

# THÈSE DE DOCTORAT

## Dynamique d'une cavité doublement résonante contenant des non-linéarités quadratique et cubique

Dans le cadre d'une cotutelle pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN PHYSIQUE** de l'Université de Lille

Spécialité : Milieux dilués et optique fondamentale

et

**DOCTEUR EN PHYSIQUE** de l'Université Libre de Bruxelles

Spécialité : Sciences de l'Ingénieur et Technologie

Soutenue par

**BAYDI Brahim**

Le 12/12/2025

Devant le jury composé de

| <b>Rôle</b>             | <b>Nom</b>                 | <b>Université</b>                      |
|-------------------------|----------------------------|--|
| Rapporteur :            | Pr. David LAROZE           | Universidad de Tarapacá                |
| Rapporteuse :           | Pr. Giovanna TISSONI       | Université Côte d'Azur                 |
| Président :             | Pr. Jean-François HENNINOT | Université d'Artois                    |
| Examinatrice :          | MCF. Yuliya DADOENKOVA     | Université Jean Monnet – Saint-Étienne |
| Examinateur :           | Pr. Pascal KOCKAERT        | Université libre de Bruxelles          |
| Directeur de thèse :    | MCF. Saliya COULIBALY      | Université de Lille                    |
| Co-Directeur de thèse : | Dr. François LEO           | Université libre de Bruxelles          |
| Co-Encadrant :          | Pr. Majid TAKI             | Université de Lille                    |



# Résumé

Les structures temporelles dans les résonateurs optiques attirent actuellement beaucoup d'attention, en particulier pour la génération de peignes de fréquence. Dans le domaine temporel, ces peignes correspondent à des impulsions régulièrement espacées appelées solitons de cavité (CS). Ces impulsions se propagent sans se déformer, grâce à la compensation de la dispersion par la non-linéarité d'une part, et à la dissipation par la pompe d'autre part. Jusqu'à présent, la plupart des études se concentrent sur l'étude des solitons qui sont générés à la même fréquence que l'onde de pompe. Cependant, les CS peuvent également être générés à la moitié de la fréquence de la pompe, dans une configuration appelée forçage paramétrique. Dans cette configuration, on peut obtenir une dynamique proche de celle des oscillateurs paramétriques optiques (OPO), qui ont été largement étudiés, et peuvent donner lieu à une gamme importante de peignes de fréquences optiques. La coexistence de deux solitons ou plus peut conduire à la formation des états liés de solitons.

Les états liés de solitons sont des structures stables résultant de l'interaction entre deux solitons ou plus, via le verrouillage de leurs queues oscillatoires. Dans cette thèse, nous étudions la génération d'un soliton paramétrique (PDCS) dans un oscillateur optique paramétrique dégénéré (DOPO) doublement résonant, en présence et en l'absence de l'effet Kerr. Nous analysons également l'interaction entre deux PDCS, menant à la formation d'états liés, ainsi que l'impact de la déplétion de la pompe et du walk-off entre le signal et la pompe sur le domaine d'existence des solitons et la formation de ces états liés. L'objectif est de mieux comprendre la dynamique du système et les mécanismes sous-jacents à l'émergence de ces structures.

# Abstract

Temporal structures in optical resonators are currently attracting significant attention, particularly for the generation of frequency combs. In the time domain, these combs correspond to regularly spaced pulses known as cavity solitons (CS). These pulses propagate without deformation due to the compensation of dispersion by nonlinearity on one hand, and of the dissipation by the pump on the other. So far, most studies have focused on solitons generated at the same frequency as the pump wave. However, CS can also be generated at half the pump frequency in a configuration known as parametric driving. In this configuration, a dynamics similar to that of optical parametric oscillators (OPO), which have been extensively studied, can be obtained, leading to a broad range of optical frequency combs. The coexistence of two or more solitons can result in the formation of soliton bound states.

Soliton bound states are stable structures arising from the interaction between two or more solitons through the locking of their oscillatory tails. In this thesis, we investigate the generation of a parametrically driven cavity soliton (PDCS) in a degenerate, doubly resonant optical parametric oscillator (DOPO), both with and without Kerr nonlinearity. We also analyze the interaction between two PDCSs, leading to the formation of bound states, as well as the impact of pump depletion and walk-off between the signal and the pump on the soliton existence domain and the formation of these bound states. The objective is to gain deeper insight into the system's dynamics and the underlying mechanisms governing the emergence of these structures.



# Remerciement

Au terme de cette thèse, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail. Ce manuscrit représente l'aboutissement de plusieurs années de recherche, riches en enseignements scientifiques et humains, rendues possibles grâce au soutien, à l'écoute et à l'accompagnement précieux de nombreuses personnes.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à mes directeurs de thèse, Saliya et François, pour leur confiance, leur disponibilité et la qualité de leurs conseils tout au long de ces années. Leur rigueur scientifique, leur méthode et leur sens de la pédagogie ont profondément nourri ma réflexion et contribué à structurer ma démarche ainsi qu'à développer ma maturité de chercheur.

J'adresse également mes remerciements à Majid, pour son implication constante, sa patience et son soutien bienveillant. Son enthousiasme, ses conseils avisés et nos échanges scientifiques riches et stimulants ont été pour moi une source inestimable de motivation et ont joué un rôle déterminant dans la progression de ce travail. Je garderai en mémoire son accompagnement attentif et sa disponibilité.

Je remercie très chaleureusement les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce manuscrit et d'assister à ma soutenance. Leur temps, leur regard critique et leurs remarques constructives constituent pour moi un honneur et une véritable source d'enrichissement.

Je souhaite également remercier Carlos pour nos discussions et ses précieux conseils tout au long de cette thèse, qui m'ont permis de progresser et d'approfondir mes réflexions scientifiques.

Une pensée particulière va à mes collègues doctorants et amis, avec qui j'ai partagé des moments inoubliables. Merci pour votre soutien, vos échanges, les cafés improvisés, les encouragements dans les périodes difficiles, ainsi que les rires et la légèreté qui ont rendu ces années si humaines et si précieuses. J'ai eu la chance de vivre cette aventure entouré de personnes d'une grande qualité humaine.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude la plus profonde à ma famille. Merci à mes parents pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices, leur patience et leur confiance sans faille. Votre soutien depuis le premier jour a été essentiel, et c'est également grâce à vous que ce travail a pu voir le jour. Je remercie également tous mes amis, en France, en Belgique et au Maroc, pour leur présence, leur amitié et leur soutien indéfectible tout au long de ce parcours.

À toutes celles et ceux qui, de près ou de loin, ont accompagné cette aventure scientifique et humaine, j'adresse mes remerciements les plus sincères. Cette thèse vous appartient autant qu'à moi.



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction Générale</b>  | <b>13</b> |
| <b>1 Généralités : Non linéarité et Structures Dissipatives</b>                                   | <b>18</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .  | 18        |
| 1.2 La propagation de la lumière . . . . .  | 18        |
| 1.2.1 La susceptibilité linéaire . . . . .  | 19        |
| 1.2.2 La susceptibilité non-linéaire . . . . .  | 22        |
| 1.3 Les oscillateurs paramétriques optiques . . . . .   | 23        |
| 1.3.1 La condition d'accord de phase . . . . .  | 24        |
| 1.4 L'effet Kerr . . . . .  | 28        |
| 1.4.1 L'équation de Schrödinger non-linéaire dans la fibre optique . . . . .                      | 28        |
| 1.4.2 L'auto-modulation de phase . . . . .  | 33        |
| 1.4.3 La modulation de phase croisée . . . . .  | 34        |
| 1.5 Les structures dissipatives . . . . .   | 35        |
| 1.5.1 L'instabilité modulationnelle . . . . .   | 36        |
| 1.5.2 Les solitons . . . . .  | 38        |
| 1.6 Les solitons de cavité (CSs) . . . . .  | 39        |
| 1.6.1 Les cavités passives . . . . .  | 39        |
| 1.6.2 Le modèle de Lugiato-Lefever . . . . .  | 40        |
| 1.7 Les solitons paramétriques (PDCS) . . . . .   | 41        |
| 1.7.1 L'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique . . . . .                               | 42        |
| 1.8 L'interaction entre deux solitons . . . . .   | 44        |
| 1.9 Conclusion . . . . .  | 45        |
| <b>2 L'impact du walk-off sur la dynamique du soliton dans un DOPO avec la non-linéarité Kerr</b> | <b>47</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .  | 47        |
| 2.2 Cavité doublement résonante (DOPO+ L'effet Kerr) . . . . .                                    | 47        |
| 2.2.1 Cadre théorique . . . . .   | 48        |
| 2.2.2 Le modèle à une seule équation . . . . .  | 50        |
| 2.3 Soliton paramétrique . . . . .  | 51        |
| 2.3.1 Les solutions homogènes . . . . .   | 51        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.3.2    | Solution soliton . . . . .  | 53        |
| 2.3.3    | Impact de la déplétion sur le soliton . . . . .   | 55        |
| 2.4      | Effet du walk-off sur le soliton . . . . .  | 56        |
| 2.4.1    | Méthode variationnelle . . . . .  | 56        |
| 2.4.2    | Les équations du mouvement . . . . .  | 60        |
| 2.5      | Conclusion . . . . .  | 62        |
| <b>3</b> | <b>Etat lié de deux solitons paramétriques</b>  | <b>64</b> |
| 3.1      | État lié de solitons dans un oscillateur paramétrique doublement résonant avec une non linéarité Kerr . . . . . | 64        |
| 3.1.1    | Introduction . . . . .  | 64        |
| 3.1.2    | État lié de deux solitons . . . . .   | 65        |
| 3.1.3    | Les oscillations de la pompe . . . . .  | 66        |
| 3.1.4    | La méthode variationnelle . . . . .   | 67        |
| 3.2      | Le potentiel d'interaction . . . . .  | 69        |
| 3.3      | Les équations du mouvement . . . . .  | 70        |
| 3.4      | État lié de solitons dans un oscillateur paramétrique doublement résonant .                                     | 72        |
| 3.4.1    | Soliton quadratique dans un oscillateur param-étrique optique doublement résonant. . . . .                      | 72        |
| 3.4.2    | Soliton quadratique . . . . .   | 74        |
| 3.4.3    | La méthode variationnelle . . . . .   | 76        |
| 3.4.4    | Conclusion . . . . .  | 79        |
| <b>4</b> | <b>Perspectives : dynamique d'un DOPO simplement résonant avec l'effet kerr</b>                                 | <b>81</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .  | 81        |
| 4.2      | Cavité simplement résonante . . . . .   | 81        |
| 4.3      | Classification des régimes dynamiques . . . . .   | 82        |
| 4.3.1    | Soliton . . . . .   | 82        |
| 4.3.2    | Chaos . . . . .   | 83        |
| 4.4      | Les différentes dynamiques du système . . . . .   | 85        |
| 4.4.1    | Comparaison avec la PDNLSE . . . . .  | 85        |
| 4.4.2    | Soliton periodique . . . . .  | 87        |
| 4.5      | perspectives . . . . .  | 87        |
| 4.6      | Conclusion . . . . .  | 88        |
|          | <b>Conclusion Générale</b>  | <b>90</b> |

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | L'atténuation de l'onde électromagnétique durant la propagation . . . . .  | 21 |
| 1.2  | L'étalement d'une impulsion au cours de sa propagation . . . . .   | 21 |
| 1.3  | a) Diagramme des niveaux d'énergie décrivant le processus d'amplification paramétrique. b) le processus d'amplification paramétrique. c) Oscillateur paramétrique optique [2]. . . . .   | 23 |
| 1.4  | La courbe bleue représente une impulsion gaussienne, tandis que la courbe rouge montre la variation instantanée de la fréquence induite par l'effet de modulation de phase auto-induite (SPM). . . . .                             | 34 |
| 1.5  | Exemples de motifs naturels issus de l'auto-organisation dans des systèmes dissipatifs. a) Les dunes de sable. b) les rayures de la tigre. c) la spirale végétale. d) la structure hexagonal en nid d'abeille . . . . .            | 35 |
| 1.6  | Les solutions stationnaires $Y = f(X)$ pour, a) $\Delta = 1$ , b) $\Delta = 2$ , c) $\Delta = 3$ , d) $\Delta = 4$ . . . . .   | 37 |
| 1.7  | La région de la MI dans le plan de paramètres $(\Delta, I)$ dans les deux régimes de dispersion. a) anormal. b) normal. . . . .  | 38 |
| 1.8  | Représentation schématique d'une cavité fibrée passive pompée en continue à travers un coupleur. . . . .   | 39 |
| 1.9  | Exemple de soliton de cavité. paramètres : $S = 2.4$ et $\Delta = 3.5$ . . . . .   | 42 |
| 1.10 | Schéma d'une cavité composée de deux sections : une section de longueur $L_1$ présentant une non-linéarité d'ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ), et une section de longueur $L_2$ contenant une non-linéarité Kerr ( $\chi^{(3)}$ ). . . . . | 42 |
| 1.11 | Soliton paramétrique. $\Delta = 1.5$ et $\mu = 1.2$ . . . . .  | 45 |
| 2.1  | Schéma d'une cavité doublement résonante aux fréquences $2\omega_0$ et $\omega_0$ , avec les non-linéarités quadratique et cubique. . . . .  | 49 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.2 | Diagrammes de bifurcation montrant les solutions homogènes $ A^+ ^2$ , $ A^- ^2$ et $A_0$ en fonction du paramètre de pompage $\mu$ . a) Pour $\Delta_1 = 0.5$ et $\Delta_2 = 1$ , montrant une bifurcation supercritique à $\mu = \mu_s$ où la solution triviale $A_0$ perd sa stabilité au profit de la solution $ A^+ ^2$ . b) Pour $\Delta_1 = 1.5$ et $\Delta_2 = 3$ , révélant une bifurcation sous-critique. la second instabilité se produit à $\mu = \mu_t$ et correspond à la bifurcation de type point selle (SN) où les deux solutions $ A^+ ^2$ et $ A^- ^2$ se rejoignent. Dans les deux cas, la solution triviale $A_0$ est stable pour $\mu < \mu_s$ et devient instable pour $\mu > \mu_s$ , où $\mu_s$ représente le seuil de la bifurcation. . . . . | 53 |
| 2.3 | a) Intensité du signal (rouge) et de la pompe (bleu). b) propagation du soliton au cours du temps. Les paramètres utilisés : $\Delta_1 = 1.3$ , $\Delta_2 = 12$ , $d = 5$ , $\rho = 8$ et $\mu = 1.16$ . . . . .  | 54 |
| 2.4 | Branches des solitons en fonction du detuning $\Delta_1$ . La courbe bleue représente la branche analytique de l'équation PDNLSE, qui croît indéfiniment avec $\Delta_1$ . La courbe rouge correspond à la branche obtenue par simulation numérique de l'équation PDNLSE avec le terme de convolution. Cette branche est limitée en amplitude par l'effet de déplétion de la pompe induit par le terme de convolution. . . . .  | 55 |
| 2.5 | a) Partie réelle de la fonction de réponse non-linéaire $J(\Omega)$ . b) Partie imaginaire de $J(\Omega)$ . c) Partie réelle du terme de convolution. d) partie imaginaire du terme de convolution . . . . .  | 56 |
| 2.6 | a) Illustre la puissance des champs de signal et de pompe, avec la courbe en pointillés représentant l'Ansatz de la pompe (Eq (2.31)). b) montre le spectre de puissance des champs de signal et de pompe. . . . .  | 58 |
| 2.7 | Amplitude du soliton $\beta$ en fonction du detuning $\Delta_1$ pour différentes valeurs du walk-off. Les lignes continues représentent les résultats de simulations des équations (2.6) et (2.7), tandis que les lignes en pointillés correspondent aux prédictions analytiques. a) $d = 6$ . b) $d = 4$ . c) $d = 3$ . d) $d = 2$ . . . . .   | 61 |
| 3.1 | Illustration schématique du mécanisme universel de liaison temporelle des solitons de cavité (CS) [79]. Une perturbation entraîne l'apparition d'une bande latérale dans le spectre du soliton (flèche bleue). Cette bande latérale est associée à une queue oscillatoire étendue dans le profil d'intensité temporelle. Un soliton de cavité adjacent est piégé par les oscillations de cette queue. . . . .   | 66 |
| 3.2 | a) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une attraction entre eux suivie d'une stabilisation à une distance fixe . b) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une répulsion entre eux avant de se stabiliser à une distance .c) la puissance intra-cavité du signal et de la pompe à $t=100$ . . . . .  | 67 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.3  | Comparaison entre le soliton obtenu par simulation (courbe rouge) et l'Ansatz analytique (courbe noire en pointillés). L'accord entre les deux profils est globalement satisfaisant en ce qui concerne la forme, mais l'amplitude diffère en raison du terme de déplétion, qui est inclus dans la simulation mais omis dans l'approximation analytique. . . . .   | 68 |
| 3.4  | Le potentiel d'interaction $U$ entre la pompe et le soliton en fonction de la position $\tau_0$ . Les points $\bullet$ et $\circ$ correspondent respectivement aux positions stables et instables du soliton. . . . .   | 70 |
| 3.5  | Les lignes noires sur le graphique montrent la variation de la distance de séparation entre les deux solitons au fil du temps, trouvée en simulant le modèle complet. Les lignes rouges pointillées indiquent les positions instables, tandis que les lignes rouges en tirets représentent les positions stables des solitons. Les lignes bleues représentent les résultats des simulations numériques basées sur les équations (3.8) e (3.9). . . . .    | 72 |
| 3.6  | Exemple schématique d'un oscillateur paramétrique optique dégénéré (DOPO) doublement résonant. Un résonateur en anneau avec une non-linéarité $\chi^{(2)}$ est pompé par un champ continu $B_{in}$ à la fréquence $2\omega_0$ . L'interaction quadratique donne lieu à la formation d'un soliton centré autour de la fréquence $\omega_0$ , qui résonne en même temps que le champ de pompe, lui-même centré autour de la fréquence $2\omega_0$ . . . . . | 73 |
| 3.7  | a) montre l'intensité des champs de signal et de pompe, où la courbe en pointillés représente l'Ansatz de la pompe. b) illustre le spectre du signal et de pompe. c) Représente les parties réelles et imaginaires de la fonction de réponse non linéaire $J(\Omega)$ . les paramètres physiques utilisés : $\eta_1 = -\eta_2/4 = -1$ , $\Delta_1 = 3.5$ , $\Delta_2 = 9.5$ , $S = 4$ et $\rho = 5$ . . . . .   | 75 |
| 3.8  | a) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une attraction entre eux suivie d'une stabilisation à une distance fixe. b) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une répulsion entre eux avant de se stabiliser à une distance fixe. c) Intensité du signal et de la pompe correspondant aux configurations des (a) et (b). . . . .   | 75 |
| 3.9  | Le potentiel d'interaction $U$ entre la pompe et le soliton en fonction de la position $\tau_0$ . Les points $\bullet$ et $\circ$ correspondent respectivement aux positions stables et instables du soliton. . . . .   | 77 |
| 3.10 | Les lignes noires sur le graphique montrent la variation de la distance de séparation entre les deux solitons au fil du temps, obtenu en simulant numériquement le modèle complet ((3.14) et (3.15)) qui décrit le système. les deux équations correspondent les coordonnées collectives ( $\tau$ et $\Omega$ ) sont représentées par les lignes bleus en tirets. . . . .   | 78 |
| 4.1  | Évolution de $ \psi $ en fonction du paramètre de contrôle $\mu$ . Les points bleus représentent le nombre de pics présents dans le système . . . . .   | 82 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.2 | Simulations de l'équation (1) qui corresspond à $\mu = 1.85$ indiqué par la flèche rouge. (a) les intensités du signal (courbe rouge) et de la pompe (courbe bleue). (b) Diagramme spatio-temporel $(\tau, t)$ illustrant la stabilité d'un soliton unique localisé. . . . .  | 83 |
| 4.3 | Simulations de l'équation (1) qui corresspond à $\mu = 3.83$ indiqué par la flèche verte (a) les intensités du signal (courbe rouge) et de la pompe (courbe bleue). (b) Diagramme spatio-temporel $(\tau, t)$ montrant la dynamique turbulente caractérisée par la formation et destruction continues de structures localisées. . . . .   | 84 |
| 4.4 | Diagrammes de bifurcation représentant les différents régimes dynamiques en fonction du pompage $h$ et les pertes $\gamma$ . (a) Diagramme de bifurcation de l'équation PDNLS sans terme de déplétion [109]. (b) Diagramme de bifurcation de l'équation (4.2). . . . .  | 86 |
| 4.5 | (a) Profils d'intensité du signal (courbe rouge) et du champ de pompe (courbe bleue). (b) Évolution spatio-temporelle du signal en fonction du temps lent $t$ et du temps rapide $\tau$ . La colormap met en évidence les oscillations périodiques du soliton, caractéristiques d'une instabilité de Hopf. Les paramètres utilisés sont : $h = 0.5$ , $\gamma = 0.28$ , $d = 6$ , $\eta_1 = 1$ , $\eta_2 = 0.5$ et $\rho = 0.2$ | 87 |

# Liste des tableaux

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Les types d'accord de phase par biréfringence . . . . .   | 24 |
| 3.1 | Positions d'équilibre stables et instables des solitons en fonction des valeurs<br>de $m$ . . . . . | 70 |

# Introduction Générale

Depuis des siècles, l'être humain est impressionné par les mystères de l'univers, ce qui l'a incité à percer les secrets des phénomènes naturels qui l'entourent. Convaincu que le monde n'est pas là par hasard, l'homme s'est tourné vers la science, et en particulier la physique, pour explorer le cosmos. À travers des modèles mathématiques, il tente de simuler et d'interpréter les phénomènes naturels en les confrontant à l'observation. Aujourd'hui, des chercheurs du monde entier dans divers axes de recherche, contribuent à révolutionner notre compréhension du monde.

Dans cette thèse, j'ai eu l'opportunité de mener des recherches dans le domaine de l'optique non-linéaire, un domaine profondément transformé par l'invention du laser en 1960. Cette avancée révolutionnaire a élargi les frontières de l'optique en ouvrant la voie à de nombreuses applications, allant de la médecine aux télécommunications, et a contribué à l'essor de technologies nouvelles. Lors de la propagation d'un faisceau laser dans un milieu non-linéaire, de nouvelles fréquences peuvent être générées par des processus de mélange d'ondes : dans les milieux non-linéaires d'ordre 2 (non-centrosymétriques), le mélange à trois ondes permet des phénomènes tels que la génération de seconde harmonique [1], l'amplification paramétrique [2], ainsi que la somme et la différence de fréquences [3]. En revanche, dans les milieux non-linéaires d'ordre 3 (centrosymétriques), le mélange à quatre ondes est associé à l'effet Kerr [4, 5]. Cette non-linéarité conduit notamment à la génération de peignes de fréquences [6, 7, 8], des séries de raies spectrales régulièrement espacées, offrant une structure spectrale utile pour des applications en spectroscopie [9, 10, 11, 12], en métrologie optique [13, 14], et en astronomie [15, 16, 17]. L'importance des peignes de fréquences optiques a été mondialement reconnue en 2005, avec l'attribution du prix Nobel à T.W. Hänsch et J. Hall pour leurs avancées révolutionnaires dans ce domaine [18].

Au début, la génération de peignes de fréquences reposait sur l'utilisation d'un laser à modes bloqués [19, 20, 21], autrement dit un laser pulsé. Par la suite, les chercheurs ont démontré qu'un peigne de fréquences peut être généré dans une fibre optique via l'instabilité modulationnelle [22]. Dans ce cas, une onde continue injectée dans la fibre devient modulée, ce qui conduit à la formation d'un train d'impulsions dans le domaine temporel, et donc à un peigne de fréquences dans le domaine spectral. Ce mécanisme a également été observé dans des cavités optiques non-linéaires présentant un effet Kerr, où l'instabilité modulationnelle joue un rôle central dans l'émergence spontanée des peignes de fréquences. [23] et aussi à la formation de solitons de cavité [24, 25]. Ces solitons

sont des ondes non-linéaires qui se propagent sans changer de forme grâce à un équilibre entre, d'une part, la dissipation et le pompage, et, d'autre part, la non-linéarité et la dispersion (ou la diffraction dans le cas spatial), permettant de générer une structure spectrale régulière et stable [26, 27].

La majorité des études des solitons optiques en cavité se sont concentrées sur les solitons de cavité Kerr (CSs), qui sont générés à la même fréquence que celle de l'onde continue pompant la cavité. Ces CSs se caractérisent par un fond continu sur lequel le soliton repose. Dans le domaine spectral, ces solitons correspondent à un peigne de fréquences régulièrement espacées, cette espacement est appelée l'interval spectral libre, centré autour de la fréquence de pompe. Cependant, une approche alternative a permis de générer des solitons sans fond continu : les solitons de cavité Kerr forcés paramétriquement (PDCSs) [28, 29]. Contrairement aux CSs, les PDCSs sont générés à une fréquence correspondant à la moitié de la fréquence de l'onde de pompe. Ces solitons permettent de générer un peigne de fréquences qui est centré autour de la moitié de la fréquence de pompe, ouvrant ainsi la voie à une nouvelle gamme d'applications.

Dans ce manuscrit, nous allons étudier théoriquement l'interaction entre deux PDCSs générés dans un oscillateur paramétrique optique doublement résonant en présence des deux non-linéarités : quadratique  $\chi^{(2)}$  et cubique  $\chi^{(3)}$ . Le manuscrit est organisé comme suit. Dans le premier chapitre, nous présentons les bases théoriques de la propagation de la lumière dans les milieux dispersifs et linéaires, ainsi que dans les milieux non-linéaires. La non-linéarité qui se manifeste dans ces milieux se décompose en deux types : une non-linéarité quadratique, présente dans les oscillateurs paramétriques optiques, et une non-linéarité cubique, liée à l'effet Kerr. Ensuite nous introduisons les notions de l'instabilité modulationnelle et les solitons dans les systèmes dissipatifs, qui émergent grâce au phénomène d'auto-organisation. Les CS, décrits par l'équation de Lugiato-Lefever [30, 31], et les PDCS, régis par l'équation de Schrödinger non linéaire paramétrique [28, 29, 32], seront également abordés, ainsi que l'interaction entre deux solitons, qui conduit à la formation d'un état lié. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la génération de solitons dans un oscillateur optique paramétrique dégénéré (DOPO) doublement résonant en présence d'une non-linéarité Kerr. Nous montrerons que les équations couplées régissant la dynamique des champs signal et pompe dans cette cavité peuvent être réduites à une seule équation intégrant un terme de convolution. Dans un premier temps, nous analyserons l'impact de ce terme, à la fois, sur l'amplitude du soliton et sur son domaine d'existence. Ensuite, à l'aide d'approches analytiques et numériques, notamment la méthode variationnelle, nous étudierons l'effet du walk-off, qui traduit la différence entre les inverses des vitesses de groupe du signal et de la pompe. Nous mettrons en évidence son influence simultanée sur l'amplitude et le domaine d'existence des solitons, en comparant ces résultats avec ceux obtenus dans le cas d'une cavité simplement résonante. Le deuxième chapitre se décompose en deux parties. La première partie présente l'étude de la formation des états liés dans un OPO doublement résonant, incluant les deux non-linéarités,

quadratique et cubique. L'analyse théorique repose sur la méthode variationnelle pour déterminer le potentiel d'interaction et la dynamique du système. En revanche, la deuxième partie traite de l'étude de la formation des états liés dans un OPO doublement résonant, mais sans l'effet Kerr. Enfin, le dernier chapitre s'intéresse à la dynamique d'une cavité optique simplement résonante intégrant simultanément une non-linéarité d'ordre 2 et une non-linéarité Kerr (ordre 3). Nous analyserons les différentes dynamiques émergentes dans ce système, notamment les solutions solitoniques et les régimes chaotiques, en mettant en évidence les bifurcations structurant son diagramme de phase. Nous concluons par une discussion sur les perspectives de caractérisation du régime chaotique. Et nous finirons par une conclusion générale.



# 1. Généralités : Non linéarité et Structures Dissipatives

## 1.1 Introduction

L'optique non-linéaire est le domaine qui s'intéresse à l'étude des phénomènes résultant d'une réponse du milieu dépendant de l'intensité lumineuse, entraînant une modification des propriétés optiques sous l'effet de la lumière. L'interaction de la lumière avec la matière peut être linéaire ou non-linéaire. Dans le régime non-linéaire, où la réponse du matériau n'est plus proportionnelle au champ électrique appliqué, de nouveaux effets apparaissent. Parmi ces nouveaux effets, on trouve la génération de seconde harmonique, le mélange à trois ondes et l'effet Kerr, ainsi que de nombreux autres phénomènes non-linéaires.

L'objectif de ce chapitre est d'établir les bases théoriques nécessaires à la compréhension de la dynamique des solitons dans des milieux non-linéaires et dissipatifs. Nous commencerons par discuter de la propagation de la lumière dans les milieux dispersifs, en nous concentrant sur la susceptibilité linéaire et non-linéaire. Cette dernière est divisée en deux parties : la susceptibilité du second ordre, qui se manifeste dans les oscillateurs paramétriques, qui sont considérés comme des éléments essentiels pour l'étude des systèmes non-linéaires, et la susceptibilité du troisième ordre, qui se traduit dans ce manuscrit par l'effet Kerr optique.

Nous introduirons ensuite le phénomène d'auto-organisation, qui constitue le fondement de l'émergence des structures dissipatives de type soliton par l'instabilité modulationnelle. Le chapitre abordera ensuite les solitons de cavité, qui sont des solutions de l'équation de Lugiato-Lefever, ainsi que les solitons paramétriques, décrits par l'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique.

Enfin, nous traiterons de l'interaction entre deux solitons, qui peut conduire à la formation des états liés de solitons.

## 1.2 La propagation de la lumière

La propagation de la lumière, qui est une onde électromagnétique, est un processus qui est décrit à travers de nombreux aspects physiques et mathématiques. Lorsqu'une onde

lumineuse traverse un matériau, elle interagit avec les atomes et molécules qui composent ce milieu, ce qui peut modifier sa vitesse, sa direction, son intensité ou sa polarisation. Ces interactions dépendent des propriétés optiques du milieu, notamment de son indice de réfraction, de la manière dont celui-ci varie avec la fréquence, ce qui donne lieu à la dispersion, ainsi que de sa réponse non-linéaire lorsque l'intensité lumineuse devient élevée. Les équations de Maxwell décrivent comment la lumière interagit lorsqu'elle se propage dans un milieu. Elles sont données par [33, 34] :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

où  $\vec{D}$  est le vecteur de déplacement électrique et  $\vec{B}$  l'induction magnétique,  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  représentant respectivement les champs électriques et magnétiques. Le vecteur de densité de courant  $\vec{J}$  et la densité de charge  $\rho$  constituent les sources du champ électromagnétique. Dans un milieu dépourvu de charges libres,  $\vec{J}$  et  $\rho$  sont nuls.

Les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{H}$  sont liés au déplacement électrique  $\vec{D}$  et à l'induction magnétique  $\vec{B}$  par les relations constitutives qui sont données par [34] :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.6)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\mu_0$  est la perméabilité du vide, et  $\vec{P}$  et  $\vec{M}$  sont respectivement les vecteurs de polarisation électrique et magnétique induit, qui sont définis comme le moment dipolaire électrique et le moment magnétique par unité de volume dans le matériau. Pour un milieu non magnétique  $\vec{M} = \vec{0}$ , c'est le cas qui nous intéressera par la suite.

Pour simplifier notre compréhension, nous pouvons diviser l'étude de la propagation de la lumière en deux catégories, basées sur la réponse du matériau à travers lequel la lumière se propage : la susceptibilité linéaire et la susceptibilité non-linéaire [35, 2].

### 1.2.1 La susceptibilité linéaire

La susceptibilité linéaire décrit la réponse proportionnelle d'un matériau à un champ électromagnétique externe. Dans ce contexte, lorsqu'une onde électromagnétique traverse un milieu, elle interagit avec les charges électriques du matériau, telles que les électrons, et provoque leur réorganisation. Cette interaction dépend fortement de la nature du matériau ainsi que la fréquence de la lumière incidente. Dans les matériaux linéaires, la polarisation

induite, est directement proportionnelle à l'amplitude du champ électrique appliqué [35].

$$\vec{P}_L(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \vec{E}(t) \quad (1.7)$$

Avec  $\chi^{(1)}$  est la susceptibilité d'ordre 1 (linéaire), et  $\vec{E}$  représente le champ électrique appliqué. La susceptibilité linéaire est liée à l'indice de réfraction  $n$  du milieu, par la relation :  $n^2(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega)$ . Elle est généralement une fonction complexe et dépendante de la fréquence, reflétant à la fois la dispersion et l'absorption du milieu. La partie réelle de  $\chi^{(1)}$  décrit la variation de la vitesse de propagation des ondes lumineuses (dispersion), tandis que sa partie imaginaire quantifie les pertes énergétiques dues à l'absorption. En optique linéaire,  $\chi^{(1)}$  joue un rôle clé pour comprendre des phénomènes comme la réfraction, la réflexion, et la propagation des ondes lumineuses dans des milieux transparents ou absorbants. Lorsque l'intensité du champ électrique augmente suffisamment, les termes de susceptibilité d'ordre supérieur, tels que  $\chi^{(2)}$  et  $\chi^{(3)}$ , deviennent significatifs, donnant lieu à des réponses non linéaires du milieu.

### Les pertes de propagation

Lorsqu'une onde électromagnétique se propage à travers un milieu, elle est soumise à une atténuation. Ce phénomène se traduit par une réduction progressive de la puissance de l'onde au fur et à mesure de son parcours. Cette atténuation peut être causée par divers facteurs, tels que l'absorption de l'énergie de l'onde par le milieu, où cette énergie est transférée aux atomes ou molécules du matériau, entraînant des transitions électroniques, vibratoires ou rotationnelles. Cette absorption est généralement décrite par la partie imaginaire de la susceptibilité linéaire  $\chi^{(1)}$ , qui est liée au coefficient d'absorption du milieu. Un autre mécanisme important est la diffusion. Dans un milieu non homogène, comme un matériau avec des particules dispersées ou des fluctuations de densité, la lumière peut être diffusée dans différentes directions (souvent sous forme de diffusion de Rayleigh), ce qui réduit la puissance transmise dans la direction initiale. [35]. Les pertes de propagation dans un milieu peuvent être quantifiées par un coefficient de perte de propagation  $\alpha$ , qui s'exprime en  $\text{m}^{-1}$ . La puissance optique après une distance  $z$  de propagation, comme représenté dans la figure 1.1, est donnée par :

$$P = P_0 e^{-\alpha z}, \quad (1.8)$$

avec  $P_0$  la puissance initial.

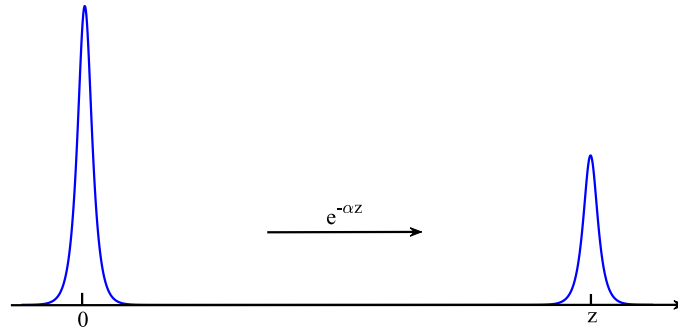


FIGURE 1.1 – L'atténuation de l'onde électromagnétique durant la propagation

### Phénomène de dispersion de la lumière

La dispersion chromatique est un phénomène qui se produit lorsqu'une onde se propage dans un milieu dispersif, c'est-à-dire un milieu où la vitesse de propagation de l'onde dépend de sa fréquence  $\omega$ . Dans un tel milieu, les différentes composantes spectrales de l'onde se propagent à des vitesses de phases différentes, ce qui conduit à un élargissement de l'impulsion temporelle au fil du temps comme illustré dans la figure 1.2. Lorsque les fréquences élevées se propagent plus lentement que les fréquences basses, on parle de dispersion normale, tandis que l'inverse correspond à une dispersion anormale. Cette différence de vitesse de groupe entre les fréquences a deux principales contributions [36] : la dispersion du matériau, qui se manifeste par la dépendance de l'indice de réfraction en fonction de la fréquence  $n(\omega)$ , qui est donnée par l'équation de Sellmeier, issue du modèle d'oscillateur harmonique :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum \frac{B_i \omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (1.9)$$

où  $\omega_i$  est la fréquence de résonance, et  $B_i$  la force de l'oscillateur qui lui correspond. Et la

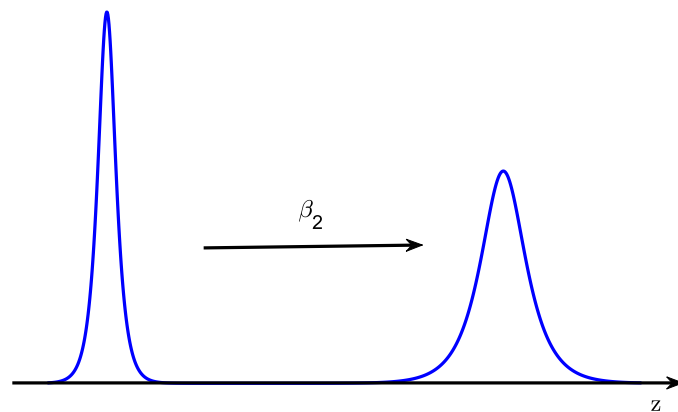


FIGURE 1.2 – L'étalement d'une impulsion au cours de sa propagation

deuxième contribution est, la dispersion du guide d'ondes, qui se traduit par la dépendance de la constante de propagation  $\beta(\omega)$  en fonction de la fréquence, qui est décrite par un

développement en série de Taylor autour de la fréquence centrale du signal  $\omega_0$  :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2!}(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (1.10)$$

où  $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ . Les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  représentent respectivement les premier et second ordres de dispersion.  $\beta_1$  correspond à l'inverse de la vitesse de groupe  $\frac{1}{v_g}[s/m]$ , tandis que  $\beta_2 [s^2/m]$  décrit la dispersion de cette vitesse de groupe (GVD),  $\beta_3$  représente la dispersion du troisième ordre (TOD), et les autres coefficients englobent les effets de dispersion d'ordres supérieurs. Ils sont reliés à la vitesse de groupe par les relations suivantes :

$$\beta_i = \frac{\partial^n \beta}{\partial \omega^n}, \quad i = (0, 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

## 1.2.2 La susceptibilité non-linéaire

Dans le régime non-linéaire, la réponse du matériau au champ électromagnétique appliqué n'est plus proportionnelle à l'amplitude du champ, et elle est décrite par la susceptibilité non linéaire. Ces effets non linéaires se manifestent généralement lorsque les matériaux sont soumis à des champs électriques très intenses. Dans ce cas l'expression de la polarisation devient [35, 2] :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0(\chi^{(1)} \cdot \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots) = \vec{P}_L(t) + \vec{P}_{NL}(t) \quad (1.12)$$

Avec  $\chi^{(2)}$  et  $\chi^{(3)}$  qui sont respectivement la susceptibilité d'ordre 2 et 3, et  $\vec{P}_{NL}$  qui est la polarisation non-linéaire. La susceptibilité de second ordre,  $\chi^{(2)}$ , est responsable de phénomènes non-linéaires comme la génération de seconde harmonique (SHG), la somme de fréquences (SFG), différence de fréquence (DFG) et l'amplification paramétrique optique (OPA) [2]. Ces effets ne se produisent que dans des milieux non centrosymétriques, où l'inversion de symétrie est absente. La susceptibilité de troisième ordre,  $\chi^{(3)}$ , est plus universelle et se manifeste même dans des milieux centrosymétriques. Elle est associée à des effets tels que l'auto-focalisation, l'auto-modulation de phase (SPM), le mélange à quatre ondes, et l'effet Raman [2, 35]. Ces phénomènes jouent un rôle clé dans la formation des solitons optiques et la propagation des impulsions lumineuses dans les fibres optiques. La réponse non-linéaire d'un milieu dépend non seulement de la magnitude du champ appliqué, mais aussi de la fréquence des ondes lumineuses et des processus de résonance dans le matériau. Les susceptibilités non-linéaires sont souvent très faibles, ce qui nécessite des champs très intenses pour observer des effets significatifs, comme ceux générés par des lasers pulsés. Ces interactions non-linéaires sont au cœur de nombreuses applications modernes, telles que la conversion de fréquence, les télécommunications optiques et la mise en forme des impulsions lumineuses dans les systèmes laser.

Les équations de Maxwell donnent naissance à l'équation d'onde décrivant la propagation de la lumière dans divers milieux, exprimée en termes de champ électrique et de

polarisation par l'équation suivante [35] :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

### 1.3 Les oscillateurs paramétriques optiques

Les oscillateurs paramétriques optiques (OPOs), également connus sous le nom d'amplificateurs paramétriques interagavités, un exemple est montré dans la figure 1.3(c), sont des sources optiques susceptibles de produire, par interaction non-linéaire dans des milieux à forte susceptibilité non-linéaire d'ordre deux  $\chi^{(2)}$ , deux ondes cohérentes "signal" et "complémentaire" (ou "idler") à partir d'un faisceau laser de forte puissance appelé "pompe", via le processus d'amplification paramétrique [2]. La figure 1.3(a) illustre l'origine de ce processus physique qui est dû à l'annihilation d'un photon pompe de fréquence  $\omega_p$  afin de produire les deux photons signal et idler de fréquences respectivement  $\omega_s$  et  $\omega_i$ . Lors de cette conversion, les deux lois fondamentales, la conservation de l'énergie et la quantité de mouvement (ou encore la condition d'accord de phase), sont respectées. elles sont données par les deux relations suivantes [2] :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (1.14)$$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i. \quad (1.15)$$

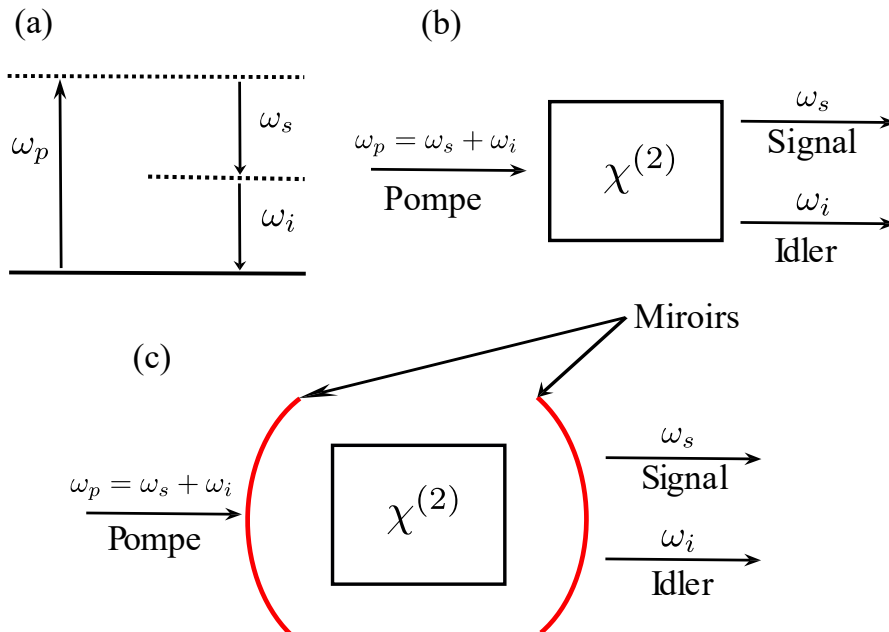


FIGURE 1.3 – a) Diagramme des niveaux d'énergie décrivant le processus d'amplification paramétrique. b) le processus d'amplification paramétrique. c) Oscillateur paramétrique optique [2].

### 1.3.1 La condition d'accord de phase

La condition d'accord de phase se traduit par la relation de la conservation de la quantité de mouvement (Eq. 1.15) qui exige que les trois champs interfèrent de manière constructive pour garantir une conversion paramétrique efficace. Dans les milieux à dispersion normale, la condition d'accord de phase ne peut être atteinte en raison de l'augmentation de l'indice de réfraction avec la fréquence. Les deux méthodes les plus courantes pour atteindre la condition d'accord de phase sont la biréfringence et le quasi-accord de phase. La biréfringence se manifeste par la dépendance de l'indice de réfraction à la direction de polarisation de l'onde. Dans un milieu biréfringent uniaxial, il existe une polarisation dans la direction ordinaire et une polarisation dans la direction extraordinaire. Dans ce cas, deux types d'accord de phase sont possibles pour chaque polarisation et sont résumées dans le tableau 1.1.

|                | <b>Cristal positif</b><br>( $n_e > n_o$ )   | <b>Cristal négatif</b><br>( $n_e < n_o$ )   |
|----------------|---|---|
| <b>Type I</b>  | $\vec{k}_p^o = \vec{k}_s^e + \vec{k}_i^e$   | $\vec{k}_p^e = \vec{k}_s^o + \vec{k}_i^o$   |
| <b>Type II</b> | $\vec{k}_p^o = \vec{k}_s^e + \vec{k}_i^o ; \vec{k}_p^e = \vec{k}_s^o + \vec{k}_i^e$ | $\vec{k}_p^e = \vec{k}_s^e + \vec{k}_i^o ; \vec{k}_p^o = \vec{k}_s^o + \vec{k}_i^e$ |

TABLE 1.1 – Les types d'accord de phase par biréfringence

### Quasi-phase-matching (QPM)

L'accord de phase réalisé par biréfringence repose sur la différence entre les indices ordinaire ( $n_o$ ) et extraordinaire ( $n_e$ ) dans un cristal anisotrope. Cette technique peut se révéler inefficace dans plusieurs situations : certains matériaux ne présentent pas de biréfringence ou possèdent une biréfringence insuffisante pour satisfaire les conditions d'accord de phase requises. Une méthode pour surmonter ce problème est le quasi-accord de phase, qui consiste à moduler périodiquement le coefficient non linéaire  $\chi^{(2)}$  pour compenser le désaccord de phase  $\Delta k \neq 0$ . Concrètement, cela est réalisé via l'inversion périodique de l'orientation cristalline du matériau non linéaire, modifiant ainsi le signe du coefficient d'interaction effective  $d_{eff}$ . Cette structuration est obtenue par poling périodique dans des matériaux ferroélectriques comme le niobate de lithium (PPLN).

Lorsque  $\omega_s = \omega_i$ , il s'agit d'un oscillateur paramétrique optique dégénéré, qui sera le sujet principal de notre étude dans ce manuscrit. Dans ce qui suit, nous étudions la dynamique des champs  $E_s$  et  $E_p$  lors de leur propagation dans le cristal non linéaire  $\chi^{(2)}$  en l'absence de cavité, c'est-à-dire dans le régime de propagation libre correspondant au processus d'amplification paramétrique. En partant de l'équation d'onde (1.13), nous dérivons les équations couplées décrivant cette propagation, tout en prenant en compte les effets de dispersion ainsi que les pertes dans le milieu. L'équation (1.13) peut être écrite

en fonction des polarisation linéaire et non-linéaire :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}^{(2)}}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

Nous pouvons écrire l'équation (1.16) dans l'espace de Fourier sous la forme suivante :

$$[\partial_z^2 + k^2(\omega)] \tilde{E}(z, \omega) = - \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \tilde{P}_{NL}^{(2)}(z, \omega) \quad (1.17)$$

où  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ , avec  $c$  représente la vitesse de la lumière dans le vide,  $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega)$  est la permittivité linéaire du milieu exprimée en fonction de la susceptibilité linéaire  $\chi^{(1)}$ .

Nous considérons que le champ électrique total  $E$  résulte de la superposition d'un champ signal  $E_s$  et d'un champ pompe  $E_p$ , que nous supposons tous deux polarisés suivant le même axe ( $x$ ). Par ailleurs, nous supposons que le champ est fortement confiné dans les directions transverses, de sorte que sa variation principale s'effectue le long de l'axe de propagation  $z$ . Il peut ainsi s'écrire sous la forme [37, 38] :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \vec{x} [E_s(z, t) e^{i(k_s z - \omega_s t)} + E_p(z, t) e^{i(k_p z - \omega_p t)}] + \text{c.c.} \quad (1.18)$$

où  $E_{sp}(z, t)$  représentent les enveloppes lentement variables. Le champ électrique total dans l'espace de Fourier s'écrit :

$$\tilde{E}(z, \omega) = \frac{1}{2} [\tilde{E}_s(z, \omega - \omega_s) e^{ik_s z} + \tilde{E}_p(z, \omega - \omega_p) e^{ik_p z}] + \text{c.c.} \quad (1.19)$$

Nous remplaçons l'équation (1.19) dans l'équation (1.17), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} [(\partial_z + ik_s)^2 \tilde{E}_s + (k^2(\omega) - k_s^2) \tilde{E}_s] = - \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \tilde{P}_{NL,s}^{(2)}(z, \omega), \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{2} [(\partial_z + ik_p)^2 \tilde{E}_p + (k^2(\omega) - k_p^2) \tilde{E}_p] = - \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \tilde{P}_{NL,p}^{(2)}(z, \omega). \quad (1.21)$$

Nous effectuons une expansion à l'ordre 2 de  $k(\omega)$  sous la forme d'une série de Taylor autour des fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_p$ , Nous obtenons ainsi :

$$k(\omega) = k_s + k'_s(\omega - \omega_s) + \frac{1}{2} k''_s(\omega - \omega_s)^2 + \dots, \quad (1.22)$$

$$k(\omega) = k_p + k'_p(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2} k''_p(\omega - \omega_p)^2 + \dots. \quad (1.23)$$

où

$$k'_{s,p} = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_{s,p}}, \quad k''_{s,p} = \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_{s,p}}. \quad (1.24)$$

La contribution de polarisation non linéaire du second ordre  $P_{NL}^{(2)}$ , est exprimée par la

relation suivante :

$$\vec{P}_{NL}^{(2)}(z, t) = \epsilon_0 \int \int_{-\infty}^t \chi^{(2)}(t - t_1, t - t_2) \vec{E}(z, t_1) \vec{E}(z, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.25)$$

Nous pouvons exprimer la susceptibilité du second ordre  $\chi^{(2)}$  sous cette forme :

$$\chi^{(2)}(t - t_1, t - t_2) = \chi^{(2)} \delta(t - t_1) \delta(t - t_2), \quad (1.26)$$

où  $\delta$  représente la fonction de Dirac. En insérant l'expression du champ électrique total issue de la relation (1.18), ainsi que l'expression de la susceptibilité non-linéaire issue de la relation (1.26) dans l'équation (1.25), et en ne retenant que les termes résonants aux fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_p$ , Les amplitudes de la polarisation non linéaire associées respectivement au signal et à la pompe s'écrivent alors :

$$P_{NL,p}^{(2)} = \epsilon_0 d_{\text{eff}} E_s^2 e^{i(2k_s z - 2\omega_s t)}, \quad (1.27)$$

$$P_{NL,s}^{(2)} = \epsilon_0 d_{\text{eff}} E_p E_s^* e^{i[(k_p - k_s)z - (\omega_p - \omega_s)t]}, \quad (1.28)$$

où  $d_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \chi^{(2)}$  représente le coefficient non-linéaire effectif associé à la susceptibilité quadratique  $\chi^{(2)}$ .

Nous substituons les expressions (1.22) et (1.27) dans l'équation (1.20) ainsi que les expressions (1.23) et (1.28) dans l'équation (1.21) . En nous limitant au développement à l'ordre deux en  $(\omega - \omega_{s,p})$ , puis en appliquant l'approximation d'enveloppe lentement variable ( $|k_{s,p}^2 E_{s,p}| \gg |k_{s,p} \frac{\partial E_{s,p}}{\partial z}| \gg |\frac{\partial^2 E_{s,p}}{\partial z^2}|$ ) — qui permet de négliger le terme  $\partial_z^2 E_{s,p}$  devant  $2ik_j \partial_z E_{s,p}$  — nous obtenons, après simplification, l'expression suivante :

$$\partial_z E_s + k'_s \partial_t E_s + i \frac{k''_s}{2} \partial_t^2 E_s = i \kappa_s E_p E_s^* e^{-i\Delta k z}, \quad (1.29)$$

$$\partial_z E_p + k'_p \partial_t E_p + i \frac{k''_p}{2} \partial_t^2 E_p = i \kappa_p E_s^2 e^{i\Delta k z}. \quad (1.30)$$

où  $\kappa_{s,p} = \frac{\omega_{s,p}^2}{2k_{s,p} c^2} d_{\text{eff}}$  sont les coefficients de couplage non linéaire,  $\Delta k = k_p - 2k_s$  représente le désaccord de phase. Afin de compléter notre modèle, nous considérons à présent les pertes linéaires du milieu. Celles-ci proviennent de la composante imaginaire de la permittivité, et elles se traduisent par l'ajout de termes d'atténuation aux équations d'évolution des champs. Dans la partie linéaire, la propagation de l'onde électromagnétique est gouvernée par la permittivité complexe du milieu [2]

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i \varepsilon''(\omega). \quad (1.31)$$

La partie réelle  $\varepsilon'(\omega)$  détermine la réponse dispersive du matériau, donc l'indice de réfrac-

tion effectif

$$n_r(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega)}, \quad (1.32)$$

et par conséquent la vitesse de phase de l'onde. En revanche, la partie imaginaire  $\varepsilon''(\omega)$  décrit les pertes optiques dues à l'absorption matérielle. Ainsi, la relation de dispersion devient :

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = k_r(\omega) + i k_i(\omega), \quad (1.33)$$

où  $k_r(\omega)$  contrôle la propagation de phase, tandis que  $k_i(\omega) > 0$  est responsable de l'atténuation exponentielle du champ au cours de la propagation :

$$E(z) \propto e^{-k_i z}. \quad (1.34)$$

On définit alors le coefficient d'absorption

$$\alpha_{s,p} \equiv 2k_{s,p}(\omega_{s,p}) = 2 \operatorname{Im} k(\omega_{s,p}), \quad (1.35)$$

si bien que, en l'absence de non-linéarité, l'amplitude du champ décroît selon

$$E_{s,p}(z) \propto e^{-\alpha_{s,p} z/2}. \quad (1.36)$$

Pour des pertes faibles ( $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ ), nous obtenons :

$$\alpha_{s,p} \simeq \frac{\omega_{s,p} \varepsilon''(\omega_{s,p})}{c n_r(\omega_{s,p})}. \quad (1.37)$$

La prise en compte de la composante imaginaire du vecteur d'onde  $k_{s,p}$  conduit à l'introduction d'un terme dissipatif  $-\alpha_{s,p}/2 E_{s,p}$  dans les équations d'enveloppe, traduisant les pertes linéaires du milieu. Afin de simplifier l'analyse, nous nous plaçons dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe du signal (à la fréquence  $\omega_s$ ), en introduisant la variable retardée  $\tau = t - k'_s z$ . Dans ce référentiel comobile, en effectuant le changement de variable  $E'_{s,p} = \sqrt{\frac{n_{1,2} \varepsilon_0 c A_{\text{eff}}}{2}} E_{s,p}$ , les équations couplées prennent alors la forme [38, 37, 39] :

$$\frac{\partial E'_s}{\partial z} = \left[ -\frac{\alpha_s}{2} - i \frac{k_s''}{2} \frac{\partial}{\partial \tau^2} \right] E'_s + i \kappa E'_p E_s'^* e^{-i \Delta k z}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial E'_p}{\partial z} = \left[ -\frac{\alpha_p}{2} - \Delta k' \frac{\partial}{\partial \tau} - i \frac{k_p''}{2} \frac{\partial}{\partial \tau^2} \right] E'_p + i \kappa E_s'^2 e^{i \Delta k z}, \quad (1.39)$$

où  $\alpha_{s,p}$  représentent respectivement les pertes du signal et de la pompe,  $k_s''$  et  $k_p''$  sont respectivement les coefficients de dispersion du signal et de la pompe,  $\Delta k' = k'_p - k'_s$  est la différence entre l'inverse des vitesses de groupe des deux champs (qui est connu sous le nom : walk-off), et  $\kappa = \frac{2\omega_s d_{\text{eff}}}{\sqrt{A_{\text{eff}} c^3 n_1^2 n_2 \varepsilon_0}}$ , où  $A_{\text{eff}}$  représente l'aire effective du mode,  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide,  $n_1$  et  $n_2$  sont respectivement les indices de réfraction du signal et de la pompe, et  $\varepsilon_0$  désigne la permittivité du vide.

## 1.4 L'effet Kerr

L'effet Kerr optique est un phénomène non-linéaire où l'indice de réfraction d'un matériau change en fonction de l'intensité d'un champ optique intense [35, 2, 4, 40]. Ce phénomène, résultant de la réponse instantanée des électrons des molécules au champ électrique. Ce changement d'indice de réfraction est décrit par la relation suivante :

$$n(\omega, I) = n_0(\omega) + n_2 I, \quad (1.40)$$

où  $I$  est l'intensité du champ électrique incident,  $n_0$  est l'indice de réfraction linéaire et  $n_2$  représente l'indice de réfraction non-linéaire qui est relié avec la partie réelle de  $\chi^{(3)}$  par  $n_2 = \frac{3}{8n_0} \Re[\chi^{(3)}]$ , et il peut atteindre  $2.19 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ W}^{-1}$  dans la silice à la longueur d'onde 1030 nm [41].

Cette dépendance de l'indice de réfraction à l'intensité du champ appliqué entraîne de nombreux effets non-linéaires intéressants ; les deux plus largement étudiés sont l'auto-modulation de phase (SPM) et la modulation de phase croisée (XPM) [35].

### 1.4.1 L'équation de Schrödinger non-linéaire dans la fibre optique

La fibre optique est un guide d'onde cylindrique qui transporte la lumière sur de longues distances, principalement utilisée dans les télécommunications, les capteurs et les lasers. Sa structure permet de confiner et de guider la lumière par réflexion totale interne, minimisant ainsi les pertes de propagation [35]. Outre sa capacité à transmettre la lumière, la fibre optique peut également exhiber des effets non-linéaires, notamment la non-linéarité Kerr, en raison de la centro-symétrie du matériau. La propagation de la lumière dans une fibre optique, lorsqu'on considère à la fois la dispersion et la non-linéarité Kerr, est modélisée par l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE). Dans cette section, nous allons établir cette équation. L'équation (1.13) peut être écrite en fonction des polarisation linéaire et non-linéaire :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}^{(3)}}{\partial t^2}. \quad (1.41)$$

Avant de commencer, nous devons faire quelques hypothèses. Tout d'abord, la polarisation non-linéaire est considérée comme une perturbation de la polarisation linéaire, une hypothèse valide pour les fibres optiques présentant une faible non-linéarité, même à des puissances élevées. Ensuite, le champ optique est supposé conserver sa polarisation tout au long de la propagation dans la fibre. Enfin, nous considérons le champ électrique comme quasi-monochromatique : son spectre, centré sur  $\omega_0$ , présente une largeur  $\Delta\omega$  suffisamment étroite pour satisfaire  $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ . Cette condition est typiquement remplie pour les ondes continues ou les impulsions d'une durée supérieure à une picoseconde. Dans cette analyse, Nous supposons également que le champ électrique est linéairement polarisé suivant l'axe

$x$ , nous faisons appel à l'approximation de l'enveloppe lentement variable, permettant de décomposer le champ électrique en une partie oscillante rapide et une enveloppe évoluant lentement, selon l'expression :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{x}[E(\vec{r}, t)e^{-i\omega_0 t} + c.c]. \quad (1.42)$$

où  $E(\vec{r}, t)$  représente l'enveloppe lentement variable en temps du champ électrique,  $c.c$  dénote le complexe conjugué,  $\omega_0$  est la fréquence central de l'impulsion. Nous pouvons écrire pareillement les polarisations  $\vec{P}_L$  et  $\vec{P}_{NL}^{(3)}$  :

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{x}[P_L(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c]. \quad (1.43)$$

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{x}[P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c]. \quad (1.44)$$

A partir de ces expressions, nous pouvons calculer la dérivé seconde des  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}_L$  et  $\vec{P}_{NL}^{(3)}$ , On les remplace dans l'équation d'onde (1.41), on obtient une équation d'onde scalaire dans l'espace réciproque qui a pour expression :

$$(\nabla^2 + k_0^2)\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) + \mu_0\omega^2[\tilde{P}_L(\vec{r}, \omega - \omega_0) + \tilde{P}_{NL}(\vec{r}, \omega - \omega_0)] = 0 \quad (1.45)$$

où  $k_0 = \omega/c$ , la polarisation linéaire est liée au champ électrique par la relation [42, 43] :

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t')\vec{E}(\vec{r}, t')dt' \quad (1.46)$$

En remplaçant les équations (1.42) et (1.43) dans l'équation (1.46), nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\vec{x}[P_L(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c] = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{x} \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t')[E(\vec{r}, t')e^{-i\omega_0 t'} + c.c] \quad (1.47)$$

Egalisons les termes qui oscillent à  $\omega_0$ , on trouve une relation qui relie l'amplitude de la polarisation avec celle du champ électrique :

$$P_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t')E(\vec{r}, t')e^{i\omega_0(t-t')} dt' \quad (1.48)$$

Pour une raison de causalité de la polarisation, nous pouvons étendre les bornes de l'intégrale de  $-\infty$  à  $+\infty$ , l'intégral (1.48) devient :

$$P_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t-t')E(\vec{r}, t')e^{i\omega_0(t-t')} dt' \quad (1.49)$$

En utilisant les propriétés de l'espace de Fourier, le champ électrique dans l'espace de Fourier est donné par :

$$E(\vec{r}, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t'} d\omega. \quad (1.50)$$

On remplace l'expression de  $E(\vec{r}, t')$  dans (1.49), l'expression de la polarisation linéaire devient :

$$P_L(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) e^{i\omega_0 t} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') e^{-i\omega t'} dt' \right] d\omega \quad (1.51)$$

Selon les propriétés de l'espace de Fourier, nous avons la relation :

$$\tilde{\chi}^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') e^{-i\omega_0 t'} dt'. \quad (1.52)$$

En substituant la relation (1.52) dans (1.51), on obtient :

$$P_L(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \quad (1.53)$$

Nous pouvons exprimer la polarisation linéaire  $P_L(\vec{r}, t)$ , en utilisant la définition de la transformé de Fourier :

$$P_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_L(\vec{r}, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \quad (1.54)$$

A partir des deux équations (1.53) et (1.54), nous pouvons déduire que :

$$\tilde{P}_L(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \epsilon_0 \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \quad (1.55)$$

Après avoir exprimé la polarisation linéaire, nous allons maintenant passer à la polarisation non-linéaire. La non-linéarité qui se manifeste dans la fibre optique est celle qui correspond à la susceptibilité d'ordre 3 ( $\chi^{(3)}$ ). Cette polarisation est définie par :

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^t \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (1.56)$$

Exprimons donc  $\vec{P}_{NL}^{(3)}$  en fonction de l'amplitude du champ électrique. On exprime la solution de cette polarisation sous la forme suivante :

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{x}(P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} + c.c.). \quad (1.57)$$

Nous pouvons exprimer la susceptibilité d'ordre trois ( $\chi^{(3)}$ ) sous la forme suivante [35, 43] :

$$\chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi^{(3)}R(t - t_1)\delta(t_1 - t_2)\delta(t - t_3) \quad (1.58)$$

où  $\chi^{(3)}$  est indépendant du temps, et  $R(t)$  est la fonction normalisée de la réponse non-linéaire du milieu avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt = 1$ . Nous remplaçons les expressions (1.57) et (1.58) dans l'équation (1.56), on obtient :

$$\frac{1}{2}\vec{x}(P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t)e^{-i\omega t} + c.c) = \epsilon_0\chi^{(3)} \int_{-\infty}^t R(t - t_1)[\vec{E}(\vec{r}, t_1)\vec{E}(\vec{r}, t_1)\vec{E}(\vec{r}, t) + c.c]dt_1 \quad (1.59)$$

En injectant l'expression du champ électrique donnée par (1.42) dans (1.59), nous obtenons des termes oscillant à  $\omega_0$  et à  $3\omega_0$ . Nous ne conservons que les termes oscillant à  $\omega_0$ , car ceux à  $3\omega_0$  sont associés à la génération de la troisième harmonique, qui nécessite la satisfaction de la condition d'accord de phase. Dans ce cas nous pouvons déduire l'expression de l'amplitude de la polarisation non-linéaire :

$$P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)}E(\vec{r}, t) \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt', \quad (1.60)$$

où  $t' = t - t_1$ , nous pouvons définir la permittivité non-linéaire de la fibre comme  $\epsilon_{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)} \int_0^\infty R(t') |E(\vec{r}, t - t')|^2 dt'$ , l'équation (1.60) devient :

$$P_{NL}^{(3)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0\epsilon_{NL}E(\vec{r}, t). \quad (1.61)$$

Dans l'espace réciproque l'amplitude de la polarisation non-linéaire est écrite sous la forme :

$$\tilde{P}_{NL}^{(3)}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \epsilon_0\epsilon_{NL}\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0), \quad (1.62)$$

où  $\epsilon_{NL}$  est considérée comme une constante au cours de la dérivation de l'équation de propagation [44]. Cet approche est justifiée par l'approximation de l'enveloppe variable et la nature perturbative de  $P_{NL}^{(3)}$  par rapport à la polarisation linéaire. Après avoir exprimer la polarisation total dans la fibre optique, on remplace son expression dans l'équation d'onde (1.45), on obtient :

$$(\nabla^2 + k_0^2)\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) + \epsilon k^2\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = 0 \quad (1.63)$$

Pour résoudre cette équation, nous allons utiliser la méthode de séparation des variables, en écrivant le champ électrique sous la forme :

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z}, \quad (1.64)$$

où  $F(x, y)$  représente la distribution transverse du champ électrique, et  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  est l'enveloppe lentement variable dans l'espace de Fourier. En substituant cette expression

dans l'équation (1.63), on obtient deux équations distinctes pour  $F(x, y)$  et  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  :

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + [\epsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2] F(x, y) = 0, \quad (1.65)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0. \quad (1.66)$$

L'équation (1.66) est trouvée en considérant que la dérivée seconde  $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}$  par rapport à  $\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}$  en raison de la variation lente de  $\tilde{A}$  par rapport à  $z$ .  $\tilde{\beta}(\omega)$  représente le nombre d'onde total, qui contient le nombre d'onde linéaire  $\beta(\omega)$  et une petite variation  $\Delta\beta(\omega)$  due à l'indice de réfraction non-linéaire, il est donné par la relation :

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) \quad (1.67)$$

$$\Delta\beta(\omega) = \gamma(\omega) \int_0^\infty R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' + \frac{i\alpha(\omega)}{2}, \quad (1.68)$$

où  $\gamma(\omega)$  est une fonction qui dépend de la fréquence  $\omega$  et l'indice de réfraction non-linéaire  $n_2$ , cette fonction est à l'origine de l'effet Kerr optique qu'on va expliquer par la suite.  $\alpha(\omega)$  représente les pertes dans la fibre optique.

En utilisant l'approximation  $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$ , l'équation (1.61) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} - i(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = 0 \quad (1.69)$$

Nous effectuons un développement de Taylor de  $\beta(\omega)$ ,  $\Delta\beta(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$  et  $\alpha(\omega)$ , similaire à celui présenté dans l'équation (1.10), en négligeant les termes cubiques ainsi que ceux d'ordre supérieur. Ensuite, en appliquant la transformée de Fourier inverse, l'équation (1.69) se réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} = i\Delta\beta_0 A(z, t) + \Delta\beta_1 \frac{\partial A(z, t)}{\partial t}. \quad (1.70)$$

Où les expressions de  $\Delta\beta_0$  et  $\Delta\beta_1$  sont données par :

$$\Delta\beta_0 = \gamma_0 \int_0^\infty R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' + \frac{i\alpha_0}{2}. \quad (1.71)$$

$$\Delta\beta_1 = \gamma_1 \int_0^\infty R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' + \frac{i\alpha_1}{2}. \quad (1.72)$$

En injectant les expressions de  $\Delta\beta_0$  et  $\Delta\beta_1$  dans l'équation (1.70), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + i\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i\gamma_0 A \int_0^\infty R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' \\ + \frac{\alpha_0}{2} A - \gamma_1 \frac{\partial A}{\partial t} \int_0^\infty R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' - i\frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (1.73)$$

où la fonction de réponse non-linéaire  $R(t')$  est donnée par la relation [35, 45] :

$$R(t') = (1 - f_R)\delta(t') + f_R h_R(t'). \quad (1.74)$$

Elle se décompose en une partie instantanée,  $(1 - f_R)\delta(t')$ , associée à la réponse électronique Kerr, et une partie retardée,  $f_R h_R(t')$ , qui décrit la réponse vibratoire due à l'effet Raman. Le coefficient  $f_R$  représente la fraction de la non-linéarité attribuée au Raman, tandis que  $h_R(t')$  est une fonction causale normalisée caractérisant la dynamique temporelle de cette réponse retardée.

Dans le cas où la durée de l'impulsion est largement supérieure au temps caractéristique de la réponse Raman ( $t_p \gg t_R$ ), la contribution retardée  $f_R h_R(t')$  devient négligeable devant la réponse électronique instantanée. La non-linéarité peut alors être considérée comme purement instantanée, ce qui revient à approcher

$$R(t') \simeq \delta(t'). \quad (1.75)$$

En appliquant cette approximation et en effectuant le changement de variable  $\tau = t - \beta_1 z$ , l'équation générale se simplifie. Par ailleurs, les différents termes associés aux pertes linéaires sont regroupés dans un coefficient  $\alpha$ . On obtient finalement l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS), qui décrit la propagation de l'enveloppe lentement variable dans une fibre optique :

$$\frac{\partial A(z, \tau)}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A(z, \tau) + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, \tau)}{\partial \tau^2} - i\gamma |A(z, \tau)|^2 A(z, \tau) = 0. \quad (1.76)$$

Le paramètre non-linéaire  $\gamma$  permet de quantifier l'intensité de la réponse non-linéaire d'une fibre optique. Il est défini à partir du recouvrement spatial du mode guidé dans la fibre comme suit :

$$\gamma = \frac{\omega_0 n_2 \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^4 dx dy}{c \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}, \quad (1.77)$$

où  $F(x, y)$  représente le profil transverse du mode (normalisé ou non),  $n_2$  est l'indice de réfraction non-linéaire, et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette équation prend en compte les effets des pertes dans la fibre, représentées par  $\alpha$ , de la dispersion chromatique via  $\beta_2$ , ainsi que de la non-linéarité de la fibre, modélisée par  $\gamma$ . Le dernier terme de l'équation est responsable à la non-linéarité de type Kerr ou encore l'auto-modulation de phase.

## 1.4.2 L'auto-modulation de phase

Lorsqu'une onde lumineuse intense traverse un milieu non-linéaire, elle peut modifier sa propre phase en raison du changement de l'indice de réfraction qu'elle induit. Ce phénomène non-linéaire est connue sous le nom d'auto-modulation de phase. [35, 46, 47]. Ce

décalage de phase n'est pas uniforme et dépend de l'intensité locale de l'onde lumineuse. En conséquence, le spectre de l'onde se trouve élargi, générant de nouvelles fréquences. Ce phénomène a été observé pour la première fois en 1967 [46]. Prenons le cas d'une impulsion gaussienne (voire figure 1.4(a)). Le front de l'impulsion correspond à la pente négative de la variation de fréquence représentée dans la figure 1.4(b), décalant le spectre vers les basses fréquences (décalage vers le rouge), tandis que la queue de l'impulsion correspond à la pente positive de la variation de fréquence, décalant le spectre vers les hautes fréquences (décalage vers le bleu).

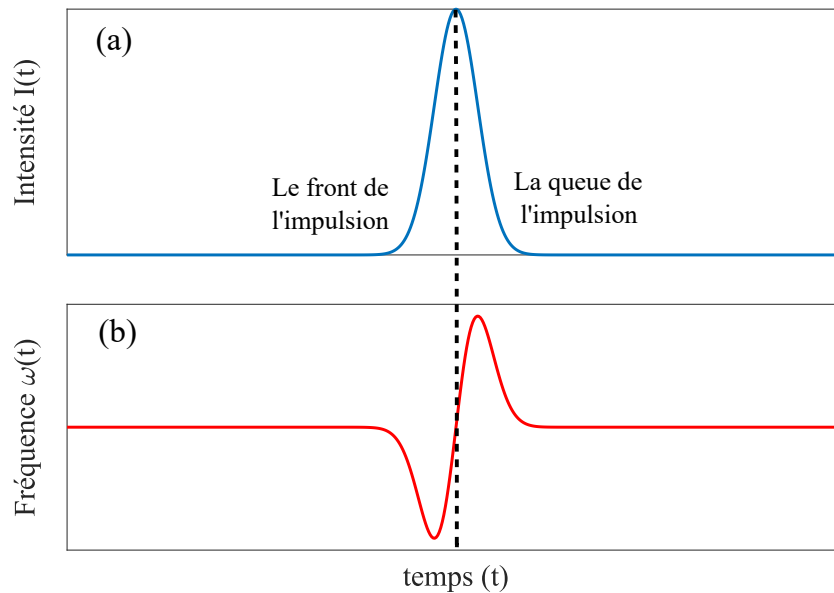


FIGURE 1.4 – La courbe bleue représente une impulsion gaussienne, tandis que la courbe rouge montre la variation instantanée de la fréquence induite par l'effet de modulation de phase auto-induite (SPM).

L'auto-modulation de phase (SPM) provoque un élargissement spectral des impulsions lumineuses, entraînant une compression temporelle qui les rend plus étroites et particulièrement efficaces dans les applications nécessitant des impulsions ultracourtes.

### 1.4.3 La modulation de phase croisée

Lorsque deux impulsions ou plus, fréquences différentes, se propagent simultanément dans un milieu non-linéaire, elles interagissent entre elles par le biais de la non-linéarité de ce milieu. Divers phénomènes non-linéaires peuvent alors se produire. Parmi eux, la modulation de phase croisée (XPM) est un phénomène notable, où l'indice de réfraction perçu par une onde est modifié par la présence d'une autre onde [35, 48]. Afin d'illustrer ce phénomène, considérons une enveloppe composée de deux composantes :

$$A(z, t) = A_1 + A_2 e^{i\Omega t}, \quad \text{avec } \Omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (1.78)$$

et injectons cette expression dans l'équation de Schrödinger non-linéaire (1.76), en négligeant à la fois la dissipation et la dispersion. On obtient alors l'équation suivante :

$$i\gamma(|A_1|^2 + 2|A_2|^2)A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial z} + \left[ i\gamma(|A_2|^2 + 2|A_1|^2)A_2 - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right] e^{i\Omega t} + i\gamma(A_1^2 A_2^* e^{-i\Omega t} + A_2^2 A_1^* e^{2i\Omega t}) = 0. \quad (1.79)$$

Cette expression met en évidence l'automodulation de phase, représentée par le terme  $i\gamma|A_1|^2 A_1$ , ainsi que la modulation de phase croisée, donnée par  $2\gamma|A_2|^2 A_1$ .

La modulation de phase croisée entraîne la compression temporelle d'une onde grâce à l'influence d'une autre onde se propageant simultanément. Ce phénomène conduit à l'élargissement spectral de la première onde, favorisant ainsi la génération de nouvelles fréquences.

## 1.5 Les structures dissipatives

Les structures dissipatives sont des configurations spatiales ou temporelles auto-organisées qui apparaissent spontanément dans des systèmes loin de l'équilibre thermodynamique, grâce à l'échange constant d'énergie et de matière avec leur environnement [49]. Ce concept a été introduit par le physico-chimiste Ilya Prigogine dans le cadre de l'étude des systèmes chimiques non-linéaires ouverts [50]. Elles se caractérisent par leur capacité à maintenir un ordre stable malgré le flux continu de dissipation d'énergie via le principe d'auto-organisation. On les trouve dans divers domaines : les réactions chimiques, l'écologie des plantes [51], l'hydrodynamique [52], biologie [53] et l'optique non-linéaire [54]. Dans le domaine de l'optique non-linéaire, on trouve par exemple ces structures sous forme d'instabilité modulationnelle et les Solitons. La figure 1.5 montre quelques exemples de structures dissipatives dans la nature, qui émergent grâce au principe d'auto-organisation.

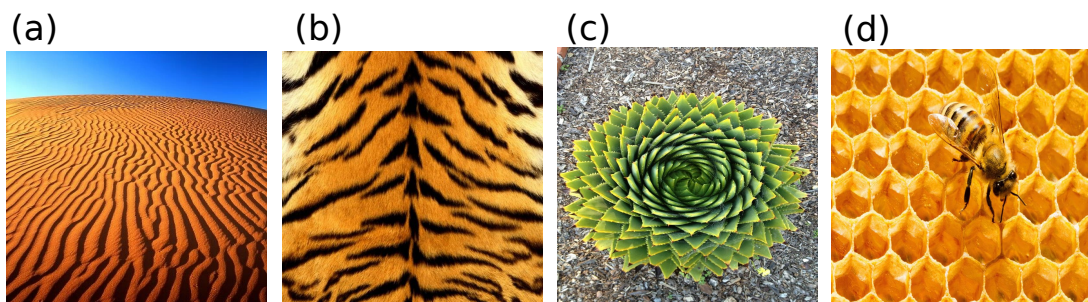


FIGURE 1.5 – Exemples de motifs naturels issus de l'auto-organisation dans des systèmes dissipatifs. a) Les dunes de sable. b) les rayures de la tigre. c) la spirale végétale. d) la structure hexagonale en nid d'abeille

### 1.5.1 L'instabilité modulationnelle

De nombreux systèmes non-linéaires présentent une instabilité qui conduit à la modulation de leur état continue sous l'effet d'une perturbation externe (le bruit par exemple). Ce phénomène, connu sous le nom d'instabilité de modulation, a été étudié dès les années 60 dans divers domaines tels que la dynamique des fluides, l'optique non-linéaire, et la physique des plasmas [35, 55]. Dans le domaine de l'optique non-linéaire, on distingue deux types principaux : l'instabilité modulationnelle en propagation (sans dissipation) dans les fibre optiques qui se produit à travers la combinaison de la non-linéarité et la dispersion, et qui a été observée pour la première fois en 1986 [56]. L'étude théorique de ce type est détaillée dans la référence [35] en utilisant l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) [Eq. (1.76)] qui décrit la propagation du champ dans la fibre optique. Le deuxième type est l'instabilité modulationnelle dans les cavités optiques, qui est théorisée initialement par Lugiato et Lefever en introduisant un modèle en champ moyen décrivant la dynamique dans une cavité Kerr optique passive en anneau [30], puis désignée plus tard sous le terme "instabilité modulationnelle dissipative" par Haelterman et al [31]. L'apparition de l'instabilité modulationnelle dissipative résulte d'une bifurcation qui se produit lorsque les paramètres de contrôle, le pompage par exemple, du système atteignent une valeur critique, dépassant un certain seuil. Nous allons présenter ici les résultats de Haelterman et al [31], en utilisant l'équation de Lugiato-Lefever, les détails de la démonstration de cette équation seront abordés dans la section 6, qui décrit la dynamique d'une cavité fibrée :

$$\partial_t F = [-1 - i\Delta - i\eta\partial_{\tau\tau}]F + i|F|^2 F + S, \quad (1.80)$$

où  $F$  est le champ qui circule dans la cavité, le premier terme à gauche représente les pertes,  $\Delta$  est le detuning qui est défini comme le décalage spectral entre deux résonances plus proches,  $\eta = 1$  ( $\eta = -1$ ) est le signe du coefficient de dispersion normal (anormal), et  $S$  désigne le forçage externe. En régime stationnaire ( $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ) et homogène ( $\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = 0$ ), L'équation (1.80) devient :

$$F_s[1 + i(\Delta - |F_s|^2)] = S, \quad (1.81)$$

où  $F_s$  représente la solution stationnaire et homogène. En introduisant les intensités du champ intracavité  $Y = |F_s|^2$  et de la pompe  $X = |S|^2$ , l'équation (1.81) se réduit à une équation cubique :

$$X = Y^3 - 2\Delta Y^2 + (\Delta^2 + 1)Y \quad (1.82)$$

L'analyse de cette équation montre que le réponse de la cavité dans le régime stationnaire et homogène se divise en deux régions selon la valeur du detuning. Les courbes représentées sur la figure 1.6 montrent la relation entre l'intensité en entrée  $X$  et l'intensité en sortie  $Y$  pour différentes valeurs de  $\Delta$ , si  $\Delta \leq \sqrt{3}$ , la réponse de la cavité correspond à un régime monostable où  $Y(X)$  est unique pour chaque valeur de  $X$ . dans le cas où  $\Delta > \sqrt{3}$  le système montre un comportement bistable, où une même valeur de  $X$  peut correspondre

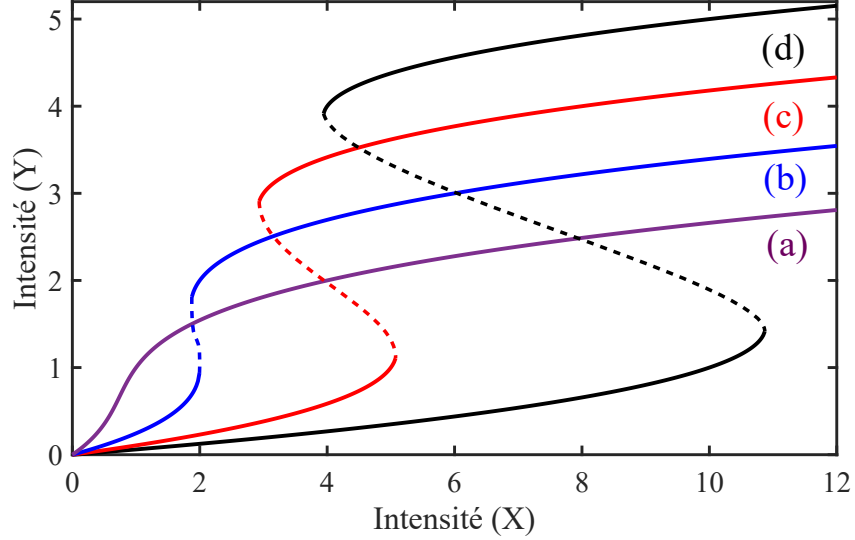


FIGURE 1.6 – Les solutions stationnaires  $Y = f(X)$  pour, a)  $\Delta = 1$ , b)  $\Delta = 2$ , c)  $\Delta = 3$ , d)  $\Delta = 4$

à plusieurs valeurs de  $Y$ , ce qui se traduit par un cycle d'hystérésis. Nous allons étudier l'analyse de stabilité linéaire de ces solutions. Nous prenons la solution stationnaire et homogène et ajoutons une petite perturbation :

$$F = F_s + f(t, \tau), \quad (1.83)$$

où  $f(t, \tau) = ae^{\lambda t} \cos(\Omega \tau)$  représente l'onde perturbative qui oscille avec une fréquence  $\Omega$  et qui croît ou décroît dans le temps avec un taux donné par  $\lambda$ , et  $a$  est l'amplitude de la perturbation. On introduit l'expression de  $F$  dans (1.80), et négligeons les termes du second ordre et les termes d'ordre supérieur de  $a$ , nous obtenons le système :

$$[-\lambda - 1 + i(-2Y - \Delta + \eta\Omega^2)] a + iY a^* = 0, \quad (1.84)$$

$$[-\lambda - 1 - i(-2Y - \Delta + \eta\Omega^2)] a^* - iY a = 0. \quad (1.85)$$

Ce système d'équation homogène conduit à une équation propre quadratique, où la condition d'existence de solutions non triviales est que le déterminant soit nul. Cette condition donne lieu à la relation de dispersion suivante :

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{4Y(\Delta - \eta\Omega^2) - (\Delta - \eta\Omega^2)^2 - 3Y^2}. \quad (1.86)$$

Le système est stable lorsque la partie réelle de ses deux valeurs propres est négative, ce qui entraîne une diminution exponentielle des perturbations. Dans les conditions suivantes :

- $Y > 1$ ,  $\Delta \leq 2$  et  $Y > \frac{\Delta}{2}$ ,  $\Delta > 2$  en régime de dispersion anormal ( $\eta = -1$ )
- $1 < Y < \frac{\Delta}{2}$ ,  $\Delta > 2$  en régime de dispersion anormal ( $\eta = 1$ )

La figure 1.7 montre que le système présente une instabilité de modulation dans les deux

régime de dispersion anormal (a) et normal (b).

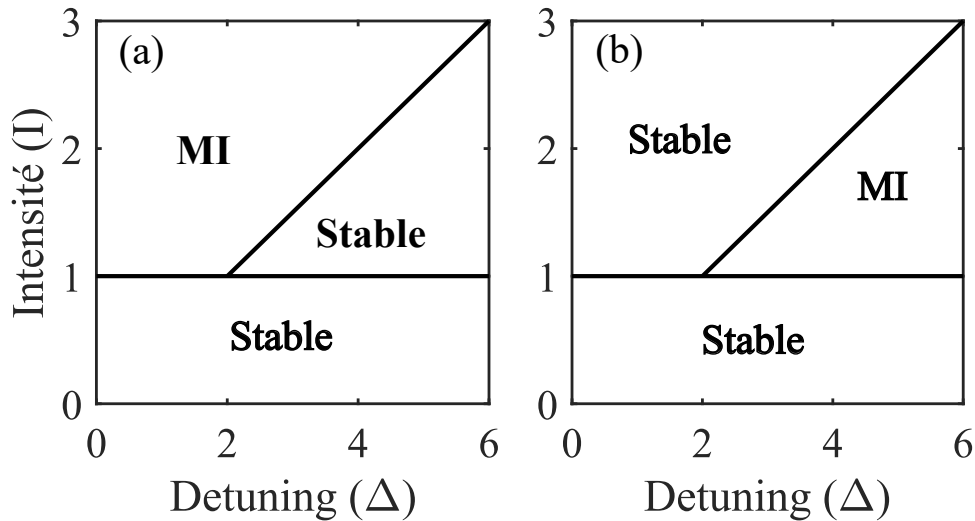


FIGURE 1.7 – La région de la MI dans le plan de paramètres  $(\Delta, I)$  dans les deux régimes de dispersion. a) anormal. b) normal.

## 1.5.2 Les solitons

En 1834, le scientifique John Scott Russell a observé une onde solitaire se propageant dans un canal d'eau sans changer de forme ni diminuer en amplitude, Cette onde, est appelée soliton, et elle est caractérisée par sa capacité à parcourir de longues distances sans se déformer, grâce à la non-linéarité du milieu dans lequel elle se propage [57]. Les solitons apparaissaient alors comme des solutions localisées dans des systèmes non-linéaires intégrables [58]. Depuis cette découverte, les solitons ont été observés et analysés dans plusieurs branches de la physique, notamment en optique. Dans les systèmes conservatifs, un soliton peut se former grâce à l'équilibre entre la dispersion et la non-linéarité (l'effet Kerr) [58, 59]. Cet équilibre dynamique donne naissance à une solution particulière de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE), qui fait partie de la classe des équations complètement intégrables. En effet, l'équation (1.76) dans le cas où  $\alpha = 0$  peut être résolue analytiquement à l'aide de la méthode de diffusion inverse (*inverse scattering method*) [60], ce qui permet de déterminer l'évolution exacte de tout paquet d'ondes initial.

Parmi les solutions de cette équation, le *soliton de Kerr de premier ordre* présente un profil invariant lors de la propagation. Ce type de soliton admet une solution analytique sous la forme [35] :

$$A(z, t) = B \operatorname{sech} \left( \frac{t}{t_s} \right) e^{i \frac{\gamma |B|^2 z}{2}}, \quad (1.87)$$

où  $|B|^2$  représente la puissance crête du soliton,  $t_s$  sa durée temporelle,  $\gamma$  le paramètre non-linéaire. Les deux paramètres  $B$  et  $t_s$  sont liés par la relation :

$$|B|^2 t_s^2 = \frac{-\beta_2}{\gamma}, \quad (1.88)$$

valide dans le régime de dispersion anormale ( $\beta_2 < 0$ ). Bien que l'équation NLSE admette une infinité de solutions dites « solitons d'ordre supérieur », seule cette solution fondamentale conserve un profil strictement inchangé au cours de la propagation [61].

Il est remarquable que les solitons puissent également se former dans des systèmes non conservatifs, c'est-à-dire dissipatifs [62], grâce à des mécanismes liés à des phénomènes d'auto-organisation. Dans ces systèmes, les solitons conservent leur forme en compensant la dispersion par la non-linéarité d'une part et les pertes par un forçage externe d'autre part [62]. Cette double balance rend le soliton dissipatif unique en tant qu'état attractif pour des paramètres donnés.

## 1.6 Les solitons de cavité (CSs)

Dans la section précédente, nous avons identifié deux types de solitons : les solitons optiques conservatifs et les solitons optiques dissipatifs. Ces derniers peuvent aussi se former dans un système non-linéaire constitué d'une cavité optique en anneau, et sont connus sous le nom de solitons de cavité (CSs) [63]. Ces solitons se forment dans des résonateurs non-linéaires passifs, où les pertes sont compensées par un forçage externe cohérent. On distingue les solitons de cavité en deux catégories : spatiaux et temporels, ces derniers constituant le principal objet de notre étude ici.

### 1.6.1 Les cavités passives

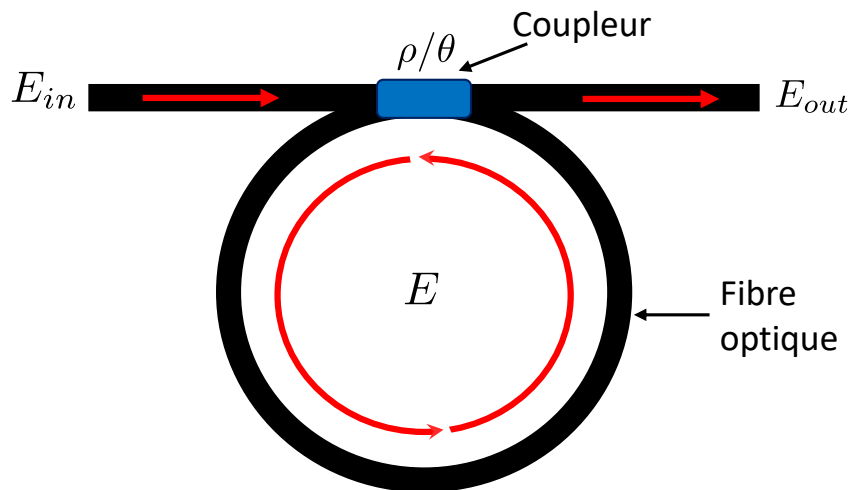


FIGURE 1.8 – Représentation schématique d'une cavité fibrée passive pompée en continue à travers un coupleur.

La Figure 1.8 montre le schéma d'une cavité passive qui est essentiellement composée d'une fibre optique en silice de longueur  $L$  dont les deux extrémités sont connectées à un coupleur qui est caractérisé par des coefficients de réflexion et de transmission,  $\rho$  et  $\theta$  respectivement, définis de telle manière que  $\rho^2 + \theta^2 = 1$ . Nous injectons une onde

de pompe, qui peut être une onde continue (cw) ou un train d'impulsions, à travers le coupleur. Une partie du champ intracavité sort par ce dernier, tandis que le champ intracavité, après chaque tour dans la cavité, se superpose de façon synchrone à l'onde de pompe injectée. Dans le résonateur, la section de fibre optique est décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire (1.76), tandis que l'influence du coupleur est représentée par une équation supplémentaire de condition aux limites de la cavité, ces deux équations forment un système décrivant l'ensemble de la dynamique d'une cavité fibrée passive :

$$\begin{cases} \frac{\partial E(z, \tau)}{\partial z} = -\frac{\alpha_f}{2} E(z, \tau) - i\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, \tau)}{\partial \tau^2} + i\gamma |E(z, \tau)|^2 E(z, \tau), \\ E^{(m+1)}(0, \tau) = \theta E_{\text{in}} + \rho E^{(m)}(L, \tau) e^{i\delta_0}. \end{cases} \quad (1.89)$$

La signification physique de chaque terme de l'équation de Schrödinger non-linéaire est donnée dans la section 1.4.  $E^{(m)}$  représente le champ intra-cavité au  $m$ -ième tour,  $E_{\text{in}}$  est le champ injecté dans la cavité à travers le coupleur, et  $\delta_0$  désigne le déphasage linéaire accumulé par tour.

## 1.6.2 Le modèle de Lugiato-Lefever

Le système (1.89) décrit la dynamique du résonateur. Cependant, en raison de la complexité de ce système, rendant une analyse analytique difficile, son étude se limite principalement à des approches numériques. Afin de faciliter une étude analytique, nous allons simplifier ce système en le réduisant à une équation unique de Lugiato-Lefever [30], en nous appuyant sur certaines approximations. Supposons que l'enveloppe du champ intra-cavité varie peu au cours de la propagation d'un tour de la cavité (l'hypothèse du champ moyen). Ce qui implique que la longueur de la cavité est très courte par rapport à la longueur de dispersion et la longueur non-linéaire. Reprenons le système (1.89) et intégrons la première équation (NLS) sur la longueur de la cavité, nous obtenons :

$$E^{(m)}(L, \tau) - E^{(m)}(0, \tau) = \left( -\frac{\alpha_f L}{2} - \frac{i}{2} \beta_2 L \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + i\gamma L |E^{(m)}(0, \tau)|^2 \right) E^{(m)}(0, \tau) \quad (1.90)$$

En injectant l'expression de  $E^{(m)}(L, \tau)$  dans la condition aux limites située dans le système (1.89), nous obtenons :

$$E^{(m+1)}(0, \tau) = \theta E_{\text{in}} + \rho \left( 1 - \frac{\alpha_f L}{2} - \frac{i}{2} \beta_2 L \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + i\gamma L |E^{(m)}(0, \tau)|^2 \right) E^{(m)}(0, \tau) e^{i\delta_0}. \quad (1.91)$$

Étant donné que le champ évolue lentement au cours d'un tour de cavité, nous introduisons une nouvelle variable temporelle  $t = mt_R$ , où  $t_R$  représente le temps nécessaire au champ pour parcourir un tour complet de la cavité. Grâce à cette variable, nous pouvons reformuler les

notations de la manière suivante :

$$E^{(m+1)}(0, \tau) = E(t + t_R, \tau) \quad (1.92)$$

$$E^{(m)}(0, \tau) = E(t, \tau) \quad (1.93)$$

Nous supposons également que  $t_R$  est très petit par rapport à  $t$ , ce qui permet de faire l'approximation  $t_R \approx \partial t$ . Cela nous conduit à écrire la relation suivante :

$$E^{(m+1)}(0, \tau) = t_R \frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} + E^{(m)}(0, \tau). \quad (1.94)$$

En remplaçant l'expression (1.94) dans l'équation (1.91), et en substituant  $E$  à la place de  $E^{(m)}(0, \tau)$  pour simplifier la notation, nous obtenons :

$$t_R \frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} = \theta E_{\text{in}} - E(t, \tau) + \rho \left( 1 - \frac{\alpha_f L}{2} - \frac{i}{2} \beta_2 L \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + i \gamma L |E(t, \tau)|^2 \right) E(t, \tau) e^{i\delta_0}. \quad (1.95)$$

Effectuons les développements en série de Taylor sur le coefficient de réflexion ( $\rho^2 \approx 1$ ) et le déphasage linéaire ( $\delta_0 \ll 1$ ) :

$$\rho e^{i\delta_0} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} - i\delta_0 \quad (1.96)$$

En substituant cette relation dans l'équation précédente, nous arrivons au modèle réduit de Lugiato-Lefever qui décrit l'évolution de l'enveloppe du champ dans le résonateur en tenant compte des effets non-linéaires et de dispersion et la dissipation du système.

$$t_R \frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} = \left( -\alpha - i\delta_0 - i \frac{\beta_2 L}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) E(t, \tau) + i \gamma L |E(t, \tau)|^2 E(t, \tau) + \theta E_{\text{in}}. \quad (1.97)$$

Nous pouvons également réécrire cette équation sous sa forme normalisée.

$$\frac{\partial F(t', \tau')}{\partial t'} = \left( -1 - i\Delta - i\eta \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} \right) F(t', \tau') + i |F(t', \tau')|^2 F(t', \tau') + S. \quad (1.98)$$

Où  $F = \sqrt{\frac{\gamma L}{\alpha}} E$  est l'amplitude du champ normalisé,  $t' = \frac{\alpha t}{t_R}$  est le temps lent normalisé,  $\tau' = \sqrt{\frac{2\alpha}{|\beta_2|L}} \tau$  représente le temps rapide normalisé,  $\Delta = \frac{\delta_0}{\alpha}$  désigne le detuning,  $\eta = \text{sign}(\beta_2)$ , et  $S = \sqrt{\frac{\gamma \theta L}{\alpha^3}} E_{\text{in}}$  est le forçage externe. La dynamique de la cavité décrite par cette équation est extrêmement riche. En faisant varier le detuning  $\Delta$ , plusieurs solutions peuvent apparaître, parmi lesquelles la solution homogène, l'instabilité de modulation, ainsi que les solitons de cavité (CSs). Un exemple de Soliton de cavité est montré dans la figure 1.9. Il est caractérisé par son fond non nul.

## 1.7 Les solitons paramétriques (PDCS)

Au cours de ces dernières années, l'intérêt s'est principalement concentré sur les solitons de cavité Kerr, qui se forment à la même fréquence que celle de la porteuse permettant de pomper la cavité [64, 26, 65]. Ce type de configuration, appelé "forçage externe", est bien modélisé par

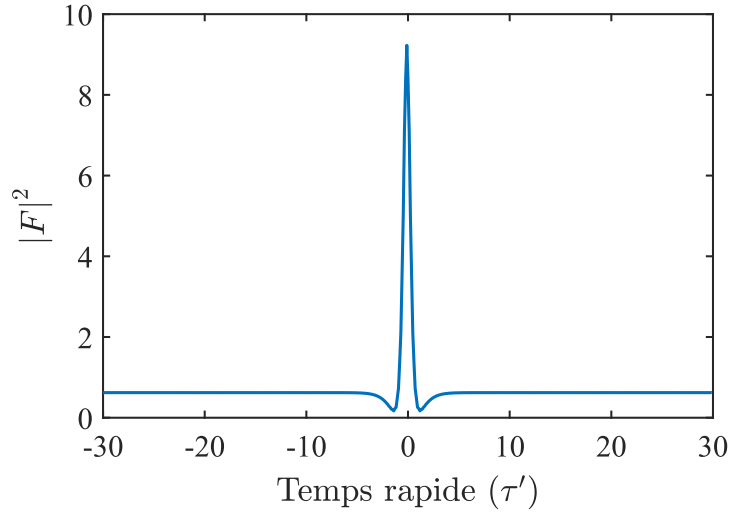


FIGURE 1.9 – Exemple de soliton de cavité. paramètres :  $S = 2.4$  et  $\Delta = 3.5$

l'équation de Lugiato-Lefever, qui capture la dynamique des solitons de cavité dans un système où la non-linéarité et la dispersion se contrebalancent. Cependant, il existe une autre catégorie de solitons de cavité, appelés "solitons paramétriquement forcés" [66], qui apparaissent dans des systèmes où l'excitation se fait en faisant varier l'un des paramètres internes du système, plutôt que la fréquence d'entrée. Ce type de solitons est particulièrement bien décrit par l'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique (PDNLSE), et récemment ils ont été observés dans une cavité fibré simplement résonante avec un pompage paramétrique [67].

### 1.7.1 L'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique

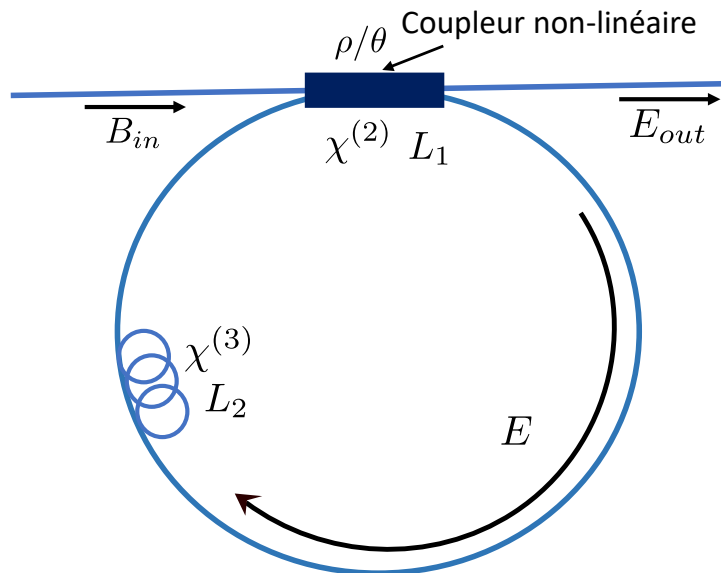


FIGURE 1.10 – Schéma d'une cavité composée de deux sections : une section de longueur  $L_1$  présentant une non-linéarité d'ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ), et une section de longueur  $L_2$  contenant une non-linéarité Kerr ( $\chi^{(3)}$ ).

Considérons une cavité de longueur  $L$ , composée de deux sections : la première, de longueur

$L_1$ , est un cristal non-linéaire d'ordre deux ( $\chi^{(2)}$ ), tandis que la seconde, de longueur  $L_2$ , est une fibre optique présentant une non-linéarité de type Kerr  $\chi^{(3)}$ . La cavité est pompée par une onde monochromatique de fréquence  $2\omega_0$ . Lorsque cette onde traverse le cristal non-linéaire, elle peut générer deux autres ondes, le signal et l'idler, de fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_i$  respectivement, via le processus d'amplification paramétrique optique. En supposant que  $\omega_s = \omega_i$ , et que la cavité soit simplement résonante, seul le signal résonne dans la cavité. La figure 1.10 illustre un schéma d'une cavité simplement résonante. L'évolution du signal  $A$  et de la pompe  $B$  dans la première section de longueur  $L_1$  est décrite par les équations de l'oscillateur paramétrique optique dégénéré, équations (1.38) et (1.39), telles que mentionnées dans la section 3.1. tandis que la propagation du signal dans la section de fibre est décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire, qui correspond à la première équation du système (1.89). Les équations (1.38) et (1.39) avec l'équation de Schrödinger non-linéaire constituent le modèle global qui décrit le système. Les conditions au bords de la cavité pour le signal à  $\omega_0$  et la pompe à  $2\omega_0$  sont données par :

$$A^{(m+1)}(0, \tau) = \sqrt{1 - R} A^{(m)}(L, \tau) e^{i\delta_0}, \quad (1.99)$$

$$B = B_{\text{in}}, \quad (1.100)$$

où  $R$  sont les pertes de la cavité. L'ensemble de ces équations, combiné aux conditions aux bords, peut se réduire à une seule équation décrivant la dynamique de ce système. En partant de l'équation (1.39), qui décrit l'évolution de la pompe, et en exploitant les propriétés de la transformation de Fourier, nous pouvons exprimer la pompe sous la forme suivante [68, 69] :

$$B_m \approx B_{\text{in}} e^{-\frac{\alpha_p^{(1)}}{2} z} + \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[A_m^2] \frac{e^{i\Delta k z} - e^{\hat{k} z}}{\Delta k + i\hat{k}} e^{-i\Omega \tau} d\Omega \quad (1.101)$$

Où le symbole (1) fait référence au milieu quadratique de longueur  $L_1$ ,  $\mathcal{F}[\cdot]$  est l'opérateur de la transformé de Fourier et  $\hat{k} = -\alpha_p^{(1)}/2 + i(\Delta k' \Omega + k_p'' \Omega^2/2)$ . En insérant cette expression dans l'équation (1.38) et en intégrant sur la longueur  $L_1$  du milieu quadratique, tout en supposant que  $A_m(z, \tau)$  reste constant, nous obtenons :

$$A_m(L_1) \approx A_m(0) - \left( \frac{\alpha_s^{(1)}}{2} + i \frac{k_s''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) L_1 A_m(0) + i\kappa B_{\text{in}} e^{-i\xi} \frac{\sinh(\xi)}{\xi} L_1 A_m^*(0) - \rho^2 [A_m^2 \otimes I(\tau)] A_m^*(0), \quad (1.102)$$

où  $\xi = L_1(\alpha_p^{(1)} + i\Delta k)/2$ ,  $\rho = \kappa L_1$ ,  $I(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(I(\Omega))$  représente la fonction de réponse non-linéaire où  $I = (1 - ix - e^{-x})/x^2$ , avec  $x(\Omega) = (\Delta k + i\hat{k})L_1$ . L'équation NLS peut également être intégrée sur la section de la fibre de longueur  $L_2$ , tandis que  $A_m(z, \tau)$  est maintenue constante, on trouve :

$$A_m(L) \approx A_m(L_1) - \left( \frac{\alpha_s^{(2)}}{2} + i \frac{\beta_{2,s}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - i\gamma |A_m|^2 \right) L_2 A_m \quad (1.103)$$

En substituant ces deux dernières équations et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on

obtient :

$$\begin{aligned}
A_m(L) - A_m(0) \approx & - \left( \frac{\alpha_s^{(1)}}{2} + i \frac{k_s''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) L_1 A_m(0) + i k B_{\text{in}} e^{-i\xi} \frac{\sinh \xi}{\xi} L_1 A_m^*(0) \\
& - \rho^2 [A_m^2 \otimes I(\tau)] A_m^*(0) - \left( \frac{\alpha_s^{(2)}}{2} + i \frac{\beta_{2,s}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - i \gamma |A_m(0)|^2 \right) L_2 A_m(0) \quad (1.104)
\end{aligned}$$

En introduisant le temps lent de la même manière que pour l'équation de Lugiato-Lefever, et sous certaines conditions, on peut négliger le terme instantané de troisième ordre. Dans ce cas, nous obtenons l'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique (PDNLSE) [28, 29, 66] :

$$t_R \frac{\partial A}{\partial t} = \left( -\frac{\Lambda}{2} - i\delta_0 - i \frac{\beta_2 L}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) A + \kappa B_{\text{in}} L_1 A^* + i \gamma L_2 |A|^2 A. \quad (1.105)$$

Où  $\Lambda = \alpha_s^{(1)} L_1 + \alpha_s^{(2)} L_2 + R$  représente les pertes total dans la cavité et  $\beta_2 L = k_s'' L_1 + \beta_{2,s} L_2$  est la dispersion total par toutes les parties qui constituent la cavité. En appliquant les changements de variables suivants :  $A' = \sqrt{\frac{\gamma L_2}{\Lambda}} A$ ,  $t' = \Lambda t / t_R$ ,  $\Delta = \delta_0 / \Lambda$ ,  $\tau' = \sqrt{\frac{2\Lambda}{|\beta_2 L|}} \tau$  et  $\mu = \kappa B_{\text{in}} L_1 / \Lambda$ , l'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique (PDNLS) peut être réécrite sous sa forme normalisée.

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} = \left( -1 - i\Delta + i \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} \right) A' + \mu A'^* + i |A'|^2 A'. \quad (1.106)$$

Cette équation est largement reconnue et apparaît dans divers domaines de la physique, tels que l'hydrodynamique [70], la physique des plasmas [71], et l'optique [66]. Elle admet des solutions variées, allant des états triviaux et homogènes à des phénomènes plus complexes comme l'instabilité modulationnelle. De plus, elle permet de décrire des structures localisées, telles que les solitons paramétriques, caractérisés par un fond nul. Dans la région  $\mu > 1$ , PDNLSE admet une solution exacte sous forme soliton [72, 66, 28, 29],

$$A = \sqrt{2} \beta \operatorname{sech}(\beta t) \exp(i\phi), \quad (1.107)$$

Où  $\cos(2\phi) = \mu^{-1}$  et  $\beta^2 = \Delta + \mu \sin(2\phi)$ . Il existe deux solitons de différentes amplitudes, chacun pouvant adopter l'une des deux phases opposées. La solution qui satisfait la condition  $\sin(2\phi) > 0$  est instable, tandis que l'autre reste toujours stable. Un exemple de soliton paramétrique est illustré dans la figure 1.11.

## 1.8 L'interaction entre deux solitons

Depuis les années 1990, l'interaction entre les solitons dans les systèmes dissipatifs a été étudié dans plusieurs contextes [73, 74, 75, 76, 77, 78], en utilisant différentes méthodes analytiques de perturbation pour calculer le potentiel d'interaction. Parmi ces approches, on trouve la méthode variationnelle de Lagrange, fondée sur le principe de moindre action, que nous utiliserons dans notre étude au chapitre 2. Les recherches montrent que l'interaction devient significative lorsque les solitons sont suffisamment rapprochés pour former un état lié, appelé en anglais "Bound state", et que cette interaction est principalement régie par la queue oscillante des so-

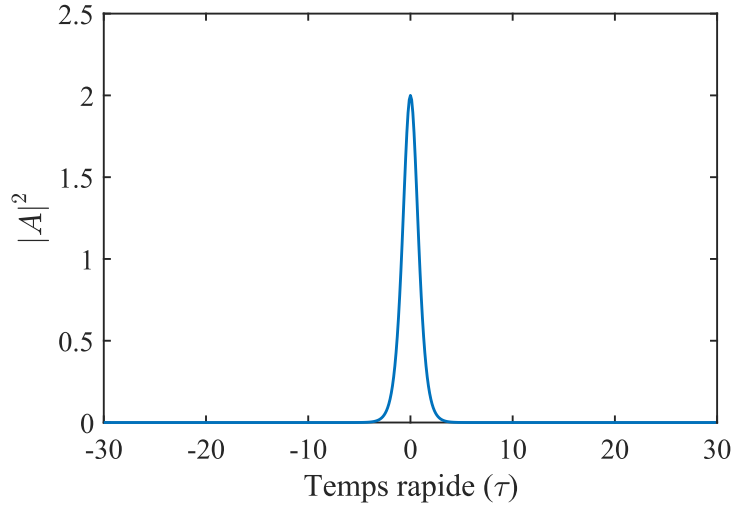


FIGURE 1.11 – Soliton paramétrique.  $\Delta = 1.5$  et  $\mu = 1.2$

litons [79, 73, 74]. Lorsque ces queues présentent des oscillations spatiales ou temporelles, un verrouillage entre deux solitons peut se produire à des distances fixes, liées à la fréquence d'oscillation, formant ainsi un état lié. En 1991, Malomed a été le premier à prédire ces états liés dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) perturbée [73]. Concernant les solitons paramétriques (PDCSs), décrits par l'équation PDNLS, l'interaction a été étudiée à la fois théoriquement et expérimentalement [80, 81]. Il a été démontré que la phase des solitons joue un rôle clé : lorsqu'ils sont en phase, ils présentent une interaction attractive, tandis qu'en opposition de phase, ils subissent une interaction répulsive, selon une loi logarithmique.

## 1.9 Conclusion

Nous avons établi les bases théoriques indispensables à l'étude des solitons dans les systèmes non-linéaires et dissipatifs. Nous avons tout d'abord examiné la propagation de la lumière dans les milieux dispersifs, en mettant en avant les différents ordres de susceptibilité non-linéaire, notamment leur manifestation à travers les oscillateurs paramétriques et l'effet Kerr. Ensuite, nous avons étudié les mécanismes d'auto-organisation, qui jouent un rôle clé dans l'émergence des structures dissipatives, telles que l'instabilité modulationnelle et les solitons.

Nous avons démontré que la modélisation de ces phénomènes peut être simplifiée en une seule équation, l'équation de Lugiato-Lefever, dont le soliton de cavité est une solution numérique. De plus, nous avons montré que le soliton paramétrique est décrit par l'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique (PDNLSE). Enfin, nous avons abordé l'interaction entre deux solitons, qui mène à la formation des états liés.



## 2. L'impact du walk-off sur la dynamique du soliton dans un DOPO avec la non-linéarité Kerr

### 2.1 Introduction

La génération de solitons dans des cavités optiques exploitant des non-linéarités d'ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ) et d'ordre 3 ( $\chi^{(3)}$ ) a suscité un intérêt croissant ces dernières années [82, 83, 84, 85]. Ces solitons, caractérisés par un fond nul, se révèlent être des outils prometteurs pour la génération de peignes de fréquence optiques. Ces derniers trouvent des applications variées, notamment en métrologie et en spectroscopie de précision.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la génération de solitons dans un oscillateur optique paramétrique dégénéré (DOPO) doublement résonant aux fréquences  $\omega_0$  et  $2\omega_0$ , en présence d'une non-linéarité Kerr. Les équations couplées décrivant la dynamique des champs signal et pompe dans la cavité peuvent être réduites à une seule équation contenant un terme de convolution.

Dans un premier temps, nous analysons l'impact de ce terme de convolution sur l'amplitude et le domaine d'existence des solitons. Ensuite, à l'aide d'approches numériques et analytiques basées sur la méthode variationnelle, nous étudions l'effet du walk-off, qui traduit la différence entre les inverses des vitesses de groupe du signal et de la pompe. Nous montrons comment le walk-off influence simultanément l'amplitude et le domaine d'existence des solitons. Ensuite, nous établissons une comparaison avec le cas d'une cavité simplement résonante.

Cette étude a pour objectif de fournir une compréhension approfondie des mécanismes fondamentaux gouvernant la dynamique des solitons dans des cavités doublement résonantes contenant des non-linéarités quadratique ( $\chi^{(2)}$ ) et cubique ( $\chi^{(3)}$ ).

### 2.2 Cavité doublement résonante (DOPO+ L'effet Kerr)

La génération de peignes de fréquences optiques dans les micro-résonateurs a suscité un intérêt croissant ces dernières années, offrant une alternative prometteuse aux techniques traditionnelles basées sur les lasers femtosecondes à modes bloqués [20, 19]. La majorité des travaux se sont concentrés sur la génération de ces peignes via la non-linéarité Kerr  $\chi^{(3)}$  [6, 86, 87]. Dans le domaine temporel, ces peignes de fréquences correspondent à un train de solitons de cavité

Kerr [88, 89, 90], où les interactions entre dispersion, non-linéarité, et pertes donnent naissance à des structures dissipatives stables.

Par la suite, des études ont démontré que des peignes de fréquences peuvent également être générés dans des cavités présentant une non-linéarité d'ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ), que ce soit par le biais de la génération de seconde harmonique (SHG) [91, 92] ou dans des oscillateurs optiques paramétriques (OPO) [39, 93, 94, 95]. Dans ces derniers, les peignes de fréquences émergent à travers un train de solitons quadratiques, stabilisés par un équilibre subtil entre la dispersion et l'effet Kerr effectif d'un côté [96, 97, 98, 99, 100], et la dissipation et le pompage de l'autre. En effet, ces solitons quadratiques permettent d'obtenir des structures spectrales cohérentes, adaptées à des applications variées.

Plus récemment, l'attention s'est portée sur les milieux présentant simultanément les non-linéarités  $\chi(2)$  et  $\chi(3)$  [82, 83, 101, 84, 85, 102]. Cette combinaison ouvre la voie à une dynamique riche et complexe, permettant la génération de nouveaux peignes de fréquences. Il est important de distinguer ici les études menées dans des cavités simplement résonantes, où un seul champ est en résonance, de celles réalisées dans des cavités doublement résonantes, où deux champs sont simultanément en résonance. Dans ce manuscrit, nous nous concentrerons sur une cavité doublement résonante intégrant les deux non-linéarités  $\chi(2)$  et  $\chi(3)$ .

## 2.2.1 Cadre théorique

Le système est constitué par une cavité contenant une non-linéarité d'ordre 2, associée à l'oscillateur optique paramétrique dégénéré, et une non-linéarité d'ordre 3, induite par l'effet Kerr optique. Cette configuration favorise une interaction complexe entre la pompe et le signal générés par le processus paramétrique. La cavité est conçue pour résonner simultanément à la fréquence de la pompe ( $2\omega_0$ ) et à celle du signal ( $\omega_0$ ). Cette résonance conjointe de la pompe et du signal dans la cavité donne lieu à une dynamique riche, propice à l'émergence de phénomènes non-linéaires complexes, notamment la formation de solitons. La figure 2.1 présente le schéma d'une cavité doublement résonante aux deux fréquences  $2\omega_0$  et  $\omega_0$ , respectivement associées à la pompe et au signal, incluant les deux non-linéarités.

Nous considérons un résonateur de longueur  $L$  pompé à une fréquence  $2\omega_0$  via un coupleur ayant des coefficients de transmission  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement aux fréquences  $\omega_0$  et  $2\omega_0$ . Nous supposons qu'un signal à la fréquence  $\omega_0$  est généré au sein de la cavité, tout en imposant que le signal et la pompe soient résonants. En supposant que la diffraction, les dispersions d'ordre supérieur sont négligeables, l'évolution des enveloppes lentement variables du signal ( $E_1$ ) à  $\omega_0$  et de la pompe ( $E_2$ ) à  $2\omega_0$  dans le résonateur lors d'un aller-retour est décrite par les deux équations suivantes [83, 85] :

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = \left[ -\frac{\alpha_{c1}}{2} - i\frac{k_1''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E_1 + i\kappa E_2 E_1^* e^{-i\Delta kz} + i(\gamma_1 |E_1|^2 + 2\gamma_{12} |E_2|^2) E_1, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = \left[ -\frac{\alpha_{c2}}{2} - \Delta k' \frac{\partial}{\partial \tau} - i\frac{k_2''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E_2 + i\kappa E_1^2 e^{i\Delta kz} + i(\gamma_2 |E_2|^2 + 2\gamma_{21} |E_1|^2) E_2. \quad (2.2)$$

Les champs intra-cavités  $E_1^{(m+1)}(0, \tau)$  et  $E_2^{(m+1)}(0, \tau)$  au début du  $(m+1)$ -ième aller-retour peuvent être reliés aux champs  $E_1^{(m)}(L, \tau)$  et  $E_2^{(m)}(L, \tau)$  à la fin du  $m$ -ième aller-retour comme

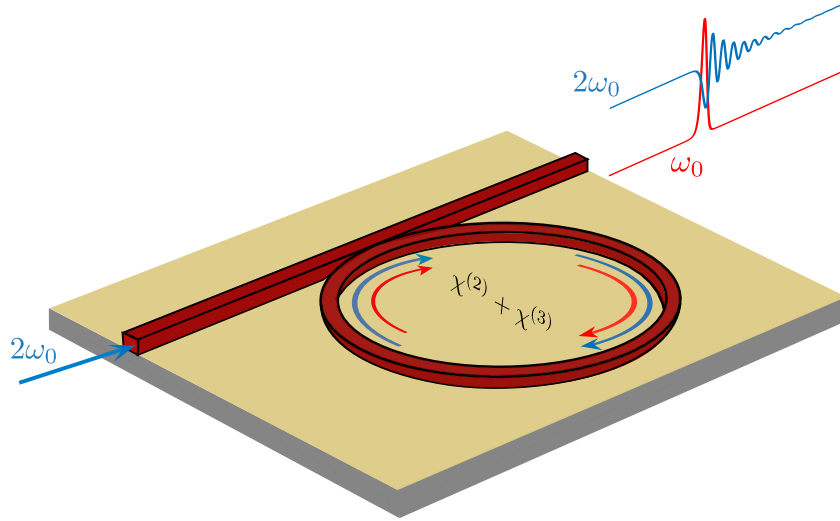


FIGURE 2.1 – Schéma d'une cavité doublement résonante aux fréquences  $2\omega_0$  et  $\omega_0$ , avec les non-linéarités quadratique et cubique.

suit :

$$E_1^{(m+1)}(0, \tau) = \sqrt{1 - \theta_1} E_1^{(m)}(L, \tau) e^{-i\delta_1}, \quad (2.3)$$

$$E_2^{(m+1)}(0, \tau) = \sqrt{1 - \theta_2} E_2^{(m)}(L, \tau) e^{-i\delta_2} + \sqrt{\theta_2} B_{\text{in}}, \quad (2.4)$$

où  $B_{\text{in}}$  est l'amplitude du pompage continue (cw),  $\alpha_{c1,2}$  sont les pertes de propagation par unité de longueur,  $\Delta k'$  représente la différence entre les inverses des vitesses de groupe des deux enveloppes, appelé "walk-off", et  $k''_{1,2}$  sont les coefficients de dispersion de vitesse de groupe. Le coefficient de couplage non-linéaire du second ordre est donné par  $\kappa = \frac{2\omega_0 d_{\text{eff}}}{\sqrt{A_{\text{eff}} c^3 n_1^2 n_2 \epsilon_0}}$ ,  $A_{\text{eff}}$  correspond à l'aire effective,  $c$  représente la vitesse de la lumière,  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide, et  $n_{1,2}$  sont les indices de réfraction associés au signal et à la pompe respectivement.  $\Delta k$  désigne le désaccord de phase, tandis que  $\gamma_{1,2}$  sont respectivement les coefficients d'auto-modulation de phase (SPM) pour le signal et la pompe, et  $\delta_{1,2}$  sont respectivement les detuning du signal et de la pompe, et  $\gamma_{12}$  et  $\gamma_{21}$  représentent les coefficients de modulation de phase croisée (XPM) entre le signal et la pompe. Ils sont définis par :

$$\gamma_{jk} = \frac{n_2 \omega_j}{c} \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} |F_j(x, y)|^2 |F_k(x, y)|^2 dx dy}{\left( \iint_{-\infty}^{\infty} |F_j(x, y)|^2 dx dy \right) \left( \iint_{-\infty}^{\infty} |F_k(x, y)|^2 dx dy \right)}, \quad (2.5)$$

où  $j, k = 1, 2$ , avec  $j \neq k$ .

Supposons que la cavité présente une haute finesse autour des fréquences  $\omega_0$  et  $2\omega_0$ , ce qui implique que les enveloppes lentement variables demeurent approximativement constantes durant un aller-retour. En intégrant les équations (2.1) et (2.2) de  $z = 0$  à  $z = L$ , tout en appliquant les conditions aux limites (2.3) et (2.4), et en introduisant le temps lent, nous obtenons les deux

équations couplées normalisées suivantes [85, 96] :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1 \partial_{\tau\tau}] A + i\rho_1 B A^* + i \left( |A|^2 + \frac{2\gamma_{12}}{\gamma_2} |B|^2 \right) A, \quad (2.6)$$

$$\partial_t B = [-1 - i\Delta_2 - d\partial_\tau - i\eta_2 \partial_{\tau\tau}] B + i\rho_2 A^2 + i \left( |B|^2 + \frac{2\gamma_{21}}{\gamma_1} |A|^2 \right) B + S, \quad (2.7)$$

où  $A = \sqrt{\frac{\gamma_1 L}{\alpha_1}} E_1$  et  $B = \sqrt{\frac{\gamma_2 L}{\alpha_2}} E_2$ ,  $\Delta_{1,2} = \frac{\delta_{1,2}}{\alpha_{1,2}}$ , avec  $\alpha_{1,2}$  représentent les pertes total associés au signal et à la pompe respectivement,  $\eta_1 = \text{sign}(k_1'')$  et  $\eta_2 = \frac{k_2''}{|k_1''|}$ ,  $d = \Delta k' \sqrt{\frac{2L}{|k_1''|\alpha_1}}$ ,  $\rho_1 = \frac{\kappa L}{\alpha_1} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\gamma_2 L}}$  et  $\rho_2 = \frac{\kappa \alpha_1}{\alpha_2 \gamma_1} \sqrt{\frac{\gamma_2 L}{\alpha_2}}$ ,  $S = \frac{\sqrt{\theta_2} B_{in}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\gamma_2 L}{\alpha_2}}$ ,  $t = \frac{\alpha_1 t'}{t_R}$  et  $\tau = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{|k_1''|L}} \tau'$ . Ces deux équations normalisées décrivent l'interaction entre la dispersion, la non-linéarité quadratique et la non-linéarité cubique (Kerr) dans la cavité. Les simulations numériques de ce système révèlent une dynamique riche, incluant l'émergence de structures localisées temporelles, comme les solitons optique.

## 2.2.2 Le modèle à une seule équation

Nous montrerons que ces deux équations couplées, qui décrivent la dynamique d'une cavité doublement résonante, peuvent, dans des conditions typiques, être réduites à une seule équation de champ moyen, similaire à la PDNLSE mais avec un terme de convolution. Une équation analogue a été obtenue dans le cas d'une cavité simplement résonante [82, 84]; la principale différence réside dans la nature du terme instantané et, en particulier, dans la fonction de réponse non-linéaire  $J(\tau)$ , que nous expliquerons en détail par la suite. Pour ce faire, nous introduisons deux approximations : (i) nous supposons que l'évolution temporelle de la pompe  $B$  est très lente par rapport à celle du signal  $A$  ( $\partial_t B \approx 0$ ) [103, 104, 39] et (ii) nous négligeons la modulation de phase croisée (XPM) pour les deux champs ainsi que l'auto-modulation de phase (SPM) de la pompe. Avec ces approximations, l'équation (2.7) peut s'écrire sous la forme :

$$[1 + i\Delta_2 + d\partial_\tau + i\eta_2 \partial_{\tau\tau}] B = i\rho_2 A^2 + S. \quad (2.8)$$

En utilisant la transformé de Fourier, nous obtenons l'expression de la pompe dans l'espace réciproque [83] :

$$\mathcal{F}[B] = \frac{i\rho_2 \mathcal{F}[A^2] + S\delta(\Omega)}{1 + i\Delta_2 - id\Omega - i\eta_2 \Omega^2}. \quad (2.9)$$

Nous pouvons donc trouver une expression simple de la pompe en fonction du signal [83, 84, 94] :

$$B = \frac{S}{1 + i\Delta_2} + i\rho_2 [A^2 \otimes J(\tau)], \quad (2.10)$$

où le symbole  $\otimes$  désigne l'opérateur de convolution et  $J(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[J(\Omega)]$ , avec  $J(\Omega) = \frac{1}{1 + i\Delta_2 - id\Omega - i\eta_2 \Omega^2}$ , l'opérateur  $J(\Omega)$  [83, 103] décrit la transmission lorentzienne de la cavité autour de la fréquence de la pompe. En substituant l'expression de la pompe dans l'équation (2.6), nous obtenons l'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique (PDNLSE), laquelle inclut un terme de convolution instantané qui représente un terme de déplétion de la pompe. Cela permet de décrire la dynamique d'un oscillateur paramétrique optique doublement résonant, contenant une

non-linéarité cubique de type Kerr, comme suit :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1 \partial_{\tau\tau}] A + i|A|^2 A + \mu A^* - \rho [A^2 \otimes J(\tau)] A^*, \quad (2.11)$$

où nous posons  $A \rightarrow Ae^{-i\psi}$ , avec  $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1}(-\Delta_2)$ ,  $\mu = \frac{\rho_1 S}{\sqrt{1+\Delta_2^2}}$  et  $\rho = \rho_1 \rho_2$ .

## 2.3 Soliton paramétrique

L'équation (2.11) décrit la dynamique complexe d'un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) dégénéré doublement résonant en présence d'une non-linéarité Kerr. En négligeant le terme de déplétion, nous obtenons l'équation PDNLS. L'analyse de la stabilité et de la dynamique de cette équation révèle une riche variété de solutions. Dans la référence [82], on trouve une analyse détaillée de la solution triviale ( $A = 0$ ) ainsi que des solutions homogènes correspondant à des états stationnaires uniformes. Au-delà de ces solutions fondamentales, l'équation présente également l'instabilité de Faraday qui se manifeste par une modulation périodique de l'amplitude du champ sous l'effet d'une perturbation, ainsi que des solutions sous forme de solitons qui sont données par  $A = \sqrt{2}\beta \text{sech}(\beta\tau)e^{\pm i\phi}$  [105, 106, 107, 108], comme nous l'avons discuté dans le premier chapitre.

L'équation PDNLS avec le terme de convolution (2.11) introduit une dynamique particulièrement riche qui mérite une analyse approfondie. Notre intérêt se porte sur l'impact du terme de convolution vis-à-vis des solutions de la PDNLSE. En effet, ce terme, qui traduit la réponse non-instantanée du milieu, pourrait significativement modifier la nature et la stabilité des solutions précédemment identifiées. Dans ce contexte, la recherche des solutions continues de l'équation complète devient cruciale pour comprendre la dynamique d'une cavité doublement résonante contenant les deux non-linéarités  $\chi^{(2)}$  et  $\chi^{(3)}$ .

### 2.3.1 Les solutions homogènes

En régime stationnaire ( $\partial_t A = 0$ ) et homogène ( $\partial_{\tau\tau} A = 0$ ), l'équation (2.11) devient :

$$-[1 + i\Delta_1]A_s + i|A_s|^2 A_s + \mu A_s^* - \rho \frac{|A_s|^2 A_s}{1 + i\Delta_2} = 0, \quad (2.12)$$

où  $A_s$  représente la solution stationnaire et homogène et qui peut s'écrire sous la forme :

$$A_s = |A_s|e^{i\phi} \quad (2.13)$$

En injectant  $A_s$  dans (2.12), on obtient :

$$\left[ -(1 + i\Delta_1) + i|A_s|^2 + \mu e^{-2i\phi} - \rho \frac{|A_s|^2}{1 + i\Delta_2} \right] |A_s| = 0 \quad (2.14)$$

Ce qui donne trois solutions, une solution triviale  $|A_s| = A_0 = 0$ , et deux solutions qui vérifient l'équation :

$$a|A_s|^2 = \Delta_1 + \sqrt{\mu^2 - \left(1 + \frac{\rho|A_s|^2}{1 + \Delta_2^2}\right)^2}, \quad (2.15)$$

avec  $a = \left(1 + \frac{\rho\Delta_2}{1 + \Delta_2^2}\right)$ , d'où

$$|A_s^\pm|^2 = \frac{a\Delta_1 - b \pm \sqrt{\mu^2(a^2 + b^2) - (a + b)^2}}{a^2 + b^2}, \quad (2.16)$$

où  $b = \frac{\rho}{1 + \Delta_2^2}$ , et la phase

$$\phi^\pm = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{1 + b|A_s^\pm|^2}{\mu} \right). \quad (2.17)$$

Pour  $\Delta_1 > b/a$ , une seule solution qui existe  $|A_s^+|$ , qui apparaît au-delà d'un seuil de pompe donné par :

$$\mu_s = \sqrt{1 + \Delta_1^2}. \quad (2.18)$$

Ce seuil marque le point où une bifurcation en fourche super-critique se produit à partir de la solution triviale  $A_0$ , donnant naissance à la solution  $|A_s^+|$ . La figure 2.2(a) montre qu'au-delà de ce seuil  $\mu_s$ , les deux solutions  $|A_s^+|$  et  $A_0$  coexistent, avec la solution triviale  $A_0$  devenant instable.

Pour  $\Delta_1 < b/a$ , nous avons deux solutions  $|A_s^+|$  et  $|A_s^-|$  qui apparaissent via une bifurcation sous-critique au delà du seuil de la pompe :

$$\mu_t = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (2.19)$$

où la solution  $|A_s^-|$  est instable, tandis que la solution  $|A_s^+|$  est stable comme le montre la Figure 2.2(b). Dans la région  $\mu_t < \mu < \mu_s$ , les trois solutions coexistent.

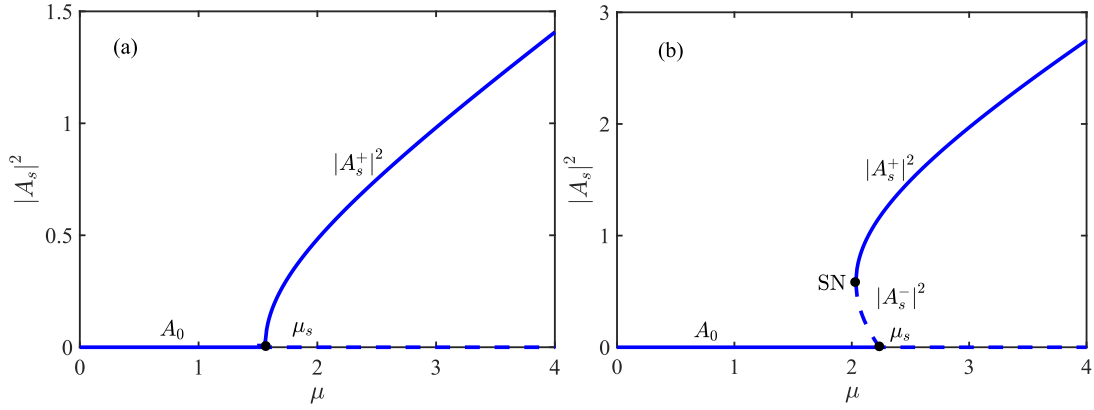


FIGURE 2.2 – Diagrammes de bifurcation montrant les solutions homogènes  $|A^+|^2$ ,  $|A^-|^2$  et  $A_0$  en fonction du paramètre de pompage  $\mu$ . a) Pour  $\Delta_1 = 0.5$  et  $\Delta_2 = 1$ , montrant une bifurcation supercritique à  $\mu = \mu_s$  où la solution triviale  $A_0$  perd sa stabilité au profit de la solution  $|A^+|^2$ . b) Pour  $\Delta_1 = 1.5$  et  $\Delta_2 = 3$ , révélant une bifurcation sous-critique. la second instabilité se produit à  $\mu = \mu_t$  et correspond à la bifurcation de type point selle (SN) où les deux solutions  $|A^+|^2$  et  $|A^-|^2$  se rejoignent. Dans les deux cas, la solution triviale  $A_0$  est stable pour  $\mu < \mu_s$  et devient instable pour  $\mu > \mu_s$ , où  $\mu_s$  représente le seuil de la bifurcation.

### 2.3.2 Solution soliton

Après avoir présenté les solutions homogènes de l'équation (2.11) et les dynamiques associées, nous nous intéressons maintenant à un autre type de solutions : celles sous forme de soliton. Ces solutions apparaissent dans des régimes de paramètres différents, où elles offrent une dynamique non-linéaire distincte de celle des solutions homogènes. Nous allons montrer numériquement l'existence de ces solitons, leur stabilité, ainsi que les régions de paramètres où elles existent. La figure 2.3(a) montre que les simulations de l'équation (2.11) présentent une solution sous forme soliton représentée en rouge et la pompe associée en bleu. La propagation du soliton au cours du temps est représentée dans la Figure 2.3(b), où on remarque que le soliton fait une dérive à cause du walk-off ( $d$ ). Cette dérive, souvent appelée "drift" du soliton par rapport au référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe à  $\omega_0$  est due au profil temporel asymétrique du soliton et de la pompe. Pour  $d > 0$  le soliton a une vitesse de groupe plus élevée que le référentiel en raison d'une amplification plus efficace du front du soliton par rapport à sa queue. En revanche, si  $d < 0$ , le soliton se déplace plus lentement que le référentiel [84].

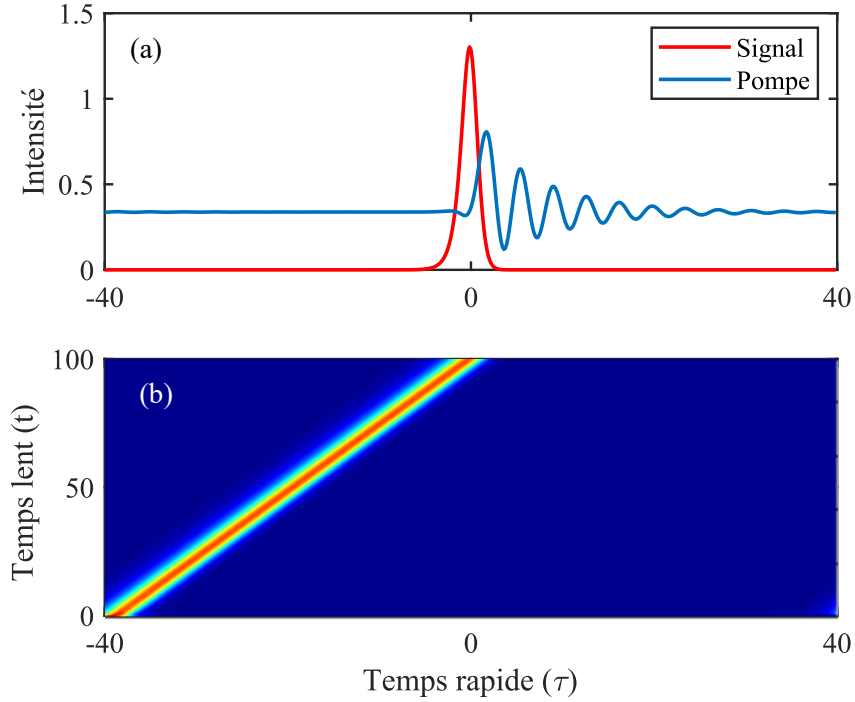


FIGURE 2.3 – a) Intensité du signal (rouge) et de la pompe (bleu). b) propagation du soliton au cours du temps. Les paramètres utilisés :  $\Delta_1 = 1.3$ ,  $\Delta_2 = 12$ ,  $d = 5$ ,  $\rho = 8$  et  $\mu = 1.16$ .

Le domaine d'existence des solitons est principalement déterminé en fonction du detuning ( $\Delta_1$ ). Ici nous allons comparer les branches du soliton en fonction du detuning à la fois pour l'équation PDNLS et pour l'équation (2.11). Pour cela, nous analyserons la variation de l'amplitude des solitons en fonction du detuning dans les deux cas, afin de mieux comprendre l'impact du terme de convolution sur la dynamique et les propriétés des solitons. La figure 2.4 illustre les branches des solutions solitoniques obtenues à partir de l'équation PDNLSE et de l'équation (2.11), en fonction du detuning  $\Delta_1$ . La courbe bleue correspond à la solution analytique de l'équation PDNLSE, donnée par  $\beta = \sqrt{\Delta_1 + \sqrt{\mu^2 - 1}}$  [106, 109, 110]. Cette branche montre une croissance continue de l'amplitude du soliton  $\beta$  avec  $\Delta_1$ , sans limite supérieure apparente, suggérant que dans ce cas, le domaine d'existence des solitons est largement étendu. En revanche, la courbe rouge représente les solutions solitoniques obtenues numériquement pour l'équation PDNLSE incluant le terme de convolution instantané. Cette branche est limitée en amplitude par l'effet de déplétion de la pompe, directement lié au terme de convolution. Contrairement à la branche analytique, elle s'effondre au-delà d'un certain seuil de  $\Delta_1$ , mettant en évidence l'impact significatif de la déplétion sur la région d'existence des solitons. Ce résultat illustre clairement comment l'introduction du terme de convolution modifie non seulement les propriétés des solutions solitoniques, mais aussi leurs plages de stabilité et d'existence. Ces observations soulignent l'importance d'étudier plus en détail l'impact du terme de déplétion sur la dynamique du soliton. Une telle analyse permettrait de mieux comprendre les mécanismes physiques sous-jacents ainsi que l'interaction du soliton avec la pompe.

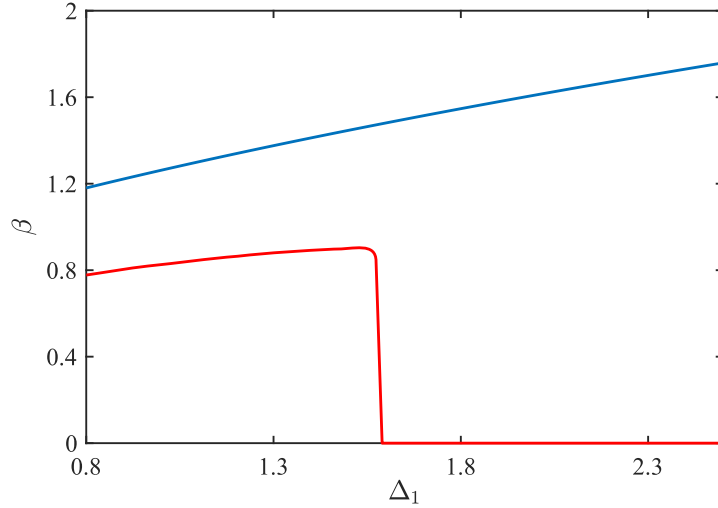


FIGURE 2.4 – Branches des solitons en fonction du detuning  $\Delta_1$ . La courbe bleue représente la branche analytique de l'équation PDNLSE, qui croît indéfiniment avec  $\Delta_1$ . La courbe rouge correspond à la branche obtenue par simulation numérique de l'équation PDNLSE avec le terme de convolution. Cette branche est limitée en amplitude par l'effet de déplétion de la pompe induit par le terme de convolution.

### 2.3.3 Impact de la déplétion sur le soliton

Dans cette sous-section, nous analyserons comment la déplétion de la pompe, représentée par le terme de convolution, influence le domaine d'existence de soliton. Nous examinerons notamment les modifications de son amplitude, et son domaine d'existence en fonction des paramètres du système. La déplétion de la pompe, introduite par le terme de convolution, impose une limitation fondamentale de la région d'existence de soliton. Cette limitation se manifeste par l'existence d'une valeur maximale de detuning  $\Delta_{1max}$  (voir figure 2.4), au-delà de laquelle le soliton ne peut plus se maintenir. Physiquement, cette contrainte résulte du fait que le soliton puise son énergie dans le champ de pompe, c'est à dire la reconversion vers la pompe par le processus de la génération de seconde harmonique. Lorsque le detuning  $\Delta_1$  augmente, l'énergie nécessaire pour soutenir le soliton croît également. Cependant, si cette énergie devient comparable à celle disponible dans le champ de pompe, la déplétion induite devient suffisamment importante pour empêcher l'équilibre énergétique requis pour maintenir le soliton.

La figure 2.5 met en évidence les propriétés du terme de convolution  $A^2 \otimes J(\tau)$ , qui traduit l'effet de la déplétion de la pompe, ainsi que celles de la fonction de réponse non-linéaire  $J(\Omega)$ , présentant une forme lorentzienne. Le panel (a) illustre la partie réelle de  $J(\Omega)$ , qui est associée à l'effet d'absorption à deux photons [83, 97], représentant les pertes énergétiques dans le système. Le panel (b) montre la partie imaginaire de  $J(\Omega)$ , reflétant l'effet Kerr effectif [83, 97]. Les panels (c) et (d) présentent respectivement les parties réelle et imaginaire du terme de convolution.

Ce phénomène traduit un transfert d'énergie inefficace entre la pompe et le soliton à des valeurs élevées de  $\Delta_1$ , où la pompe ne peut plus compenser les pertes dues à la déplétion. Par conséquent, la dynamique du système est fortement modifiée, et le soliton disparaît au-delà de  $\Delta_{1max}$ . Cette limitation met en évidence le rôle crucial de la déplétion dans la stabilisation de soliton.

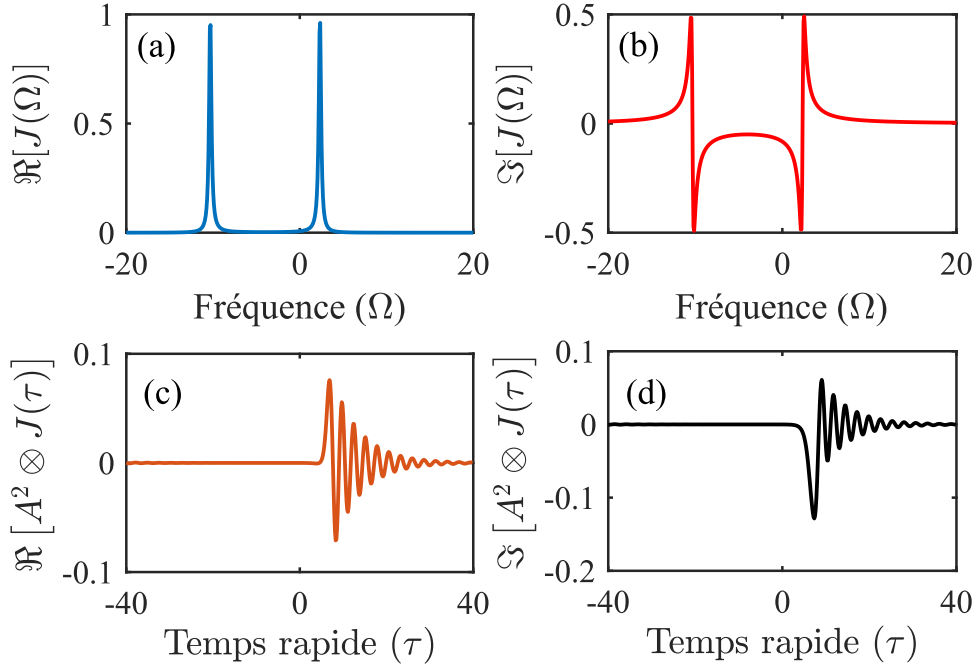


FIGURE 2.5 – a) Partie réelle de la fonction de réponse non-linéaire  $J(\Omega)$ . b) Partie imaginaire de  $J(\Omega)$ . c) Partie réelle du terme de convolution. d) partie imaginaire du terme de convolution

## 2.4 Effet du walk-off sur le soliton

Dans cette section, nous étudierons analytiquement l'impact de la déplétion de la pompe sur le soliton en utilisant la méthode variationnelle. Cette méthode, largement utilisée dans divers domaines de la physique, permet de simplifier des systèmes complexes en réduisant les équations à un ensemble d'équations d'évolution pour des paramètres clés. Elle a prouvé son efficacité pour analyser les structures localisées, comme les solitons [111, 112], en tenant compte des contributions essentielles des effets non-linéaires et dispersifs.

### 2.4.1 Méthode variationnelle

La méthode variationnelle est une approche mathématique essentielle, conçue pour résoudre des problèmes dans divers contextes [113, 114, 115], initialement développée pour traiter des problèmes en mécanique classique. Dès 1983, cette méthode a été utilisée pour aborder le problème de la propagation des impulsions au sein des fibres optiques [111]. Avant de commencer notre étude, nous allons effectuer des approximations afin de simplifier l'analyse théorique. Nous supposons que la durée du soliton est très courte par rapport aux autres échelles temporelles du système. Dans cette approximation, le soliton peut être estimé par une fonction delta de Dirac  $\delta(\tau)$ , ce qui permet de réécrire le terme de convolution (pour  $d > 0$ ) sous la forme simplifiée suivante :

$$A^2 \otimes J(\tau) \approx 4\beta e^{2i\phi} \delta(\tau) \otimes J(\tau), \quad (2.20)$$

où  $\beta$  et  $\phi$  représentent respectivement l'amplitude et la phase du soliton. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, nous obtenons une expression approchée de  $J(\tau)$  :

$$J(\tau) \approx \frac{1}{4d} e^{(-\Lambda + i\omega_1)\tau} H(\tau), \quad (2.21)$$

où  $H(\tau)$  représente la fonction Heaviside, et  $\omega_1$  est la fréquence d'oscillation de la pompe correspondant au pic plus proche de zéro dans la figure 2.5(a), et  $\Lambda$  représente le coefficient de décroissance. Nous pouvons donc écrire le terme de convolution sous la forme suivante :

$$A^2 \otimes J(\tau) \approx \frac{\beta}{d} e^{(-\Lambda + i\omega_1)\tau + 2i\phi} H(\tau). \quad (2.22)$$

Nous allons maintenant déterminer les expressions de  $\omega_1$  et  $\Lambda$ . Le dernier terme dans l'équation (2.11) qui décrit la déplétion de la pompe est caractérisé par la fonction de réponse non-linéaire :

$$J(\Omega) = \frac{1}{1 + i\Delta_2 - id\Omega - i\eta_2\Omega^2}. \quad (2.23)$$

Nous pouvons écrire  $J(\Omega)$  sous la forme :

$$J(\Omega) = \frac{1}{1 + (\Delta_2 - d\Omega - \eta_2\Omega^2)^2} + i \frac{\Delta_2 - d\Omega - \eta_2\Omega^2}{1 + (\Delta_2 - d\Omega - \eta_2\Omega^2)^2}. \quad (2.24)$$

La fréquence  $\omega_1$  qui correspond à la fréquence d'oscillation de la pompe est déterminée en résolvant l'équation du second degré suivante :

$$\Delta_2 - d\Omega - \eta_2\Omega^2 = 0. \quad (2.25)$$

Nous avons deux solutions  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La fréquence associée à l'oscillation de la pompe est la fréquence  $\omega_1$  qui est proche de zéro ( $\Omega = 0$ ) (voir figure 2.5(a)),

$$\omega_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4\eta_2\Delta_2}}{2\eta_2}. \quad (2.26)$$

Le coefficient de décroissance  $\Lambda$  dans l'expression approchée du terme de convolution (2.22) représente la largeur à mi-hauteur de la partie réelle de  $J(\Omega)$ . Pour déterminer  $\Lambda$ , nous devons résoudre l'équation :

$$\frac{1}{1 + (\Delta_2 - d\Omega - \eta_2\Omega^2)^2} = \frac{\max(\Re(J(\Omega)))}{2} \quad (2.27)$$

Nous avons  $\max(\Re(J(\Omega))) = 1$ , les solutions de l'équation (2.27) sont :

$$\omega_{1+} = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4\eta_2(\Delta_2 + 1)}}{2\eta_2} \quad (2.28)$$

$$\omega_{1-} = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4\eta_2(\Delta_2 - 1)}}{2\eta_2}. \quad (2.29)$$

La largeur à mi-hauteur est donnée alors par :

$$\Lambda = \omega_{1+} - \omega_{1-} = \frac{\sqrt{d^2 + 4\eta_2(\Delta_2 + 1)} - \sqrt{d^2 + 4\eta_2(\Delta_2 - 1)}}{2\eta_2}. \quad (2.30)$$

Après avoir établi une expression approchée pour le terme de convolution en supposant que le soliton peut être représenté par une fonction delta de Dirac  $\delta(\tau)$ , nous pouvons écrire une expression approchée de la pompe sous la forme :

$$B = \frac{\mu}{\rho_1} + i \frac{\beta \rho_2}{d} e^{(-\Lambda + i\omega_1)\tau + 2i\phi_1} H(\tau). \quad (2.31)$$

Cette expression simplifiée réduira la complexité mathématique tout en capturant les effets physiques essentiels, et servira de base pour analyser analytiquement les effets de la déplétion de la pompe et du walk-off sur la stabilité et la dynamique du soliton. La figure 2.6(a) illustre les

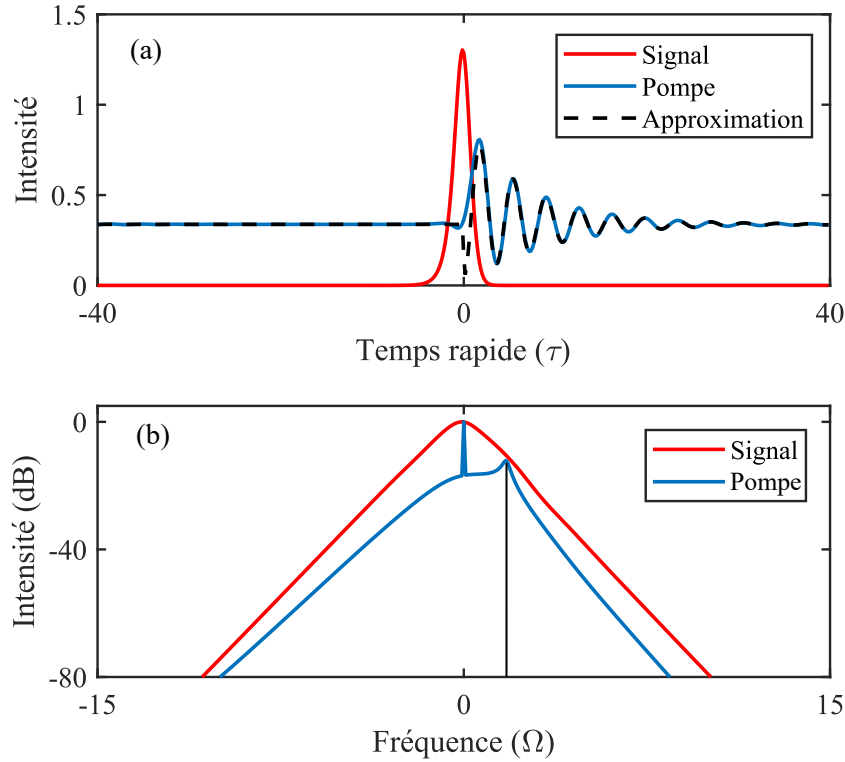


FIGURE 2.6 – a) Illustre la puissance des champs de signal et de pompe, avec la courbe en pointillés représentant l'Ansatz de la pompe (Eq (2.31)). b) montre le spectre de puissance des champs de signal et de pompe.

profils des deux champs : la pompe (en bleu) et le signal (en rouge), ainsi que la pompe estimée analytiquement (courbe noire en pointillés). La concordance observée entre la pompe obtenue par simulation et son estimation analytique confirme la validité de nos approximations. La figure 2.6(b) représente les spectres de puissance du signal et de la pompe. Le spectre de la pompe est caractérisé par deux pics distincts : le pic principal à  $\Omega = 0$ , qui correspond au background de la pompe, tandis que le second pic apparaît à la fréquence d'oscillation  $\omega_1$ , en accord avec notre prédiction analytique.

Pour valider l'approximation analytique du profil de la pompe, nous avons extrait les para-

mètres  $\beta$  et  $\phi$  à partir de la simulation numérique :  $\beta$  est défini comme la valeur maximale du module du champ  $A$ , normalisée par  $\sqrt{2}$ , soit  $\beta = \max(|A|)/\sqrt{2}$ , tandis que  $\phi$  correspond à la phase de  $A$  au point où ce maximum est atteint.

Avant de commencer l'application de la méthode variationnelle à l'équation(2.11), nous remplaçons le terme de convolution par l'expression approchée (2.22), nous obtenons :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1 \partial_{\tau\tau}]A + i|A|^2 A + \mu A^* - \frac{\beta\rho}{d} e^{(-\Lambda+i\omega_1)\tau+2i\phi} H(\tau)A^*. \quad (2.32)$$

La densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  correspondant à l'équation (2.32) s'exprime comme suit [84, 112, 116] :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(A^* \partial_t A - A \partial_t A^*) - \eta_1 |\partial_\tau A|^2 + \frac{|A|^4}{2} - \Delta_1 |A|^2. \quad (2.33)$$

Et les autres termes, la dissipation, le pompage et le terme de convolution sont regroupés dans le terme  $R$  :

$$R = -iA + i\mu A^* - \frac{\beta}{d} e^{-(\Lambda-i\omega_1)\tau+2i\phi} H(\tau)A^*. \quad (2.34)$$

Nous utilisons un ansatz de la forme suivante pour le soliton [84, 116]

$$A = \sqrt{2}\beta \operatorname{sech}(\beta(\tau - \tau_0)) e^{i(\phi - \Omega(\tau - \tau_0))}. \quad (2.35)$$

où  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $\tau_0$  et  $\Omega$  représentent respectivement l'amplitude, la phase, la position et la fréquence du soliton, appelées coordonnées collectives. En injectant l'ansatz (2.35) dans l'expression de la densité lagrangienne, nous procédons ensuite au calcul explicite de chacun des termes qui la composent. Pour ce faire, nous commençons par déterminer l'expression de la dérivée temporelle du champ  $A$  par rapport au temps lent  $t$  :

$$\partial_t A = \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \dot{\beta} + \left( \frac{\partial A}{\partial \phi_2} \right) \dot{\phi}_2 + \left( \frac{\partial A}{\partial \tau_0} \right) \dot{\tau}_0 + \left( \frac{\partial A}{\partial \Omega} \right) \dot{\Omega} \quad (2.36)$$

Où

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = A (\beta^{-1} - (\tau - \tau_0) \tanh(\beta(\tau - \tau_0))) \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \phi_2} = iA \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_0} = -i(\tau - \tau_0)A \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = A (i\Omega + \beta \tanh(\beta(\tau - \tau_0))) \quad (2.40)$$

Maintenant nous allons intégrer chaque terme de la densité de Lagrange par rapport au temps rapide  $\tau$  en utilisant la relation  $L = \int \mathcal{L} d\tau$ , :

$$\int \frac{i}{2} (A^* \partial_t A - A \partial_t A^*) d\tau = -(\dot{\phi}_2 + \Omega \dot{\tau}_0) \int |A|^2 d\tau = -4\beta(\dot{\phi}_2 + \Omega \dot{\tau}_0) \quad (2.41)$$

$$\eta_1 \int |\partial_\tau A|^2 d\tau = 4 \left( \beta \Omega^2 + \frac{\beta}{3} \right) \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{2} \int |A|^4 d\tau = \frac{8}{3} \beta^3 \quad (2.43)$$

$$-\Delta_1 \int |A|^2 d\tau = -4\beta\Delta_1 \quad (2.44)$$

Après avoir évalué successivement chacune des intégrales constituant la densité lagrangienne, nous les regroupons afin d'obtenir l'expression complète du Lagrangien, qui s'écrit alors sous la forme suivante :

$$L = -4\beta(\dot{\phi} + \Omega\dot{\tau}_0) - 4\eta_1\beta\Omega + \frac{4}{3}\beta^3 - 4\Delta_1\beta. \quad (2.45)$$

## 2.4.2 Les équations du mouvement

Nous pouvons utiliser la densité lagrangienne pour retrouver l'évolution au cours du temps lent des coordonnées collectives du soliton. Les équations d'Euler-Lagrange sont données par [112, 116] :

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \int (R^* \partial_{r_i} A + R \partial_{r_i} A^*) d\tau. \quad (2.46)$$

où  $r_i$  représente diverses coordonnées collectives qui décrivent l'impulsion, et le symbole prime indique une dérivée par rapport au temps  $t$ . À partir de cette équation de Lagrange, nous allons maintenant déterminer les équations dynamiques pour chacune des coordonnées collectives  $r_i$  du soliton. Supposons que la fréquence ne change pas au cours du temps  $t$  ( $\Omega' = \Omega = 0$ ). Dans cette hypothèse, calculons le membre de gauche de l'équation d'Euler-Lagrange (2.46) pour chaque coordonnée collective. Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 4\dot{\beta}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = -4 \left( \dot{\phi} - \beta^2 + \Delta_1 \right), \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} \right) = 4\beta \dot{\tau}_0. \quad (2.49)$$

Afin d'évaluer les termes de droite de l'équation d'Euler-Lagrange, nous négligeons l'effet de la fonction de Heaviside  $H(\tau)$ . Cette approximation permet de simplifier l'expression du terme perturbatif et de rendre les intégrales analytiquement calculables. Après calcul, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (R^* \partial_{\phi} A + R \partial_{\phi} A^*) d\tau = -8\beta + 8\mu \beta \cos(2\phi) + 4\frac{\rho}{d} \Re[X \operatorname{csch}(X)], \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (R^* \partial_{\beta} A + R \partial_{\beta} A^*) d\tau = 4\mu \sin(2\phi) - 16\frac{\rho}{d} \Im[X \operatorname{csch}(X)] - 8\frac{\rho}{d} \Im[X^2 \coth(X) \operatorname{csch}(X)], \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (R^* \partial_{\tau_0} A + R \partial_{\tau_0} A^*) d\tau = 4\frac{\rho\pi}{d} \Im[(-1 + \coth(X)) \operatorname{csch}(X)]. \quad (3)$$

En réunissant les deux membres de l'équation d'Euler-Lagrange pour chacune des coordonnées collectives ( $\beta$ ,  $\phi$  et  $\tau_0$ ), nous obtenons un système de trois équations différentielles décrivant

l'évolution temporelle de ces paramètres. Ces équations s'écrivent :

$$\dot{\beta} = 2\beta[-1 + \mu \cos(2\phi) + \frac{\rho}{2d} \Re(X \operatorname{csch}(X))] \quad (2.50)$$

$$\dot{\phi} = \beta^2 - \Delta_1 - \mu \sin(2\phi) + \frac{4\rho}{d} \Im(X \operatorname{csch}(X)) + \frac{2\rho}{d} \Im[X^2 \operatorname{coth}(X) \operatorname{csch}(X)] \quad (2.51)$$

$$\dot{\tau}_0 = \frac{\rho\pi}{d} \Im[(-1 + \operatorname{coth}(X)) \operatorname{csch}(X)]. \quad (2.52)$$

où  $X = \frac{(\omega_1 - i\Lambda)\pi}{2\beta}$ , et la fonction  $\operatorname{csch}(X)$  représente la co-sécante hyperbolique qui est définie par :  $\operatorname{csch}(X) = \frac{1}{\sinh(X)}$ , et  $\operatorname{coth}(X) = \frac{\cosh(X)}{\sinh(X)}$ .

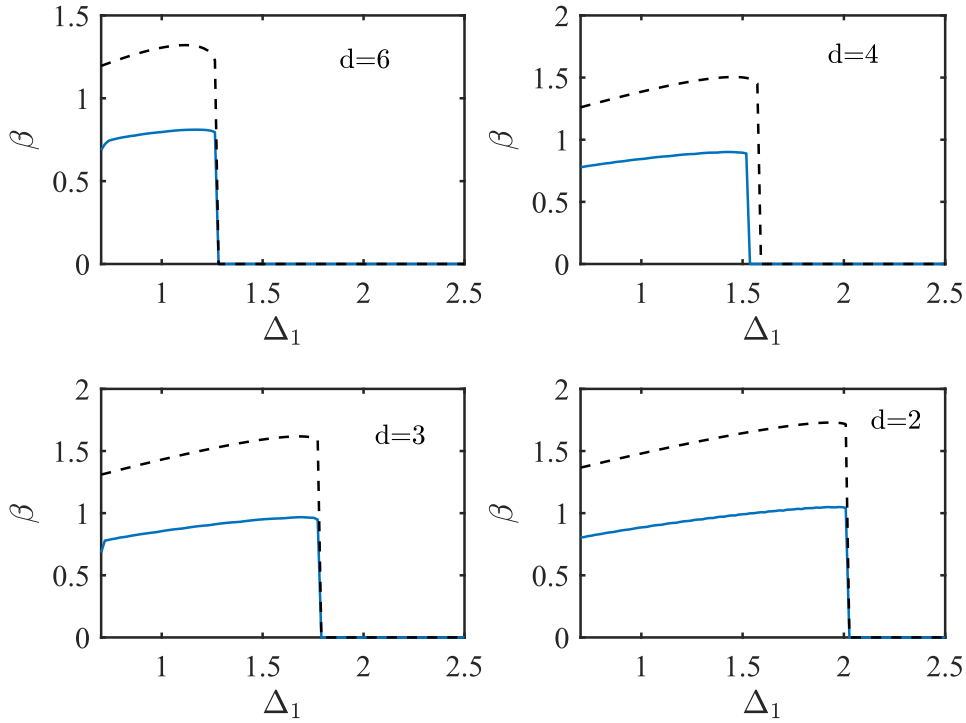


FIGURE 2.7 – Amplitude du soliton  $\beta$  en fonction du detuning  $\Delta_1$  pour différentes valeurs du walk-off. Les lignes continues représentent les résultats de simulations des équations (2.6) et (2.7), tandis que les lignes en pointillés correspondent aux prédictions analytiques. a)  $d = 6$ . b)  $d = 4$ . c)  $d = 3$ . d)  $d = 2$ .

La figure 2.7 illustre l'évolution de l'amplitude  $\beta$  du soliton en fonction du detuning  $\Delta_1$  pour des valeurs distinctes du walk-off  $d$ . Les résultats montrent une tendance claire : l'augmentation du walk-off conduit non seulement à une diminution de l'amplitude du soliton, mais réduit également sa plage d'existence en fonction du detuning. Les courbes issues des simulations numériques du modèle complet décrit par les équations (2.6) et (2.7) (lignes continues) présentent un bon accord avec les prédictions analytiques (lignes pointillées) concernant la plage d'existence du soliton. En revanche, une différence notable apparaît au niveau de la valeur prédite de l'amplitude. Cette divergence s'explique par la valeur élevée du coefficient  $\rho$ , qui amplifie fortement le terme perturbatif dans le modèle. Dans ce régime, la méthode variationnelle de Lagrange perd en précision, ce qui limite sa capacité à reproduire quantitativement l'amplitude du soliton, bien qu'elle reste fiable pour capturer correctement la fenêtre d'existence du soliton.

En revanche, dans le cas d'une cavité simplement résonante, où seul le signal résonne dans la cavité à la fréquence ( $\omega_0$ )), il a été précédemment démontré [84] que l'augmentation du walk-off conduit à une augmentation de l'amplitude du soliton ainsi qu'à un élargissement de son domaine d'existence. L'augmentation du walk-off est traduit par l'augmentation de la zone d'interaction entre le signal et la pompe, ce qui permet plus de conversion d'énergie de la pompe vers le signal. Ce comportement est inversé dans notre cas (cavité doublement résonante). Dans le cas d'une cavité doublement résonante, l'augmentation du walk-off modifie la fréquence des oscillations de la pompe résonante. Ce changement impacte l'interaction entre la pompe et le soliton, réduisant ainsi l'efficacité du transfert d'énergie vers le soliton. Cela entraîne une diminution de l'amplitude du soliton et un rétrécissement de son domaine d'existence.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la génération et la dynamique des solitons dans un oscillateur optique paramétrique dégénéré (OPO) doublement résonant, combinant des non-linéarités d'ordre 2 et d'ordre 3. Nous avons introduit le modèle théorique décrivant cette cavité, en réduisant les équations couplées des champs signal et pompe à une seule équation intégrant un terme de convolution.

L'analyse a révélé que ce terme de convolution joue un rôle central dans la formation et la stabilité des solitons, en influençant à la fois leur amplitude et leur domaine d'existence. De plus, nous avons étudié l'effet du walk-off sur le soliton. Grâce à une approche combinant simulations numériques et méthode variationnelle, nous avons montré que l'augmentation du walk-off entraîne une réduction de l'amplitude des solitons ainsi qu'un rétrécissement de leur domaine d'existence.

Enfin, une comparaison avec le cas d'une cavité simplement résonante a mis en évidence un comportement opposé. Dans notre cas doublement résonant, une augmentation du walk-off entraîne une diminution de l'amplitude et du domaine d'existence du soliton. En revanche, dans une cavité simplement résonante, le walk-off amplifie l'amplitude et élargit le domaine d'existence des solitons, grâce à une interaction entre la pompe et le soliton.



# 3. Etat lié de deux solitons paramétriques

## 3.1 État lié de solitons dans un oscillateur paramétrique doublement résonant avec une non linéarité Kerr

### 3.1.1 Introduction

Ce chapitre est divisé en deux parties distinctes, chacune traitant de l'interaction et de la formation d'états liés entre les solitons paramétriques dans différentes configurations. Dans la première configuration, la cavité contient une non-linéarité Kerr, en plus de la non-linéarité d'ordre 2 associée au processus d'amplification paramétrique. Ce processus permet de générer une onde de signal à une fréquence  $\omega_0$  à partir d'une onde de pompe de fréquence  $2\omega_0$ . La nature doublement résonante de la cavité, permettant le confinement simultané des champs de la pompe et du signal, crée un environnement propice à leur interaction. Cette double non-linéarité induit une dynamique complexe, où le signal et la pompe subissent des variations de l'indice de réfraction via la modulation de phase auto-induite (SPM) ou la modulation de phase croisée (XPM), facilitant ainsi la formation de solitons. L'interaction entre ces solitons et la pompe dans la cavité peut donner lieu à la formation d'états liés, caractérisés par des profils stationnaires stables.

Dans la seconde configuration, la non-linéarité Kerr est absente, ce qui simplifie le modèle en se limitant à la non-linéarité d'ordre 2, caractéristique d'un oscillateur optique paramétrique dégénéré et doublement résonant aux fréquences du signal  $\omega_0$  et de la pompe  $2\omega_0$ . Cette configuration favorise la génération de solitons purement quadratiques, dont les propriétés dépendent exclusivement des interactions paramétriques. Les interactions entre la pompe et les solitons dans ce cadre peuvent conduire à la formation d'états liés, offrant ainsi une plateforme idéale pour explorer les dynamiques des solitons dans un régime gouverné uniquement par la non-linéarité quadratique.

Dans la première partie, nous nous concentrons sur l'étude des états liés entre deux solitons paramétriques dans un oscillateur paramétrique optique doublement résonant en présence de la non-linéarité Kerr. Nous présenterons l'interaction entre deux solitons de cavité, décrits par l'équation de Lugiato-Lefever, ainsi que l'interaction entre deux solitons décrits par l'équation de Schrödinger non-linéaire paramétrique (PDNLSE), en mettant en évidence les différents mécanismes de formation des états liés. Ensuite, nous appliquerons la méthode variationnelle pour

étudier ces états liés dans notre système, en tenant compte du terme de déplétion de la pompe, qui est considéré comme un terme de perturbation pour l'équation PDNLSE.

Dans la deuxième partie, nous examinerons les états liés de deux solitons dans un DOPO doublement résonnant sans l'effet Kerr. Nous démontrerons que le modèle complet décrivant la dynamique du DOPO doublement résonnant peut être réduit à une seule équation. Nous appliquerons à nouveau la méthode variationnelle à cette équation pour analyser ces états liés.

### 3.1.2 État lié de deux solitons

Comme nous avons vu dans le chapitre 1, le phénomène d'auto-organisation peut donner lieu à l'apparition de structures localisées, telles que les solitons de cavité optique. La présence de deux ou plusieurs solitons dans la cavité peut entraîner la formation d'états liés (bound states), résultant du verrouillage causé par l'interaction entre les queues des solitons adjacents [73, 74, 79]. La première observation expérimentale d'un état lié entre deux solitons de cavité temporel a été réalisée en 2014 par Jang et ses collaborateurs [117]. L'équation de Lugiato-Lefever (LLE), qui décrit les solitons de cavité temporels, peut être considérée comme une équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) perturbée, avec des termes de dissipation et le forçage externe [79, 118]. Toutes les études réalisées ont montré que les queues oscillatoires sont fortement amorties, sauf lorsque le detuning est inférieur à la largeur d'une résonance de la cavité [119]. Dans ce cas, des états liés peuvent se former, mais cela n'est possible que pour les solitons de cavité spatiaux, où la diffraction intervient, comme démontré dans l'étude [119]. Barashenkov et al. [78] ont montré que des états liés peuvent apparaître entre deux solitons décrits par l'équation de Schrödinger non-linéaire perturbée. Ces états sont prédits en se déplaçant dans le diagramme de bifurcation défini par le couple de paramètres  $(\gamma, h)$ , où  $\gamma$  représente les pertes et  $h$  le forçage externe. Dans une région où  $\gamma > 1/2$  une perturbation du soliton induit l'apparition d'une queue oscillante, ce qui permet la formation d'un état lié entre les deux solitons.

La figure. 3.1 montre le mécanisme de liaison des solitons qui repose sur l'interaction entre leurs queues oscillatoires. Lorsqu'une perturbation excite une onde linéaire dans le spectre du soliton, cette interaction se manifeste dans le domaine temporel sous forme d'une queue oscillatoire dans l'enveloppe du soliton [79]. Lorsque les queues oscillatoires des solitons voisins se chevauchent, des oscillations apparaissent dans le potentiel d'interaction effectif entre eux. Chaque période de ces oscillations crée un puits de potentiel favorable à la formation d'un état lié, caractérisé par une séparation spécifique entre les solitons [79, 120]. Il est largement admis que diverses perturbations peuvent être appliquées pour exciter le spectre du soliton décrit par l'équation de Lugiato-Lefever. Parmi ces perturbations figurent la dispersion d'ordre supérieur [121], la bifurcation d'Andronov-Hopf du soliton [122] et les effets acoustiques [118], ce qui conduit à l'apparition de solitons de cavité dotés de queues oscillatoires étendues.

L'interaction entre les solitons paramétriques a été explorée dès les années 1990 dans le contexte de l'oscillateur paramétrique optique [123]. Cette étude a mis en évidence que les solitons peuvent se repousser, se fusionner ou bien former un état lié. Ce dernier phénomène se produit lorsque la queue du soliton présente une oscillation due à une perturbation, résultant du passage du soliton dans la zone de bifurcation de Hopf. Des études théoriques et expérimentales [80, 81] ont ensuite été menées dans le cadre de l'étude d'un fluide newtonien, également décrit par

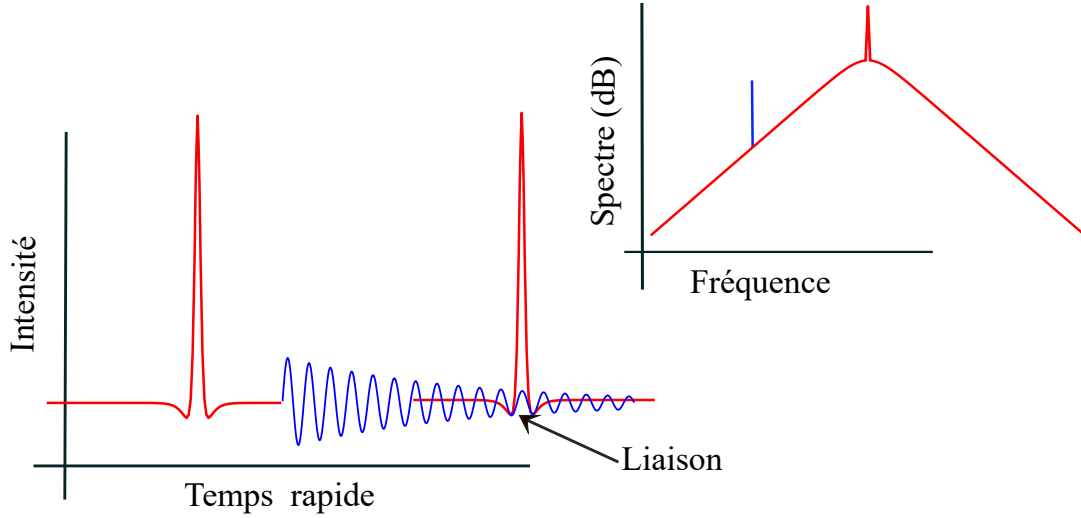


FIGURE 3.1 – Illustration schématique du mécanisme universel de liaison temporelle des solitons de cavité (CS) [79]. Une perturbation entraîne l'apparition d'une bande latérale dans le spectre du soliton (flèche bleue). Cette bande latérale est associée à une queue oscillatoire étendue dans le profil d'intensité temporelle. Un soliton de cavité adjacent est piégé par les oscillations de cette queue.

l'équation PDNLSE. Ces travaux ont montré que l'interaction entre deux solitons dépend de leur phase relative. Lorsque les solitons sont en phase, ils s'attirent mutuellement et la dynamique du système conduit à la fusion en un seul soliton. En revanche, s'ils sont en opposition de phase, les solitons se repoussent et s'éloignent progressivement selon une loi logarithmique.

La prochaine section sera dédiée à l'étude d'une cavité passive contenant un milieu non-linéaire présentant deux types de non-linéarités : la non-linéarité du second ordre ( $\chi^{(2)}$ ), associée au processus d'amplification paramétrique, et celle du troisième ordre ( $\chi^{(3)}$ ), correspondant à l'effet Kerr.

Les paramètres physiques utilisés sont :  $L = 2 \text{ mm}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta_1 = \theta_2 = 2.10^{-3}$ ,  $k_1'' = -55.5 \text{ fs}^2/\text{mm}$  et  $k_2'' = -k_1''/2$ ,  $\Delta k' = 31.6 \text{ fs}/\text{mm}$ ,  $\kappa = 2.45 \text{ W}^{-1/2}\text{m}^{-1}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_{12} = 0.75 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $\gamma_2 = \gamma_{21} = 1.5 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $\text{FSR} = 75 \text{ GHz}$  et  $|B_{\text{in}}|^2 = 42 \text{ mW}$

### 3.1.3 Les oscillations de la pompe

Dans cette sous-section, nous allons expliquer physiquement les oscillations qui interviennent dans le profil de la pompe pour voir leur impact sur le soliton. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent le terme instantané décrit la reconversion vers la pompe par le processus de la génération de seconde harmonique, ce qui correspond à la déplétion de la pompe. Les conditions de résonance autour de la pompe, décrites par  $J(\Omega)$ , jouent un rôle important, car la reconversion se fait à une large bande de fréquences. Selon les paramètres, et notamment  $\Delta_2$ ,  $d$  et  $\eta_2$ , la fréquence de résonance peut être significativement décalée par rapport à la fréquence de la pompe  $\Omega = 0$  (prise comme référence). La fréquence qui entre en résonance est excitée de manière efficace, et le profil temporel de la pompe présente alors des oscillations (voir figure 2.3). Une conséquence intéressante de la queue oscillante dans le profil de la pompe est que deux solitons peuvent se verrouiller en raison du chevauchement de leurs profils de déplétion

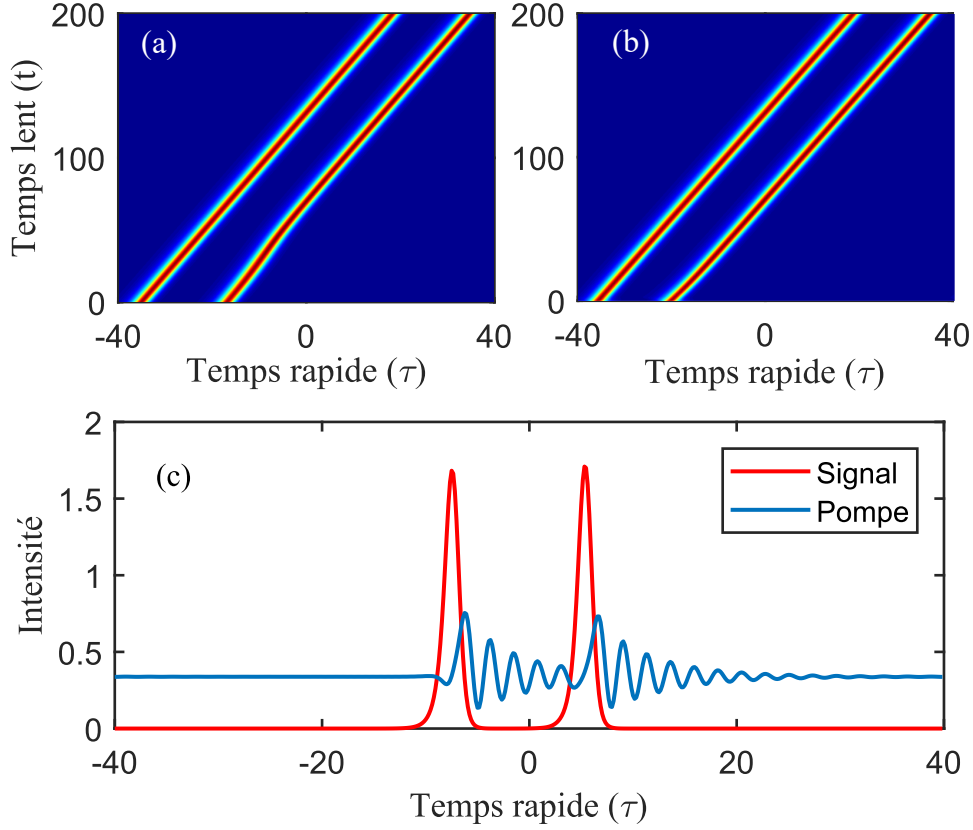


FIGURE 3.2 – a) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une attraction entre eux suivie d’une stabilisation à une distance fixe . b) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une répulsion entre eux avant de se stabiliser à une distance .c) la puissance intra-cavité du signal et de la pompe à  $t=100$

respectifs. Un exemple de formation d’un tel état lié est montré dans la figure 3.2. Les solitons s’attirent (voir figure 3.2(a)) lorsque la distance de séparation initiale est supérieure à la distance de séparation d’équilibre, et se repoussent (voir figure 3.2(b)) lorsque la distance de séparation initiale est inférieure à la distance de séparation d’équilibre.

Nous avons simulé le modèle complet de deux équation couplées décrivant la dynamique de la cavité à l’aide de la méthode de Runge-Kutta d’ordre 4. Nous avons vérifié que ces états liés sont robustes au bruit et peuvent se former à différentes distances, correspondant à des multiples de la période des oscillations de la pompe. Pour mieux comprendre et prédire la formation d’états liés due à la déplétion de la pompe, nous utiliserons la méthode variationnelle de Lagrange décrite dans le chapitre précédent.

### 3.1.4 La méthode variationnelle

Nous modélisons la séparation temporelle des états liés, induite par la déplétion par la déplétion, en considérant l’impact du profil de la pompe (situé à  $\tau = 0$ ) sur le soliton situé à  $\tau = \tau_0$ .

Nous appliquons maintenant la méthode lagrangienne pour déterminer les positions temporelles des solitons,  $\tau_0$ , correspondant aux états liés stables. L’analyse de l’interaction de deux solitons conduit à des intégrations analytiques particulièrement complexes. Pour éviter ces com-

plications, nous suivons la méthodologie introduite dans [124], qui permet d'obtenir directement l'expression complète de la densité lagrangienne. Ainsi, la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  correspondant à l'équation (2.32) s'exprime comme suit :

$$\mathcal{L} = \left[ \Im(A\partial_t A^*) - |\partial_\tau A|^2 + \frac{|A|^4}{2} - \Delta_1 |A|^2 - \mu \Im(A^2) + \frac{\beta\rho}{d} \Im(A^2 e^{i(\omega_1\tau - 2\phi_1)}) H(\tau) e^{-\Lambda\tau} \right] e^{2t}. \quad (3.1)$$

où  $\beta_1$  et  $\phi_1$  désignent respectivement l'amplitude et la phase du premier soliton, situé à gauche. Nous utilisons un ansatz de la forme suivante pour le soliton [112, 116, 125] :

$$A = \sqrt{2}\beta_2 \operatorname{sech}(\beta(\tau - \tau_0)) e^{i(\phi_2 - \Omega_2(\tau - \tau_0))}, \quad (3.2)$$

où  $\beta_2$ ,  $\phi_2$  et  $\Omega_2$  représentent respectivement l'amplitude, la phase et la fréquence du soliton situé à  $\tau = \tau_0$ . Ici, nous souhaitons nous concentrer sur la séparation temporelle ; c'est pourquoi nous considérons que l'amplitude et la phase sont fixes, et que seules la position et la fréquence varient lentement dans le temps. Nous utilisons la solution de l'équation PDNLSE décrite ci-dessus pour l'amplitude et la phase du soliton, en supposant que les deux solitons ont la même amplitude ( $\beta_1 \approx \beta_2 \approx \beta$ ). La figure 3.3 compare le profil temporel du soliton obtenu par simulation (courbe rouge) avec l'Ansatz analytique (courbe noire en pointillés). Nous ne trouvons pas un bon accord entre les deux amplitudes : le pic du soliton simulé est significativement plus faible que celui prédit par l'Ansatz. Cette différence s'explique par l'effet de déplétion de la pompe, qui est négligé dans l'approximation analytique mais pris en compte dans la simulation. Le terme de déplétion induit une perte d'énergie du soliton, ce qui diminue son amplitude maximale.

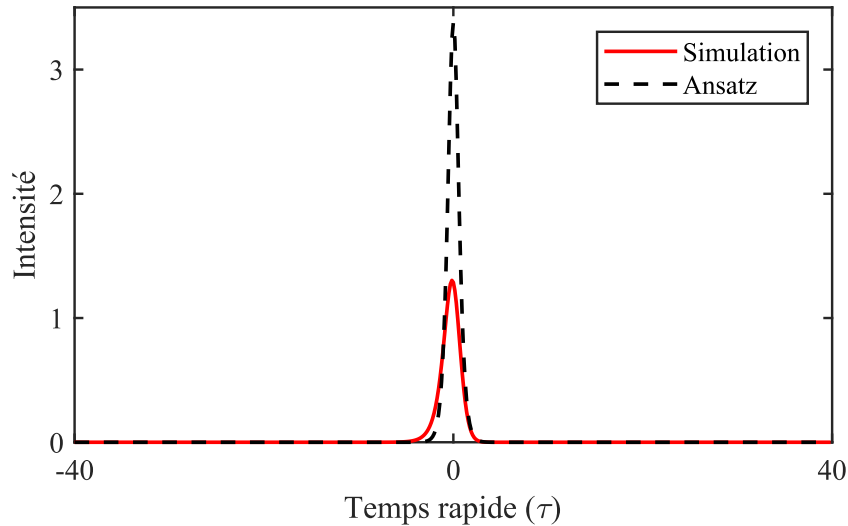


FIGURE 3.3 – Comparaison entre le soliton obtenu par simulation (courbe rouge) et l'Ansatz analytique (courbe noire en pointillés). L'accord entre les deux profils est globalement satisfaisant en ce qui concerne la forme, mais l'amplitude diffère en raison du terme de déplétion, qui est inclus dans la simulation mais omis dans l'approximation analytique.

En injectant l'ansatz dans la densité lagrangienne, en négligeant l'effet de la fonction de

Heaviside afin de simplifier le calcul, et en utilisant la relation  $L = \int \mathcal{L} d\tau$ , nous obtenons le résultat suivant :

$$L = -4[\beta\Omega_2\tau'_0 + \beta\Omega_2^2 - \frac{1}{3}\beta^3 + \Delta_1\beta + \Omega_2\pi\mu\sin(2\phi_2)\text{Csch}(Y) - \beta^2\frac{\rho}{d}\Re(i e^{-i((\omega_1-i\Lambda)\tau_0-2\phi)} X \text{Csch}(X))]e^{2t}, \quad (3.3)$$

où  $\phi = \phi_2 - \phi_1$ ,  $Y = \frac{\Omega_2\pi}{\beta}$  et  $X = \frac{(\omega_1-i\Lambda+2\Omega_2)\pi}{2\beta}$ , et  $\text{Csch}(Y)$  représente la fonction cosécante hyperbolique qui est définie par :  $\text{Csch}(Y) = \frac{1}{\text{sech}(Y)}$ .

## 3.2 Le potentiel d'interaction

Le potentiel d'interaction entre deux solitons décrit l'attraction ou la répulsion qui agit entre eux en fonction de la distance qui les sépare, et il est généralement déterminé par le terme qui décrit le chevauchement entre les queues des deux solitons [73, 78, 126]. Nous avons montré que les états liés se forment grâce à la déplétion de la pompe, représentée par le terme de convolution, qui est responsable des oscillations de la pompe. En l'absence de ce terme, aucun état lié ne se forme. Nous concluons donc que, dans notre système, le potentiel d'interaction résulte de l'interaction entre le soliton et les oscillations de la pompe, et peut être exprimé par l'intégrale du dernier terme dans la densité de Lagrange, intégrée sur le temps rapide.

$$U = - \int \frac{i}{2} \frac{\beta\rho}{d} (e^{i((\omega_1+i\Lambda)\tau-2\phi_1)} A^2 - e^{-i((\omega_1-i\Lambda)\tau-2\phi_1)} A^{*2}) H(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

D'où le potentiel vaut :

$$U = -4\beta^2\frac{\rho}{d}\Re(i e^{-i((\omega_1-i\Lambda)\tau_0-2\phi)} X \text{Csch}(X)) \quad (3.5)$$

La figure 3.4 représente le potentiel en fonction du temps rapide, il est possible de retrouver les positions des états liés stationnaires. Les minima du potentiel d'interaction indiquent les positions stables, tandis que les maxima représentent les positions instables du soliton [126].

Pour déterminer analytiquement les positions d'équilibre  $\tau_0^m$  du soliton, nous devons considérer la condition où la dérivée du potentiel par rapport à la position est nulle ( $\frac{dU}{d\tau_0} = 0$ ). En supposant que  $\Omega = 0$ , cette condition conduit à l'expression suivante des positions stationnaires :

$$\tau_0^m = \frac{1}{\omega_1} \left( 2\phi + \text{atan} \left( \frac{a}{b} \right) - m\pi \right), \quad (3.6)$$

où  $m$  est un entier,  $a = \omega_1^2 \sinh(\frac{\omega_1\pi}{2\beta})$  et  $b = 2\omega_1\Lambda \sinh(\frac{\omega_1\pi}{2\beta}) - \frac{\Lambda\pi}{2\beta} \omega_1 \cosh(\frac{\omega_1\pi}{2\beta})$ . La relation (3.6), révèle l'existence de solutions discrètes dépendant de l'entier  $m$ . Les valeurs paires de  $m$  correspondent aux positions d'équilibre instables, associées aux maxima du potentiel, tandis que les valeurs impaires de  $m$  correspondent aux positions d'équilibre stables, alignées avec les minima du potentiel. Le tableau 3.1 montre les différentes positions d'équilibre trouvées à l'aide de la relation (3.6) :

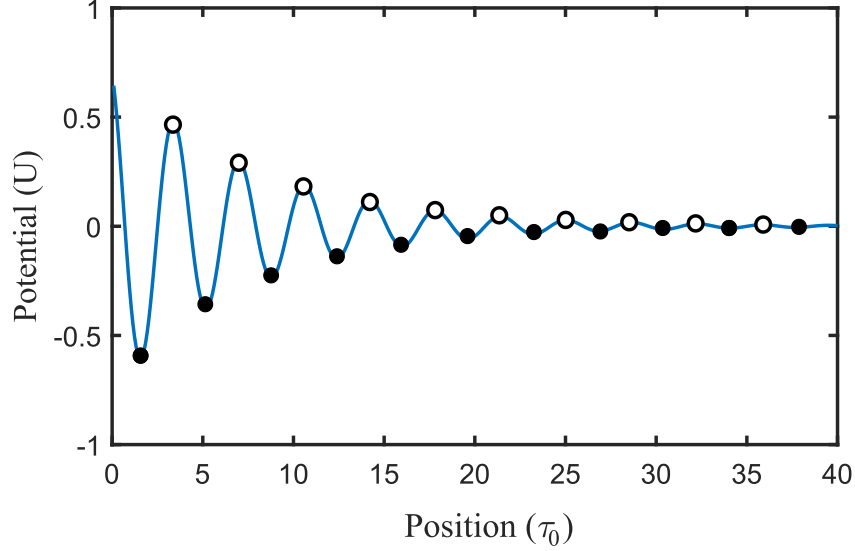


FIGURE 3.4 – Le potentiel d’interaction  $U$  entre la pompe et le soliton en fonction de la position  $\tau_0$ . Les points  $\bullet$  et  $\circ$  correspondent respectivement aux positions stables et instables du soliton.

|                                |         |         |         |         |          |          |          |          |          |
|--------------------------------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>Stabilité</b>               | $m = 1$ | $m = 3$ | $m = 5$ | $m = 7$ | $m = 9$  | $m = 11$ | $m = 13$ | $m = 15$ | $m = 17$ |
| Positions d’équilibre stable   | 1.39    | 5.00    | 8.60    | 12.22   | 15.83    | 19.44    | 23.05    | 26.66    | 30.28    |
| <b>Stabilité</b>               | $m = 2$ | $m = 4$ | $m = 6$ | $m = 8$ | $m = 10$ | $m = 12$ | $m = 14$ | $m = 16$ | $m = 18$ |
| Positions d’équilibre instable | 3.19    | 6.80    | 10.41   | 14.03   | 17.64    | 21.25    | 24.86    | 28.47    | 32.08    |

TABLE 3.1 – Positions d’équilibre stables et instables des solitons en fonction des valeurs de  $m$ .

### 3.3 Les équations du mouvement

De plus, nous pouvons utiliser la densité lagrangienne pour retrouver l’évolution au cours du temps lent des coordonnées collectives du soliton placés à  $\tau = \tau_0$ . Les équations d’Euler-Lagrange sont données par [127] :

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0, \quad (3.7)$$

où  $r_i$  représente les diverses coordonnées collectives qui décrivent l’impulsion, et le symbole  $(.)$  indique une dérivée par rapport au temps  $t$ . En utilisant les équations (3.3) et (3.7), nous pouvons facilement trouver les équations du mouvement pour chaque coordonnée collective ( $\Omega_2$  et  $\tau_0$ ).

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_0 = & -2\eta_2 \Omega_2 + \frac{\mu\pi}{\beta} \sin(2\phi_2) (1 - Y \coth(Y)) \operatorname{csch}(Y) \\ & - \frac{\rho\pi}{d} e^{-\Lambda\tau_0} \Re \left[ i e^{-i(\omega_1\tau_0+2\phi)} (1 - X \coth(X)) \operatorname{csch}(X) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\dot{\Omega}_2 = -2\Omega_2 - \frac{\rho}{d} e^{-\Lambda\tau_0} \Re \left[ (\omega_1 - i\Lambda) e^{-i(\omega_1\tau_0+2\phi)} X \operatorname{csch}(X) \right]. \quad (3.9)$$

La figure 3.5 présente le résultat de la simulation numérique du système couplé, équations (2.6) et (2.7), montrant la variation de la distance de séparation entre les deux solitons, représentée par les lignes noires, ainsi que les positions d'équilibre des solitons obtenues à partir de l'équation (3.6). Dans le modèle complet (équations (2.6) et (2.7)), la valeur  $S = 6$  permet d'obtenir un soliton proche du seuil de déploiement. Cependant, une légère augmentation de la puissance au-delà de cette valeur provoque la disparition du soliton, en raison de la faible largeur de son domaine d'existence. En revanche, si l'on utilise la même valeur  $S = 6$  dans le modèle réduit à une seule équation, on se retrouve au-dessous du seuil d'oscillation de l'OPO, ce qui rend la comparaison incorrecte. C'est pourquoi nous utilisons  $S = 7$  dans ce cas, afin d'assurer une intensité de champ pompe comparable ( $|B|^2$ ) et donc des solitons similaires. Les lignes rouges en tirets indiquent les positions d'équilibre stables, correspondant aux états liés, tandis que les lignes rouges en pointillés montrent les positions d'équilibre instables. Les lignes bleues indiquent les positions d'équilibre calculées à partir des deux équations différentielles issues de la méthode lagrangienne. Les simulations numériques sont initiées en plaçant deux solitons à une distance de séparation initiale, et nous suivons leur position au fil du temps. Comme le montre la figure 3.5, le système présente des états liés discrets, où chaque état lié correspond à la période d'oscillation de la pompe  $T = \frac{2\pi}{\Omega_1}$ . Cependant, notre analyse théorique ne parvient pas à décrire la dynamique des états liés lorsque la séparation entre les solitons est courte. Alors que l'équation (3.6), ainsi que le système d'équations (3.8) et (3.9), prédisent la formation d'un état lié à une distance de séparation de 1.85, les simulations numériques montrent que, lorsque les solitons sont initialement très proches, l'un d'eux disparaît. Cette divergence s'explique par le fait que, dans notre analyse théorique, l'interaction entre les solitons s'effectue uniquement via les oscillations de la pompe, tandis que l'interaction directe entre les solitons PDCS due à l'effet Kerr a été négligée. Les différences observées dans la dynamique en temps lent proviennent principalement des approximations effectuées lors de la dérivation des équations du mouvement. En particulier, lorsque la séparation initiale est choisie entre deux positions d'équilibre, l'évolution prédite par les équations (3.8) et (3.9) (lignes bleues) met plus de temps à atteindre la distance stationnaire que celle obtenue par les simulations numériques complètes (lignes noires). Cela s'explique par le fait que le modèle analytique ne capture pas entièrement la dynamique transitoire du système complet, dans lequel les solitons ajustent rapidement leur séparation.

Nos résultats montrent pour la première fois que les états liés des solitons paramétriques peuvent se produire dans une cavité doublement résonante avec une non-linéarité de type Kerr, en raison de la déplétion de la pompe, le tout se déroulant sans aucune perturbation externe du soliton.

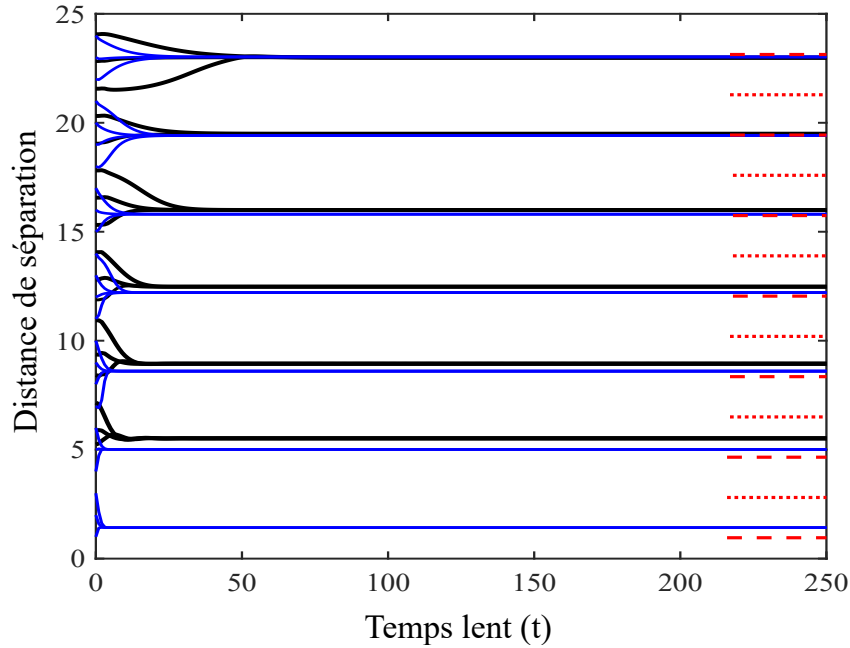


FIGURE 3.5 – Les lignes noires sur le graphique montrent la variation de la distance de séparation entre les deux solitons au fil du temps, trouvée en simulant le modèle complet. Les lignes rouges pointillées indiquent les positions instables, tandis que les lignes rouges en tirets représentent les positions stables des solitons. Les lignes bleues représentent les résultats des simulations numériques basées sur les équations (3.8) e (3.9).

### 3.4 État lié de solitons dans un oscillateur paramétrique doublement résonant

#### 3.4.1 Soliton quadratique dans un oscillateur param-étrique optique doublement résonant.

Dans la partie précédente, nous avons démontré théoriquement et analytiquement l'existence des états liés de deux solitons dans un oscillateur paramétrique optique doublement résonant en présence de l'effet Kerr. Dans cette partie, nous allons examiner ces états liés dans un oscillateur paramétrique optique dégénéré (DOPO) et doublement résonant, mais sans l'effet Kerr. La formation des solitons dans les oscillateurs paramétriques optiques a été étudié théoriquement [128, 97, 99, 100] et expérimentalement [129, 130] dans divers contextes. Des études récentes ont également montré que des peignes de fréquence basés sur la formation de solitons quadratiques peuvent être réalisés dans un DOPO doublement résonant [39, 94] et dans un OPO non dégénéré [98]. L'interaction entre deux solitons quadratiques a d'abord été étudiée dans le cadre d'un guide d'onde plan, où la génération de seconde harmonique est présente [131]. Dans ce contexte, les solitons s'attirent lorsqu'ils sont en phase et se repoussent lorsqu'ils sont en opposition de phase. Des années plus tard, une étude [123] a montré que l'interaction entre deux solitons générés dans DOPO doublement résonant pouvait conduire soit à leur fusion en un seul soliton, soit à leur répulsion. En outre, dans certaines régions des paramètres du système, un état lié peut apparaître

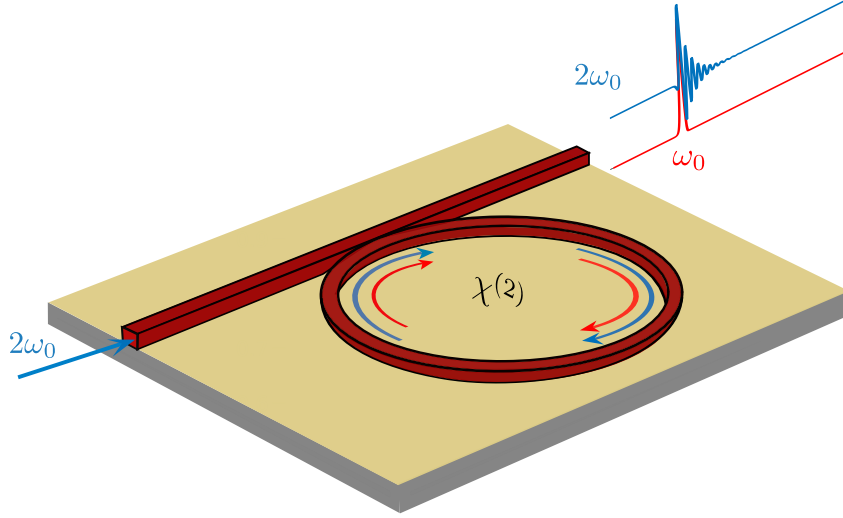


FIGURE 3.6 – Exemple schématique d’un oscillateur paramétrique optique dégénéré (DOPO) doublement résonant. Un résonateur en anneau avec une non-linéarité  $\chi^{(2)}$  est pompé par un champ continu  $B_{in}$  à la fréquence  $2\omega_0$ . L’interaction quadratique donne lieu à la formation d’un soliton centré autour de la fréquence  $\omega_0$ , qui résonne en même temps que le champ de pompe, lui-même centré autour de la fréquence  $2\omega_0$ .

lorsque le forçage est augmenté progressivement jusqu’à ce que le soliton entre dans une zone de bifurcation de Hopf, où sa queue devient oscillante.

La figure 3.6 montre un exemple schématique d’une cavité de longueur  $L$  contenant un milieu non linéaire d’ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ), pompée par une onde continue d’amplitude  $B_{in}$  et de fréquence  $2\omega_0$ . Un champ signal est généré à la fréquence  $\omega_0$  via le processus d’amplification paramétrique. Nous supposons une configuration doublement résonante, dans laquelle la pompe et le signal résonnent simultanément dans la cavité. L’évolution du signal  $E_1$  et de la pompe  $E_2$  au cours du  $m$ -ième tour dans la cavité est décrite par les deux équations suivantes [39, 94] :

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = \left[ -\frac{\alpha_{c1}}{2} - i\frac{k_1''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E_1 + ikE_2E_1^*e^{-i\Delta kz}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = \left[ -\frac{\alpha_{c2}}{2} - \Delta k \frac{\partial}{\partial \tau} - i\frac{k_2''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E_2 + ikE_1^2e^{i\Delta kz}, \quad (3.11)$$

et les conditions aux bords de la cavité sont données par :

$$E_1^{(m+1)}(0, \tau) = \sqrt{1 - \theta_1} E_1^{(m)}(L, \tau) e^{-i\delta_1}, \quad (3.12)$$

$$E_2^{(m+1)}(0, \tau) = \sqrt{1 - \theta_2} E_2^{(m)}(L, \tau) e^{-i\delta_2} + \sqrt{\theta_2} B_{in}, \quad (3.13)$$

Tous les paramètres sont présentés dans le chapitre 2. Pour une cavité à haute finesse, nous pouvons supposer que les enveloppes lentement variables des deux champs restent constantes durant un aller-retour. Cela permet de simplifier le système couplé avec les conditions aux bord

en deux équations [132] :

$$\partial_t E_1 = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1 \partial_{\tau\tau}] E_1 + i\rho E_2 E_1^*, \quad (3.14)$$

$$\partial_t E_2 = [-1 - i\Delta_2 - d\partial_\tau - i\eta_2 \partial_{\tau\tau}] E_2 + i\rho E_1^2 + S, \quad (3.15)$$

où  $\rho = \frac{\kappa L}{\alpha_1}$  et  $S = \frac{\sqrt{\theta_2} B_{in}}{\alpha_2}$ . Les autres paramètres sont déjà donnés dans la section 3 de la partie 1. Nous supposons que la pompe varie lentement avec le temps lent ( $\partial_t B \approx 0$ ) [133, 104, 39]. À partir de l'équation (3.15), nous pouvons exprimer la pompe en fonction de  $E_1^2$  :

$$E_2 = \frac{S}{1 + i\Delta_2} + i\rho [E_1^2 \otimes J(\tau)], \quad (3.16)$$

En injectant cette expression de la pompe dans l'équation (3.14), Nous obtenons une seule équation qui décrit la dynamique d'un oscillateur paramétrique optique doublement résonant [39, 94, 97] :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1 \partial_{\tau\tau}] A + \mu A^* - \rho^2 [A^2 \otimes J(\tau)] A^*, \quad (3.17)$$

où  $\mu = \frac{\rho_1 S}{\sqrt{1 + \Delta_2^2}}$ ,  $A = E_1 e^{i\psi}$ , avec  $\psi = \pi/4 + \text{atan}(-\Delta_2)/2$

### 3.4.2 Soliton quadratique

La résolution numérique de l'équation (3.17) à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 révèle qu'elle admet une solution sous forme de soliton dans une certaine région de paramètres. Ce soliton résulte de l'équilibre entre la dissipation et le pompage d'un côté, et la dispersion et l'effet Kerr effectif induit par la non-linéarité quadratique du milieu de l'autre. L'effet Kerr effectif est représenté par la partie imaginaire de la fonction de réponse non-linéaire  $J(\tau)$ . La figure 3.7(a) illustre les profils temporels du signal et de la pompe ainsi que l'ansatz de la pompe, tandis que la figure 3.7(b) montre les spectres de ces deux champs. Nous remarquons que la pompe présente des oscillations, dont la fréquence correspond au petit pic dans le spectre de la pompe, ainsi qu'au pic de  $J(\Omega)$  situé près de zéro (voir figure. 3.7(c)).

Les oscillations de la pompe sont à l'origine de la formation des états liés entre deux solitons paramétriques, comme observé précédemment dans le cas d'un DOPO avec effet Kerr. Les simulations montrent que, même dans le cas d'un DOPO sans effet Kerr, des états liés stables entre deux solitons peuvent également se former grâce à la queue oscillante de la pompe. Un exemple d'état lié est illustré dans la figure 3.8. Les solitons peuvent soit s'attirer, soit se repousser, en fonction de la distance de séparation initiale entre eux. Dans les deux cas, les simulations sont initiées avec des distances de séparation différentes et, au fil du temps, nous observons que les deux solitons conservent la même distance de séparation. La figure 3.8(c) montre les profils du signal et de la pompe correspondant aux configurations des figure. 3.8(a) et figure 3.8(b).

Nous allons réutiliser la méthode variationnelle, déjà employée dans la partie 1, pour mener une étude similaire sur l'interaction entre ces deux solitons paramétriques quadratiques.

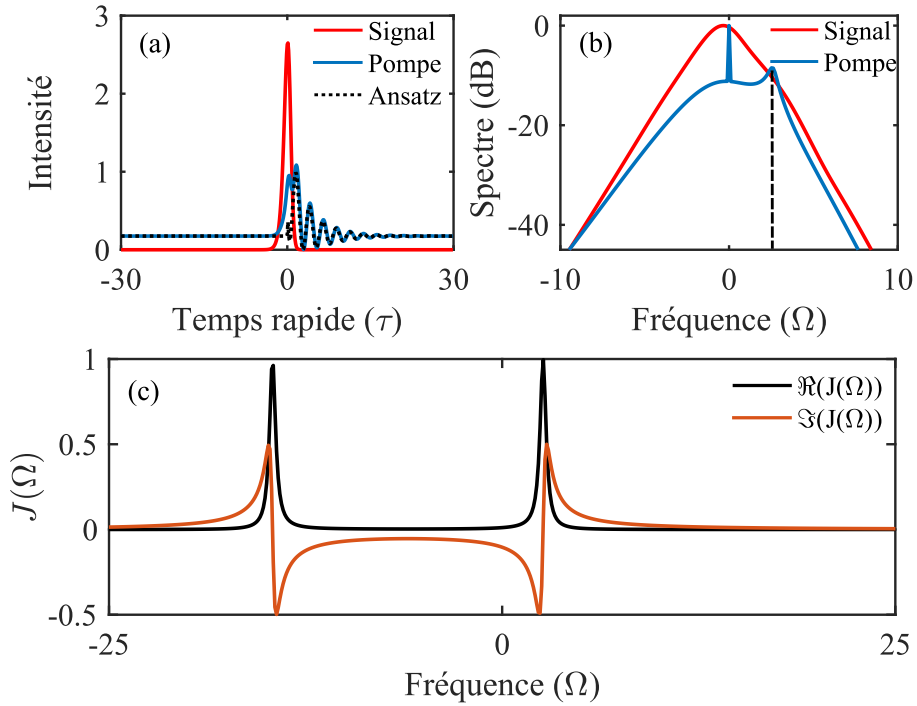


FIGURE 3.7 – a) montre l'intensité des champs de signal et de pompe, où la courbe en pointillés représente l'Ansatz de la pompe. b) illustre le spectre du signal et de pompe. c) Représente les parties réelles et imaginaires de la fonction de réponse non linéaire  $J(\Omega)$ . les paramètres physiques utilisés :  $\eta_1 = -\eta_2/4 = -1$ ,  $\Delta_1 = 3.5$ ,  $\Delta_2 = 9.5$ ,  $S = 4$  et  $\rho = 5$ .

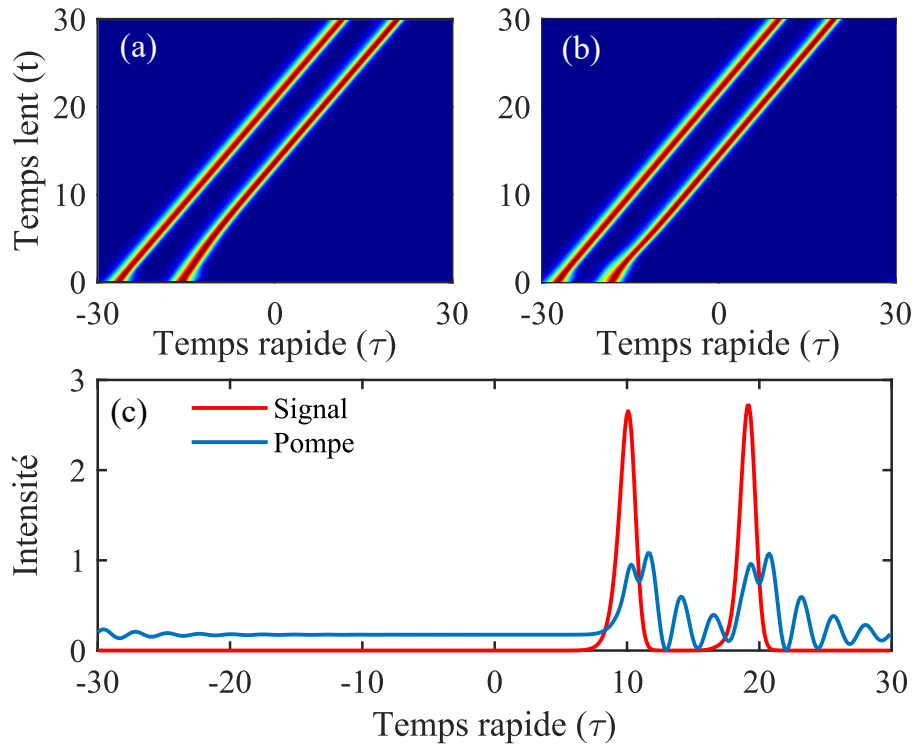


FIGURE 3.8 – a) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une attraction entre eux suivie d'une stabilisation à une distance fixe. b) Propagation de deux solitons au cours du temps, montrant une répulsion entre eux avant de se stabiliser à une distance fixe. c) Intensité du signal et de la pompe correspondant aux configurations des (a) et (b).

### 3.4.3 La méthode variationnelle

De la même façon que dans la section 4 de la partie 1, nous allons étudier l'impact du soliton situé à  $\tau = 0$  sur le soliton situé à  $\tau = \tau_0$ . Pour cela, nous donnons une expression de la pompe associée au soliton situé à  $\tau = 0$  :

$$B = \frac{\mu}{\rho} + i\frac{\beta\rho}{d}e^{-(\Lambda+i\omega_1)\tau+2i\phi_1}H(\tau). \quad (3.18)$$

Cette expression approximative de la pompe est comparée avec celle trouvée numériquement Dans la figure 3.7(a). Si l'on néglige le terme de convolution de l'équation (2.11), celle-ci admet une solution analytique sous forme de soliton ( $\sqrt{2}\beta\text{sech}(\beta\tau)e^{i\phi}$ ). En partant de cette solution, il est possible, en utilisant le calcul variationnel, de déterminer la solution perturbée de l'équation (3.17) tout en prenant en compte le terme de convolution, comme nous avons fait dans la section 4 de la partie 1. Nous pouvons écrire l'équation (3.17) sous la forme suivante :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1\partial_{\tau\tau}]A + \mu A^* - i\rho^2 [A^2 \otimes \Im(J(\tau))]A^* - \rho^2 [A^2 \otimes \Re(J(\tau))]A^*. \quad (3.19)$$

Le terme d'effet Kerr effectif est donné par le terme  $-i\rho^2 [A^2 \otimes \Im(J(\tau))]A^*$ , alors nous pouvons estimer ce terme par :

$$-i\rho^2 [A^2 \otimes \Im(J(\tau))]A^* \approx i\gamma_{eff} |A|^2 A, \quad (3.20)$$

où  $\gamma_{eff}$  a déjà été déterminé par Longhi dans le cadre d'un oscillateur optique paramétrique, et s'exprime comme suit [32] :  $\gamma_{eff} = \rho^2/\Delta_2$ . On remplace l'expression (3.20) dans (3.19), on obtient :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1\partial_{\tau\tau}]A + \mu A^* + i\gamma_{eff} |A|^2 A - \rho^2 [A^2 \otimes \Re(J(\tau))]A^*. \quad (3.21)$$

Pour que nous puissions appliquer la méthode variationnelle, nous devons simplifier le terme de convolution. d'après l'expression de la pompe estimée (3.18), nous pouvons estimer ce terme par :

$$\rho^2 [A^2 \otimes \Re(J(\tau))]A^* \approx \rho^2 \frac{e^{-\Lambda\tau}}{d} \cos(\omega_1\tau)H(\tau)A^*. \quad (3.22)$$

En injectant l'expression (3.22) dans l'équation (3.21), et renormalisons à nouveau l'équation, nous obtenons :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1\partial_{\tau\tau}]A + \mu A^* + i|A|^2 A - \frac{\rho^2}{\gamma_{eff}d} e^{-\Lambda\tau} \cos(\omega_1\tau)H(\tau)A^*. \quad (3.23)$$

La densité Lagrangienne  $\mathcal{L}$  associée à l'équation (3.23) s'écrit comme suit :

$$\mathcal{L} = [\Im(A\partial_t A^*) - |\partial_\tau A|^2 + \frac{|A|^4}{2} - \Delta_1 |A|^2 + \mu \Im(A^2) + \frac{\beta\rho^2}{d\gamma_{eff}} e^{-\Lambda\tau} \cos(\omega_1\tau)H(\tau)\Im(A^2)]e^{2t}. \quad (3.24)$$

A partir de la densité de Lagrange, en utilisant l'ansatz (3.2), nous pouvons trouver le potentiel d'interaction entre les deux solitons, qui est défini par l'intégrale du dernier terme par rapport

au  $\tau$ .

$$U = -\frac{4\beta^2\rho^2}{d\gamma_{eff}}(I_1 + I_2) \quad (3.25)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont donnés par :

$$I_1 = 4\pi[-1 + Y \coth(Y)] \operatorname{csch}(Y) \cos(\omega_1\tau_0)e^{-\Lambda\tau_0} [\Lambda \cos(2\phi - \Omega_2\tau_0) - \Omega_2 \sin(2\phi - \Omega_2\tau_0)], \quad (3.26)$$

$$I_2 = 4 \sin(\omega_1\tau_0)e^{-\Lambda\tau_0} Y \operatorname{csch}(Y) \cos(2\phi - \Omega_2\tau_0), \quad (3.27)$$

où  $Y = \frac{\Omega_2\pi}{2\beta}$ ,  $\coth(Y) = \frac{\cosh(Y)}{\sinh(Y)}$ .

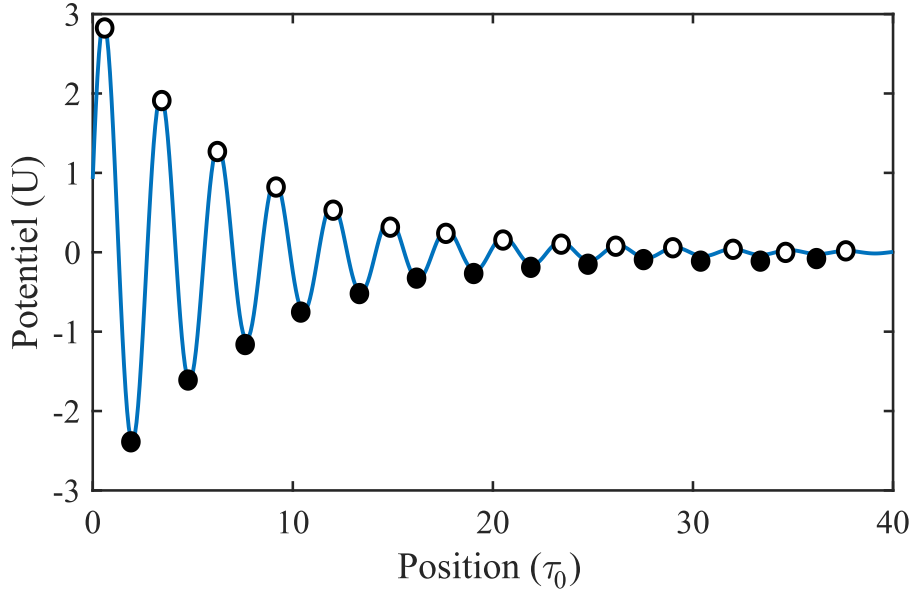


FIGURE 3.9 – Le potentiel d’interaction  $U$  entre la pompe et le soliton en fonction de la position  $\tau_0$ . Les points  $\bullet$  et  $\circ$  correspondent respectivement aux positions stables et instables du soliton.

La figure 3.9 illustre le potentiel d’interaction entre les deux solitons, où les minima indiquent les positions d’équilibre stable, tandis que les maxima représentent les positions d’équilibre instable.

Nous utilisons le même ansatz (3.2) utilisé précédemment ; en substituant l’ansatz dans la densité lagrangienne et en intégrant par rapport au temps  $\tau$ , nous obtenons le Lagrangien total du système :

$$L = -4[\beta\Omega_2\dot{\tau}_0 + \beta\Omega_2^2 - \frac{1}{3}\beta^3 + \Delta_1\beta + \Omega_2\pi\mu\sin(2\phi_2)\operatorname{csch}(Y) - \frac{\beta^2\rho^2}{d\gamma_{eff}}(I_1 + I_2)]e^{2t}. \quad (3.28)$$

Pour déterminer les équations du mouvement pour chaque coordonnée collective, nous utilisons le Lagrangien du système et les équations d’Euler-Lagrange donnés dans la section 6 de la partie 1. Après les calculs, nous obtenons :

$$\dot{\tau}_0 = -2\Omega_2 + \frac{\mu\pi}{\beta} \sin(2\phi_2)[-1 + Y\coth(Y)]\operatorname{csch}(Y) + (I_3 + I_4) \quad (3.29)$$

$$\dot{\Omega}_2 = -2\Omega_2 - (\omega_1 \tan(\omega_1 \tau_0) + \Lambda) I_1 + I_5 + (\omega_1 \arctan(\omega_1 \tau_0) - \Lambda) I_2 + I_6 \quad (3.30)$$

où les expressions de  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  et  $I_6$  sont données par :

$$I_3 = -4\pi [-1 + Y \coth(Y)] \operatorname{csch}(Y) \cos(\Omega_1 \tau_0) e^{-\Lambda \tau_0} [(\Lambda \tau_0 - 1) \sin(2\phi - \Omega \tau_0) - \Omega \tau_0 \cos(2\phi - \Omega \tau_0)], \quad (3.31)$$

$$I_4 = -4\pi \sin(\Omega_1 \tau_0) \tau_0 e^{-\Lambda \tau_0} Y \operatorname{csch}(Y) \sin(2\phi - \Omega \tau_0), \quad (3.32)$$

$$I_5 = 4\pi [-1 + Y \coth(Y)] \operatorname{csch}(Y) \cos(\Omega_1 \tau_0) e^{-\Lambda \tau_0} [\Lambda \Omega \sin(2\phi - \Omega \tau_0) + \Omega^2 \cos(2\phi - \Omega \tau_0)], \quad (3.33)$$

$$I_6 = -4\pi \sin(\Omega_1 \tau_0) \tau_0 e^{-\Lambda \tau_0} Y \operatorname{csch}(Y) \sin(2\phi - \Omega \tau_0). \quad (3.34)$$

La figure 3.10 illustre l'évolution de la distance de séparation entre deux solitons en fonction

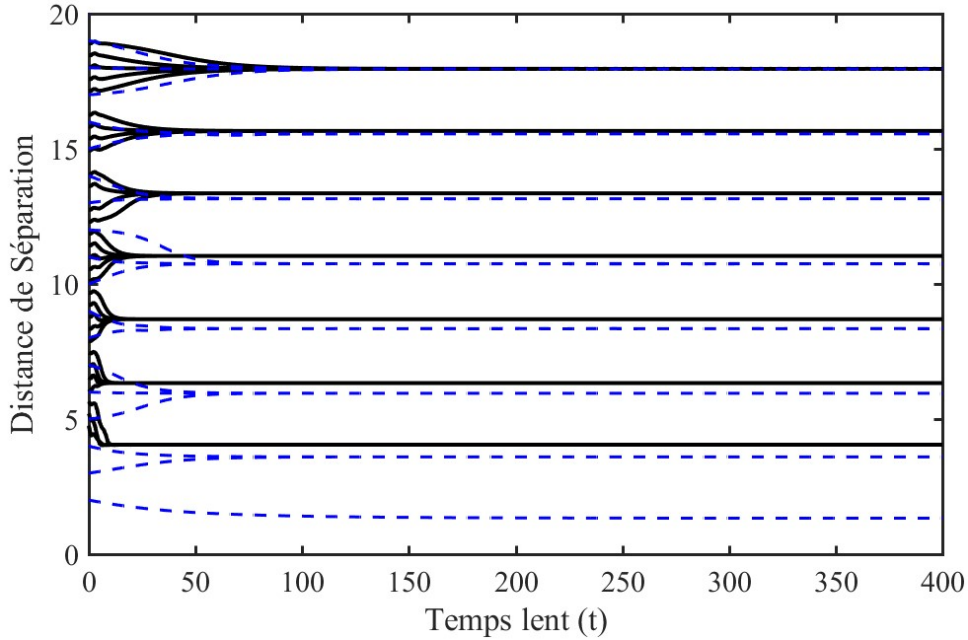


FIGURE 3.10 – Les lignes noires sur le graphique montrent la variation de la distance de séparation entre les deux solitons au fil du temps, obtenu en simulant numériquement le modèle complet ((3.14) et (3.15)) qui décrit le système. Les deux équations correspondant les coordonnées collectives ( $\tau$  et  $\Omega$ ) sont représentées par les lignes bleues en tirets.

du temps, avec une comparaison entre les résultats numériques et analytiques. Les lignes noires représentent les résultats de la simulation numérique du modèle complet. Les lignes bleues, quant à elles, sont issues du modèle analytique décrit par les deux équations (3.29) et (3.30), qui montre un excellent accord avec les résultats numériques, prouvant ainsi la validité de cette approche pour décrire le comportement des solitons. Nous observons que le système présente des états liés discrets, où chaque état lié correspond à une période d'oscillation de la pompe donnée par  $T = 2\pi/\omega_1$ . Comme discuté dans la section 6 de la partie 1, le premier état lié a été obtenu analytiquement comme illustré dans la figure 3.10. Toutefois, cet état n'apparaît pas dans les simulations du modèle complet. En effet, lorsque les deux solitons deviennent très proches, le modèle analytique utilisé repose sur l'hypothèse que l'interaction dominante est celle entre les

oscillations de la pompe et chaque soliton, tout en négligeant l'interaction directe soliton–soliton. Cette approximation conduit à l'existence d'un état lié supplémentaire dans le cadre théorique simplifié, alors que le modèle complet, qui inclut pleinement l'interaction entre solitons, ne prédit pas ce premier état lié. Ces résultats montrent que des états liés de deux solitons quadratiques peuvent apparaître dans un oscillateur paramétrique optique doublement résonnant, en raison de la déplétion de la pompe.

### 3.4.4 Conclusion

En conclusion, ce chapitre a exploré l'interaction et la formation d'états liés entre deux solitons paramétriques dans deux contextes distincts : d'une part, dans un DOPO doublement résonnant en présence de la non-linéarité Kerr, et d'autre part, dans un DOPO doublement résonnant sans l'effet Kerr.

Dans la première partie, nous avons examiné l'interaction entre deux solitons paramétriques et démontré que des états liés peuvent se former grâce à la déplétion de la pompe, en appliquant la méthode variationnelle de Lagrange. Nous avons également calculé le potentiel d'interaction et déterminé les positions d'équilibre.

Dans la seconde partie, nous avons également utilisé la méthode variationnelle pour montrer que des états liés de deux solitons quadratiques peuvent se former en raison de la déplétion de la pompe. De plus, nous avons calculé le potentiel d'interaction ainsi que les positions d'équilibre.

Les résultats analytiques obtenus sont en bon accord avec les simulations numériques du modèle complet dans les deux cas, tant avec qu'en l'absence de l'effet Kerr.



# 4. Perspectives : dynamique d'un DOPO simplement résonant avec l'effet kerr

## 4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons exploré les différentes solutions de l'équation décrivant un oscillateur paramétrique optique dégénéré (DOPO) et doublement résonant en présence de la non-linéarité Kerr, notamment les états homogènes, les solitons, ainsi que les états liés de deux solitons. Ces solutions mettent en évidence la richesse des dynamiques accessibles dans ce système.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la dynamique d'une cavité optique simplement résonante intégrant à la fois une non-linéarité d'ordre 2 et une non-linéarité Kerr (ordre 3). Le système étudié est constitué de deux sections distinctes : la section  $L_1$ , qui agit comme un oscillateur optique paramétrique dégénéré, et la section  $L_2$ , contenant une fibre optique responsable de la non-linéarité Kerr. Nous analysons les différentes dynamiques émergentes dans ce système, en mettant en évidence les points de bifurcation qui structurent son diagramme de phase.

## 4.2 Cavité simplement résonante

Dans cette section, nous nous consacrons à l'étude d'une cavité simplement résonante, c'est-à-dire une cavité où un seul champ est en résonance, en l'occurrence le signal à la fréquence  $\omega_0$ . Pour cela, nous nous appuyons sur le système présenté dans la sous-section 1.7.1, qui est constitué de deux sections distinctes. La première, de longueur  $L_1$ , contient un milieu non linéaire d'ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ), où se produit l'amplification paramétrique induite par l'interaction de la pompe avec le milieu. La seconde section, de longueur  $L_2$ , est constituée d'une fibre optique où la non-linéarité Kerr ( $\chi^{(3)}$ ) se manifeste principalement par l'auto-modulation de phase. Reprenons l'équation (1.106) mais cette fois-ci nous allons garder le terme de convolution, nous obtenons une équation renormalisée qui a la forme suivante :

$$\partial_t A = [-1 - i\Delta_1 - i\eta_1 \partial_{\tau\tau}] A + i|A|^2 A + \mu A^* - \rho [A^2 \otimes I(\tau)] A^*, \quad (4.1)$$

où  $I(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[I(\Omega)]$ , avec  $I(\Omega) = (1 - ix - e^{-ix})/x^2$ , et  $x = -d\Omega - \eta_2 \Omega^2$ . Ici  $\rho = (\kappa L_1)^2 / \gamma L_2$ .  $\kappa$  représente le coefficient de couplage non-linéaire de second ordre, et  $\gamma$  est le coefficient associé à la auto-modulation de phase. Dans ce cas l'expression du pompage est donnée par :  $\mu = \kappa E_{in} L_1 / \alpha$ ,

où  $\alpha$  représente les pertes du système.

L'objectif de cette étude est d'analyser l'évolution du signal dans cette cavité en fonction du paramètre de contrôle  $\mu$  et d'explorer les différentes régions de stabilité du système. Dans cette étude, nous allons procéder à une série de simulations numériques en faisant varier le paramètre de contrôle  $\mu$  (Forçage paramétrique). Dans un premier temps, nous augmenterons progressivement  $\mu$  sur l'intervalle  $[1.2; 4.5]$  avec un pas d'incrément  $\Delta\mu = 0.04$ . Pour chaque valeur de  $\mu$ , le système évoluera pendant une durée suffisamment longue pour atteindre un état stationnaire, que nous estimons à  $t = 1000$  unités de temps. Les conditions initiales pour chaque nouvelle valeur de  $\mu$  seront prises comme étant l'état final obtenu avec la valeur précédente de  $\mu$ . Dans un second temps, les simulations numériques sont réalisées en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps  $dt = 0.1$ , garantissant une précision suffisante pour capturer la dynamique du système.

La grandeur physique  $|\psi|$ , définie par l'intégrale  $|\psi| = \int |A|^2 d\tau$ , est calculée pour chaque simulation. À partir de cette quantité, le nombre de pics présents dans le système peut être déterminé à l'aide d'outils numériques d'analyse de signaux. Cette mesure nous permet de quantifier la complexité de la dynamique spatio-temporelle. Le diagramme de bifurcation (Fig. 4.1) représente l'évolution du nombre de pics en fonction de  $\mu$ .

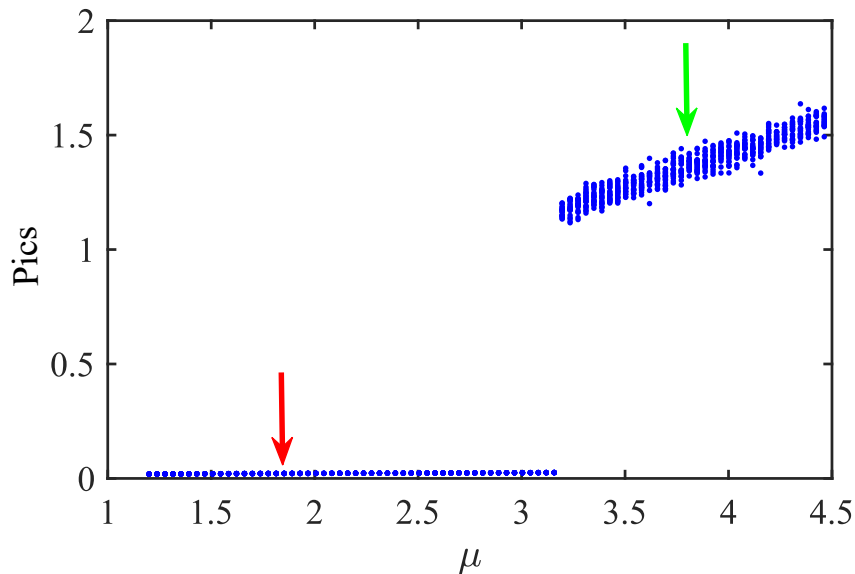


FIGURE 4.1 – Évolution de  $|\psi|$  en fonction du paramètre de contrôle  $\mu$ . Les points bleus représentent le nombre de pics présents dans le système

## 4.3 Classification des régimes dynamiques

### 4.3.1 Soliton

La figure 4.2 caractérise la dynamique des solitons dans notre système. La figure 4.2(a) représente le profil du signal (courbe rouge) et de la pompe (courbe bleue) à une valeur de  $\mu = 1.85$ . Pour les faibles valeurs de  $\mu$ , on observe la présence d'un soliton unique stable. Cette solution solitonique, dont un exemple est indiqué par la flèche rouge dans la figure 4.1, démontre

la capacité du système à maintenir des structures localisées stables. À partir de  $\mu = 3.32$ , le système subit une transition de phase vers un régime de dynamique chaotique, marqué par une augmentation significative du nombre de pics et une forte dispersion des valeurs de  $|\psi|$ . Cette transition illustre la richesse dynamique du système, qui peut passer d'un état ordonné (soliton unique) à un état désordonné (multi-pics) en fonction de l'intensité du forçage qui sera abordé dans la sous-section 4.3.2.

Le diagramme spatio-temporel (Fig. 4.2(b)) correspond à la solution solitonique repérée par la flèche rouge sur la figure 4.1. Il offre une visualisation claire de la stabilité du soliton dans le temps ( $t$ ). Cette robustesse est une caractéristique fondamentale des solitons, qui maintiennent leur forme et leur position grâce à un équilibre entre les effets non-linéaires et dispersifs d'un côté et la dissipation et le pompage de l'autre côté [134].

L'ensemble de ces résultats met en évidence les deux régimes dynamiques dans notre système, allant des structures localisées stables aux comportements chaotiques, contrôlables via le paramètre de pompe  $\mu$ .

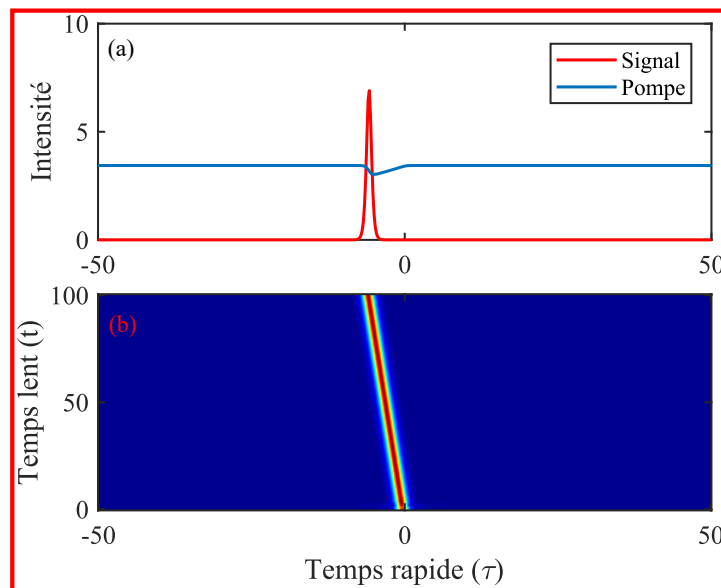


FIGURE 4.2 – Simulations de l'équation (1) qui correspond à  $\mu = 1.85$  indiqué par la flèche rouge. (a) les intensités du signal (courbe rouge) et de la pompe (courbe bleue). (b) Diagramme spatio-temporel ( $\tau, t$ ) illustrant la stabilité d'un soliton unique localisé.

### 4.3.2 Chaos

Le chaos en dynamique non linéaire désigne un régime où un système déterministe présente une évolution imprévisible à long terme, en raison d'une sensibilité exponentielle aux conditions initiales. Cela signifie qu'une petite perturbation initiale peut entraîner des trajectoires totalement différentes au fil du temps, rendant toute prédiction précise impossible au-delà d'un certain horizon temporel [135].

L'un des premiers exemples marquants de comportement chaotique a été découvert par Edward Lorenz en 1963, en étudiant un modèle simplifié de la dynamique de l'atmosphère [136]. Ce modèle, aujourd'hui connu sous le nom de modèle de Lorenz, est un système de trois équations

différentielles non linéaires [137]. Lorenz a découvert que, pour certaines valeurs des paramètres, les solutions du système dans l'espace des phases ne tendaient ni vers un point fixe, ni vers un cycle périodique, mais suivaient une trajectoire complexe appelée attracteur étrange [138], présentant une structure fractale. Ce phénomène illustre l'effet papillon, où une petite variation des conditions initiales (par exemple, le battement d'ailes d'un papillon) peut entraîner des changements drastiques dans l'évolution du système (comme une tempête à l'autre bout du monde) [139].

Le chaos est un phénomène omniprésent dans de nombreux domaines scientifiques, allant de la physique à la biologie [140], en passant par l'écologie [141], la dynamique des fluides [138] et l'optique non linéaire [142, 143]. Ces systèmes présentent une sensibilité extrême aux conditions initiales, les rendant imprédictibles sur de longues échelles de temps. En optique non linéaire, les cavités optiques fibrées ont révélé l'existence d'un comportement chaotique du champ électrique, décrit par l'équation de Lugiato-Lefever, qui régit la dynamique des champs optiques dans les résonateurs dissipatifs [144]. Dans la version paramétrique de cette équation, connue sous le nom d'équation de Schrödinger non linéaire paramétrique (PDNLSE), des études ont également prédit l'émergence du chaos dans ce système [110, 145].

Le chaos est un phénomène non linéaire qui émerge via des bifurcations successives conduisant à ce qu'on appelle la route vers le chaos. À mesure qu'un paramètre de contrôle varie, un système dynamique initialement stable peut subir une série de bifurcations menant à un comportement imprévisible. Une des routes les plus connues est la **cascade de bifurcations de périodicité** (ou doublement de période) [146, 147, 148], où un point fixe devient périodique, puis double successivement sa période jusqu'à atteindre un état chaotique. D'autres mécanismes existent aussi, comme l'**intermittence** [149, 150] ou la rupture de **quasi-périodicité** [151].

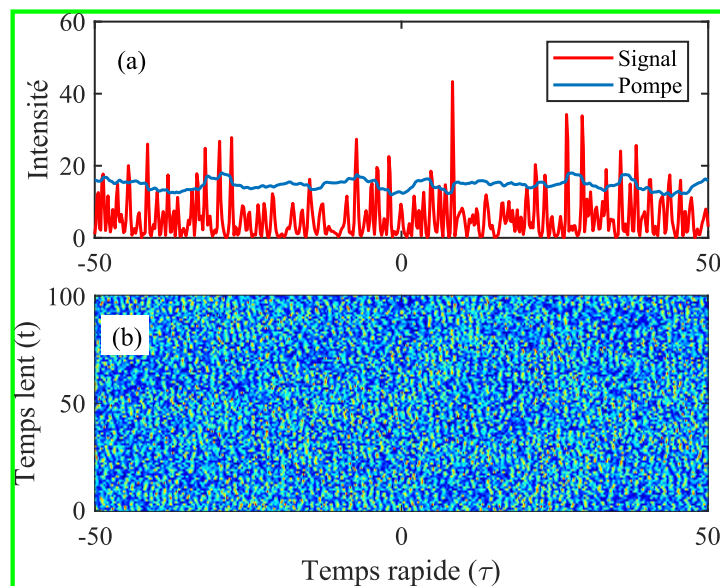


FIGURE 4.3 – Simulations de l'équation (1) qui correspond à  $\mu = 3.83$  indiqué par la flèche verte (a) les intensités du signal (courbe rouge) et de la pompe (courbe bleue). (b) Diagramme spatio-temporel  $(\tau, t)$  montrant la dynamique turbulente caractérisée par la formation et destruction continues de structures localisées.

La figure 4.3 illustre le comportement du système dans le régime chaotique qui correspond à

la flèche verte dans la figure 4.1 à une valeur de  $\mu = 3.83$ . Les profils du signal et de la pompe sont donnés dans la figure 4.3(a). Dans cette région, le système présente un comportement chaotique. Cette dynamique complexe est clairement visible dans le diagramme spatio-temporel (Fig 4.3(b)), où nous remarquons une structure complexe et désordonnée, avec de multiples pics qui évoluent de manière erratique. Le diagramme spatio-temporel présente une alternance de zones de forte intensité (en jaune-rouge) et de faible intensité (en bleu). Cette transition d'un régime solitonique ordonné vers un régime chaotique illustre la dépendance du système au paramètre de contrôle  $\mu$  et la richesse de sa dynamique non-linéaire.

## 4.4 Les différentes dynamiques du système

### 4.4.1 Comparaison avec la PDLSE

Dans cette section, nous comparons les diagrammes de bifurcation de la PDLSE et de l'équation (4.1) qui décrit la dynamique d'une cavité simplement résonante afin d'analyser l'effet du terme de déplétion sur la structure de ces diagrammes dans le plan des paramètres (pompage, pertes) et d'évaluer son impact sur le domaine de stabilité du soliton.

Avant d'entamer la comparaison, nous allons renormaliser l'équation (4.1) par rapport au detuning afin d'assurer la cohérence avec l'étude menée dans la référence [110] sur le diagramme de bifurcation de la PDLSE. Cette renormalisation permet d'unifier les conventions et de faciliter l'interprétation des résultats obtenus pour les deux modèles. L'équation devient :

$$\partial_t A = (-\gamma - i + i\partial_{\tau\tau})A + i|A|^2 A + hA^* - \rho [A^2 \otimes J(\tau)] A^*, \quad (4.2)$$

où  $\gamma = \alpha/\delta$  (ici  $\gamma$  représente les pertes, il ne faut pas confondre avec le coefficient d'auto-modulation de phase), et le pompage  $h = \kappa E_{in} L_1/\delta$ .

La figure 4.4(a) représente le diagramme de bifurcation issu de la PDLSE, tandis que la figure 4.4(b) correspond à l'équation (4.2). Ces diagrammes sont tracés dans le plan des paramètres formé par le pompage et les pertes  $(h, \gamma)$ . Ils mettent en évidence différentes régions caractérisées par la nature des solutions obtenues.

Dans la figure 4.4.(a), la région du zéro attracteur (située dans la partie inférieure du diagramme) correspond aux valeurs de  $h$  trop faibles pour soutenir une solution non triviale. Dans cette zone, l'état stationnaire stable est simplement l'état vide  $A = 0$ . À l'opposé, la partie supérieure du diagramme correspond à la région où le chaos spatio-temporel émerge. La ligne 1 marque une bifurcation de Hopf : à droite de cette courbe, une solution stationnaire est stable, tandis qu'en la traversant, elle entre en oscillation périodique dans le temps (représentée par des petits cercles sur le diagramme). Ces oscillations peuvent ensuite évoluer en solitons doublement périodiques, quadruplement périodiques, voire octopériodiques (indiqués par des boîtes ombrées). Les petites taches blanches et les diamants ombragés signalent des attracteurs plus complexes correspondant à des dynamiques de périodes 6, 7 ou 10, menant progressivement à une transition vers le chaos temporel. Les triangles vides indiquent la région où la solution triviale  $A = 0$  est stable. Cependant, en traversant la ligne 4, cette solution devient instable, et le chaos spatio-temporel apparaît. Enfin, le soliton périodique peut également bifurquer directement vers

le chaos spatio-temporel sans passer par un doublement de période, en franchissant la ligne 3. Cela illustre la coexistence de plusieurs chemins de transition vers des dynamiques complexes dans le système. Dans la figure 4.4(b), les différentes régions numérotées correspondent aux divers régimes dynamiques du système en présence du terme de déplétion. La région 1 représente le domaine de stabilité de soliton stationnaire. Le domaine 2 correspond au soliton périodique, et nous remarquons que la déplétion de la pompe réduit considérablement l'étendue de ce domaine, renforçant ainsi la robustesse des solitons. La région 3 marque une transition où la solution triviale intervient. Enfin, le domaine 4 correspond au chaos spatio-temporel, où les solutions deviennent imprévisibles et désordonnées. L'introduction du terme de déplétion a donc pour effet principal d'étendre la stabilité des solitons tout en modifiant la structure globale du diagramme de bifurcation.

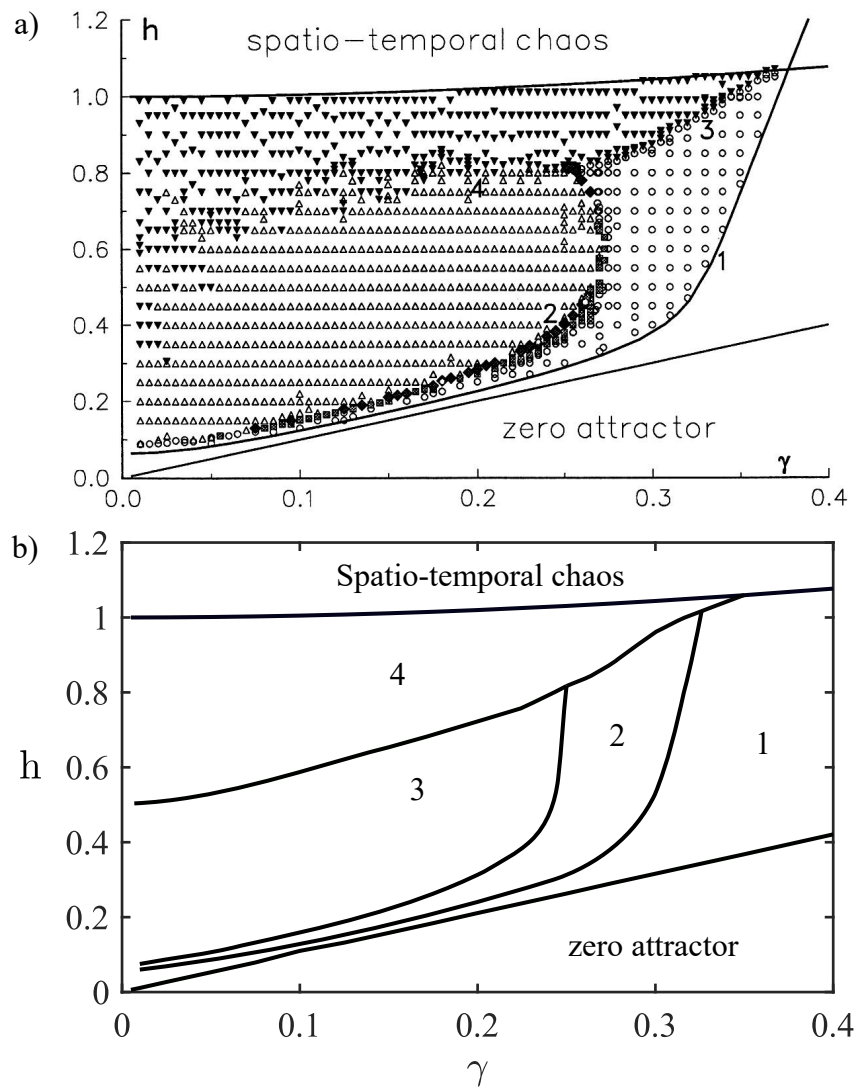


FIGURE 4.4 – Diagrammes de bifurcation représentant les différents régimes dynamiques en fonction du pompage  $h$  et les pertes  $\gamma$ . (a) Diagramme de bifurcation de l'équation PDNLS sans terme de déplétion [109]. (b) Diagramme de bifurcation de l'équation (4.2).

## 4.4.2 Soliton périodique

Comme nous l'avons précédemment montré, l'équation (4.2) admet une solution sous forme de soliton dans la zone 1 de la figure 4.4(b). Toutefois, ce soliton peut devenir instable et entrer en oscillation temporelle, caractérisant ainsi la zone 2 de la figure 4.4(b). La figure 5 illustre cette dynamique en présentant à la fois le profil d'un soliton oscillant et son évolution spatio-temporelle. Dans la figure 4.5(a), les profils d'intensité du signal (courbe rouge) et du champ de pompe (courbe bleue) sont tracés à  $t = 100$ , soit à la fin de la simulation temporelle. La figure 4.5(b) représente l'évolution spatio-temporelle du signal en fonction du temps lent  $t$  et du temps rapide  $\tau$ . La colormap met en évidence des oscillations périodiques du soliton, indiquant qu'il appartient à une région de bifurcation où la solution stationnaire est remplacée par une solution périodique. Ces oscillations temporelles résultent d'une instabilité de Hopf [109], un phénomène caractéristique des systèmes dissipatifs non linéaires.

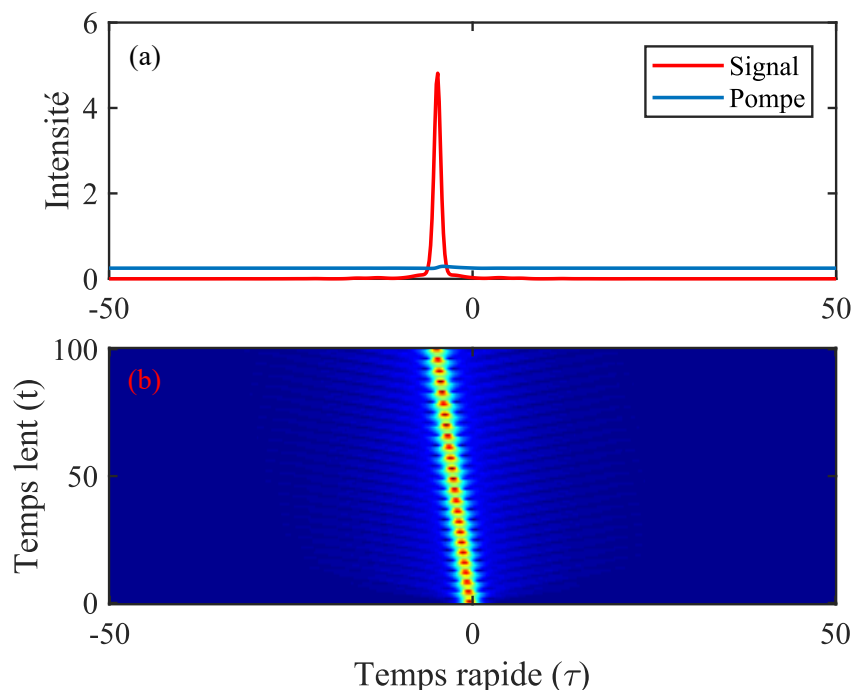


FIGURE 4.5 – (a) Profils d'intensité du signal (courbe rouge) et du champ de pompe (courbe bleue). (b) Évolution spatio-temporelle du signal en fonction du temps lent  $t$  et du temps rapide  $\tau$ . La colormap met en évidence les oscillations périodiques du soliton, caractéristiques d'une instabilité de Hopf. Les paramètres utilisés sont :  $h = 0.5$ ,  $\gamma = 0.28$ ,  $d = 6$ ,  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = 0.5$  et  $\rho = 0.2$

## 4.5 perspectives

Pour approfondir la caractérisation du régime chaotique observé dans notre système, il serait pertinent de calculer le spectre complet des exposants de Lyapunov  $\lambda_i$  qui donnent une information sur la sensibilité aux conditions initiales [152]. Un exposant de Lyapunov maximal positif indiquerait la présence de chaos, mais cela ne suffirait pas à établir l'existence d'un chaos spatio-temporel. En effet, pour qu'un système présente un véritable chaos spatio-temporel, une série

d'exposants de Lyapunov positifs est nécessaire, traduisant l'amplification des perturbations sur plusieurs modes indépendants. Les étapes pour calculer ces exposants sont données en détaille dans la référence [153].

De plus, le calcul de la dimension de Kaplan-Yorke (ou dimension de Lyapunov), obtenue à partir de la somme cumulée des exposants de Lyapunov jusqu'à annulation, permettrait d'estimer la dimension fractale de l'attracteur étrange sous-jacent. Une caractéristique clé des systèmes étendus est que cette dimension est extensive, c'est-à-dire qu'elle augmente linéairement avec la taille du système physique [154]. Cette analyse fournirait une quantification précise de la complexité du chaos spatio-temporel. La dimension de Kaplan-Yorke, définie comme [135]

$$D_{KY} = k + \frac{1}{|\lambda_{k+1}|} \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad (4.3)$$

où  $k$  est le plus grand entier tel que la somme des  $k$  premiers exposants de Lyapunov est positive, permettrait de caractériser la dimensionnalité effective de l'attracteur étrange. Cette mesure est particulièrement pertinente dans le contexte des systèmes spatio-temporels, car elle fournit une estimation de la complexité intrinsèque de la dynamique observée. Ces analyses quantitatives permettraient d'établir une caractérisation complète de la transition vers le chaos.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les différents régimes dynamiques qui émergent de l'équation (4.1) en faisant varier le paramètre de contrôle  $\mu$ . Et nous avons comparé le diagramme de bifurcation dans le plan  $(h, \gamma)$  de la PDNLSE avec celui de l'équation (4.2).

Les simulations numériques ont révélé la richesse des dynamiques non linéaires du système, notamment l'apparition de régimes chaotiques. Une analyse plus approfondie, fondée sur le calcul des exposants de Lyapunov, constituerait une étape essentielle pour quantifier ces comportements. En particulier, la distinction entre chaos temporel et chaos spatio-temporel repose sur l'existence d'une série d'exposants de Lyapunov positifs, ce qui pourrait être confirmé par l'étude du spectre complet des exposants.

Par ailleurs, l'évaluation de la dimension de Kaplan-Yorke, une quantité extensive, permettrait de caractériser plus précisément la complexité du système et son évolution avec sa taille. Ces perspectives ouvrent la voie à une exploration plus approfondie de la dynamique du chaos dans des systèmes optiques similaires, avec des implications potentielles pour la compréhension des régimes chaotiques dans des systèmes hors équilibre thermodynamique, en présence de la dissipation et les non linéarités.



# Conclusion Générale

Les travaux de recherche menés au cours de cette thèse ont porté sur l'étude analytique et numérique de la dynamique des solitons paramétriques ainsi que de leur interaction dans un oscillateur optique paramétrique dégénéré (DOPO) doublement résonant. Deux configurations ont été considérées : l'une prenant en compte à la fois les non-linéarités quadratique et cubique, et l'autre se limitant à la seule non-linéarité quadratique.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit le contexte théorique en détaillant la propagation de la lumière dans les milieux dispersifs et non linéaires, en mettant particulièrement l'accent sur les différents ordres de susceptibilité. La susceptibilité du second ordre est à l'origine des processus paramétriques tels que ceux se produisant dans un oscillateur paramétrique optique (OPO), tandis que la susceptibilité du troisième ordre est responsable de l'effet Kerr. Nous avons ensuite présenté la version paramétrique de l'équation de Lugiato-Lefever, qui admet comme solution un soliton paramétrique reposant sur un fond nul. Enfin, nous avons étudié l'interaction entre deux solitons paramétriques et mis en évidence la possibilité de formation d'états liés via le verrouillage de leurs queues oscillatoires.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'étude des solitons dans un DOPO doublement résonant combinant les non-linéarités quadratique et cubique. Nous avons introduit le modèle théorique décrivant cette cavité et démontré que les équations couplées régissant les champs signal et pompe peuvent être réduites à une seule équation contenant un terme de convolution, représentant la déplétion de la pompe due à la reconversion du signal via le processus du second harmonique. Ce terme joue un rôle clé dans la formation et la stabilité des solitons, influençant à la fois leur amplitude et leur domaine d'existence. Nous avons également étudié l'effet du walk-off sur les solitons en combinant simulations numériques et approche variationnelle. Nos résultats montrent que l'augmentation du walk-off réduit l'amplitude des solitons et restreint leur domaine d'existence. Une comparaison avec une cavité simplement résonante a révélé un comportement distinct : alors que dans la cavité doublement résonante, l'augmentation du walk-off diminue l'amplitude et la plage d'existence du soliton, la cavité simplement résonante les accroît en raison de l'interaction entre la pompe et le soliton.

Dans le troisième chapitre, nous avons approfondi l'étude des états liés de solitons dans un DOPO doublement résonant, en distinguant deux configurations : l'une intégrant les deux non-linéarités, quadratique et cubique, et l'autre se limitant à la non-linéarité quadratique. À l'aide de la méthode variationnelle, nous avons mis en évidence l'influence du terme de convolution et du walk-off sur la formation des états liés. Nous avons également calculé le potentiel d'interaction entre solitons et identifié les positions d'équilibre, en obtenant une excellente concordance entre nos résultats analytiques et les simulations numériques du modèle complet.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons exploré les dynamiques émergentes dans une cavité simplement résonante comportant à la fois une non-linéarité quadratique et une non-linéarité cubique. L'analyse des diagrammes de bifurcation a révélé la richesse des comportements non linéaires du système, allant de la formation de solitons à l'apparition de régimes chaotiques. Nous avons mis en évidence le rôle du terme de déplétion dans la stabilité des solitons, qui élargit la région de stabilité des solitons.

Ces travaux ouvrent plusieurs perspectives de recherche. D'une part, nos simulations numériques suggèrent la possibilité de la formation d'états liés composés de plusieurs solitons paramétriques (PDCSs), ce qui soulève des questions sur l'interaction entre ces structures et l'impact de la déplétion de la pompe. Une piste prometteuse serait d'étudier la formation d'un cristal de solitons dans une cavité Kerr forcée paramétriquement, avec d'éventuels défauts dans la structure cristalline. La formation de tels cristaux est d'un intérêt fondamental pour la génération de peignes de fréquence et pourrait, dans le cas des PDCSs, être exploitée pour la mise en œuvre de machines d'Ising optiques.

D'autre part, l'apparition du régime chaotique dans le dernier chapitre nécessite une analyse plus approfondie. Le calcul des exposants de Lyapunov et de la dimension de Kaplan-Yorke permettrait de mieux caractériser la complexité du système et son évolution avec ses paramètres de contrôle. Une exploration plus poussée de la dynamique chaotique dans ce type de cavités pourrait avoir des implications importantes pour la compréhension des régimes chaotiques dans les systèmes optiques dissipatifs et non linéaires.

En conclusion, cette thèse contribue à une meilleure compréhension de la dynamique des solitons paramétriques et de leurs interactions, tout en ouvrant de nouvelles perspectives vers l'étude des états liés multi-solitoniques et des régimes chaotiques dans des systèmes similaires.



# Bibliographie

- [1] PA Franken, Alan E Hill, CW el Peters, and Gabriel Weinreich. Generation of optical harmonics. *Physical review letters*, 7(4) :118, 1961.
- [2] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press is an imprint of Elsevier, San Diego, 4 edition, 2019.
- [3] Akihiro Morita. *Theory of sum frequency generation spectroscopy*, volume 97. Springer, 2018.
- [4] RH Stolen and A Ashkin. Optical kerr effect in glass waveguide. *Applied Physics Letters*, 22(6) :294–296, 1973.
- [5] M Sheik-Bahae, David J Hagan, and Eric W Van Stryland. Dispersion and band-gap scaling of the electronic kerr effect in solids associated with two-photon absorption. *Physical review letters*, 65(1) :96, 1990.
- [6] Pascal Del’Haye, Albert Schliesser, Olivier Arcizet, Tom Wilken, Ronald Holzwarth, and Tobias J Kippenberg. Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator. *Nature*, 450(7173) :1214–1217, 2007.
- [7] Pascal Del’Haye, Olivier Arcizet, Albert Schliesser, Ronald Holzwarth, and Tobias J Kippenberg. Full stabilization of a microresonator-based optical frequency comb. *Physical Review Letters*, 101(5) :053903, 2008.
- [8] Flavio C Cruz. Optical frequency combs generated by fourwave mixing in optical fibers for astrophysical spectrometer calibration and metrology. *Optics express*, 16(17) :13267–13275, 2008.
- [9] Michael J Thorpe, Kevin D Moll, R Jason Jones, Benjamin Safdi, and Jun Ye. Broadband cavity ringdown spectroscopy for sensitive and rapid molecular detection. *Science*, 311(5767) :1595–1599, 2006.
- [10] Scott A Diddams, Leo Hollberg, and Vela Mbele. Molecular fingerprinting with the resolved modes of a femtosecond laser frequency comb. *Nature*, 445(7128) :627–630, 2007.
- [11] Avik Dutt, Chaitanya Joshi, Xingchen Ji, Jaime Cardenas, Yoshitomo Okawachi, Kevin Luke, Alexander L Gaeta, and Michal Lipson. On-chip dual-comb source for spectroscopy. *Science advances*, 4(3) :e1701858, 2018.
- [12] AV Muraviev, Viktor O Smolski, Zachary E Loparo, and Konstantin L Vodopyanov. Massively parallel sensing of trace molecules and their isotopologues with broadband subharmonic mid-infrared frequency combs. *Nature Photonics*, 12(4) :209–214, 2018.

- [13] Scott B Papp, Katja Beha, Pascal Del’Haye, Franklyn Quinlan, Hansuek Lee, Kerry J Vahala, and Scott A Diddams. Microresonator frequency comb optical clock. *Optica*, 1(1) :10–14, 2014.
- [14] Zachary L Newman, Vincent Maurice, Tara Drake, Jordan R Stone, Travis C Briles, Darryl T Spencer, Connor Fredrick, Qing Li, Daron Westly, Bojan R Ilic, et al. Architecture for the photonic integration of an optical atomic clock. *Optica*, 6(5) :680–685, 2019.
- [15] Michael T Murphy, Th Udem, R Holzwarth, A Sismann, L Pasquini, C Araujo-Hauck, H Dekker, S D’odorico, M Fischer, TW Hänsch, et al. High-precision wavelength calibration of astronomical spectrographs with laser frequency combs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 380(2) :839–847, 2007.
- [16] Myoung-Gyun Suh, Xu Yi, Yu-Hung Lai, S Leifer, Ivan S Grudinin, G Vasisht, Emily C Martin, Michael P Fitzgerald, G Doppmann, J Wang, et al. Searching for exoplanets using a microresonator astrocomb. *Nature photonics*, 13(1) :25–30, 2019.
- [17] Ewelina Obrzud, Monica Rainer, Avet Harutyunyan, Miles H Anderson, Junqiu Liu, Michael Geiselmann, Bruno Chazelas, Stefan Kundermann, Steve Lecomte, Massimo Cecconi, et al. A microphotonic astrocomb. *Nature Photonics*, 13(1) :31–35, 2019.
- [18] Theodor W Hänsch. Nobel lecture : passion for precision. *Reviews of Modern Physics*, 78(4) :1297–1309, 2006.
- [19] David J Jones, Scott A Diddams, Jinendra K Ranka, Andrew Stentz, Robert S Windeler, John L Hall, and Steven T Cundiff. Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis. *Science*, 288(5466) :635–639, 2000.
- [20] R Holzwarth, Th Udem, Th W Hänsch, JC Knight, WJ Wadsworth, and P St J Russell. Optical frequency synthesizer for precision spectroscopy. *Physical review letters*, 85(11) :2264, 2000.
- [21] Steven T Cundiff and Jun Ye. Colloquium : Femtosecond optical frequency combs. *Reviews of Modern Physics*, 75(1) :325, 2003.
- [22] Akira Hasegawa. Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers. *Optics letters*, 9(7) :288–290, 1984.
- [23] T Hansson, Daniele Modotto, and Stefan Wabnitz. Dynamics of the modulational instability in microresonator frequency combs. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 88(2) :023819, 2013.
- [24] Tobias J. Kippenberg, Alexander L. Gaeta, Michal Lipson, and Michael L. Gorodetsky. Dissipative kerr solitons in optical microresonators. *Science*, 361(6402) :eaan8083, 2018.
- [25] Yali Huang, Qing Li, Junyuan Han, Zhixu Jia, Yongsen Yu, Yuede Yang, Jinlong Xiao, Jiliang Wu, Daming Zhang, Yongzhen Huang, et al. Temporal soliton and optical frequency comb generation in a brillouin laser cavity. *Optica*, 6(12) :1491–1497, 2019.
- [26] François Leo, Stéphane Coen, Pascal Kockaert, Simon-Pierre Gorza, Philippe Emplit, and Marc Haelterman. Temporal cavity solitons in one-dimensional Kerr media as bits in an all-optical buffer. *Nature Photonics*, 4(7) :471–476, July 2010.
- [27] LA Lugiato. Introduction to the feature section on cavity solitons : An overview. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 39(2) :193–196, 2003.

- [28] John W. Miles. Parametrically excited solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 148 :451–460, November 1984.
- [29] I. V Barashenkov, M. M Bogdan, and V. I Korobov. Stability Diagram of the Phase-Locked Solitons in the Parametrically Driven, Damped Nonlinear Schrödinger Equation. *Europhysics Letters (EPL)*, 15(2) :113–118, May 1991.
- [30] L. A. Lugiato and R. Lefever. Spatial Dissipative Structures in Passive Optical Systems. *Physical Review Letters*, 58(21) :2209–2211, May 1987.
- [31] M. Haelterman, S. Trillo, and S. Wabnitz. Dissipative modulation instability in a nonlinear dispersive ring cavity. *Optics Communications*, 91(5-6) :401–407, August 1992.
- [32] Stefano Longhi. Localized structures in optical parametric oscillation. *Physica Scripta*, 56(6) :611, 1997.
- [33] Dikshitulu K. Kalluri. *Principles of Electromagnetic Waves and Materials*. CRC Press, 0 edition, April 2016.
- [34] A Newell and J Moloney. Nonlinear optics addison-wesley. *Reading Mass*, 1992.
- [35] Govind Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Elsevier Inc, Cambridge, 6 edition, 2019.
- [36] M. DiDomenico. Material Dispersion in Optical Fiber Waveguides. *Applied Optics*, 11(3) :652, March 1972.
- [37] A Buryak, P Di Trapani, D. V Skryabin, and S. Trillo. Optical solitons due to quadratic nonlinearities : From basic physics to futuristic applications. *Physics Reports*, 370(2) :63–235, November 2002.
- [38] R Menyuk, R Schiek, and L Torner. Solitary waves due to X(2) :X(2c) cascading. *Journal of the Optical Society of America B*, 11 :2434–2443, 1994.
- [39] Pedro Parra-Rivas, Lendert Gelens, Tobias Hansson, Stefan Wabnitz, and François Leo. Frequency comb generation through the locking of domain walls in doubly resonant dispersive optical parametric oscillators. *Optics Letters*, 44(8) :2004–2007, 2019.
- [40] R Menyuk. Pulse propagation in an elliptically birefringent Kerr medium. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 25 :2674–2682, December 1989.
- [41] Piotr Kabaciński, Tomasz M. Kardaś, Yuriy Stepanenko, and Czesław Radzewicz. Non-linear refractive index measurement by SPM-induced phase regression. *Optics Express*, 27(8) :11018, April 2019.
- [42] Geoffrey New. *Introduction to nonlinear optics*. Cambridge University Press, 2011.
- [43] Robert W Boyd. Quantum-mechanical theory of the nonlinear optical susceptibility. *Non-linear optics*, pages 129–187, 2003.
- [44] Hermann A Haus. Waves and fields in optoelectronics. (*No Title*), 1984.
- [45] RW Hellwarth. Third-order optical susceptibilities of liquids and solids. *Progress in Quantum Electronics*, 5 :1–68, 1977.
- [46] Fujio Shimizu. Frequency Broadening in Liquids by a Short Light Pulse. *Physical Review Letters*, 19(19) :1097–1100, November 1967.

- [47] T. K. Gustafson, J. P. Taran, H. A. Haus, J. R. Lifshitz, and P. L. Kelley. Self-Modulation, Self-Steepening, and Spectral Development of Light in Small-Scale Trapped Filaments. *Physical Review*, 177(1) :306–313, January 1969.
- [48] M N Islam, L F Mollenauer, H Stolen, and H T Shang. Cross-phase modulation in optical fibers. *optics letters*, 12 :625–627, 1987.
- [49] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 65(3) :851–1112, July 1993.
- [50] G Nicolis and I Prigogine. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems : From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*. Wiley, New York, 1977.
- [51] D. Escaff, C. Fernandez-Oto, M. G. Clerc, and M. Tlidi. Localized vegetation patterns, fairy circles, and localized patches in arid landscapes. *Physical Review E*, 91(2) :022924, February 2015.
- [52] C Godrèche and P Manneville. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*. Cambridge University Press, 1998.
- [53] A Goldbeter. Dissipative structures in biological systems : Bistability, oscillations, spatial patterns and waves. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci*, 376, July 2018.
- [54] G. Grynberg, E. Le Bihan, P. Verkerk, P. Simoneau, J.R.R. Leite, D. Bloch, S. Le Boiteux, and M. Ducloy. Observation of instabilities due to mirrorless four-wave mixing oscillation in sodium. *Optics Communications*, 67(5) :363–366, August 1988.
- [55] V.E. Zakharov and L.A. Ostrovsky. Modulation instability : The beginning. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 238(5) :540–548, March 2009.
- [56] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita. Observation of modulational instability in optical fibers. *Physical Review Letters*, 56(2) :135–138, January 1986.
- [57] J.S Russell. Report on Waves. In Proceedings of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. Technical report, York, UK, September 1844.
- [58] Zakharov and A.B Shabat. Exact theory of two-dimensional self- focusing and one-dimensional self-modulation of wave in nonlinear. *Sov. Phys. JETP*, 34 :62–69, 1972.
- [59] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Physical Review Letters*, 15(6) :240–243, August 1965.
- [60] Mark J Ablowitz, Barbara Prinari, and A David Trubatch. *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems*, volume 302. Cambridge University Press, 2004.
- [61] Yuri S Kivshar and Govind P Agrawal. *Optical solitons : from fibers to photonic crystals*. Academic press, 2003.
- [62] N. Akhmediev and A. Ankiewicz. *Dissipative Solitons : From Optics to Biology and Medicine*, volume 751 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [63] L.A. Lugiato. Introduction to the feature section on cavity solitons : An overview. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 39(2) :193–196, February 2003.
- [64] S Wabnitz. Suppression of interactions in a phase-locked soliton optical memory. *optics letters*, 18(8), 1993.

- [65] T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost, C. Y. Wang, N. M. Kondratiev, M. L. Gorodetsky, and T. J. Kippenberg. Temporal solitons in optical microresonators. *Nature Photonics*, 8(2) :145–152, February 2014.
- [66] S. Longhi. Ultrashort-pulse generation in degenerate optical parametric oscillators. *Optics Letters*, 20(7) :695, April 1995.
- [67] Nicolas Englebert, Francesco De Lucia, Pedro Parra-Rivas, Carlos Mas Arabí, Pier-John Sazio, Simon-Pierre Gorza, and François Leo. Parametrically driven Kerr cavity solitons. *Nature Photonics*, 15(11) :857–861, November 2021.
- [68] S. Mosca, M. Parisi, I. Ricciardi, F. Leo, T. Hansson, M. Erkintalo, P. Maddaloni, P. De Natale, S. Wabnitz, and M. De Rosa. Modulation Instability Induced Frequency Comb Generation in a Continuously Pumped Optical Parametric Oscillator. *Physical Review Letters*, 121(9) :093903, August 2018.
- [69] F. Leo, T. Hansson, I. Ricciardi, M. De Rosa, S. Coen, S. Wabnitz, and M. Erkintalo. Walk-Off-Induced Modulation Instability, Temporal Pattern Formation, and Frequency Comb Generation in Cavity-Enhanced Second-Harmonic Generation. *Physical Review Letters*, 116(3) :033901, January 2016.
- [70] Junru Wu, Robert Keolian, and Isadore Rudnick. Observation of a Nonpropagating Hydrodynamic Soliton. *Physical Review Letters*, 52(16) :1421–1424, April 1984.
- [71] V.E. Zakharov, S.L. Musher, and A.M. Rubenchik. Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena. *Physics Reports*, 129(5) :285–366, December 1985.
- [72] M. Bondila, I. V. Barashenkov, and M. M Bogdan. Topography of attractors of the parametrically driven nonlinear Schrödinger equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 87 :314–320, 1995.
- [73] Boris A. Malomed. Bound solitons in the nonlinear Schrödinger–Ginzburg-Landau equation. *Physical Review A*, 44(10) :6954–6957, November 1991.
- [74] Boris A. Malomed. Bound states of envelope solitons. *Physical Review E*, 47(4) :2874–2880, April 1993.
- [75] David Cai, A. R. Bishop, Niels Grønbech-Jensen, and Boris A. Malomed. Bound solitons in the ac-driven, damped nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review E*, 49(2) :1677–1679, February 1994.
- [76] A Buryak and N. Akhmediev. Stability criterion for stationary bound states of solitons with radiationless oscillating tails. *Physical Review E*, 51 :3572–3578, 1995.
- [77] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and J. Soto-Crespo. Multisoliton Solutions of the Complex Ginzburg-Landau Equation. *Physical Review Letters*, 79(21) :4047–4051, November 1997.
- [78] I. V. Barashenkov, Yu. S. Smirnov, and N. V. Alexeeva. Bifurcation to multisoliton complexes in the ac-driven, damped nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review E*, 57(2) :2350–2364, February 1998.
- [79] Yadong Wang, François Leo, Julien Fatome, Miro Erkintalo, Stuart G Murdoch, and Stéphane Coen. Universal mechanism for the binding of temporal cavity solitons. *Optica*, 4(8) :855, August 2017.

- [80] M. G Clerc, S Coulibaly, N Mujica, R Navarro, and T Sauma. Soliton pair interaction law in parametrically driven Newtonian fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367(1901) :3213–3226, August 2009.
- [81] M. G Clerc, S Coulibaly, L Gordillo, N Mujica, and R Navarro. Coalescence cascade of dissipative solitons in parametrically driven systems. *Physical Review E*, 84(3) :036205, September 2011.
- [82] Nicolas Englebert, Francesco De Lucia, Pedro Parra-Rivas, Carlos Mas Arabí, Pier-John Sazio, Simon-Pierre Gorza, and François Leo. Parametrically driven kerr cavity solitons. *Nature Photonics*, 15(11) :857–861, 2021.
- [83] Mingming Nie, Yijun Xie, and Shu-Wei Huang. Deterministic generation of parametrically driven dissipative kerr soliton. *Nanophotonics*, 10(6) :1691–1699, 2021.
- [84] Carlos Mas Arabí, Nicolas Englebert, Pedro Parra-Rivas, Simon-Pierre Gorza, and François Leo. Depletion-limited kerr solitons in singly resonant optical parametric oscillators. *Optics Letters*, 48(7) :1950–1953, 2023.
- [85] Yulei Ding, Ziqi Wei, Yifei Wang, Changxi Yang, and Chengying Bao. Theoretical analysis of microcavity simulton reinforced by  $\chi$  (2) and  $\chi$  (3) nonlinearities. *Physical Review Letters*, 132(1) :013801, 2024.
- [86] Tobias J Kippenberg, Ronald Holzwarth, and Scott A Diddams. Microresonator-based optical frequency combs. *science*, 332(6029) :555–559, 2011.
- [87] David J Moss, Roberto Morandotti, Alexander L Gaeta, and Michal Lipson. New cmos-compatible platforms based on silicon nitride and hydex for nonlinear optics. *Nature photonics*, 7(8) :597–607, 2013.
- [88] Tobias Herr, Victor Brasch, John D Jost, Christine Y Wang, Nikita M Kondratiev, Michael L Gorodetsky, and Tobias J Kippenberg. Temporal solitons in optical microresonators. *Nature Photonics*, 8(2) :145–152, 2014.
- [89] François Leo, Stéphane Coen, Pascal Kockaert, Simon-Pierre Gorza, Philippe Emplit, and Marc Haelterman. Temporal cavity solitons in one-dimensional kerr media as bits in an all-optical buffer. *Nature Photonics*, 4(7) :471–476, 2010.
- [90] Stéphane Coen, Hamish G Randle, Thibaut Sylvestre, and Miro Erkintalo. Modeling of octave-spanning kerr frequency combs using a generalized mean-field lugiato–lefever model. *Optics letters*, 38(1) :37–39, 2012.
- [91] Iolanda Ricciardi, Simona Mosca, Maria Parisi, Pasquale Maddaloni, Luigi Santamaria, Paolo De Natale, and Maurizio De Rosa. Frequency comb generation in quadratic nonlinear media. *Physical Review A*, 91(6) :063839, 2015.
- [92] Simona Mosca, Iolanda Ricciardi, Maria Parisi, Pasquale Maddaloni, Luigi Santamaria, Paolo De Natale, and Maurizio De Rosa. Direct generation of optical frequency combs in  $\chi$  (2) nonlinear cavities. *Nanophotonics*, 5(2) :316–331, 2016.
- [93] Sergey Smirnov, Boris Sturman, Evgeny Podivilov, and Ingo Breunig. Walk-off controlled self-starting frequency combs in  $\chi$  (2) optical microresonators. *Optics Express*, 28(12) :18006–18017, 2020.

- [94] Pedro Parra-Rivas, Lendert Gelens, and François Leo. Localized structures in dispersive and doubly resonant optical parametric oscillators. *Physical Review E*, 100(3) :032219, 2019.
- [95] Pedro Parra-Rivas, Carlos Mas-Arabí, and François Leo. Parametric localized patterns and breathers in dispersive quadratic cavities. *Physical Review A*, 101(6) :063817, 2020.
- [96] Alberto Villois, N Kondratiev, Ingo Breunig, Danila N Puzyrev, and Dmitry V Skryabin. Frequency combs in a microring optical parametric oscillator. *Optics letters*, 44(18) :4443–4446, 2019.
- [97] Mingming Nie and Shu-Wei Huang. Quadratic soliton mode-locked degenerate optical parametric oscillator. *Optics Letters*, 45(8) :2311–2314, 2020.
- [98] Mingming Nie and Shu-Wei Huang. Symbiotic quadratic soliton mode-locked non-degenerate optical parametric oscillators. *Optics Letters*, 45(15) :4184–4187, 2020.
- [99] M Nie and S-W Huang. Quadratic solitons in singly resonant degenerate optical parametric oscillators. *Physical Review Applied*, 13(4) :044046, 2020.
- [100] Arkadev Roy, Rajveer Nehra, Saman Jahani, Luis Ledezma, Carsten Langrock, Martin Fejer, and Alireza Marandi. Temporal walk-off induced dissipative quadratic solitons. *Nature Photonics*, 16(2) :162–168, 2022.
- [101] Miriam Leonhardt, David Paligora, Nicolas Englebert, François Leo, Julien Fatome, and Miro Erkintalo. Parametrically-driven temporal cavity solitons in a bichromatically-driven pure kerr resonator. *arXiv preprint arXiv :2206.09533*, 2022.
- [102] Grégory Moille, Miriam Leonhardt, David Paligora, Nicolas Englebert, François Leo, Julien Fatome, Kartik Srinivasan, and Miro Erkintalo. Parametrically driven pure-kerr temporal solitons in a chip-integrated microcavity. *Nature Photonics*, pages 1–8, 2024.
- [103] François Leo, Tobias Hansson, Iolanda Ricciardi, Maurizio De Rosa, Stéphane Coen, Stefan Wabnitz, and Miro Erkintalo. Frequency-comb formation in doubly resonant second-harmonic generation. *Physical Review A*, 93(4) :043831, 2016.
- [104] Marcel G Clerc, Saliya Coulibaly, Mónica A Garcia-Ñustes, and Yair Zárate. Transverse phase shielding solitons in the degenerated optical parametric oscillator. *Optics Communications*, 354 :163–167, 2015.
- [105] Junru Wu, Robert Keolian, and Isadore Rudnick. Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton. *Physical review letters*, 52(16) :1421, 1984.
- [106] John W Miles. Parametrically excited solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 148 :451–460, 1984.
- [107] Stefano Longhi. Hydrodynamic equation model for degenerate optical parametric oscillators. *Journal of Modern Optics*, 43(6) :1089–1094, 1996.
- [108] Stefano Longhi. Ultrashort-pulse generation in degenerate optical parametric oscillators. *Optics letters*, 20(7) :695–697, 1995.
- [109] IV Barashenkov, MM Bogdan, and VI Korobov. Stability diagram of the phase-locked solitons in the parametrically driven, damped nonlinear schrödinger equation. *Europhysics Letters*, 15(2) :113, 1991.

- [110] Mariana Bondila, Igor V Barashenkov, and Mikhail M Bogdan. Topography of attractors of the parametrically driven nonlinear schrödinger equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 87(1-4) :314–320, 1995.
- [111] Dan Anderson. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Physical review A*, 27(6) :3135, 1983.
- [112] Tobias Herr, Michael L Gorodetsky, and Tobias J Kippenberg. Dissipative kerr solitons in optical microresonators. *Nonlinear optical cavity dynamics : from microresonators to fiber lasers*, pages 129–162, 2016.
- [113] Kevin W Cassel. *Variational methods with applications in science and engineering*. Cambridge University Press, 2013.
- [114] Franz G Mertens, Niurka R Quintero, and Alan R Bishop. Nonlinear schrödinger equation with spatiotemporal perturbations. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 81(1) :016608, 2010.
- [115] Boris A Malomed. Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields. In *Progress in optics*, volume 43, pages 71–193. Elsevier, 2002.
- [116] Xu Yi, Qi-Fan Yang, Ki Youl Yang, and Kerry Vahala. Theory and measurement of the soliton self-frequency shift and efficiency in optical microcavities. *Optics letters*, 41(15) :3419–3422, 2016.
- [117] Jae K Jang, Miro Erkintalo, Stuart G Murdoch, and Stéphane Coen. Bound states of temporal cavity solitons. In *Nonlinear Photonics*, pages JM5A–59. Optica Publishing Group, 2014.
- [118] Jae K Jang, Miro Erkintalo, Stuart G Murdoch, and Stéphane Coen. Ultraweak long-range interactions of solitons observed over astronomical distances. *Nature Photonics*, 7(8) :657–663, 2013.
- [119] B Schäpers, M Feldmann, T Ackemann, and W Lange. Interaction of localized structures in an optical pattern-forming system. *Physical Review Letters*, 85(4) :748, 2000.
- [120] Jiaxin Dai, Jiali Zeng, Wei Hu, and Daquan Lu. The bound states of pure-quartic solitons. *Chaos, Solitons & Fractals*, 165 :112867, 2022.
- [121] C Milián and DV Skryabin. Soliton families and resonant radiation in a micro-ring resonator near zero group-velocity dispersion. *Optics Express*, 22(3) :3732–3739, 2014.
- [122] D Turaev, AG Vladimirov, and S Zelik. Long-range interaction and synchronization of oscillating dissipative solitons. *Physical review letters*, 108(26) :263906, 2012.
- [123] Dmitry V Skryabin and William J Firth. Interaction of cavity solitons in degenerate optical parametric oscillators. *Optics letters*, 24(15) :1056–1058, 1999.
- [124] Stefano Longhi, G Steinmeyer, and WS Wong. Variational approach to pulse propagation in parametrically amplified optical systems. *JOSA B*, 14(8) :2167–2173, 1997.
- [125] Akira Hasegawa. Soliton-based optical communications : An overview. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(6) :1161–1172, 2000.
- [126] Pedro Parra-Rivas, Damia Gomila, Pere Colet, and Lendert Gelens. Interaction of solitons and the formation of bound states in the generalized lugiato-lefever equation. *The European Physical Journal D*, 71 :1–13, 2017.

- [127] Andrey B Matsko and Lute Maleki. On timing jitter of mode locked kerr frequency combs. *Optics express*, 21(23) :28862–28876, 2013.
- [128] Valery E Lobanov, Olga V Borovkova, and Boris A Malomed. Dissipative quadratic solitons supported by a localized gain. *Physical Review A*, 90(5) :053820, 2014.
- [129] Alexander W Bruch, Xianwen Liu, Zheng Gong, Joshua B Surya, Ming Li, Chang-Ling Zou, and Hong X Tang. Pockels soliton microcomb. *Nature Photonics*, 15(1) :21–27, 2021.
- [130] Marc Jankowski, Alireza Marandi, CR Phillips, Ryan Hamerly, Kirk A Ingold, Robert L Byer, and MM Fejer. Temporal simultons in optical parametric oscillators. *Physical review letters*, 120(5) :053904, 2018.
- [131] C Balslev Clausen, Peter Leth Christiansen, and L Torner. Perturbative approach to the interaction of solitons in quadratic nonlinear media. *Optics communications*, 136(1-2) :185–192, 1997.
- [132] Dmitry V Skryabin. Sech-squared pockels solitons in the microresonator parametric down-conversion. *Optics Express*, 29(18) :28521–28529, 2021.
- [133] F. Leo, T. Hansson, I. Ricciardi, M. De Rosa, S. Coen, S. Wabnitz, and M. Erkintalo. Frequency-comb formation in doubly resonant second-harmonic generation. *Physical Review A*, 93(4) :043831, April 2016.
- [134] Ed Dissipative Solitons. by n. akhmediev and a. ankiewicz. *Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin, 2005.*
- [135] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [136] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2) :130–141, 1963.
- [137] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [138] David Ruelle and Floris Takens. On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, 12 :1–44, 1971.
- [139] Edward Lorenz. Predictability. In *139th AAAS meeting*, pages 1–6, 1972.
- [140] James Gleick. *Chaos : Making a new science*. Penguin, 2008.
- [141] Robert M May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560) :459–467, 1976.
- [142] Zheng Liu, Mardia Ouali, Saliya Coulibaly, MG Clerc, M Taki, and Mustapha Tlidi. Characterization of spatiotemporal chaos in a kerr optical frequency comb and in all fiber cavities. *Optics letters*, 42(6) :1063–1066, 2017.
- [143] Saliya Coulibaly, Majid Taki, Abdelkrim Bendahmane, Guy Millot, Bertrand Kibler, and Marcel Gabriel Clerc. Turbulence-induced rogue waves in kerr resonators. *Physical Review X*, 9(1) :011054, 2019.
- [144] Luigi A Lugiato and René Lefever. Spatial dissipative structures in passive optical systems. *Physical review letters*, 58(21) :2209, 1987.
- [145] H Friedel, EW Laedke, and KH Spatschek. Bifurcations and nonlinear dynamics of surface waves in faraday resonance. *Journal of Fluid Mechanics*, 284 :341–358, 1995.

- [146] Mitchell J Feigenbaum. Universal behavior in nonlinear systems. *Universality in chaos*, pages 49–84, 1980.
- [147] Kathleen T Alligood, Tim D Sauer, James A Yorke, and David Chillingworth. Chaos : an introduction to dynamical systems. *SIAM Review*, 40(3) :732–732, 1998.
- [148] Evelyn Sander and James A Yorke. Period-doubling cascades galore. *Ergodic theory and dynamical systems*, 31(4) :1249–1267, 2011.
- [149] Yves Pomeau and Paul Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74 :189–197, 1980.
- [150] Sergio Elaskar and Ezequiel del Río. Review of chaotic intermittency. *Symmetry*, 15(6) :1195, 2023.
- [151] Alan R Bishop, M Greg Forest, David W McLaughlin, and Edward A Overman II. A quasi-periodic route to chaos in a near-integrable pde. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 23(1-3) :293–328, 1986.
- [152] Arkady Pikovsky and Antonio Politi. *Lyapunov exponents : a tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press, 2016.
- [153] C Skokos. The lyapunov characteristic exponents and their computation dynamics of small solar system bodies and exoplanets (lecture notes in physics vol 790) ed souchay jj and dvorak r, 2010.
- [154] David Ruelle. Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 87 :287–302, 1982.