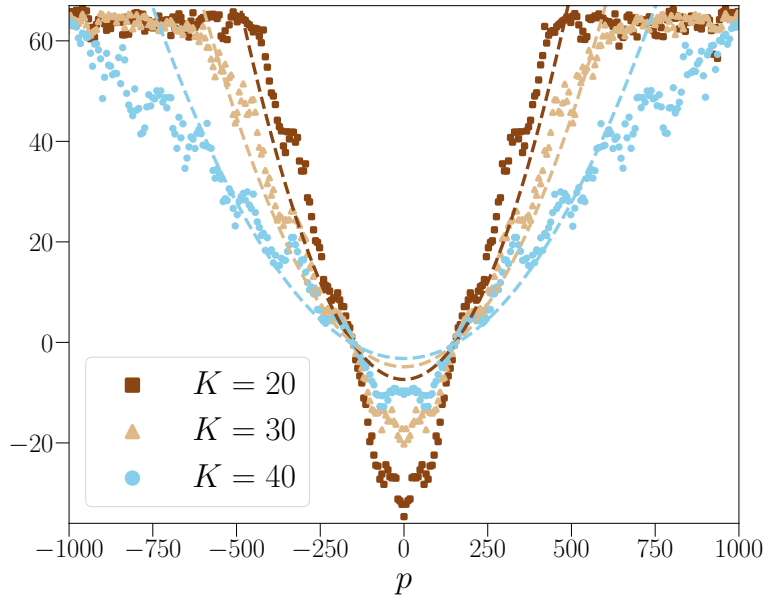


FIGURE 4.11 – Comparaison entre  $h_p$  (symboles) avec  $\mathcal{F}_p$  (tirets) pour différentes valeurs de  $K$ , avec  $N = 51$  et  $\bar{k} = 6$ .

D'autre part, le fait que  $\mathcal{M}$  ne soit pas exactement diagonale implique également que la description thermique n'est qu'une approximation : les orbitales naturelles de la matrice densité en impulsion si elle était réellement thermique, serait des ondes planes. Dans notre cas, et comme cela est montré sur la figure 4.12, l'orbitale naturelle la plus occupée est une exponentielle décroissante sur une plage d'impulsions de l'ordre de  $p_{loc}$ , tandis que la matrice densité réduite dans l'espace des impulsions décroît exponentiellement vite sur cette même plage d'impulsions.

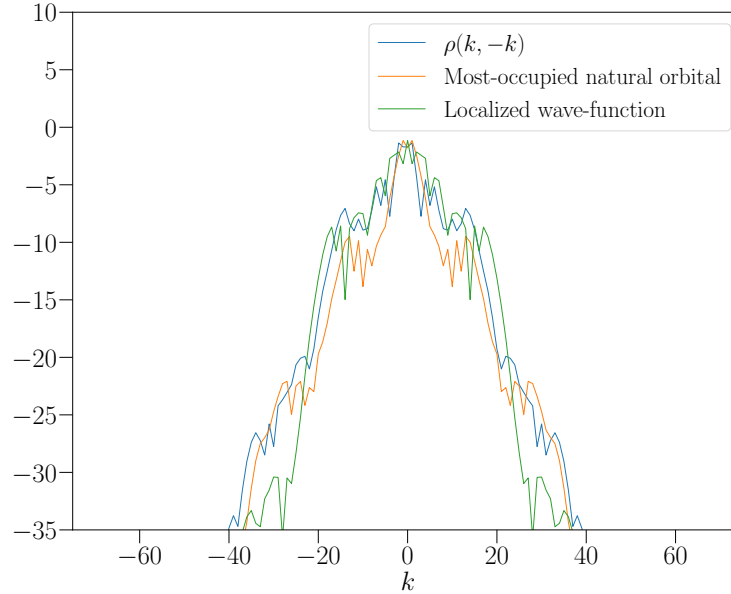


FIGURE 4.12 – Comparaison entre l’anti-diagonal de la matrice densité réduite à un corps dans l’espace des impulsions  $\rho(k, k')$  et l’orbitale naturelle la plus occupée. Nous les comparons à la fonction d’onde en impulsion correspondante à l’état  $k = 0$  du Kicked Rotor sans interaction. Ici,  $N = 51$ ,  $K = 20$  et  $k = 6$ .

## 4.5 Limites de la thermalisation effective

Nous souhaitons ici adresser les limites de notre description du système en terme de thermalisation effective.

D’une part, nous l’avons discuté plus tôt, la description qualitative de la distribution en impulsion des fermions comme une distribution de Fermi-Dirac avec une température effective et un potentiel chimique effectif associé n’est pas toujours possible. En effet, dans la mesure où  $p_{loc} \gg p_F$ , la distribution fermionique retrouve une forme localisée, typique de ce nous avons vu pour la physique à 1 corps. Cela entraîne un décrochage des données du comportement thermique effectif.

D’autre part, nous portons l’attention sur le choix de l’état initial, que nous avons choisi comme étant l’état fondamental d’un gaz de Fermi. Choisir un autre état initial brise complètement notre approche. Nous le montrons sur la figure 4.13, où nous avons appliqué la dynamique du Kicked Rotor périodique à un gaz de Fermi de  $N = 101$  particules comme condition initiale. Nous avons pris la moitié de la distribution en impulsion de part et d’autre de l’axe vertical  $k = 0$  que nous avons séparé d’une certaine distance. Ce n’est plus une distribution que nous pouvons globalement fitter avec une distribution de Fermi-Dirac, et ne nous permet plus de décrire le système avec notre approche. Le choix de l’état initial est donc crucial, et se restreint à l’état fondamental ou un état thermique à basse température.

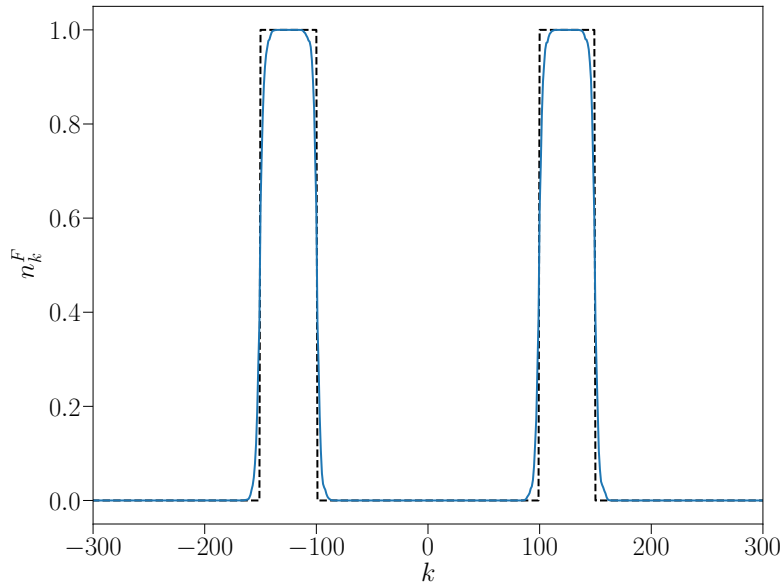


FIGURE 4.13 – Distribution en impulsion initiale des états séparés (en tirets noirs), et après la dynamique du Kicked Rotor (ligne bleu continue) pour  $N = 101$  particules,  $K = 20$ ,  $\hbar = 6$  et 600 kicks. Les données sont moyennées 150 fois sur les quasi-impulsions.

Enfin, d'autres systèmes manifestent le phénomène de localisation dynamique, et ont en plus un Hamiltonien intégrable, comme le modèle de Maryland (voir chapitre 3). Nous avons alors calculé la distribution en impulsion issue de cette dynamique, que nous montrons sur la figure 4.14 pour des paramètres semblables à ceux que nous avons employé au cours de ce chapitre. Nous avons également tenté de fitter une distribution de Fermi-Dirac, ce qui est absolument impossible, ce qui restreint a priori pour le moment notre approche au modèle de Kicked Rotor.

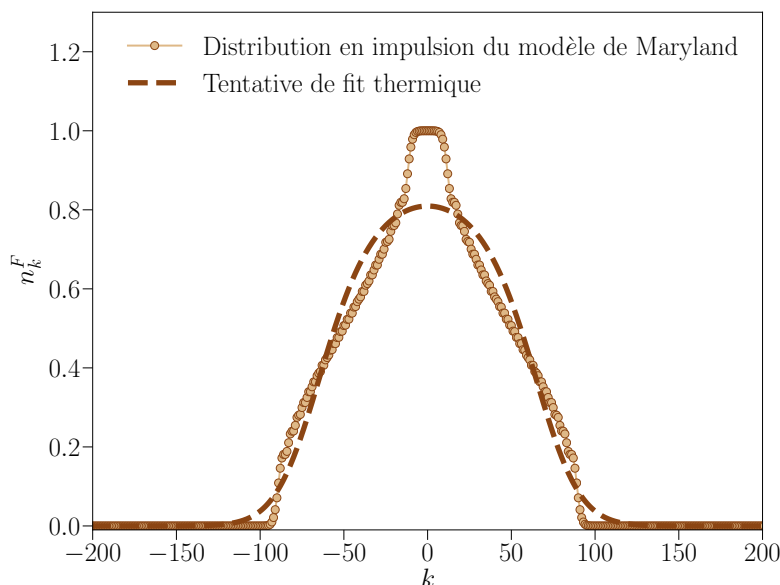


FIGURE 4.14 – Distribution en impulsion à temps long issue du modèle de Maryland pour  $N = 101$  particules,  $K = 40$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$ , au bout de 500 kicks (points marrons), comparé à une tentative de fit avec une distribution de Fermi-Dirac (tirets marrons).

## 4.6 Conclusion

Nous avons étudié au cours de ce chapitre l'état stationnaire d'un gaz de Tonks sujet à des kicks. Nous avons montré que la localisation dynamique est conservée dans un régime d'interactions fortes, au sens où le système ne chauffe pas indéfiniment, ce qui est visible au travers de son énergie totale qui sature à temps longs. Nous avons également montré que la distribution en impulsion des bosons en interaction n'est pas une exponentielle décroissante comme dans le cas sans interaction. Cette décroissance est cette fois-ci algébrique en  $1/k^4$  et est caractérisée par un contact de Tan, caractéristique universelle des systèmes quantiques en interaction. Nous avons également montré que l'état stationnaire du système est remarquablement bien décrit par une matrice densité thermique. Nous avons ainsi montré l'émergence d'une température effective, que nous avons reliée aux propriétés de localisation du système. En particulier, nous avons montré que la température effective évolue linéairement en fonction de l'impulsion de Fermi  $p_F$  et la longueur de localisation en impulsion  $p_{loc}$ . Cet état stationnaire est ainsi à la fois dans une phase localisée dynamiquement à  $N$ -corps, mais aussi bien décrit par un petit nombre de constantes du mouvement, qui correspondent à l'énergie et au nombre de particules, quand bien même la dynamique soit intégrable, avec un nombre extensif de quantités conservées. C'est en clair contraste avec la localisation à  $N$ -corps (MBL) standard, où la brisure d'ergodicité correspond à l'émergence d'intégrabilité, et l'existence d'un nombre extensif d'intégrales quasi-locales du mouvement.

Enfin, comme nous l'avons montré au chapitre 1, il est connu que lorsque nous modu-

lors la force des kicks  $K$  avec des fréquences incommensurables, le Kicked Rotor (quasi-périodique) est marqué d'une transition de phase identique à la transition d'Anderson 3D. Nous nous attendons donc que moduler la force des kicks dans notre modèle du gaz de Lieb-Liniger kické va induire une transition de phase, nous permettant de passer d'une phase localisée dynamiquement à  $N$ -corps à nouvelle phase où le système peut chauffer indéfiniment. La compréhension des propriétés d'une telle phase délocalisée est, entre autre, l'objet du prochain chapitre.



# Transition d'Anderson d'un gaz de Tonks-Girardeau dans un potentiel de kick quasi-périodique

Plus ça change, plus c'est la même chose.

---

Alphonse Karr

NOUS nous intéressons dans ce chapitre à un gaz de Tonks-Girardeau kické quasi-périodiquement. En particulier, avec des arguments simples, nous montrons qu'une transition de phase s'opère entre un régime localisé et un régime diffusif. Ces derniers vont être par ailleurs mis en parallèle avec un gaz thermique, respectivement à basse température, comme montré au chapitre 4, et à haute température que nous détaillons et caractérisons aux travers des observables pertinentes que sont la distribution en impulsions et la matrice densité, la longueur de corrélation et le contact de Tan. Dans un premier temps, nous montrerons que tous les développements basés sur une température effective dans la phase localisée sont robustes, et montrons que dans la phase diffusive, le système se comporte comme un gaz quantique à haute température, i.e. comme un gaz classique. Aussi, nous montrons que les orbitales naturelles respectent les évolutions temporelles attendues dans les trois régimes, et peuvent ainsi être une façon de sonder les phases où l'on se trouve. Enfin, nous étudions la distribution en impulsion dans la phase critique. Nous y trouvons trois comportements différents pour trois secteurs d'impulsions, et éventuellement la présence de multifractalité.

## 5.1 Modèle du gaz de Tonks kické quasi-périodiquement

Nous considérons un système de  $N$  particules bosoniques en interaction de masse  $m$ , dont la dynamique est décrite par l'Hamiltonien de Lieb-Liniger avec un potentiel de kick quasi-périodique suivant :

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \sum_i \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos(\hat{x}_i) \sum_n \delta(t - n) \right) + g \sum_{i < j} \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j) \quad (5.1)$$

où  $g = \frac{2\pi T_1^2}{mL^3} g_{1D}$  la constante d'interaction en unités réduites du Kicked Rotor et  $\mathcal{K}(t) = K[1 + \varepsilon \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)]$  où nous fixons  $\omega_1 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{13}$ . En nous réduisant aux termes à un corps, cet Hamiltonien correspond à celui du Kicked Rotor quasi-périodique (1.30) que nous avons étudié en deuxième partie du chapitre 1. De même que pour le précédent chapitre,  $[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar\delta_{ij}$ , et nous fixons la taille du système  $L = 2\pi$  avec conditions aux bords périodiques.

Pour  $g = 0$ , nous recouvrons la physique du Kicked Rotor quasi-périodique. Pour des  $K$  inférieurs à  $K_c$ , le système est alors dans une phase où les fonctions d'ondes à un corps sont localisées en exponentielle décroissante, auxquelles on associe une longueur de localisation  $p_{loc}$ , et dont l'énergie du système sature. Une transition vers une phase diffusive s'opère en augmentant  $K > K_c$ , où les fonctions d'ondes à un corps sont des gaussiennes centrées en différents états d'impulsions, dont la largeur s'accroît au fur et à mesure des kicks pondérée par un facteur de diffusion  $\mathcal{D}$ . Enfin, au seuil critique  $K = K_c$ , les fonctions d'ondes adoptent une forme particulière qu'est la fonction de Airy, et le système n'est ni localisé, ni délocalisé, mais est dans un régime de diffusion anormale, ce qui renvoie à une énergie qui croît en  $t^{2/3}$  en fonction du temps.

Dans le régime de Tonks-Girardeau, les observables locales que sont l'énergie ou bien la densité sont les mêmes entre un système de bosons en interaction et un système de fermions libres. Ainsi, puisque chaque fonction d'onde à un corps du système de  $N$  fermions vivra la dynamique du Kicked Rotor quasi-périodique, les comportements dans les trois phases se retrouveront dans l'énergie des bosons en interaction, ce que nous montrons sur la figure 5.1.

Afin de procéder aux simulations, nous choisissons comme condition initiale l'état fondamental d'un système de  $N$  fermions libres, décrit par une distribution en impulsion formant la mer de Fermi pour  $k < |k_F|$ , où  $k_F \propto N$ , et l'énergie du système dans son état fondamental est notée  $E_0$ . Pour les choix de paramètres, notamment  $K$ , nous avons choisi de nous placer de sorte à ce que le seuil critique soit présent pour  $K_c = 6.36$ . En deçà, nous sommes dans la phase localisée, au-delà nous sommes dans la phase diffusive.

Comme nous l'avons montré au chapitre 4, il est possible de faire une description effective du système comme d'un gaz thermique à basse température dans la phase localisée. Nous allons vérifier qu'avec un Hamiltonien légèrement différent, notre formalisme s'applique et permet une description quantitative du système. Ensuite, la forme gaussienne de la fonction d'onde à  $N$ -corps fermionique dans le régime diffusif devrait nous permettre d'extraire une température effective, beaucoup plus importante que dans la phase localisée, nous permettant une description à haute température effective du gaz de Tonks.



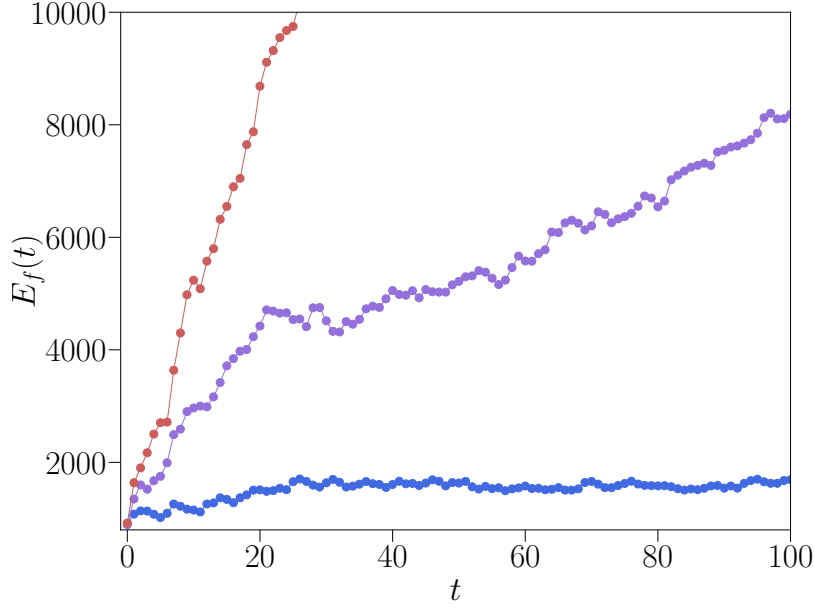


FIGURE 5.1 – Évolution temporelle de l'énergie pour  $K = 8$  (en rouge, régime diffusif),  $K = 6.36$  (en violet, régime critique) et  $K = 3.0$  (en bleu, régime localisé). Ici,  $N = 11$ ,  $\hbar = 2.85$  et  $\varepsilon = 0.43$ .

## 5.2 Études de la phase localisée et délocalisée

### 5.2.1 Phase localisée

Comme nous l'avons décrit plus tôt au chapitre 1, le système dans la phase localisée va voir son énergie tendre vers une constante à temps longs  $E_{loc}$ , même si le système est toujours hors-équilibre au travers des kicks. À temps longs, étant localisée, l'énergie totale du système est alors  $E_f = E_0 + N \frac{p_{loc}^2}{2}$ , comme le montre la courbe de l'énergie 5.1 en bleue, ce que nous interprétons comme une phase localisée dynamiquement à  $N$ -corps [146].

La distribution en impulsion du système de bosons en interaction dans l'état fondamental révèle des corrélations à quasi-longue portée, et la présence d'un quasi-condensat. En présence de kicks, comme nous le montrons sur la figure 5.2, cette dernière voit son pic central s'arrondir, et s'étale sur les états d'impulsions à mesure que  $K$  augmente. D'autre part, nous observons encore le comportement en  $\mathcal{C}/k^4$  à grandes impulsions.

L'étalement de la distribution du gaz de Tonks-Girardeau  $n_k$  et la disparition du pic central annoncent que dans l'espace des positions, une perte de corrélation doit se voir au niveau de la fonction  $g_1$ . Nous montrons sur la figure 5.3 cette fonction dans la phase localisée. L'encart (a) montre la décroissance exponentielle, avec une longueur de corrélation associée tel que  $g_1(r) \propto e^{-|r|/r_c}$ . D'autre part, le pic central de la distribution en impulsion  $n_{k=0}$  tend vers une valeur constante pour  $N \rightarrow \infty$ .

De même qu'au court du chapitre 4, tout ceci nous rappelle la physique d'un gaz ther-

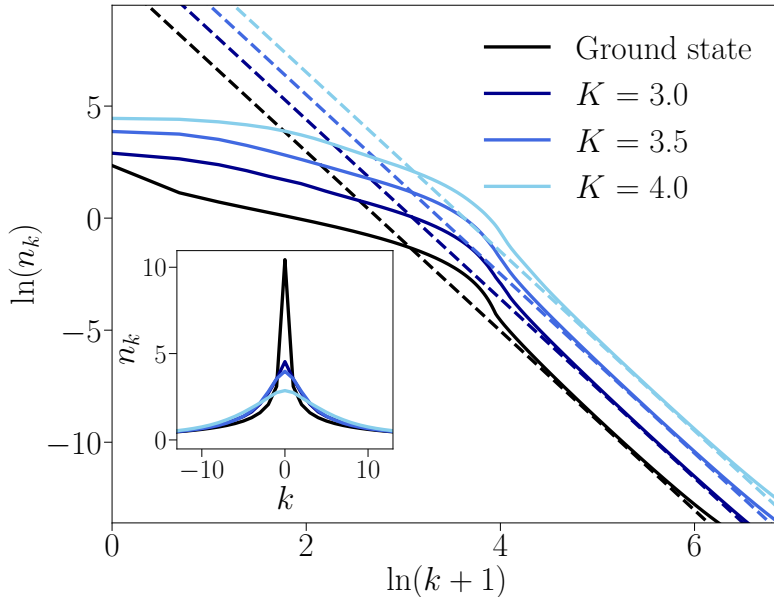


FIGURE 5.2 – Distribution en impulsions bosonique à temps longs dans la phase localisée pour  $N = 51$  particules,  $K = 3, 3.5$  et  $4$ ,  $\bar{k} = 2.89$ , en échelle log-log (pour une meilleure visibilité, nous avons multiplié les distributions par un facteur arbitraires). Les tirets montrent le comportement asymptotique à grandes impulsions  $\mathcal{C}_{ss}/k^4$ , où  $\mathcal{C}_{ss}$  est calculé en utilisant la matrice densité thermique correspondante. L'encart montre les mêmes données en échelle linéaire.

mique. Tout d'abord, nous nous intéressons au système de fermions libres qui va nous permettre une extraction de la température effective et du potentiel chimique. Afin de faciliter cette étude, et rendre les données plus lisses, nous introduisons l'Hamiltonien :

$$\hat{H}_q = \frac{(\hat{p} + q\bar{k})^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos \hat{x} \sum_n \delta(t - n). \quad (5.2)$$

En appliquant ce processus de moyenne sur les  $q$ , nous voyons que la distribution en impulsion fermionique adopte à nouveau la forme d'une distribution de Fermi-Dirac (voir figure 5.4), qui nous permet l'extraction d'une température effective et d'un potentiel chimique effectif. En particulier, nous appliquons les mêmes contraintes sur la procédure de fit, voir équations (4.4).

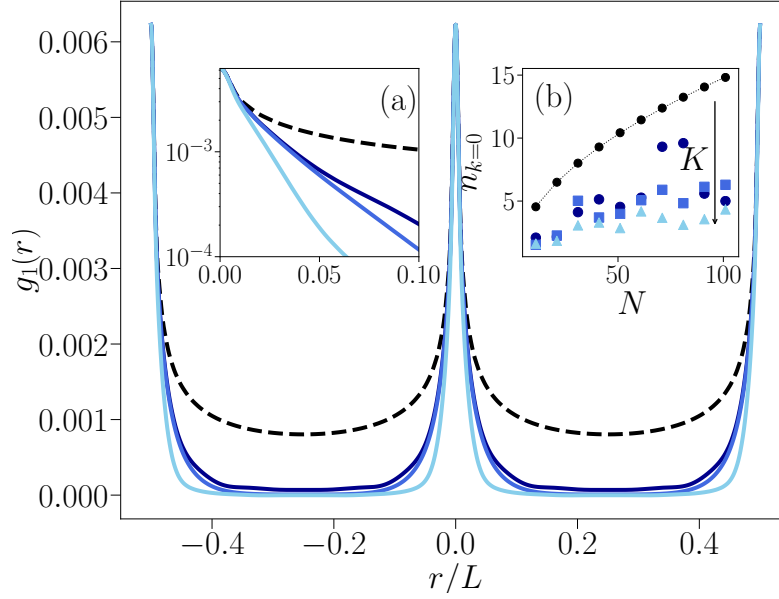


FIGURE 5.3 – Fonction de corrélation  $g_1(r)$  avec les mêmes paramètres que la figure 5.2. L’encart (a) présente les mêmes données que la figure principale en échelle semi-log, ce qui met en lumière la décroissance exponentielle de la fonction de corrélation dans la phase localisée. L’encart (b) montre l’évolution du pic  $n_{k=0}$  de la distribution bosonique en fonction du nombre de particules.

Dans ce régime, la valeur de  $p_{loc}$  est largement inférieure aux valeurs de  $p_F$ <sup>1</sup>, qui était une condition sine qua non pour la validité de la description en terme de thermalisation effective de la phase localisée. Cela correspond à des valeurs de température effective basse en comparaison de l’énergie de Fermi  $\varepsilon_F = p_F^2/2$ . Ainsi, en faisant un développement de Sommerfeld sur l’énergie, nous relierons à nouveau la température effective à  $p_{loc}$  au travers de l’équation (4.10). Nous voyons que les données sont bien décrites par le comportement prédit, ce qui indique que dans ce régime de paramètres, l’approche de thermalisation est toujours valide.

Du côté du système de bosons en interaction, nous déduisons que le contact de Tan dans la phase localisée est décrit par celui d’un gaz thermique  $\mathcal{C}_{th}(T, N) = \frac{8NE(T, N)}{L^2 k^2}$ , ce que nous montrons sur la figure 5.2, où le comportement à grandes impulsions est très bien fitté par  $\mathcal{C}_{th}(N, T_{eff})/k^4$ . D’autre part, la longueur de corrélation  $r_c$  du système, associée à la décroissance exponentielle de la fonction  $g_1$  à grandes distances, est estimée au travers la variance de la fonction  $g_1$ , comme nous l’avons décrit au chapitre 2. Dans le contexte de la thermalisation effective, nous savons également que la longueur de corrélation à basse température en unité réduite du Kicked Rotor est donnée par l’équation (4.14).

1. Nous avons calculé la longueur de localisation  $p_{loc}$  des états à une particule  $|\Psi\rangle$  comme  $p_{loc}^2 = \langle \Psi | \hat{p}^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle^2$  et avons trouvé que dans le régime localisé  $p_{loc} \sim \mathcal{O}(1)$  pour  $K = 4.0$ ,  $k = 2.89$  et  $\varepsilon = 0.55$  tandis que  $p_F$  est de l’ordre de la dizaine.

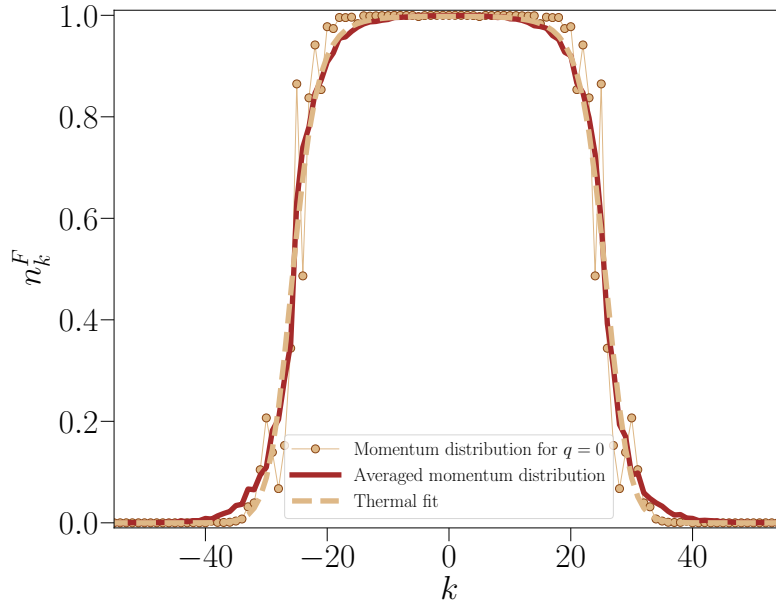


FIGURE 5.4 – Comparaison entre la distribution en impulsions brute, moyennée et un fit avec la distribution de Fermi-Dirac à une température et potentiel chimique donné. Ici  $N = 51$ ,  $K = 3.5$  et  $\bar{k} = 2.89$ .

La figure 5.6 montre que les données sont bien décrites par l'équation (4.14), et que nous sommes en mesure de bien décrire la décroissance exponentielle de la fonction  $g_1(r)$  pour un set de paramètres donnés, comme le montre l'encart de cette même figure.

Ainsi, nous avons montré que la description de thermalisation effective du système est toujours valide et permet une description du système dans la limite des températures effectives basses en comparaison avec l'énergie de Fermi de l'état initial. Nous montrons que cette approche est également valable dans la phase délocalisée, où le système correspond cette fois-ci à un gaz quantique thermique à haute température effective.

### 5.2.2 Phase délocalisée

Au-delà du régime localisé et critique du système, le système est sujet à une dynamique diffusive. Comme nous le voyons sur la figure 5.1 (courbe rouge), l'énergie ne sature plus, mais croît indéfiniment de manière linéaire avec le temps. Nous déduisons que, puisque chaque particule voit sa dynamique être diffusive, caractérisée par une forme gaussienne, la distribution en impulsion du système sera également une gaussienne. Ainsi, l'énergie sera la somme des contributions de chaque états à une particule, i.e.  $E_f \simeq E_0 + 2NDt$ , où  $\mathcal{D}$  est le coefficient de diffusion. Les observables du système dépendent à présent du temps au travers de la dépendance temporelle de l'énergie. Naturellement, les observables seront présentées en fonction de  $K$  (avec  $t$  fixe) et de  $t$  (avec  $K$  fixe).

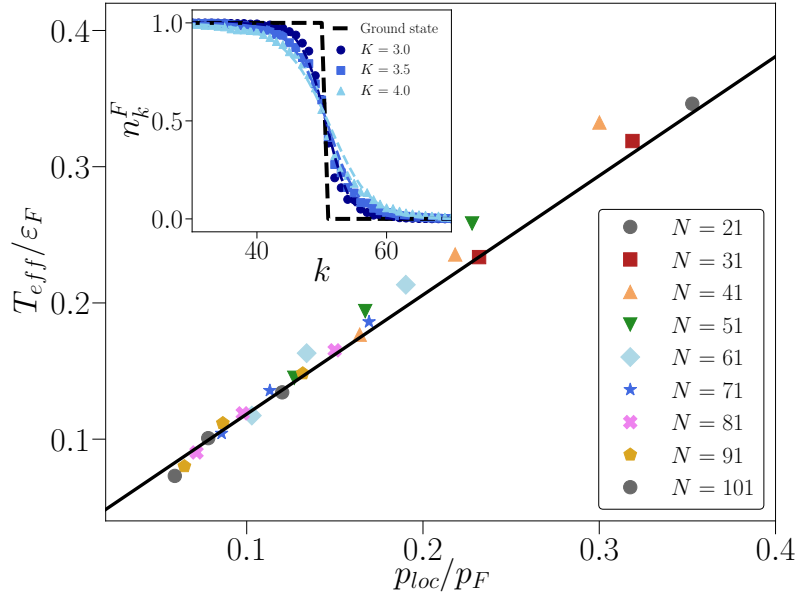


FIGURE 5.5 – Température effective  $T_{eff}/\varepsilon_F$  en fonction de  $p_{loc}/p_F$ . En noir, nous représentons l'équation (4.10), qui décrit bien les données dans la phase localisée. Encart : distribution en impulsion fermionique  $n_k^F$  dans la phase localisée (symboles), fittée par une distribution de Fermi-Dirac (tirets). Ici  $N = 51$  et  $\bar{k} = 2.89$ .

La distribution en impulsion du système de bosons en interaction est montrée sur la figure 5.7. La divergence en  $k = 0$  est complètement détruite et arrondie, jusqu'à des amplitudes bien moindre que l'état initial, et nous pouvons également observer l'étalement temporelle de la distribution, qui est l'emprunte de la phase diffusive dans le système. Quand bien même, le comportement asymptotique de la distribution bosonique à grande impulsion est conservé avec le contact de Tan  $\mathcal{C}_{diff}$  correspondant i.e.  $n_k \simeq \mathcal{C}_{diff}/k^4$ .

Nous montrons également l'évolution du pic de la distribution en impulsion dans l'encart de la figure 5.8, qui au premier abord ne dépend pas du nombre de particules. En faisant des fits en loi de puissance  $aN^b + c$ , nous trouvons que dans les deux cas  $b \simeq 1$ , ce qui indique de  $n_{k=0}$  croît linéairement en fonction de  $K$  et  $t$  dans le régime diffusif. Ceci est pondéré par une pente faible  $a \simeq 0.002 - 0.006$ . Le graphique principal montre la fonction  $g_1(r)$ , qui tend à être de plus en plus fine pour  $t$  (à droite) et  $K$  (à gauche) qui augmentent. Ceci est illustré par l'encart (a) des deux figures, où nous voyons une décroissance exponentielle d'autant plus rapide que  $t$  et  $K$  augmentent.

Afin de pouvoir caractériser ces observables, nous nous intéressons à nouveau au système de fermions correspondant. Nous voyons que la distribution en impulsion des fermions à un  $K$  et un temps  $t$  donné est de forme gaussienne, comme nous le montrons sur la figure 5.9. En moyennant sur les quasi-impulsions, ce comportement est d'autant plus clair, et nous indique alors de faire un fit avec une fonction de Maxwell-Boltzmann, qui n'est autre

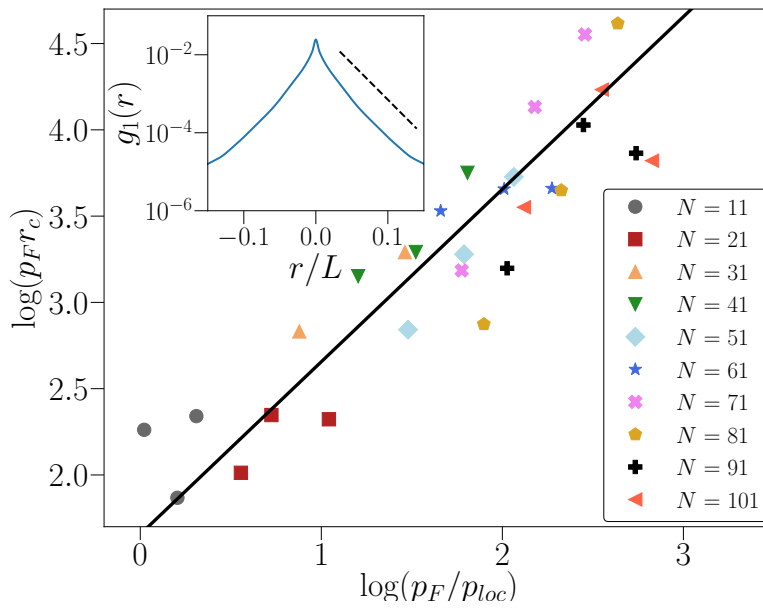


FIGURE 5.6 – Longueur de corrélation  $p_F r_c$  en fonction de  $p_{loc}/p_F$  pour différents  $K$  et  $N$ . L'agglomération des données autour de la courbe noire représentant l'équation (4.14) montre que les données sont indépendantes du nombre de particules. Encart : fonction de corrélation  $g_1$  en échelle semi-log (trait bleu), avec la décroissance exponentielle attendue pour une valeur de  $r_c = \frac{\pi \bar{k}}{3 p_{loc}}$  pour  $N = 101$ ,  $K = 4$  et  $\bar{k} = 2.89$ .

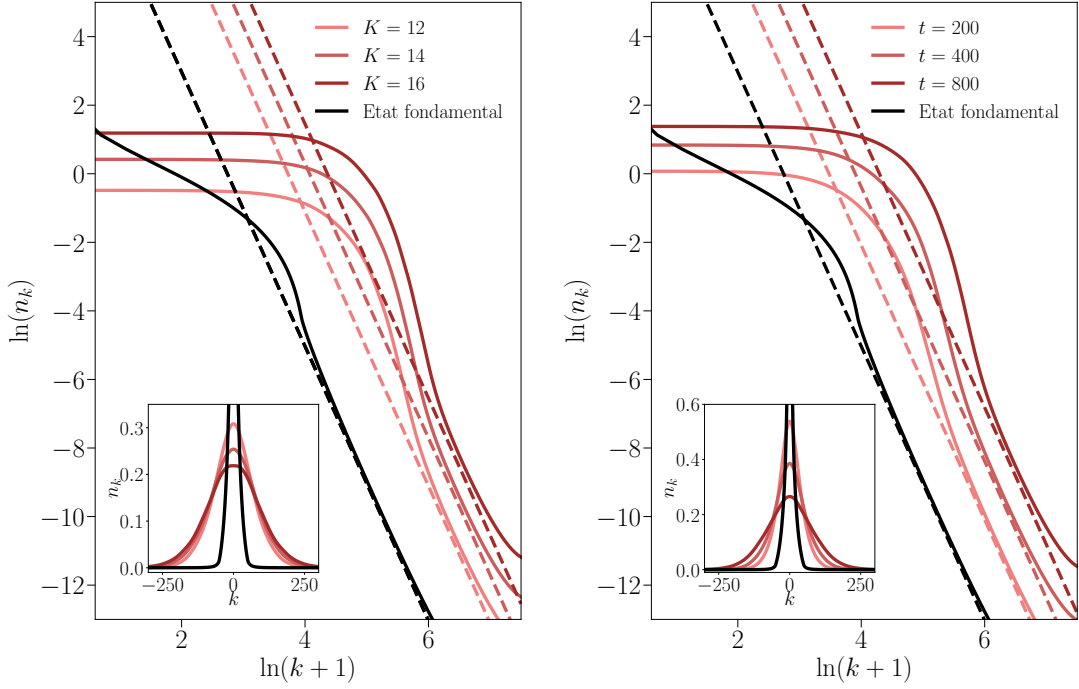


FIGURE 5.7 – Distribution en impulsion dans la phase délocalisée pour  $N = 51$  particules et  $\bar{k} = 2.89$  en échelle log-log (pour des questions de visibilité, nous avons décalé les distributions). Sur la figure de gauche,  $t = 600$  et nous faisons varier  $K$ . Sur la figure de droite,  $K = 12$ , et nous faisons varier  $t$ . Les tirets sur chaque courbe montrent le comportement asymptotique  $n_k \simeq \mathcal{C}_{diff}/k^4$  à grandes impulsions, avec  $\mathcal{C}_{diff}$  calculé avec l'équation 5.6. L'encart des figures montrent les mêmes données en échelle linéaire.

que la limite à haute température de la fonction de Fermi-Dirac, définie comme :<sup>2</sup>

$$f_{MB}(k, T, \mu) = n_0 e^{-\frac{\bar{k}^2 k^2 / 2 - \mu}{T}}. \quad (5.3)$$

où  $n_0$  correspond à l'amplitude de la distribution en impulsion fittée. Afin de procéder au fit, on doit alors modifier les contraintes que nous appliquions précédemment en remplaçant la fonction  $f_{FD}$  par  $f_{MB}$ . On voit alors sur la figure 5.7 que cette procédure nous permet de fit nos données, et d'extraire  $T_{eff}$  et  $\mu_{eff}$ .

Dans les gaz quantiques à haute température, l'équipartition de l'énergie mène à une expression de l'énergie donnée par :

$$E = \frac{NT}{2} \quad (5.4)$$

2. Nous avons vérifié que la procédure de fit nous donne les mêmes températures et potentiels chimiques effectifs avec les deux fonctions.

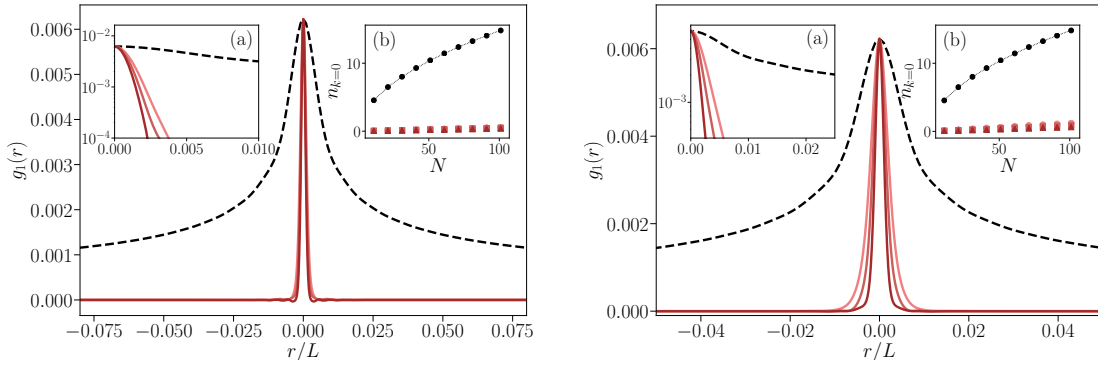


FIGURE 5.8 – Figure de gauche : fonction  $g_1(r)$  pour différentes valeurs de  $K = 12, 14$  et  $16$ , et  $t = 1000$  kicks. Figure de droite : fonction  $g_1(r)$  pour différentes valeurs de  $t = 200, 400$  et  $800$  et  $K = 12$ . Pour chacune des figures, l'encart (a) représente les mêmes données en échelle semi-log, tandis que l'encart (b) montre l'occupation de l'état  $k = 0$  comparé au cas de l'état fondamental. Dans chaque cas,  $n_{k=0}$  croît linéairement avec  $t$  et  $K$ , avec une pente faible et  $N = 51$ .

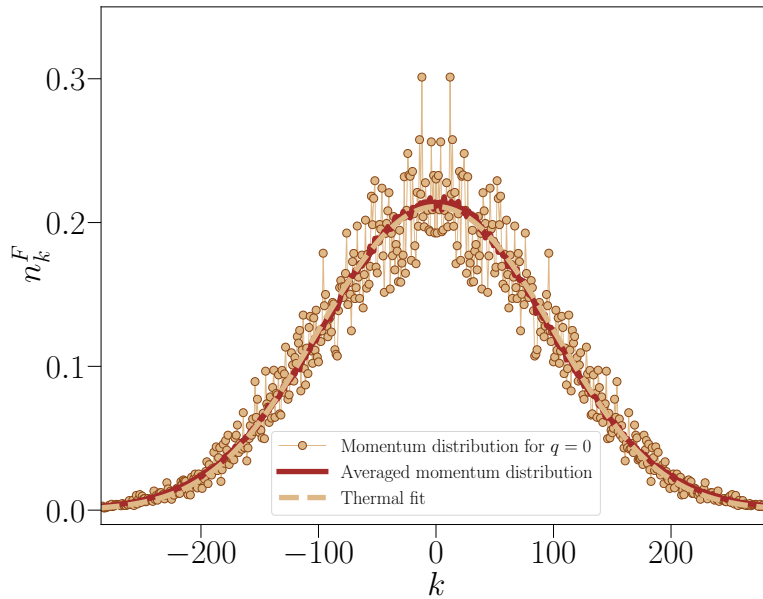


FIGURE 5.9 – Comparaison de la distribution en impulsion fermionique brute, moyennée sur les quasi-impulsion (ligne continue), et la distribution de Maxwell-Boltzmann (tirets) dans la phase délocalisée. Ici,  $N = 51$ ,  $K = 12$ ,  $\bar{k} = 2.89$  et  $t = 1000$ .

en dimension 1 et en unités réduites [158]. En faisant l'hypothèse que le gaz de Tonks-Girardeau dans le régime diffusif se comporte comme un gaz quantique à haute température, nous supposons que la température effective est donnée par :



$$T_{eff} = \frac{2E}{N}. \quad (5.5)$$

Ceci est vérifié sur la figure 5.10, où nous sommes en mesure de reproduire fidèlement la croissance linéaire de la température en fonction du temps avec l'expression (5.5).

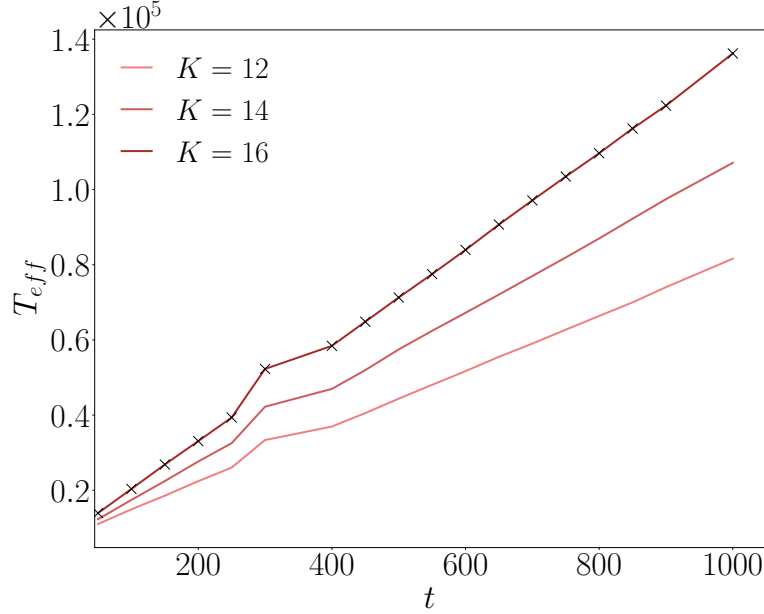


FIGURE 5.10 – Température effective fittée pour  $N = 101$ ,  $K = 12, 14$  et  $16$  en fonction du temps. Les croix noirs représentent l'équation (5.5), où nous avons calculé l'énergie des distributions en impulsions fermioniques pour différents temps et  $K = 16$ .

Du côté des bosons, nous pouvons à présent dériver une expression du contact de Tan dans le régime diffusif  $\mathcal{C}_{diff}$  à partir de l'expression (2.35) :

$$\mathcal{C}_{diff}(N, T_{eff}) = \frac{8NE}{L^2 k^2} = \frac{4N^2 T_{eff}}{L^2 k^2}, \quad (5.6)$$

ce qui correspond à la limite à haute température du contact de Tan prédite par Vignolo et Minguzzi [118] en unités réduites du Kicked Rotor. Comme nous le montrons sur la figure 5.7, le contact dépend de  $K$  et linéairement de  $t$ , et est en mesure de décrire (en tiret) le comportement à grandes impulsions en  $\mathcal{C}_{diff}/k^4$  des distributions en fonction des deux paramètres.

Enfin, avec la description thermique du système à haute température, et avec un potentiel chimique négatif (qui est le cas pour  $\mu_{eff}$  qu'on extrait), nous pouvons décrire la longueur de corrélation  $r_c$  par

$$r_c^{-1} = \frac{\sqrt{2|\mu|}}{k} \mathcal{R}(\mu/T), \quad (5.7)$$

avec

$$\mathcal{R}(x) = 1 + \frac{1}{2\pi\sqrt{|x|}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \ln \left| \frac{e^{z^2-y} + 1}{e^{z^2-y} - 1} \right|. \quad (5.8)$$

Pour différentes valeurs d'amplitude de kicks et de temps, nous extrayons  $r_c$  à l'aide de la fonction  $g_1$ . Nous présentons les données obtenues sur la figure 5.11, où nous montrons que la quantité  $r_c p_F / \bar{k}$  pour différentes valeurs de  $N$  est une fonction universelle de  $\varepsilon_F / |\mu|$ . En effet, nous voyons que pour de grandes valeurs de  $|\mu|/T$ , l'équation (5.7) vers la quantité  $\frac{\sqrt{2|\mu|}}{\bar{k}}$ , ce qui décrit très bien les données pour  $|\mu| \gg \varepsilon_F$ . Cependant, nous observons un décalage des données avec notre prédiction à faible potentiel chimique (correspondant aux hautes températures effectives). Nous associons cela au fait que notre estimation de  $r_c$  comme la variance de  $g_1$  marche convenablement qu'à température intermédiaire (en comparaison de  $\varepsilon$ ) [120].

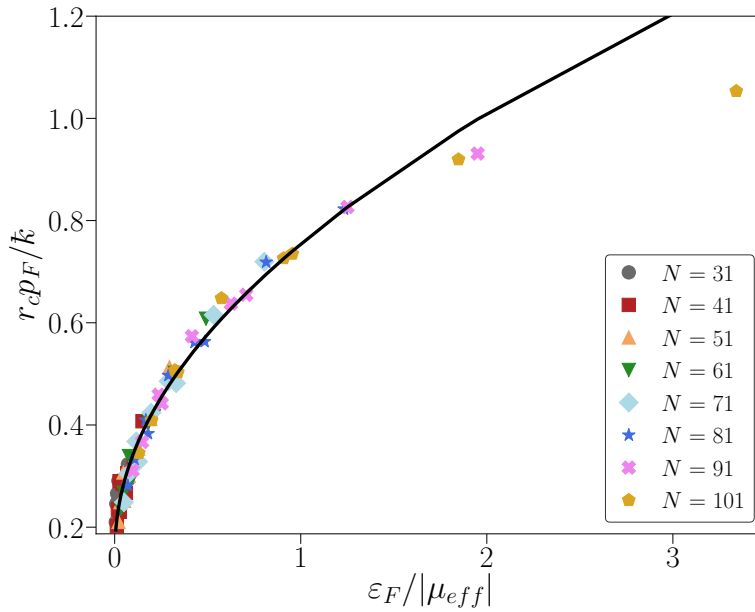


FIGURE 5.11 – Longueur de corrélation  $r_c$  en fonction de  $\varepsilon_F / |\mu_{eff}|$  pour différentes valeurs de  $N$ . Ici, nous avons pris des valeurs de  $K = 10, 12$  et  $14$ , et de  $t = 200, 400$  et  $800$ . La droite noire correspond à l'équation (5.7).

Nous avons à présent une description quantitative des deux phases du Kicked Rotor quasi-périodique de part et d'autre de la transition à l'aide d'une approche de thermalisation effective du système, en reliant la température effective émergente aux propriétés tantôt de localisation, tantôt de délocalisation du système. Nous nous concentrons par la suite sur le système et les observables associées au seuil critique.

## 5.3 Dynamique d'un gaz de Tonks au seuil critique

Dans la phase critique d'un système de type Anderson 3D, la fonction d'onde critique n'est ni localisée ni diffusive. Comme nous l'avons vu, le système est dans un régime intermédiaire de diffusion anormale.

### 5.3.1 Fermions libres

En nous concentrant tout d'abord sur le système de  $N$  fermions libres, nous pouvons déjà déduire quelques propriétés du système. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 1, chaque fonction d'onde à un corps va être au régime critique et avoir une dynamique telle que  $\langle p^2(t) \rangle \propto t^{2/3}$ , ce qui est montré par la figure 5.1 en violet. D'autre part, nous avons également vu que dans ce régime, les fonctions d'ondes adoptent une forme particulière en fonction de Airy. À temps longs, on s'attend à ce que chaque fonction d'onde à un corps contribuent à la distribution à  $N$ -corps. Ainsi, nous devons un peu modifier les prédictions de la théorie auto-cohérente (1.57), où la distribution en impulsion devrait respecter l'équation :

$$t^{1/3} n_k^F(t) = N \mathcal{G}(kt^{-1/3}). \quad (5.9)$$

Dans un premier temps, nous montrons les fonctions d'ondes fermioniques pour différents temps au seuil critique sur la figure 5.12. On voit en particulier que les ailes de la distribution adoptent une forme similaire à la fonction d'onde à un corps, voir figure 1.11. En revanche, le centre de la fonction d'onde est arrondi, là où nous avons un pic net autour de  $k = 0$ , ce qui vient du fait qu'on a cette fois-ci  $N$  particules.

Étant donné que chaque fonction d'onde diffuse en  $t^{1/3}$ , en multipliant l'axe des abscisses par  $t^{-1/3}$ , et l'axe des ordonnées par  $t^{1/3}$ , les distributions à différents temps sont supposé se superposer. C'est ce que nous montrons sur la figure 5.13, où nous voyons qu'à temps longs, les distributions se superposent bel et bien. D'autre part, les tirets noirs sur la figure montrent la prédiction (5.9), qui explique particulièrement bien le comportement des ailes de la distribution, ce qui est d'autant plus visible dans l'encart en échelle semi-log. Cela nous confirme également que la forme asymptotique de la distribution est toujours une fonction de Airy. D'autre part, nous l'avons vu, le paramètre d'ajustement est noté  $\rho$  et entre en jeu dans la fonction auto-cohérente  $\mathcal{G}$ , voir équation (1.58). À nouveau, nous avons procédé à l'ajustement de la fonction auto-cohérente, et nous avons trouvé un paramètre  $\rho = 2.35$ .

Sachant que  $\rho = \Gamma(2/3)\Lambda_c/3$ , nous pouvons estimer la valeur de  $\ln(\Lambda_c) = \ln(3\rho/\Gamma(2/3)) \simeq 1.65$ , ce qui est sensiblement la même valeur que nous avons rapporté au chapitre 1. Cela nous indique entre autre que le diagramme de phase que nous avons employé (figure 1.9) est toujours valide dans tous les régimes de dynamique, et notamment que l'exposant critique devrait rester inchangé.

Il reste néanmoins le fait qu'à temps longs, au voisinage de  $kt^{-1/3} \simeq 0$ , les distributions en impulsion dévient de la prédiction auto-cohérente. Au chapitre 1, nous avons vu que cela était dû à la présence de multi-fractalité. Cela se manifeste encore ici, où la partie

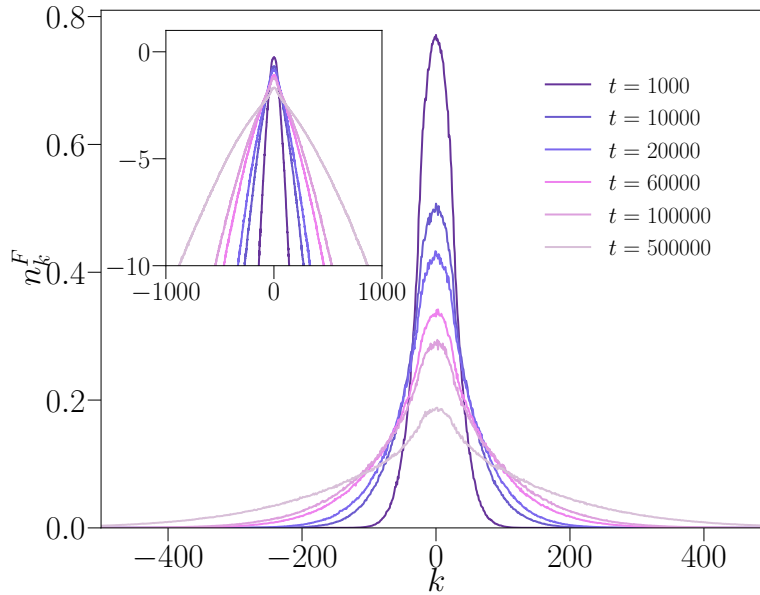


FIGURE 5.12 – Distribution en impulsions fermioniques pour différents temps, pour  $N = 51$ ,  $K = 6.36$ ,  $\varepsilon = 0.43$  et  $\bar{k} = 2.85$ . Encart : même données en échelle semi-log.

centrale de la distribution forme une non-analyticité (1.60). Comme nous le montrons sur la figure 5.13, cette partie de la distribution est très bien capturée par le comportement multi-fractal attendu (convoluée par la distribution fermionique initiale). Ceci nous permet d'extraire une dimension multi-fractale, qui pour  $t = 50000$  vaut  $d_{2,eff} = 1.33 \pm 0.06$ , ce qui est en accord avec les analyses à un corps [63] au temps correspondant.

De ce fait, pour des temps suffisamment grands tels que  $L_t \gg p_F$ , la distribution en impulsions des fermions est bien décrite par la théorie à un paramètre comme attendu. Cela implique que la description en terme de thermalisation effective n'est plus possible, contrairement à la phase localisée et délocalisée traitées précédemment.

### 5.3.2 Bosons

Nous nous intéressons à présent à la dynamique du gaz de Tonks-Girardeau au point critique. Nous montrons sur la figure 5.14 la distribution en impulsion pour différents temps. Nous voyons un étalement de celle-ci dans l'espace des impulsions, et un bruit qui apparaît à temps longs, que nous attribuons au fait que nous calculons cette distribution à partir de données non moyennées, particulièrement bruitées dans le régime critique. Ensuite, nous avons reproduit le rescaling des abscisses par  $t^{-1/3}$  et des ordonnées par  $t^{1/3}$  de la figure 5.13, et nous montrons le résultat sur la figure 5.15. Nous en apprenons trois choses. D'une part, une partie de la distribution obéit bien à la loi d'échelle prédite par la théorie auto-cohérente. D'autre part, à grandes impulsions, le comportement n'est clairement pas en accord avec une amplitude décroissante en  $t^{-1/3}$ . En effet, les ailes de la distribution ne se superposent pas comme pour les fermions. Enfin, le pic central également n'obéit

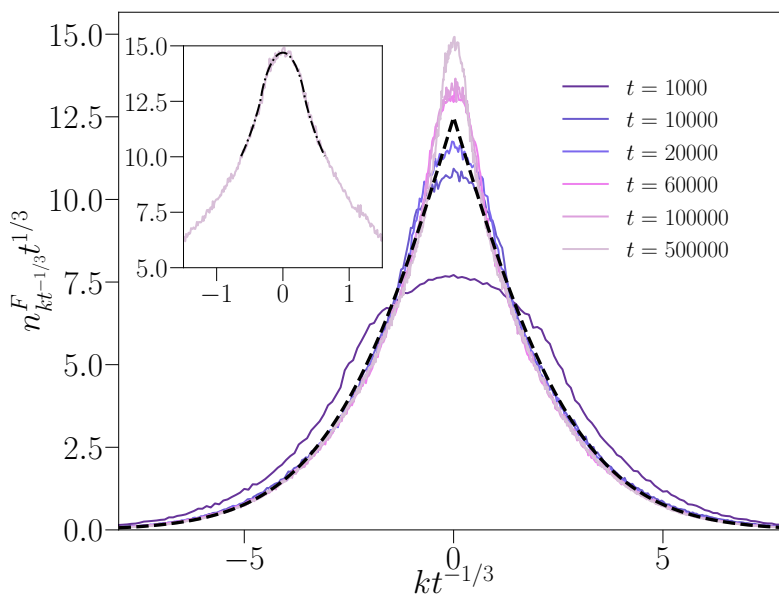


FIGURE 5.13 – Distribution en impulsions fermioniques mise à l'échelle pour différents temps, pour  $N = 51$ ,  $K = 6.36$ ,  $\varepsilon = 0.43$  et  $\bar{k} = 2.85$ . Les tirets noirs représentent la prédiction de la théorie auto-cohérente (5.9). Encart : partie centrale de la distribution en impulsion à  $t = 50000$ , fittée par la singularité multi-fractale (1.60) convoluée avec la distribution initiale fermionique.

pas à cette décroissance en  $t^{-1/3}$ . Ainsi, trois comportements apparaissent pour les bosons en interaction, là où il n'y en avait que deux pour les fermions libres. À  $t = 0$ , les comportements à hautes et basses impulsions sont séparés par le fait que le contact entre en jeu pour des impulsions telles que  $k > k_F$ , où  $k_F \sim N$ . Lors de l'évolution temporelle, ce point de séparation en impulsion, qu'on note  $k_c$ , évolue tel que  $k_c(t) = Nt^{1/3}$ , visible sur la figure 5.16 que nous discutons par la suite.

Pour la physique à grandes impulsions ( $k \gg k_c(t)t^{-1/3} \sim N$ ), nous savons que celle-ci est décrite par un contact de Tan  $\mathcal{C}$ . L'expression que nous utilisons est  $\mathcal{C} = \frac{8NE}{\bar{k}^2 L^2}$ , et est valide même en dehors d'une description thermique effective (voir Appendice A). Nous montrons cela sur l'encart de la figure 5.16. D'autre part, dans ce régime critique, l'énergie croît comme  $t^{2/3}$ . De ce fait, le contact de Tan également croît en  $t^{2/3}$ , et dicte l'évolution temporelle des grandes impulsions. Afin de geler la dynamique d'expansion en  $t^{1/3}$  du point  $k_c(t)$ , nous avons fait le rescaling  $kt^{-1/3}$  des abscisses. Pour les amplitudes en ordonnée, la dynamique en  $t^{2/3}$  du contact de Tan doit être compensée par un facteur  $t^{2/3}$  afin que les données se superposent en amplitude. C'est ce que nous montrons sur la figure 5.16.

D'autre part, nous nous sommes intéressé à l'évolution du pic central de la distribution en impulsion  $n_{k=0}$  en fonction du temps et du nombre de particules, que nous montrons en figure 5.18 et 5.19. On trouve alors que  $n_{k=0} \sim N^{0.59}$ , qui, comme dans la phase délocalisée, n'est pas à interpréter comme la présence d'ordre à quasi-longue portée. Il reste néanmoins

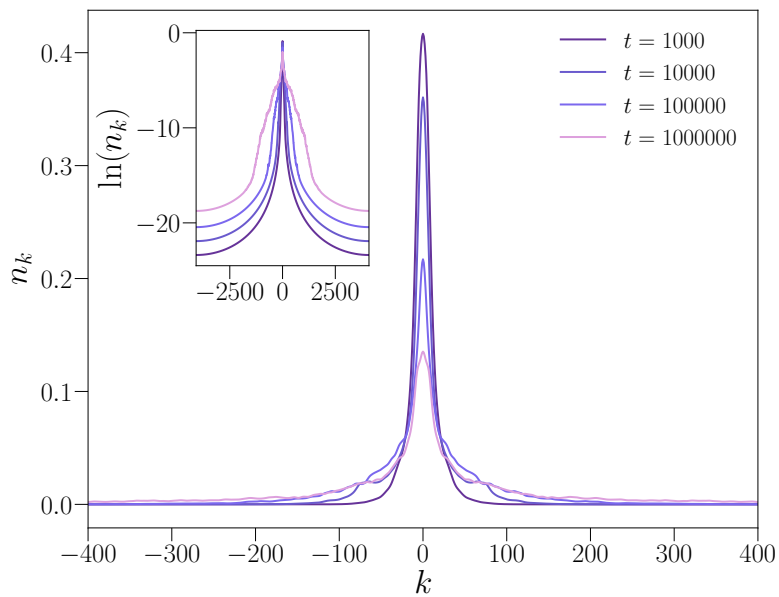


FIGURE 5.14 – Distributions en impulsion du gaz de Tonks-Girardeau pour différents temps. Ici  $N = 11$ , tandis que les autres paramètres sont les mêmes qu'en figure 5.13. L'encart représente les mêmes données en échelle semi-log.

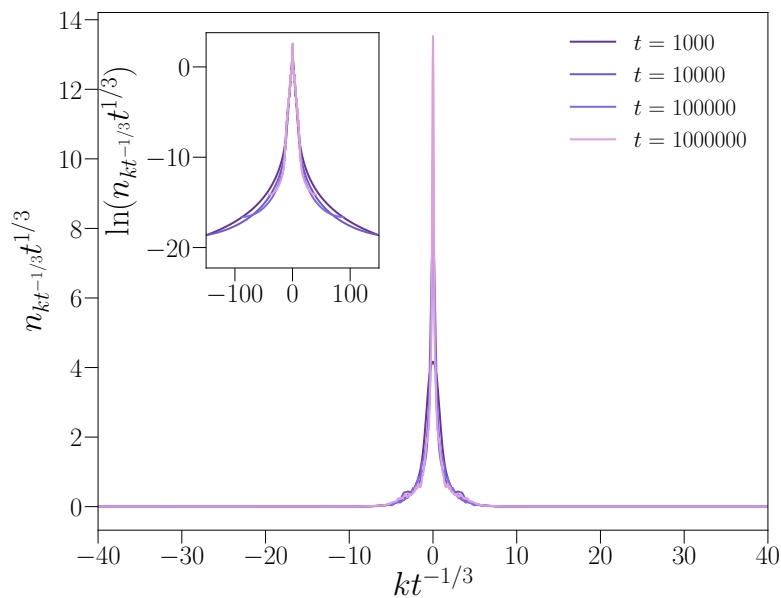


FIGURE 5.15 – Distributions en impulsion du gaz de Tonks-Girardeau pour différents temps une fois mise à l'échelle. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 5.14. L'encart représentent les mêmes données en échelle semi-log.

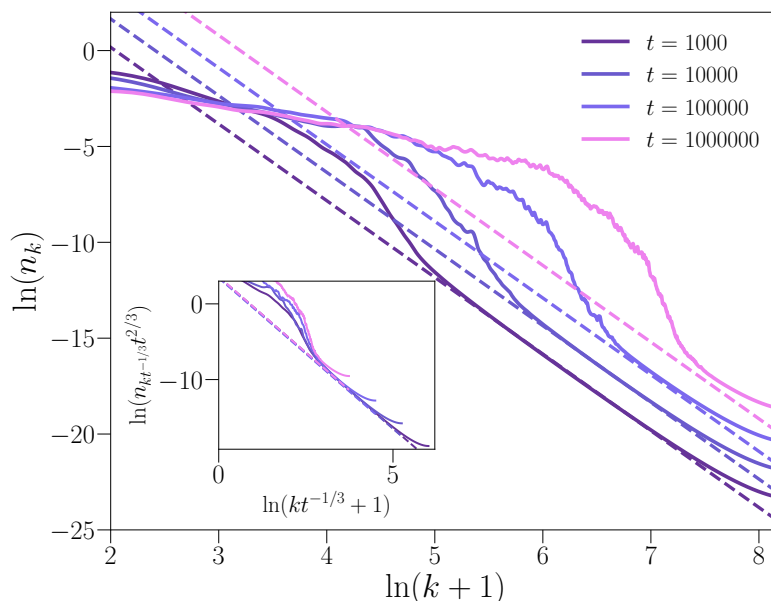


FIGURE 5.16 – Distribution en impulsion du gaz de Tonks-Girardeau pour différents temps en échelle log-log. Les tirets montrent la décroissance algébrique en  $\mathcal{C}/k^4$ , où  $\mathcal{C} = \frac{8NE}{k^2 L^2}$ . Les paramètres sont les mêmes que la figure 5.14. Encart : mêmes données une fois mise à l'échelle.

a trouver des éléments de réponse pour expliquer ce comportement. Ainsi, en supposant que ce comportement s'étant aux petites impulsions ( $k < k_c(t)$ ), nous sommes en mesure de trouver une superposition des données pour différents nombre de particules à temps fixe, comme nous le montrons sur la figure 5.20 en faisant un rescaling des abscisses par  $N^{1/3}$ . On peut alors déduire que l'impulsions  $k_c(t)$ , entre les hautes et basses impulsions, est de l'ordre de  $(Nt)^{1/3}$ . Cela est donc en contraste avec l'état fondamental, où l'impulsion de cross-over entre hautes et basses impulsions est donnée par  $p_F \sim N$ . Cela implique également une brisure de la loi d'échelle à un paramètre pour la transition d'Anderson attendue pour le cas sans interaction, ce qui a été rapporté de manière similaire dans le système traité avec l'équation de Gross-Pitaeski [142].

Enfin, nous étudions la partie centrale de la distribution, afin de sonder la présence ou non de multi-fractalité au sein du système. Nous avons fitté le centre de la distribution en utilisant l'équation (1.60) pour trouver une dimension multi-fractale  $d_{2,eff}^b$ , ce que nous montrons sur la figure 5.17 en tirets noirs pour une distribution à temps longs. Comme nous pouvons le voir, la distribution en impulsion semble avoir un comportement régulier (quadratique) en son centre, ce qui contre-indique la présence de multi-fractalité (i.e.  $d_{2,eff}^b \rightarrow 3$ ).

Enfin, nous étudions l'évolution temporelle du pic central. Nous montrons sur la figure 5.18 l'évolution temporelle de  $n_{k=0}$  en échelle log-log pour différents nombre de particules. Malgré le bruit des données, on y distingue une décroissance en loi de puissance, i.e.  $n_{k=0}(t) \propto t^{-\alpha}$ . En faisant un fit linéaire des données pour chaque nombre de particules,

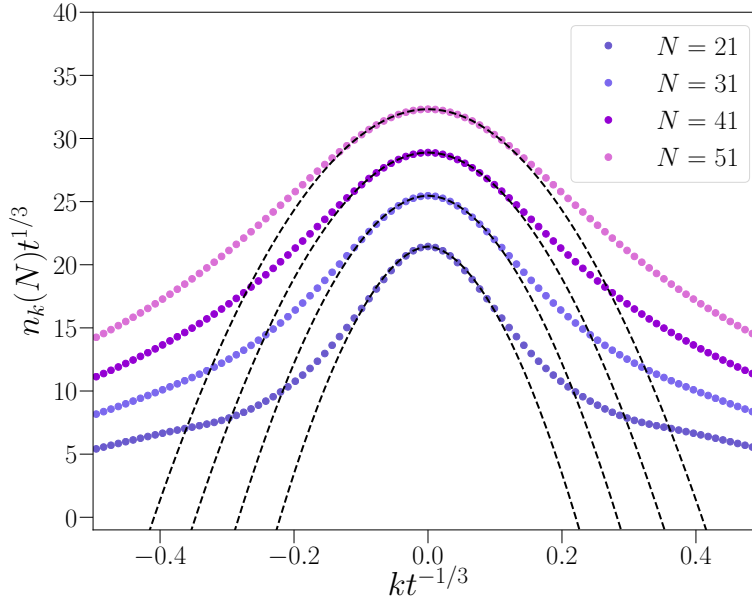


FIGURE 5.17 – Partie centrale de la distribution du gaz de Tonks-Girardeau en fonction du temps. Les tirets noirs représentent, pour chaque nombre de particules à  $t = 750000$ , un fit de la forme  $\alpha_b - \beta_b |kt^{-1/3}|^{d_{2,eff}^b - 1}$ .

nous trouvons que l'exposant  $\alpha \simeq 0.187 \pm 0.008$ .

En résumé, nous avons que  $n_{k=0}(N, t) \simeq N^{0.59}t^{-0.187}$ , que nous avons mis en avant en faisant le graphe de  $\ln(n_{k=0}(t)N^{-0.59})$  vs.  $\ln(t)$  et de  $\ln(n_{k=0}(N)t^{0.187})$  vs.  $\ln(N)$  sur la figure 5.19, respectivement à gauche et à droite. Nous voyons alors sur chacune des figures que les données ont tendance, à temps longs et à grand nombre de particules, à tendre vers les comportements asymptotiques trouvés.

Enfin, nous nous sommes également intéressés aux orbitales naturelles afin de sonder la physique d'une particule en interaction avec le reste du système dans le régime critique. En particulier, nous regardons le pic central de l'orbitale naturelle la plus occupée, noté  $|\phi^0(k=0)|^2$ . Nous montrons sur la figure 5.21 à gauche, que le pic central ne dépend pas du nombre de particules. Nous nous sommes ensuite intéressé à l'évolution temporelle de ce pic, que nous montrons en échelle log-log sur la figure 5.21 à droite. En faisant le fit des données pour chaque conditions initiales avec un nombre de particules différents, nous trouvons une décroissance  $t^{-\alpha}$ , avec l'exposant  $\alpha \simeq 0.186 \pm 0.096$  calculé en faisant la moyenne des exposants trouvés chaque set de données. Nous trouvons ainsi que le pic central décroît avec un exposant dont la valeur est tout à fait comparable à la décroissance du pic central de la distribution  $n_k$  en fonction du temps. Ceci est mis en lumière sur la figure 5.22, où nous montrons  $|\phi^0(k=0, t)|^2 t^{0.187}$ , qui comparé à l'encart de la même figure présentant  $|\phi^0(k=0, t)|^2$  montre un arrêt de la variation en amplitude des données.

Néanmoins, nous constatons qu'à temps longs, les données s'écartent de la décroissance



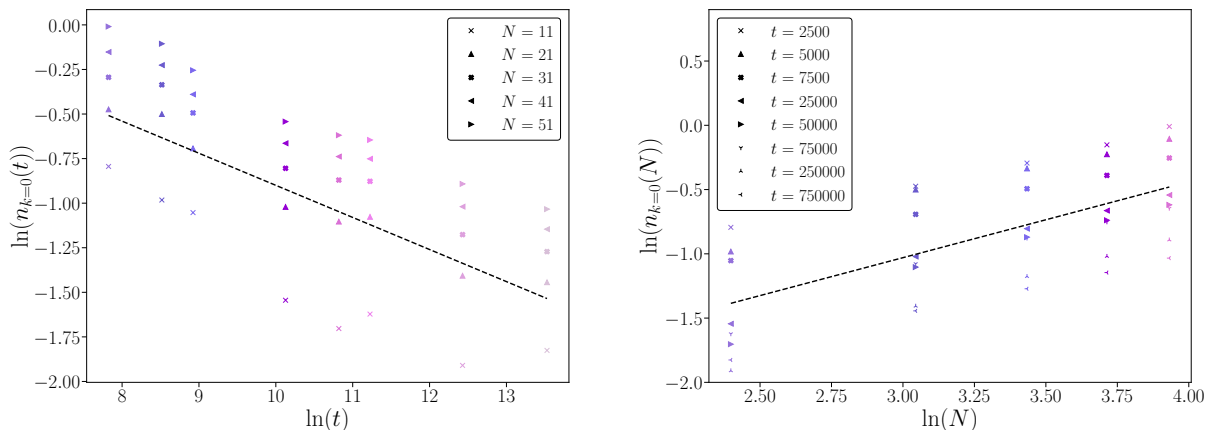


FIGURE 5.18 – À gauche : évolution temporelle de  $n_{k=0}$  en fonction du temps en échelle log-log avec  $t = 2500, 5000, 7500, 25000, 50000, 75000, 250000$  et  $750000$  et différentes valeurs de  $N$ . Les tirets noirs montrent la droite d'évolution  $t^{-0.187}$ . À droite : évolution de  $n_{k=0}$  en fonction du nombre de particules. Les tirets noirs montrent la droite d'évolution  $N^{0.59}$ .

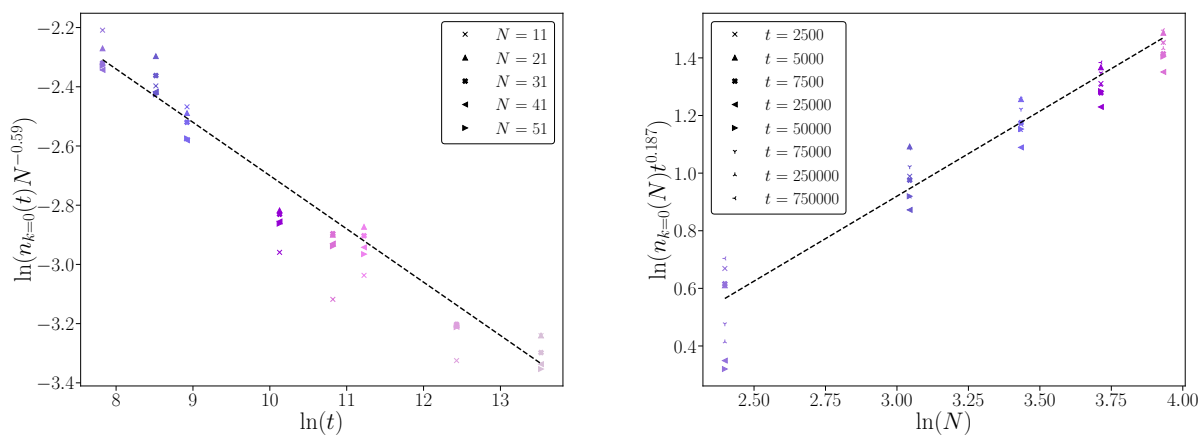


FIGURE 5.19 – Même données que la figure 5.18 à gauche et à droite, en ayant fait respectivement le rescaling  $n_{k=0}(t)N^{-0.59}$  et  $n_{k=0}(N)t^{0.187}$ . Les tirets noirs montrent le comportement en  $t^{-0.187}$  (à gauche) et en  $N^{0.59}$  (à droite).

en  $t^{-0.187}$ , qui est visible sur l'encart de la figure 5.22. Ceci s'explique lorsqu'on regarde directement à l'évolution temporelle de  $|\phi^0(k)|^2$  que nous montrons sur la figure 5.23. Nous voyons sur l'encart qu'à temps longs,  $|\phi^0(k)|^2$  touche les bords numériques du système, ce qui peut éventuellement expliquer une influence sur le pic central de cette orbitale de manière non négligeable. Nous montrons par ailleurs sur le graphique principal les mêmes données avec en abscisse  $kt^{-1/3}$ , ce qui fait se superposer les différentes courbes pour différents temps. L'orbitale naturelle la plus occupée respecte donc l'évolution temporelle

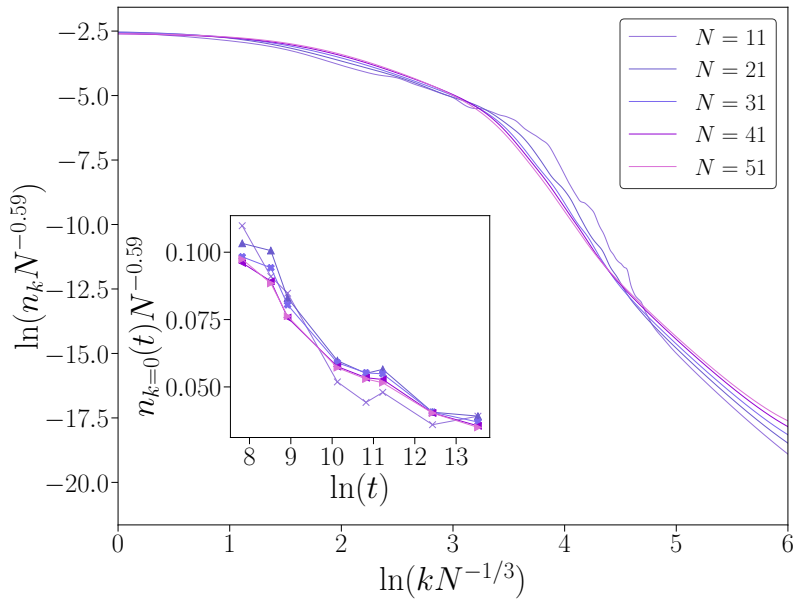


FIGURE 5.20 – Évolution de  $n_{k=0}(t)t^{0.187}N^{-0.59}$  en fonction de  $\ln(t)$  pour différents nombres de particules  $N$ . Encart :  $n_{k=0}(t)$  en fonction de  $\ln(t)$ .

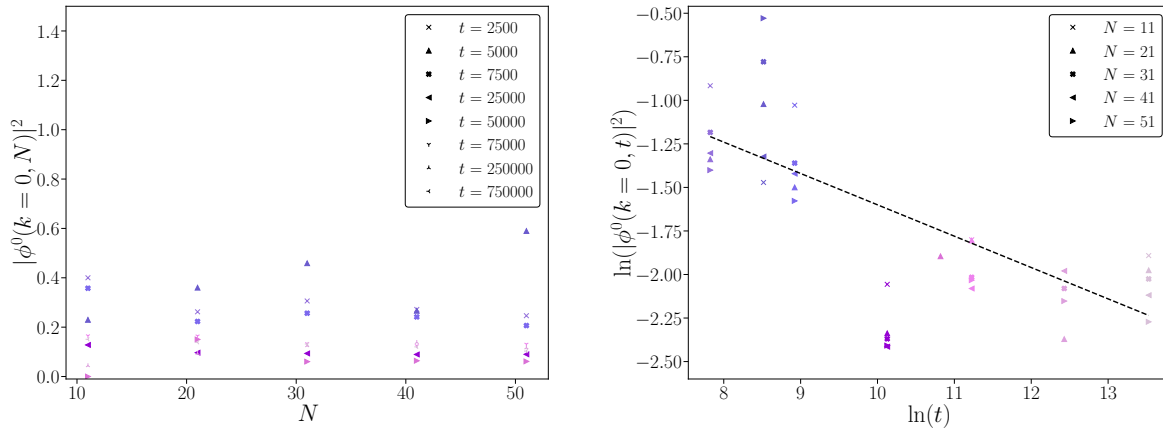


FIGURE 5.21 – À gauche : pic central de l'orbitale naturelle la plus occupée en fonction du nombre de particules. À droite : évolution temporelle du pic central de l'orbitale naturelle la plus occupée en échelle log-log. Les tirets noirs indiquent la décroissance  $t^{-0.187}$ .

$t^{1/3}$  du régime critique.

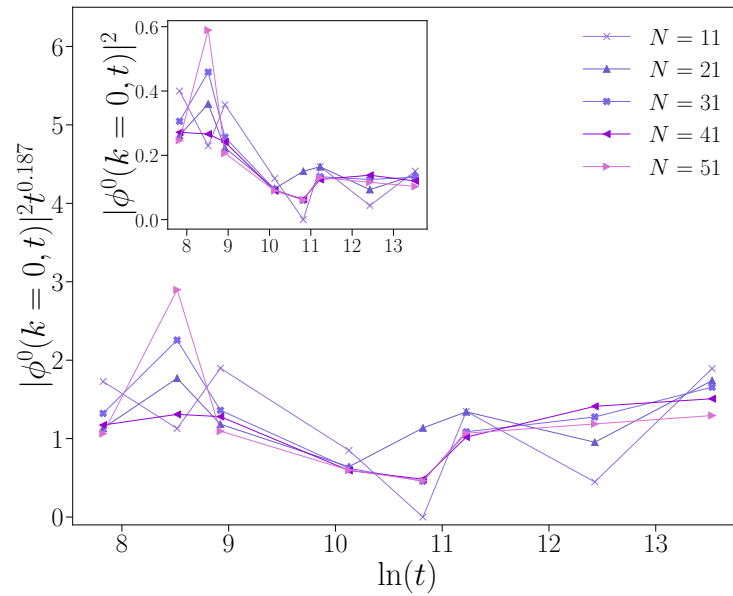


FIGURE 5.22 – Évolution temporelle de  $|\phi^0(k=0, t)|^2 t^{0.187}$  en fonction de  $\ln(t)$ . Encart : évolution temporelle de  $|\phi^0(k=0, t)|^2$  en fonction de  $\ln(t)$ .

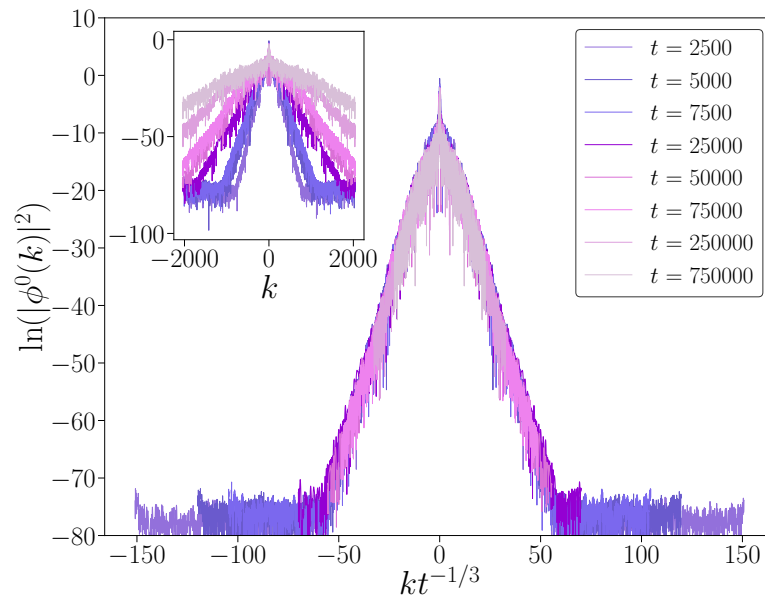


FIGURE 5.23 –  $|\phi^0(k)|^2$  pour différentes valeurs du temps, dont nous avons rescale l'axe des abscisses avec  $t^{-1/3}$ . Encart : même données sans rescale.

## 5.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons étudié les régimes localisé, diffusif et critique d'un gaz de Tonks-Girardeau soumis à la physique du Kicked Rotor quasi-périodique. Tout d'abord, nous avons montré que la phase localisée, comme au chapitre 4, peut être décrit comme un gaz thermique à basse température.

Ensuite, nous avons montré que le régime diffusif est cette fois bien décrit comme un gaz thermique à haute température. L'hypothèse de thermalisation effective nous a à nouveau permis de relier la température aux quantités relatives à la diffusion du système, dans ce cas l'énergie qui croît linéairement avec le temps. De même, nous aussi montré que le contact de Tan se comporte comme celui d'un gaz à haute température, et permet de décrire la décroissance algébrique de la distribution en impulsion bosonique, en fonction de  $K$  et  $t$ . Du fait de son lien direct avec la température effective du système 5.6, cette dernière croît également linéaire avec le temps. Enfin, nous avons également caractérisé les corrélations, où  $r_c \sim t^{-1/2}$  et peut être décrit comme la longueur de De Broglie thermique.

Pour finir, nous nous sommes intéressés au régime critique. Nous avons montré que la distribution en impulsion des fermions obéit toujours à la loi d'échelle (1.57) et adopte une forme de fonction de Airy. Par ailleurs, le comportement asymptotique du pic  $kt^{-1/3} \simeq 0$  à temps longs s'éloigne à nouveau de la théorie auto-cohérente. En analysant la partie centrale de la distribution, nous avons montré la présence de multi-fractalité dans le système de fermions libres.

Nous avons ensuite montré que la distribution en impulsion du gaz de Tonks-Girardeau suit également la loi d'échelle (1.42), ceci jusqu'à  $kt^{1/3} \simeq N$ . Au delà, les hautes impulsions étant décrites par le contact de Tan, ce dernier évolue comme  $t^{2/3}$  et change donc le comportement de la distribution en impulsion dans ce secteur. Enfin, nous avons montré que l'analyse de la zone centrale de la distribution contre-indique a priori la présence de multifractalité. Nous nous sommes également intéressés au régime critique au travers de l'orbitale naturelle la plus occupée. Nous montrons cette fonction sur la figure 5.24, et voyons qu'elle respecte les évolutions temporelles en  $t^0$  (régime localisé),  $t$  (régime diffusif) et  $t^{2/3}$  (régime critique). En interprétant cette fonction comme un état à un corps effectif, nous avons suivi l'évolution temporelle du pic  $|\phi^0(k=0)|^2$  et avons vu une décroissance en fonction du temps similaire à celle de la distribution en impulsion  $n_k$ . Ceci indique clairement que cet exposant est propre au système de bosons en interaction.

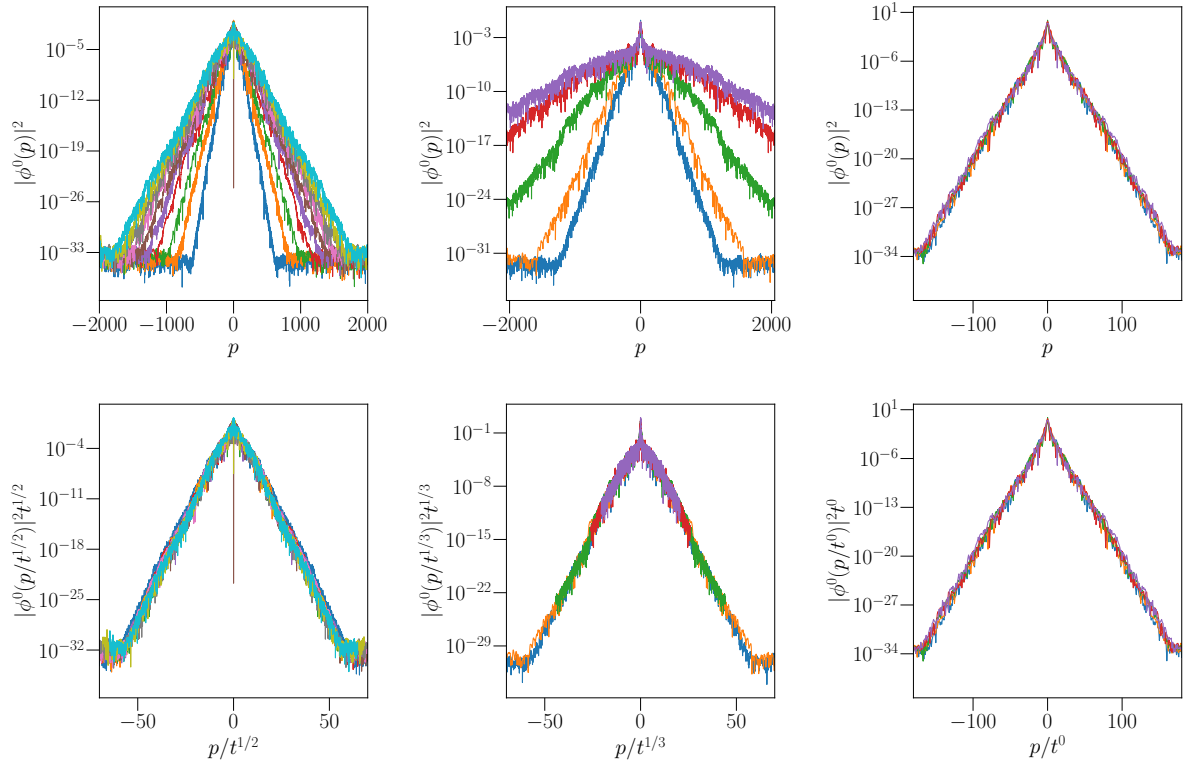


FIGURE 5.24 – Orbitales naturelles de la matrice densité dans les trois régimes : diffusif (à gauche,  $K = 12$ ), critique (au centre,  $K = 6.36$ ) et localisé (à droite,  $K = 3.5$ ). En haut se trouvent les orbitales naturelles pour différents temps, sans mise à l'échelle, en bas se trouvent les mêmes données, une fois mises à l'échelle dans les régimes respectifs. Ici,  $N = 51$ . Les temps employés sont :  $t \in [100, 1000]$  par pas de 100 dans le régime diffusif,  $t = 10000, 20000, 100000, 500000, 1000000$  dans le régime critique, et  $t = 1100, 1200, 1300, 1400, 1500$  dans le régime localisé.



# Conclusion générale

La fin justifie les moyens. Mais qu'est-ce qui justifiera la fin ?

---

Albert Camus

**N**OUS avons présenté le travail de thèse concernant l'étude d'un gaz de Tonks-Girardeau kické, dont nous avons caractérisé la phase localisée dynamiquement à  $N$ -corps.

Nous avons vu au chapitre 1 que le Kicked Rotor périodique, paradigme du chaos quantique, reproduit les caractéristiques de localisation d'Anderson mais dans l'espace des impulsions. Dans sa version quasi-périodique, le Kicked Rotor reproduit les propriétés d'un système désordonné d'Anderson tridimensionnel. Ce sont deux systèmes particulièrement intéressants pour l'étude des systèmes désordonnés, notamment expérimentalement, ce qui est possible par le développement de l'ingénierie des atomes froids.

Par ailleurs, nous avons vu que les atomes froids nous permettent l'étude expérimentale des systèmes en interaction, notamment en dimension 1. En poussant les interactions à l'infini, le régime de Tonks-Girardeau ouvre la porte vers l'étude théorique des gaz de Bose en interaction. En exploitant la correspondance de Bose-Fermi, nous avons vu au chapitre 2 que l'étude dans l'état fondamental et à température finie est possible théoriquement.

Ce manuscrit se trouve au bout d'une série d'études numériques tentant de mesurer l'effet des interactions sur la localisation dynamique. Des modèles-jouet jusqu'à l'approche champ-moyen, de nombreuses études ont souvent prédit la délocalisation du système. Dans le cadre des systèmes intégrables en revanche, nous avons vu au chapitre 3 que des paramètres rendent possible la localisation dynamique à  $N$ -corps. Cela a été étudié dans différentes limites, à deux corps et à  $N$ -corps. Des ambiguïtés dans l'étude faite à  $N$ -corps [146] ont été relevées, notamment sur l'utilisation de l'hydrodynamique généralisée. C'est pourquoi nous avons pris le parti de nous intéresser particulièrement au régime de Tonks-Girardeau, qui est d'intérêt à la fois numériquement par le fait que c'est un modèle intégrable et offre une résolution exacte numériquement, et est expérimentalement atteignable par le biais des résonances de Feshbach.

Au chapitre 4, nous avons montré qu'un gaz de Tonks-Girardeau kické localise dynamiquement, au sens où son énergie totale sature à temps longs. La décroissance exponentielle de la distribution en impulsion est remplacée par une décroissance algébrique caractérisée

par un contact de Tan. Nous avons montré que l'état stationnaire du système est étonnamment bien décrit par une matrice densité d'un système thermique. Nous en avons tiré une température effective des distributions fermioniques, que nous avons reliée aux propriétés de localisation du système. Nous avons fait un travail numérique autour de la validité de cette description, ce qui nous a permis de décrire le système comme un gaz quantique à basse température. En étudiant l'opérateur évolution du système, nous avons pu donner une explication à l'émergence d'une telle description. Nous avons montré que la matrice densité du système appartient à l'ensemble de Gibbs généralisé, construit à l'aide des occupations des états de Floquet. Ainsi notre système est à la fois localisé dynamiquement, mais aussi bien décrit par un nombre extensif de constante du mouvement. Nous avons alors un rare exemple de système localisé dynamiquement à  $N$ -corps, menant à une ergodicité effective, en opposition avec les systèmes localisés à  $N$ -corps.

L'étude de la version quasi-périodique, qui est l'objet du chapitre 5, nous a permis d'adapter notre description en termes de thermalisation effective, en décrivant le régime diffusif d'un gaz de Tonks-Girardeau comme un gaz thermique à haute température. Nous avons relié la température effective aux propriétés de diffusion. En particulier, les observables dépendent désormais du temps. La phase localisée est également étudiée, et nous montrons qu'elle peut être décrite comme un gaz thermique à basse température. Enfin, nous nous sommes intéressés à la phase critique du système. Nous avons montré que les lois d'échelles sont les mêmes que dans le cas à un corps dans le système de fermions libres. Nous avons également montré la présence de multifractalité dans le système de fermions libres. Du côté des bosons, nous avons montré que la distribution en impulsion se démarque complètement de sa contrepartie fermionique. Trois secteurs d'impulsions apparaissent qui sont les grandes et petites impulsions ainsi que le pic central de la distribution en impulsion. Trois comportements différents ont été trouvés, en  $t^{2/3}$  à grandes impulsions, déduit grâce au lien du contact de Tan avec l'énergie, en  $t^{1/3}$  à basses impulsions, et enfin le pic central de la distribution en impulsion  $n_{k=0}$  ainsi que celui de l'orbitale naturelle la plus occupée  $\phi^0(k=0)$  qui évolue en  $t^{-0.187}$ .

Expérimentalement, la thermalisation effective devrait être observable si la température initiale est plus petite que la température effective. En utilisant la fermionisation dynamique [159, 160], il est possible d'extraire la température effective correspondante, et analyser les observables bosoniques. Une expérience d'atomes froids de  $^{41}\text{K}$  est établie au laboratoire PhLAM de Lille, et a pour but d'étudier entre autre l'effet des interactions sur la localisation dynamique d'un gaz d'atomes froids unidimensionnel kické dans le régime de Tonks-Girardeau. Celle-ci a été adaptée pour reproduire la physique en dimension 1 que nous avons étudié numériquement dans ce manuscrit, et devrait permettre de confirmer nos résultats. Récemment, deux articles ont été publiés à propos d'expériences d'atomes froids. La première à Santa-Barbara [161] étudie un gaz d'atomes froids tridimensionnel de  $^7\text{Li}$  dans un réseau optique pulsé, avec des interactions contrôlables. Il y est montré une délocalisation marquée d'une diffusion anormale, ce qui est en accord avec les approches champ-moyen susceptibles de décrire cette expérience comme nous l'avons vu au chapitre 3. La seconde expérience à Washington [162] étudie un gaz de  $^{174}\text{Yb}$  cette fois-ci unidimensionnel, avec interactions finies. Il y est également montré une délocalisation. Ceci est dû au fait que ces expériences emploient des interactions loin du régime d'interactions



infinies de Tonks-Girardeau, régime dans lequel la localisation dynamique des fermions libres implique celle du gaz de Tonks-Girardeau.

Nous ouvrons maintenant des perspectives pour des travaux futurs. L'expérience d'atomes froids de Washington ouvre la voie vers l'étude d'un gaz de Lieb-Liniger avec des interactions finies. Dans cette limite, le modèle n'est plus intégrable, et l'effet des kicks sur les états propres de Bethe du système est hautement non trivial. Une généralisation à  $N$ -corps du cas à 2 corps que nous avons exposé au chapitre 3 serait une voie d'étude pour comprendre ces effets. D'autre part, il serait intéressant de voir si la description en terme de thermalisation effective est encore possible dans ce régime d'interaction, ce qui permettrait d'étendre cette approche. Par ailleurs, nous avons discuté succinctement de l'hydrodynamique généralisée. Dans le régime de Tonks-Girardeau, la solution  $n(x, \lambda, t)$  est une fonction de Wigner. En appliquant la dynamique des équations (3.18) et (3.19), nous savons que celles-ci vont nous mener à de la délocalisation dans le régime de Tonks-Girardeau. Néanmoins, cela pourrait être approche possible pour comprendre la physique d'un gaz d'atomes froids kické en présence d'interactions de contact finies. En effet, la physique avec interaction finie d'un gaz de Lieb-Liniger, une description en terme de quasi-particule peut être utilisée, et est très bien capturée par l'hydrodynamique généralisée [160].

Il serait intéressant de comprendre fondamentalement pourquoi le gaz de Tonks-Girardeau kické apparaît comme thermique dans le régime localisé et diffusif. Dans les systèmes localisés à  $N$ -corps, des études ont montrées qu'il est possible de se restreindre à l'étude d'un modèle de percolation classique dans l'espace de Fock pour comprendre et visualiser la transition quantique vers la localisation à  $N$ -corps [163]. Il serait intéressant d'adapter ce type d'approche à notre système, et montrer l'émergence d'une ergodicité effective pour comprendre l'aspect des observables du système. Il existe une autre étude, reposant sur des arguments de typicalité, qui trouve des structures thermiques cachées dans l'espace de Fock de système à  $N$ -corps [164]. Trouver ce type de structure capable de reconstruire et d'expliquer les observables du système pourrait être un moyen de comprendre leurs apparences thermiques.

L'étude du régime critique dans le chapitre 5 est restée très factuelle. Trouver une observable permettant de caractériser la présence de multifractalité dans le système de bosons en interaction semble nécessaire. Une analyse poussée de l'orbitale naturelle la plus occupée peut être une piste, notamment en reprenant une analyse du pic central et de son éventuelle singularité centrale, reliable à une dimension  $d_2^b$ .



## Contact de Tan

### A.1 Expression thermique

Tout au long du manuscrit, nous avons utilisé la formule du contact de Tan obtenue dans [118] :

$$\mathcal{C} = \frac{2}{\pi} \int dx F(x). \quad (\text{A.1})$$

où la fonction à deux corps  $F(x)$  est défini comme il suit :

$$F(x) = n(x) \sum_{\mu} f_{\mu} |\partial_x \phi_{\mu}(x)|^2 - \left| \sum_{\mu} f_{\mu} \phi_{\mu}(x) \partial_x \phi_{\mu}^*(x) \right|^2 \quad (\text{A.2})$$

avec  $n(x) = \sum_{\mu} f_{\mu} |\phi_{\mu}(x)|^2$  le profil de densité du système, et  $f_{\nu} = 1/[e^{\beta(\varepsilon_{\nu}-\mu)} + 1]$  est le facteur d'occupation de Fermi d'un niveau d'énergie d'un état à un corps et  $\nu \in [-(N-1)/2, N/2]$  désigne les états d'impulsions accessibles en fonction du nombre de particules  $N$ . Ici, nous montrons que l'expression est valable avec la physique du Kicked Rotor où  $\beta \rightarrow \infty$ , donc  $f_{\nu} = 1$  pour  $\nu < |(N-1)/2|$ , et 0 ailleurs. Les deux termes de l'équation (A.2) sont à évaluer, et nous commençons par le second. D'une part, nous rappelons que nos fonctions d'ondes du Kicked Rotor possèdent les symétries suivantes dans l'espace des  $x$  :

$$\phi_{-\mu}(x) = \phi_{\mu}(-x), \quad \phi_{-\mu}(x) \partial_x \phi_{-\mu}^*(x) = -\phi_{\mu}(-x) \partial_x \phi_{\mu}^*(-x). \quad (\text{A.3})$$

Cela nous indique en outre que les termes dans le second terme vont s'annuler deux par deux, tandis que la fonction d'onde pour  $\mu = 0$  n'a pas de contrepartie. Nous avons regardé la contribution du module carré de sa dérivée, et nous l'avons trouvé de l'ordre de  $10^{-12}$  en amplitude, ce qui est négligeable dans nos calculs. Il nous reste donc à évaluer le premier terme. Pour cela, écrivons le contact de Tan tel que nous l'avons défini en explicitant :

$$\mathcal{C} = \frac{4}{L} \int dx n(x) \int dx \left( \sum_{\nu} |\partial_x \phi_{\nu}(x)|^2 \right) \quad (\text{A.4})$$

où nous avons fait l'approximation que nous pouvons intégrer séparément la densité et les dérivées des modules carrés des fonctions d'ondes. Nous nous intéressons aux fonctions

$n(x)$  et  $e_k(x)$  définies telles que  $\int n(x)dx = N/L$  et  $\int e_k(x)dx = E/L$  avec  $N$  et  $E$  le nombre totale de particules et l'énergie totale du système. Nous montrons ces quantités sur la figure A.1.

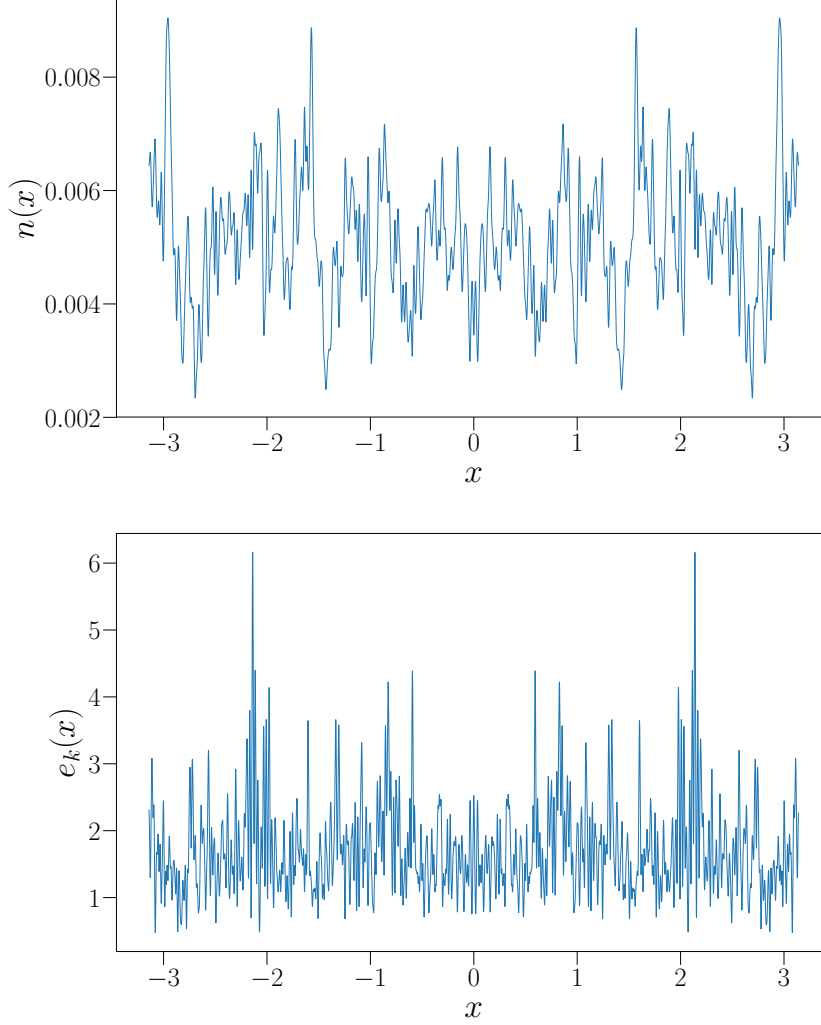


FIGURE A.1 – Densité (figure du haut) et densité d'énergie (figure du bas) pour  $N = 21$ ,  $K = 20$ ,  $\bar{k} = 3$  à  $t = 600$  kicks.

Nous voyons que l'énergie domine très clairement en terme de variations, et nous permet de séparer les intégrales dans le calcul de  $\mathcal{C}$ . Nous évaluons enfin la deuxième intégrales :

$$\int dx \left( \sum_{\nu} |\partial_x \phi_{\nu}(x)|^2 \right) = \int dx \left[ \sum_{\nu} \int dk \int dk' k' \phi_{\nu}^*(k') e^{ik'x} k \phi_{\nu}(k) e^{-ikx} \right], \quad (\text{A.5})$$

où  $\frac{1}{L} \int dx e^{i(k-k')x} = \delta(k - k')$  et nous mène à :

$$\int dx \left( \sum_{\nu} |\partial_x \phi_{\nu}(x)|^2 \right) = \frac{1}{L} \sum_{\nu} \int dk k^2 |\phi_{\nu}(k)|^2 = \frac{2mE}{L\hbar^2}. \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, le contact de Tan en unités réduites est donné par :

$$\mathcal{C} = \frac{8NmE}{\hbar^2 L^2}. \quad (\text{A.7})$$

En définissant  $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^4$  pour avoir le contact de Tan en unités réduites, on obtient :

$$\tilde{\mathcal{C}} = \frac{8NE}{L^2 \hbar^2}. \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Non-analyticité de $\rho$

Il existe une autre manière d'estimer le contact de Tan, donnée également dans [118], qui se réfère à la non-analyticité de la matrice densité réduite à courte distance. En effet, nous avons :

$$\rho(x, y) \sim \frac{|x - y|^3}{3} F(R). \quad (\text{A.9})$$

En utilisant la définition de  $g_1$  (2.28), nous faisons en réalité une moyenne sur les positions moyennes  $R = (x + y)/2$ . En suivant le développement fait dans l'article de Forrester *et al.* [115] :

$$g_1(r) = g_1(0) \left(1 - \alpha \frac{r^2}{2} + \beta \frac{|r|^3}{3} + \mathcal{O}(r^4)\right) \quad (\text{A.10})$$

où  $g_1(0) = N/L$ . Ainsi, en utilisant une fonction de fit  $f(r) = a - b \frac{r^2}{2} + c \frac{|r|^3}{3}$ , on a alors que  $c = g_1(0)\beta = \int F(R) dR$ , et nous pouvons calculer le contact de Tan  $\mathcal{C}_{fit} = \frac{2}{\pi} c = \frac{2}{\pi} g_1(0)\beta$  pour différents paramètres. Notamment à  $t = 0$  (tableau A.1) nous voyons que notre procédure donne une bonne estimation du contact pour différentes valeurs de  $N$ . Nous avons également suivi l'évolution temporelle du contact pour  $N$ ,  $K$  et  $\hbar$ , et nous trouvons à nouveau une bonne estimation, voir tableau A.2.  $\mathcal{C}$  est le contact de Tan donné par l'équation A.8.

$N$	$\mathcal{C}_{fit}$	$\mathcal{C}$
11	$122.80 \pm 0.02$	122.60
21	$1645.75 \pm 0.3$	1638.36
31	$7856.92 \pm 3.53$	7789.57
41	$24172.03 \pm 22.96$	23844.93
51	$58217.33 \pm 57.75$	57099.55

TABLE A.1 – Valeurs du contact de Tan à  $t = 0$  pour différents nombres de particules.

$t$	$\mathcal{C}_{fit}$	$\mathcal{C}$
1	$2625.42 \pm 14.73$	2631.31
10	$15003.5 \pm 99.28$	15043.22
20	$24981.14 \pm 506.75$	25006.55
100	$63319.89 \pm 3560.42$	67424.71
300	$80981.45 \pm 5702.58$	75916.71
600	$81121.98 \pm 3665.96$	80128.78

TABLE A.2 – Contact de Tan pour différents temps  $t = (1, 10, 20, 100, 300, 600)$ ,  $K = 20$ ,  $k = 3.0$ ,  $N = 21$ .



# Bibliographie

- [1] P. W. ANDERSON. “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”. In : *Phys. Rev.* 109 (5 1958), p. 1492-1505.
- [2] D.J. THOULESS. “Electrons in disordered systems and the theory of localization”. In : *Physics Reports* 13.3 (1974), p. 93-142. ISSN : 0370-1573.
- [3] J. T. EDWARDS et D. J. THOULESS. “Numerical studies of localization in disordered systems”. In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 5.8 (1972), p. 807-820.
- [4] R. LANDAUER. “Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices”. In : *Philosophical Magazine* 21 (1970), p. 863-867.
- [5] F. J. WEGNER. “Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge”. In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 25 (1976), p. 327-337.
- [6] E. ABRAHAMS et al. “Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions”. In : *Phys. Rev. Lett.* 42 (10 1979), p. 673-676.
- [7] A. MACKINNON et B. KRAMER. “One-Parameter Scaling of Localization Length and Conductance in Disordered Systems”. In : *Phys. Rev. Lett.* 47 (21 1981), p. 1546-1549.
- [8] J. L. PICHARD et G. SARMA. “Finite-size scaling approach to Anderson localisation. II. Quantitative analysis and new results”. In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 14.21 (1981), p. L617-L625.
- [9] A. MACKINNON. “Critical exponents for the metal-insulator transition”. In : *Journal of Physics : Condensed Matter* 6.13 (1994), p. 2511-2518.
- [10] K. SLEVIN et T. OHTSUKI. “Corrections to Scaling at the Anderson Transition”. In : *Phys. Rev. Lett.* 82 (2 1999), p. 382-385.
- [11] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. “Scaling Equations from a Self-Consistent Theory of Anderson Localization”. In : *Phys. Rev. Lett.* 48 (10 1982), p. 699-702.
- [12] B. L. ALTSHULER et al. “Quasiparticle Lifetime in a Finite System : A Nonperturbative Approach”. In : *Phys. Rev. Lett.* 78 (14 1997), p. 2803-2806.
- [13] D.M. BASKO, I. ALEINER et B.L. ALTSHULER. “Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states”. In : *Annals of Physics* 321 (juin 2005), p. 1126-1205.



- [14] I. V. GORNYI, A. D. MIRLIN et D. G. POLYAKOV. “Interacting Electrons in Disordered Wires : Anderson Localization and Low- $T$  Transport”. In : *Phys. Rev. Lett.* 95 (20 2005), p. 206603.
- [15] A. PAL et D. A. HUSE. “Many-body localization phase transition”. In : *Phys. Rev. B* 82 (17 2010), p. 174411.
- [16] F. VERSTRAETE, V. MURG et J.I. CIRAC. “Matrix product states, projected entangled pair states, and variational renormalization group methods for quantum spin systems”. In : *Advances in Physics* 57.2 (2008), p. 143-224.
- [17] J. EISERT, M. CRAMER et M. B. PLENIO. “Colloquium : Area laws for the entanglement entropy”. In : *Rev. Mod. Phys.* 82 (1 2010), p. 277-306.
- [18] M. SERBYN et Dmitry A. ABANIN. “Local Conservation Laws and the Structure of the Many-Body Localized States”. In : *Phys. Rev. Lett.* 111 (12 2013), p. 127201.
- [19] B. BAUER et C. NAYAK. “Area laws in a many-body localized state and its implications for topological order”. In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2013.09 (12 2013), P09005.
- [20] P. PONTE et al. “Many-Body Localization in Periodically Driven Systems”. In : *Phys. Rev. Lett.* 114 (14 2015), p. 140401.
- [21] P. PONTE et al. “Periodically driven ergodic and many-body localized quantum systems”. In : *Annals of Physics* 353 (12 2015), 196–204. ISSN : 0003-4916.
- [22] M. STÖRZER et al. “Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light”. In : *Phys. Rev. Lett.* 96 (6 2006), p. 063904.
- [23] C. AEGERTER, Martin STÖRZER et Georg MARET. “Experimental determination of critical exponents in Anderson localisation of light”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 75 (12 avr. 2006), p. 562.
- [24] M. RUSEK et A. ORŁOWSKI. “Analytical approach to localization of electromagnetic waves in two-dimensional random media”. In : *Phys. Rev. E* 51 (4 1995), R2763-R2766.
- [25] D. WIERSMA et al. “Localization of light in a disordered medium”. In : *Nature* 390 (12 déc. 1997), p. 671-673.
- [26] Z. YE et A. ALVAREZ. “Acoustic Localization in Bubbly Liquid Media”. In : *Phys. Rev. Lett.* 80 (16 1998), p. 3503-3506.
- [27] I. BAHAR et al. “Vibrational Dynamics of Folded Proteins : Significance of Slow and Fast Motions in Relation to Function and Stability”. In : *Phys. Rev. Lett.* 80 (12 mar. 1998), p. 2733-2736.
- [28] C. L. EPSTEIN. “Anderson Localization, Non-linearity and Stable Genetic Diversity”. In : *Journal of Statistical Physics* 124 (12 2006), p. 25-46.
- [29] R. HOLMAN et L. MERSINI-HOUGHTON. “Why did the Universe Start from a Low Entropy State?” In : *Phys. Rev. Lett.* 111 (12 jan. 2006), p. 127201.
- [30] M. LEWENSTEIN et al. “Ultracold atomic gases in optical lattices : mimicking condensed matter physics and beyond”. In : *Advances in Physics* 56.2 (12 2007), p. 243-379.

- 
- [31] I. BLOCH, J. DALIBARD et W. ZWERGER. “Many-body physics with ultracold gases”. In : *Rev. Mod. Phys.* 80 (3 2008), p. 885-964.
- [32] J. BILLY et al. “Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder”. In : *Nature* 453 (12 juil. 2008), p. 891-4.
- [33] F. JENDRZEJEWSKI et al. “Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential”. In : *Nature Physics* 8.5 (12 2012), 398–403. ISSN : 1745-2481.
- [34] D. WHITE et al. “Observation of two-dimensional Anderson localisation of ultracold atoms”. In : *Nature Communications* 11 (12 oct. 2020), p. 127201.
- [35] M. SCHREIBER et al. “Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasirandom optical lattice”. In : *Science* 349.6250 (12 2015), 842–845. ISSN : 1095-9203.
- [36] J. SMITH et al. “Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder”. In : *Nature Physics* 12.10 (12 2016), 907–911. ISSN : 1745-2481.
- [37] J. CHOI et al. “Exploring the many-body localization transition in two dimensions”. In : *Science* 352.6293 (12 2016), 1547–1552. ISSN : 1095-9203.
- [38] B. V. CHIRIKOV. “A universal instability of many-dimensional oscillator systems”. In : *Physics Reports* 52.5 (12 1979), p. 263-379. ISSN : 0370-1573.
- [39] F. L. MOORE et al. “Atom Optics Realization of the Quantum  $\delta$ -Kicked Rotor”. In : *Phys. Rev. Lett.* 75 (25 1995), p. 4598-4601.
- [40] G. CASATI, I. GUARNERI et D. L. SHEPELYANSKY. “Anderson Transition in a One-Dimensional System with Three Incommensurate Frequencies”. In : *Phys. Rev. Lett.* 62 (4 1989), p. 345-348.
- [41] D. M. BASKO, M. A. SKVORTSOV et V. E. KRAVTSOV. “Dynamic Localization in Quantum Dots : Analytical Theory”. In : *Phys. Rev. Lett.* 90 (9 2003), p. 096801.
- [42] J. CHABÉ et al. “Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves”. In : *Phys. Rev. Lett.* 101 (25 2008), p. 255702.
- [43] G. LEMARIÉ, B. GRÉMAUD et D. DELANDE. “Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 87.3 (12 2009), p. 37007.
- [44] G. LEMARIÉ et al. “Observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment”. In : *Phys. Rev. A* 80 (4 2009), p. 043626.
- [45] A.J. LICHTENBERG et M.A. LIEBERMAN. *Regular and Chaotic Dynamics*. T. 111. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013, p. 127201. ISBN : 9781475721843.
- [46] D. R. GREMPPEL, R. E. PRANGE et Shmuel FISHMAN. “Quantum dynamics of a nonintegrable system”. In : *Phys. Rev. A* 29 (4 1984), p. 1639-1647.
- [47] E. HAMZA, A. JOYE et G. STOLZ. “Localization for Random Unitary Operators”. In : *Letters in Mathematical Physics* 75.3 (12 2006), 255–272. ISSN : 1573-0530.

- [48] E. HAMZA, A. JOYE et G. STOLZ. “Dynamical Localization for Unitary Anderson Models”. In : *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* 12.4 (12 2009), 381–444. ISSN : 1572-9656.
- [49] M. GRINIASTY et S. FISHMAN. “Localization by pseudorandom potentials in one dimension”. In : *Phys. Rev. Lett.* 60 (13 1988), p. 1334-1337.
- [50] N. BRENNER et S. FISHMAN. “Pseudo-randomness and localization”. In : *Nonlinearity* 5 (12 1992), p. 211-235.
- [51] G. CASATI et al. “Scaling behavior of localization in quantum chaos”. In : *Phys. Rev. Lett.* 64 (1 1990), p. 5-8.
- [52] G. A. THOMAS. “Experimental tests of localization in semiconductors”. In : *Physica B+C* 117-118 (12 mar. 1983), p. 81-83.
- [53] B. KRAMER et A. MACKINNON. “Localization : theory and experiment”. In : *Reports on Progress in Physics* 56.12 (12 1993), p. 1469-1564.
- [54] S. KATSUMOTO et al. “Fine Tuning of Metal-Insulator Transition in Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As Using Persistent Photoconductivity”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 56.7 (12 1987), p. 2259-2262.
- [55] S. KATSUMOTO et al. “Dielectric Constant Measurement near the Metal-Insulator Transition in Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 58.3 (12 1989), p. 791-794.
- [56] C. VAN HAESENDONCK et Y. BRUYNSERAEDE. “Evidence for an Anderson transition in granular Sn films”. In : *Phys. Rev. B* 33 (3 1986), p. 1684-1690.
- [57] M. E. PESKIN et Daniel V. SCHROEDER. *An Introduction to Quantum Field Theory*. T. 111. Reading, USA : Addison-Wesley (1995) 842 p. Westview Press, 1995, p. 127201.
- [58] F. J. WEGNER. “Inverse participation ratio in  $2+\epsilon$  dimensions”. In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 36 (12 1980), p. 209-214.
- [59] S. HIKAMI. “Isomorphism and the  $\beta$ -function of the non-linear  $\sigma$  model in symmetric spaces”. In : *Nuclear Physics B* 215.4 (12 1983), p. 555-565. ISSN : 0550-3213.
- [60] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. “Anderson Localization in  $d \geq 2$  Dimensions : A Self-Consistent Diagrammatic Theory”. In : *Phys. Rev. Lett.* 45 (10 1980), p. 842-846.
- [61] A. M. GARCÍA A-GARCÍA. “Semiclassical Theory of the Anderson Transition”. In : *Physical Review Letters* 100.7 (12 2008), p. 127201.
- [62] F. EVERS et A. D. MIRLIN. “Anderson transitions”. In : *Reviews of Modern Physics* 80.4 (12 2008), p. 1355-1417.
- [63] P. AKRIDAS-MOREL, Nicolas CHERRORET et Dominique DELANDE. “Multifractality of the kicked rotor at the critical point of the Anderson transition”. In : *Phys. Rev. A* 100 (4 2019), p. 043612.
- [64] D. L. SHEPELYANSKY. “Localization of diffusive excitation in multi-level systems”. In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 28 (12 1987), p. 103-114.

- 
- [65] E. DORON et S. FISHMAN. “Anderson localization for a two-dimensional rotor”. In : *Phys. Rev. Lett.* 60 (10 1988), p. 867-870.
- [66] J. WANG et A. M. GARCÍA-GARCÍA. “Anderson transition in a three-dimensional kicked rotor”. In : *Phys. Rev. E* 79 (3 2009), p. 036206.
- [67] D. L. SHEPELYANSKY. “Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems”. In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 8 (12 1983), p. 208-222.
- [68] F. BORGONOVİ et D. L. SHEPELYANSKY. “Particle propagation in a random and quasi-periodic potential”. In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 109 (12 1997), p. 24-31.
- [69] Q. LI et al. “Anisotropic tight-binding model for localization”. In : *Phys. Rev. B* 40 (5 1989), p. 2825-2830.
- [70] N. A. PANAGIOTIDES, S. N. EVANGELOU et G. THEODOROU. “Localization-delocalization transition in anisotropic solids”. In : *Phys. Rev. B* 49 (20 1994), p. 14122-14127.
- [71] I. ZAMBETAKI et al. “Localization in highly anisotropic systems.” In : *Physical review letters* 76 19 (12 1996), p. 3614-3617.
- [72] S. S. KONDOV et al. “Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter”. In : *Science* 334.6052 (12 2011), 66–68. ISSN : 1095-9203.
- [73] S. FAEZ et al. “Observation of Multifractality in Anderson Localization of Ultrasound”. In : *Physical Review Letters* 103.15 (12 2009), p. 127201.
- [74] B. SHAPIRO. “Self-consistent calculation of the frequency-dependent conductivity near the Anderson transition”. In : *Phys. Rev. B* 25 (6 1982), p. 4266-4269.
- [75] J.T. CHALKER. “Scaling and eigenfunction correlations near a mobility edge”. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 167.1 (12 1990), p. 253-258.
- [76] A. EINSTEIN. “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung”. In : t. 23. American Physical Society, août 2006, p. 245 -257. ISBN : 9783527608959.
- [77] C. J. PETHICK et H. SMITH. *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. 2<sup>e</sup> éd. T. 111. Cambridge University Press, 2008, p. 127201.
- [78] M. AGIO. “Advances in Atomic Physics : An Overview, by Claude Cohen-Tannoudji and David Guéry-Odelin”. In : *Contemporary Physics* 53.6 (12 2012), p. 519-520.
- [79] M. H. ANDERSON et al. “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”. In : *Science* 269.5221 (12 1995), p. 198-201.
- [80] K. B. DAVIS et al. “Evaporative Cooling of Sodium Atoms”. In : *Phys. Rev. Lett.* 74 (26 1995), p. 5202-5205.
- [81] K. W. MADISON et al. “Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate”. In : *Physical Review Letters* 84.5 (12 2000), p. 806-809.
- [82] P. C. HALJAN et al. “Driving Bose-Einstein-Condensate Vorticity with a Rotating Normal Cloud”. In : *Physical Review Letters* 87.21 (12 2001), p. 127201.
- [83] J. ABO-SHAEER et al. “Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates”. In : *Science (New York, N.Y.)* 292 (12 mai 2001), p. 476-9.

- [84] M. GREINER et al. “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms”. In : *Nature* 415 (12 fév. 2002), p. 39-44.
- [85] D. JAKSCH et P. ZOLLER. “Creation of effective magnetic fields in optical lattices : the Hofstadter butterfly for cold neutral atoms”. In : *New Journal of Physics* 5 (12 2003), p. 56-56.
- [86] F. GERBIER et J. DALIBARD. “Gauge fields for ultracold atoms in optical superlattices”. In : *New Journal of Physics* 12.3 (12 2010), p. 033007.
- [87] R. FOLMAN et al. “Controlling Cold Atoms using Nanofabricated Surfaces : Atom Chips”. In : *Phys. Rev. Lett.* 84 (20 2000), p. 4749-4752.
- [88] J. ESTEVE et al. “Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas : Ideal Gas and Quasicondensate Regimes”. In : *Physical Review Letters* 96.13 (12 2006), p. 127201.
- [89] C. D. FERTIG et al. “Strongly Inhibited Transport of a Degenerate 1D Bose Gas in a Lattice”. In : *Phys. Rev. Lett.* 94 (12 2005), p. 120403.
- [90] M. GREINER et al. “Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates”. In : *Phys. Rev. Lett.* 87 (16 2001), p. 160405.
- [91] T. KINOSHITA, T. WENGER et D. S. WEISS. “Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas”. In : *Science* 305.5687 (12 2004), p. 1125-1128.
- [92] H. MORITZ et al. “Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 91 (25 2003), p. 250402.
- [93] B. PAREDES et al. “Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice”. In : *Nature* 429 (12 2004), p. 277-281.
- [94] L. POLLET, S. M. A. ROMBOUTS et P. J. H. DENTENEER. “Ultracold Atoms in One-Dimensional Optical Lattices Approaching the Tonks-Girardeau Regime”. In : *Phys. Rev. Lett.* 93 (21 2004), p. 210401.
- [95] S. WESSEL et al. “Bosons in Optical Lattices – from the Mott Transition to the Tonks-Girardeau Gas”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 74.Suppl (12 2005), p. 10-15.
- [96] T. KINOSHITA, T. WENGER et D. S. WEISS. “Local Pair Correlations in One-Dimensional Bose Gases”. In : *Phys. Rev. Lett.* 95 (19 2005), p. 190406.
- [97] E. HALLER et al. “Pinning quantum phase transition for a Luttinger liquid of strongly interacting bosons”. In : *Nature* 466.7306 (12 2010), p. 597-600. ISSN : 1476-4687.
- [98] A. D. JACKSON, G. M. KAVOULAKIS et C. J. PETHICK. “Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms”. In : *Phys. Rev. A* 58 (3 1998), p. 2417-2422.
- [99] A. GÖRLITZ et al. “Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions”. In : *Phys. Rev. Lett.* 87 (13 2001), p. 130402.
- [100] M. A. CAZALILLA et al. “One dimensional bosons : From condensed matter systems to ultracold gases”. In : *Rev. Mod. Phys.* 83 (4 2011), p. 1405-1466.
- [101] E. H. LIEB et W. LINIGER. “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State”. In : *Phys. Rev.* 130 (4 1963), p. 1605-1616.

- 
- [102] E. H. LIEB. “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum”. In : *Phys. Rev.* 130 (4 1963), p. 1616-1624.
- [103] H. A. BETHE. “Zur Theorie der Metalle”. In : *Zeitschrift für Physik* 71 (12 1931), p. 205-226.
- [104] T. C. DORLAS. “Orthogonality and completeness of the Bethe Ansatz eigenstates of the nonlinear Schroedinger model”. In : *Communications in Mathematical Physics* 154 (12 1993), p. 347-376.
- [105] M. KHODAS, A. KAMENEV et L. I. GLAZMAN. “Photosolitonic effect”. In : *Phys. Rev. A* 78 (5 2008), p. 053630.
- [106] C. N. YANG. “Concept of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors”. In : *Rev. Mod. Phys.* 34 (4 1962), p. 694-704.
- [107] N. D. MERMIN et H. WAGNER. “Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models”. In : *Phys. Rev. Lett.* 17 (22 1966), p. 1133-1136.
- [108] P. C. HOHENBERG. “Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions”. In : *Phys. Rev.* 158 (2 1967), p. 383-386.
- [109] L. PITAEVSKII et S. STRINGARI. “Uncertainty principle, quantum fluctuations, and broken symmetries”. In : *Journal of Low Temperature Physics* 85.5 (12 1991), p. 377-388. ISSN : 1573-7357.
- [110] M. GIRARDEAU. “Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension”. In : *Journal of Mathematical Physics* 1.6 (12 1960), p. 516-523.
- [111] M. D. GIRARDEAU et E. M. WRIGHT. “Dark Solitons in a One-Dimensional Condensate of Hard Core Bosons”. In : *Phys. Rev. Lett.* 84 (25 2000), p. 5691-5694.
- [112] M. RIGOL et A. MURAMATSU. “Ground-state properties of hard-core bosons confined on one-dimensional optical lattices”. In : *Physical Review A* 72.1 (12 2005), p. 127201.
- [113] R. PEZER et H. BULJAN. “Momentum Distribution Dynamics of a Tonks-Girardeau Gas : Bragg Reflections of a Quantum Many-Body Wave Packet”. In : *Physical Review Letters* 98.24 (12 2007), p. 127201.
- [114] R. PEZER, T. GASENZER et H. BULJAN. “Single-particle density matrix for a time-dependent strongly interacting one-dimensional Bose gas”. In : *Physical Review A* 80.5 (12 2009), p. 127201.
- [115] P. J. FORRESTER et al. “Finite one-dimensional impenetrable Bose systems : Occupation numbers”. In : *Physical Review A* 67.4 (12 2003), p. 127201.
- [116] A. LENARD. “Momentum Distribution in the Ground State of the One-Dimensional System of Impenetrable Bosons”. In : *Journal of Mathematical Physics* 5.7 (12 1964), p. 930-943.
- [117] A. MINGUZZI, P. VIGNOLO et M.P. TOSI. “High-momentum tail in the Tonks gas under harmonic confinement”. In : *Physics Letters A* 294.3-4 (12 2002), p. 222-226.

- [118] P. VIGNOLO et A. MINGUZZI. “Universal Contact for a Tonks-Girardeau Gas at Finite Temperature”. In : *Phys. Rev. Lett.* 110 (2 2013), p. 020403.
- [119] O. PENROSE et L. ONSAGER. “Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium”. In : *Phys. Rev.* 104 (3 1956), p. 576-584.
- [120] M. RIGOL. “Finite-temperature properties of hard-core bosons confined on one-dimensional optical lattices”. In : *Physical Review A* 72.6 (12 2005), p. 127201.
- [121] W. XU et M. RIGOL. “Universal scaling of density and momentum distributions in Lieb-Liniger gases”. In : *Phys. Rev. A* 92 (6 2015), p. 063623.
- [122] S. ADACHI, M. TODA et K. IKEDA. “Quantum-Classical Correspondence in Many-Dimensional Quantum Chaos”. In : *Phys. Rev. Lett.* 61 (6 1988), p. 659-661.
- [123] Z. WEN-LEI et J. QUAN-LIN. “Quantum to Classical Transition in a System of Two Coupled Kicked Rotors”. In : *Communications in Theoretical Physics* 51.3 (12 2009), p. 465-469.
- [124] S. NOTARNICOLA et al. “From localization to anomalous diffusion in the dynamics of coupled kicked rotors”. In : *Phys. Rev. E* 97 (2 2018), p. 022202.
- [125] B. TOLOUI et L. E. BALLENTINE. *Quantum Localization for Two Coupled Kicked Rotors*. 2009.
- [126] A. KESER et al. “Dynamical many-body localization in an integrable model”. In : *Phys. Rev. B* 94 (8 2016), p. 085120.
- [127] B. SIMON. “Almost periodic Schrödinger operators IV. The maryland model”. In : *Annals of Physics* 159 (12 1985), p. 157-183.
- [128] G. I. WATSON. “Spectrum and bandwidth of an exactly soluble incommensurate model”. In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 25.2 (12 1992), p. 345-353.
- [129] M. V. BERRY. “Incommensurability in an exactly-soluble quantal and classical model for a kicked rotator”. In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 10 (12 1984), p. 369-378.
- [130] E. B. ROZENBAUM et V. GALITSKI. “Dynamical localization of coupled relativistic kicked rotors”. In : *Phys. Rev. B* 95 (6 2017), p. 064303.
- [131] L. P. PITAEVSKII. “Vortex lines in an imperfect Bose gas”. In : *Sov. Phys.-JETP* 13.2 (12 1961), p. 451.
- [132] E. P. GROSS. “Structure of a quantized vortex in boson systems”. In : *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* 20 (12 1961), p. 454-477.
- [133] B. VERMERSCH. “Dynamique d’un gaz de bosons ultra-froids dans un milieu désordonné : effets des interactions sur la localisation et sur la transition d’Anderson”. Thèse de doctorat dirigée par Garreau, Jean-Claude Optique et lasers, Physico-chimie, Atmosphère Lille 1 2013. Thèse de doct. 2013, p. 127201.
- [134] C. RYU et al. “Observation of Persistent Flow of a Bose-Einstein Condensate in a Toroidal Trap”. In : *Physical Review Letters* 99.26 (12 2007), p. 127201.
- [135] S. FLACH, D. O. KRIMER et Ch. SKOKOS. “Universal Spreading of Wave Packets in Disordered Nonlinear Systems”. In : *Phys. Rev. Lett.* 102 (2 2009), p. 024101.

- 
- [136] A. S. PIKOVSKY et D. L. SHEPELYANSKY. “Destruction of Anderson Localization by a Weak Nonlinearity”. In : *Phys. Rev. Lett.* 100 (9 2008), p. 094101.
- [137] D. L. SHEPELYANSKY. “Delocalization of quantum chaos by weak nonlinearity”. In : *Phys. Rev. Lett.* 70 (12 1993), p. 1787-1790.
- [138] L. REBUZZINI et al. “Effects of atomic interactions on quantum accelerator modes”. In : *Physical Review A* 76.3 (12 2007), p. 127201.
- [139] G. GLIGORIĆ, J. D. BODYFELT et S. FLACH. “Interactions destroy dynamical localization with strong and weak chaos”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 96.3 (12 2011), p. 30004.
- [140] S. LELLOUCH et al. “Dynamics of the mean-field-interacting quantum kicked rotor”. In : *Phys. Rev. A* 101 (4 2020), p. 043624.
- [141] G. GLIGORIĆ, K. RAYANOV et S. FLACH. “Make slow fast —How to speed up interacting disordered matter”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 101.1 (12 2013), p. 10011.
- [142] N. CHERRORET et al. “How Nonlinear Interactions Challenge the Three-Dimensional Anderson Transition”. In : *Phys. Rev. Lett.* 112 (17 2014), p. 170603.
- [143] P. QIN et al. “Interacting ultracold atomic kicked rotors : dynamical localization ?” In : *Scientific Reports* 7 (12 juin 2016), p. 127201.
- [144] R. CHICIREANU et A. RAŢŢON. “Dynamical localization of interacting bosons in the few-body limit”. In : *Physical Review A* 103.4 (12 2021), p. 127201.
- [145] F. A. B. F. de MOURA et al. “Localization properties of a one-dimensional tight-binding model with nonrandom long-range intersite interactions”. In : *Phys. Rev. B* 71 (17 2005), p. 174203.
- [146] C. RYLANDS et al. “Many-Body Dynamical Localization in a Kicked Lieb-Liniger Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 124 (15 2020), p. 155302.
- [147] F. D. M. HALDANE. “Effective Harmonic-Fluid Approach to Low-Energy Properties of One-Dimensional Quantum Fluids”. In : *Phys. Rev. Lett.* 47 (25 1981), p. 1840-1843.
- [148] D. C. MATTIS et E. H. LIEB. “Exact Solution of a Many-Fermion System and Its Associated Boson Field”. In : *Journal of Mathematical Physics* 6.2 (12 1965), p. 304-312.
- [149] B. BERTINI et al. “Transport in Out-of-Equilibrium  $XXZ$  Chains : Exact Profiles of Charges and Currents”. In : *Phys. Rev. Lett.* 117 (20 2016), p. 207201.
- [150] O. A. CASTRO-ALVAREDO, B. DOYON et T. YOSHIMURA. “Emergent Hydrodynamics in Integrable Quantum Systems Out of Equilibrium”. In : *Phys. Rev. X* 6 (4 2016), p. 041065.
- [151] I. BOUCHOULE et J. DUBAIL. “Generalized hydrodynamics in the one-dimensional Bose gas : theory and experiments”. In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2022.1 (12 2022), p. 014003.
- [152] M. PANFIL et J. PAWEŁCZYK. “Linearized regime of the generalized hydrodynamics with diffusion”. In : *SciPost Physics Core* 1.1 (12 2019), p. 127201.



- [153] A. LAZARIDES, A. DAS et R. MOESSNER. “Periodic Thermodynamics of Isolated Quantum Systems”. In : *Phys. Rev. Lett.* 112 (15 2014), p. 150401.
- [154] J. RADIĆ et al. “Anderson localization of a Tonks-Girardeau gas in potentials with controlled disorder”. In : *Phys. Rev. Lett.* 111 (12 2013), p. 127201.
- [155] R. SEIRINGER et S. WARZEL. “Decay of correlations and absence of superfluidity in the disordered Tonks-Girardeau gas”. In : *New Journal of Physics* 18.3 (12 2016), p. 035002.
- [156] H. G. VAIDYA et C. A. TRACY. “One-Particle Reduced Density Matrix of Impenetrable Bosons in One Dimension at Zero Temperature”. In : *Phys. Rev. Lett.* 42 (1 1979), p. 3-6.
- [157] M. COLLURA, Spyros SOTIRIADIS et Pasquale CALABRESE. “Equilibration of a Tonks-Girardeau Gas Following a Trap Release”. In : *Phys. Rev. Lett.* 110 (24 2013), p. 245301.
- [158] D. C. JOHNSTON. *Thermodynamics of the nonrelativistic free-electron Fermi gas in one, two, and three dimensions from the degenerate to the nondegenerate temperature regime.* 2020.
- [159] J. M. WILSON et al. “Observation of dynamical fermionization”. In : *Science* 367.6485 (12 2020), p. 1461-1464.
- [160] N. MALVANIA et al. “Generalized hydrodynamics in strongly interacting 1D Bose gases”. In : *Science* 373.6559 (12 2021), p. 1129-1133.
- [161] A. CAO et al. “Prethermal Dynamical Localization and the Emergence of Chaos in a Kicked Interacting Quantum Gas”. In : t. 111. American Physical Society, 2021, p. 127201.
- [162] J. H. S. TOH et al. “Observation of Many-body Dynamical Delocalization in a Kicked Ultracold Gas”. In : t. 111. American Physical Society, 2021, p. 127201.
- [163] S. ROY, J. T. CHALKER et D. E. LOGAN. “Percolation in Fock space as a proxy for many-body localization”. In : *Physical Review B* 99.10 (12 2019), p. 127201.
- [164] C. TIAN et al. “Hidden thermal structure in Fock space”. In : *Physical Review E* 98.6 (12 2018), p. 127201.



**Abstract :**

The Kicked Rotor, paradigm of quantum chaos, is the analog in momentum space of a disordered Anderson system, due to the fact that the system displays the phenomenon of so-called dynamic localization. We study the impact of interactions on dynamical localization in a strongly interacting Bose gas, called the Tonks-Girardeau gas. Exploiting this limit and the Bose-Fermi mapping, we study the physics of a Tonks-Girardeau gas kicked through the reduce one-body density matrix of the system. Due to the similarity of the system with a Bose gas at finite temperature, we characterize the observables of the system, in particular its energy, its momentum distribution, and the correlations. We relate the emerging effective temperature to the localization characteristics of the system, being in a dynamically localized  $N$ -body phase. We also present a characterization of the quasi-periodic version of the Kicked Rotor, analog of a three-dimensional Anderson system, marked by a phase transition between a localized and diffusive regime. We finally analyze the momentum distribution at the critical threshold, and characterize its behavior in its center ( $k = 0$ ), at small and large momenta, marked by three different behaviors.

**Key-words :** Kicked Rotor, quantum chaos, interaction, Tonks-Girardeau gas, cold atoms

**Résumé :**

Le Kicked Rotor, paradigme du chaos quantique, est l'analogie dans l'espace des impulsions d'un système d'Anderson désordonné, de par le fait qu'on y retrouve le phénomène de localisation dites dynamique. Nous étudions l'effet des interactions sur la localisation dynamique dans un gaz de Bose en interaction forte, appelé gaz de Tonks-Girardeau. En exploitant cette limite et la correspondance de Bose-Fermi, nous étudions la physique d'un gaz de Tonks-Girardeau soumis à des kicks au travers de la matrice réduite à un corps du système. Nous trouvons une similitude du système avec un gaz de Bose à température finie, nous caractérisons les observables du système, notamment son énergie, sa distribution en impulsion, ainsi que la cohérence spatiale. Nous relierons la température effective émergente aux caractéristiques de localisation du système, alors dans une phase localisée dynamiquement à  $N$ -corps. Nous présentons également une caractérisation de la version quasi-périodique du Kicked Rotor, analogue d'un système d'Anderson tridimensionnel, marqué par une transition de phase entre un régime localisé et un régime diffusif. Nous analysons enfin la distribution en impulsion au seuil critique, et caractérisons le pic central, et le comportement à petites et grandes impulsions, dotés de trois comportements différents.

**Mots-clés :** Kicked Rotor, chaos quantique, interaction, gaz de Tonks-Girardeau, atomes froids