Université de Lille

Région Hauts-de-France

École doctorale **Sciences de la Matière, du Rayonnement et de l'Environnement**

Unité de recherche **Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM)**

Thèse présentée par **Zoubair Daouma**

Soutenue le **10 décembre 2025**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Physique**

Spécialité **Milieux dilués et optique fondamentale**

Effets des symétries et des classes d'universalité dans un modèle de rotateur frappé quantique avec couplage spin-orbite

Thèse dirigée par Radu Chicireanu directeur
Adam Rançon co-directeur

Composition du jury

Rapporteurs	Christian Miniatura	directeur de recherche au CNRS Nice	
	Vincent Josse	professeur à l'Université Paris-Saclay	
Examinateurs	Alberto Amo	directeur de recherche au CNRS Lille	président du jury
	Anna Minguzzi	directeur de recherche au CNRS Grenoble	
Directeurs de thèse	Radu Chicireanu	chargé de recherche au CNRS Lille	
	Adam Rançon	MCF HDR à l'Université de Lille	






Université de Lille

Région Hauts-de-france

Doctoral School **Sciences de la Matière, du Rayonnement et de l'Environnement**

University Department **Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM)**

Thesis defended by **Zoubair Daouma**

Defended on **December 10, 2025**

In order to become Doctor from Université de Lille

Academic Field **Physics**

Speciality **Dilute Media and Fundamental Optics**

Effects of symmetries and universality classes in a quantum kicked rotor model with spin-orbit coupling

Thesis supervised by	Radu Chicireanu	Supervisor
	Adam Rançon	Co-Supervisor

Committee members

Referees	Christian Miniatura	Senior Researcher at CNRS Nice	
	Vincent Josse	Professor at Université Paris-Saclay	
Examiners	Alberto Amo	Senior Researcher at CNRS Lille	Committee President
	Anna Minguzzi	Senior Researcher at CNRS Grenoble	
Supervisors	Radu Chicireanu	Junior Researcher at CNRS Lille	
	Adam Rançon	HDR Associate Professor at Université de Lille	

Mots clés : atomes ultrafroids, kicked rotor, systèmes désordonnées
Keywords: ultracold atoms, kicked rotor, disordered systems

Cette thèse a été préparée au

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM)
Bâtiment P5 campus Cité Scientifique
2 Avenue Jean Perrin
59655 Villeneuve d'Ascq cedex
France

☎ +33 (0)3 20 33 60 37
🖷 (33)(0)3 21 46 55 75
✉ phlam-contact@univ-lille.fr
Site https://phlam.univ-lille.fr/



A mes parents

A mes amis

Effets des symétries et des classes d'universalité dans un modèle de rotateur frappé quantique avec couplage spin-orbite

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des effets des symétries et des classes d'universalité dans un modèle de rotateur frappé quantique avec couplage spin-orbite, réalisé comme simulateur de systèmes désordonnés. Dans le régime quantique, le kicked rotor présente une localisation dynamique analogue à la localisation d'Anderson, ainsi que des signatures interférentielles telles que la rétrodiffusion cohérente, le retour à l'origine et la diffusion cohérente vers l'avant. En introduisant un degré de liberté de spin et un couplage spin-orbite synthétique, nous montrons comment la physique bascule vers la classe de symétrie symplectique, caractérisée par une antilocalisation faible et des interférences destructives entre chemins temporellement inversés.
Nous analysons plusieurs observables numériques permettant d'identifier la classe d'universalité réalisée : la dynamique de la probabilité de retour à l'origine, la fonction d'échelle $\beta(g)$ et les statistiques spectrales de l'opérateur de Floquet. Un modèle à deux périodes temporelles, expérimentalement réalisable avec des atomes ultra-froids, est proposé et étudié en détail.
Enfin, en modulant quasi-périodiquement l'amplitude des kicks, nous simulons une dimension effective supplémentaire et mettons en évidence une transition métal–isolant bidimensionnelle dans la classe symplectique. L'exposant critique est extrait par par une analyse d'échelle dynamique et confirme l'universalité de la transition observée.

Mots clés : atomes ultrafroids, kicked rotor, systèmes désordonnées

---

Effects of symmetries and universality classes in a quantum kicked rotor model with spin-orbit coupling

Abstract

This thesis is devoted to the study of symmetry effects and universality classes in a quantum kicked rotor model with spin-orbit coupling, used as a simulator of disordered systems. In the quantum regime, the kicked rotor exhibits dynamical localization analogous to Anderson localization, as well as interference signatures such as coherent backscattering, enhanced return to the origin, and coherent forward scattering. By introducing a spin degree of freedom and a synthetic spin-orbit coupling, we show how the physics shifts toward the symplectic symmetry class, characterized by weak antilocalization and destructive interference between time-reversed paths.
We analyze several numerical observables allowing the identification of the realized universality class: the dynamics of the return probability, the scaling function $\beta(g)$, and the spectral statistics of the Floquet operator. A two-period time-dependent model, experimentally feasible with ultracold atoms, is proposed and studied in detail.
Finally, by quasi-periodically modulating the kick amplitude, we simulate an additional effective dimension and demonstrate a two-dimensional metal–insulator transition in the symplectic class. The critical exponent is extracted using dynamical scaling methods and confirms the universality of the observed transition.

Keywords: ultracold atoms, kicked rotor, disordered systems

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM)
Bâtiment P5 campus Cité Scientifique – 2 Avenue Jean Perrin – 59655 Villeneuve d'Ascq cedex – France

Remerciements

Si je venais à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à mon parcours, je n'en finirais pas. C'est pourquoi j'essaierai d'être rapide dans ces remerciements, même si chacun mérite une pensée sincère de ma part.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes deux directeurs de thèse, M. Radu Chicireanu et M. Adam Rançon, pour leur encadrement tout au long de ces travaux. Leurs conseils avisés, leurs suggestions pertinentes et nos nombreuses discussions m'ont énormément apporté et ont grandement contribué à l'avancement de ce projet. Ils ont toujours été disponibles pour m'orienter et me soutenir, et je leur suis profondément reconnaissant pour leur patience et leur investissement.

Je souhaite également remercier chaleureusement mes collègues et amis du laboratoire PhLAM (Physique des Lasers, Atomes et Molécules) de l'Université de Lille. En particulier, Yannis et Farid, avec qui j'ai partagé mon bureau, ont fait de ces trois années de thèse un véritable plaisir grâce à leur camaraderie et à leur soutien quotidien. Je n'oublie pas Théo (notre expérimentateur), Benjamin, Kayce, ainsi que Maxim, qui m'a appris avec patience à lancer mes simulations sur le cluster du laboratoire, et Zoheir, dont l'aide m'a été précieuse et à qui je souhaite un grand courage et beaucoup de réussite dans la suite de sa carrière. Grâce à vous tous, ces années de thèse resteront pour moi une expérience humaine et scientifique inoubliable.

J'exprime ma gratitude aux membres du jury de ma thèse, et tout particulièrement aux rapporteurs, M. Vincent Josse et M. Christian Miniatura, qui ont accepté d'évaluer ce travail. J'ai lu avec intérêt nombre de leurs publications scientifiques, qui m'ont beaucoup inspiré au cours de mon propre projet doctoral. Je suis honoré qu'ils aient consacré du temps à l'examen de mon manuscrit, et je les en remercie sincèrement. Je remercie également Mme Anna Minguzzi et M. Alberto Amo d'avoir accepté de faire partie du jury et pour l'attention qu'ils ont portée à ce travail.

Mes remerciements vont également à l'ensemble du personnel du laboratoire PhLAM. Qu'il s'agisse des chercheurs, des doctorants, des post-doctorants ou du personnel administratif, chacun a contribué à créer une ambiance de travail à la fois studieuse et conviviale.

Je tiens aussi à souligner ma reconnaissance envers M. Rachid Mesrar, l'un des meilleurs

enseignants que j'ai eu la chance de rencontrer. Ses cours de mécanique classique ont marqué profondément ma formation. Sa rigueur, sa clarté et sa passion pour la physique m'ont beaucoup inspiré et m'accompagneront tout au long de mon parcours scientifique.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans le soutien financier du CNRS et de la Région Hauts-de-France, que je remercie chaleureusement pour leur confiance et leur engagement dans le développement de la recherche scientifique.

Je n'oublie pas non plus de remercier tous mes amis, aussi bien au Maroc qu'en France notamment à Agadir à Nancy et à Lille pour leur amitié et leur soutien moral tout au long de cette thèse. Vos encouragements, même à distance, m'ont été très précieux pour surmonter les moments difficiles et rester motivé. J'adresse également mes encouragements à ceux d'entre vous qui poursuivent des recherches dans des domaines variés. Que ce soit en physique des particules, en thermodynamique des trous noirs ou en information quantique, en biologie, en ingénierie, je vous souhaite beaucoup de succès dans vos travaux.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers tous mes professeurs de l'Université de Lorraine à Nancy, en particulier M. Dragi Karevski et M. Malte Henkel. Leurs cours et leurs conseils m'ont permis d'acquérir de solides bases en physique théorique, et j'ai énormément appris à leur contact. Leur immense savoir et leur passion m'ont toujours impressionné et motivé. Je me suis souvent senti très humble face à l'étendue de leurs connaissances, et je les remercie d'avoir éveillé en moi le goût de la recherche en physique théorique.

Je tiens également à remercier Julien, qui m'a permis d'intervenir en enseignement à l'Université de Lille. Je suis aussi reconnaissant envers M. Thierry Réveillé et M. Dragi Karevski, qui m'ont offert l'opportunité d'enseigner à l'Université de Lorraine à Nancy. Pouvoir transmettre mes connaissances dans l'université où j'avais moi-même étudié a été un honneur et une expérience très enrichissante.

Enfin, je remercie du fond du cœur toutes les personnes, nommées ou non ici, qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Table des matières

Résumé **xi**

Remerciements **xiii**

Table des matières **xv**

Introduction **1**

1 État de l'art **5**
1.1 Modéle d'Anderson 10
1.1.1 Effets d'interférence quantique : rétrodiffusion cohérente (CBS) et retour amplifié à l'origine (ERO) 12
1.1.2 Observations expérimentales de la localisation faible (CBS et ERO) 15
1.1.3 Diffusion cohérente vers l'avant (Coherent Forward Scattering : CFS) 18
1.1.4 Anti-localisation faible (Weak Anti-Localization : WAL) 20
1.2 Théorie d'échelle à un paramètre 23
1.2.1 Criticalité dans la classe symplectique 27
1.2.2 Kicked rotor quantique : un modèle privilégié pour l'étude de la localisation et de l'antilocalisation faible 29
1.2.3 Loi d'échelle à un paramètre dans le contexte du kicked rotor quantique 30
1.3 Théorie des matrices aléatoires et localisation d'Anderson 32

2 Le Kicked Rotor **37**
2.1 Le Kicked Rotor classique 37
2.1.1 Présentation du modèle 37
2.1.2 Application standard de Chirikov 40
2.1.3 Comportement diffusif 43
2.1.4 Exposants de Lyapunov du kicked rotor 45
2.2 Le Kicked Rotor Quantique 48
2.2.1 Evolution du système 49
2.2.2 Simulation numérique 53
2.2.3 Lien avec le modéle d'Anderson 56
2.3 Conclusion 58

3 Symétries et Classes de Symétrie dans le Kicked Rotor Quantique **61**
3.1 Renversement du temps 61
3.1.1 Le renversement du temps en physique classique 62

3.1.2 Le renversement du temps en physique Quantique 65
3.2 Théorie des classes de symétrie 68
3.2.1 Classification de Wigner-Dyson 68
3.2.2 Classification d'Altland-Zirnbauer 69
3.3 Symétries pertinentes pour le kicked rotor quantique 72
3.3.1 Cas sans spin 72
3.3.2 Cas avec spin 76
3.4 Signatures numériques des classes de symétries 82
3.4.1 Signature 1 : le retour à l'origine 82
3.4.2 Signature 2 : la fonction d'échelle 86
3.4.3 Signature 3 : les statistiques des niveaux 88
3.5 Conclusion 91

4 Vers un simulateur quantique réalisable expérimentalement 93
4.1 Présentation du modèle 95
4.1.1 Symétrie du Modèle SDQKR 97
4.1.2 Influence de la symétrie temporelle sur l'apparition de l'anti-ERO 99
4.1.3 Dynamique temporelle des signaux Anti-ERO/ERO et $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ dans le modèle SDQKR 101
4.2 Comportement de la fonction d'échelle $\beta(g)$ dans le modèle SDQKR . . . 110
4.3 Statistiques spectrales du modèle SDQKR 113
4.4 Conclusion 114

5 Origine des interférences cohérentes 117
5.1 Doublement de la probabilité de retour à l'origine dans le QKR sans spin 118
5.2 Contraste du pic de retour à l'origine dans le modèle TBS. 122
5.2.1 classe symplectique 122
5.2.2 Classe unitaire 126
5.2.3 Classe orthogonale 128
5.3 Contraste du pic de retour à l'origine dans le modèle SDQKR 130
5.3.1 Cas symplectique 130
5.3.2 Cas unitaire 132
5.3.3 Cas orthogonale 135
5.4 Conclusion 137

6 Transition d'Anderson symplectique bidimensionnelle 139
6.1 Introduction 139
6.2 Modulation quasi-périodique appliquée au kicked rotor avec spin 142
6.3 Diagramme de phase critique pour le kicked rotor symplectique 143
6.4 Détermination de l'exposant critique 145
6.5 Validation de l'hypothèse d'échelle à un paramètre 149
6.6 Loi d'échelle : beta(g) en 2d symplectique 150
6.7 Loi d'échelle à deux paramètres 152
6.8 Cas du kicked rotor Symplectique 2d avec Désordre Quasi-Périodique Déterministe 154
6.9 Conclusion 156

Conclusion 157

Bibliographie **161**

A Calcul détaillé I **175**
A.1 Corrélations classiques 175
A.2 Mapping du Kicked Rotor sur le modéle d'Anderson 177

B Calcul détaillé II **181**
B.1 Propriétés de l'opérateur de renversement du temps 181
B.2 Mapping du Kicked Rotor avec Spin 1/2 sur le modèle des laissons fortes avec désordre 183
B.3 Hamiltoniens invariants sous $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$ et symétries géométriques unitaires 186
B.4 Simulation numérique du modèle TBS 190

C Effet du paramètre Φ sur la transition COE–CUE **193**

Introduction

L'étude du transport des ondes et des particules en milieux désordonnés est au cœur d'une large part de la physique moderne, des systèmes électroniques mésoscopiques aux ondes classiques, jusqu'aux gaz d'atomes froids. Depuis le travail fondateur d'Anderson, qui a démontré l'absence de diffusion dans certains réseaux aléatoires et l'émergence d'états exponentiellement localisés, la localisation d'Anderson s'est imposée comme un paradigme majeur pour comprendre les transitions métal–isolant induites par le désordre [1]. Ce phénomène a donné lieu à de nombreux développements théoriques (théorie d'échelle, modèles effectifs, méthodes diagrammatiques) et expérimentaux (films minces, structures bidimensionnelles, optique et acoustique, atomes ultra-froids), visant à en préciser la portée, les signatures et l'universalité.

Dans le régime de désordre modéré, où les corrélations quantiques ne sont pas totalement détruites, des corrections interférentielles s'ajoutent au transport diffusif classique. Elles se manifestent par une augmentation de la probabilité de retour et une diminution de la conductance moyennée : c'est la localisation faible (weak localization), conséquence d'une interférence constructive entre paires de chemins réciproques liés par la symétrie de renversement du temps. Dans différents contextes d'ondes classiques (lumière, acoustique, ondes élastiques), cette correction se manifeste par la rétrodiffusion cohérente (coherent backscattering : CBS), c'est-à-dire par une augmentation de l'intensité diffusée dans la direction exactement opposée à celle de l'incidence [2-7] ; dans les gaz d'atomes froids, des expériences dédiées ont permis de mettre en évidence la CBS atomique [8]. Une autre signature, intimement liée à la même physique d'interférence entre chemins réciproques, est l'Enhanced Return to the Origin (ERO), qui correspond à un doublement de la probabilité de retour à l'origine ; ce phénomène a été observé directement dans des systèmes d'atomes froids soumis à des perturbations (kicks) périodiques déphasées [9]. À temps long, la diffusion cohérente vers l'avant (Coherent Forward Scattering, CFS) est apparue comme un jumeau interférentiel du CBS, se formant dans la direction initiale de propagation et fournissant un diagnostic fin de la non-ergodicité et de l'établissement de la phase localisée [10-13]. Dans ce travail, nous montrerons que des contributions reposant sur la même physique interférentielle que le CFS peuvent également apparaître comme une composante du signal d'ERO ; afin d'éviter toute ambiguïté, ces contributions seront désignées sous le nom de $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$. CBS, ERO, CFS et les contributions de type $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ constituent ainsi des signatures expérimentales complémentaires, permettant de sonder la cohérence quantique, la localisation et leurs ruptures (décohérence, brisure de symétrie) dans des milieux désordonnés.

Un résultat fondamental de la théorie d'échelle est que les propriétés de transport et de

localisation ne dépendent pas uniquement de l'intensité du désordre, mais également des symétries fondamentales du système. Dans la classification de Wigner–Dyson étendue aux systèmes désordonnés, trois classes d'universalité gouvernent le comportement : **orthogonale** (renversement du temps préservé, sans couplage spin–orbite), **unitaire** (renversement du temps brisé, par exemple par un champ magnétique) et **symplectique** (renversement du temps préservé mais couplage spin–orbite) [14-26]. Dans la classe orthogonale, les chemins temporellement inversés interfèrent constructivement, d'où la localisation faible. Dans la classe unitaire, ces interférences sont supprimées par le brisure de la symétrie par renversement du temps. Dans la classe symplectique, un décalage de phase (lié au spin–orbite) rend les interférences destructives, ce qui se traduit par une antilocalisation faible (WAL) : la correction quantique augmente la conductance à basse température ou induit un creux caractéristique de magnéto-résistance à champ nul [27-32]. Ce point est crucial en deux dimensions : contrairement aux classes orthogonale et unitaire, la classe symplectique admet un régime métallique et une véritable transition métal–isolant, avec des exposants critiques et une fonction d'échelle universelle, comme le prédit la théorie d'échelle et comme le confirment les études numériques [14-26].

Si l'étude expérimentale de ces effets dans les solides a été particulièrement riche, elle demeure compliquée par la présence d'impuretés mal contrôlées, de phonons, d'interactions et d'inhomogénéités structurelles ect... Les atomes ultra-froids ont donc émergé comme une plateforme idéale pour simuler des milieux désordonnés propres et contrôlables : il est possible d'y régler la statistique du désordre, la dimensionnalité, les interactions et les sources de décohérence. Des observations directes de la localisation d'Anderson et de transitions associées ont été réalisées dans ces systèmes [33-38]. Dans cette lignée, le rotateur frappé quantique (Quantum Kicked Rotor, QKR) s'est imposé comme un simulateur de choix : ce système à perturbations périodiques (ce que l'on appelle kicks en anglais, et également dans la suite de ce manuscrit) présente en régime quantique une localisation dynamique en espace des impulsions, analogue à la localisation d'Anderson, et il existe une correspondance (mapping de Floquet-Anderson) entre l'équation de Floquet du QKR et un modèle d'Anderson sur réseau [39-45]. Cette correspondance rend possible la simulation de dimensions effectives supérieures grâce à des modulations quasi-périodiques, ainsi que l'extraction des exposants critiques et la vérification de l'universalité des lois d'échelle, dans un environnement où l'on s'affranchit des difficultés inhérentes aux matériaux réels [40, 43, 45].

Dans ce cadre, une question centrale encore peu explorée expérimentalement consiste à introduire un couplage spin–orbite dans un simulateur de désordre de type QKR, afin de basculer la physique dans la classe symplectique et d'en sonder les signatures spécifiques : antilocalisation faible, anti-ERO, apparition et structure du $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$, et transition métal–isolant en $2d$ avec ses exposants. Les systèmes électroniques fournissent de nombreux exemples de WAL (puits quantiques à couplage Rashba, isolants topologiques, interfaces d'oxydes, graphène) [27-32] mais une observation claire et contrôlée de l'antilocalisation faible dans un simulateur atomique demeure un défi ouvert. C'est précisément l'objet de ce travail : proposer, analyser et caractériser un modèle du kicked rotor dépendant du spin (Spin double periodic Quantum Kicked Rotor, SDQKR), conçu pour être implémentable avec des atomes ultra-froids et adapté à l'exploration des classes de symétrie et des

transitions de phase associées.

Le modéle du kicked rotor avec spin 1/2 que nous introduisons (que nous désignons par l'abréviation SDQKR) repose sur l'utilisation de deux états internes jouant le rôle d'un spin 1/2, couplés à des potentiels optiques spin-dépendants pulsés (kické) et éventuellement modulés de manière quasi-périodique. L'idée directrice est double. (i) D'une part, établir un contrôle systématique des symétries (présence ou absence de renversement du temps, rotations de spin, couplage spin–orbite synthétique) et des observables interférentielles (ERO, anti-ERO, $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$), de façon à identifier la classe d'universalité réalisée. (ii) D'autre part, réaliser un simulateur $2d$ symplectique en modulant quasi-périodiquement l'amplitude des kicks, dans l'esprit du mapping Floquet–Anderson, afin d'étudier la transition métal–isolant et d'en extraire les caractéristiques universelles. L'analyse numérique détaillée que nous présentons montre, en particulier, la possibilité de déterminer ν avec une précision comparable aux meilleurs résultats sur modèles désordonnés traditionnels, tout en confirmant la validité de la loi d'échelle à un paramètre dans ce contexte $2d$ symplectique.

Sur un plan plus large, ce travail contribue à l'étude des signatures universelles de localisation et d'antilocalisation dans des systèmes quantiques désordonnés, en particulier dans la classe symplectique. En introduisant un modèle de kicked rotor quantique avec couplage spin–orbite, expérimentalement accessible avec des atomes ultra-froids, nous mettons en évidence différentes signatures interférentielles (ERO/anti-ERO, $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$) et explorons la transition métal–isolant bidimensionnelle au moyen d'outils numériques adaptés (lois d'échelle, exposant critique).

Structure de la thèse

Cette thèse est structurée de la manière suivante. Le **Chapitre 1** présente un état de l'art sur la localisation d'Anderson, la localisation et anti-localisation faible et ses signatures interférentielles (CBS/Anti-CBS, ERO, CFS), ainsi que sur le rôle des symétries et des classes d'universalité dans les systèmes désordonnés. Le **Chapitre 2** introduit le kicked rotor sans spin classique et quantique, rappelle la localisation dynamique et détaille le mapping Floquet–Anderson. Le **Chapitre 3** présente l'un des modèles de kicked rotor avec spin-1/2 déjà étudiés dans la littérature, à savoir le modèle de Thaha–Blümel–Smilansky (TBS model). Au-delà de sa description théorique, nous apportons une contribution consistant à analyser de manière systématique les signatures interférentielles (ERO, anti-ERO) permettant d'identifier la classe de symétrie réalisée en fonction du choix des paramètres. Nous avons également étudié la fonction d'échelle $\beta(g)$ associée à chaque classe de symétrie, et recalculé les statistiques spectrales des niveaux, ce qui permet de confirmer et de compléter la classification universelle de ce modèle. Le **Chapitre 4** est consacré au Spin-Double-Periodic Quantum Kicked Rotor (SDQKR), un modèle que nous introduisons comme alternative au modéle TBS, spécialement conçu pour être réalisable avec des atomes ultra-froids. Nous analysons les propriétés dynamiques et spectrales du système. Sur le plan dynamique, nous mettons en évidence les principales observables interférentielles — ERO, anti-ERO — en montrant comment elles apparaissent ou disparaissent selon la parité des kicks. Nous étudions ensuite la fonction

d'échelle $\beta(g)$, ce qui permet d'identifier la classe d'universalité globale du modèle, et nous complétons cette analyse par une étude des statistiques spectrales (distribution des espacements et moyenne $\langle \tilde{r}_n \rangle$) de l'opérateur de Floquet. L'ensemble de ces résultats établit le SDQKR comme un simulateur quantique expérimentalement accessible, où il est possible d'explorer de manière contrôlée les phénomènes de localisation et d'antilocalisation. Le **Chapitre 5** approfondit l'origine microscopique de ces interférences cohérentes et leur dépendance aux symétries, en lien avec les opérateurs d'évolutions et les invariances temporelles. Enfin, le **Chapitre 6** étudie la transition d'Anderson symplectique bidimensionnelle, établit le diagramme de phase, extrait l'exposant critique ν et caractérise la fonction d'échelle $\beta(g)$. Nous vérifions également la validité de la loi d'échelle à deux paramètres, avant une conclusion générale qui résume les apports et esquisse des perspectives.

Chapitre 1

État de l'art

Sommaire du présent chapitre

1.1 Modéle d'Anderson **10**
- 1.1.1 Effets d'interférence quantique : rétrodiffusion cohérente (CBS) et retour amplifié à l'origine (ERO) . . . 12
- 1.1.2 Observations expérimentales de la localisation faible (CBS et ERO) . . . 15
- 1.1.3 Diffusion cohérente vers l'avant (Coherent Forward Scattering : CFS) . . . 18
- 1.1.4 Anti-localisation faible (Weak Anti-Localization : WAL) . . 20

1.2 Théorie d'échelle à un paramètre **23**
- 1.2.1 Criticalité dans la classe symplectique . . . 27
- 1.2.2 Kicked rotor quantique : un modèle privilégié pour l'étude de la localisation et de l'antilocalisation faible . . . 29
- 1.2.3 Loi d'échelle à un paramètre dans le contexte du kicked rotor quantique . . . 30

1.3 Théorie des matrices aléatoires et localisation d'Anderson **32**

La compréhension du transport électronique dans les solides s'est développée au travers de plusieurs modèles successifs, du plus classique au plus quantique. L'un des premiers cadres théoriques fut le modèle de Drude, proposé en 1900, qui visait à expliquer la conduction électrique dans les métaux [46]. Il traite les électrons de conduction comme un gaz classique d'électrons libres (non-interagissants) subissant des collisions aléatoires contre les ions positifs du réseau cristallin (considérés comme fixes). Sous l'action d'un champ électrique constant $\vec{E}$, les électrons acquièrent une vitesse de dérive non nulle opposée au champ (les électrons étant chargés négativement). Drude modélise cette dynamique par une équation de mouvement classique avec un temps de relaxation τ

entre deux collisions. À l'état stationnaire, la vitesse moyenne $\langle\vec{v}\rangle$ atteint une valeur limite proportionnelle au champ :

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{q\tau}{m}\vec{E}, \tag{1.1}$$

où q est la charge de l'électron ($q = -e$) et m sa masse. La densité de courant résultante $\vec{J} = nq\langle\vec{v}\rangle$ (avec n la densité d'électrons) satisfait alors la loi d'Ohm locale $\vec{J} = \sigma_0\vec{E}$, avec une conductivité donnée par la formule de Drude :

$$\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}, \tag{1.2}$$

Cette expression reproduit effectivement la conductivité observée des métaux simples (par exemple, le cuivre ou l'argent) à l'ordre de grandeur près. En insérant des valeurs typiques ($n \sim 10^{29}$ électrons/m^3, $\tau \sim 10^{-14}$ s), on obtient des conductivités de l'ordre de 10^7 S/m, cohérentes avec les valeurs mesurées sur les bons conducteurs. De plus, le modèle de Drude explique de manière qualitative la loi d'Ohm et des effets associés comme l'effet Hall ou la réflectivité des métaux, en attribuant la résistance électrique aux collisions des électrons sur le réseau ionique fixe [47]. Cependant, ce modèle purement classique présente d'importantes limitations. Il suppose que les électrons obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann (gaz classique) et utilise le théorème d'équipartition de l'énergie pour estimer leur vitesse moyenne v_0 et leur énergie cinétique moyenne. Il en résulte des prédictions incorrectes pour certaines propriétés. Par exemple, Drude prédit une contribution électronique à la capacité calorifique c_v de l'ordre de $\frac{3}{2}nk_b$ (par analogie avec le modèle classique de Dulong-Petit [48]), ce qui est deux ordres de grandeur plus élevée que la contribution réelle mesurée dans les métaux (l'expérience montrant que la chaleur spécifique des électrons est négligeable à température ambiante par rapport à celle du réseau). De même, en estimant le libre parcours moyen ℓ des électrons, le modèle de Drude conduit à une valeur d'environ 1 Å pour ℓ dans un métal, alors que les expériences (variation de la conductivité avec l'épaisseur de films minces) indiquent un parcours moyen typiquement cent fois plus grand (de l'ordre de 100 Å). Ce succès du modèle de Drude dû à l'utilisation d'une vitesse thermique v_0 sous-estimée compensant une valeur de τ surestimée ne masque pas le caractère inadéquat de ses hypothèses classiques. En particulier, le modèle de Drude ne permet pas d'expliquer pourquoi certains matériaux avec électrons de valence sont isolants (par ex. le diamant) tandis que d'autres sont conducteurs (graphite). Il manque une description quantique capable de distinguer les comportements métalliques et isolants des électrons dans les solides.

Afin de lever ces insuffisances, Arnold Sommerfeld introduit en 1927 une version quantifiée du modèle de Drude, en incorporant la statistique de Fermi-Dirac pour décrire les électrons de conduction [49]. Le modèle de Sommerfeld (aussi appelé modèle de Drude–Sommerfeld ou free electron model) conserve l'hypothèse d'électrons libres indépendants, mais reconnaît qu'ils forment un gaz d'électrons dégénéré, obéissant au principe d'exclusion de Pauli. À température $T = 0$, tous les états quantiques jusqu'à une certaine énergie (énergie de Fermi E_F) sont occupés, et au-delà ils sont vides. Seules les excitations d'électrons proches de la surface de Fermi sont donc possibles aux températures ordinaires. Cette description quantique apporte plusieurs améliorations notables par rapport au modèle de Drude :

• La formule de la conductivité continue à s'écrire $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$, mais n représente la densité des électrons occupant les états à la surface de Fermi. En conséquence, le modèle de Sommerfeld prédit la même conductivité DC que Drude pour un métal donné , préservant ainsi le succès du modèle classique sur ce point. De nombreuses grandeurs de transport électrique (conductivité dynamique AC, coefficient de Hall, fréquence plasma, etc.) restent également formellement identiques à celles obtenues par Drude, car elles ne dépendent pas explicitement de la statistique des électrons mais seulement de n, m et τ [47].

• Les propriétés thermiques des électrons sont en revanche radicalement corrigées. La distribution de Fermi-Dirac implique qu'à température modérée seule une petite fraction des électrons (ceux dont l'énergie est proche de E_F) peuvent être excités. Ainsi, la capacité calorifique électronique c_v est fortement réduite par rapport à la prédiction classique : Sommerfeld obtient c_v proportionnel à T (via le développement de Sommerfeld) et environ 100 fois plus petit qu'estimé par Drude à température ambiante, en accord avec les mesures expérimentales [47]. Ceci résout l'énigme de la quasi-absence de contribution des électrons à la chaleur spécifique des métaux, laissée inexpliquée dans le cadre classique.

• Le modèle quantique rend compte quantitativement de lois empiriques telles que la loi de Wiedemann–Franz [50], qui relie la conductivité électrique σ à la conductivité thermique κ des métaux. Drude, en combinant sa formule de σ avec une estimation classique de κ (fondée sur des électrons traités comme un gaz parfait), obtenait déjà le rapport $\kappa/\sigma \approx L_0 T$ avec $L_0 \approx 1.1 \times 10^{-8}\, W\Omega K^{-2}$, proche de la constante de Lorenz mesurée $L_{\text{exp}} \approx 2.4 \times 10^{-8}\, W\Omega K^{-2}$(écart d'un facteur 2). Sommerfeld, en revanche, retrouve exactement la valeur théorique $L_0 = (\pi^2/3)(k_B/e)^2$ en accord avec l'expérience, en raison de l'utilisation correcte de la statistique de Fermi pour calculer κ et c_v. Le modèle de Sommerfeld explique également l'allure observée de la densité d'états électronique en fonction de l'énergie et le comportement du pouvoir thermoélectrique des métaux alcalins [47].

Malgré ces succès, le modèle de Drude–Sommerfeld reste fondé sur l'approximation d'électrons libres dans un métal. Il néglige l'interaction périodique des électrons avec le réseau cristallin, se limitant à considérer les ions uniquement comme source de diffusion (via τ) mais pas comme source de potentiel périodique. Or, cette interaction périodique est à l'origine de la structure de bandes d'énergie des solides, qui distingue notamment un métal d'un isolant. En d'autres termes, le modèle de Sommerfeld décrit correctement un métal simple comme un gaz d'électrons quasi-libres, mais il est incapable par lui-même d'expliquer pourquoi, par exemple, l'aluminium est conducteur alors que le bore, juste au-dessus dans la classification périodique, est un isolant. Pour introduire la notion de bandes interdites et de différence entre conducteurs et isolants, il faut faire intervenir la périodicité du réseau cristallin, ce que permet la mécanique quantique à travers le théorème de Bloch.

Felix Bloch démontre en 1928 qu'un électron se propageant dans un potentiel périodique (comme celui d'un cristal parfait) possède des fonctions d'onde délocalisées ayant la

symétrie du réseau [51]. Plus précisément, le théorème de Bloch stipule que les solutions de l'équation de Schrödinger dans un potentiel périodique peuvent être choisies sous la forme d'une onde plane modulée par une fonction périodique. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\psi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{n,\vec{k}}(\vec{r}), \tag{1.3}$$

où $u_{n,\vec{k}}(\vec{r})$ est une fonction périodique ayant la même périodicité que le réseau cristallin. Ici $\vec{k}$ est le vecteur d'onde (quasi-impulsion de l'électron) et n un indice de bande quantifiant le fait que plusieurs états quantiques distincts peuvent partager le même vecteur $\vec{k}$ (chaque $u_{n,\vec{k}}$ correspondant à une bande d'énergie différente). Les états propres des électrons dans un cristal parfait sont donc des états étendus (dit états de Bloch) qui se propagent à travers tout le solide. L'énergie $E_n(\vec{k})$ de ces états dépend continûment de $\vec{k}$, formant pour chaque indice n une bande d'énergie autorisée. Les valeurs de $\vec{k}$ peuvent en outre être restreintes à la première zone de Brillouin du réseau (du fait que $\psi_{n,\vec{k}}$ est défini à un vecteur de réseau réciproque près).

ette description en bandes d'énergie permet de comprendre la différence fondamentale entre un métal et un isolant, que ne pouvait adresser le modèle de Sommerfeld. Dans un cristal parfait, le formalisme des bandes d'énergie permet d'expliquer la distinction fondamentale entre conducteurs et isolants : les métaux correspondent à des bandes partiellement remplies, tandis que les isolants et semi-conducteurs présentent une bande de valence complètement occupée séparée d'une bande de conduction vide par un gap. Ce succès majeur de la théorie de Bloch complète le modèle de Sommerfeld en rendant compte de la diversité des propriétés électroniques des solides. Toutefois, les cristaux réels ne sont jamais parfaitement périodiques. La présence d'impuretés, de défauts cristallins ou d'agitation thermique (phonons) perturbe la périodicité idéale du potentiel. Pour comprendre le transport électronique dans les solides réels, il est donc nécessaire d'étudier l'influence du désordre sur les états de Bloch et sur la conduction.

Dans un cristal réel, les électrons subissent la diffusion par les défauts : par exemple, une lacune atomique ou une impureté crée une perturbation locale du potentiel qui diffuse les ondes électroniques, mélangeant les vecteurs d'onde. Si le désordre est faible (défauts rares ou de faible amplitude), on peut le traiter comme une perturbation : les électrons de Bloch restent majoritairement délocalisés, avec une durée de vie finie (temps de diffusion) liée aux collisions sur les défauts. C'est le cas des métaux peu impurs, où le libre parcours moyen ℓ peut rester très grand devant le pas du réseau. En revanche, si le désordre est important ou que l'on s'écarte fortement de la structure cristalline (cas d'un solide amorphe, d'un alliage désordonné, ou d'un cristal très fortement dopé), la description en termes d'états de Bloch étendus devient inadéquate. L'absence d'ordre à longue distance empêche de décrire les fonctions d'onde comme des ondes de Bloch, et le concept même de bande $E(\vec{k})$ perd sa validité [52]. On observe alors l'apparition d'états électroniques localisés spatialement, piégés autour de certains sites ou régions du matériau, qui ne contribuent plus au transport sur de grandes distances.

Il existe principalement deux formes de désordre dans les cristaux. Le *désordre struc-*

tural correspond aux perturbations de l'arrangement périodique des atomes, telles que les défauts ponctuels, les dislocations ou encore l'absence d'ordre cristallin à longue portée dans les solides amorphes. Il brise localement la translationalité du réseau et peut conduire à l'apparition d'états électroniques localisés dans le gap. Le *désordre de composition*, quant à lui, apparaît dans les alliages ou les cristaux dopés, lorsque la nature chimique des atomes varie aléatoirement d'un site à l'autre. Les fluctuations locales de potentiel qui en résultent introduisent des états électroniques supplémentaires, eux aussi susceptibles d'être localisés. Selon leur origine, ces désordres peuvent également se manifester sous d'autres formes, comme un désordre magnétique (lié à une répartition aléatoire des moments magnétiques) ou un désordre électronique (issu d'une distribution aléatoire de porteurs de charge).

Dans tous les cas, la coexistence de ces différents types de désordre complique considérablement la compréhension du transport électronique dans les matériaux réels. Pour surmonter cette difficulté, il est utile d'introduire des modèles théoriques, capables de saisir les effets essentiels du désordre. Le modèle proposé par P. W. Anderson en 1958 [1] s'inscrit précisément dans cette démarche. Conçu pour décrire l'influence d'un potentiel aléatoire sur les électrons, il a mis en évidence un résultat marquant : un niveau suffisant de désordre peut conduire à la localisation complète de toutes les fonctions d'onde électroniques dans un cristal, transformant ainsi un conducteur métallique en isolant. Ce modèle fournit ainsi un cadre conceptuel simple mais puissant pour comprendre comment le désordre peut inhiber la diffusion électronique et engendrer une transition métal–isolant. Cette distinction entre états étendus et états localisés est illustrée de manière schématique sur la figure 1.1.

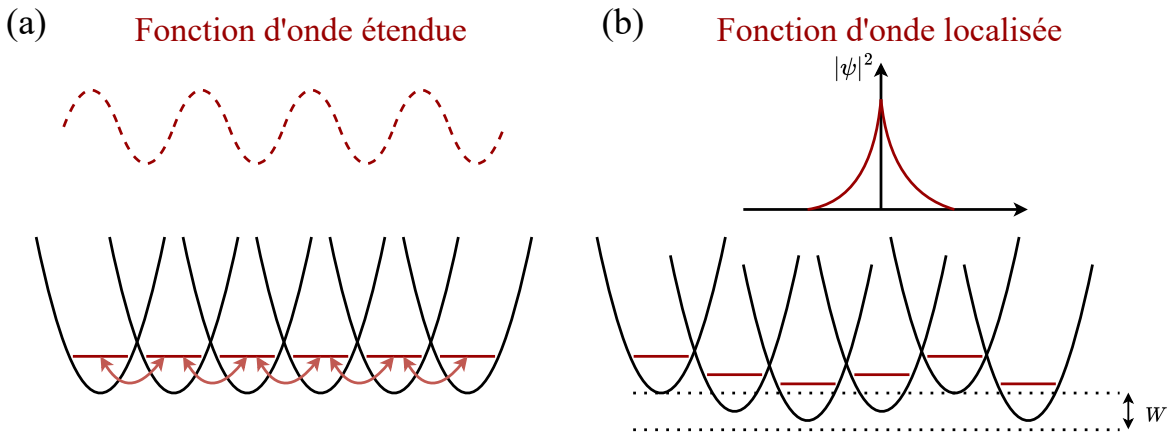


FIGURE 1.1 – Illustration schématique du phénomène de localisation d'Anderson. (a) État fondamental dans un réseau périodique sans désordre. L'effet tunnel entre les puits produit une onde de Bloch étendue, caractéristique d'un état métallique. (b) État fondamental dans un réseau désordonné : les fluctuations aléatoires des profondeurs des puits (amplitude caractéristique W) entraînent la localisation exponentielle de la fonction d'onde électronique, signature d'un comportement isolant. Figure inspirée d'une présentation d'Alain Aspect [53].

1.1 Modéle d'Anderson

Pour analyser les effets du désordre, Anderson a introduit un modèle de type tight-binding dans lequel les électrons sont localisés autour de sites atomiques, avec une probabilité de saut vers leurs plus proches voisins. Ce modèle prend en compte des énergies de site aléatoires, distribuées uniformément dans un intervalle fixé. Le Hamiltonien associé s'écrit [1] :

$$\hat{\mathcal{H}} = W \sum_i \varepsilon_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i - t \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j,, \tag{1.4}$$

où $\hat{c}_i^\dagger$ ($\hat{c}_i$) crée (annihile) un électron sur le site i, t est l'amplitude de saut entre voisins, et les énergies aléatoires ε_i sont comprises entre -0.5 et 0.5. L'intensité du désordre est mesurée par le paramètre W.

Deux limites permettent de mieux comprendre ce modèle :

• pour $W = 0$ et $t \neq 0$, on retrouve le cas usuel d'un cristal parfait : les états propres sont des ondes de Bloch, délocalisées sur l'ensemble du système.

• pour $W \neq 0$ et $t = 0$, seules les énergies locales subsistent, et l'état électronique s'effondre sur des sites individuels.

L'analyse numérique du modèle (1.4) montre que pour les dimensions $d = 1$ et $d = 2$, tous les états sont localisés pour toute valeur finie du désordre [54]. En revanche, en dimension $d = 3$, il existe une valeur critique $w_c = W/t$ qui sépare deux régimes :

• $w < w_c$ les états sont étendus et le système se comporte comme un métal.

• $w > w_c$ les états sont localisés et le système adopte un comportement isolant.

La transition entre ces deux régimes est caractérisée par l'existence d'un bord de mobilité (mobility edge), concept introduit par Mott [55, 56], qui marque la frontière entre les états étendus et les états localisés.

Afin d'illustrer les propriétés spectrales de ce modèle, nous avons représenté sur la figure 1.2 la densité d'états dans le cas unidimensionnel. Cette simulation a été obtenue par diagonalisation numérique du Hamiltonien (1.4) sur une chaîne finie avec désordre aléatoire uniforme. La courbe bleue correspond au cas sans désordre ($W/t = 0$), tandis que la courbe rouge illustre un cas désordonné avec un rapport $W/t = 0.17$. On observe que, malgré l'introduction d'un potentiel aléatoire significatif, la densité d'états $\mathcal{N}$ reste globalement similaire à celle du système ordonné. En réalité, la distinction entre états localisés et états étendus ne provient pas directement de la densité d'états, mais des propriétés spatiales des fonctions d'onde. En une dimension, les états propres deviennent exponentiellement localisés :

$$|\psi(\vec{r})|^2 \propto \exp\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\xi}\right), \tag{1.5}$$

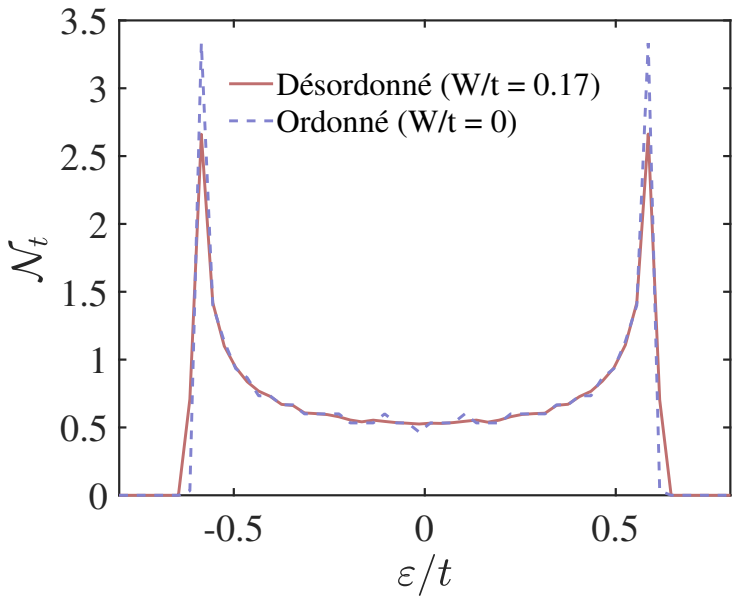


FIGURE 1.2 – Densité d'états dans le modèle d'Anderson unidimensionnel. La courbe rouge illustre le cas où un désordre est introduit avec un rapport $W/t = 0.17$, tandis que la courbe bleue correspond au cas sans désordre ($W/t = 0$). On observe que, malgré un potentiel désordonné significatif, la densité d'états $\mathcal{N}$ reste globalement similaire.

où ξ désigne la longueur de localisation. Celle-ci peut être grande pour un désordre faible, de sorte qu'un petit échantillon peut encore présenter un comportement métallique, malgré une localisation effective à grande échelle.

Il convient de souligner que si le modèle d'Anderson a été initialement formulé dans le cadre d'un réseau cristallin désordonné, le phénomène de localisation n'y est pas limité. On l'observe également dans d'autres modèles microscopiques, qu'ils reposent sur un réseau ou non. Par exemple lorsque des diffuseurs sont répartis aléatoirement dans l'espace. Dans ce cas, une onde incidente peut emprunter une multitude de trajectoires entre deux points donnés, chaque chemin correspondant à une succession aléatoire de diffusions multiples. L'amplitude totale résulte alors de la superposition cohérente de toutes ces contributions, avec leurs phases respectives (voir Fig. 1.3). Cette formulation met en évidence le caractère universel du mécanisme de localisation : il découle des interférences multiples dans un milieu désordonné, indépendamment des détails microscopiques du modèle considéré. Ainsi, que l'on considère un modèle sur réseau ou avec des diffuseurs aléatoires, le mécanisme fondamental reste le même : la localisation d'Anderson résulte de la nature ondulatoire des particules quantiques et des interférences multiples entre chemins de diffusion.

Un aspect particulièrement important de ces interférences concerne la comparaison entre un trajet et son parcours renversé dans le temps. La cohérence entre ces deux contributions engendre une interférence constructive qui accroît significativement la probabilité de retour vers l'origine. Ce mécanisme réduit la diffusion à grande distance et constitue la base de la localisation d'Anderson. Décrire rigoureusement l'ensemble

de ces interférences demeure toutefois un défi théorique majeur, seuls certains régimes particuliers se prêtant à une analyse analytique complète.

Dans les situations où la contribution des interférences n'apparaît qu'en tant que correction faible au transport diffusif, on parle de **localisation faible**. À l'inverse, pour des désordres plus intenses, la diffusion est totalement bloquée et l'on entre dans le régime de **localisation d'Anderson forte**, qui nécessite des outils spécifiques pour être étudiée (méthodes de scaling, groupe de renormalisation, simulations numériques, etc.). Les sections qui suivent reviendront successivement sur ces différents cadres d'analyse : nous aborderons d'abord la localisation faible, avant de présenter les approches employées pour caractériser la localisation d'Anderson dans le régime fort.

1.1.1 Effets d'interférence quantique : rétrodiffusion cohérente (CBS) et retour amplifié à l'origine (ERO)

Dans cette sous-section, nous nous intéressons aux phénomènes quantiques résultant des interférences constructives entre chemins multiples dans un milieu désordonné. En particulier, nous présentons deux effets fondamentaux associés à la localisation faible : la rétrodiffusion cohérente (Coherent Backscattering, CBS) et l'augmentation de la probabilité de retour à l'origine (Enhanced Return to the Origin, ERO). Cette présentation suit l'approche développée par Akkermans et Montambaux dans leur ouvrage de référence [57].

Considérons une onde plane issue d'une source cohérente située à l'extérieur du milieu diffusant. Cette onde se propage dans le milieu et subit des collisions élastiques sur des diffuseurs statiques [1]. On cherche à déterminer l'intensité moyenne de l'onde réémise dans une direction donnée, définie par un vecteur d'onde $\vec{k'}$, à partir d'une onde incidente de vecteur $\vec{k}$. Cette intensité est obtenue à partir de l'amplitude complexe $A(\vec{k},\vec{k'})$, qui s'écrit sous la forme :

$$A(\vec{k},\vec{k'}) = \sum_{\vec{r_1},\vec{r_2}} f(\vec{r_1},\vec{r_2}) e^{\mathrm{i}\left(\vec{k}.\vec{r_1}-\vec{k'}.\vec{r_2}\right)}, \tag{1.6}$$

où $f(\vec{r_1},\vec{r_2})$ représente l'amplitude complexe associée à la propagation entre deux événements de diffusion localisés en $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$. Cette amplitude peut s'exprimer sous la forme d'une somme $\sum_j a_j = \sum_j |a_j| e^{i\delta_j}$, où chaque terme a_j correspond à un chemin j, c'est-à-dire à une séquence de collisions reliant les points $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$ (voir Fig. 1.3). L'intensité — qui représente ici la probabilité de diffusion vers la direction $\vec{k'}$ — est donnée par le carré du module de cette amplitude :

$$|A(\vec{k},\vec{k'})|^2 = \sum_{\vec{r_1},\vec{r_2}} \sum_{\vec{r_3},\vec{r_4}} f(\vec{r_1},\vec{r_2}) f^*(\vec{r_3},\vec{r_4}) e^{\mathrm{i}\left(\vec{k}.\vec{r_1}-\vec{k'}.\vec{r_2}\right)} e^{-\mathrm{i}\left(\vec{k}.\vec{r_3}-\vec{k'}.\vec{r_4}\right)}, \tag{1.7}$$

avec

$$f(\vec{r_1},\vec{r_2}) f^*(\vec{r_3},\vec{r_4}) = \sum_{j,j'} a_j(\vec{r_1},\vec{r_2}) a_{j'}^*(\vec{r_3},\vec{r_4}) = \sum_{j,j'} |a_j||a_{j'}| e^{\mathrm{i}(\delta_j-\delta_{j'})}. \tag{1.8}$$

1. L'énergie de l'onde et la norme de son vecteur d'onde sont donc conservées, mais pas la direction de propagation $\vec{k}/\|\vec{k}\|$.

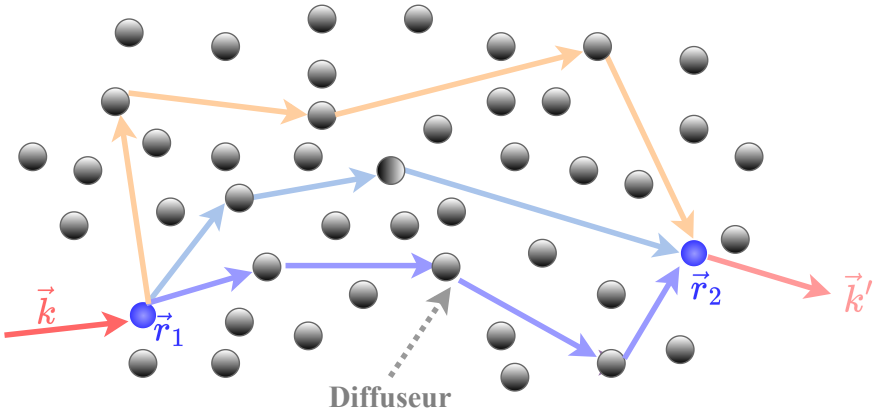


FIGURE 1.3 – Trajectoires typiques participant a l'amplitude complexe totale $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ d'une onde en situation de diffusion multiple. L'amplitude $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ est une somme de la forme $\sum_j a_j e^{i\delta_j}$.

Afin de calculer la valeur moyenne de $|A(\vec{k}, \vec{k'})|^2$ sur les différentes réalisations du potentiel aléatoire, c'est-à-dire sur les positions des diffuseurs, il est utile de remarquer que la majorité des termes des équations (1.7) et (1.8) donnent une contribution nulle en moyenne. En effet, la phase $\delta_j - \delta_{j'}$, qui mesure la différence de longueur entre les trajectoires représentées sur la figure 1.3, est aléatoire.

Par conséquent, seuls les termes pour lesquels les phases s'annulent contribuent à la moyenne de $|A(\vec{k}, \vec{k'})|^2$. Cela ne peut se produire que pour des paires de trajectoires *identiques*, c'est-à-dire suivant exactement les mêmes séquences de collisions, soit dans le *même sens*, soit dans le sens *opposé*. Ces configurations sont représentées schématiquement sur la figure 1.4, et correspondent aux séquences suivantes :

$$\vec{r}_1 \to \vec{r}_a \to \vec{r}_b \ldots \to \vec{r}_y \to \vec{r}_z \to \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_2 \to \vec{r}_z \to \vec{r}_y \ldots \to \vec{r}_b \to \vec{r}_a \to \vec{r}_1$$

L'identité des trajectoires impose, en particulier, de prendre dans la relation (1.7) les égalités $\vec{r}_1 = \vec{r}_3$ et $\vec{r}_2 = \vec{r}_4$ pour le premier processus (trajets parcourus dans le même sens), et $\vec{r}_1 = \vec{r}_4$ et $\vec{r}_2 = \vec{r}_3$ pour le second (trajets parcourus en sens opposé). Ces deux processus sont donc associés à la même intensité, à condition toutefois que le système soit ***invariant par renversement du temps***. En outre, le second processus introduit, selon l'équation (1.7), un déphasage supplémentaire. Ainsi, les deux seules contributions non nulles à la moyenne sont données par :

$$\overline{|A(\vec{k}, \vec{k'})|^2} = \overline{\sum_{\vec{r}_1, \vec{r}_2} |f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 \left[1 + e^{i(\vec{k}+\vec{k'}).(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}\right]}, \tag{1.9}$$

$\overline{\ldots}$ désigne la moyenne effectuée sur les différentes réalisations du potentiel désordonné. Le second terme de l'équation (1.9) contient un facteur de phase dépendant des positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$. En général, la moyenne de cette somme s'annule, sauf dans deux cas particuliers :

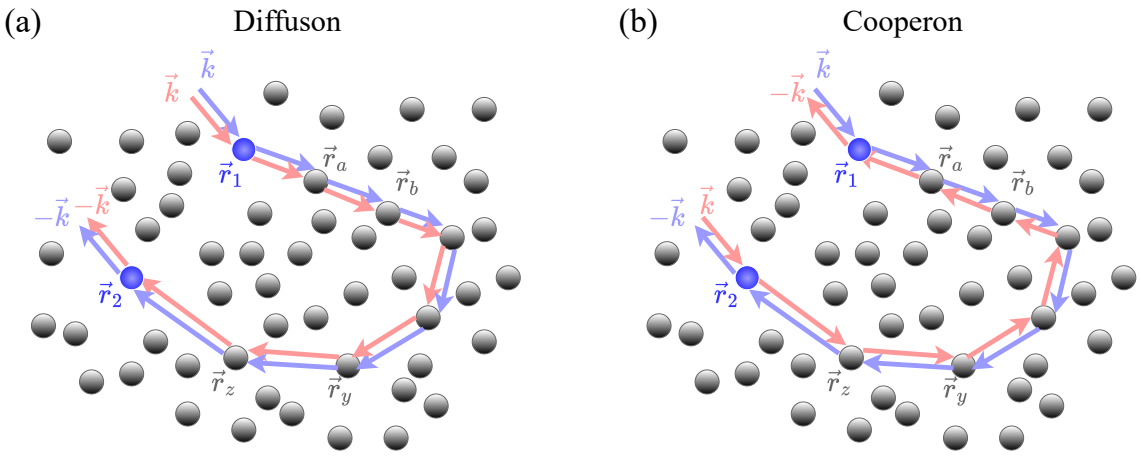


FIGURE 1.4 – Représentation schématique des deux types de séquences de collisions multiples. La première correspond a l'intensité classique (cas diffuson). La seconde, pour laquelle les deux séquences de collisions sont parcourues dans des sens opposées, est a l'origine de l'effet de rétrodiffusion cohérente (cas cooperon).

• $\vec{k}+\vec{k'}=0$: Dans la direction opposée à celle de l'onde incidente, l'intensité moyenne devient

$$\overline{P(\vec{k},\vec{k'}=-\vec{k})} := \mathcal{P}(\vec{k},\vec{k'}=-\vec{k}) = \overline{\sum_{\vec{r}_1,\vec{r}_2} |f(\vec{r}_1,\vec{r}_2)|^2\,[1+1]} = 2\mathcal{P}_{\text{class},\vec{k}}\,, \tag{1.10}$$

où $\mathcal{P}_{\text{class},\vec{k}} = \overline{\sum_{\vec{r}_1,\vec{r}_2}|f(\vec{r}_1,\vec{r}_2)|^2}$ désigne la probabilité classique moyenne qu'une onde inci-

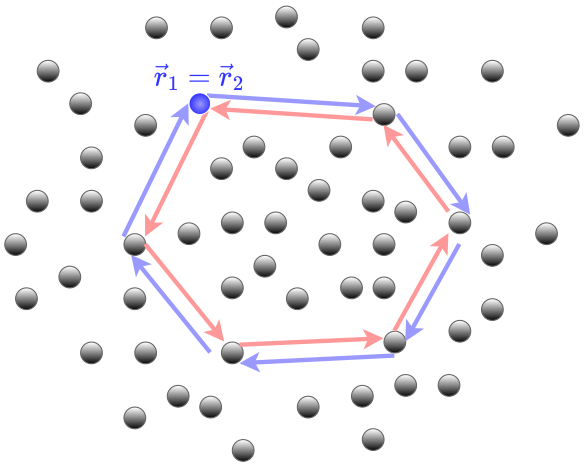


FIGURE 1.5 – Évolution d'un paquet d'ondes initialement localisé en $\vec{r}_1$. Deux trajectoires représentatives sont illustrées : l'une directe (en bleu) et l'autre inversée (en rouge). Ces deux chemins, qui parcourent la même séquence de diffuseurs en sens opposé, accumulent des phases identiques et contribuent à l'effet d'augmentation de la probabilité de retour à l'origine (ERO).

dente dans la direction $\vec{k}$ soit réémise dans la direction opposée $-\vec{k}$. On observe donc un facteur deux dans la probabilité de rétrodiffusion par rapport au cas classique. Ce phénomène, connu sous le nom de *rétrodiffusion cohérente* (Coherent Back Scattering, CBS), résulte de l'interférence constructive entre deux chemins conjugués par renversement du temps, lesquels accumulent exactement la même phase. Ce renforcement d'intensité dans la direction opposée est une manifestation directe de l'invariance par renversement du temps et constitue une signature de la *localisation faible* dans l'espace des impulsions. Il peut être mis en évidence à l'aide de chemins typiques illustrés en figure 1.4.

• Dans la somme (1.9), les termes particuliers tels que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ correspondent à des trajectoires fermées, où l'onde revient exactement à son point d'origine après diffusion multiple. Ce mécanisme est responsable de l'augmentation de la probabilité de retour à l'origine, phénomène connu sous le nom d'*Enchanced Return to the Origin* (ERO). Contrairement à la CBS, cette contribution subsiste même lorsqu'on ne peut fixer précisément les directions $\vec{k}$ et $\vec{k}'$. Ce phénomène aussi constitue une signature de la *localisation faible* dans l'espace réel, observable notamment dans les régimes où les effets d'interférence quantique dominent la dynamique de diffusion (voir figure 1.5).

1.1.2 Observations expérimentales de la localisation faible (CBS et ERO)

Les effets de localisation faible introduits plus haut ont d'abord été prédits théoriquement puis mis en évidence dans de nombreux domaines : optique [58-62], matière condensée électronique [63, 64], acoustique et ondes élastiques [65-67].

Les interférences entre trajets réciproques influencent alors le transport d'énergie ou de particules et conduisent, selon la géométrie de détection, soit par un phénomène de rétrodiffusion cohérente (CBS), soit par une augmentation de la probabilité de retour à l'origine (ERO). Ci-dessous, nous illustrons ces deux signatures dans divers systèmes expérimentaux, puis nous ajoutons un exemple récent d'ERO observé avec le kicked rotor quantique [68] un système que nous étudierons tout au long de cette thèse.

a) Ondes lumineuses : Les premières mesures de CBS ont été obtenues en optique sur des suspensions de polystyrène et des poudres de dioxyde de titane. Les travaux pionniers de vanAlbada et Lagendijk [2-4] ont mis en évidence un pic d'intensité rétro-diffusée, bien que son amplitude soit initialement inférieure au facteur 2 attendu, en raison notamment de la dépolarisation partielle de la lumière. Dix ans plus tard, Wiersma et al. ont observé un doublement net de l'intensité arrière avec des billes monodisperses de TiO_2 [5] (Fig.1.6), confirmant la prédiction théorique. Des expériences similaires ont ensuite été réalisées avec un nuage d'atomes froids, où la nature vectorielle de l'onde (polarisation) combinée aux sous-niveaux Zeeman induit des processus Raman qui dépolarisent partiellement la lumière et laissent subsister de la simple diffusion même dans le canal d'hélicité préservée ; en outre, les différents coefficients de Clebsch–Gordan déséquilibrent les amplitudes des trajets réciproques, ce qui réduit le facteur d'amplification en deçà de 2 [6].

b) Ondes acoustiques : En 1997, Weaver et al. ont transposé l'expérience optique au

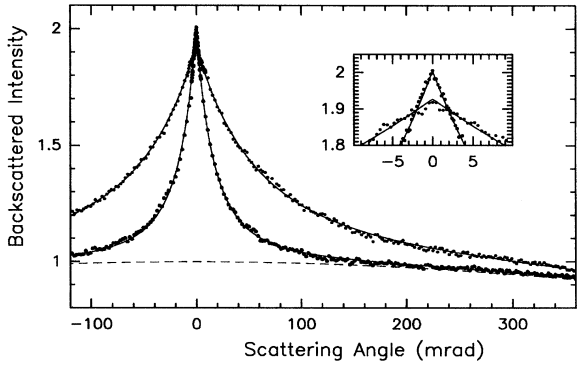


FIGURE 1.6 – Observation du CBS optique : profil angulaire de l'intensité rétro-diffusée par un échantillon de TiO_2. L'axe horizontal donne l'angle de diffusion, l'axe vertical l'intensité normalisée. Tiré de [5].

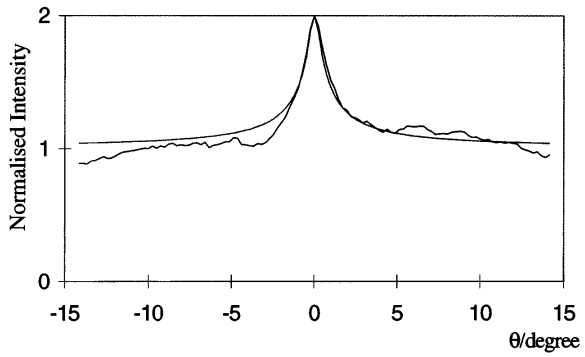


FIGURE 1.7 – CBS acoustique : facteur 2 obtenu pour des ultrasons diffusés sur des tiges de laiton. Figure tirée de [7].

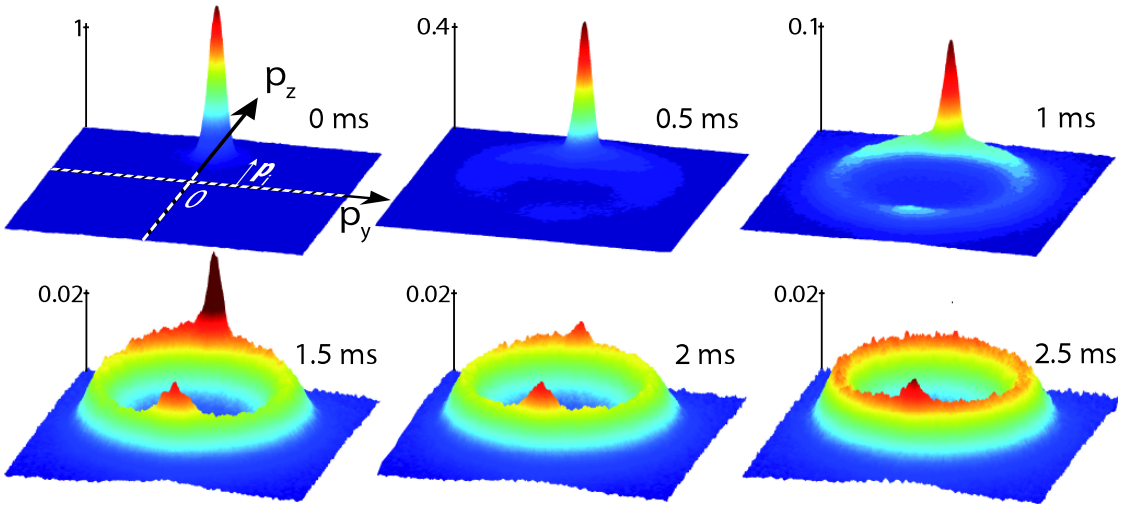


FIGURE 1.8 – CBS d'atomes ultra-froids dans un champ speckle. Les coupes en pseudo-couleurs montrent l'évolution temporelle du pic arrière (impulsion nulle) après 0, 0.5, 1... 2.5 ms. Figure extraite de [8].

domaine acoustique en diffusant des ultrasons sur des graviers immergés ou des tiges de laiton [7, 69]. L'onde sonore, scalaire, ne souffre d'aucun problème de polarisation ; un facteur 2 est donc obtenu sans difficulté (Fig.1.7).

c) Ondes de matière : Le CBS a été observé grâce à un nuage de ^{87}Rb traversant un champ speckle lumineux [8]. La distribution d'impulsions montre un lobe arrière intense dès les premiers millisecondes d'expansion, qui décroît ensuite sous l'effet des interactions atomiques (Fig. 1.8).

Contrairement au CBS, l'ERO se mesure en champ proche : il faut détecter l'onde au

même point que celui où elle a été émise. Cette contrainte expérimentale explique que l'ERO soit plus délicat à mettre en évidence.

a) Cavités chaotiques : L'ERO a été démontré en 2000 pour des ondes flexurales se propageant dans une cavité chaotique bidimensionnelle réalisée avec une plaque mince de silicium [70, 72]. L'intensité transversale, intégrée sur le temps, présente un pic dont la hauteur atteint le facteur 2 prévu (Fig.1.9).

b) Ondes sismiques : Larose et al. ont ensuite observé l'ERO avec des ondes sismiques créées in situ : après une source impulsionnelle au sol, l'amplitude de retour mesurée quelques secondes plus tard est doublée par rapport aux positions voisines [71]. La figure 1.10 montre ce renforcement pour plusieurs temps d'attente, preuve que l'interférence constructive subsiste malgré la nature incohérente du milieu.

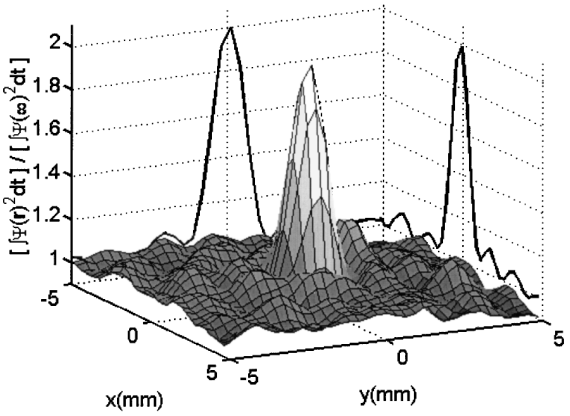


FIGURE 1.9 – ERO mesuré dans une cavité chaotique : intensité transversale normalisée après intégration temporelle. Le pic central atteint un facteur 2, signature de l'ERO. Tiré de [70].

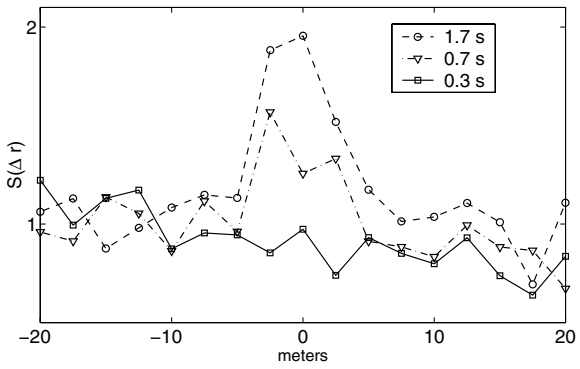
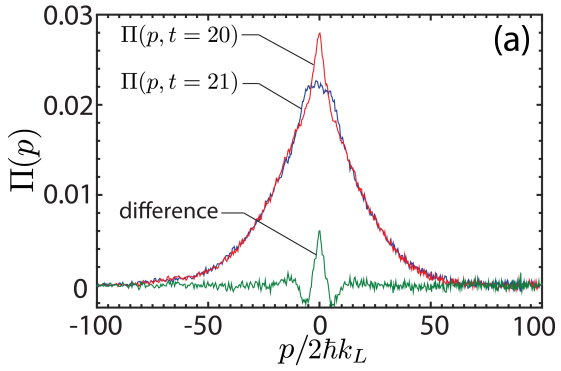


FIGURE 1.10 – ERO sismique : amplitude normalisée de l'onde S enregistrée à différents temps après une perturbation. La courbe pointe un doublement à la position initiale. Figure tirée de [71].



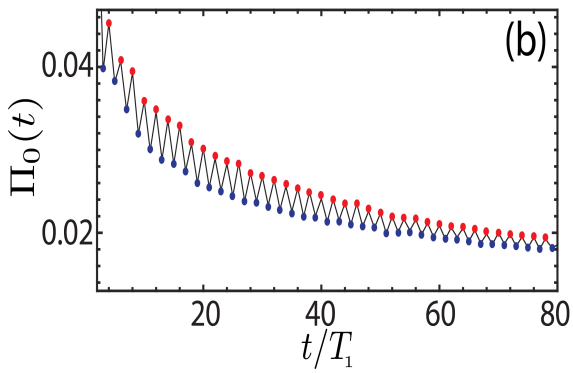


FIGURE 1.11 – (a) Distribution expérimentale en impulsion ; en vert, la différence entre les distributions après 20 et 21 kicks. (b) Évolution expérimentale de la population de la classe d'impulsion nulle en fonction du nombre de kicks. Figures extraites de [68].

c) Le kicked rotor quantique : Ce système, consistant en une particule soumise à une succession périodique de potentiels impulsionnels, a permis dès les années 90 d'observer clairement une localisation dynamique équivalente à la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions. Hainaut et al. ont mis en évidence l'ERO dans un système atomique modèle : le kicked rotor quantique réalisé avec des atomes froids soumis à des impulsions laser périodiques déphasées [68]. En suivant la population de la classe d'impulsion nulle en fonction du nombre de kicks (Fig.1.11), ils constatent un pic ERO décroître sous l'effet de la décohérence.

1.1.3 Diffusion cohérente vers l'avant (Coherent Forward Scattering : CFS)

En complément du CBS et de l'ERO précédemment discutés, un autre phénomène d'interférence quantique, observé dans les systèmes désordonnés, est celui de la diffusion cohérente vers l'avant (Coherent Forward Scattering, CFS). Contrairement au CBS qui apparaît sous forme d'un pic d'intensité rétro-diffusé dans la direction opposée à celle de l'onde incidente, le CFS correspond à un renforcement d'intensité dans la direction de propagation initiale. Le phénomène CFS provient de l'interférence constructive entre paires de trajectoires fermées parcourues dans le même sens, mais explorant les diffuseurs dans un ordre différent (voire figure 1.12). Tandis que le CBS résulte de la conjugaison temporelle de deux trajectoires parcourues en sens opposé, le CFS implique des boucles fermées distinctes, parcourues toutes deux dans la même direction mais selon des séquences différentes. Cette subtilité explique pourquoi le pic de CFS apparaît à des temps

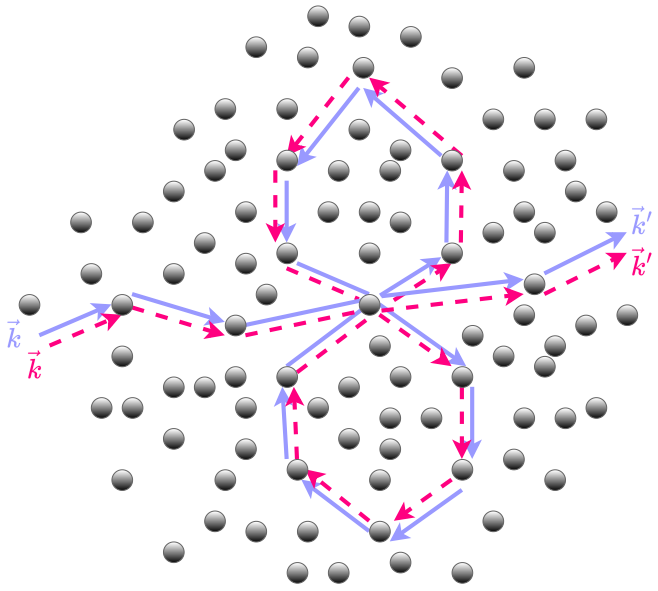


FIGURE 1.12 – Représentation schématique de deux chemins interférents à l'origine du phénomène de diffusion cohérente vers l'avant (CFS). Les deux trajectoires empruntent les mêmes boucles de diffusion, mais dans un ordre différent : la trajectoire rose effectue d'abord la boucle inférieure, tandis que la trajectoire bleue commence par la boucle supérieure. Ces configurations donnent lieu à des interférences constructives dans la direction de propagation initiale.

significativement plus longs que celui du CBS, nécessitant ainsi le régime de localisation où les boucles fermées dominent les trajectoires des ondes diffusées. Par ailleurs, le CFS présente une différence fondamentale avec le CBS : il ne dépend pas de l'invariance par renversement du temps du système. Le CFS persiste donc même lorsque cette symétrie est brisée [10, 73].

Karpiuk et al. [11] ont présenté la première démonstration numérique du phénomène CFS en considérant la propagation d'un paquet d'ondes dans un potentiel désordonné. Ils ont observé que lorsque la localisation d'Anderson commence à se manifester clairement, la distribution en impulsion présente, en plus du pic CBS rétro-diffusé, un second pic émergeant dans la direction initiale de propagation. Ce pic avant-cohérent, nommé CFS, apparaît au temps caractéristique de localisation $\tau_{\mathrm{loc}} \approx \xi_{\mathrm{loc}}^2/D$, où ξ_{loc} est la longueur de localisation et D la constante de diffusion. Son amplitude augmente progressivement pour atteindre son contraste maximal au temps de Heisenberg $\tau_{\mathrm{H}} \approx h/\Delta$ associé au volume localisé. L'émergence progressive du CFS est donc une signature directe du régime localisé, ne se produisant que lorsque les ondes sont effectivement confinées dans l'espace.

Ghosh et al. [12] ont ensuite précisé le mécanisme microscopique à l'origine du CFS dans une analyse théorique détaillée du cas bidimensionnel. Ils expliquent que ce pic résulte d'interférences constructives entre chemins multiples qui parcourent des boucles fermées dans le même sens, mais en explorant les diffuseurs selon des séquences différentes. Ces chemins, plus complexes que ceux associés au CBS, correspondent à la concaténation de deux ou plusieurs processus de diffusion maximaux croisés (chaque boucle représentant un processus semblable au CBS). Cette contribution, insignifiante dans un régime purement diffusif, devient prédominante dès que les états deviennent localisés. Cette explication théorique démontre pourquoi le pic CFS n'apparaît qu'à des temps longs, une fois que la localisation est bien établie.

Au-delà des prédictions théoriques, très peu d'expériences ont pour l'instant confirmé l'existence du CFS : à notre connaissance, seules deux études — toutes deux reposant sur des analogues du kicked rotor quantique — en ont apporté la preuve dans des milieux désordonnés.

Une première observation expérimentale de la diffusion cohérente vers l'avant (CFS) a été rapportée dans un système de kicked rotor dont le potentiel est modulé périodiquement en amplitude et en phase [9]. Un gaz d'atomes froids y subit une séquence d'impulsions reproduisant une dynamique de type Anderson en dimension synthétique. En ajustant un champ de jauge artificiel, les auteurs contrôlent la symétrie de renversement du temps (symétrie $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{K}}$). [2] Les signatures de CBS et de CFS sont détectées via la probabilité de retour à l'origine en impulsion, où elles apparaissent à des instants distincts de la séquence. Lorsque la symétrie $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{K}}$ est brisée, le pic CBS disparaît tandis que le CFS persiste et s'amplifie à l'approche du régime localisé ; quand la symétrie est préservée, CBS et CFS coexistent. Cette expérience établit ainsi la première observation expérimentale du CFS,

2. La définition détaillée de $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{K}}$ et son rôle pour les classes d'universalité seront présentées plus loin, voir Sec 3.3.

met en évidence sa robustesse vis-à-vis des symétries, et confirme son lien direct avec la localisation d'Anderson. Plus récemment, une seconde étude expérimentale a été conduite sur un kicked/shaken rotor modulé périodiquement en amplitude et en phase [13]. En réglant ces modulations, les auteurs accèdent à deux régimes non ergodiques : (i) localisé ($L \gg \xi_{\mathrm{loc}}$) et (ii) borné classiquement ($L \ll \xi_{\mathrm{loc}}$). Dans les deux régimes, ils observent un pic CFS, dont le temps d'apparition suit l'échelle de Heisenberg t_H, déterminée respectivement par ξ_{loc} ou par L. En contrôlant les symétries (**T**, **PT**), ils montrent que le CBS n'est visible que sous **PT**, tandis que le CFS subsiste sans **T** et sert de sonde quantitative de la non-ergodicité. Ces résultats confirment que le CFS est un excellent indicateur de la transition vers le régime localisé et, plus généralement, une signature robuste de non-ergodicité dans les systèmes chaotiques/désordonnés.

1.1.4 Anti-localisation faible (Weak Anti-Localization : WAL)

Les phénomènes d'interférences introduits plus haut (CBS, CFS et ERO) sont très sensibles aux symétries du système, en particulier à la symétrie de renversement du temps. Selon les symétries présentes, d'autres manifestations d'origine interférentielle peuvent apparaître. C'est précisément le cas lorsqu'un conducteur désordonné possède un couplage spin–orbite (SOC) : le spin de l'électron n'est plus invariant, et la symétrie de rotation du spin est brisée, alors que la symétrie de renversement du temps peut rester préservée. Dans ce contexte, les trajectoires conjuguées par renversement du temps, qui dans le cas sans SOC interfèrent constructivement et renforcent la probabilité de retour (localisation faible), interfèrent au contraire de manière destructive. En effet, lorsque l'électron parcourt une boucle fermée dans un milieu désordonné avec SOC, son spin subit une rotation dépendant du trajet. Pour deux trajets inverses l'un de l'autre, les rotations de spin ne coïncident pas en général, de sorte que les amplitudes quantiques correspondantes s'additionnent avec un déphasage relatif. Ce déphasage conduit à une annulation partielle (voire totale) de l'interférence constructive.

La figure 1.13 illustre ce mécanisme : en l'absence de couplage spin–orbite (gauche), le spin reste inchangé et les deux boucles conjuguées aboutissent au même état, produisant une interférence constructive. En présence de SOC (droite), le spin se verrouille avec

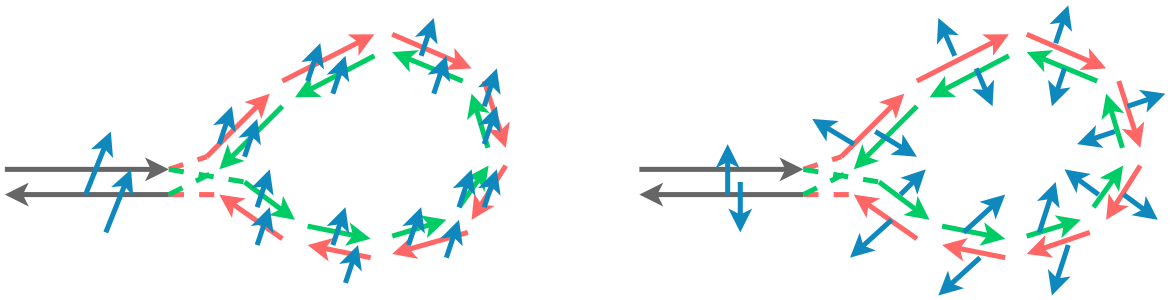


FIGURE 1.13 – Effet du couplage spin–orbite : en l'absence de SOC (gauche), les trajectoires inverses interfèrent constructivement (localisation faible), tandis qu'en présence de SOC (droite), l'évolution du spin conduit à une interférence destructive (antilocalisation faible). Figure inspirée de [74].

la direction de propagation et effectue des rotations différentes sur les deux trajets, ce qui induit une interférence destructive. Cet effet d'antilocalisation faible a été observé expérimentalement dans divers systèmes physiques :

Matériaux à fort couplage spin-orbite (métaux désordonnés) : La toute première observation expérimentale de l'antilocalisation a été rapportée en 1982 par Gerd Bergmann, qui étudiait la magnétorésistance de films métalliques minces désordonnés dopés avec des atomes lourds introduisant un fort couplage spin-orbite [75]. En particulier, G. Bergmann a observé une magnétorésistance négative inhabituelle dans des films minces d'alliages métalliques contenant des impuretés lourdes, effet qu'il a attribué aux retournements de spin dus à la diffusion spin-orbite. Ce résultat constituait une preuve expérimentale directe de l'interférence quantique destructive induite par la rotation du spin 1/2 lors des trajectoires diffusives temps-inversées. Plus généralement, dans les métaux avec diffusion spin-orbite forte, l'interférence détruite entre états de spin singulet et triplet se traduit par une pente négative de la magnéto-conductance aux plus faibles champs, signature typique de l'antilocalisation faible.

Systèmes électroniques bidimensionnels ($2d$) : Dans les gaz d'électrons bidimensionnels des semi-conducteurs (hétérostructures à puits quantiques de type GaAs/AlGaAs, InGaAs/InAlAs, etc.) [27], la présence d'un couplage spin-orbite structurel (effets Rashba/Dresselhaus) conduit à une correction positive de conductance à basse température, conforme à l'antilocalisation faible. Des expériences pionnières sur des inversions de couche GaAs (puits quantiques) ont ainsi permis d'observer une magnétoconductance anormale à très faible champ, explicable par la précession du spin des électrons diffusés élastiquement. L'analyse de ce phénomène d'antilocalisation faible a été utilisée pour mesurer le dédoublement de spin de bande de conduction et le taux de relaxation de spin dans ces systèmes $2d$, confirmant les prédictions du modèle de Hikami, Larkin et Nagaoka (formule HLN) pour un système symplectique (spin 1/2 avec diffusion élastique).

Matériaux topologiques – Isolants topologiques (Bi_2Se_3, Bi_2Te_3) : Les matériaux topologiques à surface de Dirac (par ex. les isolants topologiques Bi_2Se_3, Bi_2Te_3 et alliages apparentés) [28] présentent systématiquement une contribution d'antilocalisation faible dans leurs états de surface. En effet, le verrouillage spin-orbite des fermions de Dirac de surface (et la phase de Berry π associée) interdit la diffusion élastique à 180° sans inversion de spin, ce qui favorise une interférence destructive entre trajectoires réciproques au lieu d'une interférence constructive de localisation faible. Dans les mesures de magnétotransport, ceci se traduit par un pic négatif de conductance à faible champ bien décrit par la formule HLN (avec un facteur $\alpha \approx -1/2$ par canal de Dirac). De nombreuses expériences sur Bi_2Se_3 ont ainsi observé un effet d'antilocalisation faible robuste, indépendant de la qualité cristalline, tant que les états de surface contribuent au transport. Par exemple, Chen et al. [29] ont montré qu'en ajustant le niveau de Fermi par une grille de tension dans Bi_2Se_3, on peut moduler l'amplitude de la correction d'antilocalisation faible, confirmant l'origine topologique (états de surface) de ce signal.

Graphène : Dans le graphène monocouche, les interférences quantiques de phase peuvent conduire soit à la localisation faible, soit à l'antilocalisation faible des porteurs en fonction

du régime de diffusion et des symétries effectives. En l'absence de couplage spin-orbite intrinsèque, le graphène présente généralement une localisation faible due aux diffusions inter-vallées (entre les deux vallées de Dirac K et K') [30]. Toutefois, en présence de certains mécanismes de diffusion ou d'un couplage spin-orbite induit, une correction d'antilocalisation faible peut apparaître. Expérimentalement, une telle augmentation de conductance (creux de magnéto-résistance) a été observée pour la première fois dans du graphène épitaxié sur Sic, où le comportement mesuré concorde avec la théorie de la localisation faible dans le graphène et démontre le caractère chiral des électrons de Dirac dans ce matériau. Par la suite, Tikhonenko et al. [31] ont mis en évidence qu'en modifiant la densité de porteurs (par effet de champ) et la température, on pouvait induire une transition de la localisation faible vers l'antilocalisation faible dans le graphène exfolié sur substrat, l'antilocalisation se manifestant aux plus basses densités et plus hautes températures lorsque la diffusion intra-vallée devient prépondérante.

Antilocalisation à l'interface d'un oxyde : Un exemple emblématique d'antilocalisation faible a été mis en évidence par Seiler et al. dans des hétérostructures d'oxydes formées à l'interface $LaAlo_3/SrTio_3$ [32]. Dans ce système, un gaz bidimensionnel d'électrons se développe naturellement et bénéficie d'un couplage spin-orbite important induit par la rupture d'inversion structurelle de l'interface. En étudiant le transport à très basse température (2–10 K) sous des champs magnétiques transverses allant jusqu'à ± 8 T, tout en modulant la pression hydrostatique jusqu'à 1.65 GPa, les auteurs observent une correction positive de conductivité à champ faible — la signature caractéristique de l'antilocalisation faible. L'analyse quantitative, menée avec la théorie d'Iordanskii–Lyanda-Geller–Pikus (ILP) appliquée à un gaz multibande, révèle que cette antilocalisation provient d'un couplage spin-orbite cubique isotrope produisant un triple enroulement du spin sur la surface de Fermi ($B_{so} \approx 0{,}2\,\mathrm{T}$) ; un modèle linéaire de type Rashba ne réussit pas à reproduire l'ensemble des données. Ces résultats soulignent le rôle central du spin-orbit dans le transport cohérent des interfaces LAO/STO et désignent ces hétérostructures comme des candidates de choix pour explorer, sous pression ou par effet de grille, la transition métal–isolant bidimensionnelle de classe symplectique prédite par la théorie du désordre.

Après les différents exemples expérimentaux rapportés dans la littérature, il convient de noter qu'à notre connaissance, aucune observation expérimentale de l'effet d'antilocalisation faible n'a été effectuée dans le cadre du modèle du kicked rotor quantique utilisant des atomes ultra-froids. L'objectif principal de cette thèse consiste donc précisément à combler cette lacune, en proposant et en analysant un modèle de type kicked rotor avec couplage spin-orbite. Ce modèle, conçu pour être aisément réalisable expérimentalement à partir de gaz d'atomes ultra-froids, pourrait permettre pour la première fois l'observation directe de l'effet d'antilocalisation faible dans un cadre contrôlé, ouvrant ainsi la voie à l'étude approfondie de ce phénomène fondamental dans un système quantique propre et flexible.

1.2 Théorie d'échelle à un paramètre

Afin de comprendre de manière unifiée les comportements de transport quantique observés dans les systèmes désordonnés, qu'il s'agisse de localisation ou d'antilocalisation, il est essentiel de s'appuyer sur un cadre théorique général. C'est dans cette perspective qu'intervient la théorie d'échelle à un paramètre, introduite dans les années 1970 par Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan [14]. Cette approche repose sur l'idée que la conductance effective $g(L)$ d'un système désordonné de taille obéit à une équation d'échelle différentielle gouvernée par un seul paramètre sans dimension : la conductance elle-même. Autrement dit, les variations de la conductance avec l'échelle du système sont entièrement déterminées par une fonction universelle $\beta[g(L)] = \mathrm{d}\ln(g)/\mathrm{d}\ln(L)$, indépendante des détails microscopiques du système, mais dépendant de sa dimension spatiale et de sa classe de symétrie.

Ce cadre théorique permet notamment de prédire l'existence d'une transition métal-isolant en dimension trois, ou encore l'absence d'états étendus en dimension un ou deux pour certaines classes de symétrie. Il fournit également une explication cohérente des effets d'interférences quantiques, comme la localisation faible et l'antilocalisation faible, à travers les signes et les comportements asymptotiques de la fonction $\beta(g)$.

Dans ce qui suit, nous présentons les grandes lignes de la théorie d'échelle à un paramètre, en mettant en évidence ses conséquences physiques, ses prédictions selon les différentes classes de symétrie (orthogonale, unitaire, symplectique), ainsi que sa pertinence dans l'analyse des résultats numériques obtenus pour des modèles désordonnés, qu'il s'agisse du modèle sigma non linéaire ou du kicked rotor quantique.

Il est désormais reconnu que la transition d'Anderson représente une forme de transition de phase de second ordre, provoquée par le désordre ambiant. Toutefois, la spécificité du paramètre d'ordre associé fait l'objet de discussions. Il apparaît cependant qu'il pourrait être associé à la densité locale des états [76, 77].

En 1976, Wegner a établi une analogie entre la transition d'Anderson et les transitions de phase magnétiques, marquant une avancée significative dans la compréhension de ce phénomène [15]. Cette description repose sur l'introduction d'une longueur de corrélation, ξ (qui correspond à la longueur de localisation du côté isolant de la transition), dont on observe la divergence avec un exposant critique ν au fur et à mesure que la conductance G s'approche d'une valeur critique spécifique.

$$\xi \propto |G - G_c|^{-\nu}. \tag{1.11}$$

Peu après, Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan (souvent désignés sous le nom de "Gang of Four") ont formulé la théorie du scaling de la localisation [14, 64], devenue le cadre de référence pour décrire cette transition. Le principe central de cette théorie repose sur la conductance sans dimension, définie par

$$g(L) = \frac{2\hbar}{e^2} G(L), \tag{1.12}$$

où et e la charge élémentaire de l'électron et $g(L)$ dépend universellement de la taille du système L, constitue le paramètre déterminant de la transition de phase. Grâce à l'application des techniques de groupe de renormalisation, ils ont introduit une fonction β destinée à caractériser l'évolution de la conductance en fonction de la taille du système,

$$\beta\left(g\left(L\right)\right) = \frac{\mathrm{d}\ln g(L)}{\mathrm{d}\ln L}. \tag{1.13}$$

Selon la théorie d'échelle à un paramètre, il est établi que tous les systèmes de taille finie appartenant à une même classe d'universalité suivent une fonction $\beta(g)$ unique, telle que définie par l'équation (1.13). Les caractéristiques microscopiques spécifiques d'un échantillon déterminent uniquement sa position sur cette courbe universelle. Lorsque la taille du système augmente, la conductance évolue selon cette fonction β.

Un système est considéré comme métallique lorsque $\beta(g) > 0$, ce qui indique une augmentation de la conductance avec la taille du système. Dans un métal diffusif, on retrouve le comportement asymptotique $g(L) \propto L^{d-2}$. À l'inverse, lorsque $\beta(g) < 0$, la conductance décroît exponentiellement avec la taille, $g(L) \sim \exp\left(-\frac{L}{\xi}\right)$, ce qui traduit l'entrée dans un régime isolant, caractérisé par une longueur de localisation ξ.

Le point où la fonction β s'annule correspond à un point fixe critique, séparant les phases métallique et isolante. On résume ainsi :

$$\beta(g) > 0 : \quad \text{métal}, \tag{1.14}$$
$$\beta(g) = 0 : \quad \text{transition métal–isolant}, \tag{1.15}$$
$$\beta(g) < 0 : \quad \text{isolant}.. \tag{1.16}$$

Dans le cas spécifique de Drude, où $g = \sigma L^{d-2}$, cela implique une fonction β exprimée par

$$\beta_{\text{Drude}}(g) = d - 2, \tag{1.17}$$

soulignant le lien direct entre la dimension du système et son comportement conducteur.

Dans le régime de localisation faible, lorsque la conductance g est grande, l'approche perturbative en $1/g$ met en évidence des corrections au comportement ohmique standard. Celles-ci se traduisent par une diminution de la fonction β dans les trois dimensions à mesure que g décroît [78]. À l'inverse, dans un régime de fort désordre associé à de petites valeurs de g, un développement en série en g montre que ces corrections conduisent cette fois à une augmentation de la fonction β avec la conductance. Entre ces deux limites, il est possible de relier de façon continue les comportements obtenus [14].. Cela signifie que, dans un système de taille finie, la transition métal–isolant n'apparaît pas comme une discontinuité, mais plutôt comme une évolution progressive d'un régime à l'autre.

Dans la Fig.1.14, nous avons adapté les termes de perturbation d'ordre à quatre boucles

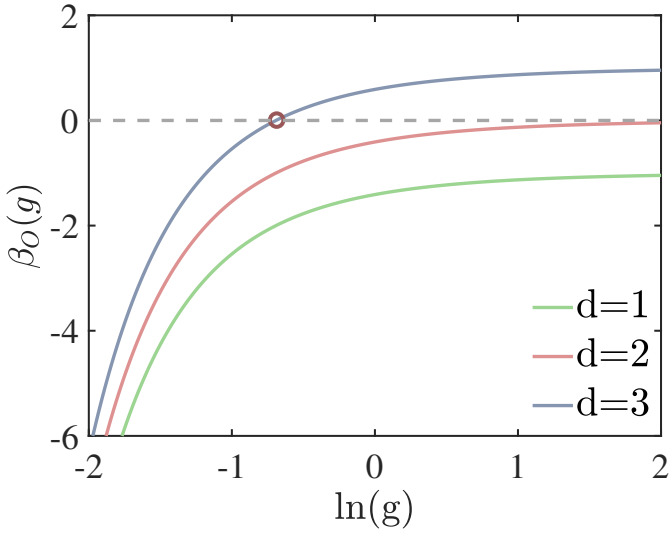


FIGURE 1.14 – Fonction β à l'ordre de quatre boucles. Comme calculé par Wegner [16], la fonction β en $d = 1, 2$ est toujours négative pour toute intensité de désordre finie, indiquant l'absence de véritable comportement métallique. En $d = 3$, la fonction β croise la ligne zéro, ce qui marque une transition métal-isolant.

plus élaborés calculés par Wegner [16] (voir aussi Réf. [76]), qui est donné par

$$\beta_{\mathrm{O}}[g(L)] = \begin{cases} d - 2 - \frac{1}{\pi g} - \frac{3\zeta(3)}{4(\pi g)^2}, & g \gg 1 \\ \text{const} + \ln g, & g \ll 1 \end{cases}, \tag{1.18}$$

où l'indice O fait référence à la classe de symétrie orthogonale [3], et $\zeta(n)$ désigne la fonction zêta de Riemann. Cette analyse à quatre boucles s'appuie sur la théorie des champs pour les modèles σ non linéaires [17, 18], aboutissant à la même équation de flot pour les fonctions β et soutenant ainsi l'approche de mise à l'échelle proposée par le "Gang of Four".

Il est particulièrement intéressant de noter que, dans les systèmes unidimensionnels et bidimensionnels, on n'observe pas de véritable comportement métallique, puisque la fonction β reste négative pour toute valeur finie du désordre. Autrement dit, quels que soient les paramètres microscopiques, les systèmes en $d = 1$ et $d = 2$ se trouvent toujours dans un état localisé. En revanche, la situation est différente en trois dimensions : la fonction β s'annule et change de signe en $g = g_c$, identifiant ainsi un point fixe instable. À ce point critique, la conductance ne dépend plus de la taille du système, ce qui marque la transition de phase entre un état isolant et un état métallique. Les systèmes caractérisés par une conductance macroscopique $g < g_c$ se comportent comme des isolants, tandis que ceux pour lesquels $g > g_c$ présentent un comportement métallique. Près des points critiques, le comportement physique des systèmes peut souvent être exprimé à travers des lois de puissance dont les exposants sont universels. Ces exposants, indépendants

3. La lettre O désigne la classe de symétrie orthogonale. Les différentes classes de symétrie et leurs propriétés seront discutées dans les sections qui suivent.

des détails microscopiques des systèmes, définissent ce qu'on appelle les classes d'universalité. Pour étudier le comportement d'échelle associé à la transition métal-isolant (MIT) en trois dimensions, une approche consiste à linéariser la fonction β autour du point critique, en s'appuyant sur les travaux référencés dans les études de [16, 19, 20, 55]. La fonction bêta linéarisée au voisinage du point critique g_c peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\ln\left(\frac{g}{g_c}\right)}{\mathrm{d}\ln L} = s\ln\left(\frac{g}{g_c}\right), \tag{1.19}$$

où s est la pente de la fonction β en $g = g_c$.

En intégrant cette équation entre une échelle microscopique L_{mic} (où la conductance vaut g_{mic}) et une échelle L, on obtient

$$\int_{\ln(g_{\mathrm{mic}}/g_c)}^{\ln(g/g_c)} \frac{\mathrm{d}\ln\left(\frac{g'}{g_c}\right)}{\ln\left(\frac{g'}{g_c}\right)} = s\int_{\ln L_{\mathrm{mic}}}^{\ln L} \mathrm{d}\ln L', \tag{1.20}$$

ce qui conduit à

$$\left(\frac{L}{L_{\mathrm{mic}}}\right)^s = \frac{\ln\left(\frac{g}{g_c}\right)}{\ln\left(\frac{g_{\mathrm{mic}}}{g_c}\right)} \approx \frac{g-g_c}{g_{\mathrm{mic}}-g_c}, \tag{1.21}$$

où l'approximation est valable près du point critique, lorsque g varie lentement. Ainsi, à l'échelle macroscopique, la conductance g est une fonction de L^s. Nous introduisons alors une longueur caractéristique ξ, définie comme

$$\xi \equiv L_{\mathrm{mic}}\left(\frac{g_c}{g_{\mathrm{mic}}-g_c}\right)^{\nu} = \eta^{-\nu}, \tag{1.22}$$

où ξ représente la longueur de localisation du côté isolant, η est lié à la conductance microscopique et

$$\nu = \frac{1}{s}, \tag{1.23}$$

est l'exposant critique de la longueur de localisation. On en déduit que la conductance prend la forme

$$g(L) = g_c\left[1-\left(\frac{L}{\xi}\right)^{1/\nu}\right], \tag{1.24}$$

indiquant comment g évolue avec la taille du système L au voisinage de la transition métal–isolant, en fonction de l'échelle de longueur caractéristique ξ.

L'hypothèse fondamentale de la théorie d'échelle à un paramètre, formulée par le "Gang of Four" [14], stipule que la conductance est une fonction universelle du rapport L/ξ à toutes les échelles de longueur. Cette approche unifie la description de la transition métal–isolant dans les systèmes désordonnés, et montre que le comportement critique peut être caractérisé par un petit nombre de paramètres universels. D'après la loi d'Ohm,

on a

$$g \propto \left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2}, \tag{1.25}$$

ce qui implique que la conductivité se met à l'échelle comme

$$\sigma(L \to \infty) \propto \frac{1}{\xi^{d-2}} \propto \eta^{(d-2)\nu}, \tag{1.26}$$

Ainsi, la conductivité d'un échantillon macroscopique décroît continûment en s'approchant du point critique, pour toute dimension $d > 2$. Une description plus précise est obtenue par l'analyse à quatre boucles de Wegner [16] (voir aussi [76]), qui conduit pour $d = 2 + \epsilon$ à l'expansion

$$\nu = \epsilon^{-1} - \frac{9}{4}\zeta(3)\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{1.27}$$

Ce développement en série montre la sensibilité de ν aux petites variations de dimension autour de $d = 2$. Le critère de Chayes [79] impose que $\nu > d/2$ pour les systèmes désordonnés, ce qui n'est pas toujours satisfait par l'expansion en ϵ, soulignant l'importance des corrections d'ordre supérieur. Dans le cas tridimensionnel ($d = 3$), Vollhardt et Wölfle [24, 25] ont proposé une estimation $\nu = 1$ à partir d'une théorie auto-cohérente de la localisation d'Anderson prenant en compte tous les ordres de diagrammes croisés. Une version améliorée de cette approche a donné $\nu = 1.5$ [80]. Enfin, des études numériques de haute précision ont établi une valeur universelle $\nu \approx 1.57$ [23, 26], confirmée expérimentalement [81], validant ainsi l'universalité de la classe de la transition d'Anderson.

1.2.1 Criticalité dans la classe symplectique

Dans la partie suivante, nous allons examiner comment les résultats obtenus précédemment se déclinent selon les différentes classes de symétrie. Ces classe de symétrie sont les trois classes standards de Wigner-Dyson qui sont définies selon la présence ou l'absence de symétries de renversement du temps et de rotation spin SU(2) dans chaque réalisation du potentiel de désordre [82, 83]. Plus spécifiquement, la classe unitaire U décrit un métal désordonné où l'invariance par renversement du temps est brisée, soit par des impuretés magnétiques, soit par un champ magnétique externe. Les métaux possédant à la fois la symétrie de renversement du temps et la symétrie de rotation de spin appartiennent à la classe orthogonale O. La classe symplectique S s'applique à un métal désordonné avec l'invariance de renversement du temps préservée mais avec une symétrie de rotation de spin brisée (due aux interactions spin-orbite) [76]. Pour chacune des trois classes de symétrie, orthogonale, unitaire et symplectique, des modèles σ-non linéaires distincts peuvent être construits [76], résultant en des fonctions bêta distinguées. Dans la dernière section, nous avons considéré la fonction β pour le cas orthogonal. Dans le cas unitaire et symplectique, les fonctions β sont données jusqu'à l'ordre à quatre boucles par [16, 55, 76, 84] :

$$\beta_{\mathrm{U}}[g(L)] \approx (d-2) - \frac{1}{2(\pi g)^2} - \frac{3}{8(\pi g)^4}, \tag{1.28}$$

$$\beta_S[g(L)] \approx (d-2) + \frac{1}{2\pi g} - \frac{3\zeta(3)}{64(\pi g)^4}, \tag{1.29}$$

Dans le cas unitaire, la fonction β présente une évolution qualitative similaire à celle observée dans la classe orthogonale (voire figure 1.15(a)). En revanche, la situation change radicalement dans la classe symplectique 1.15(b)). Cette différence apparaît de manière particulièrement en deux dimensions et pour un désordre faible : la fonction β croît d'abord avec la diminution de la conductance, avant de renverser sa tendance et de décrire finalement un régime localisé. Ce comportement conduit à l'existence d'une fonction β positive dans le régime faiblement désordonné, révélant ainsi l'apparition d'un point critique qui marque une transition du comportement métallique vers un état isolant. Cette transition, désignée sous le nom de transition métal–isolant symplectique (sMIT), correspond à l'émergence d'un état métallique spécifique à la classe symplectique, communément appelé « métal symplectique ».

L'analyse du comportement critique associé à cette transition repose sur les équations (1.19)–(1.21),qui permettent d'extraire l'exposant critique ν à partir de la pente la fonction βau point fixe. Pour les dimensions supérieures à deux, la loi d'Ohm relie la conductance à la conductivité et conduit à une valeur critique finie de la conductance, ainsi qu'à une conductivité qui s'annule au point critique, conformément aux équations (1.22) et (1.23). Ainsi, la transition métal–isolant apparaît à partir de $d > 2$ dans la classe unitaire, tandis qu'elle existe déjà en $d = 2$ dans la classe symplectique, où elle est caractérisée par une conductivité critique finie.

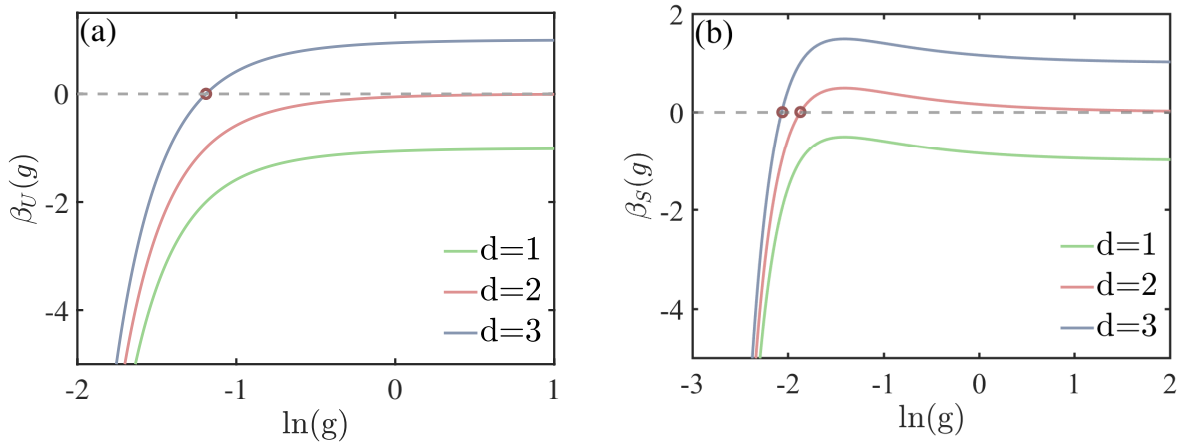


FIGURE 1.15 – Fonctions β à l'ordre à quatre boucles pour la classe unitaire et symplectique. (a) La fonction β du cas unitaire est similaire à celle du cas orthogonal. Une transition métal-isolant se produit uniquement pour $d = 3$. (b) Dans le cas symplectique, la fonction β est renforcée pour un faible désordre, résultant en un comportement métallique pour les systèmes bidimensionnels (métal symplectique). Pour un désordre fort, le terme d'ordre quatre de l'expansion en boucles réduit la fonction β et une transition métal-isolant se produit en $d = 2$, ce qui est absent dans la classe de symétrie orthogonale et unitaire (transition métal-isolant symplectique, sMIT).

1.2.2 Kicked rotor quantique : un modèle privilégié pour l'étude de la localisation et de l'antilocalisation faible

Comme discuté précédemment, des signatures expérimentales de phénomènes d'interférence quantique tels que l'Enhanced Return to the Origin (ERO) ou la diffusion cohérente vers l'avant (CFS) ont été observées dans différentes variantes du kicked rotor quantique. Ces résultats démontrent l'intérêt de ce modèle comme plateforme idéale pour l'étude des effets de cohérence dans les systèmes désordonnés.

L'observation directe des transitions de localisation d'Anderson dans des systèmes physiques réels (électrons dans des métaux désordonnés, ondes lumineuses ou acoustiques, etc.) demeure un défi majeur, en particulier dans les dimensions supérieures ($3d$ ou plus). En effet, ces systèmes souffrent de limitations expérimentales telles que la présence d'interactions non négligeables, d'effets dissipatifs, de désordre mal contrôlé, ou encore d'absorption de l'onde incidente. Ces effets parasitent souvent l'interprétation des résultats, rendant difficile non seulement la mise en évidence claire d'une transition métal–isolant, mais également sa caractérisation précise, par exemple à travers la mesure des exposants critiques associés.[76, 85-87]. Face à ces limitations, les gaz d'atomes ultra-froids constituent une plateforme expérimentale particulièrement adaptée. Ils permettent de minimiser les interactions interatomiques, notamment en régime dilué d'un condensat de Bose–Einstein, tout en introduisant un désordre bien contrôlé à l'aide de potentiels optiques de type speckle. Dans des configurations unidimensionnelles, la localisation d'Anderson a ainsi pu être observée et caractérisée de manière quantitative [33, 34].

En revanche, l'exploration expérimentale de la transition d'Anderson dans des dimensions supérieures ($3d$ notamment) reste beaucoup plus délicate [35-37]. Par exemple, dans [35], les signatures caractéristiques des régimes localisé et diffusif n'ont pas pu être clairement distinguées. Dans [36], la durée trop courte de l'expérience n'a pas permis d'atteindre le régime asymptotique nécessaire pour conclure sur l'éventuelle localisation, et le seuil de mobilité mesuré semble surestimé. De même, dans l'expérience [37], bien que le seuil de mobilité ait été identifié, l'exposant critique associé n'a pas été mesuré, et la valeur obtenue pour le seuil reste significativement plus élevée que celle prédite par les modèles théoriques [38, 88], ce qui soulève des interrogations quant à l'interprétation des résultats.

C'est dans ce contexte que le modèle du kicked rotor quantique prend toute son importance. Ce système, consistant en une particule soumise à une succession périodique de potentiels impulsionnels, a permis dès les années 90 d'observer clairement une localisation dynamique équivalente à la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions [39-41]. Contrairement aux expériences classiques avec désordre spatial réel, la localisation dynamique observée dans le kicked rotor quantique bénéficie d'une correspondance mathématique exacte avec le modèle d'Anderson en dimension $1d$, $2d$, $3d$ et même $4d$, lorsque des modulations judicieuses quasi-périodiques des amplitudes des kicks sont utilisées [42]. Ces modulations permettent en effet de simuler l'effet d'une dimension supplémentaire, et ainsi de passer facilement à l'étude de transitions métal-isolant dans

des dimensions effectives supérieures [40, 43-45].

Plus récemment, l'intégration d'un couplage spin-orbite artificiel dans des modèles de kicked rotor a permis de prédire théoriquement des effets d'antilocalisation faible analogues à ceux observés dans les matériaux solides à fort couplage spin-orbite [89]. Cependant, ces modèles présentent de fortes contraintes quant à leur réalisation expérimentale. À notre connaissance, aucune observation expérimentale claire de l'antilocalisation faible dans un kicked rotor quantique avec couplage spin–orbite n'a encore été rapportée dans la littérature.

L'objectif central de cette thèse est précisément d'introduire un modèle expérimentalement plus accessible de kicked rotor quantique avec couplage spin-orbite, permettant ainsi d'étudier numériquement puis expérimentalement l'effet d'antilocalisation faible en une dimension, puis d'étendre l'étude à des configurations bidimensionnelles pour explorer l'existence d'une transition métal-isolant dans la classe symplectique. Ce modèle, détaillé dans les chapitres suivants, est actuellement étudié numériquement par nos soins et mis en œuvre expérimentalement par notre équipe, avec des résultats préliminaires très encourageants confirmant l'apparition de signatures caractéristiques de l'antilocalisation faible.

1.2.3 Loi d'échelle à un paramètre dans le contexte du kicked rotor quantique

Les caractéristiques de transport dans les systèmes désordonnés, telles que celles observées dans le kicked rotor quantique, sont également gouvernées par le principe de mise à l'échelle universelle. Comme nous l'avons discuté dans la section 1.2, ce principe repose sur la fonction d'échelle $\beta(g)$, qui fournit une mesure globale du transport en fonction de la taille effective du système. Cette approche s'avère particulièrement puissante pour décrire le comportement des systèmes désordonnés, comme cela a été démontré dans le cadre du modèle d'Anderson. Dans le contexte spécifique du kicked rotor quantique, ce modèle se traduit par une attention particulière portée à la dynamique d'un paquet d'ondes dans un potentiel spatial aléatoire. Notamment, le phénomène de localisation d'Anderson est caractérisé par une saturation de l'expansion moyenne quadratique de la fonction d'onde,$\langle r \rangle^2$, suggérant une transition vers un état où le système cesse de se diffuser. Pour quantifier ce comportement dans kicked rotor, les grandeurs dynamiques équivalentes à la taille L et à la conductance sans dimension g sont adaptées à partir des concepts de la localisation d'Anderson [14], mais reformulées pour refléter la spécificité du système étudié [90] :

$$L = \sqrt{\langle \mathrm{p}^2 \rangle}; \tag{1.30a}$$

$$g = \frac{\left\langle \mathrm{p}^2 \right\rangle^{\frac{d}{2}}}{t}, \tag{1.30b}$$

où d est la dimensionnalité du système et t est le nombre de kicks (temps). Ces reformulations permettent de tenir compte de la nature dynamique du kicked rotor, où la localisation survient dans l'espace des impulsions et est marquée par une saturation de

l'énergie cinétique en fonction du temps (Pour une description détaillée de ce système et de ses propriétés fondamentales, le lecteur est renvoyé au chapitre 2).

Lorsqu'on examine le comportement de la fonction $\beta(g)$ dans un espace unidimensionnel $d = 1$, on observe deux régimes de comportement distincts en fonction du degré de désordre. Dans le cas d'un faible désordre, on trouve $\beta(g) = -1$ dans le régime de diffusion à court terme, ce qui correspond à un comportement ohmique classique avant que les effets de localisation ne deviennent dominants. Cette dynamique se manifeste clairement dans le contexte du kicked rotor, où, sous cette limite, le système affiche une dynamique de diffusion à temps court décrite par $\left\langle \mathrm{p}^2 \right\rangle = 2Dt/\hbar^2$, avec,$D$ représentant le coefficient de diffusion initial, considéré comme une constante [4]. Cette relation conduit directement à $\mathrm{d}\ln(g) = -\mathrm{d}\ln(L) = \mathrm{d}\ln(\sqrt{t})$, aboutissant à $\beta(g) = -1$, en accord avec le comportement attendu dans cette limite de faible désordre. À l'opposé, dans le régime de long terme, précisément pour $t > t_{\mathrm{loc}}$, le système atteint un état de localisation complète. Dans ce contexte, la conductance g tend vers zéro, entraînant $\beta(g)$ vers $-\infty$. Cette transition marque un changement radical de comportement, passant d'une phase diffusive à un état où le système est entièrement localisé, soulignant l'influence critique du désordre et de la dynamique temporelle sur les propriétés de transport dans le kicked rotor.

Dans l'étude menée par [91], l'accent a été mis sur l'analyse approfondie des corrections principales à $\langle \mathrm{p}(t) \rangle^2$ attribuables aux effets de boucles dans les contextes des classes orthogonales et unitaires. Cette démarche analytique rigoureuse a permis de jeter les bases nécessaires à l'établissement des corrections de plus bas ordre pour les fonctions $\beta(g)$ orthogonale et unitaire [5] spécifiquement appliquées au kicked rotor.

$$\beta_{\mathrm{O}}[g(L)] = -1 - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}g} + \ldots \tag{1.31a}$$

$$\beta_{\mathrm{U}}[g(L)] = -1 - \frac{1}{2g^2} + \ldots \tag{1.31b}$$

$$\beta_{\mathrm{S}}[g(L)] = -1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}g} + \ldots. \tag{1.31c}$$

Les expressions des fonctions $\beta(g)$ (1.31) pour les classes orthogonale et symplectique ainsi que l'unitaire intègrent des termes en $1/g$ et $1/g^2$ respectivement, signalant l'existence de contributions d'ordre supérieur, non pleinement déterminées pour le kicked rotor. Cette spécificité traduit l'importance des symétries dans le comportement diffusif du système. Pour la classe orthogonale, le terme en $1/g$ émerge en présence de la symétrie par renversement du temps et d'une symétrie de rotation de spin, où le carré de l'opérateur de renversement du temps est l'opérateur identité. Cette configuration favorise l'interférence constructive entre les chemins directs et inversés, générant ainsi les phénomènes d'ERO. En contraste, la classe symplectique, bien que préservant le renversement du temps, se distingue par une brisure de la symétrie de rotation de spin. Dans

4. Le lien entre p et p est donné par $\mathrm{p} = p/\hbar$.

5. Pour le cas symplectique, une démarche analytique permet de dériver la fonction $\beta_S(g)$ à partir de celle du cas orthogonal, en appliquant la relation $\beta_S(g) = \beta_O(-2g)$.

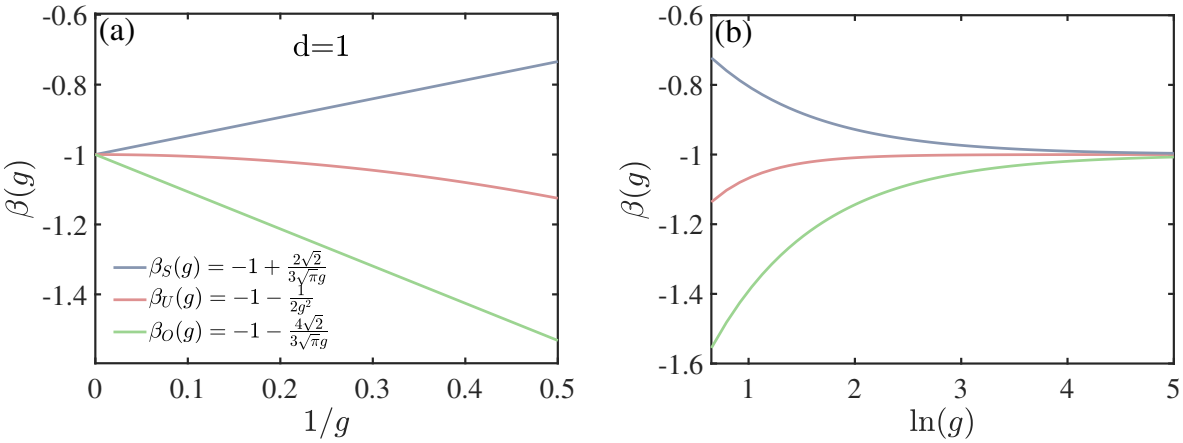


FIGURE 1.16 – Les fonctions $\beta(g)$ (1.31), sont représentées pour le kicked rotor quantique dans les trois classes de symétrie — symplectique, unitaire et orthogonale — en dimension un, en fonction de $1/g$ (figure a) et en fonction de $\ln(g)$ (figure b).

ce cas, le carré de l'opérateur de renversement du temps s'oppose en signe à l'opérateur identité, conduisant à une interférence destructive entre les trajectoires, ce qui résulte en des phénomènes d'Anti-ERO. Quant à la classe unitaire, l'absence de symétrie par renversement du temps explique l'omission d'un terme en $1/g$ dans sa fonction $\beta(g)$.

1.3 Théorie des matrices aléatoires et localisation d'Anderson

La théorie des matrices aléatoires (Random Matrix Theory, RMT) a pris son essor dans les années 1950 avec les travaux de Wigner. Face à la complexité croissante des spectres nucléaires observés expérimentalement, Wigner proposa de modéliser l'hamiltonien d'un noyau atomique lourd par une grande matrice aléatoire, afin d'en décrire statistiquement les niveaux d'énergie. Cette idée a marqué le point de départ de l'étude des matrices aléatoires en physique. L'étude des matrices aléatoires a ainsi commencé avec leur application comme modèles statistiques pour les noyaux atomiques lourds [92]. Ce postulat fondateur aboutit au développement rapide d'un nouveau domaine de recherche en physique théorique, qui s'étendit par la suite à de nombreux autres contextes allant des systèmes quantiques chaotiques et désordonnés à la gravité bidimensionnelle et à la théorie des cordes [93-95], elle s'est également avérée utile en théorie des nombres [96-100]. Wigner et d'autres ont établi les premiers résultats fondamentaux de la RMT [92, 101, 102], posant les bases d'une théorie aujourd'hui riche et multidisciplinaire. Dans le contexte qui nous intéresse, celui des systèmes quantiques désordonnés, l'extension de la RMT apparaît naturelle. En effet, les spectres des hamiltoniens associés à la localisation d'Anderson ou à des modèles désordonnés présentent des propriétés statistiques universelles qui peuvent être décrites efficacement par les ensembles de matrices aléatoires appropriés. La RMT fournit ainsi un cadre puissant pour relier les symétries fondamentales du système (orthogonal, unitaire ou symplectique) aux propriétés de transport quantique, et notamment pour caractériser la transition métal–isolant et les phénomènes de localisation ou d'antilocalisation faibles [76, 103-108].

Un résultat central de la RMT est la loi du demi-cercle de Wigner décrivant la distribution globale des valeurs propres [109-112]. Celle-ci stipule que, pour une matrice hermitienne aléatoire de grande taille N, la densité de valeurs propres tend vers une distribution universelle en forme de demi-cercle dans la limite $N \to \infty$. Par exemple, pour une matrice de Wigner (matrice symétrique à entrées iid [6] de variance σ^2), la densité spectrale moyenne converge vers la loi $\rho_{\mathrm{sc}}(E) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - E^2}$, valable pour $|E| < 2\sigma$. Cette expression décrit un demi-cercle (ou demi-ellipse) dont le support s'étend asymptotiquement de -2σ à $+2\sigma$ (pour des matrices normalisées de sorte que $\mathrm{Var}(E) = \sigma^2$). La loi du demi-cercle de Wigner a une importance analogue, pour les grandes matrices, à celle de la loi des grands nombres pour les variables indépendantes – on l'a d'ailleurs qualifiée d'«analogue non commutatif de la loi normale» en probabilité [113]. Ce théorème s'est avéré remarquablement universel : bien qu'initialement démontré pour les matrices gaussiennes indépendantes (ensembles de Wigner ou de Dyson), il reste valable dans des situations beaucoup plus générales (par exemple pour des matrices aléatoires structurées à bandes de largeur finie) [114].

Au-delà du comportement global du spectre, la RMT décrit aussi les fluctuations locales des niveaux d'énergie, en particulier la statistique des espacements entre valeurs propres voisines. Dyson a montré que ces fluctuations ne dépendent que des symétries fondamentales du système [115]. En effet, il existe trois classes d'universalité (dites de Wigner–Dyson) pour les spectres de matrices aléatoires hermitiennes, caractérisées par le paramètre β : $\beta = 1$ correspond à l'ensemble orthogonal (GOE) avec symétrie de renversement du temps, $\beta = 2$ à l'ensemble unitaire (GUE) en l'absence de symétrie temporelle, et $\beta = 4$ à l'ensemble symplectique (GSE) incluant le couplage de spin. Ces trois classes de Dyson possèdent chacune une loi d'espacement $P(s)$ spécifique, mais partagent toutes la même propriété cruciale de répulsion des niveaux. Pour les trois ensembles classiques de matrices aléatoires gaussiennes (GSE, GUE, GEO) la conjecture de Wigner fournit une approximation analytique de la densité de probabilité des espacements entre niveaux d'énergie voisins [116, 117] :

$$P_{\mathrm{GSE}}(s) = \frac{2^{18}}{3^6\pi^3} s^4 e^{-\frac{64}{9\pi}s^2}, \tag{1.32a}$$

$$P_{\mathrm{GUE}}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\frac{4}{\pi}s^2}, \tag{1.32b}$$

$$P_{\mathrm{GOE}}(s) = \frac{\pi}{2} s\, e^{-\frac{\pi}{4}s^2}, \tag{1.32c}$$

où s est la distance entre deux niveaux adjacents après normalisation par la densité moyenne. Cette distribution caractéristique s'annule linéairement pour $s \to 0$, traduisant une forte répulsion entre niveaux proches. Au contraire, pour des niveaux d'énergie non corrélés distribués aléatoirement (statistique de Poisson), la distribution des écarts serait exponentielle, $P(s) = e^{-s}$, qui reste finie en $s = 0$ (absence totale de répulsion). La différence entre ces deux cas est illustrée par le fait que les spectres de systèmes chaotiques (ou de métaux désordonnés) suivent les lois de Wigner–Dyson avec corrélations fortes, tandis que les spectres de systèmes intégrables ou d'isolants désordonnés obéissent à une

6. L'abréviation iid signifie indépendantes et identiquement distribuées

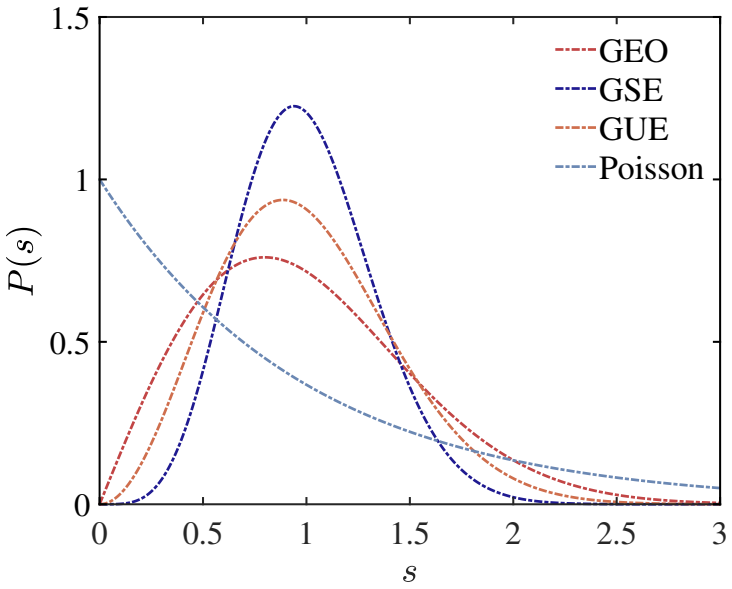


FIGURE 1.17 – Distributions d'espacement des valeurs propres $P(s)$ pour différents ensembles aléatoires. L'ensemble orthogonal (GOE) est représenté en rouge, l'ensemble unitaire (GUE) en orange, et l'ensemble symplectique (GSE) en bleu. Pour comparaison, la distribution de Poisson, correspondant à des valeurs propres distribuées indépendamment, est indiquée en bleu clair.

statistique de Poisson sans corrélations [118, 119].

Un lien profond s'est révélé entre la statistique spectrale (issue de la RMT) et la localisation d'Anderson. En effet, les propriétés statistiques des niveaux d'énergie d'un Hamiltonien désordonné changent radicalement selon que le système est dans la phase étendue (métallique) ou localisée (isolante). Dans le régime métallique (faible désordre, états étendus occupant tout le volume), le spectre présente des corrélations de longue portée et une rigidité spectrale analogues à celles prédîtes par les ensembles aléatoires de Wigner–Dyson [120]. En particulier, les niveaux d'énergie évitent de se rapprocher trop près les uns des autres (répulsion des niveaux) et la distribution des espacements $P(s)$ suit la loi de Wigner–Dyson caractéristique de la classe de symétrie considérée [121]. Au contraire, dans le régime isolant (états localisés spatialement sur quelques sites), les niveaux d'énergie se comportent essentiellement comme des valeurs aléatoires indépendantes : ils n'ont pas de répulsion mutuelle et la distribution des espacements obéit à une loi de Poisson [122]. Autrement dit, la transition d'Anderson s'accompagne d'un changement d'universalité spectrale : on passe d'un spectre corrélé de type Wigner–Dyson (en phase métallique délocalisée) à un spectre non-corrélé de type Poisson (en phase isolante). Ce phénomène a notamment été mis en évidence dans des simulations numériques du modèle d'Anderson sur réseau, et il a un parallèle dans le domaine du chaos quantique : de même que les systèmes intégrables exhibent des spectres de Poisson tandis que les systèmes chaotiques suivent les statistiques RMT, un système désordonné localisé présente un spectre Poissonien alors qu'un système désordonné délocalisé présente un spectre de Wigner–Dyson.

Au point critique de la transition (désordre égal au désordre critique), le système n'est ni complètement métallique ni complètement isolant, et ses propriétés spectrales se situent dans une classe d'universalité intermédiaire [123]. En effet, les observations numériques montrent que la distribution des niveaux à la transition d'Anderson n'est ni de Poisson ni de Wigner–Dyson, mais présente un comportement hybride entre les deux. Par exemple, la distribution $P(s)$ au point critique tend vers une constante non nulle pour $s \to 0$ (comme une loi Poisson), tout en conservant une certaine forme de répulsion modérée pour $s > 0$ [103]. De plus, les fonctions d'onde critiques associées à ces niveaux présentent une structure fractale sur plusieurs échelles (phénomène de multifractalité). Cela signifie que les états critiques ne sont ni entièrement localisés sur un site, ni uniformément étalés sur tout l'espace, mais exhibent des fluctuations de densité importantes à toutes les échelles de longueur [76, 124]. Cette multifractalité des états électroniques au point critique est un marqueur de la transition d'Anderson, et elle va de pair avec des propriétés spectrales inhabituelles. L'étude analytique de ce régime critique reste un domaine actif de recherche, mobilisant des approches issues à la fois de la physique mésoscopique (théorie de la conductance, scaling fini) et de la physique mathématique (analyses fines des statistiques spectrales).

Enfin, des avancées théoriques notables ont rapproché la théorie des matrices aléatoires du modèle d'Anderson. En particulier, l'utilisation de techniques de supersymétrie – notamment le formalisme sigma non-linéaire d'Efetov – et du groupe de renormalisation a permis d'établir des correspondances précises entre certains modèles de matrices aléatoires et le comportement du modèle d'Anderson en régime délocalisé [125-127]. Ces méthodes ont montré que, dans la limite de faible désordre, les statistiques spectrales (telles que la densité d'états et les corrélations entre niveaux d'énergie) du Hamiltonien désordonné peuvent être décrites par un ensemble de matrices aléatoires effectif – en pratique, on observe des lois de Wigner-Dyson dans le régime métallique délocalisé, par opposition aux statistiques de Poisson dans le régime localisé isolant [128].

Ces travaux récents ont considérablement clarifié la relation entre le modèle d'Anderson et la RMT, ouvrant la voie à des avancées mathématiques rigoureuses sur la transition métal–isolant (par exemple, la mise en évidence théorique d'une phase diffusante en dimension 3 pour un modèle sigma non-linéaire supersymétrique équivalent) [125]. En résumé, la localisation d'Anderson et la théorie des matrices aléatoires, initialement développées indépendamment, sont désormais comprises comme deux facettes reliées d'un même problème : l'étude des effets du désordre sur les niveaux d'énergie et les états quantiques, depuis les régimes ergodiques délocalisés jusqu'aux régimes localisés. Les liens profonds entre ces deux domaines continuent d'alimenter des recherches interdisciplinaires en physique de la matière condensée, en mathématiques et en science des matériaux [128].

Chapitre 2

Le Kicked Rotor

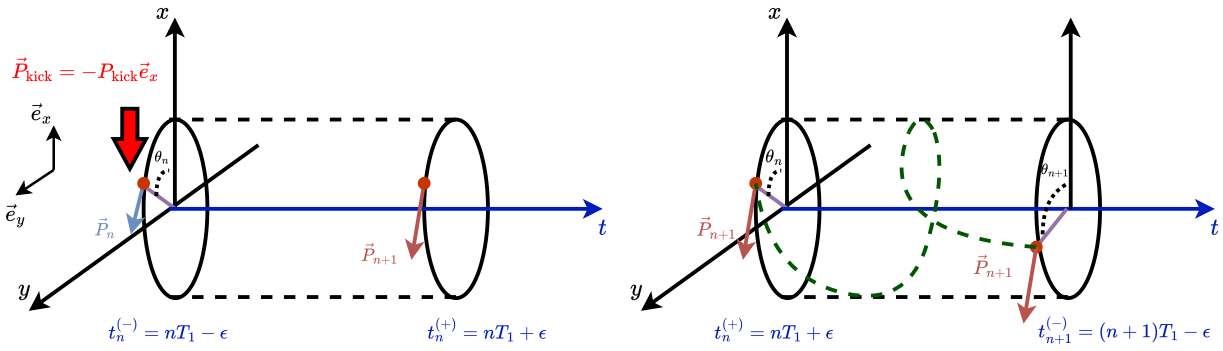
Sommaire du présent chapitre

2.1 Le Kicked Rotor classique **37**
2.1.1 Présentation du modèle 37
2.1.2 Application standard de Chirikov 40
2.1.3 Comportement diffusif 43
2.1.4 Exposants de Lyapunov du kicked rotor 45
2.2 Le Kicked Rotor Quantique **48**
2.2.1 Evolution du système 49
2.2.2 Simulation numérique 53
2.2.3 Lien avec le modéle d'Anderson 56
2.3 Conclusion **58**

2.1 Le Kicked Rotor classique

2.1.1 Présentation du modèle

Pour modéliser le système, on considère un rotateur constitué d'une petite masse ponctuelle (de masse M) se déplaçant sur un cercle autour d'un axe vertical. La distance entre la masse et l'axe reste fixe et égale à l. L'orientation de la masse peut alors être décrite par un angle θ, mesuré par rapport à une direction de référence choisie, par exemple celle de l'axe $\vec{e}_x$. Cette masse subit des impulsions périodiques orientées toujours dans la même direction (disons $\vec{e}_x$) à des instants $t_n = nT_1$, où T_1 est la période des impulsions. À chaque impulsion, une force instantanée $\vec{P}_{\text{kick}} = -P_{\text{kick}}\vec{e}_x$, avec P_{kick} constante, est appliquée à la masse. Cette perturbation provoque une variation instantanée de la quantité de mouvement proportionnelle à $\sin\theta$, sans modifier la position de la masse. On appelle cette perturbation un *kick*, et n désigne son numéro d'ordre.



(a) Kick (b) Propagation libre

FIGURE 2.1 – Deux évolutions temporelles distinctes du kicked rotor replié : (a) phase de kick et (b) phase de propagation libre .

La figure 2.1.a illustre la phase de kick du kicked rotor. Cette phase représente l'effet instantané de l'impulsion sur le système, reliant l'état juste avant le kick à celui immédiatement après. Le cercle de gauche correspond à l'état du système à l'instant $t_n^{(-)}$, c'est-à-dire juste avant le n-ième kick. Le cercle de droite représente l'état à l'instant $t_n^{(+)}$, juste après le kick. Durant cette phase, la masse M n'a pas le temps de se déplacer, ce qui implique que son angle reste inchangé, $\theta_n^{(+)} = \theta_n^{(-)} = \theta_n$. Ce kick provoque donc uniquement une variation instantanée de son impulsion. L'impulsion appliquée à la masse entre ces deux instants est représentée par la flèche verticale rouge. La flèche horizontale bleue représente l'axe temporel.

La figure 2.1.b montre quant à elle la phase de propagation libre, c'est-à-dire entre deux kicks, lorsqu'aucune force n'agit sur la masse. Durant cette phase, le système évolue librement sous l'effet de la dynamique naturelle du rotor. Le cercle de gauche représente l'état du système au temps $t_n^{(+)}$, immédiatement après le kick n, et le cercle de droite son état juste avant le kick $n+1$. Au cours de cette phase, l'énergie du système est conservée : l'impulsion de la masse reste constante. Durant cet intervalle de temps, la masse M évolue librement le long du cercle. Ce mouvement est représenté par des pointillés verts.

Les deux phases décrites précédemment s'enchaînent successivement et constituent l'évolution temporelle du système. Elles se déroulent au cours de chaque intervalle de temps $[nT_1, (n+1)T_1[$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Le modèle décrit précédemment peut être représenté par l'Hamiltonien suivant :

$$H_2(\theta, P, t') = \frac{P^2}{2M} + V_0\tau\cos(\theta)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{\delta}_\tau(t' - nT_1), \tag{2.1}$$

La fonction $\tilde{\delta}_\tau(t)$ est définie par $\tilde{\delta}_\tau(t) = 1/\tau$ pour $|t| < \tau/2$ et est nulle ailleurs. Cette fonction tend vers une distribution de Dirac dans la limite $\tau \to 0$. Dans cette description, P représente l'impulsion, M est la masse de la particule, θ l'angle mesuré par rapport



FIGURE 2.2 – Modèle déplié de la particule évoluant sur un axe.

à une direction de référence, T_1 la période à laquelle les impulsions se répètent, τ leur durée, et V_0 l'amplitude du potentiel périodique appliqué au système.

Il est également possible de présenter ce modèle sous une forme différente appelée modèle « déplié » (voire figure 2.2). Ce modèle alternatif correspond à une réalisation expérimentale couramment utilisée. Dans ce cadre, la masse M ne tourne plus autour d'un point fixe mais se déplace librement le long d'un axe spatial noté X. Elle subit alors périodiquement un potentiel sinusoïdal V_0, spatialement périodique de période Λ, appliqué sous forme d'impulsions temporelles de durée τ répétées à chaque période temporelle T_1. L'Hamiltonien décrivant ce modèle déplié s'écrit alors :

$$H_1(X,P,t') = \frac{P^2}{2M} + V_0\tau\cos\left(\frac{2\pi X}{\Lambda}\right)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{\delta}_\tau(t'-nT_1), \tag{2.2}$$

Cette reformulation du problème ne modifie pas les propriétés physiques intrinsèques du système. Les deux descriptions sont dynamiquement équivalentes, mais la forme « dépliée » présente l'avantage notable d'être plus adaptée aux réalisations expérimentales. Il est utile à ce stade d'introduire un ensemble de variables adimensionnées :

$$t := \frac{t'}{T_1}, \quad x := \frac{2\pi X}{\Lambda}, \quad p := \frac{2\pi T_1 P}{M\Lambda}. \tag{2.3}$$

En prenant $H(x,p,t) := \dfrac{4\pi^2 T_1^2}{M\Lambda^2} H_1(X,P,t)$, nous obtenons :

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + KT_1\cos(x)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{\delta}_\tau\left(T_1(t-n)\right), \tag{2.4}$$

Avec :

$$K = \frac{4\pi^2 T_1 V_0 \tau}{M\Lambda^2}, \tag{2.5}$$

Le paramètre K est appelé paramètre de stochasticité. En introduisant la fonction $\delta_\epsilon(t)$, définie par $\delta_\epsilon(t) = 1/\epsilon$ pour $|t| < \epsilon/2$ (avec $\epsilon = \tau/T_1$), nous pouvons écrire :

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + K\cos(x)\sum_{n=0}^{N-1}\delta_\epsilon(t-n), \tag{2.6}$$

En considérant désormais la limite où les pulses deviennent extrêmement courtes, c'est-à-dire la limite $\tau \to 0$ ou de manière équivalente $\epsilon \to 0$, nous obtenons la forme finale de l'Hamiltonien :

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} + K\cos(x)\sum_{n=0}^{N-1}\delta(t-n), \tag{2.7}$$

où δ est la distribution de Dirac usuelle.

2.1.2 Application standard de Chirikov

Pour étudier la dynamique du kicked rotor, nous partons des équations de Hamilton-Jacobi, données par :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2.8}$$

En remplaçant explicitement l'Hamiltonien (2.7) dans ces équations, nous obtenons :

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = K\sin(x)\sum_{n}\delta(t-n). \tag{2.9}$$

Pour déterminer l'évolution du système durant une période complète $[nT_1, (n+1)T_1[$ [1], durant laquelle un kick est appliqué instantanément à l'instant initial, nous intégrons ces équations entre les instants $t_n^{(-)}$ et $t_{n+1}^{(-)}$.

La première équation, concernant la position, s'intègre directement et donne :

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n^{(-)}}^{t_{n+1}^{(-)}} p\,dt, \tag{2.10}$$

Puisque durant cet intervalle l'impulsion p est constante (elle varie uniquement lors du kick), l'intégration devient triviale :

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \tag{2.11}$$

La seconde équation, correspondant à l'impulsion, s'intègre sous la forme :

$$p_{n+1} = p_n + \int_{t_n^{(-)}}^{t_{n+1}^{(-)}} K\sin(x)\sum_{n}\delta(t-n)\,dt, \tag{2.12}$$

Comme l'impulsion est instantanée et a lieu uniquement au temps $t = n$, on obtient finalement :

$$p_{n+1} = p_n + K\sin(x_n), \tag{2.13}$$

1. Par souci de simplicité, nous choisissons désormais $T_1 = 1$.

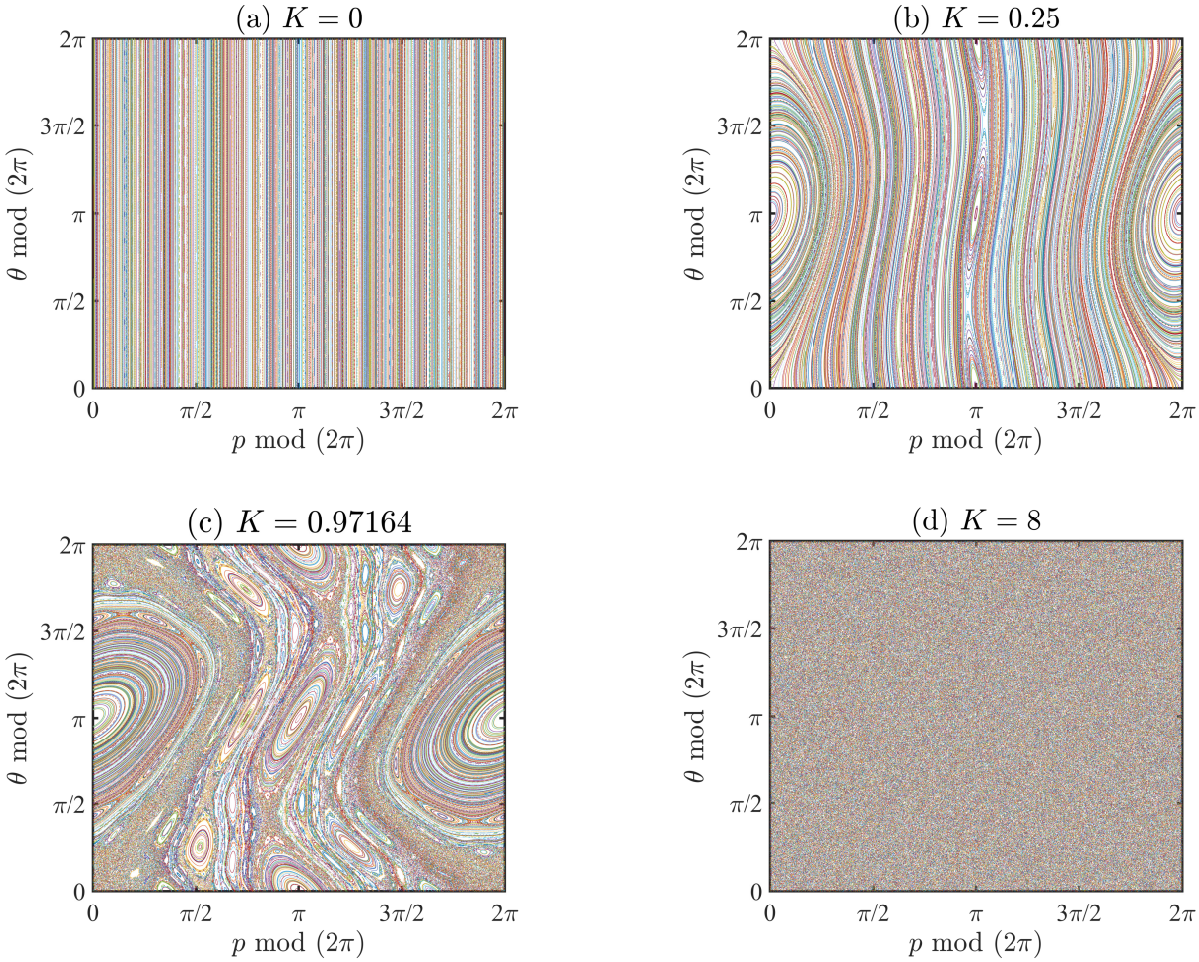


FIGURE 2.3 – Portraits de phase illustrant la transition vers le chaos du kicked rotor lorsque le paramètre de stochasticité K augmente. L'évolution temporelle est obtenue en itérant jusqu'à $t = 1000$ kicks pour 1000 conditions initiales distribuées uniformément sur $[0, 2\pi]^2$, représentées avec des couleurs différentes.

En combinant ces résultats, nous obtenons les équations de récurrence décrivant la dynamique temporelle discrète du rotor pulsé :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n + K \sin(x_n) \end{cases}, \tag{2.14}$$

Ce système d'équations porte généralement le nom d'application standard ou application de Chirikov [129]. Le système décrit précédemment est caractérisé par deux variables canoniques : la position angulaire θ_n et l'impulsion p_n. Pour comprendre la dynamique complexe de ce système, il est indispensable d'étudier ses trajectoires dans l'espace des phases. Cet espace est constitué par les coordonnées (θ_n, p_n), chacune définie modulo 2π, et restreint à la fenêtre $[0, 2\pi[\times[0, 2\pi[$. Chaque point dans cet espace représente l'état du système immédiatement après une impulsion (« kick »). L'évolution du système est ainsi visualisée par itération successive des trajectoires à partir de multiples conditions initiales. Différents comportements dynamiques émergent selon la valeur prise par le

paramètre de stochasticité K.

• $K = 0$

Lorsque $K = 0$, le système ne subit aucune perturbation, et l'impulsion reste constante au cours du temps. Ce régime est intégrable, l'énergie étant une constante du mouvement. Le portrait de phase correspondant est constitué de lignes horizontales parallèles, représentant une évolution régulière du système, comme illustré sur la figure 2.3.a.

• $K \ll 1$

Pour des valeurs très faibles du paramètre K, le système demeure principalement régulier avec une légère perturbation introduite par les kicks. On observe alors une coexistence de deux types de trajectoires : des trajectoires ouvertes et des trajectoires fermées. Les trajectoires ouvertes sont des courbes de KAM, correspondant à un mouvement proche de celui d'un pendule libre légèrement perturbé par des kicks. Les trajectoires fermées sont regroupées sous forme d'îlots de stabilité, qui se manifestent comme des ellipses autour de points fixes remarquables tels que $(\theta, p) = (\pi, 0)$ ou $(\theta, p) = (0, 0)$ (voire figure 2.3.b). Ces îlots traduisent physiquement des oscillations régulières et localisées du système.

• $K \approx 1$

À mesure que K s'approche de la valeur critique $K_c \approx 0,971635$, le régime dynamique évolue sensiblement. Les îlots de stabilité se réduisent progressivement tandis que des zones chaotiques commencent à apparaître et à dominer. Ces dernières se manifestent par des nuages de points distribués de manière irrégulière dans l'espace des phases, signe de la destruction progressive des courbes KAM, conformément au théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM). À la valeur critique, la dernière courbe KAM disparaît totalement, marquant une transition nette vers un régime chaotique étendu.

• $K \gg 1$

Lorsque K dépasse la valeur critique $K_c \approx 1$, la dynamique devient majoritairement chaotique : les îlots de stabilité se réduisent fortement et une grande partie de l'espace des phases est occupée par des trajectoires chaotiques. Cependant, de petits îlots réguliers subsistent encore, conformément au théorème KAM, bien qu'ils deviennent de plus en plus difficiles à détecter. Pour des valeurs importantes de K (par exemple $K = 8$), comme illustré sur la figure 2.3.d, l'espace des phases est occupé densément et de manière homogène par des trajectoires chaotiques. Aucun îlot de stabilité ou trajectoire quasi-périodique ne subsiste, indiquant clairement que le système devient totalement chaotique dans ce régime [129-131].

En conclusion, l'étude approfondie du système en fonction du paramètre de stochasticité K révèle clairement le passage progressif d'un régime intégrable ($K = 0$), vers une coexistence de régularité et de chaos ($K \approx 1$), pour finalement aboutir à un comportement globalement chaotique (ergodique) lorsque K est suffisamment élevé. Cette

analyse illustre parfaitement les prédictions théoriques associées au théorème KAM et au phénomène de chaos dans les systèmes dynamiques.

2.1.3 Comportement diffusif

Le kicked rotor présente un régime dynamique fortement chaotique lorsque le paramètre K devient suffisamment grand. Dans cette situation, le système manifeste une forte sensibilité aux conditions initiales, ce qui signifie que deux états de départ très proches divergent exponentiellement au cours du temps. Ce phénomène caractéristique du chaos déterministe est mis en évidence dans la figure 2.4, où l'on observe clairement que l'énergie cinétique du système évolue de manière très différente pour deux conditions initiales légèrement distinctes. Ainsi, même une infime variation initiale (par exemple de l'ordre de 10^{-14}) peut aboutir à des trajectoires totalement différentes après un certain temps.

Pour mieux comprendre le comportement diffusif du kicked rotor, nous allons établir une expression explicite du coefficient de diffusion. En partant de l'équation (2.14), l'impulsion de la masse après $n-1$ kicks s'écrit :

$$p_n = K \sum_{i=0}^{n-1} \sin\theta_i + p_0, \tag{2.15}$$

Pour un grand nombre de kicks, la contribution de l'impulsion initiale p_0 à la croissance de $\langle p_n^2 \rangle$ est négligeable devant celle provenant de la somme des sinus, ce qui permet de se

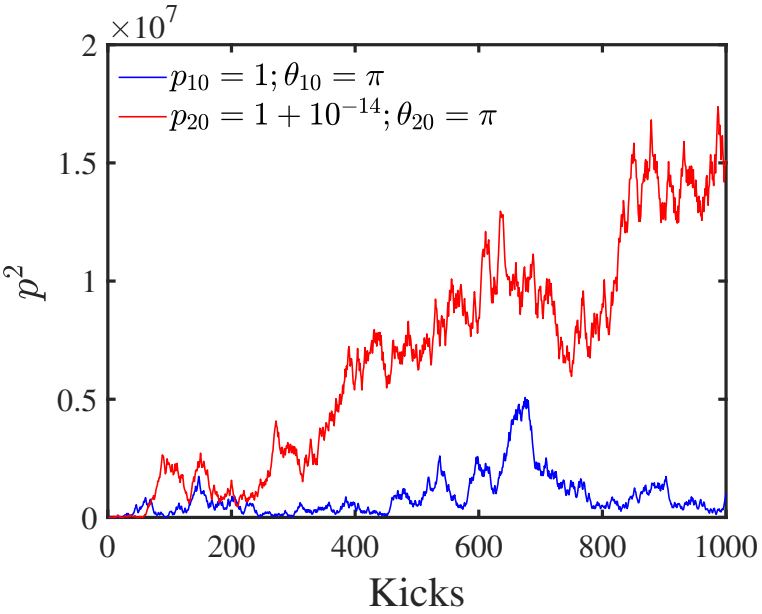
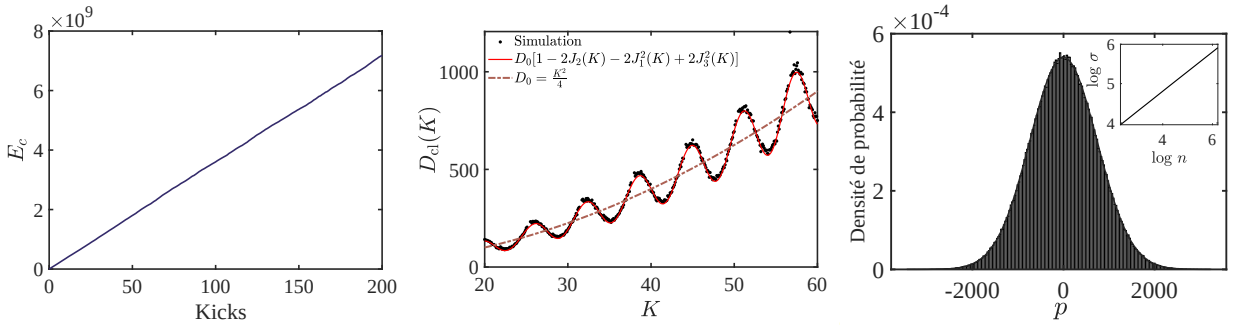


FIGURE 2.4 – L'évolution de p^2 en fonction du nombre de kicks appliqués pour $K = 100$. La courbe bleur est associée au couple de conditions initiales $(p_{10} = 1; \theta_{10} = \pi)$ et la courbe rouge au couple $\left(p_{20} = 1 + 10^{-14}; \theta_{20} = \pi\right)$.



(a) (b) (c)

FIGURE 2.5 – **(a)** Évolution de l'énergie cinétique en fonction du temps (nombre de kicks), moyennée sur 3×10^4 conditions initiales d'impulsions et de positions, uniformément réparties sur l'intervalle $[0, 2\pi[^2$, pour $K = 12000$. **(b)** Oscillations du coefficient de diffusion en fonction de K (points noirs) issues de la simulation numérique. La courbe en pointillés représente l'approximation théorique donnée par l'équation (2.19), tandis que la courbe rouge correspond à l'expression analytique de l'équation (2.20). **(c)** Densité de probabilité des impulsions, moyennée sur 5×10^5 conditions initiales après 2000 kicks, pour $K = 20$.

concentrer sur le terme diffusif. On peut alors écrire :

$$p_n^2 = K^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sin\theta_i \sin\theta_j, \tag{2.16}$$

En prenant la moyenne, on obtient :

$$\langle p_n^2 \rangle = K^2 \sum_{l=0}^{n-1} \langle \sin^2\theta_l \rangle + K^2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \langle \sin\theta_i \sin\theta_j \rangle, \tag{2.17}$$

Le premier terme donne immédiatement $nK^2/2$, puisque l'on suppose que θ_i est uniformément réparti sur $[0, 2\pi[$, ce qui implique $\langle \sin^2\theta_i \rangle = 1/2$. Le second terme représente les corrélations entre les kicks. Si l'on suppose que les variables θ_i et θ_j sont indépendantes (c'est-à-dire sans corrélation temporelle), alors $\langle \sin\theta_i \sin\theta_j \rangle = 0$.

On obtient ainsi :

$$\langle p_n^2 \rangle \approx n\frac{K^2}{2}, \tag{2.18}$$

Ce comportement linéaire permet de définir un coefficient de diffusion classique standard :

$$D_{cl} = \frac{\langle p_n^2 \rangle}{2n} = \frac{K^2}{4}, \tag{2.19}$$

Cependant, cette expression n'est valable que sous l'hypothèse d'indépendance entre les θ_i. En tenant compte des corrélations entre les kicks, il est possible d'affiner cette expression.

En effet, comme le montrent Rechester et White (1980) [132], le coefficient de diffusion corrigé s'écrit :

$$D_{cl} = \frac{K^2}{2}\left[\frac{1}{2} - J_2(K) - J_1^2(K) + J_3^2(K)\right], \tag{2.20}$$

où $J_n(K)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n. Cette expression corrigée tient compte des effets de mémoire induits par les corrélations temporelles entre les kicks. Pour une présentation détaillée du calcul des fonctions de corrélation et de l'obtention de cette formule, le lecteur pourra se référer à l'annexe A. La figure 2.5a présente les résultats d'une simulation numérique illustrant l'évolution de l'énergie cinétique moyenne au cours du temps. Celle-ci croît de façon linéaire, ce qui confirme le comportement diffusif du système. Quant à la figure 2.5b, elle montre l'évolution du coefficient de diffusion obtenu par simulation numérique, en le comparant aux deux approximations théoriques : d'une part, l'approximation simplifiée donnée par l'équation (2.19), et d'autre part, l'expression plus précise de l'équation (2.20), qui prend en compte les corrélations entre kicks.

Un second indicateur du comportement diffusif du système réside dans la forme de la densité de probabilité de précsence dans l'espace des impulsions. Celle-ci adopte une distribution gaussienne, dont la largeur s'accroît proportionnellement à $\sqrt{n}$, où n désigne le nombre de kicks. La figure 2.5c illustre cette distribution, obtenue par simulation numérique. On y constate que la courbe noire, représentant une loi normale, correspond très bien à l'histogramme des impulsions simulées (en gris). L'encart de la figure affiche l'évolution de l'écart-type σ en fonction du temps, tracée en échelle log-log. On y observe une croissance linéaire avec une pente de 1/2, ce qui est en parfait accord avec les prédictions théoriques pour un processus de diffusion.

2.1.4 Exposants de Lyapunov du kicked rotor

Comme nous l'avons vu précédemment, le kicked rotor présente une sensibilité marquée aux conditions initiales. Ce comportement totalement chaotique peut être quantifié rigoureusement à l'aide des **exposants de Lyapunov**, qui mesurent le taux de divergence exponentielle entre deux trajectoires initialement proches dans l'espace des phases.

Pour évaluer ces exposants, nous nous appuyons sur la **matrice de monodromie**, aussi appelée *matrice tangentielle*, qui décrit l'évolution linéarisée d'une perturbation infinitésimale autour d'une trajectoire donnée.

Considérons l'application standard $\mathcal{AS}$ et un point fixe $y = (\theta^*, p^*)^T$ de cette dernière. Une perturbation infinitésimale $\delta z = (\delta\theta, \delta p)^T$ évolue selon [2] :

$$\mathcal{AS}(y + \delta z) = y + \mathrm{d}\mathcal{AS}(y)\delta z + \mathcal{O}(\delta z^2).$$

La matrice de monodromie est donc définie par :

$$\delta z' = \mathrm{d}\mathcal{AS}(y)\delta z = \mathcal{M}(y)\delta z,$$

2. Les calculs présentés ici proviennent de [133].

où $\mathcal{M}(y)$ est la jacobienne de l'application au point considéré :

$$\begin{bmatrix} \delta\theta' \\ \delta p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{AS}_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{AS}_1}{\partial p} \\ \frac{\partial \mathcal{AS}_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{AS}_2}{\partial p} \end{bmatrix}_{(\theta^*, p^*)} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta p \end{bmatrix}.$$

L'application standard s'écrit sous la forme :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}, \tag{2.21}$$
$$p_{n+1} = p_n + K\sin(\theta_n), \tag{2.22}$$

Pour simplifier les calculs, nous séparons cette application en deux étapes élémentaires :

Étape 1 : On considère une application $\mathcal{AS}_1$ qui conserve l'angle constant et modifie l'impulsion :

$$\theta_{n+1} = \theta_n, \quad p_{n+1} = p_n + K\sin(\theta_n),$$

d'où la matrice de monodromie :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K\cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : On considère ensuite une application $\mathcal{AS}_2$ qui conserve l'impulsion constante et met à jour l'angle :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_n, \quad p_{n+1} = p_n,$$

avec pour matrice de monodromie :

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrice de monodromie complète : En combinant les deux transformations, on obtient la matrice de monodromie totale du système :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 + K\cos(\theta) & 1 \\ K\cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice permet de suivre l'évolution d'une petite perturbation autour d'une trajectoire. Pour caractériser le comportement dynamique du système, on étudie les puissances successives de $\mathcal{M}$, qui décrivent la croissance (ou décroissance) exponentielle de ces perturbations.

Les exposants de Lyapunov sont définis comme les logarithmes népériens des valeurs

propres de la matrice de monodromie. Ces quantités mesurent les taux moyens de séparation ou de rapprochement entre trajectoires infinitésimalement proches. La nature du système peut être déterminée à partir du produit des valeurs propres Λ_j. Si

$$\prod_{j=1}^{m} \Lambda_j < 1,$$

le système est **dissipatif**, tandis que si

$$\prod_{j=1}^{m} \Lambda_j = 1,$$

alors le système est **conservatif**, avec m la dimension du système.

En pratique, il suffit de considérer les **exposants de Lyapunov maximaux**, car ils sont seuls nécessaires pour conclure sur la nature chaotique d'un système. Ces exposants peuvent être calculés à chaque itération, mais seul le plus grand d'entre eux est généralement retenu.

Dans notre cas, la matrice de monodromie est une matrice 2×2, ce qui conduit à deux exposants de Lyapunov. Les valeurs propres $\Lambda_\pm$ sont solutions de :

$$\Lambda^2 - (2 + K\cos\theta_n)\Lambda + 1 = 0,$$

soit :

$$\Lambda_\pm = \frac{2 + K\cos\theta_n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2 + K\cos\theta_n)^2 - 4}.$$

Le produit $\Lambda_+\Lambda_- = 1$ montre que le système est conservatif. Dans la limite $K \gg 1$, les exposants deviennent :

$$\lambda_+ = \ln|K\cos\theta_n|, \tag{2.23}$$
$$\lambda_- = -\ln|K\cos\theta_n|, \tag{2.24}$$

et la somme :

$$\lambda_T = \lambda_+ + \lambda_- = 0.$$

La positivité de l'exposant maximal λ_+ implique que le système est **chaotique**.

Lorsque θ est distribué uniformément dans $[-\pi, \pi]$, l'exposant moyen s'évalue analytiquement :

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|K\cos\theta|\, d\theta \tag{2.25}$$
$$= \ln K + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|\cos\theta|\, d\theta \tag{2.26}$$

$$= \ln K - \ln 2 = \ln\left(\frac{K}{2}\right), \tag{2.27}$$

car l'on sait que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|\cos u|\, du = -2\pi \ln 2\,.$$

La figure 2.6 montre que la moyenne de l'exposant λ_+ suit bien une loi en $\ln(K/2)$. La simulation numérique confirme donc que cette approximation est valide pour $K \gg 1$. On peut en conclure que le système est bien **chaotique** dans ce régime, avec toutes les caractéristiques attendues : sensibilité aux conditions initiales, divergence exponentielle des trajectoires proches, et conservation du volume de phase.

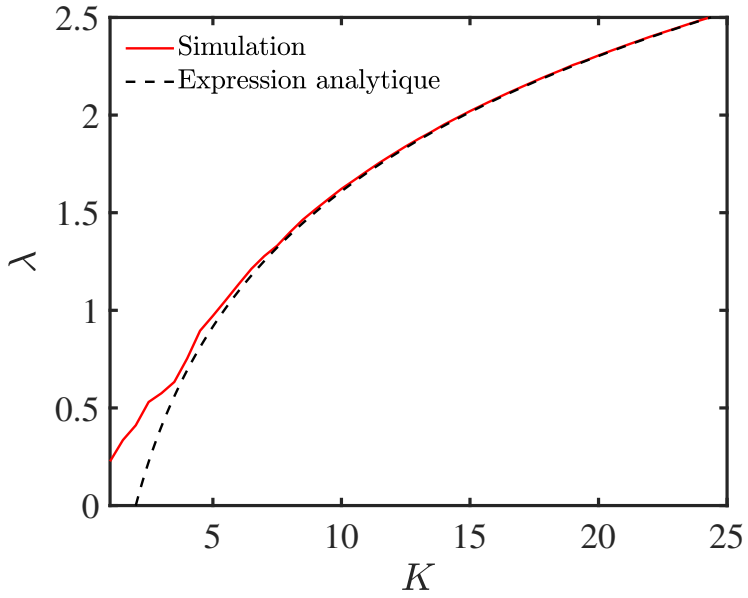


FIGURE 2.6 – Comparaison entre la loi analytique $\lambda = \ln(K/2)$ et les résultats de simulation numérique pour l'exposant de Lyapunov moyen.

2.2 Le Kicked Rotor Quantique

Pour obtenir la version quantique du modèle, on applique le principe de correspondance de Bohr, qui consiste à remplacer dans l'hamiltonien (2.7) les variables classiques comme la position et l'impulsion par des opérateurs quantiques :

$$H(\hat{x}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + K\cos(\hat{x}) \sum_n \delta(t - n), \tag{2.28}$$

Dans ce cas, le commutateur du système s'écrit alors :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \left[\frac{2\pi\hat{X}}{\Lambda}, \frac{2\pi T_1 \hat{P}}{M\Lambda}\right] = \frac{4\pi^2 T_1}{M\Lambda^2}\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = \frac{4\pi^2 T_1}{M\Lambda^2} i\hbar. \tag{2.29}$$

En introduisant la constante de Planck réduite normalisée suivante :

$$\bar{k} := \frac{4\pi^2 \hbar T_1}{M\Lambda^2}, \tag{2.30}$$

on obtient la relation de commutation :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\bar{k},$$

La constante de Planck réduite normalisée $\bar{k}$, définie par l'équation, peut être contrôlée expérimentalement en ajustant la période T_1 des kicks. Cela permet d'explorer différents régimes dynamiques : un régime semi-classique ($\bar{k} \ll 1$), où la dynamique est dominée par des trajectoires quasi-classiques, et un régime fortement quantique ($\bar{k} \gtrsim 1$), dans lequel les effets d'interférence et de localisation deviennent dominants. Typiquement, dans les expériences sur le césium, on peut atteindre des valeurs $\bar{k} \gtrsim 1$.

2.2.1 Evolution du système

En mécanique quantique, l'évolution temporelle des systèmes physiques isolés est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \tag{2.31}$$

Dans le contexte du kicked rotor, on remplace la constante de Planck $\hbar$ par la constante réduite normalisée $\bar{k}$, ce qui donne :

$$i\bar{k} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \tag{2.32}$$

Ici, $|\psi(t)\rangle$ est un vecteur de l'espace de Hilbert représentant l'état quantique du système à l'instant t. Si $|\psi(t_0)\rangle$ est l'état initial, alors l'évolution dans le temps s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \tag{2.33}$$

Avec :

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}} \int_{t_0}^{t} dt' \hat{H}(t') \right), \tag{2.34}$$

où $\hat{U}(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution unitaire. Il satisfait les propriétés suivantes :

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{1}, \tag{2.35}$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0), \quad \text{pour tout } t_0 \leq t' \leq t, \tag{2.36}$$

Cette dernière propriété, appelée condition du groupe continu, exprime que l'évolution temporelle de l'état du système entre deux instants t_0 et t peut être décomposée en deux étapes successives : d'abord une évolution de t_0 à un instant intermédiaire t', puis de t' à

t. $\mathcal{T}$ est l'opérateur de mise en ordre chronologique défini par :

$$\mathcal{T}\left(A(t_1)B(t_2)\right) = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{si } t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1) & \text{si } t_2 > t_1 \end{cases}, \tag{2.37}$$

que l'on peut encore écrire comme

$$\mathcal{T}\left(A(t_1)B(t_2)\right) = A(t_1)B(t_2)\,\theta(t_1 - t_2) + B(t_2)A(t_1)\,\theta(t_2 - t_1). \tag{2.38}$$

Considérons qu'au cours d'une période entre $t_n^{(-)}$ et $t_{n+1}^{(-)}$, le système subit un kick à l'instant t_n, modélisé comme se produisant entre $t_n^{(-)} = n - \epsilon$ et $t_n^{(+)} = n + \epsilon$, suivi d'une phase de propagation libre allant de $t_n^{(+)}$ à $t_{n+1}^{(-)} = n + 1 - \epsilon$. En exploitant la condition de groupe continu, l'opérateur d'évolution sur cette période peut être écrit comme un produit d'opérateurs :

$$\hat{U}\left(t_{n+1}^{(-)}, t_n^{(-)}\right) = \hat{U}\left(n + 1 - \epsilon, n - \epsilon\right) = \hat{U}\left(n + 1 - \epsilon, n + \epsilon\right)\hat{U}\left(n + \epsilon, n - \epsilon\right). \tag{2.39}$$

À l'aide de la définition de l'évolution temporelle à partir du Hamiltonien, on a :

$$\hat{U}(n + 1 - \epsilon, n + \epsilon) = \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}}\int_{n+\epsilon}^{n+1-\epsilon} \hat{H}(t')\,dt'\right), \tag{2.40}$$

$$\hat{U}(n + \epsilon, n - \epsilon) = \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}}\int_{n-\epsilon}^{n+\epsilon} \hat{H}(t')\,dt'\right), \tag{2.41}$$

En remplaçant le Hamiltonien dans chacune des intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{U}(n + 1 - \epsilon, n + \epsilon) &= \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}}\int_{n+\epsilon}^{n+1-\epsilon} \frac{\hat{p}^2}{2}\,dt'\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}}\frac{\hat{p}^2}{2}(1 - 2\epsilon)\right) \end{aligned}, \tag{2.42}$$

Et pour l'opérateur de kick :

$$\begin{aligned} \hat{U}(n + \epsilon, n - \epsilon) &= \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}}\int_{n-\epsilon}^{n+\epsilon}\left[\frac{\hat{p}^2}{2} + K\cos\hat{x}\sum_n \delta(t' - n)\right]dt'\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}}\left(\frac{\hat{p}^2}{2}(2\epsilon) + K\cos\hat{x}\right)\right) \end{aligned}, \tag{2.43}$$

En prenant la limite $\epsilon \to 0$, les deux opérateurs se simplifient respectivement en :

$$\hat{U}_{\text{prop}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2}\right), \tag{2.44}$$

$$\hat{U}_{\text{kick}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}K\cos\hat{x}\right), \tag{2.45}$$

On en déduit que l'évolution de l'état du système après n kicks correspond à l'application n fois de l'opérateur d'évolution sur une période $\hat{U}(T_1 = 1) := \hat{U}(1)$, à l'état initial du système à l'instant $t_0 = 0$, ce qui s'écrit :

$$|\psi(n)\rangle = \left[\hat{U}(1)\right]^{(n)}|\psi(0)\rangle, \tag{2.46}$$

avec

$$\hat{U}(1) = \hat{U}_{\text{prop}}\,\hat{U}_{\text{kick}}. \tag{2.47}$$

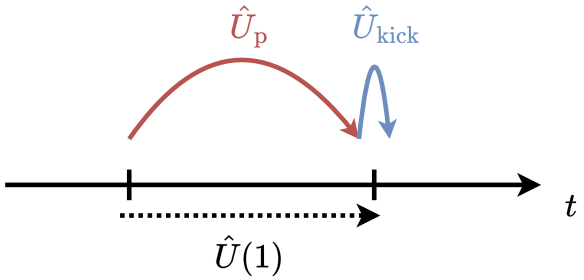


FIGURE 2.7 – Représentation graphique de l'opérateur d'évolution sur une période (2.47).

L'Hamiltonien (2.28) est invariant par translation dans le temps avec une période T_1 que nous avons choisi égale à l'unité. Cette propriété permet de définir une base d'états propres commune à l'Hamiltonien et à l'opérateur de translation temporelle $\hat{T}_T$. Le théorème de Floquet, similaire au théorème de Bloch mais appliqué aux systèmes périodiques dans le temps, garantit que toute solution de l'équation de Schrödinger peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi_{\omega_n}(t)\rangle = e^{-i\omega_n t}|u_n(t)\rangle, \tag{2.48}$$

où $|u_n(t)\rangle$ est une fonction périodique du temps telle que $|u_n(t+T_1)\rangle = |u_n(t)\rangle$, et ω_n est la quasi-énergie associée à cet état.

L'opérateur d'évolution sur une période $\hat{U}(1)$, agit alors sur les états de Floquet selon :

$$\hat{U}(1)|\psi_{\omega_n}(t)\rangle = |\psi_{\omega_n}(t+T_1)\rangle = e^{-i\omega_n T_1}|\psi_{\omega_n}(t)\rangle = e^{-i\omega_n}|\psi_{\omega_n}(t)\rangle, \tag{2.49}$$

Les états de Floquet sont donc des vecteurs propres de l'opérateur $\hat{U}(1)$, avec pour valeurs propres $e^{-i\omega_n}$. Ces états sont exponentiellement localisés dans l'espace des impulsions [134] et nous illustrons cela sur la figure 2.8, où nous montrons la densité des trois états

de Floquet dans la base des impulsions $|\psi_{\omega_n}(p)|^2 = |\langle p|\psi_{\omega_n}\rangle|^2$.

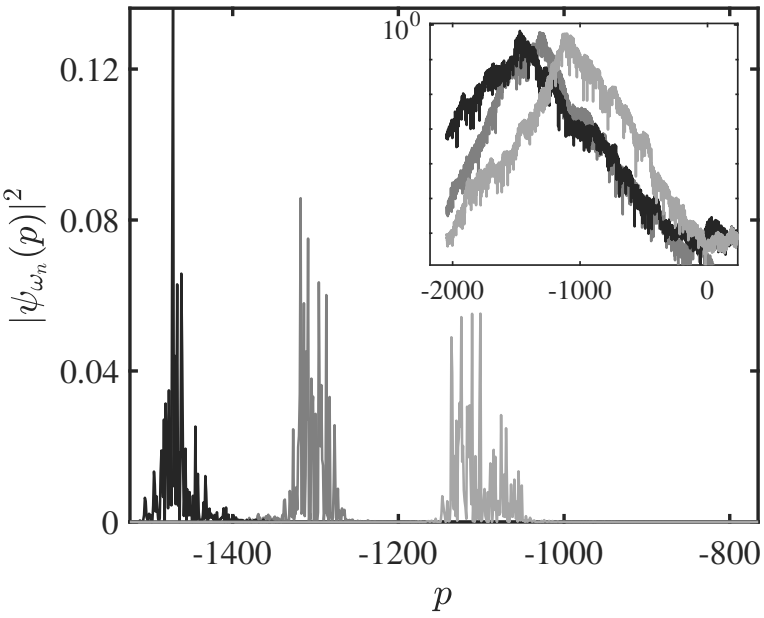


FIGURE 2.8 – Exemple de trois états propres de l'opérateur de Floquet (2.49) pour $K = 11.6$ et $\bar{k} = 1$. L'encart présente une représentation en échelle semi-logarithmique mettant en évidence le caractère exponentiellement localisé de ces états.

En plus de sa périodicité temporelle, l'Hamiltonien du kicked rotor est également périodique dans l'espace, avec une période 2π. Cette propriété implique, d'après le théorème de Bloch, que les états propres de l'impulsion $|p\rangle$ peuvent être décomposés sous la forme $p = \bar{k}(m+\beta)$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ est la *quasi-impulsion*. Cette quantité est une constante du mouvement, c'est-à-dire qu'elle est conservée au cours de la dynamique. Chaque valeur de β correspond ainsi à une configuration spécifique du désordre. Cette propriété présente un intérêt notable du point de vue expérimental. En effet, dans les expériences avec des atomes froids, le nuage atomique occupe l'ensemble de la première zone de Brillouin, ce qui implique que toutes les valeurs de β y sont représentées. Par conséquent, les mesures effectuées correspondent à une moyenne sur l'ensemble des quasi-impulsions, c'est-à-dire sur différentes réalisations du désordre.

L'opérateur d'évolution $\hat{U}(1)$ peut être représenté comme une matrice dans la base des états d'impulsion $|m,\beta\rangle$:

$$\langle n,\beta|\hat{U}(1)|m,\beta\rangle = \exp\left(-i\bar{k}\frac{(n+\beta)^2}{2}\right)\langle n,\beta|\exp\left(-\frac{iK}{\bar{k}}\cos\hat{x}\right)|m,\beta\rangle \tag{2.50}$$

$$= \exp\left(-i\bar{k}\frac{(n+\beta)^2}{2}\right)\iint dx\,dx'\,\langle n,\beta|x\rangle\langle x|\exp\left(-\frac{iK}{\bar{k}}\cos\hat{x}\right)|x'\rangle\langle x'|m,\beta\rangle \tag{2.51}$$

$$= \exp\left(-i\bar{k}\frac{(n+\beta)^2}{2}\right)\frac{1}{2\pi}\iint dx\,dx'\,e^{i[(m+\beta)x-(n+\beta)x']}\exp\left(-\frac{iK}{\bar{k}}\cos x'\right)\delta(x-x') \tag{2.52}$$

$$= \exp\left(-i\bar{k}\frac{(n+\beta)^2}{2}\right)\frac{1}{2\pi}\int dx\,e^{i(m-n)x}\exp\left(-\frac{iK}{\bar{k}}\cos x\right) \tag{2.53}$$

$$= \exp\left(-i\bar{k}\frac{(n+\beta)^2}{2}\right)(-i)^{m-n}J_{m-n}\left(\frac{K}{\bar{k}}\right) \tag{2.54}$$

Les éléments hors diagonale de cette matrice prennent la forme $(-i)^{m-n}J_{m-n}(K/\bar{k})$, où J_{m-n} désigne une fonction de Bessel. La diagonale, quant à elle, inclut un facteur de phase pseudo-aléatoire de la forme $\exp(-i\bar{k}(k+\beta)^2/2)\delta_{m,n}$.

Il est important de noter que la structure de bande de l'opérateur $\hat{U}(1) := \hat{U}_F$[135] est caractérisée par une décroissance rapide des éléments extra-diagonaux, liée à la décroissance rapide des fonctions de Bessel en fonction de $\varsigma = |m-n|$. En effet, dans la limite où ς est grand devant $K/\bar{k}$, la fonction $J_\varsigma(K/\bar{k})$ admet le développement asymptotique suivant :

$$J_\varsigma(K/\bar{k}) \approx \frac{1}{(\varsigma+1)!}(K/\bar{k})^{\varsigma+1}, \tag{2.55}$$

ce qui montre que les éléments non diagonaux deviennent rapidement négligeables à mesure que la distance entre indices croît. Ainsi, le couplage entre états d'impulsion est de courte portée. Dans cette même limite $K/\bar{k} \gg 1$, les phases $\exp(-i\bar{k}(m+\beta)^2/2)$ apparaissent comme quasi-aléatoires, ce qui confère à la dynamique un caractère désordonné [136, 137].

2.2.2 Simulation numérique

La modélisation numérique du kicked rotor repose sur l'application de la relation (2.46), qui permet de propager l'état du système à chaque kick successivement. Comme nous l'avons vu, l'opérateur d'évolution sur une période, $\hat{U}_F$, se décompose en deux parties : l'opérateur $\hat{U}_{\text{prop}}$, qui est diagonal dans la base des impulsions, et l'opérateur $\hat{U}_{\text{kick}}$, qui est diagonal dans la représentation position.

Pour effectuer les passages entre ces deux représentations, on utilise les outils de transformée de Fourier rapide (FFT) et de transformée de Fourier inverse (IFFT), qui permettent respectivement de passer de la base des impulsions à celle des positions, et inversement.

L'idée générale de la simulation est donc de préparer l'état initial dans l'espace des impulsions, puis d'alterner entre les opérateurs $\hat{U}_{\text{kick}}$ et $\hat{U}_{\text{prop}}$, en appliquant à chaque étape la transformation adéquate pour rester dans la base où l'opérateur est diagonal. Cette procédure permet d'évaluer l'évolution du système, ainsi que des grandeurs physiques comme l'énergie cinétique moyenne au cours du temps.

L'algorithme utilisé peut être résumé ainsi :
Ces résultats de simulation sont obtenus en choisissant un état initial d'impulsion $|p_0\rangle$,

Algorithm 1 Simulation du kicked rotor

1: Initialiser $\psi(p)$ comme une Dirac ou une gaussienne
2: **for** chaque instant $t = 1 \to n$ **do**
3: $\psi(x) \leftarrow \mathrm{FFT}[\psi(p)]$
4: Appliquer l'opérateur de kick à $\psi(x)$
5: $\psi(p) \leftarrow \mathrm{IFFT}[\psi(x)]$
6: Appliquer l'évolution libre à $\psi(p)$
7: Calculer $\langle p^2 \rangle = \int p^2 |\psi(p)|^2 dp$
8: **end for**
9: **return** $\langle p^2 \rangle$ en fonction du temps

où p_0 est tiré aléatoirement selon la distribution :

$$|\psi_0(p)|^2 = \frac{e^{-p^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

qui reproduit la distribution thermique initiale des atomes. Ici, $\sigma = 1.65\hbar$ représente la largeur typique de cette distribution dans un nuage d'atomes froids (ce qui correspond à une température de $T = 2.4\,\mu$K dans l'expérience réalisée avec du césium).

Étant donné que $\sigma \gtrsim \hbar$, la distribution de la quasi-impulsion initiale β_0 est pratiquement uniforme dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Les observables calculées après n kicks sont ensuite moyennées sur les différentes réalisations de p_0.

En pratique, sauf en cas de comparaison précise avec les données expérimentales, on se contente généralement de choisir un état initial de la forme $|\hbar\beta_0\rangle$, avec β_0 tiré uniformément dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

La figure 2.10 illustre clairement la dynamique quantique du kicked rotor, qui se distingue nettement de son comportement classique présenté dans la section 2.1.3 et illustré par la figure 2.5. Une diffusion chaotique est observée aux temps courts, jusqu'à un certain temps caractéristique appelé *temps de localisation* t_{loc}. Au-delà de ce temps, les interférences quantiques destructives inhibent la diffusion, entraînant une saturation de l'énergie cinétique : c'est le phénomène de *localisation dynamique*.

Pour étudier plus précisément le comportement aux temps longs, nous examinons l'état quantique du système après n kicks successifs. Sachant que les états de Floquet $\{|\psi_{\omega_i}\rangle\}$ constituent une base propre de l'opérateur d'évolution, l'état initial $|\psi(0)\rangle$ peut être décomposé de la manière suivante :

$$|\psi(0)\rangle = \sum_i c_i |\psi_{\omega_i}\rangle, \tag{2.56}$$

En utilisant les équations (2.46) et (2.49), l'état quantique à l'instant $t = t_n$ peut ainsi

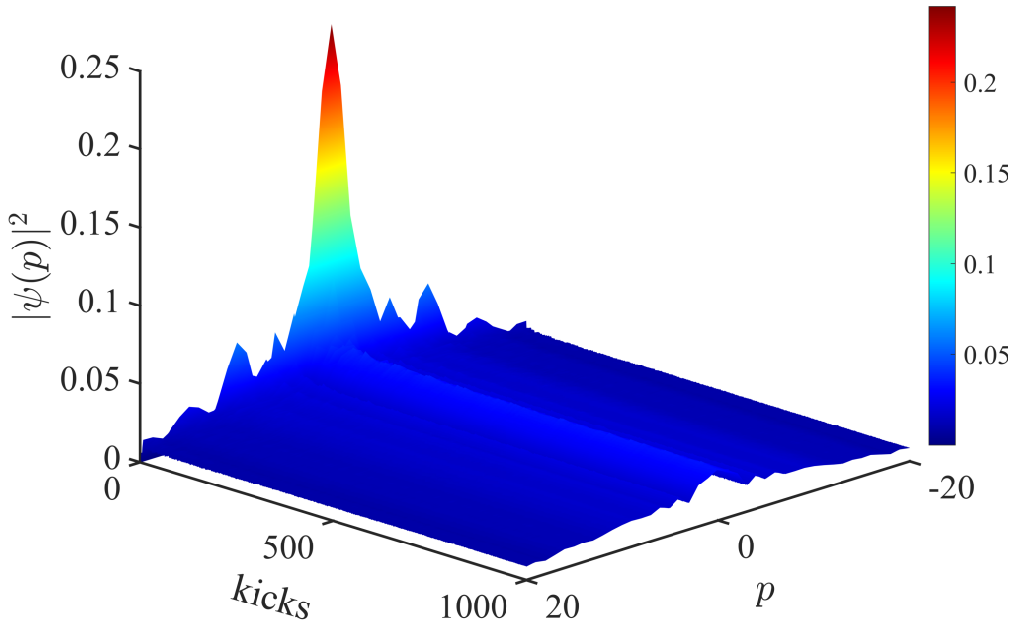


FIGURE 2.9 – Évolution temporelle de la densité de probabilité $|\psi(p)|^2$ dans l'espace des impulsions pour $K = 10$ et $\bar{k} = 1$, moyennée sur 10^5 quasi-impulsions initiales.

s'écrire :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i e^{-i\omega_i t} |\psi_{\omega_i}\rangle, \tag{2.57}$$

En projetant cet état sur la base des impulsions, nous obtenons la fonction d'onde dans l'espace des impulsions :

$$\psi(t,m) = \langle m|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i e^{-i\omega_i t} \langle m|\psi_{\omega_i}\rangle, \tag{2.58}$$

d'où la densité de probabilité associée :

$$|\psi(t,m)|^2 = \sum_{i,j} c_i c_j^* e^{-i(\omega_i-\omega_j)t} \langle\psi_{\omega_j}|m\rangle\langle m|\psi_{\omega_i}\rangle, \tag{2.59}$$

Les quasi-énergies ω_i des états de Floquet sont réparties uniformément dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Lorsque les quasi-énergies sont distinctes, il existe toujours un temps suffisamment long pour que les termes oscillants, qui dépendent des différences $(\omega_i - \omega_j)$, deviennent destructifs sauf si $i = j$. À partir de ce moment, seuls les termes diagonaux contribuent de manière significative, ce qui donne une expression simplifiée pour les temps longs :

$$|\psi(t_n,m)|^2 \approx \sum_i |c_i|^2 \left|\langle m|\psi_{\omega_i}\rangle\right|^2, \tag{2.60}$$

On reconnaît ainsi clairement la structure de la représentation des états de Floquet

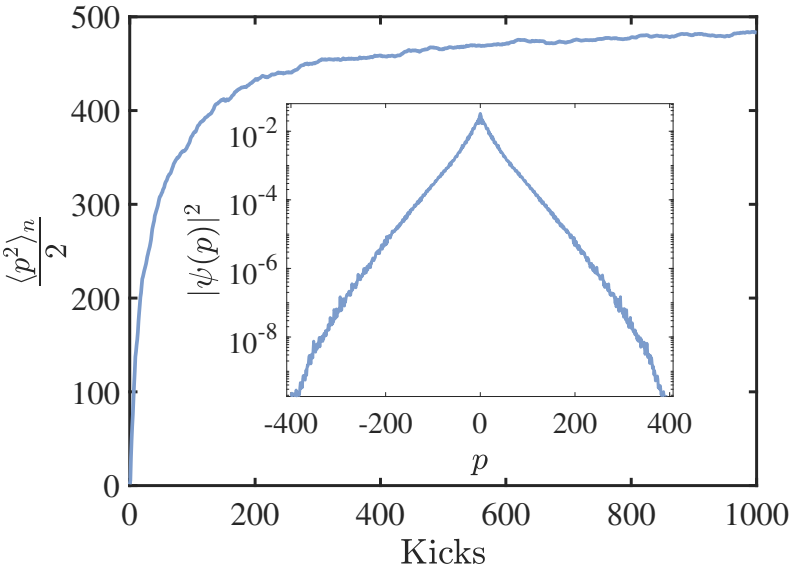


FIGURE 2.10 – Énergie cinétique en fonction du nombre de kicks pour $K = 10$ et $\bar{k} = 1$, moyennée sur 10^5 valeurs de quasi-impulsion initiale. *Encart :* distribution en impulsion en échelle semi-logarithmique dans le régime localisé (après 1000 kicks).

dans l'espace des impulsions. Chaque état de Floquet $|\psi_{\omega_i}\rangle$ présente une distribution exponentiellement localisée dans cet espace autour d'un site central m_i, selon la loi :

$$\left|\psi_{\omega_i}(m)\right|^2 \propto \exp\left(-\frac{|m-m_i|}{\xi}\right), \tag{2.61}$$

où ξ définit la longueur de localisation de ces états. La figure 2.8 illustre précisément ce phénomène de localisation. Tous les états de Floquet sont localisés avec une même longueur ξ fixée par les paramètres du système (en particulier par la valeur de W_0 dans l'équation 1.43). Ainsi, la distribution en impulsion à temps longs est essentiellement une somme d'états localisés ayant tous la même largeur typique. L'état initial du système détermine les poids $|c_i|^2$ associés à chaque état de Floquet via leurs intégrales de recouvrement respectives. Si l'état initial possède une largeur typique inférieure ou comparable à ξ, il se décomposera naturellement en plusieurs états de Floquet, produisant à temps long une distribution en impulsion de largeur de l'ordre de ξ.

2.2.3 Lien avec le modéle d'Anderson

La localisation dynamique observée dans certains systèmes périodique présente de fortes analogies avec la localisation d'Anderson caractéristique des milieux désordonnés. Cette similitude soulève naturellement la question de l'existence d'un lien formel entre les deux phénomènes. Des avancées majeures, en particulier celles proposées par Fishman et ses collaborateurs en 1982 [138], ont permis de démontrer qu'un tel lien peut être établi rigoureusement. En effet, il a été montré que le modèle du kicked rotor peut être mis en correspondance avec le modèle d'Anderson, établissant ainsi une équivalence mathématique entre les deux types de localisation. Nous exposons ici les étapes clés de cette correspondance :

L'équation aux valeurs propres correspondant aux états modifiés de Floquet peut être représentée sous la forme suivante (voir Annexe A pour le détail du calcul) :

$$\epsilon_m \Psi_{\omega_n,m} + \sum_{t\neq 0} W_t \Psi_{\omega_n,m-t} = -W_0 \Psi_{\omega_n,m}, \tag{2.62}$$

Cette équation possède la structure d'un modèle de liaisons fortes où $\Psi_{\omega_n,m}$ correspond à la projection d'un état de Floquet associé à la quasi-énergie ω_n sur l'état d'impulsion spécifique noté par l'indice m, associé à l'impulsion $p = \hbar m$.

Les termes de couplage W_t sont obtenus à partir des composantes de Fourier de la fonction périodique

$$W(x) = \tan\left(\frac{K\cos(x)}{2\hbar}\right), \tag{2.63}$$

Ces termes décroissent exponentiellement avec la distance entre les états d'impulsion. L'énergie locale sur site ϵ_m est définie par la relation suivante :

$$\epsilon_m = \tan\left(\frac{1}{2}\left(\omega_n - \frac{\hbar m^2}{2}\right)\right), \tag{2.64}$$

Cette énergie possède une distribution lorentzienne :

$$\mathcal{P}(\epsilon_m) = \frac{1}{\pi(1+\epsilon_m^2)}, \tag{2.65}$$

soulignant ainsi le caractère quasi-aléatoire du pseudo-désordre induit dans le système.

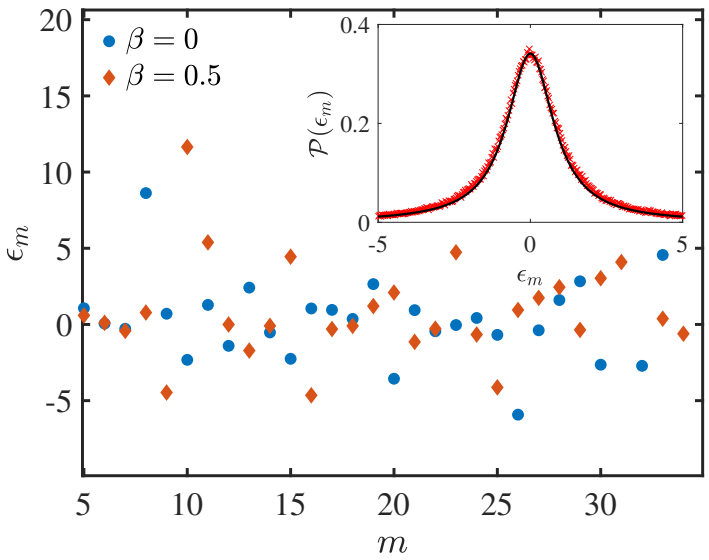


FIGURE 2.11 – Distribution des énergies sur site ϵ_m pour $\omega_n = 1.3$, dans les cas $\beta = 0$ et $\beta = 0.5$. L'encart présente la densité de probabilité des ϵ_m (croix rouges), obtenue à partir de 10^4 tirages aléatoires, ajustée par une loi de Lorentz.

Ce pseudo-désordre est analogue au désordre présent dans le modèle d'Anderson et présente des corrélations à courte portée [136, 137].

En prenant en compte un quasi-moment β non nul, l'énergie ϵ_m devient :

$$\epsilon_m = \tan\left(\frac{1}{2}\left(\omega_n - \frac{\bar{k}(\beta+m)^2}{2}\right)\right), \tag{2.66}$$

Chaque choix des paramètres β et de ω_n fournit ainsi une réalisation distincte du désordre quasi-aléatoire. La variation de ces paramètres permet d'explorer différentes réalisations du désordre.

L'équation obtenue correspond précisément à celle introduite par Anderson en 1958 [1]. Cela implique directement que chaque état de Floquet associé à une quasi-énergie ω_n est exponentiellement localisé dans la base des impulsions, avec une longueur de localisation déterminée par la constante W_0. Cette longueur reste invariante pour tous les états partageant la même quasi-énergie ω_n, établissant ainsi un lien explicite avec la localisation d'Anderson.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail le modèle du kicked rotor, à la fois dans ses versions classique et quantique. L'étude du cas classique a mis en évidence la richesse de la dynamique du système en fonction du paramètre de stochasticité K. Selon sa valeur, le système peut évoluer d'un régime intégrable régulier à un régime totalement chaotique, en passant par des régimes intermédiaires où coexistent stabilité et chaos, conformément aux prédictions du théorème de Kolmogorov–Arnold–Moser. Nous avons également montré que, dans le régime fortement chaotique, la dynamique se traduit par un comportement diffusif bien caractérisé, pouvant être quantifié par un coefficient de diffusion, et que cette sensibilité extrême aux conditions initiales s'exprime rigoureusement à travers les exposants de Lyapunov.

Dans sa version quantique, le kicked rotor révèle des phénomènes spécifiquement liés aux interférences ondulatoires. Alors que la dynamique classique prédit une diffusion illimitée dans l'espace des impulsions, la dynamique quantique est marquée par l'apparition de la localisation dynamique, qui se traduit par une inhibition de la diffusion au-delà d'un temps caractéristique. L'analyse a montré que cette localisation trouve une correspondance formelle avec la localisation d'Anderson dans les systèmes désordonnés, via un mapping mathématique rigoureux reliant les états de Floquet à un modèle de liaisons fortes en présence d'un pseudo-désordre.

Ainsi, le kicked rotor constitue un modèle paradigmatique permettant de relier la physique du chaos classique à celle de la localisation quantique. Ce double aspect en fait un outil particulièrement puissant, tant du point de vue théorique qu'expérimental, pour explorer les mécanismes fondamentaux de la transition entre régimes diffusifs et localisés. Les développements présentés dans ce chapitre fournissent les bases nécessaires à l'étude des phénomènes plus complexes qui seront abordés dans les chapitres suivants, notam-

ment l'effet des symétries supplémentaires et des couplages internes sur les propriétés de localisation.

Chapitre 3

Symétries et Classes de Symétrie dans le Kicked Rotor Quantique

Sommaire du présent chapitre

3.1 Renversement du temps **61**
3.1.1 Le renversement du temps en physique classique 62
3.1.2 Le renversement du temps en physique Quantique 65
3.2 Théorie des classes de symétrie **68**
3.2.1 Classification de Wigner-Dyson 68
3.2.2 Classification d'Altland-Zirnbauer 69
3.3 Symétries pertinentes pour le kicked rotor quantique **72**
3.3.1 Cas sans spin 72
3.3.2 Cas avec spin 76
3.4 Signatures numériques des classes de symétries **82**
3.4.1 Signature 1 : le retour à l'origine 82
3.4.2 Signature 2 : la fonction d'échelle 86
3.4.3 Signature 3 : les statistiques des niveaux 88
3.5 Conclusion **91**

3.1 Renversement du temps

La partie consacrée au renversement du temps est fortement inspirée de ces deux cours [139, 140]. D'autres références traitent également de cette notion et peuvent être consultées pour un complément de lecture [141].

3.1.1 Le renversement du temps en physique classique

L'idée de renversement du temps en physique classique peut être illustrée simplement : il suffit d'imaginer que l'on regarde à l'envers un film représentant un phénomène physique ou naturel. Si ce phénomène est fondamentalement réversible, alors le déroulement du film à l'envers apparaît tout aussi cohérent d'un point de vue physique que le déroulement initial. C'est notamment le cas de nombreux processus élémentaires : diffusion de particules [1], réflexion de la lumière, interactions électromagnétiques simples, etc. Dans ces situations, la dynamique obtenue par inversion temporelle est compatible avec les lois physiques et semble réaliste.

Ce constat s'explique par le fait que les lois fondamentales de la mécanique classique, de l'électromagnétisme ou encore de l'optique sont, à l'échelle microscopique, invariantes sous renversement du temps. En d'autres termes, les équations du mouvement demeurent valides lorsque l'on remplace t par $-t$.

En revanche, dans des contextes plus complexes comme les phénomènes thermodynamiques irréversibles, les réactions chimiques, la croissance biologique ou la destruction de structures — cette symétrie temporelle ne semble plus observée. L'évolution vers un état d'équilibre, les pertes d'énergie ou l'augmentation de l'entropie sont autant de manifestations d'une flèche du temps apparente. Comprendre comment une dynamique irréversible émerge de lois fondamentales réversibles soulève des questions profondes, impliquant notamment la notion d'entropie, le démon de Maxwell ect. Ce sujet dépasse le cadre de cette sous-section, qui se limitera aux propriétés de symétrie des équations classiques fondamentales.

Rappelons que, en mécanique classique, l'équation du mouvement d'une particule soumise à une force conservative s'écrit :

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}(t)). \tag{3.1}$$

Cette équation ne dépend du temps qu'à travers sa dérivée seconde. Si le champ de force est indépendant de la vitesse comme c'est le cas, par exemple, pour un champ électrostatique alors le système présente une symétrie par renversement du temps. En effet, sous la transformation $t \to -t$, la trajectoire transformée définie par :

$$\vec{r}_{\text{renv}}(t) = \vec{r}(-t), \tag{3.2}$$

est aussi solution de l'équation (3.1), pour un même champ de force.

De manière analogue, l'impulsion définie par $\vec{p}(t) = m\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ satisfait également une pro-

1. Il s'agit ici de la diffusion au sens microscopique, c'est-à-dire dans le cadre de la mécanique classique, où par exemple une particule rebondit de manière déterministe sur des obstacles. Ce type de processus est, en principe, réversible. Il ne faut pas le confondre avec la diffusion au sens statistique, par exemple décrite par l'équation de Fick qui modélise l'évolution d'une densité de probabilité et constitue un processus irréversible.

priété d'invariance temporelle. Ainsi, si $\vec{p}(t)$ est solution, alors

$$\vec{p}_{\text{renv}}(t) = -\vec{p}(-t), \tag{3.3}$$

est aussi solution de l'équation du mouvement. Cette relation se prolonge à la vitesse, qui change également de signe sous inversion temporelle : $\vec{v}_{\text{renv}}(t) = -\vec{v}(-t)$.

Ces transformations montrent une correspondance entre les trajectoires directes et renversées. Prenons l'exemple d'une particule chargée q dans un champ électrostatique constant $\vec{E}$: la trajectoire directe est donnée par

$$\vec{r}(t) = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \tag{3.4}$$

La vitesse correspondante est

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0. \tag{3.5}$$

En effectuant le renversement du temps, la trajectoire devient :

$$\vec{r}_{\text{renv}}(t) = \vec{r}(-t) = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 - \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \tag{3.6}$$

et la vitesse devient :

$$\vec{v}_{\text{renv}}(t) = \frac{d\vec{r}_{\text{renv}}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E}t - \vec{v}_0, \tag{3.7}$$

On vérifie que cette nouvelle solution est toujours compatible avec l'équation du mouvement initiale, ce qui confirme l'invariance sous renversement du temps.

Sur un plan plus général, cette symétrie s'exprime également au niveau du lagrangien. Pour un potentiel statique, le lagrangien s'écrit :

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}), \tag{3.8}$$

et satisfait l'invariance $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r}, -\dot{\vec{r}})$. En passant au formalisme hamiltonien par transformation de Legendre, on obtient :

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}), \tag{3.9}$$

qui reste invariant sous $\vec{p} \to -\vec{p}$.

Considérons maintenant une particule plongée dans un champ électromagnétique statique. Le lagrangien associé est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) - qU(\vec{r}) + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}), \tag{3.10}$$

où $U(\vec{r})$ est le potentiel scalaire et $\vec{A}(\vec{r})$ le potentiel vecteur. Le hamiltonien correspondant s'écrit :

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}))^2}{2m} + qU(\vec{r}) + V(\vec{r}). \tag{3.11}$$

La présence du terme vectoriel $\vec{A}$ couplé à la vitesse $\dot{\vec{r}}$introduit une brisure de l'invariance temporelle. En effet, cela se manifeste dans la force de Lorentz qui gouverne le mouvement de la particule :

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right). \tag{3.12}$$

avec $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Sous la transformation $t \to -t$, la vitesse change de signe ($\vec{v} \to -\vec{v}$), le champ électrique reste invariant ($\vec{E} \to \vec{E}$), tandis que le terme $\vec{v} \times \vec{B}$ change de signe. La force résultante est donc modifiée, ce qui indique que l'équation du mouvement n'est plus invariante par renversement du temps.

Cette asymétrie prend sa source dans la nature des champs impliqués. Le champ électrostatique provient de charges fixes, qui ne sont pas affectées par l'inversion du temps. En revanche, un champ magnétique statique est généralement produit par des courants électriques, c'est-à-dire des charges en mouvement. Inverser le sens du temps revient à inverser ces courants, ce qui change également le signe du champ magnétique associé.

Pour analyser cette question de manière plus rigoureuse, il est nécessaire de considérer les équations de Maxwell, qui régissent l'évolution des champs électromagnétiques. Celles-ci, dans leur forme différentielle, sont données par :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ces équations conservent leur forme sous renversement du temps à condition que les champs et les sources se transforment comme suit :

$$\vec{E} \to \vec{E}, \quad \vec{B} \to -\vec{B}, \quad \rho \to \rho, \quad \vec{j} \to -\vec{j}. \tag{3.14}$$

Une manière d'introduire la notion d'irréversibilité en mécanique classique consiste à considérer l'effet d'une force dissipative, généralement modélisée par un terme proportionnel à la vitesse :

$$\vec{F}_{\text{diss}} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}. \tag{3.15}$$

C'est le cas du modèle de Drude pour les électrons dans un conducteur, où la dynamique de l'électron est influencée par un champ électrique et une friction linéaire modélisant les collisions :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}, \tag{3.16}$$

La solution générale de cette équation est :

$$\vec{v}(t) = \left(\vec{v}_0 - \frac{q\vec{E}\tau}{m}\right)e^{-t/\tau} + \frac{q\vec{E}\tau}{m}, \tag{3.17}$$

où le premier terme correspond à un régime transitoire qui décroît exponentiellement, et le second à un régime stationnaire atteint pour $t \gg \tau$. Cette dynamique brise clairement la symétrie temporelle, car l'équation du mouvement n'est plus satisfaite par la trajectoire renversée.

La question qui nous intéresse ici concerne la manière de formuler l'inversion du temps, ainsi que son invariance, dans le cadre de la mécanique quantique.

3.1.2 Le renversement du temps en physique Quantique

Le renversement du temps est représenté en mécanique quantique par un opérateur antiunitaire $\hat{\mathcal{T}}$, c'est-à-dire un opérateur antilinéaire satisfaisant la relation d'unitarité généralisée suivante :

$$\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = \hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{T}} = \hat{1}. \tag{3.18}$$

dont certaines propriétés importantes ainsi que des expressions explicites dans les cas avec et sans spin sont détaillées en Annexe B.

L'opérateur $\hat{\mathcal{T}}$ possède une action bien définie sur les observables physiques : il laisse invariant l'opérateur position $\hat{x}$, inverse le signe de l'impulsion $\hat{p}$, et dans le cas d'une particule avec spin, inverse également le signe des composantes du spin $\hat{\sigma}_j$, pour $j = x, y, z$.

Soit maintenant $|\psi(t)\rangle$ un état quantique satisfaisant l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \tag{3.19}$$

En appliquant l'opérateur antiunitaire $\hat{\mathcal{T}}$ à cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{T}}\left(i\partial_t|\psi(t)\rangle\right) &= -i\partial_t\left(\hat{\mathcal{T}}|\psi(t)\rangle\right)\\ &= \hat{\mathcal{T}}\hat{H}|\psi(t)\rangle\\ &= \hat{\mathcal{T}}\hat{H}\hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{T}}|\psi(t)\rangle\ ,\end{aligned} \tag{3.20}$$

En procédant à la substitution temporelle $t \to -t$, l'équation devient alors :

$$i\partial_t\left(\hat{\mathcal{T}}|\psi(-t)\rangle\right) = \hat{\mathcal{T}}\hat{H}\hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{T}}|\psi(-t)\rangle, \tag{3.21}$$

Cette dernière relation démontre que l'état transformé par inversion temporelle, défini comme :

$$|\psi_{\text{renv}}(t)\rangle \equiv \hat{\mathcal{T}}|\psi(-t)\rangle, \tag{3.22}$$

est solution d'une équation de Schrödinger associée à l'hamiltonien transformé $\hat{\mathcal{T}}\hat{H}\hat{\mathcal{T}}^\dagger$.

L'évolution temporelle de cet état transformé peut également être décrite en utilisant un opérateur d'évolution modifié. En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{renv}}(t)\rangle &= \hat{\mathcal{T}}\,|\psi(-t)\rangle = \hat{\mathcal{T}}\,\hat{U}^{\dagger}(t)|\psi(0)\rangle \\ &= \hat{\mathcal{T}}\,\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{\mathcal{T}}\,|\psi(0)\rangle = \hat{U}_{\mathcal{T}}(t)\hat{\mathcal{T}}\,|\psi(0)\rangle \\ &= \hat{U}_{\mathcal{T}}(t)|\psi_{\text{renv}}(0)\rangle\ , \end{aligned} \tag{3.23}$$

où l'on a introduit l'opérateur d'évolution temporelle sous inversion temporelle (L'opérateur $\hat{U}(t)$ désigne ici l'opérateur d'évolution unitaire associé à l'Hamiltonien $\hat{H}$, défini dans le cas indépendant du temps par : $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t}$ de telle sorte que l'état à l'instant t s'écrit $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$. :

$$\hat{U}_{\mathcal{T}}(t) = \hat{\mathcal{T}}\,\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{T}}^{\dagger}. \tag{3.24}$$

La symétrie d'un système quantique vis-à-vis du renversement du temps peut s'exprimer aussi à travers le **principe de micro-réversibilité**. Celui-ci énonce que la probabilité de transition d'un état initial, identifié par la raie spectrale ϕ, vers un état finale ψ après une évolution durant un intervalle de temps t, est donnée par

$$\left|\left(\psi, \hat{U}(t)\phi\right)\right|^2, \tag{3.25}$$

doit être identique à celle du processus inverse où l'état initial est $\hat{\mathcal{T}}\psi$ et l'état final $\hat{\mathcal{T}}\phi$:

$$\left|\left(\hat{\mathcal{T}}\phi, \hat{U}(t)\hat{\mathcal{T}}\psi\right)\right|^2, \tag{3.26}$$

La condition d'égalité de ces probabilités

$$\left|\left(\psi, \hat{U}(t)\phi\right)\right|^2 = \left|\left(\hat{\mathcal{T}}\phi, \hat{U}(t)\hat{\mathcal{T}}\psi\right)\right|^2, \tag{3.27}$$

conduit à l'identification

$$\hat{U}(t) = \hat{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{T}}\,e^{\mathrm{i}\theta(t)}, \tag{3.28}$$

où $\theta(t)$ est a priori une phase arbitraire. En multipliant à gauche par $\hat{\mathcal{T}}$ et à droite par $\hat{\mathcal{T}}^{\dagger}$ cette expression, on obtient

$$\hat{\mathcal{T}}\,\hat{U}(t)\hat{\mathcal{T}}^{\dagger} = \hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{T}}\,e^{\mathrm{i}\theta(t)}\hat{\mathcal{T}}^{\dagger} = \hat{U}^{\dagger}(t)e^{-\mathrm{i}\theta(t)}, \tag{3.29}$$

En prenant l'adjoint et passant le terme de phase de l'autre côté, on a

$$\hat{U}(t) = \hat{\mathcal{T}}\,\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{T}}^{\dagger}e^{-\mathrm{i}\theta(t)} = \hat{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{T}}\,e^{-\mathrm{i}\theta(t)}, \tag{3.30}$$

En comparant à l'expression précédente, on doit donc avoir

$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = \pm 1\ \ ,\ \ \forall t. \tag{3.31}$$

Mais la condition de continuité à l'origine

$$\hat{\mathcal{T}}\hat{U}^{\dagger}(t\to 0)\hat{\mathcal{T}}^{\dagger} = \hat{U}(t\to 0)e^{\mathrm{i}\theta(t\to 0)} \quad \Rightarrow \quad 1 = e^{\mathrm{i}\theta(0)}, \tag{3.32}$$

impose finalement

$$\hat{U}(t) = \hat{\mathcal{T}}\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{T}}^{\dagger} = \hat{U}_{\mathcal{T}}(t). \tag{3.33}$$

Dans le cas d'un système conservatif, c'est-à-dire pour $\hat{U}(t) = e^{-\mathrm{i}\hat{H}\ t}$, cela revient à l'invariance de l'hamiltonien par renversement temporel :

$$\hat{\mathcal{T}}\hat{H}\hat{\mathcal{T}}^{\dagger} = \hat{H} \Longleftrightarrow [\hat{\mathcal{T}}, \hat{H}] = 0, \tag{3.34}$$

Cela signifie que l'hamiltonien est invariant sous l'action de l'opérateur de renversement temporel.

Dans le cas où le spin total S est demi-entier, c'est-à-dire de la forme $S = (2p+1)/2$, la relation $\hat{\mathcal{T}}^2 = (-1)^{2S} = -\hat{1}$ combinée à la commutation $[\hat{\mathcal{T}}, \hat{H}] = 0$ entraîne une dégénérescence inévitable du spectre d'énergie. Ce phénomène est connu sous le nom de *dégénérescence de Kramers* [142].

Considérons un état propre Ψ de $\hat{H}$ associé à une énergie E :

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \tag{3.35}$$

En appliquant l'opérateur $\hat{\mathcal{T}}$ et en utilisant $[\hat{\mathcal{T}}, \hat{H}] = 0$, on obtient :

$$\hat{H}(\hat{\mathcal{T}}\Psi) = \hat{\mathcal{T}}\hat{H}\Psi = E\hat{\mathcal{T}}\Psi, \tag{3.36}$$

L'état $\hat{\mathcal{T}}\Psi$ est donc également un état propre de l'hamiltonien avec la même énergie. Supposons maintenant que ces deux états ne soient pas physiquement distincts, autrement dit :

$$\hat{\mathcal{T}}\Psi = e^{i\theta}\Psi, \tag{3.37}$$

pour une certaine phase réelle θ. En appliquant à nouveau $\hat{\mathcal{T}}$, on obtient :

$$\hat{\mathcal{T}}^2\Psi = \hat{\mathcal{T}}(e^{i\theta}\Psi) = e^{-i\theta}\hat{\mathcal{T}}\Psi = e^{-i\theta}e^{i\theta}\Psi = \Psi. \tag{3.38}$$

Ce résultat contredit la propriété fondamentale $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$ dans le cas demi-entier. Il en découle que $\hat{\mathcal{T}}\Psi$ est un état physiquement distinct de Ψ, bien qu'associé à la même énergie.

Donc, pour un système possédant une symétrie par renversement temporel et un spin demi-entier, chaque niveau d'énergie est nécessairement au moins deux fois dégénéré. Cette propriété pourrait sembler naturelle dans le cas de systèmes invariants par rotation, où une dégénérescence de $2S+1$ niveaux est déjà attendue. Toutefois, le théorème de Kramers va au-delà : il garantit la persistance de cette dégénérescence même en l'absence de symétrie rotationnelle, à condition que que l'invariance temporelle soit préservée. C'est notamment le cas, par exemple, d'un électron placé dans un champ électrique

statique.

3.2 Théorie des classes de symétrie

3.2.1 Classification de Wigner-Dyson : ensembles orthogonal, unitaire et symplectique

Wigner et Dyson ont initié une classification essentielle des Hamiltoniens aléatoires basée sur leurs symétries fondamentales. Dyson (1962) a démontré que «L'ensemble de matrices le plus général, défini à partir d'un groupe de symétrie arbitraire, se réduit à un produit direct d'ensembles irréductibles indépendants, chacun appartenant à l'un des trois types connus.» [117]. Ces trois types – appelés ensembles de Wigner-Dyson – correspondent aux matrices hermitiennes complexes (classe **A**, dite *unitaire*), aux matrices hermitiennes réelles (classe **AI**, dite *orthogonale*), ou aux matrices hermitiennes quaternioniques auto-duales (classe **AII**, dite *symplectique*). En termes plus physiques, il s'agit de distinguer un Hamiltonien sans symétrie anti-unitaire (complexe général), un Hamiltonien invariant par conjugaison complexe (qu'on peut rendre réel symétrique), ou un Hamiltonien présentant une structure quaternionique (due à une dégénérescence de Kramers, voir ci-dessous). Cette classification triple de Dyson, parfois nommée "Threefold Way" en anglais, a un caractère universel : tout Hamiltonien quantique invariant sous un groupe de symétries anti-unitaires, telles que la symétrie de renversement du temps se décompose en blocs appartenant à l'une de ces trois catégories [116].

La connexion entre les propriétés statistiques des systèmes quantiques désordonnés et leurs symétries physiques s'établit principalement via l'analyse de l'opérateur anti-unitaire de renversement du temps $\hat{\mathcal{T}}$. Cette symétrie influence à la fois le spectre d'énergie et les fonctions d'onde, et son action dépend du type de particules considérées.Si aucune symétrie antiunitaire n'existe, le système appartient à la *classe unitaire* (A). S'il existe une symétrie antiunitaire $\hat{\mathcal{T}}$ telle que $\hat{\mathcal{T}}^2 = +\hat{1}$ alors le Hamiltonien peut être rendu réel dans une base appropriée, ce qui définit la classe orthogonale (AI). En revanche, si $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$, comme pour les électrons de spin 1/2 avec couplage spin-orbite, le système relève de la classe symplectique (AII). Dans certains systèmes, comme le kicked rotor quantique standard, l'opérateur de renversement du temps $\hat{\mathcal{T}}$ n'existe pas directement, mais une combinaison avec la parité spatiale joue ce rôle, plaçant ainsi le système dans la classe orthogonale, comme nous le verrons plus en détail dans la suite.

Lorsque ces classes de symétrie sont associées à une distribution aléatoire gaussienne des éléments de matrice, on obtient les trois ensembles de Wigner-Dyson : l'**ensemble gaussien unitaire (GUE)** pour la classe A, l'**ensemble gaussien orthogonal (GOE)** pour la classe AI, et l'**ensemble gaussien symplectique (GSE)** pour la classe AII. Ces ensembles, bien que définis à partir de distributions spécifiques, décrivent des comportements statistiques universels tels que l'espacement des niveaux ou les corrélations entre niveaux propres, qui ne dépendent que de la symétrie sous-jacente [115, 143].

Historiquement, la classificationconnue sous le nom de Threefold Way en anglais intro-

duite par Dyson a eu un impact fondamental en physique du désordre et en physique mésoscopique [106, 144]. Elle a notamment permis de comprendre les propriétés spectrales des électrons dans des milieux désordonnés ainsi que les fluctuations de conductance quantique à l'échelle mésoscopique. Des travaux pionniers comme ceux d'Abrahams et Anderson sur la localisation électronique [145], ou encore les analyses statistiques d'Altshuler et Shklovskii sur les corrélations entre niveaux d'énergie [146], ont mis en lumière l'importance des classes de symétrie (orthogonale, unitaire, symplectique) dans le comportement universel des systèmes quantiques désordonnés.

Dans un second temps, des généralisations de la classification de Dyson ont émergé, motivées par des problématiques issues de différents domaines. En physique des particules, les travaux de [147] sur le spectre de Dirac à basse énergie en chromodynamique quantique (QCD) ont conduit à l'introduction de nouvelles classes de symétrie. En physique mésoscopique, la description de quasi-particules dans des supraconducteurs désordonnés a également nécessité d'étendre le cadre de Dyson, notamment via les travaux d'Altland et Zirnbauer [148], ainsi qu'en théorie des cordes [93]. Enfin, en mathématiques, des généralisations analogues sont apparues en théorie des nombres, à travers l'étude des corrélations statistiques des zéros de la fonction zêta de Riemann et des fonctions L associées [149].

3.2.2 Classification d'Altland-Zirnbauer : les dix classes de Cartan (symétries TR, PH, chirale)

Dyson lui-même nota que sa classification pouvait être étendue en présence d'autres symétries anti-unitaires (telles que la conjugaison de charge en physique des particules). Ce n'est toutefois qu'au milieu des années 1990 que des nouveaux types de classes de symétrie ont été découverts dans deux domaines parallèles : (*i*) la chromodynamique quantique à bas énergies, dans l'étude du spectre de l'opérateur de Dirac en phase chirale, et (*ii*) les quasi-particules dans les systèmes mésoscopiques normaux-supraconducteurs désordonnés [148]. Altland et Zirnbauer (1997) ont formalisé cette extension en montrant que, lorsqu'on incorpore en plus la symétrie particule-trou propre aux supraconducteurs, on obtient au total dix classes distinctes de Hamiltoniens. Mathématiquement, ces dix classes d'Altland-Zirnbauer correspondent de façon bi-univoque aux dix grandes familles d'espaces symétriques de Cartan– d'où leur appellation alternative de dix classes de Cartan. Elles englobent naturellement les trois classes de Wigner-Dyson précédentes (A, AI, AII) et ajoutent sept nouvelles classes liées aux symétries de particule-trou et aux symétries chirales. Avant de détailler ces classes, rappelons les trois symétries discrètes fondamentales qui définissent la classification Altland-Zirnbauer :

• **Symétrie de renversement du temps** $\hat{\mathcal{T}}$ (Time-Reversal Symmetry, TRS) : opérateur anti-unitaire tel que $\hat{\mathcal{T}}\hat{H}\hat{\mathcal{T}}^{-1} = \hat{H}$. Il commute avec le Hamiltonien (conserve l'énergie) et peut satisfaire $\hat{\mathcal{T}}^2 = +1$ ou $\hat{\mathcal{T}}^2 = -1$ selon le cas (voir ci-dessus). Si $\hat{\mathcal{T}}$ est absente, on notera $\hat{\mathcal{T}} = 0$ dans le tableau des classes.

• **Symétrie particule-trou** $\hat{\mathcal{C}}$ (Particle-Hole Symmetry, PHS) : opérateur anti-unitaire (souvent noté $\hat{\mathcal{C}}$ ou $\hat{\mathcal{P}}$) tel que $\hat{\mathcal{C}}\hat{H}\hat{\mathcal{C}}^{-1} = -\hat{H}$. Cette symétrie anti-commute avec le Hamiltonien, échangeant les particules et les trous (elle envoie un état d'énergie E sur un état d'énergie

$-E$). Dans un Hamiltonien de Bogoliubov–de Gennes (BdG) pour supraconducteur, $\hat{\mathcal{C}}$ est implémentée par la conjugaison de charge (création/annihilation de paires). Comme pour $\hat{\mathcal{T}}$, on distingue deux cas : $\hat{\mathcal{C}}^2 = +1$ ou $\hat{\mathcal{C}}^2 = -1$ selon que l'application de la conjugaison de charge deux fois restitue le même état ou introduit un signe global. (Nous noterons $\hat{\mathcal{C}} = 0$ si aucune symétrie particule-trou n'est présente.).

• **Symétrie chirale** $\hat{\mathcal{S}}$ (Chiral ou sublattice symmetry) : opérateur unitaire tel que $\hat{\mathcal{S}}\hat{H}\hat{\mathcal{S}}^{-1} = -\hat{H}$. Cette symétrie chirale (aussi appelée symétrie de sous-réseau) anti-commute avec $\hat{H}$ et implique une structure de bloc du Hamiltonien : dans une base adéquate, $\hat{\mathcal{S}}$ peut être représenté par une matrice diagonalement bloquée $(\hat{1}, -\hat{1})$, de sorte que le Hamiltonien prend une forme hors-diagonale par blocs (les états se séparent en deux sous-espaces que $\hat{H}$ couple mais à l'intérieur desquels il n'y a pas de couplage) [116]. Une symétrie chirale peut émerger de deux manières : soit intrinsèquement (par une structure de réseau bipartite, comme dans le modèle de graphène ou de polyacétylène où les sites A ne se couplent qu'aux sites B), soit combinatoirement par la présence simultanée de $\hat{\mathcal{T}}$ et $\hat{\mathcal{C}}$ [150, 151]. En effet, si un système possède à la fois TRS et PHS, alors en général le produit $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{C}}$ (ou plus rigoureusement $\hat{\mathcal{S}} = \hat{U}^{-1}\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{C}}$ avec $\hat{U}$ unitaire approprié) définit une symétrie unitaire qui anti-commute avec H – ce qui est précisément une symétrie chirale.

En combinant ces symétries discrètes, on peut distinguer 10 classes de symétrie possibles pour un Hamiltonien hermitien. Chacune est caractérisée par la présence ou l'absence de TRS et de PHS, par les valeurs ± 1 associées à $\hat{\mathcal{T}}^2$ et $\hat{\mathcal{C}}^2$ le cas échéant, et par la présence éventuelle d'une symétrie chirale. On peut résumer les sept classes restantes de la classification d'Altland-Zirnbauer (dénommées selon la convention d'Altland-Zirnbauer/Cartan) de la façon suivante :

⋆ **Classe AIII (Chiral unitaire)** : Pas de $\hat{\mathcal{T}}$ ni de $\hat{\mathcal{C}}$, mais présence d'une symétrie chirale $\hat{\mathcal{S}}$. (Souvent réalisée par un Hamiltonien à structure de sous-réseau bipartite sans autre symétrie – par exemple un modèle de Dirac avec symétrie sous-réseau [150].)

⋆ **Classe D** : $\hat{\mathcal{C}}$ présente avec $\hat{\mathcal{C}}^2 = +\hat{1}$, pas de $\hat{\mathcal{T}}$. Pas de symétrie chirale (car $\hat{\mathcal{T}}$ absente). (Hamiltoniens de BdG de supraconducteurs [152] non invariants par $\hat{\mathcal{T}}$, avec $\hat{\mathcal{C}}^2 = +\hat{1}$ typiquement pour des fermions spin-polarisés ou sans spin.)

⋆ **Classe C** : $\hat{\mathcal{C}}$ présente avec $\hat{\mathcal{C}}^2 = -\hat{1}$, pas de $\hat{\mathcal{T}}$. Pas de symétrie chirale. (Hamiltoniens de BdG sans $\hat{\mathcal{T}}$, $\hat{\mathcal{C}}^2 = -\hat{1}$ typiquement pour des supraconducteurs spin-singulet où la conjugaison de charge agit différemment sur les deux composantes de spin [153].)

⋆ **Classe BDI (Chiral orthogonal)** : $\hat{\mathcal{T}}$ présente avec $\hat{\mathcal{T}}^2 = +\hat{1}$ et $\hat{\mathcal{C}}$ présente avec $\hat{\mathcal{C}}^2 = +\hat{1}$. Ces deux symétries impliquent l'existence d'une symétrie chirale $\hat{\mathcal{S}}$ (présente). (On l'appelle parfois "chiral GOE" – par exemple, une chaîne de fermions ne tenant pas compte du spin avec $\hat{\mathcal{T}}$ effectif et structure bipartite appartient à BDI [154].)

⋆ **Classe DIII (Chiral symplectique)** : $\hat{\mathcal{T}}$ présente avec $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$ et $\hat{\mathcal{C}}$ présente avec $\hat{\mathcal{C}}^2 = +\hat{1}$. Symétrie chirale présente (découlant de $\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{C}}$). (Par ex. un supraconducteur de spin 1/2

invariant par $\hat{\mathcal{T}}$ mais de type $\hat{\mathcal{C}}^2 = +\hat{1}$ – cas de certains supraconducteurs topologiques avec paire de Kramers de Majorana [155].)

⋆ **Classe CI (Chiral orthogonal avec PH symplectique)** : $\hat{\mathcal{T}}$ présente avec $\mathcal{T}^2 = +\hat{1}$ et $\mathcal{C}$ avec $\hat{\mathcal{C}}^2 = -\hat{1}$. Symétrie chirale présente. (Par ex. quasi-particules dans un supraconducteur spin-singulet conventionnel [156] sans brisure de $\hat{\mathcal{T}}$: $\hat{\mathcal{T}}^2 = +\hat{1}$ via une symétrie combinée spin-rotation+temps, $\hat{\mathcal{C}}^2 = -\hat{1}$ du fait des fermions de spin 1/2.)

⋆ **Classe CII (Chiral symplectique avec PH symplectique)** : $\hat{\mathcal{T}}$ présente avec $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$ et $\hat{\mathcal{C}}$ avec $\hat{\mathcal{C}}^2 = -\hat{1}$. Symétrie chirale présente. (Par ex. classes chirales en présence d'$\hat{\mathcal{T}}$ de spin 1/2 et de $\hat{\mathcal{C}}$ spin-singulet – cas apparaissant dans certains modèles de Dirac en présence de symétries de temps et de charge conjuguée [148], ou dans des contextes de QCD à deux couleurs [147, 157].)

Le graphique ci-dessous illustre la classification Altland-Zirnbauer par un repérage des classes en fonction des symétries de renversement du temps et particule-trou.

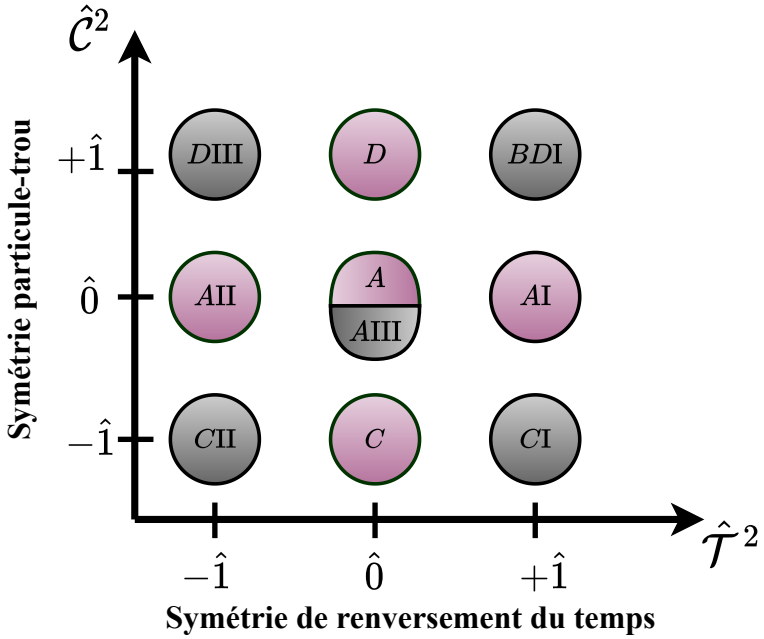


FIGURE 3.1 – Diagramme représentant les dix classes de symétrie en fonction de $\hat{\mathcal{T}}^2$ (axe horizontal) et $\mathcal{C}^2$ (axe vertical). Les valeurs $+\hat{1}$ ou $-\hat{1}$ correspondent aux carrés des opérateurs de symétrie, qu'il s'agisse de l'opérateur de renversement du temps $\hat{\mathcal{T}}$ ou de l'opérateur de conjugaison de charge $\hat{\mathcal{C}}$, tandis que $\hat{0}$ signifie l'absence de la symétrie correspondante. Chaque bulle correspond à une classe (notation Altland-Zirnbauer).

Cette classification en dix catégories exhaustives (Classes A, AI, AII, AIII, D, C, BDI, DIII, CI, CII) généralise ainsi celle de Wigner-Dyson. Chaque classe correspond à une structure algébrique précise du Hamiltonien, reliée à un espace symétrique de la classi-

fication de Cartan. Par exemple, la classe A correspond à l'espace symétrique compact $U(N)/U(1)^N$ (matrices unitaires diagonalisables), AI correspond à $U(N)/O(N)$ (matrices symétriques réelles), AII à $U(2N)/Sp(N)$ (matrices symplectiques auto-duales), etc [116]. Il est remarquable que ces considérations purement symétriques fournissent un principe d'organisation des Hamiltoniens désordonnés en absence d'interactions, sans préjuger de leurs propriétés dynamiques détaillées. Cette classification à dix voies – parfois appelée tenfold way – est aujourd'hui centrale dans des domaines allant de la théorie des matrices aléatoires aux phases topologiques de la matière.

3.3 Symétries pertinentes pour le kicked rotor quantique

Dans le contexte du kicked rotor quantique, que ce soit en l'absence ou en présence d'un couplage spin-orbite, seules les trois classes de symétrie de Wigner-Dyson — à savoir les classes orthogonale, unitaire et symplectique — sont pertinentes pour notre étude. Ce sont donc ces trois classes que nous considérerons dans la suite. Pour cela, nous distinguons dans un premier temps le cas sans spin, puis le cas avec spin.

3.3.1 Cas sans spin

Dans la section 3.1, nous avons discuté comment l'opérateur de renversement temporel transforme t en $-t$ et inverse la position $\hat{x}$, tout en conservant l'impulsion. Cette symétrie dépendant de l'origine choisie pour l'axe temporel, il existe une famille d'opérations $\hat{\mathcal{T}}_\tau$ telle que :

$$\hat{\mathcal{T}}_\tau \begin{cases} \hat{x} \to \hat{x}, \\ t \to 2\tau - t, \\ \hat{p} \to -\hat{p}, \end{cases} \tag{3.39}$$

Le système étudié possède une invariance par translation spatiale périodique. En vertu du théorème de Bloch, cela implique une conservation de la quasi-impulsion β. L'opération de symétrie $\hat{\mathcal{T}}_\tau$ inversant l'impulsion transforme alors la quasi-impulsion β en $-\beta$ et ne respecte donc pas cette invariance par translation spatiale. En effet, l'énergie cinétique dans un secteur de quasi-impulsion fixé s'écrit

$$\hat{E}_c\,|m,\beta\rangle = \frac{\hat{p}^2}{2}\,|m,\beta\rangle = \frac{(m+\beta)^2\bar{k}^2}{2}\,|m,\beta\rangle, \qquad m \in \mathbb{Z}, \tag{3.40}$$

Si l'on applique l'inversion $p \mapsto -p$, on obtient

$$E_c(-p) = \frac{(-m+\beta)^2\bar{k}^2}{2}, \tag{3.41}$$

Or, en général $E_c(-p) \neq E_c(p)$, puisque

$$(m+\beta)^2 = (-m+\beta)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = 0\,, \tag{3.42}$$

Autrement dit, l'invariance par inversion de l'impulsion (et donc par renversement du temps $\hat{\mathcal{T}}_{\tau=0}$) n'est assurée que dans le cas particulier $\beta = 0$. Pour $\beta \neq 0$, cette opération change de secteur de Bloch et brise donc l'invariance par translation spatiale. Cette incompatibilité est bien documentée dans la littérature [118, 158, 159]. Pour résoudre ce

problème, on considère une version généralisée de l'opérateur de renversement temporel, définie comme le produit de $\hat{\mathcal{T}}_\tau$ par l'opérateur de symétrie par parité spatiale $\hat{\mathcal{P}}_a$, centré autour d'un axe a :

$$\hat{\mathcal{P}}_a \begin{cases} \hat{x} \to 2a - \hat{x}, \\ t \to t, \\ \hat{p} \to -\hat{p}, \end{cases} \tag{3.43}$$

En combinant ces deux opérations, on définit ainsi l'opération de renversement temporel généralisée $\hat{\mathbf{T}}_{\tau,a}$:

$$\hat{\mathbf{T}}_{\tau,a} := \hat{\mathcal{T}}_\tau \hat{\mathcal{P}}_a, \tag{3.44}$$

dont l'action sur le système est :

$$\hat{\mathbf{T}}_{\tau,a} \begin{cases} \hat{x} \to 2a - \hat{x}, \\ t \to 2\tau - t, \\ \hat{p} \to \hat{p}, \end{cases} \tag{3.45}$$

Cette opération conserve l'impulsion $\hat{p}$, et donc préserve la quasi-impulsion β. Elle est donc compatible avec l'invariance du système par translation spatiale. Par conséquent, c'est l'opération $\hat{\mathbf{T}}_{\tau,a}$ qui est pertinente pour étudier les symétries de renversement temporel dans les systèmes spatialement périodiques tels que le kicked rotor quantique.

Une illustration schématique de cette symétrie temporelle consiste à considérer une séquence périodique de kicks localisés dans le temps (voir figure 3.2(a)), appliqués à intervalles réguliers. En inversant la flèche du temps, c'est-à-dire en considérant l'évolution selon $t \mapsto -t$, on obtient la configuration illustrée en 3.2(b). Comme les kicks sont équidistants et de même intensité, la séquence reste globalement inchangée, à condition de choisir convenablement l'origine des temps : celle-ci doit être placée soit exactement sur un kick, soit à mi-chemin entre deux kicks. Cette construction illustre visuellement l'invariance de la séquence de kicks par renversement temporel.

Étant donné que l'Hamiltonien du kicked rotor est périodique dans le temps, il est pertinent d'utiliser le formalisme des opérateurs de Floquet. Nous allons maintenant nous intéresser aux symétries de ce système du point de vue des opérateurs de Floquet.

Dans ce contexte, trois opérateurs d'évolution de Floquet différents sont pris en considération., selon le choix de l'origine temporelle (voir figure 3.3). Elles s'écrivent :

$$\hat{U}_0 = e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}} e^{-\mathrm{i}\frac{K}{k}\cos(\hat{x})} = \hat{U}_{\text{Prop}}\, \hat{U}_{\text{Kick}}, \tag{3.46}$$

$$\hat{U}_{1/2} = e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{4k}} e^{-\mathrm{i}\frac{K}{\hbar}\cos(\hat{x})} e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{4k}} = \hat{U}^{1/2}_{\text{Prop}}\, \hat{U}_{\text{Kick}}\, \hat{U}^{1/2}_{\text{Prop}}, \tag{3.47}$$

$$\hat{V}_{1/2} = e^{-\mathrm{i}\frac{K}{2k}\cos(\hat{x})} e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}} e^{-\mathrm{i}\frac{K}{2k}\cos(\hat{x})} = \hat{U}^{1/2}_{\text{Kick}}\, \hat{U}_{\text{Prop}}\, \hat{U}^{1/2}_{\text{Kick}}, \tag{3.48}$$

Ces trois opérateurs de Floquet sont unitaires et correspondent à des choix différents de l'origine temporelle. $\hat{U}_0$ décrit une évolution où l'origine des temps est placée immédiatement après un kick, $\hat{U}_{1/2}$ correspond à une origine choisie à mi-chemin entre deux kicks

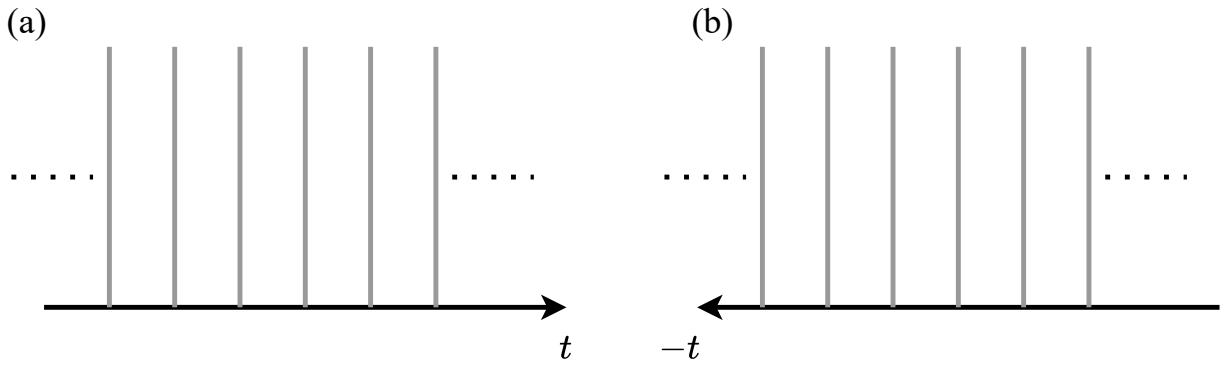


FIGURE 3.2 – Invariance temporelle de la séquence des kicks dans le kicked rotor.

(au milieu d'une propagation libre), tandis que $\hat{V}_{1/2}$ correspond à une origine située à mi-chemin dans l'action d'un kick. Les symétries discrètes pertinentes dans ce cadre sont la parité $\hat{\mathcal{P}}$, l'inversion temporelle $\hat{\mathcal{T}}$, et leur combinaison $\hat{\mathbf{T}}_{\tau=0,a=0} := \hat{\mathbf{T}} := \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{T}}$.

Pour des systèmes sans spin, $\hat{\mathcal{T}}$ se réduit à l'opérateur de conjugaison complexe $\hat{K}_x$ dans la base des positions, et $\hat{\mathbf{T}}$ est représenté par $\hat{K}_p$ dans la base des impulsions.

Les opérateurs $\hat{U}_{1/2}$ et $\hat{V}_{1/2}$ (voir aussi figure 3.3) possèdent explicitement cette symétrie $\hat{\mathbf{T}}$. On peut vérifier directement que :

$$\begin{aligned}\hat{K}_p\hat{U}_{1/2}\hat{K}_p &= \hat{K}_p e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}} e^{-\mathrm{i}\frac{K}{k}\cos\hat{x}} e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}}\hat{K}_p \\ &= e^{\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}} e^{\mathrm{i}\frac{K}{k}\cos\hat{x}} e^{\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}} \\ &= \hat{U}_{1/2}^{\dagger}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

La symétrie $\hat{\mathbf{T}}$ impose des contraintes sur les états propres $|\varphi_a\rangle$ des opérateurs de Floquet $\hat{U}_{1/2}$ et $\hat{V}_{1/2}$, à savoir : $\varphi_a(p)$ sont réels et symétriques dans la base des positions ($\varphi_a(-x) = \varphi_a(x)$)[160].

On peut également vérifier que l'opérateur de Floquet $\hat{U}_0$ du QKR n'est pas $\hat{\mathbf{T}}$-symétrique car $\hat{K}_p\hat{U}_0\hat{K}_p = \hat{U}_{\text{Kick}}^{\dagger}\hat{U}_{\text{Prop}}^{\dagger} \neq \hat{U}_0^{\dagger}$. Cependant, on peut introduire un nouvel opérateur anti-unitaire $\hat{\Theta} = \hat{U}_{\text{Kick}}^{\dagger}\hat{K}_p$, et montrer que $\hat{\Theta}^{-1}\hat{U}_0\hat{\Theta} = \hat{U}_0^{\dagger}$. Ainsi, c'est $\hat{\Theta}$, et non $\hat{\mathbf{T}}$ seul, qui joue ici le rôle d'opérateur d'inversion temporelle.

Pour cette raison, dans l'analyse des symétries du kicked rotor, il est préférable d'utiliser les opérateurs d'évolution symétriques $\hat{U}_{1/2}$ et $\hat{V}_{1/2}$ plutôt que l'opérateur original $\hat{U}_0$, ce qui simplifie considérablement le traitement de la symétrie par inversion temporel.

Ainsi, d'après les considérations précédentes, on peut classer le système (2.28) dans la classe de symétrie **orthogonale**, puisque l'hamiltonien vérifie la relation

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{H}(\hat{x},\hat{p},t)\hat{\mathbf{T}} = \hat{H}(-\hat{x},\hat{p},-t), \tag{3.50}$$

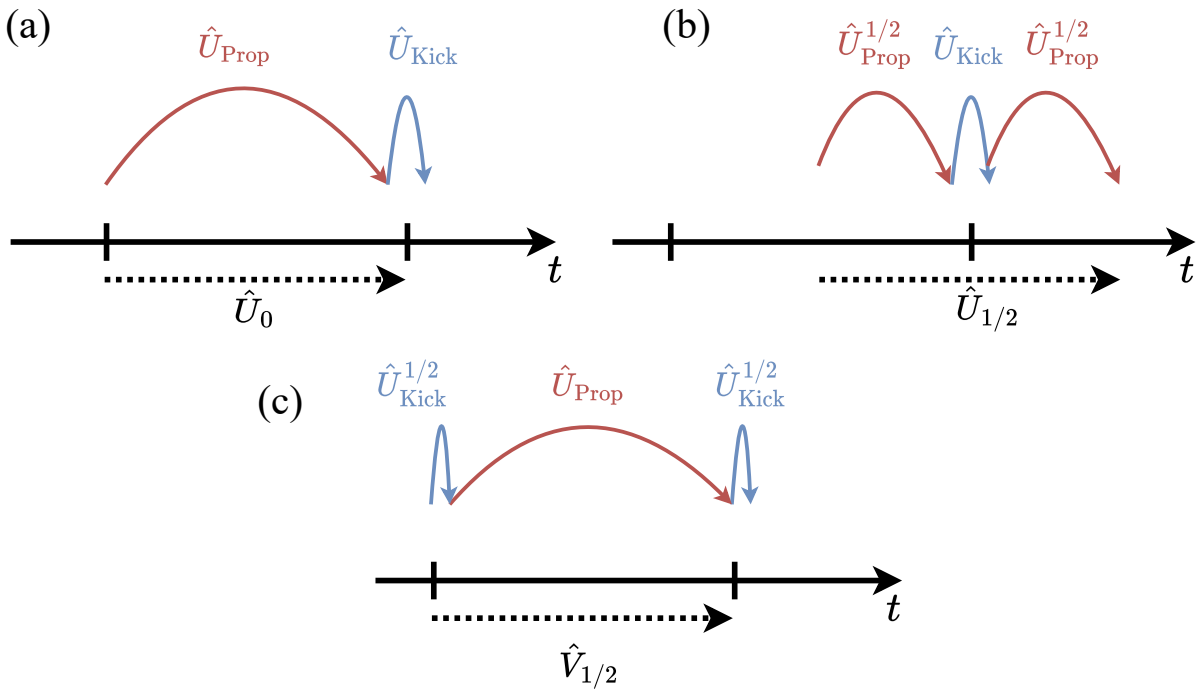


FIGURE 3.3 – **Opérateurs d'évolution** – Trois opérateurs d'évolution de Floquet différents sont considérés. Leur représentation schématique est donnée ci-dessus sur une ligne de temps où les repères indiquent les kicks appliqués aux temps entiers. (a) L'opérateur d'évolution $\hat{U}_0 = \hat{U}_{\text{Prop}}\hat{U}_{\text{Kick}}$ correspond à une évolution libre pendant une période suivie d'un kick complet. (b) L'opérateur $\hat{U}_{1/2} = \hat{U}^{1/2}_{\text{Prop}}\hat{U}_{\text{Kick}}\hat{U}^{1/2}_{\text{Prop}}$ utilise deux demi-évolutions libres encadrant un kick complet. (c) L'opérateur $\hat{V}_{1/2} = \hat{U}^{1/2}_{\text{Kick}}\hat{U}_{\text{Prop}}\hat{U}^{1/2}_{\text{Kick}}$ consiste en une évolution libre complète encadrée par deux demi-kicks de force réduite $K/2$. Cette figure est fortement inspirée de [160].

ce qui reflète une invariance sous inversion temporelle (au sens de l'opérateur généralisé $\hat{\mathbf{T}}$). En termes d'opérateurs de Floquet symétrisés — que ce soit $\hat{U}_{1/2}$ (symétrisation par la propagation libre) ou $\hat{V}_{1/2}$ (symétrisation par les kicks) — cette symétrie se traduit par :

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{U}_{1/2}\hat{\mathbf{T}} = \hat{U}^{\dagger}_{1/2} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{V}_{1/2}\hat{\mathbf{T}} = \hat{V}^{\dagger}_{1/2}, \tag{3.51}$$

avec la condition $\hat{\mathbf{T}}^2 = +\hat{1}$, caractéristique de la classe orthogonale (AI) dans la classification de Wigner-Dyson.

La symétrie antiunitaire – typiquement l'invariance sous l'opération conjointe de parité et de renversement du temps (symétrie $\hat{\mathbf{T}}$) – joue un rôle crucial dans la dynamique du kicked rotor quantique sans spin. Il a été montré que briser cette symétrie modifie en profondeur la localisation dynamique, en particulier en augmentant la longueur de localisation d'environ un facteur deux lorsque l'invariance $\hat{\mathbf{T}}$ est est brisée [158].

Pour briser cette symétrie, il existe plusieurs moyens théoriques et expérimentaux :

— **Brisure de l'invariance spatiale** : une asymétrie introduite dans le potentiel de

kick brise la symétrie de parité, levant ainsi l'invariance $\hat{\mathbf{T}}$ et engendrant un courant dirigé de type *ratchet* dans la dynamique classique [161].

— **Champ magnétique effectif** : l'application d'un champ magnétique (ou d'un champ de jauge synthétique en expérience) brise explicitement l'invariance par renversement du temps [9, 162].

— **Modulation temporelle des kicks** : La modulation d'amplitude de kick ou de phase — contrairement à une séquence strictement identique à chaque période — constitue un mécanisme pertinent pour briser l'invariance globale par renversement temporel et a été exploitée expérimentalement par l'équipe de Lille. Ce type de modulation temporelle (de phase ou d'amplitude) brise l'équivalence illustrée en figure 3.3 pour le QKR standard, rendant la séquence de kicks non symétrique par renversement du temps et détruisant ainsi la symétrie antiunitaire $\hat{\mathcal{T}}$. Un tel mécanisme permet ainsi de faire passer le système de la classe de symétrie orthogonale à la classe unitaire. Pour une analyse détaillée de ces mécanismes, le lecteur est invité à consulter [163], où ces effets sont étudiés à la fois numériquement et expérimentalement dans des systèmes de type kicked rotor modulé en phase ou en amplitude.

La mise en œuvre de ces brisures de symétrie antiunitaires dans le QKR sans spin prépare ainsi le terrain pour le cas du QKR *avec* spin. En effet, l'introduction du spin (un degré de liberté interne supplémentaire) et des modulations temporelles ouvre la voie à de nouvelles possibilités d'ingénierie des symétries et de contrôle de la localisation, possibilités qui seront explorées dans les section suivantes.

3.3.2 Cas avec spin

L'introduction du spin dans le modèle du Kicked Rotor Quantique, notamment pour un spin 1/2, représente une extension significative. Elle permet l'étude des phénomènes tels que la localisation d'Anderson au sein de la classe d'universalité symplectique, caractérisée par la brisure de la symétrie rotationnelle du spin. Le premier modèle du kicked rotor avec spin 1/2 a été introduit par Scharf [159], et a ensuite été exploré dans divers travaux théoriques ultérieurs [164-171].

Parmi les différents modèles proposés dans la littérature, nous avons choisi d'illustrer les propriétés du kicked rotor en présence d'un couplage spin-orbite à travers le modèle étudié dans [118, 164], que nous désignerons dans cette thèse sous le nom de modèle TBS (Thaha–Blümel–Smilansky). Ce modèle présente une structure particulièrement intéressante, car il permet, selon les valeurs discrètes de certains paramètres internes, de faire passer le système d'une classe de symétrie de Dyson–Wigner à une autre — en particulier les classes orthogonale, unitaire et symplectique. Le Hamiltonien du modèle s'écrit comme suit :

$$\hat{H}_{\mathrm{TBS}}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + k\left[\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right]\sum_n \delta(t-n), \tag{3.52}$$

Cette forme a été choisie dans le but de maintenir constantes les propriétés classiques de diffusion du système lors d'un changement des paramètres m et n qui contrôlent explici-

tement la brisure de symétrie du modèle. Ainsi, comme le soulignent les auteurs [118, 164], il est possible de faire passer le système d'une classe de symétrie de Dyson–Wigner à une autre — orthogonale, unitaire ou symplectique — tout en conservant un cadre dynamique classique inchangé. Cette construction permet d'isoler les effets spécifiquement quantiques liés aux symétries anti-unitaires, et constitue un cadre particulièrement adapté pour l'étude des transitions de symétrie dans des systèmes quantiques chaotiques.

Dans le cas général où $(m;n) \neq (0;0)$, nous avons défini dans la section 3.1 la forme de l'opérateur de renversement du temps adapté à un système comportant un spin. Étant donné que nous considérons ici une particule de spin 1/2, l'opérateur de spin est donné par $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y$. Par ailleurs, comme discuté dans la sous-section 3.3.1, le système possède une invariance par translation spatiale périodique ; par conséquent, l'opérateur de renversement du temps doit être complété par un opérateur de parité spatiale. On définit donc l'opération de renversement temporel généralisée $\hat{\mathbf{T}}$ [2] :

$$\hat{\mathbf{T}} := e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\hat{\sigma}_y}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{K}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_y\hat{K}_p, \tag{3.53}$$

L'action de $\hat{\mathbf{T}}$ sur les opérateurs du système est donnée par :

$$\hat{\mathbf{T}}\begin{cases} \hat{x} \to -\hat{x}, \\ t \to -t, \\ \hat{p} \to \hat{p}, \\ \hat{\sigma}_j = -\hat{\sigma}_j\ ,\ j \equiv (x,y,z), \end{cases} \tag{3.54}$$

Il est alors aisé de vérifier que le Hamiltonien $\hat{H}_{\mathrm{TBS}}(t)$ vérifie la relation :

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{H}_{\mathrm{TBS}}(t)\hat{\mathbf{T}} = \hat{H}_{\mathrm{TBS}}(-t), \qquad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{T}}^2 = -\hat{1}, \tag{3.55}$$

Cette propriété se traduit, au niveau des opérateurs de Floquet symétrisés (que ce soit en kicks ou en propagation libre), par les relations suivantes :

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{U}_{1/2}\hat{\mathbf{T}} = \hat{U}_{1/2}^{\dagger}, \qquad \hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{V}_{1/2}\hat{\mathbf{T}} = \hat{V}_{1/2}^{\dagger}. \tag{3.56}$$

Rappelons que ces deux versions symétrisées de l'opérateur de Floquet sont définies par :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\mathrm{Prop}} &= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}\hat{1}_2\right) \\ \hat{U}_{\mathrm{Kick}} &= \exp\left\{-\mathrm{i}\frac{k}{k}\left[\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Cela montre que l'opérateur de Floquet est invariant par une symétire anti-unitaire de carré -1, on peut donc classer le système décrit par (3.52) dans la classe de symétrie

2. Il convient de préciser que le choix du facteur de phase $\mathrm{i}\hat{\sigma}_y$ relève d'une convention. Le choix opposé $-\mathrm{i}\hat{\sigma}_y$ est également possible et conduit à une définition équivalente de l'opérateur de renversement temporel.

symplectique.

Considérons maintenant le cas particulier où $m = 0$ et $n \neq 0$. Dans ce cas, le Hamiltonien (3.52) se simplifie et devient :

$$\hat{H}_{\mathrm{TBS}}^{(m=0)}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + k\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x\right]\sum_n \delta(t-n), \tag{3.58}$$

Le système décrit par (3.58) appartient à la classe de symétrie unitaire. Pourquoi ? Deux arguments distincts permettent de justifier cette classification.

Tout d'abord, dans la représentation où $\hat{\sigma}_x$ est diagonale, ce Hamiltonien se décompose en deux systèmes sans spin indépendants associés aux composantes up et down :

$$\hat{H}_{\uparrow,\downarrow}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + k\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(\hat{x}) \pm \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(2\hat{x})\right]\sum_n \delta(t-n), \tag{3.59}$$

Ce modèle correspond exactement à celui étudié dans [158], où il a été démontré, à l'aide d'arguments semi-classiques appuyés par des résultats numériques, que le système appartient bien à la classe unitaire.

Le deuxième argument repose sur l'analyse des symétries. Bien que le système (3.58) soit invariant par renversement du temps— via l'opérateur $\hat{\mathbf{T}}$ défini en (3.54) il n'appartient pas à la classe symplectique. En effet, il existe une **symétrie géométrique** unitaire supplémentaire représentée par l'opérateur $\hat{R}_x = \mathrm{i}\hat{\sigma}_x$ qui vérifie :

$$[\hat{H}_{\mathrm{TBS}}^{(m=0)}(t), \hat{R}_x] = 0, \qquad \hat{R}_x^2 = -\hat{1}, \tag{3.60}$$

Cette symétrie commute également avec l'opérateur de renversement du temps. Comme cela est démontré dans [116], la coexistence d'un opérateur anti-unitaire avec $\hat{\mathbf{T}}^2 = -\hat{1}$ et d'une symétrie géométrique unitaire supplémentaire implique que le système ne peut appartenir à la classe symplectique. Il est donc correctement classé dans la classe de symétrie unitaire (voir annexe B).

Considérons maintenant le cas $n = 0$ et $m \neq 0$. Dans cette configuration, le Hamiltonien (3.52) se réduit à :

$$\hat{H}_{\mathrm{TBS}}^{(n=0)}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + k\left[\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right]\sum_n \delta(t-n), \tag{3.61}$$

Dans la représentation standard où $\hat{\sigma}_z$ est diagonale, ce Hamiltonien se décompose en deux Hamiltoniens de kicked rotor sans spin, chacun présentant un potentiel simplement décalé en phase ce qui ne modifie pas la classe de symétrie. Le système appartient donc à la classe orthogonale. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\uparrow,\downarrow}(t) &= \frac{\hat{p}^2}{2} + k\left[\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cos(\hat{x}) \mp \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin(\hat{x})\right]\sum_n \delta(t-n) \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2} + k\cos\left(\hat{x} \mp \frac{m\pi}{2}\right)\sum_n \delta(t-n),\end{aligned} \tag{3.62}$$

Ce résultat peut également être justifié par une analyse de symétrie. Bien que le système (3.61) soit invariant par renversement du temps $\hat{\mathbf{T}}$, avec $\hat{\mathbf{T}}^2 = -\hat{1}$, il n'appartient pas à la classe symplectique en raison de la présence de **deux symétries géométriques** unitaires supplémentaires, adaptées à la forme du potentiel. Ces dernières s'écrivent

$$\hat{\mathcal{R}}_{(x_{2\phi})} \;=\; \mathrm{i}\,\hat{\sigma}_x\, e^{2\mathrm{i}\phi\,\hat{p}\,\hat{\sigma}_z}, \qquad \hat{\mathcal{R}}_z \;=\; \mathrm{i}\,\hat{\sigma}_z, \tag{3.63}$$

où ϕ est défini par la réécriture du potentiel de kicks (voir ci-dessous). L'opérateur $e^{2\mathrm{i}\phi\,\hat{p}\,\hat{\sigma}_z}$ est une translation en position conditionnée par la composante $\hat{\sigma}_z$ du spin : il translate $\hat{x}$ de $+2\phi$ pour $\uparrow$ et de -2ϕ pour $\downarrow$. En particulier, sur un spinor $\Psi(x) = (\psi_\uparrow(x), \psi_\downarrow(x))^T$ on a

$$\left(e^{2\mathrm{i}\phi\,\hat{p}\,\hat{\sigma}_z}\Psi\right)(x) = \begin{pmatrix}\psi_\uparrow(x+2\phi)\\ \psi_\downarrow(x-2\phi)\end{pmatrix},$$

Ces opérateurs vérifient les relations suivantes :

$$[\hat{\mathcal{R}}_{(x_{2\phi},z)}, \hat{H}^{(n=0)}_{\mathrm{TBS}}(t)] = 0, \qquad [\hat{\mathcal{R}}_{(x_{2\phi},z)}, \hat{\mathbf{T}}] = 0, \qquad \hat{\mathcal{R}}^2_{x_{2\phi}} = \hat{\mathcal{R}}^2_z = -\hat{1}, \qquad \{\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}, \hat{\mathcal{R}}_z\} = 0, \tag{3.64}$$

Pour le vérifier il est commode d'écrire l'Hamiltonien (3.61) sous la forme simplifiée

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2}\,\hat{1}_2 + k'\cos\!\left(\hat{x}\hat{1}_2 - \phi\hat{\sigma}_z\right)\sum_n \delta(t-n), \tag{3.65}$$

avec

$$k' = k\cos\!\left(\tfrac{m\pi}{2}\right)\cos\!\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\tan\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right)^2}, \qquad \phi = \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right). \tag{3.66}$$

Comme cela est expliqué en détail dans [116] (voir annexe B), la coexistence de telles symétries géométriques avec une symétrie anti-unitaire implique que le système relève de la classe orthogonale, et non symplectique.

Il peut s'avérer utile, pour certaines analyses, de réécrire l'Hamiltonien (3.52) sous la forme suivante [3] :

3. Cet Hamiltonien peut se mapper sur un modèle de type Anderson. Voir l'annexe B pour les détails des calculs

$$\hat{H}_{\mathrm{TBS}}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\,\hat{1}_2 + K\left(\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \frac{\mu}{2}\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \epsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right)\sum_n \delta(t-n), \tag{3.67}$$

La correspondance entre cette notation (K,μ,ϵ) et les paramètres (k,m,n) employés dans (3.52) donnée par :

$$\begin{aligned} K &= k\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \\ \mu &= \frac{k}{K}\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), \\ \varepsilon &= \frac{k}{K}\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.68}$$

L'inverse de cette transformation, soit le passage de (K,μ,ε) à (k,m,n), s'écrit :

$$\begin{aligned} k &= K\sqrt{1+\mu^2+\varepsilon^2}, \\ m &= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\mu^2}}\right), \\ n &= \frac{2}{\pi}\arctan(\mu), \end{aligned} \tag{3.69}$$

Cette reformulation a été choisie de manière à minimiser la dépendance de la constante de diffusion classique vis-à-vis des paramètres de brisure de symétrie [158]. En effet, pour comparer de façon significative les longueurs de localisation entre différentes classes de symétrie, il est essentiel que le transport classique sous-jacent reste inchangé. Si la constante de diffusion D variait fortement avec ces paramètres, il serait impossible de distinguer si les modifications observées dans la localisation proviennent de la symétrie quantique ou simplement d'une dynamique classique différente. Par ailleurs, cette reformulation permet de faire apparaître certaines limites particulières dans lesquelles le Hamiltonien se réduit à des variantes bien connues du kicked rotor, déjà étudiées dans la littérature.

Une remarque importante à souligner ici est que, dans le secteur de spin de l'Hamiltonien (3.67), la présence conjointe des termes en $\hat{\sigma}_x$ et $\hat{\sigma}_z$ avec des dépendances distinctes en $\hat{x}$ joue un rôle central dans la nature du couplage spin-position, autrement dit, l'importance du terme en $\sin(2\hat{x})$. Pour analyser finement cette structure, il est utile de reformuler le potentiel de couplage sous une forme vectorielle mettant en évidence l'action d'un pseudo-champ magnétique sur le spin :

$$V_{\mathrm{spin}}(\hat{x}) = K\left[\frac{\mu}{2}\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right] \equiv \vec{B}(\hat{x})\cdot\hat{\vec{\sigma}}\,, \tag{3.70}$$

où $\hat{x}$ désigne l'opérateur de position angulaire. Le vecteur $\vec{B}(\hat{x})$ est appelé *pseudo-champ magnétique* car il agit sur le spin comme un champ effectif. Il est défini par :

$$\vec{B}(\hat{x}) = (B_x(\hat{x}),\,0,\,B_z(\hat{x})), \qquad B_x = \frac{\mu K}{2}\sin(2\hat{x}), \qquad B_z = K\varepsilon\sin(\hat{x}), \tag{3.71}$$

Dans la base position $|x\rangle$, l'opérateur $\hat{x}$ devient un paramètre réel x, et le Hamiltonien agit comme un opérateur de spin dépendant de la position :

$$\vec{B}(x) = \left(\tfrac{\mu K}{2}\sin(2x),\ 0,\ K\varepsilon\sin(x)\right), \tag{3.72}$$

La direction locale de ce champ est caractérisée par l'angle

$$\varphi(x) = \arctan(B_x/B_z). \tag{3.73}$$

Lorsque la composante transverse du pseudo-champ est proportionnelle à $\sin x$, c'est-à-dire $B_x(x) = (\mu K/2)\sin x$ et $B_z(x) = K\varepsilon\sin x$, le rapport $B_x/B_z = \mu/2\varepsilon$ reste constant, indépendamment de la position x. Dans ce cas, le vecteur $\vec{B}(x)$ oscille uniquement en amplitude, sans changer de direction : il reste colinéaire à un vecteur fixe $\vec{n} = \left(\frac{\mu}{2}, 0, \varepsilon\right)/\sqrt{(\mu/2)^2+\varepsilon^2}$. Il est alors possible de réaliser une rotation globale dans l'espace des spins, $\hat{U} = \exp(-i\alpha\hat{\sigma}_y)$, avec $\tan\alpha = \mu/(2\varepsilon)$, afin d'aligner $\vec{n}$ sur l'axe z. Ce changement de base permet de rendre le Hamiltonien diagonal en $\hat{\sigma}_z$, c'est-à-dire de décomposer le système en deux kicked rotors indépendants, chacun appartenant à la classe de symétrie orthogonale. En revanche, si l'on choisit une composante transverse $B_x(x) = (\mu K/2)\sin(2x)$, le rapport $B_x/B_z = (\mu/\varepsilon)\cos x$ devient une fonction de x ; l'orientation du pseudo-champ $\vec{B}(x)$ varie alors continûment dans le plan (x,z) en fonction de la position. Il n'existe plus de rotation globale unique permettant de diagonaliser simultanément les matrices de Pauli $\hat{\sigma}_x$ et $\hat{\sigma}_z$. Par conséquent, le spin ne peut pas être découplé de la variable de position x : les deux degrés de liberté sont dynamiquement entremêlés. Le système appartient alors à la classe symplectique.

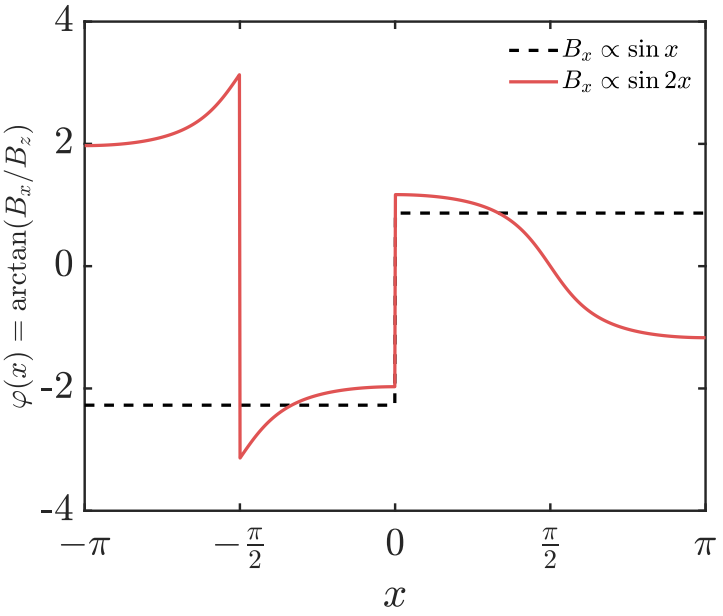


FIGURE 3.4 – Angle $\varphi(x) = \arctan(B_x/B_z)$ pour deux types de couplage : $B_x \propto \sin x$ (courbe pointillée) et $B_x \propto \sin 2x$ (courbe pleine), avec $B_z \propto \sin x$ dans les deux cas. Les paramètres sont fixés à $\mu = 0.125$, $\varepsilon = 0.295$.

La figure 3.4 illustre visuellement la différence de comportement entre les deux cas. Elle représente l'angle $\varphi(x) = \arctan(B_x/B_z)$ en fonction de la position x, pour deux choix de couplage transverse : $B_x \propto \sin x$ (cas simplifié) et $B_x \propto \sin 2x$ (cas du modèle symplectique).

Dans le premier cas (courbe pointillée), on observe que $\varphi(x)$ est constant par morceaux, avec des discontinuités de 0 aux points où $\sin x$ change de signe. Ces sauts sont des effets purement géométriques dus à la définition de arctan via atan2 : ils n'affectent pas la direction physique réelle du champ, qui reste constante.

Dans le second cas (courbe pleine), l'angle $\varphi(x)$ varie continûment sur tout l'intervalle $[-\pi, \pi]$, ce qui reflète le fait que l'orientation du champ effectif $\vec{B}(x)$ tourne dynamiquement dans le plan (x, z). Ce comportement rend impossible toute diagonalisation globale du Hamiltonien, et traduit la présence d'un couplage irréductible entre les degrés de liberté de spin et de position.

3.4 Signatures numériques des classes de symétries

Dans cette section, nous nous intéressons à des signatures numériques et d'intérêt expérimental permettant d'identifier la classe de symétrie (AI, A, AII) d'un système chaotique quantique. Pour les illustrer, nous utiliserons le modèle TBS qui, selon le choix des paramètres de brisure de symétrie, permet d'accéder aux classes orthogonale, unitaire et symplectique.

3.4.1 Signature 1 : Effets de (anti)localisation et probabilité de retour à l'origine

Le Kicked Rotor présenté au chapitre 1 est étudié depuis de nombreuses années dans le contexte de la localisation d'Anderson, notamment dans le régime appelé « localisation forte ». Ce régime se caractérise par une suppression complète du transport d'un paquet d'ondes dans un milieu désordonné, ce qui, dans le cas du Kicked Rotor, se traduit par une saturation de l'énergie cinétique. L'analyse de cette saturation en fonction des paramètres du système a permis d'observer expérimentalement la transition d'Anderson, conduisant notamment à la première détermination expérimentale de l'exposant critique [40], ainsi qu'à la mise en évidence de son universalité [81]. Ces études ont également permis de vérifier les prédictions de la théorie d'échelle à un paramètre [15, 54, 172].

Dans cette partie, nous étudions l'influence du couplage spin-orbite dans le modèle TBS, correspondant à un Kicked Rotor avec spin-1/2. Nous nous intéressons plus particulièrement au régime de localisation et d'antilocalisation faible, qui se manifeste bien avant la localisation forte. Ce régime se traduit principalement par des corrections quantiques à la diffusion initiale d'un paquet d'ondes évoluant dans un milieu désordonné. Des signatures expérimentales et numériques de ce régime existent déjà sur les fonctions d'onde atomiques dans des systèmes d'atomes froids [68]. Plus précisément, nous étudions ici un marqueur caractéristique qui dépend de la classe de symétrie du système. Lorsque le système appartient à la classe symplectique, le couplage spin-orbite entraîne

une réduction de la probabilité de retour à l'origine, appelée *anti-ERO* (Anti-Enhanced Return to the Origin). Inversement, lorsque le système appartient à la classe orthogonale (absence de couplage spin-orbite ou paramètres particuliers), il y a augmentation de cette probabilité, correspondant alors à un phénomène d'ERO [68]. Ces deux régimes, respectivement appelés antilocalisation faible (classe symplectique) et localisation faible (classe orthogonale), peuvent ainsi être clairement distingués sur la distribution en impulsion par la présence d'un anti-ERO ou d'un pic (ERO) au centre de la distribution.

Dans la suite de ce manuscrit, lorsque nous ferons référence à ce marqueur, nous utiliserons les acronymes ERO et anti-ERO, conformément à leur usage courant dans la littérature.

Il est bien établi que le Kicked Rotor constitue un système désordonné, équivalent au modèle d'Anderson, dans lequel la localisation forte — ou antilocalisation forte selon la classe de symétrie — se manifeste dans l'espace des impulsions. Il est donc naturel de supposer que ce système présente également des phénomènes de localisation faible ou d'antilocalisation faible, analogues à ceux du modèle d'Anderson. Cependant, dans le cas du modèle d'Anderson, les signatures de type ERO ou anti-ERO apparaissent dans l'espace désordonné, c'est-à-dire dans l'espace des positions. Par conséquent, dans le Kicked Rotor, dont l'espace désordonné est l'espace des impulsions, on s'attend à observer les phénomènes d'ERO et d'anti-ERO dans cet espace. De manière réciproque, les effets de type CBS (Coherent Backscattering) ou anti-CBS apparaissent dans l'espace des impulsions dans le modèle d'Anderson, tandis qu'ils se manifestent dans l'espace des positions dans le cas du Kicked Rotor. Ces correspondances entre les deux modèles sont synthétisées dans le tableau suivant :

	Modèle d'Anderson	**Kicked Rotor**
Espace des positions	ERO / anti-ERO	CBS / anti-CBS
Espace des impulsions	CBS / anti-CBS	ERO / anti-ERO

Pour étudier numériquement ces phénomènes d'interférence quantique, et en particulier les signatures ERO et d'anti-ERO en fonction de la classe de symétrie du système, nous avons recours à un modèle de type *Random quantum Kicked Rotor* (RQKR).

Les phases dynamiques ε_p, bien que déterministes par construction, possèdent des propriétés pseudo-aléatoires et se distribuent uniformément dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ lorsque le paramètre β est varié, sous la condition que k soit incommensurable avec 2π. Cette nature pseudo-aléatoire soulève néanmoins une difficulté pratique dans l'étude du QKR : bien que les phénomènes observés présentent une forme de désordre intrinsèque, celui-ci ne peut pas être extrait directement puisque le modèle reste fondamentalement déterministe. Ainsi, pour révéler explicitement ce caractère quasi-aléatoire, il est nécessaire d'examiner des observables physiques spécifiques ou de choisir soigneusement les conditions initiales du système.

Un autre problème lié à cette situation apparaît lorsqu'on analyse les symétries, notamment l'invariance par renversement temporel, car cette transformation envoie $p \to -p$ et

$\beta \to -\beta$. Or l'évolution du kicked rotor quantique conserve la quasi-impulsion β il peut donc en résulter un mélange de dynamiques relevant de classes de symétrie différentes.

Pour pallier ces difficultés pratiques, une stratégie proposée dans les références [136, 137, 173-175] consiste à introduire un modèle modifié : le kicked rotor quantique avec désordre (RQKR). Ce dernier est défini en substituant au terme quadratique déterministe $\hat{p}^2/2\bar{k}$ une phase aléatoire $\alpha(p) = \sum_p \alpha_p |p\rangle\langle p|$, introduite directement dans la représentation en espace des impulsions. En d'autres termes, les phases dynamiques déterministes ε_p sont remplacées par de véritables phases aléatoires α_p.

Cette modification permet alors de définir clairement le désordre moyen comme une moyenne statistique sur ces phases aléatoires α_p. Une conséquence particulièrement intéressante de cette approche est la possibilité d'étudier deux formes de désordre distinctes : d'une part, un désordre pur en espace des impulsions (introduit directement par les phases aléatoires), et d'autre part, un désordre spatial partiel de type Anderson, comme discuté dans la littérature [141].

Dans la suite de ce travail, nous adopterons précisément cette approche et considérerons le RQKR en définissant l'opérateur d'évolution libre sous la forme $\hat{U}_{\text{Prop}} = \exp(-i\alpha)\hat{1}_2$, tout en conservant inchangé l'opérateur du kick $\hat{U}_{\text{Kick}}$. Ainsi, le paramètre β reste bien défini, garantissant que les propriétés de symétrie fondamentales du modèle initial soient intégralement préservées.

Enfin, notons que ce modèle présente l'avantage supplémentaire de restreindre le désordre exclusivement à l'espace des moments. Cette propriété contraste avec les approches classiques du désordre en physique quantique, où celui-ci affecte généralement la dynamique directement en espace des positions. Nous pouvons observer numériquement les manifestations caractéristiques du ERO et d'Anti-ERO en suivant la procédure détaillée dans l'annexe B. Pour réaliser la simulation numérique du modèle (3.67) dans le cas symplectique, nous considérons les paramètres suivants : $K = 49.288, \bar{k} = 1$, $\epsilon = 0.125$, $\mu = 0.295$, et un nombre total de 11 kicks. Nous effectuons une moyenne sur 10^5 réalisations des phases aléatoires α_p, et nous adoptons comme état initial une distribution en impulsion correspondant à une température nulle, modélisée par une gaussienne de largeur infiniment fine, c'est-à-dire une distribution delta pour la composante spin-up ($\psi_\uparrow(p, t = 0) = \delta(p = 0)$), tandis que la composante spin-down est initialement nulle ($\psi_\downarrow(p, t = 0) = 0$). La distribution obtenue est illustrée sur la figure 3.5. Nous y observons un pic orienté vers le bas en $p = 0$, dont la profondeur est égale à la moitié du fond diffusif de la distribution, constituant ainsi la signature de l'anti-ERO, c'est-à-dire une diminution de la probabilité de retour à l'origine d'un facteur approximativement égal à $-1/2$ [4]. Notons que le fond de la distribution présente une forme gaussienne caractéristique du régime diffusif étudié, correspondant à des temps courts devant le temps caractéristique de localisation.

Nous avons réalisé une simulation numérique en considérant initialement une distribu-

4. Une explication détaillée de ce comportement sera donnée ultérieurement dans le chapitre 5. Dans ce chapitre, nous nous limitons à l'étude numérique du phénomène.

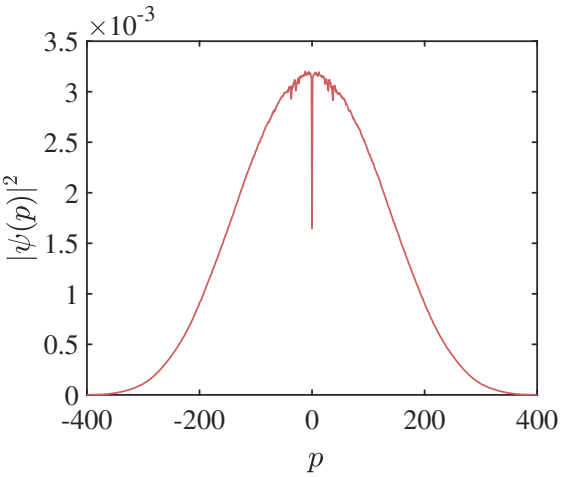


FIGURE 3.5 – Distribution en impulsion numérique pour une température initiale nulle ($T = 0\,\mu$K). On observe la présence d'un anti-ERO d'un facteur proche de $-1/2$. L'antilocalisation se traduit ici par une diminution de la probabilité de retour à l'origine.

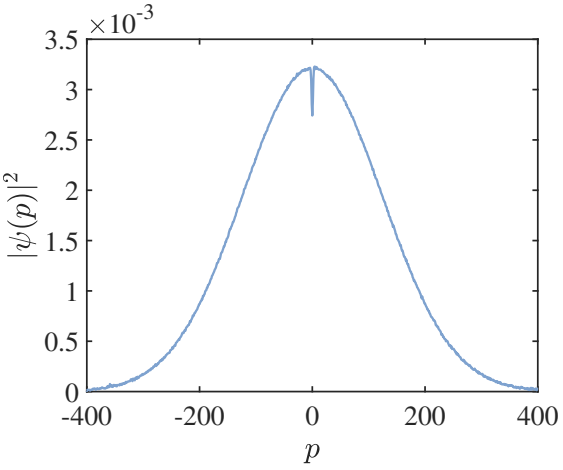


FIGURE 3.6 – Distribution en impulsion numérique pour une température initiale non nulle ($T = 2.4\,\mu$K). L'effet anti-ERO subsiste, avec une réduction approximative de la densité de probabilité en $p = 0$ d'un facteur $\sim -1/9$. Contrairement au cas $T = 0\,\mu$K, l'anti-ERO est ici fortement atténuée.

tion correspondant à une température nulle. Toutefois, dans les expériences utilisant des gaz d'atomes froids, la température des atomes n'est jamais strictement nulle, même si elle peut être très faible. Afin de prendre en compte cet effet dans nos simulations, nous avons modélisé l'état initial par une distribution gaussienne en impulsion de largeur finie, avec typiquement $\sigma = 1.65\,\hbar k$, ce qui correspond à la largeur thermique de la distribution d'impulsion pour une température $T = 2.4\,\mu$K. Cette distribution est appliquée de manière identique aux deux composantes de spin. La distribution obtenue dans ces conditions est représentée sur la figure 3.6. Nous constatons alors que la signature d'anti-ERO est fortement atténuée par cet effet de température. Cette réduction s'explique naturellement par le fait que la distribution initiale du système n'est plus un delta de Dirac, mais une gaussienne de largeur finie, ce qui conduit à une convolution de l'anti-ERO avec l'état initial. Par exemple, dans le cas du kicked rotor sans spin, appartenant à la classe de symétrie orthogonale, ce point rend l'observation expérimentale directe de ce phénomène particulièrement délicate. Une idée proposée pour rendre observable de l'ERO consiste à utiliser un Hamiltonien à deux périodes temporelles qui induit l'apparition d'un pic de ERO un kick sur deux [91]. Pour plus de détails, voir également [68, 163].

Lorsque $\mu = 0$ et $\varepsilon \neq 0$, le système appartient à la classe de symétrie orthogonale. Dans ce cas, on s'attend à observer des phénomènes de localisation faible [68]. La figure 3.7 montre la distribution en impulsion obtenue à partir d'un état initial localisé en $p = 0$ sur la première composante de spin (l'autre composante étant nulle). Dans le régime diffusif, on observe un pic ERO de de facteur deux en $p = 0$ comparé au fond de la gaussienne. En revanche, lorsque le système appartient à la classe de symétrie unitaire — c'est-à-dire pour $\varepsilon = 0$ et $\mu \neq 0$. Dans ce cas, la distribution en impulsion ne présente aucun pic

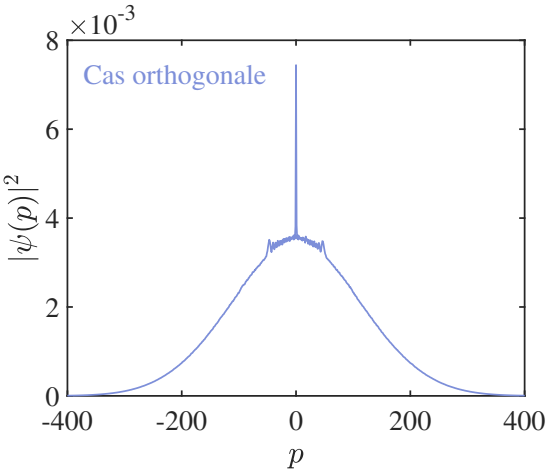


FIGURE 3.7 – Distribution en impulsion numérique après 11 kicks dans le régime diffusif. On observe un pic d'amplitude environ deux comparé au fond gaussien. Les paramètres utilisés sont : $K = 49.288, \bar{k} = 1$, $\varepsilon = 0.125$, $\mu = 0$. Une moyenne est effectuée sur 10^5 réalisations des phases aléatoires α_p.

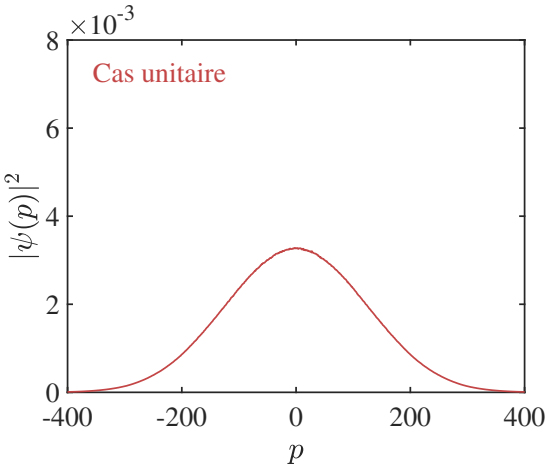


FIGURE 3.8 – Distribution en impulsion numérique après 11 kicks dans le régime diffusif. Aucun pic n'est observé. Les paramètres utilisés sont : $K = 49.288$, $\bar{k} = 1$, $\mu = 0.295$, $\epsilon = 0$. Une moyenne est effectuée sur 10^5 réalisations des phases aléatoires α_p.

particulier en $p = 0$ (voire figure 3.8), ce qui indique l'absence de toute interférence constructive ou destructive à l'origine d'un ERO ou d'un Anti-ERO.

En résumé, nous avons montré que, dans le régime diffusif, la nature du signal observé dépend de la classe de symétrie du système. Lorsqu'il appartient à la classe de symétrie symplectique, on observe un anti-ERO, caractérisé par un facteur négatif de $-1/2$ par rapport au fond gaussien, ce qui traduit la présence d'un phénomène d'antilocalisation faible. Dans le cas de la classe de symétrie unitaire, aucun comportement particulier n'est observé. En revanche, lorsque le système relève de la classe de symétrie orthogonale, on constate un ERO qui se manifeste par un pic de facteur deux par rapport au fond exponentiellement localisé— une signature typique de la localisation faible. L'explication détaillée de ces différents comportements sera développée dans le chapitre 5.

3.4.2 Signature 2 : Comportement de la fonction d'échelle $\beta(g)$ dans les trois classes de symétrie — modèle TBS.

Comme présenté dans le chapitre 1, la fonction d'échelle $\beta(g)$ est définie comme la dérivée logarithmique de la conductance g par rapport à la taille effective du système L : $\beta(g) = \mathrm{d}\ln g/\mathrm{d}\ln L$.

Dans le cadre du modèle du kicked rotor, la conductance g peut être reliée à $\langle p^2(t)\rangle$, ce qui permet de reformuler $\beta(g)$ sous la forme :

$$\beta(g) = 1 - \frac{2}{\mathrm{d}\ln\langle p^2\rangle_t/\mathrm{d}\ln t}, \tag{3.74}$$

Ainsi, à chaque instant t, on peut extraire une valeur de $L = \sqrt{\langle p^2 \rangle_t}$, et une conductance $g = \sqrt{\langle p^2 \rangle_t}/t$ [9, 90]. En traçant numériquement $\ln(g)$ en fonction de $\ln(L)$, puis en dérivant cette courbe, on obtient la fonction $\beta(g)$ correspondante. Rappelons que, dans une classe de symétrie donnée, la fonction $\beta(g)$ est universelle, mais sa forme dépend de la classe considérée. Son comportement asymptotique pour $1/g \ll 1$ est bien établi : la pente est négative dans la classe orthogonale, nulle dans la classe unitaire, et positive dans la classe symplectique avec une pente deux fois plus faible (en valeur absolue) que celle de la classe orthogonale. Ce dernier cas constitue la signature caractéristique de la faible antilocalisation.

Nous avons appliqué cette méthode au modèle TBS pour différentes valeurs des paramètres (K, μ, ϵ), choisies de sorte à placer le système successivement dans chacune des trois classes de symétrie de Dyson–Wigner : symplectique, unitaire, et orthogonale. Les résultats sont présentés dans la figure 3.9. On observe que les fonctions $\beta(g)$ ainsi obtenues suivent très bien les prédictions théoriques connues (représentées par les lignes pointillées et par les équations (1.31)), en particulier dans le régime $1/g < 0.5$. Cette correspondance confirme que le modèle TBS capture fidèlement les signatures caractéristiques des classes de symétrie dans le régime de transport quantique diffusif.

Lorsque $1/g$ dépasse environ 0.6, des écarts notables par rapport aux courbes théoriques apparaissent, nous pensons qu'elle provient de l'existence d'un terme correctif d'ordre supérieur, qui n'est pas connu explicitement à ce jour dans les expressions analytiques

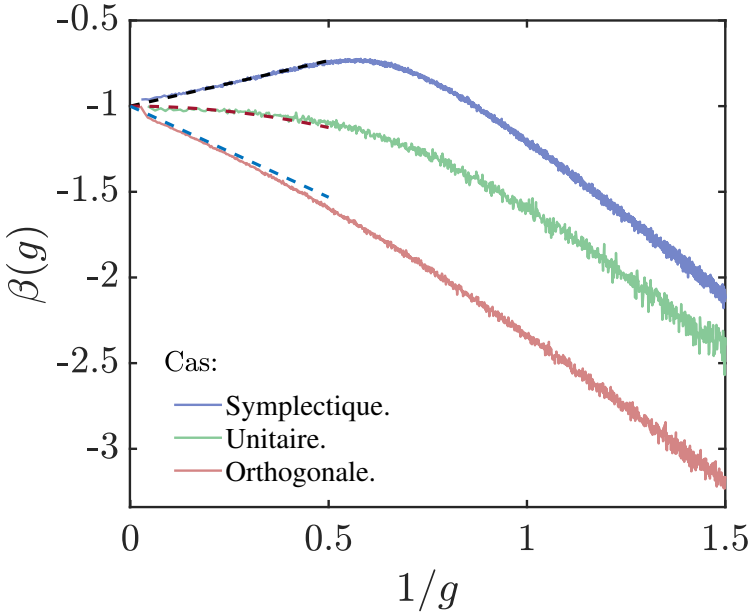


FIGURE 3.9 – Profil de la fonction d'échelle $\beta(g)$ calculée pour le modèle (3.67) dans trois classes de symétrie différentes (symplectique, unitaire, orthogonale), moyennée sur 10^4 réalisations du désordre. Les paramètres utilisés ici sont : $(K, \mu, \epsilon) = (49.229, 0.295, 0.125)$ pour la classe symplectique, $(25, 0.8, 0)$ pour la classe unitaire, et $(39.345, 0, 1)$ pour la classe orthogonale.

disponibles pour les classes de symétrie symplectique, unitaire et orthogonale [91]. Ce phénomène est cohérent avec les observations numériques et expérimentales réalisées dans des modèles du kicked rotor sans spin relevant des classes de symétrie orthogonale et unitaire [9].

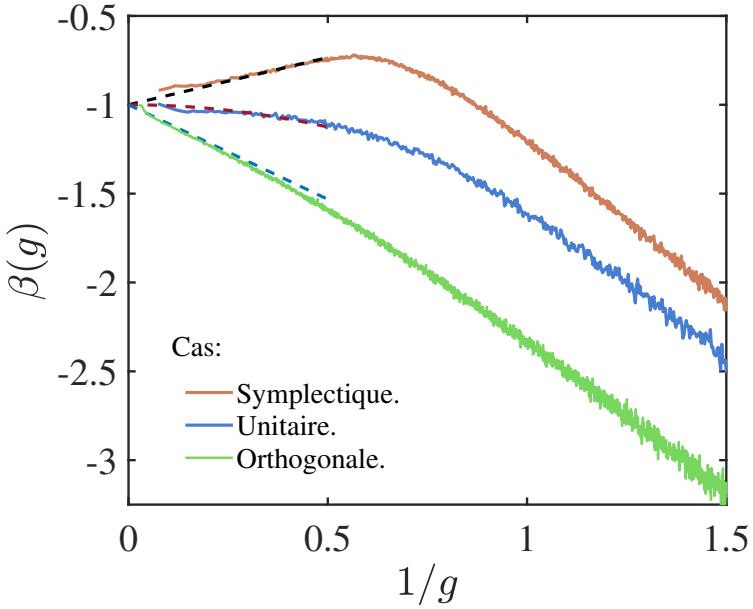


FIGURE 3.10 – Profil universel de la fonction d'échelle $\beta(g)$ obtenu pour différents jeux de paramètres (K, μ, ϵ) du modèle TBS (3.67), illustrant l'indépendance vis-à-vis des paramètres microscopiques. Les paramètres considérés sont les suivants : $(K, \mu, \epsilon) = (20, 0.5, 0.2)$ pour la classe symplectique, $(20, 0.5, 0)$ pour la classe unitaire, et $(20, 0, 0.2)$ pour la classe orthogonale.Pour chaque classe, les courbes obtenues coïncident avec celles de la figure 3.9.

Afin de vérifier numériquement le caractère universel de la fonction $\beta(g)$, c'est-à-dire son indépendance vis-à-vis des des paramètres microscopiques du système, nous avons répété cette analyse pour d'autres jeux de paramètres. Les résultats sont présentés dans la figure 3.10. On y observe que, malgré les variations des paramètres (K, μ, ϵ), les courbes $\beta(g)$ pour chaque classe de symétrie conservent leur forme caractéristique, en parfait accord avec les résultats de la figure 3.9. Cette robustesse confirme le caractère universel de la fonction d'échelle $\beta(g)$, et valide l'approche du modèle TBS comme plateforme numérique pour explorer les classes d'universalité du chaos quantique et de la localisation.

3.4.3 Signature 3 : Identification de la symétrie par l'analyse des statistiques des niveaux de l'opérateur de Floquet du modèle TBS

Dans cette section, nous présentons une autre méthode, similaire à celle utilisée dans [118, 164], pour caractériser la symétrie de l'Hamiltonien (3.67) en fonction des paramètres μ et ε. Pour cela, nous étudions numériquement les fluctuations spectrales de l'opérateur d'évolution sur une période (opérateur de Floquet). Nous construisons l'opérateur de Floquet $\hat{F}$ et discrétisons les espaces de position et d'impulsion à l'aide de $N = 128$

points de grille pour chaque composante de spin, ce qui conduit à une dimension totale de l'espace de Hilbert égale à $2N = 256$. Les états d'impulsion sont tronqués selon $p = -N/2, \ldots, N/2 - 1$.

Il est important de noter que la classification que nous venons de donner des propriétés statistiques du spectre n'est valable que si la taille de la base N est inférieure à la longueur de localisation ξ, c'est-à-dire si $N < \xi$. Ce n'est que dans ce cas que les états de Floquet sont corrélés entre eux et présentent une répulsion des niveaux. Par "corrélés", on entend ici que les états de Floquet se recouvrent significativement dans l'espace des impulsions : leurs fonctions d'onde interfèrent sur une même région, ce qui induit une interaction statistique entre leurs quasi-énergies, traduite par une répulsion des niveaux typique des ensembles de Dyson. Dans le cas opposé, où $N \gg \xi$, il existe des états propres localisés autour de centres séparés de plus que la longueur de localisation ξ, et les corrélations entre ces états sont alors exponentiellement faibles. Le recouvrement entre deux fonctions propres devient négligeable, les quasi-énergies se comportent comme des variables indépendantes, et la statistique devient de type Poissonienne. On s'attend donc à une statistique de Poisson pour les niveaux, indépendamment de la classe de symétrie considérée [118, 119]. Contrairement aux deux signatures précédentes (ERO/Anti-ERO et fonction $\beta(g)$), où nous avons utilisé le Random Kicked Rotor (RQKR) pour simuler un désordre effectif, ici nous utilisons le modèle déterministe : l'évolution libre est implémentée via l'opérateur $\hat{U}_{\text{Prop}}|m,\beta\rangle = \exp\left(-i\hbar(\beta+m)^2/2\right)\hat{1}_2|m,\beta\rangle$ [5], où β est la quasi-impulsion elle est uniformément distribués dans l'intervalle $[-1/2, 1/2[$. Les opérateurs de potentiel sont construits à partir de combinaisons de fonctions trigonométriques de $\hat{x}$ et de matrices de Pauli, et les transformées de Fourier sont utilisées pour passer entre les représentations position et impulsion. L'opérateur de Floquet $\hat{F}$ est alors un bloc $2N \times 2N$, constitué de quatre sous-blocs correspondant aux composantes spin.

Nous avons échantillonné un grand nombre de valeurs aléatoires de β, tirées uniformément dans l'intervalle $[-1/2, 1/2)$. Concrètement, nous utilisons 100 itérations de désordre et, à chaque itération, 1000 réalisations indépendantes, soit au total 10^5 valeurs de β. Pour chaque réalisation, nous diagonalison l'opérateur de Floquet et obtenons ses valeurs propres $e^{-i\epsilon_n}$ (avec $\epsilon_n \in [0, 2\pi)$ les quasi-énergies), que nous trions pour calculer les espacements normalisés $s_n = \frac{\epsilon_{n+1}-\epsilon_n}{\delta}$ où δ est l'espacement moyen du *spectre considéré* (recalculé pour chaque réalisation avant agrégation). Lors de l'analyse statistique des espacements entre quasi-énergies, on s'attend à une accumulation des valeurs proches de zéro en raison de la dégénérescence de Kramers. Pour éviter de compter deux fois chaque paire dégénérée, ce qui entraînerait une accumulation excessive proche de zéro, nous sélectionnons une valeur propre sur deux. Cette méthode permet d'obtenir une distribution des espacements qui reflète plus fidèlement les fluctuations du spectre en quasi-énergie et qui s'aligne sur les ensembles circulaires de Dyson-Wigner [6].

5. Nous avons vérifié que l'utilisation du RQKR conduit aux mêmes statistiques spectrales, ce qui confirme que cette approximation n'altère pas les propriétés spectrales de l'opérateur de Floquet.

6. Dans le cas du kicked rotor, le système est périodique dans le temps ; il est donc naturellement décrit non pas par un Hamiltonien statique, mais par un opérateur de Floquet unitaire qui gouverne l'évolution sur une période. Par conséquent, l'analyse statistique du spectre ne porte pas sur des niveaux d'énergie réels, comme dans les systèmes fermés modélisés par les ensembles gaussiens de Dyson-Wigner (GOE, GUE,

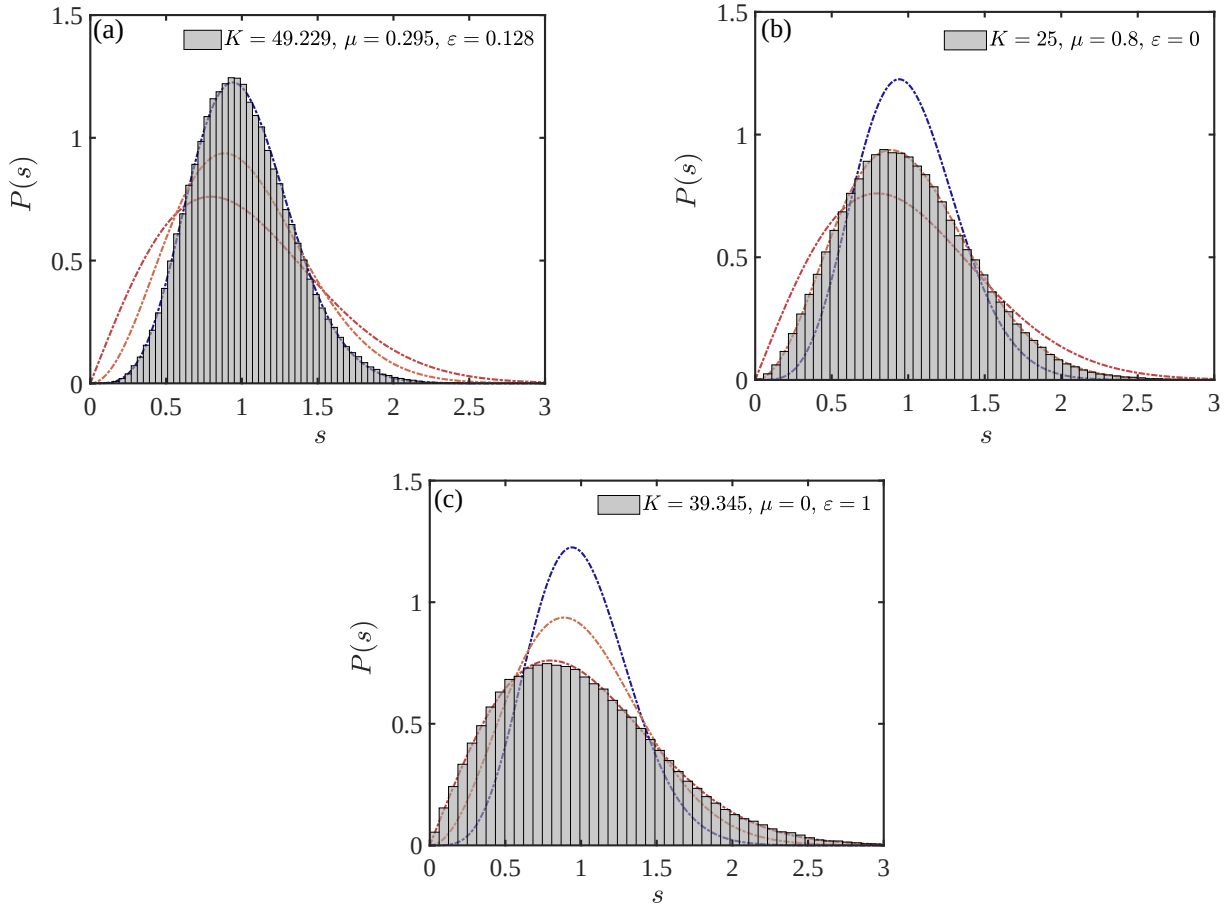


FIGURE 3.11 – Histogrammes des espacements de niveaux normalisés pour les trois cas (symplectique, unitaire, orthogonal) du modèle (3.67), comparés aux distributions théoriques (1.32).

La distribution $P(s)$ des espacements normalisés est obtenue en construisant un histogramme de l'ensemble des s_n extraits sur l'ensemble des réalisations, comme illustré dans la Figure 3.11. La fonction $P(s)$ présente une répulsion des niveaux qui correspond bien aux trois ensembles circulaires de Dyson-Wigner (symplectique : CSE, unitaire : CUE, orthogonal : COE) décrits par les équations de la relation (1.32) [115, 116].

De plus, nous avons calculé le rapport des espacements de niveaux consécutifs $\tilde{r}_n$:

$$\tilde{r}_n = \frac{\min(s_n, s_{n-1})}{\max(s_n, s_{n-1})} = \min\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}, \frac{s_{n-1}}{s_n}\right), \tag{3.75}$$

Cette quantité présente l'avantage de ne pas nécessiter de dépliement du spectre. En effet, le dépliement consiste en général à uniformiser la densité locale d'états, afin de rendre les espacements s_n comparables sur l'ensemble du spectre. Or, ce processus peut s'avérer délicat ou imprécis, en particulier pour les systèmes de type Floquet ou en présence

GSE), mais sur des *quasi-énergies*, c'est-à-dire des phases ε_n telles que les valeurs propres de l'opérateur de Floquet soient de la forme $e^{-i\varepsilon_n}$. Ce type de spectre relève des *ensembles circulaires de Dyson* (COE, CUE, CSE), qui constituent les analogues unitaires des ensembles gaussiens pour les systèmes périodiques.

Classe	$\langle \tilde{r}_n \rangle$ (simulation)	$\langle \tilde{r}_n \rangle$ (théorique) [176]
CSE	0.6741 ± 0.0001	0.6744
CUE	0.6011 ± 0.0001	0.5996
COE	0.5325 ± 0.0001	0.5307

TABLEAU 3.1 – Valeurs moyennes du rapport d'espacements consécutifs $\langle \tilde{r}_n \rangle$ obtenues numériquement pour les trois classes de symétrie (CSE, CUE, COE), comparées aux résultats théoriques de la référence [176].

de localisation, où la densité de niveaux est inhomogène .Les rapports d'espacements consécutifs $\tilde{r}_n$ sont quant à eux invariants par changement local d'échelle, et permettent ainsi une analyse plus directe et plus robuste des fluctuations spectrales [176].

Comme proposé par Oganesyan et *al* [104] , l'utilisation de la distribution des rapports $\tilde{r}_n$ constitue une méthode robuste pour distinguer les différentes classes d'universalité des systèmes quantiques chaotiques. Dans notre étude, nous avons constaté que la valeur moyenne de $\tilde{r}_n$ correspond bien aux valeurs théoriques attendues pour chaque classe d'universalité, comme illustré dans le tableau 3.1

En résumé, l'analyse statistique du spectre de l'opérateur de Floquet du modèle TBS fournit une troisième signature permettant d'identifier la classe de symétrie du système. Bien que ces résultats statistiques aient déjà été explorés dans la littérature, notamment dans [118, 164], nous les avons reproduits ici numériquement en utilisant la méthode décrite dans cette section.

Cette signature complète les deux premières, basées sur des phénomènes dynamiques (ERO/Anti-ERO) et sur la fonction d'échelle $\beta(g)$, qui constituent les contributions originales de notre travail. L'accord entre nos résultats numériques et les distributions théoriques attendues pour les ensembles de Dyson-Wigner (COE, CUE, CSE) confirme la classification du modèle TBS au sein de ces trois classes.

3.5 Conclusion

Ce chapitre a établi le cadre conceptuel et opérationnel des symétries dans le kicked rotor quantique. Partant du renversement du temps en mécanique classique et quantique (opérateur anti-unitaire, dégénérescence de Kramers), nous avons replacé le système dans la classification de Wigner–Dyson et rappelé que, pour le kicked rotor, seules les trois classes orthogonale (AI), unitaire (A) et symplectique (AII) sont pertinentes pour la suite.

Dans le cas sans spin, nous avons montré que la symétrie efficace de renversement du temps doit être combinée à une parité spatiale pour respecter la conservation de la quasi-impulsion β. Cette construction place naturellement le QKR standard dans la classe orthogonale ; le passage vers la classe unitaire sous des brisures contrôlées (champ magnétique effectif, modulations d'amplitude ou de phase) est établi dans la littérature et documenté par les références que nous avons citer.

Dans le cas avec spin, nous avons introduit le modèle TBS à couplage spin-orbite, qui permet de parcourir de façon réglable les classes AI, A et AII. Le cas général est symplectique (TRS avec $\hat{\mathbf{T}}^2 = -1$, tandis que des choix particuliers des paramètres conduisent à des situations unitaires (par symétrie géométrique supplémentaire) ou orthogonales (découplage en deux kicked rotors sans spin).

Enfin, nous avons présenté trois signatures numériques qui ancrent cette analyse : (i) ERO/anti-ERO (retour à l'origine) distinguant localisation faible (AI) et antilocalisation faible (AII) ; (ii) le profil universel de la fonction d'échelle $\beta(g)$, conforme aux prédictions de théorie d'échelle ; (iii) les statistiques spectrales (distributions $P(s)$, moyenne de $\tilde{r}$) de l'opérateur de Floquet, en accord avec les ensembles circulaires COE/CUE/CSE. L'accord systématique de ces trois diagnostics valide le kicked rotor (et en particulier le modèle TBS) comme plateforme de référence pour explorer l'universalité des classes AI/A/AII dans le régime diffusif et localisé.

Chapitre 4

Vers un simulateur quantique réalisable expérimentalement de la localisation d'Anderson symplectique

Sommaire du présent chapitre

4.1 Présentation du modèle **95**
4.1.1 Symétrie du Modèle SDQKR 97
4.1.2 Influence de la symétrie temporelle sur l'apparition de l'anti-ERO 99
4.1.3 Dynamique temporelle des signaux Anti-ERO/ERO et $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ dans le modèle SDQKR 101
4.2 Comportement de la fonction d'échelle $\beta(g)$ dans le modèle SDQKR **110**
4.3 Statistiques spectrales du modèle SDQKR **113**
4.4 Conclusion **114**

Le modèle théorique kicked rotor avec spin 1/2 (TBS), étudié dans le chapitre précédent, présente un grand intérêt pour explorer les symétries de Dyson–Wigner, mais sa réalisation expérimentale directe se heurte à plusieurs défis techniques majeurs. En particulier, chaque terme de l'Hamiltonien TBS exige des conditions expérimentales spécifiques difficiles à mettre en œuvre. Nous discutons ci-dessous les principaux obstacles à une réalisation en laboratoire du modèle TBS, ce qui motivera l'introduction d'un modèle alternatif plus réalisable.

Le terme de kick standard $K\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2$ du kicked rotor (sans spin) est bien maîtrisé expérimentalement : il s'obtient en exposant des atomes ultra-froids à une onde stationnaire créée par deux faisceaux laser contra-propageant [177]. Dans ce schéma, une grille op-

tique périodique (de période spatiale $\lambda/2$ pour une longueur d'onde laser λ) est allumée brièvement et périodiquement dans le temps pour fournir une succession de kicks. Ce dispositif, démontré dès 1995 par Raizen et *al* [177], permet de réaliser le terme $\cos(\hat{x})$ et de recréer le comportement du kicked quantique standard.

En revanche, le terme à double fréquence spatiale $(\mu K/2)\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x$ est bien plus difficile à reproduire. La fonction $\sin(2\hat{x})$ oscille deux fois plus vite dans l'espace que $\cos(\hat{x})$, ce qui correspond à une période spatiale divisée par deux. Pour réaliser l'harmonique spatiale $\sin(2\hat{x})$, on utilise une lumière de longueur d'onde $\lambda/2$ (doublage de fréquence). Deux faisceaux contre-propagés à $\lambda/2$ forment une onde stationnaire dont l'intensité a une période $\lambda/4$, ce qui écrit un potentiel $V(x) \propto \cos(2x+\phi)$. En réglant la phase à $\phi = \pi/2$ (phase verrouillée par rapport à une référence spatiale), on obtient $V(x) \propto \sin(2x)$. La stabilité de cette phase est maintenue pendant toute la durée de l'expérience.. Par exemple, une expérience a montré qu'on peut superposer un réseau standard de période $\lambda/2$ avec un réseau de période $\lambda/4$ (obtenu par transitions Raman multiphoton) pour créer une structure bi-périodique [178]. Ce type de «super-réseau» bichromatique permet en principe d'ajouter un terme en $\sin(2\hat{x})$ au potentiel [178, 179], une idée exploitée théoriquement pour briser la symétrie d'inversion spatiale du kicked rotor et changer de classe de symétrie (vers la classe unitaire) [10]. Néanmoins, la réalisation pratique d'un tel potentiel à double période reste très exigeante. En somme, l'ajout d'un terme $\sin(2\hat{x})$ alourdit considérablement le dispositif expérimental par rapport au kicked rotor standard.

Une seconde difficulté expérimentale vient du fait que le modèle TBS introduit également des termes dépendant du spin interne de l'atome ($\hat{\sigma}_x$ et $\hat{\sigma}_z$) qui posent leurs propres défis. Le terme $K\varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z$ correspond à un potentiel qui dépend de l'état interne : en chaque position x, l'atome ressent une force dirigée différemment selon qu'il est dans l'état spin up ou down. Ce type de potentiel repose sur le **décalage AC Stark** induit par la lumière sur les niveaux atomiques, un effet bien connu dans les pièges dipolaires optiques [180].

Pour fixer les idées, rappelons que les kicks du modèle TBS contiennent des couplages de spin modulés spatialement :

$$V_{\text{kick}}(\hat{x}) = K\left[\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \frac{\mu}{2}\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \varepsilon\sin(\hat{x})\hat{\sigma}_z\right]. \tag{4.1}$$

Parmi ces contributions, le terme $K\varepsilon\sin(\hat{x})\hat{\sigma}_z$ est le moins problématique expérimentalement : il correspond à un potentiel état-dépendant où deux états internes subissent des décalages AC Stark de signe opposé. On sait réaliser ce schéma avec des polarisations adaptées σ^+ et σ^- et un choix de désaccord fin entre résonances hyperfines [180, 181]. Des réseaux état-dépendants ont d'ailleurs été démontrés [182, 183]. En revanche, le véritable défi provient du terme $\frac{K\mu}{2}\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x$, qui exige un couplage entre états internes avec renversement de spin ($\hat{\sigma}_x$) dont l'amplitude varie sinusoïdalement dans l'espace à la périodicité optique. Concrètement, il faudrait que la fréquence de Rabi d'un couplage micro-ondes/Raman s'annule et change de signe tous les $\lambda/4$, ce qui impose un verrouillage de phase strict entre un réseau à λ (réseau principal) et un motif à $\lambda/2$ (harmonique $2x$, tout en conservant un flip de spin efficace. Or, en pratique, l'inversion

d'état interne se fait quasi toujours par des impulsions homogènes qui mélangent les deux niveaux sans résolution spatiale [184]. À notre connaissance, rien d'équivalent à un $\hat{\sigma}_x$ oscillant comme $\sin(2x)$, n'a été démontré : une telle modulation nécessiterait de contrôler amplitude et phase d'un champ couplant avec une précision sub-micronique au rythme des kicks, ce qui dépasse l'état de l'art actuel. Enfin, il est important de souligner une contrainte temporelle majeure : dans le modèle TBS, les kicks (qu'ils soient indépendants du spin ou couplés à celui-ci) sont réalisés sous forme de kicks très brèves, séparées dans le temps. Expérimentalement, il faut donc allumer les lasers pendant une durée $\sim 1\mu s$, selon l'espèce et le détuning — afin d'approximer des kicks quasi instantanées [177]. Or, réaliser un renversement complet de spin en un temps aussi court représente un défi technique majeur. Il faudrait atteindre un couplage Rabi extrêmement fort, de l'ordre de $2\pi \times 0.5$ MHz [185], pour transférer la population entre deux états en environ 1 μs sans induire de transitions parasites ni de chauffage. Plus l'impulsion est brève, plus sa bande de fréquence devient large, ce qui accroît le risque d'exciter des niveaux hors de l'espace de travail visé. Par conséquent, atteindre une inversion complète nécessite une intensité laser plus élevée, ce qui augmente la probabilité de décohérence, notamment par émission spontanée lorsque le laser est trop proche de la résonance, ainsi que par bruit de phase lorsque l'on pousse l'asservissement électronique à ses limites.

D'après ce qui précède, la réalisation expérimentale du Hamiltonien TBS dans sa forme complète présente plusieurs difficultés majeures. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous introduisons un modèle alternatif simplifié qui conserve l'essentiel de la physique du kicked rotor avec spin 1/2, tout en étant plus compatible avec les plateformes expérimentales basées sur les atomes froids. Ce nouveau modèle est conçu pour contourner les limitations identifiées, et ouvre ainsi la voie à une observation expérimentale réaliste des phénomènes d'antilocalisation faible. En outre, tout comme l'Hamiltonien TBS, ce modèle donne accès—via un choix approprié des paramètres aux trois classes de symétrie, comme nous le montrerons ci-après.

4.1 Présentation du modèle

Au vu des difficultés expérimentales mises en évidence pour le modèle TBS, il est pertinent d'introduire un modèle alternatif plus simple, adapté à une mise en œuvre avec des atomes ultrafroids, tout en préservant la même richesse physique. Nous proposons ainsi un modèle que nous désignerons par l'acronyme SDQKR (Spin-1/2 Double-Quantum Kicked Rotor), s'inspirant librement du schéma étudié dans [89]. Conçu pour conserver l'essentiel de la physique du kicked rotor avec spin, ce modèle permet, par un choix approprié des paramètres, d'explorer les trois classes de symétrie de Dyson–Wigner accessibles avec le modèle TBS.

Le Hamiltonien du modèle SDQKR en unités adimensionnées s'écrit :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + (-1)^{\lfloor t \rfloor}\Omega\hat{\sigma}_x + \hat{H}_- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2n) + \hat{H}_+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2n-1), \tag{4.2}$$

où les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ représentent respectivement les positions et impulsions des

atomes, et $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_z$ désignent les opérateurs de Pauli agissant sur les degrés de liberté internes (spin 1/2). Le terme de propagation libre du système, représenté par $\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2$, décrit simplement la dynamique cinétique standard du kicked rotor sans interaction spin-dépendante pendant les intervalles entre les kicks. À cela s'ajoute un terme de champ effectif de spin $(-1)^{\lfloor t \rfloor}\Omega\hat{\sigma}_x$, où la dépendance en $(-1)^{\lfloor t \rfloor}$ traduit une alternance périodique de l'orientation du champ de spin à chaque intervalle de temps entier. Ainsi, entre deux kicks successifs, l'état interne du spin subit une rotation autour de l'axe x dont le sens dépend de la parité du temps entier $\lfloor t \rfloor$.

Concernant les kicks, ils sont structurées selon deux ensembles d'opérateurs distincts, notés $\hat{H}_\pm$, appliqués en alternance aux instants entiers pairs ($t = 2n$) et impairs ($t = 2n+1$). Explicitement, ces termes prennent la forme suivante :

$$\hat{H}_\pm = K(1 \pm \alpha)\Big[\cos(\hat{x})\hat{1}_2 + \varepsilon \sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\Big], \tag{4.3}$$

Ici, la composante $\cos(\hat{x})\hat{1}_2$ agit indépendamment du spin et correspond à un potentiel optique standard obtenu expérimentalement par un réseau optique pulsé. La composante $\varepsilon \sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z$, quant à elle, introduit un couplage spin-orbite simple où les états de spin *up* et *down* ressentent un potentiel spatialement déphasé. Il est particulièrement important de noter que, contrairement au modèle TBS, le modèle SDQKR ne présente plus le terme problématique $\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x$ dans les kicks. La suppression de ce terme complexe rend le modèle plus accessible expérimentalement, évitant ainsi les contraintes associées à la réalisation de potentiels à double fréquence spatiale et à la modulation très fine du couplage spin interne.

En l'absence de kicks, la contribution $(-1)^{\lfloor t \rfloor}\Omega\hat{\sigma}_x$ produit donc une rotation du spin d'angle $+\Omega$ sur les intervalles pairs et d'angle $-\Omega$ sur les intervalles impairs (la durée entre deux kicks vaut 1 en nos unités). Sur deux intervalles consécutifs, ces rotations se compensent et le spin revient à son orientation initiale (écho parfait), la partie cinétique $\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2$ étant proportionnelle à l'identité de spin. En revanche, en présence des kicks $\hat{H}_\pm$ et en particulier du terme état-dépendant $\varepsilon \sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z$ les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ accumulent des phases opposées dépendant de la position.Combinées aux rotations autour de x, ces phases cassent l'écho parfait : à chaque demi-période, le spin est re-projeté dans une base différente et les populations se mélangent. À l'échelle d'un nuage (moyenne sur x et sur les modes d'impulsion), cela se manifeste par une dépolarisation progressive du spin, avec une tendance à l'équilibrage des populations $P_\uparrow \simeq P_\downarrow$.

Par ailleurs, afin de souligner l'adaptabilité du modèle SDQKR à des réalisations expérimentales concrètes, il est possible de réécrire les opérateurs de kick sous une forme plus intuitive :

$$\hat{H}_\pm = \mathbf{K}_\pm \cos(\hat{x}\hat{1}_2 - \Phi\hat{\sigma}_z), \tag{4.4}$$

où nous avons posé :

$$\mathbf{K}_\pm = K(1 \pm \alpha)\sqrt{1+\varepsilon^2}, \quad \Phi = \arctan(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Cette écriture met clairement en évidence que, dans la partie kicks, le couplage spin–orbite se réduit à un déphasage spatial entre les potentiels optiques ressentis par les deux états internes de l'atome. Plus précisément, les composantes *up* et *down* du spin perçoivent des potentiels optiques spatialement décalés l'un par rapport à l'autre d'un angle constant $\pm\Phi$. Ceci facilite grandement la réalisation expérimentale, puisque le potentiel spin-dépendant peut être obtenu directement en contrôlant précisément la phase relative entre deux réseaux optiques de polarisation ou de fréquence adaptées. Des schémas complets, compatibles avec des séquences à double kick et combinant réseau indépendant du spin et réseau dépendant du spin, sont détaillés dans [171]. Du côté de la propagation libre, la rotation globale du spin $(-1)^{\lfloor t \rfloor}\Omega\hat{\sigma}_x$ est facilement réalisable par un couplage RF/micro-ondes homogène entre deux sous-niveaux hyperfins (ou via un doublet Raman), comme démontré dans les expériences récentes sur condensats [184].

4.1.1 Symétrie du Modèle SDQKR

Comme le Hamiltonien (4.2) est périodique dans le temps, il est naturel d'étudier les propriétés de symétrie du système à travers l'opérateur d'évolution sur une période complète, c'est-à-dire l'opérateur de Floquet. Celui-ci est défini comme :

$$\hat{\mathcal{U}}(T) = \mathcal{T}\left[-\mathrm{i}\int_0^T \hat{H}(t), dt/\hbar\right], \tag{4.6}$$

où $\mathcal{T}$ désigne, comme rappelé précédemment, l'opérateur de mise en ordre chronologique. L'analyse de l'opérateur de Floquet permet de caractériser les symétries dynamiques du système et d'en extraire les classes universelles associées (classes de symétrie de Dyson-Wigner).

Dans notre cas, pour le modèle SDQKR introduit précédemment, le cycle temporel complet est constitué de deux kicks alternés séparés par des propagations libres. Pour des raisons de commodité, nous adoptons ici la convention $T = 2$ et $\hbar = 1$. Si l'on choisit de définir l'opérateur d'évolution sur une période complète en commençant par le kick 1 et en terminant par la propagation libre 2. (c'est-à-dire en intégrant (4.2) de $t = 0^-$ à $t = 2^-$) [1], on obtient alors :

$$\hat{\mathcal{U}}(T=2) = \underbrace{e^{-\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + \Omega\hat{\sigma}_x\right]}}_{\hat{U}_{\mathrm{prop}_2}} \underbrace{e^{-\mathrm{i}\hat{H}_+}}_{\hat{U}_{\mathrm{kick}_2}} \underbrace{e^{-\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 - \Omega\hat{\sigma}_x\right]}}_{\hat{U}_{\mathrm{prop}_1}} \underbrace{e^{-\mathrm{i}\hat{H}_-}}_{\hat{U}_{\mathrm{kick}_1}}. \tag{4.7}$$

On peut également définir d'autres opérateurs de Floquet dans ce contexte (voir figure 4.1). Les opérateurs $\hat{V}_{1/2}$ et $\hat{V}'_{1/2}$ (voir figure 4.1 : (c) et (d)) sont invariants sous l'opération de renversement du temps $\hat{\mathbf{T}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_y\hat{K}_p$, défini par l'équation (3.55). Afin d'illustrer l'effet de $\hat{\mathbf{T}}$ sur l'opérateur $\hat{V}_{1/2}$ à titre d'exemple, on commence par rappeler son action sur les

1. Selon la convention temporelle adoptée, le kick 1 agit exactement à l'instant $t = 0$. On note $t = 0^-$ l'instant immédiatement avant ce kick, et $t = 0^+$ l'instant immédiatement après. La propagation libre 1 s'étend ensuite de $t = 0^+$ à $t = 1^-$. Le kick 2 agit à l'instant c'est-à-dire entre 1^- et 1^+. Enfin, la propagation libre 2 se déroule de $t = 1^+$ à $t = 2^-$

opérateurs élémentaires $\hat{U}_{\text{prop}_{\{1,2\}}}$ et $\hat{U}_{\text{kick}_{\{1,2\}}}$:

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{U}_{\text{prop}_{\{1,2\}}}\hat{\mathbf{T}} = \hat{U}^{\dagger}_{\text{prop}_{\{2,1\}}} \quad \text{Et} \quad \hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{U}_{\text{kick}_{\{1,2\}}}\hat{\mathbf{T}} = \hat{U}^{\dagger}_{\text{kick}_{\{1,2\}}}, \tag{4.8}$$

En utilisant ces relations, il est alors simple de vérifier explicitement l'invariance sous renversement du temps de l'opérateur $\hat{V}_{1/2}$:

$$\begin{aligned}\hat{T}^{-1}\hat{V}_{1/2}\hat{T} &= \hat{T}^{-1}\, e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\hat{H}_-}\, e^{-\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2+\Omega\hat{\sigma}_x\right]}\, e^{-\mathrm{i}\hat{H}_+}\, e^{-\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2-\Omega\hat{\sigma}_x\right]}\, e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\hat{H}_-}\,\hat{T} \\ &= e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\hat{H}_-}\, e^{\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2-\Omega\hat{\sigma}_x\right]}\, e^{\mathrm{i}\hat{H}_+}\, e^{\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2+\Omega\hat{\sigma}_x\right]}\, e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\hat{H}_-} \\ &= \hat{V}^{\dagger}_{1/2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

On peut également vérifier que le modèle initial $\hat{\mathcal{U}}(T=2)$ du SDQKR n'est pas $\hat{\mathbf{T}}$-symétrique car $\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathcal{U}}(T=2)\hat{\mathbf{T}} \neq \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(T=2)$. En introduisant un nouvel opérateur anti-unitaire $\hat{\Theta} = \hat{U}^{\dagger}_{\text{kick}_1}\hat{\mathbf{T}}$, dont le carré vérifie $\hat{\Theta}^2 = -\hat{1}$, on montre que $\hat{\Theta}^{-1}\hat{\mathcal{U}}(T=2)\hat{\Theta} = \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(T=2)$. Ainsi, c'est $\hat{\Theta}$, et non $\hat{\mathbf{T}}$ seul, qui joue ici le rôle d'opérateur d'inversion temporelle.

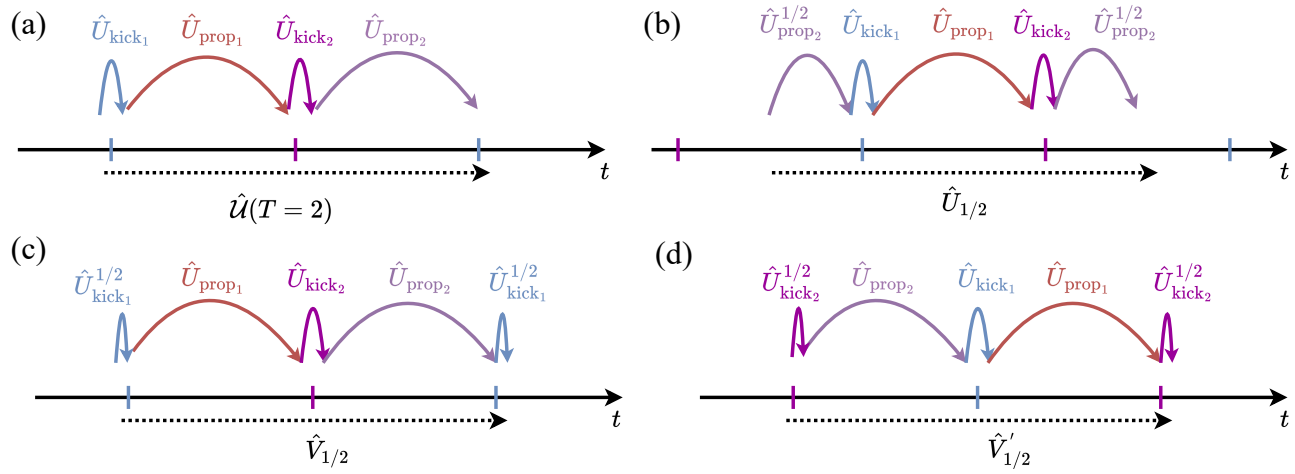


FIGURE 4.1 – Opérateurs d'évolution — Quatre décompositions possibles de l'opérateur de d'évolution sont schématisées le long d'une ligne de temps ; les repères verticaux colorés signalent l'action des kicks instantanés et la flèche noire horizontale en pointillé indique une période complète. Les arcs rouges ou violets représentent les évolutions libres $\hat{U}_{\text{prop}_1}$ et $\hat{U}_{\text{prop}_2}$, tandis que les marques bleues et magenta indiquent les kicks $\hat{U}_{\text{kick}_1}$ et $\hat{U}_{\text{kick}_2}$, respectivement appliqués à des temps entiers. (a) $\hat{\mathcal{U}}(T=2) = \hat{U}_{\text{prop}_2}\hat{U}_{\text{kick}_2}\hat{U}_{\text{prop}_1}\hat{U}_{\text{kick}_1}$: kick 1 suivi de l'évolution libre 1, puis kick 2 suivi de l'évolution libre 2. (b) $\hat{U}_{1/2} = \hat{U}^{1/2}_{\text{prop}_2}\hat{U}_{\text{kick}_2}\hat{U}_{\text{prop}_1}\hat{U}_{\text{kick}_1}\hat{U}^{1/2}_{\text{prop}_2}$: opérateur symétrisé par deux demi-évolutions libres 2. (c) $\hat{V}_{1/2} = \hat{U}^{1/2}_{\text{kick}_1}\hat{U}_{\text{prop}_2}\hat{U}_{\text{kick}_2}\hat{U}_{\text{prop}_1}\hat{U}^{1/2}_{\text{kick}_1}$: opérateur d'évolution encadré par deux demi-kicks de type 1. (d) $\hat{V}'_{1/2} = \hat{U}^{1/2}_{\text{kick}_2}\hat{U}_{\text{prop}_1}\hat{U}_{\text{kick}_1}\hat{U}_{\text{prop}_2}\hat{U}^{1/2}_{\text{kick}_2}$: version symétrique où l'opérateur d'évolution est encadré par deux demi-kicks de type 2.

La conclusion qu'on peut tirer ici est que le choix de la "coupe" stroboscopique et de la factorisation de l'opérateur de Floquet n'affecte pas la classe de symétrie du modèle : changer le point de départ dans la période revient à une simple conjugaison unitaire $\hat{U}' = \hat{W}^\dagger \hat{U} \hat{W}$ qui préserve le spectre et donc la classification de Dyson–Wigner. En revanche, la factorisation choisie peut rendre la TRS plus ou moins explicite : des écritures symétrisées $\hat{U}_{1/2}$, $\hat{V}_{1/2}$) font apparaître naturellement l'opérateur anti-unitaire $\hat{\mathbf{T}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_y \hat{K}_p$, tandis qu'une écriture non symétrisée peut nécessiter un opértaur anti-unitaire $\hat{\Theta}$ « habillé » (incluant un kick ou demi-kick par exemple).

4.1.2 Influence de la symétrie temporelle sur l'apparition de l'anti-ERO

Dans cette section, nous présentons les résultats des simulations numériques du modèle SDQKR pour des valeurs non triviales des paramètres $(\Omega, \varepsilon, \alpha)$. Nous nous intéressons particulièrement à l'effet du nombre total de kicks appliqués (pair ou impair) sur la symétrie temporelle et sur l'apparition du phénomène d'anti-ERO dans la classe de symétrie symplectique.

Considérons tout d'abord la densité de probabilité en impulsion $|\psi(p,t)|^2$ simulée à deux instants consécutifs, pour des temps inférieurs au temps de localisation ($t = 10$ pair et $t = 11$ impair)[2], représentée sur la figure 4.2. La courbe obtenue à temps impair montre un pic négatif en $p = 0$, d'un contraste d'environ $-1/2$ comparé au fond gaussien. Cette signature directe d'une antilocalisation faible (anti-ERO) traduit une interférence destructive entre trajectoires conjuguées temporellement. À l'inverse, cette signature disparaît totalement au temps pair précédent ($t = 10$). Pour expliquer ce phénomène, examinons la structure de l'opérateur d'évolution du système. À titre illustratif, écrivons explicitement les opérateurs d'évolution simplifiés pour $t = 11$ (impair) et $t = 10$ (pair) en suivant la logique des kicks alternés définis précédemment :

• Pour un temps impair (ici $t = 11 < t_{\mathrm{loc}}$), en commençant et terminant par le même kick ($\hat{U}_{\mathrm{kick}_1}$), l'opérateur d'évolution s'écrit alors :

$$\hat{U}(t=11) = \mathcal{T} \exp\Big[-\mathrm{i} \int_{0^-}^{10^+} \hat{H}(t)\, dt/\hbar\Big] = \hat{U}_{\mathrm{kick}_1} \left(\hat{U}_{\mathrm{prop}_2} \hat{U}_{\mathrm{kick}_2} \hat{U}_{\mathrm{prop}_1} \hat{U}_{\mathrm{kick}_1}\right)^5, \tag{4.10}$$

Cette structure d'évolution est invariante sous l'opération de renversement du temps $\hat{\mathbf{T}}$ définie précédemment, à savoir :

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\, \hat{U}(t=11)\, \hat{\mathbf{T}} = \hat{U}^\dagger(t=11), \tag{4.11}$$

ce qui signifie que la symétrie temporelle est préservée pour un nombre impair de kicks.

• À l'inverse, pour un temps pair (ici $t = 10 < t_{\mathrm{loc}}$), l'opérateur d'évolution prend la

2. **Convention temporelle :** L'entier t désigne ici le *nombre total de kicks* appliqués. Ainsi, « $t = 10$ » signifie que l'on considère l'évolution *jusqu'au moment juste après le* $10^{éme}$ *kick*, c'est-à-dire $\hat{U}(t{=}10) = \mathcal{T} \exp\big[-\mathrm{i} \int_{0^-}^{9^+} \hat{H}(t)\, dt/\hbar\big]$. De même, « $t = 11$ » correspond à $\hat{U}(t{=}11) = \mathcal{T} \exp\big[-\mathrm{i} \int_{0^-}^{10^+} \hat{H}(t)\, dt/\hbar\big]$. On part de l'instant 0^- (juste avant le premier kick), puis on suit la séquence $\hat{U}_{\mathrm{kick}_1} \to \hat{U}_{\mathrm{prop}_1} \to \hat{U}_{\mathrm{kick}_2} \to \hat{U}_{\mathrm{prop}_2} \to \cdots$,

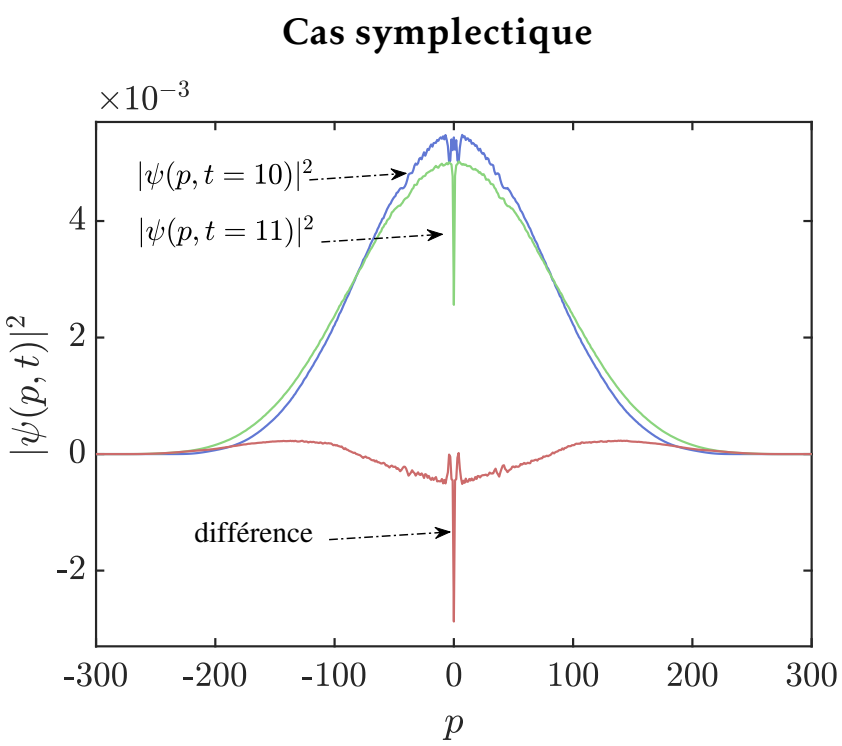


FIGURE 4.2 – Distribution en impulsion $|\psi(p,t)|^2$: en vert la distribution aprés 11 kicks, en bleu la distribution après 10 kicks ; en rouge la différence entre les deux distributions. Les paramètres utilisés sont : $K = 20$, $\Omega = \sqrt{5}\pi$, $\varepsilon = 0.7$, $\alpha = 0.8$. Une moyenne est effectuée sur 10^5 réalisations des phases aléatoires α_p.

forme :

$$\hat{U}(t=10) = \mathcal{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{0^-}^{9^+} \hat{H}(t)\,dt/\hbar\right] = \hat{U}_{\mathrm{kick}_2}\,\hat{U}_{\mathrm{prop}_1}\,\hat{U}_{\mathrm{kick}_1}\left(\hat{U}_{\mathrm{prop}_2}\,\hat{U}_{\mathrm{kick}_2}\,\hat{U}_{\mathrm{prop}_1}\,\hat{U}_{\mathrm{kick}_1}\right)^4, \tag{4.12}$$

La séquence ici se termine par un kick isolé $\hat{U}_{\mathrm{kick}_2}$ brisant explicitement la symétrie temporelle :

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\,\hat{U}(t=10)\,\hat{\mathbf{T}} \neq \hat{U}^{\dagger}(t=10). \tag{4.13}$$

Cette distinction fondamentale entre opérateurs d'évolution pour nombres pair et impair de kicks explique clairement les différences observées sur la densité de probabilité : la symétrie temporelle pour un nombre impair permet l'interférence destructive des chemins conjugués temporellement, donnant naissance à l'anti-ERO, tandis que son absence au temps pair empêche l'apparition de ce phénomène.

D'un point de vue expérimental, ce modèle présente un intérêt considérable comparé au modèle TBS, puisque l'alternance périodique des kicks permet précisément de contrôler l'apparition ou la disparition du phénomène d'anti-ERO simplement en ajustant le nombre total de kicks appliqués. Dans des expériences réalistes impliquant des atomes froids, où la distribution initiale en impulsion possède une largeur non négligeable (température non nulle), la signature de l'anti-ERO devient difficilement observable à cause de son faible contraste. Notre protocole permet alors de contourner cette limitation :

il suffit de considérer la différence des deux distributions consécutives (pair–impair), comme présenté sur la figure 4.2, pour extraire clairement la signature quantitative de l'anti-ERO, même en présence d'un élargissement thermique initial important. Cette approche expérimentale a déjà prouvé son efficacité dans l'observation du phénomène de localisation faible (ERO) dans d'autres contextes du kicked rotor sans spin, tel que discuté dans [68].

4.1.3 Dynamique temporelle des signaux Anti-ERO/ERO et $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ dans le modèle SDQKR

• Cas symplectique :

Après avoir identifié les signatures caractéristiques de l'anti-ERO, ainsi que l'absence de l'ERO dans le modèle SDQKR à temps court (régime diffusif), nous nous intéressons ici à l'évolution temporelle de ces phénomènes d'interférence quantique. Nous mettons en particulier en évidence l'apparition immédiate du signal anti-ERO dès les premiers kicks et sa persistance à des temps longs, ainsi que la croissance progressive d'un nouveau signal, observable uniquement pour un nombre pair de kicks, et ce malgré la brisure explicite de l'invariance par renversement du temps. Ce dernier signal sera noté $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$: il constitue une contribution au signal d'ERO qui repose sur la même physique que le phénomène de *Coherent Forward Scattering* (CFS) discuté précédemment, dont l'émergence est une signature robuste de la localisation. Il a en particulier été démontré, à l'aide d'une approche diagrammatique perturbative [11, 73], que les trajectoires responsables de cette interférence « de type CFS » impliquent la formation d'un nombre pair de boucles, et que leur contribution ne devient significative qu'en présence d'une localisation des états propres. En l'absence de symétrie temporelle, ces boucles peuvent être parcourues dans le même sens mais dans un ordre différent, produisant alors une interférence constructive (voir schéma explicatif figure 1.12). Par conséquent, à la différence de l'ERO au sens strict (i.e. la contribution gouvernée par la symétrie de renversement du temps), qui disparaît en l'absence de cette symétrie, la contribution $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ persiste et peut même se renforcer lorsque cette symétrie est brisée [10, 73].

Pour illustrer plus précisément l'évolution de ces signatures interférentielles, la figure 4.3 présente des profils de la densité de probabilité $|\psi(p,t)|^2$ aux temps impairs et pairs. Du côté impair, la figure 4.3(a) (temps court $t = 43$) montre un anti-ERO en $p = 0$ de contraste $\simeq -1/2$ par rapport au fond de la gaussien, tandis que la figure 4.3(b) (temps long $t = 6999$) met en évidence la persistance de cette signature négative au temps longue. Du côté pair, la figure 4.3(c) (temps court $t = 44$ avant la localisation complète) fait apparaître le pic central associé au $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$, amplitude très faible par rapport au fond de diffusion gaussien. En revanche, à temps long ($t = 7000$), le régime de localisation exponentielle est atteint, et on observe un pic central extrêmement net au centre ($p = 0$), dont l'amplitude atteint approximativement le double par rapport au fond exponentiellement localisé (voire figure 4.3(d)). Ce résultat numérique constitue une confirmation claire et robuste de l'amplification progressive du phénomène $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ en régime localisé, en accord complet avec les prédictions théoriques discutées dans les chapitres précédents de cette thèse.

Le fait que les phénomènes Anti-ERO et $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ apparaissent alternativement selon la

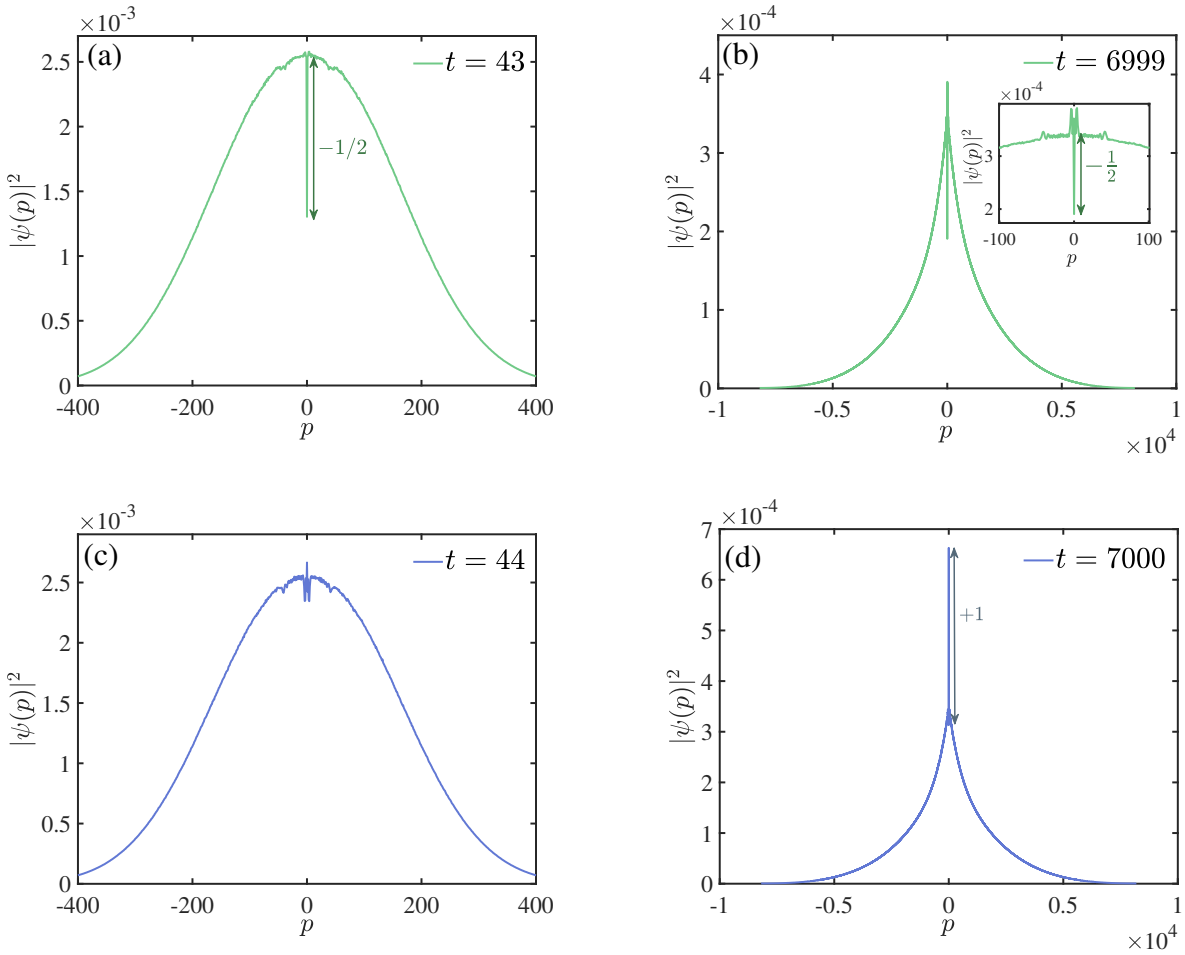


FIGURE 4.3 – Densité de probabilité en impulsion $|\psi(p)|^2$ à quatre instants caractéristiques. (a) $t = 43$: avant la localisation complète, apparition d'un anti-ERO de contraste $-1/2$. (b) $t = 6999$: régime totalement localisé, persistance du phénomène d'antilocalisation à long temps. (c) $t = 44$: avant la localisation complète, apparition d'un pic central modeste dû au $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$. (d) $t = 7000$: régime totalement localisé, pic central très prononcé dont l'amplitude est environ doublée par rapport au fond exponentiellement localisé, illustrant l'effet cumulatif des interférences constructives responsables du $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$. Les paramètres utilisés sont identiques à ceux de la figure 4.2.

parité du nombre de kicks permet de définir des contrastes indépendants pour chacun d'eux. Nous introduisons ainsi deux grandeurs contrastes spécifiques, définies par rapport à une valeur de référence de la densité moyenne située à proximité du point central $p = 0$. Explicitement, ces contrastes sont donnés par :

$$C_{\text{Anti-ERO}} := \frac{\Pi_{0,\text{Anti-ERO}} - \langle \Pi_{\text{vois.}} \rangle_{\text{impairs}}}{\langle \Pi_{\text{vois.}} \rangle_{\text{impairs}}}, \tag{4.14}$$

$$C_{\text{ERO}_{\text{CFS}}} := \frac{\Pi_{0,\text{ERO}_{\text{CFS}}} - \langle \Pi_{\text{vois.}} \rangle_{\text{pairs}}}{\langle \Pi_{\text{vois.}} \rangle_{\text{pairs}}}, \tag{4.15}$$

où $\Pi_{0,\text{Anti-ERO}}$ représente la valeur de la densité de probabilité en $p = 0$ pour les kicks impairs (manifestation de l'Anti-ERO), tandis que $\Pi_{0,\text{ERO}_{\text{CFS}}}$ est la valeur correspondante pour les kicks pairs (manifestation du ERO_{CFS}). La quantité $\langle \Pi_{\text{vois.}} \rangle_{\text{impairs (pairs)}}$ correspond à la densité moyenne calculée dans un voisinage immédiat autour de $p = 0$. Cette densité moyenne locale sert de référence au contraste, représentant la différence relative entre la densité au centre et celle du fond immédiat environnant.

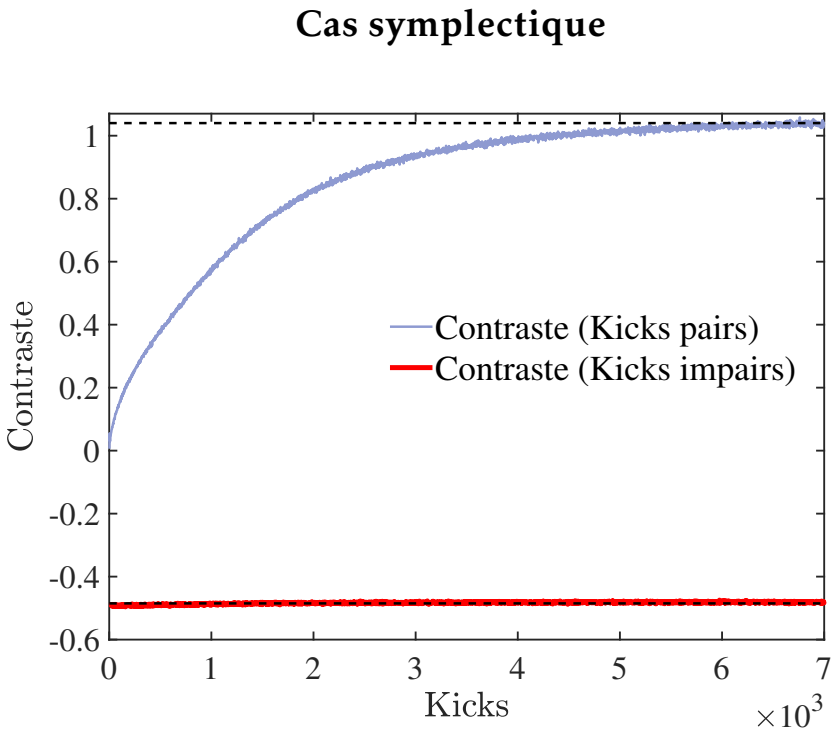


FIGURE 4.4 – Évolution temporelle des contrastes associés aux phénomènes Anti-ERO et ERO_{CFS} en fonction du nombre de kicks. Les paramètres choisis correspondent à ceux présentés dans la figure 4.2.

Les résultats numériques obtenus pour ces contrastes sont présentés à la figure 4.4. On observe clairement que le contraste Anti-ERO atteint une valeur stable d'environ -0.5 dès les premiers kicks appliqués, confirmant ainsi la robustesse de ce phénomène d'antilocalisation faible aux temps impairs. En revanche, le contraste ERO_{CFS} est nul aux tout premiers instants puis croît continuellement avec le nombre de kicks jusqu'à saturer asymptotiquement vers la valeur maximale $C_{\text{ERO}_{\text{CFS}}} \approx 1$. Cette évolution illustre le caractère cumulatif des interférences constructives responsables du ERO_{CFS}, amplifié au cours du temps jusqu'à saturation complète en régime localisé.

• **Cas orthogonale** ($\Omega = 0$) **:**

Examinons maintenant l'effet de l'annulation du terme périodique dépendant de Ω, c'est-à-dire en imposant $\Omega = 0$ explicitement dans notre modèle. Nous traçons dans ce cas la densité de probabilité en impulsion $|\psi(p,t)|^2$ à deux instants consécutifs ($t = 10$, pair, et $t = 11$, impair) , pour des temps inférieurs au temps de localisation (voir figure 4.5).

Contrairement au cas précédent avec $\Omega \neq 0$, nous observons désormais à temps impair ($t = 11$, courbe rouge) un pic très marqué en $p = 0$, dont l'amplitude est approximativement doublée par rapport au fond gaussien. Ce pic central constitue précisément la manifestation du phénomène ERO, typiquement observé dans les systèmes relevant de la classe de symétrie orthogonale, où l'interférence entre trajectoires temporellement réciproques est constructive. À l'inverse, pour le temps pair précédent ($t = 10$, courbe vert), ce pic est totalement absent, confirmant clairement l'alternance temporelle des phénomènes quantiques observés. La différence entre ces deux distributions successives (représentée en bleu sur la figure 4.5) permet ainsi d'extraire facilement et précisément l'amplitude caractéristique du signal ERO.

Afin de caractériser plus rigoureusement l'évolution temporelle des phénomènes d'interférence ERO et ERO_{CFS} dans ce cas, nous représentons enfin leurs contrastes respectifs, définis exactement comme précédemment à partir des valeurs centrales Π_0 et de la densité moyenne du fond environnant immédiat. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.6. Outre l'évolution temporelle des contrastes, les encarts de cette figure illustrent les densités de probabilité en impulsion pour un nombre pair ($t = 7000$ et impair $t = 6999$ de kicks). Dans les deux cas, on distingue nettement un pic central en $p = 0$, dont le contraste est proche de 1 comparé au fond exponentiellement localisé. Nous observons par ailleurs que le contraste associé au ERO adopte immédiatement dès les premiers kicks la valeur maximale d'environ $C_{\text{ERO}} \approx 1$. À l'inverse, le contraste ERO_{CFS} est

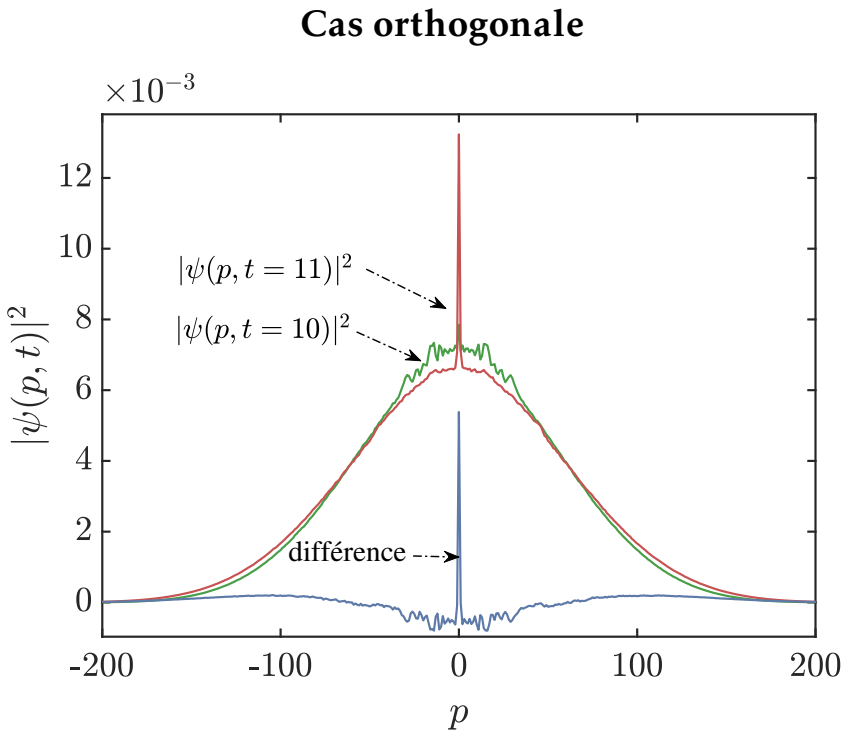


FIGURE 4.5 – Distribution en impulsion $|\psi(p,t)|^2$ pour $\Omega = 0$, représentée à deux instants consécutifs avant la localisation. La courbe bleue représente la différence entre ces deux distributions successives. Les paramètres utilisés ici sont : $K = 20$, $\varepsilon = 0.7$, $\alpha = 0.3$. Une moyenne est réalisée sur 10^5 configurations de phases aléatoires α_p.

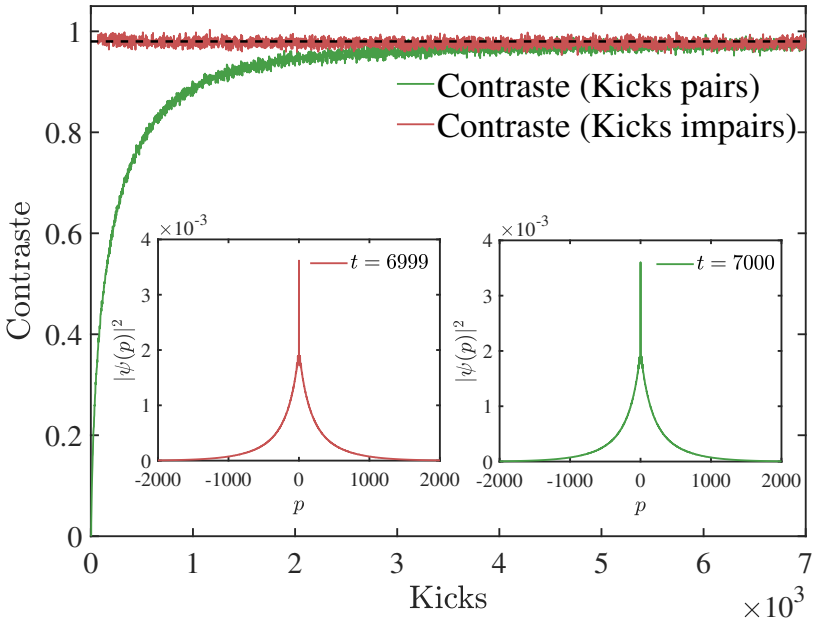


FIGURE 4.6 – Contrastes associés aux phénomènes ERO (courbe rouge) et ERO_{CFS} (courbe verte), en fonction du nombre de kicks. Les paramètres choisis correspondent à ceux présentés dans la figure 4.5. Les encarts montrent la densité de probabilité en impulsion $|\psi(p,t)|^2$ pour un nombre impair ($t = 6999$, gauche), et pair ($t = 7000$, droite) de kicks.

initialement nul, puis croît progressivement jusqu'à atteindre la même valeur maximale d'environ 1 en régime de localisation forte (temps longs). Ce comportement temporel des contrastes est parfaitement similaire à celui observé précédemment par Ghosh et *al.* [12], dans des contextes analogues de systèmes à symétrie orthogonale, confirmant ainsi la pertinence et la robustesse universelle de ces phénomènes d'interférence quantique. Un comportement comparable a également été observé dans le modèle du kicked rotor sans spin, soumis à une modulation sinusoïdale en amplitude de période $N = 5$ [163] mettant en évidence la généralité de la dynamique conjointe des signaux ERO et ERO_{CFS} dans des systèmes unidimensionnels désordonnés. Afin de comprendre l'origine de l'apparition du phénomène ERO dans notre modèle pour un nombre impair de kicks, et sa disparition pour un nombre pair, nous analysons ici les propriétés de symétrie du système dans le cas où $\Omega = 0$. Le Hamiltonien s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + K(1-\alpha)\left(\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right)\sum_n \delta(t-2n) \\ + K(1+\alpha)\left(\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right)\sum_n \delta(t-2n-1)\,,\end{aligned} \tag{4.16}$$

Dans la représentation où $\hat{\sigma}_z$ est diagonale, ce Hamiltonien se décompose en deux sous-systèmes sans spin indépendants pour les composantes $\psi_\uparrow$ et $\psi_\downarrow$. Pour chaque composante, on peut montrer que le Hamiltonien s'écrit sous la forme suivante :

$$\hat{H}_{\uparrow,\downarrow}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + \mathbf{K}_- \cos(\hat{x} \mp \Phi) \sum_n \delta(t - 2n) + \mathbf{K}_+ \cos(\hat{x} \mp \Phi) \sum_n \delta(t - 2n - 1), \tag{4.17}$$

Les expressions explicites de $\mathbf{K}_\pm$ et Φ sont données dans l'équation (4.5).

Considérons à présent l'opérateur d'évolution $\hat{U}_\uparrow$ associé à $\hat{H}_\uparrow(t)$ sur une période de temps (correspondant à deux kicks). Pour des raisons de symétrie, nous définissons cet opérateur d'évolution du temps $2n - 3/2$ au temps $2n - 1/2$. Dans cette construction, l'opérateur d'évolution s'écrit comme le produit :

$$\hat{U} = \hat{U}_{\uparrow,-}\, \hat{U}_{\uparrow,+}, \tag{4.18}$$

avec :

$$\hat{U}_{\uparrow,\pm} = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{4}\right) \exp\left[-\mathrm{i}\mathbf{K}_\pm \cos(\hat{x} - \Phi)\right] \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{4}\right), \tag{4.19}$$

Ce modèle possède une symétrie particulière définie par l'opérateur anti-unitaire (3.3.1) : $\hat{\mathbf{T}}_{\tau=0,a=\Phi} = \hat{\mathcal{T}}\,\hat{\mathcal{P}}_\Phi$, où $\hat{\mathcal{T}}$ désigne la conjugaison complexe, et $\hat{\mathcal{P}}_\Phi$ la parité centrée en Φ : $\hat{x} \longrightarrow 2\Phi - \hat{x}$. Cette opération agit sur les opérateurs d'évolution élémentaires :

$$\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}^{-1}\, \hat{U}_{\uparrow,\pm}\, \hat{\mathbf{T}} = \hat{U}_{\uparrow,\pm}^\dagger, \quad \text{Avec} \quad \hat{\mathbf{T}}^2 = +\hat{1}. \tag{4.20}$$

Cette transformation laisse donc inchangé l'ordre des opérateurs, mais les remplace par leur adjoint. Cette propriété a des conséquences importantes sur la préservation de la symétrie de renversement temporel selon le nombre de kicks appliqués. Lorsque le nombre total de kicks est pair, l'opérateur d'évolution global s'écrit sous la forme répétée :

$$\hat{U}_{\text{pair}} = \left(\hat{U}_{\uparrow,-}\hat{U}_{\uparrow,+}\right)^n, \tag{4.21}$$

L'action de $\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}$ donne alors :

$$\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}^{-1}\, \hat{U}_{\text{pair}}\, \hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi} = \left(\hat{U}_{\uparrow,-}^\dagger \hat{U}_{\uparrow,+}^\dagger\right)^n \neq \hat{U}_{\text{pair}}^\dagger, \tag{4.22}$$

La symétrie de renversement temporel est donc brisée. L'absence d'invariance implique que les trajectoires reliées par $\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}$ ne donnent pas lieu à une interférence constructive, ce qui empêche l'apparition du signal ERO à ces temps. En revanche, pour un nombre impair de kicks, l'opérateur d'évolution s'écrit :

$$\hat{U}_{\text{impair}} = \left(\hat{U}_{\uparrow,-}\hat{U}_{\uparrow,+}\right)^n \hat{U}_{\uparrow,-}, \tag{4.23}$$

Dans ce cas, l'action de $\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}$ conduit à :

$$\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}^{-1}\, \hat{U}_{\text{impair}}\, \hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi} = \left(\hat{U}_{\uparrow,-}^\dagger \hat{U}_{\uparrow,+}^\dagger\right)^n \hat{U}_{\uparrow,-}^\dagger = \hat{U}_{\text{impair}}^\dagger. \tag{4.24}$$

La symétrie de renversement temporel est donc préservée. Cela signifie que les trajectoires reliées par $\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}$ possèdent des amplitudes complexes conjuguées, donnant lieu à une interférence constructive. C'est précisément ce mécanisme qui est à l'origine du signal

ERO.

• **Cas unitaire** ($\alpha = 0$) **:**

Poursuivant notre exploration des symétries dynamiques dans le modèle SDQKR, nous considérons désormais le cas complémentaire où le paramètre $\alpha = 0$, tout en rétablissant le couplage spin-orbite effectif via le terme $\Omega\,\hat{\sigma}_x$. Ce terme, bien qu'indépendant de l'impulsion ou de la position, agit comme une rotation dans l'espace de spin, et engendre un mélange dynamique des composantes spin-up et spin-down entre deux kicks successifs. L'Hamiltonien devient alors :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + (-1)^{\lfloor t \rfloor}\Omega\hat{\sigma}_x + K\left(\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right)\sum_n \delta(t-n), \tag{4.25}$$

où l'alternance temporelle est uniquement introduite via la modulation du terme en $(-1)^{\lfloor t \rfloor}\Omega\hat{\sigma}_x$, tandis que la partie kick est conservée identique à chaque période. L'opérateur d'évolution sur deux kicks successifs (soit une période $T = 2$) s'écrit alors comme :

$$\hat{\mathcal{U}}(T=2) = \underbrace{e^{-\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + \Omega\hat{\sigma}_x\right]}}_{\hat{U}_{\mathrm{prop}_2}}\ \underbrace{e^{-\mathrm{i}\tilde{H}}}_{\hat{U}_{\mathrm{kick}}}\ \underbrace{e^{-\mathrm{i}\left[\frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 - \Omega\hat{\sigma}_x\right]}}_{\hat{U}_{\mathrm{prop}_1}}\ \underbrace{e^{-\mathrm{i}\tilde{H}}}_{\hat{U}_{\mathrm{kick}}}, \tag{4.26}$$

Avec : $\tilde{H} = K\left(\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right)$. Afin d'examiner les conséquences physiques de cette structure, nous avons simulé la densité de probabilité en impulsion $|\psi(p,t)|^2$ à deux temps consécutifs ($t = 10$ pair et $t = 11$ impair) $< t_{\mathrm{loc}}$. Les résultats sont présentés en figure 4.7. Deux comportements opposés émergent :

• Pour $t = 11$ (temps impair), la densité présente un pic négatif en $p = 0$ correspondant à un Anti-ERO d'amplitude $-1/2$.

• Pour $t = 10$ (temps impair), la densité présente un pic en $p = 0$ de facteur approximativement égale à $+1/2$ par rapport au fond gaussien correspondant à un ERO [3]. Cela correspond à une réduction d'un facteur deux par rapport au ERO observé dans le kicked rotor sans spin, appartenant à la classe orthogonale.

Ce résultat met en évidence une **alternance temporelle** entre interférences constructives et destructives. Le système manifeste successivement des signatures caractéristiques de la classe orthogonale (ERO) et de la classe symplectique (anti-ERO), selon la parité du nombre de kicks appliqués.

Pour interpréter cette alternance, considérons l'opérateur d'évolution à un temps impair, par exemple $t = 11$, construit en débutant et en terminant par l'opérateur de kick $\hat{U}_{\mathrm{kick}}$:

$$\hat{U}(t=11) = \hat{U}_{\mathrm{kick}}\left(\hat{U}_{\mathrm{prop}_2}\,\hat{U}_{\mathrm{kick}}\,\hat{U}_{\mathrm{prop}_1}\,\hat{U}_{\mathrm{kick}}\right)^5, \tag{4.27}$$

3. La raison pour laquelle le contraste est de $+1/2$ sera détaillée dans le chapitre 5.

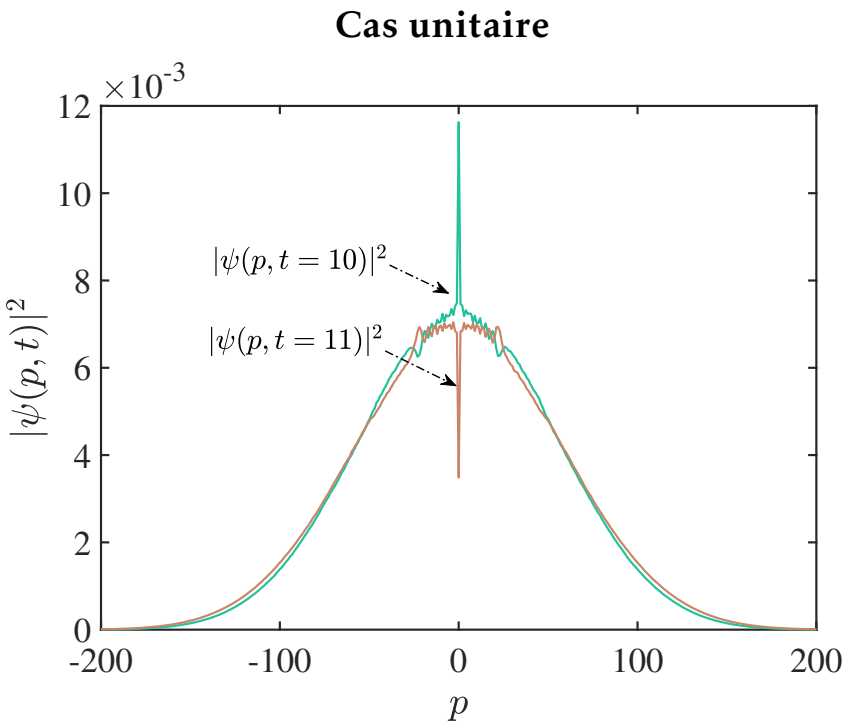


FIGURE 4.7 – Distribution en impulsion $|\psi(p,t)|^2$ pour $\alpha = 0$ à deux instants consécutifs, inférieurs au temps de localisation. Les paramètres utilisés sont : $K = 20$, $\Omega = \sqrt{5}\pi$, $\varepsilon = 0.7$. Une moyenne est effectuée sur 10^5 réalisations des phases aléatoires α_p.

On peut vérifier que cet opérateur est invariant sous l'action de l'opérateur de renversement temporel défini en (3.54), tel que $\hat{\mathbf{T}}^2 = -\hat{1}$. Cette invariance garantit la présence d'interférences destructives caractéristiques de l'anti-ERO aux temps impairs.

En revanche, pour un nombre pair de kicks, par exemple $t = 10$, l'opérateur d'évolution prend la forme suivante :

$$\hat{U}(t=10) = \hat{U}_{\text{kick}}\,\hat{U}_{\text{prop}_1}\,\hat{U}_{\text{kick}}\left(\hat{U}_{\text{prop}_2}\,\hat{U}_{\text{kick}}\,\hat{U}_{\text{prop}_1}\,\hat{U}_{\text{kick}}\right)^4, \tag{4.28}$$

Dans ce cas, $\hat{U}(t=10)$ n'est plus invariant sous $\hat{\mathbf{T}}$ défini en (3.54), mais devient invariant sous un opérateur de renversement temporel non conventionnel défini par $\hat{\mathbf{T}}_* = \mathrm{i}\hat{\sigma}_x\hat{K}_p$ [186], qui satisfait $\hat{\mathbf{T}}_*^2 = +\hat{1}$, dont l'action de cet opérateur sur les composantes élémentaires du système est donnée par :

$$\hat{\mathbf{T}}_*^{-1}\,\hat{U}_{\text{prop}_{\{1,2\}}}\,\hat{\mathbf{T}}_* = \hat{U}^\dagger_{\text{prop}_{\{1,2\}}}, \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{T}}_*^{-1}\,\hat{U}_{\text{kick}}\,\hat{\mathbf{T}}_* = \hat{U}^\dagger_{\text{kick}}. \tag{4.29}$$

Cette symétrie, dont le carré est égal à l'identité, correspond à celle de la classe orthogonale et explique l'apparition d'un ERO aux temps pairs.

Cette alternance temporelle peut être quantifiée en analysant l'évolution du contraste au cours du temps, comme illustré sur la figure 4.8. On y observe nettement des oscillations de contraste entre les kicks pairs et impairs : les kicks impairs sont marqués par la

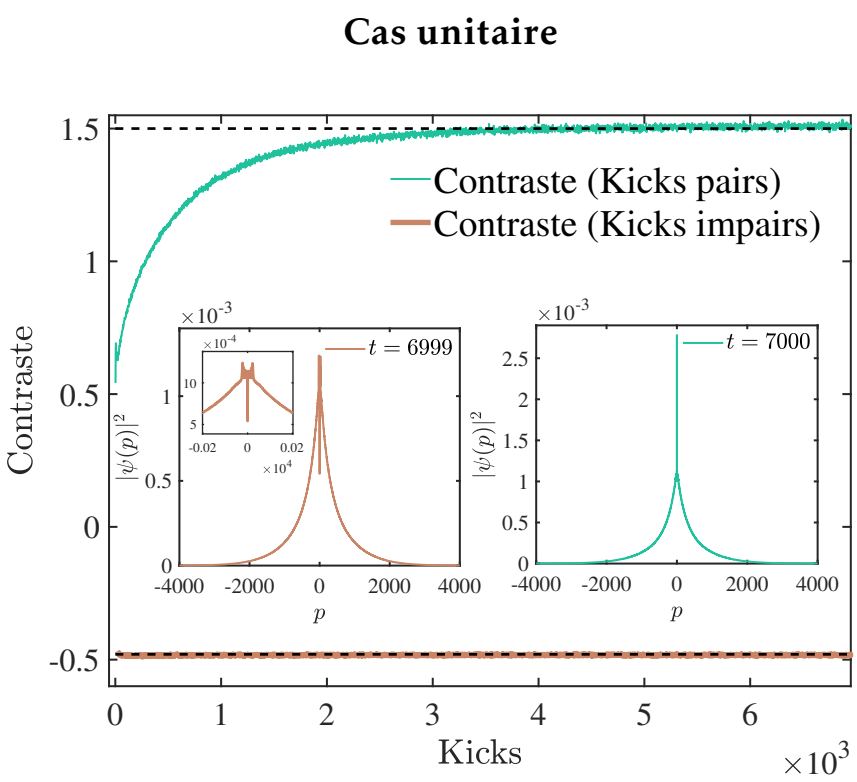


FIGURE 4.8 – Évolution temporelle des contrastes associés aux phénomènes Anti-ERO et (ERO + ERO_{CFS}) en fonction du nombre de kicks. Les paramètres choisis correspondent à ceux présentés dans la figure 4.7. Les encarts montrent les densités de probabilité dans l'espace des impulsions : pour $t = 6999$ (kicks impairs), on observe un pic négatif en $p = 0$ de contraste $\simeq -0.5$, signature persistante de l'anti-ERO, tandis que pour $t = 7000$ (kicks pairs), on distingue un pic en $p = 0$ d'amplitude $\simeq 1.5$, résultant de la superposition constructive du ERO (contribution $\simeq 0.5$) et du ERO_{CFS} (contribution $\simeq 1$) sur un fond exponentiellement localisé.

présence d'un Anti-ERO, tandis que les kicks pairs traduisent la contribution combinée d'un ERO et ERO_{CFS}. Plus précisément, la série de pics négatifs associée aux kicks impairs reste d'amplitude constante au cours du temps, témoignant d'un contraste impair approximativement égal à -0.5 tout au long de la dynamique. En revanche, le contraste pair présente une évolution significative : il débute autour de $+0.5$ (signature typique du ERO), puis croît progressivement pour atteindre une valeur asymptotique d'environ 1.5, traduisant ainsi l'émergence du ERO_{CFS} aux temps longs. Les encarts de la figure 4.8 illustrent ces signatures sur la densité de probabilité $|\psi(p,t)|^2$ dans l'espace des impulsions : pour $t = 6999$ (kicks impairs), on observe un pic négatif en $p = 0$ caractéristique de l'Anti-ERO, tandis que pour $t = 7000$ (kicks pairs), apparaît un pic positif en $p = 0$ d'amplitude $\simeq 1.5$, résultant de la superposition constructive d'un ERO ($+0.5$) et du ERO_{CFS} ($+1$) sur le fond exponentiellement localisé. Après avoir analysé en détail les dynamiques interférentielles dans les cas particuliers $\Omega = 0$, $\alpha = 0$, ainsi que dans le cas général où tous les paramètres sont non nuls, nous avons mis en évidence une alternance temporelle entre signatures caractéristiques des classes de symétrie orthogonale (ERO) et symplectique (Anti-ERO), ainsi que l'émergence progressive du

pic $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ aux temps longs. Cette richesse de comportements soulève naturellement la question de la classe de symétrie du système lorsqu'on s'intéresse non plus à des instants donnés, mais à son évolution globale.

Dans ce cadre, il devient essentiel d'étudier la fonction d'échelle $\beta(g)$, afin de confirmer la classe d'universalité à laquelle appartient le modèle pour les paramètres considérés. Cette approche offre un regard complémentaire aux signatures dynamiques observées précédemment.

4.2 Comportement de la fonction d'échelle $\beta(g)$ dans le modèle SDQKR

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la fonction d'échelle $\beta(g)$ pour kicked rotor, définie comme la dérivée logarithmique de la conductance du système, $g = \sqrt{\langle p^2 \rangle_t}/t$, par rapport à sa taille, $L = \sqrt{\langle p^2 \rangle_t}$. Dans le cas spécifique du modèle SDQKR, caractérisé par une période temporelle $T = 2$, il est nécessaire d'ajuster cette définition pour prendre en compte explicitement cette périodicité. Il est démontré dans [9] que le kicked rotor quantique modulé de période N peut être mappé sur un modèle d'Anderson quasi-unidimensionnel, avec une infinité de sites selon la direction longitudinale et N sites transverses, représentant ainsi N canaux ouverts dans le sens de la propagation [187]. Par analogie directe, la conductance doit être redéfinie selon :

$$g = \frac{\sqrt{\langle p^2 \rangle_t}}{t/2}. \tag{4.30}$$

Nous comparons désormais les fonctions d'échelle $\beta(g)$ obtenues pour les trois classes de symétrie—orthogonale, unitaire et symplectique—à l'aide de deux approches numériques distinctes du SDQKR, déjà discutées dans le chapitre précédent. La première correspond au modèle standard, dans lequel la partie quadratique du de la propagation libre, $\exp\left[-\mathrm{i}\,\hat{p}^2/2\right]\hat{1}_2\,|m,\beta\rangle$, est déterministe avec les phases $\varepsilon_p = \exp\left[-\mathrm{i}(m+\beta)^2/2\right]$. La seconde est le modèle modifié (RSDQKR), où ces phases déterministes sont remplacées par des phases aléatoires indépendantes α_p, permettant une véritable moyenne statistique sur un désordre explicitement introduit.

La figure 4.9(a) présente les résultats obtenus à partir du RSDQKR. La figure 4.9(b), quant à elle, correspond au cas standard, où le désordre provient exclusivement de la dépendance continue en β des phases dynamiques déterministes. Les deux approches reproduisent globalement les mêmes tendances qualitatives. En particulier, dans le régime diffusif ($1/g \to 0$), les courbes issues du modèle RSDQKR convergent clairement vers la valeur théorique $\beta(g) \approx -1$.Ce même comportement apparaît dans la version standard du SDQKR, mais la convergence y est moins visible : les corrélations temporelles intrinsèques entre kicks génèrent un bruit supplémentaire, de sorte que la moyenne sur les quasi-impulsions β ne suffit pas à lisser totalement les oscillations, comme le montre l'encart de la figure 4.9(b).

En revanche, des différences quantitatives apparaissent entre ces deux approches. Les

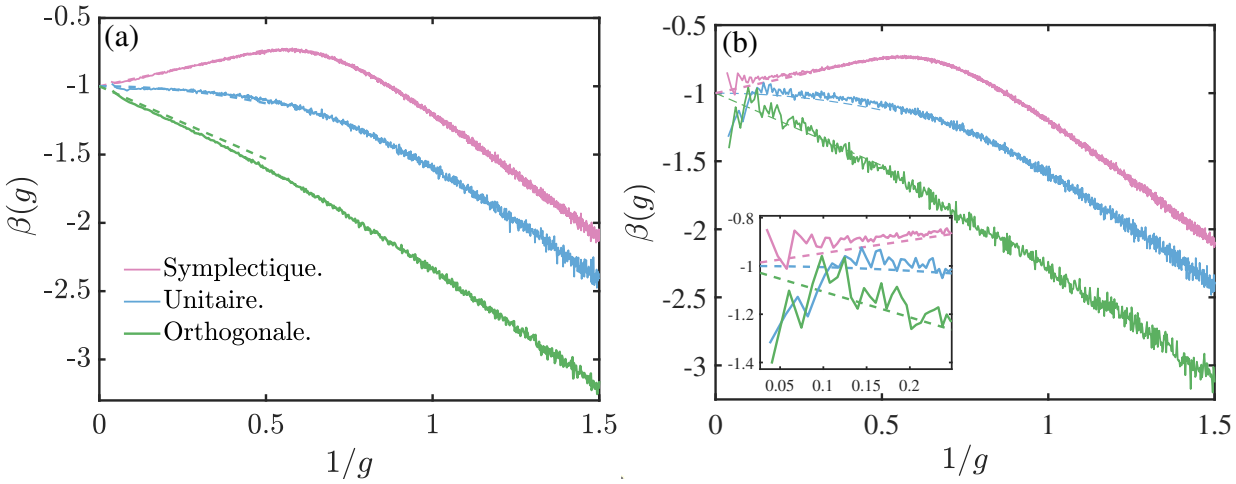


FIGURE 4.9 – La fonction d'échelle $\beta(g)$ a été calculée pour trois classes de symétrie distinctes (symplectique, unitaire et orthogonale) à partir du modèle SDQKR, dans sa version désordonnée (a) ainsi que dans sa version standard (b). Les résultats sont obtenus en moyennant sur 10^4 réalisations de phases aléatoires dans le cas désordonné, et sur 10^4 valeurs du quasi-impulsion β dans le cas standard. Pour la classe symplectique, les paramètres choisis sont $K = 20$, $\Omega = \sqrt{5}\pi$, $\varepsilon = 0.7$ et $\alpha = 0.8$. La classe unitaire est obtenue avec les mêmes valeurs de K, Ω et ε, mais en prenant $\alpha = 0$. Enfin, la classe orthogonale correspond à $\Omega = 0$, $\varepsilon = 0.7$, $\alpha = 0.3$, avec toujours $K = 20$.

courbes issues du modèle RSDQKR présentent un profil beaucoup plus régulier et moins bruité, particulièrement visibles à la fois dans le régime diffusif ($g \gg 1$) et dans le régime

localisé ($g \ll 1$).

Enfin, revenons brièvement sur le cas particulier $\alpha = 0$. Dans la section précédente, nous avons mis en évidence que, pour ce choix spécifique de paramètres, les contrastes ERO et Anti-ERO révèlent clairement une alternance locale des symétries : orthogonale pour les temps pairs, symplectique pour les temps impairs. Cependant, cette alternance temporelle régulière se traduit globalement par une compensation statistique des contributions constructives (ERO) et destructives (Anti-ERO) dans la dynamique moyenne de $\langle p^2 \rangle_t$. Cette quantité, directement liée au transport global, devient donc insensible à la symétrie locale du système, résultant en une dynamique effective sans invariance temporelle. Par conséquent, la fonction $\beta(g)$ correspondante affiche clairement un comportement typique de la classe unitaire. Ainsi, nous constatons que, bien que le système manifeste localement les caractéristiques des classes orthogonale et symplectique, il se comporte globalement—du point de vue du transport quantique—comme appartenant à la classe unitaire. Cette distinction entre symétrie locale et globale constitue une observation importante de notre étude.

Afin de valider l'idée selon laquelle l'alternance temporelle des interférences constructives (ERO) et destructives (Anti-ERO) conduit à un comportement global appartenant à la classe unitaire, nous proposons d'explorer un modèle modifié du kicked rotor avec

spin 1/2, dont la période fondamentale correspond à deux kicks successifs ($T = 2$), défini par le Hamiltonien suivant :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + \hat{H}_- \sum_n \delta(t - 2n) + \hat{H}_+ \sum_n \delta(t - 2n - 1), \tag{4.31}$$

avec les opérateurs de kicks donnés par :

$$\hat{H}_\pm = K\left[\cos(\hat{x})\hat{1}_2 \pm \frac{\mu}{2}\cos(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right]. \tag{4.32}$$

En examinant explicitement la symétrie temporelle du système, nous constatons qu'à temps impair, l'opérateur d'évolution associé à ce modèle est invariant sous l'action de l'opérateur de renversement temporel non conventionnel $\hat{\mathbf{T}}_* = \mathrm{i}\hat{\sigma}_x\hat{K}_p$ avec $\hat{\mathbf{T}}_*^2 = +\hat{1}$, ce qui explique l'apparition d'un ERO. En revanche, à temps pair, cet opérateur devient invariant sous l'action d'un autre opérateur de renversement temporel, à savoir $\hat{\mathbf{T}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_y\hat{K}_p$ avec $\hat{\mathbf{T}}^2 = -\hat{1}$, conduisant ainsi à un Anti-ERO. Cette alternance entre ces deux régimes d'interférences est clairement illustrée par les résultats numériques présentés sur la figure 4.10.

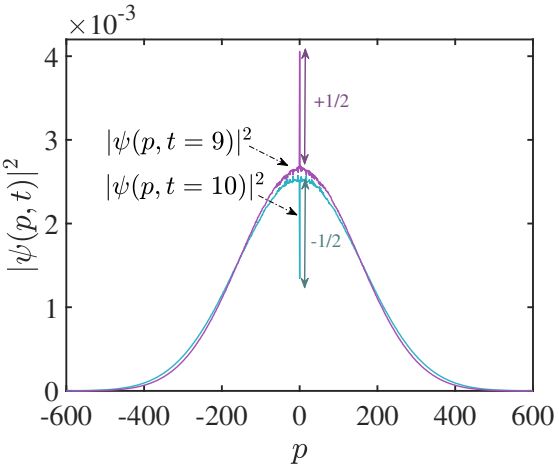


FIGURE 4.10 – Distribution en impulsion $|\psi(p,t)|^2$ pour le modèle (4.31), représentée à deux instants consécutifs dans le régim diffusif. Les paramètres utilisés ici sont : $K = 20$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 6$. Une moyenne est réalisée sur 10^5 configurations de phases aléatoires α_p.

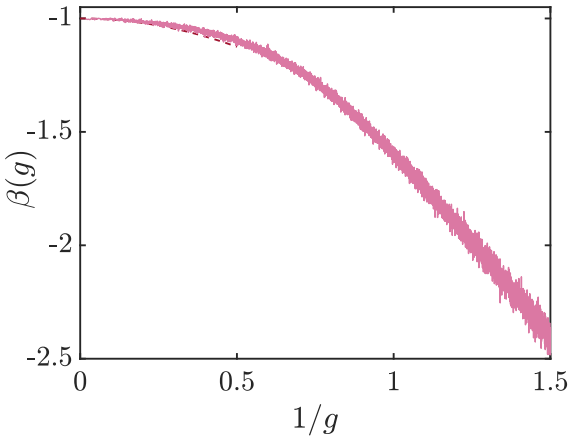


FIGURE 4.11 – Fonction d'échelle $\beta(g)$ associée au modèle modifié à deux périodes (4.31), révélant un comportement typique de la classe unitaire. Les paramètres utilisés sont identiques à ceux de la figure 4.10. Une moyenne est effectuée sur un ensemble de 10^4 réalisations indépendantes des phases aléatoires α_p.

En outre, nous avons calculé numériquement la fonction d'échelle $\beta(g)$ associée à ce modèle, représentée sur la figure 4.11. Le résultat montre de manière convaincante que l'alternance temporelle stricte entre les interférences constructives et destructives aboutit

à une fonction $\beta(g)$ qui coïncide parfaitement avec le comportement attendu pour la classe unitaire. Ces observations confortent donc notre interprétations précédentes, et confirment que la dynamique globale du système, malgré la présence locale d'interférences spécifiques à des classes de symétrie orthogonale ou symplectique, appartient bien à la classe unitaire du point de vue du transport quantique.

4.3 Statistiques spectrales du modèle SDQKR

Pour compléter l'analyse des signatures de symétrie du modèle SDQKR, nous étudions ici les fluctuations spectrales de son opérateur de Floquet, en suivant une approche similaire à celle utilisée pour le modèle TBS, tout en adaptant la procédure au contexte spécifique du kicked rotor à deux périodes avec spin.

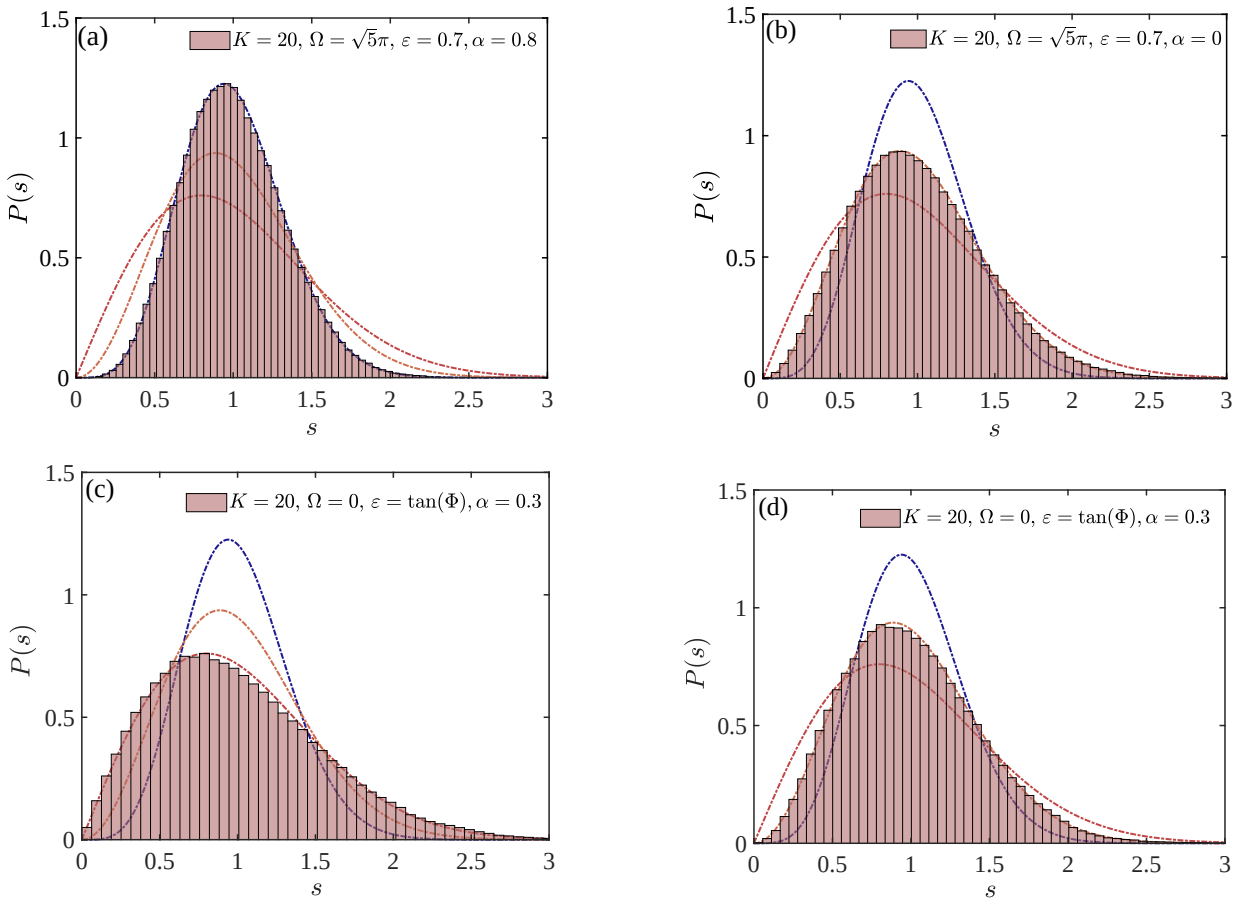


FIGURE 4.12 – Histogrammes des espacements de niveaux normalisés pour les trois classes de symétrie (symplectique, unitaire, orthogonale) du modèle (4.2), comparés aux distributions théoriques (1.32). Les figures (a) et (b) correspondent respectivement aux classes symplectique et unitaire. Les figures (c) et (d) illustrent le cas orthogonal $\Omega = 0$, où le choix de Φ est crucial pour obtenir les statistiques spectrales correctes. Pour (c), Φ est un multiple entier de $\Phi = \pi/N$ c'est-à-dire $\Phi = m\pi/N$ (dans l'exemple montré, nous avons pris $m = 2$). Pour (d), Φ est un multiple impair de $\pi/2N$, c'est-à-dire $\Phi = (2l+1)\pi/2N$ (ici, nous avons choisi $l = 2$). Les détails concernant l'importance du choix de Φ sont discutés dans l'annexe C.

L'opérateur de Floquet est construit numériquement en discrétisant les espaces de position et d'impulsion à l'aide d'une base de taille $N = 128$ pour chaque composante de spin, soit une dimension totale de $2N = 256$. la partie cinétique de l'évolution libre est représentée $\exp\left[-i\hat{p}^2/2\right]|m, \beta\rangle = \exp\left[-i(m+\beta)^2/2\right]|m, \beta\rangle$ échantillonné aléatoirement pour introduire un désordre effectif. L'opérateur de Floquet est ensuite diagonalé pour chaque réalisation de β, et les quasi-énergies correspondantes $\varepsilon_n \in [0, 2\pi[$ sont extraites.

Comme nous l'avons vu dans la section 3.4.3 du chapitre 3, afin d'éviter les effets liés à la dégénérescence de Kramers, seule une quasi-énergie sur deux est conservée dans chaque spectre, permettant une analyse fiable des espacements normalisés s_n. La distribution $P(s)$ est obtenue en réalisant un histogramme des espacements normalisés, calculés sur un grand ensemble de réalisations indépendantes correspondant aux différentes valeurs du quasi-impulsion β. Les signatures issues des statistiques des niveaux sont en accord avec la fonction d'échelle $\beta(g)$, qui renseigne sur la classe de symétrie globale du système. Autrement dit, pour chaque choix de paramètres $(\Omega, \varepsilon, \alpha)$, la distribution $P(s)$ (après élimination d'une quasi-énergie sur deux afin d'écarter la dégénérescence de Kramers) et la courbe $\beta(g)$ conduisent à la même classification de Dyson–Wigner.

Nous avons également calculé la statistique des rapports d'espacements consécutifs $\tilde{r}_n$, cf. Eq. (3.75). La moyenne $\langle\tilde{r}_n\rangle$ est estimée à l'aide d'une procédure bootstrap, ce qui fournit une incertitude statistique fiable. Les résultats sont réunis dans le tableau ci-dessous, où ils sont confrontés aux valeurs théoriques attendues pour les trois classes d'universalité spectrale. Cette seconde vérification confirme la classification déjà déduite de la fonction d'échelle $\beta(g)$ et de la distribution $P(s)$.

Classe	$\langle\tilde{r}_n\rangle$ (simulation)	$\langle\tilde{r}_n\rangle$ (théorique) [176]
CSE	0.6743 ± 0.0001	0.6744
CUE	0.6006 ± 0.0001	0.5996
COE	0.5289 ± 0.0001	0.5307

Tableau 4.1 – Valeurs moyennes du rapport d'espacements consécutifs $\langle\tilde{r}_n\rangle$ obtenues par simulation pour les trois classes de symétrie (CSE, CUE, COE), comparées aux prédictions théoriques issues de la référence [176].

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la réalisation expérimentale du modèle TBS, bien qu'extrêmement riche sur le plan théorique, se heurte à des obstacles techniques majeurs liés à la complexité des couplages spin–orbite requis et aux contraintes temporelles imposées par la dynamique impulsionnelle. Pour surmonter ces difficultés, nous avons introduit le modèle SDQKR (Spin-1/2 Double-Quantum Kicked Rotor), conçu pour préserver l'essentiel de la physique du TBS tout en étant beaucoup plus accessible expérimentalement.

L'analyse détaillée de ce modèle a mis en évidence plusieurs résultats majeurs. Premièrement, nous avons montré que le SDQKR permet d'explorer les trois classes universelles

de Dyson–Wigner (orthogonale, unitaire et symplectique), en modulant de manière appropriée ses paramètres internes. Deuxièmement, nous avons mis en évidence l'alternance temporelle entre phénomènes d'interférence constructive (ERO) et destructive (anti-ERO), selon la parité du nombre de kicks, ainsi que l'émergence progressive du pic de $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ comme signature robuste de la localisation. Cette richesse de comportements rend le modèle particulièrement attractif pour l'étude expérimentale des phénomènes d'(anti)localisation faible.

Enfin, l'étude du transport global à travers la fonction d'échelle $\beta(g)$, complétée par l'analyse des statistiques spectrales, a permis de confirmer la classification universelle du système. En particulier, nous avons montré que l'alternance régulière entre ERO et l'anti-ERO se compense statistiquement, conduisant à une dynamique globale caractéristique de la classe unitaire. Cette observation souligne l'importance de distinguer entre signatures locales (liées à des instants spécifiques) et comportements globaux (relevant du transport quantique effectif).

Il est important de souligner que notre équipe a réussi à réaliser expérimentalement ce modèle en utilisant un condensat d'atomes froids, et a déjà obtenu des résultats préliminaires mettant en évidence des signatures de l'antilocalisation. Ces premiers succès expérimentaux confirment la pertinence du SDQKR comme plateforme réaliste pour l'étude de la localisation et de l'antilocalisation faibles dans les systèmes quantiques désordonnés.

Chapitre 5

Origine des interférences cohérentes et influence du spin sur la probabilité de retour à l'origine

Sommaire du présent chapitre

5.1 Doublement de la probabilité de retour à l'origine dans le QKR sans spin **118**
5.2 Contraste du pic de retour à l'origine dans le modèle TBS. **122**
5.2.1 classe symplectique 122
5.2.2 Classe unitaire 126
5.2.3 Classe orthogonale 128
5.3 Contraste du pic de retour à l'origine dans le modèle SDQKR **130**
5.3.1 Cas symplectique 130
5.3.2 Cas unitaire 132
5.3.3 Cas orthogonale 135
5.4 Conclusion **137**

Dans les chapitres précédents, nous avons analysé les distributions de probabilité totales, c'est-à-dire après trace sur les degrés de liberté de spin. Dans le présent chapitre, nous allons plus loin : nous suivons l'évolution temporelle des signatures d'interférences pour chaque composante de spin prise individuellement. En distinguant explicitement les canaux $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, nous mettons en évidence des mécanismes d'interférence (ERO, anti-ERO) qui restent masqués dans la probabilité totale et apportons ainsi de nouveaux éléments de compréhension sur leur origine et leur dépendance aux classes de symétrie.

Dans un premier temps, nous rappellerons pourquoi un système sans spin appartenant

à la classe orthogonale manifeste un contraste de rétrodiffusion cohérente égal à +1, correspondant à un doublement de la probabilité au point $p = 0$ par rapport au fond gaussien. Nous expliciterons le mécanisme d'interférence constructive entre trajectoires réciproques, et soulignerons l'importance de l'invariance par renversement du temps pour cette interférence maximale.

Dans un second temps, nous analyserons l'influence d'un degré de liberté interne (spin-1/2) sur ces interférences. Nous montrerons comment, pour les systèmes relevant de la classe symplectique (avec spin-orbite), ces mêmes interférences deviennent destructives, conduisant à un contraste négatif caractéristique de $-1/2$. À travers l'étude des modèles TBS et SDQKR introduits précédemment, nous examinerons comment l'apparition de symétries géométriques supplémentaires modifie ces phénomènes interférentiels. Nous comparerons notamment les effets d'une et deux symétries géométriques supplémentaires dans le modèle TBS, tel qu'il a été présenté dans la littérature, et analyserons en détail le comportement de la probabilité de retour au point d'origine dans les trois classes de symétrie (orthogonale, unitaire et symplectique), que permet également d'explorer le modèle SDQKR que nous avons introduits dans ce manuscrit.

Ce chapitre vise donc à fournir une compréhension approfondie des mécanismes d'interférences cohérentes dans le kicked rotor, avec ou sans spin, en mettant en lumière le rôle fondamental joué par les symétries temporelles et géométriques dans l'émergence des phénomènes remarquables de localisation et d'antilocalisation faibles observés numériquement dans les chapitres précédents.

5.1 Doublement de la probabilité de retour à l'origine dans le kicked rotor sans spin.

Dans le cas du kicked rotor sans spin, si l'on trace la densité de probabilité dans l'espace des impulsions dans le régime diffusif ($t < t_{\mathrm{loc}}$), on observe un pic en $p = 0$ de facteur deux comparé au fond gaussien, lorsque l'on considère une distribution initiale de largeur nulle $\psi(p, t = 0) = \delta(p)$. La figure 5.1 illustre ce phénomène, qui correspond au doublement de la probabilité de retour à l'origine (ERO).

Afin d'illustrer le phénomène de doublement de la probabilité de retour à l'origine (ERO) dans le contexte du kicked rotor sans spin, nous introduisons les chemins directs et inversés correspondant à ce modèle. Étant donné que le kicked rotor peut être assimilé à un modèle de type tight-binding désordonné dans l'espace des impulsions, on peut considérer une distribution discrète de "sites" en impulsion, numérotés par des entiers.

Lorsqu'un kick a lieu, il transfère une quantité d'impulsion Δp à la particule, la faisant passer du site $p = m^{(i)}$ au site $p = m_j^{(i)}$. Entre chaque kick, la particule subit une propagation libre, conservant ainsi son impulsion constante. Un "chemin" dans ce système peut être visualisé comme une trajectoire partant du site $p = 0$, marquée par des sauts entre les différents sites d'impulsion à chaque kick successif. La figure 5.2(a) montre un exemple de chemin direct : l'axe vertical représente le numéro du kick (de 0 à 4 ici), et l'axe horizontal indique les sites d'impulsion, identifiés par des entiers. Les flèches bleues

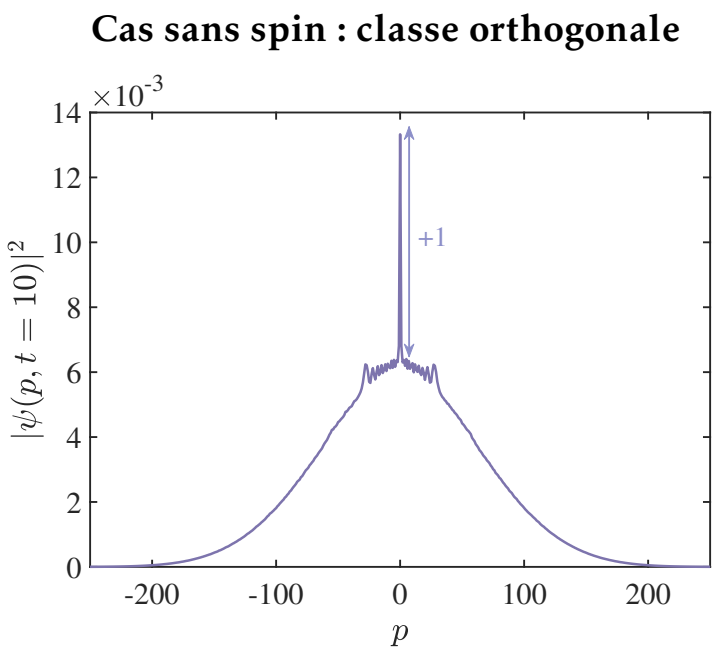


FIGURE 5.1 – Distribution en impulsion après 10 kicks dans le régime diffusif du modèle $\hat{H}(t) = \hat{p}^2/2 + K\cos(\hat{x})\sum_n \delta(t-n)$. Les paramètres utilisés ici sont : $K/\bar{k} = 30, \bar{k} = 0.8$, une moyenne est effectuée sur 10^5 réalisations des phases aléatoires α_p.

représentent les transferts d'impulsions Δp, marquant les sauts d'un site à l'autre, tandis que les lignes grises représentent les phases de propagation libre, pendant lesquelles l'impulsion de la particule reste inchangée. Le chemin direct de la figure 5.2(a) et le

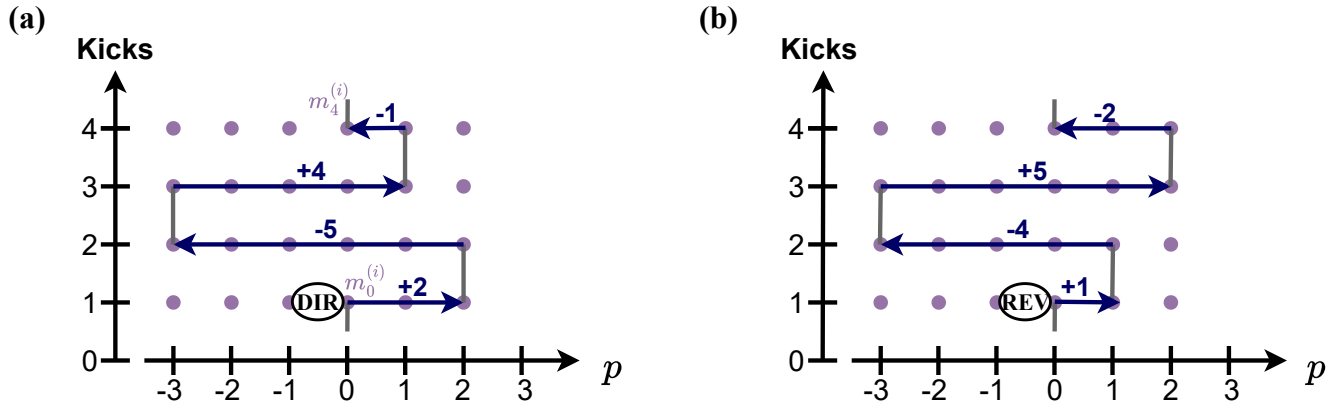


FIGURE 5.2 – (a) Chemin direct partant de $p = m = 0$ et revenant après 4 kicks à $p = m' = 0$. (b) Chemin renversé dans le temps du chemin (a) partant de $p = 0$ et revenant après 4 kicks à $p = 0$.

chemin inversé de la figure 5.2(b) interfèrent de manière constructive, contribuant ainsi au phénomène de retour à l'origine dans ce système.

Pour mettre ce phénomène en évidence de manière explicite, nous associons à chaque chemin (trajectoire dans l'espace des impulsions) une amplitude complexe et une phase.

Un chemin est ici défini comme une suite fixe de sites intermédiaires $\{m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, m_3^{(i)}\}$ reliant deux impulsions m et m' en un nombre donné de kicks. L'amplitude complexe associée à un chemin direct donné i, reliant les sites m à m' après quatre kicks, s'écrit :

$$A^{(i)}_{m\to m';n} := \prod_{k=1}^{4} \left\langle m_k^{(i)} \middle| \hat{U}_{\text{sym}} \middle| m_{k-1}^{(i)} \right\rangle, \qquad \text{avec} \quad m_0^{(i)} = m, \quad m_4^{(i)} = m', \quad n = 4, \tag{5.1}$$

où $\hat{U}_{\text{sym}}$ est l'opérateur d'évolution symétrisé, donné par :

$$\hat{U}_{\text{sym}} = e^{-\frac{\mathrm{i}}{2k}\frac{\hat{p}^2}{2}}\, e^{-\mathrm{i}\frac{K}{k}\cos(\hat{x})}\, e^{-\frac{\mathrm{i}}{2k}\frac{\hat{p}^2}{2}}. \tag{5.2}$$

Dans cette notation, l'indice i désigne un chemin fixé, c'est-à-dire une suite particulière de sites intermédiaires.

La figure 5.2(a) correspond par exemple à un tel chemin i, partant de $m = 0$ et arrivant à $m' = 0$, tandis que la figure 5.2(b) représente le chemin conjugué $\bar{i}$ obtenu par renversement du temps.

Le chemin renversé $\bar{i}$ associé au chemin direct i, obtenu par l'inversion temporelle de la trajectoire (cf. figure 5.2(b)), possède une amplitude complexe donnée par :

$$A^{(\bar{i})}_{m'\to m;n} := \prod_{k=1}^{4} \left\langle m_{k-1}^{(i)} \middle| \hat{U}_{\text{sym}} \middle| m_k^{(i)} \right\rangle = \prod_{k=1}^{4} \left[\left\langle m_k^{(i)} \middle| \hat{U}_{\text{sym}}^{\dagger} \middle| m_{k-1}^{(i)} \right\rangle \right]^*, \tag{5.3}$$

Dans le cas du kicked rotor sans spin, on a vu que la symétrie pertinente est décrite par l'opérateur anti-unitaire $\hat{K}_p = \hat{\mathcal{P}}\hat{K}$, produit de la parité spatiale et de la conjugaison complexe, agissant comme :

$$\hat{K}_p : \hat{x} \to -\hat{x}, \quad \hat{p} \to \hat{p}, \quad t \to -t. \tag{5.4}$$

Dans la base des états discrets d'impulsion $|m\rangle$, on a :

$$\hat{K}_p|m\rangle = |m\rangle, \quad \text{et} \quad \hat{K}_p^{-1}\hat{U}_{\text{sym}}\hat{K}_p = \hat{U}_{\text{sym}}^{\dagger}. \tag{5.5}$$

On peut alors démontrer l'égalité entre les amplitudes des chemins directs et conjugués schématisé dans la figure 5.2. En considérant un chemin direct à quatre étapes passant par des sites intermédiaires $m_j^{(i)}$, on a :

$$\begin{aligned}
A^{(i)}_{m\to m';n} &= \langle m'|\hat{U}_{\text{sym}}|m_3^{(i)}\rangle \cdot \langle m_3^{(i)}|\hat{U}_{\text{sym}}|m_2^{(i)}\rangle \cdot \langle m_2^{(i)}|\hat{U}_{\text{sym}}|m_1^{(i)}\rangle \cdot \langle m_1^{(i)}|\hat{U}_{\text{sym}}|m\rangle \\
&= \langle m'|(\hat{K}_p^{-1}\underbrace{\hat{K}_p\hat{U}_{\text{sym}}\hat{K}_p^{-1}}_{\hat{U}_{\text{sym}}^{\dagger}}\hat{K}_p|m_3^{(i)}\rangle) \cdot \langle m_3^{(i)}|(\hat{K}_p^{-1}\hat{K}_p\hat{U}_{\text{sym}}\hat{K}_p^{-1}\hat{K}_p|m_2^{(i)}\rangle) \\
&\quad \cdot \langle m_2^{(i)}|(\hat{K}_p^{-1}\hat{K}_p\hat{U}_{\text{sym}}\hat{K}_p^{-1}\hat{K}_p|m_1^{(i)}\rangle) \cdot \langle m_1^{(i)}|(\hat{K}_p^{-1}\hat{K}_p\hat{U}_{\text{sym}}\hat{K}_p^{-1}\hat{K}_p|m\rangle) \\
&= \langle m'|\hat{K}_p^{-1}\hat{U}_{\text{sym}}^{\dagger}|m_3^{(i)}\rangle \cdot \langle m_3^{(i)}|\hat{K}_p^{-1}\hat{U}_{\text{sym}}^{\dagger}|m_2^{(i)}\rangle \cdot \langle m_2^{(i)}|\hat{K}_p^{-1}\hat{U}_{\text{sym}}^{\dagger}|m_1^{(i)}\rangle \cdot \langle m_1^{(i)}|\hat{K}_p^{-1}\hat{U}_{\text{sym}}^{\dagger}|m\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle m_3^{(i)}|\hat{U}_{\text{sym}}|m'\rangle \cdot \langle m_2^{(i)}|\hat{U}_{\text{sym}}|m_3^{(i)}\rangle \cdot \langle m_1^{(i)}|\hat{U}_{\text{sym}}|m_2^{(i)}\rangle \cdot \langle m|\hat{U}_{\text{sym}}|m_1^{(i)}\rangle$$
$$= \langle m|\hat{U}_{\text{sym}}|m'\rangle = A^{(\bar{i})}_{m'\to m;\,n}\,, \tag{5.6}$$

Lors du passage de la deuxième à la troisième égalité de l'équation ci-dessus, nous avons utilisé les propriétés des opérateurs anti-unitaires, qui requièrent une manipulation soigneuse des notations de Dirac. En particulier, dans le cas des opérateurs anti-unitaires, l'action sur les bra et les ket n'est plus identique, contrairement aux opérateurs linéaires. La règle suivante s'applique :

$$\langle\phi|(\hat{K}_p\,|\psi\rangle) = \left[(\langle\phi|\,\hat{K}_p)|\psi\rangle\right]^* = \langle\psi|(\hat{K}_p^{-1}\,|\phi\rangle). \tag{5.7}$$

Notons $\mathcal{P}_{\text{Tot}}(m \to m';n)$ la probabilité totale de transition pour que le système passe d'un état initial $|m\rangle$ à un état final $|m'\rangle$ en un temps n (par exemple après n kicks). Formellement, cette probabilité de transition s'exprime comme le carré du module de l'amplitude de propagation en n pas de temps :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}(m \to m';\,n) = |\langle m'|\,\hat{U}^{(n)}_{\text{sym}}\,|m\rangle|^2, \tag{5.8}$$

Ici $\langle m'|\,\hat{U}^{(n)}_{\text{sym}}\,|m\rangle$ représente la somme des amplitudes correspondant à tous les chemins possibles menant de m à m' en n étapes. On peut ainsi décomposer cette amplitude comme une somme sur les chemins i :

$$\langle m'|\,\hat{U}^{(n)}\,|m\rangle = \sum_i A^{(i)}_{m\to m';\,n}\,, \tag{5.9}$$

La probabilité est alors le module carré de cette somme d'amplitudes :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}(m \to m';\,n) = |\langle m'|\,\hat{U}^{(n)}_{\text{sym}}\,|m\rangle|^2 = \sum_{i,j} A^{(i)}_{m\to m';\,n}\left[A^{(j)}_{m\to m';\,n}\right]^*, \tag{5.10}$$

Cette expression générale peut être décomposée explicitement en deux parties :

• une partie, dite « classique », correspondant à la somme des probabilités individuelles de chaque chemin,

• une partie, dite « interférentielle », impliquant des couples de chemins distincts :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}(m \to m';n) = \underbrace{\sum_i \left|A^{(i)}_{m\to m';\,n}\right|^2}_{\text{terme classique}} + \underbrace{\sum_{i\neq j} A^{(i)}_{m\to m';\,n}\left[A^{(j)}_{m\to m';\,n}\right]^*}_{\text{terme d'interférence}}, \tag{5.11}$$

Lorsqu'on effectue une moyenne sur le désordre, cette contribution interférentielle s'annule en général, car les phases accumulées sur deux chemins différents sont statistiquement indépendantes :

$$\overline{A^{(i)}_{m\to m';n}\left[A^{(j)}_{m\to m';n}\right]^*} = 0 \quad \text{pour deux chemins quelconques } i \neq j. \tag{5.12}$$

Il existe toutefois une exception importante : lorsque le système est invariant par renversement du temps — c'est-à-dire qu'il appartient à la classe orthogonale, ce qui est le cas ici —, alors à chaque chemin direct i, on peut associer un chemin inversé noté $\bar{i}$, allant de m' à m, dont l'amplitude complexe est exactement égale à celle du chemin direct. C'est précisément ce que nous avons démontré dans l'équation (5.1).

$$A^{(\bar{i})}_{m'\to m;n} = \left[A^{(i)}_{m\to m';n}\right]^*, \tag{5.13}$$

Ainsi, la contribution d'interférence associée à la paire $(i,\bar{i})$:

$$A^{(i)}_{m\to m';n}A^{(\bar{i})^*}_{m\to m';n} = \left|A^{(i)}_{m\to m';n}\right|^2, \tag{5.14}$$

Mais cette contribution n'est significative que lorsque le chemin direct et son chemin inversé mènent au même point d'arrivée, c'est-à-dire lorsque $m = m'$. En effet, si $m \neq m'$, alors le chemin i va de m à m', mais son renversé $\bar{i}$ va de m' à m, et ne contribue donc pas à l'amplitude entre les mêmes points.

Par conséquent, la contribution interférentielle ne survit à la moyenne désordonnée que dans le cas du retour à l'origine. On obtient alors :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}(m\to m;n) = \sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{m\to m;n}\right|^2} + \sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{m\to m;n}\right|^2} = 2\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{m\to m;n}\right|^2}, \tag{5.15}$$

Autrement dit, la probabilité moyenne de retour à l'origine est doublée par rapport au cas classique sans interférences :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}(m\to m;n) = 2\mathcal{P}_{\text{class},m\to m}\,. \tag{5.16}$$

Ce phénomène est à l'origine du pic d'interférence constructif observé àen $p = 0$ dans la figure 5.1.

5.2 Contraste du pic de retour à l'origine selon les classes de symétrie dans le modèle TBS.

5.2.1 classe symplectique

Nous traçons ici la densité de probabilité après 11 kicks pour chaque composante de spin, c'est-à-dire $|\psi_\uparrow(p,t=11)|^2$ et $|\psi_\downarrow(p,t=11)|^2$ (voir figures 5.3(a) et 5.3(b)) , ainsi que leur somme $|\psi_\uparrow(p,t=11)|^2 + |\psi_\downarrow(p,t=11)|^2$ (voir figure 5.3(c)). La condition initiale utilisée est :$\psi_\uparrow(p,t=0) = \delta(p)$ et $\psi_\downarrow(p,t=0) = 0$.

Rappelons que l'Hamiltonien du modèle TBS est invariant par renversement temporel. L'opérateur de renversement temporel s'écrit $\hat{\mathbf{T}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_y\hat{K}_p$. Cet opérateur agit sur les états

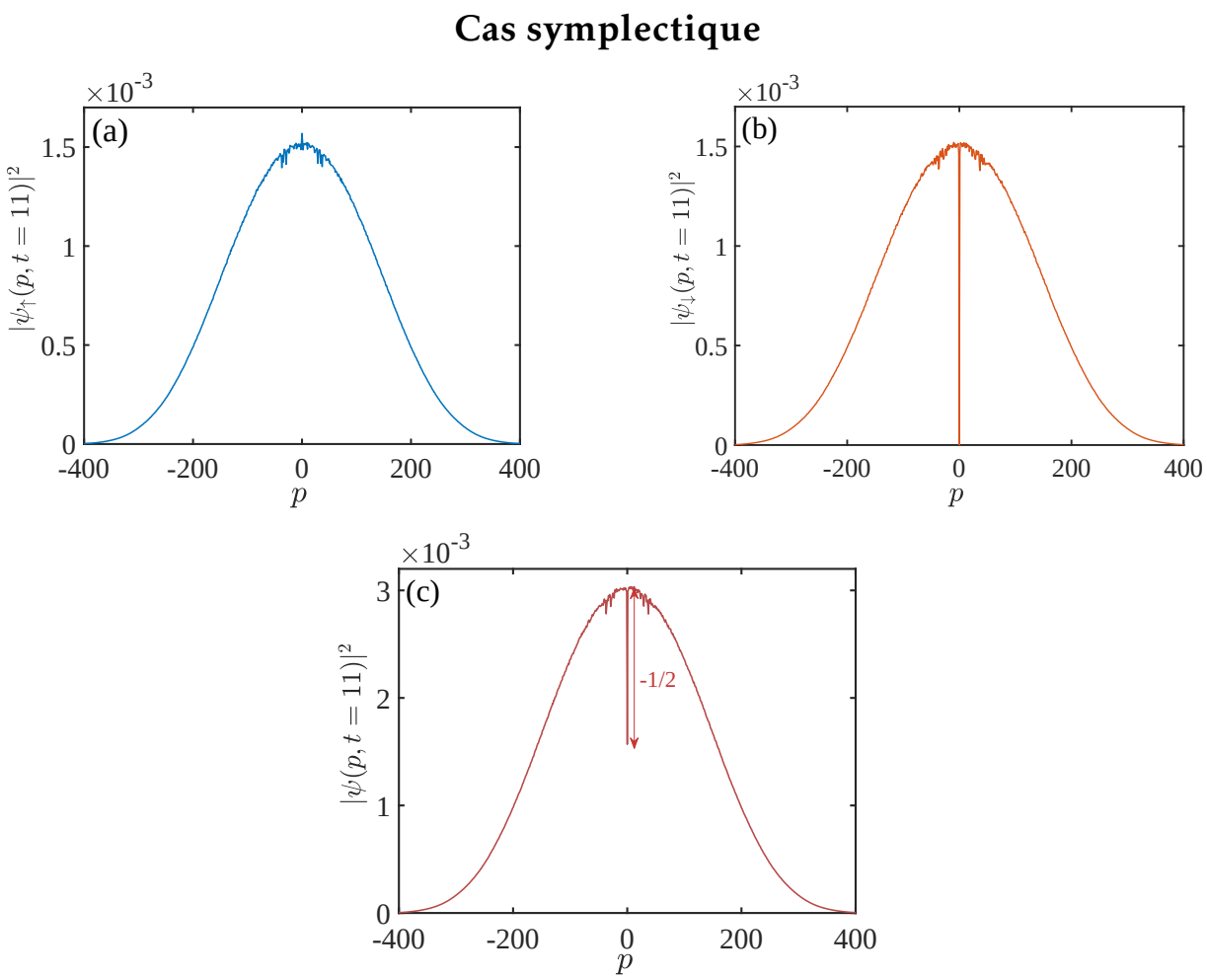


FIGURE 5.3 – Distribution en impulsion après 11 kicks dans le régime diffusif du modéle TBS. (a) Population dans l'état de spin up. (b) Population dans l'état de spin down. (c) Densité de probabilité totale. Les paramètres sont : $K = 39.345$, $\mu = 0.8$, $\varepsilon = 0.3$.

de spin en inversant leur direction et en appliquant un facteur de phase -1 à l'état de spin-up. En notons $|+\rangle$ l'état de spin montant (spin-up) et $|-\rangle$ l'état de spin descendant (spin-down), on a :

$$\hat{\mathbf{T}}\,|m,+\rangle = -|m,-\rangle \quad ,\hat{\mathbf{T}}\,|m,-\rangle = |m,+\rangle \quad \Rightarrow \hat{\mathbf{T}}\,|m,s_i\rangle = -s_i\,|m,-s_i\rangle\,,\ s_i = \pm 1. \tag{5.17}$$

On peut définir l'amplitude d'un chemin direct après n kicks allant d'un site d'impulsion m avec un spin s vers un site d'impulsion m' avec un spin s' par :

$$A^{(i)}_{(m,s)\to(m',s');n} = \langle m',s'|\,\hat{U}^{(n)}_{\text{sym}}\,|m,s\rangle\ , \qquad \text{avec} \quad m^{(i)}_0 = m, \quad m^{(i)}_n = m', \tag{5.18}$$

Ici, l'opérateur $\hat{U}_{\text{sym}}$ est défini comme suit :

$$\hat{U}_{\text{sym}} = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{4k}\,\hat{1}_2\right)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{K}{k}\left(\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \frac{\mu}{2}\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{4k}\,\hat{1}_2\right). \tag{5.19}$$

Le chemin conjugué de ce chemin direct, noté $A^{(\bar{i})}_{(m,s)\to(m',s');n}$, correspond au chemin inverse, où l'on part de l'impulsion m' avec le spin initial s' pour atteindre l'impulsion m avec un spin final s :

$$A^{(\bar{i})}_{(m',s')\to(m,s);n} = \langle m,s|\,\hat{U}^{(n)}_{\mathrm{sym}}\,|m',s'\rangle, \tag{5.20}$$

De manière analogue au cas sans spin, et pour simplifier l'analyse, on considère ici un cas minimal à deux kicks. On introduit alors un site intermédiaire $m_1^{(i)}$ avec un spin s_1, ce qui permet de décomposer l'amplitude du chemin allant de (m,s) à (m',s') via ce point intermédiaire :

$$A^{(i)}_{(m,s)\to(m',s');n} = \langle m',s'|\,\hat{U}_{\mathrm{sym}}\,|m_1^{(i)},s_1\rangle\langle m_1^{(i)},s_1|\,\hat{U}\,|m,s\rangle = A^{(i)}_{(m_1^{(i)},s_1)\to(m',s')}\cdot A^{(i)}_{(m,s)\to(m_1^{(i)},s_1)}, \tag{5.21}$$

Dans ce cas l'amplitude $A^{(i)}_{(m,s)\to(m',s')}$ peut être exprimée en tenant compte de l'effet du renversement temporel comme suit :

$$\begin{aligned}
A^{(i)}_{(m,s)\to(m',s')} &= \langle m',s'|\,\hat{U}_{\mathrm{sym}}\,|m_1^{(i)},s_1\rangle\langle m_1^{(i)},s_1|\,\hat{U}_{\mathrm{sym}}\,|m,s\rangle \\
&= \langle m',s'|(\hat{\mathbf{T}}^{-1}\underbrace{\hat{\mathbf{T}}\hat{U}_{\mathrm{sym}}\hat{\mathbf{T}}^{-1}}_{\hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{sym}}}\underbrace{\hat{\mathbf{T}}|m_1^{(i)},s_1\rangle}_{-s_1|m_1^{(i)},-s_1\rangle})\langle m_1,s_1|(\hat{\mathbf{T}}^{-1}\underbrace{\hat{\mathbf{T}}\hat{U}_{\mathrm{sym}}\hat{\mathbf{T}}^{-1}}_{\hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{sym}}}\underbrace{\hat{\mathbf{T}}|m,s\rangle}_{-s|m,-s\rangle}) \\
&= s_1 s\,\langle m',s'|(\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{sym}}\,|m_1^{(i)},-s_1\rangle)\langle m_1^{(i)},s_1|(\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{sym}}\,|m,-s\rangle) \\
&= ss'\langle m_1^{(i)},-s_1|\,\hat{U}_{\mathrm{sym}}\,|m',-s'\rangle\langle m,-s|\,\hat{U}_{\mathrm{sym}}\,|m_1^{(i)},-s_1\rangle \\
&= ss'\langle m,-s|\,\hat{U}_{\mathrm{sym}}\,|m_1^{(i)},-s_1\rangle\langle m_1^{(i)},-s_1|\,\hat{U}_{\mathrm{sym}}\,|m',-s'\rangle \\
&= ss' A^{(\bar{i})}_{(m',-s')\to(m,-s)},
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\boxed{A^{(i)}_{(m,s)\to(m',s')} = ss' A^{(\bar{i})}_{(m',-s')\to(m,-s)} \quad \text{ou bien} \quad A^{(\bar{i})}_{(m',s')\to(m,s)} = ss' A^{(i)}_{(m,-s)\to(m',-s')}} \tag{5.23}$$

Dans l'équation (5.23), les facteurs s et s' prennent les valeurs ± 1 selon les états de spin : $s = 1$ correspond à l'état de spin-up $|+\rangle$, et $s = -1$ à l'état de spin-down $|-\rangle$ Ainsi, $ss' = \pm 1$ signifie que les amplitudes sont multipliées par $+1$ ou -1 selon les états de spin initiaux et finaux.

Ce que l'on a montré dans l'équation (5.23), c'est que l'amplitude du chemin inversé allant de (m,s) à (m',s') correspond au produit de ss'et de l'amplitude du chemin direct associé, pris avec les spins inversés. Autrement dit, pour chaque chemin direct associé à une configuration de spin donnée, il existe un chemin conjugué parcouru en sens inverse avec les spins opposés, et ces deux chemins possèdent la même phase, à un signe près.

La probabilité moyenne de retour à l'origine, c'est-à-dire de partir du site $m = 0$ avec un spin s et de revenir au même site $m' = 0$ avec spin s' après n kicks, s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{P}_{\text{Tot}}\big((0,s)\to(0,s');n\big)} &= \sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{(0,s)\to(0,s');n}\right|^2} + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \overline{A^{(i)}_{(0,s)\to(0,s');n}\left[A^{(j)}_{(0,s)\to(0,s');n}\right]^*} \\ &= \sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{(0,s)\to(0,s');n}\right|^2} + \sum_i \overline{A^{(i)}_{(0,s)\to(0,s');n}\left[A^{(\bar{i})}_{(0,-s')\to(0,-s);n}\right]^*}\,.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Il faut donc déterminer si, pour un chemin direct donné allant de s à s', il existe un chemin conjugué parcouru en sens inverse et ayant une phase identique (à un signe près). En listant les chemins possibles, on constate que si l'on a un chemin direct d'amplitude $A^{(i)}_{+\to+;n}$, allant de l'état de spin $|+\rangle$ vers $|+\rangle$, alors, selon l'équation (5.23), il existe un chemin renversé correspondant. Ce dernier suit la trajectoire inverse avec un spin opposé, allant de $|-\rangle$ à $|-\rangle$, avec une amplitude $A^{(\bar{i})}_{-\to-;n}$ et la même phase à un signe près. Toutefois, dans nos simulations, la condition initiale est donnée par $\psi_\uparrow(p,t=0)=\delta(p)$ et $\psi_\downarrow(p,t=0)=0$, ce qui correspond à un état initial purement spin-up $|+\rangle$. Ainsi, ce chemin renversé $A^{(\bar{i})}_{-\to-;n}$ n'est pas pertinent dans notre contexte, car nous ne partons pas de l'état $|-\rangle$. La probabilité de retour à l'origine avec le même spin est donc simplement :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}(+\to+;n) = \mathcal{P}_{\text{class},+\to+;n} + \underbrace{0}_{\substack{\text{Le seul chemin conjugué possible selon l'équation (5.23) commence en } |-\rangle \text{ et finit en } |-\rangle, \text{ ce qui n'est pas le cas ici.}}}\,. \tag{5.25}$$

Il n'y a donc ni interférence constructive ni destructive dans ce cas, de sorte que seule la contribution classique subsiste. Cela explique l'absence du ERO ou de l'anti-ERO dans la densité de probabilité de la première composante de spin, $|\psi_\uparrow(p)|^2$, en $p=0$ (voir Fig. 5.3(a)).

Considérons maintenant le cas où l'on part de $|+\rangle$ et que l'on arrive en $|-\rangle$. D'après l'équation (5.23), il existe un chemin conjugué, parcourant la trajectoire inverse avec le spin opposé, dont l'amplitude est l'opposée de celle du chemin direct, soit $A^{(i)}_{+\to-;n} = -A^{(\bar{i})}_{+\to-;n}$. Dans ce cas, la probabilité moyenne totale de passer de $|+\rangle$ à $|-\rangle$ est :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\big(+\to-;n\big) = \underbrace{\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n}\right|^2}}_{\mathcal{P}_{\text{class},+\to-;n}} + \underbrace{(-1)\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n}\right|^2}}_{\text{interférence } (i,\bar{i})} = 0\,, \tag{5.26}$$

Ce résultat montre que la probabilité moyenne totale en $p=0$ est nulle en raison d'une annulation complète entre la probabilité classique et la somme des termes d'interférence. Cette annulation provient d'interférences destructives entre le chemin direct et son chemin renversé. Ces interférences réduisent la probabilité de retour à l'origine lors d'un

retournement de spin de $|+\rangle$ vers $|-\rangle$. On observe ainsi un anti-ERO de contraste -1 dans $|\psi_\downarrow(p)|^2$, par rapport au fond gaussien., c'est-à-dire que la densité de probabilité en $p = 0$ est strictement nulle, comme illustré sur la figure 5.3(b).

En additionnant les densités de probabilité des deux composantes, on obtient un anti-ERO d'un contraste de $-1/2$ par rapport au fond gaussien, comme observé dans la figure 5.3(c). Cette diminution de la probabilité de retour est une manifestation directe de la symétrie de renversement temporel dans les systèmes à spin 1/2, et illustre comment les interférences quantiques peuvent engendrer des effets tels que l'anti-ERO.

5.2.2 Classe unitaire

Lorsque $\varepsilon = 0$, les résultats de la simulation montrent cette fois-ci l'apparition d'un pic de type ERO dans la première composante de spin de la densité de probabilité en $p = 0$ (voire figure 5.4(a)). Rappelons que dans ce cas, le modèle TBS appartient à la classe de symétrie unitaire. En effet, bien que l'Hamiltonien du système soit invariant sous l'action de l'opérateur de renversement temporel $\hat{\mathbf{T}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_y \hat{K}_p$, il possède également une symétrie géométrique supplémentaire, définie par $\hat{\mathcal{R}}_x = \mathrm{i}\hat{\sigma}_x$. Cette dernière commute avec l'Hamiltonien et avec l'opérateur de renversement temporel, c'est-à-dire : $[\hat{H}(t), \hat{\mathcal{R}}_x] = [\hat{H}(t), \hat{\mathbf{T}}] = 0$, et satisfait $\hat{\mathcal{R}}_x^2 = -\hat{1}$.

L'objectif est alors d'examiner les conséquences de cette symétrie géométrique supplémentaire sur les amplitudes des chemins directs et inversés.

Rappelons que, si le système appartient à la classe symplectique, nous avons montré que :

$$\langle s|\, \hat{U}_{\mathrm{sym}}^{(n)} \,|s'\rangle = ss' \langle -s'|\, \hat{U}_{\mathrm{sym}}^{(n)} \,|-s\rangle\,, \tag{5.27}$$

Or, avec l'existence de cette symétrie géométrique additionnelle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A^{(i)}_{s\to s';n} = \langle s'|\, \hat{U}_{\mathrm{sym}}^{(n)} \,|s\rangle = ss' \langle -s|\, \hat{U}_{\mathrm{sym}}^{(n)} \,|-s'\rangle &= ss' \underbrace{\langle -s|\hat{\mathcal{R}}_x^{-1}}_{-\mathrm{i}\langle s|} \underbrace{\hat{\mathcal{R}}_x \hat{U}_{\mathrm{sym}}^{(n)} \hat{\mathcal{R}}_x^{-1}}_{\hat{U}_{\mathrm{sym}}^{(n)}} \underbrace{\hat{\mathcal{R}}_x |-s'\rangle}_{\mathrm{i}|s'\rangle} \\ &= ss' \langle s|\, \hat{U}_{\mathrm{sym}}^{(n)} \,|s'\rangle = ss' A^{(\bar{i})}_{s'\to s;n}\,, \end{aligned} \tag{5.28}$$

Cette équation montre que, lorsque la symétrie géométrique est présente, on obtient une nouvelle contrainte sur l'amplitude du chemin direct allant d'un spin s à un spin s'. Par exemple, si l'on considère le chemin allant de $|+\rangle$ à $|+\rangle$, alors, selon l'équation (5.28), on a :

$$A^{(i)}_{+\to+;n} = A^{(\bar{i})}_{-\to-;n} = A^{(\bar{i})}_{+\to+;n}\,, \tag{5.29}$$

Cela signifie qu'il existe un chemin conjugué qui suit la trajectoire inverse, en partant et en arrivant dans l'état $|+\rangle$, et qui possède exactement la même phase que le chemin direct. La probabilité moyenne totale de retour à l'origine en partant de $|+\rangle$ et en y revenant est donc donnée par :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{Tot}}\big(+\to+;n\big) = \underbrace{\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to+;n}\right|^2}}_{\mathcal{P}_{\mathrm{class},+\to+;n}} + \underbrace{\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to+;n}\right|^2}}_{\text{interférence } (i,\bar{i})} = 2\mathcal{P}_{\mathrm{class},+\to+;n}\,, \tag{5.30}$$

Dans ce cas, la probabilité moyenne totale est doublée par rapport au cas classique sans interférences, ce qui explique bien l'apparition d'un pic de type ERO dans la densité de probabilité de la première composante de spin à l'impulsion $p = 0$ lorsque $\varepsilon = 0$.

Examinons maintenant le cas d'un chemin direct allant de $|+\rangle$ à $|-\rangle$. Quelle est l'influence de cette symétrie géométrique sur les amplitudes des chemins directs et inversés ? L'équation (5.28) nous indique que :

$$A^{(i)}_{+\to-;n} = -A^{(\bar{i})}_{-\to+;n}\,, \tag{5.31}$$

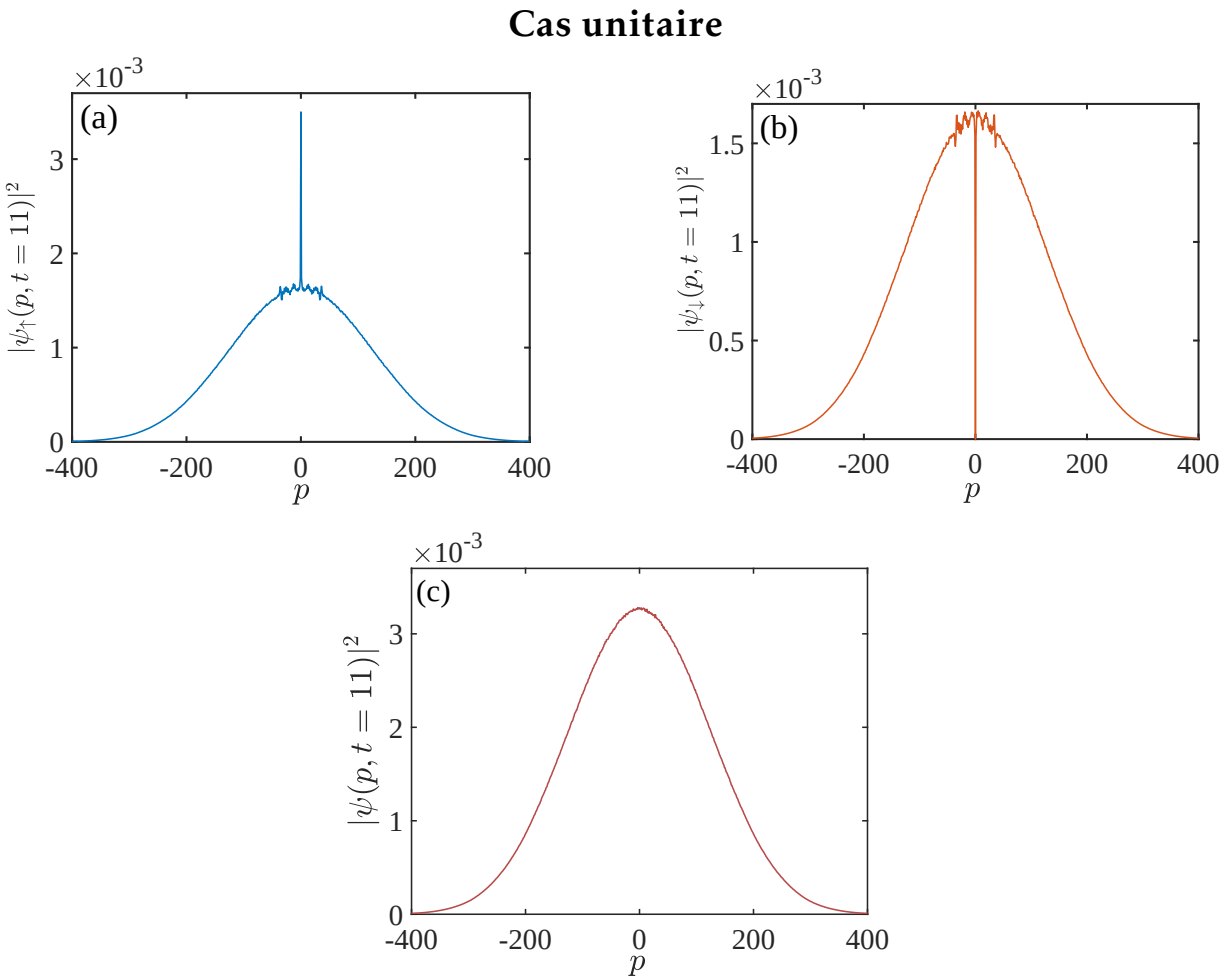


Figure 5.4 – Distribution en impulsion après 11 kicks dans le régime diffusif du modèle TBS dans la classe de symétrie unitaire. Les sous-figures montrent respectivement :(a) la composante spin up. (b) la composante spin down. (c) la densité de probabilité totale. Les paramètres sont : $K = 49.288$, $\mu = 0.295$, $\varepsilon = 0$.

Cette relation implique que la symétrie géométrique n'a pas d'effet observable sur la densité de probabilité de la seconde composante de spin, car elle relie le chemin direct de $|+\rangle$ vers $|-\rangle$ à un chemin inversé partant de $|-\rangle$ vers $|+\rangle$, qui n'a pas de signification physique ici puisque le système ne commence jamais dans l'état $|-\rangle$. On retrouve donc la relation :

$$A^{i}_{+\to-;n} = -A^{(\bar{i})}_{+\to-;n}\,, \tag{5.32}$$

Dans ce cas, la probabilité moyenne totale de partir de l'état $|+\rangle$ et d'arriver à l'état de spin $|-\rangle$ en $p = 0$ s'exprime comme :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\big(+\to-;n\big) = \underbrace{\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n}\right|^2}}_{\mathcal{P}_{\text{class},+\to-;n}} + \underbrace{(-1)\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n}\right|^2}}_{\text{interférence }(i,\bar{i})} = 0, \tag{5.33}$$

ce qui explique l'apparition d'un anti-ERO dans la densité de probabilité de la seconde composante de spin au point $p = 0$ (voir figure 5.4(b)).

Enfin, lorsque l'on additionne les densités de probabilité des deux composantes de spin, l'ERO de la première composante et l'anti-ERO de la seconde se compensent parfaitement. Il en résulte que la densité de probabilité totale ne présente ni pic ERO ni un anti-ERO, comme illustré dans la figure 5.4(c).

5.2.3 Classe orthogonale

Rappelons que dans le cas où le modèle TBS appartient à la classe orthogonale, il existe deux symétries géométriques unitaires supplémentaires, notées respectivement $\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_x \exp(2\mathrm{i}\phi\hat{p}\hat{\sigma}_z)$ et $\hat{\mathcal{R}}_z = \mathrm{i}\hat{\sigma}_z$. Ces symétries vérifient : $[\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}, \hat{H}(t)] = [\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}, \hat{\mathbf{T}}] = 0$ et $[\hat{\mathcal{R}}_z, \hat{H}(t)] = [\hat{\mathcal{R}}_z, \hat{\mathbf{T}}] = 0$, avec $\hat{\mathcal{R}}^2_{x_{2\phi}} = \hat{\mathcal{R}}^2_z = -\hat{1}_2$ et $\{\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}, \hat{\mathcal{R}}_z\} = 0$.

Si l'on considère la symétrie géométrique $\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_x e^{2\mathrm{i}\phi\hat{p}\hat{\sigma}_z}$, celle-ci agit sur les états impulsion-spin comme :

$$\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}|p,+\rangle = \mathrm{i}e^{2\mathrm{i}\phi\hbar p}|p,-\rangle \quad ; \quad \hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}|p,-\rangle = \mathrm{i}e^{-2\mathrm{i}\phi\hbar p}|p,+\rangle, \tag{5.34}$$

À impulsion nulle ($p = 0$, donc $e^{\pm 2\mathrm{i}\phi\hbar p} = 1$), l'opérateur $\hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}$ se réduit à un simple flip de spin avec une phase globale i :

$$\mathrm{i}\hat{\sigma}_x e^{2\mathrm{i}\phi\hat{p}\hat{\sigma}_z}|p=0,s\rangle = \mathrm{i}|p=0,-s\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{R}}_{x_{2\phi}}|s\rangle = \mathrm{i}|-s\rangle. \tag{5.35}$$

Ainsi, les contraintes sur les amplitudes des chemins imposées par cette symétrie géométrique restent identiques à la contrainte (5.28), autrement dit :

$$A^{i}_{s\to s';n} = ss' A^{(\bar{i})}_{s'\to s;n}. \tag{5.36}$$

Considérons maintenant la deuxième symétrie géométrique $\hat{\mathcal{R}}_z = \mathrm{i}\hat{\sigma}_z$, qui agit sur les états de spin comme :

$$\hat{\mathcal{R}}_z|+\rangle = \mathrm{i}|+\rangle, \quad \hat{\mathcal{R}}_z|-\rangle = -\mathrm{i}|-\rangle, \tag{5.37}$$

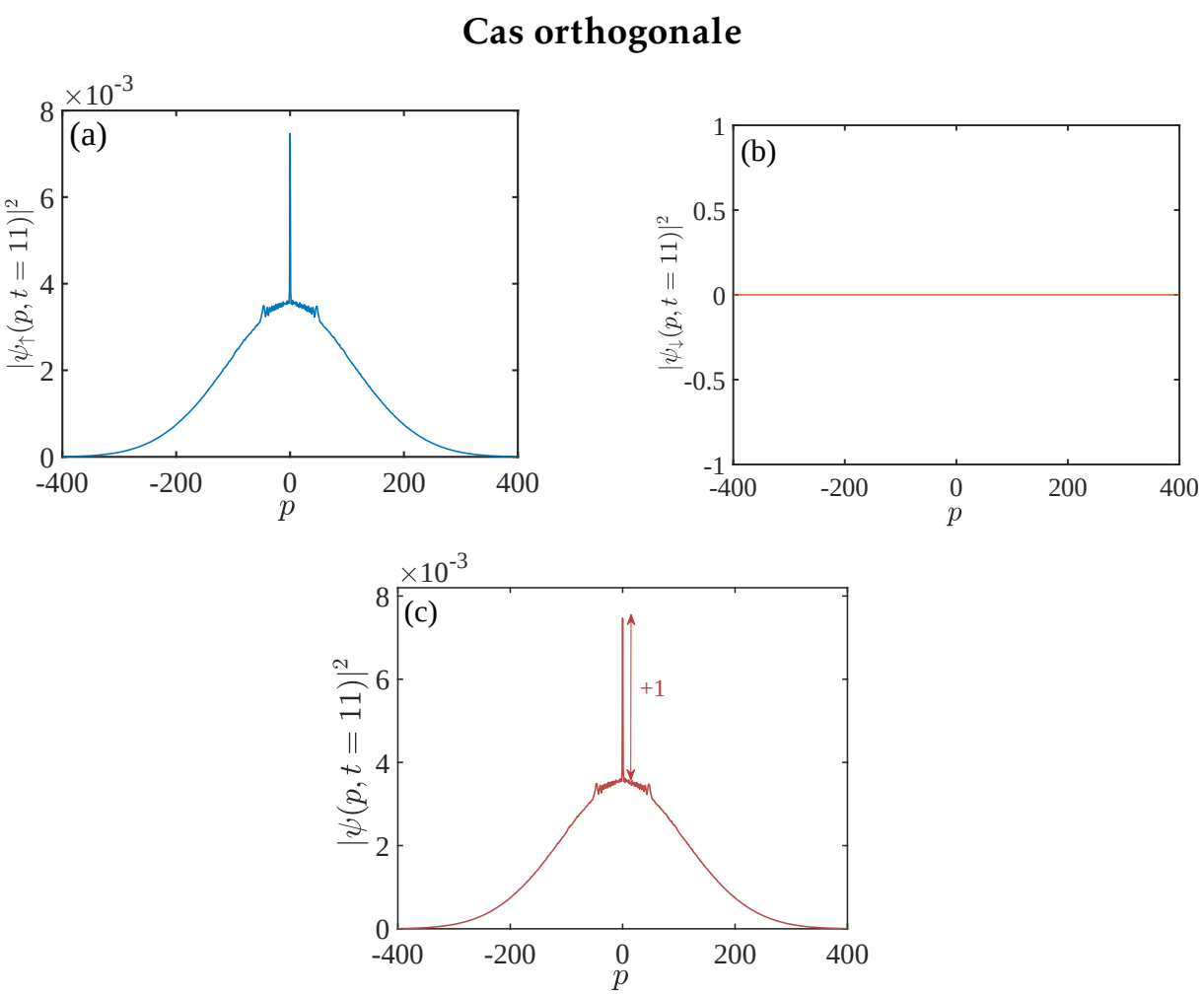


FIGURE 5.5 – Distribution en impulsion après 11 kicks dans le régime diffusif du modéle TBS dans la classe de symétrie orthogonale. (a) Population dans l'état de spin up. (b) Population dans l'état de spin down. (c) Densité de probabilité totale. Les paramètres sont : $K = 49.288$, $\mu = 0$, $\varepsilon = 0.125$.

Dans la base où $\hat{\sigma}_z$ est diagonale, cette symétrie géométrique induit un découplage complet de l'Hamiltonien en deux sous-espaces orthogonaux de spin, $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$, qui ne peuvent plus échanger de population. Ce découplage implique que si la condition initiale est fixée dans un seul sous-espace, par exemple :

$$\psi_\uparrow(p,0) = \delta(p), \quad \psi_\downarrow(p,0) = 0, \tag{5.38}$$

alors toute la dynamique ultérieure du système restera confinée au sous-espace initialement peuplé, ici $\mathcal{H}_+$.

Les contraintes sur les amplitudes des chemins imposées par cette seconde symétrie géométrique s'écrivent :

$$A^{(i)}_{s\to s';n} = \langle s'|\hat{U}^{(n)}_{\text{sym}}|s\rangle = ss'\langle -s|\hat{U}^{(n)}_{\text{sym}}|-s'\rangle$$

$$= ss' \underbrace{\langle -s|\hat{\mathcal{R}}_z^{-1}}_{is\langle -s|} \underbrace{\hat{\mathcal{R}}_z \hat{U}_{\text{sym}}^{(n)} \hat{\mathcal{R}}_z^{-1}}_{\hat{U}_{\text{sym}}^{(n)}} \underbrace{\hat{\mathcal{R}}_z|-s'\rangle}_{-is'|-s'\rangle}$$

$$= (ss')^2 \langle -s|\hat{U}_{\text{sym}}^{(n)}|-s'\rangle = A^{(i)}_{-s'\to -s;n}\,, \tag{5.39}$$

Cette équation introduit une nouvelle contrainte sur les amplitudes des chemins directs et renversés. Prenons par exemple le chemin direct partant de l'état $|+\rangle$ et arrivant en $|+\rangle$. Dans ce cas, nous avons : $A^{i}_{+\to+;n} = A^{(\bar{i})}_{-\to-;n} = A^{(\bar{i})}_{+\to+;n} = A^{(\bar{i})}_{-\to-;n}$.

Cette contrainte supplémentaire ne modifie donc pas le résultat obtenu précédemment : un Effet de Retour à l'Origine (ERO) apparaît toujours dans la densité de probabilité de la première composante du spin, $|\psi_\uparrow(p)|^2$, en $p = 0$, comme illustré dans la figure 5.5(a).

En revanche, pour le chemin de $+ \to -$, la contrainte (5.23) impose $A^{i}_{+\to-;n} = -A^{(\bar{i})}_{+\to-;n}$. D'autre part, la seconde contrainte issue de la symétrie géométrique $\hat{\mathcal{R}}_z$ donne $A^{i}_{+\to-;n} = A^{(\bar{i})}_{+\to-;n}$. En combinant ces deux égalités, on obtient : $A^{i}_{+\to-;n} = -A^{i}_{+\to-;n}$, d'où $A^{i}_{+\to-;n} = A^{(\bar{i})}_{+\to-;n} = 0$ pour tout chemin i. Autrement dit, le chemin $+ \to -$ est strictement interdit : aucune amplitude (directe ou renversée) ne contribue. Par conséquent, aucun signal n'apparaît dans la densité de probabilité de la deuxième composante du spin, en accord avec la figure 5.5(b).

La densité de probabilité totale, obtenue en sommant les deux composantes, s'écrit : $|\psi(p,t)|^2 = |\psi_\uparrow(p,t)|^2 + |\psi_\downarrow(p,t)|^2$, puisque $|\psi_\downarrow(p,t)|^2 = 0$. Elle reproduit donc exactement le ERO observé dans la composante up, avec un contraste de +1 par rapport au fond gaussien (voire figure 5.5(c)).

Après avoir expliqué en détail le comportement de la densité de probabilité pour chaque composante de spin dans le modèle TBS selon les trois classes de symétrie (symplectique, unitaire et orthogonale), nous étudions maintenant le comportement de ces mêmes densités pour le modèle SDQKR introduit au chapitre précédent. Rappelons que ce modèle se distingue du précédent par la présence de deux périodes temporelles alternantes dans sa dynamique. En conservant la même condition initiale, à savoir une distribution impulsionnelle localisée dans la composante de spin-up, $\psi_\uparrow(p, t = 0) = \delta(p)$ et $\psi_\downarrow(p, t = 0) = 0$, nous analyserons successivement l'évolution temporelle des composantes du spin pour chaque classe de symétrie. Cette étude permettra ainsi de mettre en évidence l'impact que peut avoir l'introduction d'une dynamique temporellement alternante sur les phénomènes d'interférence et, par conséquent, sur les propriétés spécifiques telles que l'ERO et l'anti-ERO observés précédemment.

5.3 Contraste du pic de retour à l'origine selon les classes de symétrie dans le modèle SDQKR.

5.3.1 Cas symplectique

Dans cette sous-section, nous représentons les densités de probabilité $|\psi_\uparrow(p,t)|^2$ et $|\psi_\downarrow(p,t)|^2$ pour le modèle SDQKR, en considérant une condition initiale : $\psi_\uparrow(p,t=0)=\delta(p)$ et $\psi_\downarrow(p,t=0)=0$. Deux cas sont analysés : un nombre pair de kicks (ici $t=10$) et un nombre impair (ici $t=11$) (le même raisonnement s'applique lorsque l'on considère une condition initiale donnée par : $\psi_\uparrow(p,t=0)=0$ et $\psi_\downarrow(p,t=0)=\delta(p)$ ou bien par une superposition symétrique des deux composantes de spin : $\psi_\uparrow(p,t=0)=\delta(p)/\sqrt{2}$ et $\psi_\downarrow(p,t=0)=\delta(p)/\sqrt{2}$). Pour $t=11$ (nombre impair), nous observons clairement l'apparition d'un pic négatif en $p=0$ dans la composante inférieure du spin $|\psi_\downarrow(p,t=11)|^2$, caractéristique d'un anti-ERO de contraste -1 (voir figure 5.6(d)). En revanche, la composante supérieure $|\psi_\uparrow(p,t=11)|^2$ ne présente aucune structure particulière, signalant l'absence de tout effet de type ERO ou anti-ERO (voir figure 5.6(c)). Ce comportement — présence d'un anti-ERO uniquement dans la composante secondaire pour les kicks impairs — est analogue à celui observé dans le modèle TBS à symétrie symplectique.

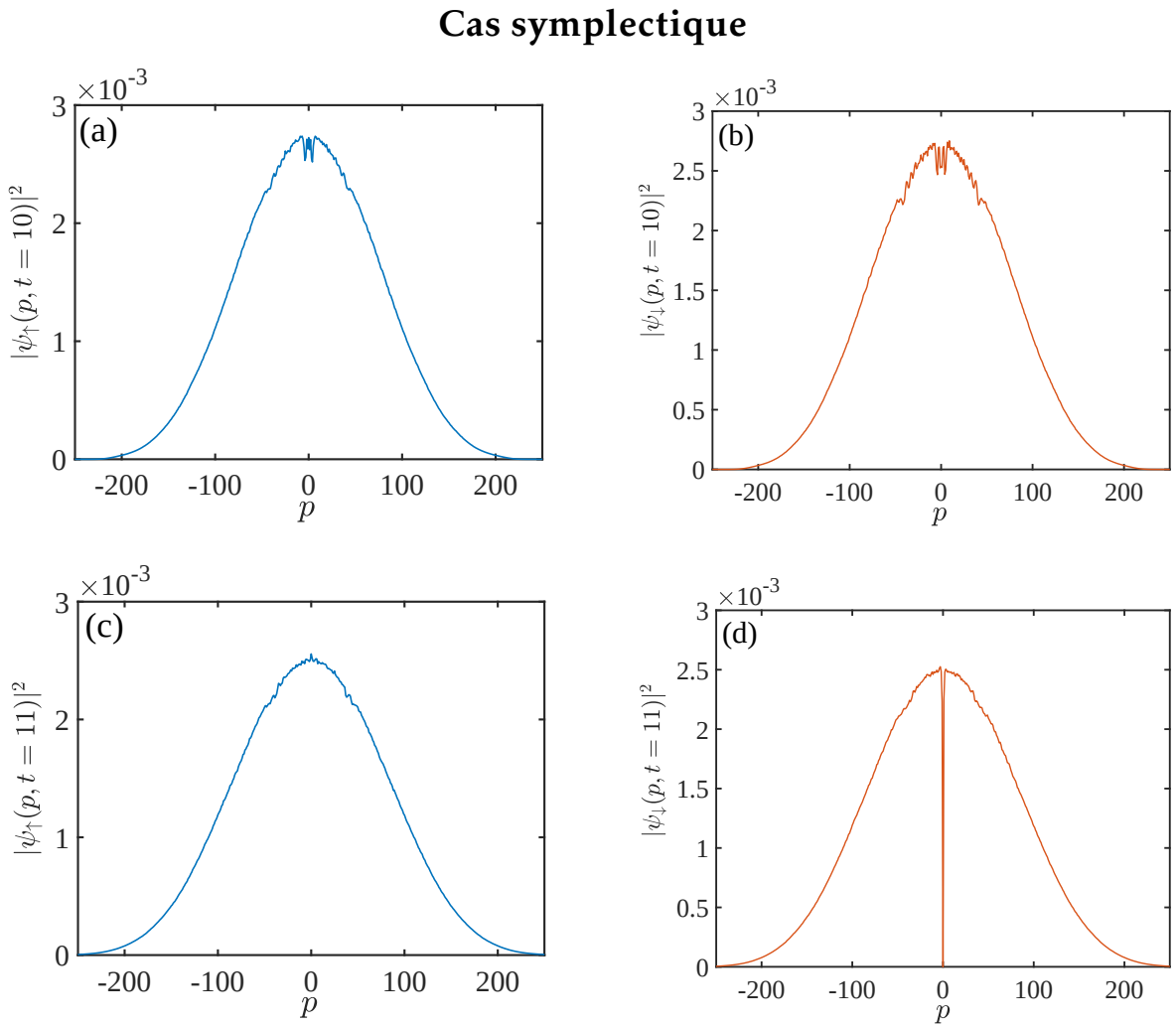


FIGURE 5.6 – Densités de probabilité des composantes de spin dans le modèle SDQKR. (a) et (b) : composantes spin up et spin down respectivement, pour un nombre pair de kicks $t=10$. (c) et (d) : mêmes composantes pour un nombre impair de kicks $t=11$. Les mêmes paramètres que ceux de la figure 4.2 sont utilisés.

À l'inverse, pour $t = 10$ (nombre pair), aucune des deux composantes du spin ne présente de pic significatif en $p = 0$, ce qui indique l'absence de tout phénomène de type ERO ou anti-ERO dans ce cas (voir figures 5.6(a) et 5.6(b)).

Pour expliquer clairement les comportements observés sur la figure 5.6, rappelons d'abord les propriétés de symétrie temporelle de l'opérateur d'évolution. L'opérateur d'évolution associé à un nombre impair de kicks défini par l'équation (4.10) ($t = 11$ ici), noté ici $\hat{U}_{\text{impair}}$, est invariant sous l'opération de renversement du temps $\hat{\mathbf{T}} = \mathrm{i}\hat{\sigma}_y \hat{K}_p$:

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\, \hat{U}_{\text{impair}}\, \hat{\mathbf{T}} = \hat{U}^{\dagger}_{\text{impair}}, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{T}}^2 = -\hat{1}. \tag{5.40}$$

Dans ce cas, nous avons montré précédemment que la probabilité moyenne de transition débutant dans l'état $|+\rangle$ et arrivant dans l'état $|+\rangle$ s'écrit simplement (voir équation (5.25)) :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\Big(+ \to +; n_{\text{impair}}\Big) = \mathcal{P}_{\text{class},+\to+;n_{\text{impair}}}\,, \tag{5.41}$$

Cette expression purement classique explique ainsi l'absence de l'ERO ou d'anti-ERO dans la densité de probabilité associée à la première composante du spin ($\psi_\uparrow(p, t = 11)$).

Par ailleurs, la probabilité moyenne de transition débutant dans l'état $|+\rangle$ et arrivant dans l'état $|-\rangle$ pour un nombre impair de kicks est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\Big(+\to-; n_{\text{impair}}\Big) = \underbrace{\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n_{\text{impair}}}\right|^2}}_{\mathcal{P}_{\text{class},+\to-;n_{\text{impair}}}} + \underbrace{(-1)\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n_{\text{impair}}}\right|^2}}_{\text{interférence } (i,\bar{i})} = 0, \tag{5.42}$$

La présence du terme d'interférence destructrice dans la seconde composante du spin ($\psi_\downarrow(p, t = 11)$) explique ainsi clairement l'anti-ERO observé à $p = 0$.

Pour un nombre pair de kicks (ici $t = 10$), nous avons démontré précédemment que la symétrie de renversement du temps est explicitement brisée :

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\, \hat{U}_{\text{pair}}\, \hat{\mathbf{T}} \neq \hat{U}^{\dagger}_{\text{pair}}\,, \tag{5.43}$$

Dans ce cas, aucune interférence, qu'elle soit constructive ou destructive, ne peut se manifester. Seules les contributions classiques subsistent dans les densités de probabilité des deux composantes du spin, ce qui explique l'absence totale des phénomènes de type ERO ou anti-ERO à $t = 10$ (voire figures 5.6(a) et 5.6(b)). Nous obtenons simplement :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\Big(+ \to +; n_{\text{pair}}\Big) = \mathcal{P}_{\text{class},+\to+;n_{\text{pair}}}, \quad \mathcal{P}_{\text{Tot}}\Big(+ \to -; n_{\text{pair}}\Big) = \mathcal{P}_{\text{class},+\to-;n_{\text{pair}}}. \tag{5.44}$$

5.3.2 Cas unitaire

La figure 5.7 présente les densités de probabilité $|\psi_\uparrow(p,t)|^2$ et $|\psi_\downarrow(p,t)|^2$ pour le modèle

SDQKR dans le cas unitaire ($\alpha = 0$), , à deux temps consécutifs : pair ($t = 10$) et impair ($t = 11$), avec comme condition initiale $\psi_\uparrow(p,0) = \delta(p)$ et $\psi_\downarrow(p,0) = 0$.

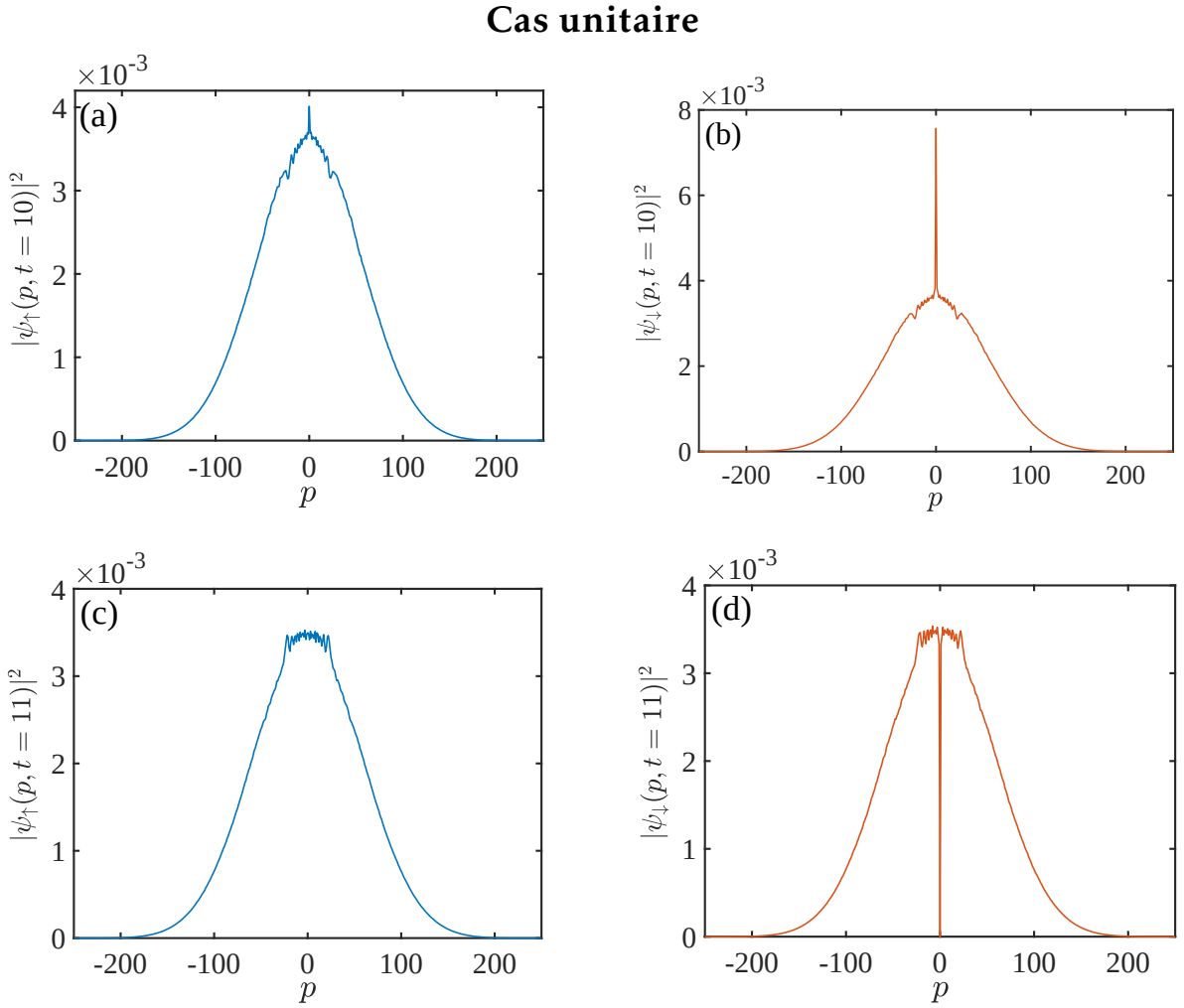


FIGURE 5.7 – Densités de probabilité des deux composantes du spin à deux instants consécutifs dans le modèle SDQKR avant l'établissement du régime de localisation. (a) et (b) : composantes spin-up et spin-down à l'instant pair $t = 10$. mêmes composantes à l'instant impair $t = 11$. Les mêmes paramètres que ceux de la figure 4.7 sont utilisés pour cette simulation.

• **Cas impair ($t = 11$) :** Dans ce cas, on retrouve un comportement similaire à celui observé précédemment dans le cas symplectique pour les temps impairs. En effet, la densité de probabilité de la deuxième composante du spin $|\psi_\downarrow(p, t = 11)|^2$ présente un pic négatif en $p = 0$, correspondant au phénomène d'anti-ERO d'un contraste -1 (voir figure 5.7(d)). En revanche, la densité de probabilité de la première composante du spin $|\psi_\uparrow(p, t = 11)|^2$ ne présente aucune interférence quantique notable (voir figure 5.7(c)).

Ce comportement s'explique comme suit : rappelons que pour un nombre impair de kicks, l'opérateur d'évolution $\hat{U}_{\text{impair}}$ défini en (4.27) vérifie la relation de symétrie par

renversement du temps suivante :

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}\,\hat{U}_{\text{impair}}\,\hat{\mathbf{T}} = \hat{U}_{\text{impair}}^{\dagger}, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{T}} = \mathrm{i}\,\hat{\sigma}_y\hat{K}_p, \quad \hat{\mathbf{T}}^2 = -\hat{1}\,, \tag{5.45}$$

En présence de cette symétrie, l'amplitude du chemin inversé reliant l'état initial s à l'état final s' peut être mise sous la forme :

$$A^{(i)}_{s\to s';\,n_{\text{impair}}} = ss'A^{(\bar{i})}_{-s'\to *-s;\,n_{\text{impair}}}. \tag{5.46}$$

Étant donné que nous partons uniquement de l'état initial $|+\rangle$, nous avons montré précédemment que les probabilités moyennes totales de transitions pour t impair sont :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\Big(+\to +;\,n_{\text{impair}}\Big) = \mathcal{P}_{\text{class},+\to+;\,n_{\text{impair}}}\,, \tag{5.47a}$$

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\Big(+\to -;\,n_{\text{impair}}\Big) = 0\,, \tag{5.47b}$$

Ces résultats expliquent précisément les comportements observés en $p = 0$ pour les densités de probabilité des figures 5.7(c) et 5.7(d).

• **Cas pair ($t = 10$) :** Pour un nombre pair de kicks, l'opérateur d'évolution $\hat{U}_{\text{pair}}$ défini en (4.28) satisfait la symétrie de renversement du temps non conventionnelle suivante :

$$\hat{\mathbf{T}}_*^{-1}\,\hat{U}_{\text{pair}}\hat{\mathbf{T}}_* = \hat{U}_{\text{pair}}^{\dagger}, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{T}}_* = \mathrm{i}\,\hat{\sigma}_x\hat{K}_p, \quad \hat{\mathbf{T}}_*^2 = +\hat{1}. \tag{5.48}$$

Dans ce cas particulier, on peut montrer explicitement que les amplitudes reliant les états de spin initiaux et finaux vérifient :

$$\begin{aligned} A^{(i)}_{s\to s';\,n_{\text{pair}}} = \langle s'|\,\hat{U}_{\text{pair}}\,|s\rangle &= \langle s'|\,(\hat{\mathbf{T}}_*^{-1}\underbrace{\hat{\mathbf{T}}_*\hat{U}_{\text{pair}}\hat{\mathbf{T}}_*^{-1}}_{\hat{U}^{\dagger}_{\text{pair}}}\underbrace{\hat{\mathbf{T}}_*|s\rangle}_{\mathrm{i}|-s\rangle})\\ &= -\mathrm{i}\,\langle -s|\,\hat{U}_{\text{pair}}\underbrace{\hat{\mathbf{T}}_*|s'\rangle}_{\mathrm{i}|-s'\rangle} = \langle -s|\,\hat{U}_{\text{pair}}\,|-s'\rangle\\ &= A^{(\bar{i})}_{-s'\to -s;\,n_{\text{pair}}}\,, \end{aligned} \tag{5.49}$$

Considérons tout d'abord le cas d'un chemin reliant l'état initial $|+\rangle$ à l'état final $|+\rangle$. L'équation (5.49) montre que l'amplitude du chemin inversé associé est celle reliant $|-\rangle$ à $|-\rangle$, c'est-à-dire une amplitude sans signification dans notre situation (car l'état initial n'est pas $|-\rangle$). Ainsi, la probabilité totale de rester dans l'état $|+\rangle$ est purement classique :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}\Big(+\to +;\,n_{\text{pair}}\Big) = \mathcal{P}_{\text{class},+\to+;\,n_{\text{pair}}}\,, \tag{5.50}$$

Cela explique clairement l'absence de l'ERO ou anti-ERO en $p = 0$ dans la composante $\psi_\uparrow(p, t = 10)$ (voir figure 5.7(a)).

Pour le cas d'un chemin allant de l'état initial $|+\rangle$ vers l'état final $|-\rangle$, la relation (5.49) implique cette fois que les amplitudes des chemins directs et inversés sont exactement égales ($A^{(i)}_{+\to-} = A^{(\bar{i})}_{+\to-}$). Ainsi, la probabilité moyenne totale se voit doublée par rapport à sa valeur classique :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{Tot}}\big(+\to-;n_{\mathrm{pair}}\big) = \underbrace{\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n_{\mathrm{pair}}}\right|^2}}_{\mathcal{P}_{\mathrm{class},+\to-;n_{\mathrm{pair}}}} + \underbrace{\sum_i \overline{\left|A^{(i)}_{+\to-;n_{\mathrm{pair}}}\right|^2}}_{\text{interférence } (i,\bar{i})} = 2\mathcal{P}_{\mathrm{class},+\to-;n_{\mathrm{pair}}}\,, \tag{5.51}$$

Ce résultat explique bien le pic observé à $p = 0$ dans la densité $|\psi_\downarrow(p, t = 10)|^2$ (voir figure 5.7(b)).

En combinant les densités des deux composantes pour $t = 10$, on retrouve un ERO global avec un contraste de 1/2 par rapport au fond gaussien, en accord avec les résultats précédemment établis (figure 4.7).

5.3.3 Cas orthogonale

Dans le cas $\Omega = 0$, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, l'Hamiltonien se décompose en deux sous-systèmes indépendants dépourvus de couplage spin-orbite ; les deux sous-espaces de spin $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ n'échangent donc aucune population. Comme la condition initiale utilisée dans nos simulations est $\psi_\uparrow(p, 0) = \delta(p)$ et $\psi_\downarrow(p, 0) = 0$, toute la dynamique reste confinée dans le sous-espace $\mathcal{H}_+$, si bien que la densité de probabilité associée à la composante down demeure strictement nulle pour tout t. L'analyse se concentre donc sur la composante up.

Temps pair : $t = 10$. Pour un nombre pair de kicks, l'opérateur d'évolution global $\hat{U}_{\mathrm{pair}}$ (équation (4.21)) n'est pas invariant sous la transformation anti-unitaire $\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi} = \hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{P}}_\Phi$:

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1}_{0,\Phi}\,\hat{U}_{\mathrm{pair}}\,\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi} = (\hat{U}^\dagger_{\uparrow,-}\hat{U}^\dagger_{\uparrow,+})^n \neq \hat{U}^\dagger_{\mathrm{pair}}\,, \tag{5.52}$$

La symétrie de renversement du temps est donc brisée ; les trajectoires reliées par $\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}$ ne peuvent plus interférer de manière constructive. La probabilité moyenne totale de retour dans le même état de spin s'écrit alors

$$\mathcal{P}_{\mathrm{Tot}}(+\to+;\, n_{\mathrm{pair}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{class},+\to+;n_{\mathrm{pair}}}, \tag{5.53}$$

c'est-à-dire l'unique contribution classique. Il n'existe donc ni l'ERO ni anti-ERO, ce qui explique l'absence de pic marqué à $p = 0$ dans $|\psi_\uparrow(p, t = 10)|^2$ (figure 5.8(a)). Le léger pic observé à $p = 0$ dans cette composante correspond uniquement au début d'apparition du phénomène de l'$\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$, comme cela a déjà été mis en évidence par l'analyse des contrastes présentée à la figure 4.6.

Temps impair : $t = 11$. Pour un nombre impair de kicks, l'opérateur $\hat{U}_{\mathrm{impair}}$ (équa-

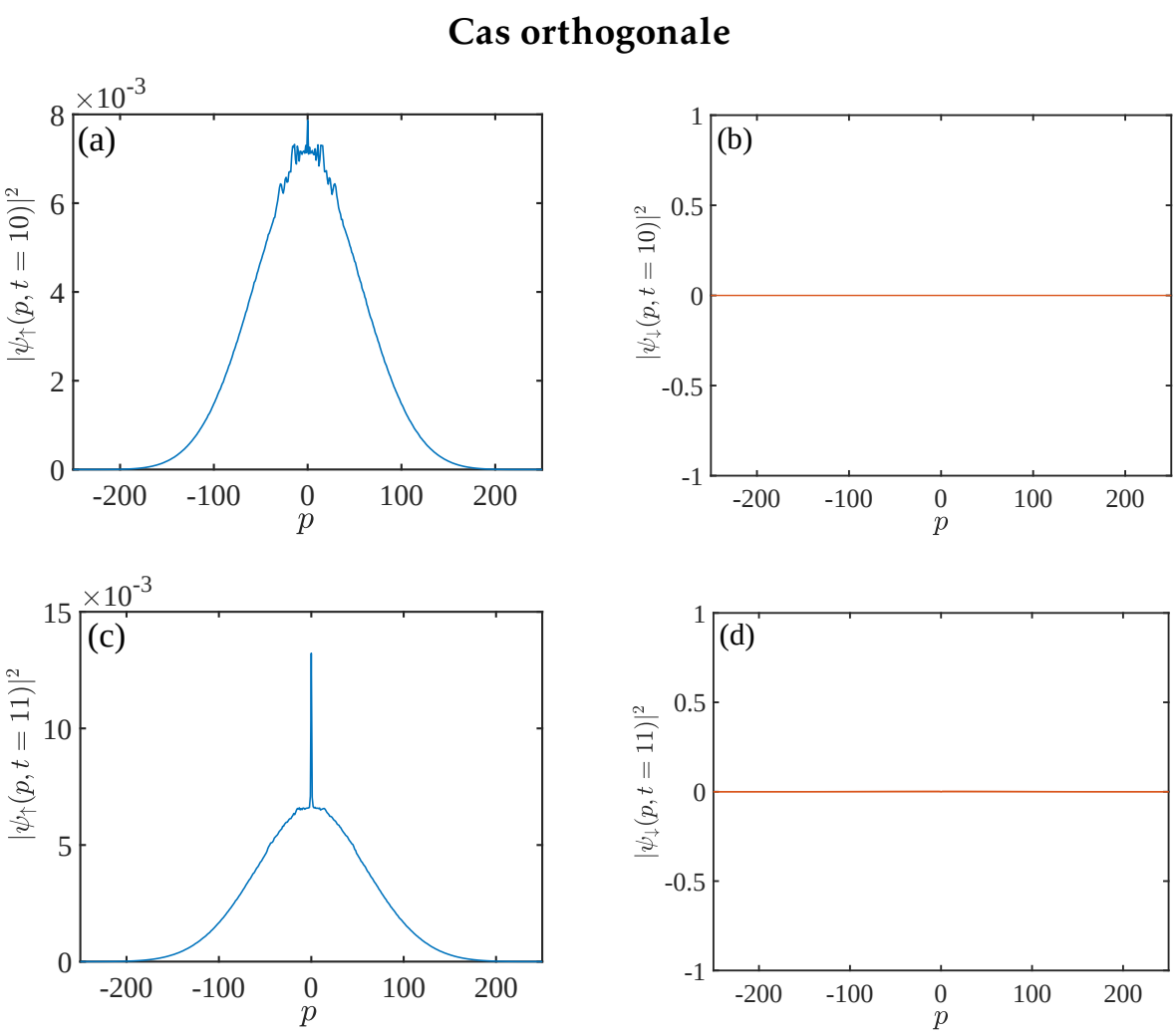


FIGURE 5.8 – Densités de probabilité des deux composantes du spin dans le modèle SDQKR pour le cas $\Omega = 0$. Les figures (a) et (b) montrent respectivement les composantes spin-up et spin-down au temps pair $t = 10$, tandis que (c) et (d) représentent les mêmes composantes au temps impair $t = 11$. Les mêmes paramètres que ceux de la figure 4.5 sont utilisés pour cette simulation.

tion (4.23)) satisfait en revanche

$$\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}^{-1}\,\hat{U}_{\text{impair}}\,\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi} = \hat{U}_{\text{impair}}^{\dagger}, \qquad \hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}^{2} = +\hat{1}\,, \tag{5.54}$$

de sorte que la symétrie de renversement du temps est préservée. Les amplitudes des deux chemins reliés par $\hat{\mathbf{T}}_{0,\Phi}$ sont conjuguées l'une de l'autre, ce qui entraîne un doublement de la probabilité de retour à l'origine :

$$\mathcal{P}_{\text{Tot}}(+\to+;\, n_{\text{impair}}) = 2\,\mathcal{P}_{\text{class},+\longmapsto+;\, n_{\text{impair}}}\,, \tag{5.55}$$

On obtient ainsi un pic de l'ERO de contraste +1 dans $|\psi_{\uparrow}(p, t = 11)|^2$ (figure 5.8 (c)). La composante down reste nulle, comme prévu (figure 5.8(d)).

Résumé. Pour le cas orthogonal ($\Omega = 0$) :

- *Temps pair ($t = 10$)* : renversement du temps brisé $\Rightarrow$ aucune interférence, absence de l'ERO ; seul le fond classique subsiste.
- *Temps impair ($t = 11$)* : renversement du temps préservé $\Rightarrow$ interférence constructive et l'ERO de contraste +1.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence le rôle fondamental des symétries dans l'apparition et la nature des interférences cohérentes observées dans le kicked rotor. Dans le cas sans spin, relevant de la classe orthogonale, l'invariance par renversement du temps conduit à un doublement de la probabilité de retour à l'origine, phénomène emblématique de la rétrodiffusion cohérente (ERO).

L'introduction d'un degré de liberté interne (spin 1/2) modifie profondément ces interférences. Dans la classe symplectique, le couplage spin-orbite transforme l'interférence constructive en interférence destructive, donnant lieu à l'anti-ERO. La présence de symétries géométriques supplémentaires, comme dans le modèle TBS, ouvre la voie à une diversité de comportements, allant de l'annulation complète des effets d'interférence à leur compensation entre composantes de spin.

Enfin, l'étude du modèle SDQKR a permis d'établir un lien direct entre la parité du nombre de kicks et la conservation ou la rupture de la symétrie de renversement temporel. Selon les cas (pair ou impair), cette alternance se traduit par l'apparition ou l'absence de l'ERO et d'anti-ERO, révélant ainsi la sensibilité des phénomènes d'interférence quantique à la structure temporelle de la dynamique.

Ces résultats démontrent que la compréhension fine des interférences cohérentes, constructives ou destructives, repose sur l'identification des symétries pertinentes (orthogonale, unitaire ou symplectique) et de leur interaction avec les degrés de liberté internes. Ils constituent ainsi une base essentielle pour les analyses ultérieures consacrées à la localisation et à l'antilocalisation faibles dans les systèmes désordonnés quantiques.

Chapitre 6

Transition d'Anderson symplectique bidimensionnelle : détermination de l'exposant critique

Sommaire du présent chapitre

6.1 Introduction 139
6.2 Modulation quasi-périodique appliquée au kicked rotor avec spin 142
6.3 Diagramme de phase critique pour le kicked rotor symplectique 143
6.4 Détermination de l'exposant critique 145
6.5 Validation de l'hypothèse d'échelle à un paramètre 149
6.6 Loi d'échelle : beta(g) en 2d symplectique 150
6.7 Loi d'échelle à deux paramètres 152
6.8 Cas du kicked rotor Symplectique 2d avec Désordre Quasi-Périodique Déterministe 154
6.9 Conclusion 156

6.1 Introduction

Dans les systèmes bidimensionnels standard (classe orthogonale, invariants par renversement de temps et sans couplage spin-orbite), la théorie de la localisation faible prédit l'absence de phase métallique : le conducteur devient toujours isolant à grande échelle, même pour un désordre arbitrairement faible. En revanche, la classe de symétrie symplectique a $2d$ qui s'applique aux électrons avec couplage spin-orbite échappe à cette règle. Des études numériques ont été menées sur différents modèles représentant la classe

Modèle	**Exposants critiques**	
Modèle d'Anderson	2.73 ± 0.02	[188] (2002)
	2.73 ± 0.04	[189] (2024)
Atomes froids (speckles)	2.67 ± 0.14	[190] (2017)
Modèle d'Ando	2.05 ± 0.08	[196] (1989)
	2.75 ± 0.1	[191] (1991)
	2.32 ± 0.14	[195] (1997)
	2.41 ± 0.24	[192] (1998)
Modèle d'Evangelou	2.5 ± 0.3	[193] (1995)
Modèle en réseau	2.51 ± 0.18	[197] (1998)
	2.88 ± 0.15	[194] (1998)

TABLEAU 6.1 – Estimations publiées de l'exposant critique ν pour la classe d'universalité symplectique en $2d$. Les années de publication sont indiquées entre parenthèses.

de symétrie symplectique en deux dimensions, en utilisant des approches variées pour estimer l'exposant critique ν associé à la transition métal–isolant. Le tableau (6.1) synthétise les principales valeurs publiées dans la littérature, obtenues à partir de modèles distincts et de méthodes numériques différentes. Les résultats des références [188-194] semblent converger vers une valeur de ν comprise entre $[2.6\,;\,2.9]$. L'estimation de [195] est un peu plus basse, tandis que celle de [196] est en contradiction avec les estimations de [191, 192]. Face à la difficulté d'observer expérimentalement ces transitions dans les solides — en raison du désordre et de la décohérence incontrôlés, du dopage impuritaire, etc. — des plateformes dédiées de simulation quantique ont été développées. Parmi elles figure le kicked rotor, un système célèbre que nous avons décrit en détail dans les chapitres précédents. Le grand avantage de ces systèmes est de permettre un contrôle fin des paramètres effectifs du désordre (amplitude, corrélations, dimension effective).

Comme brièvement discuté au chapitre 1, l'approche de simulation quantique désordonnée a permis de réaliser l'équivalent de transitions d'Anderson en dimension élevée à l'aide du kicked rotor quasi-périodique [42]. En modulant quasi-périodiquement l'intensité des kicks — c'est-à-dire en introduisant deux ou trois fréquences incommensurables — il est ainsi possible de simuler la transition métal–isolant d'Anderson en trois et quatre dimensions, dans la classe de symétrie orthogonale.

Rappelons que sur le plan expérimental, ce système de kicked rotor quasi-périodique est mis en œuvre en utilisant un gaz d'atomes ultra-froids soumis à une modulation temporelle soigneusement contrôlée, permettant de concevoir à la fois des dimensions synthétiques supplémentaires et du désordre contrôlé. Dans l'expérience rapportée dans [43], un exposant critique $\nu_{\mathrm{exp}} = 1.58 \pm 0.10$ a été mesuré avec le modèle du kicked rotor en $3d$ [40], en excellent accord avec les simulations numériques pour la classe orthogonale

en dimension 3 [43]. Plus récemment, une mesure expérimentale de l'exposant critique en $4d$ a été réalisée avec ce même modèle [45], donnant $\nu_{\text{exp}} = 1.07 \pm 0.16$. Cette première observation expérimentale de la transition d'Anderson en quatre dimensions confirme non seulement l'universalité de la transition métal-isolant, mais valide aussi directement le principe d'échelle à un paramètre (one-parameter scaling) à proximité du point critique. Ces résultats expérimentaux, fondés notamment sur la mesure complète de la fonction d'échelle à deux paramètres issue des distributions d'impulsion, renforcent les prédictions théoriques et numériques récentes sur la criticalité quantique des systèmes désordonnés en dimension quatre.

Dans ce contexte, nous utilisons un modèle de kicked rotor à spin 1/2 (4.2), légèrement modifié par l'ajout d'une modulation de l'amplitude des kicks, afin d'explorer la transition d'Anderson dans la classe de symétrie symplectique en $2d$. Cette configuration permet de simuler précisément la classe symplectique, connue pour autoriser une transition métal-isolant même en dimension deux, contrairement à la classe orthogonale et unitaire [188, 198]. Notre étude numérique démontre clairement cette transition métal-isolant, dont les propriétés critiques ont été analysées avec une précision comparable aux meilleures études numériques sur les modèles désordonnés conventionnels [188, 189, 191] confirmant ainsi l'universalité du phénomène étudié. Dans ce chapitre, l'exposant critique de la longueur de localisation a été déterminé numériquement en considérant les deux approches différentes : d'une part, en utilisant le modèle du Random Kicked Rotor ($\nu_{\text{num}} = 2.78 \pm 0.06$), où les phases associées à la propagation libre sont traitées comme des variables totalement aléatoires, ce qui permet d'obtenir l'équivalent d'un désordre parfaitement décorrélé tel qu'idéalisé dans le modèle d'Anderson [160, 175]. D'autre part, en utilisant le Kicked Rotor habituel, dans lequel la propagation libre est explicitement prise en compte via les phases dynamiques déterministes $\epsilon_p = (p+\beta)^2\hbar/2$, induites par la propagation libre purement cinétique $\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2\hbar}\right)$. Dans ce second cas, l'exposant critique obtenu est $\nu_{\text{num}} = 2.73 \pm 0.08$.

De plus, afin d'appuyer notre analyse critique, nous avons établi numériquement la fonction d'échelle $\beta(g)$, qui caractérise le comportement universel du système près de la transition. L'universalité de cette fonction, essentielle pour valider la théorie d'échelle à un paramètre [14], est clairement mise en évidence par nos résultats numériques. Nous vérifions en outre une loi d'échelle à deux paramètres, en transposant la méthodologie de l'étude [45] sur le kicked rotor sans spin en $4d$, et observons un collapse robuste des distributions compatible avec l'universalité dans notre cas symplectique $2d$.

Comme discuté dans le chapitre 4 l'intérêt majeur de ce modèle réside dans sa faisabilité expérimentale avec des atomes ultra-froids. Cette faisabilité ouvre la voie à une vérification expérimentale directe des prédictions numériques relatives à la transition métal-isolant en classe symplectique $2d$. Notre démarche méthodologique est inspirée par celle utilisée par [43] dans l'étude du kicked rotor quasipériodique $3d$ appartenant à la classe orthogonale. Ce chapitre jette ainsi un pont entre la théorie de la localisation en classe symplectique $2d$ et une future observation expérimentale de la transition d'Anderson $2d$ avec des atomes ultra-froids.

6.2 Modulation quasi-périodique appliquée au kicked rotor avec spin

À notre connaissance, l'idée d'utiliser une modulation quasi-périodique temporelle pour étudier la localisation d'Anderson en dimensions supérieures a principalement été appliquée à des systèmes de type kicked rotor appartenant à la classe orthogonale [42], c'est-à-dire sans spin et invariants par renversement du temps. Par exemple Manai et *al* [199] ont mis en évidence expérimentalement la localisation d'Anderson en $2d$ à l'aide d'un kicked rotor quasi-périodique, en s'appuyant sur la correspondance établie avec un modèle d'Anderson bidimensionnel anisotrope. Ce mapping, détaillé dans l'article et son supplément, situe l'expérience dans la classe orthogonale ; la dépendance exponentielle de la longueur de localisation mesurée confirme ce cadre et que $d = 2$ est la dimension critique inférieure.

Dans la suite, nous étendons notre modèle modifié en y introduisant une modulation de l'amplitude des kicks ; ce schéma permet d'étudier un modèle effectif en dimension deux.

Le modèle que nous considérons est défini comme suit :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + (-1)^{\lfloor t \rfloor}\Omega\hat{\sigma}_x + \hat{H}_- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n) + \hat{H}_+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n-1), \tag{6.1}$$

Avec :

$$\hat{H}_\pm = \mathcal{K}_\pm(t)\Big[\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \varepsilon \sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\Big], \tag{6.2}$$

où $\mathcal{K}_\pm(t) = K(1 \pm \alpha)(1 + \varepsilon_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2))$. Ici, K représente l'amplitude globale des kicks, tandis que le paramètre α introduit une modulation alternée entre les kicks paires et impaires, définissant ainsi une période temporelle double. La modulation quasi-périodique, contrôlée par les paramètres ε_2, ω_2 et φ_2, permet de générer une dimension effective supplémentaire.

Considérons l'évolution d'une fonction d'onde initiale $\Psi(p, t = 0)$ pour le modèle symplectique à deux périodes. L'état initial est un vecteur à deux composantes (spin up/down), que l'on choisit, dans nos simulations, localisé en $p = 0$ dans la composante up :

$$\Psi(p,0) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(p,0) \\ \psi_\downarrow(p,0) \end{pmatrix}, \qquad \psi_\uparrow(p,0) = \delta(p), \quad \psi_\downarrow(p,0) = 0\,, \tag{6.3}$$

L'évolution d'un pas de temps à l'autre est décrite par un opérateur unitaire $\hat{\mathcal{U}}(t; t-1)$ qui dépend explicitement du pas t, car le système alterne deux amplitudes de kicks K_+ et K_-, ainsi qu'une modulation quasi-périodique explicite. Il ne s'agit donc pas d'un système périodique au sens strict (comme dans le cadre de Floquet), mais d'un système à deux pas, dont l'évolution complète est construite itérativement.

$$\hat{\mathcal{U}}(t;t-1)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2}\,\hat{1}_2+(-1)^{\lfloor t\rfloor}\,\Omega\,\hat{\sigma}_x\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\,K_{(-1)^{\lfloor t\rfloor}}\Big(1+\varepsilon_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\Big)\Big(\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2+\varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\Big)\right], \tag{6.4}$$

Ici, les amplitudes de kick alternent selon :

$$K_+ = K(1+\alpha), \qquad K_- = K(1-\alpha),$$

de sorte que $K_{(-1)^t} = K_+$ pour t pair, et K_- pour t impair. La modulation quasi-périodique est assurée par le facteur $1+\varepsilon_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$, qui rend chaque pas différent du précédent. En l'absence de périodicité stricte à un pas, (on ne définit pas ici un opérateur de Floquet standard), mais on suit directement la dynamique à chaque étape.

Il est toujours utile de réécrire ce potentiel sous une forme plus adaptée aux implémentations expérimentales avec des atomes ultra-froids :

$$\hat{H}_\pm = \tilde{\mathcal{K}}_\pm(t)\cos\left(\hat{x}\hat{1}_2+\Phi\hat{\sigma}_z\right), \tag{6.5}$$

où $\tilde{\mathcal{K}}_\pm(t)=\mathcal{K}_\pm(t)\sqrt{1+\varepsilon^2}$ et $\Phi=\arctan(\varepsilon)$. Cette écriture montre clairement que l'effet du couplage spin-orbite peut être interprété comme un simple déphasage spatial entre les potentiels optiques vus par les deux composantes de spin.

6.3 Diagramme de phase critique pour le kicked rotor symplectique

Afin d'identifier la transition d'Anderson dans notre modèle symplectique à modulation quasi-périodique (6.1), nous avons construit un diagramme de phase numérique dans l'espace des paramètres (K,ε_2). Le diagramme est obtenu en étudiant la dépendance en temps de la valeur moyenne de p^2 du système $\langle p^2\rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2|\psi(p)|^2dp$, moyennée sur un ensemble de réalisations indépendantes du désordre aléatoire introduit dans la propagation libre, ainsi que sur les phases φ_2 . La particularité du cas symplectique en dimension deux est que la dynamique reste asymptotiquement *diffusive* ($\langle p^2\rangle_t \to Dt$, où D est le coefficient de diffusion) non seulement dans la phase métallique ($K>K_c$), mais également exactement au point critique ($K=K_c$) [189].

Le diagramme de phase présenté en Fig. 6.1 montre clairement trois régimes dynamiques distincts, identifiés grâce à l'analyse de la croissance temporelle de la quantité $\langle p^2\rangle_t$. Pour chaque couple de paramètres (K,ε_2), nous avons extrait numériquement l'exposant dynamique κ défini par $\langle p^2\rangle_t \propto t^\kappa$. Cet exposant a été déterminé par un ajustement linéaire en échelle logarithmique de $\ln\langle p^2\rangle_t$ en fonction de $\ln t$, en considérant les temps longs (ici de $t=200$ à $t=5000$ kicks).

Trois zones apparaissent clairement dans ce diagramme :

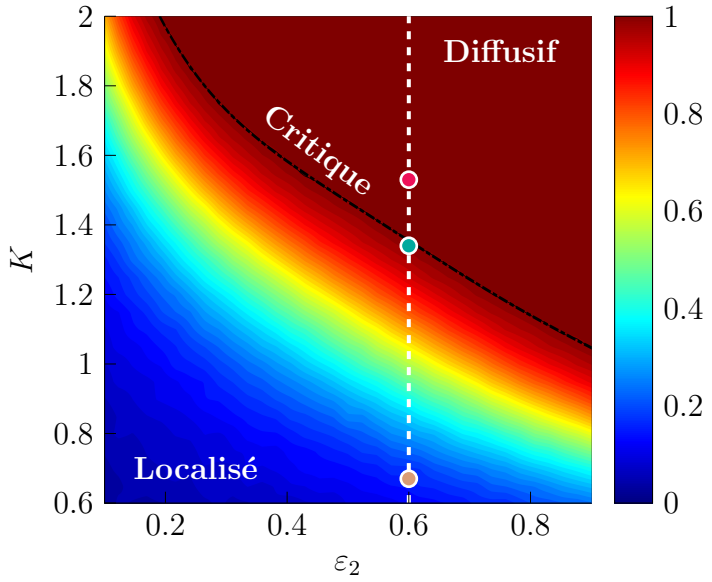


FIGURE 6.1 – **Diagramme de phase de la transition d'Anderson pour le Random kicked rotor symplectique.** La carte de couleur représente l'exposant de croissance κ extrait de la loi $\langle p^2 \rangle_t \propto t^\kappa$ à temps long (jusqu'à 5000 kicks). Le bleu correspond à une phase localisée ($\kappa < 1$), le rouge à une phase diffusive ou critique ($\kappa = 1$), et la ligne noire pointillée marque la ligne critique de transition entre ces deux régimes. Paramètres utilisés : $\bar{k} = 1$, $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$, $\epsilon = 0.8$, $\Omega = \sqrt{2}\pi$, $\alpha = 0.4$. Les phases aléatoires non corrélées φ_2 sont tirées uniformément dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. La moyenne est effectuée sur 10^3 réalisations de désordre de phase.

• Une phase **localisée**, caractérisée par $\kappa = 0$, où la variance de l'impulsion se sature à temps long.

• Une phase **critique**, marquant la transition métal–isolant, définie ici comme la frontière où apparaît pour la première fois la dynamique linéaire, $\kappa = 1$.

• Une phase **diffusive**, également caractérisée par $\kappa = 1$, mais située au-delà de la frontière critique.

Dans ce modèle symplectique en deux dimensions, la difficulté provient du fait que les phases critique et diffusive possèdent toutes deux le même exposant dynamique $\kappa = 1$. Pour distinguer clairement la région critique, nous avons choisi d'identifier la transition métal–isolant par la valeur minimale de K (pour chaque ε_2 fixé) à partir de laquelle la dynamique devient strictement linéaire ($\kappa = 1$).

La ligne pointillée blanche sur le diagramme correspond à un chemin à ε_2 constant (ici $\varepsilon_2 = 0.6$), permettant une analyse approfondie et précise de cette transition en fonction du paramètre unique K. En suivant cette trajectoire verticale, nous déterminons approximativement la valeur critique $K_c \approx 1.325$, qui marque la séparation entre les régimes localisé ($K < K_c$) et diffusif ($K > K_c$).

6.4 Détermination de l'exposant critique

Dans le cadre de l'étude de la transition métal-isolant dans notre système (6.1), nous avons adopté une méthode de mise à l'échelle en temps fini (finite-time scaling), qui constitue une transposition dynamique de la méthode standard de mise à l'échelle en taille finie (finite-size scaling) utilisée dans les transitions de phase continues, et notamment dans les transitions d'Anderson [200, 201]. Cette approche repose sur l'hypothèse d'échelle à un paramètre, permettant de décrire la dynamique du système à partir d'une fonction d'échelle universelle. Nous suivons ici la stratégie développée par Lemarié et al. [44], initialement appliquée au kicked rotor quasipériodique en $3d$ appartenant à la classe de symétrie orthogonale, que nous adaptons ici au cas symplectique en $2d$. Pour cela, nous définissons la quantité suivante :

$$\Lambda(K,t) = \frac{\langle p^2 \rangle_t}{t}, \tag{6.6}$$

Cette quantité permet de caractériser clairement les trois régimes dynamiques distincts dans le cas symplectique $2d$:

• **Régime localisé** ($K < K_c$) : La dynamique est caractérisée par une variance de l'impulsion $\langle p^2 \rangle_t$ qui sature à une valeur finie à temps longs, impliquant une décroissance asymptotique $\Lambda(t) = \langle p^2 \rangle_t / t \propto t^{-1}$. Ceci correspond à une pente de -1 lorsqu'on représente $\ln(\Lambda)$ en fonction de $\ln(t)$.

• **Régime critique** ($K \approx K_c$) : À la transition métal-isolant, la dynamique présente une croissance presque parfaitement linéaire de la variance avec le temps, c'est-à-dire

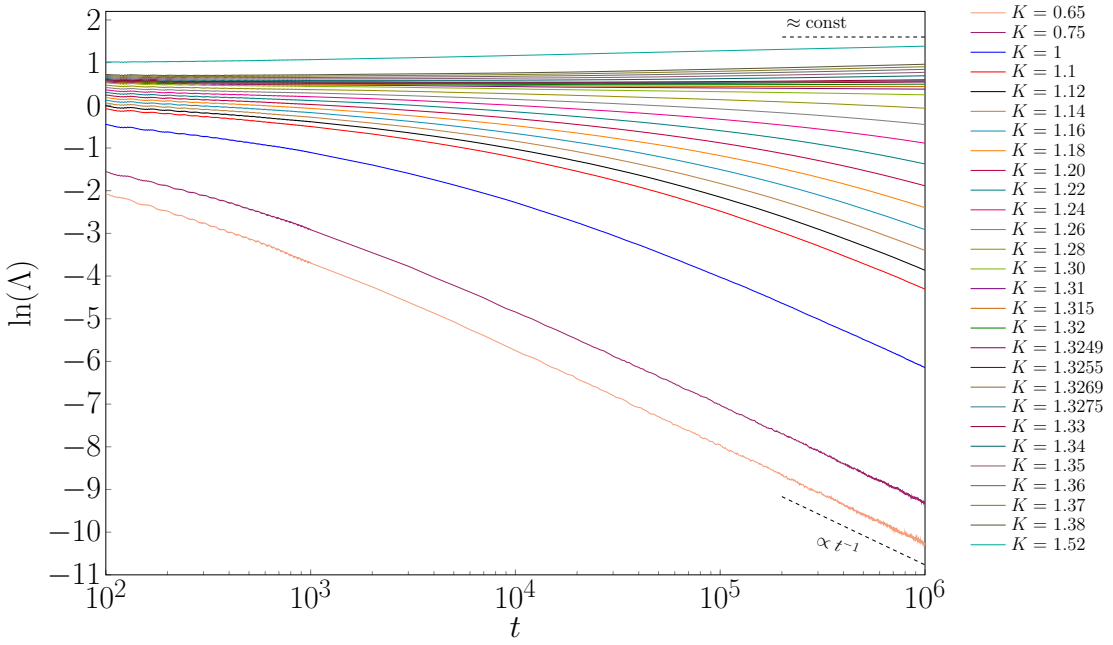


FIGURE 6.2 – Évolution de $\ln(\Lambda)$ en fonction du temps pour différentes valeurs de K. Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux de la figure 6.1.

$\langle p^2 \rangle_t \sim t^\kappa$ avec $\kappa \approx 1$. En conséquence, la quantité $\Lambda(t)$ reste approximativement constante à temps long, traduisant une pente proche de zéro sur le graphique en échelle logarithmique.

• **Régime diffusif** ($K > K_c$) : Ce régime est caractérisé par une croissance linéaire de la variance en impulsion, $\langle p^2 \rangle_t \sim t$. Ainsi, la quantité $\Lambda(t)$ tend vers une constante à temps long, ce qui se traduit par une pente nulle lorsque l'on représente $\ln(\Lambda)$ en fonction de $\ln(t)$.

En traçant $\ln(\Lambda)$ en fonction de $\ln(t)$ pour différentes valeurs de K comprises entre 0.65 et 1.52, et sur des intervalles temporels allant de 10^2 à 10^6, nous identifions la valeur critique $K_c \approx 1.3249$ comme la plus petite valeur de K pour laquelle $\Lambda(t)$ reste constante à temps long, ce qui correspond à une dynamique asymptotique diffusif normale $\langle p^2(t) \rangle \sim t$ (voir figure 6.2).

Pour identifier la valeur du point critique K_c, nous utilisons une méthode basée sur l'analyse de la variance des courbes de $\ln(\Lambda)$ en fonction de K pour différents temps fixes. La figure 6.3(a) montre ces courbes pour des temps variant de $t = 10^3$ à $t = 6{\times}10^4$. Le point critique est estimé comme la valeur de K où la dispersion entre ces courbes est minimale. Concrètement, nous interpolons numériquement chacune des courbes $\ln(\Lambda)(K)$ sur une grille fine de valeurs de K. La variance entre ces courbes est ensuite calculée à chaque point de cette grille, définissant ainsi une fonction variance(K) clairement illustrée dans la figure 6.3(b). Le point critique K_c est alors identifié comme la valeur minimisant cette variance.

Pour estimer l'incertitude associée à K_c, nous définissons un seuil correspondant à une augmentation de 5% de la variance minimale obtenue. Les valeurs extrêmes de K où

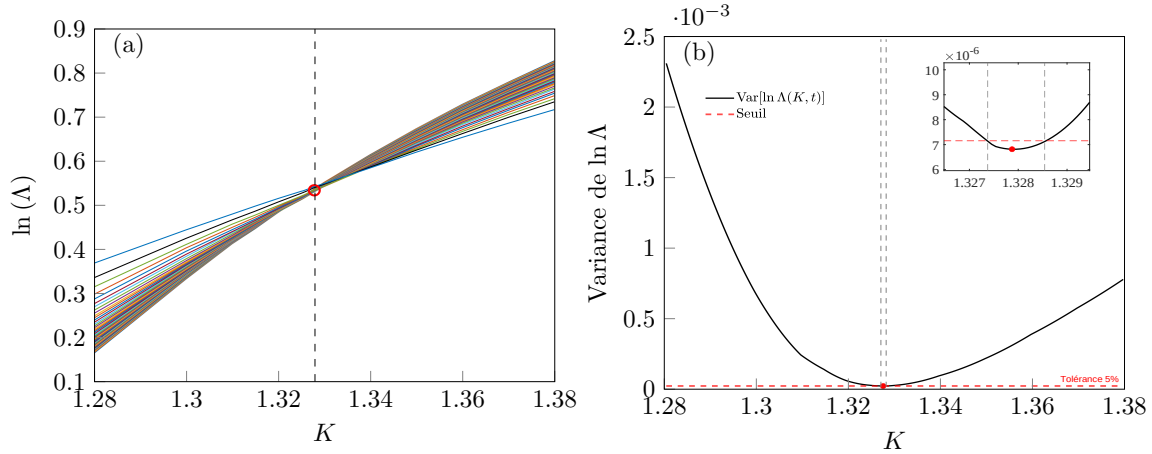


FIGURE 6.3 – (a) Croisement des courbes de $\ln(\Lambda)$ pour différentes valeurs de t, révélant un point critique caractéristique de la transition métal-isolant. (b) Variance des courbes de $\ln(\Lambda)$ en fonction de K. Le minimum de variance (point rouge) définit le point critique K_c. L'incertitude associée à K_c est estimée en considérant les points où la variance augmente de 5% par rapport à cette valeur minimale (lignes verticales en pointillés).

la variance dépasse ce seuil définissent l'intervalle d'incertitude autour de K_c (voir les lignes pointillées verticales sur la figure 6.3(b)). Avec cette approche, nous obtenons une estimation de : $K_c = 1.3279 \pm 0.0006$.

Suivant la méthode détaillée dans la littérature [44, 202], nous postulons une loi d'échelle dynamique au voisinage du point critique de la forme :

$$\ln \Lambda(K,t) = \mathcal{F}\left[(K-K_c)t^{1/2\nu}\right], \tag{6.7}$$

où ν est l'exposant critique associé à la divergence de la longueur de localisation près de K_c, et $\mathcal{F}$ une fonction d'échelle analytique. En développant cette fonction près de K_c, nous obtenons :

$$\ln \Lambda(K,t) = \ln \Lambda_c + (K-K_c)t^{1/2\nu}\mathcal{F}_1 + \dots. \tag{6.8}$$

où la dérivée par rapport à K au point critique évolue selon la loi de puissance :

$$\left.\frac{\partial \ln \Lambda(K,t)}{\partial K}\right|_{K_c} \propto t^{1/2\nu}. \tag{6.9}$$

Nous avons extrait numériquement cette dérivée en traçant la pente de $\ln(\Lambda)$ par rapport

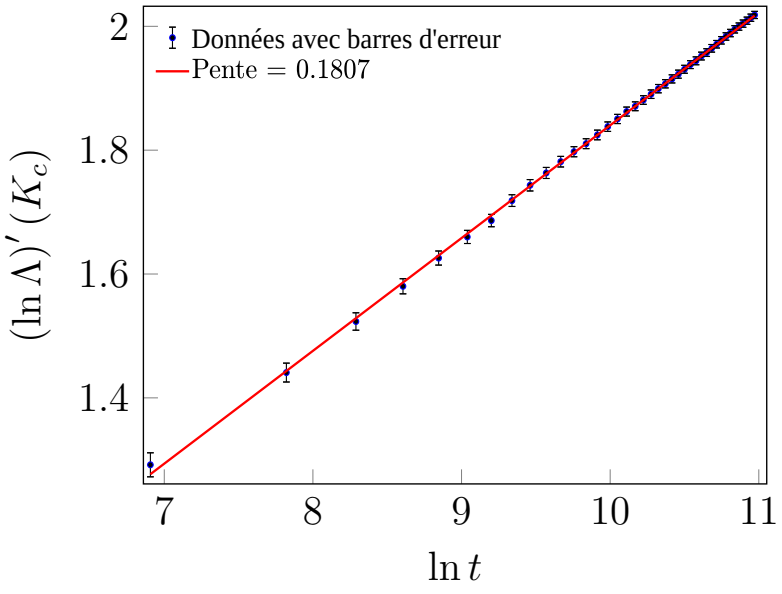


FIGURE 6.4 – Régression linéaire de la dérivée $(\ln \Lambda)'(K_c,t)$ en fonction de $\ln t$, pour des temps compris entre $t = 10^3$ et $t = 6\times10^4$. L'exposant critique est extrait à partir de la pente, selon la relation $1/(2\nu)$, ce qui donne ici $\nu = 2.77$. Le choix de l'intervalle en K utilisé pour calculer cette dérivée est fondamental : conformément aux critères établis dans [44], il doit être suffisamment étroit et centré autour de K_c pour que la dépendance de $\ln \Lambda(K,t)$ soit quasi-linéaire en K. Dans notre analyse, nous avons utilisé l'intervalle $K \in [1.30, 1.34]$.

à K au voisinage de K_c pour chaque temps considéré. Un ajustement linéaire de

$$\ln\left[\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial K(K_c, t)}\right], \tag{6.10}$$

en fonction de $\ln t$ nous a permis de déterminer précisément la pente qui vaut 0.1807 (voir figure 6.4).

Cette pente est directement reliée à l'exposant critique selon la relation :

$$\frac{1}{2\nu} = 0.1807 \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2 \times 0.1807} \approx 2.767.$$

Pour estimer l'incertitude sur les valeurs de l'exposant critique ν et du point critique K_c, nous avons employé une méthode statistique de rééchantillonnage basée sur le *bootstrap* [203]. Concrètement, cette procédure consiste à générer aléatoirement (avec remise) de nouveaux ensembles de conditions initiales à partir des 1000 réalisations numériques disponibles pour chaque valeur de K. À chaque itération du bootstrap, nous avons recalculé la quantité $\ln \Lambda = \ln(\langle p^2 \rangle / t)$ moyennée sur ces nouvelles conditions initiales rééchantillonnées, puis interpolé ces données sur une grille temporelle fixe allant de $t = 10^3$ à $t = 6 \times 10^4$. Pour chaque rééchantillonnage, le point critique K_c est identifié comme la valeur de K minimisant la variance des courbes interpolées $\ln \Lambda(K, t)$ pour différents temps. Ensuite, afin d'extraire l'exposant critique ν, une régression linéaire est réalisée en échelle log-log sur la dérivée par rapport à K au point critique, notée $(\ln \Lambda)'(K_c, t)$, en fonction du temps t. Cette procédure complète est répétée 1000 fois afin d'obtenir les distributions statistiques des valeurs estimées pour K_c et ν.

Les incertitudes sur les grandeurs critiques sont alors calculées à partir des écarts-types de ces distributions, conduisant aux résultats finaux suivants :

$$\nu = 2.77 \pm 0.06, \quad K_c = 1.325 \pm 0.002\,.$$

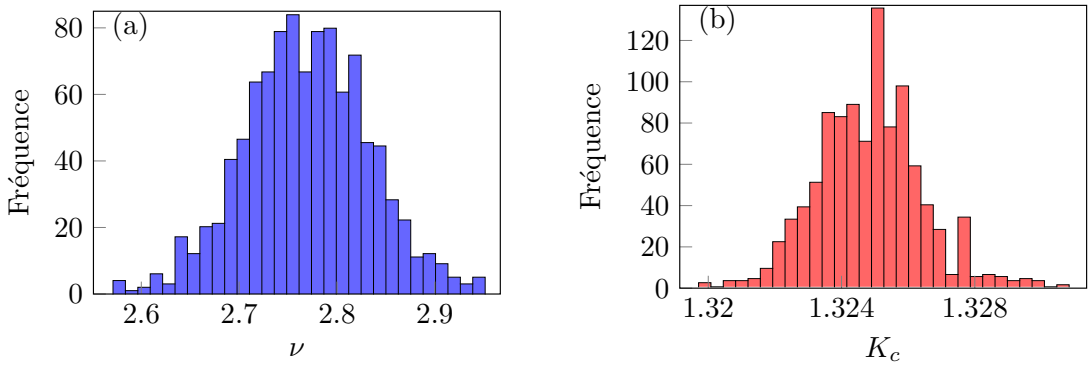


FIGURE 6.5 – Distribution bootstrap de l'exposant critique ν (a) et du point critique K_c (b), obtenue à partir de 1000 itérations de rééchantillonnage. Les distributions sont centrées autour de $\nu = 2.77$ et $K_c = 1.325$ avec des écarts-types respectifs de 0.06 et 0.002.

À titre d'illustration uniquement, les histogrammes des distributions statistiques de ces deux grandeurs critiques sont présentés dans les figures 6.5(a) et 6.5(b). Il est à noter que les incertitudes rapportées correspondent précisément aux écarts-types de ces distributions, reflétant ainsi directement leur largeur caractéristique.

6.5 Mise à l'échelle des données et validation de l'hypothèse d'échelle à un paramètre

Cette partie s'inscrit dans la continuité de nos précédents résultats où nous avons déterminé l'exposant critique $\nu = 2.77$ associé à la transition métal-isolant dans le modèle (6.1). Ici, notre objectif est d'illustrer clairement l'effondrement des données numériques vers une courbe universelle, confirmant ainsi la validité de l'hypothèse d'échelle à un paramètre.

Pour réaliser cette analyse, nous avons adopté une méthode d'échelle en temps fini basée sur l'hypothèse d'un paramètre unique. Cette approche suppose que la quantité Λ peut être exprimée à l'aide d'une fonction universelle d'une seule variable d'échelle $\xi/t^{1/2}$, où la longueur de corrélation ξ est définie comme

$$\xi = |K - K_c|^{-\nu}. \tag{6.11}$$

Ainsi, nous avons postulé une loi d'échelle dynamique (voir équation (6.7)), que nous utilisons ici pour analyser l'effondrement des données numériques.

En nous basant sur les paramètres critiques précédemment obtenus ($K_c = 1.325$, $\nu = 2.77$, et $\ln \Lambda_c = 0.533$), nous avons procédé à un développement en série de Taylor d'ordre $N = 4$ autour du point critique, ce qui permet d'écrire explicitement :

$$\ln \Lambda(K, t) = \ln \Lambda_c + \sum_{n=1}^{4} F_n (K - K_c)^n \, t^{n/(2\nu)} \,, \tag{6.12}$$

où les coefficients F_n sont déterminés numériquement par minimisation de l'erreur quadratique entre les données numériques obtenues et ce modèle analytique, sur une plage temporelle allant de $t = 3 \times 10^3$ à $t = 10^5$. Les données brutes extraites des courbes de $\ln \Lambda$ en fonction du temps t sont sous-échantillonnées (un point tous les 100), afin de faciliter leur analyse numérique.

Ensuite, pour vérifier l'effondrement universel, nous reconstruisons la variable d'échelle sous la forme :

$$x = \ln\left(\frac{\xi}{t^{1/2}}\right) = -\nu \ln |K - K_c| - \frac{1}{2} \ln t. \tag{6.13}$$

Les résultats de ce traitement sont présentés dans la figure 6.6, où l'on observe clairement deux régimes distincts : un régime de localisation pour $K < K_c$ et un régime étendu pour $K > K_c$. L'excellent alignement des données numériques sur une courbe unique, une fois correctement redimensionnées, confirme ainsi fortement la validité physique et la cohérence interne du modèle adopté.

Notons enfin que notre procédure simplifiée ne prend pas en compte explicitement les effets liés aux variables d'échelle irrélévantes, ni les résonances propres à notre système dynamique à deux fréquences, contrairement à certaines études sur le kicked rotor quasipériodique (voir par exemple [43, 44]). Nous supposons ici que ces effets restent faibles ou peuvent être incorporés de façon efficace dans les coefficients du développement polynomial. Cette hypothèse est soutenue par la qualité très satisfaisante de l'effondrement obtenu.

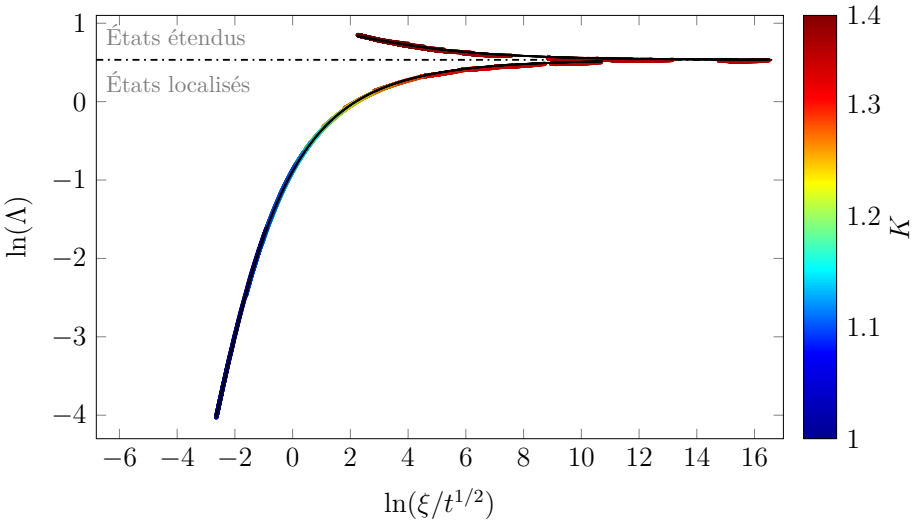


FIGURE 6.6 – Fonction d'échelle $\ln(\Lambda)$ tracée en fonction de $\ln(\xi/t^{1/2})$. Les différentes portions colorées de la courbe correspondent aux données obtenues pour différentes valeurs de K. La courbe noire correspond à l'ajustement basé sur l'hypothèse d'échelle à un paramètre (voire le texte). Cette figure illustre clairement l'effondrement des données sur une courbe universelle, validant l'hypothèse d'échelle à un paramètre.

6.6 Loi d'échelle à un paramètre : forme de la fonction $\beta(g)$ dans le kicked rotor symplectique en deux dimensions

Dans cette section, nous étudions la forme de la fonction d'échelle $\beta(g)$ dans le modèle du kicked rotor symplectique bidimensionnel, et nous mettons en évidence son caractère universel. Rappelons tout d'abord que la fonction d'échelle $\beta(g)$ est définie comme la dérivée logarithmique de la conductance g du système par rapport à la taille caractéristique L de celui-ci : $\beta(g) = \frac{\mathrm{d}\ln(g)}{\mathrm{d}\ln(L)}$.

Avec L et $g$sont donnés par l'équation (1.30). Pour les systèmes à symétrie symplectique, les fonctions $\beta(g)$ présentent une caractéristique remarquable : elles sont **non monotones** et possèdent un **point fixe** en dimension deux, ce qui rend possible l'existence d'une transition métal-isolant dans ce cas. Il est important de noter que la fonction $\beta(g)$ obtenue présente bien un croisement en zéro, comme attendu pour la classe symplectique en deux dimensions [76, 188]. Ce comportement a également été mis en évidence dans notre étude du kicked rotor symplectique en $2d$ (voir Fig.6.7), Contrairement à la classe orthogonale,

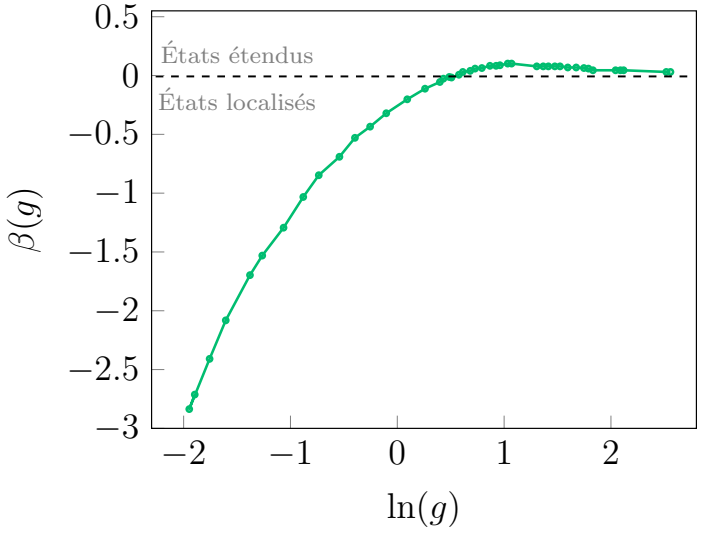


FIGURE 6.7 – Fonction d'échelle $\beta(g)$ pour notre modèle (6.1), illustrant clairement la transition métal-isolant au point critique $\beta(g_c) = 0$. Les paramètres utilisés sont : $\bar{k} = 1$, $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$, $\Omega = \sqrt{2}\pi$, $\alpha = 0.4$, $\varepsilon = 0.8$, $\varepsilon_2 = 0.6$.

dans laquelle tous les états sont localisés en dimension deux et pour laquelle la fonction d'échelle $\beta(g)$ est négative, la conductance décroît avec la taille du système [204].

Pour étudier l'universalité de cette fonction, nous avons réalisé des simulations numériques pour trois ensembles distincts de paramètres (cf. figure 6.8). L'effondrement (collapse) des trois courbes obtenues est réalisé en introduisant la conductance critique g_c correspondant à chaque jeu de paramètres, puis en traçant la fonction $\beta(g)$ en fonction de la variable redimensionnée $\ln(g/g_c)$. Le collapse observé montre que la fonction $\beta(g)$ ne dépend pas des détails microscopiques du système, mais constitue bien une fonction universelle caractéristique du modèle symplectique bidimensionnel. Cette universalité constitue l'un des résultats centraux de notre étude.

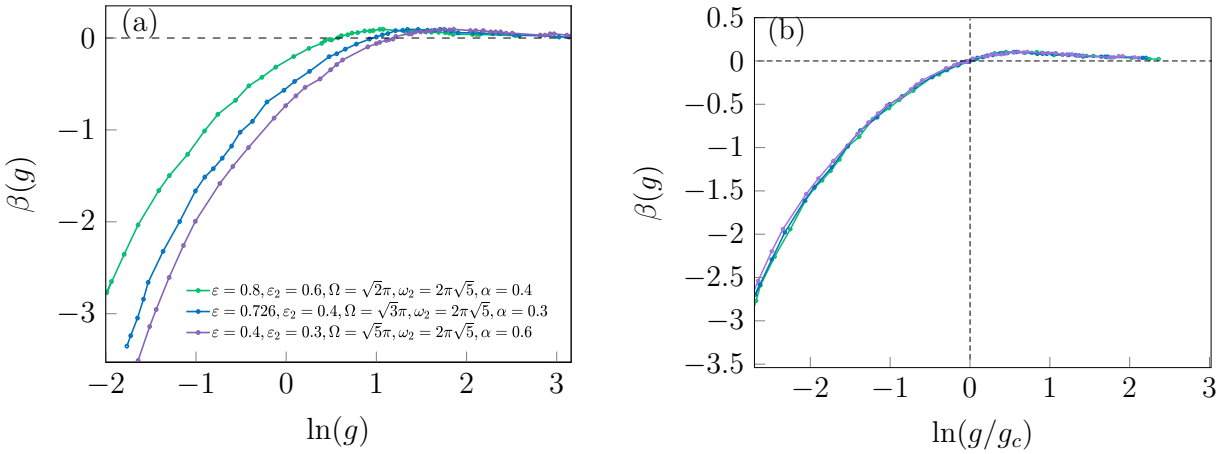


FIGURE 6.8 – Universalité de la fonction d'échelle $\beta(g)$ mise en évidence par le collapse de courbes obtenues pour différents jeux de paramètres.

Ainsi, nous avons mis en évidence pour la première fois, de manière explicite et universelle, la forme de la fonction d'échelle $\beta(g)$ dans le contexte spécifique du kicked rotor symplectique en deux dimensions.

6.7 Loi d'échelle à deux paramètres

Dans la référence expérimentale [45], un kicked rotor sans spin, relevant de la classe orthogonale en dimension effective $d = 4$, a permis de mettre en évidence une invariance d'échelle à deux paramètres en maintenant fixe la variable

$$\tilde{\delta} = \delta_K t^{1/(\nu d)} = (K - K_c)\, t^{1/(\nu d)}. \tag{6.14}$$

Nous reprenons ici la même démarche — mais numériquement — afin de démontrer cette invariance d'échelle à deux paramètres pour notre modèle symplectique en $2d$. L'analyse s'appuie sur la loi d'échelle dynamique pour la distribution d'impulsion $\Pi_t(p)$:

$$\Pi_t(p) = t^{-\frac{1}{d}} \mathcal{F}\left(p t^{-\frac{1}{d}}, \tilde{\delta}\right), \quad \tilde{\delta} = (K - K_c)\, t^{\frac{1}{(\nu d)}}, \tag{6.15}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction universelle. Dans tout ce qui suit, nous figeons les paramètres critiques aux valeurs extraites de notre analyse précédente, $\nu = 2.77$ et $K_c = 1.325$, et nous les utilisons de façon uniforme pour l'ensemble des séries $\tilde{\delta}$ fixé.

Pour tester l'invariance d'échelle lorsque $K \neq K_c$ on choisit une valeur cible de $\tilde{\delta}$ (qui ne dépend pas de p), puis on construit les couples (δ_K, t) satisfaisant $\tilde{\delta} = \delta_K t^{1/(\nu d)}$. Pour chacun de ces couples, on calcule $\Pi_t(p)$ et on applique le changement d'échelle :

$$p \to \tilde{p} = p t^{-\frac{1}{d}}, \qquad \Pi_t(p) \to t^{\frac{1}{d}} \Pi_t(p), \tag{6.16}$$

de sorte que, si la loi d'échelle est vérifiée, les courbes $t^{\frac{1}{d}} \Pi_t(p)$ tracées en fonction de $\tilde{p}$ se superposent. Le tableau 6.2 recense les couples (δ_K, t) construits pour des $\tilde{\delta}$ fixés, à la fois dans le régime localisé ($\tilde{\delta} < 0$) et dans le régime diffusif ($\tilde{\delta} > 0$).

$\tilde{\delta}$	(δ_K, t)						
-3	$(-0.73, 2500)$	$(-0.64, 5000)$	$(-0.6, 7500)$	$(-0.57, 10^4)$	$(-0.5, 2.10^4)$	$(-0.47, 3.10^4)$	$(-0.42, 5.10^4)$
	$(-0.41, 6.10^4)$	$(-0.38, 10^5)$					
-1.4	$(-0.34, 2500)$	$(-0.3, 5000)$	$(-0.28, 7500)$	$(-0.27, 10^4)$	$(-0.23, 2.10^4)$	$(-0.22, 3.10^4)$	$(-0.20, 5.10^4)$
	$(-0.19, 6.10^4)$	$(-0.18, 10^5)$					
$+1.4$	$(+0.34, 2500)$	$(+0.30, 5000)$	$(+0.27, 7500)$	$(+0.265, 10^4)$	$(+0.23, 2.10^4)$	$(+0.22, 3.10^4)$	$(+0.20, 5.10^4)$
	$(+0.19, 6.10^4)$	$(+0.175, 10^5)$					
$+3$	$(+0.73, 2500)$	$(+0.64, 5000)$	$(+0.6, 7500)$	$(+0.57, 10^4)$	$(+0.5, 2.10^4)$	$(+0.47, 3.10^4)$	$(+0.43, 950)$
	$(+0.41, 6.10^4)$	$(+0.37, 10^5)$					

Tableau 6.2 – Jeux de (δ_k, t) choisies pour maintenir $\tilde{\delta}$ constant et obtenir l'effondrement des distributions de part et d'autre du point critique ($\tilde{\delta} < 0$) et ($\tilde{\delta} > 0$). Ces paramètres sont calculés pour $\nu = 2.77$ et $K_c = 1.325$.

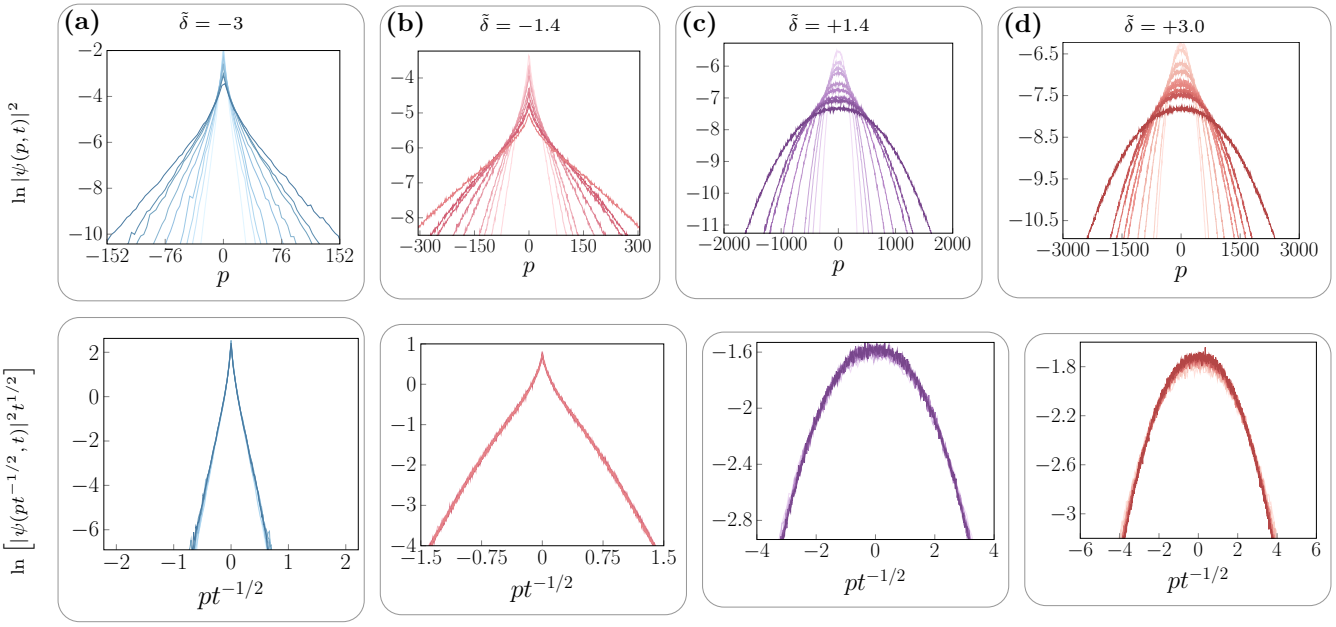


FIGURE 6.9 – Invariance d'échelle à deux paramètres au voisinage de la transition critique d'Anderson symplectique en $2d$. Les panneaux supérieurs présentent les distributions d'impulsion (en haut) et re-scalées (en bas) en échelle semi-log, dans le régime localisé $\tilde{\delta}_k < 0$ (a, b) et dans le régime diffusif $\tilde{\delta}_k > 0$ (c, d).

La Figure (6.9) illustre deux situations du côté localisé du régime critique ($K < K_c$), pour $\tilde{\delta} = -3$ (panneau (a)) et $\tilde{\delta} = -1.4$ (panneau (b)), ainsi que deux situations du côté diffusif ($K > K_c$), pour $\tilde{\delta} = +1.4$ (panneau (c)) et $\tilde{\delta} = +3.0$ (panneau (d)). Les courbes du haut montrent les distributions d'impulsion $|\psi(p,t)|^2$ obtenues pour différents couples (δ_K, t). Après rescaling par $pt^{-1/2}$, les distributions se « collapsent » sur une unique courbe

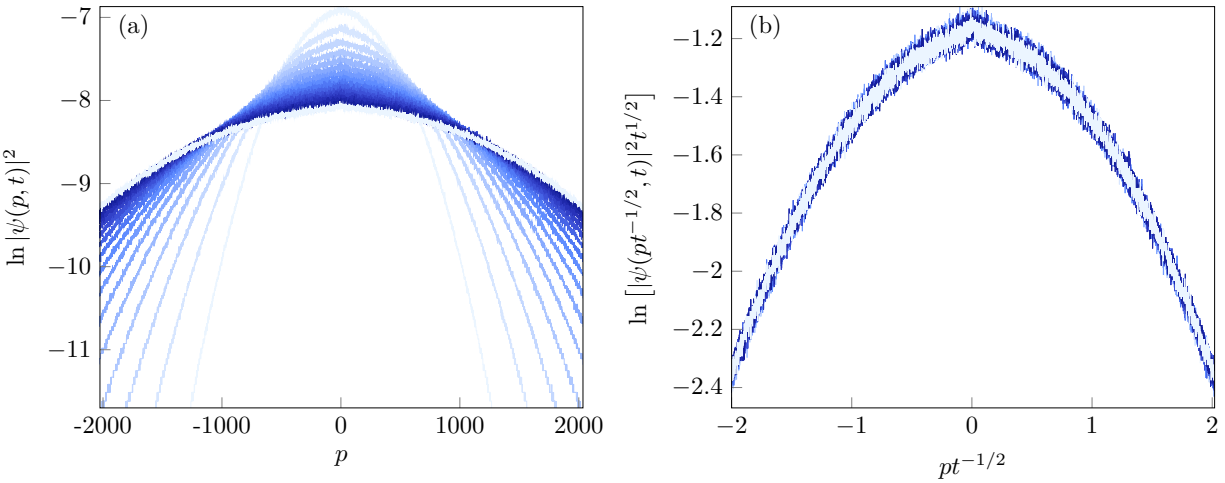


FIGURE 6.10 – Invariance d'échelle à deux paramètres au point critique. La figure (a) présente les distributions d'impulsion en échelle semi-logarithmique, tandis que la figure (b) montre leur représentation après rescaling, également en échelle semi-logarithmique.

universelle (panneaux du bas), confirmant l'invariance d'échelle aussi bien dans le régime localisé que dans le régime diffusif.

Pris dans leur ensemble, ces résultats démontrent numériquement que la loi d'échelle à deux paramètres s'applique également au modèle symplectique en $2d$, en suivant la méthodologie employée dans l'étude du modèle $3d$ sans spin, sans pour autant présumer d'équivalence entre ces deux systèmes de classes de symétrie et dimensions différentes.

Nous aussi montrons dans la figure 6.10 l'invariance d'échelle au point critique ($K_c \approx 1.3249$). On remarque qu'à ce point critique, les distributions en impulsion conservent la même forme pour tout temps t. Cela est particulièrement visible en figure 6.10(a), où, après un changement d'échelle approprié 6.10(b), toutes les distributions se « collapsent » sur une unique courbe universelle.

6.8 Cas du kicked rotor Symplectique 2d avec Désordre Quasi-Périodique Déterministe

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence l'existence d'une transition métal-isolant dans notre modèle symplectique. Nous avons pu mesurer l'exposant critique associé en utilisant une procédure de mise à l'échelle à temps fini. À partir du modèle Random Kicked Rotor, notre analyse numérique a conduit à un exposant critique $\nu = 2.77 \pm 0.06$. De plus, nous avons déterminé numériquement la fonction d'échelle $\beta(g)$ caractéristique du système. Nous avons également étudié l'impact du terme de propagation libre, c'est-à-dire l'utilisation explicite des phases dynamiques du type $\langle (p'+\beta)\bar{k}|e^{-i\hat{p}^2/2\bar{k}}|(p+\beta)\bar{k}\rangle = e^{-i(p+\beta)^2\bar{k}/2}$. Cette prise en compte correspond à celle du kicked rotor quantique usuel avec une quasi-impulsion β aléatoire choisie dans l'intervalle $[-1/2, 1/2[$. En appliquant la même méthode d'analyse, nous avons obtenu un exposant critique $\nu = 2.74 \pm 0.08$, résultat proche de celui obtenu avec le Random Kicked Rotor, confirmant ainsi la robustesse et l'universalité du comportement critique observé (voir les figues 6.11 pour les résultats détaillés).

Nous avons également mesuré l'exposant critique pour trois autres ensembles de paramètres différents en utilisant le Random Kicked Rotor, dont les résultats sont résumés dans le tableau 6.3. La conclusion la plus importante à tirer de ces différentes mesures est que les valeurs de l'exposant critique ν obtenues se situent dans l'intervalle $[2.6, 2.9]$, ce qui est parfaitement compatible avec les résultats rapportés dans la littérature pour cette classe de symétrie.

La spécificité remarquable de ce modèle symplectique réside dans sa faisabilité expérimentale en une dimension, comme démontré dans notre précédent travail [citer référence ici]. Cette faisabilité expérimentale s'étend naturellement au cas bidimensionnel en modulant simplement l'amplitude des impulsions périodiques d'ondes stationnaires en fonction du temps [40, 45, 199, 205].Cette facilité d'extension expérimentale constitue l'une des principales motivations de ce travail, car une telle généralisation est particulièrement difficile à réaliser dans les systèmes classiques de matière condensée.

	$\bar{k}$	ε	ε_2	ω_2	Ω	α	ν	K_c
Phase aléatoire	1	0.8	0.6	$2\pi\sqrt{5}$	$\sqrt{2}\pi$	0.4	2.77 ± 0.06	1.325 ± 0.002
	1	0.726543	0.4	$2\pi\sqrt{5}$	$\sqrt{3}\pi$	0.3	2.89 ± 0.08	1.714 ± 0.001
	2.85	0.6	0.85	$2\pi\sqrt{7}$	$\sqrt{5}\pi$	0.5	2.89 ± 0.15	3.68 ± 0.01
	2.89	0.5	1	$2\pi\sqrt{5}$	$\sqrt{7}\pi$	0.4	2.84 ± 0.09	4.434 ± 0.005
Phase déterministe	1	0.726543	0.4	$2\pi\sqrt{5}$	$\sqrt{3}\pi$	0.3	2.74 ± 0.08	1.748 ± 0.001

TABLEAU 6.3 – Estimations de l'exposant critique ν et du paramètre critique K_c, accompagnées de leur incertitude (écart type). L'exposant ν est censé être universel, tandis que K_c dépend de l'anisotropie [206] ainsi que des paramètres du modèle.

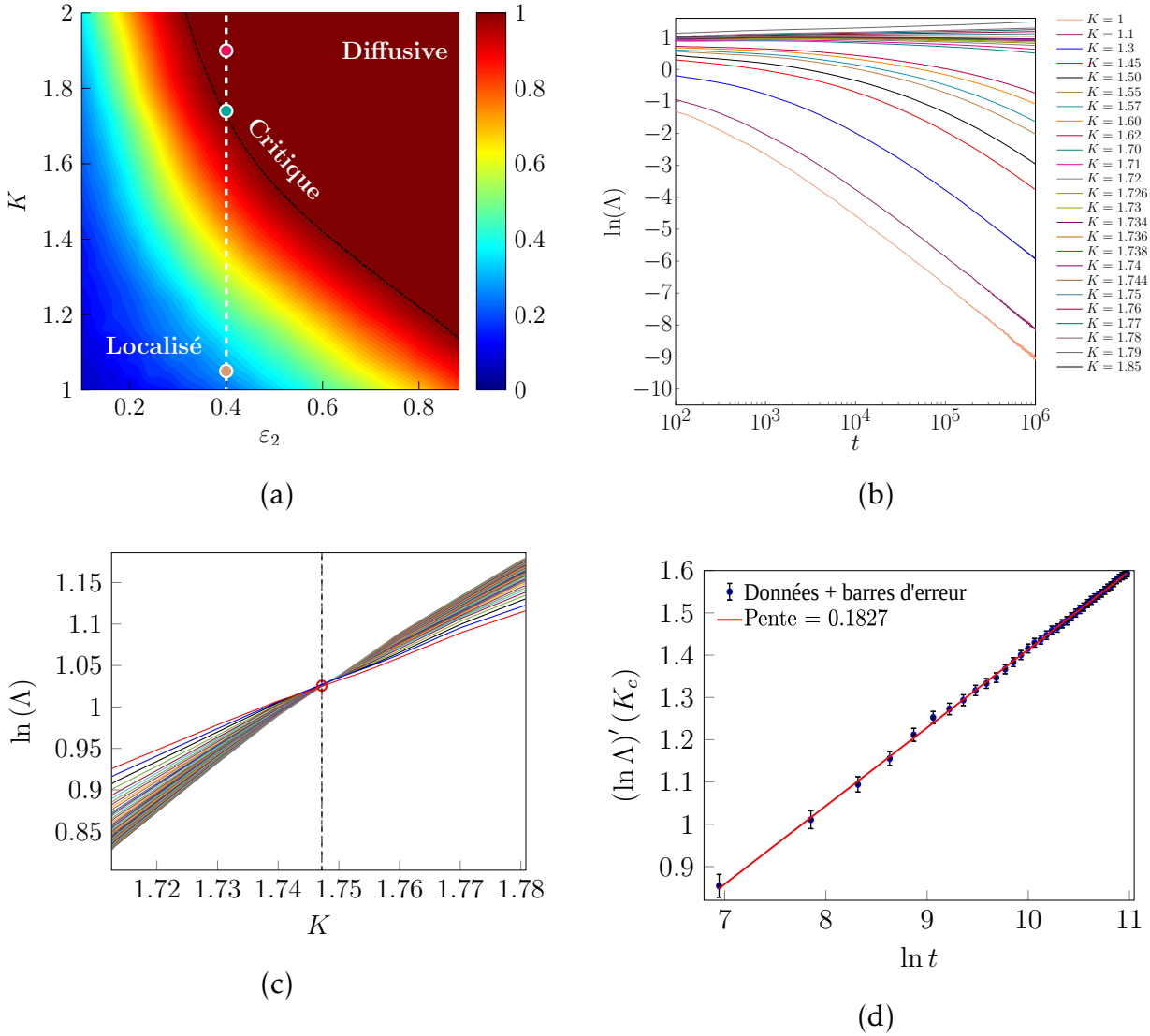


FIGURE 6.11 – (a) Diagramme de phase de la transition d'Anderson pour le kicked rotor symplectique avec désordre quasi-périodique déterministe. (b) Évolution de $\ln(\Lambda)$ en fonction du temps pour différentes valeurs de K. (c) Croisement des courbes de $\ln(\Lambda)$ pour différentes valeurs de t. (d) Régression linéaire de la dérivée $(\ln \Lambda)'(K_c, t)$ en fonction de $\ln t$. Les paramètres utilisés sont ceux indiqués dans la case correspondant au kicked rotor usuel du tableau 6.3.

Ainsi, les résultats présentés ouvrent la voie à de futures investigations expérimentales prometteuses sur la transition d'Anderson dans des régimes dimensionnels et symétriques variés, renforçant davantage l'intérêt des systèmes à atomes froids comme plateforme idéale pour explorer les transitions de phases quantiques.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la transition d'Anderson dans un système bidimensionnel appartenant à la classe de symétrie symplectique, implémentée à l'aide d'un modèle de kicked rotor à spin soumis à une modulation quasi-périodique. Cette approche nous a permis de construire un diagramme de phase précis et d'identifier clairement la frontière séparant les régimes localisé, critique et diffusif.

À partir d'une analyse de mise à l'échelle en temps fini, nous avons déterminé l'exposant critique ν avec une précision comparable aux meilleures études numériques sur des modèles désordonnés classiques. Nos résultats, obtenus à la fois dans le cadre du Random Kicked Rotor et du kicked rotor déterministe, convergent vers une valeur $\nu \in [2.6\,;\,2.9]$ en excellent accord avec les estimations publiées dans la littérature pour la classe symplectique $2d$.

Nous avons également mis en évidence la forme universelle de la fonction d'échelle $\beta(g)$ confirmant la validité du principe d'échelle à un paramètre dans ce contexte. L'analyse a par ailleurs été étendue à une loi d'échelle à deux paramètres, dont les résultats renforcent l'universalité de la transition étudiée.

Conclusion

Cette thèse a exploré les effets des symétries et des classes d'universalité dans la dynamique d'un rotateur frappé quantique avec spin 1/2. En introduisant un modèle adapté à une mise en œuvre expérimentale — le Spin-Double-Periodic Quantum Kicked Rotor (SDQKR) — nous avons étudié de manière unifiée les signatures interférentielles (ERO, anti-ERO, $\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$), les propriétés spectrales de l'opérateur de Floquet et les lois d'échelle du transport, afin de caractériser la classe d'universalité du systéme.

Nous avons d'abord analysé les symétries pertinentes (renversement du temps, couplage spin–orbite synthétique, parités temporelles des kicks) et montré comment elles gouvernent l'apparition ou la suppression des signaux interférentiels. Dans le SDQKR, l'alternance des impulsions induit une structure temporelle où l'on observe, selon la parité des kicks, des signatures de type ERO / anti-ERO et l'émergence de l'$\mathrm{ERO}_{\mathrm{CFS}}$ à temps long. Cette lecture par les observables dynamiques a été confrontée à deux approches complémentaires : (i) la fonction d'échelle $\beta(g)$, étudiée dans les variantes standard et désordonnée du modèle, et (ii) les statistiques spectrales (distributions d'espacements, $\langle \tilde{r}_n \rangle$) de l'opérateur de Floquet. La concordance de ces trois approches établit la classe d'universalité globale du modèle dans les différents régimes paramétriques.

Sur le plan des transitions de phase, nous avons construit un **simulateur $2d$ symplectique** en introduisant une modulation quasi-périodique de l'amplitude des kicks. Cette configuration nous a permis de tracer le diagramme de phase, d'extraire l'exposant critique ν de la transition métal–isolant, de caractériser la fonction d'échelle $\beta(g)$ et de vérifier la validité de la loi d'échelle à deux paramètres dans le cas symplectique bidimensionnel. Les résultats obtenus confirment l'universalité attendue pour la classe symplectique en $2d$.

Un atout majeur du modèle proposé est sa faisabilité expérimentale : le SDQKR est conçu pour être réalisé avec des atomes ultra-froids, en utilisant deux états internes pour réaliser un spin-1/2 effectif et des réseaux optiques pulsés pour générer les kicks. Ce caractère implémentable n'est pas seulement théorique : au sein de notre équipe, des résultats expérimentaux préliminaires mettent déjà en évidence les premiers indices d'antilocalisation faible dans un dispositif conforme à l'esprit du modèle, ce qui valide la pertinence de notre approche et ouvre la voie à une exploration expérimentale systématique des signatures interférentielles et des lois d'échelle.

Perspectives

Une extension possible de ce travail consiste à explorer le cas tridimensionnel effectif. Une approche que nous avons testée repose sur une modulation d'amplitude des kicks de la forme :

$$\mathcal{K}_{\pm}(t) = K\,(1 \pm \alpha)(1 + \varepsilon_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\cos(\omega_3 t + \varphi_3)). \tag{6.17}$$

qui introduit deux dimensions quasi-périodiques supplémentaires et permet ainsi de simuler une dynamique effective en $3d$. Cette stratégie présente l'avantage d'être nettement moins coûteuse en temps de calcul que la construction explicite d'un modèle symplectique $3d$ du type :

$$\hat{H} = \left(\frac{\tau_x \hat{p}_x^2}{2} + \frac{\tau_y \hat{p}_y^2}{2} + \frac{\tau_x \hat{p}_z^2}{2}\right) \otimes (-1)^{\lfloor t \rfloor}\,\Omega\hat{\sigma}_x + \hat{V}_-(\hat{\mathbf{q}}) \sum_n \delta(t-2n) + \hat{V}_+(\hat{\mathbf{q}}) \sum_n \delta(t-2n-1). \tag{6.18}$$

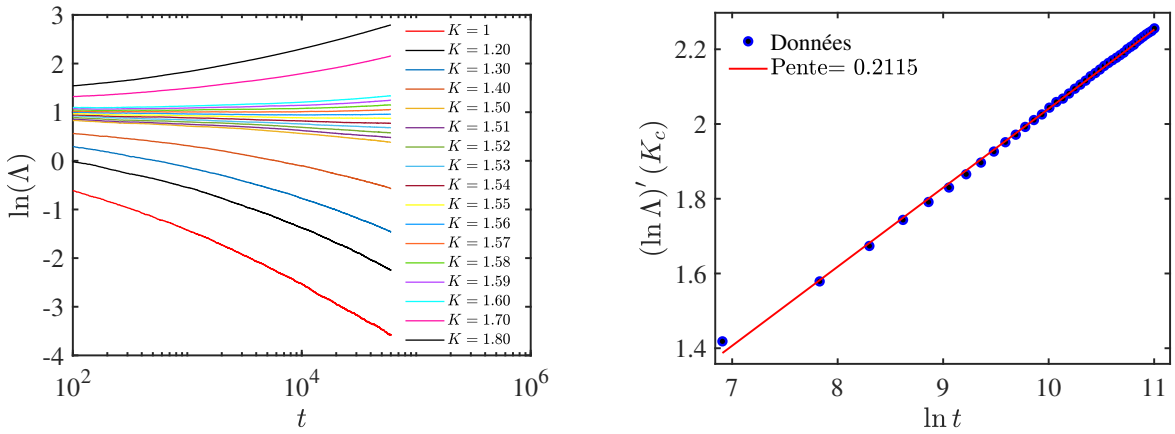
où τ_i sont des paramètres constants, et où le potentiel spatial s'écrit :

$$\hat{V}_{\pm}(\hat{\mathbf{q}}) = K(1 \pm \alpha)\, f(\hat{x}) f(\hat{y}) f(\hat{z}), \qquad f(\hat{x}) = \cos(\hat{x}) \otimes \hat{1}_2 + \varepsilon \sin(\hat{x}) \otimes \hat{\sigma}_z.. \tag{6.19}$$

Bien que plus « naturel » du point de vue d'une réalisation symplectique tridimensionnelle, ce dernier modèle est toutefois beaucoup plus coûteux en temps de calcul.

Nos simulations avec la modulation d'amplitude montrent que l'exposant critique mesuré, est en accord avec la valeur attendue pour la classe orthogonale en $3d$ comme le montre la figure 6.12, et non avec celle de la classe symplectique. Ce constat rejoint les conclusions de la thèse de Tony Prat [89], qui avait étudié un autre modèle symplectique avec une modulation similaire et avait également trouvé un exposant critique proche de celui de la classe orthogonale en $3d$.

Cette constatation met en lumière une problématique ouverte : comprendre pourquoi la modulation d'amplitude, qui permet en $2d$ de donner l'exposant critique attendu pour la classe symplectique, conduit en $3d$ à un exposant critique proche de celui de la classe orthogonale. Il est donc essentiel de comprendre pourquoi cette modulation d'amplitude permet en $2d$ de reproduire l'exposant critique de la classe symplectique, mais conduit en $3d$ à un comportement de type orthogonal. Une fois ce mécanisme clarifié, l'enjeu sera de concevoir une modulation appropriée, moins coûteuse numériquement que le modèle $3d$ complet, mais capable de préserver effectivement les propriétés de la classe symplectique en trois dimensions.



(a) (b)

FIGURE 6.12 – (a) Évolution de $\ln(\Lambda = \langle p^2 \rangle_t \, t^{-\frac{2}{3}})$ en fonction du temps pour différentes valeurs de K ; (b) Régression linéaire de la dérivée $(\ln \Lambda)'(K_c, t)$ en fonction de $\ln t$, réalisée pour des temps compris entre $t = 10^3$ et $t = 6 \times 10^4$. L'exposant critique est déduit de la pente selon la relation $1/(3\nu)$, ce qui conduit ici à $\nu = 1.58 \pm 0.1$. Le choix de l'intervalle en K utilisé pour l'évaluation de la dérivée joue un rôle déterminant : conformément aux critères de [44], il doit être restreint et centré autour de K_c afin que la dépendance de $\ln \Lambda(K, t)$ en fonction de K soit linéaire. Dans ce cas, nous avons retenu l'intervalle $K \in [1.5, 1.6]$. Ici le modéle utilsé c'est le modéle SDQKR avec la modulation (6.17) ; Les paramétres utilisé ici sont les suivants : $\bar{k} = 1$, $\Omega = \sqrt{5}\pi$, $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$, $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$, $\alpha = 0.6$, $\varepsilon = 0.4$, $\varepsilon_2 = 0.3$. les résultats présentés correspondent à une moyenne réalisée sur 10^3 réalisations de désordre (cas du random kicked rotor).

Bibliographie

[1] P. W. Anderson. « Absence of Diffusion in Certain Random Lattices ». In : *Physical Review* 109.5 (1958), p. 1492-1505. doi : 10.1103/PhysRev.109.1492.

[2] Yasuo Kuga et Akira Ishimaru. « Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles ». In : *Journal of the Optical Society of America A* 1.8 (1984), p. 831-835.

[3] Meint P Van Albada et Ad Lagendijk. « Observation of weak localization of light in a random medium ». In : *Physical review letters* 55.24 (1985), p. 2692.

[4] Pierre-Etienne Wolf et Georg Maret. « Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media ». In : *Physical review letters* 55.24 (1985), p. 2696.

[5] Diederik S Wiersma, Meint P van Albada, Bart A van Tiggelen et Ad Lagendijk. « Experimental evidence for recurrent multiple scattering events of light in disordered media ». In : *Physical Review Letters* 74.21 (1995), p. 4193.

[6] G Labeyrie, Ferdinando de Tomasi, J-C Bernard, CA Müller, Ch Miniatura et R Kaiser. « Coherent backscattering of light by cold atoms ». In : *Physical Review Letters* 83.25 (1999), p. 5266.

[7] Arnaud Tourin, Arnaud Derode, Philippe Roux, Bart A Van Tiggelen et Mathias Fink. « Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves ». In : *Physical review letters* 79.19 (1997), p. 3637.

[8] Fred Jendrzejewski, Kilian Müller, Jérémie Richard, Aditya Date, Thomas Plisson, Philippe Bouyer, Alain Aspect et Vincent Josse. « Coherent backscattering of ultracold atoms ». In : *Physical Review Letters* 109.19 (2012), p. 195302.

[9] Clément Hainaut, Isam Manai, Jean-François Clément, Jean Claude Garreau, Pascal Szriftgiser, Gabriel Lemarié, Nicolas Cherroret, Dominique Delande et Radu Chicireanu. « Controlling symmetry and localization with an artificial gauge field in a disordered quantum system ». In : *Nature communications* 9.1 (2018), p. 1382.

[10] Gabriel Lemarié, Cord A Müller, David Guéry-Odelin et Christian Miniatura. « Coherent backscattering and forward-scattering peaks in the quantum kicked rotor ». In : *Physical Review A* 95.4 (2017), p. 043626.

[11] T Karpiuk, N Cherroret, KL Lee, B Grémaud, CA Müller et C Miniatura. « Coherent forward scattering peak induced by anderson localization ». In : *Physical review letters* 109.19 (2012), p. 190601.

[12] S Ghosh, N Cherroret, B Grémaud, C Miniatura et D Delande. « Coherent forward scattering in two-dimensional disordered systems ». In : *Physical Review A* 90.6 (2014), p. 063602.

[13] F Arrouas, J Hébraud, N Ombredane, E Flament, D Ronco, N Dupont, G Lemarié, B Georgeot, Ch Miniatura, J Billy et al. « The Coherent Forward Scattering peak : a probe of non-ergodicity and symmetries in a quantum chaotic system ». In : *arXiv preprint arXiv :2503.01777* (2025).

[14] Elihu Abrahams, Philip W Anderson, Donald C Licciardello et Tiruppattur V Ramakrishnan. « Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions ». In : *Physical Review Letters* 42.10 (1979), p. 673.

[15] Franz J Wegner. « Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge ». In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 25.4 (1976), p. 327-337.

[16] Franz Wegner. « Four-loop-order β-function of nonlinear σ-models in symmetric spaces ». In : *Nuclear Physics B* 316.3 (1989), p. 663-678.

[17] Franz Wegner. « The mobility edge problem : continuous symmetry and a conjecture ». In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 35.3 (1979), p. 207-210.

[18] KB Efetov, AI Larkin et DE Kheml'Nitskiĭ. « Interaction of diffusion modes in the theory of localization ». In : *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* 52 (1980), p. 568.

[19] Yoseph Imry. *Introduction to mesoscopic physics*. 2. Oxford university press, 2002.

[20] Carlo Di Castro et Roberto Raimondi. *Statistical mechanics and applications in condensed matter*. Cambridge University Press, 2015.

[21] Werner Bernreuther et Franz J Wegner. « Four-loop-order β function for two-dimensional nonlinear sigma models ». In : *Physical review letters* 57.12 (1986), p. 1383.

[22] Shinobu Hikami. « Anderson localization and nonlinear σ model ». In : *Progress of Theoretical Physics Supplement* 84 (1985), p. 120-137.

[23] Alberto Rodriguez, Louella J Vasquez, Keith Slevin et Rudolf A Römer. « Multifractal finite-size scaling and universality at the Anderson transition ». In : *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* 84.13 (2011), p. 134209.

[24] Dieter Vollhardt et Peter Wölfle. « Anderson localization in d<˜ 2 dimensions : a self-consistent diagrammatic theory ». In : *Physical Review Letters* 45.10 (1980), p. 842.

[25] Dieter Vollhardt et Peter Wölfle. « Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in $d \leq 2$ dimensions ». In : *Physical Review B* 22.10 (1980), p. 4666.

[26] Keith Slevin et Tomi Ohtsuki. « Corrections to scaling at the Anderson transition ». In : *Physical review letters* 82.2 (1999), p. 382.

[27] Takaaki Koga, Junsaku Nitta, Tatsushi Akazaki et Hideaki Takayanagi. « Rashba spin-orbit coupling probed by the weak antilocalization analysis in InAlAs/InGaAs/InAlAs quantum wells as a function of quantum well asymmetry ». In : *Physical review letters* 89.4 (2002), p. 046801.

[28] Gregory M Stephen, Owen A Vail, Jiwei Lu, William A Beck, Patrick J Taylor et Adam L Friedman. « Weak antilocalization and anisotropic magnetoresistance as a probe of surface states in topological Bi2TexSe3- x thin films ». In : *Scientific Reports* 10.1 (2020), p. 4845.

[29] J Chen, HJ Qin, F Yang, J Liu, T Guan, FM Qu, GH Zhang, JR Shi, XC Xie, CL Yang et al. « Gate-voltage control of chemical potential and weak antilocalization in Bi 2 Se 3 ». In : *Physical Review Letters* 105.17 (2010), p. 176602.

[30] R Somphonsane, H Ramamoorthy, G He, J Nathawat, S Yin, C-P Kwan, N Arabchigavkani, B Barut, M Zhao, Z Jin et al. « Universal scaling of weak localization in graphene due to bias-induced dispersion decoherence ». In : *Scientific reports* 10.1 (2020), p. 5611.

[31] FV Tikhonenko, AA Kozikov, AK Savchenko et RV Gorbachev. « Transition between electron localization and antilocalization in graphene ». In : *Physical Review Letters* 103.22 (2009), p. 226801.

[32] Patrick Seiler, Jone Zabaleta, Robin Wanke, Jochen Mannhart, Thilo Kopp et Daniel Braak. « Antilocalization at an oxide interface ». In : *Physical Review B* 97.7 (2018), p. 075136.

[33] Juliette Billy, Vincent Josse, Zhanchun Zuo, Alain Bernard, Ben Hambrecht, Pierre Lugan, David Clément, Laurent Sanchez-Palencia, Philippe Bouyer et Alain Aspect. « Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder ». In : *Nature* 453.7197 (2008), p. 891-894.

[34] Giacomo Roati, Chiara D'Errico, Leonardo Fallani, Marco Fattori, Chiara Fort, Matteo Zaccanti, Giovanni Modugno, Michele Modugno et Massimo Inguscio. « Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate ». In : *Nature* 453.7197 (2008), p. 895-898.

[35] Fred Jendrzejewski, Alain Bernard, Killian Mueller, Patrick Cheinet, Vincent Josse, Marie Piraud, Luca Pezzé, Laurent Sanchez-Palencia, Alain Aspect et Philippe Bouyer. « Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential ». In : *Nature Physics* 8.5 (2012), p. 398-403.

[36] SS Kondov, WR McGehee, JJ Zirbel et B DeMarco. « Three-dimensional Anderson localization of ultracold matter ». In : *Science* 334.6052 (2011), p. 66-68.

[37] Giulia Semeghini, Manuele Landini, Patricia Castilho, Sanjukta Roy, Giacomo Spagnolli, Andreas Trenkwalder, Marco Fattori, Massimo Inguscio et Giovanni Modugno. « Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization ». In : *Nature Physics* 11.7 (2015), p. 554-559.

[38] Michael Pasek, Giuliano Orso et Dominique Delande. « Anderson localization of ultracold atoms : Where is the mobility edge ? » In : *Physical Review Letters* 118.17 (2017), p. 170403.

[39] Giulio Casati, Boris V Chirikov, FM Izraelev et Joseph Ford. « Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation ». In : *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems : Volta Memorial Conference, Como, 1977*. Springer. 2005, p. 334-352.

[40] Julien Chabé, Gabriel Lemarié, Benoît Grémaud, Dominique Delande, Pascal Szriftgiser et Jean Claude Garreau. « Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition<? format ?> with Atomic Matter Waves ». In : *Physical review letters* 101.25 (2008), p. 255702.

[41] FL Moore, JC Robinson, C Bharucha, PE Williams et MG Raizen. « Observation of dynamical localization in atomic momentum transfer : A new testing ground for quantum chaos ». In : *Physical review letters* 73.22 (1994), p. 2974.

[42] Giulio Casati, Italo Guarneri et DL Shepelyansky. « Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurate frequencies ». In : *Physical review letters* 62.4 (1989), p. 345.

[43] Gabriel Lemarié, Julien Chabé, Pascal Szriftgiser, Jean Claude Garreau, Benoît Grémaud et Dominique Delande. « Observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment ». In : *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 80.4 (2009), p. 043626.

[44] Gabriel Lemarié, Benoît Grémaud et Dominique Delande. « Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor ». In : *Europhysics Letters* 87.3 (2009), p. 37007.

[45] Farid Madani, Maxime Denis, Pascal Szriftgiser, Jean-Claude Garreau, Adam Rançon et Radu Chicireanu. « Observation of quantum criticality of a four-dimensional phase transition ». In : *Nature Communications* 16.1 (2025), p. 2519.

[46] Paul Drude. « Zur elektronentheorie der metalle ». In : *Annalen der physik* 306.3 (1900), p. 566-613.

[47] Neil W Ashcroft et N David Mermin. « Solid state ». In : *Physics (New York : Holt, Rinehart and Winston) Appendix C* 1 (1976).

[48] Pierre Louis Dulong et Alexis-Thérèse Petit. *Recherches sur quelques points importans de la theorie de la chaleur*. 1819.

[49] Arnold Sommerfeld. « Zur elektronentheorie der metalle ». In : *Naturwissenschaften* 15.41 (1927), p. 825-832.

[50] Gustav Heinrich Wiedemann. *Über die wärme-leitungsfähigkeit der metalle*. 222. Adademische verlagsgessellschaft mbh, 1927.

[51] Felix Bloch. « Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern ». In : *Zeitschrift für physik* 52.7 (1929), p. 555-600.

[52] N'Guessan Raymond Kre. « Contribution à l'étude de la structure électronique du silicium amorphe pur et du silicium amorphe hydrogéné ». Thèse de doct. Paris 6, 1993.

[53] Alain Aspect. *Atomes froids et désordre : localisation d'Anderson*. https://slideplayer.com/slide/7956725/. Consulté le 23 juillet 2025.

[54] JT Edwards et DJ Thouless. « Numerical studies of localization in disordered systems ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 5.8 (1972), p. 807.

[55] Philip Phillips. *Advanced solid state physics*. Cambridge University Press, 2012.

[56] NF Mott. « Electrons in disordered structures ». In : *Advances in Physics* 16.61 (1967), p. 49-144.

[57] Eric Akkermans et Gilles Montambaux. *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. EDP sciences Paris, 2004.

[58] Kenneth M Watson. « Multiple scattering of electromagnetic waves in an underdense plasma ». In : *Journal of Mathematical Physics* 10.4 (1969), p. 688-702.

[59] D De Wolf. « Electromagnetic reflection from an extended turbulent medium : cumulative forward-scatter single-backscatter approximation ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 19.2 (1971), p. 254-262.

[60] Yu N Barabanenkov. « Wave corrections to the transfer equation for "back" scattering ». In : *Radiophysics and Quantum Electronics* 16.1 (1973), p. 65-71.

[61] Eric Akkermans, PE Wolf et R Maynard. « Coherent backscattering of light by disordered media : Analysis of the peak line shape ». In : *Physical review letters* 56.14 (1986), p. 1471.

[62] Leung Tsang et Akira Ishimaru. « Theory of backscattering enhancement of random discrete isotropic scatterers based on the summation of all ladder and cyclical terms ». In : *Journal of the Optical Society of America A* 2.8 (1985), p. 1331-1338.

[63] JS Langer et T Neal. « Breakdown of the concentration expansion for the impurity resistivity of metals ». In : *Physical Review Letters* 16.22 (1966), p. 984.

[64] LP Gor'kov. « Particle conductivity in a two-dimensional random ». In : *30 Years of the Landau Institute : Selected Papers* 11.4 (1996), p. 157.

[65] GJ Dolan et DDv Osheroff. « Nonmetallic conduction in thin metal films at low temperatures ». In : *Physical Review Letters* 43.10 (1979), p. 721.

[66] DJ Bishop, DC Tsui et RC Dynes. « Nonmetallic conduction in electron inversion layers at low temperatures ». In : *Physical Review Letters* 44.17 (1980), p. 1153.

[67] C Van Haesendonck, Y Bruynseraede, G Deutscher et al. « Two-dimensional localization in thin copper films ». In : *Physical Review Letters* 46.8 (1981), p. 565.

[68] Clément Hainaut, Isam Manai, Radu Chicireanu, Jean-François Clément, Samir Zemmouri, Jean Claude Garreau, Pascal Szriftgiser, Gabriel Lemarié, Nicolas Cherroret et Dominique Delande. « Return to the origin as a probe of atomic phase coherence ». In : *Physical Review Letters* 118.18 (2017), p. 184101.

[69] G Bayer et T Niederdränk. « Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media ». In : *Physical review letters* 70.25 (1993), p. 3884.

[70] Julien de Rosny, Arnaud Tourin et Mathias Fink. « Coherent backscattering of an elastic wave in a chaotic cavity ». In : *Physical review letters* 84.8 (2000), p. 1693.

[71] Éric Larose, Ludovic Margerin, BA Van Tiggelen et Michel Campillo. « Weak localization of seismic waves ». In : *Physical review letters* 93.4 (2004), p. 048501.

[72] Richard L Weaver et Oleg I Lobkis. « Enhanced backscattering and modal echo of reverberant elastic waves ». In : *Physical review letters* 84.21 (2000), p. 4942.

[73] Tobias Micklitz, Cord A Müller et Alexander Altland. « Strong Anderson localization in cold atom quantum quenches ». In : *Physical review letters* 112.11 (2014), p. 110602.

[74] S Abhirami, EP Amaladass, S Amirthapandian, C David et Awadhesh Mani. « The effect of charged particle irradiation on the transport properties of bismuth chalcogenide topological insulators : a brief review ». In : *Physical Chemistry Chemical Physics* 26.4 (2024), p. 2745-2767.

[75] Gerd Bergmann. « Weak localization in thin films : a time-of-flight experiment with conduction electrons ». In : *Physics Reports* 107.1 (1984), p. 1-58.

[76] Ferdinand Evers et Alexander D Mirlin. « Anderson transitions ». In : *Reviews of Modern Physics* 80.4 (2008), p. 1355-1417.

[77] Kousuke Yakubo et Shogo Mizutaka. « Testing the order parameter of the Anderson transition ». In : *Journal of the Physical Society of Japan* 81.10 (2012), p. 104707.

[78] Patrick Seiler. « Anti-localization in oxide heterostructures ». In : (2019).

[79] JT Chayes, L Chayes, Daniel S Fisher et T Spencer. « Finite-size scaling and correlation lengths for disordered systems ». In : *Physical review letters* 57.24 (1986), p. 2999.

[80] Antonio M Garcia-Garcia. « Semiclassical theory of the Anderson transition ». In : *Physical review letters* 100.7 (2008), p. 076404.

[81] Matthias Lopez, Jean-François Clément, Pascal Szriftgiser, Jean Claude Garreau et Dominique Delande. « Experimental test of universality of the Anderson transition ». In : *Physical Review Letters* 108.9 (2012), p. 095701.

[82] Martin R Zirnbauer. « Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory ». In : *Journal of Mathematical Physics* 37.10 (1996), p. 4986-5018.

[83] Michele Caselle et Ulrika Magnea. « Random matrix theory and symmetric spaces ». In : *Physics reports* 394.2-3 (2004), p. 41-156.

[84] P. Brouwer. *Metal-insulator transition*. 2018. url : http://nbviewer.jupyter.org/github/topocm/topocm_content/blob/edx_2015/w9_disorder/scaling.ipynb#Metal-insulator-transition (visité le 08/06/2018).

[85] Shingo Katsumoto, Fumio Komori, Naokatsu Sano et Shun-ichi Kobayashi. « Fine tuning of metal-insulator transition in Al0. 3Ga0. 7As using persistent photoconductivity ». In : *Journal of the Physical Society of Japan* 56.7 (1987), p. 2259-2262.

[86] Frank Scheffold, Ralf Lenke, Ralf Tweer et Georg Maret. « Localization or classical diffusion of light ? » In : *Nature* 398.6724 (1999), p. 206-207.

[87] Sergey E Skipetrov et John H Page. « Red light for Anderson localization ». In : *New Journal of Physics* 18.2 (2016), p. 021001.

[88] Dominique Delande et Giuliano Orso. « Mobility edge for cold atoms in laser speckle potentials ». In : *Physical review letters* 113.6 (2014), p. 060601.

[89] Tony Prat. « Localisation d'Anderson avec des atomes froids : dynamique dans le désordre et perspectives avec des modèles chaotiques ». Thèse de doct. Paris 6, 2017.

[90] Nicolas Cherroret, Benoît Vermersch, Jean Claude Garreau et Dominique Delande. « How nonlinear interactions challenge the three-dimensional Anderson transition ». In : *Physical Review Letters* 112.17 (2014), p. 170603.

[91] C Tian, A Kamenev et A Larkin. « Ehrenfest time in the weak dynamical localization ». In : *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* 72.4 (2005), p. 045108.

[92] Eugene P Wigner. « On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels ». In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 47. 4. Cambridge University Press. 1951, p. 790-798.

[93] Édouard Brézin, Vladimir Kazakov, Didina Serban, Paul Wiegmann et Anton Zabrodin. *Applications of random matrices in physics*. T. 221. Springer Science & Business Media, 2006.

[94] Michael Victor Berry et Michael Tabor. « Level clustering in the regular spectrum ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 356.1686 (1977), p. 375-394.

[95] Oriol Bohigas, Marie-Joya Giannoni et Charles Schmit. « Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws ». In : *Physical review letters* 52.1 (1984), p. 1.

[96] Eugene B Bogomolny et Jonathan P Keating. « Gutzwiller's trace formula and spectral statistics : beyond the diagonal approximation ». In : *Physical review letters* 77.8 (1996), p. 1472.

[97] Eugene Bogomolny. « Riemann zeta function and quantum chaos ». In : *arXiv preprint arXiv :0708.4223* (2007).

[98] Dennis A Hejhal. « The Selberg trace formula and the Riemann zeta function ». In : (1976).

[99] Hugh L Montgomery. « The pair correlation of zeros of the zeta function ». In : *Proc. Symp. Pure Math*. T. 24. 181-193. 1973, p. 1.

[100] Andrew M Odlyzko. « On the distribution of spacings between zeros of the zeta function ». In : *Mathematics of Computation* 48.177 (1987), p. 273-308.

[101] Eugene P Wigner. « On the distribution of the roots of certain symmetric matrices ». In : *Annals of Mathematics* 67.2 (1958), p. 325-327.

[102] Eugene P Wigner. « Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions i ». In : *The Collected Works of Eugene Paul Wigner : Part A : The Scientific Papers*. Springer, 1993, p. 524-540.

[103] BI Shklovskii, B Shapiro, BR Sears, P Lambrianides et HB Shore. « Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition ». In : *Physical Review B* 47.17 (1993), p. 11487.

[104] Vadim Oganesyan et David A Huse. « Localization of interacting fermions at high temperature ». In : *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* 75.15 (2007), p. 155111.

[105] Alexander D Mirlin. « Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems ». In : *Physics Reports* 326.5-6 (2000), p. 259-382.

[106] Carlo WJ Beenakker. « Random-matrix theory of quantum transport ». In : *Reviews of modern physics* 69.3 (1997), p. 731.

[107] Yan V Fyodorov, Alexander Ossipov et Alberto Rodriguez. « The Anderson localization transition and eigenfunction multifractality in an ensemble ofultrametric random matrices ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2009.12 (2009), p. L12001.

[108] VE Kravtsov, IM Khaymovich, E Cuevas et M Amini. « A random matrix model with localization and ergodic transitions ». In : *New Journal of Physics* 17.12 (2015), p. 122002.

[109] A Boutet de Monvel et Alexei Khorunzhy. *Some elementary results around the Wigner semicircle law*. 2001.

[110] Florent Benaych-Georges et Antti Knowles. « Lectures on the local semicircle law for Wigner matrices ». In : *arXiv preprint arXiv :1601.04055* (2016).

[111] Jean Bellissard. « Random matrix theory and the Anderson model ». In : *Journal of statistical physics* 116.1 (2004), p. 739-754.

[112] László Erdős, Benjamin Schlein et Horng-Tzer Yau. « Semicircle law on short scales and delocalization of eigenvectors for Wigner random matrices ». In : (2009).

[113] Dan Voiculescu. « Limit laws for random matrices and free products ». In : *Inventiones mathematicae* 104.1 (1991), p. 201-220.

[114] Margherita Disertori, Haru Pinson et Thomas Spencer. « Density of states for random band matrices ». In : *Communications in mathematical physics* 232.1 (2002), p. 83-124.

[115] Freeman J Dyson. « Statistical theory of the energy levels of complex systems. I ». In : *Journal of Mathematical Physics* 3.1 (1962), p. 140-156.

[116] Fritz Haake. *Quantum signatures of chaos*. Springer, 1991.

[117] Freeman J Dyson. « The threefold way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics ». In : *Journal of Mathematical Physics* 3.6 (1962), p. 1199-1215.

[118] M Thaha, R Blümel et Uzy Smilansky. « Symmetry breaking and localization in quantum chaotic systems ». In : *Physical Review E* 48.3 (1993), p. 1764.

[119] Felix M Izrailev. « Simple models of quantum chaos : Spectrum and eigenfunctions ». In : *Physics Reports* 196.5-6 (1990), p. 299-392.

[120] Spiros Evangelou. « Random matrix theory and Anderson localisation ». In : *Large-Scale Molecular Systems : Quantum and Stochastic Aspects—Beyond the Simple Molecular Picture*. Springer, 1991, p. 375-381.

[121] Geoff J Rodgers et Alan J Bray. « Density of states of a sparse random matrix ». In : *Physical Review B* 37.7 (1988), p. 3557.

[122] Fernando Lucas Metz, Izaak Neri et Désiré Bollé. « Localization transition in symmetric random matrices ». In : *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 82.3 (2010), p. 031135.

[123] AG Aronov, VE Kravtsov et IV Lerner. « The level spacing distribution near the Anderson transition ». In : *arXiv preprint cond-mat/9402027* (1994).

[124] Hideo Aoki. « Critical behaviour of extended states in disordered systems ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 16.6 (1983), p. L205.

[125] Margherita Disertori et Tom Spencer. « Anderson localization for a supersymmetric sigma model ». In : *Communications in Mathematical Physics* 300.3 (2010), p. 659-671.

[126] Margherita Disertori, Tom Spencer et Martin R Zirnbauer. « Quasi-diffusion in a 3D supersymmetric hyperbolic sigma model ». In : *Communications in Mathematical Physics* 300.2 (2010), p. 435-486.

[127] Adam Rançon et Ivan Balog. « Exact generating function of a zero-dimensional supersymmetric non-linear sigma model ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2025.7 (2025), p. 074003.

[128] Paul Bourgade. « Random band matrices ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : Rio de Janeiro 2018*. World Scientific. 2018, p. 2759-2783.

[129] Boris V Chirikov. « A universal instability of many-dimensional oscillator systems ». In : *Physics reports* 52.5 (1979), p. 263-379.

[130] Q. Thommen. « Dynamique quantique dans les potentiels lumineux ». Thèse de doctorat. Lille : Université des Sciences et Technologies de Lille, 2004.

[131] M. Lepers. « Dynamique d'atomes dans des potentiels optiques : du chaos quantique au chaos quasi-classique ». Thèse de doctorat. Lille : Université Lille1, 2009.

[132] AB Rechester et Roscoe B White. « Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov-Taylor model ». In : *Physical Review Letters* 44.24 (1980), p. 1586.

[133] Sandro Wimberger. *Nonlinear dynamics and quantum chaos*. T. 10. Springer, 2014.

[134] G Casati, I Guarneri, F Izrailev et R Scharf. « Scaling behavior of localization in quantum chaos ». In : *Physical review letters* 64.1 (1990), p. 5.

[135] Eman Hamza, Alain Joye et Günter Stolz. « Dynamical localization for unitary Anderson models ». In : *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* 12 (2009), p. 381-444.

[136] Naama Brenner et Shmuel Fishman. « Pseudo-randomness and localization ». In : *Nonlinearity* 5.1 (1992), p. 211.

[137] Meir Griniasty et Shmuel Fishman. « Localization by pseudorandom potentials in one dimension ». In : *Physical review letters* 60.13 (1988), p. 1334.

[138] S. Fishman, D. R. Grempel et R. E. Prange. « Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization ». In : *Physical Review Letters* 49.8 (1982), p. 509-512. doi : 10.1103/PhysRevLett.49.509.

[139] Sofian Teber. *Mécanique quantique*. Polycopié de cours de Master 1. Chapitre 2.6 : Symétrie discrète – Renversement du temps.

[140] Dragi Karevski. « Physique quantique des champs et des transitions de phase : Avec exercices corrigés ». In : (2022).

[141] Olivier Sigwarth et Christian Miniatura. « Time reversal and reciprocity ». In : *AAPPS Bulletin* 32.1 (2022), p. 23.

[142] Hendrik Antoon Kramers. « Théorie générale de la rotation paramagnétique dans les cristaux ». In : *Proc. Acad. Amst* 33.6 (1930).

[143] Madan Lal Mehta. *Random matrices*. T. 142. Elsevier, 2004.

[144] CWJ Beenakker. « Random-matrix theory of Majorana fermions and topological superconductors ». In : *Reviews of Modern Physics* 87.3 (2015), p. 1037-1066.

[145] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello et T. V. Ramakrishnan. « Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions ». In : *Phys. Rev. Lett.* 42 (1979), p. 673-676. doi : 10.1103/PhysRevLett.42.673.

[146] B. L. Altshuler et B. I. Shklovskii. « Repulsion of energy levels and conductivity of small metal samples ». In : *Sov. Phys. JETP* 64 (1986). Zh. Eksp. Teor. Fiz. 91, 220 (1986), p. 127-135.

[147] Jacobus Verbaarschot. « Spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory ». In : *Physical Review Letters* 72.16 (1994), p. 2531.

[148] Alexander Altland et Martin R Zirnbauer. « Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures ». In : *Physical Review B* 55.2 (1997), p. 1142.

[149] Nicholas M Katz et Peter Sarnak. *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*. T. 45. American Mathematical Society, 2023.

[150] Rong Xiao et YX Zhao. « Revealing the spatial nature of sublattice symmetry ». In : *Nature Communications* 15.1 (2024), p. 3787.

[151] Adolfo G Grushin, B General non-interacting second-quantized, III Symmetries et A Unitary Symmetries. *Introduction to topological phases in condensed matter*. 2021.

[152] Andreas P Schnyder, Shinsei Ryu, Akira Furusaki et Andreas WW Ludwig. « Classification of topological insulators and superconductors ». In : *AIP conference proceedings*. T. 1134. 1. American Institute of Physics. 2009, p. 10-21.

[153] WH Zhao, LL Ding, BW Zhou, JY Wu, Y Bai, ZY Man et X Luo. « Phase diagrams of superconducting topological surface states ». In : *arXiv preprint arXiv :2112.09936* (2021).

[154] Polina Matveeva, Tyler Hewitt, Donghao Liu, Kethan Reddy, Dmitri Gutman et Sam T Carr. « One-dimensional noninteracting topological insulators with chiral symmetry ». In : *Physical Review B* 107.7 (2023), p. 075422.

[155] Fan Zhang, CL Kane et EJ Mele. « Time-reversal-invariant topological superconductivity and Majorana Kramers pairs ». In : *Physical review letters* 111.5 (2013), p. 056402.

[156] Andreas P Schnyder, Shinsei Ryu et Andreas WW Ludwig. « Lattice Model of a Three-Dimensional Topological Singlet Superconductor< ? format ?> with Time-Reversal Symmetry ». In : *Physical review letters* 102.19 (2009), p. 196804.

[157] D Toublan et JJM Verbaarschot. « Statistical properties of the spectrum of the QCD Dirac operator at low energy ». In : *Nuclear Physics B* 603.1-2 (2001), p. 343-368.

[158] R Blümel et Uzy Smilansky. « Symmetry breaking and localization in quantum chaotic systems ». In : *Physical review letters* 69.2 (1992), p. 217.

[159] R Scharf. « Kicked rotator for a spin-1/2 particle ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 22.19 (1989), p. 4223.

[160] Hugo Thomas, Julien Hébraud, Bertrand Georgeot, Gabriel Lemarié, Christian Miniatura et Olivier Giraud. « Coherent backscattering and coherent forward scattering effects in variations of the random quantum kicked rotor ». In : *arXiv preprint arXiv :2503.02517* (2025).

[161] Clément Hainaut, Adam Rançon, Jean-François Clément, Jean Claude Garreau, Pascal Szriftgiser, Radu Chicireanu et Dominique Delande. « Ratchet effect in the quantum kicked rotor and its destruction by dynamical localization ». In : *Physical Review A* 97.6 (2018), p. 061601.

[162] Ramgopal Agrawal, Akhilesh Pandey et Sanjay Puri. « Enhancement in breaking of time-reversal invariance in the quantum kicked rotor ». In : *Physical Review E* 104.6 (2021), p. 064202.

[163] Clément Hainaut. « Effets des symétries sur la localisation dans des systèmes quantiques désordonnés ». Thèse de doct. Université lille1, 2017.

[164] M Thaha et R Blümel. « Nonuniversality of the localization length in a quantum chaotic system ». In : *Physical review letters* 72.1 (1994), p. 72.

[165] A Ossipov, DM Basko et VE Kravtsov. « A super-Ohmic energy absorption in driven quantum chaotic systems ». In : *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 42 (2004), p. 457-460.

[166] JP Dahlhaus, JM Edge, J Tworzydło et CWJ Beenakker. « Quantum Hall effect in a one-dimensional dynamical system ». In : *Physical Review B* 84.11 (2011), p. 115133.

[167] Yu Chen et Chushun Tian. « Planck's quantum-driven integer quantum Hall effect in chaos ». In : *Physical review letters* 113.21 (2014), p. 216802.

[168] Chushun Tian, Yu Chen et Jiao Wang. « Emergence of integer quantum Hall effect from chaos ». In : *Physical Review B* 93.7 (2016), p. 075403.

[169] Nikolai Bolik, Caspar Groiseau, Jerry H Clark, Gil S Summy, Yingmei Liu et Sandro Wimberger. « Detecting topological phase transitions in a double kicked quantum rotor ». In : *Physical Review A* 106.4 (2022), p. 043318.

[170] Longwen Zhou et Jiangbin Gong. « Floquet topological phases in a spin-1/2 double kicked rotor ». In : *Physical Review A* 97.6 (2018), p. 063603.

[171] Yusuke Koyama, Kazuya Fujimoto, Shuta Nakajima et Yuki Kawaguchi. « Designing nontrivial one-dimensional Floquet topological phases using a spin-1/2 double-kicked rotor ». In : *Physical Review Research* 5.4 (2023), p. 043167.

[172] David J Thouless. « Electrons in disordered systems and the theory of localization ». In : *Physics Reports* 13.3 (1974), p. 93-142.

[173] Shmuel Fishman, DR Grempel et Richard E Prange. « Chaos, quantum recurrences, and Anderson localization ». In : *Physical Review Letters* 49.8 (1982), p. 509.

[174] Prosenjit Haldar, Sen Mu, Bertrand Georgeot, Jiangbin Gong, Christian Miniatura et Gabriel Lemarié. « Rayleigh-Jeans prethermalization and wave condensation in a nonlinear disordered Floquet system ». In : *Europhysics Letters* 144.6 (2024), p. 63001.

[175] Clément Hainaut, Adam Rançon, Jean-François Clément, Isam Manai, Pascal Szriftgiser, Dominique Delande, Jean Claude Garreau et Radu Chicireanu. « Experimental realization of an ideal Floquet disordered system ». In : *New Journal of Physics* 21.3 (2019), p. 035008.

[176] Yasar Y Atas, Eugene Bogomolny, Olivier Giraud et Guillame Roux. « Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles ». In : *Physical review letters* 110.8 (2013), p. 084101.

[177] FL Moore, JC Robinson, CF Bharucha, Bala Sundaram et MG Raizen. « Atom optics realization of the quantum δ-kicked rotor ». In : *Physical Review Letters* 75.25 (1995), p. 4598.

[178] Gunnar Ritt, Carsten Geckeler, Tobias Salger, Giovanni Cennini et Martin Weitz. « Fourier synthesis of optical potentials for atomic quantum gases ». In : *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 74.6 (2006), p. 063622.

[179] F Gerbier, S Trotzky, S Fölling, U Schnorrberger, JD Thompson, A Widera, Isabelle Bloch, L Pollet, M Troyer, B Capogrosso-Sansone et al. « Expansion of a quantum gas released from an optical lattice ». In : *Physical review letters* 101.15 (2008), p. 155303.

[180] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller et Yurii B Ovchinnikov. « Optical dipole traps for neutral atoms ». In : *Advances in atomic, molecular, and optical physics*. T. 42. Elsevier, 2000, p. 95-170.

[181] Jaeyoon Cho et MS Kim. « Two-dimensional imaging of gauge fields in optical lattices ». In : *Physical Review Letters* 107.26 (2011), p. 260402.

[182] Olaf Mandel, Markus Greiner, Artur Widera, Tim Rom, Theodor W Hänsch et Immanuel Bloch. « Coherent transport of neutral atoms in spin-dependent optical lattice potentials ». In : *Physical review letters* 91.1 (2003), p. 010407.

[183] Carsten Robens, Jonathan Zopes, Wolfgang Alt, Stefan Brakhane, Dieter Meschede et Andrea Alberti. « Low-entropy states of neutral atoms in polarization-synthesized optical lattices ». In : *Physical Review Letters* 118.6 (2017), p. 065302.

[184] JH Clark, C Groiseau, ZN Shaw, S Dadras, C Binegar, S Wimberger, GS Summy et Y Liu. « Quantum to classical walk transitions tuned by spontaneous emissions ». In : *Physical Review Research* 3.4 (2021), p. 043062.

[185] Max Sebastian Carey. « Velocimetry, trapping and optimal coherent manipulation of atomic rubidium ». Thèse de doct. University of Southampton, 2020.

[186] DR Masovic. « Standard spin-1/2 quantum kicked rotor in the inhomogeneous magnetic field ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 28.5 (1995), p. L147.

[187] Eric Akkermans et Gilles Montambaux. *Mesoscopic physics of electrons and photons*. Cambridge university press, 2007.

[188] Yoichi Asada, Keith Slevin et Tomi Ohtsuki. « Anderson transition in two-dimensional systems with spin-orbit coupling ». In : *Physical review letters* 89.25 (2002), p. 256601.

[189] Ehsan Arabahmadi, Daniel Schumayer, Benoît Grémaud, Christian Miniatura et David AW Hutchinson. « Momentum-space signatures of the Anderson transition in a symplectic, two-dimensional, disordered ultracold gas ». In : *Physical review research* 6.1 (2024), p. L012021.

[190] Giuliano Orso. « Anderson transition of cold atoms with synthetic spin-orbit coupling in two-dimensional speckle potentials ». In : *Physical Review Letters* 118.10 (2017), p. 105301.

[191] Ulrich Fastenrath, Gunnar Adams, Ralf Bundschuh, Thomas Hermes, Boris Raab, Ingeborg Schlosser, Thomas Wehner et Thomas Wichmann. « Universality in the 2D localization problem ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 172.3 (1991), p. 302-308.

[192] K Yakubo et M Ono. « Finite-size scaling of multifractal wave functions : The metal-insulator transition in two-dimensional symplectic systems ». In : *Physical Review B* 58.15 (1998), p. 9767.

[193] SN Evangelou. « Anderson transition, scaling, and level statistics in the presence of spin orbit coupling ». In : *Physical review letters* 75.13 (1995), p. 2550.

[194] Kei Minakuchi. « Two-dimensional random-network model with symplectic symmetry ». In : *Physical Review B* 58.15 (1998), p. 9627.

[195] L Schweitzer et I Kh Zharekeshev. « Scaling of level statistics and critical exponent of disordered two-dimensional symplectic systems ». In : *Journal of Physics : Condensed Matter* 9.33 (1997), p. L441.

[196] T Ando. « Numerical study of symmetry effects on localization in two dimensions ». In : *Physical Review B* 40.8 (1989), p. 5325.

[197] Rainer Merkt, Martin Janssen et Bodo Huckestein. « Network model for a two-dimensional disordered electron system with spin-orbit scattering ». In : *Physical Review B* 58.8 (1998), p. 4394.

[198] Shinobu Hikami, Anatoly I Larkin et Yosuke Nagaoka. « Spin-orbit interaction and magnetoresistance in the two dimensional random system ». In : *Progress of Theoretical Physics* 63.2 (1980), p. 707-710.

[199] Isam Manai, Jean-François Clément, Radu Chicireanu, Clément Hainaut, Jean Claude Garreau, Pascal Szriftgiser et Dominique Delande. « Experimental observation of two-dimensional Anderson localization with the atomic kicked rotor ». In : *Physical review letters* 115.24 (2015), p. 240603.

[200] PW Abrahams et DC Anderson. « Licciardello, and TV Ramakrishnan ». In : *Phys. Rev. Lett* 42.673 (1979), 18P.

[201] Jean-Louis Pichard et G Sarma. « Finite size scaling approach to Anderson localisation ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 14.6 (1981), p. L127.

[202] Gabriel Lemarié, Hans Lignier, Dominique Delande, Pascal Szriftgiser et Jean Claude Garreau. « Between a metal and an insulator : the critical state of the Anderson transition ». In : *arXiv preprint arXiv :1005.1540* (2010).

[203] Bradley Efron. « Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife ». In : *The Annals of Statistics* 7.1 (1979), p. 1-26. doi : 10.1214/aos/1176344552.

[204] A MacKinnon et B Kramer. « The scaling theory of electrons in disordered solids : Additional numerical results ». In : *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 53.1 (1983), p. 1-13.

[205] Matthias Lopez, Jean-François Clément, Gabriel Lemarié, Dominique Delande, Pascal Szriftgiser et Jean Claude Garreau. « Phase diagram of the anisotropic Anderson transition with the atomic kicked rotor : theory and experiment ». In : *New Journal of Physics* 15.6 (2013), p. 065013.

[206] NA Panagiotides, SN Evangelou et G Theodorou. « Localization-delocalization transition in anisotropic solids ». In : *Physical Review B* 49.20 (1994), p. 14122.

[207] DR Grempel, RE Prange et Shmuel Fishman. « Quantum dynamics of a nonintegrable system ». In : *Physical Review A* 29.4 (1984), p. 1639.

[208] SN Evangelou et T Ziman. « The Anderson transition in two dimensions in the presence of spin-orbit coupling ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 20.13 (1987), p. L235.

[209] N Zanon et J-L Pichard. « Random matrix theory and universal statistics for disordered quantum conductors with spin-dependent hopping ». In : *Journal de Physique* 49.6 (1988), p. 907-920.

Annexe A

Calcul détaillé I

Sommaire du présent chapitre

A.1 Corrélations classiques 175
A.2 Mapping du Kicked Rotor sur le modéle d'Anderson 177

Dans cette annexe, nous détaillons les calculs analytiques qui complètent et justifient les résultats présentés dans le chapitre principal. La première partie est consacrée à l'évaluation explicite des corrélations classiques du kicked rotor, permettant d'obtenir les expressions corrigées du coefficient de diffusion en tenant compte des effets de mémoire entre kicks. La seconde partie expose le mapping rigoureux du kicked rotor quantique sur le modèle d'Anderson à une dimension, en montrant comment l'équation de Floquet peut être reformulée sous la forme d'un modèle de liaisons fortes désordonnées.

A.1 Corrélations classiques

Considérons l'application standard généralisée avec une intensité de kick variable à chaque itération :

$$p_{n+1} = p_n + K_n \sin x_n, \tag{A.1}$$
$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}. \tag{A.2}$$

Notre objectif est de calculer la fonction de corrélation définie par :

$$C_n := \langle K_0 \sin x_0 \, K_n \sin x_n \rangle, \tag{A.3}$$

Nous supposons que la distribution initiale est uniforme sur l'espace des phases. Pour évaluer cette fonction, il est pratique d'utiliser une expression complexe équivalente

basée sur les moyennes de termes exponentiels :

$$C_n = K_0 K_n \left\langle e^{ix_0} e^{ix_n} - e^{ix_0} e^{-ix_n} \right\rangle + \text{c.c.} \tag{A.4}$$

Nous allons procéder en calculant d'abord les premières corrélations, puis généraliser l'expression. Pour cela, nous utilisons la fonction génératrice des fonctions de Bessel $J_n(x)$:

$$\exp\left[\left(t - \frac{1}{t}\right)\frac{z}{2}\right] = \sum_s J_s(z) t^s, \tag{A.5}$$

En prenant $t = e^{ix}$ et $z = K$, on retrouve :

$$\exp(iK \sin x) = \sum_s J_s(K) e^{isx}, \tag{A.6}$$

Cela permet d'évaluer la première exponentielle itérée :

$$e^{ix_1} = \exp[i(x_0 + p_0 + K_0 \sin x_0)] \tag{A.7}$$

$$= \sum_{s_0} J_{s_0}(K_0) e^{i(s_0+1)x_0} e^{ip_0}, \tag{A.8}$$

En répétant ce processus, on obtient les termes suivants. En inversant l'ordre des indices :

$$e^{ix_2} = \sum_{s_0,s_1} J_{s_0}(K_1) J_{s_1}(K_0(s_0+2)) e^{i(s_1+s_0+1)x_0} e^{i(s_0+2)p_0}, \tag{A.9}$$

$$e^{ix_3} = \sum_{s_0,s_1,s_2} J_{s_0}(K_2) J_{s_1}(K_1(s_0+2)) J_{s_2}(K_0(2s_0+s_1+3)) \times e^{i(s_2+s_1+s_0+1)x_0} e^{i(2s_0+s_1+3)p_0}. \tag{A.10}$$

Nous pouvons définir les relations de récurrence :

$$\alpha_0 = s_0 + 1, \tag{A.11}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + s_{n+1}, \tag{A.12}$$

$$\beta_0 = 1 + \alpha_0, \tag{A.13}$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \alpha_n, \tag{A.14}$$

On peut alors écrire l'exponentielle au temps n sous la forme :

$$e^{ix_n} = \sum_{s_0,\ldots,s_{n-1}} J_{s_0}(K_{n-1}\beta_0) J_{s_1}(K_{n-2}\beta_1) \ldots J_{s_{n-1}}(K_0\beta_{n-1}) e^{i\alpha_n x_0} e^{i\beta_n p_0}, \tag{A.15}$$

En moyennant sur une distribution uniforme dans l'espace des phases, seule la contribution avec $\alpha_n = \beta_n = 0$ est non nulle. La corrélation devient alors :

$$C_n = \frac{K_0 K_n}{2} \sum_{s_0,\ldots,s_{n-1}} J_{s_0}(K_{n-1}\beta_0) J_{s_1}(K_{n-2}\beta_1) \ldots J_{s_{n-1}}(K_0\beta_{n-1}) \delta_{\alpha_n,0} \delta_{\beta_n,0}, \tag{A.16}$$

Les premières corrélations s'évaluent alors comme suit :

$$C_0 = \frac{K_0^2}{2}, \tag{A.17}$$

$$C_1 = 0, \tag{A.18}$$

$$C_2 = -\frac{K_0 K_2}{2} J_2(K_1), \tag{A.19}$$

$$C_3 = \frac{K_0 K_3}{2} [J_3(K_1)J_3(K_2) - J_1(K_1)J_1(K_2)], \tag{A.20}$$

$$C_4 = \frac{K_0 K_4}{2} \left[J_2(K_1)J_2(K_3) + O(K^{-3/2})\right], \tag{A.21}$$

Dans le cas standard où l'amplitude des kicks est constante, c'est-à-dire $K_n = K$, ces expressions permettent d'obtenir la série de corrélations temporelles nécessaires au calcul du coefficient de diffusion classique corrigé, donné par l'équation (2.20).

A.2 Mapping du Kicked Rotor sur le modéle d'Anderson

Cette partie a pour objectif d'exposer la correspondance entre le modèle unidimensionnel du Kicked Rotor et celui des liaisons fortes désordonnées. Pour ce faire, nous nous appuierons sur les démarches analytiques développées dans les travaux référencés en [173, 207].

Rappelons que l'évolution du système au cours d'une période est gouvernée par l'opérateur $\hat{U}_F = \hat{U}_{\text{prop}}\hat{U}_{\text{kick}}$. Selon le théorème de Floquet, un état de Floquet, associé à une quasi-énergie ω définie modulo 2π, est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{U}_F$, avec pour valeur propre $e^{-i\omega_n}$. Soit un état $|\psi\rangle$ défini par :

$$|\psi^+\rangle := \hat{U}_{\text{kick}}|\psi_{\omega_n}\rangle, \tag{A.22}$$

L'équation de Floquet s'écrit :

$$\hat{U}_F|\psi_{\omega_n}\rangle := e^{-i\omega_n}|\psi_{\omega_n}\rangle, \tag{A.23}$$

En appliquant $\hat{U}_{\text{kick}}\hat{U}_{\text{prop}}$ à l'équation précédente, on montre que :

$$\hat{U}_{\text{kick}}\hat{U}_{\text{prop}}|\psi^+\rangle = e^{-i\omega_n}|\psi^+\rangle, \tag{A.24}$$

On en déduit que $|\psi^+\rangle$ est un état propre de $\hat{U}_{\text{kick}}\hat{U}_{\text{prop}}$, de valeur propre $e^{-i\omega_n}$. Cet état sera noté $|\psi^+_{\omega_n}\rangle$. En appliquant $\hat{U}_{\text{prop}}$ à cette relation, on obtient :

$$\hat{U}_F\hat{U}_{\text{prop}}|\psi^+_{\omega_n}\rangle = e^{-i\omega_n}\hat{U}_{\text{prop}}|\psi^+_{\omega_n}\rangle, \tag{A.25}$$

ce qui implique que $\hat{U}_{\text{prop}}|\psi^+_{\omega_n}\rangle = |\psi_{\omega_n}\rangle$. Pour résumer :

$$|\psi^+_{\omega_n}\rangle = \hat{U}_{\text{kick}}|\psi_{\omega_n}\rangle, \quad |\psi_{\omega_n}\rangle = \hat{U}_{\text{prop}}|\psi^+_{\omega_n}\rangle, \quad \hat{U}_F|\psi_{\omega_n}\rangle = e^{-i\omega_n}|\psi_{\omega_n}\rangle. \tag{A.26}$$

Pour relier ce modèle à celui des liaisons fortes avec désordre, on réécrit l'opérateur de kick en posant :

$$W(\hat{x}) := \tan\left(-\frac{K\cos\hat{x}}{2\bar{k}}\right), \tag{A.27}$$

ce qui donne :

$$\exp\left(-i\frac{K\cos\hat{x}}{\bar{k}}\right) = \frac{1+iW(\hat{x})}{1-iW(\hat{x})}, \tag{A.28}$$

On peut alors relier $|\psi^+_{\omega_n}\rangle$ et $|\psi_{\omega_n}\rangle$ par :

$$|\psi^+_{\omega_n}\rangle = \frac{1+iW(\hat{x})}{1-iW(\hat{x})}|\psi_{\omega_n}\rangle, \tag{A.29}$$

En posant :

$$|\Psi_{\omega_n}\rangle := \frac{|\psi^+_{\omega_n}\rangle + |\psi_{\omega_n}\rangle}{2}, \tag{A.30}$$

on obtient :

$$|\psi^+_{\omega_n}\rangle = [1+iW(\hat{x})]|\Psi_{\omega_n}\rangle, \quad |\psi_{\omega_n}\rangle = [1-iW(\hat{x})]|\Psi_{\omega_n}\rangle, \tag{A.31}$$

Décomposons les états de Floquet dans la base des impulsions :

$$|\psi^+_{\omega_n}\rangle = \sum_j \psi^+_{\omega_n,j}|j\rangle, \quad |\psi_{\omega_n}\rangle = \sum_j \psi_{\omega_n,j}|j\rangle, \quad |\Psi_{\omega_n}\rangle = \sum_j \Psi_{\omega_n,j}|j\rangle, \tag{A.32}$$

On écrit aussi :

$$W(\hat{x}) = \sum_t W_t e^{-it\hat{x}}, \tag{A.33}$$

En insérant (A.33) et (A.32) dans (A.31), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_j \psi^+_{\omega_n,j}|j\rangle &= \sum_j \Psi_{\omega_n,j}|j\rangle + i\sum_{j,t} W_t\Psi_{\omega_n,j}|t+j\rangle \\ &= \sum_j \Psi_{\omega_n,j}|j\rangle + i\sum_{j,t} W_{j-t}\Psi_{\omega_n,t}|j\rangle,\end{aligned} \tag{A.34}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\sum_j \psi_{\omega_n,j}|j\rangle &= \sum_j \Psi_{\omega_n,j}|j\rangle - i\sum_{j,t} W_t\Psi_{\omega_n,j}|t+j\rangle \\ &= \sum_j \Psi_{\omega_n,j}|j\rangle - i\sum_{j,t} W_{j-t}\Psi_{\omega_n,t}|j\rangle,\end{aligned} \tag{A.35}$$

La seconde égalité de (A.34) et (A.35) résulte d'un simple réarrangement des indices. En appliquant $\langle m|$ aux équations (A.34) et (A.35), on obtient :

$$\psi^{+}_{\omega_n,m} = \Psi_{\omega_n,m} + i\sum_t W_{m-t}\Psi_{\omega_n,t},$$
$$\psi_{\omega_n,m} = \Psi_{\omega_n,m} - i\sum_t W_{m-t}\Psi_{\omega_n,t}, \tag{A.36}$$

Revenons maintenant à l'équation aux valeurs propres de l'opérateur d'évolution :

$$\hat{U}_F\,|\psi_{\omega_n}\rangle = e^{-i\omega_n}\,|\psi_{\omega_n}\rangle, \tag{A.37}$$

En appliquant l'opérateur de propagation libre sur $|\psi^{+}_{\omega_n}\rangle$, on obtient :

$$e^{-i\omega_n}\,|\psi_{\omega_n}\rangle = \exp\left(-i\frac{\hat{p}^2}{2k}\right)|\psi^{+}_{\omega_n}\rangle, \tag{A.38}$$

Dans la base des impulsions $|m\rangle$, cela donne :

$$\psi_{\omega_n,m} = e^{i\omega_n}e^{-ikm^2/2}\psi^{+}_{\omega_n,m}, \tag{A.39}$$

En insérant (A.39) dans (A.36), on obtient :

$$\Psi_{\omega_n,m} - i\sum_t W_{m-t}\Psi_{\omega_n,t} = e^{iE_m}\left[\Psi_{\omega_n,m} + i\sum_t W_{m-t}\Psi_{\omega_n,t}\right], \tag{A.40}$$

avec $E_m := \omega_n - \frac{km^2}{2}$. En posant $\epsilon_m := \tan\left(\frac{E_m}{2}\right)$, cette équation devient :

$$\epsilon_m\Psi_{\omega_n,m} + \sum_t W_{m-t}\Psi_{\omega_n,t} = 0, \tag{A.41}$$

Enfin, en extrayant le terme $t = 0$, on obtient :

$$\epsilon_m\Psi_{\omega_n,m} + \sum_{t\neq 0} W_t\Psi_{\omega_n,m-t} = -W_0\Psi_{\omega_n,m}\,, \tag{A.42}$$

Annexe B

Calcul détaillé II

Sommaire du présent chapitre

B.1 Propriétés de l'opérateur de renversement du temps 181
B.2 Mapping du Kicked Rotor avec Spin 1/2 sur le modèle des laissons fortes avec désordre 183
B.3 Hamiltoniens invariants sous $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$ et symétries géométriques unitaires 186
B.4 Simulation numérique du modèle TBS 190

B.1 Propriétés de l'opérateur de renversement du temps

Dans cette section, nous présentons les propriétés mathématiques fondamentales de l'opérateur de renversement du temps en mécanique quantique. Cette opération correspond à une inversion de la direction du temps, formalisée par la transformation $t \to -t$ qui est à la fois antilinéaire et antiunitaire, et qui satisfait la relation suivante :

$$\hat{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{T}}^{\dagger} = \hat{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{\mathcal{T}} = \hat{1}. \tag{B.1}$$

L'antilinéarité implique que, pour toute combinaison linéaire d'états, on a :

$$\hat{\mathcal{T}}\left(\lambda|\phi\rangle + \mu|\psi\rangle\right) = \lambda^{*}\hat{\mathcal{T}}|\phi\rangle + \mu^{*}\hat{\mathcal{T}}|\psi\rangle. \tag{B.2}$$

Dans les notations de Dirac, la manipulation de tels opérateurs requiert une attention particulière. Pour un opérateur linéaire $\hat{A}$, on a l'identité :

$$\langle\phi|(\hat{A}|\psi\rangle) = (\langle\phi|\hat{A})|\psi\rangle, \tag{B.3}$$

puisque cela correspond à :

$$(\phi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}^\dagger \phi, \psi).$$

Dans le cas antilinéaire, l'adjoint est défini différemment. En particulier, pour $\hat{\mathcal{T}}$ on a :

$$\langle \phi | (\hat{\mathcal{T}} | \psi \rangle) = \langle \hat{\mathcal{T}} \psi | \phi \rangle = \left[(\langle \psi | \hat{\mathcal{T}}^\dagger) | \phi \rangle \right]^*, \tag{B.4}$$

soit en notation plus compacte :

$$(\phi, \hat{\mathcal{T}} \psi) = (\hat{\mathcal{T}}^\dagger \phi, \psi)^* = (\psi, \hat{\mathcal{T}}^\dagger \phi), \tag{B.5}$$

Ce qui montre que, contrairement au cas linéaire, une conjugaison complexe supplémentaire apparaît lors de la prise de l'adjoint d'un opérateur antilinéaire.

Prenons l'exemple concret de l'espace $\mathbb{C}^2$ et considérons $\hat{\mathcal{T}}_0$ l'opérateur de conjugaison complexe dans la base canonique. Son action s'écrit :

$$\hat{\mathcal{T}}_0 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}. \tag{B.6}$$

Le produit scalaire entre deux états prend alors deux formes selon l'ordre d'action :

$$\langle \psi | (\hat{\mathcal{T}}_0 | \phi \rangle) = (\psi_1^*, \psi_2^*) \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = \psi_1^* \phi_1^* + \psi_2^* \phi_2^*, \tag{B.7}$$

et :

$$(\langle \psi | \hat{\mathcal{T}}_0) | \phi \rangle = (\psi_1, \psi_2) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2, \tag{B.8}$$

d'où la nécessité d'une conjugaison supplémentaire pour les opérateurs antilinéaires.

De plus, si $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$ sont deux opérateurs antilinéaires, leur produit est un opérateur linéaire, et l'adjoint de ce produit obéit à :

$$\left(\hat{K}_1 \hat{K}_2 \right)^\dagger = \hat{K}_2^\dagger \hat{K}_1^\dagger, \tag{B.9}$$

car :

$$\left((\hat{K}_1 \hat{K}_2)^\dagger \phi, \psi \right) = (\phi, \hat{K}_1 \hat{K}_2 \psi) = (\hat{K}_1^\dagger \phi, \hat{K}_2 \psi)^* = (\hat{K}_2^\dagger \hat{K}_1^\dagger \phi, \psi)$$

Un opérateur antiunitaire conserve la norme : il transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée :

$$(\hat{K} e_n, \hat{K} e_k) = (e_n, \hat{K}^\dagger \hat{K} e_k)^* = (e_n, e_k)^* = \delta_{n,k}. \tag{B.10}$$

Par définition, l'opérateur de renversement temporel doit vérifier :

$$\hat{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{T}}^\dagger = \hat{\mathcal{T}}^\dagger \hat{\mathcal{T}} = \hat{1}, \tag{B.11}$$

Il doit commuter avec les translations spatiales et les rotations, ce qui implique :

$$[\hat{\mathcal{T}}, e^{-i\vec{a}\cdot\hat{\vec{P}}}] = 0, \qquad [\hat{\mathcal{T}}, e^{-i\theta\hat{J}_{\vec{u}}}] = 0\,, \tag{B.12}$$

Ici $\hat{J}_{\vec{u}}$ représente le générateur des rotations autour de l'axe $\vec{u}$, c'est-à-dire la composante du moment angulaire total dans la direction $\vec{u}$.

et donc, en exploitant l'antilinéarité :

$$\hat{\mathcal{T}}\, e^{-i\vec{a}\cdot\hat{\vec{P}}}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = e^{+i\vec{a}\cdot\hat{\vec{P}}} \Rightarrow \hat{\mathcal{T}}\,\hat{\vec{P}}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = -\hat{\vec{P}}, \tag{B.13}$$

De même, pour le moment cinétique :

$$\hat{\mathcal{T}}\hat{\vec{J}}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = -\hat{\vec{J}}, \tag{B.14}$$

Dans un système *sans spin*, on a $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} = \sum_i \hat{\vec{R}}_i \wedge \hat{\vec{P}}_i$. Si les opérateurs de position restent invariants :

$$\hat{\mathcal{T}}\,\hat{\vec{R}}_i\hat{\mathcal{T}}^\dagger = \hat{\vec{R}}_i, \tag{B.15}$$

alors l'inversion du moment cinétique découle simplement de celle de l'impulsion, donc si le système est sans spin, on peut identifier l'opérateur de renversement temporel à la conjugaison complexe $\hat{K}_x := \hat{\mathcal{T}}_0$ en représentation de position.

Dans le cas où le système a des *degrés de liberté de spin*, il est nécessaire que les opérateurs de spin changent également de signe. Cela se réalise en combinant $\hat{\mathcal{T}}_0$ à une rotation de π autour de l'axe y :

$$\hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}}_0\, e^{-i\pi\frac{\hat{S}_y}{\hbar}}, \tag{B.16}$$

On vérifie alors que $\hat{\mathcal{T}}\hat{\vec{J}}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = -\hat{\vec{J}}$, avec $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$. Si $\hat{\mathcal{T}}_0^2 = \hat{1}$, on obtient :

$$\hat{\mathcal{T}}^2 = \hat{\mathcal{T}}_0\, e^{-i\pi\hat{S}_y}\hat{\mathcal{T}}_0\, e^{-i\pi\hat{S}_y} = e^{-2i\pi\hat{S}_y} = (-1)^{2S}, \tag{B.17}$$

Cette propriété prend la forme $+\hat{1}$ si le spin total S est un entier (par exemple, un nombre pair de fermions de spin 1/2) et $-\hat{1}$ si le spin est demi-entier (comme pour un nombre impair de fermions de spin 1/2). Cette distinction conduit à la transformation suivante pour tout opérateur $\hat{Q}$:

$$\hat{\mathcal{T}}\,\hat{Q}\hat{\mathcal{T}}^\dagger = \hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{Q}\hat{\mathcal{T}}, \tag{B.18}$$

Ce résultat découle directement du fait que l'on peut multiplier cette expression à gauche par $\hat{\mathcal{T}}^{\dagger 2}$ et à droite par $\hat{\mathcal{T}}^2$, tout en utilisant l'unitarité de $\hat{\mathcal{T}}$: $\hat{\mathcal{T}}^\dagger\hat{\mathcal{T}} = \hat{1}$.

B.2 Mapping du Kicked Rotor avec Spin 1/2 sur le modèle des laissons fortes avec désordre

Cet appendice établit le lien formel entre le modèle du kicked rotor avec spin 1/2 et le modèle des liaisons fortes désordonné (ou modèle de type Anderson). Nous suivrons pour cela la démarche proposée dans la référence [159]. Le système est décrit par l'Ha-

miltonien :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}\hat{1}_2 + K\left(V_0\hat{1} + \vec{V}\cdot\vec{\sigma}\right)\sum_n \delta(t-n), \tag{B.19}$$

Par exemple, pour le modèle TBS, on a :

$$\vec{V}\cdot\hat{\vec{\sigma}} = \left(\tfrac{\mu}{2}\sin(2\hat{x}),\ 0,\ \varepsilon\sin(\hat{x})\right)\cdot\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_x\\ \hat{\sigma}_y\\ \hat{\sigma}_z\end{pmatrix} = \tfrac{\mu}{2}\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \varepsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z, \tag{B.20a}$$

$$V_0 = \cos(\hat{x}),, \tag{B.20b}$$

Dans un second exemple, celui du modèle de Scharf [159], on a :

$$\vec{V}\cdot\hat{\vec{\sigma}} = \nu_1\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \nu_2\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_y + \nu_3\sin(3\hat{x})\,\hat{\sigma}_z, \tag{B.21a}$$

$$V_0 = \cos(\hat{x}), \tag{B.21b}$$

En simplifiant les notations, on note :

$$V = V_0\hat{1} + \vec{V}\cdot\hat{\vec{\sigma}}, \tag{B.22}$$

Le vecteur $\hat{\vec{\sigma}}$ représente les matrices de Pauli. Il est maintenant plus commode d'étudier l'opérateur de Floquet $\hat{F}$, défini par :

$$\hat{F} = e^{-\mathrm{i}\frac{K}{k}V}\hat{F}_0 \quad \text{avec} \quad \hat{F}_0 = e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}}\hat{1}_2 = e^{-\mathrm{i}\frac{\hat{p}^2}{2k}}\hat{1}_2 = e^{-\mathrm{i}H_0}\hat{1}_2\,, \tag{B.23}$$

En introduisant les états propres $|u_\pm^\sigma\rangle$ et les quasi-énergies ϕ [1] :

$$F^{\rho\sigma}\,|u_+^\sigma\rangle = e^{-\mathrm{i}\phi}\,|u_+^\rho\rangle\,, \tag{B.24a}$$

$$|u_-^\rho\rangle = e^{\mathrm{i}(\phi - H_0)}\left[e^{\mathrm{i}\frac{K}{\hbar}V}\right]^{\rho\sigma}|u_+^\sigma\rangle, \tag{B.24b}$$

On définit alors l'état symétrisé :

$$|u^\sigma\rangle = \frac{1}{2}\left(|u_-^\sigma\rangle + |u_+^\sigma\rangle\right), \tag{B.25}$$

En écrivant l'opérateur de kick sous la forme rationnelle :

$$e^{\pm\mathrm{i}\frac{K}{k}V} = \frac{\hat{1}\mp\mathrm{i}W}{\hat{1}\pm\mathrm{i}W}, \tag{B.26}$$

1. En calcul indiciel, $F^{\rho\sigma}$ désigne la composante (ρ,σ) de la matrice 2×2 représentant l'opérateur $\hat{F}$ dans l'espace de spin. Le vecteur $|u_+\rangle$ est un état propre de $\hat{F}$ associé à la valeur propre $e^{-\mathrm{i}\phi}$, et $|u_+^\sigma\rangle$ en est la composante σ dans la base de spin.

(on construira W explicitement par la suite), on peut exprimer $|u^\rho\rangle$ à l'aide de $|u^\sigma_-\rangle$ [2] :

$$|u^\rho\rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + e^{-\mathrm{i}\frac{K}{\hbar}V}\right)^{\rho\sigma}|u^\sigma_-\rangle = \left(\frac{1}{\hat{1} - \mathrm{i}W}\right)^{\rho\sigma}|u^\sigma_-\rangle, \tag{B.27}$$

Et également avec $|u^\sigma_+\rangle$:

$$|u^\rho\rangle = \left(\frac{1}{\hat{1} + \mathrm{i}W}\right)^{\rho\sigma}|u^\sigma_+\rangle, \tag{B.28}$$

En combinant les équations précédentes, on obtient :

$$\left(\hat{1} - \mathrm{i}W\right)^{\rho\sigma}|u^\sigma\rangle = e^{\mathrm{i}(\phi - H_0)}\left(\hat{1} + \mathrm{i}W\right)^{\rho\sigma}|u^\sigma\rangle, \tag{B.29}$$

soit finalement :

$$\mathrm{i}\left(\frac{1 - e^{\mathrm{i}(\phi - H_0)}}{1 + e^{\mathrm{i}(\phi - H_0)}}\right)|u^\rho\rangle + W^{\rho\sigma}|u^\sigma\rangle = 0, \tag{B.30}$$

Le lien avec un modèle tight-binding devient explicite en passant à la représentation en impulsion :

$$\tan\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\hbar m^2}{4}\right)\langle m|u^\rho\rangle + \sum_n \langle m|\, W^{\rho\sigma}\,|m+n\rangle\langle m+n|u^\sigma\rangle = 0, \tag{B.31}$$

avec la transformée de Fourier de W :

$$\tilde{W}^{\rho\sigma}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\; e^{in\theta} W^{\rho\sigma}(\theta) = \langle m|\, W^{\rho\sigma}\,|m+n\rangle, \tag{B.32}$$

D'où la forme finale :

$$\tan\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\hbar m^2}{4}\right)u^\rho_m + \sum_{n\neq 0}\tilde{W}^{\rho\sigma}_n u^\sigma_{m+n} = -\tilde{W}^{\rho\sigma}_0 u^\sigma_m\,, \tag{B.33}$$

L'opérateur W est donné par :

$$W^{\rho\sigma} = -\left[\tan\left(\frac{K}{2\hbar}V\right)\right]^{\rho\sigma} = -\left[\tan\left(\frac{K}{2\hbar}(V_0\hat{1} + \vec{V}\cdot\vec{\sigma})\right)\right]^{\rho\sigma}, \tag{B.34}$$

Pour des réels x_0 et $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, la décomposition spectrale de l'opérateur $x_0\hat{1} + \vec{x}\cdot\vec{\sigma}$ est :

$$x_0\hat{1} + \vec{x}\cdot\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(x_0 + |\vec{x}|)\left(\hat{1} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{x}|}\right) + \frac{1}{2}(x_0 - |\vec{x}|)\left(\hat{1} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{x}|}\right), \tag{B.35}$$

2. Dans les équations, nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein sur l'indice répété σ , de manière à alléger les notations.

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}\tan(x_0\hat{1}+\vec{x}\cdot\vec{\sigma}) = &\frac{1}{2}\left[\tan(x_0+|\vec{x}|)+\tan(x_0-|\vec{x}|)\right]\hat{1}\\ &+\frac{1}{2}\left[\tan(x_0+|\vec{x}|)-\tan(x_0-|\vec{x}|)\right]\frac{\vec{x}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{x}|},\end{aligned} \tag{B.36}$$

valable tant que $|x_0 \pm |\vec{x}|| \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}W = &-\frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{K}{2k}(V_0+|\vec{V}|)\right)+\tan\left(\frac{K}{2k}(V_0-|\vec{V}|)\right)\right]\hat{1}\\ &-\frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{K}{2k}(V_0+|\vec{V}|)\right)-\tan\left(\frac{K}{2k}(V_0-|\vec{V}|)\right)\right]\frac{\vec{V}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{V}|},\end{aligned} \tag{B.37}$$

Cela achève le passage au modèle de type tight-binding pour une particule de spin 1/2. Le choix $V \equiv 0$ découple les états de spin up et down, menant à une dégénérescence de Kramer . L'opérateur W devient alors équivalent à celui du kicked rotor sans spin, avec un potentiel indépendant du spin.

Comme montré dans [159], les symétries imposées par l'opérateur de symétrie anti-unitaire sur le potentiel V se retrouvent également dans la structure de l'opérateur W. Cela conduit, pour sa transformée de Fourier, à la relation suivante :

$$\tilde{W}_n^{\rho\sigma} = \rho\sigma\,\tilde{W}_{-n}^{\sigma\rho}, \qquad \rho,\sigma = \pm 1, \tag{B.38}$$

Ce type de contrainte est bien connu dans la littérature [208, 209] comme caractérisant la classe symplectique pour les modèles tight-binding désordonnés.

Cette propriété résulte directement de l'existence d'une symétrie anti-unitaire $\hat{\mathcal{T}}$, qui dans ce cas vérifie $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$, et dont l'action sur les états garantit l'apparition d'une dégénérescence de Kramers .

En résumé, le passage au modèle tight-binding révèle non seulement la structure de liaison forte du système, mais également son appartenance à la classe symplectique, qui résulte du couplage entre le spin et la position dans le potentiel V.

B.3 Hamiltoniens invariants sous $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$ et symétries géométriques unitaires

Cette démonstration est tirée du livre de Haake [116].

Considérons une classe d'Hamiltoniens invariants sous renversement du temps avec $\hat{\mathcal{T}}^2 = -\hat{1}$ et possédant en plus une symétrie unitaire. On peut alors introduire un opérateur

unitaire de symétrie géométrique supplémentaire $\hat{R}_x$ qui satisfait les relations suivantes :

$$[\hat{R}_x, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{R}_x, \hat{\mathcal{T}}] = 0, \quad \hat{R}_x^2 = -\hat{1}, \tag{B.39}$$

Le groupe de symétrie unitaire engendré est alors donné par : $G = \{\hat{1}, \hat{R}_x, \hat{R}_x^2, \hat{R}_x^3\}$ avec $\hat{R}_x^2 = -\hat{1}$.

Un exemple concret d'un tel opérateur est une rotation d'angle π autour de l'axe x, soit :

$$\hat{R}_x = \exp(\mathrm{i}\pi \hat{J}_x/\hbar), \tag{B.40}$$

dans un système à spin demi-entier. Comme les valeurs propres de $\hat{J}_x$ sont alors demi-entières, cela assure que $\hat{R}_x^2 = -\hat{1}$, tandis que l'opérateur de renversement du temps s'écrit classiquement :

$$\hat{\mathcal{T}} = \exp(\mathrm{i}\pi \hat{J}_y/\hbar)\hat{K}, \tag{B.41}$$

où $\hat{K}$ désigne la conjugaison complexe.

Pour analyser la structure de l'Hamiltonien $\hat{H}$, on travaille dans une base propre de $\hat{R}_x$. Étant donné que $\hat{R}_x^2 = -\hat{1}$, ses valeurs propres sont dégénérées et égales à +i et –i. On peut donc choisir une base propre telle que :

$$\hat{R}_x |n, \pm\rangle = \pm\mathrm{i} |n, \pm\rangle, \tag{B.42}$$

De plus, puisque l'opérateur de renversement du temps $\hat{\mathcal{T}}$ échange les états propres de $\hat{R}_x$, on a :

$$\hat{R}_x \hat{\mathcal{T}} |n\pm\rangle = \hat{\mathcal{T}} \hat{R}_x |n\pm\rangle = \mp\mathrm{i}\hat{\mathcal{T}} |n\pm\rangle, \tag{B.43}$$

Cela implique que la base peut être choisie de telle sorte que :

$$\hat{\mathcal{T}} |n\pm\rangle = \pm |n\mp\rangle, \tag{B.44}$$

Autrement dit, la dimension de l'espace de Hilbert est nécessairement paire (ou infinie). Supposons pour simplifier qu'elle soit de dimension $2N$. L'Hamiltonien $\hat{H}$, l'opérateur de renversement du temps $\hat{\mathcal{T}}$ et la symétrie unitaire $\hat{R}_x$ prennent alors la forme bloc suivante, en base adaptée :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{K} \\ \hat{K} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_x = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{B.45}$$

La forme de $\hat{\mathcal{T}}$ et de $\hat{R}_x$ découle des propriétés de la base. La structure de $\hat{H}$ résulte du fait qu'il commute avec $\hat{R}_x$. De plus, les blocs $\hat{H}_+$ et $\hat{H}_-$ ne sont pas indépendants : l'invariance sous renversement du temps impose

$$\hat{H} = \hat{\mathcal{T}} \hat{H} \hat{\mathcal{T}}^{-1},$$

ce qui donne explicitement :

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{K} \\ \hat{K} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{K} \\ -\hat{K} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_-^* & 0 \\ 0 & \hat{H}_+^* \end{pmatrix}, \tag{B.46}$$

On en conclut que $\hat{H}_+ = \hat{H}_-^* = \tilde{H}$.

À ce stade, la dégénérescence de Kramers apparaît : comme $\hat{H}_+$ et $\hat{H}_-$ sont l'un l'autre transposés complexes, ils possèdent les mêmes valeurs propres. En général, ces blocs sont complexes, ce qui implique que le groupe des transformations canoniques agissant dans cet espace est $U(N)$ — correspondant à la classe de symétrie unitaire (classe A).

Il est instructif de restreindre davantage la classe des Hamiltoniens en imposant une symétrie géométrique supplémentaire, notée $\hat{R}_y$, qui satisfait :

$$[\hat{R}_y, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{R}_y, \hat{\mathcal{T}}] = 0, \quad \hat{R}_x \hat{R}_y + \hat{R}_y \hat{R}_x = 0, \quad \hat{R}_y^2 = -\hat{1}, \tag{B.47}$$

Un exemple concret est l'opérateur $\hat{R}_y = \exp(\mathrm{i}\pi \hat{J}_y/\hbar)$. L'anticommutation entre $\hat{R}_x$ et $\hat{R}_y$ implique que le groupe de symétrie unitaire est maintenant constitué de huit éléments :

$$G = \{\pm\hat{1}, \pm\hat{R}_x, \pm\hat{R}_y, \pm\hat{R}_x\hat{R}_y\}.$$

On observe immédiatement que, tout comme $\hat{\mathcal{T}}$, l'opérateur $\hat{R}_y$ échange les états propres de $\hat{R}_x$:

$$\hat{R}_x \hat{R}_y |m\pm\rangle = \mp\mathrm{i}\hat{R}_y |m\pm\rangle,$$

On en déduit que $\hat{R}_y$ possède une structure en blocs hors diagonale. Chaque bloc hors diagonale est une matrice unitaire (puisque $\hat{R}_y$ est unitaire), et la condition $\hat{R}_y^2 = -\hat{1}$ impose :

$$\hat{R}_y = \begin{pmatrix} 0 & \hat{V} \\ -\hat{V}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.48}$$

où $\hat{V}$ est une matrice unitaire de taille $N \times N$.

La condition $\hat{\mathcal{T}} \hat{R}_y \hat{\mathcal{T}}^{-1} = \hat{R}_y$ impose en plus que $\hat{V}$ est symétrique :

$$\hat{V} = \tilde{\hat{V}} = \hat{K}\hat{V}^\dagger\hat{K}.$$

Nous pouvons à présent imposer la condition $[\hat{H}, \hat{R}_y] = 0$.

On en déduit que $\hat{H}_+ = \hat{V}\hat{K}\hat{H}\hat{K}\hat{V}^\dagger$, ce qui permet d'identifier un nouvel opérateur de renversement du temps restreint à l'espace de dimension N :

$$\hat{\mathcal{T}}_+ = \hat{V}\hat{K}, \tag{B.49}$$

qui définit une nouvelle symétrie de renversement du temps dite non conventionnelle dans ce sous-espace réduit.

On observe que $\hat{\mathcal{T}}_+^2 = \hat{1}$, et l'on peut donc appliquer la procédure standard pour les Hamiltoniens invariants sous renversement du temps avec $\hat{\mathcal{T}}^2 = \hat{1}$: il est alors possible de choisir une base telle que le bloc $\hat{H}_+$ (et donc aussi $\hat{H}_- = \hat{H}_+^*$) soit une matrice réelle et symétrique. Le système appartient ainsi à la classe de symétrie orthogonale (classe AI).

Rétrospectivement, on aurait pu remarquer que l'opérateur

$$\hat{\mathcal{T}}' = \hat{R}_y \hat{\mathcal{T}}, \tag{B.50}$$

définit une nouvelle symétrie de renversement du temps non conventionnelle, avec

$$\hat{\mathcal{T}}'^2 = \hat{R}_y \hat{\mathcal{T}} \hat{R}_y \hat{\mathcal{T}} = \hat{R}_y^2 \hat{\mathcal{T}}^2 = \hat{1}, \tag{B.51}$$

Enfin, pour illustrer la coopération entre la symétrie de renversement du temps conventionnelle et les symétries géométriques unitaires, on considère le cas d'isotropie complète où $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$. La base adaptée est alors notée $|\alpha j m\rangle$, où $\hbar^2 j(j+1)$ et $\hbar m$ sont les valeurs propres respectives de $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$.

Dans cette base, la matrice de l'Hamiltonien est structurée en blocs :

$$\langle \alpha j m | \hat{H} | \beta j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle \alpha | \hat{H}^{(j,m)} | \beta \rangle, \tag{B.52}$$

avec $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, et $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots, \pm j$.

Les deux résultats précédents impliquent que les blocs $\hat{H}^{(j,m)}$ sont tous réels et ont donc pour transformations canoniques les transformations orthogonales. Le même raisonnement peut être appliqué dans le cas $\hat{\mathcal{T}}^2 = 1$ avec isotropie complète — toute invariance par renversement du temps avec isotropie complète mène toujours à des blocs de classe orthogonale.

Pour résumer, nous avons vu que la présence d'une invariance par renversement du temps avec $\hat{\mathcal{T}}^2 = -1$ combinée à une symétrie unitaire géométrique additionnelle conduit à des systèmes réduits qui appartiennent soit à la classe unitaire A (par exemple, pour un spin demi-entier avec une seule symétrie géométrique unitaire), soit à la classe orthogonale AI (par exemple, pour un spin demi-entier avec deux symétries géométriques unitaires ou avec une isotropie rotationnelle complète). En revanche, une classe de symétrie complètement nouvelle, avec des transformations canoniques unitaires et symplectiques, émerge lorsqu'on a $\hat{\mathcal{T}}^2 = -1$ sans aucune symétrie géométrique unitaire additionnelle. C'est la classe de symétrie AII.

En général, la réduction d'un système invariant par $\hat{\mathcal{T}}$, avec soit $\hat{\mathcal{T}}^2 = 1$ soit $\hat{\mathcal{T}}^2 = -1$,

combinée à un groupe de symétrie unitaire, conduit à des hamiltoniens sous forme bloc-diagonale (certains blocs pouvant ne pas être indépendants). Chacun de ces blocs appartient alors à l'une des trois classes de symétrie : A, AI ou AII, selon que l'espace correspondant possède une invariance par renversement du temps réduite $\hat{\mathcal{T}}^2_{\text{red}} = \pm 1$, opérant uniquement dans le sous-espace correspondant

B.4 Simulation numérique du modèle TBS

Nous devons désormais réaliser la simulation numérique du *kicked rotor* quantique avec spin 1/2, aussi appelé modèle *TBS symplectique*. Dans ce contexte, l'état du système n'est plus un scalaire, mais un *spinor à deux composantes* :

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_\uparrow(t) \\ \Psi_\downarrow(t) \end{pmatrix}., \tag{B.53}$$

Après N périodes, l'état du système est obtenu par :

$$|\Psi(N)\rangle = \hat{U}(N)|\Psi(0)\rangle, \tag{B.54}$$

avec

$$\hat{U}(N) = [\hat{U}(1)]^N, \tag{B.55}$$

où $\hat{U}(1)$ est l'opérateur d'évolution sur une période. Cet opérateur est défini par :

$$\hat{U}(1) = \hat{U}_{\text{prop}}\,\hat{U}_{\text{kick}}, \tag{B.56}$$

où chaque facteur est une matrice 2×2 agissant dans l'espace de spin. Plus précisément :

$$\hat{U}_{\text{prop}} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2}\,\hat{1}_2\right), \tag{B.57}$$

$$\hat{U}_{\text{kick}} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}V(\hat{x})\right), \tag{B.58}$$

avec un potentiel spin-dépendant donné par :

$$V(\hat{x}) = K\left[\cos(\hat{x})\,\hat{1}_2 + \frac{\mu}{2}\sin(2\hat{x})\,\hat{\sigma}_x + \epsilon\sin(\hat{x})\,\hat{\sigma}_z\right], \tag{B.59}$$

L'opérateur $\hat{U}_{\text{prop}}$ est diagonal dans la base impulsion, et agit indépendamment sur chaque composante de spin. En revanche, $\hat{U}_{\text{kick}}$ est diagonal dans l'espace des positions, et mélange les deux composantes de spin à travers les matrices de Pauli $\hat{\sigma_x}$ et $\hat{\sigma_z}$.

La procédure numérique repose sur l'alternance classique *propagation libre – kick*. On passe dans l'espace des positions par transformée de Fourier rapide (FFT) appliquée à chaque composante, on applique le kick $V(\hat{x})$ sous forme de matrice 2×2 point par point, puis on revient dans l'espace des impulsions via une IFFT, avant d'appliquer la phase cinétique.

L'état initial est également un spinor, que l'on choisit typiquement comme une gaussienne (ou un Dirac) sur une ou sur les deux composantes :

$$\psi(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f(p) \\ f(p) \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad \psi(p,0) = \begin{pmatrix} f(p) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{B.60}$$

Après N kicks, on peut extraire les observables physiques comme la densité totale :

$$|\psi(p)|^2 = |\psi_\uparrow(p)|^2 + |\psi_\downarrow(p)|^2, \tag{B.61}$$

ou la valeur moyenne de de p^2, obtenue en sommant les contributions des deux composantes.

La procédure complète est résumée dans l'algorithme suivant.

Algorithm 2 Simulation du modèle TBS

Initialiser $\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f(p) \\ f(p) \end{pmatrix}$, où $f(p)$ est une Dirac ou une gaussienne normalisée
Calculer $\psi(x) \leftarrow \text{IFFT}[\psi(p)]$
Précalculer les matrices de Floquet $F(x)$ pour chaque position
for chaque réalisation de désordre $\alpha_i = 1 \to N_\alpha$ **do**
    Générer des phases aléatoires $U_\alpha(p) = e^{-2\pi i \alpha(p)}$
    for chaque instant $t = 1 \to N$ **do**
        Appliquer le kick : $\psi(x) \leftarrow F(x) \cdot \psi(x)$
        $\psi(p) \leftarrow \text{IFFT}[\psi(x)]$
        Appliquer l'évolution libre : $\psi(p) \leftarrow U_\alpha(p) \cdot \psi(p)$
        $\psi(x) \leftarrow \text{FFT}[\psi(p)]$
    end for
    Calculer $|\psi(p)|^2 = |\psi_\uparrow(p)|^2 + |\psi_\downarrow(p)|^2$
end for
Moyenner $|\psi(p)|^2$ sur toutes les réalisations α_i
return densité de probabilité totale $|\psi(p)|^2$

Annexe C

Effet du paramètre Φ sur la transition COE–CUE

Nous avons précédemment montré que l'Hamiltonien (4.2), dans le cas particulier $\Omega = 0$, appartient à la classe de symétrie orthogonale. Rappelons que, dans cette configuration, cet Hamiltonien peut être décomposé en deux Hamiltoniens indépendants du kicked rotor sans spin, chacun comportant un décalage de phase $\pm\Phi$ dans le potentiel périodique (4.17). Toutefois, les statistiques spectrales extraites des quasi-énergies montrent un comportement inhabituel : lorsque la phase Φ est choisie comme un multiple impair de $\pi/2N$, les statistiques obtenues deviennent semblables à celles de la classe unitaire, ce qui pourrait induire une interprétation erronée de la symétrie effective du système. Afin de mieux comprendre cette subtilité, rappelons explicitement la forme générale de l'Hamiltonien du kicked rotor décalé en phase :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + K\cos(\hat{x} - \Phi)\sum_n \delta(t-n), \tag{C.1}$$

est naturellement invariant, dans un espace de Hilbert continu, par la transformation de parité spatiale autour du point $x = \Phi$ définie par : $\hat{\mathcal{P}}_\Phi : \hat{x} \to 2\Phi - \hat{x}$, $\hat{p} \to -\hat{p}$.

Lorsqu'on passe à l'espace discret, utilisé pour les simulations numériques, l'espace de Hilbert est tronqué à une grille finie de taille N, avec des positions discrètes définies par :

$$x_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, \ldots, N-1, \tag{C.2}$$

Cette troncature impose des conditions périodiques aux limites spatiales et modifie la manière dont les symétries continues peuvent être réalisées en pratique.

Pour que l'invariance par $\hat{\mathcal{P}}_\Phi$ soit conservée dans l'espace discret, l'image de chaque point discret x_k par la transformation $\hat{\mathcal{P}}_\Phi$ doit tomber exactement sur un autre point discret $x_{k'}$

de la grille. Ceci impose :

$$2\Phi - x_k \equiv x_{k'} \mod 2\pi, \tag{C.3}$$

ce qui mène directement à la condition :

$$\Phi = \frac{m\pi}{N}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{C.4}$$

Dans ce cas précis, l'action de $\hat{\mathcal{P}}_\Phi$ devient une simple permutation des indices k. La Fig. C.1(a) montre explicitement cette situation pour $\Phi = m\pi/N$: la partie fractionnaire des indices images théoriques, notée δ_k, est exactement nulle, indiquant que l'image tombe précisément sur la grille, et la symétrie $\hat{\mathcal{P}}_\Phi$ est donc préservée. Inversement, lorsque

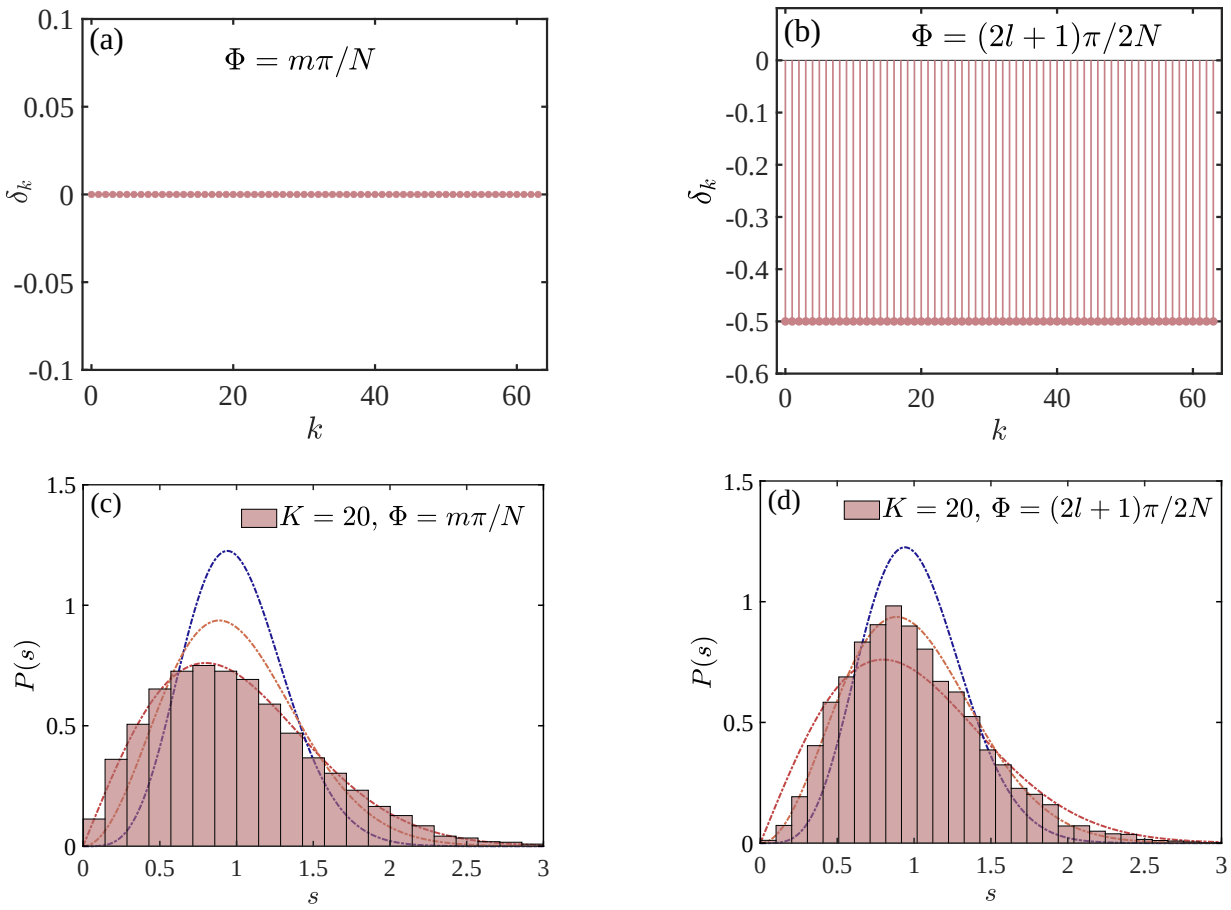


FIGURE C.1 – (a) Partie fractionnaire $\delta_k = k_{\text{ref}} - \text{round}(k_{\text{ref}})$ de l'indice image théorique, où $k_{\text{ref}} = \frac{N(2\Phi - x_k)}{2\pi}$, en fonction de l'indice discret k. Lorsque $\Phi = m\pi/N$, toutes les images tombent exactement sur des points de la grille, d'où $\delta_k = 0$ (symétrie préservée). (b) Même représentation pour $\Phi = (2\ell+1)\pi/(2N)$. Toutes les images sont décalées exactement d'un demi-pas entre les points de la grille, d'où $\delta_k = \pm 0.5$ (symétrie brisée au maximum). (c) et (d) Histogrammes des espacements de niveaux normalisés pour le modèle (C.1), dans les deux cas : $\Phi = m\pi/N$, où la symétrie de parité est préservée (classe orthogonale – COE), et $\Phi = (2l+1)\pi/2N$, où la symétrie est brisée (classe unitaire – CUE).

le paramètre Φ est choisi comme un multiple impair de $\frac{\pi}{2N}$, soit :

$$\Phi = \frac{(2\ell+1)\pi}{2N}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \tag{C.5}$$

la réflexion envoie systématiquement chaque point x_k exactement entre deux points successifs de la grille. La Fig. C.1(b) illustre clairement ce phénomène pour le cas $\Phi = (2\ell+1)\pi/(2N)$: toutes les images sont décalées exactement d'un demi-pas de grille (fraction ± 0.5). Dans ce cas, la symétrie spatiale ne peut plus être représentée exactement sur la grille discrète, ce qui entraîne une rupture maximale de la symétrie.

Ces résultats montrent clairement que :

— Pour $\Phi = m\pi/N$ (avec m entier), la symétrie de parité spatiale est préservée exactement dans l'espace tronqué, ce qui place le modèle (C.1) dans la classe orthogonale (COE), comme illustré par la Fig. C.1(c).

— Pour $\Phi = (2\ell+1)\pi/(2N)$, la symétrie est brisée au maximum, faisant basculer le système dans la classe unitaire (CUE), comme le montre la Fig. C.1(d).

Effets des symétries et des classes d'universalité dans un modèle de rotateur frappé quantique avec couplage spin-orbite

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des effets des symétries et des classes d'universalité dans un modèle de rotateur frappé quantique avec couplage spin-orbite, réalisé comme simulateur de systèmes désordonnés. Dans le régime quantique, le kicked rotor présente une localisation dynamique analogue à la localisation d'Anderson, ainsi que des signatures interférentielles telles que la rétrodiffusion cohérente, le retour à l'origine et la diffusion cohérente vers l'avant. En introduisant un degré de liberté de spin et un couplage spin-orbite synthétique, nous montrons comment la physique bascule vers la classe de symétrie symplectique, caractérisée par une antilocalisation faible et des interférences destructives entre chemins temporellement inversés.

Nous analysons plusieurs observables numériques permettant d'identifier la classe d'universalité réalisée : la dynamique de la probabilité de retour à l'origine, la fonction d'échelle $\beta(g)$ et les statistiques spectrales de l'opérateur de Floquet. Un modèle à deux périodes temporelles, expérimentalement réalisable avec des atomes ultra-froids, est proposé et étudié en détail.

Enfin, en modulant quasi-périodiquement l'amplitude des kicks, nous simulons une dimension effective supplémentaire et mettons en évidence une transition métal–isolant bidimensionnelle dans la classe symplectique. L'exposant critique est extrait par par une analyse d'échelle dynamique et confirme l'universalité de la transition observée.

Mots clés : atomes ultrafroids, kicked rotor, systèmes désordonnées

---

Effects of symmetries and universality classes in a quantum kicked rotor model with spin-orbit coupling

Abstract

This thesis is devoted to the study of symmetry effects and universality classes in a quantum kicked rotor model with spin-orbit coupling, used as a simulator of disordered systems. In the quantum regime, the kicked rotor exhibits dynamical localization analogous to Anderson localization, as well as interference signatures such as coherent backscattering, enhanced return to the origin, and coherent forward scattering. By introducing a spin degree of freedom and a synthetic spin-orbit coupling, we show how the physics shifts toward the symplectic symmetry class, characterized by weak antilocalization and destructive interference between time-reversed paths.

We analyze several numerical observables allowing the identification of the realized universality class: the dynamics of the return probability, the scaling function $\beta(g)$, and the spectral statistics of the Floquet operator. A two-period time-dependent model, experimentally feasible with ultracold atoms, is proposed and studied in detail.

Finally, by quasi-periodically modulating the kick amplitude, we simulate an additional effective dimension and demonstrate a two-dimensional metal–insulator transition in the symplectic class. The critical exponent is extracted using dynamical scaling methods and confirms the universality of the observed transition.

Keywords: ultracold atoms, kicked rotor, disordered systems

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM)
Bâtiment P5 campus Cité Scientifique – 2 Avenue Jean Perrin – 59655 Villeneuve d'Ascq cedex – France