

# UNIVERSITÉ DE LILLE

École doctorale ED 104 - Sciences de la Matière, du Rayonnement et de l'Environnement

Unité de recherche Laboratoire PhLAM

Thèse présentée par **Farid MADANI**

Soutenue le **5 novembre 2024**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Physique**

Spécialité **Physique des atomes ultrafroids**

## Observation expérimentale d'une transition de phase quantique en dimension quatre avec des atomes ultrafroids

**Thèse dirigée par** Radu CHICIREANU directeur  
Pascal SZRIFTGISER co-directeur

### Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Nicolas CHERRORET	Chargé de recherche – LKB CNRS	
	Romain DUBESSY	Professeur des universités – PIIM Université de Marseille	
<i>Examineurs</i>	Alberto AMO	Directeur de recherche – PhLAM CNRS	président du jury
	Juliette BILLY	Maître de conférence – LCAR Université de Toulouse	
<i>Directeurs de thèse</i>	Radu CHICIREANU	Chargé de recherche – PhLAM CNRS	
	Pascal SZRIFTGISER	Directeur de recherche – PhLAM CNRS	



**OBSERVATION EXPÉRIMENTALE D'UNE TRANSITION DE PHASE QUANTIQUE EN DIMENSION QUATRE AVEC DES ATOMES ULTRAFROIDS****Résumé**

Le modèle d'Anderson étudie le transport d'un électron dans un cristal en présence de désordre. En dimension 1 et 2, ce modèle présente une localisation exponentielle de la fonction d'onde de l'électron dans l'espace des positions, dite localisation d'Anderson. En dimension  $D > 2$ , une transition de phase quantique se manifeste en fonction de la force de désordre, entre un régime où tous les états du système sont localisés (comportement isolant) et un régime où ceux-ci sont délocalisés (comportement métallique). Elle est nommée transition d'Anderson, ou aussi transition métal-isolant. Cette transition de phase a été étudiée à  $D = 3$ , théoriquement et expérimentalement, avec différents systèmes et ses exposants critiques ont été mesurés.

Dans cette thèse, nous utilisons le modèle du Rotateur Frappé atomique (atomic Kicked Rotor), qui appartient à la classe d'universalité du modèle d'Anderson, pour étudier la transition métal-isolant en dimension 4 avec une expérience d'atomes ultrafroids de potassium 41. Cette dimension n'étant pas atteignable physiquement, nous nous servons d'une méthode de génération de dimensions synthétiques, à travers des modulations de l'amplitude d'un potentiel optique pulsé, afin d'augmenter la dimension effective du système. Nous parvenons ainsi à observer cette transition de phase quantique et à mesurer les exposants critiques, celui de la longueur de localisation dans le régime localisé et celui de la constante de diffusion dans le régime délocalisé. Nous mesurons également la fonction d'échelle à deux paramètres, qui caractérise le comportement autour du point critique. Les valeurs obtenues pour les exposants critiques confirment la relation de Wegner (qui relie les deux exposants) et sont en très bon accord avec les simulations numériques du modèle d'Anderson. Elles diffèrent aussi des prédictions de la théorie de champ moyen (la théorie auto-cohérente). Ce travail est la première démonstration expérimentale que  $D = 4$  n'est pas la dimension critique supérieure de la transition d'Anderson.

**Mots clés :** localisation d'anderson, transition d'anderson, chaos quantique, localisation dynamique, atomes ultrafroids, transition de phase quantique

---

### Abstract

The Anderson model studies the transport of an electron in a crystal in the presence of disorder. In dimensions 1 and 2, this model exhibits an exponential localization of the electron's wave function in position space, known as Anderson localization. In dimensions  $D > 2$ , a quantum phase transition appears depending on the strength of the disorder, between a regime where all the states of the system are localized (insulating behavior) and a regime where they are delocalized (metallic behavior). This is called the Anderson transition, also known as the metal-insulator transition. This phase transition has been studied at  $D = 3$ , both theoretically and experimentally, using different systems, and its critical exponents have been measured.

In this thesis, we use the atomic Kicked Rotor model, which belongs to the universality class of the Anderson model, to study the metal-insulator transition in dimension 4, using an experiment of ultracold potassium-41 atoms. Since this dimension is not physically achievable, we use a method to generate synthetic dimensions through modulations of the amplitude of a pulsed optical potential to increase the system's effective dimensionality. This allows us to observe the quantum phase transition and measure the critical exponents - of the localization length on the localized side, and of the diffusion constant on the delocalized side. We also measure the two-parameter scaling function, which characterizes the behavior around the critical point. The values obtained for the critical exponents confirm Wegner's relation (which links the two exponents), are in very good agreement with numerical simulations of the Anderson model, and differ from the predictions of mean-field theory (here the self-consistent theory). This work is the first experimental demonstration that  $D = 4$  is not the upper critical dimension of the Anderson transition.

**Keywords:** anderson localization, ultracold atoms, quantum phase transition, dynamical localization, quantum chaos, anderson transition

---

---

# Sommaire

---

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Sommaire</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Désordre et modèle d'Anderson</b>	<b>5</b>
1.1 Désordre . . . . .	8
1.2 Modèle d'Anderson . . . . .	10
1.2.1 Localisation Faible . . . . .	12
1.2.2 Localisation d'Anderson . . . . .	15
1.2.3 Modèle d'Anderson à $d > 1$ . . . . .	17
1.3 Expériences sur la localisation et la transition d'Anderson . . . .	20
1.4 Universalité . . . . .	22
1.5 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Rotateur Frappé</b>	<b>25</b>
2.1 Rotateur Frappé Classique . . . . .	26
2.1.1 Modèle classique et Application Standard de Chirikov . .	26
2.1.2 Dynamique classique dans l'espace des phases . . . . .	29
2.1.3 Diffusion classique . . . . .	30
2.2 Rotateur Frappé Quantique . . . . .	32
2.2.1 Dynamique quantique . . . . .	34
2.2.2 Simulations numériques . . . . .	35
2.2.3 Localisation dynamique . . . . .	36
2.3 Équivalence entre Rotateur Frappé et modèle d'Anderson . . . .	38
2.4 Rotateur Frappé quasi-périodique . . . . .	40
2.5 Conclusion . . . . .	43

<b>3</b>	<b>Expérience d'atomes ultra-froids de Potassium 41</b>	<b>45</b>
3.1	Structure atomique du $^{41}\text{K}$ . . . . .	46
3.2	Systèmes laser . . . . .	48
3.2.1	Systèmes pour le refroidissement laser . . . . .	48
3.2.2	Asservissement en fréquence . . . . .	50
3.2.3	Banc Laser pour les pièges optiques . . . . .	51
3.3	Séquence expérimentale . . . . .	52
3.3.1	Pièges Magnéto-Optiques 2D et 3D . . . . .	53
3.3.2	Piège Magnéto-Optique Compressé et Mélasse Grise . . . . .	54
3.3.3	Piège Magnétique et évaporation radio-fréquence . . . . .	57
3.3.4	Piège Hybride . . . . .	58
3.3.5	Piège Optique Croisé . . . . .	59
3.4	Système d'imagerie . . . . .	61
3.5	Conclusion . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Dispositif onde stationnaire pulsée</b>	<b>65</b>
4.1	Généralités sur les réseaux optiques . . . . .	66
4.2	Banc Laser Pulsé . . . . .	68
4.2.1	paramètres $K$ et $\tilde{k}$ . . . . .	69
4.2.2	Système laser . . . . .	70
4.2.3	Amélioration de la stabilité de la puissance laser . . . . .	71
4.3	Onde stationnaire pulsée . . . . .	75
4.4	Paramètres de l'onde stationnaire pulsée . . . . .	79
4.4.1	Désaccord du laser pulsé . . . . .	79
4.4.2	Homogénéité de $K$ . . . . .	81
4.4.3	Largeur des impulsions lumineuses . . . . .	82
4.5	Expérience du Rotateur Frappé atomique . . . . .	84
4.5.1	Alignement de l'onde stationnaire . . . . .	85
4.5.2	Détermination expérimentale de $K$ . . . . .	85
4.5.3	Calibration et stabilité de $K$ . . . . .	88
4.5.4	Réalisation expérimentale du Rotateur Frappé atomique . . . . .	89
4.6	Conclusion . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Observation de la transition d'Anderson 4D</b>	<b>93</b>
5.1	Transitions de phases . . . . .	94
5.2	Étude de la transition d'Anderson 4D avec le QP-QKR . . . . .	99
5.3	Réalisation expérimentale . . . . .	104
5.3.1	Mesure de Temps de Vol . . . . .	104
5.3.2	Mesure de $\langle p^2 \rangle$ . . . . .	106
5.3.3	Expérience du Rotateur Frappé quasi-périodique à 3 fréquences . . . . .	109
5.4	Détermination du Point Critique $K_c$ . . . . .	112

---

5.4.1 Paramètre de Binder . . . . .	112
5.4.2 Valeur Expérimentale de $K_c$ . . . . .	115
5.5 Estimation des exposants critiques . . . . .	116
5.5.1 Détermination de la loi d'échelle de $\langle p^2 \rangle$ . . . . .	117
5.5.2 Détermination des exposants critiques : méthode bootstrap	119
5.6 Mesure de la Fonction d'échelle à deux paramètres . . . . .	122
5.7 Conclusion . . . . .	127
<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>



---

## Introduction

---

Le modèle d'Anderson est un modèle de matière condensée introduit par P.W Anderson en 1958 [1], dans lequel il décrit le comportement d'un électron dans un matériau désordonné. Ce dernier est présenté comme un réseau parfaitement périodique dans l'espace, avec des énergies aléatoires sur ses sites. L'électron se meut dans ce réseau en sautant d'un site à l'autre. Anderson a montré qu'en dimension 1 et 2 de ce modèle, la fonction d'onde de l'électron est localisée dans l'espace, avec une décroissance exponentielle, en raison de l'effet du désordre. Ce phénomène est appelé la localisation d'Anderson.

En dimension  $d > 2$ , une transition de phase quantique est attendue dans le modèle d'Anderson [2], nommée la transition d'Anderson, ou la transition métal-isolant. En effet, dépendant de la force de désordre dans le réseau, l'électron passe d'un état délocalisé dans lequel le matériau se comporte comme un métal (faible désordre), à un état localisé dans lequel le matériau se comporte comme un isolant (fort désordre). Cette transition de phase est caractérisée par un exposant critique universel dans chacun des deux régimes, desquels dépend le comportement autour du point critique.

Le développement des méthodes de refroidissement des atomes a rendu possible l'étude expérimentale d'une grande variété de systèmes quantiques complexes, notamment de la matière condensée. Depuis la réalisation du premier gaz d'atomes ultrafroids en 1987 [3], puis du premier condensat de Bose-Einstein en 1995 [4] [5] [6], cette technologie n'a cessé d'évoluer. Elle a offert ainsi, malgré sa complexité, une plateforme pour la réalisation expérimentale des systèmes quantiques difficiles à étudier grâce à de nombreux avantages. Parmi eux, la possibilité de créer des potentiels périodiques en utilisant des faisceaux lasers, permettant de recréer en laboratoire des systèmes très proches des modèles théoriques. Ensuite, les méthodes de détection permettent de mesurer directement la fonction d'onde des atomes, ce qui n'est pas évident dans les expériences avec les

matériaux condensés. Enfin, ces expériences donnent la possibilité de contrôler les interactions interatomiques avec un champ magnétique, à travers les résonances de Feshbach [7], facilitant la prise en compte des effets d'interaction dans l'étude des phénomènes physiques.

Les expériences d'atomes ultrafroids permettent également des techniques expérimentales pour générer des dimensions synthétiques dans les systèmes étudiés. Celles-ci peuvent être utilisées par exemple dans certains cas pour contrôler les symétries du système étudié [8], ou pour induire des effets topologiques [9] [10] [11]. Elles peuvent également être exploitées pour augmenter la dimension effective d'un système au-delà de sa dimension physique [12] [13] [14].

La localisation d'Anderson en dimension 1 a été observée dans l'espace des impulsions (localisation dynamique) avec des expériences d'atomes ultrafroids utilisant le système du Rotateur Frappé atomique [15]. La génération de dimensions synthétiques dans ce système a également permis l'observation de localisation d'Anderson en 2D [16] et la caractérisation de la transition d'Anderson 3D [17]. La localisation et la transition d'Anderson ont aussi été observées dans l'espace des positions avec des expériences d'atomes ultrafroids, utilisant un condensat de Bose-Einstein qui traverse un désordre créé par des potentiels optiques [18] [19] [20].

Dans la suite de ces travaux expérimentaux, nous allons dans cette thèse présenter la première observation et caractérisation expérimentale d'une transition de phase quantique en dimension 4, qui est la transition d'Anderson. Cela est réalisé avec une expérience d'atomes ultrafroids de potassium 41, en générant 3 dimensions synthétiques en plus d'une dimension physique dans le Rotateur Frappé atomique, qui appartient à la classe d'universalité du modèle d'Anderson. Nous mesurerons dans ces expériences les exposants critiques des deux côtés de la transition de phase, ainsi que la fonction d'échelle à deux paramètres qui décrit le comportement au voisinage du point critique.

Ce manuscrit sera structuré de la façon suivante : Nous allons commencer par parler dans le chapitre 1 du modèle d'Anderson, en expliquant les phénomènes de localisation et de transition d'Anderson. Nous montrerons également des observations de ces phénomènes avec différents systèmes appartenant à la classe d'universalité du modèle d'Anderson. Dans le chapitre 2, nous présenterons le système du Rotateur Frappé dans ses versions classique et quantique, en montrant l'équivalence entre la localisation dynamique et la localisation d'Anderson. Le Rotateur Frappé quasi-périodique, dans lequel des dimensions synthétiques sont introduites avec des modulations d'amplitude d'un potentiel optique, sera

---

ensuite présenté, ainsi que sa relation avec le modèle d'Anderson à  $d > 1$ . Dans le chapitre 3, nous allons décrire notre expérience d'atomes ultrafroids de potassium 41, qui sert à réaliser les expériences de Rotateur Frappé Atomique. Dans le chapitre 4, nous présenterons le dispositif conçu pour mettre en place une onde stationnaire pulsée, nécessaire dans le modèle du Rotateur Frappé Atomique, ainsi que les améliorations que nous avons apportées dessus pendant ma thèse. Dans le chapitre 4, nous discuterons des expériences de Rotateur Frappé quasi-périodique à 3 fréquences que nous avons réalisées pour observer et caractériser la transition d'Anderson 4D. Nous verrons également comment nous procédons pour déterminer le point critique de la transition, estimer les exposants critiques et mesurer la fonction d'échelle à deux paramètres de cette transition de phase quantique.



# CHAPITRE 1

---

## Désordre et modèle d'Anderson

---

### Sommaire du présent chapitre

---

<b>1.1 Désordre</b>	<b>8</b>
<b>1.2 Modèle d'Anderson</b>	<b>10</b>
1.2.1 Localisation Faible . . . . .	12
1.2.2 Localisation d'Anderson . . . . .	15
1.2.3 Modèle d'Anderson à $d > 1$ . . . . .	17
<b>1.3 Expériences sur la localisation et la transition d'Anderson</b>	<b>20</b>
<b>1.4 Universalité</b>	<b>22</b>
<b>1.5 Conclusion</b>	<b>23</b>

---

La physique de la matière condensée est un domaine qui étudie les propriétés microscopiques et macroscopiques des états condensés de la matière, tels que les solides et les liquides. Une de ses branches concerne l'étude des phénomènes de transport électronique dans les matériaux condensés. Cela consiste à travailler sur la compréhension du mouvement des porteurs de charges - électrons, trous - dans ces derniers. L'objectif de cette étude du transport est de décrire les propriétés électroniques des matériaux comme les isolants et les conducteurs.

Un des premiers modèles qui a donné une description classique du comportement des électrons dans les matériaux a été le modèle de Drude. En 1900, Paul K. L. Drude a proposé un modèle pour décrire les propriétés électriques

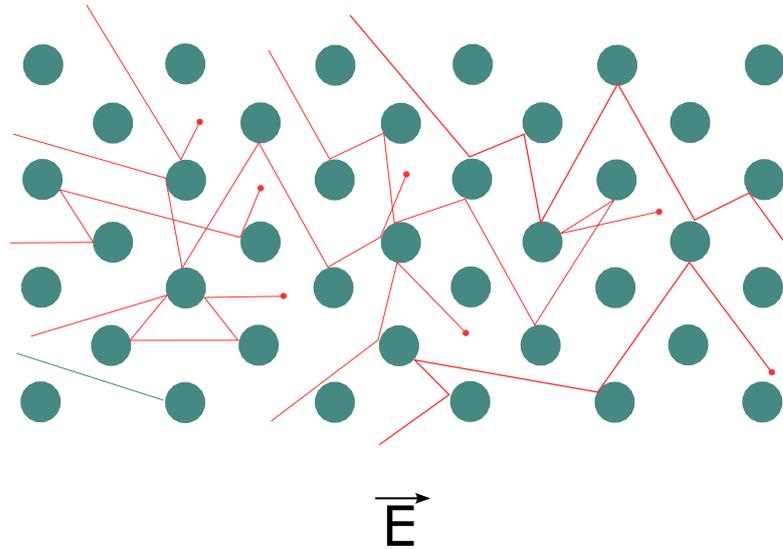


FIGURE 1.1 – Transport des électrons dans un modèle classique : Modèle de Drude dans un réseau en dimension deux.

des matériaux, et plus particulièrement la conductivité [21]\*. Dans ce modèle, Drude considérait les électrons comme des particules classiques ponctuelles qui traversent un matériau solide décrit par un réseau d'atomes. Les électrons forment donc un gaz mis en mouvement par un champ électrique externe, et qui sont freinés dans leur mouvement par des collisions avec les atomes à la manière d'une bille de flipper, comme cela est illustré dans la Figure 1.1. Pendant leur mouvement dans le matériau, la vitesse des électrons devient nulle à chaque collision avec un atome, puis est réaccélérée par le champ électrique jusqu'à la prochaine collision et ainsi de suite. Il est ainsi possible de définir une vitesse moyenne de l'électron dans le matériau, appelée vitesse de dérive :

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m}\tau, \quad (1.1)$$

Où  $q$  et  $m$  représentent respectivement la charge et la masse de l'électron,  $\vec{E}$  le champ électrique et  $\tau$  le temps caractéristique entre les collisions.

À partir de cette vitesse de dérive, on peut écrire une densité de courant électrique  $\vec{j}$  dans le matériau, qui va aussi nous donner une définition de la conduc-

---

\*. L'article original du modèle de Drude a été écrit en allemand, et nous n'avons pas trouvé de traduction officielle du manuscrit en français ou en anglais. Une étude de ce modèle peut être néanmoins retrouvée dans le livre "Solid State Physics" de W. Ashcroft et N. David Mermin [22]

tivité  $\sigma$  dans le modèle de Drude :

$$\vec{J} = \underbrace{\frac{nq^2\tau}{m}}_{\sigma} \vec{E}, \quad (1.2)$$

où  $n$  est la densité de charges. La description du transport électronique issue du modèle de Drude prédit un comportement dit *diffusif* des électrons dans le matériau, avec une conductivité qui dépend de la structure du matériau (qui définit le temps caractéristique de collisions  $\tau$ ), et de sa composition (qui définit la densité de charges libres  $n$ ).

Malgré son utilité pour donner une compréhension intuitive de la phénoménologie, le modèle de Drude ne représente pas une description rigoureuse des phénomènes de transport électronique. En effet, ce dernier considère les électrons comme des particules purement classiques, et ne prend pas en compte leur caractère ondulatoire. Celui-ci sera introduit des années plus tard, avec l'avènement de la physique quantique. Ainsi, le modèle de Drude n'arrive par exemple pas à expliquer le phénomène de supraconductivité dans lequel la résistance d'un matériau s'annule totalement à basse température, ou à décrire les semi-conducteurs et les isolants dans lesquels la structure de bande électronique des matériaux doit être prise en compte.

Une correction au modèle de Drude a été apportée dans le modèle dit de Drude-Sommerfeld (ou modèle de l'électron libre), présenté par Arnold Sommerfeld en 1927 [23]<sup>†</sup>. Ce modèle semi-classique garde la description d'un gaz d'électrons dans un matériau faite par le modèle de Drude, en rajoutant une prise en compte du principe d'exclusion de Pauli pour les particules fermioniques. Cela est effectué en appliquant la statistique de Fermi-Dirac au gaz d'électrons libres. Les changements introduits par ce modèle ont principalement apporté des corrections sur les propriétés de transport thermique, telles que la définition de la capacité calorifique ou la conductivité thermique. Les propriétés de transport électrique sont décrites de la même manière dans les deux modèles, ce qui s'explique par le fait que  $\tau$  ne dépend pas de la distribution du gaz d'électrons.

L'étude des phénomènes de transport électronique a évolué avec le développement des théories de la physique quantique, dans lesquelles le caractère ondulatoire des particules est pris en compte en les représentant par des fonctions d'ondes. C'est dans ce contexte que Félix Bloch a avancé une description du comportement d'un électron dans un cristal parfait [24]; c'est-à-dire un réseau infini d'ions identiques, arrangés périodiquement. Ces derniers forment des

<sup>†</sup>. Une étude de ce modèle peut être retrouvée dans le livre "Solid State Physics" de W. Ashcroft et N. David Mermin [22]

puits de potentiel périodiques où l'électron peut être piégé, et entre lesquels il peut "sauter" par effet tunnel résonant. Ainsi, en tenant compte de la symétrie par translation du problème, le théorème de Bloch permet d'obtenir les états propres d'énergie d'un électron dans un cristal parfait, qui peuvent être écrits sous la forme :

$$\Psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

où  $n$  est l'indice d'un site dans le réseau,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde, et  $u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})$  est une fonction périodique avec la période du cristal. Dans le cas d'un réseau parfaitement périodique, les états de Bloch  $\Psi_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})$  sont totalement délocalisés dans le cristal, et le matériau se comporte ainsi comme un conducteur parfait. Cette description montre que l'image que nous avons vue dans le modèle de Drude (Figure 1.1), n'est pas correcte, car les collisions des électrons ne se produisent pas avec les atomes, mais avec les impuretés qui peuvent être présentes dans un cristal.

Ce modèle de cristal parfait est intéressant pour décrire certains phénomènes comme le transport dans les semi-conducteurs. Il s'agit néanmoins d'un modèle "idéaliste" qui néglige certains effets comme les interactions des électrons entre eux, ou les interactions des électrons avec les impuretés d'un cristal. Ces effets peuvent amener à des changements importants des propriétés de certains matériaux, qui acquièrent une résistance non nulle, ou même deviennent isolants (la résistance tend vers l'infini). Un exemple est celui des isolants de Mott, où les interactions fortes entre les électrons introduisent un écart d'énergie lorsque deux électrons se trouvent au même site du réseau - ce qui brise la nature résonante de l'effet tunnel, menant à un caractère isolant. Un autre exemple de la non-validité du modèle de Bloch, qui va nous intéresser dans ce manuscrit, concerne les imperfections des cristaux eux-mêmes. En effet, les structures cristallines des matériaux condensés que l'on trouve dans la nature sont truffées d'impuretés, qui interrompent, totalement ou partiellement, la périodicité de leurs réseaux. Ce *désordre* dans les cristaux, que nous discuterons dans la section suivante, peut dans certains cas changer de manière significative les propriétés de transport électronique des matériaux.

## 1.1 Désordre

Le désordre dans le domaine de la matière condensée représente une présence accrue d'imperfections et/ou d'irrégularités dans un cristal, au point où l'invariance par translation est plus ou moins brisée. Ces défauts dans la structure des cristaux peuvent se présenter de diverses manières, dépendant du type

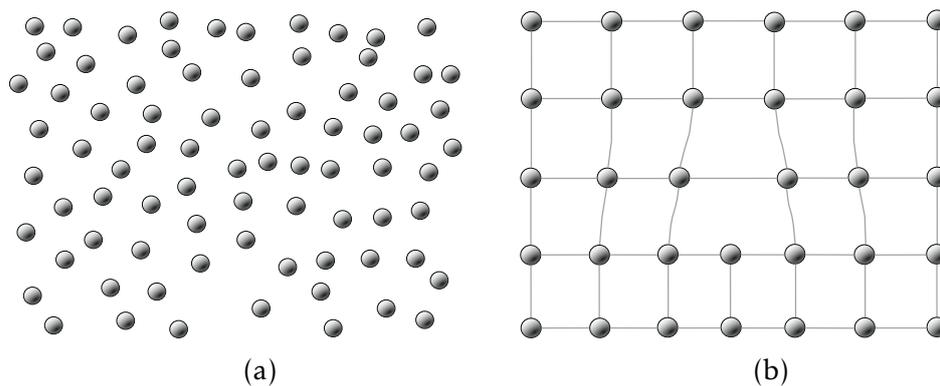


FIGURE 1.2 – a) Désordre structurel, défauts ponctuels b) Désordre structurel, défaut linéaire : dislocation coin

de matériaux considérés. En partant du modèle du cristal parfait, on peut présenter deux types essentiels de désordre : le *désordre Structurel* et le *désordre Compositionnel*.

Le désordre structurel est un désordre où la géométrie du cristal parfait est transformée, donnant comme résultat un réseau où il n'y a pas de périodicité dans les positions qu'occupent les atomes. Cela peut être causé par exemple par des défauts ponctuels, où le réseau présente des sites vides à certains endroits, donnant lieu à une distribution aléatoire des atomes dans le réseau comme illustré dans la Figure 1.2a. C'est notamment le cas des matériaux dits : amorphes, comme le verre, qui ne représentent aucune structure atomique ordonnée.

Un autre exemple de désordre structurel est celui des défauts de ligne, aussi appelés dislocations, qui sont présents dans les cristaux où les plans atomiques ne sont pas parfaitement alignés (Figure 1.2b). Ce type de défaut est généralement observé dans les métaux et les alliages métalliques.

Le désordre compositionnel, lui, désigne une irrégularité du type d'atomes ou de molécules composant un cristal. Ainsi, il existe des matériaux dans lesquels on peut trouver une composition aléatoire d'atomes différents sur les sites de leur réseau cristallin (Figure 1.3). Un exemple courant de ce type de désordre est l'alliage de bronze, dans lequel, typiquement, les atomes d'étain Sn peuvent se substituer à une partie des atomes de cuivre Cu dans le réseau cristallin de ce dernier.

De cette composition aléatoire des atomes dans les matériaux, peut résulter une distribution aléatoire des propriétés des atomes. Ainsi, selon les types d'atomes présents dans le réseau cristallin d'un matériau, on peut par exemple avoir une distribution aléatoire de moments magnétiques, induisant un *désordre magnétique*, ou encore une répartition aléatoire d'électrons et de trous, induisant un *désordre électronique*.

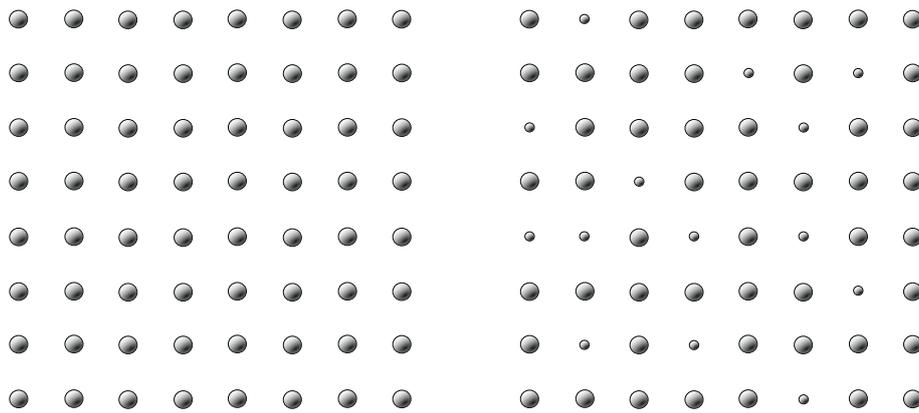


FIGURE 1.3 – À gauche un cristal parfait où le même type d'atomes occupe chaque site. À droite un exemple de cristal avec un désordre compositionnel où les sites sont occupés aléatoirement par deux atomes différents.

La coexistence de plusieurs types de désordres, cumulée en plus avec d'autres effets comme les interactions, complique en réalité considérablement la compréhension des propriétés électroniques des matériaux 'réels'. Cela suggère le développement de modèles théoriques plus simples, qui prennent en compte ces désordres, ainsi que des systèmes physiques simplifiés pour les tester. Loin de l'idée de représenter parfaitement des matériaux réels, ces modèles ont un intérêt pour comprendre des phénomènes physiques qui peuvent se manifester dans les systèmes désordonnés. Le modèle d'Anderson que nous allons discuter dans la suite de ce manuscrit est un exemple de ces modèles de systèmes désordonnés, et a été développé pour comprendre l'effet du désordre sur le transport électronique.

## 1.2 Modèle d'Anderson

Le modèle d'Anderson a été introduit en 1958 par le physicien américain P.W.Anderson (prix Nobel de physique en 1977) [1]. Il consiste à étudier les propriétés de transport électronique dans un cristal parfaitement périodique spatialement, avec des potentiels aléatoires sur ses sites. Ce modèle peut être étudié avec une description relativement simple qui est l'approximation des liaisons fortes (*'tight binding approximation'*). Cette description considère la fonction d'onde de l'électron comme figée autour d'atomes individuels, avec une certaine probabilité de "saut" (*'hopping'*) vers les sites voisins les plus proches,

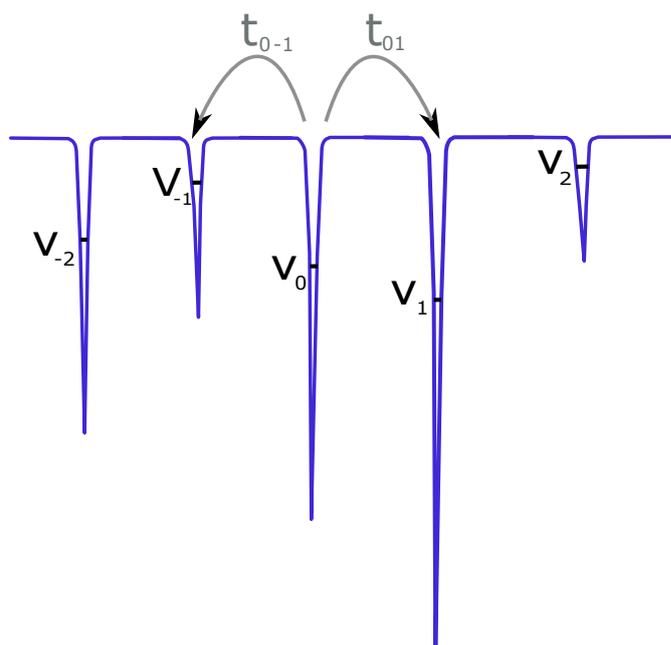


FIGURE 1.4 – Schéma d'un modèle de tight binding avec des énergies aléatoires sur les sites : modèle d'Anderson en dimension une.

comme illustré dans la Figure 1.4.

Ainsi, l'hamiltonien du système peut être écrit dans une base d'états localisés dans des puits de potentiels individuels  $|i\rangle$  :

$$H = \sum_i V_i |i\rangle \langle i| + \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij} |i\rangle \langle j|, \quad (1.4)$$

Où  $V_i$  sont les potentiels correspondant aux sites  $i$ ,  $t_{ij}$  le couplage par effet tunnel entre les sites  $i$  et  $j$ , et la somme sur  $\langle i,j \rangle$  ne portant que sur les sites immédiatement voisins (Dans la suite de ce chapitre  $t = t_{ij}$ ). Le désordre est introduit dans ce modèle de liaisons fortes, en considérant des énergies sur site distribuées de façon aléatoire, suivant une certaine distribution de probabilité. Les potentiels  $V_i$  sont ainsi pris aléatoirement dans un ensemble  $\{V_1, V_2, V_3, \dots\}$ . Dans le modèle d'origine [1], les énergies sur site  $V_i$  sont distribuées aléatoirement, de façon uniforme dans un intervalle de largeur  $W$ , appelée "*amplitude du désordre*", selon la formule :

$$\begin{cases} P(V_i) = \frac{1}{W} & \text{si } -\frac{W}{2} \leq V_i \leq \frac{W}{2} \\ P(V_i) = 0 & \text{si } |V_i| > \frac{W}{2} \end{cases} \quad (1.5)$$

Le ratio  $\frac{W}{t}$ , appelé "*force du désordre*", caractérise à lui seul le désordre, dont dépend le comportement d'un électron dans le modèle d'Anderson. En effet, le comportement de l'électron dans ce système est le résultat de la compétition entre l'amplitude de saut 't' qui favorise le passage de l'électron d'un site à l'autre du réseau par effet tunnel résonnant, et 'W' qui diminue la probabilité de résonance entre l'électron et les puits voisins, ce qui donc empêche le saut de l'électron entre les sites.

Anderson montre dans son article qu'en dimension 1 de son modèle, l'électron est totalement localisé dans le cristal, quelle que soit la force du désordre  $\frac{W}{t}$ . Cette localisation est caractérisée par une modification significative des états propres du système, qui prennent une forme exponentiellement décroissante à longue distance, avec une certaine longueur caractéristique de cette décroissance dite *longueur de localisation*  $\ell$ . Comparés aux fonctions de Bloch, complètement délocalisées dans le système, ces états propres occupent ainsi une étendue spatiale finie qui peut être plus petite que la taille de l'échantillon considéré, et le système se comporte alors comme un isolant. Ce phénomène est appelé *Localisation d'Anderson* (parfois aussi dit "*Localisation Forte*").

Le phénomène de la localisation d'Anderson vient de la nature ondulatoire des particules quantiques (ici les électrons). En effet, lors de sa diffusion dans un cristal, un électron peut emprunter différents chemins distincts pour aller d'un point à un autre. Les interférences (destructives à longue distance) entre ces chemins sont à l'origine du phénomène de localisation. De façon générale, il s'avère compliqué de prendre en compte de façon exacte ces effets d'interférences dans l'étude théorique d'un système. Il est néanmoins possible d'appliquer certaines approches dans des régimes particuliers, tels que la *localisation faible*, ou des approximations dans les cas plus complexes, comme dans la localisation d'Anderson. Nous allons, dans les paragraphes suivants, discuter certaines de ces approches, en commençant par la localisation faible pour aller vers la localisation d'Anderson.

### 1.2.1 Localisation Faible

Pour décrire le phénomène de la localisation faible, considérons un paquet d'onde localisé à un point A d'un cristal désordonné, et qui se propage pour aller à un point B. Ce cristal est composé d'atomes répartis aléatoirement, qui font office de diffuseurs. Nous nous intéressons dans ce système à la probabilité de présence du paquet d'onde au point B, en partant du point A. Nous devons pour cela prendre en compte tous les chemins de diffusion élastique '*i*' possibles entre les deux points, auxquels on assigne des amplitudes de probabilité ' $A_i$ ' (Figure 1.5). Cela peut être aussi vu comme l'image semi-classique d'une onde qui peut

se propager du point A au point B en suivant plusieurs chemins possibles à la fois.

Pour déterminer la probabilité de présence du paquet d'onde en B en partant de

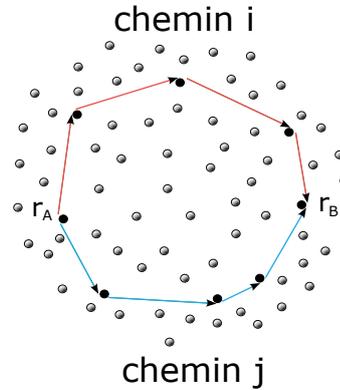


FIGURE 1.5 – Particule partant d'un point A vers un point B dans un cristal. Deux chemins possibles i (en rouge) et j (en bleu) sont représentés.

A, nous prenons en compte tous les chemins de diffusion possibles en calculant le carré de la somme de leurs amplitudes de probabilité :

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) &= \left| \sum_i A_i(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) \right|^2 \\
 &= \underbrace{\sum_i |A_i(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)|^2}_{P_{Class}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} A_i(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) A_j^*(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)}_{P_{Interf}}, \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Où  $\mathbf{r}_A$  et  $\mathbf{r}_B$  sont les vecteurs position aux points A et B. La première partie  $P_{Class}$  de l'expression (1.6) correspond à la contribution classique à la probabilité, et la seconde partie  $P_{Interf}$  est un terme d'interférences entre les différents chemins possibles. Ce terme interférentiel est généralement nul car il ne survit pas à la somme sur les différents chemins. Cela s'explique par le fait que les événements de diffusion sont aléatoires le long de chaque chemin, ce qui fait que la phase globale associée à chaque chemin est aussi aléatoire. On a donc un phénomène de "brouillage de phase" qui fait tendre vers zéro le terme  $P_{interf}$ , lorsque la distance entre A et B devient grande. Le problème est ainsi bien décrit dans la plupart des cas par la partie classique de la probabilité  $P(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$ .

Il existe cependant une situation dans laquelle cette image est fautive. C'est le cas lorsque le point final B est le même que le point initial A du paquet d'onde

( $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$ ) - autrement dit lorsqu'on s'intéresse à la probabilité que la particule revienne à son point de départ. Cette possibilité traduit l'existence de boucles de diffusion fermées qui peuvent être parcourues dans les deux directions (Figure 1.6). La probabilité  $P(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A)$ , qui est maintenant la probabilité de

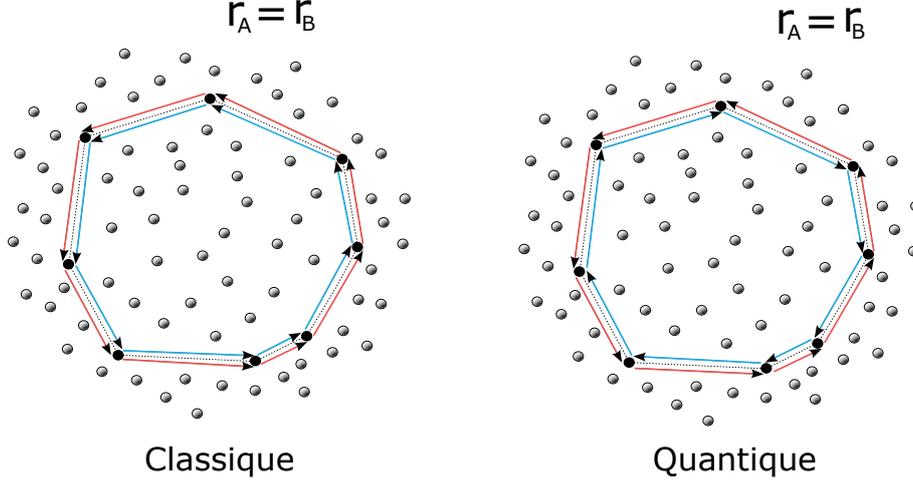


FIGURE 1.6 – À gauche, contribution classique à la probabilité de retour à l'origine. À droite, contribution interférentielle à la probabilité de retour à l'origine.

retour à l'origine, devient :

$$P_{Quant}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A) = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2A_1A_2^* = 4|A|^2, \quad (1.7)$$

avec  $A_1 = A_2 = A$  (car les chemins sont géométriquement équivalents<sup>‡</sup>), où les indices 1 et 2 représentent les deux directions de parcours de la boucle de diffusion.

La probabilité de retour à l'origine classique étant donnée par l'expression :  $P_{Class}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A) = 2|A|^2$ , on en déduit que :

$$P_{Quant}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A) = 2P_{Class}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A) \quad (1.8)$$

La probabilité quantique de retour à l'origine est deux fois la probabilité classique de retour à l'origine, ce qui montre que le système est moins diffusif dans le cas quantique. Ce résultat se traduit aussi sur la constante de diffusion, qui

<sup>‡</sup>. Valable dans les systèmes invariants par renversement du temps

caractérise la diffusion dans un cristal, avec une correction due aux interférences :

$$0 < D = D_0 - \delta D < D_0, \quad (1.9)$$

Avec  $D_0$  la constante de diffusion classique et  $\delta D$  la correction due aux interférences, qui est proportionnelle à la probabilité de retour à l'origine. Ce phénomène de ralentissement du transport dans le cas quantique est appelé la localisation faible, et a comme conséquence la diminution de la conductivité comparée aux modèles purement classiques (ex : Drude).

### 1.2.2 Localisation d'Anderson

Malgré la diminution de la constante de diffusion dans le cas de la localisation faible, la particule va néanmoins se diffuser à l'infini dans le cristal. Mais jusque-là nous n'avons considéré pour la particule (paquet d'onde) que des boucles simples comme chemins de diffusion. Nous avons de cette façon pris en compte seulement un type de contribution d'interférences à la constante de diffusion car c'est celle qui domine à faible désordre (premier ordre d'un développement de la constante de diffusion en faible désordre).

Cette image est moins pertinente dans le régime de fort désordre, où le libre

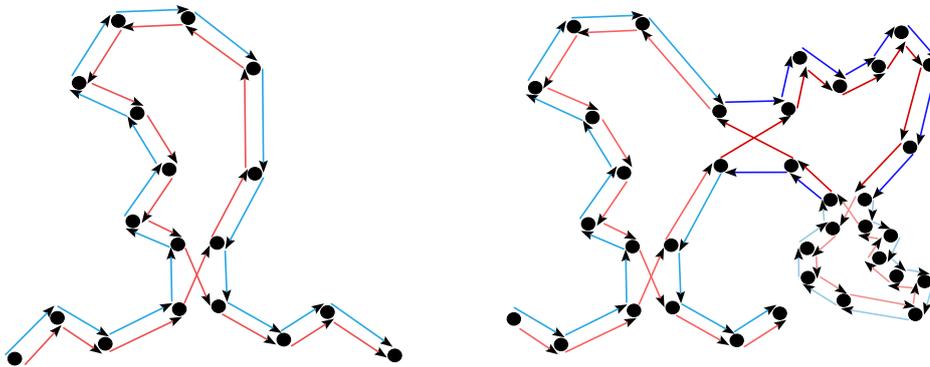


FIGURE 1.7 – À gauche, boucle de diffusion simple (faible désordre). À droite, boucle de diffusion complexe (fort désordre).

parcours moyen  $l_e$  de la particule quantique dans le cristal devient du même ordre de grandeur que sa longueur d'onde de De Broglie  $\lambda_{dB}$ . Dans ce cas, il devient nécessaire de prendre en compte tous les termes d'interférences. Cela se traduit par la considération des boucles de diffusion plus complexes (boucles imbriquées), comme illustré dans la Figure 1.7. Ainsi, Anderson a montré dans

son article [1] qu'en tenant compte de ces termes d'interférences, la constante de diffusion tend vers zéro et l'électron est totalement figé dans l'espace. Ceci est le phénomène de la localisation forte, où la fonction d'onde de l'électron est localisée dans l'espace avec une décroissance exponentielle (Figure 1.8) :

$$|\psi(\mathbf{r})| \sim \exp(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/\ell), \quad (1.10)$$

avec  $\ell$  la longueur de localisation. Cette quantité  $\ell$  désigne la longueur sur laquelle est diffusé l'électron avant que sa fonction d'onde ne soit localisée. Dans le cas du modèle d'Anderson en dimension 1, tous les états du système sont exponentiellement localisés quelle que soit la force de désordre dans le cristal.

Du point de vue théorique, les termes d'interférences plus complexes sont de plus en plus compliqués à calculer de façon exacte (notamment en dimension  $> 1$ ) quand le désordre dans le système augmente. Deux théories sont venues pour apporter une autre description du modèle d'Anderson. La première est la théorie d'échelle à un paramètre développée en 1979 par les nommés "Gang of Four" (E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello et T. V. Ramakrishnan) [2], qui décrit le modèle d'Anderson en résonnant sur un paramètre de conductance adimensionnée 'g'. Nous verrons plus en détail cette théorie dans la section suivante. La deuxième est la *théorie auto-cohérente (Self-Consistent Theory)*, qui a

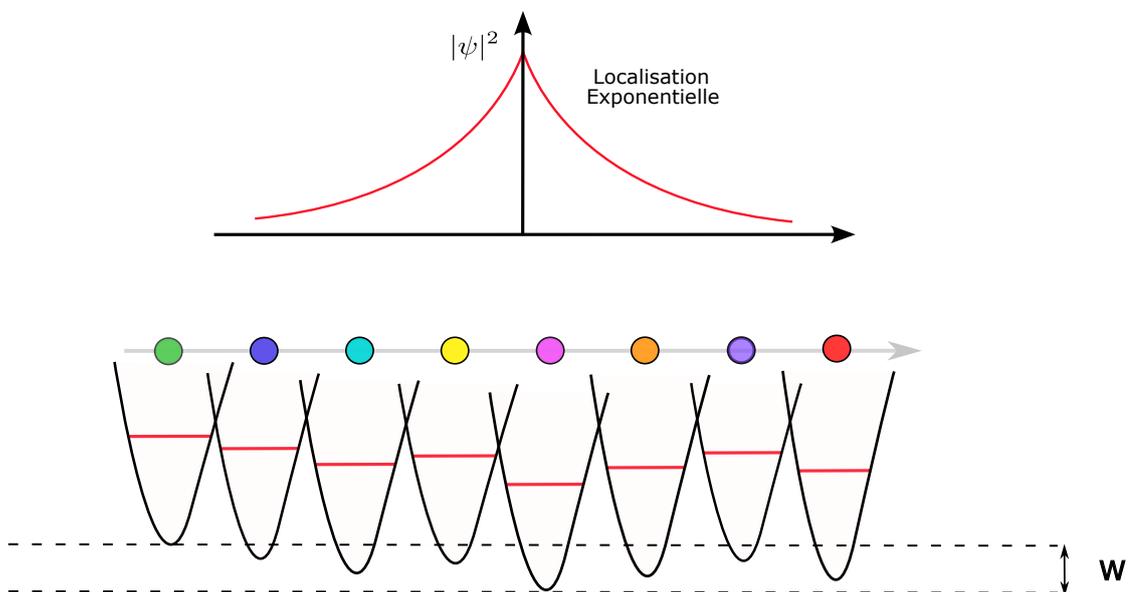


FIGURE 1.8 – Localisation d'Anderson en 1D : décroissance exponentielle de la fonction d'onde de l'électron dans l'espace

été présentée en 1980 par P.Wölfle et D.Vollhardt [25] [26]. C'est une approche diagrammatique qui tient compte de quelques termes interférentiels supplémentaires (boucles imbriquées) dans le régime de fort désordre. Elle apporte une description du modèle d'Anderson mais avec des limitations à dimension  $d > 1$ , que nous verrons également dans la section suivante.

### 1.2.3 Modèle d'Anderson à $d > 1$

L'existence de la localisation dans le modèle d'Anderson dépend, de manière intuitive, de la compétition entre la diffusion, qui favorise l'étalement de la fonction d'onde, et les interférences, qui au contraire tendent à la localiser dans une région restreinte de l'espace. À mesure que la dimension du système augmente, le nombre de chemins possibles pour la diffusion de l'électron dans le cristal augmente aussi, et la diffusion devient plus favorable par rapport à la localisation. Cela implique une tendance à la localisation qui dépend de la dimension du système. C'est dans ce sens par exemple qu'Anderson et ses collaborateurs [2] ont suggéré que dans le modèle d'Anderson en dimension 2 (2D), tous les états du système restent localisés quel que soit le désordre (comme dans le cas de la dimension 1), mais avec une longueur de localisation  $\ell$  qui augmente exponentiellement avec l'inverse de la force du désordre. Cela a comme conséquence une longueur de localisation en 2D qui peut devenir très grande pour des forces du désordre "intermédiaires", jusqu'à parfois être du même ordre, ou plus grande que la taille des échantillons, ce qui peut "masquer" les effets de la localisation. Dans le modèle d'Anderson à trois dimensions (3D), la dépendance de la localisation à la force de désordre est encore plus présente, et les états du système ne sont plus localisés pour toute force de désordre. En effet, dans ce cas, il existe une transition de phase quantique, dépendant de la force du désordre dans le système, entre un régime diffusif (où le cristal correspond à un métal) et un régime localisé (où le cristal correspond à un isolant). Cette transition de phase est appelée la *Transition Métal-Isolant* ou aussi la *Transition d'Anderson* [27]. Elle peut aussi être comprise dans une description où la force de désordre est constante (correspondant à  $l_e \approx \lambda_{dB}$  selon le critère de Ioffe-Regel [28]), et où les états du système (d'énergies  $E$ ) sont séparés en états localisés et états délocalisés, par une énergie seuil  $E_c$  appelée "seuil de mobilité" (*Mobility Edge*). Nous allons dans la suite considérer la description dans laquelle la force du désordre  $\frac{W}{t}$  est variée, pour décrire la transition d'Anderson.

La théorie d'échelle de localisation [2][27][29] est venue apporter une explication à la transition d'Anderson en faisant une analogie avec les transitions de phases de second ordre. Celles-ci sont caractérisées dans le régime critique

(autour de la transition) par l'invariance d'échelle, où les propriétés du système considéré varient de la même façon à toutes les échelles. Cette invariance d'échelle implique une variation en loi de puissance de ces propriétés dans le régime critique.

L'hypothèse de la théorie d'échelle de localisation consiste en l'existence d'une loi d'échelle à un seul paramètre (en dimension quelconque) qui peut décrire la transition d'Anderson. Pour cela, le raisonnement est basé sur la conductance<sup>§</sup> adimensionnée qui s'écrit dans un système de taille  $L^d$  comme suit :

$$g(L) = L^{d-2} \sigma(L) \hbar / e^2, \quad (1.11)$$

où  $\sigma$  est la conductivité du système,  $d$  la dimension,  $\hbar$  la constante de Planck réduite et  $e$  la charge de l'électron. La fonction d'échelle  $\beta$  qui ne dépend que de la conductance adimensionnée  $g(L)$  peut décrire à elle seule la transition d'Anderson :

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L}, \quad (1.12)$$

Pour la comprendre, on peut commencer par regarder les limites asymptotiques, à très grand et à très petit  $g$ , de cette fonction d'échelle, qui décrit le comportement d'un électron dans les deux phases de la transition d'Anderson. Dans la phase métallique (diffusion), la conductivité est constante ( $\sigma(L) = \sigma_0$ ) et  $g(L) \sim L^{d-2}$ , donnant :

$$\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} d - 2. \quad (1.13)$$

Dans la phase isolante (localisation exponentielle)  $g(L) \sim e^{-L/\xi}$ , on obtient :

$$\beta(g) \underset{g \rightarrow 0}{\sim} \ln g. \quad (1.14)$$

Les deux équations 1.13 1.14 correspondent à ce que l'on peut voir sur la Figure 1.9, où  $\beta(g)$  est tracé en fonction de  $\ln g$ . Ainsi, en dimension 1 et 2,  $\beta(g) < 0$ , ce qui veut dire que  $g \rightarrow 0$  quand  $L$  augmente, montrant ainsi que le transport des électrons est freiné (localisation). En dimension 3,  $g_c$  représente une valeur critique de la conductance adimensionnée où on voit un passage de  $\beta(g)$  d'une valeur négative à une valeur positive, ce qui correspond au passage d'une phase isolante (localisation) à une phase métallique (diffusion) décrivant ainsi la transition d'Anderson.

Comme les transitions de phases de second ordre, la transition d'Anderson est caractérisée par des exposants critiques des deux côtés du point critique  $W_c$  (valeur de l'amplitude du désordre pour laquelle la transition survient). Deux

---

§. définie comme l'inverse de la résistance électrique

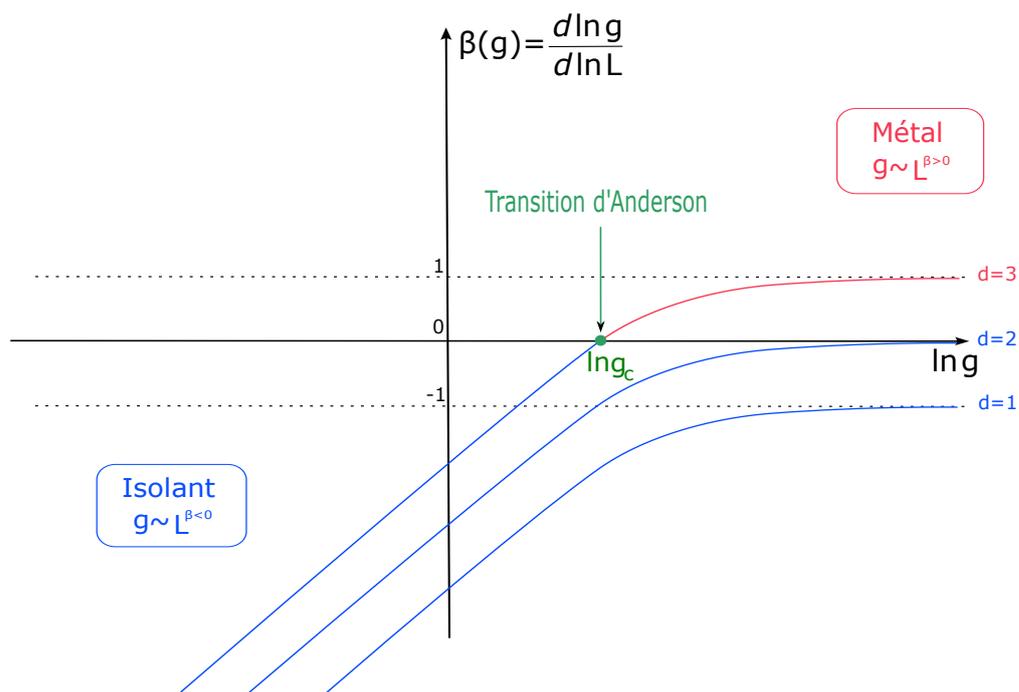


FIGURE 1.9 – Comportement qualitatif de la fonction d'échelle  $\beta(g)$  en fonction de la conductance adimensionnée  $\ln(g)$  à 1, 2 et 3 dimensions.

exposants sont ainsi définis,  $s$  dans la phase diffusive (pour la constante de diffusion  $D$ ), et  $\nu$  dans la phase localisée (pour la longueur de localisation  $\ell$ ) :

$$D \propto |W - W_c|^s \quad \text{pour} \quad W \leq W_c, \quad (1.15)$$

$$\ell \propto |W - W_c|^{-\nu} \quad \text{pour} \quad W \geq W_c, \quad (1.16)$$

Ces exposants ne sont pas calculables de façon exacte, à cause de la complexité du traitement analytique du modèle d'Anderson dans le régime de fort désordre. Il existe néanmoins une relation entre ces deux exposants critiques, qui peut simplifier leur étude dans certains cas, notamment dans les simulations numériques, dite relation de Wegner (ou loi de Wegner) [29] [30] :

$$s = \nu(d - 2) \quad (1.17)$$

La théorie auto-cohérente mentionnée précédemment prévoit elle aussi une localisation d'Anderson en dimension 2, et une transition métal-isolant en dimension 3 du modèle d'Anderson [31]. Mais malgré l'utilité de la description qualitative et des résultats prédits par la théorie auto-cohérente, il se trouve qu'elle n'est pas parfaite. En effet, les valeurs des exposants critiques calculées

avec cette dernière pour la transition métal-isolant 3D :  $s = 1$ ,  $\nu = 1$ , ne sont pas compatibles avec celles calculées dans les études numériques du modèle d'Anderson 3D ( $s = \nu = 1.59 \pm 0.03$ ) et [32] [33], et celles mesurées expérimentalement ( $s = \nu = 1.63 \pm 0.05$ ) [34].

À dimension  $d > 3$ , bien que la théorie auto-cohérente prédise une transition d'Anderson, elle reste encore en désaccord avec les simulations numériques du modèle d'Anderson. En effet, cette théorie prédit une dimension critique supérieure  $\mathbb{F}$  à  $d = 4$  pour la transition d'Anderson, avec des exposants critiques  $\nu = 1/2$  et  $s = 1$  (pour tout  $d \geq 4$ ). Du côté des simulations numériques du modèle d'Anderson à  $d = 4$ , les exposants critiques obtenus ( $\nu = 1.156 \pm 0.014$ ,  $s \simeq 2.312 \pm 0.028$ ) [35], sont différents de ceux prédits par cette théorie. Ces simulations montrent aussi que  $d = 4$  n'est pas la dimension critique supérieure de la transition d'Anderson car les exposants critiques obtenus jusqu'à  $d = 6$  sont différents [36] [35].

### 1.3 Expériences sur la localisation et la transition d'Anderson

Nous allons, dans cette section, discuter de manière non exhaustive des expériences dans lesquelles la localisation ou la transition d'Anderson ont été observées, ainsi que de leurs limitations.

Différentes expériences ont été réalisées afin d'observer la localisation d'Anderson avec des ondes classiques. La difficulté première dans ces expériences est de réussir à avoir une forte diffusion des ondes classiques dans le système considéré sans une grande dissipation, ce qui, dans le cas contraire, pourrait causer des erreurs d'interprétation des phénomènes observés. Nous pouvons pour cela prendre l'exemple des ondes électromagnétiques qui ont constitué un choix pertinent pour ces expériences de localisation d'ondes classiques, du fait de l'absence d'interactions entre les photons. Une première expérience montrant une localisation d'Anderson avec des ondes de lumière en dimension trois [37], mesurait l'intensité lumineuse transmise à travers une poudre de semi-conducteurs d'indice de réfraction très élevé. La signature attendue de la localisation d'Anderson dans ce système (et qui a été observée dans cette expérience) consiste en ce que dans un régime localisé, le coefficient de transmission diminue exponentiellement avec l'épaisseur de l'échantillon considéré. À la transition d'Anderson, ce

---

$\mathbb{F}$ . La dimension critique supérieure est la dimension spatiale au-delà de laquelle les valeurs des exposants critiques d'une transition de phase restent constantes et égales à celles prédites par la théorie du champ moyen, car les fluctuations deviennent négligeables dans le système.

coefficient de transmission varie comme l'inverse de l'épaisseur de l'échantillon au carré. Ces résultats observés ont été toutefois contestés dans un article arguant que les signatures mesurées peuvent aussi être interprétées avec un système de diffusion classique de la lumière avec absorption, et qu'elles ne constituaient pas une mise en évidence de la localisation d'Anderson [38]. De la même manière, l'observation de la localisation et de la transition d'Anderson a été affirmée dans deux autres expériences où la transmission lumineuse était mesurée [39] [40]. Elle a été par la suite contestée [41], puis réfutée par l'auteur de l'un des deux articles cités [42]. La localisation d'Anderson a été néanmoins observée en dimension deux en procédant d'une manière différente [43] : faire se propager la lumière dans un matériau avec un désordre dans la direction transverse à celle de la propagation. La mesure se fait dans ce cas sur la taille du faisceau lumineux utilisé, pour détecter quand son allongement dans la direction transverse s'arrête en fonction de la distance de propagation, ce qui est la signature de la localisation d'Anderson dans ce système. C'est ainsi qu'il a été possible de s'affranchir de la limitation qui vient de l'absorption.

Cette même méthode de "localisation transverse" a été utilisée pour observer la localisation et la transition d'Anderson avec des ondes ultra-sonores en dimensions trois [44] [45], en mesurant l'étalement de ces dernières dans la direction transverse à celle de la propagation, en fonction du désordre induit dans le matériau.

En ce qui concerne les ondes de matière (ou ondes quantiques), des expériences avec des systèmes électroniques puis avec les plateformes d'atomes ultrafroids ont été réalisées pour observer la localisation et la transition d'Anderson. Pour les systèmes électroniques, les expériences avec des gaz d'électrons [46] [47] ont permis l'observation des effets de la localisation d'Anderson et de la transition métal-isolant. Ces expériences réalisaient des mesures non pas de fonctions d'ondes dans l'espace des positions qui ne sont pas accessibles dans ce genre de systèmes, mais des mesures sur les propriétés de transport telles que la conductance. Malgré cela, la présence des interactions entre les électrons qui agissent de manière non triviale sur la localisation [48] [49] [50] complique l'interprétation des résultats des expériences. C'est dans ce sens, par exemple, que les exposants critiques de la transition d'Anderson mesurés dans ce type d'expériences ne correspondent pas à ceux prédits par les simulations numériques.

Le développement des méthodes de refroidissement des atomes a offert une plateforme sur laquelle l'étude du modèle d'Anderson pouvait être réalisée, avec pour avantage des interactions inter-atomiques relativement faciles à contrôler. Ainsi, différentes expériences utilisant des atomes à très basses températures ont été mises en place afin de montrer la localisation et la transition d'Anderson.

Une première observation de la localisation d'Anderson en dimension une, avec des atomes ultrafroids, a été réalisée dans deux expériences en 2008 : à Palaiseau [18], et à Florence [19]. Ces expériences consistent à faire passer un condensat de Bose-Einstein de densité atomique faible (pour négliger les interactions) dans un guide d'onde en 1D, dans lequel un désordre est créé et contrôlé avec un *speckle*. Les mesures dans cette expérience ont été réalisées par imagerie du condensat de Bose-Einstein, sur lequel a été observée une localisation exponentielle dans l'espace des positions.

Trois expériences avec des atomes ultrafroids dans des speckles optiques en 3D ont également permis l'observation de la transition d'Anderson en dimension trois : à Urbana-Champaign en 2011 [51], à Palaiseau en 2012 [20], et à Florence en 2015 [52]. La transition de phase a été révélée par la coexistence d'atomes dans des états diffusifs et localisés, qui sont séparés par une énergie critique (seuil de mobilité). Cette énergie n'a néanmoins pas pu être mesurée directement sur ces expériences et le régime critique de la transition n'a pas été étudié. Cela s'explique par la dépendance du seuil de mobilité dans ces cas à la distribution des énergies des atomes, qui est élargie par l'introduction du désordre avec le speckle.

La simulation quantique constitue également un outil pour l'étude du modèle d'Anderson avec des atomes ultra-froids. Un exemple de cela est le modèle du Rotateur Frappé Atomique. Ce système, relativement simple à mettre en place et à contrôler, a servi à l'observation de la localisation d'Anderson en dimension une et en dimension deux [15] [16], à travers le phénomène de la localisation dynamique, qui est une localisation exponentielle de la fonction d'onde dans l'espace des impulsions. Ce modèle a également été utilisé pour l'observation de la transition d'Anderson en dimension trois. Par rapport aux expériences présentées dans le paragraphe précédent, il présente l'avantage que le paramètre contrôlant la transition d'Anderson est indépendant de l'énergie des atomes. Cela a permis d'explorer le régime critique de cette transition de phase et de mesurer l'exposant critique de la longueur de localisation. La valeur obtenue est en très bon accord avec les prédictions des simulations numériques du modèle d'Anderson [17]. C'est sur ce système que nous allons nous appuyer dans ce manuscrit pour étudier le modèle d'Anderson.

## 1.4 Universalité

Malgré la formulation initiale de la Localisation d'Anderson dans un contexte lié au domaine de la matière condensée, il a été réalisé que ce phénomène n'est pas uniquement présent lors du mouvement d'un électron dans un cristal désor-

donné, comme le montrent les expériences présentées dans la section précédente. En effet, la Localisation d'Anderson est un phénomène ondulatoire beaucoup plus 'générique'. Elle peut se manifester, de manière bien plus générale, lors de la propagation des ondes dans des milieux diffusants aléatoires – et cela quelle que soit la nature de ces ondes (quantiques ou classiques) ou celle des milieux diffusants. Ainsi, la localisation a été observée avec des ondes de matière, comme c'est le cas dans les systèmes électroniques, mais aussi dans des systèmes comprenant des ondes classiques, comme les ondes de lumière ou les ondes ultra-sonores. La généralité de la localisation d'Anderson s'explique par le fait que le transport électronique (représenté par la conductance adimensionnée  $g$ ) dans tous ces systèmes obéit à une loi d'échelle à un paramètre. Cette loi a une forme fonctionnelle universelle  $\beta(g)$ , et ne dépend pas des détails microscopiques, mais uniquement de certaines propriétés 'globales', comme les symétries du système ou sa dimension.

Cette universalité est aussi valable pour la transition d'Anderson en dimensions supérieures, qui peut être observée avec des ondes classiques ou quantiques. Dans ce cas, l'universalité se manifeste également sur le comportement du système dans le régime critique de la transition d'Anderson. Le système obéit dans ce régime à une loi d'échelle universelle, qui dépend des exposants critiques de cette transition de phase, dont les valeurs sont aussi universelles. Ces valeurs des exposants critiques définissent la classe d'universalité de la transition d'Anderson, à laquelle appartiennent tous les systèmes obéissant à la même loi d'échelle universelle.

## 1.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre étudié une approche de l'étude du transport électronique dans un matériau désordonné, qui est le modèle d'Anderson. Nous avons commencé par une description de ce modèle et une explication du phénomène de localisation d'Anderson qui apparaît en dimension 1 et 2, en partant du phénomène de la localisation faible, qui, lui, se manifeste à faible désordre. Nous avons ensuite discuté de la transition d'Anderson, où le système passe d'un état délocalisé à un état localisé quand la force du désordre augmente. Nous avons enfin montré de manière non exhaustive des expériences où la localisation ou la transition d'Anderson ont été observées. Ces expériences ont été réalisées dans des systèmes différents, avec des ondes classiques dans certains cas et avec des ondes quantiques dans d'autres, montrant ainsi l'universalité de ces phénomènes.

Dans la suite de ce qui a été présenté dans ce chapitre, nous allons dans cette thèse nous intéresser à l'étude et à la caractérisation expérimentale de la transi-

tion d'Anderson en dimension 4. Cela ne pouvant être réalisé expérimentalement avec un système à 4 dimensions physiques, nous allons utiliser une méthode de génération de dimensions synthétiques dans le modèle du Rotateur Frappé Atomique, qui appartient à la classe d'universalité du modèle d'Anderson, pour étudier cette transition de phase quantique en dimension 4.

### Sommaire du présent chapitre

<b>2.1 Rotateur Frappé Classique</b>	<b>26</b>
2.1.1 Modèle classique et Application Standard de Chirikov	26
2.1.2 Dynamique classique dans l'espace des phases . . .	29
2.1.3 Diffusion classique . . . . .	30
<b>2.2 Rotateur Frappé Quantique</b>	<b>32</b>
2.2.1 Dynamique quantique . . . . .	34
2.2.2 Simulations numériques . . . . .	35
2.2.3 Localisation dynamique . . . . .	36
<b>2.3 Équivalence entre Rotateur Frappé et modèle d'Anderson</b>	<b>38</b>
<b>2.4 Rotateur Frappé quasi-périodique</b>	<b>40</b>
<b>2.5 Conclusion</b>	<b>43</b>

Le *Rotateur Frappé* (*Kicked Rotor*) est un système classiquement chaotique avec un comportement diffusif. Dans le cas du *Rotateur Frappé quantique* (ou *Atomique*), la dynamique est différente car on observe une suppression de la diffusion et une localisation en énergie et impulsion du système. Cette *localisation dynamique* présente toutes les caractéristiques de la localisation d'Anderson, non pas en position 'x' mais en impulsion 'p'. Cela se manifeste par un gel de l'expansion de la distribution des impulsions du système à temps long, avec une décroissance exponentielle à grande distance (aux grands 'p'). L'équivalence

formelle avec le modèle d'Anderson a été établie [53] [54], et observée expérimentalement pour la première fois en 1995 dans un réseau optique 1D pulsé périodiquement [15].

Un grand intérêt expérimental du Rotateur Frappé quantique réside dans le fait que l'on peut le contrôler d'une façon relativement simple, en introduisant des modulations d'amplitude pour créer des dimensions synthétiques. Cela fait de ce système un outil idéal pour l'étude de la localisation dans des dimensions supérieures. C'est ainsi qu'une transition de phase de type Anderson en dimension 3 a été observée pour la première fois en 2008, bien avant d'autres réalisations avec des atomes ultrafroids dans l'espace réel qui utilisent des potentiels optiques aléatoires (speckle) [20]. En outre, grâce au degré de contrôle élevé du système, les propriétés de l'état critique ont pu être étudiées [17] [34], et l'exposant critique mesuré avec une grande précision, confirmant l'universalité de cette transition de phase. Par ailleurs, les techniques de modulation ont permis d'obtenir d'autres résultats notables, notamment l'étude des propriétés de la localisation en 2D (dimension critique inférieure de la transition d'Anderson) [16], et la création de champs de jauge artificiels, ouvrant la voie à l'exploration du rôle des symétries dans la localisation faible et la localisation forte [8].

Dans ce chapitre, nous allons examiner le modèle du Rotateur Frappé dans ses versions classique et quantique en justifiant son utilisation pour *la simulation quantique* du modèle d'Anderson. Ensuite, nous présenterons le Rotateur Frappé quasi-périodique, dans lequel les modulations d'amplitude permettent de générer des dimensions synthétiques afin d'étudier le modèle d'Anderson en dimensions supérieures.

## 2.1 Rotateur Frappé Classique

### 2.1.1 Modèle classique et Application Standard de Chirikov

Le Rotateur Frappé est un paradigme du chaos classique (un des modèles les plus simples présentant du chaos). Le système est représenté par une masselotte attachée à un point fixe, se mouvant donc sur une orbite circulaire de rayon constant. Elle est perturbée périodiquement, et pendant un temps très court, par une force externe constante, dans une direction donnée (disons 'x'). On peut voir une illustration de ce système dans la Figure 2.1. Dans cette évolution stroboscopique, la masselotte passe donc par deux phases qui s'alternent : une phase de mouvement libre, puis une perturbation (kick), puis une phase de mouvement libre...etc.

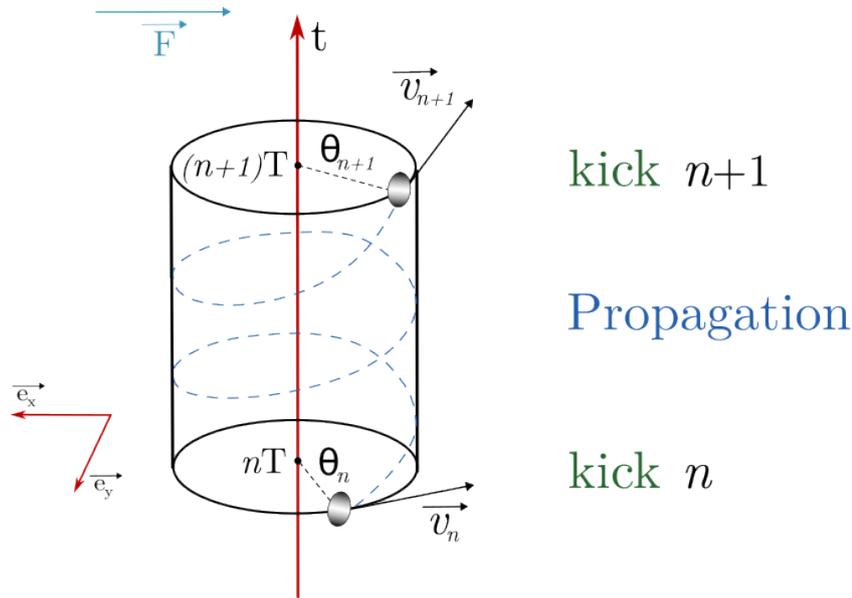


FIGURE 2.1 – La masse évolue librement entre deux perturbations, espacées par la période  $T$  (l'axe vertical représente le temps  $t$ ).

À chaque perturbation de la masselotte, sa position ne change pas mais son moment angulaire  $L$  change instantanément d'une quantité proportionnelle à  $\sin\theta$ . Ce modèle peut être décrit par l'Hamiltonien suivant :

$$H(\theta, L, t') = \frac{L^2}{2M} + V_0\tau \cos\theta \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t' - nT), \quad (2.1)$$

où  $L$  et  $\theta$  sont respectivement le moment angulaire et la position angulaire,  $M$  la masse de la masselotte,  $T$  et  $\tau$  respectivement la période et la durée des perturbations et  $V_0$  l'amplitude du potentiel appliqué à chaque perturbation. Nous avons pris ici le cas où  $\tau \rightarrow 0$  (ainsi que  $V_0 \rightarrow +\infty$  avec  $V_0\tau = cst$ ), ce qui justifie l'utilisation de la fonction  $\delta$  de Dirac dans le terme du potentiel de perturbation.

On peut réécrire cet Hamiltonien d'une façon différente, qui correspond à la réalisation expérimentale du Rotateur Frappé avec des atomes froids, excités par un réseau optique pulsé en dimension 1. Ce modèle "déplié" consiste en une particule classique de masse  $M$  et d'impulsion  $P$  en mouvement libre sur un axe horizontal  $X$ . Cette dernière est soumise à un potentiel sinusoïdal d'amplitude  $V_0$  (réseau optique 1D), et de période  $\Lambda$ , pendant un temps  $\tau$  (où  $\tau \rightarrow 0$ ). Ce

potentiel est pulsé avec une période  $T$ . On obtient donc :

$$H(X, P, t') = \frac{P^2}{2M} + V_0 \tau \cos\left(\frac{2\pi X}{\Lambda}\right) \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t' - nT), \quad (2.2)$$

Ce modèle est équivalent à celui de l'équation 2.1, avec comme différence la portée infinie de la variable spatiale  $X$  (contrairement à  $\theta$ ), ce qui ne change pas significativement les choses car le potentiel est périodique en ' $X$ '.

Cet Hamiltonien du modèle déplié peut être écrit en unités adimensionnées de la façon suivante :

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + K \cos x \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t - n), \quad (2.3)$$

avec :

$$t = \frac{t'}{T}. \quad (2.4)$$

$$x = \frac{2\pi X}{\Lambda}. \quad (2.5)$$

$$p = \frac{2\pi TP}{M\Lambda}. \quad (2.6)$$

On peut remarquer que le modèle du Rotateur frappé classique ne dépend que du seul paramètre  $K$ , qui est appelé le paramètre de stochasticité et qui est défini comme :

$$K = \frac{4\pi^2 T}{M\Lambda^2} V_0 \tau, \quad (2.7)$$

Il faut souligner que la physique des Hamiltoniens 2.1, 2.2 et 2.3 est la même. Pour étudier la dynamique classique de ce système, on peut écrire les équations de Hamilton. À partir de ces dernières, on peut extraire deux relations de récurrence en temps, reliant les valeurs de  $(x_n, p_n)$ , la position et l'impulsion de la particule juste avant la  $n^{\text{ième}}$  perturbation, et  $(x_{n+1}, p_{n+1})$  la position et l'impulsion une période plus tard :

$$p_{n+1} = p_n + K \sin x_n. \quad (2.8)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}. \quad (2.9)$$

Cette application est appelée *Application Standard de Chirikov* et elle fait partie des systèmes qui ont initié l'étude des dynamiques chaotiques dans les années

1980 [55] [56].

### 2.1.2 Dynamique classique dans l'espace des phases

Le Rotateur Frappé (RF) classique présente plusieurs régimes dynamiques en fonction de la valeur du paramètre de stochasticité  $K$  (qui dépend de l'amplitude et de la période du potentiel d'excitation). L'étude de ces régimes peut se faire en analysant le portrait de phase stroboscopique  $(x, p)$ , que l'on obtient à partir des équations 2.8 et 2.9. Ce portrait de phase, dans le cas du RF adimensionné 2.3, est réduit à un espace  $(x, p) \in [0, 2\pi]^2$ . Cela est justifié d'un côté pour la variable  $x$  par la périodicité du forçage temporel, et d'un autre côté pour la variable  $p$  car elle est définie avec une période de  $2\pi$  dans l'Application Standard. On obtient ainsi, avec une simulation numérique, le portrait de phase de la Figure 2.2, où

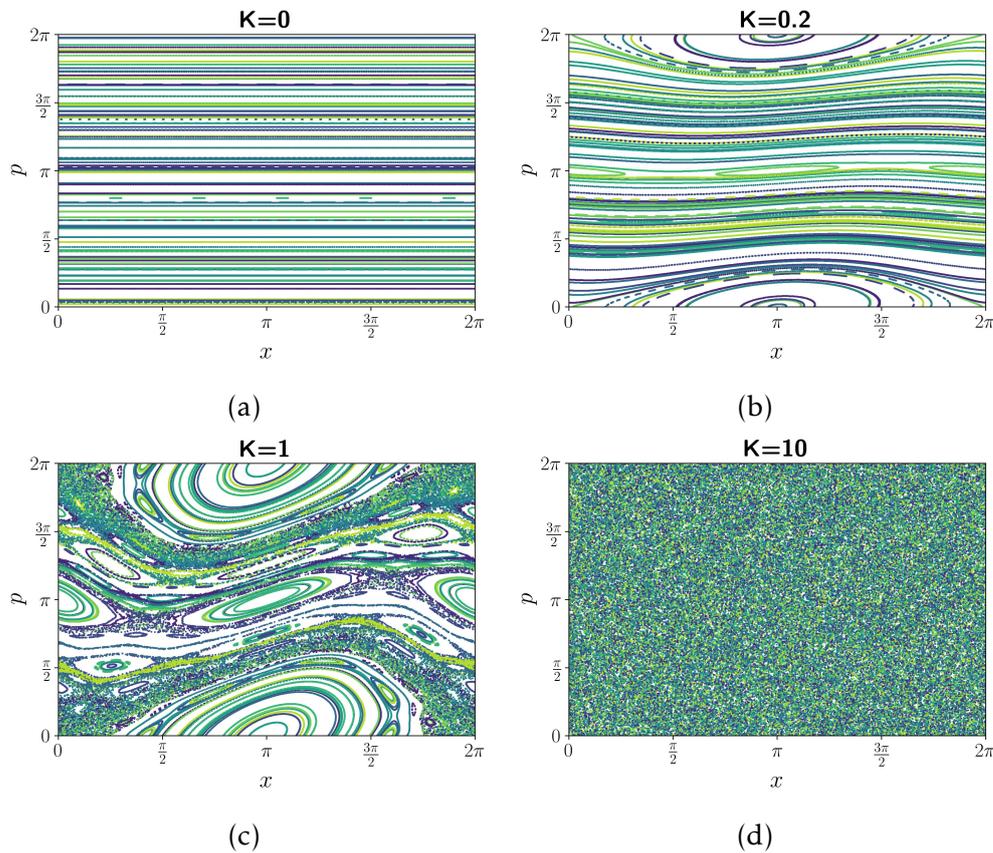


FIGURE 2.2 – Portrait de phase stroboscopique du Rotateur Frappé pour différentes valeurs de  $K$ , après 1000 kicks, avec 100 conditions initiales aléatoirement réparties sur  $[0, 2\pi]^2$ , représentées par différentes couleurs.

l'on voit les trajectoires  $(x,p)$  de la particule classique pour différentes conditions initiales dans  $[0, 2\pi]^2$ .

On peut distinguer plusieurs régimes concernant la dynamique dans l'espace des phases dépendant de la valeur de  $K$ . Pour le cas trivial où le paramètre de stochasticité  $K = 0$ , il n'y a pas de perturbation dans le système et la particule classique est en mouvement libre sur l'axe  $X$ . Dans ce cas, les trajectoires dans l'espace des phases sont des lignes droites :  $p = \text{const}$  (Figure 5.4a) et l'énergie de la particule est conservée, montrant que le système est intégrable. À partir du moment où  $K \neq 0$ , le système devient non intégrable et converge progressivement vers un système ergodique comme démontré par le théorème de KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) [57] [56].

Ainsi, lorsque  $K \ll 1$  (exemple :  $K = 0.2$  dans la Figure 5.4b) la particule est sujette à une faible perturbation, les trajectoires dans le portrait de phase commencent à être incurvées et on constate la formation d'îlots de stabilité (orbites quasi-périodiques) autour des points fixes de l'Application Standard  $(x,p) = (\pi, 0)$ . Quand  $K \sim 1$  (Figure 5.4c), il n'y a plus de trajectoire continue comme dans le cas précédent, mais il ne reste que des îlots de stabilité et des zones avec une grande densité de points qui sont des zones chaotiques. Enfin, pour des valeurs  $K \gg 1$  ( $K = 10$  dans la Figure 5.4d), on ne voit plus d'îlots de stabilité dans l'espace des phases mais que des points uniformément distribués sur la cellule. Dans ce cas, le système peut, pour une certaine condition initiale, visiter tout l'espace des phases. Il est ainsi considéré comme ergodique. Pour ces valeurs élevées de  $K$ , le système est dans une dynamique chaotique.

### 2.1.3 Diffusion classique

On va s'intéresser dans la suite du chapitre au Rotateur Frappé quand il est dans sa dynamique chaotique, c'est-à-dire pour des valeurs du paramètre de stochasticité  $K \gg 1$ . Dans ce régime, les perturbations que reçoit le système sont tellement grandes que deux kicks consécutifs peuvent être considérés statistiquement indépendants. Ainsi, l'impulsion  $p$  de la particule reçoit des perturbations d'amplitude pseudo-aléatoires (de valeur  $\pm K \sin x$ ), donnant comme résultat une marche aléatoire dans l'espace des impulsions. Cela conduit à un comportement diffusif du système, caractérisé par une variation linéaire de l'énergie cinétique, qui rappelle dans une certaine mesure le comportement diffusif des électrons dans le modèle de Drude. Nous allons reprendre ci-dessous les arguments qui permettent ainsi de relier la constante de diffusion et le paramètre de stochasticité  $K$ .

En partant de l'équation (2.8), on peut arriver à une formule de l'énergie cinétique et à la constante de diffusion qui caractérise ce comportement. Pour ce

faire, on commence par exprimer l'impulsion  $p_n$  de la particule classique après  $(n-1)$  perturbations :

$$p_n = p_0 + K \sum_{i=0}^{n-1} \sin x_i. \quad (2.10)$$

En considérant le comportement du système aux temps longs ( $n \gg 1$ ), on peut négliger  $p_0$  par rapport à  $p_n$ . On arrive ainsi à :

$$p_n^2 = K^2 \sum_{i=0, j=0}^{n-1, n-1} \sin x_i \sin x_j. \quad (2.11)$$

On développe cette expression en deux termes (le premier correspondant à  $i = j$  et le deuxième à  $i \neq j$ ) et on calcule la moyenne sur différentes conditions initiales de la variable  $x$  :

$$\langle p_n^2 \rangle = \langle K^2 \sum_{l=0}^{n-1} \sin^2 x_l + K^2 \sum_{i=0, j=0, i \neq j}^{n-1, n-1} \sin x_i \sin x_j \rangle. \quad (2.12)$$

Le premier terme de la moyenne nous donne :  $n \frac{K^2}{2}$ . Le deuxième terme, quant à lui, est réduit à 0. Cela est justifié par la distribution uniforme des valeurs de la variable  $x$  sur  $[0, 2\pi[$ , du fait de l'ergodicité du système. On considère aussi ici que les variables  $x_i$  et  $x_j$  sont indépendantes (valable pour des  $K$  grands). Nous obtenons ainsi :

$$\langle p_n^2 \rangle \approx n \frac{K^2}{2}. \quad (2.13)$$

Le terme  $\langle p_n^2 \rangle$  étant proportionnel à l'énergie cinétique, on en déduit qu'elle varie linéairement avec le nombre de perturbations dans le Rotateur Frappé. C'est ce qui est obtenu avec une simulation numérique et qui est représenté dans la Figure 2.3-b. La Figure 2.3-a montre une autre caractéristique du comportement diffusif (obtenue elle aussi par simulation numérique) qui est la forme gaussienne de la distribution en impulsion.

En considérant l'énergie cinétique  $E_c(n) = \frac{\langle p_n^2 \rangle}{2}$ , on peut définir la constante de diffusion classique :

$$D_{cl} = \frac{E_c(n)}{n} \approx \frac{K^2}{4}. \quad (2.14)$$

De manière plus rigoureuse, le deuxième terme de l'équation (2.12) précédemment réduit à 0, a en réalité un effet non négligeable sur la constante de diffusion car il existe une corrélation entre les positions  $x_i$  et  $x_j$  (pour des valeurs finies de  $K$ ). Cette dernière ne tue pas le comportement diffusif mais induit des oscilla-

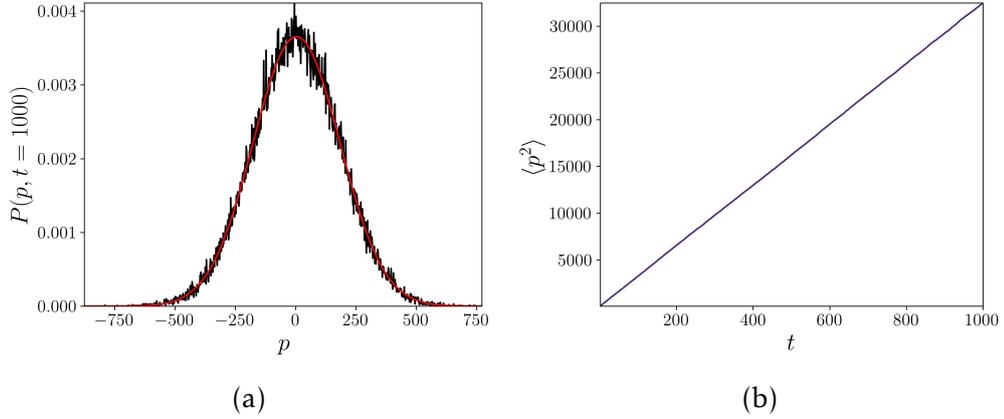


FIGURE 2.3 – Simulation numérique du Rotateur Frappé classique pour  $K = 10$  de 1 à 1000 kicks, et pour  $10^5$  conditions initiales prises aléatoirement dans  $[0, 2\pi[$ . (a) Forme Gaussienne de la distribution en impulsion dans le régime chaotique. (b) Variation linéaire de l'énergie cinétique qui caractérise la diffusion.

tions autour de la constante de diffusion de l'équation (2.14). La formule plus générale de la constante de diffusion peut s'écrire comme [58] :

$$D_{cl} \approx \frac{K^2}{4} (1 - 2J_2(K) + 2J_2(K)^2), \quad (2.15)$$

où  $J_2$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 2. La Figure 2.4 montre la variation de la constante de diffusion obtenue par simulation numérique, ainsi que la comparaison avec les deux approximations précédentes : l'approximation simple de l'équation (2.14) et l'approximation plus rigoureuse de l'équation (2.15) qui prend en compte les corrélations entre kicks.

## 2.2 Rotateur Frappé Quantique

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique quantique du Rotateur Frappé. Pour passer d'un système classique à un système quantique, nous devons remplacer les variables dynamiques  $x$  et  $p$  par les opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ . L'hamiltonien adimensionné du Rotateur Frappé quantique s'écrit donc :

$$\hat{H}(\hat{x}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos \hat{x} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t - n), \quad (2.16)$$

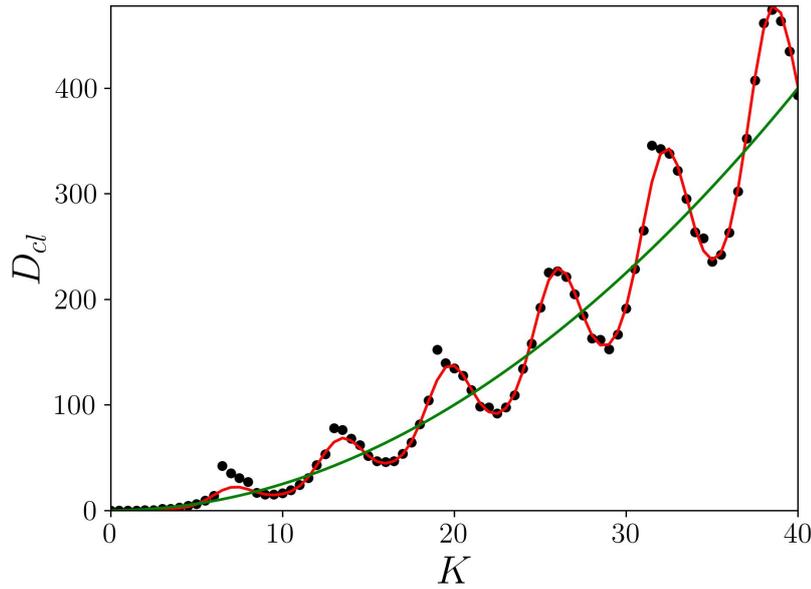


FIGURE 2.4 – Constante de diffusion pour le Rotateur Frappé en fonction du paramètre de stochasticité.  $D_{cl}$  calculé de la simulation numérique est représenté par les points noirs. La courbe verte représente l'approximation  $D_{cl} \approx \frac{K^2}{4}$  et la courbe rouge la formule générale :  $D_{cl} \approx \frac{K^2}{4}(1 - 2J_2(K) + 2J_2(K)^2)$ .

En reprenant les équations 2.5 et 2.6, on définit les deux opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  de l'hamiltonien adimensionné 2.16 comme suit :

$$\hat{x} = \frac{2\pi\hat{X}}{\Lambda} \quad , \quad \hat{p} = \frac{2\pi T\hat{P}}{M\Lambda} \quad , \quad (2.17)$$

avec  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  respectivement les opérateurs position et impulsion dimensionnés. Ils satisfont la relation de commutation suivante :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (2.18)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite.

Grâce à ces définitions, on peut maintenant écrire le commutateur dans les unités adimensionnées :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \left[ \frac{2\pi\hat{X}}{\Lambda}, \frac{2\pi T\hat{P}}{M\Lambda} \right] = \frac{4\pi^2 T}{M\Lambda^2} i\hbar. \quad (2.19)$$

En définissant une constante de Planck effective  $\bar{k}$  comme :

$$\bar{k} = \frac{4\pi^2 \hbar T}{M\Lambda^2}. \quad (2.20)$$

On obtient alors une relation de commutation canonique :  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\bar{k}$

On rappellera que le paramètre de stochasticité  $K$  et le temps  $t$  sont définis de la même façon que dans le cas classique, respectivement dans les équations 2.7 et 2.4.

Le Rotateur Frappé quantique est décrit par un état  $|\psi(t)\rangle$  qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\bar{k} \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (2.21)$$

Un aspect intéressant qui découle de la relation 2.20 est le fait qu'il est possible en pratique de contrôler la valeur de la constante de Planck effective de notre modèle, qui est proportionnelle à la période des kicks  $T$ . La limite classique du modèle quantique peut se retrouver en prenant  $T \rightarrow 0$ .

### 2.2.1 Dynamique quantique

Dans cette section, nous allons développer l'opérateur d'évolution du Rotateur Frappé quantique, qui nous donne l'état du système après une évolution d'un temps  $t_0$  à un temps  $t_1$ . Cet opérateur est défini comme suit :

$$\hat{U}(t_1, t_0) = \hat{T} \exp \left\{ \frac{-i}{\bar{k}} \int_{t_0}^{t_1} \hat{H}(t) dt \right\}, \quad (2.22)$$

avec  $\hat{T}$  l'opérateur d'ordination temporelle. Le Rotateur Frappé quantique étant périodique dans le temps, l'opérateur d'évolution après un certain temps "n" peut donc se déduire à partir de l'opérateur d'évolution sur une période (ou "opérateur de Floquet") :

$$|\psi(t = n)\rangle = \hat{U}^n |\psi(0)\rangle. \quad (2.23)$$

Pour définir l'opérateur d'évolution, nous allons donc considérer une seule période qui se situe entre un temps  $t$  et un temps  $t + 1$ . Une partie de ce laps de temps est consacrée au kick :  $t \rightarrow t + \epsilon$ , et le reste à la propagation libre de la particule :  $t + \epsilon \rightarrow t + 1$ . L'opérateur d'évolution peut donc être écrit en deux parties :

$$\hat{U}(t + 1, t) = \hat{U}(t + 1, t + \epsilon) \hat{U}(t + \epsilon, t), \quad (2.24)$$

En calculant les deux parties de l'opérateur, nous obtenons :

$$\hat{U}(t+1, t+\epsilon) = \exp\left\{\frac{-i}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2}(1-\epsilon)\right)\right\}. \quad (2.25)$$

$$\hat{U}(t+\epsilon, t) = \exp\left\{\frac{-i}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2}\epsilon + K \cos \hat{x}\right)\right\}. \quad (2.26)$$

Dans l'hypothèse où la durée du kick est très courte devant la durée de la propagation libre ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), on obtient l'opérateur de propagation libre  $\hat{U}_{Prop}$  :

$$\hat{U}_{Prop} = \exp\left(-i\frac{\hat{p}^2}{2\hbar}\right). \quad (2.27)$$

et l'opérateur de forçage (ou opérateur de kick)  $\hat{U}_{Kick}$  :

$$\hat{U}_{Kick} = \exp\left(-i\frac{K \cos \hat{x}}{\hbar}\right), \quad (2.28)$$

avec l'opérateur d'évolution s'écrivant sous la forme suivante :

$$\hat{U} = \hat{U}_{Prop} \hat{U}_{Kick}, \quad (2.29)$$

### 2.2.2 Simulations numériques

La simulation numérique du Rotateur Frappé quantique est grandement facilitée par la forme de l'opérateur d'évolution. Ce dernier est défini comme le produit des deux opérateurs  $\hat{U}_{Prop}$  et  $\hat{U}_{Kick}$ , qui sont diagonaux, dans l'espace des impulsions pour le premier et dans l'espace des positions pour le deuxième. Grâce à cette propriété, il est très commode d'effectuer des simulations numériques de la dynamique en appliquant chacun des deux opérateurs au vecteur d'état dans l'espace où ils sont diagonaux, avec un passage d'une représentation à l'autre à l'aide de la transformée de Fourier rapide.

Une deuxième propriété utile concerne la périodicité spatiale de l'Hamiltonien 2.16 avec une période  $2\pi$  (qui est due à la périodicité du forçage temporel). En effet, ce dernier ne couple que des états d'impulsions séparés d'un nombre entier de  $\hbar$ , nous permettant de nous restreindre à une base en impulsion discrète :

$$\hat{p}|p\rangle = \hbar(l + \beta)|l + \beta\rangle \quad (2.30)$$

où  $l\hbar$  (avec  $l \in \mathbb{Z}$ ) représente l'impulsion et  $\beta \in [0, 1]$  avec  $\beta\hbar$  représentant la quasi-impulsion. Cette dernière est conservée tout le long de l'évolution du système. On peut ainsi écrire les valeurs propres de l'opérateur de propagation

libre  $\hat{U}_{Prop}$  :

$$\hat{U}_{Prop}|l + \beta\rangle = \exp\left(-i\frac{\hbar(l + \beta)^2}{2}\right)|l + \beta\rangle, \quad (2.31)$$

Une approximation est faite dans la simulation numérique du RF quantique et elle consiste à discrétiser l'espace des positions sur l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ . Dans cet intervalle, nous prenons des positions  $x_l$  qui s'écrivent sous la forme :  $x_l = \frac{2\pi l}{L}$ , où  $L$  est la taille de base des impulsions. Cela correspond à la restriction selon laquelle la base discrète d'impulsion est de taille finie  $L$ . Pour s'assurer de la validité de cette approximation, il faut faire attention à ce que la dynamique observée ne dépende pas de la taille de la base  $L$ .

En tenant compte des remarques précédentes, nous pouvons maintenant revenir sur la procédure qui nous permet d'effectuer une simulation numérique du système. L'application de l'opérateur évolution se fait en plusieurs étapes. Nous commençons initialement avec un état d'impulsion :  $|\psi(t = 0)\rangle = |\beta\hbar\rangle$  (qui correspond à  $\hbar k = 0$ ), sur lequel nous effectuons une transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform) pour avoir l'état du système dans l'espace des positions :  $|\psi(x)\rangle$ . À ce dernier, nous appliquons l'opérateur de kick  $\hat{U}_{Kick}$ . Ensuite, nous revenons dans l'espace des impulsions en effectuant une transformée de Fourier rapide inverse (IFFT : Inverse Fast Fourier Transform), et nous appliquons l'opérateur de propagation libre  $\hat{U}_{Prop}$  sur l'état  $|\psi(p)\rangle$ . Nous répétons la même procédure avec une boucle  $n$  fois pour avoir l'état du système à  $t = n$ . Une moyenne statistique est ensuite effectuée sur les informations extraites de la simulation sur différentes conditions initiales  $|\psi(t = 0)\rangle = |\beta\hbar\rangle$ , ou de façon équivalente sur différentes quasi-impulsions  $\beta\hbar$  (avec  $\beta\hbar$  uniformément distribué sur la zone de Brillouin  $[0, \hbar]$ ).

Pour étudier la dynamique du Rotateur Frappé quantique avec la simulation numérique, nous allons dans la suite observer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$ , ou de façon équivalente la quantité  $\langle l^2 \rangle$ , ainsi que la distribution de probabilité des impulsions :  $|\langle \psi(p, t) \rangle|^2$ .

### 2.2.3 Localisation dynamique

La Figure 2.5 est obtenue à partir d'une simulation numérique réalisée avec la procédure expliquée plus haut. Elle montre l'évolution de  $\langle l^2 \rangle$  (qui est équivalent à l'énergie cinétique) et la distribution de probabilité en impulsion après 1000 kicks. On remarque que la dynamique est clairement différente de celle du Rotateur Frappé classique. En effet, dans le cas de l'énergie cinétique, on voit que le comportement diffusif ( $\langle l^2 \rangle \propto t$ ) est présent au début de l'évolution mais s'arrête après un temps  $t_{loc}$  (appelé *temps de localisation*) pour laisser place à une

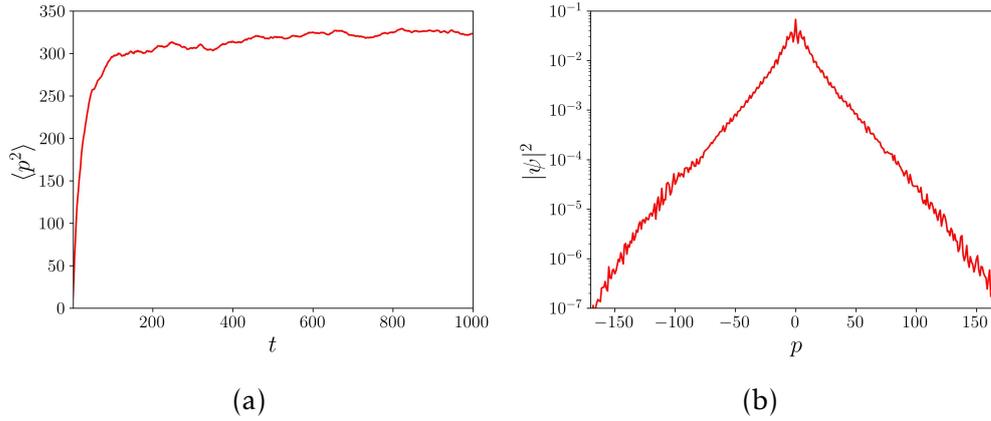


FIGURE 2.5 – Évolution temporelle du Rotateur Frappé quantique pour les paramètres :  $K = 10$  et  $\hbar = 2$ . (a) Représente l'évolution de l'énergie cinétique du système, qui montre une saturation après une phase diffusive. (b) Représente la distribution de probabilité en impulsions après 1000 kicks en échelle semi-log. On constate qu'elle est exponentiellement localisée.

saturation de l'énergie cinétique. La variance de la distribution de probabilité en impulsion tend dans ce cas vers une constante :

$$\langle l^2 \rangle (t \gg t_{loc}) \approx \frac{\ell^2}{2}, \quad (2.32)$$

où la quantité  $\ell$  est appelée : *longueur de localisation*, et est associée à la décroissance exponentielle de la distribution de probabilité en impulsion (pour  $t \gg t_{loc}$ ) :

$$|\psi(p, t)|^2 \approx \frac{1}{\ell} \exp\left(\frac{-2|p|}{\ell}\right). \quad (2.33)$$

Ce phénomène de saturation de l'énergie cinétique est appelé la *Localisation Dynamique* [59]. Cette dernière se passe donc dans l'espace des impulsions et sa première observation expérimentale a été réalisée avec un Rotateur Frappé atomique dans l'équipe de Mark G. Raizen en 1996 [15].

La localisation dynamique peut aussi être montrée mathématiquement [53]. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur la périodicité temporelle du système pour justifier l'utilisation de la technique de l'opérateur de Floquet (théorème de Floquet). Ce dernier va nous permettre de diagonaliser l'opérateur d'évolution sur une période du Rotateur Frappé quantique (2.29), dans une base dite d'états

de Floquet :

$$\hat{U} |\omega\rangle = e^{-i\omega} |\omega\rangle, \quad (2.34)$$

où  $|\omega\rangle$  est le quasi-état propre de Floquet et  $\omega$  la quasi-énergie correspondante. Ainsi, l'évolution d'un état  $|\psi_0\rangle$  dans le Rotateur Frappé quantique, selon la relation 2.23, peut donc être réécrite comme :

$$|\psi_n\rangle = \sum_{\omega} e^{-i\omega n} \langle\omega|\psi_0\rangle |\omega\rangle. \quad (2.35)$$

L'énergie cinétique du système après  $n$  kicks peut être écrite à partir de la relation précédente :

$$\langle E_c \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \psi_n | p^2 | \psi_n \rangle \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{\omega} |\langle\omega|\psi_0\rangle|^2 \langle\omega|p^2|\omega\rangle + \sum_{\omega \neq \omega'} \langle\psi_0|\omega'\rangle \langle\omega|\psi_0\rangle e^{i(\omega'-\omega)n} \langle\omega'|p^2|\omega\rangle \right). \quad (2.38)$$

Quand le Rotateur Frappé est dans le régime localisé, le spectre de Floquet (ensemble de quasi-états propres de Floquet) est dense. Dans ce cas, si le nombre de kicks ' $n$ ' est assez grand (pour que la différence entre les quasi-énergies de Floquet soit petite), le deuxième terme de l'équation précédente interfère destructivement et sa contribution à l'énergie cinétique est négligeable. Cette dernière sature donc, après un temps  $t_{loc}$ , à la valeur du premier terme où  $\omega = \omega'$  :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\omega} |\langle\omega|\psi_0\rangle|^2 \langle\omega|p^2|\omega\rangle \quad (2.39)$$

C'est ce que nous observons dans le résultat de la simulation numérique du Rotateur Frappé quantique dans la Figure 2.5.

## 2.3 Équivalence entre Rotateur Frappé et modèle d'Anderson

La localisation dynamique mise en évidence dans la section précédente, avec la spécificité qu'elle soit une localisation exponentielle, est équivalente à la localisation d'Anderson comme cela a été démontré par Fishman, Grempel et Prange [53] [54]. La différence entre les deux phénomènes est que la localisation d'Anderson se passe dans l'espace réel (espace des positions) et la localisation

dynamique dans l'espace réciproque (espace des impulsions). Dans cette section, nous allons discuter brièvement de l'équivalence mathématique entre les deux modèles.

Pour faire cela, nous allons reprendre la relation 2.34 qui permet d'écrire l'opérateur d'évolution dans la base des états de Floquet. La localisation dynamique se passant dans l'espace des impulsions, il faut exprimer ces états de Floquet dans la base des impulsions. L'obstacle principal pour ce faire est que l'opérateur kick n'est pas diagonal dans cette dernière. Pour pallier ce problème, l'équation 2.34 peut être réécrite différemment en utilisant la formule trigonométrique suivante :

$$e^{ix} = \frac{1 + i \tan(x/2)}{1 - i \tan(x/2)}. \quad (2.40)$$

On obtient par cela :

$$\frac{1 + i \tan \hat{v}}{1 - i \tan \hat{v}} (1 + i \tan \hat{t}) \frac{1}{1 + i \tan \hat{t}} |\omega\rangle = |\omega\rangle, \quad (2.41)$$

où les deux opérateurs  $\hat{v}$  et  $\hat{t}$  s'écrivent dans les unités du Rotateur Frappé comme suit :

$$\hat{v} = \frac{\omega}{2} - \frac{\hat{p}^2}{4\hbar}. \quad (2.42)$$

$$\hat{t} = \frac{K \cos(\hat{x})}{\bar{k}} \frac{1}{2}. \quad (2.43)$$

En décomposant  $(1 + i \tan \hat{t})^{-1} |\omega\rangle$  dans la base des impulsions (de vecteurs propres  $|s\rangle$ ), on peut obtenir une décomposition des états de Floquet dans la base des impulsions :

$$(1 + i \tan \hat{t})^{-1} |\omega\rangle = \sum_s u_s |s\rangle \iff |\omega\rangle = (1 + i \tan \hat{t}) \sum_s u_s |s\rangle. \quad (2.44)$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation 2.41 et en projetant sur un état propre d'impulsion  $\langle m|$ , on obtient l'équation suivante :

$$\tan(v_m) u_m + \sum_{r \neq 0} J_r u_{m+r} = -J_0 u, \quad (2.45)$$

où  $v_m = \frac{\omega}{2} - \frac{m^2 \bar{k}}{4}$  et  $J_r = -\langle m| \tan \hat{t} |m+r\rangle$ .

Cette dernière équation a la même forme que l'hamiltonien du modèle des liaisons fortes qui est utilisé par Anderson pour décrire son modèle. Ainsi, en

comparant les équations 2.45 et 1.4 (du premier chapitre), on déduit que :

$$V_n \longleftrightarrow \tan v_m. \quad (2.46)$$

$$t_{ij} \longleftrightarrow J_r. \quad (2.47)$$

On peut voir que le terme qui correspond à la propagation libre :  $\tan v_m$  est équivalent au terme des énergies sur site  $V_n$ , dans lequel le désordre ( $W$ ) est introduit dans le modèle d'Anderson. Le terme qui correspond au potentiel de kick  $J_r$  est équivalent au terme de "hopping" ( $t_{ij}$ ) dans le modèle d'Anderson. Ainsi, la force de désordre (dans le modèle d'Anderson :  $\frac{W}{t_{ij}}$ ) est contrôlée dans le cas du Rotateur Frappé quantique en variant le terme de "hopping" et donc le ratio  $\frac{K}{\bar{K}}$ .

## 2.4 Rotateur Frappé quasi-périodique

Maintenant que nous avons vu la relation entre la localisation dynamique et la localisation d'Anderson en dimension 1, nous pouvons nous intéresser au Rotateur Frappé quantique aux dimensions  $d > 1$ . Il est possible d'étudier le modèle d'Anderson en dimension  $d > 1$  avec un Rotateur Frappé quantique de la même dimension, en utilisant ' $d$ ' potentiels sur les ' $d$ ' dimensions de l'espace (exemple à  $d = 3$  introduit dans [60]). Cette technique a néanmoins comme désavantage des simulations numériques assez compliquées à réaliser et nécessitant beaucoup de temps de calcul. La réalisation expérimentale est aussi complexe car elle demande un contrôle précis de la phase des faisceaux laser, ce qui est difficile à mettre en place.

Un autre modèle a été introduit par D.Shepelyansky [61], nommé le Rotateur Frappé quasi-périodique. L'idée dans ce modèle consiste à garder le Rotateur Frappé en 1D et à rajouter des modulations d'amplitude sur le terme du potentiel de kick, afin de générer des dimensions synthétiques dans le système. Chaque fréquence de cette modulation permet ainsi d'augmenter de 1 la dimension effective du système. En plus de la relative simplicité de sa réalisation expérimentale, ce système permet d'aller au-delà des dimensions physiques et d'étudier le modèle d'Anderson à  $d > 3$ . Nous allons dans cette section discuter brièvement du cas du Rotateur Frappé quasi-périodique avec 2 fréquences [62], les autres cas sont une généralisation de ce dernier .

L'Hamiltonien du Rotateur Frappé quasi-périodique à 2 fréquences s'écrit de la

façon suivante :

$$H_{\text{qp}}(\hat{x}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos \hat{x} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t - n), \quad (2.48)$$

où  $\mathcal{K}(t)$  contient la modulation d'amplitude du potentiel :

$$\mathcal{K}(t) = K[1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t)], \quad (2.49)$$

avec  $\omega_2$  et  $\omega_3$  les fréquences de modulation et  $\varepsilon$  son amplitude. Il peut être démontré que l'Hamiltonien cité plus haut est équivalent à l'Hamiltonien effectif du Rotateur Frappé périodique à 3 dimensions [63] :

$$H_{\text{eff}} = \frac{p_1^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + K \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3) \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta(t - n), \quad (2.50)$$

avec une "source plane" comme condition initiale :

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, t = 0) = \psi_{\text{qp}}(x_1, t = 0) \delta(x_2) \delta(x_3), \quad (2.51)$$

où  $\psi_{\text{qp}}$  est une condition initiale quelconque pour le Rotateur Frappé quasi-périodique.

À partir de là, on peut procéder comme dans le cas du Rotateur Frappé à une dimension et montrer l'équivalence entre le Rotateur Frappé périodique à 3 dimensions et le modèle d'Anderson 3D. Ainsi, l'Hamiltonien précédent peut être écrit sous la forme de l'Hamiltonien du modèle des liaisons fortes de l'équation (2.45), avec les énergies sur sites qui sont sous la forme suivante :

$$v_m = \frac{1}{2} \left( \omega - \bar{k} \frac{m^2}{2} - \sum_{i=2}^d \omega_i m_i \right), \quad (2.52)$$

où  $d$  est la dimension ( $d = 3$  dans notre cas). Les amplitudes de "saut"  $J_r$  sont des coefficients d'une triple série de Fourier :

$$J_r(x_1, x_2, x_3) = \tan\left[\frac{K}{\bar{k}} \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3)/2\right]. \quad (2.53)$$

Lorsque les paramètres  $(\omega_2, \omega_1, \bar{k}, \pi)$  sont incommensurables entre eux, les énergies sur sites sont réparties de façon quasi-aléatoire, qui ne dépend que des fréquences  $\omega_i$  et de  $\bar{k}$  (qui sont fixes dans le modèle). La répartition des énergies est donc fixe. L'amplitude de "saut"  $J_r$  dépend de l'amplitude de modulation  $\varepsilon$  (qui représente aussi l'anisotropie du modèle) et de  $\frac{K}{\bar{k}}$ . Le paramètre  $\bar{k}$  étant fixe, l'amplitude de saut peut être variée en modifiant  $K$  et/ou  $\varepsilon$ .

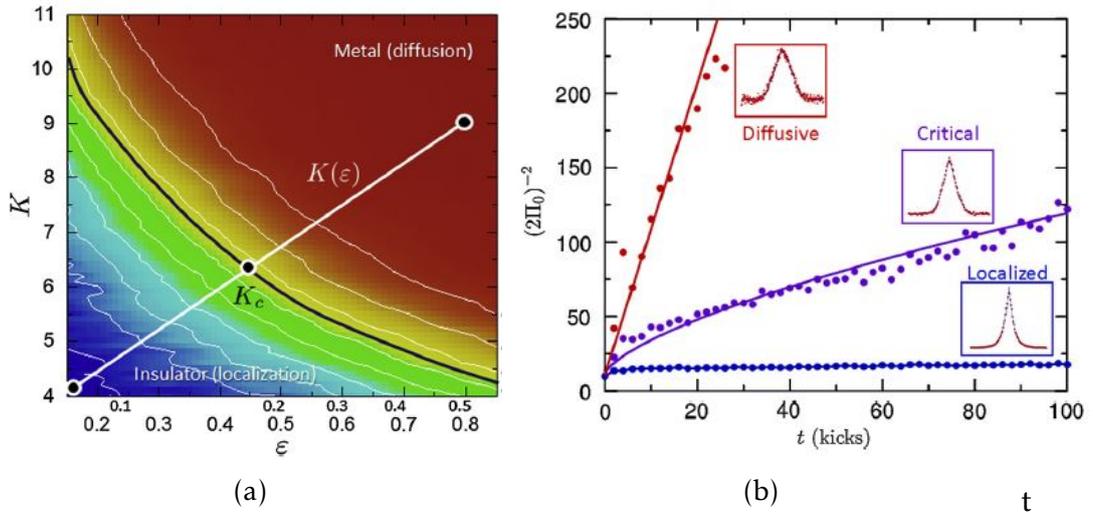


FIGURE 2.6 – Expérience de simulations quantique du modèle d'Anderson 3D avec un Rotateur Frappé quasi périodique. (a) Simulation numérique du diagramme  $(K, \varepsilon)$  dans lequel on voit un passage d'une phase localisée (bleue) à une phase diffusive (rouge) avec une transition de phase à  $(K_c, \varepsilon_c)$ . le graphe (b) montre Les énergies cinétiques,  $(2\Pi_0)^{-2} \propto \langle p^2 \rangle$ , correspondant aux phases localisée (en bleu), diffusive (en rouge) et à la transition (en violet) qui varie selon  $t^{2/3}$  (les points sont des mesures expérimentales et les traits continus sont des fits). Les insets montrent la forme de la distribution en impulsion pour chaque phase. Figure extraite de [64].

Ainsi, le choix de la force de désordre  $\frac{W}{t}$  dans le Rotateur Frappé quasi-périodique revient à contrôler l'amplitude de "saut" à travers le couple  $(K, \varepsilon)$ , contrairement au modèle d'Anderson où c'est l'amplitude de désordre  $W$  qui est contrôlée.  $(K, \varepsilon)$  petit correspond donc à un fort désordre dans le système ( $\frac{W}{t}$  grand) et  $(K, \varepsilon)$  grand correspond à un faible désordre ( $\frac{W}{t}$  petit).

Le modèle du Rotateur Frappé quasi périodique à 2 fréquences ( $\bar{k}$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$ ) a été réalisé expérimentalement pour la première fois dans l'équipe Chaos Quantique à Lille en 2008. Dans cette expérience, en variant la force de désordre (les valeurs de  $(K, \varepsilon)$ ), une transition de phase d'une phase localisée à une phase diffusive a été observée pour des valeurs  $(K_c, \varepsilon_c)$ . Celle-ci correspond à la transition Métal-isolant d'Anderson (Figure 2.6a). L'énergie cinétique pour chaque phase est montrée dans la Figure 2.6b. Dans la phase localisée, pour  $(K, \varepsilon) < (K_c, \varepsilon_c)$ , une saturation de l'énergie cinétique est observée et la distribution en impulsion est exponentiellement localisée comme dans le cas de la dimension 1. Dans la phase diffusive, pour  $(K, \varepsilon) > (K_c, \varepsilon_c)$ , l'énergie varie linéairement avec le nombre de kicks et la distribution en impulsion est une gaussienne. À la transition entre

les deux phases, pour  $(K, \varepsilon) = (K_c, \varepsilon_c)$ , l'énergie varie selon une loi de puissance :  $t^{2/3}$ . L'exposant critique  $\nu$  de la longueur de localisation a été mesuré pour la première fois avec cette expérience :  $\nu = 1.4 \pm 0.3$  [17] (puis re-mesuré plus précisément en 2012 :  $\nu = 1.63 \pm 0.05$  [34]), ce qui est cohérent avec la valeur prédite par les simulations numériques du modèle d'Anderson  $\nu = 1.59 \pm 0.03$  [32].

## 2.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre discuté du modèle du Rotateur Frappé dans ses versions classique et quantique. Dans son régime chaotique, ce système se comporte dans le cas classique d'une manière diffusive. Dans le cas quantique, une localisation exponentielle se manifeste dans l'espace des impulsions, qui est équivalente à la localisation d'Anderson, qui, elle, est dans l'espace des positions. Nous avons ensuite montré le modèle du Rotateur Frappé quasi-périodique, où une modulation d'amplitude du potentiel de kick permet de générer des dimensions synthétiques et donc d'augmenter la dimension effective du système. Ce système est équivalent à un modèle d'Anderson de dimension supérieure ( $d > 1$ ). C'est dans ce sens que nous allons, dans cette thèse, utiliser le Rotateur Frappé quasi-périodique à 3 fréquences pour étudier expérimentalement la transition d'Anderson en dimension 4.



---

## Expérience d'atomes ultra-froids de Potassium 41

---

### Sommaire du présent chapitre

<b>3.1 Structure atomique du <math>^{41}\text{K}</math></b>	<b>46</b>
<b>3.2 Systèmes laser</b>	<b>48</b>
3.2.1 Systèmes pour le refroidissement laser . . . . .	48
3.2.2 Asservissement en fréquence . . . . .	50
3.2.3 Banc Laser pour les pièges optiques . . . . .	51
<b>3.3 Séquence expérimentale</b>	<b>52</b>
3.3.1 Pièges Magnéto-Optiques 2D et 3D . . . . .	53
3.3.2 Piège Magnéto-Optique Compressé et Mélasse Grise	54
3.3.3 Piège Magnétique et évaporation radio-fréquence . .	57
3.3.4 Piège Hybride . . . . .	58
3.3.5 Piège Optique Croisé . . . . .	59
<b>3.4 Système d'imagerie</b>	<b>61</b>
<b>3.5 Conclusion</b>	<b>64</b>

*Ce chapitre est une brève description de notre expérience d'atomes ultrafroids de potassium 41. Plus de détails peuvent être trouvés dans les thèses de Charbel CHERFAN [65], et Maxime DENIS [66], qui ont travaillé sur sa construction.*

Les expériences d'atomes ultrafroids sont une plateforme idéale pour la réalisation du Rotateur Frappé quantique. Cela est réalisé en soumettant un

nuage d'atomes à un potentiel lumineux périodiquement pulsé pour les exciter. L'avantage de ces expériences réside dans le contrôle précis qu'elles offrent sur les paramètres du Rotateur Frappé. Elles donnent également la possibilité de réaliser le Rotateur Frappé quasi-périodique en appliquant des modulations d'amplitude sur le potentiel lumineux pulsé. En ce qui concerne les mesures, ces expériences permettent d'accéder aux distributions en impulsion et à l'énergie cinétique, sur lesquelles la localisation dynamique se manifeste. Nous allons présenter ici notre expérience de potassium 41, que nous utilisons pour réaliser le Rotateur Frappé atomique.

Le potassium 41 a été choisi par l'équipe pour cette expérience en raison de différents facteurs. Une raison technique consiste dans le fait que les longueurs d'onde de refroidissement du  $^{41}\text{K}$  ( $\sim 767\text{ nm}$ ) sont à la moitié du domaine télécom ( $\sim 1540\text{ nm}$ ) [67]. Cela permet l'utilisation de lasers et de composants télécoms fibrés pour la génération des fréquences de refroidissement, qui sont ensuite doublées pour adresser les transitions électroniques du  $^{41}\text{K}$ . Un avantage physique de l'utilisation du  $^{41}\text{K}$  pour la réalisation du Rotateur Frappé atomique est qu'il permet de réaliser plus de kicks sur les atomes, comparé au Césium qui était utilisé dans le passé par l'équipe pour ces expériences. En effet, la masse du  $^{41}\text{K}$  étant inférieure à celle du Césium, il est possible de réaliser plus de kicks pour une même valeur de  $\vec{k}$  (car  $\vec{k} \propto T/m$ ). Enfin, le  $^{41}\text{K}$  présente également des résonances de Feshbach [68] [69], donnant la possibilité d'étudier dans le futur des systèmes avec des interactions inter-atomiques contrôlables avec cette expérience.

Dans ce chapitre, nous commencerons par montrer la structure atomique du  $^{41}\text{K}$  et ses spécificités. Ensuite, nous présenterons les différents systèmes laser qui ont été développés dans l'équipe pour le refroidissement et l'asservissement des fréquences. La séquence expérimentale qui permet la réalisation d'un nuage d'atomes ultrafroids ou d'un condensat de Bose-Einstein sera par la suite détaillée. Enfin, nous verrons le système d'imagerie par absorption utilisé pour effectuer des mesures sur l'expérience, ainsi que les améliorations que j'ai apportées durant ma thèse.

### 3.1 Structure atomique du $^{41}\text{K}$

Dans la Figure 3.1 est représentée la structure atomique du  $^{41}\text{K}$ , avec les deux transitions électroniques utilisées pour le refroidissement. La transition D2 (en rouge) correspond à la transition électronique  $^2\text{S}_{1/2} \rightarrow ^2\text{P}_{3/2}$ . La transition D1 (en bleu) correspond à la transition électronique  $^2\text{S}_{1/2} \rightarrow ^2\text{P}_{1/2}$ . Des lasers de  $766.701\text{ nm}$  et  $770.108\text{ nm}$  sont nécessaires respectivement pour adresser la raie

D2 et la raie D1 [70].

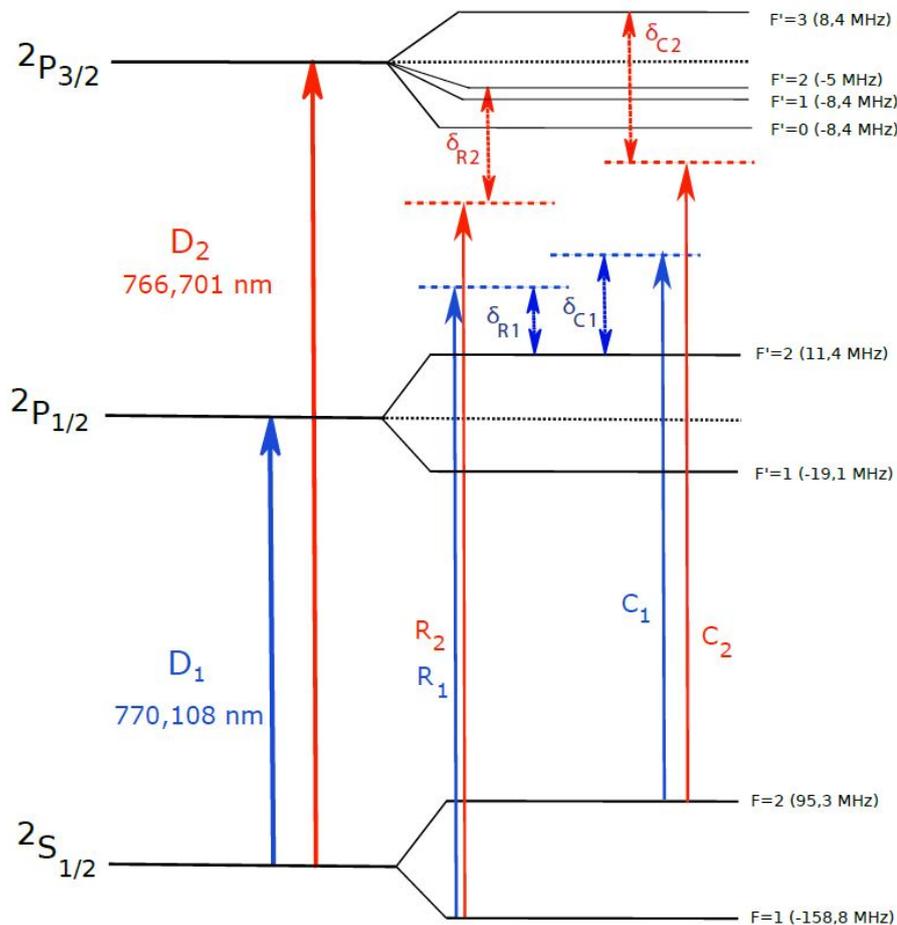


FIGURE 3.1 – Schéma de la structure atomique du  $^{41}\text{K}$ . Il illustre les transitions électroniques utilisées pour les étapes de refroidissement laser. La transition D2 (en rouge) est à 766,701 nm et la transition D1 (en bleu) est à 770,108 nm. Les composantes utilisées pour le refroidissement laser de chacune des transitions sont représentées par des flèches accompagnées de C (Cooling) et R (Repompeur). Figure extraite de [65].

La transition D2 utilisée pour le refroidissement Laser entre les états hyperfins  $F = 2$  et  $F' = 3$  (représentée par C2 dans la Figure 3.1) est cyclante. Cependant, la probabilité de passer de l'état  $F = 2$  à  $F' = 2$  est non nulle, en raison de l'étroitesse de la structure hyperfine du niveau  $2P_{3/2}$ . Un atome présent dans l'état  $F' = 2$  peut ensuite se désexciter par émission spontanée soit vers  $F = 2$ , où il re-rentre dans le cycle de refroidissement imposé par C2, soit vers

$F = 1$  où il est éjecté de ce dernier. Dans ce cas, l'atome n'est plus piégé dans le *Piège Magnéto-Optique* (MOT : *Magnéto-Optical Trap*). La solution à cet obstacle est de rajouter un faisceau repompeur R2, dont le rôle consistera à réintroduire dans le cycle de refroidissement les atomes présents dans  $F = 1$ . Cette contrainte s'applique de manière générale à tous les alcalins refroidis par laser, mais elle est encore plus marquée pour  $^{41}\text{K}$  du fait de l'étroitesse de la structure hyperfine de l'état excité  $^2\text{P}_{3/2}$ . L'écart entre les niveaux hyperfins dans ce cas est de l'ordre de la largeur naturelle de la raie :  $\Gamma = 2\pi \times 6,036 \text{ MHz}$ . L'utilisation de puissances de repompeur élevées, comparables à celles des faisceaux de refroidissement, est ainsi nécessaire pour ramener les atomes dans les cycles de refroidissement [71].

Une autre conséquence de l'étroitesse de la structure hyperfine du potassium est la température élevée de ses MOTs qui est de l'ordre du  $\sim m\text{K}$ , bien au-dessus de la limite Doppler  $\sim 145\mu\text{K}$ . Ceci empêche un refroidissement sub-Doppler avec la transition D2. La solution qui a été mise en place sur notre expérience pour remédier à ce problème consiste à utiliser la technique des mélasses grises avec la transition D1. Cette méthode a été testée avec succès dans plusieurs expériences [72] [69] [73].

Le refroidissement laser du  $^{41}\text{K}$  nécessite ainsi de s'adresser aux deux transitions D2 et D1. Nous montrerons dans la suite une description des deux systèmes lasers ( $\sim 767 \text{ nm}$  et  $\sim 770 \text{ nm}$ ) qui ont été construits dans l'équipe pour adresser chacune de ces transitions.

## 3.2 Systèmes laser

Dans cette section, nous allons résumer les systèmes lasers qui ont été développés dans l'équipe pour l'expérience BEC  $^{41}\text{K}$ . Nous commencerons par discuter des bancs lasers D1 et D2 qui servent à mettre en place les faisceaux de refroidissement laser. Ensuite, nous verrons une description des systèmes d'asservissement qui stabilisent les fréquences de ces lasers. Enfin, nous parlerons du banc laser développé pour les pièges optiques, utilisés dans le refroidissement évaporatif.

### 3.2.1 Systèmes pour le refroidissement laser

Comme cité au début du chapitre, les longueurs d'onde des transitions utilisées pour le refroidissement du  $^{41}\text{K}$  ( $\lambda_{D1} = 770.108 \text{ nm}$  et  $\lambda_{D2} = 766.701 \text{ nm}$ ) sont autour de la moitié du domaine télécom bande C ( $\sim 1540 \text{ nm}$ ). Cela a motivé l'équipe à construire des systèmes laser capables de générer les fréquences de

Cooling 'C' et de Repompeur 'R' dans le domaine télécom, puis de doubler les fréquences des faisceaux laser avant de les envoyer sur les atomes. L'avantage de cette technologie est l'utilisation extensive de composants télécoms fibrés qui permettent d'avoir un système laser stable et moins dépendant de son environnement. Ces composants fibrés sont également assez fiables de par leur utilisation récurrente dans l'industrie et sont présents à coût intéressant sur le marché.

Les deux systèmes laser D1 et D2 ont été construits de façon similaire [74]. L'idée a été de minimiser autant que possible les pertes de puissance qui viendraient de l'utilisation de composants optiques en espace libre et aussi de pouvoir contrôler les composantes de fréquence de refroidissement 'C' et de repompeur 'R', de façon indépendante. Pour cela, le système est constitué de composants télécoms fibrés avant l'amplification laser et le doublage de fréquence. Dans les bancs lasers D1 et D2, le faisceau laser initial provient d'une diode laser DFB (distributed feedback diode laser ORTEL 1782-ANM-063-55-FC-PM), d'une longueur d'onde de  $1534\text{ nm}$  pour la D2 et de  $1540\text{ nm}$  pour la D1. Ce faisceau initial est séparé en deux avec un coupleur à maintien de polarisation (PM) 50/50 et les deux faisceaux résultants passent par des modulateurs acousto-optiques (AOM). Un des faisceaux passe par l'AOM 1 centré à  $-160\text{ MHz}$ , on note la fréquence du faisceau  $f_1$ . Le deuxième faisceau passe par l'AOM 2 centré à  $110\text{ MHz}$ , on note la fréquence du faisceau  $f_2$ . Les deux AOM ont été choisis de façon à ce que l'écart de fréquence entre les deux faisceaux puisse atteindre  $254\text{ MHz}$ , qui est l'écart d'énergie entre les niveaux hyperfins de l'état fondamental du  $^{41}\text{K}$ . Les deux faisceaux sont par la suite recombinaés avec un coupleur PM 50/50 et le faisceau résultant est envoyé vers un amplificateur à fibre dopée en Erbium (EDFA), qui peut produire une puissance allant jusqu'à  $10\text{ W}$  aux longueurs d'onde que nous utilisons sur les deux systèmes lasers (D1 et D2). Deux asservissements rapides (bande passante de l'ordre du MHz) agissent sur les AOM 1 et 2 pour garantir une puissance constante à l'entrée de l'EDFA.

À la sortie de l'EDFA, le faisceau amplifié passe par un cristal doubleur de fréquence PPLN (Periodically-Poled Lithium Niobate). L'efficacité de doublage est de l'ordre de 18%. Dans le faisceau issu du cristal doubleur, trois composantes de fréquences principales sont présentes :  $P'_1$ ,  $P'_2$  et  $P'_3$ . On peut voir dans la Figure 3.2 comment le choix des composantes C et/ou R est effectué pour chacun des lasers D1 et D2. Un bon choix des fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , contrôlés avec les AOM 1 et 2, nous permet de maximiser la composante voulue en sortie des cristaux de doublage.

À la sortie du banc laser, le faisceau doublé en fréquence issu de chacun des bancs, D1 et D2, est séparé en plusieurs chemins, sur lesquels des désaccords en fréquence sont réalisés avec des AOMs en espace libre, afin d'adapter la fréquence de chacun à l'étape de l'expérience où il va servir. Ces faisceaux

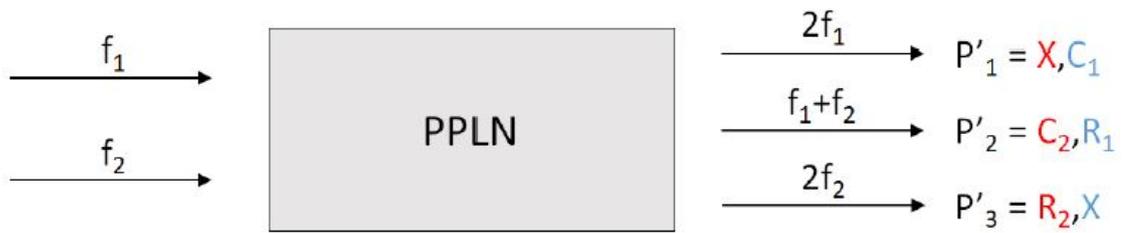


FIGURE 3.2 – Composantes de fréquence dans les faisceaux issus des cristaux PPLN. En rouge les composantes de fréquence du laser D2. En bleu les composantes du laser D1. 'X' représente la composante de fréquence non utilisé pour chaque laser. Figure tirée de [66].

sont ensuite injectés dans des fibres optiques et transportés vers l'expérience. Des fuites sont prises sur chaque chemin et sont envoyées sur des photodiodes connectées à des boîtiers d'asservissement fabriqués par l'atelier électronique du laboratoire. Ces asservissements servent à stabiliser les puissances des faisceaux et à les contrôler finement en rétro-agissant sur les AOMs en espace libre lors des rampes de puissance.

Une deuxième partie des lasers D1 et D2 qui ne sert pas au refroidissement laser est appelée "Ballaste". Elle est utilisée pour la protection des amplificateurs laser EDFA. En effet, lors de la séquence de production du BEC, nous avons besoin d'arrêter totalement l'un ou l'autre des lasers (ou les deux) pendant certaines étapes pour ne pas chauffer le gaz d'atomes. Cet arrêt réalisé en coupant les AOMs fibrés 1 et 2, peut endommager l'EDFA s'il n'y a pas de puissance laser à son entrée. Le fonctionnement du système "Ballaste" repose sur l'utilisation d'un comparateur pour vérifier la puissance laser envoyée vers l'EDFA. Dans le cas où le laser principal est en dessous d'une valeur seuil, le laser Ballaste s'allume pour "seeder" l'amplificateur laser et ainsi éviter son endommagement.

### 3.2.2 Asservissement en fréquence

Des systèmes de stabilisation de fréquences ont été construits pour chacun des lasers D2 et D1. Étant donné que les deux lasers sont coupés à certaines étapes de l'expérience, ces asservissements ne pouvaient pas être réalisés en espace libre. Ils ont donc été réalisés dans le domaine télécom avant le doublage de fréquence.

Pour le laser D2, un système d'absorption saturée de la molécule d'acétylène a été développé par l'équipe pour réaliser l'asservissement dans le domaine télécom [75]. Ce système consiste à utiliser une raie d'absorption de la molécule

d'acétylène comme référence pour le laser du banc D2, en l'occurrence la raie P(15) qui correspond au double de la fréquence de transition D2. Ainsi, en utilisant une boucle d'asservissement, l'écart de la fréquence du laser par rapport à cette référence est continuellement corrigé avant le doublage.

Pour le laser D1, l'asservissement n'a pas été réalisé avec le même système. Cela s'explique par le fait que la raie P(24) de la molécule d'acétylène, correspondant au double de la fréquence de la transition D1, est relativement faible, ce qui ne permettait pas de garantir la stabilité de l'asservissement. Un système indépendant a donc été mis en place : un faisceau issu d'une diode laser Pure Photonics PPCL550 accordable de  $1527.6\text{ nm}$  à  $1565.5\text{ nm}$  est amplifié par un EDFA, puis doublé en fréquence par un cristal PPLN. Ce faisceau doublé est ensuite envoyé sur un système d'absorption saturée utilisant une cellule de  $^{41}\text{K}$ . La fréquence du faisceau doublé est ainsi continuellement comparée à la fréquence de la transition D1 du  $^{41}\text{K}$  et un signal d'erreur est généré pour effectuer une correction sur la diode laser dans le domaine télécom.

Dans la continuité de ce travail de stabilisation des fréquences, j'ai réalisé au début de ma thèse un asservissement de fréquence du laser D1 sur une cavité ultra-stable Fabry-Perot, avec la méthode de Pound-Drever-Hall. Ce système (qui n'est pas encore mis en place sur l'expérience) a été réalisé dans l'optique de remplacer, à long terme, les deux asservissements actuellement présents par un asservissement sur cette cavité pour les deux lasers.

### 3.2.3 Banc Laser pour les pièges optiques

Pour les étapes de refroidissement évaporatif qu'on discutera dans la séquence suivante, une nouvelle architecture laser a été développée par l'équipe. Deux diodes laser sont utilisées dans ce système. Une qu'on appelle "principale", qui est à  $1551\text{ nm}$ , sert à générer le laser qui va sur les atomes pour le piège. La deuxième qu'on appelle "ballaste", qui est à  $1568\text{ nm}$ , sert de protection à l'amplificateur laser quand le laser principal est éteint. Chacun des deux lasers passe par un AOM fibré qui sert à contrôler sa puissance, puis tous les deux sont envoyés dans un amplificateur laser EDFA. À la sortie de l'amplificateur, la lumière est envoyée sur un ensemble de trois miroirs dichroïques placés successivement l'un après l'autre. Ces miroirs filtrent par réflexion une des deux composantes spectrales (celle à  $1568\text{ nm}$ ) et transmettent uniquement la longueur d'onde  $1551\text{ nm}$ , qui est utilisée pour le piège dipolaire. L'ensemble de ces trois miroirs dichroïques a un facteur d'extinction total de  $\sim 10^{-5}$ . Le faisceau transmis à  $1551\text{ nm}$  est ensuite injecté dans une fibre optique PM et envoyé sur les atomes pour réaliser le bras principal du piège optique dipolaire. Une fuite de ce faisceau est prise juste avant l'injection dans la fibre et est envoyée sur une photodiode en espace libre pour asservir la puissance du laser. L'asservissement

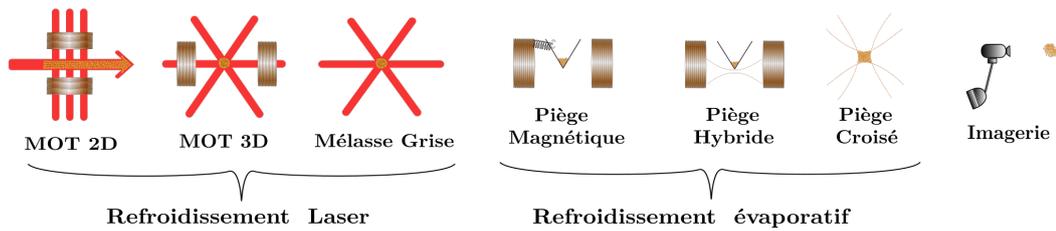


FIGURE 3.3 – Les différentes étapes de l'expérience. De gauche à droite, les trois premières étapes représentent le refroidissement laser, et les trois étapes qui viennent après (avant l'imagerie) représentent le refroidissement évaporatif.

rétroagit sur les AOM qui sont avant l'EDFA pour contrôler la puissance laser.

Un deuxième faisceau laser utilisé comme piège optique est généré en utilisant le ballaste du laser D1, qui n'est pas doublé en fréquence. Ce dernier est contrôlé avec un système d'asservissement qui rétroagit sur un AOM en espace libre, sur lequel le faisceau passe avant son injection dans une fibre pour être envoyé sur les atomes.

### 3.3 Séquence expérimentale

Pour aller d'une vapeur de potassium  $^{41}\text{K}$  à température ambiante vers un gaz ultrafroid, puis vers un BEC, nous devons passer par plusieurs étapes. Ces dernières sont différentes selon l'état et la température du gaz, mais elles visent dans l'ensemble à refroidir le nuage et à augmenter progressivement la densité dans l'espace des phases. Ainsi, la longueur d'onde de De Broglie atteint le même ordre de grandeur que la distance moyenne entre les particules  $\lambda_{DB}/d \sim 1$  et le phénomène de condensation de Bose-Einstein se manifeste. Nous allons dans cette section discuter de ces étapes qui se divisent essentiellement en deux catégories : le refroidissement laser et le refroidissement évaporatif. On peut voir dans la Figure 3.3 les trois premières étapes qui constituent le refroidissement laser et les trois étapes suivantes qui rentrent dans le refroidissement évaporatif.

### 3.3.1 Pièges Magnéto-Optiques 2D et 3D

L'expérience commence avec du potassium à l'état solide dans une petite cellule en titane qui est chauffée à  $80^{\circ}\text{C}$  afin de faire passer le potassium à un état gazeux. Pour migrer le potassium, un gradient de température est mis en place entre la cellule en titane et une cellule à vide où la pression est de l'ordre de  $10^{-9}\text{mbar}$  (Figure 3.4). Une pompe ionique de  $2\text{L/s}$  reliée à cette cellule est en marche continuellement pour garder un bon vide. Elle est également connectée à un onduleur en cas de coupure d'électricité. La cellule est chauffée continuellement à  $40^{\circ}\text{C}$  et tout le système à partir de l'ampoule de potassium jusqu'à l'entrée de la cellule à vide est couvert d'aluminium pour garder une température constante. Un piège magnéto-optique à 2 dimensions (MOT 2D) est réalisé dans la cellule à vide. Le but de ce dernier est de sélectionner les atomes de  $^{41}\text{K}$  parmi les autres isotopes de potassium et aussi de pré-refroidir le gaz.

La méthode du MOT 2D consiste à utiliser 2 faisceaux lasers contrapropageants dans deux directions de l'espace pour ralentir les atomes, et un champ magnétique quadrupolaire à deux dimensions pour les confiner dans un piège allongé selon l'axe du dispositif expérimental. Cette forme allongée s'explique par l'absence de faisceaux laser et de champ magnétique dans cet axe. La puissance des faisceaux lasers utilisés dans le MOT 2D est de  $250\text{mW}$  sur chaque bras à l'entrée du dispositif et le gradient de champ magnétique est de  $11\text{G/cm}$ . En ce qui concerne le désaccord par rapport à la transition D2, ce faisceau contient les deux composantes de fréquence C2 et R2 qui sont respectivement à des désaccords de  $-4.7\Gamma$  et  $-3.3\Gamma$ . Un jet d'atomes est ainsi généré par le MOT 2D et envoyé en continu vers une deuxième chambre à vide nommée : la chambre de science (Figure 3.4), où la pression est de  $10^{-11}\text{mbar}$ . C'est dans celle-ci que vont être réalisées toutes les étapes de refroidissement jusqu'au BEC. Cette cellule est aussi reliée à deux pompes NEX Torr (une NEX Torr D300-5 et une NEX Torr D500-5) pour assurer la qualité du vide, et elles sont aussi connectées à un onduleur. Le passage du jet d'atomes entre les deux cellules à vide est rendu possible par la présence d'un faisceau pousseur qui vient accélérer les atomes vers la chambre de science. Ce faisceau a une puissance laser de  $1.5\text{mW}$  et ne contient que la composante de fréquence C2 à un désaccord  $1.74\Gamma$ . Il permet de gagner un facteur de 2.6 sur le nombre d'atomes dans la chambre de science.

L'arrivée des atomes dans la chambre de science signe une nouvelle étape dans le refroidissement. En effet, un piège magnéto-optique à 3 dimensions (MOT 3D) est réalisé à ce moment de la séquence. Ce dernier est constitué de trois faisceaux contrapropagants dans les trois dimensions de l'espace, qui se croisent au centre de la chambre de science. Ce centre coïncide aussi avec le zéro de champ du piège magnétique quadrupolaire à trois dimensions dont le gradient est de  $5.5\text{G/cm}$ . Les faisceaux du MOT 3D sont polarisés dans une configura-

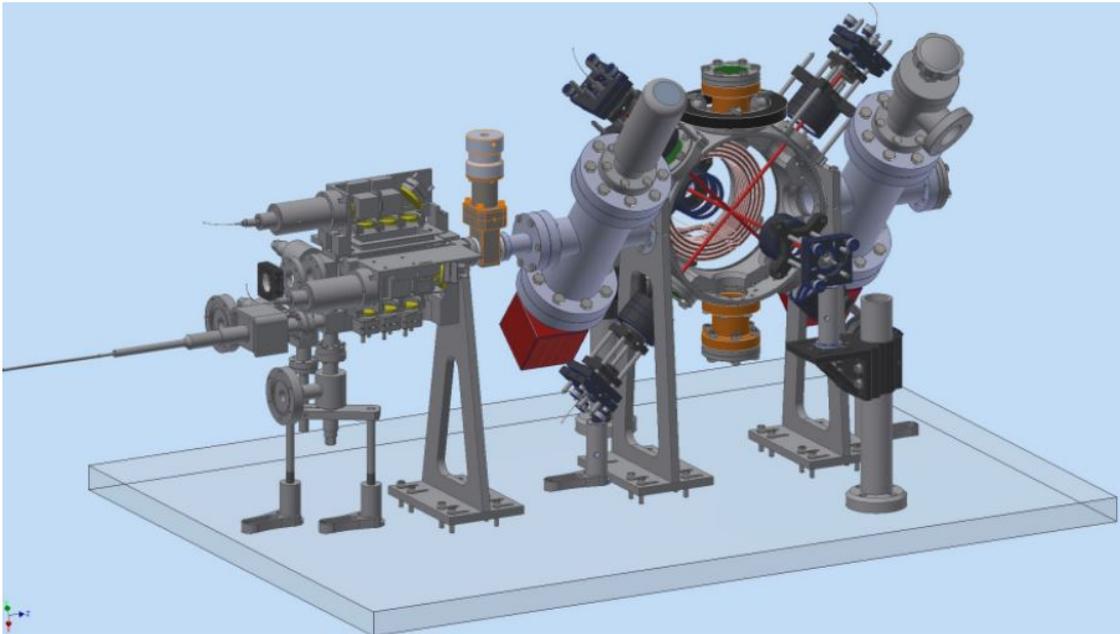


FIGURE 3.4 – Système à vide de l'expérience. La partie gauche correspond au MOT 2D et la partie droite à la chambre de science (MOT 3D). Les deux systèmes sont reliés à l'aide d'un tube différentiel. Toutes les étapes du MOT 3D jusqu'au BEC sont réalisées dans la chambre de science.

tion  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ , et ont une puissance de  $25mW$  chacun avec un rayon de  $11mm$ . Les deux composantes de fréquences C2 et R2 sont présentes sur les faisceaux avec respectivement des désaccords de  $-5.5\Gamma$  et  $-14.4\Gamma$ . On peut voir dans la Figure 3.5 un signal de fluorescence des atomes dans le MOT 3D mesuré par une photodiode, qui montre le chargement du piège pendant la séquence. À la fin de cette étape, nous obtenons un gaz de  $^{41}K$  d'environ  $3 \times 10^9$  atomes, confiné au centre de la chambre de science. La température de ce dernier est de  $4mK$ , ce qui est relativement élevé par rapport aux températures obtenues avec le MOT 3D sur d'autres alcalins, qui sont généralement de l'ordre de la centaine de  $\mu K$ . Ceci vient de l'étroitesse de la structure hyperfine de l'état excité, ce qui induit le dépompage et le réchauffement des atomes. La réalisation d'une mélasse optique avec la transition D1 permet de pallier ce problème [72] [69] [73].

### 3.3.2 Piège Magnéto-Optique Compressé et Mélasse Grise

L'obtention d'un BEC requiert deux conditions essentielles qui sont : une température du gaz inférieure à la température critique  $T_c$  et aussi une forte densité du gaz. La densité dans le MOT 3D est limitée par les phénomènes de

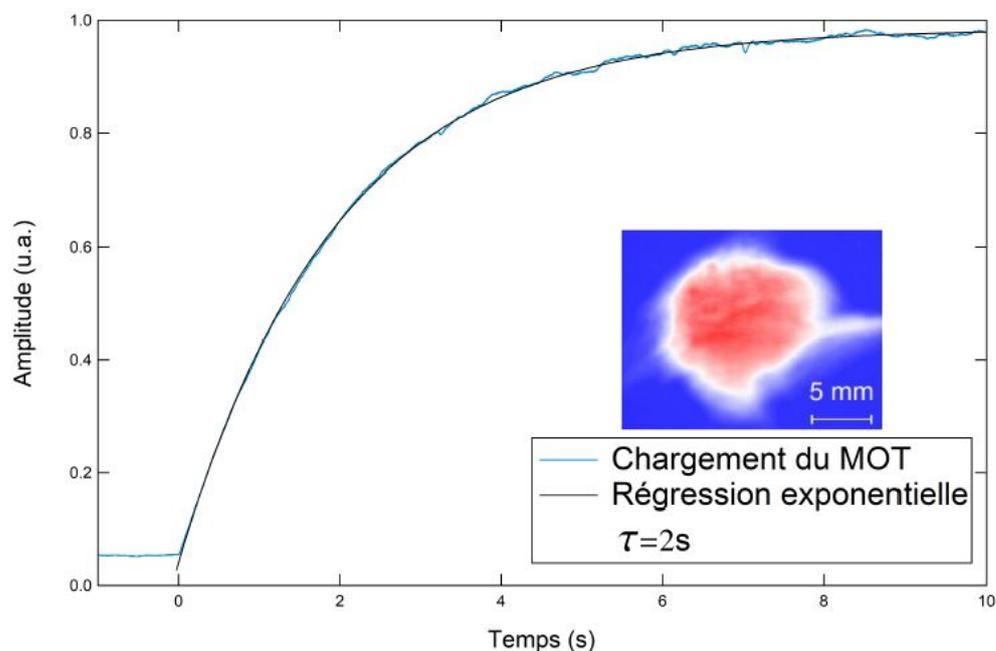


FIGURE 3.5 – Signal de Fluorescence des atomes dans le MOT 3D, collecté par une photodiode. Le temps caractéristique de chargement est de 2s. En inset une image d'absorption du nuage atomique dans le MOT 3D.

diffusion multiple de la lumière et aussi par les collisions assistées par la lumière. Une solution à ce problème consiste à passer par une phase après le MOT 3D qui est appelée le Piège Magnéto-Optique Compressé (en anglais Compressed Magneto-Optical Trap : CMOT) et qui consiste à modifier les paramètres expérimentaux : fréquences et puissances lasers, champs magnétiques... etc, plus rapidement que le temps caractéristique des phénomènes limitants. Cela est effectué dans le but d'augmenter la densité du nuage sans grande perte d'atomes. Sur l'expérience  $^{41}\text{K}$  à Lille, nous utilisons une méthode appelée CMOT "hybride" qui a été développée par l'équipe de Thomas BOURDEL à Palaiseau pour du  $^{39}\text{K}$  [73]. Pour réaliser cette méthode, nous commençons par remplacer la composante de fréquence refroidisseur C2 des faisceaux du MOT (laser D2) par la composante de fréquence C1 en allumant les faisceaux du banc laser D1. Nous gardons en même temps les faisceaux du laser D2 allumés avec seulement la composante R2. Une diminution de la température du nuage est observée dans cette situation, qui est liée à la réalisation d'un refroidissement Sisyphé avec les faisceaux C1 désaccordés vers le bleu. Cela est permis par l'existence d'états "noirs" (non couplés à la lumière) pour les transitions se faisant dans

le même état  $F = 2$ . Les faisceaux R2 sont désaccordés vers le rouge et servent à repomper les atomes. Les fréquences optimales pour le refroidisseur C1 et le repompeur R2 sont respectivement  $\delta_{C1} = 1.5\Gamma$  et  $\delta_{R2} = -3.47\Gamma$ . Les seules forces piègeantes viennent du faisceau repompeur et du gradient de champ magnétique. Ce dernier est donc augmenté avec une rampe linéaire pendant  $10ms$  pour compresser de plus en plus le nuage. Une valeur finale optimale du champ magnétique de  $27.75G/cm$  a été fixée en observant aussi son effet sur l'étape suivante qui est la mélasse grise. À la fin de cette étape, la température du gaz est diminuée jusqu'à  $550\mu K$  et un facteur 8 est gagné sur la densité.

Malgré la diminution de la température avec le CMOT "hybride", elle reste bien supérieure à la limite Doppler du  $^{41}K$  qui est d'environ  $145\mu K$ . Comme mentionné à la fin de la section 3.3.1, l'équipe a décidé d'utiliser une méthode consistant à réaliser une mélasse grise avec la raie D1, de la même manière que cela a été fait dans l'équipe de Thomas BOURDEL sur du  $^{39}K$  [73]. Le principe de cette méthode réside dans une combinaison d'un refroidissement Sisyphes pour ralentir les atomes et d'un piégeage des atomes qui sont dans la classe de vitesse nulle dans des états noirs, pour ainsi diminuer les effets de chauffage et de pompage. Sur l'expérience, cette méthode est réalisée en deux étapes. La première consiste à éteindre les faisceaux du laser D2 et le champ magnétique, et à charger tous les atomes dans une mélasse faite avec les faisceaux D1. Ces derniers sont allumés à pleine puissance pour charger un maximum d'atomes et les désaccords optimaux sont les suivants :  $\delta_{C1} = \delta_{R1} = 5.2\Gamma$ . La deuxième étape consiste à effectuer le refroidissement en diminuant la puissance des faisceaux avec une rampe linéaire pendant  $15ms$ . Nous pouvons observer sur la Figure 3.6 que la température diminue à mesure que la durée de la rampe augmente pour enfin se stabiliser à une valeur de  $16\mu K$ . Nous arrivons ainsi à la fin de cette étape de mélasse grise à diminuer la température du gaz jusqu'à  $16\mu K$  en ayant un nombre d'atomes de  $2.4 \times 10^9$ , et donc très peu de pertes par rapport au MOT 3D.

À la fin de la mélasse grise, nous utilisons le refroidissement évaporatif, qui est un refroidissement où le nombre d'atomes n'est plus conservé. En effet, l'idée de ce dernier est de piéger tous les atomes dans un piège et ensuite d'éjecter les plus énergétiques d'entre eux pour que les moins énergétiques ("les plus froids") thermalisent à l'aide des collisions élastiques, pour ainsi diminuer la température du gaz d'atomes et augmenter sa densité. Dans l'expérience, nous utilisons cette technique sur différents pièges à la suite, en profitant des avantages de chacun sans trop subir leurs inconvénients. La première des étapes du refroidissement évaporatif dont nous allons parler dans la suite est le piège ma-

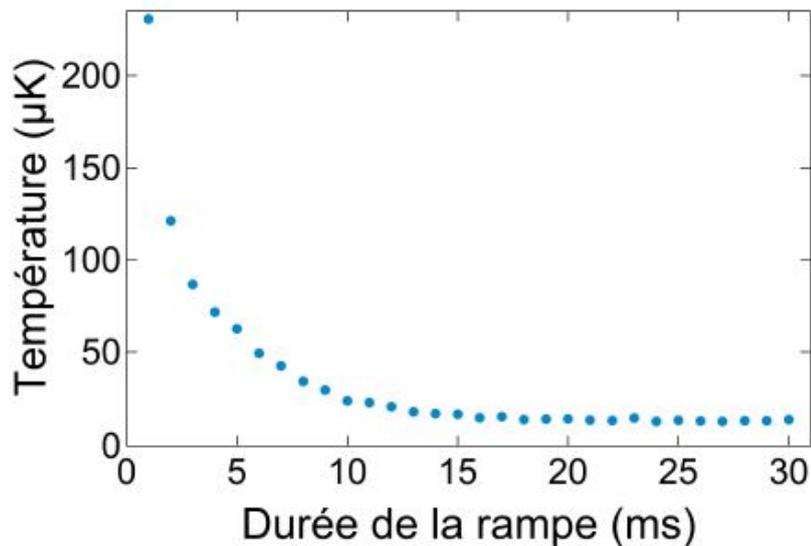


FIGURE 3.6 – Température des atomes dans la mélasse grise en fonction de la durée de la rampe de puissance

gnétique, dont le chargement depuis la mélasse grise demande le passage par un pompage optique vers l'état  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  pour éviter les pertes d'atomes. Nous verrons dans la section suivante pourquoi spécifiquement cet état. Cette étape de pompage optique consiste à utiliser un champ magnétique constant pour séparer les sous-états Zeeman des atomes et envoyer sur les atomes un faisceau laser résonant dans l'axe de quantification fixé par la position des bobines de champ magnétique. Ce faisceau contient les deux composantes C1 et R1 et est polarisé  $\sigma^+$ . L'idée est donc d'exciter les atomes d'un état  $|F, m_F\rangle$  vers un état  $|F, m_F + 1\rangle$  et de répéter le cycle d'excitation jusqu'à mettre tous les atomes dans l'état  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  où il n'est plus possible de les exciter. Le chargement du piège magnétique se fait à partir de là avec une efficacité de 100%.

### 3.3.3 Piège Magnétique et évaporation radio-fréquence

Cette étape de refroidissement évaporatif est effectuée en générant un piège magnétique quadrupolaire avec les bobines principales de l'expérience. L'effet du champ magnétique résultant sur les atomes diffère selon leur espèce et leurs niveaux d'énergie. Ainsi, dans un piège magnétique, les atomes, selon leurs propriétés, vont vouloir minimiser leur énergie soit en cherchant le maximum de champ magnétique dans le piège (En anglais : *High field seekers*), soit en cherchant le minimum de champ (En anglais : *Low field seekers*). Dans le premier

cas, il n'est pas possible de piéger les atomes car on n'a pas de maximum de champ magnétique en espace libre. Il faut donc faire en sorte que les atomes soient dans un état attiré par le zéro du piège magnétique avant de les charger dans ce dernier. Dans le cas du  $^{41}\text{K}$ , trois sous-états des états hyperfins  $F = 1$  et  $F = 2$  satisfont cette condition et qui sont :  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ,  $|F = 2, m_F = 1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = 2\rangle$ . Le dernier de ces trois ( $|F = 2, m_F = 2\rangle$ ) a été choisi par l'équipe pour le piégeage magnétique pour deux raisons. La première est que le transfert de tous les atomes vers cet état se fait relativement facilement avec un pompage optique. La deuxième est que ce dernier possède le plus de sensibilité au champ magnétique ( $m_F = 2$ ). Après avoir transféré les atomes vers l'état  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  avec le pompage optique, le piège magnétique est réalisé en créant un gradient de champ de  $55.5\text{G/cm}$  avec les bobines principales. La profondeur du piège pour les atomes de cet état est de l'ordre du  $m\text{K}$  et leur temps de vie dans celui-ci est d'environ  $20.3\text{s}$ .

Lors du piégeage du gaz d'atomes dans le piège magnétique, sa densité augmente considérablement mais aussi sa température. Pour réduire cette dernière, une évaporation est réalisée à l'aide d'un rayonnement radio-fréquence (rf), qui permet de varier la profondeur du piège. Ce rayonnement rf transfère les atomes les plus chauds de l'état  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  qui est piégeant, vers l'état  $|F = 1, m_F = 1\rangle$  qui est anti-piégeant, entraînant ainsi leur éjection du piège. Cela est réalisé dans l'expérience avec une antenne hélicoïdale fabriquée dans l'équipe. Cette dernière génère un rayonnement avec une fréquence qui diminue linéairement de  $285\text{MHz}$  jusqu'à  $260\text{MHz}$  pendant  $5\text{s}$ . Nous obtenons à la fin de l'évaporation un gaz de  $53 \times 10^6$  atomes, avec un gain de densité d'un facteur  $\sim 10$  et une température de  $34\mu\text{K}$ . Il n'est plus possible d'évaporer davantage en dessous de  $260\text{MHz}$  car cela induit d'importantes pertes Majorana qui empêchent la condensation. La solution que l'équipe a choisie pour pallier ce problème a été de passer à un piège hybride.

### 3.3.4 Piège Hybride

Le refroidissement évaporatif dans le piège hybride est une méthode qui a été développée dans l'équipe de Trey PORTO au NIST en 2009 et qui a permis de condenser des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  [76]. Elle a été réalisée depuis, avec succès, dans d'autres expériences avec différentes espèces atomiques, dont le potassium [72] [77] [78] [79]. Ce piège consiste en une combinaison du piège magnétique, décrit dans la section précédente, avec un piège optique réalisé avec un faisceau laser positionné en dessous du zéro de champ magnétique. L'utilisation de ces deux pièges ensemble permet de s'affranchir des pertes Majorana qui sont présentes dans le piège magnétique. Dans l'expérience, les deux pièges sont allumés en même temps et les atomes sont chargés dans le piège magnétique, qui

a comme avantage un grand volume de capture. Ensuite, l'évaporation dans le piège magnétique est faite avec un rayonnement rf. Quand la température du gaz commence à diminuer, les atomes les plus proches du zéro de champ magnétique "tombent" dans le piège optique où ils peuvent rester s'ils subissent des collisions élastiques. À la fin de l'évaporation rf, le piège hybride est chargé en diminuant le gradient de champ magnétique qui compose le piège avec une rampe linéaire pendant 2s de 55G/cm jusqu'à 7G/cm, qui est une valeur de gradient juste en dessous de la valeur de compensation de la gravité. Ce gradient permet de compenser l'effet de la gravité sur le piège optique et d'effectuer un confinement dans la direction de l'axe du faisceau laser, sur laquelle le piège est moins confinant. Ce faisceau est d'une longueur d'onde de 1551nm et d'un waist de 42 $\mu$ m, avec une puissance qui peut aller jusqu'à 5W, ce qui fait une profondeur de piège de 300 $\mu$ K. Sur les 53 $\times 10^6$  atomes du piège magnétique, 5.4 $\times 10^6$  atomes sont chargés dans le piège hybride. À partir de ce moment, l'évaporation dans le piège hybride est faite en diminuant la puissance du faisceau laser de 5W jusqu'à 30mW avec une rampe exponentielle d'un temps caractéristique de 1.1s. Nous obtenons à la fin de l'évaporation un condensat de Bose-Einstein de 250  $\times 10^3$  atomes dans l'état  $|F = 2, m_F = 2\rangle$ .

Le piège hybride présente néanmoins un inconvénient, à savoir qu'il ne permet pas de contrôler les interactions avec les résonances de Feshbach, en raison de l'utilisation des bobines principales de l'expérience pour le piège magnétique. En conséquence, l'équipe a choisi de l'utiliser comme étape intermédiaire. Par la suite, un piège optique croisé est mis en place afin de réaliser le BEC pour ainsi permettre l'utilisation des bobines principales pour l'exploration des résonances de Feshbach.

### 3.3.5 Piège Optique Croisé

Le piège optique croisé est réalisé en rajoutant un autre faisceau laser croisant perpendiculairement le faisceau laser du piège hybride. Le faisceau rajouté a une longueur d'onde de 1540nm et un waist de 118 $\mu$ m, avec une puissance qui peut aller jusqu'à 2.2W. L'évaporation dans le piège optique croisé est effectuée après le piège magnétique et le piège hybride. Ainsi, après le chargement des atomes dans le piège hybride, le deuxième faisceau du piège optique est allumé et une évaporation est faite sur le premier faisceau en diminuant exponentiellement pendant 1s, avec un temps caractéristique de 300ms, sa puissance de 5W jusqu'à 230mW. À cette valeur de puissance, la profondeur des deux pièges optiques est équivalente à  $\sim 14\mu$ K. Le gradient de champ magnétique qui compose le piège magnétique est ensuite diminué en 900ms jusqu'à 0G/cm. À la fin de l'étape de chargement, 3  $\times 10^6$  atomes sont chargés dans le piège optique croisé avec un temps de vie de 10.9s.

L'évaporation dans le piège optique croisé est réalisée en diminuant la puissance des deux faisceaux simultanément. Sur le premier faisceau (qui servait aussi pour le piège hybride), la puissance est diminuée exponentiellement de  $230mW$  jusqu'à  $30mW$  pendant  $900ms$  avec un temps caractéristique de  $375ms$ . Sur le deuxième faisceau, la puissance est diminuée avec la même rampe de  $1800mW$  jusqu'à  $270mW$ . On remarquera qu'il y a un facteur d'environ 9 entre les puissances du premier et du deuxième faisceau du piège optique croisé. Cela est dû à la présence d'un facteur 3 entre leurs waists. Nous arrivons ainsi à réaliser un condensat de Bose-Einstein de  $200 \times 10^3$  atomes dans l'état  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  avec une séquence totale (du MOT 3D jusqu'au piège optique croisé) de  $15s$ . Nous pouvons également effectuer des transferts d'atomes entre les niveaux hyperfins avec la méthode de balayage Landau-Zener, afin de générer des BEC dans d'autres niveaux. Cette méthode consiste à appliquer un champ magnétique constant pour séparer les sous-états Zeeman des atomes, puis à balayer la fréquence d'une onde rf autour de la transition. L'évaporation dans le piège dipolaire est réalisée après le transfert d'atomes et nous obtenons ainsi des condensats dans l'état  $|F = 1, m_F = 1\rangle$  avec  $500 \times 10^3$  atomes (Figure 3.7) et dans l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  avec  $80 \times 10^3$  atomes.

Dans les expériences que nous monterons dans le chapitre 5, nous n'utilisons pas le BEC mais un nuage thermique d'un nombre d'atomes de  $\sim 10^6$  à une température de  $2\mu K$ . Cela s'explique par la présence d'interactions intra-atomiques dans le BEC, qui pourraient influencer le comportement à la transition de phase d'Anderson. Le BEC est néanmoins utilisé pour aligner et évaluer la stabilité de l'onde stationnaire pulsée, qui est nécessaire pour réaliser le Rotateur Frappé Atomique. Nous verrons cela dans le chapitre 4.

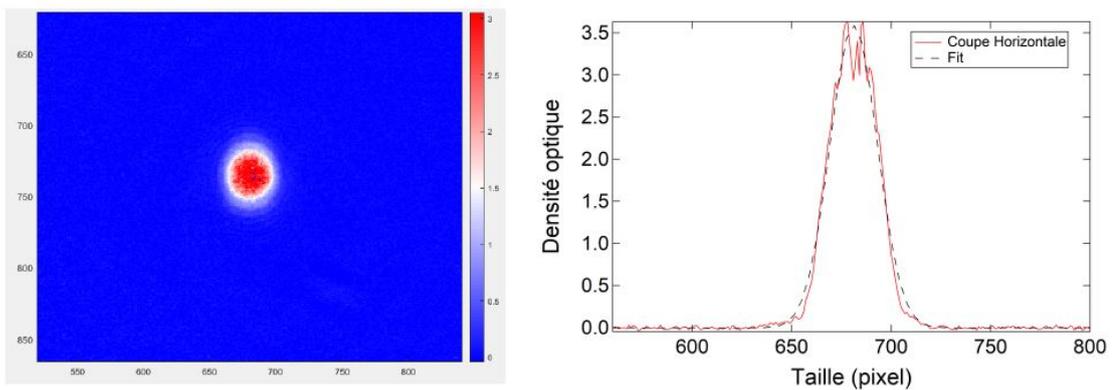


FIGURE 3.7 – Image d'un BEC quasi-pur de  $500 \times 10^3$  atomes dans l'état  $|F = 1, m_F = 1\rangle$ . L'image est prise après un temps de vol de  $27ms$ .

### 3.4 Système d'imagerie

La méthode utilisée pour extraire des informations sur les propriétés des nuages atomiques est l'imagerie par absorption. Cette dernière nous permet, en faisant une image du nuage d'atomes, de mesurer sa taille, le nombre d'atomes le composant, sa densité, sa température...etc. Dans cette section, nous allons pour commencer décrire ce système d'imagerie tel qu'il était à mon arrivée dans l'équipe et pendant toute une partie de ma thèse. Ensuite, nous allons discuter des changements qui ont été faits sur ce système pour permettre la réalisation des expériences qui seront décrites dans le chapitre 5.

L'imagerie par absorption consiste à envoyer un faisceau résonant sur un nuage atomique, dont une partie sera absorbée par ce dernier. Une caméra CCD située après le nuage atomique prend une image du faisceau avec l'ombre des atomes là où la lumière est absorbée. En pratique, trois images sont prises par la caméra : une image avec le faisceau et le nuage atomique qui est une mesure du nuage. Une image avec seulement le faisceau qui nous permet d'estimer le nombre de photons absorbés par le nuage. Enfin, une image sans faisceau et sans nuage atomique est prise pour nous renseigner sur la lumière parasite qui vient de l'environnement de la caméra et qui doit être soustraite aux autres images pour corriger la mesure. C'est à partir du traitement de ces images que des informations sur les atomes peuvent être extraites.

Un système d'imagerie basé sur cette méthode a été construit dans notre expérience pour imager le BEC. Il est présenté en détail dans la thèse de Maxime Denis [66]. Ce système consiste en deux doublets achromatiques  $f_1$  et  $f_2$  d'une focale de  $200\text{mm}$  disposés comme montré dans le schéma de la Figure 3.8. Un système de ce type, communément appelé  $4f$ , impose une distance entre les atomes et la caméra de  $800\text{mm}$ . La table ayant une longueur "droite" disponible



FIGURE 3.8 – Schéma du système d'imagerie du BEC tel qu'il a été construit initialement.  $|M| = 1$ .

de seulement  $700\text{mm}$  de chaque côté de la chambre de science, il a fallu couder le système en utilisant un miroir après la deuxième lentille juste avant la caméra. Ce dispositif, avec une limite de résolution de  $12.4\mu\text{m}$ , permet d'imager des objets de la taille du BEC ( $\sim 100\mu\text{m}$ ) avec un grandissement  $M = -1$ . La caméra utilisée dans ce système est une Hamamatsu orca R2, dont la puce de détection est constituée d'une matrice de photodétecteurs d'une taille de  $1344 \times 1024$ , ce qui nous produit des images de la même taille en pixels. La surface de chaque pixel est :  $S = 6.45 \times 6.45\mu\text{m}^2$ .

Le système d'imagerie décrit, avec les propriétés de la caméra, limite la taille maximale des nuages atomiques que nous pouvons mesurer, notamment lors de l'application d'un potentiel lumineux sur les atomes. C'est le cas du modèle Rotateur Frappé atomique, dans lequel ce potentiel est pulsé. En effet, dans ce cas, des ordres supérieurs d'impulsion sont chargés et les distributions en impulsion mesurées sur la caméra sont étalées dans l'axe de ce potentiel. Cet étalement dépend des propriétés du potentiel lumineux pulsé comme le nombre de kicks et la puissance du laser, ainsi que du temps de chute du nuage atomique entre la position du piège dipolaire et la prise de l'image par la caméra (Temps de vol, en anglais : *Time of flight* : TOF). Ainsi, quand les paramètres cités augmentent, l'étalement des distributions en impulsions sur la caméra augmente aussi. Ce système d'imagerie permet de mesurer des nuages thermiques kickés d'une taille maximale sur l'axe du potentiel lumineux de l'ordre de  $\sim \pm 35 \times 2\hbar k_L^*$ , à un temps de vol de  $20\text{ms}$ .

Dans les expériences de rotateur frappé atomique qui seront décrites dans le chapitre 5, un nombre de kicks et des valeurs du couple  $(K, \varepsilon)$  ( $\propto$  intensité laser) nous sont imposés pour l'observation et la bonne caractérisation des phénomènes de ce modèle. Le nombre de kicks que nous effectuons sur les nuages atomiques peut aller jusqu'à 500 kicks. Pour le couple  $(K, \varepsilon)$ , les valeurs peuvent aller jusqu'à  $(7, 0.52)$  dans ces expériences (pour  $\hbar k = 2.89$ ). Nous verrons plus en détail le choix de ces paramètres dans les deux chapitres suivants. Ces paramètres choisis dans nos expériences peuvent mener au chargement d'ordres d'impulsions allant jusqu'à  $\sim \pm 80 \times 2\hbar k_L$ . Nous avons donc constaté que le système d'imagerie tel qu'il était ne nous permettait pas de mesurer les distributions en impulsion, car les nuages atomiques kickés, lorsqu'ils étaient imagés, sortaient du champ de la caméra sur l'axe du potentiel lumineux.

La solution que nous avons mise en place pour pallier à cette limitation a été de changer le système d'imagerie afin de diminuer son grandissement, pour ainsi pouvoir mesurer des nuages plus étalés sur la même caméra. Le changement que

---

\*. Dans le modèle du Rotateur Frappé atomique, la mesure de l'impulsion se fait en unités de deux fois la vitesse recul :  $2\hbar k_L$ .

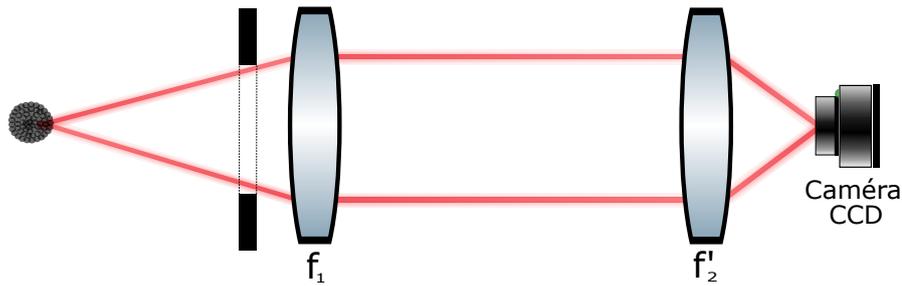


FIGURE 3.9 – Schéma du système d'imagerie du BEC après le changement de la lentille.  $M_{exp} = 0.394$ .

nous avons réalisé consiste à remplacer le doublet achromatique  $f_2 = 200\text{mm}$  par un autre de la même taille et de la même qualité mais avec une focale différente  $f'_2 = 75\text{mm}$ . Cela diminue la longueur du système d'imagerie à  $550\text{mm}$ , ce qui fait qu'il est désormais disposé sur la table optique au niveau des atomes sur un seul axe, sans coude. Le nouveau système d'imagerie est présenté schématiquement dans la Figure 3.9. Pour estimer expérimentalement le grandissement de ce système, nous comparons la distance mesurée expérimentalement que parcourent les atomes pendant leur chute en un temps de vol donné, à la distance théorique de chute pendant ce même TOF ( $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ). La mesure expérimentale de la distance de chute est effectuée en prenant la position des atomes sur la caméra pour différents TOFs et en convertissant la distance entre ces positions du pixel au mètre ( $1 \text{ pixel} = 6.45 \mu\text{m}$ ). Nous mesurons avec cette méthode un grandissement de  $M_{exp} = 0.394$  pour notre nouveau système d'imagerie. Nous pouvons avec ce dernier mesurer des distributions en impulsions étalées sur  $\sim \pm 90 \times 2\hbar k_L$  à un TOF de  $20 \text{ ms}$ <sup>†</sup>. Pour finir, un autre avantage de cette diminution du grandissement du système d'imagerie réside dans l'amélioration du rapport signal/bruit sur la caméra. Cela s'explique par le fait que le même signal qu'auparavant est maintenant concentré sur un plus petit nombre de pixels, rendant ainsi possible la mesure de distributions en impulsion certes moins résolues, mais aussi moins bruitées.

<sup>†</sup>. Il faudrait souligner que c'est aussi possible de mesurer des distributions en impulsions encore plus étalées, ou avec un meilleur rapport signal/bruit, en réduisant le TOF. Toutefois, dans ce cas, il est important de s'assurer que les mesures soient effectuées après un TOF suffisant pour garantir que les distributions mesurées soient indépendantes des distributions initiales.

### 3.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre fait une brève description de notre expérience de condensat de Bose-Einstein de potassium 41. Nous avons dans un premier temps montré la structure atomique du  $^{41}\text{K}$  et ses spécificités. Ensuite, nous avons présenté les systèmes lasers qui permettent de réaliser les différentes étapes de refroidissement. Dans un second temps, nous avons décrit les différentes étapes de l'expérience jusqu'à la réalisation du BEC, en passant du refroidissement laser au refroidissement évaporatif. Enfin, nous avons montré le système d'imagerie par absorption qui est utilisé dans l'expérience, ainsi que les améliorations que nous avons apportées dessus pendant ma thèse.

La génération de nuages atomiques avec ce dispositif est la première étape pour la réalisation expérimentale du Rotateur Frappé Atomique. Nous allons voir dans le prochain chapitre la seconde étape, qui est la réalisation de l'onde stationnaire pulsée qui sert à "kicker" le nuage atomique.

---

## Dispositif onde stationnaire pulsée

---

### Sommaire du présent chapitre

<b>4.1 Généralités sur les réseaux optiques</b>	<b>66</b>
<b>4.2 Banc Laser Pulsé</b>	<b>68</b>
4.2.1 paramètres $K$ et $\vec{k}$ . . . . .	69
4.2.2 Système laser . . . . .	70
4.2.3 Amélioration de la stabilité de la puissance laser . .	71
<b>4.3 Onde stationnaire pulsée</b>	<b>75</b>
<b>4.4 Paramètres de l'onde stationnaire pulsée</b>	<b>79</b>
4.4.1 Désaccord du laser pulsé . . . . .	79
4.4.2 Homogénéité de $K$ . . . . .	81
4.4.3 Largeur des impulsions lumineuses . . . . .	82
<b>4.5 Expérience du Rotateur Frappé atomique</b>	<b>84</b>
4.5.1 Alignement de l'onde stationnaire . . . . .	85
4.5.2 Détermination expérimentale de $K$ . . . . .	85
4.5.3 Calibration et stabilité de $K$ . . . . .	88
4.5.4 Réalisation expérimentale du Rotateur Frappé atomique . . . . .	89
<b>4.6 Conclusion</b>	<b>91</b>

Deux ingrédients sont essentiels pour réaliser le Rotateur Frappé atomique. Nous avons discuté dans le chapitre précédent du premier d'entre eux, qui est

le nuage d'atomes ultrafroids. Le deuxième ingrédient consiste en un potentiel de perturbation pulsé périodiquement, qui peut être réalisé expérimentalement avec un potentiel lumineux pulsé appliqué aux atomes. Ce dernier est mis en place en utilisant une onde lumineuse stationnaire sur les atomes, qui sera allumée périodiquement pendant des durées très courtes, pour ainsi appliquer les kicks du Rotateur Frappé atomique. L'originalité de notre démarche réside dans le choix d'implémenter un laser fonctionnant dans un régime pulsé, en utilisant un amplificateur télécom avec un doublage en fréquence, proche de la transition D1 du potassium.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par présenter quelques aspects théoriques sur le potentiel lumineux pulsé, et nous discuterons par la suite de sa réalisation expérimentale. Cette dernière passe par deux étapes qui sont : l'implémentation d'un laser pulsé dans l'infrarouge ( $\sim 1540\text{ nm}$ ), puis la mise en place de l'onde stationnaire sur les atomes dans le proche infrarouge ( $\sim 770\text{ nm}$ ). Nous montrerons après cela comment le choix des différents paramètres expérimentaux de l'onde stationnaire pulsée a été fait. Nous finirons par discuter de l'alignement de l'onde stationnaire pulsée sur les atomes, ainsi que de la détermination expérimentale du paramètre de stochasticité  $K$ , et nous verrons une observation de la localisation dynamique avec notre système.

## 4.1 Généralités sur les réseaux optiques

Les réseaux optiques sont un outil souvent utilisé dans le domaine des atomes froids pour créer des potentiels lumineux avec des paramètres ajustables. Ils rappellent, par exemple, les potentiels périodiques des réseaux cristallins. La version la plus simple d'un réseau optique est en dimension une, où il peut être réalisé en superposant deux ondes lumineuses contre-propageantes. Une version plus élaborée consiste à mettre en place les deux faisceaux contre-propageants avec un certain angle entre eux, pour pouvoir contrôler la période spatiale du réseau. Les atomes ultrafroids sont ensuite piégés dans ces réseaux pour réaliser différents types d'expériences.

Dans le cas où le désaccord laser est relativement proche d'une résonance atomique, mais néanmoins très grand devant la largeur naturelle (afin de négliger l'émission spontanée), nous pouvons étudier l'interaction entre les atomes et le réseau optique dans l'approximation d'un atome à deux niveaux. Dans cette dernière, une seule force est essentiellement présente, qui est la force dipolaire.

Elle s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{dip} &= -\vec{\nabla}V_{dip} \\ &= -\frac{\hbar\Gamma^2}{4\Delta_L}\vec{\nabla}\frac{I}{I_s},\end{aligned}\quad (4.1)$$

Où le potentiel dipolaire  $V_{dip}$  est écrit en fonction des paramètres suivants :

$\Gamma$  : la largeur naturelle de la transition atomique adressée.

$I$  : L'intensité lumineuse.

$I_s$  : L'intensité de saturation de la transition atomique.

$\Delta_L$  : Le désaccord de la fréquence du laser par rapport à la transition atomique.

Dans une vision semi-classique, cette force est issue de l'interaction entre le dipôle induit par le champ électrique des lasers du réseau optique, et le gradient de ce champ électrique. Le potentiel dipolaire dépend du signe du désaccord du laser ' $\Delta_L$ ' par rapport à la transition atomique. Ce dernier attire les atomes vers les régions de haute intensité lumineuse pour un désaccord négatif  $\Delta_L < 0$  (désaccord vers le rouge), et vers les régions de basse intensité lumineuse pour  $\Delta_L > 0$  (désaccord vers le bleu).

Une autre force est présente lors de l'interaction des atomes avec le réseau optique, qui est la force de pression de radiation, qui dépend du désaccord de la façon suivante :

$$\vec{F}_{pre} \propto \frac{1}{\Delta_L^2}.\quad (4.2)$$

Cette force est due à un transfert d'impulsions des photons du réseau optique vers les atomes, ce qui provoque un effet d'émission spontanée.

La décroissance rapide de la force de pression de radiation en fonction du désaccord  $\Delta_L$ , comparée à la force dipolaire, permet d'éviter ces effets d'émission spontanée, qui peuvent limiter les expériences effectuées dans les réseaux optiques. L'émission spontanée est plus faible quand le désaccord est grand, mais la force dipolaire aussi. Il faut donc faire le bon compromis entre le désaccord et l'intensité des lasers utilisés.

Il existe deux façons de réaliser un réseau optique en dimension une. La première est de construire une onde stationnaire sur les atomes en superposant deux faisceaux lasers contre-propageants comme introduit au début de cette section. Ces derniers ont la même pulsation  $\omega_L = k_L c$ , et la même amplitude du champ électrique  $\mathcal{E}_0$ . Le champ électrique total dans ce cas s'écrit comme suit :

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0(t) \{ \exp[-i(k_L x - \phi_1(t))] + \exp[i(k_L x + \phi_2(t))] \} \vec{e}_x, \quad (4.3)$$

avec  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les phases des lasers et  $\mathcal{E}_0(t) = \mathcal{E}_0 \exp(i\omega_L t)$ . À partir de ça, l'intensité lumineuse est donnée par :

$$I = |\mathcal{E}|^2 = 2|\mathcal{E}_0|^2 [\cos(2k_L x + \phi_2(t) - \phi_1(t)) + 1], \quad (4.4)$$

avec  $\phi_2(t) - \phi_1(t) = \phi_2 - \phi_1 + \Delta\phi$ , où  $\Delta\phi$  est la différence de phase accumulée sur la différence de chemin entre les deux faisceaux. Dans cette disposition, il est possible de construire le réseau optique dans la direction horizontale ou verticale, car l'indépendance des deux faisceaux permet le contrôle de la phase, et donc la compensation de la différence de phase entre les deux lasers. Cela est d'autant plus important dans la direction verticale, car une importante différence de phase est accumulée entre le faisceau 'montant' et celui 'descendant' du fait de la chute des atomes.

La deuxième façon de réaliser le réseau optique consiste en l'utilisation d'un seul faisceau laser rétro-réfléchi avec un miroir (pour qu'il soit superposé sur lui-même). Dans ce cas, les phases entre "l'aller" et le "retour" sont égales et l'intensité s'écrit comme suit :

$$I = 2|\mathcal{E}_0|^2 [\cos(2k_L x) + 1]. \quad (4.5)$$

Cette méthode ne peut être réalisée que dans la direction horizontale à cause de l'absence du contrôle de la phase, mais elle a comme avantage d'être relativement simple à mettre en place.

La réalisation du modèle du Rotateur Frappé atomique "idéal" suppose l'application d'un réseau optique pulsé périodiquement, avec des impulsions infiniment courtes assimilées à une série de distributions de Dirac. Ces impulsions infiniment courtes ne sont, évidemment, pas réalisables expérimentalement. Néanmoins, une bonne approximation du modèle idéal peut être réalisée en expérience, en utilisant des impulsions laser d'une durée  $\tau$  très courte comparée à leur période  $T$ . Dans cette approximation, il sera possible de négliger le mouvement atomique pendant l'application des impulsions de potentiel.

## 4.2 Banc Laser Pulsé

Pour la réalisation du réseau optique pulsé du Rotateur Frappé, nous avons choisi une méthode différente de ce qui se fait habituellement dans ce type d'expériences. En effet, que ce soit dans l'ancienne expérience de l'équipe avec des atomes de césium ou dans d'autres expériences de Rotateur Frappé [80], les impulsions du réseau optique sont réalisées en coupant rapidement un laser continu avec un modulateur acousto-optique (AOM). Cette méthode a comme avantage d'être relativement simple à réaliser, mais limite la largeur des impul-

sions au temps de coupure de l'AOM. Les impulsions de lumière créées dans ces expériences sont typiquement de l'ordre de quelques centaines de nanosecondes. La nouvelle méthode qui a été mise en place pour générer les impulsions consiste donc à s'affranchir de la limite de l'AOM en utilisant un système laser pulsé [81]. L'avantage de cette approche est qu'elle permet de générer des impulsions lumineuses de l'ordre de quelques nanosecondes avec des puissances crête allant jusqu'au kilowatt. En effet, l'utilisation d'un amplificateur laser pulsé permet de "décharger" toute l'énergie emmagasinée dans le milieu amplificateur de manière très efficace, uniquement dans les impulsions. On s'attend ainsi à des puissances crête très grandes, concentrées sur des durées très courtes.

Pour la réalisation du Rotateur Frappé sur l'expérience Potassium, nous avons choisi de kicker les atomes en s'adressant à la transition atomique D1, qui a une structure hyperfine moins complexe que la transition D2. Pour cela, il a donc fallu construire un laser pulsé à une longueur d'onde de  $\sim 770nm$ . Nous avons procédé de la même façon que pour les lasers de refroidissement en utilisant un amplificateur laser pulsé dans le domaine Infra-Rouge (IR) ( $\sim 1550nm$ ), puis en doublant la fréquence du faisceau laser généré pour atteindre la longueur d'onde de la transition D1. L'avantage ici est qu'en plus de pouvoir générer des impulsions très courtes, les puissances crêtes importantes issues de l'amplificateur pulsé permettent un doublage en fréquence efficace pour avoir des puissances crêtes tout aussi importantes sur le faisceau laser doublé.

### 4.2.1 paramètres $K$ et $\bar{k}$

Pour étudier le Rotateur Frappé atomique avec notre dispositif laser pulsé, il faut pouvoir contrôler les deux paramètres du système : la constante de Planck effective  $\bar{k}$  et le paramètre de stochasticité  $K$ .

La constante de Planck effective  $\bar{k}$  dans le modèle du Rotateur Frappé atomique est calculée avec la formule suivante :

$$\bar{k} = \frac{(4\pi)^2 \hbar T}{M\Lambda^2}. \quad (4.6)$$

La masse des atomes utilisés dans l'expérience ( $^{41}K$ ), et la longueur d'onde du laser pulsé ne changeant pas dans notre système ( $\sim 770nm$ ),  $\bar{k}$  ne dépend essentiellement que de la période des impulsions  $T$ .

En ce qui concerne le paramètre de stochasticité  $K$ , il peut être calculé théoriquement avec l'expression donnée dans l'équation 2.7, où  $V_0 = \frac{\hbar\Gamma^2 I}{2\Delta_L I_s}$ . Ainsi, on obtient :

$$K = \frac{4\pi^2 \hbar T \tau \Gamma^2 I}{2\Delta_L M \Lambda^2 I_s}. \quad (4.7)$$

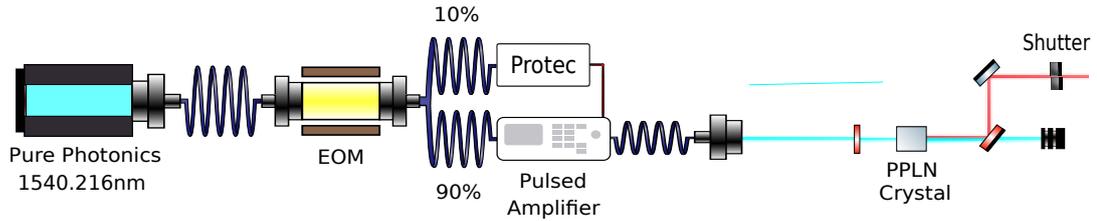


FIGURE 4.1 – Schéma du système laser pulsé 770nm

Ce paramètre dépend aussi de la masse des atomes utilisés dans l'expérience et de la longueur d'onde du laser pulsé, qui sont constants. Il dépend également du désaccord, qui est constant pendant les expériences (nous montrerons comment on le choisit dans la suite du chapitre), et de la période  $T$  qui est imposée par la valeur de  $k$ . Le paramètre  $K$  sera ainsi contrôlé par l'intensité lumineuse  $I$  du laser.

#### 4.2.2 Système laser

Le système laser pulsé réalisé pour le Rotateur Frappé est présenté schématiquement dans la Figure 4.1. Au tout début, un faisceau laser continu est généré avec une diode laser fibrée à cavité étendue Pure Photonics PPCL550, qui délivre une puissance continue de  $50\text{ mW}$ . La longueur d'onde de cette diode est accordable, entre  $1527.6\text{ nm}$  et  $1565.5\text{ nm}$ , à l'aide d'un logiciel de contrôle fourni par le fabricant. Ensuite, un modulateur électro-optique d'amplitude (noté ici EOM) de bande passante de  $10\text{ GHz}$  (MXER-LN-10) est utilisé pour générer un train d'impulsions à partir du faisceau laser continu. Ce composant fonctionne selon le principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder, où l'intensité du faisceau traversant le cristal est modulée en contrôlant le déphasage via l'effet électro-optique. L'application d'une tension sur le composant induit une variation de l'indice de réfraction du cristal, créant un déphasage entre les branches optiques de l'interféromètre. Ce déphasage modifie les conditions d'interférence à la sortie du cristal, entraînant ainsi une modulation de la puissance du faisceau lumineux émis. L'EOM sur l'expérience est contrôlé par un générateur basse fréquence (GBF) (modèle 33600A de chez Keysight) qui peut envoyer des signaux pulsés de  $5\text{ ns}$ , avec un temps de montée et de descente de  $2.9\text{ ns}$ , et avec une fréquence maximale de  $120\text{ MHz}$ . Un deuxième GBF (modèle 33220A de chez Agilent) est utilisé pour appliquer une tension de bias (signal continu) sur l'EOM afin de contrôler et corriger l'offset que pourrait avoir le train d'impulsions généré (éviter la présence d'un fond de lumière en plus des impulsions). Le faisceau laser pulsé sortant de l'EOM est séparé avec un coupleur 90%/10%, où les 90%

vont vers l'amplificateur laser pulsé, et les 10% vers son système de protection. Ce dernier a été développé par Maxime Denis pendant sa thèse, et consiste en un dispositif Arduino qui mesure la puissance moyenne du faisceau pulsé et qui la compare à un seuil minimum en dessous duquel l'amplificateur laser pulsé est coupé pour éviter son endommagement. L'amplificateur pulsé utilisé est un amplificateur télécom à fibre dopée en Erbium (EDFA), capable d'amplifier des impulsions de  $1\text{ ns}$  à  $50\text{ ns}$  à des puissances crête maximales de l'ordre de  $1.4\text{ kW}$  et cela pour des fréquences d'impulsions entre  $100\text{ kHz}$  et  $500\text{ kHz}$ . À la sortie de l'amplificateur pulsé, le faisceau laser est focalisé avec une lentille à un waist de  $80\text{ }\mu\text{m}$  vers un cristal doubleur PPLN. Ce dernier est stabilisé à une température de  $124,2\text{ }^\circ\text{C}$  à l'aide d'un contrôleur de température Thorlabs TC 200. Enfin, le faisceau sortant du cristal est filtré avec un miroir dichroïque, pour envoyer seulement la lumière à  $\sim 770\text{ nm}$  sur la table optique de l'expérience, puis sur les atomes. Un shutter mécanique est disposé après le miroir dichroïque pour bloquer le faisceau proche infrarouge quand nous ne voulons pas l'envoyer sur les atomes.

La puissance laser en sortie du cristal doubleur varie en fonction de la fréquence des impulsions. Ainsi, la puissance crête des impulsions (calculée à partir de mesures de la puissance moyenne après le cristal) est stable à  $\sim 330\text{ W}$  pour des fréquences d'impulsions de  $100\text{ kHz}$  à  $300\text{ kHz}$ , et chute au-delà car le doublage en fréquence de la lumière atteint la saturation. L'efficacité de doublage atteint au maximum 86%.

La dérive de phase au sein d'une impulsion lumineuse a également été étudiée pour ce système en analysant un signal de battement avec un laser continu, avant et après l'amplificateur pulsé ainsi qu'après le cristal de doublage. Le résultat de cette étude montre qu'une dérive de phase est présente après l'amplificateur et après le cristal doubleur, mais seulement sur les fronts montants et descendants d'une impulsion, et elle est totalement absente ailleurs (Figure 4.2). Cette dérive est induite par les ions d'Erbium présents dans l'amplificateur pulsé [82]. Le fait que la phase reste stable au sommet de l'impulsion, qui représente la fraction dominante de celle-ci, est particulièrement important, car cela permet d'assurer la stabilité de l'onde stationnaire formée par l'interférence de deux faisceaux au sein de l'impulsion.

### 4.2.3 Amélioration de la stabilité de la puissance laser

Durant ma thèse, nous avons remarqué des variations sur la puissance du laser pulsé. Ces dernières se sont révélées être dues à la variation de l'amplitude de l'offset du train d'impulsions à cause d'effets de température. En effet, nous avons remarqué que l'offset variait au cours du temps en fonction des fluctuations de température dans la pièce, ce qui affectait l'amplitude des kicks, de

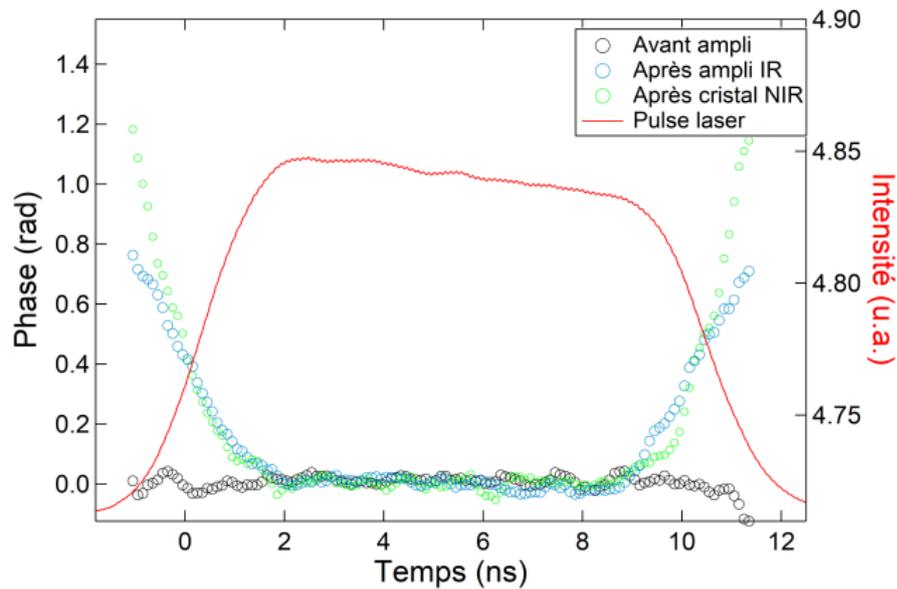


FIGURE 4.2 – Mesures de la dérive de phase au sein d’une impulsion avant amplification (courbe noire), après amplification par l’EDFA (courbe bleue) et après doublage par le cristal PPLN (Courbe verte). Figure extraite de [66].

manière encore plus marquée après le passage par l’amplificateur laser pulsé. Nous pouvons voir la différence entre les variations de puissance avant et après l’amplificateur pulsé dans la Figure 4.3, où nous avons pris des acquisitions du train d’impulsions avec un oscilloscope avec des pas de 1 min. Ces variations de puissance venant de l’amplificateur pulsé s’expliquent par la présence de l’offset qui rajoute un chauffage supplémentaire du milieu amplificateur. Ainsi, ce dernier amplifie la lumière de l’offset, ce qui réduit l’énergie disponible pour l’amplification de l’impulsion de lumière. Bien que l’amplitude de l’offset ne représente que  $\sim 1\%$  de l’amplitude des impulsions, celui-ci est présent pendant plusieurs microsecondes, contrairement aux impulsions qui ont une largeur de  $20\text{ ns}$  (dans les acquisitions de la Figure 4.3 la période des impulsions était de  $7\ \mu\text{s}$ ).

Pour remédier à ces variations, la première méthode que nous avons essayée a été d’asservir l’offset, pour le corriger avec une tension de bias (contrôlée avec un GBF, comme expliqué dans la section précédente). Pour ce faire, il était nécessaire d’effectuer un balayage de la tension de bias (afin de scanner le signal continu envoyé à l’EOM) sur un intervalle relativement large. Nous prenions une cinquantaine de points répartis sur un intervalle d’environ  $2\text{ V}$ . Des acquisitions du train d’impulsions, après passage par l’amplificateur laser, étaient ensuite réalisées et traitées pour extraire l’amplitude des impulsions, dans le but de

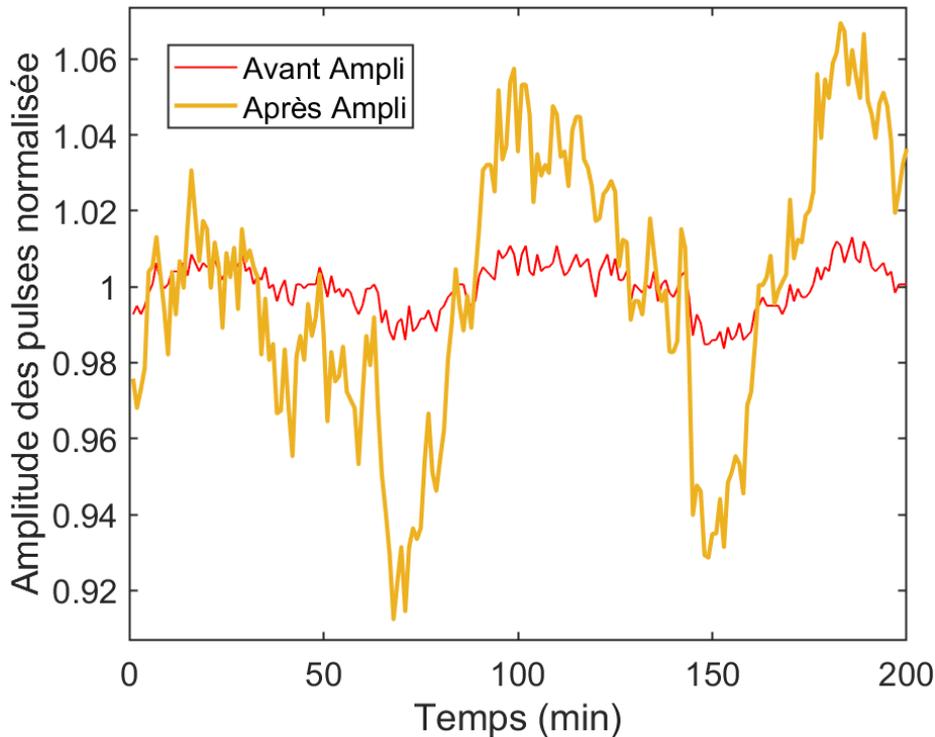


FIGURE 4.3 – Variations de l’amplitude des impulsions après l’amplificateur laser. Les signaux sont renormalisés sur la moyenne.

déterminer la valeur de la tension de bias minimisant l’offset. Nous pouvons voir dans la Figure 4.4 un exemple d’un scan de la tension de bias où nous déterminons le minimum de l’amplitude de l’offset.

Nous n’avons finalement pas réussi à stabiliser la valeur de l’offset avec cette méthode car toutes les étapes citées ci-dessus pour trouver la valeur minimale de l’offset nécessitent environ  $4\text{ min}$  pour les réaliser, alors que l’offset varie énormément pendant la même période de temps. De plus, mettre en place une boucle aussi longue pendant des expériences prolongerait énormément le temps de leur réalisation, ce qui n’est pas souhaitable.

La solution que nous avons donc décidé de réaliser à partir de là, a été de couper complètement la lumière entre deux impulsions consécutives avant l’entrée dans l’amplificateur laser pulsé, pour ainsi minimiser l’effet de la variation de l’offset sur l’amplification des impulsions. Pour cela, nous avons disposé un AOM fibré  $110\text{ MHz}$  entre l’EOM et le coupleur  $90\%/10\%$ , dont la fonction est de laisser les impulsions de lumière passer et de couper complètement la lumière ailleurs. Cela est schématisé dans la Figure 4.5c. Pour mettre la porte de l’AOM fibré autour de l’impulsion de lumière, nous commençons par générer une porte

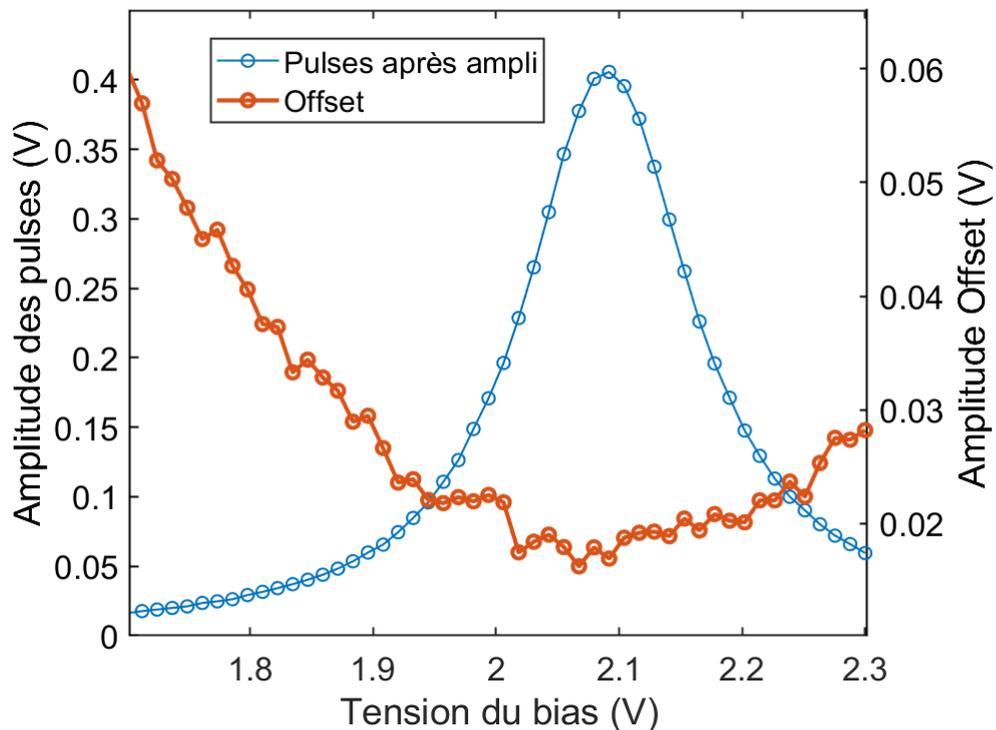


FIGURE 4.4 – Scan de la tension du bias pour déterminer le minimum de l'Offset.

d'une largeur supérieure à la période des impulsions pour s'assurer de ne pas la couper en dehors de la porte. En utilisant la tension du bias, nous augmentons l'amplitude de l'offset de manière exagérée pour voir sur le signal des impulsions lumineuses (sur l'oscilloscope) les limites de la porte de l'AOM comme cela est montré dans la Figure 4.5a. À partir de là, nous diminuons progressivement la largeur de la porte de l'AOM en décalant son centre pour s'assurer que l'impulsion soit toujours au centre de la porte. Nous continuons cela jusqu'à avoir une porte de  $80\text{ ns}$  autour d'une impulsion et nous minimisons ensuite l'offset pour avoir l'impulsion qu'on peut voir dans la Figure 4.5b. Enfin, notons qu'il est nécessaire de synchroniser les deux voies de GBF utilisées, pour que l'impulsion reste au centre de la porte de l'AOM.

En comparant dans la Figure 4.6 la variation de l'amplitude des impulsions avant et après avoir rajouté l'AOM fibré, nous pouvons voir que la stabilité de la puissance du laser pulsé a grandement été améliorée. Nous constatons qu'avec la présence de l'AOM, des variations de l'ordre de  $\sim 2\%$  sur les impulsions après amplification, alors qu'elles pouvaient aller jusqu'à  $\sim 9\%$  sans couper l'offset avec l'AOM.

En plus de l'ajout de l'AOM, nous avons placé l'EOM dans une boîte fermée

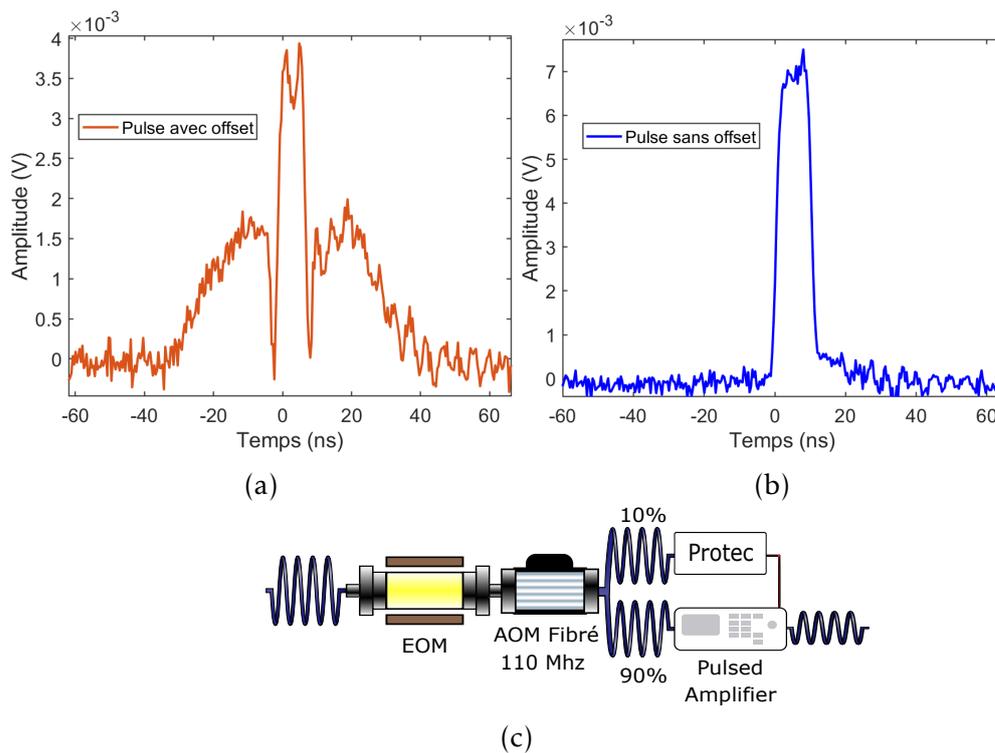


FIGURE 4.5 – Suppression de l'offset du train d'impulsions avec un AOM fibré. (a) L'AOM crée une porte de 80 ns autour d'une impulsion de lumière pour la laisser passer, et coupe la lumière partout ailleurs. L'offset autour de l'impulsion est mis intentionnellement de manière exagérée pour illustrer la porte générée par l'AOM. Le graphe (b) représente la même impulsion de lumière avant l'amplificateur pulsé, avec l'offset à sa valeur habituelle (offset minimisé avec la tension de bias). (c) Schéma montrant le rajout de l'AOM fibré 110 MHz sur le dispositif du laser pulsé.

doublée d'une mousse isolante pour limiter les variations de température et ainsi minimiser leurs effets sur l'offset.

### 4.3 Onde stationnaire pulsée

À la sortie du banc pulsé, le faisceau laser doublé ( $\sim 770 \text{ nm}$ ) est préparé afin d'être envoyé sur les atomes pour la réalisation du Rotateur Frappé Atomique. Dans la Figure 4.7 est représenté schématiquement le trajet du faisceau proche infrarouge à la sortie du banc pulsé. Après le passage du faisceau infrarouge par le shutter, une lame demi-onde et un cube polariseur (PBS) sont disposés pour le

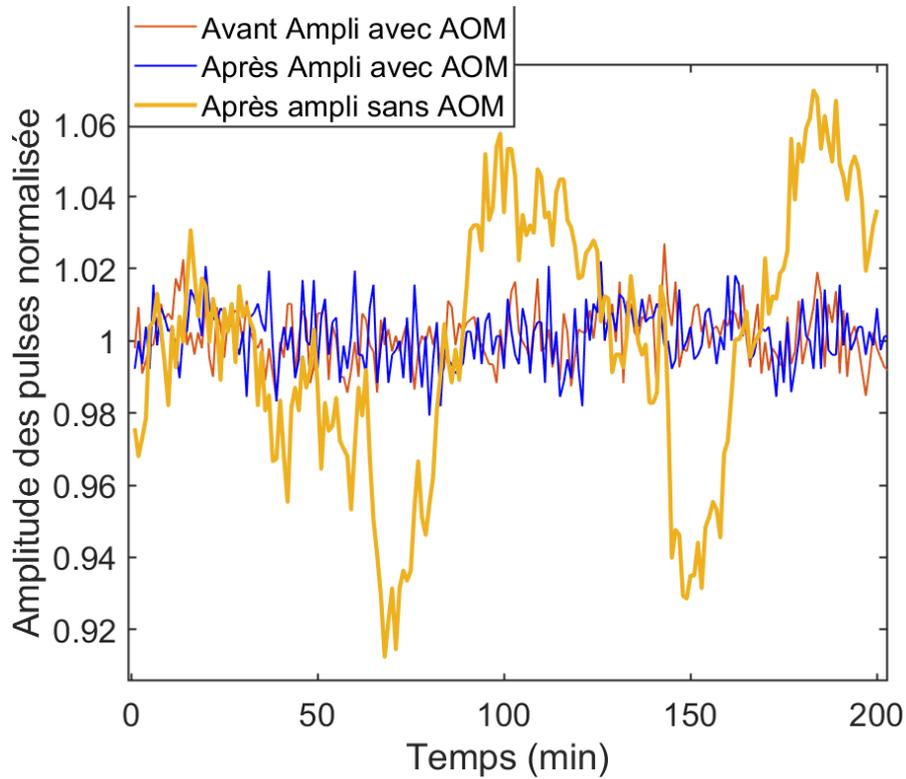


FIGURE 4.6 – Comparaison entre l'amplitude des impulsions avant et après l'amplificateur laser pulsé en présence de l'AOM fibré et l'amplitude des impulsions après amplificateur sans la présence de l'AOM.

séparer en deux voies. Cette disposition nous permet de générer une onde stationnaire sur les atomes soit en mettant en place deux faisceaux contre-propageants avec les deux voies, soit en utilisant une seule voie avec une rétro-réflexion du faisceau. Sur chacune des voies est ensuite installé un AOM en espace libre pour pouvoir contrôler la puissance des faisceaux. Après cela, deux lentilles convergentes focalisent les faisceaux dans un collimateur pour les injecter dans des fibres optiques dans le but d'être transportés près de la chambre à vide où le nuage atomique est généré. Dans la suite du manuscrit, on utilisera uniquement la configuration d'onde stationnaire avec un seul faisceau rétro-réfléchi (une seule des deux voies dans le schéma 4.7). La deuxième configuration (deux bras indépendants) est réservée pour des expériences futures.

Pour le transport entre le dispositif optique précédent et la table optique qui est au même niveau que les atomes, nous avons utilisé dans un premier temps, une fibre optique PM standard Thorlabs (diamètre=4,4 $\mu$ m). Nous avons par

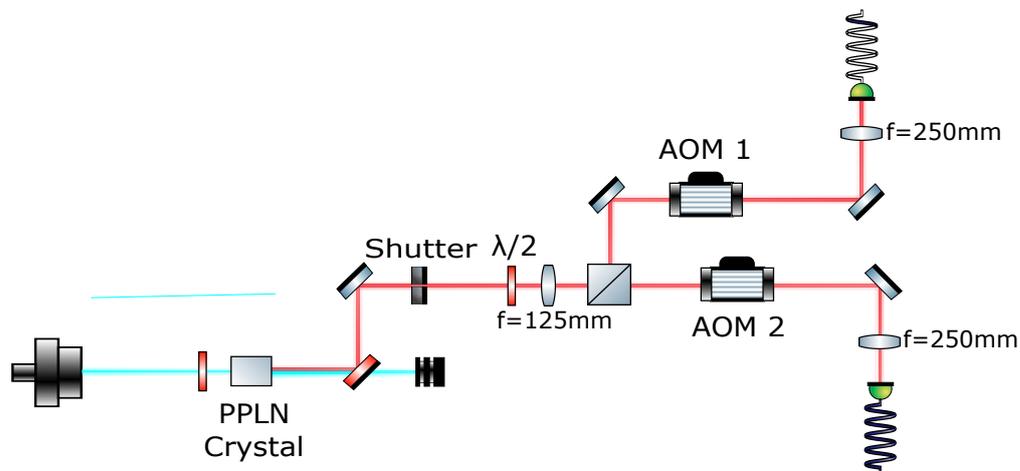


FIGURE 4.7 – Schéma de la préparation du laser pulsé proche infra-rouge ( $\sim 770\text{ nm}$ ) avant l'envoi sur les atomes

la suite remarqué qu'en augmentant la puissance laser injectée dans la fibre, celle-ci présentait une Diffusion Brillouin Stimulée (SBS), ce qui entraînait la diminution de l'efficacité de transport de la fibre. Le SBS est un phénomène de physique non linéaire dans lequel des ondes acoustiques sont générées lors du passage d'un faisceau lumineux intense dans une fibre optique. Cela est dû aux variations du champ électrique dans le milieu. De l'interaction de ces ondes acoustiques et du faisceau lumineux résulte la rétro-diffusion de ce dernier, avec un taux qui dépend de son intensité et de la longueur parcourue par le faisceau rétro-diffusé. Nous avons identifié dans notre système d'onde pulsée la présence de ce phénomène en remarquant une diminution de l'efficacité de transmission de la fibre, et aussi la présence d'un faisceau rétro-diffusé dont la puissance dépendait de la puissance du faisceau incident.

La solution que nous avons mise en place pour s'affranchir du SBS a été le changement de la fibre qui servait au transport du faisceau pulsé. La nouvelle fibre installée est une fibre à cristal photonique, dont la gaine est constituée d'une micro-structuration en deux dimensions (diamètre= $14,8 \pm 0,8\mu\text{m}$ ). La puissance seuil du faisceau incident pour le SBS est proportionnelle au carré du diamètre du cœur de la fibre. Ainsi, l'avantage de la fibre micro-structurée est que son diamètre est plus élevé par rapport à une fibre standard, ce qui repousse le seuil du SBS d'un facteur 2.12 dans notre cas (Figure 4.8). L'étude du SBS dans ce système est présentée de manière plus détaillée dans la thèse de Maxime Denis [66].

Après son transport par la fibre micro-structurée, le faisceau pulsé arrive sur un breadboard situé à proximité de la chambre de science, comme illustré sur la

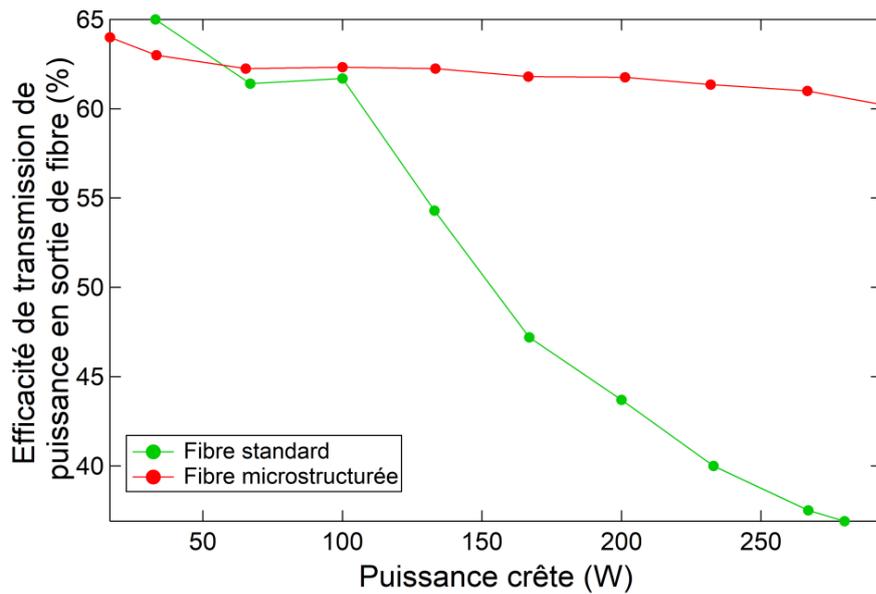


FIGURE 4.8 – Efficacité de transmission au travers d’une fibre standard Thorlabs avec l’augmentation de la puissance incidente (courbe verte) et au travers d’une fibre microstructurée (courbe rouge). Figure extraite de [66].

Figure 4.9. À sa sortie de la fibre, le faisceau passe par un collimateur puis par un cube polariseur (PBS) pour filtrer sa polarisation. Ensuite, avec deux miroirs, le faisceau est envoyé vers les atomes puis rétro-réfléchi de l’autre côté de la chambre de science avec un miroir mis au plus proche possible du hublot pour raccourcir autant que possible le décalage entre les impulsions du faisceau "aller" et du faisceau "retour" sur les atomes. C’est ainsi que l’onde stationnaire est générée. Le faisceau "aller" est envoyé vers les atomes avec un angle de  $\sim 45^\circ$  par rapport à la normale, pour éviter des réflexions sur les hublots à l’intérieur de la chambre de science, qui sont susceptibles de perturber l’onde stationnaire. Une fuite de l’un des miroirs (Figure 4.9) est envoyée sur une photodiode (1 GHz de bande passante) et est "monitorée" en continu avec un oscilloscope rapide (bande passante 1 GHz). Cela permet de mesurer continûment la puissance de l’onde stationnaire, afin de s’assurer à tout moment de sa stabilité. Afin de s’affranchir des éventuelles dérives au cours des expériences, une procédure de calibration de la puissance de l’onde stationnaire sera décrite dans la dernière section de ce chapitre.

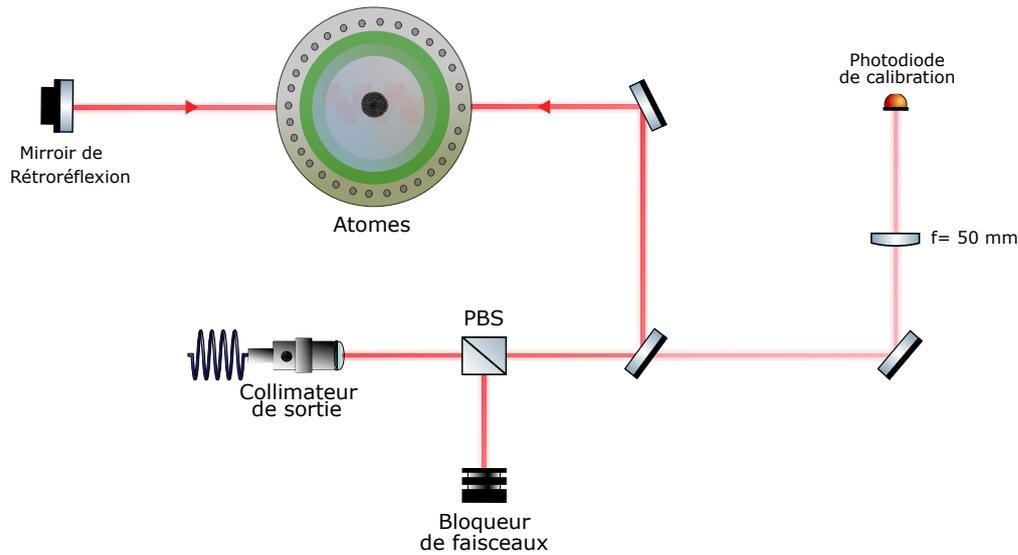


FIGURE 4.9 – Schéma de l'implémentation de l'onde stationnaire pulsée avec faisceau retro-réfléchi

## 4.4 Paramètres de l'onde stationnaire pulsée

Pour réaliser des expériences de Rotateur Frappé atomique, il a fallu choisir des paramètres optimisés de l'onde stationnaire pulsée, pour le cas de notre expérience. Nous allons dans la suite discuter du choix de ces paramètres et de leur importance dans le Rotateur Frappé atomique.

### 4.4.1 Désaccord du laser pulsé

Un premier paramètre du laser pulsé à choisir a été le désaccord par rapport à la transition D1 (qui est à une longueur d'onde de  $770.108 \text{ nm}$ ), pour éviter l'effet de l'émission spontanée. En effet, lors de l'interaction d'un atome avec un photon d'un faisceau lumineux (l'onde stationnaire dans notre cas) s'adressant à l'une de ses transitions atomiques, l'atome reçoit une quantité de mouvement  $\pm \hbar k_L$  dans l'axe du faisceau. En plus de cela, quand l'atome absorbe le photon, il est excité vers un niveau supérieur puis se désexcite spontanément en émettant un photon de la même longueur d'onde dans une direction aléatoire pour retomber à son niveau d'énergie initial. L'atome reçoit alors une nouvelle impulsion  $\pm \hbar k_L$ . Nous pouvons calculer le taux d'émission spontanée pendant un kick de l'onde stationnaire pulsée sur les atomes, en utilisant la population d'atomes dans l'état excité :  $\Pi_e = \frac{\Omega^2}{4\Delta_L^2}$  [83], et cela pendant la durée du kick  $\tau$ . En partant de cette relation et de la définition du paramètre de stochasticité  $K$  dans l'équation 4.7,

nous obtenons :

$$\Pi = \frac{\Gamma M \Lambda^2}{16\pi^2 T \hbar \Delta_L} K \quad (4.8)$$

$$= \frac{\Gamma}{\Delta_L} \frac{K}{\bar{k}}. \quad (4.9)$$

De la relation 4.8 nous pouvons voir que pour diminuer le taux d'émission spontanée, il nous faut augmenter le désaccord laser  $\Delta_L$  par rapport à la transition D1. L'inconvénient de cela est que ça diminue également  $K$  qui est inversement proportionnel au désaccord, et qui représente la force du potentiel de l'onde stationnaire.

Dans l'idée, les expériences de Rotateur Frappé que nous voulons réaliser avec notre dispositif expérimental doivent pouvoir s'étendre jusqu'à 500 kicks. Nous devons donc nous assurer qu'il y ait le minimum d'émission spontanée possible pendant la séquence de kicks, mais qu'il y ait assez d'effet avec notre laser pour réaliser nos expériences dans de bonnes conditions. Nous effectuons ainsi une simulation numérique du Rotateur Frappé où nous comparons différents taux d'émission spontanée, afin de déterminer le taux acceptable sur 500 kicks sans affecter la localisation dynamique.

En projetant le cycle de fluorescence sur l'axe de l'onde stationnaire pulsée, l'atome reçoit une impulsion de  $\pm \hbar k_L$  lors de l'excitation, puis une autre de  $\pm a \hbar k_L$  lors de la désexcitation, où  $a$  est un coefficient de projection pris entre  $-1$  et  $1$ . Dans la simulation numérique qui donne la Figure 4.10, nous faisons un tirage aléatoire entre 0 et 1 à chaque kick que nous comparons au taux d'émission spontanée. S'il est inférieur, nous rajoutons une impulsion prise aléatoirement entre  $-2\hbar k_L$  et  $+2\hbar k_L$ . Dans le cas où la valeur tirée aléatoirement entre 0 et 1 est supérieure au taux d'émission spontanée, nous ne rajoutons aucune impulsion, et nous continuons la simulation du Rotateur Frappé comme nous le faisons habituellement. En effectuant un nombre suffisant de moyennes, nous obtenons le résultat présenté dans la Figure 4.10. Nous y constatons que la localisation dynamique disparaît progressivement au profit d'un comportement diffusif lorsque le taux d'émission spontanée dépasse  $4 \times 10^{-4}$  photon/kick. Nous choisissons donc de maintenir un taux d'émission spontanée inférieur à cette valeur. Pour ce faire, nous utilisons un désaccord de  $\Delta = -61.2 \text{ GHz}$  sur la transition D1.

Dans les expériences de Rotateur Frappé quasi-périodique 4D qui seront présentées dans le chapitre 5,  $K = 10.64$  correspond à l'amplitude maximale\* du

---

\*. En prenant en compte les modulations d'amplitude dans les expériences de Rotateur Frappé quasi-périodique 4D du chapitre 5, l'amplitude du potentiel dans un train d'impulsions varie entre  $K(1 - \varepsilon)$  et  $K(1 + \varepsilon)$ .

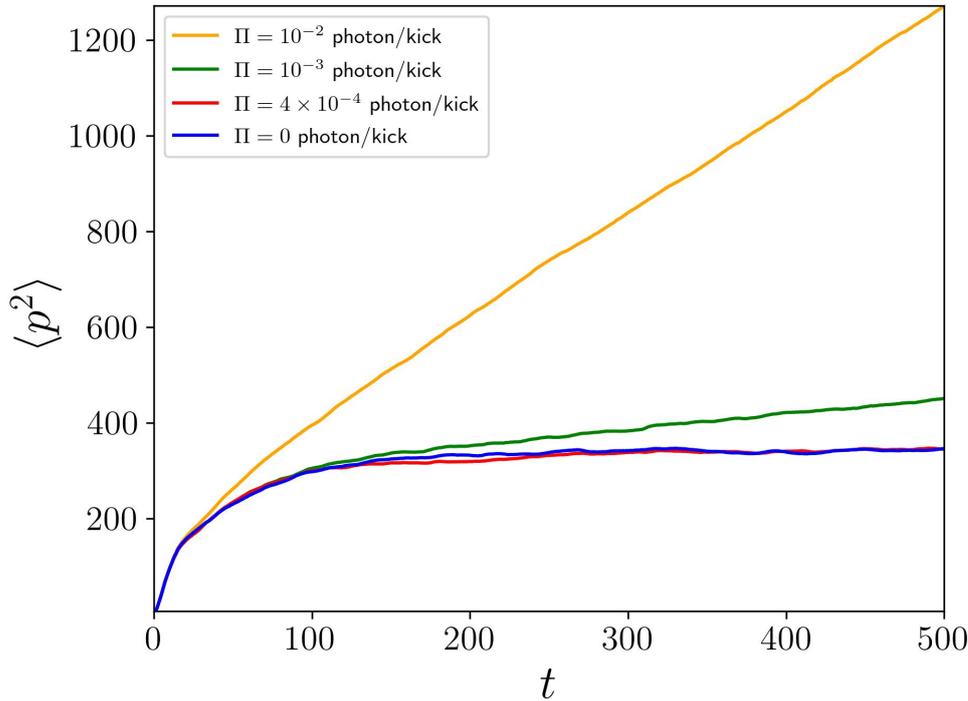


FIGURE 4.10 – Simulation de l'effet de l'émission spontanée sur la localisation dynamique ( $K = 10.64, \bar{k} = 2.89$ ), pour différentes valeurs de taux d'émission spontanée.

potentiel de kick, et cela pour  $(K, \varepsilon) = (7, 0.52)$ . En prenant cette valeur de  $K$  et  $\bar{k} = 2.89$ , le taux d'émission spontanée est  $\Pi = 3.1 \times 10^{-4}$  photon/kick. Cela signifie qu'il y a moins d'un photon émis en 500 kicks, permettant ainsi de préserver la localisation dynamique.

#### 4.4.2 Homogénéité de $K$

Lors de l'application d'un train d'impulsions sur les atomes, nous devons nous assurer que toutes les impulsions d'un même train ont la même amplitude sur tous les atomes, et donc la même valeur de  $K$  (car  $K \propto I$ ). Dans un système comme le nôtre, il existe deux cas dans lesquels ce point peut poser un problème. Le premier est le cas où la taille du nuage d'atomes kické est comparable à, ou est plus grande que la taille du faisceau de l'onde stationnaire pulsée. Ce problème peut exister pour tout type d'onde stationnaire, qu'elle soit verticale ou horizontale. Dans une stationnaire, le faisceau est gaussien dans le mode  $TEM(0, 0)$ . Ainsi, pour que  $K$  soit homogène sur l'ensemble du nuage atomique,

il est nécessaire d'utiliser un faisceau dont le diamètre est bien supérieur à la taille du nuage atomique (BEC ou nuage thermique). Cela permet de s'assurer que le kick se produit uniquement au centre du faisceau, où la puissance est à la fois maximale et homogène. Dans notre expérience, la taille des nuages utilisés est de quelques centaines de  $\mu m$  tandis que le diamètre du faisceau est de  $2.8 mm$ . Ainsi, pour un nuage atomique d'une taille de  $\sim 200 \mu m$  par exemple, l'inhomogénéité ressentie par les atomes est inférieure à 1%.

Le deuxième cas n'est valable que pour les ondes stationnaires horizontales et dépend de la longueur du train d'impulsions appliqué aux atomes (le temps nécessaire pour appliquer un certain nombre d'impulsions). Le nuage atomique étant en chute libre par effet de la gravité, le problème peut se poser si ces derniers ressentent une variation importante de l'intensité lumineuse entre le début et la fin du train d'impulsions, ou encore si le nuage sort du faisceau de l'onde stationnaire avant la fin de l'application des impulsions. Ainsi, pour un  $\bar{k}$  donné (donc pour une période d'impulsions donnée) et un nombre de kicks donné, il est essentiel que le waist du faisceau soit suffisamment grand pour que le nuage atomique ressente la même intensité lumineuse pendant tout le train d'impulsions. Dans notre expérience, pour une valeur de  $\bar{k} = 2.89$  donnant une période d'impulsions de  $7 \mu s$ , par exemple, une séquence de 500 kicks sur les atomes dure  $3.5 ms$ , pendant lesquels ces derniers chutent sur une distance de  $60 \mu m$ . Cela représente une variation d'intensité lumineuse ressentie de 1% entre la première et la dernière impulsion de cette séquence. Le faisceau utilisé pour l'onde stationnaire pulsée est donc assez large pour éviter les variations de puissance sur les atomes.

### 4.4.3 Largeur des impulsions lumineuses

Dans le modèle du Rotateur Frappé théorique, un atome est pulsé avec des kicks de Dirac, c'est-à-dire des kicks avec une largeur infiniment petite. Dans l'expérience, les impulsions lumineuses avec lesquelles les atomes sont "kickés" ont une certaine largeur  $\tau$  pendant laquelle les atomes peuvent se déplacer. Si la largeur de ces kicks est trop grande, il existe un risque de phénomène de boîte classique, qui limite l'impulsion ( $p$ ) maximale que peuvent recevoir les atomes dans ce système.

Une largeur non nulle d'une impulsion de l'onde stationnaire donne le temps à l'atome de se déplacer au sein de cette dernière. Le phénomène de Boîte classique est présent dans le cas où la vitesse de l'atome pendant une réalisation du Rotateur Frappé atteint une valeur qui lui permet de traverser une période spatiale complète de l'onde stationnaire ( $\Lambda/2$ ). Dans ce cas, l'atome ne recevra plus d'énergie cinétique et sa quantité de mouvement sera plafonnée par une

valeur  $p_{max}$ , qui peut être calculée avec la formule suivante :

$$p_{max} = \frac{M\Lambda}{2\tau}. \quad (4.10)$$

Pour éviter ce phénomène, il faut ainsi choisir la plus petite largeur possible de l'impulsion lumineuse dans l'expérience.

Dans les expériences de Rotateur Frappé atomique à dimension une ou dans la phase localisée de la transition d'Anderson, l'impulsion des atomes peut aller de zéro jusqu'à une valeur de saturation  $p_{loc}$  qui correspond à la localisation dynamique. Dans ces expériences, la valeur de  $p_{loc}$  est habituellement autour de  $p_{loc} \sim 10 \times 2\hbar k_L$ . Dans la phase diffusive de la transition d'Anderson et autour de la transition, la valeur de l'impulsion augmente avec le nombre de kicks et il n'y a pas de saturation. Dans les expériences que nous effectuons habituellement, en allant jusqu'à 500 kicks au maximum, la valeur que peut atteindre l'impulsion est autour de  $\sim 80 \times 2\hbar k_L$ . Ces valeurs sont à comparer à l'impulsion maximale atteignable avant le phénomène de boîte classique, qui dans notre cas pour  $\tau = 20 ns$ , est égale à  $p_{max} = 760 \times 2\hbar k_L$ . La valeur de  $p_{max}$  est beaucoup plus grande que les impulsions que nous atteignons dans nos expériences.

Dans l'expérience, nous avons une contrainte sur la taille minimale d'une impulsion de l'onde stationnaire pulsée. Celle-ci est due au temps de montée et de descente d'une impulsion, imposé par le GBF contrôlant le modulateur d'amplitude (EOM) qui génère les impulsions. Ce temps de montée et de descente minimale vaut  $2.9 ns$ . Nous avons donc dès le début choisi de travailler avec des impulsions de  $10 ns$  pour avoir la plus grande partie de la largeur de cette dernière sur le plateau avec le maximum d'amplitude. Nous avons un peu plus tard remarqué que cette largeur avait un effet sur les distributions en impulsion expérimentales mesurées pour le Rotateur Frappé atomique. Nous pouvons voir dans la Figure 4.11 des distributions en impulsion mesurées sur l'expérience pour 300 kicks,  $K = 8$ ,  $\bar{k} = 2.89$ , et cela pour différentes largeurs d'impulsions lumineuses. Nous pouvons constater que la distribution pour une largeur de  $10 ns$  est déformée par rapport à ce que nous mesurons pour les autres largeurs. Cette déformation peut s'expliquer par le retard entre le faisceau "aller" et le faisceau "retour" de l'onde stationnaire, ce qui empêche une superposition parfaite des impulsions lumineuses. En effet, ce retard peut perturber la structure de l'onde stationnaire, car la phase du faisceau pulsé est stable uniquement au sommet de l'impulsion, tandis qu'elle varie sur les fronts montant et descendant. Ainsi, les impulsions retardées se superposent dans une région où la phase n'est pas stable, ce qui pourrait induire des effets non voulus sur le nuage atomique. Toutefois, cet effet est plus marqué pour les impulsions de courte durée, comme

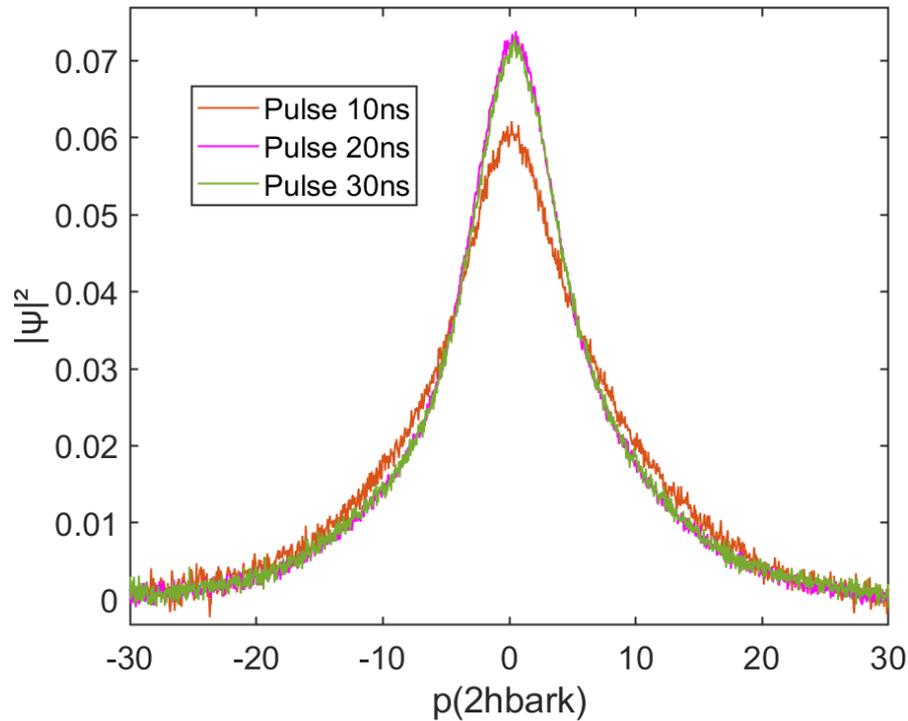


FIGURE 4.11 – Distributions en impulsions expérimentales à 300 kicks pour des paramètres de :  $K = 8$  et  $\bar{k} = 2.89$ , et pour des largeurs d'impulsions lumineuses différentes.

celles de  $10\text{ ns}$ , où la zone affectée par cette variation de phase représente une fraction plus importante de l'impulsion. En revanche, pour des impulsions plus larges, comme celles de  $20\text{ ns}$  ou  $30\text{ ns}$ , la superposition des impulsions dans la zone de phase stable est plus importante, ce qui pourrait expliquer l'absence de déformation des distributions dans ces cas.

Ayant remarqué le même phénomène sur plusieurs expériences, nous avons décidé d'utiliser des impulsions de  $20\text{ ns}$ , qui, comme montré plus haut, n'induisent pas de déformation sur les distributions mesurées et permettent également de réaliser des expériences sans risque de présence du phénomène de boîte classique.

## 4.5 Expérience du Rotateur Frappé atomique

Nous allons dans cette section présenter notre procédure d'alignement de l'onde stationnaire sur les atomes. Ensuite, nous montrerons la méthode pour déterminer expérimentalement le paramètre de stochasticité  $K$ , puis les cali-

brations de puissance qui sont faites pour s'assurer de sa stabilité en début et pendant les expériences. Nous montrerons enfin une expérience de Rotateur Frappé atomique où nous observons la localisation dynamique.

### 4.5.1 Alignement de l'onde stationnaire

L'alignement de l'onde stationnaire pulsée sur les atomes s'effectue en deux étapes. L'idée à la fin de ce travail est de centrer le faisceau sur le condensat de Bose-Einstein, qui représente le plus petit nuage d'atomes en taille que nous produisons dans notre expérience. Avant de passer sur le BEC, la première étape consiste à utiliser le nuage atomique produit dans le MOT pour pré-aligner le faisceau pulsé. En effet, le nuage du MOT fait plusieurs millimètres de diamètre, ce qui facilite l'observation de l'effet du faisceau sur lui. Pour observer un effet notable de l'onde stationnaire sur le nuage, nous utilisons le logiciel de la diode laser Pure Photonics afin de supprimer le désaccord du laser pulsé et de le placer en résonance avec la transition D1. Nous pouvons ainsi voir gonfler le nuage du MOT lors de son interaction avec le faisceau.

La deuxième étape consiste à chercher l'effet du faisceau pulsé sur le BEC, qui a une taille d'une centaine de  $\mu\text{m}$ . Nous cherchons pour cela à observer, sur des images d'absorption prises par le système d'imagerie de l'expérience, la diffraction du BEC par l'onde stationnaire pulsée (diffraction de Kapitza-Dirac). Ainsi, après avoir rapproché le faisceau pulsé du BEC en l'alignant sur le nuage du MOT, nous effectuons des ajustements verticaux et horizontaux avec le miroir du faisceau "aller" de l'onde stationnaire dans le but d'observer le signal de diffraction. Une fois que cela est fait, nous superposons le faisceau rétro-réfléchi de l'autre côté de la chambre de science (faisceau "retour") sur le faisceau "aller". Nous augmentons ensuite le désaccord du laser pulsé par rapport à la transition D1, puis nous répétons plus finement la même procédure jusqu'à maximiser le signal de diffraction du BEC.

### 4.5.2 Détermination expérimentale de K

Pour évaluer expérimentalement la valeur de  $K$  sur un BEC, nous réalisons la diffraction de ce dernier avec un seul kick. Dans ce cas, le BEC est séparé en plusieurs ordres d'impulsion espacés de  $2\hbar k_L$ . La population d'atomes dans

chaque ordre diffracté peut être déterminée avec la fonction suivante [84] :

$$P_n = J_n\left(\frac{\Omega^2 \tau}{2\Delta_L}\right)^2, \text{ i.e. en unités adimensionnées :}$$

$$P_n = J_n\left(\frac{K}{\bar{k}}\right)^2, \quad (4.11)$$

où  $J_n(x)$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ . Nous pouvons voir un tracé de cette fonction en faisant varier en simulation numérique la valeur de  $\frac{K}{\bar{k}}$  dans la Figure 4.12. Nous observons donc dans cette dernière comment varie chaque ordre de diffraction du BEC en fixant la valeur de  $\bar{k}$  et en variant la valeur de  $K$ .

Nous procédons de la même manière en expérience pour déterminer l'intensité laser qui correspond à la valeur de  $K$ , pour ainsi pouvoir faire une équivalence entre les deux ( $K \propto I$ ). Ainsi, nous fixons la valeur de  $\bar{k}$ , et nous varions la puis-

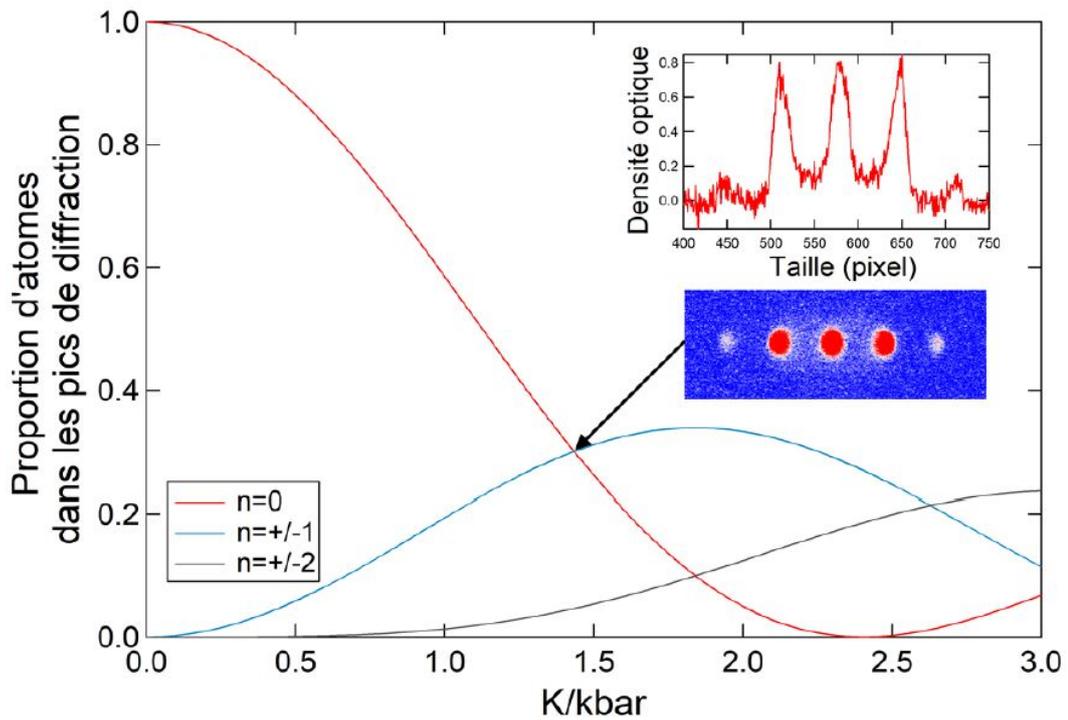


FIGURE 4.12 – Évolution des populations des différents ordres diffractés du condensat de Bose-Einstein en fonction des paramètres du rotateur frappé. L'image et la coupe associée correspondent à la diffraction à un kick du BEC par l'onde stationnaire pulsée pour un rapport  $\frac{K}{\bar{k}} = 1.434$ .

sance laser de l'onde stationnaire pulsée en cherchant à équilibrer l'amplitude de l'ordre 0 avec les ordres  $\pm 1$ . L'équilibre des trois pics correspond à une valeur de  $\frac{K}{\hbar} = 1.434$ , et connaissant  $\hbar$ , nous pouvons déterminer la valeur de  $K$  qui correspond à la puissance laser qui équilibre les ordres de diffraction.

Une deuxième méthode que nous utilisons pour déterminer une correspondance entre la puissance laser de l'onde stationnaire et  $K$  est l'utilisation d'un nuage thermique et non pas du BEC. Dans la Figure 4.13 nous observons en violet des mesures expérimentales de l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$  en variant l'intensité de l'onde stationnaire. La courbe rouge représente les valeurs de  $\langle p^2 \rangle$  obtenues avec une simulation numérique en variant la valeur de  $K$ . L'idée ici est de chercher un coefficient entre  $K$  et l'intensité  $I$  de façon à superposer les deux courbes ( $K = \alpha I$ ). Nous déterminons le coefficient  $\alpha$  en superposant plus précisément le

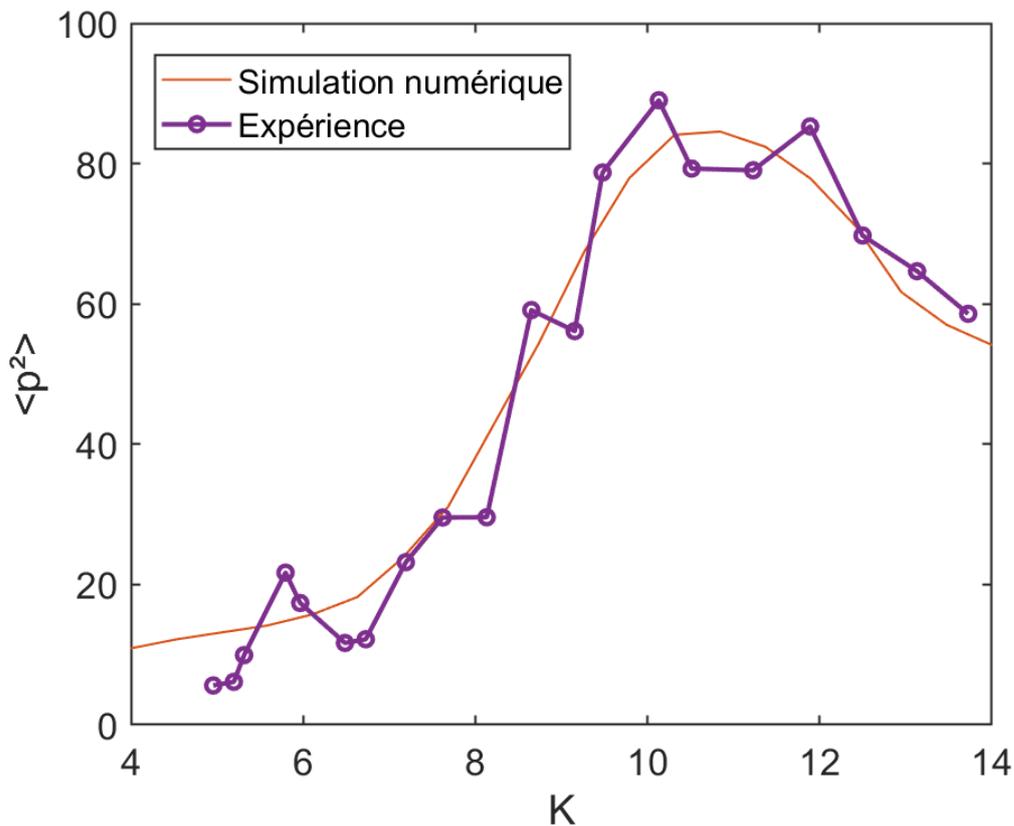


FIGURE 4.13 – La variation de l'énergie cinétique en fonction de de  $K$ , pour un nombre de kicks de 10 et une valeur de  $\hbar = 2.89$ . En violet les mesures expérimentales, et en rouge les données de la simulation numérique.

maximum des deux courbes, là où les variations de  $\langle p^2 \rangle$  en fonction de  $K$  sont moindres; c'est-à-dire à la valeur de  $K = 10.75$ .

La correspondance entre  $K$  et l'amplitude des impulsions lumineuses déterminée avec l'une ou l'autre des deux méthodes présentées plus haut ne dépend que de l'alignement de l'onde stationnaire pulsée sur les atomes. Ces deux méthodes donnent les mêmes résultats sur notre expérience.

### 4.5.3 Calibration et stabilité de $K$

Pour nous assurer de la bonne conversion entre l'amplitude des impulsions et la valeur de  $K$ , nous utilisons la photodiode rapide (montrée dans la Figure 4.9) afin d'effectuer régulièrement des calibrations sur la puissance du faisceau pulsé. Ces calibrations consistent à faire une mesure de la fonction de transfert de l'AOM en espace libre de l'onde stationnaire pulsée, pour déterminer la puissance radio-fréquence (rf) qu'il faut envoyer à l'AOM pour avoir une certaine amplitude des impulsions. Cette fonction est représentée dans la Figure 4.14. Ensuite, en se servant du coefficient entre l'amplitude des impulsions et la valeur de  $K$ , déterminé par la méthode présentée dans la section précédente, nous pouvons retracer cette fonction pour voir les valeurs de  $K$  en fonction de la puissance rf. Ainsi, il nous suffit de choisir la valeur de  $K$  que nous voulons sur le code de l'expérience pour que la puissance rf correspondante soit automatiquement choisie sur le GBF de contrôle de l'AOM. Cette calibration est réalisée en un temps de 5 *min*. Elle est ainsi trop longue pour être implémentée plusieurs fois au sein d'une même expérience qui peut durer plusieurs heures. Afin de corriger régulièrement cette calibration pendant les expériences, nous effectuons des mesures de l'amplitude maximale des impulsions toutes les 10 *min* pendant les expériences. Cela nous permet de prendre en compte des variations de l'amplitude qui pourraient survenir à ce moment-là. Celles-ci peuvent avoir comme origine la désinjection du faisceau pulsé de la fibre à cristal photonique, en raison des changements de la température de la pièce, ou aussi les fluctuations de polarisation qui peuvent engendrer des variations de puissance laser au niveau du cube polariseur en sortie de cette même fibre (Figure 4.9).

Pour évaluer la stabilité du paramètre  $K$  de façon relativement précise, nous réalisons des expériences directement sur le changement de son effet sur les atomes du BEC. Pour cela, nous choisissons une amplitude d'impulsions pour équilibrer les ordres de diffraction 0 et  $\pm 1$  du BEC diffracté avec un seul kick, comme dans la Figure 4.12. Nous répétons ensuite la même séquence en boucle en prenant à chaque fois des images d'absorption du BEC kické, pour ensuite évaluer comment l'équilibre des 3 pics change dans le temps. Cela nous donne une estimation de la variation de  $\frac{K}{\bar{K}}$  dans le temps, et connaissant  $\bar{k}$ , nous pou-

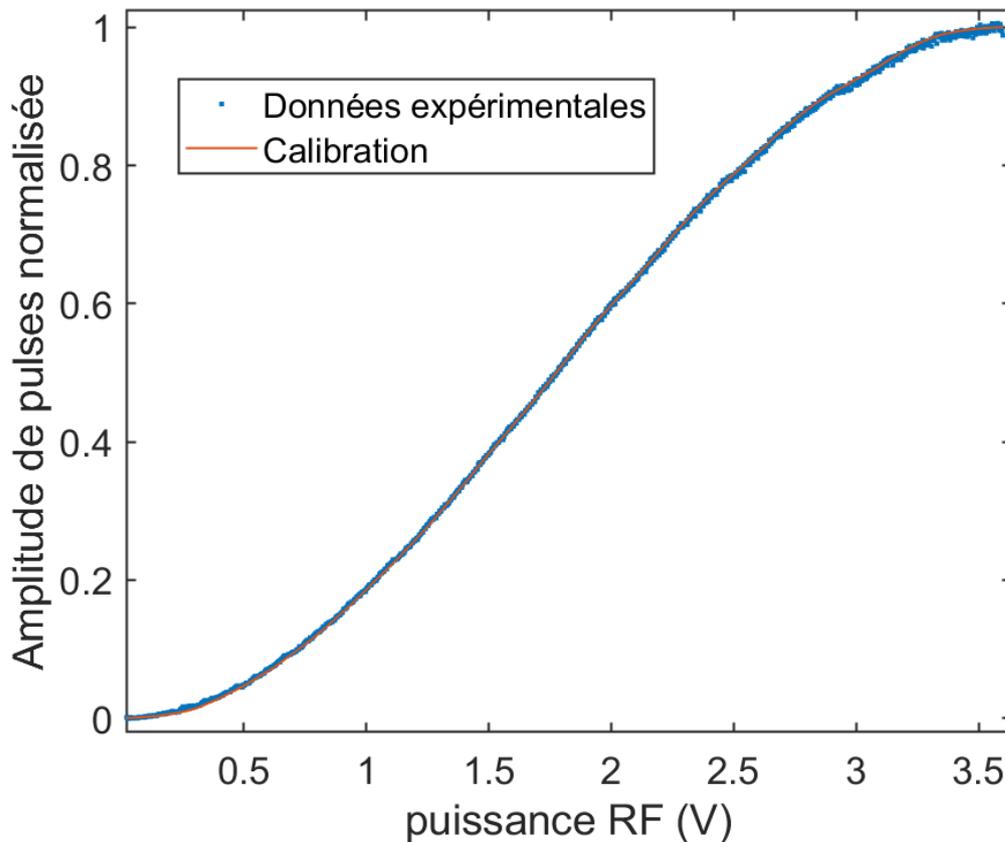


FIGURE 4.14 – Mesure de la fonction de transfert de l'AOM en espace libre de l'onde stationnaire pulsée.

vons déterminer la variation de  $K$ . Les mesures que nous avons prises avec cette expérience nous montrent une variation de moins de 5% de la valeur de  $K$ , ce qui n'a pas d'effet notable sur la localisation dynamique dans les simulations numériques.

#### 4.5.4 Réalisation expérimentale du Rotateur Frappé atomique

Dans la Figure 4.15 nous montrons une réalisation du Rotateur Frappé atomique faite avec notre dispositif expérimental pour un nombre de kicks allant de 1 à 100, avec les paramètres  $K = 5.5$  et  $\tilde{k} = 1.94$ . Dans la partie principale de la figure, nous pouvons observer la saturation de l'énergie cinétique après une phase de croissance linéaire qui est liée à un comportement diffusif. Les croix bleues représentent les points expérimentaux et la courbe rouge la simulation numérique pour les mêmes paramètres du Rotateur Frappé. Cette saturation

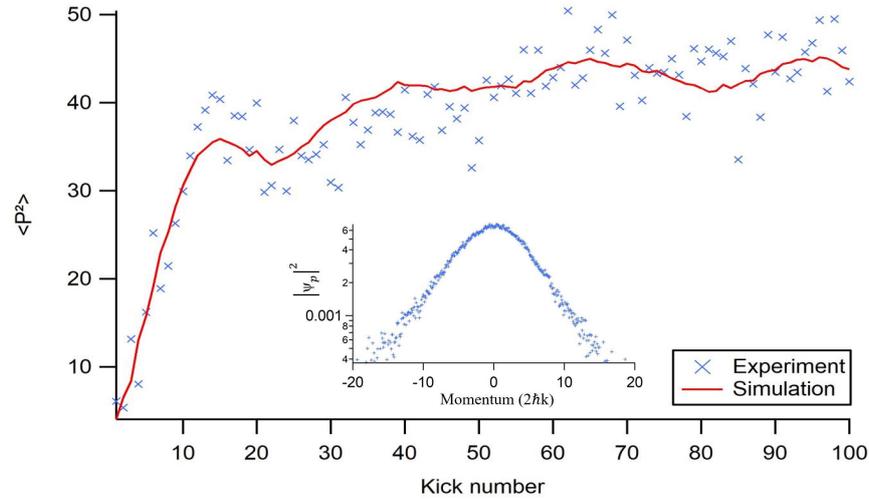


FIGURE 4.15 – Expérience de Rotateur Frappé atomique pour  $K = 5.5$  et  $\tilde{k} = 1.94$ . Dans la figure principale les points expérimentaux sont représentés par les croix bleues, et la courbe en ligne rouge représente la simulation numérique. Nous observons une localisation dynamique. En Inset : la distribution en impulsion du nuage atomique à 100 kicks en échelle Semi-Log. La distribution est exponentiellement localisée.

représente, comme expliqué dans la section 2.2.3 du chapitre 2, le phénomène de la localisation dynamique. En inset de la même figure, nous pouvons voir la distribution en impulsion des atomes à 100 kicks avec une échelle semi-log, où nous observons une décroissance exponentielle de cette distribution.

Pour réaliser cette expérience avec notre dispositif, nous générons un nuage thermique d'une température de quelques  $\mu K$  que nous "kickons" avec l'onde stationnaire pulsée. Ainsi, la séquence expérimentale consiste à passer par toutes les étapes de refroidissement jusqu'au nuage thermique, puis à éteindre le piège dipolaire pour ensuite "kicker" le nuage. Nous prenons ensuite une image d'absorption après un certain temps de vol pour mesurer la distribution en impulsion des atomes. La mesure étant destructive, nous devons refaire la même séquence pour 1 kick, puis 2 kicks, puis 3... jusqu'à 100 kicks. Puis, toutes ces séquences sont répétées 10 fois pour faire un moyennage sur toutes les données collectées. La durée d'une seule séquence de ce type est de  $\sim 18s$ . Nous estimons ensuite l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$  à partir des distributions mesurées pour tracer la Figure 4.15. Le traitement que nous faisons sur les données que nous collectons sur l'expérience sera discuté plus en détail dans le chapitre suivant.

## 4.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre le dispositif d'onde stationnaire pulsée que nous avons implémenté sur notre expérience, et qui sert à la réalisation du Rotateur Frappé Atomique. Après un rappel de quelques notions théoriques, nous avons commencé par décrire le dispositif de laser pulsé infrarouge ( $\sim 1550\text{ nm}$ ), qui est ensuite doublé en fréquence avec un cristal PPLN. Le faisceau résultant à une longueur d'onde proche infrarouge  $\sim 770$ , est utilisé pour générer l'onde stationnaire pulsée sur les atomes. Nous avons après cela discuté du choix des paramètres de l'onde stationnaire pulsée et des contraintes qui ont guidé ces choix. Ensuite, nous avons montré comment le paramètre de stochasticité  $K$  est déterminé expérimentalement, ainsi que la méthode que nous utilisons pour nous assurer de sa stabilité pendant les expériences. Enfin, nous avons vu un exemple de réalisation du Rotateur Frappé atomique avec notre expérience, où nous avons observé la localisation dynamique.



---

Observation de la transition d'Anderson 4D

---

**Sommaire du présent chapitre**

<b>5.1 Transitions de phases</b>	<b>94</b>
<b>5.2 Étude de la transition d'Anderson 4D avec le QP-QKR</b>	<b>99</b>
<b>5.3 Réalisation expérimentale</b>	<b>104</b>
5.3.1 Mesure de Temps de Vol . . . . .	104
5.3.2 Mesure de $\langle p^2 \rangle$ . . . . .	106
5.3.3 Expérience du Rotateur Frappé quasi-périodique à 3 fréquences . . . . .	109
<b>5.4 Détermination du Point Critique <math>K_c</math></b>	<b>112</b>
5.4.1 Paramètre de Binder . . . . .	112
5.4.2 Valeur Expérimentale de $K_c$ . . . . .	115
<b>5.5 Estimation des exposants critiques</b>	<b>116</b>
5.5.1 Détermination de la loi d'échelle de $\langle p^2 \rangle$ . . . . .	117
5.5.2 Détermination des exposants critiques : méthode boots- trap . . . . .	119
<b>5.6 Mesure de la Fonction d'échelle à deux paramètres</b>	<b>122</b>
<b>5.7 Conclusion</b>	<b>127</b>

Nous avons discuté jusqu'ici des aspects théoriques concernant le modèle d'Anderson et le Rotateur Frappé atomique, ainsi que de notre expérience

d'atomes ultra-froids qui sert à le réaliser. Dans ce chapitre, nous allons parler du travail que nous avons effectué sur la première observation de la transition d'Anderson en dimension quatre et sa caractérisation. Pour cela, nous commencerons par un rappel sur les transitions de phases pour montrer les caractéristiques à étudier, puis nous discuterons des aspects théoriques de la transition d'Anderson 4D dans le Rotateur Frappé atomique. Nous verrons ensuite la réalisation expérimentale du Rotateur Frappé quasi-périodique à trois fréquences sur notre dispositif expérimental, et enfin les résultats obtenus avec cette expérience en les comparant aux résultats des simulations numériques du modèle d'Anderson.

## 5.1 Transitions de phases

*Cette section a été inspirée en partie par le cours : Advanced Statistical Physics, Phase Transitions, écrit par Leticia F.Cugliandolo à Sorbonne Université [85].*

Les transitions de phase désignent les changements d'état d'un système lorsqu'il passe d'une phase à une autre sous l'influence de paramètres de contrôle externes tels que la température, la pression, le champ magnétique...etc [86]. Les exemples les plus connus sont ceux observés dans la vie quotidienne, à savoir les transitions de phase entre les états solide, liquide et gazeux, ainsi que les plasmas dans des conditions extrêmes. On les appelle des transitions de phases thermiques, car les fluctuations de température sont responsables de ces changements d'états. Ainsi, chaque phase existe dans une plage de température donnée, et le passage de l'une à l'autre se fait à une valeur seuil de la température appelée : *Température Critique* ( $T_c$ ). Il existe aussi des transitions de phases autour de la température nulle qui sont dues aux fluctuations quantiques et non pas thermiques [87]. Elles sont communément appelées : *Transitions de Phases Quantiques*. Ces dernières sont donc présentes lors du passage d'un système d'un état quantique à un autre, comme c'est le cas par exemple dans la transition vide-superfluide [88]. Une propriété présente généralement dans tous ces différents types de transition de phases est la brisure de symétrie (*Symmetry Breaking* en anglais) [89]. Celle-ci signifie le changement de symétries du système entre les phases des deux côtés du point critique, et le type de symétries présentes dans le système peut changer les caractéristiques de la transition de phase. Il existe néanmoins des transitions de phases quantiques sans brisure de symétrie comme les transitions de phases topologiques [90], ou la transition de Mott [91] [92].

La classification actuelle des transitions de phases vient en partie de la classification d'Ehrenfest. Il les classait selon leur degré de "non-analyticité", qui était déterminé en étudiant la continuité des dérivés  $n^{\text{ème}}$  de l'énergie libre. Cette

classification a été abandonnée car elle ne prévoyait pas le cas de la divergence de ces dérivés. Actuellement, la classification se repose sur la théorie de Landau [93], qui introduit la notion de *paramètre d'ordre* ( $O$ ) pour représenter le changement de symétrie lors d'une transition de phase ( $O = 0$  d'un côté du point critique, et  $O \neq 0$  de l'autre). Les transitions de phases sont ainsi classifiées en trois catégories :

- *Transitions de Phases de premier ordre* : désignent les transitions dans lesquelles les propriétés macroscopiques du système considéré montrent des "sauts" discontinus au point critique. Le paramètre d'ordre dans ce cas "saute" de zéro à une valeur non-nulle lors du passage par le point critique (discontinuité du paramètre d'ordre). Un exemple de ce type de transitions de phases est la transition d'un état liquide à un état gazeux, où le paramètre d'ordre est la masse volumique.
- *Transitions de Phases de second ordre* : aussi appelées transitions de phases continues, elles désignent les transitions où le système considéré transite d'un état à un autre sans discontinuité de ses propriétés macroscopiques. Dans ce cas le paramètre d'ordre change entre les deux phases de la transition de façon continue. La transition paramagnétique-ferromagnétique en est un exemple, avec pour paramètre d'ordre la magnétisation.
- *Transitions de Phases d'ordre infini* : Englobent les transitions qui ne sont pas liées à une brisure spontanée de la symétrie, et où un paramètre d'ordre, au sens usuel, ne peut être défini. Cela inclut de façon générale les transitions de phases topologiques comme la transition de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) [94] [95].

Nous allons nous focaliser dans cette section sur les transitions de phases de second ordre car c'est ce qui nous sera utile dans la suite de ce chapitre.

Pour étudier les transitions de phases, nous pouvons utiliser les fonctions de corrélation. Par exemple, la fonction de corrélation spatiale entre deux points permet de mesurer comment les fluctuations locales du paramètre d'ordre  $O(\vec{x})$  affectent ces mêmes fluctuations à une autre position du système considéré. Elle peut être écrite autour d'une transition de phase de second ordre, dans un système infini ( $L \rightarrow \infty$ ), de la façon suivante :

$$C(\vec{x}, \vec{y}) = \langle [O(\vec{x}) - \langle O(\vec{x}) \rangle][O(\vec{y}) - \langle O(\vec{y}) \rangle] \rangle. \quad (5.1)$$

$$\simeq r^{2-d-\eta} f\left(\frac{r}{\xi}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x \rightarrow \infty) \sim x^\eta e^{-x} \end{cases}, \quad (5.2)$$

où  $d$  représente la dimension,  $\eta$  est un exposant critique,  $\xi$  la longueur de

corrélation, et  $r \equiv |\vec{x} - \vec{y}|$  la distance entre les deux positions de la fonction de corrélation spatiale (valable dans le cas de la présence de l'invariance par translation et de l'isotropie dans le système).

La longueur de corrélation  $\xi$  est une longueur significative pour l'étude d'une transition de phase. Elle représente la distance sur laquelle les fluctuations des propriétés microscopiques d'un système sont corrélées. En mesurant une observable sur différents échantillons d'un système, qui sont de la taille de la longueur de corrélation, les résultats obtenus seront différents d'un échantillon à l'autre, car une fluctuation à une certaine position n'a d'effet que sur une distance  $\xi$ , et aucune influence au-delà. Ainsi, si le système est étudié sur des distances  $r \ll \xi$  dans un de ces échantillons, tous les autres se comporteront comme des paramètres constants. Si au contraire l'étude est réalisée sur une distance  $r \gg \xi$ , les détails microscopiques des autres échantillons sont pris en compte dans les moyennes des observables mesurées.

### Invariance d'échelle

Dans les transitions de phases de second ordre, la longueur de corrélation  $\xi$  diverge au point critique, et les fluctuations dans le système sont corrélées à grandes distances. Cela n'est bien valable qu'au point critique, car  $\xi$  diminue quand on s'éloigne de ce dernier d'un côté ou de l'autre de la transition. Ainsi, au point critique, nous sommes dans le cas où  $\xi \gg r$ , donc où les fluctuations à une certaine position affectent tout le système. De la même manière, une observable mesurée à une position donnée est influencée par les fluctuations de toutes les positions du système. De cette divergence de  $\xi$  résulte un système qui a une structure similaire à toutes les échelles, comme illustré dans l'exemple de la Figure 5.1. Cette propriété est appelée *l'invariance d'échelle* (*Scale Invariance* en anglais). Connaissant les caractéristiques d'une transition de phase à une certaine échelle au point critique, et les transformations nécessaires pour le passage à d'autres échelles, nous pouvons déduire les propriétés de cette même transition de phase à toutes les échelles du système. Nous allons plus tard dans ce chapitre utiliser l'invariance d'échelle pour mesurer les caractéristiques de la transition d'Anderson en dimension quatre.

### Universalité et exposants critiques

La caractérisation d'une transition de phase de second ordre consiste à trouver le point critique où elle se passe, et à déterminer comment se comportent les propriétés du système autour de ce point. Ainsi, la mesure d'une observable  $X$  varie selon la distance  $theta$  par rapport au point critique, car la longueur de corrélation (et donc la portée des fluctuations dans le système) varie de la même

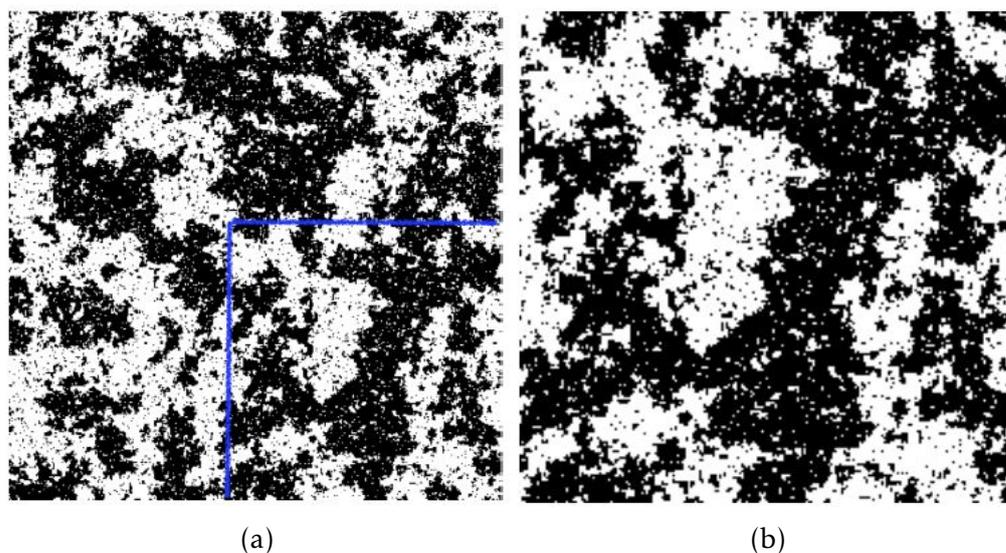


FIGURE 5.1 – L’invariance d’échelle au point critique de la transition de phase Ferromagnétique-paramagnétique (a) Simulation du réseau d’Ising en 2D au point critique ( $T_c$ ). Les couleurs blanches et noires symbolisent les spins  $\pm 1$ . (b) La zone de l’image à gauche sélectionnée avec un cadre bleu, remise à l’échelle de la même image. Figure extraite de [85]. Une simulation similaire peut être visualisée en [96].

façon. Cette dépendance à la distance du point critique s’écrit sous la forme d’une loi de puissance :

$$X \sim \theta^n \quad (5.3)$$

où  $n$  est un exposant critique, qui à lui seul caractérise le comportement de cette observable autour de la transition. Néanmoins, la valeur de cet exposant varie selon la dimension du système, car de cette dernière dépend la corrélation entre les fluctuations du système. Dans l’équation 5.2 nous pouvons voir la dépendance de la fonction de corrélation spatiale de la dimension au point critique ( $\xi \rightarrow \infty$ ) :  $C(r) \sim r^{2-d-\eta}$ . La corrélation entre les fluctuations dans le système (et donc leur effet) est de moins en moins notable quand la dimension augmente. C’est pour cela que, dans le modèle d’Ising par exemple, la transition de phase n’est pas présente dans toutes les dimensions, et ses caractéristiques sont différentes d’une dimension à l’autre (jusqu’à  $d = 4$ ).

Cela nous mène aux définitions des dimensions critiques. La *dimension critique inférieure* (*Lower Critical Dimension* en anglais)  $d_l$ , représente la dimension en dessous de laquelle il n’y a pas de transition de phase dans le système, car les fluctuations sont tellement corrélées qu’elles détruisent la transition de phase ( $d_l = 2$  dans le modèle d’Ising). D’un autre côté, la *dimension critique supérieure*

(*Upper Critical dimension* en anglais)  $d_u$ , représente la dimension à partir de laquelle les fluctuations sont très peu corrélées et peuvent être négligées ( $d_u = 4$  pour le modèle d'Ising). La transition de phase est dans ce cas ( $d > d_u$ ) bien décrite par les théories de champ moyen, et les exposants critiques deviennent indépendants de la dimension. Entre ces deux dimensions critiques ( $d_l < d < d_u$ ), les exposants critiques sont influencés par les fluctuations, et les théories de champ moyen sont approximatives et ne donnent pas leurs valeurs exactes. L'ensemble des exposants critiques d'un système à dimension  $d$  donnée, caractérise une *classe d'universalité*, qui distingue une transition de phase d'une autre. Deux systèmes totalement différents microscopiquement, mais qui montrent des transitions de phases avec les mêmes exposants critiques, appartiennent à la même classe d'universalité, et leurs transitions de phases sont équivalentes. Les transitions de phases ne dépendent dans ce sens que de la dimension et des symétries du système considéré. Cette notion d'*universalité* est pratique pour étudier une transition de phase avec différents systèmes dont les propriétés microscopiques sont différentes, et qui peuvent présenter des avantages les uns sur les autres, surtout expérimentalement.

### Finite Size Scaling

Un paramètre à prendre en compte pour l'étude d'une transition de phase est la taille du système, car les caractéristiques de cette dernière peuvent changer en fonction du caractère fini ou infini du système. La théorie de *changement d'échelle à taille finie* (*Finite Size Scaling* en anglais) [97], est un outil nécessaire pour inclure les effets de la taille du système dans l'étude des transitions de phases de second ordre. Elle sert à caractériser la transition de phase et à extraire les exposants critiques, en analysant comment les observables d'un système varient autour du point critique quand sa taille  $L$  change. Ainsi, autour du point critique, une observable obéit à une loi d'échelle dépendant de la taille du système  $L$  et s'écrit de la façon suivante :

$$X(L, \theta) = L^a \tilde{X}(\theta L^b), \quad (5.4)$$

avec  $\tilde{X}$  une fonction d'échelle universelle (qui ne dépend pas des détails microscopiques du système),  $\theta L^b$  une variable d'échelle, et  $a$  et  $b$  deux exposants qui peuvent être reliés aux exposants critiques de l'observable  $X$  et à ceux de la longueur de corrélation  $\xi$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous allons utiliser les notions discutées dans cette section pour étudier la transition d'Anderson en dimension 4 avec le Rotateur Frappé Quantique quasi-périodique à 3 fréquences (QP-QKR 4D).

## 5.2 Étude de la transition d'Anderson 4D avec le QP-QKR

Comme discuté dans le chapitre 2, le Rotateur Frappé atomique peut servir à réaliser la simulation quantique du modèle d'Anderson 1D. La localisation dynamique est observée dans le RF, dans l'espace des impulsions, est équivalente à la localisation d'Anderson qui, elle, est dans l'espace des positions. Il est aussi possible d'étudier le modèle d'Anderson en dimension  $D > 1$  avec le QP-QKR, en appliquant des modulations sur l'amplitude du potentiel de perturbation, pour générer des dimensions synthétiques dans le système. Nous allons ici discuter théoriquement du cas de l'étude du modèle d'Anderson à  $D = 4$  avec le QP-QKR 3 fréquences.

### QP-QKR à 3 fréquences et modèle d'Anderson 4D

Deux énergies sont présentes dans le système du QP-QKR à 3 fréquences, qui sont l'énergie cinétique de la particule et le potentiel pulsé qu'elle subit. L'Hamiltonien  $H_{QP}$  qui décrit ce système s'écrit de la façon suivante :

$$H_{QP} = \frac{p^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos(x) \sum_n \delta(t - n), \quad (5.5)$$

où  $\mathcal{K}(t)$  représente l'amplitude modulée des kicks du potentiel de perturbation :

$$\mathcal{K}(t) = K [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t + \phi_2) \cos(\omega_3 t + \phi_3) \cos(\omega_4 t + \phi_4)]. \quad (5.6)$$

Les quatre fréquences de ce système :  $\bar{k}$  ( $\propto T$ ),  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$  sont choisies incommensurables entre elles et avec  $2\pi$  pour éviter les résonances. Définissons des nouvelles variables (qui correspondent à des dimensions synthétiques)  $x_i = \omega_i t + \phi_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ), avec leurs moments conjugués  $p_i$ . L'Hamiltonien 5.5 peut être écrit sous une forme périodique :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + \omega_4 p_4 + K [1 + \varepsilon \cos(x_2) \cos(x_3) \cos(x_4)] \cos(x) \sum_n \delta(t - n). \quad (5.7)$$

En prenant une fonction d'onde en dimension quatre dont la condition initiale est une onde plane :  $\Psi(x, x_2, x_3, x_4) = \psi(x) \delta(x_2) \delta(x_3) \delta(x_4)$ , sa dynamique avec l'Hamiltonien 5.7 est équivalente à celle d'une condition initiale  $\psi(x)$  dans un système quasi-périodique en dimension une 5.5 (cela peut être démontré de la même façon que pour le cas à trois dimensions [63]). Comme pour le cas du

QP-QKR en 3D montré dans le chapitre 2, nous pouvons, en utilisant la théorie de Floquet, partir de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  de l'équation 5.7 pour arriver à un modèle de liaisons fortes en 4D dans l'espace des impulsions :

$$\mathcal{H}_{TB} = \epsilon_p \Phi_p + \sum_q t_q \Phi_{p-q}, \quad (5.8)$$

Avec  $p = (p, p_2, p_3, p_4)$  et  $q$  les impulsions à quatre dimensions,  $\Phi$  les états propres de Floquet de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  (avec les valeurs propres  $e^{i\epsilon/\hbar}$ ),  $\epsilon_p = \tan \left[ \frac{1}{2\hbar} \left( \epsilon - \frac{p^2}{2} - \prod_{i=2}^4 \omega_i p_i \right) \right]$  les énergies sur site qui sont pseudo-aléatoires pour la condition  $(\hbar, \omega_2, \omega_3, \omega_4, 2\pi)$  incommensurables, et  $t_q$  l'amplitude de "saut" qui est la quadruple série de Fourier de la quantité :  $\tan \left[ \frac{K}{2\hbar} \left( 1 + \varepsilon \prod_{i=2}^4 \cos(x_i) \right) \cos(x) \right]$ . Le QP-QKR 4D est ainsi équivalent à un modèle d'Anderson en 4D dans l'espace des impulsions, et présente donc une transition de phase métal-isolant (comme observé dans des études numériques [62] [98]) que nous pouvons étudier numériquement et expérimentalement.

### Transition d'Anderson dans le modèle QP-QKR 4D

Dans le modèle du QP-QKR 4D qui peut être réécrit comme dans l'Eq 5.8, l'amplitude du désordre  $W$  est fixe. Cela s'explique par le fait que les énergies sur sites  $\epsilon_p$  ne dépendent que des fréquences  $\hbar$  et  $\omega_i$  (comme montré dans la section 2.4), qui sont fixes pendant une expérience. La force de désordre dans le système, caractérisée par le ratio  $W/t$ , peut être contrôlée en variant l'amplitude de "saut"  $t$  qui dépend du paramètre de stochasticité  $K$  et de l'amplitude de modulation  $\varepsilon$ . Ainsi, la force de désordre dans le système augmente à mesure que les valeurs de  $(K, \varepsilon)$  diminuent, et inversement. La transition d'Anderson peut donc être étudiée en variant les paramètres  $(K, \varepsilon)$  pour aller d'un régime de localisation dynamique à un régime de diffusion, en passant par un régime critique, centré sur un point critique pour un couple de paramètres  $(K_c, \varepsilon_c)$ . La transition d'Anderson présente des aspects d'une transition de phase de second ordre même si elle n'est pas étudiée avec un paramètre d'ordre [30]. Elle exhibe au point critique une invariance d'échelle, et la dynamique autour de ce dernier est régie par des lois d'échelles universelles [2]. Dans le modèle du QP-QKR 4D, l'étude du comportement autour de la transition d'Anderson est effectuée par rapport à la distance du point critique  $\delta_K = K - K_c$ . Il faut signaler également que dans notre cas, le système dépend du temps, et

que l'étude du comportement critique est réalisée en regardant la dynamique aux temps très longs (équivalent de la limite thermodynamique :  $L \rightarrow \infty$ ). Ce n'est donc pas évident d'appliquer les approches qui ont été développées pour le modèle d'Anderson avec le Finite Size Scaling [99], car on ne varie jamais la taille de notre système. Il existe néanmoins une méthode similaire, le *Finite Time Scaling*, qui permet d'étudier une transition de phase en variant le temps. C'est avec cette méthode que nous allons faire une analyse de la transition de phase à temps fini, car le temps d'étude expérimentale de notre système n'est pas infini. Ainsi, une loi d'échelle universelle régissant le comportement des distributions en impulsion  $\Pi_t(p)$  autour de la transition d'Anderson peut être écrite en fonction du temps et de la distance du point critique :

$$\Pi_t(p) = t^\alpha \mathcal{F}(pt^\beta, \delta_K t^\gamma), \quad (5.9)$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonction d'échelle universelle et  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des exposants dépendant des exposants critiques de la transition d'Anderson  $\nu$  (du côté localisé  $\delta_K < 0$ ) et  $s$  (du côté diffusif  $\delta_K > 0$ ) qui sont définis comme suit :

$$p_{loc} \propto |\delta_K|^{-\nu}, \quad (5.10)$$

$$D \propto \delta_K^s, \quad (5.11)$$

avec  $p_{loc}$  la longueur de localisation et  $D$  la constante de diffusion. À partir de la loi d'échelle 5.9 des distributions en impulsion, une loi d'échelle peut être extraite pour l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$  :

$$\langle p^2 \rangle_t = t^{-2\alpha} \Lambda(\delta_K t^\gamma) \quad \text{avec} \quad \Lambda(\tilde{\delta}) = \int d\tilde{p} \tilde{p}^2 \mathcal{F}(\tilde{p}, \tilde{\delta}), \quad (5.12)$$

où  $\Lambda$  est une fonction d'échelle universelle,  $\tilde{p} = pt^2$  et  $\tilde{\delta} = \delta_K t^\gamma$ . Cette loi d'échelle nous permet d'étudier la dynamique critique à la transition avec l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$ .

La dépendance des exposants  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  aux exposants critiques  $\nu$  et  $s$  peut être déterminée en normalisant les distributions en impulsion  $\Pi_t(p)$  et en prenant en compte le "scaling" de  $p_{loc}$  et  $D$  [100]. En effet, la normalisation des distributions en impulsion :  $\int dp \Pi_t(p) = 1$ , pour tout  $\delta_K$  implique que  $\alpha = \beta$ . Ensuite, en considérant la relation entre  $\langle p^2 \rangle_t$  et  $\Lambda(\tilde{\delta})$  de l'équation 5.12, ainsi que le scaling de  $\langle p^2 \rangle_t$  à temps long dans les deux phases de la transition (Phase localisée :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p^2 \rangle_t = p_{loc}^2$ , phase diffusive :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle p^2 \rangle_t = Dt$ ), nous pouvons extraire

les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} 2\alpha/\gamma = -2\nu \\ s\gamma - 2\alpha = 1 \end{cases} . \quad (5.13)$$

En résolvant cette équation, nous obtenons :  $\alpha = \beta = -\frac{\nu}{(s+2\nu)}$  et  $\gamma = \frac{1}{(s+2\nu)}$ . Les lois d'échelles présentées précédemment peuvent ainsi être réécrites en fonction des exposants critiques  $\nu$  et  $s$  :

$$\Pi_t(p) = t^{-\nu/(s+2\nu)} \mathcal{F}\left(pt^{-\nu/(s+2\nu)}, \delta_K t^{1/(s+2\nu)}\right). \quad (5.14)$$

$$\langle p^2 \rangle_t = t^{-2\nu/(s+2\nu)} \Lambda\left(\delta_K t^{1/(s+2\nu)}\right). \quad (5.15)$$

C'est avec ces deux lois d'échelles que nous allons étudier le comportement critique autour de la transition d'Anderson dans le modèle du QP-QKR 4D. Il faudrait aussi rappeler qu'il a été prédit que les exposants critiques  $\nu$  et  $s$  à dimension  $d$  sont interdépendants en suivant la relation de Wegner :  $s = (d-2)\nu$  [29]. L'étude de la transition d'Anderson 4D avec notre système nous permettra de déterminer les exposants critiques  $s$  et  $\nu$  et de vérifier expérimentalement la validité de cette relation de Wegner en dimension quatre.

### Simulation numérique et diagramme de phases ( $K, \varepsilon$ )

Nous allons d'abord étudier numériquement le modèle du QP-QKR 4D en utilisant la même méthode présentée dans le chapitre 2 pour le Rotateur Frappé Périodique. Nous allons pour cela rajouter les modulations d'amplitude avec les fréquences  $\omega_i$  dans l'opérateur de kicks. Nous pouvons ainsi calculer numériquement les distributions en impulsion et l'énergie cinétique du système  $\langle p^2 \rangle$  pour des temps et des paramètres différents du modèle. Dans la Figure 5.2, est présenté le diagramme de phases du QP-QKR 4D en fonction des paramètres  $K$  et  $\varepsilon$ , obtenu avec une simulation numérique. Nous construisons ce diagramme de phases en analysant la variation de la fonction d'échelle de l'énergie cinétique  $\Lambda = \langle p^2 \rangle_t t^{-2\alpha}$  (de la même façon que dans [101]). Ainsi, nous avons réalisé des simulations du QP-QKR pour différentes valeurs de  $(K, \varepsilon)$  et nous avons calculé l'évolution de  $\langle p^2 \rangle_t$  pour chaque couple et pour un nombre de kicks allant jusqu'à 5000. Nous avons effectué un moyennage sur  $10^4$  valeurs de la quasi-impulsion, distribuées uniformément sur un intervalle  $[-0.5, 0.5]$ . À partir de ces simulations numériques, le diagramme de phases est construit en calculant la pente de  $\log(\Lambda = \langle p^2 \rangle_t t^{2\alpha})$ , tracé en fonction de la variable d'échelle  $pt^\alpha$ . La pente calculée change de signe en passant d'un régime à l'autre de la

transition d'Anderson et s'annule dans la région critique, ce qui nous permet de la déterminer en simulation.

Dans le diagramme de phases 5.2, la région en nuances de bleu située à  $(K, \varepsilon) < (K_c, \varepsilon_c)$  représente la phase localisée (ou phase isolante) de la transition d'Anderson. La région en nuances de rouge située à  $(K, \varepsilon) > (K_c, \varepsilon_c)$  représente la phase diffuse (ou la phase métallique) de la transition. Entre les deux, la région critique est représentée avec un gradient de couleur entre le bleu et le rouge, qui

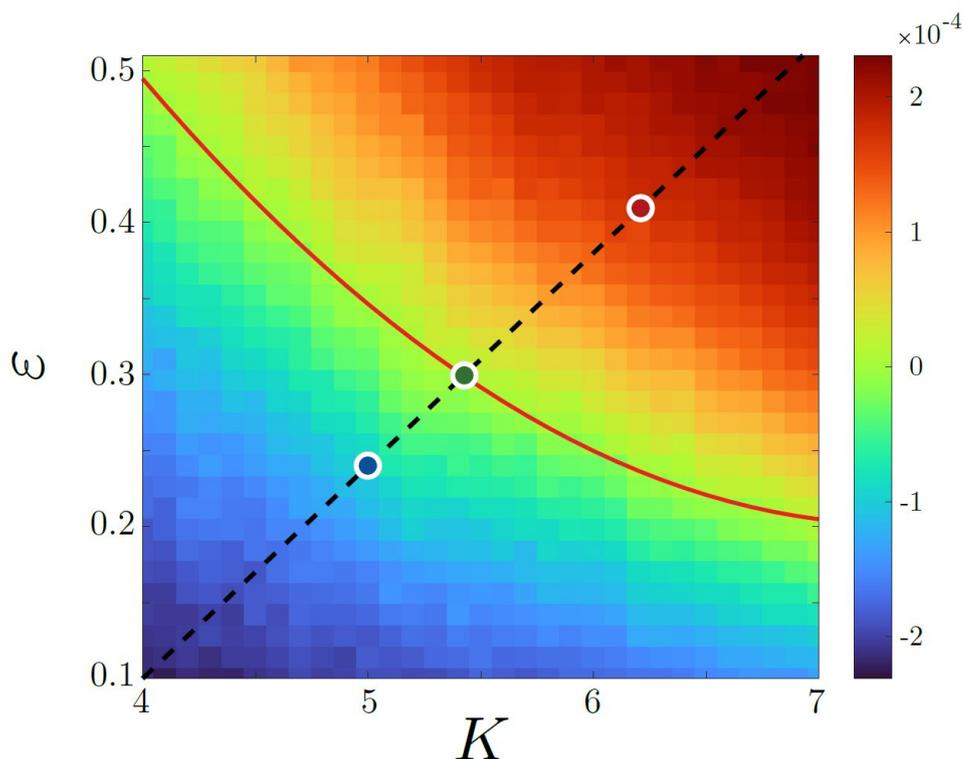


FIGURE 5.2 – Simulation numérique du diagramme de phases du modèle QP-QKR 4D, en fonction des paramètres  $K$  et  $\varepsilon$ , pour  $\bar{k} = 2.89$  et les fréquences  $\omega_2/2\pi = \sqrt{5}$ ,  $\omega_3/2\pi = \sqrt{13}$ ,  $\omega_4/2\pi = \sqrt{19}$ , avec un nombre de kicks allant jusqu'à 5000. L'échelle de couleur représente la pente de la quantité  $\log(t^{2\alpha}\langle p^2 \rangle_t)$ , avec  $\alpha = -1/4$  (calculée en utilisant la relation de Wegner pour  $d = 4$ ). La région bleue correspond à la phase localisée, la rouge à la région délocalisée, et entre les deux la région critique où la ligne critique est représentée en rouge foncé. La ligne en tirets représente le chemin étudié expérimentalement et numériquement pour caractériser la transition. Les points bleu, rouge et vert, entourés d'un cercle blanc, seront utilisés comme exemples de chaque région dans la section consacrée à la détermination du point critique.

est centrée sur la ligne critique (courbe en rouge foncé). Cela nous donne les valeurs possibles de  $(K_c, \varepsilon_c)$  pour différents chemins coupant la région critique. Dans nos simulations numériques et nos expériences, nous avons choisi de caractériser la transition en suivant le chemin montré avec une droite (d'équation  $\varepsilon(K) = 0.14K - 0.46$ ) en tirets sur la Figure 5.2. En analysant numériquement là où la pente (de  $\log(\langle p^2 \rangle_t t^{2\alpha})$  en fonction  $pt^\alpha$ ) s'annule, nous déterminons avec précision le point critique de ce chemin qui est  $K_c = 5.45 \pm 0.05^*$ . Dans la suite du chapitre, nous allons discuter des aspects techniques de l'expérience du QP-QKR 4D, puis nous montrerons comment on peut déterminer la valeur de  $K_c$  expérimentalement en suivant le même chemin dans le diagramme de phase montré sur la Figure 5.2.

### 5.3 Réalisation expérimentale

Avant de montrer les résultats de notre expérience sur l'observation et la caractérisation de la transition d'Anderson en dimension quatre, avec le Rotateur Frappé atomique quasi-périodique 4D, nous allons discuter des aspects techniques de cette expérience. Nous commencerons par expliquer comment nous extrayons les distributions en impulsion des atomes de l'expérience, et comment le traitement de données est réalisé pour récupérer l'énergie cinétique de ces derniers. Nous finirons par une description de l'expérience du modèle QP-QKR 4D que nous avons réalisée.

#### 5.3.1 Mesure de Temps de Vol

Dans le modèle du Rotateur Frappé atomique, la dynamique qui nous intéresse se passe dans l'espace des impulsions, car c'est sur les distributions en impulsion que la localisation exponentielle se voit. C'est avec ces distributions que nous pouvons également extraire l'énergie cinétique du nuage atomique  $\langle p^2 \rangle$ , sur laquelle une saturation signe la présence de la localisation dynamique. Nous pouvons expérimentalement mesurer les distributions en impulsion des atomes avec la méthode de temps de vol (TOF) en utilisant l'imagerie par absorption. Cette méthode consiste à éteindre les faisceaux du piège dipolaire et à laisser chuter les atomes par effet de la gravité seulement. Il n'y a ainsi aucune force qui agit sur le nuage atomique dans la direction horizontale, et les atomes se dispersent seulement sous l'effet de leurs énergies cinétiques. La position finale,

---

\*. à partir d'ici nous allons essentiellement discuter en termes de valeurs de  $K$ . Les valeurs de  $\varepsilon$  correspondantes sur le chemin que nous avons choisi, peuvent être calculées avec la fonction :  $\varepsilon(K) = 0.14K - 0.46$

après un temps de vol, dépend finalement de la vitesse initiale de chaque particule. Ainsi, après un certain temps de vol, la distribution de vitesses initiales (et donc d'impulsions initiales) des atomes est reconstituée et nous pouvons la mesurer avec le système d'imagerie en capturant des images du nuage avec la caméra.

Dans notre cas, le nuage est kické avec une onde stationnaire pour réaliser le Rotateur Frappé atomique. Les atomes se dispersent donc lors d'un temps de vol sous l'effet de l'énergie cinétique correspondant à leur température et aussi de celle accumulée par les kicks de lumière. À la fin du temps de vol, nous capturons une image du nuage atomique, de laquelle nous pouvons extraire deux distributions, une sur l'axe horizontal  $x$  en pixels, et une autre sur l'axe vertical  $y$  aussi en pixels, en fonction de la densité optique de l'image. Les kicks de l'onde stationnaire sur les atomes ne se faisant que dans la direction horizontale, nous nous intéressons uniquement à la distribution des atomes dans cette direction. Pour récupérer la distribution en impulsion à partir de cette mesure, nous devons établir une correspondance entre les pixels et une unité d'impulsions, qui est dans le cas du Rotateur Frappé atomique deux fois l'impulsion de recul :  $2\hbar k_L$ .

Nous utilisons le Condensat de Bose-Einstein (BEC) pour établir cette correspondance. En effet, dans un BEC kické, nous pouvons voir clairement les ordres de diffraction qui sont entremêlés dans un nuage thermique kické. Ainsi, en réalisant la diffraction du BEC avec une seule impulsion de l'onde stationnaire, comme dans l'inset de la Figure 4.12, nous pouvons distinguer trois ordres de diffraction espacés entre eux d'une impulsion de  $2\hbar k_L$ . En mesurant la distance entre les ordres sur l'image en pixels, nous pouvons déterminer la correspondance entre une impulsion de recul et la distance entre les ordres de diffraction. Pour l'axe vertical des distributions mesurées, qui sont en densité optique, il suffit de faire une normalisation des données de cet axe pour enfin obtenir la distribution en impulsion du nuage atomique kické.

Ce que nous avons discuté jusqu'ici n'est valable que pour un temps de vol donné, car l'espacement entre les ordres de diffraction (en pixels) grandit quand on augmente le TOF puisque les atomes se dispersent de plus en plus. Pour pouvoir faire des expériences de Rotateur Frappé atomique à des TOF différents, nous déterminons donc en avance la correspondance entre pixels et impulsion de recul, sur toute la hauteur de la caméra. Pour cela nous faisons des mesures de la distribution du BEC kické à différents TOF, d'où nous mesurons la distance entre les ordres de diffraction pour chaque image prise. Ces mesures sont tracées dans la Figure 5.3. En réalisant un ajustement linéaire de ces données, nous pouvons extrapoler et déterminer la correspondance : pixels  $\rightarrow 2\hbar k_L$  pour n'importe quel temps de vol.

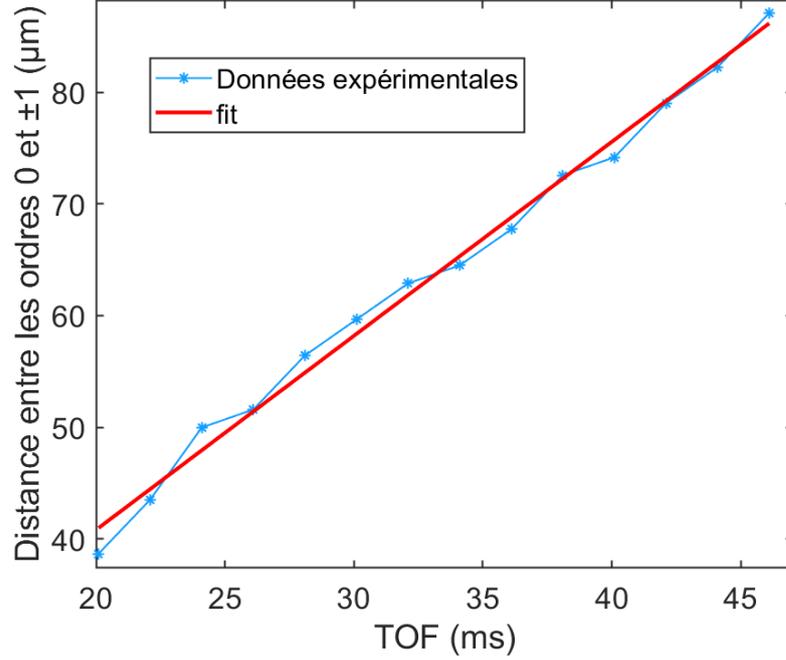


FIGURE 5.3 – Mesure de la correspondance entre deux impulsions de recul ( $2\hbar k_L$ ) et la distance en pixels sur la caméra pour différents TOF. Les points représentent les mesures expérimentales et la droite un ajustement linéaire.

### 5.3.2 Mesure de $\langle p^2 \rangle$

Comme nous avons pu le voir dans le chapitre 2, une signature de la localisation dynamique est la saturation de l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$ . Cette dernière est calculée à partir des distributions en impulsion que nous mesurons sur l'expérience.

L'évaluation de la valeur de  $\langle p^2 \rangle$  à partir d'une distribution en impulsion se fait avec la formule suivante :

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \Pi(p) dp, \quad (5.16)$$

où  $\Pi(p)$  représente la probabilité que les atomes soient dans l'état d'impulsion  $p$ . Nous intégrons donc la quantité  $p^2 \Pi(p) dp$  sur toutes les valeurs de  $p$  mesurées. Cette façon de faire, qui est d'intégrer directement sur les données expérimentales mesurées, peut fonctionner correctement seulement quand nous avons un bon rapport signal/bruit sur la caméra. En effet, quand les images prises sont noyées dans le bruit, la barre d'erreur des  $\langle p^2 \rangle$  s'élargit, car dans la quantité  $p^2 \Pi(p)$  ce bruit est encore plus amplifié. Nous pouvons voir cela sur les ailes des

courbes noires de la Figure 5.4 qui représentent  $p^2\Pi(p) = f(p)$ . Ces ailes contribuent de façon conséquente à la valeur de  $\langle p^2 \rangle$  (car  $p$  grand), et leur variation d'une mesure à une autre change considérablement sa valeur.

Pour éviter ce problème, nous avons choisi de réaliser une courbe d'ajustement (*fit*) de la quantité  $p^2\Pi(p)$ , puis d'effectuer l'intégration sur les valeurs de  $p$  en utilisant les points de cette courbe. La fonction à choisir pour réaliser la courbe d'ajustement dépend néanmoins du régime du Rotateur Frappé atomique pour lequel sont mesurées les distributions en impulsion. En effet, lors de la réalisation de ce dernier, les atomes sont dans un régime diffusif, où l'énergie cinétique est linéaire et la forme des distributions en impulsion est *Gaussienne*, jusqu'à temps  $t_1$ , à partir duquel nous entrons dans le régime de localisation dynamique. Dans celui-ci, il y a une saturation de l'énergie cinétique et les distributions en impulsion sont localisées exponentiellement. Nous devons donc, selon le régime, effectuer un ajustement de la quantité  $p^2\Pi(p)$  par la fonction  $f_{fit} = \text{Gaussienne} \times p^2$  dans le cas diffusif, ou bien la fonction  $g_{fit} = \text{Exponentielle} \times p^2$  dans le régime localisé. Nous pouvons voir la différence entre les deux ajustements dans les deux régimes dans la Figure 5.4, où le graphe 5.4a représente une distribution en impulsion dans le régime diffusif (en noir) ajustée avec la fonction  $f_{fit}$  en rouge et  $g_{fit}$  en vert. Le graphe 5.4b représente une distribution en impulsion dans le régime localisé (en noir) ajustée avec les fonctions  $f_{fit}$  et  $g_{fit}$  avec le même code couleur.

Il existe néanmoins une fonction qui englobe ces deux formes de distributions et que nous pouvons utiliser à tous les temps d'une expérience de Rotateur Frappé atomique. Elle a été présentée dans un article de Lobkis et Weaver [102], où ces auteurs ont utilisé la théorie auto-consistante de Vollhardt et Wolfle [31], afin de calculer les distributions de paquets d'ondes dans des réseaux désordonnés à 1D et 2D. Cette fonction s'écrit dans le cas du Rotateur Frappé comme suit :

$$\Pi_{LW}(p) = A_1 \left( \frac{\exp\left[\frac{(-A_1|p|+A_0)^2}{4A_0}\right]}{2\sqrt{2A_0}} + \frac{1}{4}\exp[-A_1|p|] \operatorname{erfc}\left[-\left(\frac{\sqrt{A_0}}{2} - \frac{\sqrt{A_1|p|}}{2\sqrt{A_0}}\right)\right] \right), \quad (5.17)$$

où  $A_0$  et  $A_1$  sont deux paramètres d'ajustement. Nous pouvons voir dans la Figure 5.4, des distributions en impulsion (en noir) ajustées avec cette fonction en bleu. Le graphe 5.4c dans le régime diffusif, et le graphe 5.4d dans le régime localisé. Bien qu'il n'y ait pas de justification théorique à l'utilisation de cette fonction dans notre système, qui est en dimension 4, nous pouvons néanmoins constater que l'ajustement fonctionne correctement dans les deux régimes<sup>†</sup>.

<sup>†</sup>. Nous avons également effectué des ajustements avec cette fonction sur des distributions en impulsion obtenues à partir de simulations numériques. Nous avons ensuite comparé les

C'est cette méthode que nous utilisons pour évaluer l'énergie cinétique dans toutes les expériences qui seront présentées dans la suite de ce chapitre.

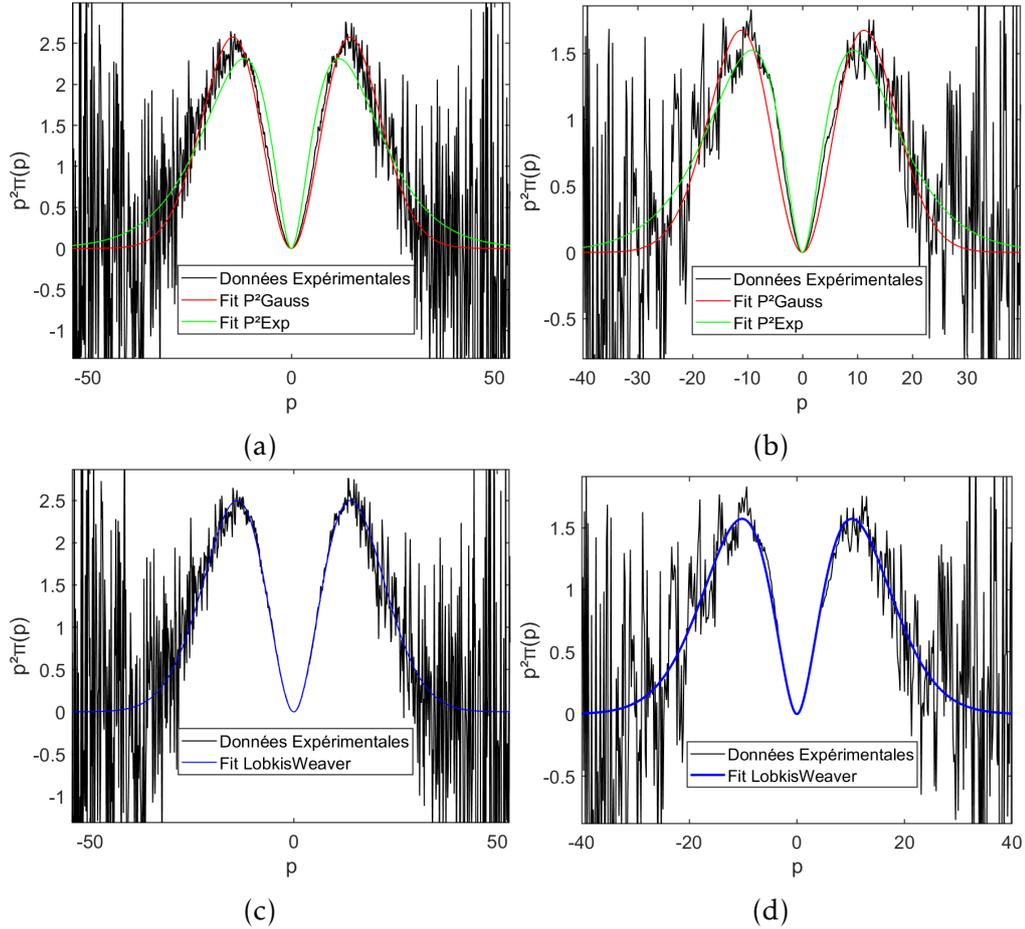


FIGURE 5.4 – Exemple d'un ajustement de la quantité expérimentale  $p^2\Pi(p)$  (tracée en couleur noire) avec différentes fonctions : en rouge avec  $f_{fit} = \text{Gaussienne} \times p^2$ , en vert avec  $g_{fit} = \text{Exponentielle} \times p^2$  et en bleu avec la forme de Lobkis-Weaver. Dans (a) et (c) La distribution en impulsion est mesurée à 412 kicks dans le régime diffusif ( $K = 6, \varepsilon = 0.38$ ). Dans (b) et (d) la distribution en impulsion est mesurée à 412 kicks dans un régime localisé ( $K = 5, \varepsilon = 0.24$ ). Toutes les mesures sont réalisées pour  $\bar{k} = 2.89$ .

$\langle p^2 \rangle$  calculés avec les courbes d'ajustement à ceux calculés directement sur les données de la simulation. La différence constatée entre les deux méthodes ne dépasse pas 3% sur les valeurs de  $\langle p^2 \rangle$ .

### 5.3.3 Expérience du Rotateur Frappé quasi-périodique à 3 fréquences

Maintenant que nous avons présenté les détails expérimentaux, nous allons décrire l'expérience de QP-QKR 4D, que nous avons réalisée dans le but d'observer et de caractériser la transition d'Anderson en dimension quatre. L'expérience du QP-QKR 4D implique l'implémentation de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  de l'équation 5.7, sur le dispositif expérimental. Cela consiste à kicker un nuage atomique avec notre dispositif d'onde stationnaire pulsée pour une amplitude de kicks modulée comme ceci :

$$\mathcal{K}(t) = K [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t + \phi_2) \cos(\omega_3 t + \phi_3) \cos(\omega_4 t + \phi_4)]. \quad (5.18)$$

Nous réalisons expérimentalement cette modulation au niveau du modulateur acousto-optique (AOM) en espace libre en sortie du banc laser pulsé, noté AOM1 dans la Figure 4.7. Cela est effectué en utilisant l'option "Fonction Arbitraire" du GBF qui contrôle cet AOM pour créer une fonction de modulation qui correspond à 5.18. Pour respecter la condition d'incommensurabilité entre les quantités  $(\bar{k}, \omega_2, \omega_3, \omega_4, 2\pi)$ , nous avons choisi des valeurs des fréquences :  $\omega_2/2\pi = \sqrt{5}$ ,  $\omega_3/2\pi = \sqrt{13}$  et  $\omega_4/2\pi = \sqrt{19}$ . Les phases  $\phi_i$  (pour  $i = 2, 3, 4$ ) sont nulles. Une valeur de  $\bar{k} = 2.89$  a été choisie, ce qui correspond à une fréquence de kicks de  $142.8\text{kHz}$  (et une période  $T = 7\mu\text{s}$ ), pour une largeur des kicks de  $20\text{ns}$ . Nous pouvons voir dans la Figure 5.5 un exemple d'un train d'impulsions de l'onde stationnaire modulées selon 5.18 avec les paramètres cités. Ce signal est une acquisition avec un oscilloscope d'un faisceau de l'onde stationnaire pulsée sur la photodiode rapide de la Figure 4.9. Cette photodiode nous sert à avoir une mesure continue du train d'impulsions pendant les expériences, avec laquelle nous réalisons une calibration entre les valeurs de  $K$  et la puissance laser de l'onde stationnaire. Cela est expliqué plus en détail dans la section 4.5.3. Dans les expériences de QP-QKR que nous avons réalisées, ces calibrations sont effectuées chaque heure environ <sup>‡</sup> (au début de chaque réalisation expérimentale pour un couple  $(K, \varepsilon)$ ). Nous vérifions également l'amplitude maximale des impulsions pendant les expériences, toutes les  $5\text{min}$ , pour faire des corrections sur ces calibrations.

Le nuage sur lequel nous appliquons les kicks avec l'onde stationnaire dans ces expériences est un nuage thermique de  $\sim 10^6$  atomes, avec une température  $T = 1.8\mu\text{K}$ , qui est réalisé dans le piège optique. Le nuage thermique est donc formé dans ce dernier, puis relâché (en éteignant les faisceaux du piège optique) pour être kické par l'onde stationnaire. Afin d'éviter les effets d'interactions qui

<sup>‡</sup>. L'intervalle de temps de 1 heure à été choisi à cause de la lenteur de la procédure de calibration, qui dure environ  $5\text{min}$ .

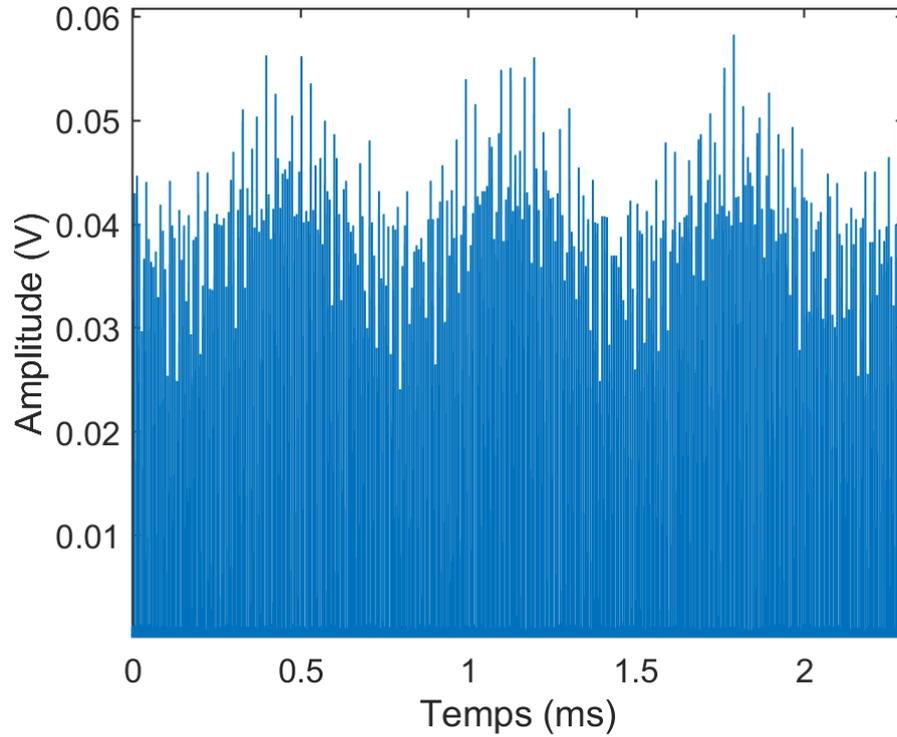


FIGURE 5.5 – Acquisition avec un oscilloscope d'un train de  $\sim 300$  impulsions modulé avec les fréquences  $\omega_2/2\pi = \sqrt{5}$ ,  $\omega_3/2\pi = \sqrt{13}$ ,  $\omega_4/2\pi = \sqrt{19}$ . Pour les paramètres  $\bar{k} = 2.89$ ,  $K = 6.4$  et  $\varepsilon = 0.44$ .

peuvent affecter les caractéristiques de la transition [103], nous avons veillé à ce que la densité du nuage utilisé dans toutes les expériences soit en dessous de  $10^{12} \text{ cm}^{-2}$ . Pour confirmer l'absence de ces effets, nous avons réalisé une comparaison avec des expériences où les densités sont trois fois plus petites, et où nous n'avons pas vu de changement notable sur les propriétés mesurées.

Pour caractériser la transition d'Anderson 4D, nous avons réalisé des expériences en suivant le chemin représenté en tirets dans le diagramme des phases  $(K, \varepsilon)$  de la Figure 5.2 (chemin qui correspond à une droite d'équation :  $\varepsilon(K) = 0.14K - 0.46$ ). Nous avons ainsi fait des réalisations expérimentales pour des valeurs de  $(K, \varepsilon) = (4, 0.1) \rightarrow (6.8, 0.49)$ , avec un pas de 0.2 sur  $K$ , et un pas de 0.028 sur  $\varepsilon$ . Les valeurs du nombre de kicks ' $t$ ' pour lesquelles les expériences sont réalisées, vont de 1 à 500, et sont réparties de façon rapprochée pour  $t < 50$  (écart de  $\sim 4$  kicks), puis l'écart entre les valeurs successives augmente avec  $t$ . Nous avons fait ce choix pour voir la dynamique avec plus de précision pour  $t$  petit. Ensuite, chaque réalisation (pour un couple  $(K, \varepsilon)$  et un nombre de kicks  $t$ ) est refaite 3 fois pour

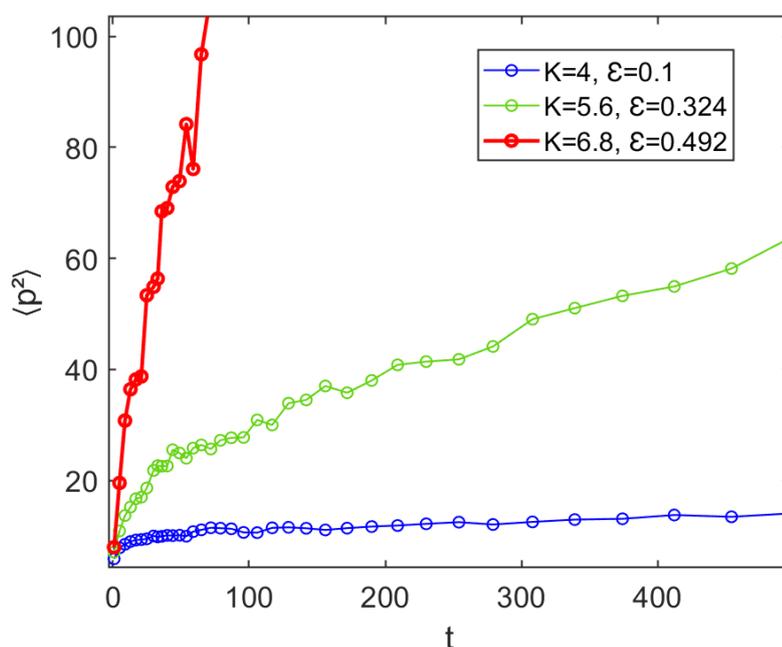


FIGURE 5.6 – Mesures expérimentales de  $\langle p^2 \rangle$  dans le modèle QP-QKR 4D, pour trois couples  $(K, \varepsilon)$  de 1 à 500 kinks.  $\bar{k} = 2.89$ . En bleu une mesure dans la phase localisée, en rouge dans la phase diffusive et en vert dans région critique. La Figure est coupée à  $\langle p^2 \rangle = 100$  pour montrer la différence entre les trois régimes, mais la courbe rouge arrive jusqu'à  $\langle p^2 \rangle = 700$  à un nombre de kinks de 500.

$t < 200$ , ou 6 fois pour  $t > 200$  (les images sont plus bruitées), afin de calculer des valeurs moyennes de ces mesures. Nous mesurons pour chaque réalisation une distribution en impulsion en prenant des images d'absorption à un temps de vol autour de 20 ms. En suivant la procédure décrite précédemment, nous avons ensuite calculé, à partir de ces distributions, les valeurs de l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$  correspondantes. Trois exemples de mesure de  $\langle p^2 \rangle$  sont représentés dans la Figure 5.6. Les mesures en bleu ont été faites dans la phase localisée de la transition d'Anderson, celles en rouge dans la phase diffusive et en vert dans la région critique. Toutes les données mesurées sur l'expérience (distributions en impulsion et  $\langle p^2 \rangle$ ) sont ensuite exploitées en utilisant les lois d'échelles présentées dans la section précédente pour caractériser la transition d'Anderson en 4D. Cette caractérisation commence par la détermination du point critique  $K_c$  où se déroule la transition, pour ensuite estimer les exposants critiques qui caractérisent cette dernière, et qui dépendent de la distance par rapport au point critique. Les résultats obtenus sont ensuite utilisés pour l'étude expérimentale de la loi d'échelle des distributions en impulsion autour de la transition.

## 5.4 Détermination du Point Critique $K_c$

La première étape pour la caractérisation d'une transition de phase est de déterminer pour quels paramètres seuils du système elle se produit, c'est-à-dire situer le point critique. Nous allons dans cette section montrer comment nous déterminons le point critique de la transition d'Anderson 4D dans le modèle QP-QKR 4D. Nous commencerons par une discussion générale sur une méthode utilisée pour déterminer le point critique d'une transition de phase de second ordre en calculant le paramètre de Binder (*Binder Cumulant*), ensuite nous montrerons comment nous appliquons cette méthode à notre modèle pour déterminer le point critique  $K_c$ .

### 5.4.1 Paramètre de Binder

Comme présenté plus haut dans ce chapitre, une transition de phase de second ordre est étudiée de façon générale avec un paramètre d'ordre  $O$ . Ce dernier est distribué d'une façon différente d'un côté et de l'autre du point critique. Dans la phase désordonnée de la transition de phase, la distribution de  $O$  est une gaussienne centrée en zéro. Dans la phase ordonnée, la distribution de  $O$  peut être approximée à la limite thermodynamique par une fonction de Dirac centrée sur une valeur non nulle [85]. Le paramètre de Binder  $U_L$  [104] [105] est une méthode souvent utilisée en simulations numériques pour déterminer le point critique d'une transition de phase de second ordre. Elle consiste en une mesure du *kurtosis* de la distribution du paramètre d'ordre en fonction de la taille  $L$  du système; c'est-à-dire une mesure de la différence entre cette distribution par rapport à la distribution normale (plus précisément la différence entre les ailes des distributions) :

$$U_L = 1 - \frac{\langle O^4 \rangle_L}{3\langle O^2 \rangle_L^2}. \quad (5.19)$$

Ainsi,  $U_L$  converge vers une valeur constante dans les deux phases.  $U_L = 0$  dans la phase désordonnée car la distribution de  $O$  est gaussienne, et  $U_L = \frac{2}{3}$  dans la phase ordonnée car la distribution de  $O$  est approximée à un Dirac. Entre ces deux valeurs,  $U_L$  varie de façon continue en fonction du paramètre de contrôle de la transition de phase.

La présence de l'invariance d'échelle au point critique dans les transitions de phases de second ordre permet d'utiliser le paramètre de Binder pour déterminer ce point. En effet, l'invariance d'échelle fait qu'au point critique, la distribution du paramètre d'ordre  $O$  est la même à toutes les échelles, et sa différence par rapport à la distribution normale (mesurée par  $U_L$ ) est donc aussi la même pour toute valeur de  $L$ . En traçant ainsi le paramètre de Binder en fonction du

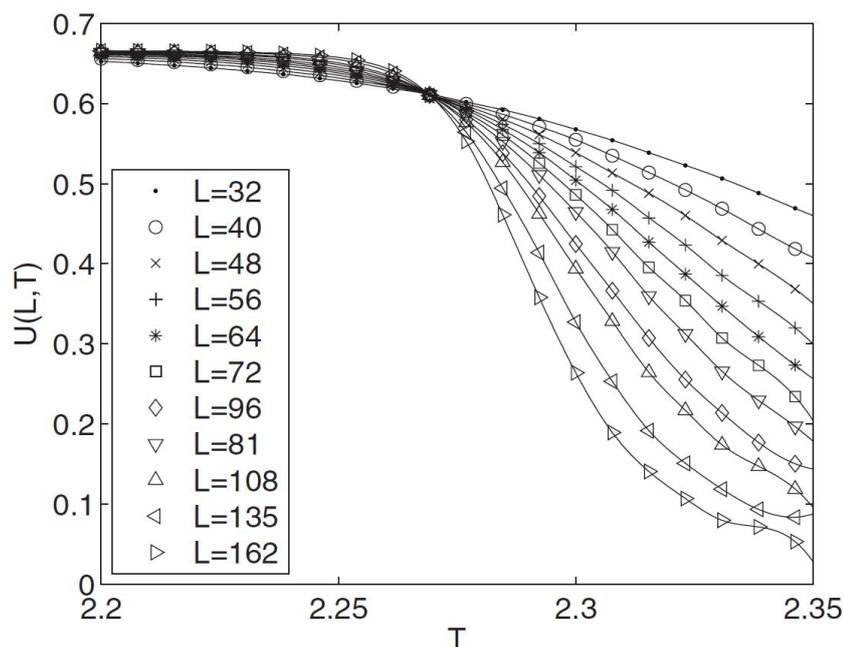


FIGURE 5.7 – Calcul numérique du paramètre de Binder pour différentes tailles  $L$  du réseau du modèle d’Ising en dimension 2, en fonction de la température  $T$ . Le croisement des courbes définit le point critique  $T_c$ . Figure extraite de [106].

paramètre de contrôle de la transition de phase, et pour différentes tailles du système, toutes les courbes (pour chaque taille du système  $L$ ) vont se croiser au point critique (où  $U_L$  est le même pour les tailles  $L$ ).

Un exemple est présenté dans la Figure 5.7, où  $U_L$  est calculé en simulation numérique en fonction de la température  $T$  pour différentes tailles de réseau  $L$ , dans le modèle d’Ising 2D. Nous pouvons voir que toutes les courbes se croisent à une température  $T_c$  qui situe le point critique de cette transition de phase.

L’aspect qui nous intéresse dans cette façon de déterminer le point critique est le fait que le paramètre de Binder ne fait aucune supposition préalable sur les exposants critiques de la transition de phase étudiée, c’est pour cela que nous avons décidé de l’utiliser dans notre étude de la transition d’Anderson 4D.

Bien que la transition d’Anderson ne soit pas étudiée avec un paramètre d’ordre comme c’est le cas dans les transitions de phases de second ordre, nous pouvons adapter la méthode du paramètre de Binder pour déterminer le point critique. L’idée que nous allons exploiter est de construire une quantité similaire au paramètre de Binder à partir des propriétés des distributions en impulsion, et de suivre la variation de cette quantité pour différentes valeurs du paramètre de contrôle  $K$  et du temps  $t$  (équivalent à la taille du système). La présence de

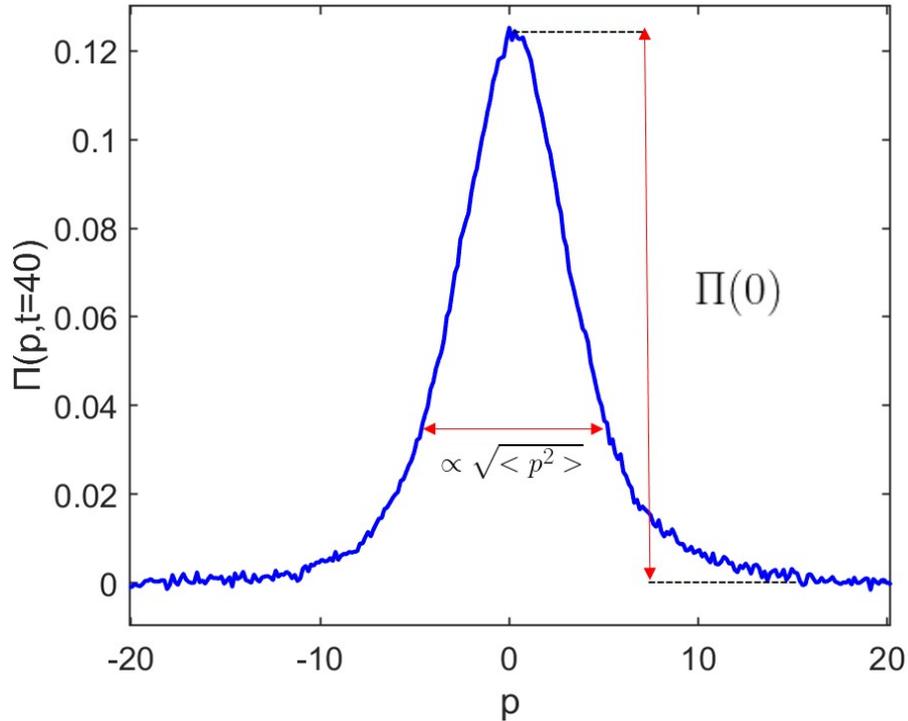


FIGURE 5.8 – Exemple d’une distribution d’impulsion sur laquelle sont montrées les quantités  $\Pi_t(0)^2$  et  $\langle p^2 \rangle_t$ . Elle a été mesurée dans l’expérience du QP-QKR 4D pour les paramètres :  $(K, \varepsilon) = (5, 0.24)$ ,  $k = 2.89$  et  $t = 40$ .

l’invariance d’échelle au point critique de la transition d’Anderson implique que les distributions en impulsion à différents temps  $t$  gardent la même forme critique. Ainsi, nous pouvons chercher à construire convenablement, à partir des distributions d’impulsions, une quantité qui gardera une valeur constante à tout temps  $t$ . Nous avons choisi de construire cette quantité de type Binder qu’on appellera  $B$ , avec la largeur ( $\propto \sqrt{\langle p^2 \rangle_t}$ ) et l’amplitude ( $\Pi_t(0)$ ) de la distribution en impulsion :

$$B(t, K) = \Pi_t(0)^2 \langle p^2 \rangle_t. \quad (5.20)$$

Ces quantités sont montrées dans la Figure 5.8, sur une distribution en impulsion mesurée du côté localisé de la transition d’Anderson 4D sur notre dispositif expérimental.

Le choix de construire le paramètre de Binder  $B(t, K)$  de la sorte, est motivé par le fait que les quantités  $\Pi_t(0)^2$  et  $\langle p^2 \rangle_t$  ont un comportement critique similaire (mais inversé) autour du point critique  $K_c$ . On peut voir cela dans les équations

ci-dessous, qu'on peut déduire des équations 5.9 et 5.12 :

$$\Pi_t(0)^2 = t^{2\alpha} \mathcal{F}(0, \tilde{\delta}). \quad (5.21)$$

$$\langle p^2 \rangle_t = t^{-2\alpha} \Lambda(\tilde{\delta}). \quad (5.22)$$

Le paramètre de Binder pour notre modèle est donc défini pour toute valeur de  $t$  et de distance du point critique  $\delta_K = K - K_c$  :

$$B(t, K) = \Pi_t(0)^2 \langle p^2 \rangle_t = b(\delta_K t^\nu) \quad \text{avec} \quad b(\tilde{\delta}) = \mathcal{F}(0, \tilde{\delta})^2 \Lambda(\tilde{\delta}), \quad (5.23)$$

où  $b(\tilde{\delta})$  est une fonction d'échelle universelle, constante pour tous les temps  $t$  à une valeur  $b(0)$  au point critique  $K = K_c$ . Cette constance est la signature que nous avons cherchée expérimentalement pour estimer la valeur de  $K_c$  pour la transition d'Anderson 4D.

Il faudrait signaler enfin, que la constance de  $B(t, K)$  au point critique n'est pas valable aux temps très courts. Cela s'explique par le fait que nous commençons une réalisation du QP-QKR avec une distribution en impulsion "très fine", pour laquelle il faut un certain temps non universel (qu'on appellera  $t_s$ ) pour prendre la forme critique.

### 5.4.2 Valeur Expérimentale de $K_c$

Pour déterminer le point critique  $K_c$  expérimentalement, nous avons déterminé le paramètre de Binder  $B(t, K)$  pour chaque couple de paramètres  $(K, \varepsilon)$  et pour des temps  $t$  allant de 1 à 500. Nous pouvons voir dans la Figure 5.9 des exemples de mesure de  $B(t, K)$  pour différents temps  $t$ , dans le régime localisé en bleu ( $K < K_c$ ), dans le régime diffusif en rouge ( $K > K_c$ ) et dans la région critique en vert ( $K \simeq K_c$ ). Nous constatons qu'après un temps  $t_s = 30$  (signalé avec des pointillés dans la figure), le paramètre de Binder prend une forme linéaire en fonction de  $t$  pour chaque  $K$ . Entre les mesures en bleu et celles en rouge, la pente du paramètre  $B(t, K)$  change de signe pour montrer le passage d'une phase à l'autre de la transition, et elle est nulle au point critique  $K_c$ .

Pour estimer d'une manière plus précise la valeur de  $K_c$ , nous regardons la variation de la pente  $\alpha B(K)$  du paramètre de Binder en fonction des valeurs de  $K$ . Elle est estimée en effectuant un ajustement linéaire de chaque courbe  $B(t, K) = f(t)$ . Le résultat est présenté dans la Figure 5.10, où les couleurs bleu, rouge et vert correspondent aux mesures montrées de la même couleur dans la Figure 5.9, et aux points de la même couleur dans le diagramme de phases  $(K, \varepsilon)$  de la Figure 5.2. La valeur de la pente  $\alpha B(K)$  passe d'un signe positif pour  $K < K_c$  (phase localisée) à un signe négatif pour  $K > K_c$  (phase diffusive), et elle s'annule

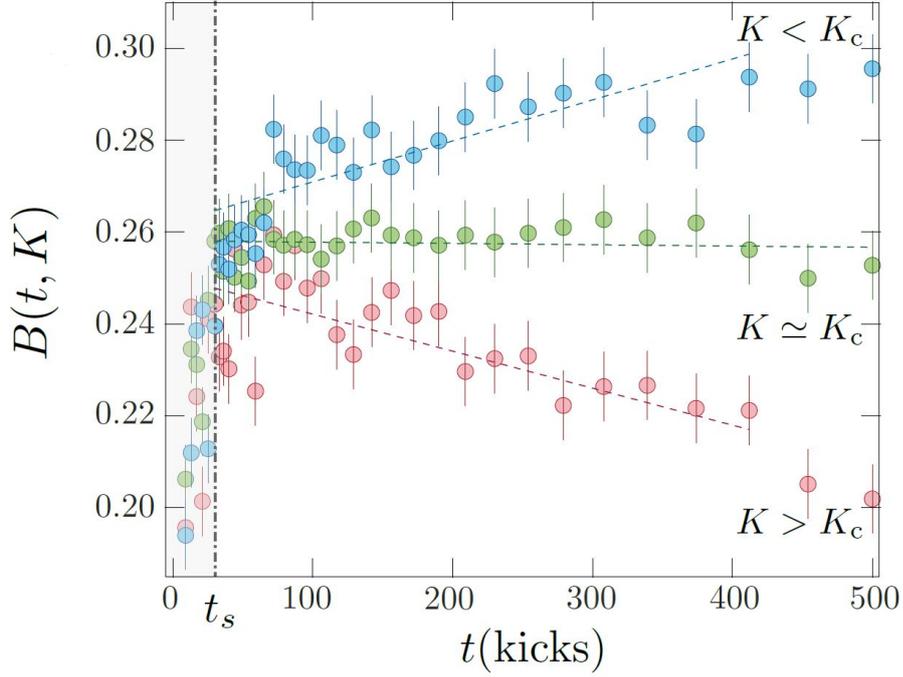


FIGURE 5.9 – Mesures expérimentales de la quantité  $B(t, K)$  pour différentes valeurs de  $K$  et  $t$  : en bleu dans la phase localisée  $K < K_c$ , en rouge dans la phase diffusive  $K > K_c$  et en vert dans la région critique  $K \approx K_c$ . Le comportement linéaire de  $B(t, K)$  commence après un temps transitoire  $t_s$  (région grise).

au point critique à une valeur de  $K_c \approx 5.62 \pm 0.15$ . Cette valeur expérimentale de  $K_c$  est en bon accord avec celle que nous obtenons de la simulation numérique du QP-QKR 4D  $K_c \approx 5.45 \pm 0.05$ . Les barres d'erreurs pour les deux valeurs, expérimentale et numérique, correspondent à des écarts-types.

Ainsi, en utilisant la méthode du paramètre de Binder, nous avons déterminé expérimentalement le point critique de la transition d'Anderson 4D dans le modèle du QP-QKR 4D. Grâce à notre démarche, nous n'avons fait jusqu'ici aucune supposition sur les exposants critiques  $s$  et  $\nu$ . Ce résultat nous permettra dans la suite, d'étudier le comportement critique dans la transition d'Anderson 4D en fonction de la distance du point critique  $K - K_c$  et de travailler ainsi sur la détermination des exposants critiques  $s$  et  $\nu$ , dont dépend ce comportement.

## 5.5 Estimation des exposants critiques

Maintenant que nous avons déterminé le point critique  $K_c$ , nous pouvons chercher les exposants critiques de la transition d'Anderson 4D. Dans cette

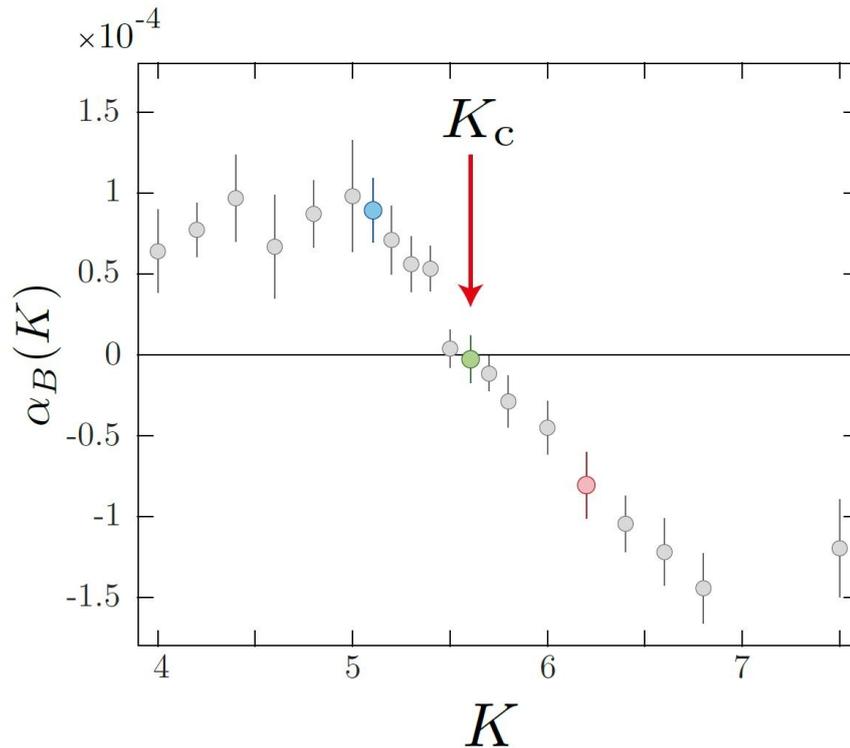


FIGURE 5.10 – La pente du paramètre de Binder  $\alpha_B(K)$  en fonction de  $K$ , déterminée après le temps  $t_s$ . Le point critique  $K_c$  correspond à une pente nulle.

section, nous allons dans un premier temps discuter de la procédure utilisée pour estimer expérimentalement les valeurs de ces exposants critiques en reconstituant les lois d'échelle de la transition d'Anderson 4D. Nous verrons dans un deuxième temps la méthode de *Bootstrap*, qui a été utilisée pour évaluer précisément les valeurs les plus probables des exposants, ainsi que leurs barres d'erreurs.

### 5.5.1 Détermination de la loi d'échelle de $\langle p^2 \rangle$

Pour déterminer les valeurs expérimentales des exposants critiques  $\nu$  et  $s$ , nous nous appuyons sur l'hypothèse de l'existence d'une loi d'échelle de  $\langle p^2 \rangle$  au voisinage de la transition d'Anderson 4D. Cette loi d'échelle, introduite dans l'équation 5.15, peut être réécrite de la façon suivante :

$$\langle p^2 \rangle t^{-2\nu/(s+2\nu)} = \Lambda \left( (K - K_c) t^{1/(s+2\nu)} \right), \quad (5.24)$$

Notre objectif consiste à reconstruire cette loi d'échelle en cherchant les valeurs de  $\nu$  et  $s$  pour lesquelles la forme de la quantité  $\langle p^2 \rangle t^{-2\nu/(s+2\nu)}$  correspond à celle de la fonction universelle  $\Lambda(\tilde{\delta})$ . La méthode que nous utilisons consiste à tracer la quantité  $\langle p^2 \rangle t^{-2\nu/(s+2\nu)}$  en fonction de la variable d'échelle  $(K - K_c)t^{1/(s+2\nu)}$  pour différentes distances du point critique  $K - K_c$  et temps  $t$ , avec des valeurs d'essai des exposants critiques  $\nu$  et  $s$ . Ensuite, nous pouvons chercher les valeurs optimales de ces exposants, qui vont minimiser la dispersion des points tracés autour d'une courbe moyenne  $\Lambda_0(\tilde{\delta}, \nu, s)$ .

La Figure 5.11a montre les mesures expérimentales de l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$  en fonction de la distance du point critique  $K - K_c$ , pour différents temps  $t$ . Ces mesures sont réalisées en suivant le chemin  $(K, \varepsilon)$  représenté dans le diagramme de phase de la Figure 5.2. Nous utilisons la valeur expérimentale du paramètre de stochasticité au point critique  $K_c = 5.62$ , déterminée dans la section précédente. Les valeurs de  $K - K_c$  croissantes sont représentées par des couleurs différentes du bleu au rouge qui correspondent au même code de couleurs utilisé pour tracer le diagramme de phase de la Figure 5.2, et les temps  $t$  par les nuances de ces couleurs, du clair au foncé pour  $t$  croissant.

Nous effectuons un changement d'échelle (rescaling) pour ces points expéri-

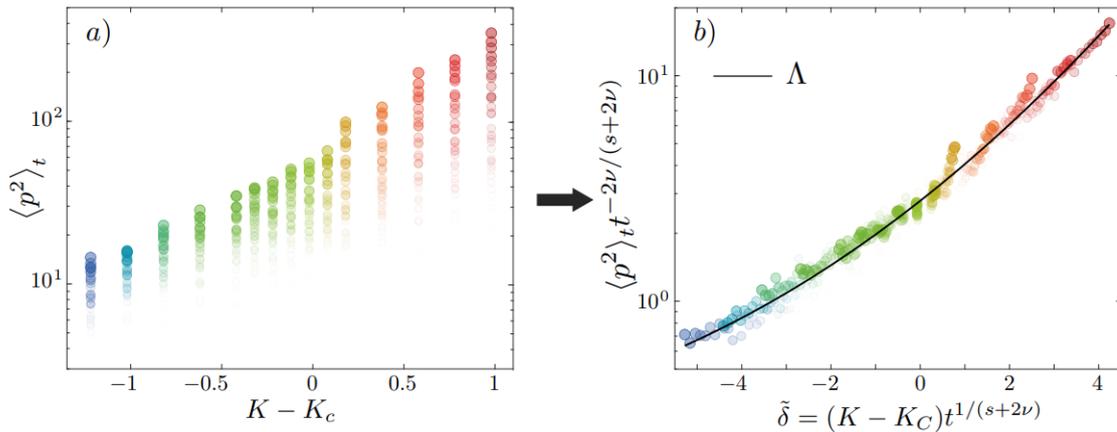


FIGURE 5.11 – Collapse des données expérimentales autour de la fonction d'échelle universelle  $\Lambda(\tilde{\delta})$ . a) L'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle$  mesurée pour différentes distances du point critique  $K - K_c$  ( pour  $K_c = 5.62$ ), à différents temps  $t$ . Chaque couleur correspond à une valeur de  $K - K_c$ , et les nuances de chaque couleur du plus clair au plus foncé correspondent aux temps  $t$  croissants. b) Les mêmes données après avoir effectué un changement d'échelle. La courbe noire représente la forme de la fonction  $\Lambda(\tilde{\delta})$  pour les valeurs optimales des exposants critiques  $\nu_{exp} = 1.07 \pm 0.16$  et  $s = 2.22 \pm 0.38$  (dont l'estimation est discuté dans la suite de la section).

mentaux, selon la loi d'échelle de l'équation 5.24, avec des valeurs d'essai des exposants critiques  $\nu$  et  $s$ . Il en résulte que tous les points expérimentaux se répartissent autour d'une courbe moyenne  $\Lambda_0(\tilde{\delta}, \nu, s)$ . Un exemple de ce rescaling est représenté dans la Figure 5.11b, pour des valeurs optimales des exposants critiques  $s$  et  $\nu$  (que nous déterminerons dans la section suivante); c'est-à-dire les valeurs qui rapprochent le plus les points expérimentaux de la courbe moyenne  $\Lambda_0(\tilde{\delta}, \nu, s)$ . Nous constatons néanmoins que, du côté diffusif de la transition, le recouvrement des points (en couleur rouge) sur cette courbe moyenne est moins bon comparé au régime localisé et au régime critique. Cela s'explique par le nombre limité de kicks que nous réalisons dans l'expérience, ce qui ne laisse pas suffisamment de temps aux courbes de  $\langle p^2 \rangle$  pour adopter une forme parfaitement linéaire, comme attendu dans le régime diffusif.

Pour déterminer les valeurs optimales des exposants critiques, nous appliquons ce rescaling pour différentes valeurs d'essai pour  $s \in [0, 6]$  et  $\nu \in [0, 2.5]$ . Pour chaque rescaling, nous calculons une courbe moyenne<sup>§</sup>  $\Lambda_0(\tilde{\delta}; \nu, s)$  autour de laquelle sont distribués tous les points. La variance de  $\langle p^2 \rangle t^{-2\nu/(s+2\nu)} - \Lambda_0(\tilde{\delta}; \nu, s)$  est ensuite calculée avec la méthode des moindres carrés pour quantifier la dispersion des points autour de la courbe moyenne (comme cela est réalisé dans [107]). Nous pouvons ainsi trouver les valeurs optimales des exposants critiques en cherchant les valeurs de  $\nu$  et  $s$  pour lesquelles cette variance est minimale (dispersion minimale des points autour de la courbe moyenne  $\Lambda_0(\tilde{\delta}; \nu, s)$ ).

La Figure 5.12a montre un colorplot qui représente la variance de  $\langle p^2 \rangle t^{-2\nu/(s+2\nu)} - \Lambda_0(\tilde{\delta}; \nu, s)$  en fonction des valeurs d'essai de  $\nu$  et  $s$ . Le code couleur va du noir au jaune pour des valeurs croissantes de la variance et le point blanc désigne son minimum. En réalisant une coupe horizontale (Figure 5.12b), et une coupe verticale (Figure 5.12c) du colorplot, nous pouvons déterminer les valeurs optimales des exposants critiques, qui correspondent au minimum de la variance. Nous obtenons ainsi  $\nu_{\text{fit}} = 1.07$  et  $s_{\text{fit}} = 2.22$ . Nous allons voir dans la suite comment nous estimons avec plus de précision ces exposants, ainsi que leurs barres d'erreurs.

### 5.5.2 Détermination des exposants critiques : méthode bootstrap

Nous utilisons la méthode du Bootstrap pour l'estimation des valeurs expérimentales des exposants critiques et de leurs intervalles de confiance. De façon générale, cette méthode statistique sert à déterminer les propriétés d'un jeu de

§. La courbe moyenne  $\Lambda_0(\tilde{\delta}; \nu, s)$  est construite en divisant l'axe de la variable d'échelle  $(K - K_c)t^{1/(s+2\nu)}$  en 20 fenêtres de même taille, sur lesquelles une moyenne locale des points expérimentaux est calculée

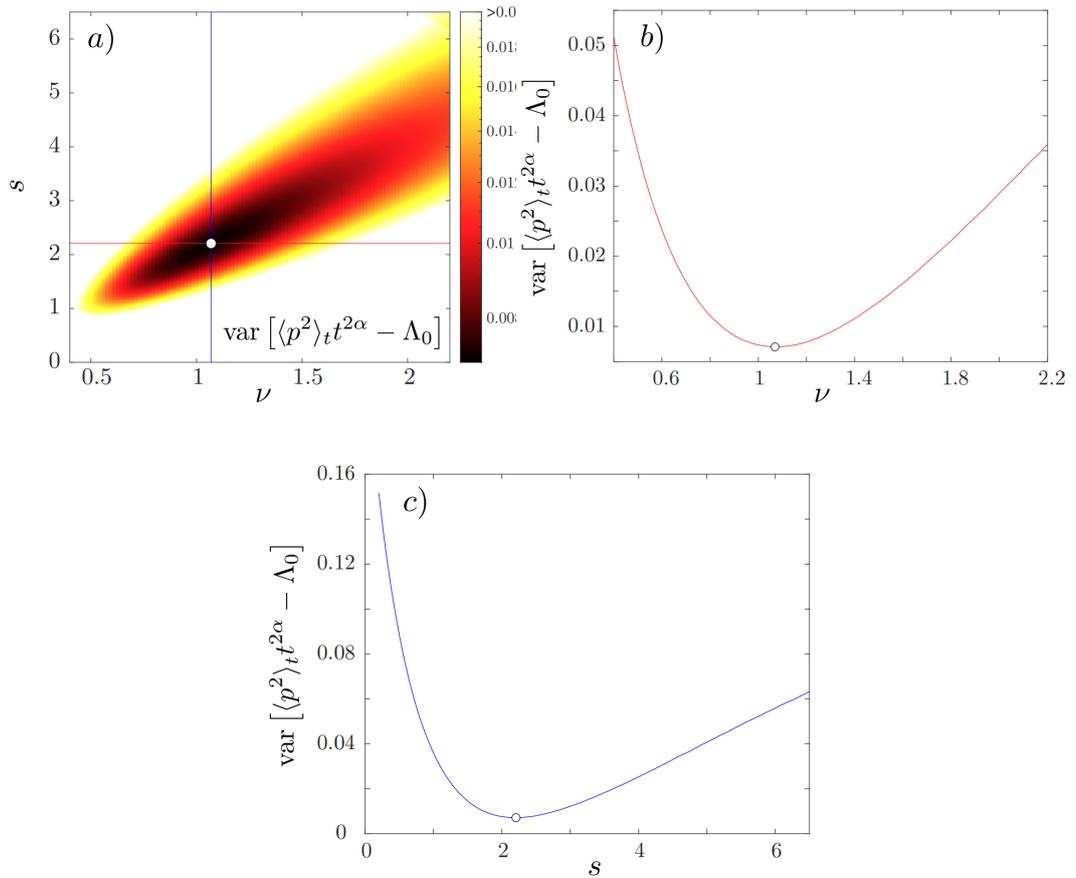


FIGURE 5.12 – Détermination des exposants critiques  $\nu$  et  $s$ . a) Un colorplot montrant la variance de  $\langle p^2 \rangle t^{-2\nu/(s+2\nu)} - \Lambda_0(\tilde{\delta}; \nu, s)$  en fonction des valeurs d'essai des exposants critiques. Le code couleur du noir au jaune représente les valeurs croissantes de la variance. Le point blanc désigne la valeur minimale de cette dernière. b) et c) sont respectivement des coupes du colorplot dans l'axe horizontal en rouge (pour déterminer  $\nu_{\text{fit}} = 1.07$ ), et sur l'axe vertical en bleu (pour déterminer  $s_{\text{fit}} = 2.22$ ).

données, telles que la variance ou la médiane, en faisant un rééchantillonnage de ces données. Ainsi, en commençant par un échantillon de données initial sur lequel nous voulons estimer la valeur d'une certaine propriété, l'idée est de procéder à un rééchantillonnage avec remplacement pour générer un grand nombre d'échantillons. Pour chacun de ces échantillons, la propriété voulue est calculée, et une distribution des valeurs de cette propriété est construite. Nous pouvons ensuite, à partir de cette distribution, déterminer la meilleure

estimation de la propriété voulue et son intervalle de confiance.

Les valeurs expérimentales des exposants critiques  $\nu_{exp}$  et  $s_{exp}$  et leurs intervalles de confiance sont déterminées avec la méthode de bootstrap, en prenant en compte les incertitudes des mesures de l'énergie cinétique  $\langle p^2 \rangle_t$ , et celle de la valeur de  $K_c$  au point critique [108] [109]. Contrairement à la méthode de bootstrap standard, où le rééchantillonnage est effectué sur le jeu de données initial, nous réalisons dans notre cas un rééchantillonnage de nos données expérimentales après avoir généré numériquement un bruit tenant compte des incertitudes expérimentales sur  $\langle p^2 \rangle_t$  et  $K_c$ . Cela est justifié par le fait que la méthode standard sous-estime les intervalles de confiance dans notre cas, car nous n'avons pas un grand jeu de données expérimentales (3 à 6 moyennages pour chaque réalisation expérimentale).

Ainsi, en supposant une distribution gaussienne des valeurs de  $\langle p^2 \rangle_t$  et  $K_c$  et en tenant compte des écarts-types estimés des mesures expérimentales, nous rééchantillonnons  $\langle p^2 \rangle_t$  et  $K_c$ , puis nous réalisons la procédure décrite dans la section précédente afin de déterminer les valeurs des exposants  $\nu$  et  $s$ . Cette procédure est répétée  $10^4$  fois, ce qui fournit les points  $(\nu, s)$  présentés dans la Figure 5.13. De la distribution de ces points, nous pouvons déterminer la meilleure estimation des valeurs des exposants critiques (point vert dans la Figure 5.13), et leurs intervalles de confiance (barres d'erreur dans la Figure 5.13),  $\nu_{exp} = 1.07 \pm 0.16$  et  $s_{exp} = 2.22 \pm 0.38$ .

Les simulations numériques du modèle d'Anderson 4D [35], donnent des exposants critiques  $\nu_{num} = 1.156 \pm 0.014$  et  $s_{num} = 2.312 \pm 0.028$  (calculés en utilisant la relation de Wegner), représentés avec un point rouge dans la Figure 5.13). Ces simulations prédisent aussi que les valeurs des exposants critiques sont différentes (et  $\nu > 1/2$ ) jusqu'au moins la dimension 6 du modèle d'Anderson [35] [36]. D'un autre côté, la théorie auto-cohérente [25] (qui est une théorie de champ moyen) prévoit que la dimension 4 est la dimension critique supérieure de la transition d'Anderson avec des exposants  $\nu_{sc} = 1/2$  et  $s_{sc} = 1$  [110], représentés par une croix rouge dans la Figure 5.13).

Les exposants critiques de la transition d'Anderson 4D déterminés avec notre expérience de QP-QKR 4D, concordent avec la relation de Wegner  $s = (d - 2)\nu$  pour  $d = 4$ . Ensuite, les valeurs obtenues sont en très bon accord avec les simulations numériques du modèle d'Anderson 4D, et contredisent les prédictions de la théorie de champ moyen (théorie auto-cohérente). Ce résultat est la première démonstration expérimentale que  $d=4$  n'est pas la dimension critique supérieure du modèle d'Anderson.

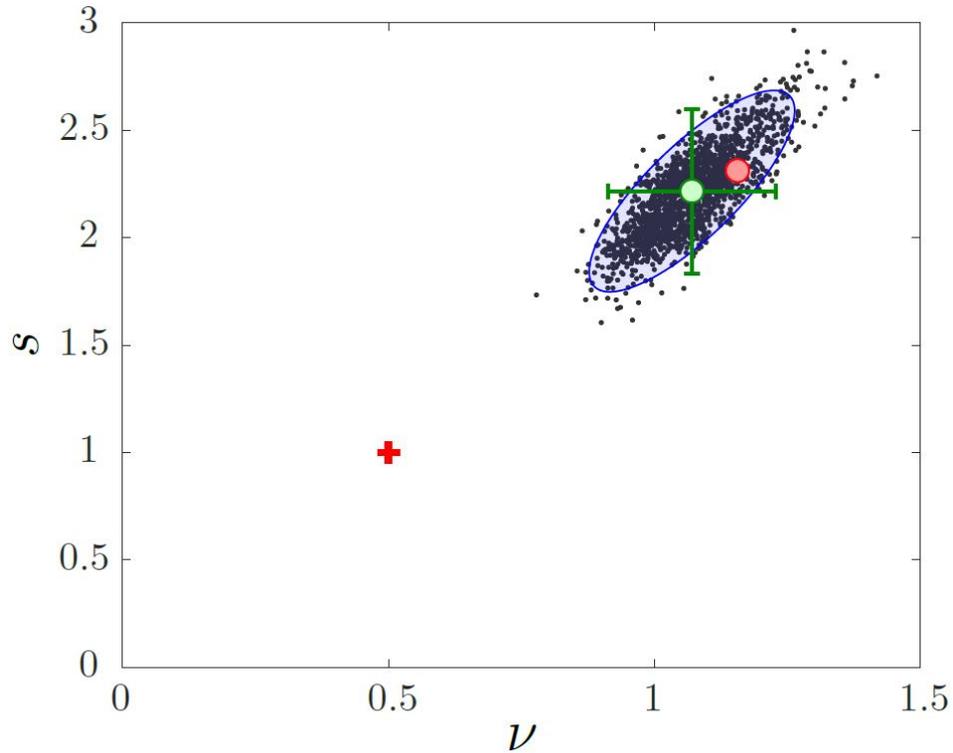


FIGURE 5.13 – Distribution de probabilité jointe des exposants critiques  $\nu$  et  $s$  obtenue avec la méthode de bootstrap. On obtient la meilleure estimation des exposants critiques  $\nu_{\text{exp}} = 1.07 \pm 0.16$  et  $s_{\text{exp}} = 2.22 \pm 0.38$  (point vert), avec des barres d'erreurs (en vert) correspondant à un intervalle de confiance de 95%. La délimitation en bleu, représente la région de l'intervalle de confiance à 95%. La meilleure estimation numérique des exposants critiques avec le modèle d'Anderson 4D,  $\nu_{\text{num}} = 1.156 \pm 0.014$  et  $s_{\text{num}} = 2.312 \pm 0.028$  (calculé en utilisant la relation de Wegner), est représentée avec un point rouge. La croix rouge représente la prédiction de la théorie auto-cohérente  $\nu_{\text{sc}} = 1/2$  et  $s_{\text{sc}} = 1$ .

## 5.6 Mesure de la Fonction d'échelle à deux paramètres

Dans la transition d'Anderson 4D du QP-QKR, l'invariance d'échelle au point critique  $K_c$  se manifeste sur les distributions en impulsion, qui gardent la même forme pour tout temps  $t$ . Cela peut être observé en effectuant un changement d'échelle avec la variable d'échelle  $pt^{-1/d}$  (notée :  $\tilde{p}$ ), qui tient compte du changement de l'axe des impulsions avec le temps. Cela est montré avec des mesures expérimentales dans la Figure 5.14. Dans cette dernière, sur le graphe à gauche,

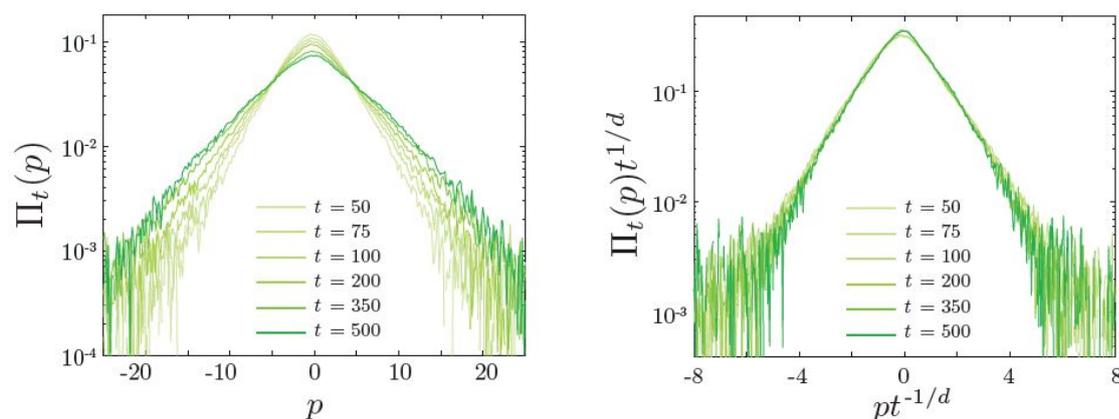


FIGURE 5.14 – Invariance d'échelle au point critique  $K_c$ . À gauche des distributions en impulsion mesurées à  $K_c = 5.45$ , pour différents temps  $t$  et pour  $\bar{k} = 2.89$ . À droite, le collapse des mêmes distributions après réalisation d'un changement d'échelle avec  $pt^{-1/d}$  pour  $d = 4$ .

sont représentées des distributions en impulsion, mesurées au point critique  $K_c$  pour différents temps  $t$  (moyennées sur 20 réalisations expérimentales). En réalisant un changement d'échelle  $\mathbb{I}$  avec  $pt^{-1/d}$ , toutes les distributions "collapsent" sur une seule forme, qui est la forme de la distribution au point critique. Cela est montré dans le graphe à droite dans la même figure.

Au-delà du point critique, cette invariance d'échelle survit partiellement dans le régime critique, en suivant la loi d'échelle de l'équation 5.14. Nous allons dans cette section montrer expérimentalement comment se maintient cette invariance d'échelle en dehors du point critique en utilisant la loi d'échelle des distributions en impulsion. Ensuite nous verrons comment nous construisons la fonction d'échelle  $\mathcal{F}$  de cette loi, en effectuant un "rescaling" des données expérimentales.

Ayant vérifié la relation de Wegner entre les deux exposants critiques  $s$  et  $\nu$  pour  $d = 4$ , nous pouvons commencer par réécrire la loi d'échelle de l'équation 5.14 en termes de  $\nu$  et  $d$  :

$$\Pi_t(p) = t^{-1/d} \mathcal{F}\left(pt^{-1/d}, \delta_k t^{1/\nu d}\right). \quad (5.25)$$

$\mathbb{I}$ . Dans cette section, nous avons choisi de réaliser le changement d'échelle sur les distributions en impulsion avec les valeurs théoriques des paramètres de la loi d'échelle ( $\nu = 1.156$ ,  $K_c = 5.45$ ), car les les celles déterminées expérimentalement sont en très bon accord avec elles.

Pour observer l'invariance d'échelle à  $K \neq K_c$  sur les distributions en impulsion à partir de cette loi d'échelle, nous devons garder constante la variable d'échelle  $\delta_K t^{1/d\nu}$  (notée :  $\tilde{\delta}$ ), qui ne dépend pas de l'impulsion  $p$ . Ainsi, nous choisissons une valeur constante pour  $\tilde{\delta}$ , et nous calculons les couples de paramètres  $(\delta_K, t)$  correspondants, pour lesquels nous mesurons expérimentalement des distributions en impulsion. Ensuite, en effectuant un changement d'échelle convenable, nous pouvons observer un collapse de ces distributions, qui montre l'invariance d'échelle dans le régime critique. Dans le tableau 5.1, sont montrés les couples des paramètres  $(\delta_K, t)$ , calculés pour des valeurs constantes de  $\tilde{\delta}$  dans le régime localisé ( $\tilde{\delta} < 0$ ) et dans le régime diffusif ( $\tilde{\delta} > 0$ ).

On peut voir dans la Figure 5.15 deux exemples de la persistance de l'invariance d'échelle dans le côté localisé du régime critique ( $K < K_c$ ), pour deux valeurs constantes de la variable d'échelle :  $\tilde{\delta} = -3$  (à gauche en nuances de bleu) et  $\tilde{\delta} = -1.4$  (à droite en nuances de vert). Les graphes en haut dans la Figure représentent les distributions en impulsion, mesurées pour des couples  $(\delta_K, t)$  correspondant à chacune des deux valeurs de  $\tilde{\delta}$ . En effectuant un "rescaling" de ces distributions, avec la variable d'échelle  $pt^{-1/d}$ , nous pouvons voir que dans les deux cas les distributions "collapsent" sur une seule courbe (graphe du bas de la Figure 5.15), qui est la forme d'une distribution en impulsion dans la phase localisée.

De la même façon, deux exemples d'invariance d'échelle du côté diffusif du régime critique sont présentés dans la Figure 5.16, pour des valeurs constantes de la variable d'échelle :  $\tilde{\delta} = 1.4$  (à gauche en nuances de jaune) et  $\tilde{\delta} = 3$  (à droite en nuances de rouge). Nous pouvons voir dans cette Figure, après un "rescaling" avec  $pt^{-1/d}$ , le collapse des distributions en impulsions expérimentales sur une

$\tilde{\delta}$	$(\delta_K, t)$				
-3	(-1.2, 69)	(-1.1, 103)	(-1, 161)	(-0.9, 262)	(-0.8, 451)
-1.4	(-0.6, 50)	(-0.5, 117)	(-0.45, 190)	(-0.41, 293)	(-0.37, 470)
+1.4	(+0.6, 50)	(+0.5, 117)	(+0.45, 190)	(+0.41, 293)	(+0.37, 470)
+3	(+1.2, 69)	(+1.1, 103)	(+1, 161)	(+0.9, 262)	(+0.8, 451)

TABLEAU 5.1 – Les valeurs de la distance au point critique  $\delta_K$  et de temps  $t$ , utilisées pour montrer le collapse des distributions autour du point critique, dans la phase localisée  $\tilde{\delta} < 0$ , et dans la phase diffusive  $\tilde{\delta} > 0$ . Ces paramètres sont calculés pour :  $\nu = 1.156$ ,  $K_c = 5.45$  et  $d = 4$ .

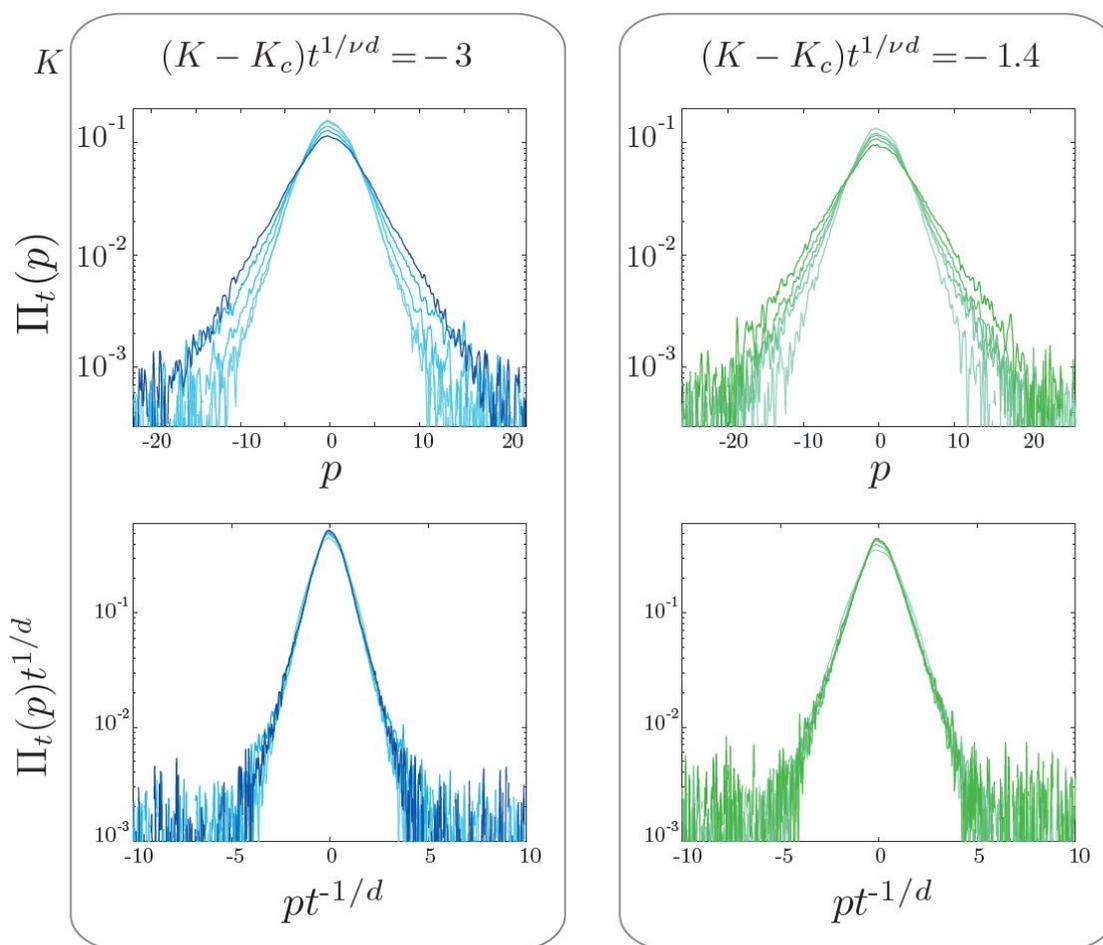


FIGURE 5.15 – Collapse des distributions en impulsion dans la phase localisée pour deux valeurs de  $\tilde{\delta} < 0$  (à gauche  $\tilde{\delta} = -3$ , à droite  $\tilde{\delta} = -1.4$ ). En haut les distributions en impulsion mesurées pour les valeurs de  $\delta_K$  et  $t$  du tableau 5.1, et pour  $\tilde{k} = 2.89$ . En bas, le collapse des mêmes distributions après réalisation d'un changement d'échelle avec  $pt^{-1/d}$  pour  $d = 4$ .

seule courbe, représentant la forme d'une distribution en impulsion dans le régime diffusif.

Il est possible de construire la fonction d'échelle  $\mathcal{F}(\tilde{p}, \tilde{\delta})$  à partir des données expérimentales en utilisant la même méthode de Collapse que nous venons de voir. Pour cela, nous commençons par calculer la valeur de  $\tilde{\delta}$  qui correspond à chaque couple  $(\delta_K, t)$  de toutes les distributions que nous avons mesurées sur l'expérience (pour la détermination du point critique et des exposants critiques).

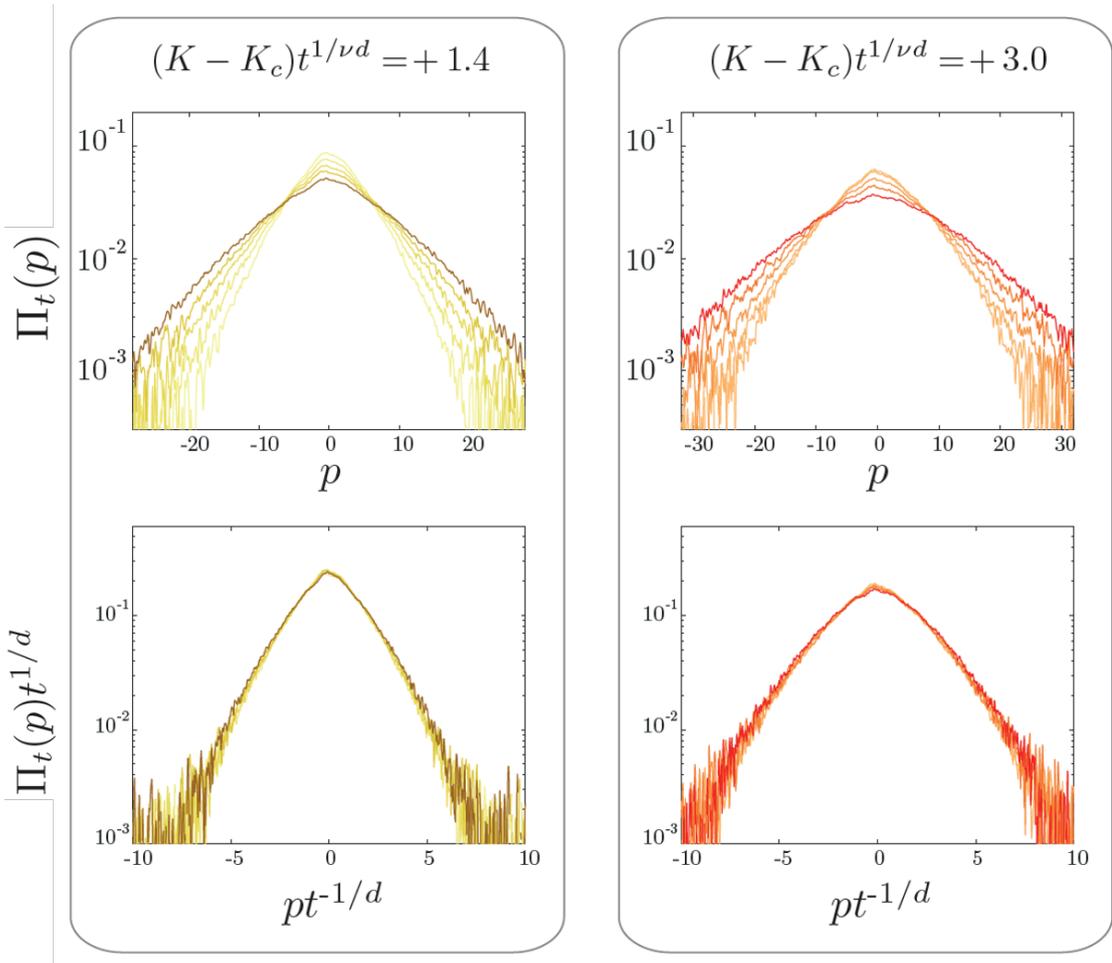


FIGURE 5.16 – Collapse des distributions en impulsion dans la phase diffusive pour deux valeurs de  $\tilde{\delta} > 0$  (à gauche  $\tilde{\delta} = 1.4$ , à droite  $\tilde{\delta} = 3$ ). En haut, les distributions en impulsion mesurées pour les valeurs de  $\delta_K$  et  $t$  du tableau 5.1, et pour  $\tilde{k} = 2.89$ . En bas, le collapse des mêmes distributions après réalisation d'un changement d'échelle avec  $pt^{-1/d}$  pour  $d = 4$ .

Ensuite, de la même façon que les exemples discutés plus haut, nous réalisons un changement d'échelle avec la variable d'échelle  $pt^{-1/d}$  pour toutes ces distributions, puis nous traçons toutes les données sur le même graphe (Figure 5.17). Nous pouvons constater que toutes les données "rescalées" forment une surface lisse (smooth), qui est la forme de la fonction d'échelle  $\mathcal{F}(\tilde{p}, \tilde{\delta})$ . On constate dans la figure que la courbe de cette fonction change d'une forme exponentiellement localisée pour  $\tilde{\delta} < 0$  (en nuances de bleu), à une forme gaussienne délocalisée pour  $\tilde{\delta} > 0$  (en nuances de rouge), en passant par un régime intermédiaire, représentant le comportement critique autour de la transition d'Anderson 4D.

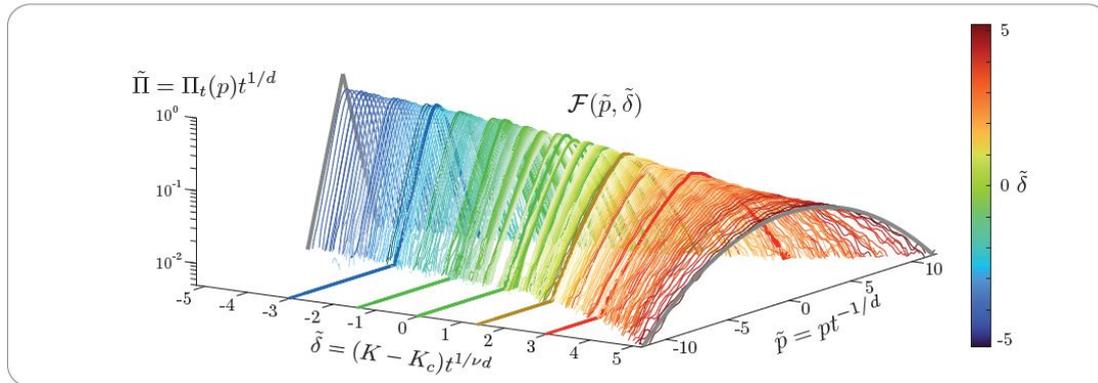


FIGURE 5.17 – Mesure de la fonction d'échelle à deux paramètres  $\mathcal{F}(\tilde{p}, \tilde{\delta})$ . Les données mesurées pour différents  $K$  et  $t$  sur l'expérience sont "rescalées" avec les variables d'échelle  $\tilde{p}$  et  $\tilde{\delta}$ , construisant ainsi la fonction d'échelle. Les données montrés dans les figure 5.14, 5.15, 5.16 sont représentées par des lignes en gras.

## 5.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre l'étude expérimentale de la transition de phase d'Anderson à 4 dimensions avec le QP-QKR. La caractérisation de cette transition de phase quantique a consisté en premier lieu à déterminer le point critique en utilisant la méthode du paramètre de Binder, qui s'appuie sur la présence de l'invariance d'échelle au point critique. Nous avons ensuite estimé expérimentalement les valeurs des exposants critiques qui caractérisent cette transition de phase en utilisant une méthode d'optimisation du collapse de mesures expérimentales sur une fonction d'échelle universelle. Ces exposants critiques sont en bon accord avec les résultats des simulations numériques du modèle d'Anderson 4D, et confirment la relation de Wegner pour  $d=4$ . Nous avons pu démontrer expérimentalement avec cette mesure des exposants critiques que  $d=4$  n'est pas la dimension critique supérieure de la transition métal-isolant. Enfin, nous avons mesuré expérimentalement la fonction d'échelle universelle à deux paramètres, qui décrit le comportement critique dans la transition d'Anderson 4D, et pour laquelle aucun calcul analytique n'existe à ce jour.



---

## Conclusion

---

Nous avons présenté dans cette thèse notre travail sur la première observation et caractérisation expérimentale d'une transition de phase quantique en dimension 4, qui est la transition d'Anderson 4D. Cette étude a été réalisée avec une expérience d'atomes ultrafroids de potassium 41, en générant des dimensions synthétiques dans le système du Rotateur Frappé Atomique, qui appartient à la classe d'universalité du modèle d'Anderson.

Dans le chapitre 1, nous avons commencé ce manuscrit par une discussion sur le transport électronique dans les matériaux condensés, en nous focalisant sur l'effet du désordre avec le modèle d'Anderson. Ce dernier montre une localisation exponentielle (localisation d'Anderson) de la fonction d'onde de l'électron en dimension 1 et 2, et une transition de phase entre un régime localisé et un régime délocalisé à  $d > 2$  (transition d'Anderson).

Dans le chapitre 2, nous avons introduit le modèle du Rotateur Frappé (RF), paradigme du chaos classique, représenté par une particule perturbée périodiquement avec un potentiel externe. Dans le cas quantique, ce système présente des propriétés similaires au modèle d'Anderson mais dans l'espace des impulsions (localisation dynamique). Le Rotateur Frappé Quantique quasi-périodique (QP-QKR) est une version du RF, dans laquelle des modulations d'amplitude du potentiel de perturbation permettent de générer des dimensions synthétiques et d'augmenter la dimension effective du système. Ce dernier permet d'étudier le modèle d'Anderson à  $d > 1$ .

Nous avons, dans le chapitre 3, présenté l'expérience d'atomes ultrafroids de potassium 41 qui sert à réaliser le RF. Ce dispositif permet d'obtenir des nuages thermiques de  $\sim 10^6$  atomes à une température de  $\sim 2\mu K$ , que nous utilisons pour la réalisation du QP-QKR 4D. Il permet aussi d'obtenir des condensats

de Bose-Einstein allant jusqu'à  $500 \times 10^3$  atomes, dont nous nous servons pour étudier expérimentalement la stabilité des paramètres du Rotateur Frappé Atomique.

Dans le chapitre 4, nous avons décrit le dispositif d'onde stationnaire pulsée mis en place pour la réalisation du Rotateur Frappé Atomique. Ce montage expérimental produit des impulsions à  $770 \text{ nm}$  avec une largeur de  $20 \text{ ns}$ , une fréquence de répétition entre  $100 \text{ kHz}$  et  $500 \text{ kHz}$  et des puissances crêtes allant jusqu'à  $345 \text{ W}$ . Les modulations d'amplitude que nous réalisons sur ces impulsions permettent de générer des dimensions synthétiques sur le Rotateur Frappé atomique afin d'étudier le modèle d'Anderson à dimension supérieure.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté l'expérience du QP-QKR  $4D$  que nous avons réalisée, et les résultats obtenus. Nous avons avec cette dernière observé la transition d'Anderson  $4D$  et mesuré expérimentalement les exposants critiques, de la longueur de localisation ( $\nu_{exp} = 1.07 \pm 0.16$ ) et de la constante de diffusion ( $s = 2.22 \pm 0.38$ ). Les valeurs obtenues confirment la relation de Wegner pour  $d = 4$ . Elles sont également en très bon accord avec les simulations numériques du modèle d'Anderson  $4D$  ( $\nu_{num} = 1.156 \pm 0.014$ ;  $s = 2.312 \pm 0.028$ ) et sont différentes des prédictions de la théorie auto-cohérente ( $\nu_{sc} = 1/2$ ;  $s_{sc} = 1$ ). Ceci est la première démonstration expérimentale que  $d = 4$  n'est pas la dimension critique supérieure de la transition d'Anderson. Enfin, nous avons mesuré expérimentalement la fonction d'échelle universelle à deux paramètres, qui décrit le comportement critique dans la transition d'Anderson  $4D$  et pour laquelle aucun calcul analytique n'existe à ce jour.

Pour la suite des activités sur l'expérience, nous comptons travailler en premier lieu sur la vérification expérimentale de la relation de Wegner [29]. Cette dernière dépendant de la dimension ( $s = (d - 2)\nu$ ), nous devons mesurer les exposants critiques de la transition d'Anderson à plusieurs dimensions. Nous avons dans ce manuscrit présenté la mesure des exposants critiques en dimension 4, il faudra donc également les mesurer en dimension 3 et en dimension 5 sur notre expérience.

À plus long terme, nous voulons aller vers l'étude du Rotateur Frappé en présence d'interactions inter-atomiques. Dans ce cas, des approches de champ moyen prédisent la brisure de la localisation dynamique, au profit d'une subdiffusion [111] [112]. Une première observation de cette dernière a été réalisée en utilisant le modèle du Rotateur Frappé, avec un gaz 1D d'atomes interagissant faiblement [113], et avec un gaz 3D à fortes interactions [80].

Dans la limite de fortes interactions dans un gaz 1D, appelé : régime de Tonks-Girardeau [114] [115], le comportement prédit est différent. Des études théoriques récentes prédisent dans ce cas la persistance de la localisation dynamique, appelée Many Body Dynamical Localization (MBDL), mais sans décroissance exponentielle des fonctions d'onde [116] [117]. Une récente réalisation du Rotateur Frappé dans le régime de fortes interactions a confirmé ces prédictions [118]. Plusieurs aspects seraient intéressants à étudier avec notre expérience dans ce contexte. Premièrement, l'étude du régime de MBDL et sa relation avec le phénomène de Many Body Localization (MBL) [119], qui se manifeste dans l'espace des positions. Ensuite, il serait également pertinent d'étudier l'effet des interactions arbitraires sur la localisation dynamique, en dehors des régimes de faibles et de fortes interactions. Enfin, une autre piste d'expérience serait d'explorer l'effet des interactions sur la transition d'Anderson dans le Rotateur Frappé quasi-périodique et leur impact sur ses caractéristiques.



---

## Bibliographie

---

- [1] P.W. ANDERSON. “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”. In : *Physical Review* 109 (1958), p. 1492-1505. DOI : 10.1103/PhysRev.109.1492.
- [2] E. ABRAHAMS et al. “Scaling theory of localization : absence of quantum diffusion in two dimensions”. In : *Physical Review Letters* 42 (1979), p. 673-676. DOI : 10.1103/PhysRevLett.42.673.
- [3] E. L. RAAB et al. “Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure”. In : *Phys. Rev. Lett.* 59 (23 déc. 1987), p. 2631-2634. DOI : 10.1103/PhysRevLett.59.2631.
- [4] K. B. DAVIS et al. “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”. In : *Phys. Rev. Lett.* 75 (22 nov. 1995), p. 3969-3973. DOI : 10.1103/PhysRevLett.75.3969.
- [5] C. C. BRADLEY et al. “Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions”. In : *Phys. Rev. Lett.* 75 (9 août 1995), p. 1687-1690. DOI : 10.1103/PhysRevLett.75.1687.
- [6] M. H. ANDERSON et al. “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”. In : *Science* 269.5221 (1995), p. 198-201. DOI : 10.1126/science.269.5221.198.
- [7] Cheng CHIN et al. “Feshbach resonances in ultracold gases”. In : *Rev. Mod. Phys.* 82 (2 avr. 2010), p. 1225-1286. DOI : 10.1103/RevModPhys.82.1225.
- [8] Clément HAINAUT et al. “Controlling symmetry and localization with an artificial gauge field in a disordered quantum system”. In : *Nature Communications* 9.1 (2018), p. 1382. DOI : 10.1038/s41467-018-03481-9.

- [9] Michael LOHSE et al. “Exploring 4D quantum Hall physics with a 2D topological charge pump”. In : *Nature* 553.7686 (jan. 2018), p. 55-58. ISSN : 1476-4687. DOI : 10.1038/nature25000.
- [10] Thomas CHALOPIN et al. “Probing chiral edge dynamics and bulk topology of a synthetic Hall system”. In : *Nature Physics* 16.10 (oct. 2020), p. 1017-1021. ISSN : 1745-2481. DOI : 10.1038/s41567-020-0942-5.
- [11] Tomoki OZAWA et Hannah M. PRICE. “Topological quantum matter in synthetic dimensions”. In : *Nature Reviews Physics* 1.5 (mai 2019), p. 349-357. ISSN : 2522-5820. DOI : 10.1038/s42254-019-0045-3.
- [12] O. BOADA et al. “Quantum Simulation of an Extra Dimension”. In : *Phys. Rev. Lett.* 108 (13 mars 2012), p. 133001. DOI : 10.1103/PhysRevLett.108.133001.
- [13] Fangzhao Alex AN, Eric J. MEIER et Bryce GADWAY. “Direct observation of chiral currents and magnetic reflection in atomic flux lattices”. In : *Science Advances* 3.4 (2017), e1602685. DOI : 10.1126/sciadv.1602685.
- [14] Lukas J. MACZEWSKY et al. “Synthesizing multi-dimensional excitation dynamics and localization transition in one-dimensional lattices”. In : *Nature Photonics* 14.2 (fév. 2020), p. 76-81. ISSN : 1749-4893. DOI : 10.1038/s41566-019-0562-8.
- [15] F. L. MOORE et al. “Atom Optics Realization of the Quantum  $\delta$ -Kicked Rotor”. In : *Phys. Rev. Lett.* 75 (25 déc. 1995), p. 4598-4601. DOI : 10.1103/PhysRevLett.75.4598.
- [16] Isam MANAI et al. “Experimental Observation of Two-Dimensional Anderson Localization with the Atomic Kicked Rotor”. In : *Phys. Rev. Lett.* 115 (24 déc. 2015), p. 240603. DOI : 10.1103/PhysRevLett.115.240603.
- [17] Julien CHABÉ et al. “Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves”. In : *Phys. Rev. Lett.* 101 (25 déc. 2008), p. 255702. DOI : 10.1103/PhysRevLett.101.255702.
- [18] J. BILLY et al. “Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder”. In : *Nature* 453.7197 (2008), p. 891-894. DOI : 10.1038/nature07000.
- [19] G. ROATI et al. “Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate”. In : *Nature* 453.7197 (2008), p. 895-898. DOI : 10.1038/nature07071.
- [20] F. JENDRZEJEWSKI et al. “Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential”. In : *Nature Physics* 8.5 (2012), p. 398-403. DOI : 10.1038/nphys2256.

- [21] Paul DRUDE. “Zur Elektronentheorie der Metalle”. In : *Annalen der Physik* 306.3 (1900), p. 566-613. DOI : 10.1002/andp.19003060312.
- [22] Neil W. ASHCROFT et N. David MERMIN. *Solid State Physics*. New York : Holt, Rinehart et Winston, 1976. ISBN : 978-0-03-083993-1.
- [23] A. SOMMERFELD. “Zur Elektronentheorie der Metalle”. In : *Annalen der Physik* 81.1 (1928), p. 1-30. DOI : 10.1002/andp.19283860102.
- [24] F. BLOCH. “Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern”. In : *Zeitschrift für Physik* 52 (1928), p. 555-600. DOI : 10.1007/BF01339455.
- [25] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. “Anderson localization in  $d \leq 2$  dimensions : a self-consistent diagrammatic theory”. In : *Physical Review Letters* 45 (1980), p. 842-846. DOI : 10.1103/PhysRevLett.45.842.
- [26] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. “Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in  $d \leq 2$  dimensions”. In : *Physical Review B* 22 (1980), p. 4666-4679. DOI : 10.1103/PhysRevB.22.4666.
- [27] D. J. THOULESS. “Electrons in disordered systems and the theory of localization”. In : *Physics Reports* 13.3 (1974), p. 93-142. DOI : 10.1016/0370-1573(74)90029-5.
- [28] A.F. IOFFE et A.R. REGEL. “Non-crystalline, amorphous and liquid electronic semiconductors”. In : *Prog. Semicond.* 4 (1960), p. 237.
- [29] F. J. WEGNER. “Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge”. In : *Z. Physik B* 25 (1976), p. 327-337. DOI : 10.1007/BF01315248.
- [30] R. OPPERMAN et F. WEGNER. “Disordered system with  $n$  orbitals per site :  $1/n$  expansion”. In : *Z. Physik B* 34 (1979), p. 327-348. DOI : 10.1007/BF01325199.
- [31] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. “Self-Consistent Theory of Anderson Localization”. In : *Electronic Phase Transitions*. Sous la dir. de W. HANKE et K.Y. V. Amsterdam : Elsevier, 1992, p. 1-78.
- [32] Keith SLEVIN et Tomi OHTSUKI. “Corrections to Scaling at the Anderson Transition”. In : *Phys. Rev. Lett.* 82 (2 jan. 1999), p. 382-385. DOI : 10.1103/PhysRevLett.82.382.
- [33] A. MACKINNON. “Critical exponents for the metal-insulator transition”. In : *Journal of Physics : Condensed Matter* 6.13 (1994), p. 2511. DOI : 10.1088/0953-8984/6/13/012.
- [34] Matthias LOPEZ et al. “Experimental Test of Universality of the Anderson Transition”. In : *Phys. Rev. Lett.* 108 (9 fév. 2012), p. 095701. DOI : 10.1103/PhysRevLett.108.095701.

- [35] Y. UENO et K. SLEVIN. “Dimensional Dependence of Critical Exponent of the Anderson Transition in the Orthogonal Universality Class”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 83.8 (2014), p. 084711. DOI : 10.7566/JPSJ.83.084711.
- [36] E. TARQUINI, G. BIROLI et M. TARZIA. “Critical properties of the Anderson localization transition and the high-dimensional limit”. In : *Phys. Rev. B* 95 (9 mars 2017), p. 094204. DOI : 10.1103/PhysRevB.95.094204. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.094204>.
- [37] D. S. WIERSMA et al. “Localization of light in a disordered medium”. In : *Nature* 390 (1997), p. 671-673. DOI : 10.1038/37757.
- [38] F. SCHEFFOLD et al. “Localization or classical diffusion of light?” In : *Nature* 398 (1999), p. 206-207. DOI : 10.1038/18347.
- [39] M. STÖRZER et al. “Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light”. In : *Physical Review Letters* 96 (2006), p. 063904. DOI : 10.1103/PhysRevLett.96.063904.
- [40] T. SPERLING et al. “Direct determination of the transition to localization of light in three dimensions”. In : *Nature Photonics* 7 (2013), p. 48-52. DOI : 10.1038/nphoton.2012.313.
- [41] F. SCHEFFOLD et D. WIERSMA. “Inelastic scattering puts in question recent claims of Anderson localization of light”. In : *Nature Photonics* 7 (déc. 2013), p. 934. DOI : 10.1038/nphoton.2013.210.
- [42] T. SPERLING et al. “Can 3D light localization be reached in ‘white paint’?” In : *New Journal of Physics* 18 (jan. 2016), p. 013039. DOI : 10.1088/1367-2630/18/1/013039.
- [43] T. SCHWARTZ et al. “Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices”. In : *Nature* 446 (2007), p. 52-55. DOI : 10.1038/nature05623.
- [44] H. HU et al. “Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network”. In : *Nature Physics* 4 (déc. 2008), p. 945-948. DOI : 10.1038/nphys1101.
- [45] L. A. COBUS et al. “Transverse confinement of ultrasound through the Anderson transition in three-dimensional mesoglasses”. In : *Physical Review B* 98 (déc. 2018), p. 214201. DOI : 10.1103/PhysRevB.98.214201.
- [46] Melvin CUTLER et N. F. MOTT. “Observation of Anderson Localization in an Electron Gas”. In : *Physical Review* 181 (mai 1969), p. 1336-1340. DOI : 10.1103/PhysRev.181.1336.

- [47] T. F. ROSENBAUM et al. "Metal-insulator transition in a doped semiconductor". In : *Physical Review B* 27.12 (1983), p. 7509-7523. DOI : 10.1103/PhysRevB.27.7509.
- [48] D. M. BASKO, I. L. ALEINER et B. L. ALTSHULER. "Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states". In : *Annals of Physics* 321.5 (2006), p. 1126-1205. DOI : 10.1016/j.aop.2005.11.014.
- [49] P. A. LEE et T. V. RAMAKRISHNAN. "Disordered electronic systems". In : *Reviews of Modern Physics* 57.2 (1985), p. 287-337. DOI : 10.1103/RevModPhys.57.287.
- [50] D. BELITZ et T. R. KIRKPATRICK. "The Anderson-Mott transition". In : *Reviews of Modern Physics* 66.2 (1994), p. 261-380. DOI : 10.1103/RevModPhys.66.261.
- [51] S. S. KONDOV et al. "Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter". In : *Science* 334.6052 (2011), p. 66-68. ISSN : 00368075, 10959203. URL : <http://www.jstor.org/stable/23059301> (visité le 03/02/2025).
- [52] G. SEMEGHINI et al. "Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization". In : *Nature Physics* 11.7 (juill. 2015), p. 554-559. ISSN : 1745-2481. DOI : 10.1038/nphys3339.
- [53] Shmuel FISHMAN, D. R. GREMPER et R. E. PRANGE. "Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization". In : *Phys. Rev. Lett.* 49 (8 août 1982), p. 509-512. DOI : 10.1103/PhysRevLett.49.509.
- [54] D. R. GREMPER, R. E. PRANGE et Shmuel FISHMAN. "Quantum dynamics of a nonintegrable system". In : *Phys. Rev. A* 29 (4 avr. 1984), p. 1639-1647. DOI : 10.1103/PhysRevA.29.1639.
- [55] B.V. CHIRIKOV. "A universal instability of many-dimensional oscillator systems". In : *Physics Reports* 52.5 (1979), p. 263-379. DOI : 10.1016/0370-1573(79)90023-1.
- [56] A.L. LICHTENBERG et M.A. LIEBERMAN. *Regular and Chaotic Dynamics*. Berlin : Springer-Verlag, 1991.
- [57] P. H. RICHTER et H. J. SCHOLZ. "Chaos in Classical Mechanics : The Double Pendulum". In : *Stochastic Phenomena and Chaotic Behaviour in Complex Systems*. Sous la dir. de P. SCHUSTER. T. 21. Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. ISBN : 978-3-642-69593-3. DOI : 10.1007/978-3-642-69591-9\_9.

- [58] Dominique DELANDE. *Kicked rotor and Anderson localization*. Lecture notes. 2013. URL : [https://boulderschool.yale.edu/sites/default/files/files/Delände-kicked\\_rotor\\_lectures\\_1\\_and\\_2.pdf](https://boulderschool.yale.edu/sites/default/files/files/Delände-kicked_rotor_lectures_1_and_2.pdf).
- [59] Giulio CASATI, Joseph FORD et SPRINGER-VERLAG. *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*. T. 93. Lecture Notes in Physics. Berlin / Heidelberg : Springer-Verlag, 1979.
- [60] Jiao WANG et Antonio M. GARCÍA-GARCÍA. “Anderson transition in a three-dimensional kicked rotor”. In : *Phys. Rev. E* 79 (3 mars 2009), p. 036206. DOI : 10.1103/PhysRevE.79.036206.
- [61] D. L. SHEPELYANSKY. “Localization of diffusive excitation in multi-level systems”. In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 28.1-2 (sept. 1987), p. 103-114. DOI : 10.1016/0167-2789(87)90123-0.
- [62] Giulio CASATI, Italo GUARNERI et D. L. SHEPELYANSKY. “Anderson Transition in a One-Dimensional System with Three Incommensurate Frequencies”. In : *Phys. Rev. Lett.* 62 (4 jan. 1989), p. 345-348. DOI : 10.1103/PhysRevLett.62.345.
- [63] Gabriel LEMARIÉ et al. “Observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment”. In : *Phys. Rev. A* 80 (4 oct. 2009), p. 043626. DOI : 10.1103/PhysRevA.80.043626.
- [64] Jean-Claude GARREAU. “Quantum simulation of disordered systems with cold atoms”. In : *Comptes Rendus Physique* 18 (2017), p. 31-46. DOI : 10.1016/j.crhy.2016.09.002.
- [65] Charbel CHERFAN. “Conception et réalisation d’une expérience de condensat de Bose-Einstein de 41K basée sur des sources laser télécom”. Thèse de doct. 2021. URL : <https://theses.fr/2021LILUR045>.
- [66] Maxime DENIS. “Construction d’une expérience de Condensat de Bose-Einstein de 41K pour l’étude du rotateur frappé atomique”. Thèse de doct. 2022. URL : <https://theses.fr/2022ULILR064>.
- [67] H. M. J. M. BOESTEN et al. “Properties of cold collisions of  $^{39}\text{K}$  atoms and of  $^{41}\text{K}$  atoms in relation to Bose-Einstein condensation”. In : *Phys. Rev. A* 54 (5 nov. 1996), R3726-R3729. DOI : 10.1103/PhysRevA.54.R3726.
- [68] L. TANZI et al. “Feshbach resonances in potassium Bose-Bose mixtures”. In : *Phys. Rev. A* 98 (6 déc. 2018), p. 062712. DOI : 10.1103/PhysRevA.98.062712.
- [69] Hao-Ze CHEN et al. “Production of large  $^{41}\text{K}$  Bose-Einstein condensates using  $D_1$  gray molasses”. In : *Phys. Rev. A* 94 (3 sept. 2016), p. 033408. DOI : 10.1103/PhysRevA.94.033408.

- [70] Tobias TIECKE. *Properties of Potassium*. 2019. URL : <https://www.tobiastiecke.nl/archive/PotassiumProperties.pdf>.
- [71] M. LANDINI et al. "Sub-Doppler laser cooling of potassium atoms". In : *Phys. Rev. A* 84 (4 oct. 2011), p. 043432. DOI : 10.1103/PhysRevA.84.043432.
- [72] Cesar Raymundo CABRERA CORDOVA. "Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensate". Ph.D. Thesis. 2018.
- [73] G. SALOMON et al. "Gray-molasses cooling of  $^{39}\text{K}$  to a high phase-space density". In : *Europhysics Letters* 104.6 (2013), p. 63002. DOI : 10.1209/0295-5075/104/63002.
- [74] Charbel CHERFAN et al. "Multi-frequency telecom fibered laser system for potassium laser cooling". In : *Applied Physics Letters* 119 (2021), p. 204001. DOI : 10.1063/5.0070646.
- [75] Charbel CHERFAN et al. "Acetylene-based frequency stabilization of a laser system for potassium laser cooling." In : *Opt. Express* 28.1 (jan. 2020), p. 494-502. DOI : 10.1364/OE.28.000494.
- [76] Y.-J. LIN et al. "Rapid production of  $^{87}\text{Rb}$  Bose-Einstein condensates in a combined magnetic and optical potential". In : *Phys. Rev. A* 79 (6 juin 2009), p. 063631. DOI : 10.1103/PhysRevA.79.063631.
- [77] Giacomo COLZI et al. "Production of large Bose-Einstein condensates in a magnetic-shield-compatible hybrid trap". In : *Phys. Rev. A* 97 (5 mai 2018), p. 053625. DOI : 10.1103/PhysRevA.97.053625.
- [78] Yunfei WANG et al. "Hybrid evaporative cooling of  $^{133}\text{Cs}$  atoms to Bose-Einstein condensation". In : *Opt. Express* 29.9 (avr. 2021), p. 13960-13967. DOI : 10.1364/OE.419854.
- [79] H. P. MISHRA, A. S. FLORES, W. VASSEN et al. "Efficient production of an  $^{87}\text{Rb}$   $F = 2$ ,  $m_F = 2$  Bose-Einstein condensate in a hybrid trap". In : *European Physical Journal D* 69.2 (2015), p. 52. DOI : 10.1140/epjd/e2015-50843-y.
- [80] Alec CAO et al. "Interaction-driven breakdown of dynamical localization in a kicked quantum gas". In : *Nature Physics* 18 (2022), p. 1379. DOI : 10.1038/s41567-022-01810-w.
- [81] C. E. DILLEY, M. A. STEPHEN et M. P. SAVAGE-LEUCHS. "High SBS-threshold, narrowband, erbium co-doped with ytterbium fiber amplifier pulses frequency-doubled to 770 nm". In : *Opt. Express* 15.22 (oct. 2007), p. 14389-14395. DOI : 10.1364/OE.15.014389.

- [82] Ning LIU, Xiaomin REN et Suning TANG. “Phase Shift that Erbium-Doped Fiber Amplifiers Induce”. In : *Optical Interconnects for Telecommunication and Data Communications*. T. 4225. SPIE, 2000, p. 306-310. DOI : 10.1117/12.402735.
- [83] Jean DALIBARD. *Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques*. Cours Collège de France. 2012-2013.
- [84] Yu. B. OVCHINNIKOV et al. “Diffraction of a Released Bose-Einstein Condensate by a Pulsed Standing Light Wave”. In : *Phys. Rev. Lett.* 83 (2 juill. 1999), p. 284-287. DOI : 10.1103/PhysRevLett.83.284.
- [85] Leticia F. CUGLIANDOLO. *Advanced Statistical Physics : Phase Transitions*. Cours à Sorbonne Université. 2022. URL : <https://www.lpthe.jussieu.fr/~leticia/TEACHING/ICFP2022/intro-phase-transitions-2022.pdf>.
- [86] Igor HERBUT. *A Modern Approach to Critical Phenomena*. Cambridge : Cambridge University Press, 2007. ISBN : 9780511755521. DOI : 10.1017/CB09780511755521.
- [87] Subir SACHDEV. *Quantum Phase Transitions*. 2nd edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2011. ISBN : 9780511973765. DOI : 10.1017/CB09780511973765.
- [88] Matthew P. A. FISHER et al. “Boson localization and the superfluid-insulator transition”. In : *Phys. Rev. B* 40 (1 juill. 1989), p. 546-570. DOI : 10.1103/PhysRevB.40.546.
- [89] P.W. ANDERSON. *Basic Notions of Condensed Matter Physics*. T. 55. Frontiers in Physics. Reading, MA : Addison-Wesley Publishing Company, 1984. ISBN : 978-0-8053-0219-6.
- [90] Mucio A. CONTINENTINO. “Topological phase transitions”. In : *Physica B : Condensed Matter* 505 (2017), A1-A2. ISSN : 0921-4526. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.physb.2016.10.037>.
- [91] N. F. MOTT. “Metal-Insulator Transition”. In : *Rev. Mod. Phys.* 40 (4 oct. 1968), p. 677-683. DOI : 10.1103/RevModPhys.40.677.
- [92] Sudeshna SEN, Patrick J. WONG et Andrew K. MITCHELL. “The Mott transition as a topological phase transition”. In : *Phys. Rev. B* 102 (8 août 2020), p. 081110. DOI : 10.1103/PhysRevB.102.081110.
- [93] Lev D. LANDAU et Evgeny M. LIFSHITZ. *Statistical Physics*. 3rd. T. 5. Course of Theoretical Physics. Butterworth-Heinemann, 1980.

- [94] V. L. BEREZINSKY. "Destruction of Long-range Order in One-dimensional and Two-dimensional Systems Possessing a Continuous Symmetry Group. II. Quantum Systems." In : *Sov. Phys. JETP* 34.3 (1972), p. 610.
- [95] J. M. KOSTERLITZ et D. J. THOULESS. "Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems". In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 6.7 (1973), p. 1181-1203. DOI : 10.1088/0022-3719/6/7/010.
- [96] IBIBLIO. *2D Ising Model*. Accessed : 2024-09-11. Accessed 2024. URL : <https://www.ibiblio.org/e-notes/Perc/ising.htm>.
- [97] M. E. FISHER. "Critical Phenomena". In : *Proc. 51st Enrico Fermi Summer School, Varenna*. Sous la dir. de M. S. GREEN. New York : Academic Press, 1972.
- [98] F. BORGONOVİ et D. L. SHEPELYANSKY. "Particle propagation in a random and quasi-periodic potential". In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 109.1-2 (1997), p. 24-31. DOI : 10.1016/S0167-2789(97)00155-3.
- [99] J. L. PICHARD et G. SARMA. "Finite size scaling approach to Anderson localisation". In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 14.6 (1981), p. L127-L132. DOI : 10.1088/0022-3719/14/6/003.
- [100] Ferdinand EVERS et Alexander D. MIRLIN. "Anderson transitions". In : *Rev. Mod. Phys.* 80 (4 oct. 2008), p. 1355-1417. DOI : 10.1103/RevModPhys.80.1355.
- [101] Tomohiro MANO et Tomi OHTSUKI. "Machine learning the dynamics of quantum kicked rotor". In : *Annals of Physics* 435 (déc. 2021), p. 168500. DOI : 10.1016/j.aop.2021.168500.
- [102] O. I. LOBKIS et R. L. WEAVER. "Self-consistent transport dynamics for localized waves". In : *Phys. Rev. E* 71 (1 jan. 2005), p. 011112. DOI : 10.1103/PhysRevE.71.011112.
- [103] Nicolas CHERRORET et al. "How Nonlinear Interactions Challenge the Three-Dimensional Anderson Transition". In : *Phys. Rev. Lett.* 112 (17 mai 2014), p. 170603. DOI : 10.1103/PhysRevLett.112.170603.
- [104] K. BINDER. "Critical Properties from Monte Carlo Coarse Graining and Renormalization". In : *Phys. Rev. Lett.* 47 (9 août 1981), p. 693-696. DOI : 10.1103/PhysRevLett.47.693.
- [105] K. BINDER. "Finite size scaling analysis of Ising model block distribution functions". In : *Z. Physik B - Condensed Matter* 43 (1981), p. 119-140. DOI : 10.1007/BF01293604.

- [106] G. PALMA et D. ZAMBRANO. “Cluster-algorithm renormalization-group study of universal fluctuations in the two-dimensional Ising model”. In : *Phys. Rev. E* 78 (6 déc. 2008), p. 061134. DOI : 10.1103/PhysRevE.78.061134.
- [107] Xibo ZHANG et al. “Observation of Quantum Criticality with Ultracold Atoms in Optical Lattices”. In : *Science* 335.6072 (2012), p. 1070-1072. DOI : 10.1126/science.1217990.
- [108] L.H. DOGRA, G. MARTIROSYAN, T.A. HILKER et al. “Universal equation of state for wave turbulence in a quantum gas”. In : *Nature* 620 (2023), p. 521-524. DOI : 10.1038/s41586-023-06240-z.
- [109] H. P. WILLIAM et al. *Numerical recipes in FORTRAN 77 : Volume 1 of FORTRAN numerical recipes volume 1*. 2nd. Cambridge, England : Cambridge University Press, 1992.
- [110] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. “Scaling Equations from a Self-Consistent Theory of Anderson Localization”. In : *Phys. Rev. Lett.* 48 (10 mars 1982), p. 699-702. DOI : 10.1103/PhysRevLett.48.699.
- [111] D. L. SHEPELYANSKY. “Delocalization of quantum chaos by weak non-linearity”. In : *Phys. Rev. Lett.* 70 (12 mars 1993), p. 1787-1790. DOI : 10.1103/PhysRevLett.70.1787.
- [112] Samuel LELLOUCH et al. “Dynamics of the mean-field-interacting quantum kicked rotor”. In : *Phys. Rev. A* 101 (4 avr. 2020), p. 043624. DOI : 10.1103/PhysRevA.101.043624.
- [113] J.H. TOH, K.C. MCCORMICK, X. TANG et al. “Many-body dynamical delocalization in a kicked one-dimensional ultracold gas”. In : *Nature Physics* 18 (nov. 2022), p. 1297-1301. DOI : 10.1038/s41567-022-01721-w.
- [114] Belén PAREDES et al. “Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice”. In : *Nature* 429.6989 (2004), p. 277-281. DOI : 10.1038/nature02530.
- [115] Toshiya KINOSHITA, Trevor WENGER et David S. WEISS. “Observation of a One-Dimensional Tonks–Girardeau Gas”. In : *Science* 305.5687 (2004), p. 1125-1128. DOI : 10.1126/science.1100700.
- [116] Colin RYLANDS et al. “Many-Body Dynamical Localization in a Kicked Lieb-Liniger Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 124 (15 avr. 2020), p. 155302. DOI : 10.1103/PhysRevLett.124.155302.
- [117] Vincent VUATELET et Adam RANÇON. “Effective thermalization of a many-body dynamically localized Bose gas”. In : *Phys. Rev. A* 104 (4 oct. 2021), p. 043302. DOI : 10.1103/PhysRevA.104.043302.

- 
- [118] Yanliang GUO et al. “Observation of many-body dynamical localization”. In : (déc. 2023). DOI : 10.48550/arXiv.2312.13880.
- [119] David A. HUSE, Rahul NANDKISHORE et Vadim OGANESYAN. “Phenomenology of fully many-body-localized systems”. In : *Phys. Rev. B* 90 (17 nov. 2014), p. 174202. DOI : 10.1103/PhysRevB.90.174202.





**OBSERVATION EXPÉRIMENTALE D'UNE TRANSITION DE PHASE QUANTIQUE EN DIMENSION QUATRE AVEC DES ATOMES ULTRAFROIDS**

**Résumé**

Le modèle d'Anderson étudie le transport d'un électron dans un cristal en présence de désordre. En dimension 1 et 2, ce modèle présente une localisation exponentielle de la fonction d'onde de l'électron dans l'espace des positions, dite localisation d'Anderson. En dimension  $D > 2$ , une transition de phase quantique se manifeste en fonction de la force de désordre, entre un régime où tous les états du système sont localisés (comportement isolant) et un régime où ceux-ci sont délocalisés (comportement métallique). Elle est nommée transition d'Anderson, ou aussi transition métal-isolant. Cette transition de phase a été étudiée à  $D = 3$ , théoriquement et expérimentalement, avec différents systèmes et ses exposants critiques ont été mesurés.

Dans cette thèse, nous utilisons le modèle du Rotateur Frappé atomique (atomic Kicked Rotor), qui appartient à la classe d'universalité du modèle d'Anderson, pour étudier la transition métal-isolant en dimension 4 avec une expérience d'atomes ultrafroids de potassium 41. Cette dimension n'étant pas atteignable physiquement, nous nous servons d'une méthode de génération de dimensions synthétiques, à travers des modulations de l'amplitude d'un potentiel optique pulsé, afin d'augmenter la dimension effective du système. Nous parvenons ainsi à observer cette transition de phase quantique et à mesurer les exposants critiques, celui de la longueur de localisation dans le régime localisé et celui de la constante de diffusion dans le régime délocalisé. Nous mesurons également la fonction d'échelle à deux paramètres, qui caractérise le comportement autour du point critique. Les valeurs obtenues pour les exposants critiques confirment la relation de Wegner (qui relie les deux exposants) et sont en très bon accord avec les simulations numériques du modèle d'Anderson. Elles diffèrent aussi des prédictions de la théorie de champ moyen (la théorie auto-cohérente). Ce travail est la première démonstration expérimentale que  $D = 4$  n'est pas la dimension critique supérieure de la transition d'Anderson.

**Mots clés :** localisation d'anderson, transition d'anderson, chaos quantique, localisation dynamique, atomes ultrafroids, transition de phase quantique

---

## Abstract

The Anderson model studies the transport of an electron in a crystal in the presence of disorder. In dimensions 1 and 2, this model exhibits an exponential localization of the electron's wave function in position space, known as Anderson localization. In dimensions  $D > 2$ , a quantum phase transition appears depending on the strength of the disorder, between a regime where all the states of the system are localized (insulating behavior) and a regime where they are delocalized (metallic behavior). This is called the Anderson transition, also known as the metal-insulator transition. This phase transition has been studied at  $D = 3$ , both theoretically and experimentally, using different systems, and its critical exponents have been measured.

In this thesis, we use the atomic Kicked Rotor model, which belongs to the universality class of the Anderson model, to study the metal-insulator transition in dimension 4, using an experiment of ultracold potassium-41 atoms. Since this dimension is not physically achievable, we use a method to generate synthetic dimensions through modulations of the amplitude of a pulsed optical potential to increase the system's effective dimensionality. This allows us to observe the quantum phase transition and measure the critical exponents - of the localization length on the localized side, and of the diffusion constant on the delocalized side. We also measure the two-parameter scaling function, which characterizes the behavior around the critical point. The values obtained for the critical exponents confirm Wegner's relation (which links the two exponents), are in very good agreement with numerical simulations of the Anderson model, and differ from the predictions of mean-field theory (here the self-consistent theory). This work is the first experimental demonstration that  $D = 4$  is not the upper critical dimension of the Anderson transition.

**Keywords:** anderson localization, ultracold atoms, quantum phase transition, dynamical localization, quantum chaos, anderson transition

---