

UNIVERSITÉ LILLE I
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR
L'INGÉNIEUR

Doctorat

Génie électrique

Thomas Henneron

Contribution à la prise en compte des Grandeurs
Globales dans les Problèmes d'Electromagnétisme
résolus avec la Méthode des Eléments Finis

Soutenue le 15 décembre 2004

Devant le Jury composé de:

M. Frédéric Bouillault .	Rapporteur
M. Laurent Krähenbühl	Rapporteur
M. Jean-Pierre Ducreux	Examineur
M. Patrick Dular	Examineur
M. Gérard Meunier	Examineur
M. Stéphane Clénet	Examineur, Co-Directeur de Thèse
M. Francis Piriou	Examineur, Directeur de Thèse

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Mr. le Professeur Francis Piriou, qui m'a accueilli au sein de son équipe au L2EP pour effectuer ces travaux de thèse. Je le remercie plus particulièrement pour sa confiance qu'il m'a accordé dès mon DEA.

De la même manière, je remercie Mr. le Professeur Stéphane Clénet, mon co-directeur de thèse, pour son encadrement de grande qualité, spécialement en ce qui concerne le travail scientifique, et ses qualités humaines.

Je tiens aussi à remercier :

- Monsieur G. Meunier, Directeur de recherche au CNRS, pour avoir accepté de siéger dans mon jury et de l'avoir présidé.
- Monsieur F. Bouillault, Professeur à l'Université Paris Sud et Monsieur L. Krähenbühl, Directeur de recherche au CNRS, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de juger ma thèse en tant que rapporteurs.
- Monsieur P. Dular, Chercheur qualifié FNRS, pour avoir accepté de participer à mon jury et pour les diverses discussions lors des réunions dans le cadre du PAI.
- Monsieur J-P Ducreux, chercheur à EDF Electricité de France, pour avoir accepté d'être dans mon jury.

Je remercie également l'ensemble des enseignants chercheurs et non chercheurs pour les nombreuses discussions constructives en terme de recherche et d'enseignement.

Bien entendu, je n'oublie pas l'ensemble des doctorants du P2 et des autres établissements qui ont contribué à entretenir une ambiance de travail dans la bonne humeur (je ne les cite pas la page ne serait pas assez grande).

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modélisation des problèmes d'électromagnétisme	5
1.1 Introduction	5
1.2 Domaine continu	6
1.2.1 Equations de Maxwell	6
1.2.2 Lois de comportement	7
1.2.3 Conditions aux limites	8
1.2.4 Définition des espaces fonctionnels	9
1.2.5 Diagramme de Tonti	11
1.2.6 Introduction des potentiels	13
1.2.6.1 Problème magnétodynamique	14
1.2.6.2 Problème magnétostatique	16
1.2.6.3 Problème électrocinétique	16
1.3 Domaine discret	17
1.3.1 Discrétisation	17
1.3.1.1 Fonctions d'interpolation	18
1.3.1.2 Opérateurs différentiels discrets	20
1.3.2 Maillage dual	24
1.3.2.1 Définition	24
1.3.2.2 Propriétés	25
1.3.3 Equations de Maxwell discrètes	26
1.3.4 Discrétisation des lois de comportement	27
1.3.5 Relation entre \mathbf{J}_f et $\tilde{\mathbf{J}}_f$	29
1.4 Formulations discrètes des problèmes d'électromagnétisme	29
1.4.1 Discrétisation de la densité de courant	30
1.4.2 Problème magnétodynamique	33

1.4.3	Problème magnétostatique	35
1.4.4	Problème électrocinétique	36
1.4.5	Discrétisation temporelle	36
1.5	Conclusion	38
2	Calcul et imposition de grandeurs globales	39
2.1	Introduction	39
2.2	Présentation du système	40
2.3	Présentation des outils	40
2.3.1	Introduction du champ \mathbf{K}	41
2.3.2	Introduction de la fonction α	41
2.4	Formulations magnétodynamiques	42
2.4.1	Formulation magnétique $\mathbf{A} - \varphi$	42
2.4.1.1	Imposition d'une grandeur électrique	42
2.4.1.2	Imposition d'une grandeur magnétique	46
2.4.1.3	Synthèse	50
2.4.2	Formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$	51
2.5	Exemple magnétodynamique à courant et tension imposée	53
2.5.1	Présentation du système	53
2.5.2	Formulation $\mathbf{A} - \varphi$	55
2.5.3	Formulation $\mathbf{T} - \Omega$	57
2.5.4	Synthèse	59
2.6	Exemple magnétostatique à flux magnétique et force magnétomotrice imposée	60
2.6.1	Présentation du système	60
2.6.2	Comparaison des deux formulations	61
2.6.3	Etude de l'influence du champ \mathbf{K} sur la convergence	62
2.6.4	Synthèse	64
2.7	Couplage d'un modèle élément finis avec un circuit magnétique extérieur	64
2.7.1	Présentation du dispositif étudié	64
2.7.2	Couplage avec la formulation en potentiel scalaire	66
2.7.3	Couplage avec la formulation en potentiel vecteur	67
2.7.4	Résultats	68
2.8	Influence, sur les pertes dans les conducteurs, de l'épanouissement du champ dans l'entrefer	69
2.8.1	Présentation des dispositifs	70

2.8.2	Présentation des modèles	71
2.8.3	Analyse des résultats	72
2.8.3.1	Influence de la fréquence sur la résistance du bobinage	72
2.8.3.2	Influence de l'entrefer sur la résistance du bobinage .	74
2.8.3.3	Paramètres de calcul des modèles	77
2.8.4	Synthèse	77
2.9	Conclusion	78
3	Calcul d'un flux magnétique local	79
3.1	Introduction	79
3.2	Présentation du problème	79
3.3	Cas de la formulation \mathbf{A}	80
3.4	Cas de la formulation Ω	81
3.4.1	Première approche	82
3.4.2	Deuxième approche	82
3.4.3	Troisième approche	83
3.5	Comparaison des différentes méthodes	85
3.5.1	Descriptif du dispositif	85
3.5.2	Modélisation numérique des deux problèmes	86
3.5.3	Localisation des surfaces	87
3.5.4	Flux locaux par la formulation \mathbf{A}	88
3.5.5	Flux locaux par la formulation Ω	89
3.5.6	Temps de calcul	91
3.5.7	Synthèse	92
3.6	Calcul de flux magnétique dans une machine synchrone	92
3.6.1	Présentation de la machine	93
3.6.2	Présentation du modèle	93
3.6.2.1	modélisation des matériaux	93
3.6.2.2	Modélisation numérique	94
3.6.3	Calcul de flux	95
3.6.3.1	Calcul du flux dans les bobinages	95
3.6.3.2	Flux magnétiques locaux de trois dents	97
3.6.4	Synthèse	99
3.7	Conclusion	99
	Conclusion générale	101

A	Formulation $A - \varphi$ par la méthode des résidus pondérés	103
B	Détermination de champs à rotationnel ou divergence donnée	105
	B.1 Arbre d'arêtes	105
	B.2 Arbre de facettes	107
C	Bilan de puissance des grandeurs globales électriques	111
	C.1 Problème d'électromagnétisme	111
	C.2 Bilan de puissance	113
D	Détermination de K en tout point du domaine	117
E	Système à deux types d'inducteur	121

Liste des tableaux

1.1	Numérotation des arêtes	21
1.2	Numérotation des facettes	21
1.3	Numérotation des éléments	22
1.4	Schémas de discrétisation temporelle	37
2.1	Méthodes utilisées pour l'imposition des grandeurs globales dans la formulation $\mathbf{A} - \varphi$	50
2.2	Méthodes utilisées pour l'imposition des grandeurs globales dans la formulation $\mathbf{T} - \Omega$	52
2.3	Pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$; paramètres et résultats du calcul avec une fréquence de $50Hz$	58
2.4	Pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$; paramètres et résultats du calcul avec une fréquence de $50Hz$	59
2.5	Comparaison des paramètres de calcul et des résultats pour les deux formulations	61
2.6	Comparaison des deux formulations magnétostatiques couplées avec un circuit externe	69
2.7	Tension (V) obtenue aux bornes de quatres conducteurs	73
2.8	Paramètres de l'application	77
3.1	Dimensions du système (mm)	85
3.2	Flux, à travers les 5 surfaces, obtenus par la formulation \mathbf{A} ($10^{-7} Wb$)	88
3.3	Ecart en % entre Φ_A et Φ_{AK} pour le problème 1	88
3.4	Comparaison entre les flux de référence et ceux issus de la première approche utilisée dans la formulation Ω ($10^{-7} Wb$)	89
3.5	Comparaison entre les flux de référence et ceux issus de la deuxième approche utilisée dans la formulation Ω ($10^{-7} Wb$)	90
3.6	Comparaison entre les flux de référence et ceux issus de la troisième approche utilisée dans la formulation Ω ($10^{-7} Wb$)	91

3.7	Rapport entre les temps de calcul mesurés pour les trois méthodes utilisées dans la formulation Ω et celui de la formulation \mathbf{A}	92
3.8	Paramètres des simulations	95
3.9	Flux magnétique d'une phase	96
3.10	Flux magnétique à travers les différentes dents obtenus par les deux formulations	98
3.11	Flux magnétique à travers les différentes dents - Comparaison simu- lation/expérience	98

Table des figures

1.1	Domaine d'étude D	5
1.2	Conditions limites Γ_B et Γ_H	8
1.3	Complexe de De Rham	10
1.4	Diagramme de Tonti	12
1.5	Diagramme de Tonti appliqué à la magnétodynamique	12
1.6	Éléments géométriques	17
1.7	Couple de tétraèdres utilisé pour illustrer la définition des matrices d'incidence	20
1.8	Orientation d'une facette \tilde{f} à partir de l'orientation d'une arête a .	24
1.9	Orientation d'une arête \tilde{a} à partir de l'orientation d'une facette f .	24
1.10	Maillage dual barycentrique	25
1.11	Maillage dual Delaunay-Voronoi	25
1.12	Diagramme de Tonti Discret	30
1.13	Exemple d'inducteur bobiné	32
1.14	Répartition de \mathbf{N}	32
1.15	Exemple 1	32
1.16	Exemple 2	32
2.1	Définition de D et D_c	40
2.2	Définition des conditions limites	43
2.3	Interprétation géométrique du terme $\mathbf{G}\alpha_n$	45
2.4	Exemple d'épanouissement du champ dans tout le domaine	47
2.5	Définition des conditions limites	47
2.6	Présentation du système	53
2.7	Vue de face	53
2.8	Vue de haut	53
2.9	Définition du domaine D_α	54
2.10	Distribution de \mathbf{K}	55
2.11	Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ avec $f=50\text{Hz}$	55

2.12	Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{A}-\varphi$ avec $f=1\text{kHz}$	55
2.13	Répartition de la densité de \mathbf{J} en surface à $f=50\text{Hz}$ et à $t=T/4$	56
2.14	Répartition de la densité de courant \mathbf{J} dans le plan de coupe $f=50\text{Hz}$ et à $t=T/4$	56
2.15	Répartition de \mathbf{J} en surface à $f=1\text{kHz}$ et à $t=T/4$	57
2.16	Répartition de \mathbf{J} dans le plan de coupe à $f=1\text{kHz}$ et à $t=T/4$	57
2.17	Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{T}-\Omega$ avec $f=50\text{Hz}$	58
2.18	Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{T}-\Omega$ avec $f=1\text{kHz}$	58
2.19	Définition d'un domaine D_K	60
2.20	Présentation du système	60
2.21	Répartition du module de l'induction \mathbf{B} obtenue par la formulation \mathbf{A}	61
2.22	Construction de \mathbf{K}^{c1}	63
2.23	Répartition de \mathbf{K}^{c1}	63
2.24	Répartition de \mathbf{K}^{c2}	63
2.25	Convergence du gradient conjugué à flux magnétique imposé	64
2.26	Convergence du gradient conjugué à force magnétomotrice imposée	64
2.27	Géométrie des dents - vue de face (mm)	65
2.28	Géométrie des dents - vue de côté (mm)	65
2.29	Modèle numérique	65
2.30	Couplage du modèle élément finis avec le circuit magnétique équivalent	65
2.31	Définition des sous domaines D_2 et D_3	68
2.32	Répartition de \mathbf{B} dans un plan de coupe	69
2.33	Bobinage seul	70
2.34	Introduction du circuit magnétique	70
2.35	Modèle d'une spire	71
2.36	Spire réelle	71
2.37	Modèle du bobinage seul (S1)	72
2.38	Modèle du bobinage et du circuit magnétique (S2)	72
2.39	Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules pour une fréquence de $1kHz$ par la formulation $\mathbf{T}-\Omega$	73
2.40	Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules pour une fréquence de $50kHz$ par la formulation $\mathbf{T}-\Omega$	73
2.41	Influence de la fréquence sur la résistance du bobinage	74
2.42	Illustration de l'effet de frange	75

2.43	Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules sans entrefer par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$	75
2.44	Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules par S_2 avec un entrefer de $2,4mm$ par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$	75
2.45	Evolution de la résistance du bobinage en fonction de la taille de l'entrefer	76
3.1	Définition de la surface S	80
3.2	Exemple en 2D d'une surface S s'appuyant sur le maillage primal	80
3.3	Exemple de calcul d'un flux magnétique local par la formulation \mathbf{A}	81
3.4	Exemple de facette contenue dans la surface S	82
3.5	Exemple de domaines issus de la surface S	83
3.6	Flux à travers les facettes duales	84
3.7	Calcul de \mathbf{K}_{sp} en un point M	84
3.8	Présentation du système	85
3.9	Courbe $\mathbf{B}=\mathbf{f}(\mathbf{H})$ du circuit ferromagnétique	85
3.10	Problème 1 : le flux magnétique circule uniquement dans le circuit magnétique et celui-ci est canalisé dans l'entrefer	86
3.11	Problème 2 : prise en compte des flux de fuite	86
3.12	Problème 1 : répartition spatiale de \mathbf{B}	87
3.13	Problème 2 : répartition spatiale de \mathbf{B}	87
3.14	Localisation des surfaces	87
3.15	Exemple de domaines associés à une surface pour le problème 1	90
3.16	Exemple de domaines associés à une surface pour le problème 2	90
3.17	Stator complet	93
3.18	Stator décomposé	93
3.19	Cycle d'hystérésis	94
3.20	Répartition de \mathbf{B} dans le stator par la formulation Ω	95
3.21	Répartition de \mathbf{B} dans une dent par la formulation Ω	95
3.22	Localisation des spires	97
B.1	Arbre	106
B.2	Co-arbre	106
B.3	Graphe facette-élément	107
B.4	Exemple de domaine D_X	108
B.5	Arbre et co-arbre de facettes	108
B.6	Arbre et co-arbre d'arêtes issus de la transposition facette-élément en arête-noeud	108

C.1	Domaine d'étude D	111
C.2	Domaine d'étude D	113
C.3	Composantes normales	114
D.1	Exemple de spire exploratrice	117
D.2	Définition de \mathfrak{R}'	118
E.1	Définition de D	121

Introduction générale

La modélisation consiste à établir une structure mathématique qui décrit les phénomènes physiques. En magnétodynamique, les équations de Maxwell, qui regroupent le théorème d'Ampère et la loi de Faraday, associées aux lois de comportement des différents milieux, constituent le modèle mathématique. La résolution d'un tel modèle consiste à rechercher les évolutions spatiale et temporelle des champs magnétiques et électriques. Afin d'obtenir une solution, certaines hypothèses doivent être faites. Ainsi, on peut supposer que les lois de comportement liant les champs électriques et magnétiques entre eux ne dépendent pas de la température ou bien encore des contraintes mécaniques. De même, certaines simplifications géométriques peuvent être établies dans le cas de structures complexes. L'ensemble des hypothèses faites sur un système constitue l'erreur de modélisation. La solution retranscrira plus ou moins correctement les répartitions des champs et le comportement d'un système en fonction des simplifications réalisées.

Dans le cas de géométrie simple, une solution analytique peut être obtenue. Pour modéliser des systèmes complexes, la méthode des éléments finis est généralement utilisée. Une discrétisation spatiale et temporelle du domaine d'étude est alors réalisée [5, 41]. Les champs magnétiques et électriques sont ainsi représentés sur des éléments du maillage. Une erreur numérique, plus ou moins importante selon la finesse de la discrétisation, est alors ajoutée à l'erreur de modélisation. Pour résoudre un tel problème, les formulations en potentiels sont alors introduites. Ces potentiels peuvent être de deux natures : scalaires ou vectorielles. Dans le cas général qui correspond à un problème magnétodynamique, deux formulations en potentiels ($\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$) peuvent ainsi être utilisées pour résoudre un même problème. Dans le domaine continu, pour un problème donné, les solutions obtenues par les formulations en potentiels sont identiques. Dans le domaine discret, les propriétés de ces formulations ne sont plus les mêmes, par conséquent les solutions ne sont plus égales.

Dans un problème magnétodynamique, on peut distinguer deux types de terme source : les volumiques et les surfaciques. Le premier type regroupe les aimants

permanents et les inducteurs bobinés dont la répartition de la densité de courant est supposée uniforme et connue. Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été développées pour traiter de la prise en compte de ces sources, en particulier pour le calcul d'une telle densité de courant correctement discrétisée [27, 40, 54, 57, 58, 63]. Au L2EP, une méthode a été développée lors de la thèse Y. Le Menach [60]. Dans le cas d'une alimentation en tension d'un inducteur, l'équation de couplage électrique est alors ajoutée au système [14, 17, 24, 49, 52]. La résolution d'une formulation en potentiel couplée avec cette équation électrique ne pose pas de difficulté majeure.

Le second type de terme source est associé à des conditions que l'on applique sur la frontière comme des différences de potentiels électrique ou magnétique aux bornes de frontières du domaine ou bien encore à des flux magnétique ou électrique les traversant. Certaines de ces grandeurs globales sont intrinsèquement liées aux potentiels introduits. Dans le cas contraire ces grandeurs peuvent être obtenues par différentes méthodes introduisant des relations supplémentaires [47, 51, 58]. Par exemple, dans le cas de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, imposer une tension aux bornes d'un inducteur massif revient à fixer la valeur du potentiel électrique φ sur les sections en contact avec la frontière du domaine. Par contre, la détermination du courant traversant ces sections n'est pas immédiate, une nouvelle équation est alors introduite.

Ainsi, les travaux présentés dans ce mémoire traitent du calcul et de l'imposition des grandeurs globales dans les formulations magnétodynamiques en utilisant les outils développés dans le cas de la magnétostatique. Ce thème de recherche a été effectué dans le cadre du PAI (Pôle d'Attraction Interuniversitaires) qui regroupe plusieurs universités (Liège, Gent, Leuven et Lille). Ce rapport se décompose en trois parties. La première décrit les phénomènes physiques associés à l'électromagnétisme. Dans le domaine continu, le modèle mathématique, basé sur les équations de Maxwell et les différentes lois de comportement, sera rappelé. Puis, nous aborderons la discrétisation spatiale du modèle en utilisant les notions d'opérateurs différentiels discrets. On retrouve ainsi très aisément les deux formulations en potentiels attachées à la magnétodynamique, à la magnétostatique ou à l'électrocinétique.

Dans une seconde partie, nous introduirons différentes fonctions scalaires et vectorielles pour le calcul ou l'imposition des grandeurs globales, ces fonctions sont naturellement définies dans le diagramme de Tonti. Dans le cas de la magnétodynamique, nous développerons ainsi les méthodes utilisées pour calculer ou imposer un courant ou une tension aux bornes d'un conducteur massif et un flux ou une différence de potentiel magnétique aux bornes d'un domaine et cela pour les deux

formulations. Dans le but de comparer et de vérifier la fiabilité des formulations obtenues, deux exemples académiques et un dispositif expérimental seront étudiés.

Dans la dernière partie, contrairement au chapitre II, nous aborderons le calcul d'un flux magnétique "local" à travers une surface interne au domaine . La détermination d'une telle grandeur ne pose pas de difficulté dans le cas d'une formulation en potentiel vecteur. En revanche, pour une formulation en potentiel scalaire, cette grandeur ne peut être facilement déterminée. Ainsi, nous verrons trois approches permettant de calculer un flux magnétique local avec une formulation en potentiel scalaire [7, 47]. Puis, les différentes méthodes seront comparées sur deux exemples académiques. Enfin, les flux magnétiques globaux et locaux d'une machine synchrone originale seront étudiés.

Chapitre 1

Modélisation des problèmes d'électromagnétisme

1.1 Introduction

Dans la suite, on considère un système électrotechnique composé d'air, de matériaux ferromagnétiques et/ou conducteurs et de sources de champ magnétique (inducteurs ou aimants permanents). L'ensemble du système forme le domaine d'étude D de frontière Γ et les milieux conducteurs le domaine D_c avec D_c inclus dans D (fig. C.2). Si le système étudié présente des symétries ou des périodicités géométriques, il est possible de réduire le domaine d'étude D à une partie seulement du système. Dans ce type de problème, les répartitions spatiale et temporelle des champs électriques \mathbf{E} et \mathbf{J} et des champs magnétiques \mathbf{B} et \mathbf{H} sont recherchées dans tout le domaine D et dans un intervalle de temps $[0, T]$. Nous restreindrons notre étude au cas de la magnétodynamique et de l'électromagnétisme statique (magnétostatique et électrocinétique).

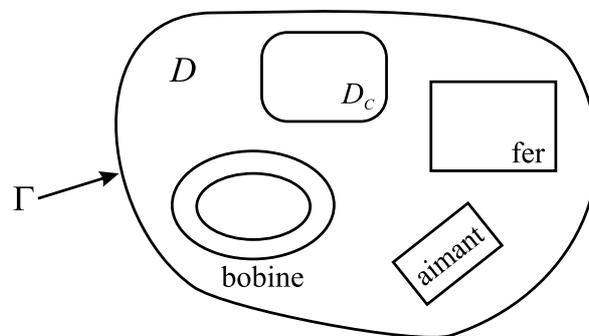


FIG. 1.1 – *Domaine d'étude D*

Ce chapitre se décompose en deux grandes parties. La première est relative au domaine continu. Les équations de Maxwell et les différentes lois de comportement permettant d'obtenir l'évolution des champs magnétiques et électriques seront rappelées. Les conditions aux limites du domaine seront ensuite introduites. Les espaces de définition des opérateurs différentiels et des grandeurs électromagnétiques seront déterminés. Une structure mathématique basée sur deux suites d'espaces regroupant l'ensemble des équations de Maxwell sera établie. Enfin, les formulations en potentiels permettant de résoudre les différents problèmes d'électromagnétisme seront introduites.

La seconde partie est relative au domaine discret dans lequel on effectue la résolution numérique des équations de Maxwell. La discrétisation des espaces fonctionnels sera développée en introduisant un maillage dit "primal" du domaine d'étude D . La discrétisation des opérateurs différentiels sera définie par la notion de matrices d'incidence. Par l'introduction d'un second maillage dit "dual", une structure mathématique analogue au domaine continu sera ensuite déduite, celle-ci se base sur les équations de Maxwell et les lois de comportement discrétisées. Enfin, à partir de ces outils, les différentes formulations magnétodynamiques, magnétostatiques et électrocinétiques en potentiels, permettant de résoudre les problèmes d'électromagnétisme, seront développées.

1.2 Domaine continu

1.2.1 Equations de Maxwell

Les répartitions spatiale et temporelle des champs magnétiques et électriques sont obtenues par les équations de Maxwell [19, 23, 33]:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\mathit{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

avec \mathbf{H} le champ magnétique (A/m), \mathbf{B} l'induction magnétique (T), \mathbf{E} le champ électrique (V/m), \mathbf{D} l'induction électrique (C/m²), \mathbf{J} la densité de courant (A/m²), ρ la densité volumique de charges (C/m³) et t le temps (s).

Dans ce système d'équations, les relations 1.1 et 1.2 expriment le couplage entre

les grandeurs électriques et magnétiques. Dans la plupart des problèmes d'électrotechnique, les courants de déplacement introduits par le terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ sont négligés, le système est alors quasi-stationnaire. Dans ces conditions, on obtient la forme locale du théorème d'Ampère :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.5)$$

ce qui induit la conservation de la densité de courant :

$$\mathbf{div} \mathbf{J} = 0 \quad (1.6)$$

1.2.2 Lois de comportement

Le comportement électrique et magnétique des différents milieux du domaine est pris en compte par les lois de comportement. Celles-ci lient les différents champs magnétiques et électriques entre eux. Ces relations mettent en jeu non seulement les champs eux mêmes mais aussi des variables, comme la température ou bien encore les contraintes mécaniques. On supposera dans la suite ces variables constantes. Ainsi, les lois ne dépendent alors que des champs. Dans un problème d'électrotechnique, la conductivité électrique est généralement supposée constante dans chaque milieu. On obtient alors une relation de la forme :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.7)$$

avec σ la conductivité électrique ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$). Pour le comportement magnétique, si le matériau n'est pas ferromagnétique, le modèle est linéaire de la forme :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (1.8)$$

avec μ_0 la perméabilité de l'air et μ_r la perméabilité relative. Pour les matériaux ferromagnétiques, on peut utiliser des modèles relativement complexes qui prennent en compte le phénomène d'hystérésis [18, 25]. Mais leur introduction dans des modèles numériques conduit à une augmentation du temps de calcul qui peut être acceptable en 2D mais plus du tout en 3D. Aussi on préférera utiliser, dans le cas de matériaux ferromagnétiques doux, une relation de la forme 1.8 avec μ_r qui peut dépendre ou non de \mathbf{H} [11].

Dans le cas des matériaux durs (aimants permanents), le phénomène de rémanence est introduit [30], et on obtient une loi de la forme :

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (1.9)$$

avec \mathbf{B}_r l'induction rémanente et μ_a la perméabilité magnétique de l'aimant qui est supposée constante et proche de la perméabilité de l'air.

Dans le domaine conducteur D_c , tous les champs peuvent être définis. Par contre, dans les zones non conductrices ($\sigma = 0$) où les courants induits sont nuls (seul les courants d'inducteur bobiné \mathbf{J}_s existent (cf paragraphe 1.2.6.1)), le champ électrique \mathbf{E} ne peut alors être défini. Dans ces zones, nous avons à résoudre un problème magnétostatique dont les équations aux dérivées partielles sont de la forme :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (1.10)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.11)$$

1.2.3 Conditions aux limites

La résolution du système composé des équations de Maxwell et des lois de comportement admet une infinité de solutions. Par conséquent, pour assurer l'unicité de la solution, des conditions aux limites du domaine sont imposées.

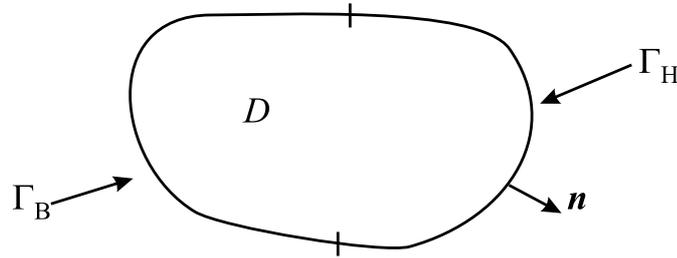


FIG. 1.2 – Conditions limites Γ_B et Γ_H

La frontière Γ du domaine D est décomposée en deux parties complémentaires notées Γ_H et Γ_B telles que $\Gamma_H \cap \Gamma_B = \emptyset$ et $\Gamma_H \cup \Gamma_B = \Gamma$ (fig. 1.2). Sur la frontière Γ_H , on impose des conditions aux limites de la forme :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (1.12)$$

d'après la relation 1.5, on en déduit que :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (1.13)$$

Sur la frontière Γ_B , en général, on impose des conditions aux limites qui dépendent de la nature du milieu en contact avec Γ_B . Si le milieu est conducteur, on impose :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (1.14)$$

d'après l'expression 1.2, on en déduit que :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (1.15)$$

Par contre, si le milieu n'est pas conducteur, on impose seulement des conditions aux limites sur \mathbf{B} (équation 1.15) (\mathbf{E} n'étant pas défini dans les zones non conductrices) [43]. Dans ce cas, la seule condition que l'on peut imposer à \mathbf{E} est que sa composante tangentielle s'écrive $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{grad} \varphi$ avec φ un potentiel scalaire électrique.

1.2.4 Définition des espaces fonctionnels

Afin de résoudre les équations de Maxwell dans le domaine D , les domaines de définition des opérateurs (rotationnel, gradient et divergence) sont à définir [6, 43]. Le domaine D sera supposé contractile et sa frontière Γ connexe pour simplifier l'étude.

On note L^2 et \mathbf{L}^2 respectivement les espaces des fonctions scalaires et des fonctions vectorielles qui sont de carré intégrable dans D . Sur ces deux espaces, on définit le produit scalaire de deux fonctions :

$$\int_D u \cdot v dD \text{ avec } u \in L^2 \text{ et } v \in L^2 \quad (1.16)$$

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dD \text{ avec } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2 \text{ et } \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2 \quad (1.17)$$

Les domaines de définition des opérateurs différentiels sont des sous-espaces de L^2 et \mathbf{L}^2 tels que :

$$E^0 = \{u \in L^2; \mathbf{grad} u \in \mathbf{L}^2\} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{E}^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2; \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2\} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{E}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2; \mathbf{div} \mathbf{u} \in L^2\} \quad (1.20)$$

Comme le domaine D est supposé contractile, nous obtenons [4] :

$$Ker(\mathbf{rot}(\mathbf{E}^1)) = Im(\mathbf{grad}(E^0)) \quad (1.21)$$

$$Ker(\mathbf{div}(\mathbf{E}^2)) = Im(\mathbf{rot}(\mathbf{E}^1)) \quad (1.22)$$

où $Ker(v(E))$ est le noyau de l'opérateur v défini dans l'espace E et $Im(v(E))$ est l'image par l'opérateur v du domaine E . Ces relations traduisent non seulement le fait que $\mathbf{div} \mathbf{rot} = 0$ et $\mathbf{rot} \mathbf{grad} = 0$ mais aussi que si une fonction vectorielle \mathbf{v}_2 appartenant à l'espace \mathbf{E}^2 est à divergence nulle alors il existe une fonction

vectorielle \mathbf{v}_1 de \mathbf{E}^1 tel que $\mathbf{v}_2 = \mathbf{rot} \mathbf{v}_1$. Si le rotationnel de \mathbf{v}_1 est nul, alors une fonction scalaire v_0 de E^0 existe telle que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{grad} v_0$.

Pour prendre en compte les conditions limites sur Γ_B et Γ_H , deux ensembles de sous espaces sont définis par des restrictions des espaces E^0 , \mathbf{E}^1 et \mathbf{E}^2 .

$$E_B^0 = \{u \in E^0; u = 0|_{\Gamma_B}\} \quad E_H^0 = \{u \in E^0; u = 0|_{\Gamma_H}\} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{E}_B^1 = \{\mathbf{u} \in E^1; \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0|_{\Gamma_B}\} \quad \mathbf{E}_H^1 = \{\mathbf{u} \in E^1; \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0|_{\Gamma_H}\} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{E}_B^2 = \{\mathbf{u} \in E^2; \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0|_{\Gamma_B}\} \quad \mathbf{E}_H^2 = \{\mathbf{u} \in E^2; \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0|_{\Gamma_H}\} \quad (1.25)$$

Pour compléter l'ensemble des espaces, deux sous espaces, notés E_B^3 et E_H^3 , sont introduits. Ceux-ci sont les images de \mathbf{E}_B^2 et \mathbf{E}_H^2 par l'opérateur divergence. Chaque série de sous espaces peut être représentée par un diagramme appelé Complexe de De Rham. Le passage d'un sous espace à un autre s'effectue par l'un des opérateurs différentiels (fig. 1.3).

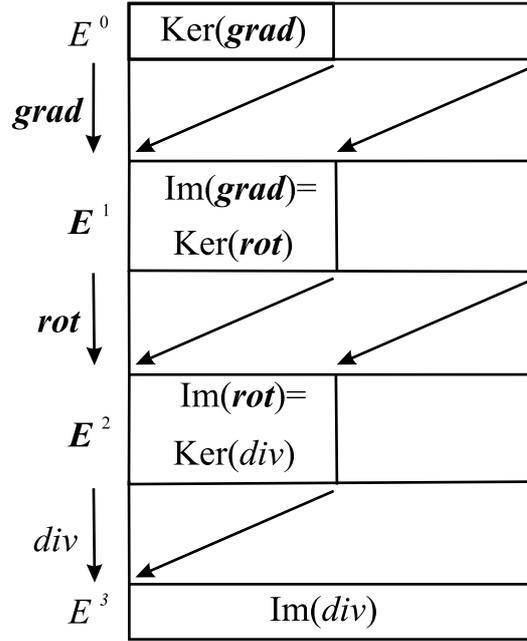


FIG. 1.3 – Complexe de De Rham

Les sous-espaces \mathbf{E}_H^1 et \mathbf{E}_B^2 représentent respectivement les domaines de définition de \mathbf{H} et \mathbf{B} (1.3 et 1.5). De la même manière, les sous-espaces \mathbf{E}_B^1 et \mathbf{E}_H^2 représentent les domaines de définition de \mathbf{E} et \mathbf{J} (1.2 et 1.6).

Remarque : Dans le cas d'un domaine non contractile (présence de trous ou de boucles), les égalités 1.21 et 1.22 ne sont plus vérifiées. On a alors :

$$Ker(\mathbf{rot}(\mathbf{E}^1)) \subset Im(\mathbf{grad}(E^0)) \quad (1.26)$$

$$Ker(\mathbf{div}(\mathbf{E}^2)) \subset Im(\mathbf{rot}(\mathbf{E}^1)) \quad (1.27)$$

Pour étudier de tels domaines, une solution consiste à introduire une ou plusieurs coupures qui "rendent" alors le domaine D contractile [43].

1.2.5 Diagramme de Tonti

Par la notion d'opérateurs différentiels adjoints, un lien peut être établi entre les deux suites de sous espaces E_B^i et E_H^i (avec $i \in \{0,1,2,3\}$) précédemment définis. Ces opérateurs adjoints se déduisent de l'identité de Green appliquée aux opérateurs différentiels. Dans le cas général, l'opérateur adjoint, noté $\tilde{\lambda}$, de λ est défini par la relation :

$$\int_D u \cdot \lambda v dD = \int_D v \cdot \tilde{\lambda} u dD + \int_\Gamma u \star v d\Gamma \quad \text{avec } u \in E^i \text{ et } v \in \tilde{E}^i \quad (1.28)$$

avec \tilde{E}^i l'espace dual de E^i et \star représentant un produit scalaire ou vectoriel des fonctions u et v . En appliquant cette identité de Green aux opérateurs gradient et rotationnel, nous obtenons :

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} v dD = - \int_D v \cdot \mathbf{div} \mathbf{u} dD + \int_\Gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) v d\Gamma \quad (1.29)$$

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} v dD = \int_D v \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} dD + \int_\Gamma (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot v d\Gamma \quad (1.30)$$

Par conséquent, les opérateurs adjoints du gradient et du rotationnel sont respectivement la divergence et le rotationnel. Les intégrales surfaciques des deux précédentes équations introduisent les conditions aux limites du domaine D , celles-ci s'annulent si les conditions sont homogènes à D . Dans ces conditions, les relations 1.29 et 1.30 s'écrivent :

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} v dD = - \int_D v \cdot \mathbf{div} \mathbf{u} dD \quad \text{avec } \mathbf{u} \in \mathbf{E}_B^2 \text{ et } v \in E_H^0 \quad (1.31)$$

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} v dD = \int_D v \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} dD \quad \text{avec } \mathbf{u} \in \mathbf{E}_H^1 \text{ et } v \in \mathbf{E}_B^1 \quad (1.32)$$

avec \mathbf{E}_B^1 et \mathbf{E}_B^2 les espaces duaux à \mathbf{E}_H^1 et E_H^0 . Le même raisonnement peut être appliqué aux espaces \mathbf{E}_H^1 et \mathbf{E}_B^1 ainsi qu'à \mathbf{E}_H^2 et \mathbf{E}_B^2 .

La structure mathématique, définie par les deux suites d'espace, peut accueillir un grand nombre de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette structure peut être représentée géométriquement par le diagramme de Tonti (fig. 1.4) [20].

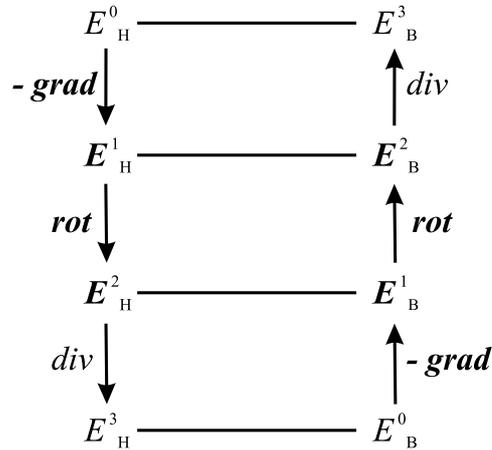


FIG. 1.4 – Diagramme de Tonti

Pour prendre en compte la dérivée par rapport au temps, une troisième dimension est ajoutée au précédent diagramme. Le diagramme de Tonti propre à la magnétodynamique peut alors être obtenu (fig. 1.5). Les lois de comportement sont alors des opérateurs qui relient les deux suites d'espaces E_B^i et E_H^i .

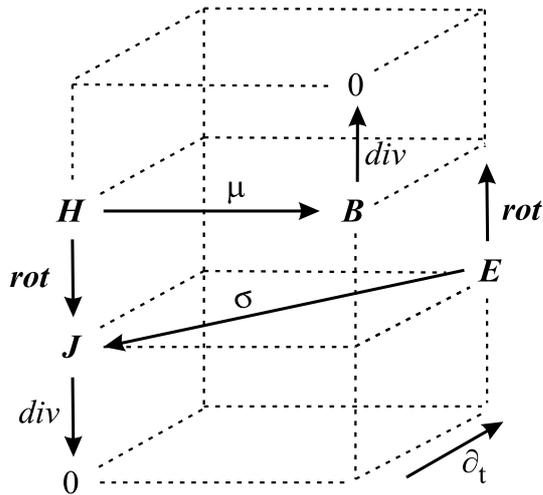


FIG. 1.5 – Diagramme de Tonti appliqué à la magnétodynamique

1.2.6 Introduction des potentiels

La résolution des équations de Maxwell et des lois de comportement associées peut être obtenue en considérant les champs comme inconnues [8, 13, 43, 64]. Néanmoins, on préfère exprimer les champs magnétiques et électriques en fonction de potentiels qui peuvent être scalaire ou vectoriel.

On considère un domaine D contenant un domaine conducteur D_c , supposé contractile, et des inducteurs bobinés. Un inducteur bobiné se comporte à basse fréquence comme un domaine conducteur où la répartition de la densité de courant \mathbf{J}_s est supposée uniforme dans ses sections. Celle-ci est proportionnelle au courant i qui circule dans l'inducteur par :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{N}i \quad (1.33)$$

avec \mathbf{N} un vecteur à divergence nulle qui dépend de la forme de l'inducteur [60]. Pour simplifier les développements mathématiques, nous limiteront les sources de champ électromagnétique à un seul inducteur mais une extension à plusieurs est tout à fait possible comme le montreront les exemples traités. De même, on supposera que le domaine D ne possède pas d'aimants permanents (pas de termes sources introduit par l'induction rémanente \mathbf{B}_r). L'ajout de ce terme ne pose pas non plus de difficultés majeures. Enfin, il est aussi possible d'appliquer une différence de potentiel électrique aux bornes du domaine conducteur ou d'y imposer un courant. L'introduction dans les formulations des différents types de sources constitue un des objectifs de notre travail qui sera traité en détail au chapitre II.

Pour un inducteur bobiné, on définit un champ magnétique source, noté \mathbf{H}_s , tel que $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s$ avec $\mathbf{H}_s \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_H . On note que \mathbf{H}_s n'est pas unique et qu'il existe une infinité de champs sources tels que leur rotationnel soit égal à la densité de courant parcourant l'inducteur bobiné sauf contraintes particulières sur le champ celui-ci peut être défini sur tout le domaine D alors que \mathbf{N} est non nul seulement dans l'inducteur. Dans ces conditions, la forme locale du théorème d'Ampère s'écrit :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ind} + \mathbf{J}_s \quad (1.34)$$

$$\text{avec } \mathbf{J}_{ind} = \sigma \mathbf{E} \text{ et } \mathbf{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s \quad (1.35)$$

où \mathbf{J}_{ind} représente la densité de courant induite dans le domaine conducteur D_c .

1.2.6.1 Problème magnétodynamique

Deux formulations en potentiel peuvent être introduites : la formulation électrique et la formulation magnétique. Ces formulations ne sont définies que dans le domaine conducteur D_c (le terme \mathbf{J}_s est donc nul par contre \mathbf{H}_s ne l'est pas nécessairement).

Formulation électrique $\mathbf{A} - \varphi$

Dans le cas d'une formulation électrique, le champ \mathbf{E} est exprimé en fonction de potentiels. Comme l'induction magnétique est à divergence nulle, d'après la relation 1.22, un potentiel vecteur magnétique, noté \mathbf{A} , peut être introduit tel que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (1.36)$$

avec \mathbf{A} défini dans tout le domaine et appartenant à l'espace E_B^1 .

En utilisant l'expression 1.2 et d'après la relation 1.21, le champ \mathbf{E} peut être exprimé en fonction du potentiel vecteur défini à un gradient près. On a alors :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} \varphi \quad \text{et} \quad \varphi |_{\Gamma_H} = 0 \quad (1.37)$$

avec φ le potentiel scalaire électrique appartenant à l'espace E_B^0 .

En remplaçant le champ magnétique \mathbf{H} et la densité de courant \mathbf{J}_{ind} par leurs expressions en fonction de \mathbf{A} et φ , la forme locale du théorème d'Ampère (1.34) et la loi de conservation de la densité de courant (1.6) s'écrivent :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) = 0 \quad (1.38)$$

$$\mathbf{div} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) = 0 \quad (1.39)$$

Une infinité de vecteurs \mathbf{A} peut être définie tels que leur rotationnel soit égale à l'induction magnétique. Pour assurer l'unicité de ce potentiel, une condition de jauge est introduite telle que la jauge de Coulomb $\mathbf{div} \mathbf{A} = 0$ ou une condition de forme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = 0$ avec \mathbf{W} un champ de vecteur dont les lignes de champs ne forment pas de boucles et sont telles qu'elles relient tous les points du domaine [2, 36].

Formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$

Dans le cas d'une formulation magnétique, le champ \mathbf{H} est exprimé en fonction de potentiels et du champ \mathbf{H}_s . Comme la densité de courant induite est à divergence nulle, un potentiel vecteur électrique, noté \mathbf{T} , peut être introduit tel que (1.22) :

$$\mathbf{J}_{ind} = \mathbf{rot} \mathbf{T} \quad (1.40)$$

avec \mathbf{T} défini dans le domaine conducteur et appartenant à \mathbf{E}_H^1 . Comme le domaine conducteur est supposé contractile, on prend alors $\mathbf{T} = 0$ à l'extérieur de celui-ci et on impose $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0$ sur la frontière Γ_c de D_c .

remarque : Si le domaine conducteur n'est pas contractile et possède un "trou" par exemple. On introduit un vecteur \mathbf{K} et, dans ces conditions, \mathbf{J}_{ind} devient égale à :

$$\mathbf{J}_{ind} = \mathbf{rot}(\mathbf{T} + i\mathbf{K}) \quad (1.41)$$

avec i un coefficient réel associé à un courant. Le vecteur \mathbf{K} est défini dans tout le domaine et le vecteur \mathbf{T} toujours égal à zéro à l'extérieur de D_c . L'utilisation du vecteur \mathbf{K} sera détaillé au chapitre II.

Comme $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ind} + \mathbf{J}_s$, on a :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_s - \mathbf{T}) = 0 \quad (1.42)$$

Le champ \mathbf{H} peut alors être exprimé en fonction du potentiel vecteur \mathbf{T} et du champ \mathbf{H}_s défini à un gradient près (1.21). On a alors :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_c} = 0 \quad \text{et} \quad \Omega |_{\Gamma_H} = 0 \quad (1.43)$$

avec Ω le potentiel scalaire magnétique appartenant à l'espace E_H^0 et défini dans tout le domaine.

En introduisant les relations 1.41 et 1.43 dans la forme locale de la loi de Faraday 1.2 et la loi de conservation de l'induction magnétique 1.3, le système à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega) = -\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_s - \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H}_s \quad (1.44)$$

$$\mathbf{div} \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega) = -\mathbf{div} \mu \mathbf{H}_s \quad (1.45)$$

Comme dans le cas de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, une condition de jauge doit être appliquée sur le potentiel vecteur \mathbf{T} pour assurer l'unicité. Cette jauge n'est définie que dans le domaine conducteur D_c .

1.2.6.2 Problème magnétostatique

Dans les zones où il n'y a pas de courants induits, on est amené à résoudre les équations de la magnétostatique, qui s'écrivent :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad \text{avec} \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (1.46)$$

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (1.47)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.48)$$

Deux formulations en potentiel peuvent être utilisées, celles-ci se déduisent des deux formulations présentées dans le cas de la magnétodynamique.

Dans la formulation \mathbf{A} , d'après 1.3 et 1.22, on a $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$. En utilisant 1.46 et 1.48, l'équation à résoudre est donnée par :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad (1.49)$$

Dans le cas de la formulation Ω , le champ magnétique est fonction du champ source \mathbf{H}_s et du potentiel scalaire magnétique Ω . On a alors :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega \quad (1.50)$$

L'équation à résoudre se déduit de 1.47 et 1.48 telle que :

$$\mathit{div} \mu \mathbf{grad} \Omega = \mathit{div} \mu \mathbf{H}_s \quad (1.51)$$

Remarque : Le couplage entre les équations en potentiel définies dans le domaine conducteur et non conducteur se fait naturellement si on utilise des formulations de même nature comme la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ (resp. $\mathbf{T} - \Omega$) pour le domaine conducteur et la formulation \mathbf{A} (resp. Ω) pour le domaine non conducteur. Il suffit de satisfaire certaines conditions de continuité sur les potentiels [12, 43].

1.2.6.3 Problème électrocinétique

Si les sources sont de types continues, on peut résoudre un problème d'électrocinétique pour obtenir le régime permanent des grandeurs électriques du domaine conducteur. Dans ce cas, le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (1.52)$$

$$\mathit{div} \mathbf{J}_{ind} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (1.53)$$

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.54)$$

Les répartitions de \mathbf{E} et \mathbf{J}_{ind} sont recherchées dans tout le domaine, leurs évolutions sont indépendantes du temps. Deux formulations en potentiel peuvent être utilisées pour résoudre ce type de problème. De la même manière qu'en magnéto-statique, celles-ci se déduisent des formulations magnéto-dynamiques.

Dans la formulation \mathbf{T} , la relation 1.44 devient :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_{ind} = \mathbf{rot} \mathbf{T} \quad (1.55)$$

Et dans la formulation φ , comme le potentiel vecteur magnétique n'est plus introduit, l'équation 1.39 devient :

$$\mathbf{div} \sigma \mathbf{grad} \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi \quad (1.56)$$

1.3 Domaine discret

Les équations de Maxwell peuvent parfois être résolues analytiquement dans le cas de géométries simples. Pour des systèmes complexes, il est nécessaire d'avoir recours à une résolution numérique et donc de discrétiser les équations précédentes [4, 22].

1.3.1 Discrétisation

La discrétisation spatiale du domaine D est réalisée par des volumes élémentaires. Ceux-ci sont de formes simples comme des hexaèdres, tétraèdres ou des prismes [5, 26, 56, 65]. Chaque volume élémentaire, noté D_e , est constitué de n_n^e noeuds, n_a^e arêtes et n_f^e facettes. Le maillage du domaine D est alors formé de l'ensemble de ces entités. On notera n_n , n_a , n_f et n_e respectivement le nombre de noeuds, d'arêtes, de facettes et d'éléments du maillage. Dans la suite, nous considérons un maillage formé exclusivement de tétraèdres (fig. 1.6).

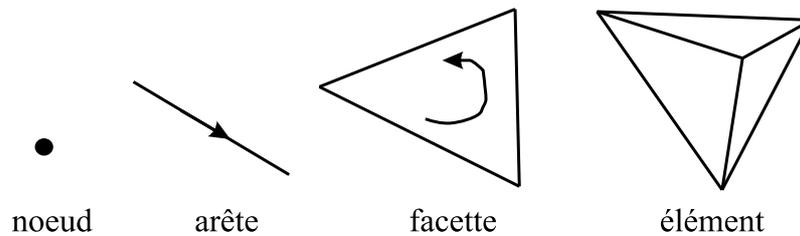


FIG. 1.6 – *Eléments géométriques*

1.3.1.1 Fonctions d'interpolation

Une fonction d'interpolation est associée à chaque entité géométrique (noeud, arête, facette et élément).

A chaque noeud n du maillage, une fonction scalaire w_n est associée. Celle-ci est continue dans tout le domaine D . Cette fonction est égale à 1 au noeud n et 0 sur tous les autres. L'espace généré par ces fonctions est noté W^0 . Par conséquent, si u est une fonction scalaire définie dans W^0 , alors u peut être écrite comme une combinaison linéaire des fonctions w_n :

$$u = \mathbf{U}_n^t \mathbf{W}_n = \sum_{n=1}^{n_n} u_n w_n \quad (1.57)$$

avec \mathbf{W}_n le vecteur des fonctions d'interpolation w_n et \mathbf{U}_n le vecteur des composantes u_n qui correspond à l'ensemble des degrés de liberté associés aux noeuds. Le maillage étant donné (position des noeuds et leurs connectivités), la fonction u de W^0 est parfaitement définie par le vecteur \mathbf{U}_n . On note \mathcal{W}^0 l'espace engendré par \mathbf{U}_n , celui-ci n'est autre que \mathbb{R}^{n_n} que nous notons \mathcal{W}^0 pour alléger les notations. On peut donc indifféremment, comme on le verra par la suite, travailler sur W^0 ou \mathcal{W}^0 .

Chaque arête a est associée à une fonction vectorielle \mathbf{w}_a définie par :

$$\mathbf{w}_a = w_i \mathbf{grad} w_j - w_j \mathbf{grad} w_i \quad (1.58)$$

avec w_i et w_j les fonctions nodales associées aux noeuds i et j de l'arête a . La fonction \mathbf{w}_a est continue sur chaque élément et sa composante tangentielle est continue au passage de chaque facette du maillage. L'espace généré par les fonctions \mathbf{w}_a est noté \mathbf{W}^1 . Si \mathbf{u} est une fonction vectorielle de \mathbf{W}^1 alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_a^t \mathbf{W}_a = \sum_{a=1}^{n_a} u_a \mathbf{w}_a \quad (1.59)$$

avec \mathbf{W}_a le vecteur des fonctions d'interpolation et \mathbf{U}_a l'ensemble des degrés de liberté associé aux arêtes. On définit comme précédemment l'espace \mathcal{W}^1 des vecteurs \mathbf{w}_a . La circulation \mathbf{w}_a est égale à 1 sur l'arête a et 0 sur toutes les autres. En utilisant les propriétés précédentes, la circulation de \mathbf{u} le long de l'arête a' vérifie :

$$\int_{a'} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{a}' = \sum_{a=1}^{n_a} u_a \int_{a'} \mathbf{w}_a \cdot d\mathbf{a}' = u_{a'} \quad (1.60)$$

par conséquent, les composantes de \mathbf{U}_a sont les circulations de \mathbf{u} sur toutes les arêtes du maillage.

De même, chaque facette f est associée à une fonction d'interpolation \mathbf{w}_f égale à :

$$\mathbf{w}_f = 2w_i(\mathbf{grad} w_j \times \mathbf{grad} w_k) + 2w_k(\mathbf{grad} w_i \times \mathbf{grad} w_j) + \quad (1.61)$$

$$2w_j(\mathbf{grad} w_k \times \mathbf{grad} w_i) \quad (1.62)$$

avec w_i , w_j et w_k les fonctions nodales des noeuds i , j et k de la facette f . L'espace généré par les fonctions \mathbf{w}_f est noté \mathbf{W}^2 . Si \mathbf{u} est une fonction de \mathbf{W}^2 alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_f^t \mathbf{W}_f = \sum_{f=1}^{n_f} u_f \mathbf{w}_f \quad (1.63)$$

avec \mathbf{W}_f le vecteur des fonctions d'interpolation et \mathbf{U}_f l'ensemble des degrés de liberté associé aux facettes de maillage. L'espace généré par \mathbf{w}_f est noté \mathcal{W}^2 . La fonction \mathbf{w}_f est continue dans chaque élément du maillage et sa composante normale est conservée à travers chaque facette du maillage. Le flux de \mathbf{w}_f traversant la facette f est égal à 1 et 0 à travers toutes les autres. Le flux de la fonction \mathbf{u} à travers la facette f' vérifie donc :

$$\int_{f'} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{f}' = \sum_{f=1}^{n_f} u_f \int_{f'} \mathbf{w}_f \cdot d\mathbf{f}' = u_{f'} \quad (1.64)$$

par conséquent, les composantes de \mathbf{U}_f sont les flux de \mathbf{u} à travers chaque facette du maillage.

De la même manière, pour chaque élément e , une fonction d'interpolation est associée. Celle-ci est égale à :

$$w_e = \frac{1}{\text{vol}(e)} \quad \text{sur } e \text{ et } 0 \text{ sur } e' \neq e \quad (1.65)$$

avec $\text{vol}(e)$ le volume de l'élément e . L'espace généré par les fonctions w_e est noté W^3 . Si u est une fonction de W^3 alors :

$$u = \mathbf{U}_e^t \mathbf{W}_e = \sum_{e=1}^{n_e} u_e w_e \quad (1.66)$$

avec \mathbf{W}_e le vecteur des fonctions d'interpolation et \mathbf{U}_e l'ensemble des degrés de liberté associé aux éléments. L'espace généré par w_e est noté \mathcal{W}^3 . La densité de la fonction u dans l'élément e' vérifie :

$$\int_{e'} u \cdot de' = \sum_{e=1}^{n_e} u_e \int_{e'} w_e \cdot de' = u_{e'} \quad (1.67)$$

Par conséquent, les composantes u_e sont égales à l'intégrale volumique de u dans chaque élément.

Propriétés

Dans le cas où le domaine d'étude est contractile, on peut montrer que les espaces W^0 , \mathbf{W}^1 , \mathbf{W}^2 et W^3 possèdent les mêmes propriétés que les espaces E^0 , \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et E^3 , à savoir [6]:

$$\text{Ker}(\mathbf{rot}(\mathbf{W}^1)) = \text{Im}(\mathbf{grad}(W^0)) \quad (1.68)$$

$$\text{Ker}(\text{div}(\mathbf{W}^2)) = \text{Im}(\mathbf{rot}(\mathbf{W}^1)) \quad (1.69)$$

1.3.1.2 Opérateurs différentiels discrets

En utilisant la notion d'incidence, des opérateurs différentiels "discrets" peuvent être définis [5, 20, 38]. Il s'agit d'opérateurs matriciels dont la construction est basée sur les connexions entre les différentes entités géométriques que sont les noeuds, les arêtes, les facettes et les volumes. Dans la suite, un couple de tétraèdres est utilisé pour illustrer les développements concernant les opérateurs différentiels discrets (fig. 1.7). L'exemple traité comporte 5 noeuds, 9 arêtes et 7 facettes.

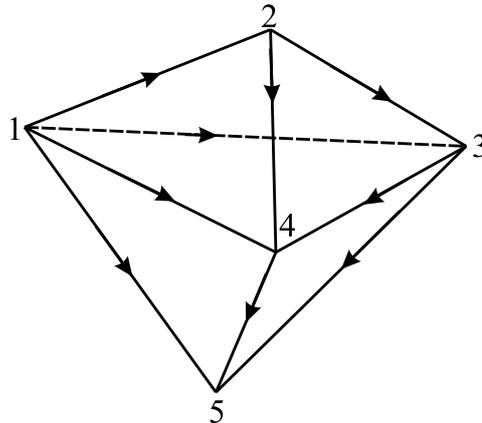


FIG. 1.7 – Couple de tétraèdres utilisé pour illustrer la définition des matrices d'incidence

Incidence noeud-arête

Les arêtes sont des éléments géométriques qui sont orientés de manière arbitraire. On peut choisir par exemple, une orientation du noeud ayant l'indice le plus petit à celui ayant l'indice le plus grand. La numérotation des arêtes en fonction des noeuds, pour l'exemple de la figure 1.7, est donnée par le tableau 1.1.

Par définition, l'incidence g_{an} d'un noeud n sur une arête a est égale à -1 si le noeud n est l'origine de l'arête a , 1 si n est l'extrémité de a ou 0 si n n'appartient

arêtes	1	2	3	4	5	6	7	8	9
noeuds	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	2,4	3,4	3,5	4,5

TAB. 1.1 – Numérotation des arêtes

pas à a . On définit ainsi la matrice incidence \mathbf{G} de dimension $n_a \times n_n$ des coefficients $(g_{an})_{(1 \leq a \leq n_a \text{ et } 1 \leq n \leq n_n)}$. Pour l'exemple considéré, on obtient la matrice \mathbf{G} suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

Considérons maintenant deux fonctions, l'une scalaire, notée u_n et l'autre vectorielle, notée \mathbf{u}_a , appartenant respectivement à W^0 et \mathbf{W}^1 , telles que $u_a = \mathbf{grad} u_n$. En reprenant les notations introduites dans la partie 1.3.1.1, on peut montrer que :

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{G}U_n \quad (1.71)$$

avec $\mathbf{U}_a \in \mathcal{W}^1$ et $U_n \in \mathcal{W}^0$. La matrice \mathbf{G} peut donc être considéré comme l'opérateur discret du gradient.

Incidence arête-facette

Les facettes sont également des éléments géométriques orientés. L'orientation d'une facette peut être donnée, par convention, par le sens des noeuds croissants dans le cas de facettes triangulaires. Cette convention ne s'applique qu'avec un nombre de noeuds par facette inférieur ou égal à 3. La numérotation des facettes en fonction des noeuds est donnée dans le tableau 1.2.

facettes	1	2	3	4	5	6	7
noeuds	1,2,3	1,2,4	1,3,4	1,3,5	1,4,5	2,3,4	3,4,5

TAB. 1.2 – Numérotation des facettes

L'incidence r_{fa} d'une arête a par rapport à une facette f est égale à 1 si, en parcourant la frontière de la facette dans le sens positif, l'arête a est parcourue dans son sens positif, à -1 si le sens de a est opposé et à 0 si a n'appartient pas à f . A l'aide des coefficients $(r_{fa})_{(1 \leq f \leq n_f \text{ et } 1 \leq a \leq n_a)}$, on définit une matrice \mathbf{R} de dimension $n_f \times n_a$. Pour notre exemple, cette matrice est égale à :

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.72)$$

Considérons maintenant une fonction vectorielle, notée \mathbf{u}_f , appartenant à \mathbf{W}^2 , tel que $\mathbf{u}_f = \mathbf{rot} \mathbf{u}_a$. En reprenant les notations de la partie 1.3.1.1, on peut montrer que :

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{R}\mathbf{U}_a \quad (1.73)$$

avec $\mathbf{U}_f \in \mathcal{W}^2$ et donc \mathbf{R} l'opérateur discret du rotationnel.

Incidence facette-élément

La numérotation des éléments en fonction des noeuds pour l'exemple de la figure 1.7 est donnée par le tableau 1.3.

éléments	1	2
noeuds	1,2,3,4	1,3,4,5

TAB. 1.3 – Numérotation des éléments

L'incidence d_{ef} d'une facette f sur un élément e est égale à 1 ou -1 selon l'orientation de la normale à la facette ou 0 si f n'appartient pas à e . On peut définir ainsi la matrice \mathbf{D} des coefficients $(d_{ef})_{(1 \leq e \leq n_e \text{ et } 1 \leq f \leq n_f)}$. Pour l'exemple traité, la matrice d'incidence \mathbf{D} de dimension $n_e \times n_f$ est alors égale à :

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.74)$$

Pour une fonction scalaire u_e appartenant à W^3 et définie telle que $u_e = \text{div } \mathbf{u}_f$. On peut montrer que :

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{D}\mathbf{U}_f \quad (1.75)$$

avec $\mathbf{U}_e \in \mathcal{W}^3$ et \mathbf{D} l'opérateur discret de la divergence.

Propriétés

Les opérateurs discrets possèdent des propriétés similaires à celles des opérateurs différentiels du domaine continu [5]. Dans le cas d'un domaine contractile, les relations 1.21 et 1.22 restent valables sur les espaces \mathcal{W}^i ($i \in \{0,1,2,3\}$), celles-ci s'écrivent :

$$\text{Ker}(\mathbf{R}(\mathcal{W}^1)) = \text{Im}(\mathbf{G}(\mathcal{W}^0)) \quad (1.76)$$

$$\text{Ker}(\mathbf{D}(\mathcal{W}^2)) = \text{Im}(\mathbf{R}(\mathcal{W}^1)) \quad (1.77)$$

On a alors $\mathbf{D}\mathbf{R} = 0$, cette propriété reste vraie même si \mathbf{D} n'est pas contractile. Inversement, si \mathbf{U}_f appartenant à \mathcal{W}^2 est à divergence nulle alors il existe un vecteur \mathbf{U}_a dans \mathcal{W}^1 tel que $\mathbf{U}_f = \mathbf{R}\mathbf{U}_a$.

Remarque : Du point de vue pratique, une méthode basée sur une technique d'arbre peut être utilisée pour déterminer le vecteur \mathbf{U}_a connaissant le vecteur \mathbf{U}_f (annexe B.1). De la même manière, si le rotationnel de \mathbf{U}_a est nul, il existe un vecteur \mathbf{U}_n dans \mathcal{W}^0 tel que $\mathbf{U}_a = \mathbf{G}\mathbf{U}_n$ et on a également $\mathbf{R}\mathbf{G}\mathbf{U}_n = 0$.

On peut maintenant proposer une écriture des équations de Maxwell dans le domaine discret. Ainsi, d'après ce qui précède, les équations 1.2 et 1.3 peuvent être écrites sous la forme :

$$\mathbf{R}\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{B}_f}{\partial t} \quad (1.78)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{B}_f = 0 \quad (1.79)$$

avec \mathbf{E}_a une fonction de $\mathcal{W}^1 \times [0, T]$ (les coefficients du vecteur \mathbf{E}_a sont des fonctions scalaires dépendantes du temps qui représentent les circulations du champ électrique sur les arêtes du maillage) et \mathbf{B}_f une fonction de $\mathcal{W}^2 \times [0, T]$ (les coefficients du vecteur \mathbf{B}_f sont des fonctions scalaires dépendantes du temps qui représentent le flux de l'induction magnétique à travers les facettes du maillage).

1.3.2 Maillage dual

Il n'est pas aisé d'obtenir simultanément la vérification de toutes les équations de Maxwell sur un même maillage. Aussi, il peut être utile, comme on le verra par la suite, d'introduire un second maillage dit dual et noté \widetilde{M} que l'on construit à partir du maillage M que l'on qualifera de primal [9, 22].

Dans la suite, nous allons donc développer la construction du maillage dual à partir du maillage primal. Ensuite, nous déclinons quelques propriétés de ce couple de maillages en particulier concernant les opérateurs discrets introduits précédemment.

1.3.2.1 Définition

A chaque entité géométrique du maillage primal on fait correspondre une entité géométrique du maillage dual: à un noeud primal n de M , on associe un élément dual \tilde{e} de \widetilde{M} , à une arête primal a une facette duale \tilde{f} , à une facette f une arête \tilde{a} et à un élément e un noeud \tilde{n} .

Chaque arête a de M ne doit traverser qu'une seule facette \tilde{f} de \widetilde{M} et vice versa et chaque noeud n de M est placé à l'intérieur d'un élément \tilde{e} de \widetilde{M} et inversement. L'orientation de chaque entité de \widetilde{M} est déduite de l'orientation des entités primales. Par exemple, l'application de la règle de la main droite permet de déduire l'orientation d'une facette \tilde{f} à partir de l'orientation de l'arête a . L'illustration de ces orientations est donnée par les figures 1.8 et 1.9.

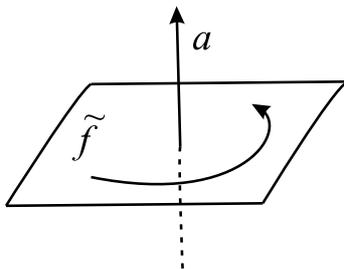


FIG. 1.8 – Orientation d'une facette \tilde{f} à partir de l'orientation d'une arête a

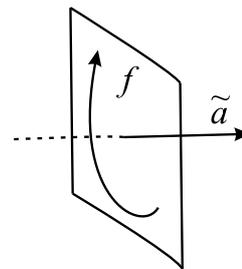
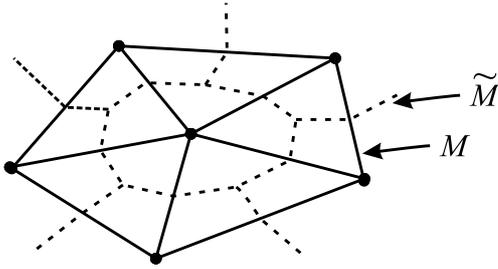
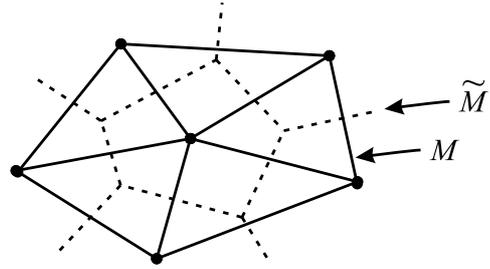


FIG. 1.9 – Orientation d'une arête \tilde{a} à partir de l'orientation d'une facette f

La définition précédente ne donne que le nombre d'entités géométriques duales et leurs connectivités. Pour définir complètement le maillage \widetilde{M} , il est nécessaire de positionner les noeuds, les arêtes, les facettes et les éléments. Différentes techniques peuvent être alors utilisées. Dans la littérature, nous trouvons des maillages duaux barycentriques ou Delaunay-Voronoi. Les maillages duaux barycentriques se basent sur le barycentre de chaque entité du maillage primal, une arête \tilde{a} traverse une

facette f en son barycentre et un noeud dual se situe au barycentre d'un élément primal, et inversement. Pour les maillages duaux Delaunay-Voronoi, les arêtes duales traversent les facettes primales perpendiculairement en leurs milieux. Pour illustrer ces deux types de maillage dual, un exemple 2D est donné par les figures 1.10 et 1.11.

FIG. 1.10 – *Maillage dual barycentrique*FIG. 1.11 – *Maillage dual Delaunay-Voronoi*

Remarques : Il est à noter que les éléments générés pour un maillage dual sont des polyèdres qui peuvent être de formes complexes surtout avec un maillage tétraédrique. Un cas particulier est un maillage formé d'hexahédres réguliers qui conduit à un maillage dual également hexahédrique. Cette propriété a été mise à profit dans la méthode d'intégration finie. Dans le cas de la méthode des éléments finis, le maillage dual est implicite et donc non construit, celui-ci s'apparente à un maillage dual barycentrique. Cet aspect sera plus détaillé par la suite.

1.3.2.2 Propriétés

Comme pour le maillage primal, une fonction d'interpolation est associée à chaque entité duale. Des espaces discrets sont également générés par ces fonctions. On a alors \widetilde{W}^0 , \widetilde{W}^1 , \widetilde{W}^2 et \widetilde{W}^3 les espaces générés respectivement par les fonctions nodales, d'arête, de facette et de volume du maillage dual et $\widetilde{\mathcal{W}}^0$, $\widetilde{\mathcal{W}}^1$, $\widetilde{\mathcal{W}}^2$ et $\widetilde{\mathcal{W}}^3$ les espaces générés par les degrés de liberté associés aux noeuds, arêtes, facettes et éléments duaux. Ces espaces ont les mêmes propriétés que ceux définis par le maillage primal.

Des matrices d'incidence sont également introduites par les différentes interconnexions des entités duales. On notera $\widetilde{\mathbf{G}}$, $\widetilde{\mathbf{R}}$ et $\widetilde{\mathbf{D}}$ respectivement les opérateurs différentiels discrets du gradient, du rotationnel et de la divergence. De même, les propriétés des opérateurs discrets 1.76 et 1.77 restent valable sur le maillage dual.

Comme l'orientation des entités duales est déduite de l'orientation des entités primales, des propriétés entre les opérateurs discrets de M et \widetilde{M} peuvent être démontrées, on a alors :

$$\mathbf{G} = -\widetilde{\mathbf{D}}^t \quad (1.80)$$

$$\mathbf{R} = \widetilde{\mathbf{R}}^t \quad (1.81)$$

$$\mathbf{D} = -\widetilde{\mathbf{G}}^t \quad (1.82)$$

1.3.3 Equations de Maxwell discrètes

Étant donné que \mathbf{E} et \mathbf{B} sont discrétisés sur le maillage primal, dans la suite, nous discrétisons le champ magnétique \mathbf{H} et la densité de courant \mathbf{J} sur le maillage dual. Ce choix est arbitraire d'autant plus que le maillage dual de \widetilde{M} est le maillage primal M lui même. Une inversion peut donc aisément être effectuée. On définit alors \mathbf{B}_f les degrés de liberté associés aux flux de \mathbf{B} à travers toutes les facettes de M , \mathbf{E}_a les degrés de liberté associés aux circulations de \mathbf{E} sur toutes les arêtes de M , $\widetilde{\mathbf{H}}_a$ les degrés de liberté associés aux circulations de \mathbf{H} sur toutes les arêtes de \widetilde{M} et $\widetilde{\mathbf{J}}_f$ les degrés de liberté associés aux flux de \mathbf{J} à travers toutes les facettes de \widetilde{M} . En utilisant les opérateurs discrets des deux maillages, les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme :

$$\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{H}}_a = \widetilde{\mathbf{J}}_f \quad (1.83)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{B}_f}{\partial t} \quad (1.84)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{B}_f = 0 \quad (1.85)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{J}}_f = 0 \quad (1.86)$$

En ce qui concerne les conditions limites, celles-ci sont imposées sur les suites d'espaces discrets des maillages primal et dual en fonction des champs discrétisés. Dans notre cas, l'induction magnétique est projetée sur le maillage primal, par conséquent, la condition de type Γ_B est associée à la suite d'espace de M . On définit ainsi les espaces \mathcal{W}_B^i par analogie avec les espaces W_B^i , \mathcal{W}_B^2 est alors un sous espace de \mathcal{W}^2 regroupant l'ensemble des vecteurs dont les coefficients correspondant aux facettes de Γ_B sont nuls. En effet, tout vecteur de \mathcal{W}_B^2 conduit bien à un champ discret \mathbf{U}_f de \mathcal{W}_B^2 à flux nul à travers Γ_B . De la même manière, sur la suite d'espaces discrets du maillage dual est associée la condition limite de type Γ_H . En introduisant la projection des champs et des potentiels dans les espaces discrets, nous obtenons :

- pour la maillage primal :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \mathbf{G} & & \mathbf{R} & & \mathbf{D} \\
\mathcal{W}_B^0 & \longrightarrow & \mathcal{W}_B^1 & \longrightarrow & \mathcal{W}_B^2 & \longrightarrow & \mathcal{W}_B^3 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & \mathbf{E}_a & & \mathbf{B}_f & &
\end{array}$$

- pour la maillage dual :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \tilde{\mathbf{G}} & & \tilde{\mathbf{R}} & & \tilde{\mathbf{D}} \\
\tilde{\mathcal{W}}_H^0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{W}}_H^1 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{W}}_H^2 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{W}}_H^3 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & \tilde{\mathbf{H}}_a & & \tilde{\mathbf{J}}_f & &
\end{array}$$

1.3.4 Discrétisation des lois de comportement

La discrétisation des équations de Maxwell étant établie, il nous reste maintenant à discrétiser les lois de comportement. Dans le domaine continu, nous avons des relations "locales". En effet, si on connaît \mathbf{H} en un point d'un matériau ferromagnétique doux, on peut calculer \mathbf{B} en ce point connaissant la perméabilité μ . Dans le domaine discret, les champs ne sont pas donnés localement mais plutôt globalement en terme de circulation ou de flux le long d'un nombre fini d'arêtes et de facettes, il faut donc réécrire les lois de comportement connues dans le domaine continu dans le domaine discret [9, 21, 39, 42, 55]. Ainsi, il faut trouver des relations qui lient les différentes grandeurs magnétiques et électriques discrétisées : $\tilde{\mathbf{H}}_a$ avec \mathbf{B}_f et \mathbf{E}_a avec $\tilde{\mathbf{J}}_f$.

Dans la bibliographie, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour obtenir ces relations. A titre d'exemple, nous allons déterminer une loi de comportement "discrète" possible liant $\tilde{\mathbf{H}}_a$ et \mathbf{B}_f dans le cas d'un problème magnétostatique linéaire en se basant sur un calcul d'énergie magnétique. Dans le domaine continu, l'énergie magnétique W_{mag} stockée dans un matériau caractérisé par une loi de comportement linéaire $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ est déduite de la relation suivante :

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{H} \mathbf{B}^t dD = \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \mathbf{B}^t dD \quad (1.87)$$

en remplaçant \mathbf{B} par sa forme discrète (1.63), l'expression devient :

$$W_{mag}^1 = \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_f^t \mathbf{W}_f (\mathbf{B}_f^t \mathbf{W}_f)^t dD = \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_f^t \mathbf{W}_f \mathbf{W}_f^t \mathbf{B}_f dD \quad (1.88)$$

On introduit alors la matrice de masse $\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}$, de dimension $n_f \times n_f$, telle que ces coefficients $m_{ff}^{\mu^{-1}}$ s'écrivent :

$$m_{ff}^{\mu^{-1}} = \int_D \frac{1}{\mu} \mathbf{w}_f \mathbf{w}_{f'} dD \quad \text{avec } 1 \leq f \leq n_f \quad \text{et } 1 \leq f' \leq n_f \quad (1.89)$$

L'énergie magnétique s'écrit alors :

$$W_{mag}^1 = \frac{1}{2} \mathbf{B}_f^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f \quad (1.90)$$

Une autre manière d'introduire l'énergie magnétique dans le domaine discret est de considérer que celle-ci est donnée par :

$$W_{mag}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B}_f \widetilde{\mathbf{H}}_a^t \quad (1.91)$$

Si l'on souhaite que W_{mag}^1 et W_{mag}^2 soient égaux pour tout vecteur \mathbf{B}_f , on a alors :

$$\widetilde{\mathbf{H}}_a = \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f \quad (1.92)$$

De cette manière, une loi de comportement liant $\widetilde{\mathbf{H}}_a$ et \mathbf{B}_f est établie.

Il est également possible de déterminer une loi de comportement discrète si on connaît les fonctions d'interpolation sur le maillage dual. Une démarche similaire à celle présentée précédemment est utilisée, l'énergie magnétique est alors exprimée en fonction du champ magnétique (équation 1.87). Cette démarche conduit à :

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{M}_{aa}^{\mu} \widetilde{\mathbf{H}}_a \quad (1.93)$$

$$m_{aa}^{\mu} = \int_D \mu \widetilde{\mathbf{w}}_a \widetilde{\mathbf{w}}_{a'} dD \quad \text{avec } 1 \leq a \leq n_{\bar{a}} \quad \text{et } 1 \leq a' \leq n_{\bar{a}} \quad (1.94)$$

avec \mathbf{M}_{aa}^{μ} de dimension $n_{\bar{a}} \times n_{\bar{a}}$ de \widetilde{M} .

De la même manière, en se basant sur un calcul d'énergie électrique, la relation liant \mathbf{E}_a et $\widetilde{\mathbf{J}}_f$ est donnée par :

$$\widetilde{\mathbf{J}}_f = \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{E}_a \quad (1.95)$$

avec \mathbf{M}_{aa}^{σ} , de dimension $n_a \times n_a$ de M , dont les coefficients m_{aa}^{σ} sont donnés par :

$$m_{aa}^{\sigma} = \int_D \sigma \mathbf{w}_a \mathbf{w}_{a'} dD \quad \text{avec } 1 \leq a \leq n_a \quad \text{et } 1 \leq a' \leq n_a \quad (1.96)$$

Si les fonctions d'interpolation sont linéairement indépendantes (ce qui est le cas pour celles définies en 1.3.1.1) alors ces matrices, dites de masse, sont inversibles. On peut donc ainsi indifféremment lier \mathbf{B}_f à $\widetilde{\mathbf{H}}_a$ (respectivement \mathbf{E}_a à $\widetilde{\mathbf{J}}_f$) et inversement.

1.3.5 Relation entre \mathbf{J}_f et $\tilde{\mathbf{J}}_f$

Pour les besoins de la résolution numérique, il est nécessaire d'avoir l'expression de la densité de courant $\tilde{\mathbf{J}}$ dans $\widetilde{\mathbf{W}}^2$ sur le maillage dual. En général, on dispose d'une expression de la densité \mathbf{J} dans \mathbf{W}^2 . Dans la suite, on propose une méthode pour obtenir $\tilde{\mathbf{J}}$ à partir de \mathbf{J} . Une solution consiste à employer une approche similaire à celle employée pour la discrétisation des lois de comportement basée sur la conservation de l'énergie. En exprimant de nouveau l'énergie magnétique en fonction du potentiel vecteur \mathbf{A} de \mathbf{W}^1 et que l'on calcule \mathbf{J} dans \mathbf{W}^2 , nous avons :

$$W_{mag}^1 = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{A} \mathbf{J}^t dD = \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\mu} \mathbf{A}_a^t \mathbf{W}_a \mathbf{W}_f^t \mathbf{J}_f dD \quad (1.97)$$

La matrice de masse \mathbf{M}_{af} est alors introduite telle que :

$$W_{mag}^1 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_a^t \mathbf{M}_{af} \mathbf{J}_f \quad \text{avec} \quad m_{af} = \int_D \mathbf{w}_a \mathbf{w}_f^t dD \quad (1.98)$$

De même, l'énergie magnétique W_{mag}^2 en fonction de \mathbf{A}_a et $\tilde{\mathbf{J}}_f$ peut être écrite sous la forme :

$$W_{mag}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{A}_a \tilde{\mathbf{J}}_f^t \quad (1.99)$$

Par identification, la relation donnant $\tilde{\mathbf{J}}_f$ en fonction de \mathbf{J}_f est obtenue. On a alors :

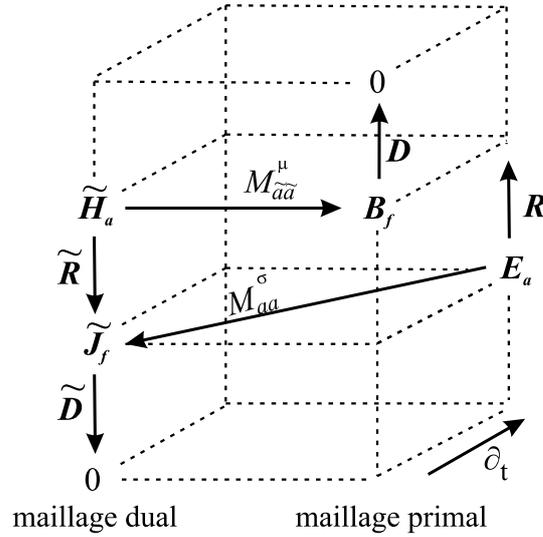
$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \mathbf{M}_{af} \mathbf{J}_f \quad (1.100)$$

Dans ce cas, W_{mag}^1 et W_{mag}^2 sont alors bien égaux. On constate que la matrice \mathbf{M}_{af} n'est pas inversible comme cela été le cas pour les lois de comportement.

Avec les opérateurs discrets ne sont pris en compte que les connectivités et orientations des entités géométriques, ici avec les matrices précédemment définies, la métrique (taille des éléments, loi de comportement,...) intervient.

1.4 Formulations discrètes des problèmes d'électromagnétisme

En utilisant les équations de Maxwell discrétisées et les matrices de masse, un diagramme de Tonti discret peut être obtenu (fig. 1.12). Celui-ci est la reproduction dans le domaine discret du diagramme de Tonti associé au domaine continu.

FIG. 1.12 – *Diagramme de Tonti Discret*

Sur ce diagramme, nous pouvons remarquer que les matrices de masse "font le lien" entre les suites d'espaces définis sur le maillage primal et le maillage dual.

Dans la suite, en utilisant les matrices d'incidence et de masse, nous développerons les formulations discrètes en potentiels permettant de résoudre des problèmes magnétodynamiques, magnétostatiques et électrocinétiques. Nous nous plaçons dans les mêmes conditions qu'au paragraphe 1.2.6. Nous rappelons qu'un domaine conducteur D_c , supposé contractile, est contenu dans le domaine D et que la seule source de champs est constituée d'un inducteur bobiné dont la densité de courant est noté \mathbf{J}_s . Dans ces conditions, comme dans le domaine continu, la forme locale du théorème d'Ampère s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{J}}_{find} + \tilde{\mathbf{J}}_{fs} \quad (1.101)$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbf{J}}_{find} = M_{aa}^\sigma \mathbf{E}_a, \quad \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_{as} = \tilde{\mathbf{J}}_{fs} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{J}}_{fs} = M_{af} \mathbf{J}_{fs} \quad (1.102)$$

avec $\tilde{\mathbf{J}}_{find}$ l'ensemble des flux de la densité de courant induite à travers les facettes duales de D_c , $\tilde{\mathbf{J}}_{fs}$ l'ensemble des flux de \mathbf{J}_s à travers les facettes de $\tilde{\mathbf{M}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}_{as}$ l'ensemble des circulations du champ source \mathbf{H}_s sur les arêtes duales.

1.4.1 Discrétisation de la densité de courant

Selon le besoin de la formulation choisie, la densité de courant \mathbf{J}_s est soit discrétisée sur le maillage primal ou soit sur le maillage dual. Dans le cas où l'on souhaite

avoir la densité de courant sur le maillage dual, la répartition de densité de courant \mathbf{J}_s est déterminée sur le maillage primal puis projetée sur le dual par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{M}_{af} .

Dans la littérature, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour le calcul de la densité de courant \mathbf{J}_s pour un inducteur de forme donnée. Cela peut s'effectuer directement, par l'intermédiaire d'un potentiel ou bien encore par un champ source \mathbf{H}_s tel que $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s$ [54]. Par cette relation, la densité de courant est implicitement conservée. Dans le cas d'un inducteur bobiné de forme simple, la densité \mathbf{J}_s peut être déterminée analytiquement. Pour des inducteurs filaires, la loi de Biot et Savart peut être utilisée pour le calcul d'un champ source. Par contre, pour des inducteurs volumiques, cette méthode s'avère être inadaptée. Néanmoins, celle-ci permet de prendre en compte des inducteurs sans les mailler explicitement [29, 40].

Pour d'autres méthodes, un potentiel vecteur est calculé en minimisant la quantité $(\mathbf{rot} \mathbf{H}_s - \mathbf{J}_s)^2$ dans un sous-domaine de D par un calcul éléments finis [27, 63]. Celui-ci doit évidemment contenir l'inducteur tout en ne contenant pas de "trou". Dans le cas d'inducteurs bobinés de forme complexe, la détermination automatique de ce sous-domaine peut être difficile à construire, dans ce cas, le calcul de \mathbf{H}_s s'effectue dans tout le domaine.

Il a aussi été proposé des méthodes ayant recours à une résolution par un calcul éléments finis d'un problème d'électrocinétique [57, 58]. En considérant une conductivité électrique tensorielle, une densité \mathbf{J}_s , à répartition uniforme dans l'inducteur, peut être déterminée [44].

D'autre part, il existe des méthodes basées sur des techniques d'arbre pour calculer directement la densité de courant \mathbf{J}_s et son champ source \mathbf{H}_s associé [60]. On introduit ainsi deux champs de vecteurs tel que :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{N}i \quad (1.103)$$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{K}i \quad (1.104)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = \mathbf{N} \quad (1.105)$$

avec i le courant, \mathbf{N} défini dans l'inducteur et discrétisé sur \mathbf{W}^2 et \mathbf{K} défini dans tout le domaine et discrétisé sur \mathbf{W}^1 . De tels champs sont respectivement obtenus par une technique d'arbre de facettes et d'arêtes. Le développement de ces arbres est donné en annexe B. La géométrie de l'inducteur est implicitement prise en compte par \mathbf{N} tel que :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{S_{ind}} \cdot \mathbf{n} \quad (1.106)$$

avec S_{ind} la section de l'inducteur et \mathbf{n} sa normale. Si on considère un domaine D incluant un inducteur bobiné comme précisé sur la figure 1.13, la répartition de \mathbf{N} est donnée par la figure 1.14.

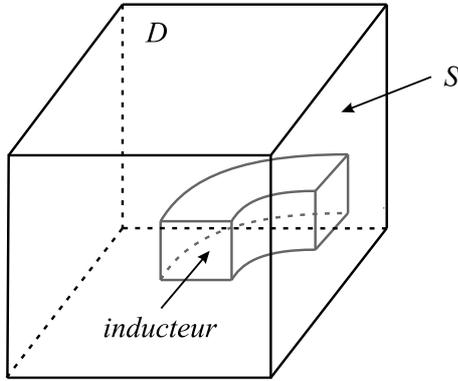


FIG. 1.13 – Exemple d'inducteur bobiné

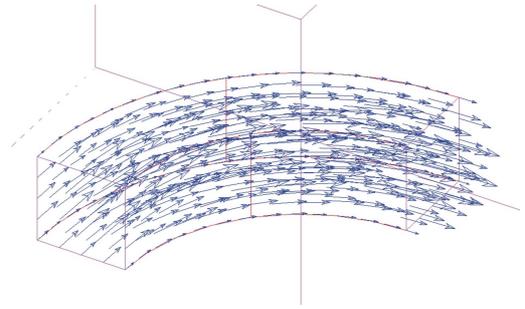


FIG. 1.14 – Répartition de \mathbf{N}

Il a été montré que le choix de l'arbre de facettes utilisé pour le calcul de \mathbf{N} induit des erreurs numériques beaucoup plus faible que celles dues à la discrétisation [60, 62].

Par une technique d'arbre d'arêtes, une infinité de champs \mathbf{K} peuvent être calculés tels que leur rotationnel soit égal à \mathbf{N} . Néanmoins, la répartition du champ magnétique n'en dépend pas. Les figures 1.15 et 1.16 donnent deux exemples de champ \mathbf{K} sur une surface S du domaine comme précisée sur la figure 1.13.

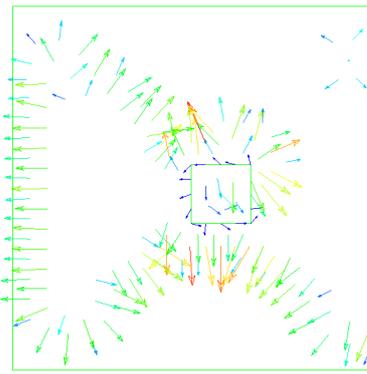


FIG. 1.15 – Exemple 1

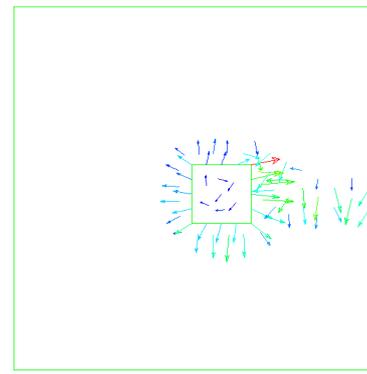


FIG. 1.16 – Exemple 2

1.4.2 Problème magnétodynamique

Comme dans le domaine continu, deux formulations peuvent être utilisées pour résoudre ce type de problème : la formulation électrique $\mathbf{A} - \varphi$ et la formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$. La formulation $\mathbf{A} - \varphi$ sera résolue sur le maillage primal et la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ sur le maillage dual sachant, comme nous l'avons précisé précédemment, qu'une inversion est parfaitement envisageable. En pratique, la méthode des éléments finis conduit à résoudre les deux formulations sur le maillage primal.

Formulation électrique $\mathbf{A} - \varphi$

L'expression de l'induction magnétique et du champ électrique, exprimés en fonction de potentiels dans le domaine continu, restent valables dans le domaine discret. D'après 1.76 et 1.77, celles-ci s'écrivent :

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{R} \mathbf{A}_a \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} - \mathbf{G} \varphi_n \quad (1.107)$$

avec \mathbf{A}_a les circulations sur les arêtes primales de \mathbf{A} et φ_n les valeurs du potentiel scalaire électrique φ aux noeuds primals de D_c . Pour assurer l'unicité de \mathbf{A}_a , il est nécessaire d'introduire une jauge. Une jauge de type $\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = 0$ peut être appliquée très simplement si le potentiel vecteur \mathbf{A} est décomposé dans l'espace des éléments d'arête. Celle-ci peut être obtenue par une technique d'arbre, un arbre d'arêtes ne formant pas de boucles et reliant tous les noeuds de D_c peut être déterminé. L'ensemble des arêtes de l'arbre ne sont plus considérées comme des degrés de liberté, la valeur de la circulation de \mathbf{A} sur ces arêtes est annulée. Par conséquent, le nombre de degrés de liberté du potentiel \mathbf{A} est diminué.

Le système d'équations associé à cette formulation est donné par la discrétisation des équations 1.38 et 1.39 relatives au domaine continu. Celui-ci s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{R}} \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{A}_a + \mathbf{M}_{aa}^\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} + \mathbf{G} \varphi_n \right) = 0 \quad (1.108)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{M}_{aa}^\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} + \mathbf{G} \varphi_n \right) = 0 \quad (1.109)$$

En utilisant les propriétés des opérateurs discrets 1.80 et 1.81, le système devient :

$$\left| \begin{array}{cc|c|c} \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \mathbf{M}_{aa}^\sigma \frac{\partial}{\partial t} & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \mathbf{A}_a & 0 \\ \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \frac{\partial}{\partial t} & \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \varphi_n & 0 \end{array} \right| = \quad (1.110)$$

Le terme de gauche représentant la matrice de raideur n'est pas symétrique. En utilisant une méthode de discrétisation temporelle appropriée, cette matrice peut vérifier cette propriété. Le développement de la symétrisation sera donné dans la suite. La matrice de raideur obtenue n'est pas inversible si l'on n'utilise pas de jauge. Pour résoudre ce système, des méthodes itératives sont alors utilisées comme la méthode du gradient conjugué. On montre qu'avec ce type de processus itératif de résolution, le potentiel vecteur \mathbf{A} est implicitement jaugé, le processus est ainsi convergent [10, 15, 35, 63].

La formulation discrète précédente a un caractère général. En utilisant les matrices d'incidence introduite au 1.3.1.2 avec les fonctions d'interpolation données au 1.3.1.1, nous obtenons la même formulation donnée par la méthode des éléments finis et la méthode des résidus pondérés, comme cela est montré en annexe A. Nous retrouvons donc bien ici le fait que l'utilisation d'un maillage dual est implicite dans la méthode des éléments finis.

Remarque : La formulation en potentiel vecteur modifié (formulation \mathbf{A}^*) est une variante de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$. Dans cette dernière, le potentiel scalaire électrique n'est pas introduit. Le champ électrique est alors fonction de la dérivée du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A}^* ($\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}_a^*}{\partial t}$ et $\mathbf{B}_f = \mathbf{R} \mathbf{A}_a^*$). Ainsi, le système d'équations associé à cette formulation s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{R}} \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{A}_a^* + \mathbf{M}_{aa}^\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_a^*}{\partial t} = 0 \quad (1.111)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{M}_{aa}^\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_a^*}{\partial t} = 0 \quad (1.112)$$

Le nombre d'inconnues relatif à cette formulation est égal aux degrés de liberté associés aux arêtes du maillage primal. Celui-ci est alors inférieur au nombre d'inconnues de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$. En contre partie, dans la bibliographie, il a été démontré que la formulation \mathbf{A}^* converge moins rapidement que la formulation $\mathbf{A} - \varphi$.

Formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$

L'expression discrète du champ magnétique et de la densité de courant induite est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{H}}_{as} + \tilde{\mathbf{T}}_a - \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\Omega}_n \quad (1.113)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{R}} (\tilde{\mathbf{T}}_a + \tilde{\mathbf{H}}_{as}) \quad (1.114)$$

avec $\tilde{\mathbf{H}}_{as}$ et $\tilde{\mathbf{T}}_a$ les circulations respectives de \mathbf{H}_s et de \mathbf{T} sur les arêtes duales et $\tilde{\Omega}_n$ les valeurs du potentiel Ω sur les noeuds duaux.

Le système d'équations associé à cette formulation est donné par la discrétisation des équations 1.44 et 1.45 relatives au domaine continu. Celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{R}M_{ff}^{\sigma^{-1}}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{T}}_a + \frac{\partial}{\partial t}M_{aa}^{\mu}(\tilde{\mathbf{T}}_a - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\Omega}_n) = -\mathbf{R}M_{ff}^{\sigma^{-1}}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_{as} - \frac{\partial}{\partial t}M_{aa}^{\mu}\tilde{\mathbf{H}}_{as} \quad (1.115)$$

$$DM_{aa}^{\mu}(\tilde{\mathbf{T}}_a - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\Omega}_n) = -DM_{aa}^{\mu}\tilde{\mathbf{H}}_{as} \quad (1.116)$$

En utilisant les propriétés des opérateurs discrets 1.81 et 1.82, le système devient :

$$\left| \begin{array}{cc|c} \tilde{\mathbf{R}}^t M_{ff}^{\sigma^{-1}} \tilde{\mathbf{R}} + \frac{\partial}{\partial t} M_{aa}^{\mu} & -\frac{\partial}{\partial t} M_{aa}^{\mu} \tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\mathbf{T}}_a \\ \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^{\mu} & -\tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^{\mu} \tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\Omega}_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -\mathbf{R}M_{ff}^{\sigma^{-1}}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_{as} - \frac{\partial}{\partial t}M_{aa}^{\mu}\tilde{\mathbf{H}}_{as} \\ -\tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^{\mu}\tilde{\mathbf{H}}_{as} \end{array} \right| \quad (1.117)$$

On ne voit apparaître ici que des grandeurs définies sur le maillage dual dans le terme de droite (la densité de courant \mathbf{J}_s) ce qui est normal puisque la seule source de champ est définie sur le maillage dual.

Comme pour la formulation précédente, si on appliquait la méthode des résidus pondérés, le système matriciel obtenu serait semblable à celui donné précédemment.

1.4.3 Problème magnétostatique

En magnétostatique, la discrétisation du système d'équations présenté au 1.2.6.2 s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{J}}_{fs} \quad (1.118)$$

$$D\mathbf{B}_f = 0 \quad (1.119)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_a = M_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{B}_f \quad (1.120)$$

Dans le cas de la formulation \mathbf{A} , nous obtenons :

$$\mathbf{R}^t M_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}\mathbf{A}_a = \tilde{\mathbf{J}}_{fs} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_f = \mathbf{R}\mathbf{A}_a \quad (1.121)$$

Dans le terme de droite apparaît une grandeur liée au maillage dual. En utilisant l'expression 1.102.c, on peut obtenir un système ne faisant intervenir que des grandeurs liées au maillage primal. Ainsi, le système s'écrit :

$$\mathbf{R}^t M_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}\mathbf{A}_a = M_{af}\mathbf{J}_{fs} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_f = \mathbf{R}\mathbf{A}_a \quad (1.122)$$

Dans le cas de la formulation Ω , le système à résoudre s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^{\mu}\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\Omega}_n = \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^{\mu}\tilde{\mathbf{H}}_{as} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{H}}_{as} - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\Omega}_n \quad (1.123)$$

1.4.4 Problème électrocinétique

En électrocinétique, le système à résoudre est donné par la discrétisation des équations présentées en 1.2.6.3.

$$\mathbf{R} \mathbf{E}_a = 0 \quad (1.124)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{J}}_{find} = 0 \quad (1.125)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_{find} = \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{E}_a \quad (1.126)$$

Dans le cas de la formulation \mathbf{T} , le système d'équations s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{R}}^t \mathbf{M}_{ff}^{\sigma^{-1}} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{T}}_a = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{J}}_{find} = \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{T}}_a \quad (1.127)$$

et dans le cas de la formulation φ :

$$\mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \varphi_n = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}_a = -\mathbf{G} \varphi_n \quad (1.128)$$

Remarque : en pratique le terme de droite représentant le vecteur source n'est pas nul puisque les sources de courant ou de tension sont appliquées par l'intermédiaire des conditions limites que nous n'avons pas considérées ici mais qui le seront dans la suite.

1.4.5 Discrétisation temporelle

Dans le cas des formulations magnétodynamiques, en plus d'une discrétisation spatiale, une discrétisation temporelle doit être introduite. Elle peut être réalisée par la Θ -méthode qui est un schéma de discrétisation temporelle [28].

L'intervalle de l'étude a pour durée T , le pas de discrétisation temporel Δt et le nombre de pas de temps N_T avec $N_T = T/\Delta t$. Dans le cas général, deux fonctions sont considérées, une fonction source ou cause $f(t)$ et une fonction réponse ou conséquence $u(t)$ telle que :

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t) \quad (1.129)$$

En appliquant la Θ -méthode, l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{u_{tn+1} - u_{tn}}{\Delta t} + \Theta Au_{tn+1} + (1 - \Theta) Au_{tn} = \Theta f_{tn+1} + (1 - \Theta) f_{tn} \quad (1.130)$$

avec $t_n = n\Delta t$ ($n \in [1, N_T]$), $\Theta \in [0, 1]$ et A une constante. Par cette méthode, plusieurs types de schéma de discrétisation peuvent être utilisés, on retrouve selon la valeur de Θ des schémas classiques (tableau 1.4).

Θ	schéma de discrétisation
0	Euler implicite
1/3	Galerkin
1/2	Crank-Nicholson
1	Euler explicite

TAB. 1.4 – Schémas de discrétisation temporelle

Il a été démontré que le schéma de discrétisation est stable quand le paramètre Θ est compris entre 0 et 1/2.

Suite à la discrétisation temporelle par la Θ -méthode, les différentes matrices de raideur peuvent être rendues symétriques. A titre d'exemple, la formulation \mathbf{A} - φ est développée. En fixant le paramètre Θ à zéro et en multipliant la dernière ligne de la matrice par Δt , le système matriciel devient :

$$\left| \begin{array}{cc} \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \frac{\mathbf{M}_{aa}^\sigma}{\Delta t} & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \Delta t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{A}_a \\ \varphi_n \end{array} \right\|_{t_{n+1}} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\mathbf{M}_{aa}^\sigma}{\Delta t} & 0 \\ \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{A}_a \\ \varphi_n \end{array} \right\|_{t_n} \quad (1.131)$$

Dans l'hypothèse d'une évolution sinusoidale des champs, les formes fréquentielles des formulations peuvent être utilisées. Celles-ci sont obtenues en remplaçant le terme $\frac{\partial}{\partial t}$ par jw avec $w = 2\pi f$ et f la fréquence. La formulation $\mathbf{A} - \varphi$ dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\left| \begin{array}{cc} \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + jw \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \frac{\mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G}}{jw} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{A}_a \\ \varphi_n \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \quad (1.132)$$

Remarque : Une étude concernant l'estimation de l'erreur numérique en fonction du pas de discrétisation spatial, du pas de discrétisation temporel et du paramètre Θ a été réalisée dans le cas de la magnétostatique. Cette étude n'est pas présentée mais celle-ci est donnée par [50, 52].

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les différentes étapes nécessaire à la construction du diagramme de Tonti propre à l'électromagnétisme ont été rappelées.

La discrétisation des équations de Maxwell nécessite deux suites d'espaces discrets qui sont obtenues par deux maillages, un maillage primal et un maillage dual construit à partir du premier. Cette approche permet de déduire une forme générale à partir de laquelle on peut retrouver des méthodes classiques de résolution comme la méthode des éléments finis ou la technique d'intégration finie. Seules, les matrices de masse qui sont une forme discrétisée des lois de comportement sont différentes selon la méthode choisie. En conséquence, les formulations en potentiel présentées dans cette partie restent d'ordre général et peuvent être appliquées à la méthode des éléments finis mais aussi à la technique d'intégration finie ou à tout autres schémas de discrétisation des lois de comportement.

Chapitre 2

Calcul et imposition de grandeurs globales

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les différentes formulations en potentiel dans le cas où le terme source était constitué d'un seul inducteur bobiné alimenté en courant.

Ces termes sources peuvent également être imposés par l'intermédiaire de grandeurs globales de type flux magnétique ou électrique (courant) ou de type différence de potentiel magnétique ou électrique (tension). Ces termes sont alors imposés sur la frontière du domaine. Par exemple, si on considère un conducteur massif, on peut imposer soit le courant qui le traverse¹ soit la différence de potentiel électrique entre deux sections².

Nous proposons donc dans la suite des méthodes qui permettent, dans le cas de la magnétodynamique, de calculer et d'imposer les grandeurs globales précédentes et cela pour les deux formulations ($\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$). Pour tester les méthodes développées, des exemples académiques et un dispositif expérimental, dont on possède des résultats expérimentaux, seront étudiés.

1. on fixe alors le flux de la densité de courant sur les sections du conducteur en contact avec la frontière du domaine

2. ces deux sections sont également en contact avec la frontière du domaine

2.2 Présentation du système

On considère un domaine D contractile contenant un sous domaine D_c qui peut être conducteur (fig. 2.1). Le domaine D_c peut parfaitement être étendu à tout le domaine D . Sur la frontière Γ de D , des conditions aux limites homogènes sur les champs sont imposées. Les deux surfaces extrêmes de D_c en contact avec Γ sont notées Γ_c^1 et Γ_c^2 .

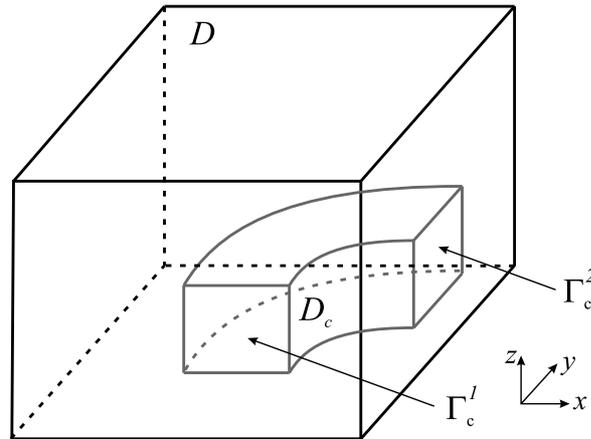


FIG. 2.1 – Définition de D et D_c

Dans le domaine D_c , on souhaite soit imposer une grandeur de type flux électrique (courant) ou magnétique, (avec un flux supposé rentrant par Γ_c^1 et sortant par Γ_c^2) ou soit imposer une différence de potentiel électrique ou magnétique entre Γ_c^1 et Γ_c^2 .

On suppose que le domaine D supporte un maillage M , les notations pour les fonctions de forme et les matrices d'incidence sont celles introduites au chapitre I.

2.3 Présentation des outils

Dans certaines formulations, les grandeurs globales sont intrinsèquement liées aux potentiels introduits comme par exemple dans le cas de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ où l'imposition d'une tension V aux bornes de D_c revient à imposer la valeur du potentiel électrique φ sur les frontières Γ_c^1 et Γ_c^2 ($V = \varphi|_{\Gamma_c^1} - \varphi|_{\Gamma_c^2}$). Comme on le verra par la suite, le calcul ou l'imposition des grandeurs globales nécessite l'introduction de fonctions scalaires ou vectorielles supplémentaires. Pour ce qui nous intéresse, un champ de vecteurs \mathbf{K} et une fonction scalaire α doivent être définis.

2.3.1 Introduction du champ \mathbf{K}

L'idée générale est la même que celle qui a été développée par [60] et utilisée dans le cadre de la magnéto-statique. Simplement, nous étendons son utilisation au cas où on cherche à imposer un flux (courant électrique ou flux magnétique) alors qu'avant celle-ci était restreinte au cas où on cherchait à imposer la répartition de la densité de courant dans un inducteur bobiné. Ainsi, les champs \mathbf{N} et \mathbf{K} , associés à D_c , sont à définir. Ces champs sont respectivement discrétisés sur \mathbf{W}^2 et \mathbf{W}^1 comme cela a été présenté au paragraphe 1.4.1 dans le cas d'un inducteur bobiné. On rappelle que leur discrétisation est obtenue par des techniques d'arbres avec les champs \mathbf{N} et \mathbf{K} définis dans D (annexe B). Ces champs sont liés par :

$$\mathbf{N} = \mathbf{rot} \mathbf{K} \quad (2.1)$$

avec \mathbf{K} , vérifiant par ailleurs, des conditions aux limites sur une partie de Γ de type $\mathbf{K} \times \mathbf{n} = 0$. Cette partie dépendra si on souhaite imposer un flux magnétique ou un courant. La précédente relation s'exprime aussi sous la forme discrète :

$$\mathbf{N}_f = \mathbf{R} \mathbf{K}_a \quad (2.2)$$

avec $\mathbf{N}_f \in \mathcal{W}^2$ et $\mathbf{K}_a \in \mathcal{W}^1$ représentant, respectivement, les flux de \mathbf{N} à travers les facettes et les circulations de \mathbf{K} sur les arêtes du maillage primal.

2.3.2 Introduction de la fonction α

On définit une fonction α telle que [47]:

$$\alpha = \sum_{n \in N_{\Gamma_c^1}} w_n \quad (2.3)$$

avec $N_{\Gamma_c^1}$ l'ensemble des noeuds de Γ_c^1 et w_n la fonction nodale associée au noeud n . On constate que la fonction α appartient à W^0 . Celle-ci est égale à 1 sur Γ_c^1 et zéro en dehors d'un domaine D_α défini par l'ensemble des éléments contenant au moins un noeud de Γ_c^1 . Dans D_α , la fonction α varie de manière continue de 1 sur la frontière Γ_c^1 à 0 sur la frontière de D_α . Dès lors, on peut définir $\boldsymbol{\alpha}_n$ le vecteur des valeurs aux noeuds de α de composantes α_n avec $1 \leq n \leq n_n$. Les composantes de $\boldsymbol{\alpha}_n$ sont définies par :

$$\alpha_n = 1 \quad \text{si } n \in N_{\Gamma_c^1} \quad (2.4)$$

$$\alpha_n = 0 \quad \text{ailleurs} \quad (2.5)$$

2.4 Formulations magnétodynamiques

Dans cette partie, on traite principalement de l'introduction des grandeurs globales dans le cas de la formulation magnétodynamique $\mathbf{A} - \varphi$. Puis, plus brièvement, dans la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ sachant que la démarche utilisée pour la seconde formulation est très similaire à la première.

2.4.1 Formulation magnétique $\mathbf{A} - \varphi$

Nous allons présenter dans la suite, les méthodes employées pour imposer :

- le courant i à travers les surfaces Γ_c^1 et Γ_c^2 ,
- la tension V aux bornes de D_c sur Γ_c^1 et Γ_c^2 ,
- un flux magnétique Φ à travers les surfaces Γ_c^1 et Γ_c^2 ,
- une différence de potentiel magnétique ε aux bornes de D_c sur Γ_c^1 et Γ_c^2 .

Le domaine D_c est supposé conducteur. Son complémentaire $D - D_c$ ne l'est pas. Le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est défini dans tout le domaine D . Le potentiel scalaire électrique φ n'est défini que dans le domaine D_c .

2.4.1.1 Imposition d'une grandeur électrique

On cherche à imposer une tension V aux bornes de D_c entre Γ_c^1 et Γ_c^2 ou un courant i traversant D_c . Les conditions aux limites sur D sont données par la figure 2.2 où on constate que toutes les frontières supportent des conditions aux limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Ici, comme la conductivité électrique est nulle dans $D - D_c$, aucun courant électrique ne circule dans ce domaine.

Les valeurs du potentiel scalaire électrique φ sont constantes sur Γ_c^1 et Γ_c^2 dans le but d'imposer $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur la frontière Γ . Dés lors, la tension V correspondant à la différence de potentiel électrique aux bornes de D_c peut être exprimée par :

$$V = \varphi|_{\Gamma_c^1} - \varphi|_{\Gamma_c^2} \quad (2.6)$$

avec $\varphi|_{\Gamma_c^1}$ et $\varphi|_{\Gamma_c^2}$ la valeur de φ sur Γ_c^1 et Γ_c^2 . En fixant à zéro la valeur de $\varphi|_{\Gamma_c^2}$, la tension V est directement liée à $\varphi|_{\Gamma_c^1}$. Dans ces conditions, le potentiel scalaire électrique s'écrit :

$$\varphi = \sum_{n \in D_c, n \notin \Gamma_c^1, n \notin \Gamma_c^2} \varphi_n w_n + V \sum_{n \in \Gamma_c^1} w_n = \sum_{n \in D_c, n \notin \Gamma_c^1, n \notin \Gamma_c^2} \varphi_n w_n + V \alpha \quad (2.7)$$

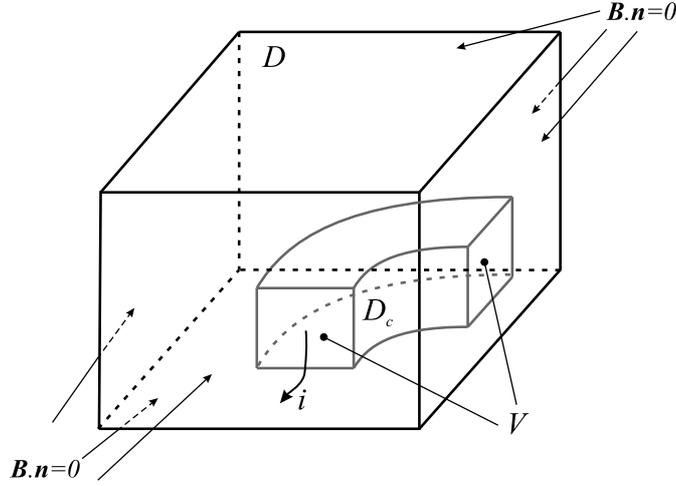


FIG. 2.2 – Définition des conditions limites

On voit ici apparaître naturellement la fonction α . Dans la relation précédente, φ_n représente la valeur du potentiel scalaire électrique φ au noeud n . Seuls les noeuds situés à l'intérieur de D_c où sur la surface de D_c interne à D sont associés à des inconnues φ_n , les autres sont associés à des valeurs nulles sur $\Gamma - \Gamma_c^1$ et à V sur Γ_c^1 . On définit ainsi φ'_n le vecteur de \mathcal{W}^0 tel que ces composantes φ'_n vérifient :

$$\varphi'_n = \varphi_n \quad \text{si } n \notin \Gamma \quad \text{et } n \in D_c \quad (2.8)$$

$$\varphi'_n = 0 \quad \text{si } n \in \Gamma_c^1 \quad \text{ou } \Gamma_c^2 \quad (2.9)$$

On a alors sous forme discrète :

$$\varphi_n = \varphi'_n + V\alpha_n \quad (2.10)$$

Dans ces conditions, le vecteur \mathbf{E}_a des circulations du champ électrique sur les arêtes s'écrit :

$$\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} - \mathbf{G}(\varphi'_n + V\alpha_n) \quad (2.11)$$

La tension V peut donc facilement être imposée aux bornes de D_c . Le système matriciel se déduit alors de celui présenté dans le chapitre I par l'équation 1.110. Comme il n'y a pas d'inducteur bobiné, la densité de courant \mathbf{J}_{fs} est donc nulle. Pour obtenir le système matriciel à résoudre, il suffit de remplacer φ_n par son expression en fonction de φ'_n et $V\alpha_n$ dans le système 1.110. Dans ces conditions, le terme de gauche du système matriciel reste inchangé, seul le vecteur source est modifié. Finalement, le système résultant de l'imposition d'une tension aux bornes de D_c s'écrit :

$$\left| \begin{array}{cc} \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}_a \\ \varphi'_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -\mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \alpha_n V \\ -\mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \alpha_n V \end{array} \right| \quad (2.12)$$

Dans ce système matriciel, le courant i circulant dans le domaine D_c n'intervient pas mais celui-ci peut être déterminé par une nouvelle relation.

En effectuant un bilan de puissance, on peut écrire que la puissance fournie est égale à la variation de l'énergie magnétique à laquelle il faut ajouter la puissance dissipée par effet Joule. Cette puissance fournie qui est transmise à travers les frontières du domaine D est égale au produit Vi (annexe C).

$$Vi = \int_{D_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c + \int_D \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} dD \quad (2.13)$$

Comme $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ et que $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} \varphi' - V \mathbf{grad} \alpha$, la relation précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Vi = & - \int_{D_c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c - \int_{D_c} \mathbf{grad} \varphi' \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c \\ & + \int_D \frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} dD - V \int_{D_c} \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les champs obtenus dans le domaine discret issus de la méthode des éléments finis s'appuient sur la méthode des résidus pondérés. On peut alors écrire que :

$$\int_D (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}_{ind}) \cdot \mathbf{A}_t dD = 0 \quad (2.15)$$

$$\int_{D_c} \mathbf{div} \mathbf{J}_{ind} \cdot \varphi'_t dD_c = 0 \quad (2.16)$$

avec \mathbf{A}_t et φ'_t les fonctions tests qui vérifient les mêmes conditions aux limites que les solutions recherchées (\mathbf{A} et φ') :

$$\mathbf{A}_t \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.17)$$

$$\varphi'_t = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^1 \quad \text{et } \Gamma_c^2 \quad (2.18)$$

En tenant en compte des conditions aux limites respectées par les champs \mathbf{H} et \mathbf{J}_{ind} sur les frontières de D et D_c , on obtient alors les formulations faibles suivantes :

$$\int_D \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_t dD - \int_D \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{A}_t dD = 0 \quad (2.19)$$

$$\int_{D_c} \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{grad} \varphi'_t dD_c = 0 \quad (2.20)$$

Ces relations sont bien entendues vérifiées par les solutions du problème \mathbf{A} et φ' qui sont des combinaisons linéaires de fonctions tests lorsque l'on emploie la méthode de Galerkin. En conséquence, dans la relation 2.14, les trois premières intégrales s'annulent, et on obtient alors :

$$Vi = -V \int_{D_c} \mathbf{grad}\alpha \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c \quad (2.21)$$

d'où

$$i = - \int_{D_c} \mathbf{grad}\alpha \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c \quad (2.22)$$

Le courant i ainsi déterminé permet de satisfaire la loi de conservation de la puissance. Par ailleurs, cette dernière a déjà été développée simultanément par P. Dular [47] qui se base sur une formulation faible et par A. Bossavit [7] qui utilise les propriétés des maillages duaux. En utilisant les matrices de masse, la relation précédente s'écrit :

$$i = -\tilde{\mathbf{J}}_{find}^t(\mathbf{G}\alpha_n) = -(\mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{E}_a)^t(\mathbf{G}\alpha_n) \quad (2.23)$$

où $\tilde{\mathbf{J}}_{find}$, on le rappelle, est l'ensemble des flux de la densité de courant circulant dans le domaine D_c à travers les facettes du maillage dual et \mathbf{E}_a l'ensemble des circulations du champ électrique sur les arêtes primales. Cette relation peut facilement s'interpréter graphiquement.

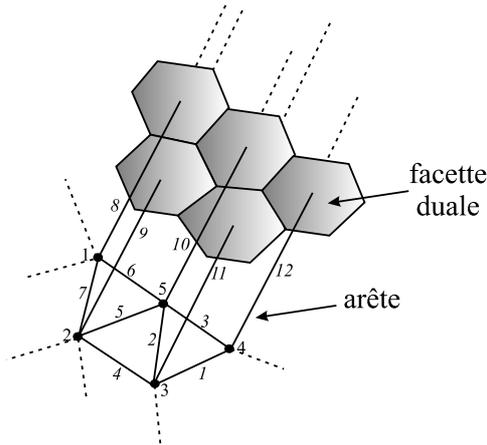


FIG. 2.3 – *Interprétation géométrique du terme $\mathbf{G}\alpha_n$*

Sur la figure 2.3, on considère une surface Γ_c^1 comportant cinq noeuds $\{1,2,3,4,5\}$. Les composantes du vecteur α_n valent donc 1 pour $n \in \{1,2,3,4,5\}$ et 0 ailleurs. Le

terme $\mathbf{G}\alpha_n$ qui est le gradient de la fonction α est un vecteur dont les termes $g\alpha_a$ sont associés à chacune des arêtes du maillage. Ainsi, dans notre exemple, $g\alpha_a = 0$ si $a \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ et $g\alpha_a = 1$ si $a \in \{8,9,10,11,12\}$. On constate donc que $\mathbf{G}\alpha_n$ est un vecteur où les seules composantes non nulles sont celles correspondant aux arêtes dirigées à l'intérieur de D (n'ayant qu'un noeud appartenant à Γ_c^1). Si on considère l'ensemble des facettes duales à ces arêtes, elles définissent une surface qui est située juste en vis à vis de la surface Γ_c^1 . Si maintenant on considère le produit $\tilde{\mathbf{J}}_{find}^t(\mathbf{G}\alpha_n)$, celui-ci représente la somme des flux de \mathbf{J}_{ind} à travers les facettes duales définies par $\mathbf{G}\alpha_n$, on obtient donc le courant i à travers la surface Γ_c^1 .

Si maintenant on désire imposer le flux d'une densité de courant, noté i et canalisé dans D_c . Il suffit alors d'ajouter au système précédent 2.12 l'équation 2.23. Le système matriciel résultant s'écrit :

$$\left| \begin{array}{ccc|c|c} \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu-1} \mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \alpha_n & \mathbf{A}_a & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \alpha_n & \varphi'_n & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_n^t \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \alpha_n^t \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \alpha_n^t \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \alpha_n & V & i \end{array} \right| \quad (2.24)$$

La tension V aux bornes du domaine D_c entre Γ_c^1 et Γ_c^2 devient alors une inconnue du système.

2.4.1.2 Imposition d'une grandeur magnétique

On souhaite maintenant imposer un flux magnétique Φ à travers Γ_c^1 et Γ_c^2 (par contre aucun flux ne traverse la surface $\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2$) ou une différence de potentiel magnétique ε aux bornes de D_c entre Γ_c^1 et Γ_c^2 . Pour ce problème, la perméabilité n'est pas nulle à l'extérieur de D_c . En conséquence, on impose toujours un flux Φ à travers Γ_c^1 et Γ_c^2 mais cette fois le flux peut s'épanouir dans tout le domaine contrairement au cas précédent où le milieu environnant de D_c était supposé être isolant. Une représentation en 2D de ce phénomène est donnée par la figure 2.4.

Les conditions aux limites sur les champs sont toujours homogènes mais ne sont plus les mêmes que précédemment. Sur la figure 2.5, on précise ces conditions sur les différentes frontières de D .

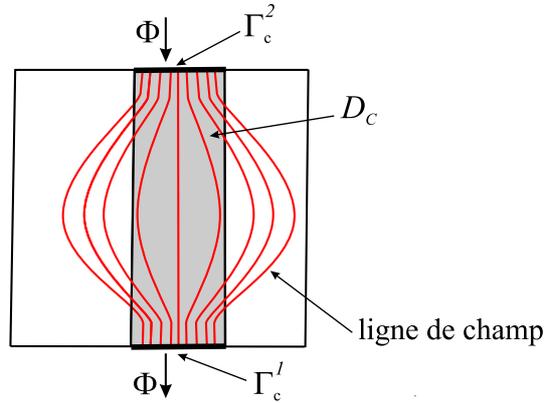


FIG. 2.4 – Exemple d'épanouissement du champ dans tout le domaine

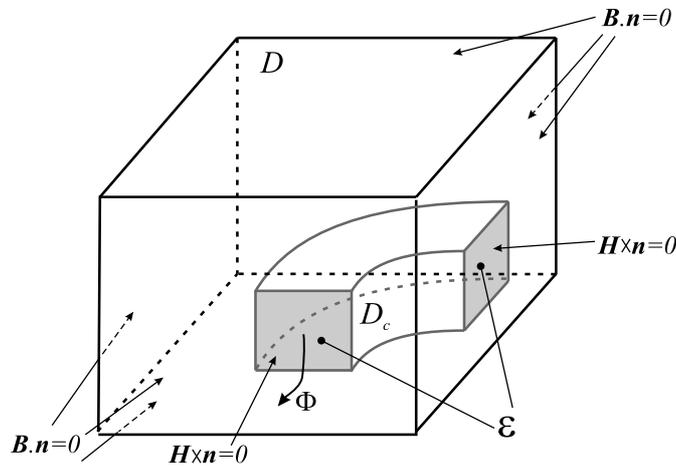


FIG. 2.5 – Définition des conditions limites

Pour prendre en compte un flux magnétique Φ à travers Γ_c^1 et Γ_c^2 , on introduit un vecteur $\mathbf{K}\Phi$. On rappelle que le vecteur \mathbf{K} est défini tel que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = \mathbf{N} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^1 \quad \text{et} \quad \Gamma_c^2 \quad (2.25)$$

avec \mathbf{N} étant un vecteur vérifiant les propriétés suivantes :

$$\mathit{div} \mathbf{N} = 0 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma - \Gamma_c^1 - \Gamma_c^2 \quad (2.27)$$

$$\int_{\Gamma_c^1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_c^1 = \int_{\Gamma_c^2} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_c^2 = 1 \quad (2.28)$$

Remarque : si on le souhaite on peut réduire le domaine de calcul de \mathbf{N} à D_c en imposant les conditions 2.28 et 2.27 sur la surface de D_c interne à D , le vecteur \mathbf{N}

étant alors nul dans $D - D_c$.

La construction de \mathbf{K} et \mathbf{N} peut s'effectuer à l'aide des techniques évoquées au chapitre I en 1.4.1. On définit ainsi un potentiel \mathbf{A}' comme :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{K}\Phi \quad (2.29)$$

Ce potentiel \mathbf{A}' , contrairement à \mathbf{A} , possède des conditions aux limites homogènes sur la frontière où on impose $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, c'est à dire $\mathbf{A}' \times \mathbf{n} = 0$. On peut donc écrire \mathbf{A} sous la forme discrète :

$$\mathbf{A}_a = \mathbf{A}'_a + \mathbf{K}_a\Phi \quad (2.30)$$

Dans ces conditions, avec les notations présentées au chapitre I, les nouvelles définitions de \mathbf{B}_f et de \mathbf{E}_a s'écrivent alors :

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{R}(\mathbf{A}'_a + \mathbf{K}_a\Phi) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}'_a}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{K}\Phi}{\partial t} - \mathbf{G}\varphi_n \quad (2.32)$$

Un flux Φ à travers Γ_c^1 et Γ_c^2 peut donc être imposé facilement. En se basant une nouvelle fois sur le système matriciel 1.110, en utilisant la relation 2.30, le système résultant de l'imposition d'un flux peut être obtenu. Le terme source est alors associé au flux Φ et on obtient le système :

$$\left| \begin{array}{cc|c} \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \mathbf{A}'_a \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \varphi_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -\mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_a \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{K}_a \Phi \\ -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{K}_a \Phi \end{array} \right| \quad (2.33)$$

Dans ce système matriciel, la différence de potentiel magnétique ε aux bornes de D_c entre Γ_c^1 et Γ_c^2 n'intervient pas. Celle-ci peut être déterminée par une équation supplémentaire. En effectuant un bilan de puissance comme précédemment, on peut déterminer une expression de la différence de potentiel magnétique. En se basant sur la méthode des résidus pondérés qui est employée pour résoudre le problème, on a :

$$\int_D (\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}_{ind}) \cdot \mathbf{A}'_t dD = 0 \quad (2.34)$$

$$\int_{D_c} \mathbf{div} \mathbf{J}_{ind} \cdot \varphi_t dD_c = 0 \quad (2.35)$$

avec comme conditions aux limites :

$$\mathbf{A}'_t \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma - \Gamma_c^1 - \Gamma_c^2 \quad (2.36)$$

Le bilan de puissance nous donne par ailleurs :

$$\varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = \int_{D_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c + \int_D \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} dD \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{D_c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c - \int_{D_c} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c - \int_{D_c} \frac{d\Phi \mathbf{K}}{dt} \cdot \mathbf{J}_{ind} dD_c \\ &+ \int_D \frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{A}'}{\partial t} \cdot \mathbf{H} dD + \int_D \frac{d\Phi \mathbf{rot} \mathbf{K}}{dt} \cdot \mathbf{H} dD \end{aligned} \quad (2.38)$$

La forme faible des relations 2.34 et 2.35, en utilisant les conditions aux limites vérifiées par les champs, est donnée par :

$$\int_D \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}'_t dD - \int_D \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{A}'_t dD = 0 \quad (2.39)$$

$$\int_{D_c} \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{grad} \varphi_t dD_c = 0 \quad (2.40)$$

Dans le cas où on applique la méthode de Galerkin, les solutions \mathbf{A}' et φ vérifient les relations précédentes. Dans ces conditions, à partir de la relation 2.38, la différence de potentiel magnétique ε s'écrit :

$$\varepsilon = \int_D \mathbf{N} \cdot \mathbf{H} dD - \int_D \mathbf{K} \cdot \mathbf{J}_{ind} dD \quad (2.41)$$

Par cette équation, la différence de potentiel magnétique ε entre Γ_c^1 et Γ_c^2 peut être calculée. Une relation similaire a été proposée par P. Dular dans le cas où le vecteur \mathbf{K} est une "coupure" [45]. Ici nous la généralisons à tout type de vecteur \mathbf{K} vérifiant les propriétés citées précédemment.

Dans le domaine discret, en utilisant les matrices de masse, cette dernière est égale à :

$$\varepsilon = \widetilde{\mathbf{H}}_a^t \mathbf{N}_f - \widetilde{\mathbf{J}}_{find}^t \mathbf{K}_a = (\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f)^t \mathbf{N}_f - (\mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{E}_a)^t \mathbf{K}_a \quad (2.42)$$

Dans ces conditions, pour imposer une différence de potentiel magnétique ε aux bornes du domaine D_c , la relation précédente 2.42 est alors ajoutée au système matriciel 2.33, Φ devient alors une inconnue. Le système résultant de l'imposition de ε s'écrit alors :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \mathbf{A}^t \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma & \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^t \\ A & B & C \end{array} \right| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{A}'_a \\ \varphi_n \\ \Phi \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{array} \right| \quad (2.43)$$

$$A = \mathbf{K}_a^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}_a^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \quad B = \mathbf{K}_a^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G}$$

$$C = \mathbf{K}_a^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_a + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}_a^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{K}_a$$

2.4.1.3 Synthèse

Le tableau 2.1 présente une synthèse de l'expression des champs et des méthodes employées pour l'imposition de grandeurs globales dans le cas de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$.

	Grandeur électrique		Grandeur magnétique	
Expression de \mathbf{E}_a	$\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} - \mathbf{G}(\varphi'_n + \alpha_n V)$		$\mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}'_a}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{K} \Phi}{\partial t} - \mathbf{G} \varphi_n$	
Expression de \mathbf{B}_f	$\mathbf{B}_f = \mathbf{R} \mathbf{A}_a$		$\mathbf{B}_f = \mathbf{R}(\mathbf{A}'_a + \mathbf{K}_a \Phi)$	
	i imposé	V imposée	Φ imposé	ε imposée
Méthode	ajout d'une équation : $i = -(\mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{E}_a)^t (\mathbf{G} \alpha_n)$	on fixe V	on fixe Φ	ajout d'une équation : $\varepsilon = (\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f)^t \mathbf{N}_f$ $-(\mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{E}_a)^t \mathbf{K}_a$

TAB. 2.1 – Méthodes utilisées pour l'imposition des grandeurs globales dans la formulation $\mathbf{A} - \varphi$

On note que le vecteur $\mathbf{K}_a \Phi$ introduit dans la définition de l'induction magnétique est lié au flux circulant dans le domaine D et que le terme $\alpha_n V$ est associé à la différence de potentiel électrique. Par conséquent, chaque grandeur globale est associée à un vecteur qui est ici, suivant le cas considéré, \mathbf{K}_a ou α_n .

A partir des formulations magnétodynamiques $\mathbf{A}-\varphi$ développées précédemment, il est possible d'obtenir la formulation électrocinétique en potentiel scalaire φ à courant ou tension imposée par une démarche similaire ou bien encore la formulation magnétostatique en potentiel vecteur \mathbf{A} à flux magnétique ou force magnétomotrice imposée.

2.4.2 Formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$

Pour garder les notations introduites au chapitre I, nous supposons toujours que le problème est résolu sur le maillage dual. Par conséquent, les fonctions \mathbf{K} et α sont à définir sur ce même maillage. Néanmoins, on rappelle que, généralement, dans le cas de la méthode des éléments finis, cette formulation est résolue sur le maillage primal.

Comme le potentiel vecteur électrique \mathbf{T} est nul à l'extérieur du domaine D_c et que $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0$ sur la frontière Γ_c , la densité de courant est nulle à l'extérieur de D_c (cf remarque du paragraphe 2.4.1.2). Comme D_c est non simplement connexe, on introduit alors, comme pour un inducteur bobiné, un champ $\mathbf{K}i$ de \mathbf{W}^1 qui se décline en vecteur $\widetilde{\mathbf{K}}_a i$ de $\widetilde{\mathcal{W}}^1$. Celui-ci peut être défini dans un sous domaine de D simplement connexe contenant D_c . Dans ces conditions, le champ magnétique et la densité de courant induite s'écrivent :

$$\widetilde{\mathbf{H}}_a = \widetilde{\mathbf{K}}_a i + \widetilde{\mathbf{T}}_a' - \widetilde{\mathbf{G}}\widetilde{\Omega}_n \quad (2.44)$$

$$\widetilde{\mathbf{J}}_{find} = \widetilde{\mathbf{R}}(\widetilde{\mathbf{T}}_a' + \widetilde{\mathbf{K}}_a i) \quad (2.45)$$

De part l'expression du champ magnétique, un courant i circulant, dans le domaine D_c , peut donc être imposé naturellement. Le système matriciel résultant de cette imposition est similaire à celui donné par 1.117 dans le cas d'un inducteur bobiné alimenté en courant. Les deux systèmes sont similaires, car les termes sources sont de même nature, ils s'écrivent sous la même forme $\widetilde{\mathbf{K}}_a i$.

La tension V aux bornes de D_c n'intervient pas dans le système matriciel 1.117. Celle-ci est déterminée par une relation supplémentaire qui se base sur la loi de Faraday et utilise le champ de vecteur \mathbf{K} [46, 61]. On montre que la tension V s'écrit :

$$V = \int_{D_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} dD_c + \int_D \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{K} dD \quad (2.46)$$

Sous forme discrète, celle-ci devient égale à :

$$V = \mathbf{E}_a^t \widetilde{\mathbf{N}}_f + \frac{\partial \mathbf{B}_f^t}{\partial t} \widetilde{\mathbf{K}}_a = (\mathbf{M}_{ff}^{\sigma^{-1}} \widetilde{\mathbf{J}}_{find})^t \widetilde{\mathbf{N}}_f + \frac{\partial (\mathbf{M}_{aa}^\mu \widetilde{\mathbf{H}}_a)^t}{\partial t} \widetilde{\mathbf{K}}_a \quad (2.47)$$

Ainsi, pour imposer une tension aux bornes de D_c , la relation précédente est ajoutée au système matriciel 1.117. Dans ce cas le courant i circulant dans D_c est alors une inconnue du problème.

Pour imposer une différence de potentiel magnétique ε aux bornes de D_c , il suffit d'introduire la fonction α (i.e. sous la forme discrète $\tilde{\alpha}_n$) et d'écrire :

$$\tilde{\Omega} = \sum_{n \in D, n \notin \Gamma_c^1, n \notin \Gamma_c^2} \tilde{\Omega}'_n \tilde{w}_n + \varepsilon \tilde{\alpha} \quad (2.48)$$

La différence de potentiel magnétique ε peut naturellement être fixée. Pour calculer le flux Φ traversant D_c , on utilise, par analogie avec la relation 2.23, l'équation suivante :

$$\Phi = -\mathbf{B}_f^t(\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\alpha}_n) = -(\mathbf{M}_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{H}}_a)^t(\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\alpha}_n) \quad (2.49)$$

Pour imposer un flux Φ , il suffit d'ajouter l'équation précédente au système, la différence de potentiel magnétique devenant alors une inconnue.

Le tableau 2.2 synthétise l'ensemble des expressions des champs ainsi que les méthodes utilisées pour le calcul et l'imposition des grandeurs globales dans le cas de la formulation $\mathbf{T} - \Omega$.

	Grandeur électrique		Grandeur magnétique	
Expression de $\tilde{\mathbf{H}}_a$	$\tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{K}}_a i + \tilde{\mathbf{T}}'_a - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\Omega}_n$		$\tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{T}}_a - \tilde{\mathbf{G}}(\tilde{\Omega}'_n + \tilde{\alpha}_n \varepsilon)$	
Expression de $\tilde{\mathbf{J}}_{find}$	$\tilde{\mathbf{J}}_{find} = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{K}}_a i + \tilde{\mathbf{T}}'_a)$		$\tilde{\mathbf{J}}_{find} = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{T}}_a$	
	i imposé	V imposée	Φ imposé	ε imposée
Méthode	on fixe i	ajout d'une équation : $V = (\mathbf{M}_{ff}^{\sigma^{-1}} \tilde{\mathbf{J}}_{find})^t \tilde{\mathbf{N}}_f + \frac{\partial (\mathbf{M}_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{H}}_a)^t \tilde{\mathbf{K}}_a}{\partial t}$	ajout d'une équation : $\Phi = -(\mathbf{M}_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{H}}_a)^t (\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\alpha}_n)$	on fixe ε

TAB. 2.2 – Méthodes utilisées pour l'imposition des grandeurs globales dans la formulation $\mathbf{T} - \Omega$

2.5 Exemple magnétodynamique à courant et tension imposée

2.5.1 Présentation du système

Nous considérons, comme exemple de validation des méthodes d'imposition de grandeurs globales électriques, un conducteur massif formé de deux parties droites et une autre hélicoidale, le tout enfermé dans une boîte d'air [51]. La perméabilité magnétique du conducteur est identique à celle de l'air. La résistivité électrique est fixée à $1,27 \cdot 10^{-8} \Omega/m$. Une vue en 3D du conducteur massif est donnée sur la figure 2.6.

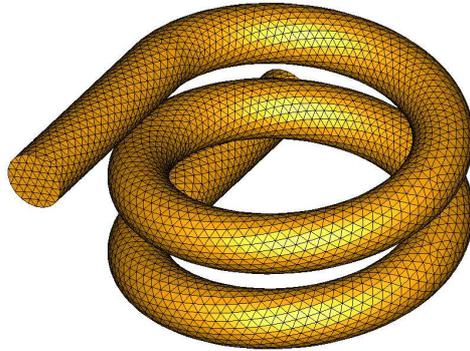


FIG. 2.6 – *Présentation du système*

Les dimensions du système sont précisées sur les figures 2.7 et 2.8.

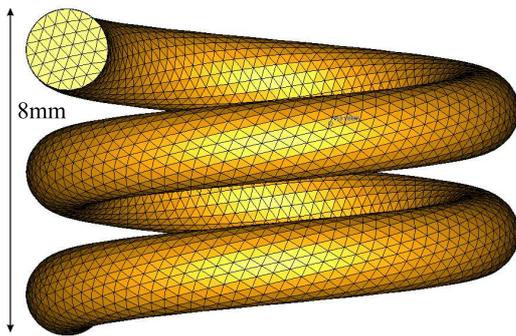


FIG. 2.7 – *Vue de face*

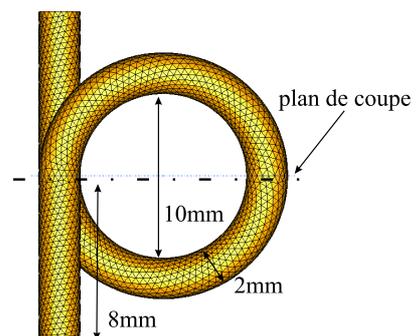


FIG. 2.8 – *Vue de haut*

Deux maillages constitués de tétraèdres ont été utilisés (M1: 3612 noeuds et 20436 éléments, M2: 20179 noeuds et 116906 éléments). Pour les deux formulations magnétodynamiques, le conducteur massif sera, tout d'abord, alimenté en courant

puis en tension. Pour le premier type d'alimentation, une évolution sinusoidale du courant d'amplitude égale à 3,14A est appliquée au conducteur massif avec deux fréquences d'alimentation (50Hz et 1kHz). L'intervalle de temps de l'étude est fixée à deux périodes avec 25 pas de temps de discrétisation par période. Pour le deuxième type d'alimentation, les tensions obtenues par les deux formulations dans le cas d'une alimentation en courant sont appliquées aux bornes du conducteur massif. Dans ces conditions, l'amplitude du courant calculé lors d'une alimentation en tension devrait être égale à 3,14A.

Comme nous l'avons précisé précédemment, il est nécessaire de déterminer deux fonctions α et \mathbf{K} pour imposer le courant ou la tension dans les deux formulations. On rappelle que la fonction scalaire α est décomposée dans l'espace des éléments nodaux et que celle-ci vaut 1 aux noeuds situés sur une section du conducteur placé sur la frontière du domaine d'étude Γ_c^1 et 0 ailleurs. Cette fonction est non nulle sur le domaine D_α regroupant l'ensemble des éléments ayant au moins un noeud sur Γ_c^1 (fig. 2.9).

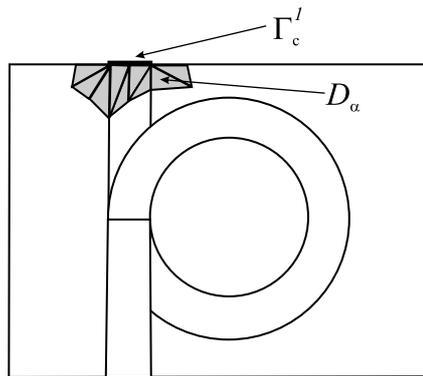


FIG. 2.9 – Définition du domaine D_α

La figure 2.10 présente la distribution du champ de vecteurs \mathbf{K} associée au conducteur massif dans un plan de coupe précisé à la figure 2.8.

On constate que cette distribution est éloignée du champ magnétique que l'on cherche à calculer. En revanche, ce champ vérifie le théorème d'Ampère à l'extérieur du conducteur si celui-ci est parcouru par un courant i de 1A. On voit ainsi des zones liant les conducteurs où \mathbf{K} est non nul. Ces zones n'ont pas à être définies par l'utilisateur, celles-ci apparaissent automatiquement avec la méthode de construction retenue faisant appel à des techniques d'arbres d'arêtes et de facettes.

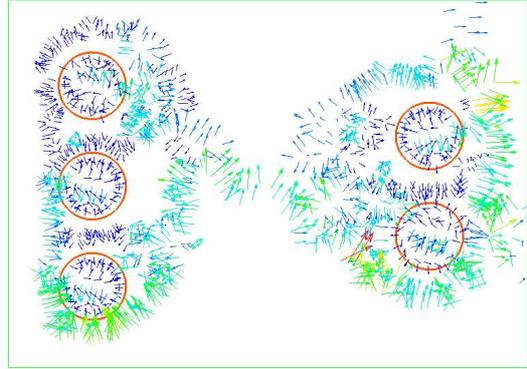


FIG. 2.10 – *Distribution de K*

2.5.2 Formulation $\mathbf{A} - \varphi$

Pour imposer le courant dans la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, on utilise le système matriciel 2.24. Dans ces conditions, l'évolution de la tension en fonction du temps est donnée, pour les deux maillages et pour les deux fréquences, respectivement sur les figures 2.11 et 2.12.

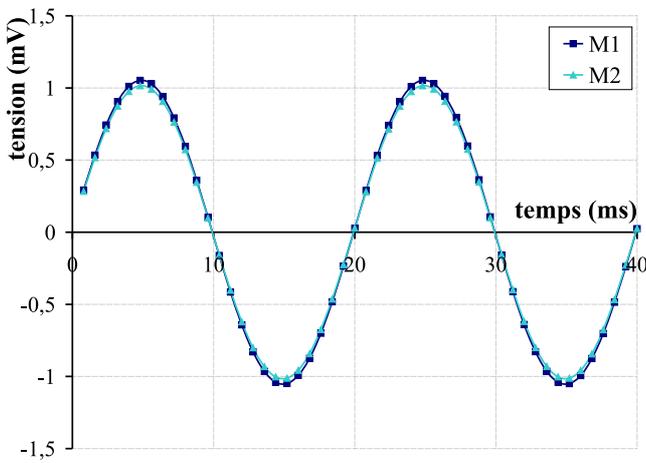


FIG. 2.11 – *Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ avec $f=50\text{Hz}$*

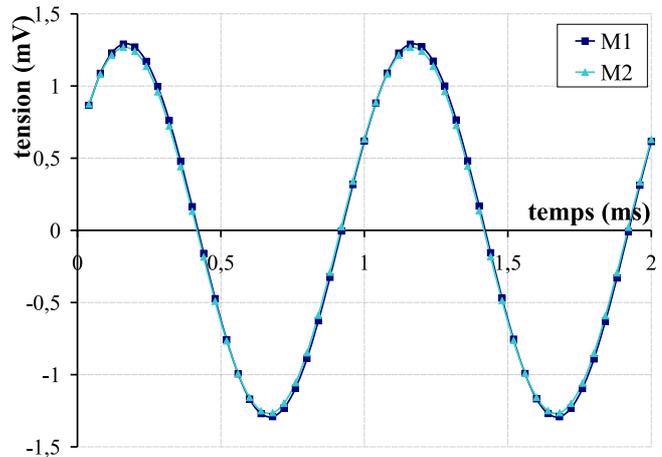


FIG. 2.12 – *Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ avec $f=1\text{kHz}$*

Pour une fréquence de 50Hz, le conducteur se comporte pratiquement comme une résistance, le déphasage de la tension par rapport au courant est très faible. En revanche, pour une fréquence de 1kHz, le déphasage est de 35 degrés et l'amplitude de la tension augmente. L'impédance du conducteur augmente à cause des effets de peau et de proximité mais également à cause de l'effet inductif.

Pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ à tension imposée, il suffit d'appliquer les conditions limites adéquates sur le potentiel scalaire φ , le système matriciel 2.12 est alors utilisé. On impose à chaque pas de temps, la valeur de tension obtenue lors de la résolution précédente à courant imposé. On obtient comme cela était prévisible un courant sinusoïdal d'une amplitude égale à $3,14A$.

Pour une fréquence d'alimentation de 50Hz, les figures 2.13 et 2.14 présentent la répartition de la densité de courant à la surface du conducteur massif et dans le plan de coupe (fig. 2.8).

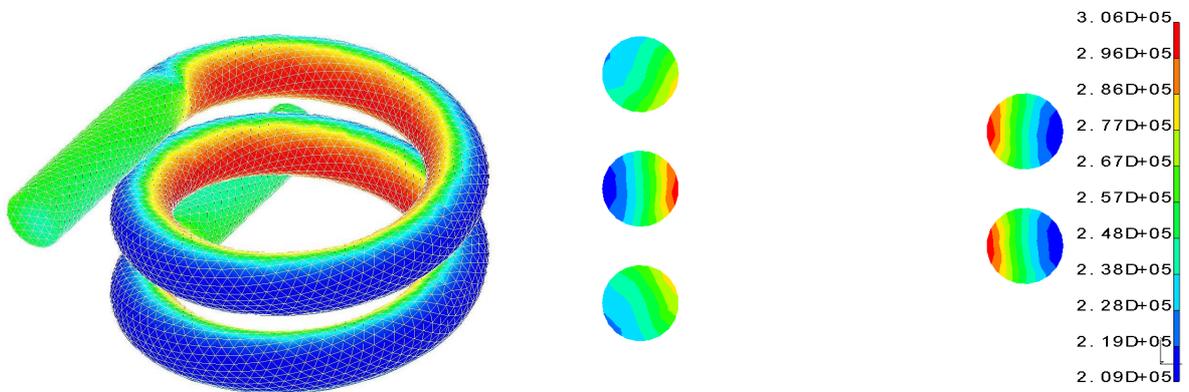


FIG. 2.13 – Répartition de la densité de \mathbf{J} en surface à $f=50\text{Hz}$ et à $t=T/4$

FIG. 2.14 – Répartition de la densité de courant \mathbf{J} dans le plan de coupe $f=50\text{Hz}$ et à $t=T/4$

A cette fréquence, la densité de courant est uniforme dans les deux parties droites du conducteur. Dans la partie hélicoidale, celle-ci est plus importante à l'intérieur de l'hélice qu'à l'extérieur de manière à "raccourcir" le parcours du courant. Pour cette fréquence, l'effet dynamique due à la variation temporelle n'est pas prédominant (voir inexistant). Dans ces conditions, une formulation électrocinétique aurait pu être utilisée pour calculer la répartition de la densité de courant.

Les figures 2.13 et 2.14 présentent la répartition de la densité de courant pour une fréquence d'alimentation de 1kHz.

A cette fréquence, l'effet de peau est nettement visible dans les parties droites du conducteur. Dans le plan de coupe, l'effet de proximité apparaît aussi visiblement. L'amplitude de la densité de courant dans le conducteur est plus élevée dans la zone proche des conducteurs voisins. Cet effet représente donc l'influence du champ magnétique produit par une partie du conducteur sur la distribution de la densité de courant.

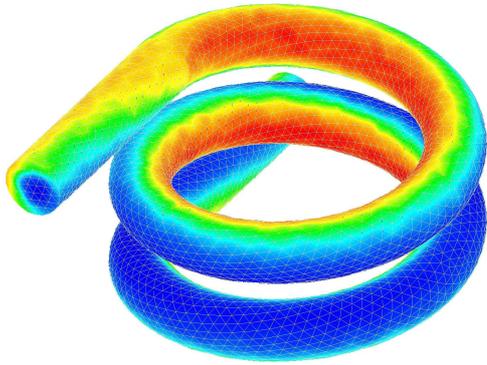


FIG. 2.15 – Répartition de J en surface à $f=1kHz$ et à $t=T/4$

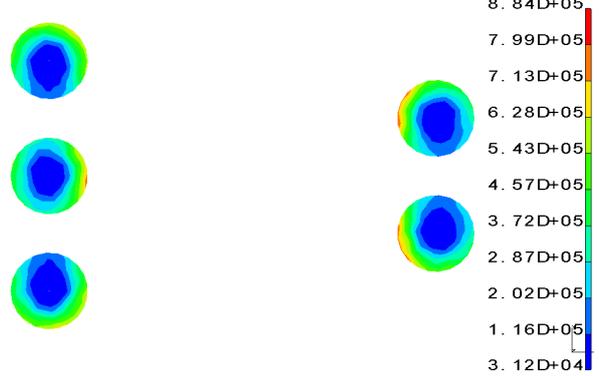


FIG. 2.16 – Répartition de J dans le plan de coupe à $f=1kHz$ et à $t=T/4$

Remarque : si le même conducteur était rectiligne, on ne verrait apparaître que l’effet de peau. La partie réelle de l’impédance (résistance du conducteur) serait alors plus faible par rapport au conducteur hélicoidal puisqu’il n’y aurait pas d’effet de proximité.

Le tableau 2.3 présente une synthèse des résultats obtenus pour les deux maillages, les amplitudes de la tension et du courant sont données pour une fréquence de 50Hz. Dans le cas d’une alimentation en courant, l’équation 2.23 est ajoutée au système matriciel et donc une inconnue. Le nombre de termes de la ligne résultante est faible car seuls les noeuds appartenant à Γ_c^1 correspondent à des termes non nuls. Par conséquent, la taille des matrices et les temps de calcul obtenus pour les deux types d’alimentation sont similaires. Un ordinateur 2GHz INTEL XEON a été utilisé pour l’ensemble des simulations numériques.

2.5.3 Formulation $T - \Omega$

L’alimentation à courant imposé s’effectue de manière simple, le courant apparaissant naturellement comme un terme source dans la formulation $T - \Omega$ (système matriciel 1.117). L’évolution de la tension en fonction du temps, dans le cas d’une alimentation en courant, est représentée, pour les deux maillages et pour les deux fréquences, sur les figures 2.17 et 2.18. La tension a été calculée en posttraitement une fois le problème résolu en appliquant la relation 2.47

Les courbes obtenues par cette formulation sont très similaires à celles données avec la formulation $A - \varphi$.

Maillage	M1		M2	
Alimentation	courant	tension	courant	tension
Inconnues	21934	21933	125038	125037
Termes non nuls de la matrice de raideur	228158	228049	1300172	1299861
Nombre d'itérations Moyen du ICCG	749	680	1929	1771
Temps de calcul (min)	12	9	222	188
$V_{max}(mV)$	1,05		1,02	
$i_{max}(A)$	3,14		3,14	

TAB. 2.3 – Pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$; paramètres et résultats du calcul avec une fréquence de 50Hz

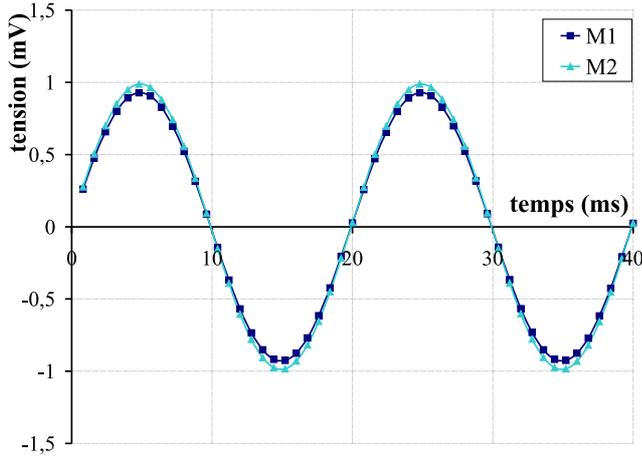


FIG. 2.17 – Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ avec $f=50Hz$

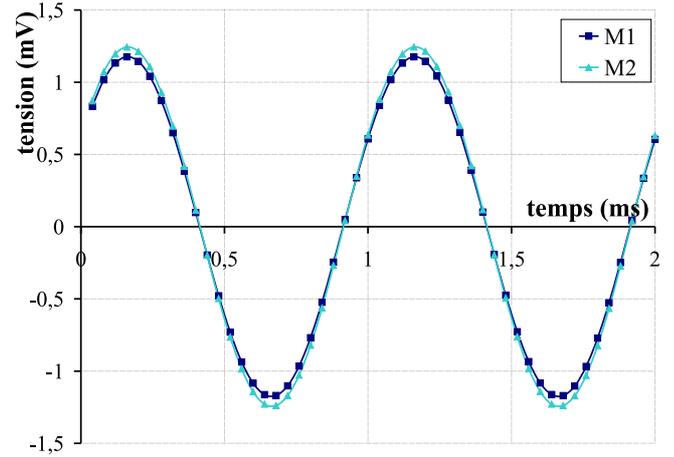


FIG. 2.18 – Evolution de la tension obtenue par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ avec $f=1kHz$

Dans le tableau 2.4, sont regroupés les résultats obtenus avec les deux maillages pour une fréquence de 50Hz. Les résultats sont cohérents dans le cas d'une alimentation en tension puisqu'on retrouve bien un courant d'amplitude 3,14A. Avec ce type d'alimentation, il a été nécessaire d'ajouter l'équation 2.47 au système matriciel. Comparé au cas de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, on constate une augmentation importante du temps de calcul quand on ajoute une équation au système. La ligne ajoutée dans le système matriciel est pratiquement pleine car le vecteur \mathbf{K} est défini dans tout le

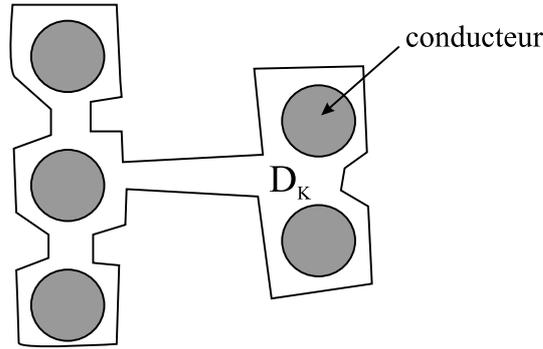
domaine ce qui à pour effet un accroissement important du nombre de termes non nuls dans la matrice de l'ordre du nombre d'inconnues.

Maillage	M1		M2	
Alimentation	courant	tension	courant	tension
Inconnues	7641	7642	50305	50306
Termes non nuls de la matrice de raideur	80665	88307	580484	630790
Nombre d'itérations moyen du ICCG	130	147	300	350
Temps de calcul (min)	2	3,5	17	25
$V_{max}(mV)$	0,928		0,987	
$i_{max}(A)$	3,14		3,14	

TAB. 2.4 – Pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$; paramètres et résultats du calcul avec une fréquence de 50Hz

2.5.4 Synthèse

Pour l'exemple étudié, les deux formulations magnétodynamiques donnent des résultats similaires (courant, tension, ...) mais la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ s'avère être la plus rapide. De plus, en réduisant le domaine de définition de \mathbf{K} , le temps de calcul, à tension imposée, peut être diminué. La réduction du domaine du vecteur \mathbf{K} peut être obtenue en définissant un domaine D_K simplement connexe incluant le conducteur. On impose alors des conditions aux limites de type $\mathbf{K} \times \mathbf{n} = 0$ sur les surfaces de D_K et les circulations de \mathbf{K} à l'extérieur de D_K sont annulées. On calcule ensuite le vecteur \mathbf{K} par la technique d'arbre présenté en annexe B. La détermination d'un domaine D_K introduit alors une étape supplémentaire pour l'utilisateur dans la définition du problème et aussi et surtout des compétences supplémentaires en topologie. Un exemple de domaine D_K est donné par la figure 2.19 dans un cas en 2D.

FIG. 2.19 – Définition d'un domaine D_K

2.6 Exemple magnétostatique à flux magnétique et force magnétomotrice imposée

2.6.1 Présentation du système

L'exemple étudié est constitué d'un domaine D en forme de "fer à cheval" où l'on se propose d'imposer un flux à l'intérieur ou une différence de potentiel magnétique à ces bornes. Ici, nous résolvons les équations de Maxwell dans le cas de la magnétostatique. Les dimensions sont précisées sur la figure 2.20.

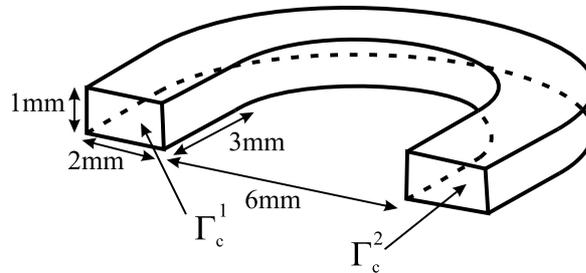


FIG. 2.20 – Présentation du système

On considère un flux magnétique Φ entrant par Γ_c^1 et sortant par Γ_c^2 et une différence de potentiel magnétique ε entre ces deux surfaces. Des conditions aux limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sont imposées sur les autres frontières de D . La perméabilité magnétique relative est fixée à 1000. Le maillage est constitué d'éléments tétraédriques avec 5842 noeuds et 24312 éléments. Dans un premier temps, les deux formulations magnétostatiques à flux magnétique Φ et à force magnétomotrice ε imposées sont comparées. Dans un second temps, l'influence du champ de vecteurs \mathbf{K} sur la convergence du gradient conjugué sera étudiée pour la formulation \mathbf{A} .

2.6.2 Comparaison des deux formulations

On applique, dans un premier temps, un flux magnétique de $1\mu Wb$, puis les différences de potentiel magnétique obtenues seront utilisées comme terme source dans les deux formulations. Les répartitions de l'induction magnétique obtenue avec les deux formulations étant très proche, nous ne présentons que celle calculée avec la formulation \mathbf{A} à flux imposé (fig. 2.21).

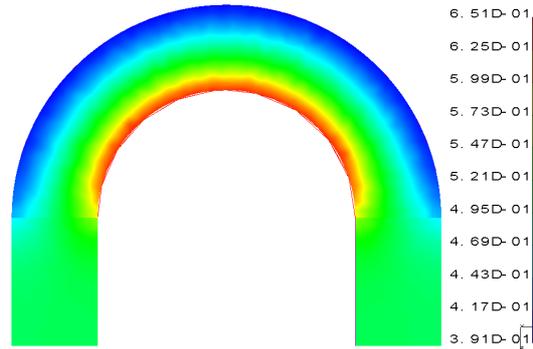


FIG. 2.21 – Répartition du module de l'induction \mathbf{B} obtenue par la formulation \mathbf{A}

L'induction magnétique est uniforme dans les parties droites. En revanche, dans le coude, celle-ci est naturellement plus importante à l'intérieur qu'à l'extérieur. Le tableau 2.5 présente une comparaison des résultats des deux formulations en fonction de différents paramètres.

Formulation	\mathbf{A}		Ω	
	Φ	ε	Φ	ε
Inconnues	23795	23796	5696	5695
Termes non nuls	180652	204448	38391	38325
Temps de calcul (s)	11,4	35	8	7,8
$\varepsilon(At)$	7,281		7,287	
$\Phi(\mu Wb)$		1		1

TAB. 2.5 – Comparaison des paramètres de calcul et des résultats pour les deux formulations

Comme pour les formulations en magnéto-dynamique, le fait d'ajouter une équation au système matriciel implique une augmentation du nombre de termes non nuls et des temps de calcul. Cet accroissement est plus important avec la formulation \mathbf{A} où on utilise le champ de vecteurs \mathbf{K} défini dans tout le domaine. L'augmentation

de la taille de la matrice est plus importante avec cette formulation que pour la formulation Ω où le flux est imposé. Dans ce dernier cas, on utilise la relation 2.49 où la fonction α est définie dans un domaine réduit contrairement au champ \mathbf{K} qui est défini sur tout le domaine.

Il a été démontré que dans le cas d'un problème magnétostatique, les énergies magnétiques W_{em}^A et W_{em}^Ω obtenues respectivement par les formulations \mathbf{A} et Ω encadrent la solution exacte W_{em}^{ex} [34].

$$W_{em}^A \leq W_{em}^{ex} \leq W_{em}^\Omega \quad (2.50)$$

Si on impose le flux magnétique Φ dans les deux formulations, on a alors :

$$\varepsilon^A \leq \varepsilon^\Omega \quad (2.51)$$

avec ε^A et ε^Ω les différences de potentiel magnétique calculées par les formulations \mathbf{A} et Ω . Cette remarque est bien vérifiée dans le tableau 2.5.

2.6.3 Etude de l'influence du champ \mathbf{K} sur la convergence

Il existe une infinité de champs \mathbf{K} qui peuvent être utilisés pour imposer un flux dans la formulation \mathbf{A} . Dans la suite, nous comparons l'influence de la distribution de ce champ sur la convergence du gradient conjugué.

Dans le cas de la formulation \mathbf{A} , le champ obtenu par une technique d'arbres est noté \mathbf{K}^D , celui-ci est défini dans tout le domaine. Ce domaine, où \mathbf{K} est non nul, peut être restreint par des conditions aux limites adéquates comme cela a été signalé précédemment. Ainsi, on peut réduire le domaine de définition du champ \mathbf{K} à un ensemble d'arêtes sur la surface du domaine D tel que la somme des circulations le long d'une boucle autour de D soit égale au flux et tel que la somme des circulations sur chaque facette appartenant à la frontière soit égale à zéro pour conserver une divergence nulle. Dans notre exemple, on considère ainsi deux champs, \mathbf{K}^{c1} et \mathbf{K}^{c2} . Le premier \mathbf{K}^{c1} a son domaine de définition situé sur la surface intérieure du "fer à cheval" et le second \mathbf{K}^{c2} sur la surface extérieure. La figure 2.22 présente la technique de construction de \mathbf{K}^{c1} . Un ensemble d'arêtes sur lesquelles la circulation de \mathbf{K}^{c1} est non nulle est ainsi défini [47, 59].

Les répartitions spatiales de \mathbf{K}^{c1} et \mathbf{K}^{c2} sont respectivement données par les figures 2.23 et 2.24. On vérifie bien qu'elles sont très "localisées".

La convergence, en fonction des différents types de champ \mathbf{K} , est étudiée avec les deux techniques utilisées pour imposer des grandeurs globales (le flux qui s'impose

2.6. EXEMPLE MAGNÉTOSTATIQUE À FLUX MAGNÉTIQUE ET FORCE MAGNÉTOTRICE IMPOSÉE

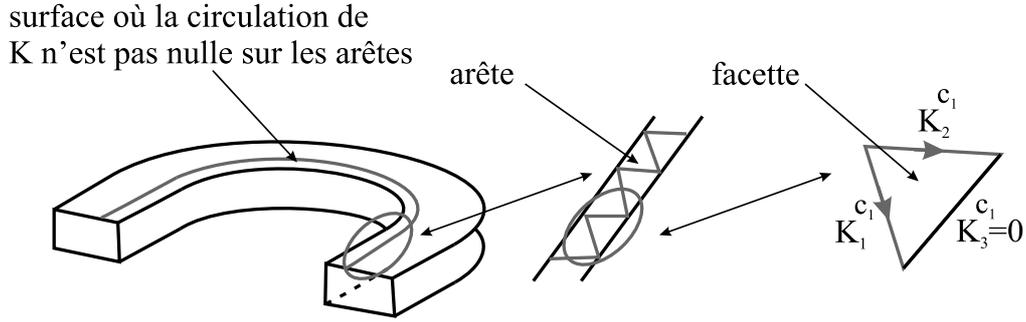


FIG. 2.22 – Construction de K^{c1} .

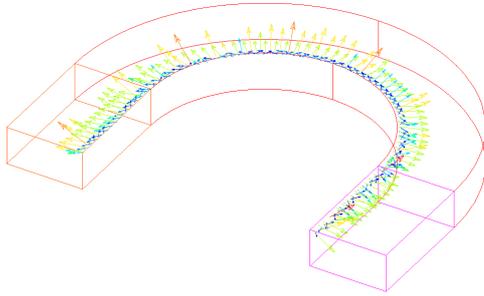


FIG. 2.23 – Répartition de K^{c1}

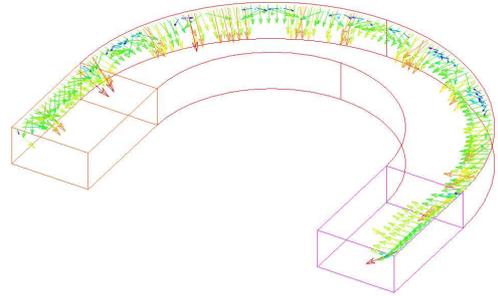


FIG. 2.24 – Répartition de K^{c2}

naturellement et la différence de potentiel magnétique qui est imposée en ajoutant une équation supplémentaire). Quelque soit le type d'alimentation, les résultats issus des trois champs de vecteurs K^D , K^{c1} et K^{c2} sont naturellement égaux. Les figures 2.25 et 2.26 présentent respectivement l'évolution du logarithme de l'erreur en fonction des itérations du gradient conjugué à flux magnétique et force magnétomotrice imposés ceci pour les trois champs de vecteurs K_D , K^{c1} et K^{c2} .

A flux magnétique imposé, la convergence la plus rapide est obtenue par les deux champs K^{c1} et K^{c2} . Dans les trois systèmes matriciels issus de K^D , K^{c1} et K^{c2} , la matrice de raideur est la même, seul le terme source est affecté. On rappelle que celui-ci est égal à : $-R^t M_{ff}^{\mu-1} R K_a \Phi$. Dans une formulation A à différence de potentiel magnétique imposée, on ajoute une équation au système. On constate que la convergence est la plus rapide avec K^D . De plus un écart apparaît entre les évolutions de l'erreur par K^{c1} et K^{c2} . Avec K^D , l'inconnue Φ est associée à un plus grand nombre d'éléments contrairement à K^{c1} et K^{c2} où seuls les éléments en contact avec des arêtes dont la circulation de K^{c1} et K^{c2} est non nulle sollicitent l'inconnue Φ .

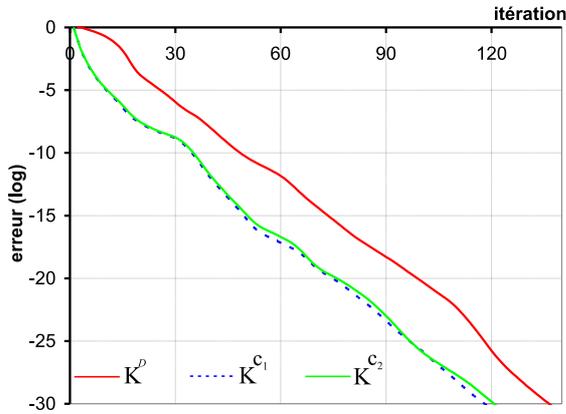


FIG. 2.25 – Convergence du gradient conjugué à flux magnétique imposé

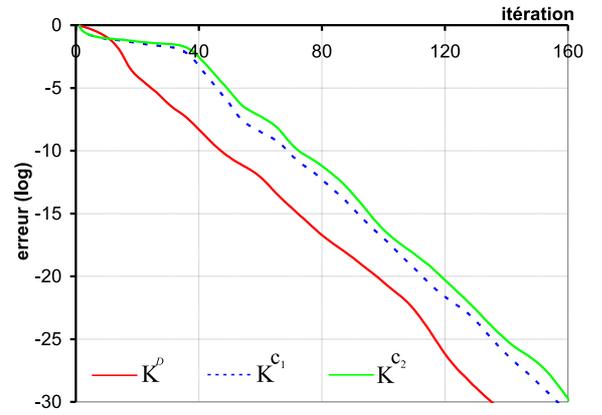


FIG. 2.26 – Convergence du gradient conjugué à force magnétomotrice imposée

2.6.4 Synthèse

Pour l'exemple étudié, les deux formulations magnétostatiques donnent des résultats très proches quelque soit le type de grandeur magnétique imposée.

Dans le cas de la formulation \mathbf{A} , l'étude de la convergence du gradient conjugué a montré que la répartition spatiale de \mathbf{K} a une légère influence sur la convergence du gradient conjugué mais pas sur le résultat.

2.7 Couplage d'un modèle élément finis avec un circuit magnétique extérieur

On considère un système magnétostatique où un couplage d'un modèle élément finis avec un circuit magnétique équivalent a été réalisé à l'aide des relations permettant de calculer les grandeurs globales [45].

2.7.1 Présentation du dispositif étudié

Le dispositif est composé de trois dents ferromagnétiques dont une est en regard par rapport aux autres. La perméabilité relative des dents est fixée à 1000. Les figures 2.27 et 2.28 présentent la géométrie et les dimensions des dents. Le domaine d'étude D de frontière Γ est formé des trois dents enfermées dans une boîte d'air (fig. 2.29). Le maillage est composé de 85681 éléments tétraédriques et de 16201 noeuds.

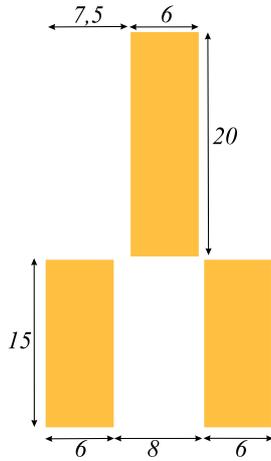


FIG. 2.27 - Géométrie des dents - vue de face (mm)

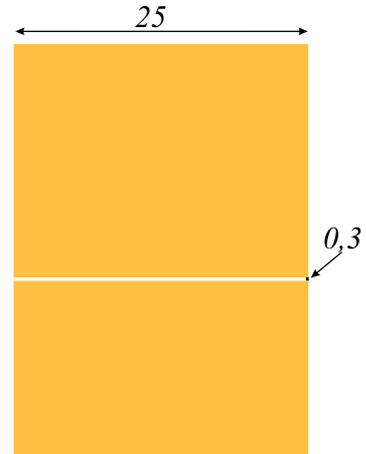


FIG. 2.28 - Géométrie des dents - vue de côté (mm)

Les trois surfaces des dents en contact avec la frontière Γ , et ayant des conditions aux limites de type $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$, sont notées Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 .

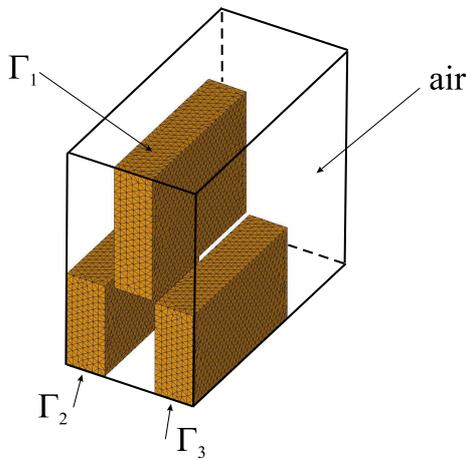


FIG. 2.29 - Modèle numérique

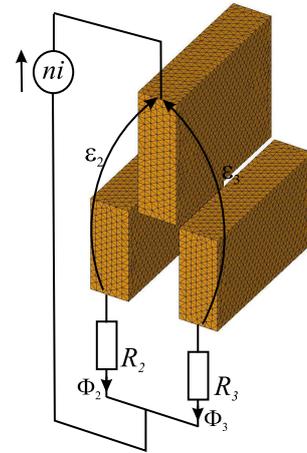


FIG. 2.30 - Couplage du modèle élément finis avec le circuit magnétique équivalent

Les conditions aux limites du domaine D sont donc les suivantes :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ et } \Gamma_3 \quad (2.52)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3 \quad (2.53)$$

Le circuit magnétique équivalent décrivant le fonctionnement du système extérieur couplé au modèle élément finis est donné sur la figure 2.30. Il est constitué d'une

force magnétomotrice ni et de deux réluctances R_2 et R_3 (avec $R_2 = 227000H^{-1}$ et $R_3 = 294000H^{-1}$). Les flux magnétiques traversant les surfaces Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 sont respectivement notées Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 . Les différences de potentiel magnétique entre Γ_1 et Γ_2 et entre Γ_1 et Γ_3 sont notées ε_2 et ε_3 .

Dans la suite, on présente les deux formulations magnétostatiques couplées avec le circuit magnétique dans le cas où le terme ni est imposé.

2.7.2 Couplage avec la formulation en potentiel scalaire

Compte tenu des conditions aux limites sur Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , en prenant le potentiel magnétique sur Γ_1 comme référence, on pose :

$$\Omega = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad (2.54)$$

$$\Omega = \varepsilon_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \quad (2.55)$$

$$\Omega = \varepsilon_3 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad (2.56)$$

En reprenant les notations introduites précédemment, le potentiel scalaire magnétique Ω s'écrit sous forme discrète :

$$\tilde{\Omega}_n = \tilde{\Omega}'_n + \varepsilon_2 \tilde{\alpha}_{n_2} + \varepsilon_3 \tilde{\alpha}_{n_3} \quad (2.57)$$

avec $\tilde{\alpha}_{n_2}$ (resp. $\tilde{\alpha}_{n_3}$) le vecteur des composantes de la fonction scalaire α_2 (resp. α_3) définie par la surface Γ_2 (resp. Γ_3). En utilisant ces fonctions scalaires, les flux magnétiques Φ_2 et Φ_3 s'écrivent :

$$\Phi_2 = -(\mathbf{M}_{aa}^\mu \widetilde{\mathbf{H}}_a)^t (\widetilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_2}) \quad (2.58)$$

$$\Phi_3 = -(\mathbf{M}_{aa}^\mu \widetilde{\mathbf{H}}_a)^t (\widetilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_3}) \quad (2.59)$$

Pour réaliser le couplage du modèle élément finis avec le circuit magnétique extérieur, on utilise les deux relations relatives au circuit, qui s'écrivent :

$$ni = \varepsilon_2 + R_2 \Phi_2 \quad (2.60)$$

$$ni = \varepsilon_3 + R_3 \Phi_3 \quad (2.61)$$

Dans ces conditions, les termes ε_2 , ε_3 , Φ_2 et Φ_3 sont des inconnues du problème. Finalement, le système à résoudre est constitué des relations 1.123, 2.58 et 2.59 et des deux équations de couplage 2.60 et 2.61. Ainsi, le système matriciel à résoudre s'écrit :

$$\left| \begin{array}{cccc|cc|c}
 \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_2} & \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_3} & 0 & 0 & \tilde{\Omega}'_n & 0 \\
 \tilde{\alpha}_{n_2}^t \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\alpha}_{n_2}^t \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_2} & \tilde{\alpha}_{n_2}^t \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_3} & 1 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\
 \tilde{\alpha}_{n_3}^t \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\alpha}_{n_3}^t \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_2} & \tilde{\alpha}_{n_3}^t \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\alpha}_{n_3} & 0 & 1 & \varepsilon_3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & R_2 & 0 & \Phi_2 & ni \\
 0 & 0 & 1 & 0 & R_3 & \Phi_3 & ni
 \end{array} \right| = \quad (2.62)$$

2.7.3 Couplage avec la formulation en potentiel vecteur

Dans le cas de la formulation \mathbf{A} , deux sous domaines, D_2 et D_3 supports de champs \mathbf{N} relatif aux flux Φ_2 et Φ_3 , sont à définir. On note \mathbf{N}_2 le champ associé au sous domaine D_2 et \mathbf{N}_3 le champ associé au sous domaine D_3 qui vérifient :

$$\operatorname{div} \mathbf{N}_2 = 0 \quad \text{sur } D_2 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{N}_3 = 0 \quad \text{sur } D_3 \quad (2.63)$$

$$\int_{\Gamma_{12}} \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{22}} \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 1 \quad (2.64)$$

$$\int_{\Gamma_{13}} \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{23}} \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 1 \quad (2.65)$$

$$\mathbf{N}_2 = 0 \quad \text{sur } D - D_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_3 = 0 \quad \text{sur } D - D_3 \quad (2.66)$$

Les frontières de D_2 doivent contenir impérativement une partie plus ou moins importante des surfaces Γ_1 et Γ_2 et les frontières de D_3 une partie des surfaces Γ_1 et Γ_3 . La figure 2.31 présente les sous domaines D_2 et D_3 .

En reprenant les notations introduites précédemment, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} s'écrit sous forme discrète :

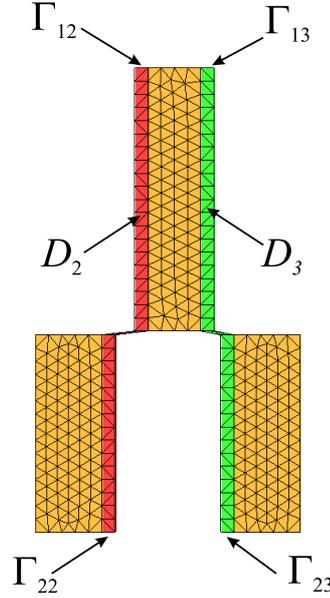
$$\mathbf{A}_a = \mathbf{A}'_a + \mathbf{K}_{a_2} \Phi_2 + \mathbf{K}_{a_3} \Phi_3 \quad (2.67)$$

En utilisant les champs \mathbf{N}_2 et \mathbf{N}_3 , les différences de potentiels ε_2 et ε_3 s'écrivent :

$$\varepsilon_2 = (\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f)^t \mathbf{N}_{f_2} \quad (2.68)$$

$$\varepsilon_3 = (\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f)^t \mathbf{N}_{f_3} \quad (2.69)$$

Comme pour la formulation Ω , les termes ε_2 , ε_3 , Φ_2 et Φ_3 sont des inconnues du problème. Le système à résoudre est constitué des relations 1.122, 2.68 et 2.69 et des deux équations de couplage 2.60 et 2.61 introduites par le circuit magnétique extérieur.

FIG. 2.31 – Définition des sous domaines D_2 et D_3

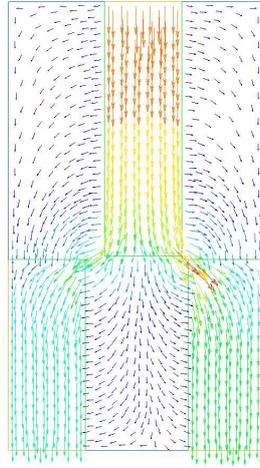
Finalement, le système matriciel s'écrit :

$$\begin{vmatrix}
 \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} & \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_{a_2} & \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_{a_3} & 0 & 0 \\
 \mathbf{K}_{a_2}^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} & \mathbf{K}_{a_2}^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_{a_2} & \mathbf{K}_{a_2}^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_{a_3} & -1 & 0 \\
 \mathbf{K}_{a_3}^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} & \mathbf{K}_{a_3}^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_{a_2} & \mathbf{K}_{a_3}^t \mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{K}_{a_3} & 0 & -1 \\
 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{R_2} & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{R_3}
 \end{vmatrix}
 \left\| \begin{array}{l} \mathbf{A}'_a \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-ni}{R_2} \\ \frac{-ni}{R_3} \end{array} \right\|
 \quad (2.70)$$

2.7.4 Résultats

La force magnétomotrice ni constitue le terme source du système couplé. La valeur de cette dernière est fixée à 500A. La figure 2.32 présente la répartition de l'induction magnétique obtenue par la formulation \mathbf{A} dans les conditions précédemment présentées.

Le tableau 2.6 présente l'ensemble des grandeurs obtenues par les deux formulations magnétostatiques couplés avec le circuit externe.

FIG. 2.32 – Répartition de \mathbf{B} dans un plan de coupe

Formulation	\mathbf{A}	Ω
$\Phi_2(\mu Wb)$	120	114
$\Phi_3(\mu Wb)$	145	138
$\varepsilon_2(A)$	472	474
$\varepsilon_3(A)$	457	459

TAB. 2.6 – Comparaison des deux formulations magnétostatiques couplées avec un circuit externe

D'une part, les résultats obtenus par les deux formulations magnétostatiques sont très proches. D'autre part, des calculs ont été menés en utilisant une autre approche [45] qui conduit également à des résultats sensiblement équivalents.

En utilisant les notations et les outils développés dans ce chapitre, cette étude a montré qu'un couplage entre un modèle élément fini et un circuit magnétique équivalent peut être réalisé de manière simple.

2.8 Influence, sur les pertes dans les conducteurs, de l'épanouissement du champ dans l'entrefer

Dans les systèmes électrotechniques travaillant à haute fréquence, la répartition de la densité de courant, circulant dans les bobinages, n'est pas uniforme. Aussi, le

modèle de type "inducteur bobiné" où un seul milieu représente le bobinage traversé par une densité uniforme de courant et supposée homogène n'est plus valable. Plusieurs phénomènes sont à prendre en compte. Ainsi, on trouve l'effet de peau, l'effet de proximité (influence du champ créé par un conducteur sur le comportement de ces voisins) et l'effet d'épanouissement du champ au niveau d'un entrefer.

Dans ce paragraphe, on se propose de mettre en évidence l'ensemble de ces effets en étudiant l'évolution de l'impédance d'une bobine, celle-ci étant placée ou non dans un circuit magnétique, en fonction de la fréquence et de la hauteur de l'entrefer. Cette étude fera l'objet d'une comparaison simulation/expérience.

2.8.1 Présentation des dispositifs

On considère un bobinage constitué de 18 spires, le conducteur utilisé est en cuivre de diamètre 1mm (fig. 2.33). On peut associer à ce bobinage un circuit magnétique en ferrite de type EDT34 (fig. 2.34). Ce circuit magnétique possède un entrefer dont on contrôle l'épaisseur.

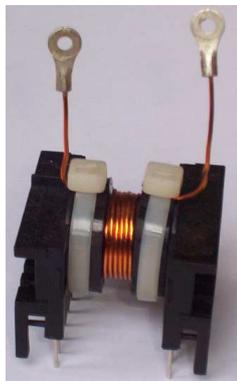


FIG. 2.33 – *Bobinage seul*

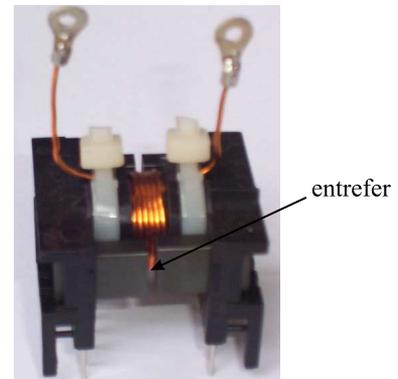


FIG. 2.34 – *Introduction du circuit magnétique*

Dans la suite, nous étudions l'influence de la fréquence sur la résistance du bobinage seul (système S1) et l'influence de l'épanouissement du champ magnétique au niveau de l'entrefer sur la résistance du bobinage (système S2). Les mesures de résistance ont été réalisées avec un analyseur d'impédance HP4294A. Les résultats issus des modèles numériques seront comparés à l'expérience.

2.8.2 Présentation des modèles

Dans la suite, on suppose, comme souvent pour les bobinages, qu'une spire est parfaitement circulaire et donc dans un plan perpendiculaire à l'axe de la bobine (fig. 2.35). En pratique ceci n'est pas vrai puisque la spire ne se referme pas sur elle-même (fig. 2.36).

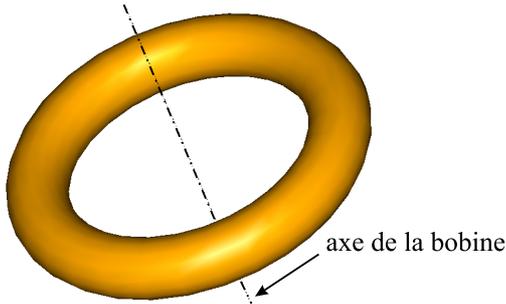


FIG. 2.35 – *Modèle d'une spire*

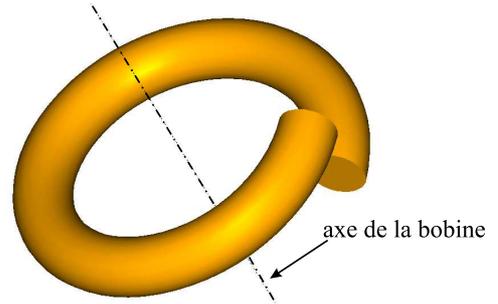


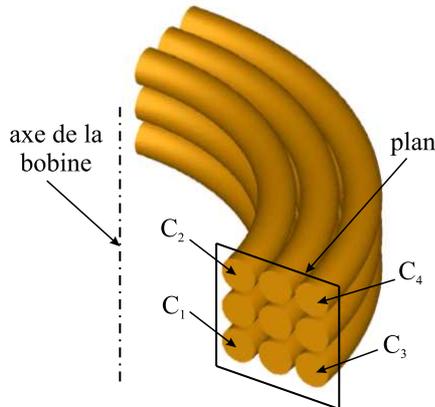
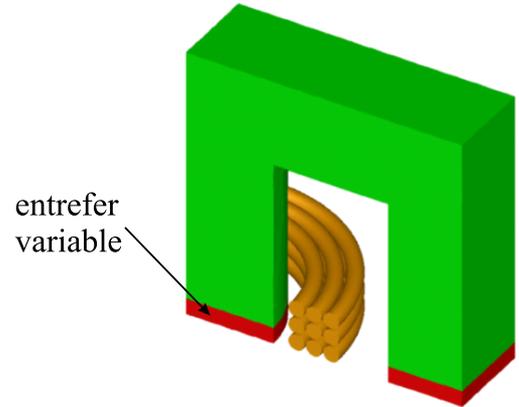
FIG. 2.36 – *Spire réelle*

Par conséquent, la bobine (S1) est alors supposée être formée de 18 spires circulaires, le problème devient alors axisymétrique et une résolution en 2D est suffisante.

En pratique, les conducteurs étant tous en série, ils sont traversés par le même courant. Dans la suite, pour mettre en oeuvre les outils présentés précédemment, nous utilisons un modèle 3D où nous ne modélisons que 1/8 de la structure (fig. 2.37). Pour le système S2 où apparaît le circuit magnétique qui ne possède pas de symétrie de révolution, une modélisation 3D est absolument nécessaire et 1/8 de la structure a également été modélisée (fig. 2.38). Les 9 conducteurs en cuivre du bobinage modélisé sont massifs c'est à dire qu'ils possèdent une conductivité électrique σ égale à $5,9 \cdot 10^7$ et une perméabilité relative unitaire. La perméabilité relative du circuit magnétique est supposée linéaire et égale à 1600.

Un seul et même maillage a été réalisé pour l'étude des deux systèmes. Celui-ci est composé de 119851 noeuds et 683136 éléments tétraédriques, seuls les caractéristiques des différentes régions du maillage sont modifiées. Pour déterminer la résistance du bobinage à une fréquence donnée, un courant sinusoïdal de valeur efficace I_{ef} est imposé dans chaque conducteur. La résistance R est alors déduite des pertes Joule totale P_j :

$$R = \frac{P_j}{I_{ef}^2} \quad \text{avec} \quad P_j = \int \mathbf{E} \mathbf{J} dD \quad (2.71)$$

FIG. 2.37 – *Modèle du bobinage seul (S1)*FIG. 2.38 – *Modèle du bobinage et du circuit magnétique (S2)*

Comme le courant est identique dans tous les conducteurs massifs, nous utilisons les formulations magnétodynamiques imposant le même courant dans les neuf conducteurs. Le régime transitoire n'étant pas étudié, les formes fréquentielles des formulations sont utilisées.

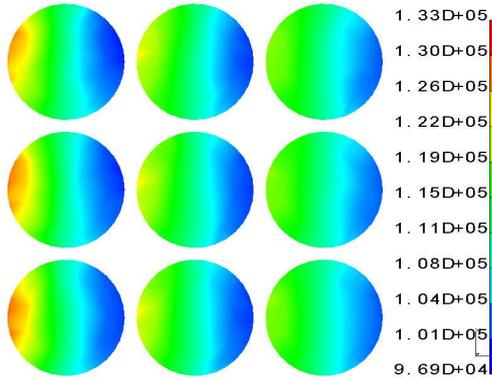
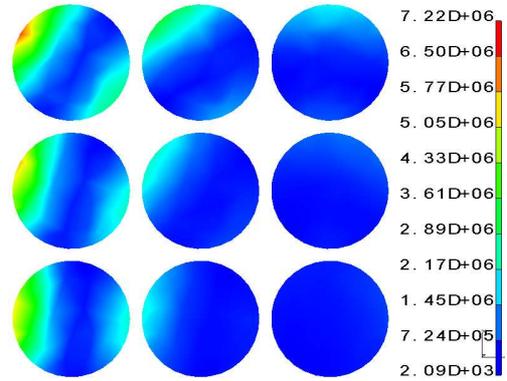
2.8.3 Analyse des résultats

On se propose de comparer les résultats obtenus par les deux formulations magnétodynamiques sur l'évolution de la résistance en fonction de la fréquence avec le système S1 et sur l'évolution de la résistance du bobinage en fonction de la taille de l'entrefer avec S2. Les paramètres des deux formulations (temps de calcul, taille de la matrice de raideur, ...) seront ensuite présentés et commentés.

2.8.3.1 Influence de la fréquence sur la résistance du bobinage

Les figures 2.39 et 2.40 présentent la répartition de la densité de puissance obtenue avec la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ pour une fréquence de $1kHz$ et $50kHz$ avec le bobinage seul (S1) dans un plan précisé sur la figure 2.37.

Pour une fréquence de $1kHz$, l'épaisseur de peau est de $3,7mm$. Comme le diamètre des conducteurs est de $1mm$, l'effet de peau intervient peu. Pour une fréquence de $1kHz$, les formulations magnétodynamiques donnent des résultats très proches des formulations électrocinétiques. On retrouve des pertes Joules qui ne sont pas homogènes dans une section des conducteurs mais réparties de la même manière dans les 9 conducteurs avec une concentration plus forte dans chacun de ceux-ci dans la


 FIG. 2.39 – Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules pour une fréquence de $1kHz$ par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$

 FIG. 2.40 – Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules pour une fréquence de $50kHz$ par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$

zone proche du rayon intérieur. Pour une fréquence de $50kHz$, la répartition n'est plus identique dans les différents conducteurs, les pertes Joules sont concentrées dans les conducteurs situés dans le centre du bobinage. On voit apparaître aussi l'effet de proximité qui est l'influence du champ magnétique créé par un conducteur sur la répartition de la densité de courant dans les autres conducteurs voisins.

Le tableau 2.7 présente la tension obtenue aux bornes des quatre conducteurs précisés sur la figure 2.37. Dans le cas de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, les tensions aux bornes des conducteurs constituent des inconnues dans le système matriciel, celles-ci sont donc directement obtenues. Pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$, la relation 2.47 a été utilisée en postraitement.

Formulation	f=1kHz				f=50kHz			
	$\mathbf{T} - \Omega$		$\mathbf{A} - \varphi$		$\mathbf{T} - \Omega$		$\mathbf{A} - \varphi$	
Tension	<i>Re</i>	<i>Im</i>	<i>Re</i>	<i>Im</i>	<i>Re</i>	<i>Im</i>	<i>Re</i>	<i>Im</i>
C_1	0,235	0,313	0,238	0,316	0,326	15,5	0,34	15,6
C_2	0,235	0,382	0,239	0,385	1,11	18	1,17	18,1
C_3	0,311	0,485	0,316	0,488	2,63	21,57	2,76	21,6
C_4	0,310	0,402	0,314	0,404	1,45	18,8	1,52	18,9

 TAB. 2.7 – Tension (V) obtenue aux bornes de quatres conducteurs

Pour une fréquence de $1kHz$, le problème est quasiment de type électrocinétique. Par conséquent, les parties réelles des tensions calculées aux bornes de C_1 et C_2

sont proches, de même que celles aux bornes de C_3 et C_4 . Les parties imaginaires correspondent à la contribution de l'effet inductif. Ces valeurs dépendent donc de l'inductance des conducteurs. Pour une fréquence de $50kHz$, les tensions aux bornes des conducteurs augmentent. Comme les parties imaginaires dépendent de l'effet inductif, celles-ci sont donc quasiment multipliées par 50. Les parties réelles ne sont plus égales pour les conducteurs situés sur le même rayon du bobinage ($C_1 - C_2$ et $C_3 - C_4$) par une répartition du champ différente dans chaque conducteur.

La figure 2.41 présente l'évolution de la résistance du bobinage en fonction de la fréquence d'alimentation pour le système S1.

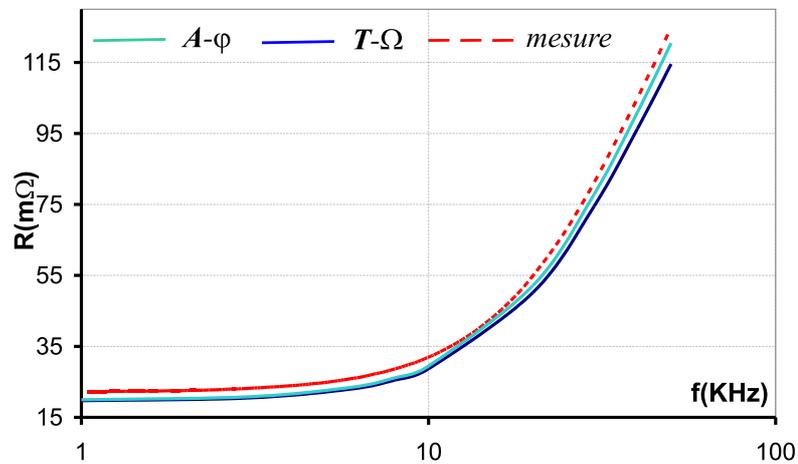


FIG. 2.41 – Influence de la fréquence sur la résistance du bobinage

Comme l'effet de peau et de proximité augmentent en fonction de la fréquence, la résistance du bobinage croît également.

Les courbes obtenues par les deux formulations magnétodynamiques sont proches de la mesure, l'écart maximal entre la simulation et l'expérience est de 4% pour la formulation $A - \varphi$ et de 8% pour la formulation $T - \Omega$. Cette comparaison montre que les deux formulations retranscrivent bien le comportement du système.

2.8.3.2 Influence de l'entrefer sur la résistance du bobinage

Dans la suite, on ne s'intéresse plus à l'effet de la fréquence, celle-ci est fixée à $50kHz$. On se focalise sur l'augmentation des pertes dues à l'épanouissement des lignes de champ lorsque l'on introduit un entrefer. Effectivement, quand un conducteur est proche de l'entrefer celui-ci sera traversé par une partie du flux circulant dans le noyau. Ce flux génère localement une valeur d'induction crête beaucoup plus

élevée que celle créée par un conducteur seul (S1) (fig. 2.42). Par conséquent, il apparaît des pertes supplémentaires dans les conducteurs proches de l'entrefer. Dans la suite, nous nous proposons d'évaluer l'augmentation de ces pertes en fonction de l'épaisseur de l'entrefer par l'intermédiaire de la variation de la résistance du bobinage.

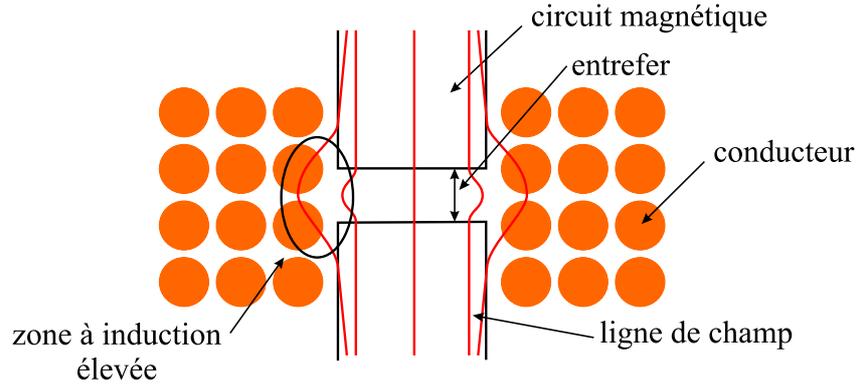


FIG. 2.42 – Illustration de l'effet de frange

Pour une fréquence d'alimentation de $50kHz$, les figures 2.43 et 2.44 présentent la répartition de la densité de puissance pour le système $S2$ sans entrefer et pour un entrefer de $2,4mm$ dans un plan précisé sur la figure 2.37.

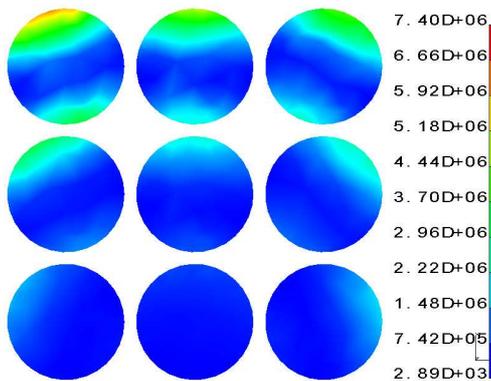


FIG. 2.43 – Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules sans entrefer par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$

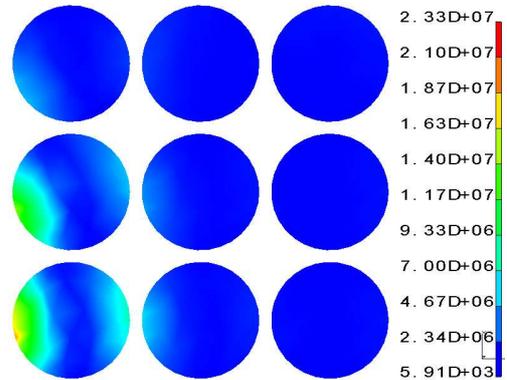


FIG. 2.44 – Répartition de la densité de puissance (W/m^3) par effet Joules par $S2$ avec un entrefer de $2,4mm$ par la formulation $\mathbf{T} - \Omega$

Une différence est nettement visible entre ces deux figures de champ. L'effet d'épanouissement du champ magnétique au niveau de l'entrefer influence la répartition de la densité de courant dans les conducteurs les plus proches de l'entrefer. Cet

effet influence donc les pertes Joules dans le conducteur situé en face de l'entrefer (conducteur en bas à gauche sur la figure 2.44).

La figure 2.45 présente l'évolution de la résistance du bobinage en fonction de la taille de l'entrefer obtenue par le calcul et expérimentalement pour une fréquence de $50kHz$. Dans les conditions de mesure, la partie réelle du bobinage prend en compte d'une part les pertes dans le bobinage et d'autre part les pertes fer dans le noyau ferromagnétique. Ces dernières sont considérées ici comme négligeables au vu du matériau magnétique utilisé pour réaliser le noyau. Pour des entrefers inférieurs à $0,8mm$, les valeurs de la mesure ne sont pas données, celles-ci sont peu précises. En effet, lorsque l'entrefer est faible, l'impédance du bobinage est trop inductive, il est donc difficile de mesurer précisément la partie réelle.

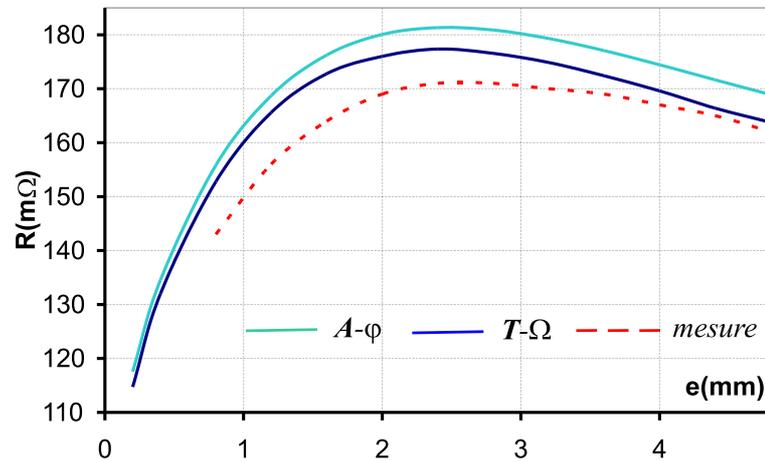


FIG. 2.45 – Evolution de la résistance du bobinage en fonction de la taille de l'entrefer

Les courbes obtenues par les deux formulations ont une forme similaire à celle donnée par la mesure. Sur ces courbes, deux zones peuvent être observées. Une première où la résistance du bobinage augmente rapidement en fonction de la taille de l'entrefer. L'effet de l'épanouissement augmente les pertes des conducteurs baignant dans le flux du noyau. Mais d'autre part, le courant étant fixé, le flux circulant dans le noyau diminue. Par conséquent, pour des faibles valeurs d'entrefer, le premier effet est prédominant, on a alors un accroissement de la résistance. Par contre, au delà d'une valeur d'entrefer de $2,4mm$, la réduction du flux prédomine et la résistance diminue.

En ce qui concerne l'écart entre la simulation et la mesure, celui-ci est de 4% pour la formulation $A - \varphi$ et de 8% pour la formulation $T - \Omega$. Cette comparaison

simulation-expérience montre une bonne concordance des résultats compte tenu des erreurs de mesure que l'on peut estimer être inférieur à 3%.

2.8.3.3 Paramètres de calcul des modèles

Dans le tableau 2.8, nous avons regroupé l'ensemble des paramètres de calcul pour les deux formulations. Les temps de calcul correspondent à ceux nécessaires pour la détermination de la courbe présentée à la figure 2.45 qui comprend 10 points.

Formulation	$\mathbf{A} - \varphi$	$\mathbf{T} - \Omega$
Inconnues	852360	329262
Termes non nuls de la matrice de raideur	10055954	3943611
Nombre d'itérations moyen du ICCG	5010	800
Temps de calcul (heures)	33	2,4

TAB. 2.8 – Paramètres de l'application

Les conclusions que nous avons faites pour les formulations magnétodynamiques temporelles restent valables sous leurs formes fréquentielles. La formulation $\mathbf{A} - \varphi$ demande des ressources mémoires, un nombre d'itérations et des temps de calcul plus importants que la formulation $\mathbf{T} - \Omega$.

2.8.4 Synthèse

L'influence de la fréquence sur la résistance d'un bobinage a été étudiée sur un système de type inductance dans l'air. De même, un dispositif composé d'un bobinage et d'un circuit magnétique à entrefer variable a mis en évidence l'influence sur la résistance du bobinage de l'épanouissement du champ au niveau de l'entrefer. Ces deux systèmes ont été étudiés par les deux formulations magnétodynamiques fréquentielles. Une bonne concordance des résultats a été montrée par les diverses comparaisons simulation-expérience. Ainsi, la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ semble être la plus adaptée en raison des temps de calcul et des ressources mémoires moindre qu'avec la formulation $\mathbf{A} - \Omega$.

Compte tenu du maillage obtenu (683136 éléments), ce type d'étude n'est réalisable qu'avec des bobinages composés de peu de spires. Dans le cas contraire, des méthodes d'homogénéisation peuvent être utilisées [16, 32]. Avec ces méthodes, l'ensemble des conducteurs d'un bobinage forme un seul et même milieu dont le comportement électrique et magnétique est similaire à celui des conducteurs.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé l'imposition des grandeurs globales dans les différentes formulations en potentiels. Dans le cas où elle n'est pas intrinsèquement associée à un potentiel introduit, son imposition est réalisée par l'ajout d'une équation utilisant une fonction scalaire ou vectorielle supplémentaire. Les différents résultats sur les exemples traités ont montré la validité des méthodes employées. Ainsi, une bonne concordance des résultats a été obtenue pour les deux formulations associées aux différents problèmes étudiés. Les comparaisons ont donc été réalisées au niveau des temps de calcul et des tailles mémoires requis. En se basant sur ces critères, la formulation magnétodynamique $\mathbf{T} - \Omega$ et sa déclinaison magnétostatique s'avèrent être les plus performantes.

Chapitre 3

Calcul d'un flux magnétique local

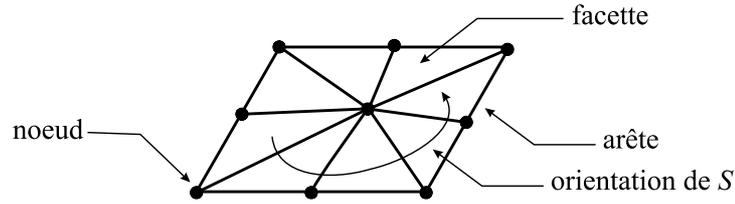
3.1 Introduction

Nous avons vu dans ce qui précède qu'il était possible de calculer le flux à travers un inducteur ou à travers une surface s'appuyant sur la frontière du domaine. Néanmoins, il peut être intéressant de calculer un flux plus localement à travers une surface située à l'intérieur du domaine. Pour les formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , le calcul d'une telle grandeur ne pose pas de problème puisqu'il suffit de calculer la circulation de \mathbf{A} sur un contour d'une surface. Par contre, pour les formulations discrètes en potentiel scalaire magnétique Ω , comme la composante normale de l'induction magnétique n'est pas conservée, on ne peut définir la notion de flux magnétique. Néanmoins, plusieurs méthodes existent pour déterminer une image d'une telle grandeur. Dans un premier temps, nous nous proposons de présenter et de comparer les différentes méthodes sur deux exemples académiques. Puis, dans un second temps, nous comparerons les flux calculés et mesurés dans le cas d'une machine synchrone à aimants permanents.

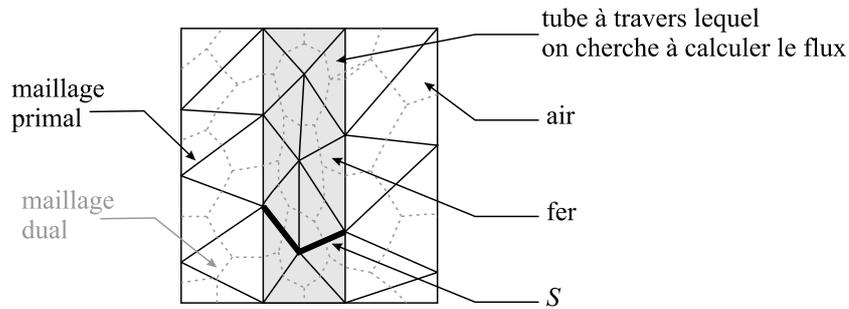
3.2 Présentation du problème

Dans la suite, on considère une surface S contractile supportée par les facettes du maillage primal (fig. 3.1). On note n_a^S le nombre d'arêtes formant la frontière ∂S et n_f^S le nombre de facettes de S . L'orientation de S est fixée arbitrairement, celle-ci oriente implicitement son contour ∂S (fig. 3.1).

Comme nous l'avons déjà précisé, le maillage dual est implicite dans le cas de la méthode des éléments finis et peut posséder une structure très complexe difficilement

FIG. 3.1 – Définition de la surface S

exploitable. D'autre part, le maillage primal épouse autant que possible la géométrie du système ce qui n'est pas le cas du maillage dual. La frontière entre deux milieux est supportée par les facettes, les arêtes et les noeuds du maillage primal. Il semble donc plus naturel pour l'utilisateur potentiel de définir S sur le maillage primal (fig. 3.2).

FIG. 3.2 – Exemple en 2D d'une surface S s'appuyant sur le maillage primal

Pour simplifier la présentation, on se placera dans le cas de la magnétostatique sachant que cette méthode doit pouvoir être étendue au cas de la magnétodynamique.

3.3 Cas de la formulation \mathbf{A}

Dans le cas de la formulation \mathbf{A} , le flux magnétique Φ_A traversant la surface S peut directement être obtenu par l'expression de l'induction magnétique \mathbf{B}_A .

$$\Phi_A = \int_S \mathbf{B}_A \cdot \mathbf{n} ds \quad (3.1)$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à S dont le sens est fixé par l'orientation de S . Comme l'induction \mathbf{B}_A est discrétisée dans l'espace des éléments de facette, sa composante normale est alors conservée à travers toutes les facettes du maillage. En

exprimant l'induction \mathbf{B}_A en fonction du potentiel \mathbf{A} ($\mathbf{A} \in \mathbf{W}^1$) dans l'équation 3.1, le flux magnétique traversant S est obtenu par une expression plus simple :

$$\Phi_A = \int_S \mathbf{B}_A \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\partial S \quad (3.2)$$

Le sens de parcours de ∂S est déterminé par l'orientation choisie pour S . Pour chaque arête a de n_a^S un nombre d'incidence δ_a est associé, si les orientations de a et de ∂S sont les mêmes alors $\delta_a = 1$ sinon $\delta_a = -1$. Dans ces conditions, l'expression de Φ_A en fonction des circulations de \mathbf{A} le long des arêtes est égale à :

$$\Phi_A = \sum_{a=1}^{n_a^S} A_a \cdot \delta_a \quad (3.3)$$

Un exemple est donné par la figure 3.3 où le contour de la surface S est composé de 8 arêtes.

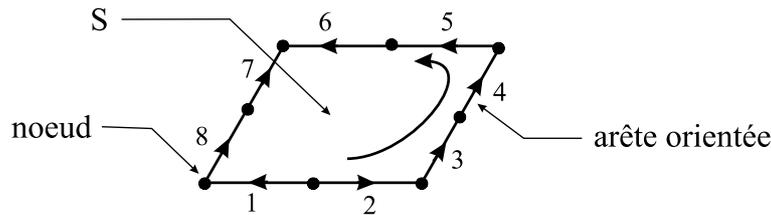


FIG. 3.3 – Exemple de calcul d'un flux magnétique local par la formulation \mathbf{A}

Le flux Φ_A traversant S est alors égal à :

$$\Phi_A = -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6 - A_7 - A_8 \quad (3.4)$$

Cette méthode classiquement utilisée est très intéressante en terme de temps de calcul et de simplicité d'implantation. En effet, seul les noeuds appartenant à ∂S sont à déterminer (les arêtes de ∂S en sont facilement déduites) et non la surface S elle-même.

3.4 Cas de la formulation Ω

Dans la suite, comme nous l'avons signalé en début de chapitre, la formulation Ω sera supposée résolue sur le maillage primal. On obtient alors un champ magnétique \mathbf{H}_Ω qui vérifie le théorème d'Ampère par contre l'induction \mathbf{B}_Ω obtenue par l'intermédiaire de la loi de comportement ne vérifie pas la loi de conservation du flux et

ne possède pas de composante normale continue sur tout le domaine. Pour obtenir un tel champ, il faudrait avoir recours au maillage dual où l'induction $\tilde{\mathbf{B}}_\Omega$ est à flux conservatif (cf chapitre I).

3.4.1 Première approche

Comme la composante normale de \mathbf{B}_Ω n'est pas conservée, la valeur de l'intégrale surfacique de la composante normale de l'induction à travers une facette f commune à deux éléments e^+ et e^- n'est pas la même que l'on considère l'expression de \mathbf{B}_Ω sur e^+ et e^- (fig. 3.4).

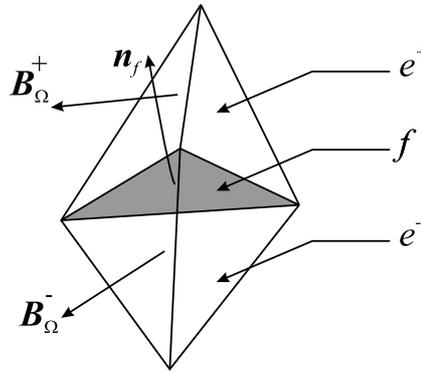


FIG. 3.4 – Exemple de facette contenue dans la surface S

Deux valeurs homogènes à des flux Φ_f^+ et Φ_f^- peuvent être calculées :

$$\Phi_f^+ = \int_f \mathbf{B}_\Omega^+ \cdot \mathbf{n}_f df \quad \text{et} \quad \Phi_f^- = \int_f \mathbf{B}_\Omega^- \cdot \mathbf{n}_f df \quad (3.5)$$

avec \mathbf{B}_Ω^+ et \mathbf{B}_Ω^- l'induction magnétique dans deux éléments e^+ et e^- ayant la facette f commune et \mathbf{n}_f le vecteur normal à f dont l'orientation dépend de celle de S . Deux grandeurs Φ_{Cl}^+ et Φ_{Cl}^- homogènes à un flux à travers une surface S sont définies comme la somme des deux grandeurs Φ_f^- et Φ_f^+ :

$$\Phi_{Cl}^+ = \sum_{f=1}^{n_f^S} \Phi_f^+ \quad \text{et} \quad \Phi_{Cl}^- = \sum_{f=1}^{n_f^S} \Phi_f^- \quad (3.6)$$

3.4.2 Deuxième approche

La seconde approche se base sur la relation 2.49 présentée au chapitre II donnant le flux à travers une surface appartenant à la frontière du domaine D . Nous rappelons

que cette relation s'écrit :

$$\Phi_D = \int_D \mathbf{B}_\Omega \cdot \mathbf{grad} \alpha dD \quad (3.7)$$

avec α défini au chapitre II en 2.3.2.

Si on considère une surface S à l'intérieure de D mais dont sa frontière ∂S appartient à Γ_B . On peut utiliser une relation similaire à 3.7. On désigne par N_{e+} et N_{e-} les deux ensembles d'éléments situés de chaque côté de S et ayant au moins un noeud appartenant à S (fig. 3.5). Ces deux ensembles d'éléments forment deux domaines D^+ et D^- .

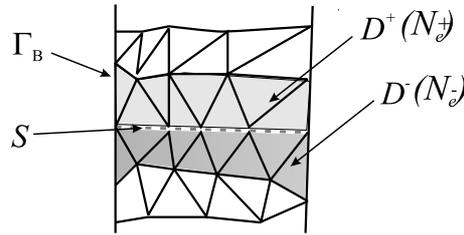


FIG. 3.5 – Exemple de domaines issus de la surface S

On définit ainsi une fonction α^+ (resp. α^-) nulle sur $D - D^+$ (resp. $D - D^-$) et définit de la manière suivante sur D^+ (resp. D^-) :

$$\alpha^+ = \sum_{n \in S} w_n \quad (3.8)$$

où w_n désigne la fonction nodale associée au noeud n . Dans ces conditions, deux valeurs homogènes à un flux à travers la surface S peuvent être calculées par :

$$\Phi_D^+ = \int_{D^+} \mathbf{B}_\Omega \cdot \mathbf{grad} \alpha^+ dD^+ \quad \text{et} \quad \Phi_D^- = \int_{D^-} \mathbf{B}_\Omega \cdot \mathbf{grad} \alpha^- dD^- \quad (3.9)$$

En se référant au chapitre II, on montre que Φ_D^+ et Φ_D^- sont égaux puisqu'ils correspondent aux flux à travers les facettes duales des arêtes situées de chaque côté de S et ayant un seul noeud sur S (fig. 3.6).

Nous rappelons que cette méthode n'est applicable qu'avec des surfaces S supportées par des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Par la suite, nous en proposerons une extension pour des surfaces qui ne s'appuient pas sur Γ_B .

3.4.3 Troisième approche

On définit à l'aide de la frontière ∂S formée d'arêtes une spire exploratrice. Le champ magnétique produit uniquement par la spire parcourue par un courant de 1A dans un domaine D supposé homogène de perméabilité μ_0 est noté \mathbf{K}_{sp} .

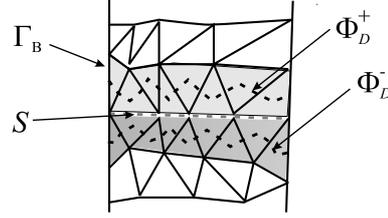
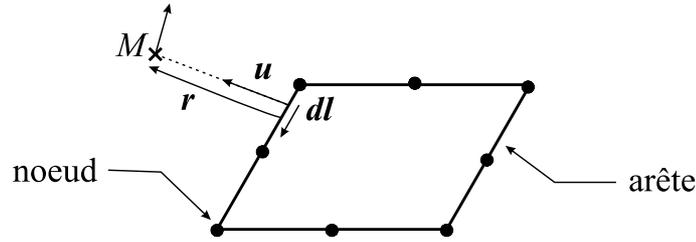


FIG. 3.6 – Flux à travers les facettes duales

FIG. 3.7 – Calcul de \mathbf{K}_{sp} en un point M

Ce champ est calculé par la loi de Biot et Savart en tout point M du domaine (fig. 3.7) par :

$$\mathbf{K}_{sp(M)} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{r}\|^2} \quad (3.10)$$

avec \mathbf{u} le vecteur unitaire de \mathbf{r} et $d\mathbf{l}$ un déplacement élémentaire le long des arêtes de ∂S . Le flux magnétique Φ_{sp} est alors calculé par :

$$\Phi_{sp} = \int_D \mathbf{B}_\Omega \cdot \mathbf{K}_{sp} dD \quad (3.11)$$

Le vecteur \mathbf{K}_{sp} ne peut être projeté dans l'un des espaces discrets présenté au chapitre I. Le calcul numérique de l'expression 3.11 se doit d'être réalisé le plus soigneusement possible pour être précis. La méthode d'intégration de Gauss a été utilisée pour ce calcul, mais les points d'intégration choisis ne doivent pas être placés sur la frontière de la surface (le vecteur \mathbf{K}_{sp} n'y est pas défini) mais à l'intérieur des éléments. La technique numérique utilisée pour la détermination de \mathbf{K}_{sp} en un point de Gauss est détaillée dans l'annexe D.

3.5 Comparaison des différentes méthodes

3.5.1 Descriptif du dispositif

Le dispositif est constitué d'un aimant permanent inséré dans un circuit ferromagnétique à entrefer (fig. 3.8). Les dimensions du système sont données par le tableau 3.1 avec L la largeur du système. L'aimant est caractérisé par la loi de comportement $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{B}_r$ avec $\mathbf{B}_r = 0,2T$. Le comportement magnétique du circuit ferromagnétique est considéré comme non linéaire et la loi de comportement liant \mathbf{B} et \mathbf{H} est donnée par la figure 3.9.

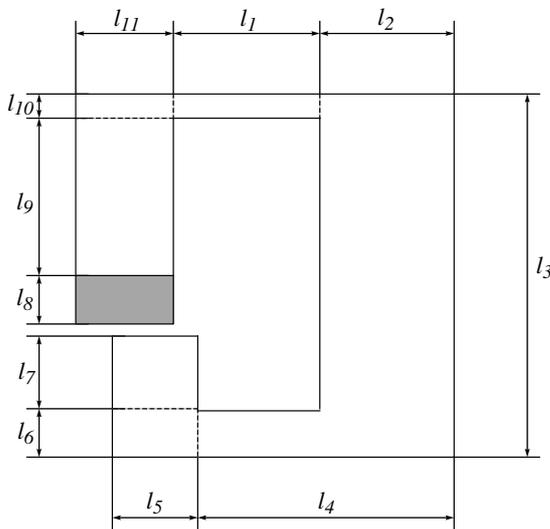


FIG. 3.8 – Présentation du système

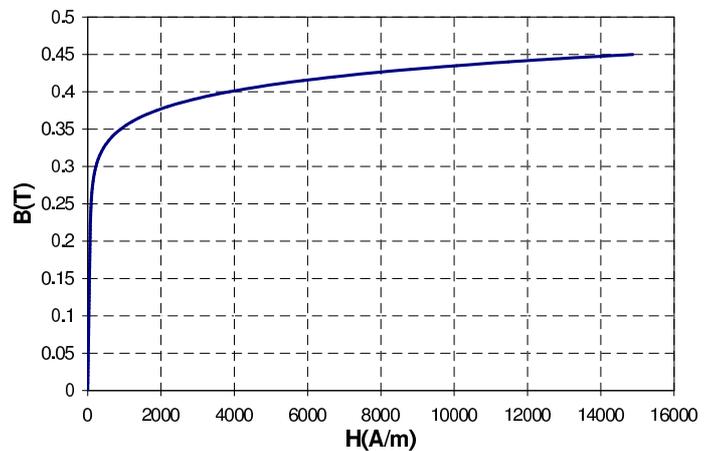


FIG. 3.9 – Courbe $\mathbf{B}=f(\mathbf{H})$ du circuit ferromagnétique

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	L
2,8	2,8	8	5	1,5	0,8	2	0,8	3,4	0,4	2,8	2,5

TAB. 3.1 – Dimensions du système (mm)

A partir de ce dispositif, deux problèmes peuvent être déclinés. Dans le premier (noté problème 1), le flux magnétique créé par l'aimant est supposé circuler uniquement dans le circuit magnétique, les flux de fuite sont ainsi négligés. Le flux est supposé canalisé dans l'entrefer (pas d'effet d'épanouissement) (fig. 3.10). Le domaine d'étude forme un circuit fermé constitué d'un circuit ferromagnétique, d'un aimant et d'un entrefer. Ce domaine possède une boucle et n'est donc plus contractile

mais non simplement connexe. Sur les frontières, on impose des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Dans le second problème (noté problème 2), l'aimant permanent et le circuit magnétique sont plongés dans une boîte d'air (fig. 3.11). Dans ce cas, le domaine est contractile, des conditions aux limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sont imposées sur la frontière.

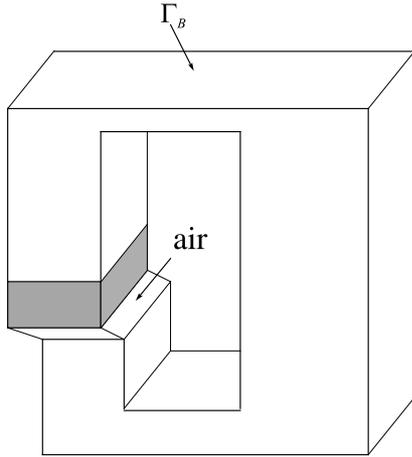


FIG. 3.10 – *Problème 1 : le flux magnétique circule uniquement dans le circuit magnétique et celui-ci est canalisé dans l'entrefer*

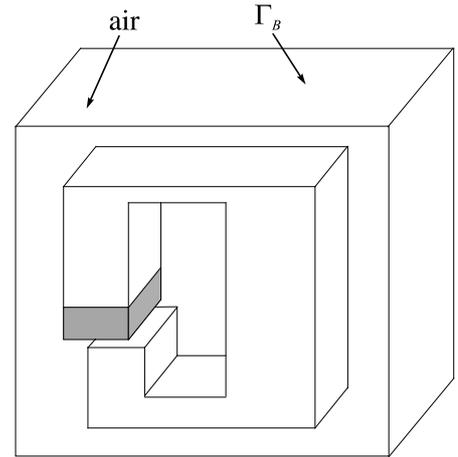


FIG. 3.11 – *Problème 2 : prise en compte des flux de fuite*

3.5.2 Modélisation numérique des deux problèmes

Dans le cas du problème 1, comme le domaine d'étude possède une boucle. Si on annule toutes les circulations de \mathbf{A} sur les frontières, la somme de celles-ci sur un contour fermé entourant le domaine D est nulle alors que le flux circulant dans le domaine ne l'est pas. Pour remédier à ce problème, un vecteur \mathbf{K}_a formé d'un ensemble d'arêtes situées sur la frontière du domaine est introduit, celui-ci est défini de la même manière qu'au paragraphe 2.6.3. Le flux Φ circulant dans la boucle est associé à cette fonction. On résout ainsi, si on excepte le vecteur source dû à l'aimant, le système matriciel 1.122 pour la formulation \mathbf{A} et le système matriciel 1.123 pour la formulation Ω .

Le maillage du problème 1 est composé de 11403 noeuds et de 61058 éléments tétraédriques. Pour le problème 2, il est constitué de 34054 noeuds et 25088 éléments. La distribution de l'induction magnétique, obtenue par la formulation en potentiel scalaire Ω est présentée sur la figure 3.12 pour le problème 1 et sur la figure 3.13 pour le problème 2.

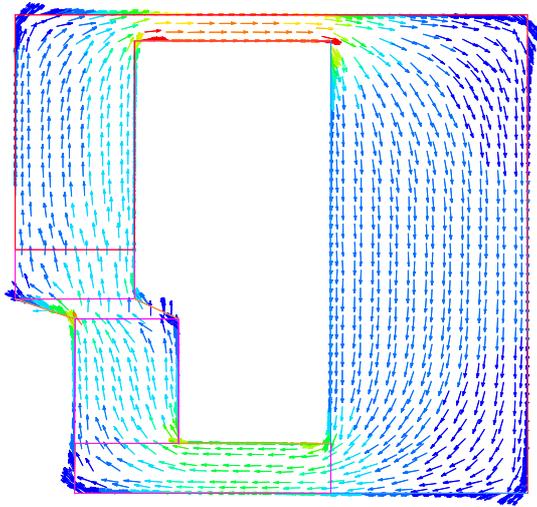


FIG. 3.12 – *Problème 1 : répartition spatiale de \mathbf{B}*

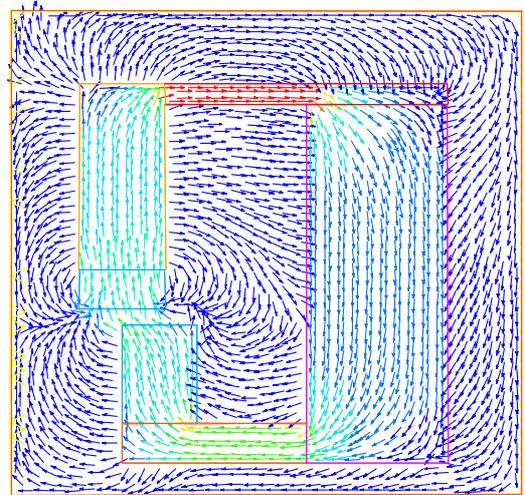


FIG. 3.13 – *Problème 2 : répartition spatiale de \mathbf{B}*

Contrairement au problème 1, dans le problème 2, une partie du flux magnétique, créé par l'aimant permanent, se reboucle dans l'air comme on peut le voir sur la figure 3.13.

3.5.3 Localisation des surfaces

Pour comparer les méthodes de calcul d'un flux magnétique local, cinq surfaces, de S_1 à S_5 , ont été définies comme indiquées sur la figure 3.14.

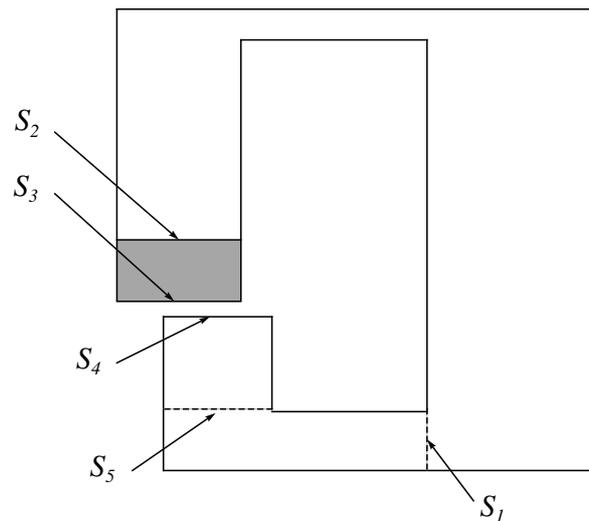


FIG. 3.14 – *Localisation des surfaces*

Comme la composante normale de l'induction magnétique est conservée entre deux éléments ayant une facette commune dans la formulation \mathbf{A} , nous prenons comme référence les valeurs de flux obtenu par cette formulation.

3.5.4 Flux locaux par la formulation \mathbf{A}

Nous présentons les résultats obtenus par la formulation \mathbf{A} pour les deux types de problème (tableau 3.2).

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Φ_A -problème 1	4,07	4,07	4,07	4,07	4,07
Φ_A -problème 2	4,42	5,78	4,69	2,93	4,30

TAB. 3.2 – Flux, à travers les 5 surfaces, obtenus par la formulation \mathbf{A} (10^{-7} Wb)

Pour le problème 1, comme la conservation de l'induction magnétique est vérifiée dans la formulation \mathbf{A} , les flux à travers toutes les surfaces sont égaux puisque celui-ci est canalisé par les conditions limites le long du circuit. En revanche, pour le problème 2, le flux n'est pas conservé dans le circuit magnétique, les valeurs calculées sont alors différentes à cause des flux de fuite qui circulent dans l'air environnant du dispositif. Il est à noter que le flux magnétique est plus important à la sortie de l'aimant (S_2) que dans l'entrefer (S_3).

Pour tester le principe de la spire exploratrice et la méthode numérique employée pour le calcul, l'induction magnétique obtenue par la formulation \mathbf{A} est utilisée dans l'équation 3.11, ce flux est noté Φ_{Asp} . Le tableau 3.3 présente l'écart entre Φ_A et Φ_{Asp} pour le problème 1.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Ecart (%)	1,1	0,5	0,6	0,1	0,8

TAB. 3.3 – Ecart en % entre Φ_A et Φ_{AK} pour le problème 1

L'écart entre ces deux méthodes étant très faible, le principe de la spire exploratrice est vérifié. La méthode numérique utilisée pour le calcul de \mathbf{K}_{sp} semble assez précise, de même que l'intégration volumique qui induit un minimum d'erreurs.

3.5.5 Flux locaux par la formulation Ω

Première approche

Pour les deux types de problème, les grandeurs Φ_{Cl}^- et Φ_{Cl}^+ à travers les cinq surfaces ont été calculées. Les résultats, comparés avec ceux donnés par la formulation **A**, sont présentés par le tableau 3.4. Dans ce tableau, $\langle \Phi_{Cl} \rangle$ correspond à la valeur moyenne des grandeurs Φ_{Cl}^- et Φ_{Cl}^+ .

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Problème 1	Φ_A	4,07	4,07	4,07	4,07	4,07
	Φ_{Cl}^+	5,24	5,32	5,21	5,09	3,75
	Φ_{Cl}^-	3,88	5,33	5,31	3,84	5,09
	$\langle \Phi_{Cl} \rangle$	4,56	5,32	5,26	4,46	4,42
Problème 2	Φ_A	4,42	5,78	4,69	2,93	4,30
	Φ_{Cl}^+	3,94	3,64	6,76	3,25	5,25
	Φ_{Cl}^-	5,35	7,25	4,82	4,36	3,85
	$\langle \Phi_{Cl} \rangle$	4,65	5,44	5,79	3,84	4,55

TAB. 3.4 – Comparaison entre les flux de référence et ceux issus de la première approche utilisée dans la formulation Ω (10^{-7} Wb)

Les valeurs Φ_{Cl} sous-estiment ou sur-estiment les flux de référence. Quel que soit le type de problème ou la surface étudiée, on vérifie bien que les valeurs de Φ_{Cl}^- et Φ_{Cl}^+ déterminées par les deux côtés des surfaces ne sont pas égales en raison de la discontinuité de la composante normale de l'induction.

Cette méthode apparaît mal adaptée pour la détermination de flux comme le montrent les résultats obtenus. Les résultats les plus proches de Φ_A sont obtenus par la moyenne des flux Φ_{Cl}^- et Φ_{Cl}^+ . Mais ceux-ci restent encore loin de ceux donnés par la formulation **A**, l'écart maximal est alors d'environ 29%.

Deuxième approche

Cette seconde méthode n'est applicable que pour des surfaces supportées par des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ (fig. 3.15). Cette condition est vérifiée pour le problème 1 mais non pour le problème 2. Toutefois, nous testerons cette méthode dans ce problème en considérant les mêmes couches d'éléments utilisées dans le problème 1 (fig. 3.16).

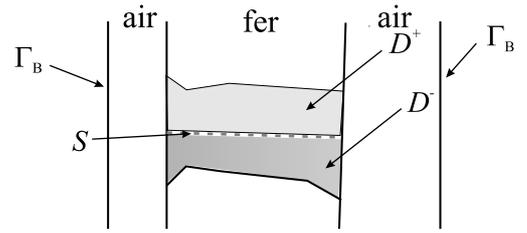
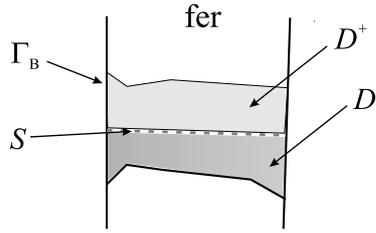


FIG. 3.15 – Exemple de domaines associés à une surface pour le problème 1

FIG. 3.16 – Exemple de domaines associés à une surface pour le problème 2

Les flux obtenus par la seconde méthode sont comparés avec les flux de référence dans le tableau 3.5.

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Problème 1	Φ_A	4,07	4,07	4,07	4,07	4,07
	Φ_D^+	4,11	4,11	4,11	4,11	4,11
	Φ_D^-	4,11	4,11	4,11	4,11	4,11
Problème 2	Φ_A	4,42	5,78	4,69	2,93	4,30
	Φ_D^+	4,54	5,34	5,69	3,61	4,42
	Φ_D^-	4,54	6,13	3,07	5,5	4,01

TAB. 3.5 – Comparaison entre les flux de référence et ceux issus de la deuxième approche utilisée dans la formulation Ω (10^{-7} Wb)

Dans le problème 1, on vérifie bien que les flux calculés par les cinq surfaces sont égaux même si la conservation de \mathbf{B}_Ω n'est pas vérifiée. De plus les valeurs obtenues sont très proches de celles issues de la formulation \mathbf{A} . Nous rappelons que pour cette méthode, le calcul du flux s'effectue en réalité sur le maillage dual où il a été démontré que le flux était conservé quand les surfaces étaient supportées par des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Dans le problème 2, les flux Φ_D^+ et Φ_D^- calculés de part et d'autre des surfaces sont différents et l'écart peut être important (surface S_3). En effet, nous avons gardé

les mêmes domaines d'intégration mais les surfaces ne sont alors plus supportées par des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, la condition de conservation n'est alors plus vérifiée.

Troisième approche

Comme pour les autres méthodes, les résultats donnés par la spire exploratrice pour les deux problèmes sont comparés aux flux de référence (tableau 3.6).

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Problème 1	Φ_A	4,07	4,07	4,07	4,07	4,07
	Φ_{sp}	3,97	4,39	4,42	3,91	3,98
Problème 2	Φ_A	4,42	5,78	4,69	2,93	4,30
	Φ_{sp}	4,09	5,78	4,77	3,07	4,01

TAB. 3.6 – Comparaison entre les flux de référence et ceux issus de la troisième approche utilisée dans la formulation Ω (10^{-7} Wb)

Pour le problème 2, cette méthode donne des plus résultats proches des flux de référence comparés aux deux autres techniques. L'erreur entre Φ_A et Φ_{sp} est inférieure à 8% ce qui peut être interprété comme une erreur numérique.

3.5.6 Temps de calcul

Du point de vue du temps de calcul et de la taille mémoire, la méthode utilisée dans la formulation \mathbf{A} se distingue des autres. Celle-ci requière une simple somme de circulations de \mathbf{A} sur des arêtes. Néanmoins, nous rappelons que l'utilisation de cette formulation, pour la résolution du problème, est plus coûteuse en temps de calcul. Pour la formulation Ω , les trois méthodes de calcul de flux requièrent un temps de calcul plus important. Dans le cas du problème 2, le tableau 3.7 présente le rapport entre le temps nécessaire pour le calcul du flux (la résolution de la formulation n'entre pas ici en ligne de compte) des approches utilisées dans la formulation Ω par rapport à celui de la formulation \mathbf{A} .

Dans la formulation Ω , le temps de calcul mesuré pour les deux premières méthodes sont similaires car les domaines d'intégration sont pratiquement de la même taille. Ces domaines sont définis par des couches d'éléments connectés aux surfaces

Méthode	1	2	3
Rapport	3	3,2	10

TAB. 3.7 – Rapport entre les temps de calcul mesurés pour les trois méthodes utilisées dans la formulation Ω et celui de la formulation \mathbf{A}

étudiées. Pour la troisième méthode, la détermination de \mathbf{K}_{sp} et l'intégration du produit $\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}_{sp}$ sont réalisées dans tout le domaine ce qui conduit à une augmentation du temps de calcul.

3.5.7 Synthèse

Dans la formulation Ω , quel que soit le problème étudié, la première approche, basée sur la formule classique, n'est pas satisfaisante. La seconde méthode, basée sur les propriétés des maillages duaux, est bien adaptée pour le calcul d'un flux local quand les surfaces sont supportées par des conditions aux limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ (problème 1). Dans le cas contraire, la troisième méthode basée sur la notion de spire exploratrice peut être appliquée. Nous proposons donc dans la suite d'utiliser cette méthode pour calculer les flux dans des dents d'une machine à aimants permanents dont le stator est réalisé à partir de matériau composite magnétique.

3.6 Calcul de flux magnétique dans une machine synchrone

Les machines électriques traditionnelles sont généralement constituées de tôles de manière à réduire les pertes par courants induits. Dans ces conditions, l'induction et le champ magnétique circulent principalement dans le plan des tôles. De nos jours, des matériaux ferromagnétiques composites sont disponibles, ceux-ci permettent une circulation du champ magnétique dans les trois dimensions [37, 48]. Par conséquent, de nouvelles structures de machines peuvent être envisagées. Dans cette partie, nous proposons de comparer différents flux magnétiques obtenus par les simulations numériques avec des mesures expérimentales sur une machine synchrone à aimants permanents à base de matériau composite. Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une collaboration avec le LEEPCI (Laboratoire d'Électrotechnique, d'Électronique de Puissance et de Commande Industrielle) de l'université Laval (Quebec, Canada).

Les simulations numériques ont été réalisées au L2EP et le prototype de la machine ainsi que les mesures ont été effectuées à l'université Laval [53].

3.6.1 Présentation de la machine

La machine synchrone étudiée est triphasée. Les aimants permanents utilisés au rotor sont de type NeFeB. La culasse et les dents du stator sont réalisées en matériau composite. Le stator est composé de trois parties, les enroulements sont bobinés sur la partie centrale (fig. 3.18). Le stator est réalisé en assemblant les deux parties latérales sur la partie centrale bobinée (fig. 3.17). On voit ici la simplicité d'assemblage de ce type de machine. Ce prototype de machine a été réalisé par J. Cros et P. Viarouge du LEEPCI [31].

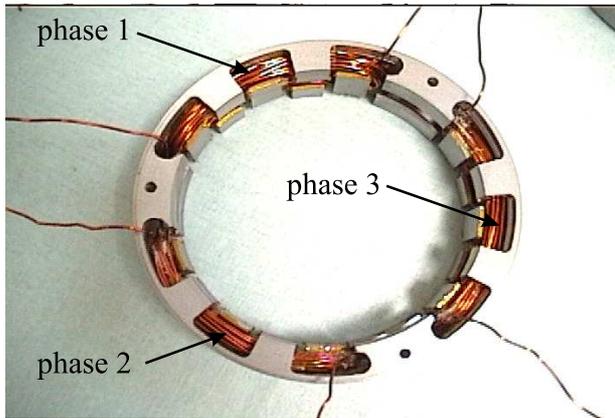


FIG. 3.17 – *Stator complet*

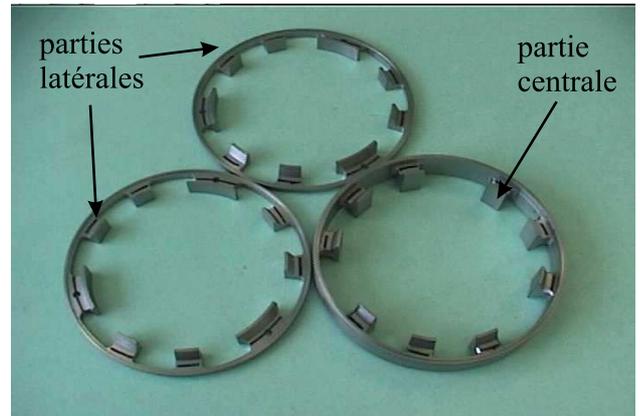


FIG. 3.18 – *Stator décomposé*

3.6.2 Présentation du modèle

3.6.2.1 modélisation des matériaux

Pour prendre en compte le comportement magnétique des différents matériaux, il faut définir la relation liant l'induction magnétique \mathbf{B} au champ magnétique \mathbf{H} . Dans la suite, nous nous intéressons qu'au flux créé par les bobinages et non pas au flux créé par les aimants. Dans ces conditions, l'induction rémanente des aimants \mathbf{B}_r est fixée à zéro.

Pour les poudres de fer, le cycle d'hystérésis $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ a été déterminé expérimentalement [3], celui-ci est donné sur la figure 3.19. Nous pouvons remarquer que ce type

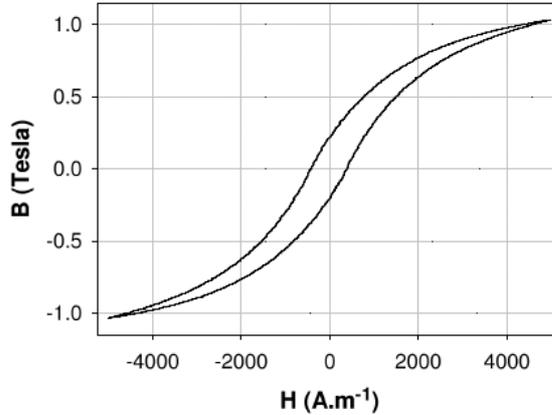


FIG. 3.19 – Cycle d'hystérésis

de matériau est moins performant que les tôles. En effet, il faut $4000\text{A}/\text{m}$ pour obtenir une induction de 1T alors qu'avec des tôles, même de mauvaise qualité, quelques centaines d' A/m suffisent. Néanmoins, ce matériau composite est isotrope ce qui permet une circulation du champ dans les trois directions. Bien que des modèles ont été proposés pour représenter efficacement le comportement hystérétique, dans notre cas, un modèle linéaire semble être suffisant pour modéliser la loi $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ du matériau choisi. Cette hypothèse est justifiée car la machine possède un large entrefer magnétique. Par conséquent, nous utiliserons la relation 1.8 avec une perméabilité relative μ_r de 150.

3.6.2.2 Modélisation numérique

Pour des raisons de symétrie, seule une demi machine est modélisée. Pour prendre en compte les fuites magnétiques, la structure est enfermée dans une boîte d'air sur laquelle des conditions aux limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sont imposées. Deux maillages de l'ensemble ont été réalisés avec des éléments tétraédriques. Le premier (M1) est constitué de 33062 noeuds et 180147 éléments, quant au second (M2), il possède 54582 noeuds et 295496 éléments.

Pour notre étude, les courants induits sont négligés. Par conséquent, le problème est de type magnétostatique. Nous avons utilisé la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} et la formulation en potentiel scalaire Ω . Le tableau 3.8 présente les paramètres du modèle numérique pour les deux maillages et les deux formulations dans le cas d'une alimentation en courant des enroulements.

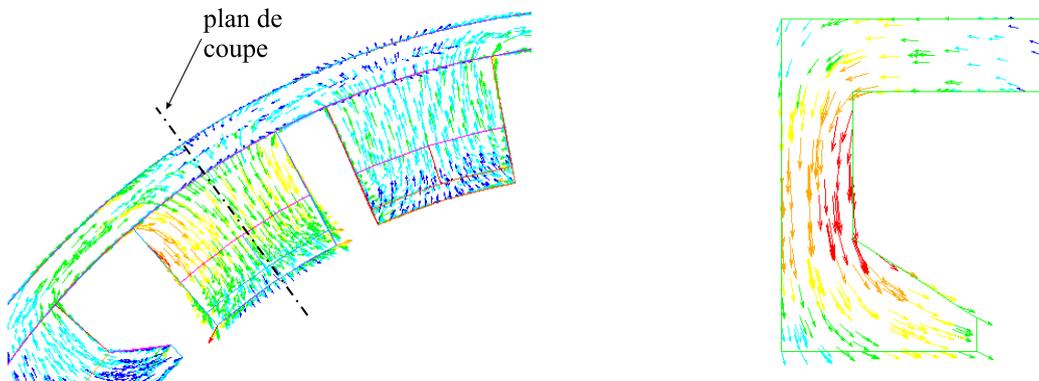
Comme le nombre d'arêtes est bien supérieur au nombre de noeuds dans le cas d'un maillage tétraédrique, le nombre d'inconnues et le nombre de termes non nuls

Maillage	M1		M2	
	\mathbf{A}	Ω	\mathbf{A}	Ω
Inconnues	203792	33062	332389	54582
Termes non nuls de la matrice de raideur	1726814	250978	2814674	413503
Nombre d'itérations Moyen du ICCG	860	200	1054	257
Temps de calcul (min)	13	1	22	2

TAB. 3.8 – Paramètres des simulations

de la matrice de raideur sont plus importants dans la formulation \mathbf{A} que dans la formulation Ω .

De manière à mettre en évidence la circulation des champs dans les trois directions, la répartition de l'induction magnétique est représenté sur la figure 3.20 dans le stator et sur la figure 3.21 dans un plan de coupe d'une dent.

FIG. 3.20 – Répartition de \mathbf{B} dans le stator par la formulation Ω FIG. 3.21 – Répartition de \mathbf{B} dans une dent par la formulation Ω

3.6.3 Calcul de flux

3.6.3.1 Calcul du flux dans les bobinages

Pour la détermination du flux magnétique embrassé par un enroulement, celui-ci est alimentée par un courant de 1A. Nous rappelons que l'induction rémanente des aimants est fixée à zéro. Ainsi, dans le cas de la formulation Ω , ce flux est donné par

la relation :

$$\Phi = \int_D \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} dD \quad (3.12)$$

avec \mathbf{K} le champ de vecteurs associé à l'enroulement alimenté. Dans la formulation \mathbf{A} , comme $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$, ce flux est égal à :

$$\Phi = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} dD \quad (3.13)$$

avec \mathbf{N} le champ de vecteur défini dans l'enroulement. Ces deux champs, \mathbf{K} et \mathbf{N} , sont définis de la même manière qu'au chapitre II en 2.3.1.

Le tableau 3.9 regroupe les valeurs de flux obtenus par les deux formulations que l'on peut comparer à la mesure expérimentale.

	M1		M2		Mesure
Formulation	\mathbf{A}	Ω	\mathbf{A}	Ω	
Flux (μWb)	140	187,2	142	164	144
Ecart simul./mes. (%)	2,8	30	1,4	13,9	

TAB. 3.9 – Flux magnétique d'une phase

Les flux obtenus par la formulation \mathbf{A} sont plus proches de la mesure par rapport aux flux résultant de la formulation Ω , et ce pour les deux maillages. Lorsque l'on affine le maillage, les résultats numériques se rapprochent de la mesure et plus particulièrement dans le cas de la formulation Ω , l'écart passe de 30% avec M1 à 13,9% avec M2.

La position relative des valeurs de flux calculées par les deux formulations était prévisible. En effet, il est bien connu qu'en magnétostatique, pour un système linéaire, la valeur exacte de l'énergie magnétique W_{ex} est encadrée [34] :

$$W_A \leq W_{ex} \leq W_\Omega \quad (3.14)$$

où W_A et W_Ω représentent, respectivement, l'énergie obtenue par les formulations \mathbf{A} et Ω . Dans le cas d'un problème linéaire, la relation entre le flux Φ , le courant i et l'énergie W_{em} s'écrit :

$$W_{em} = \frac{1}{2} \Phi \cdot i \quad (3.15)$$

Comme le courant est le même dans les deux formulations, nous obtenons :

$$\Phi_A \leq \Phi_{ex} \leq \Phi_\Omega \quad (3.16)$$

La relation précédente est vérifiée pour les deux maillages. Généralement, on constate dans la littérature que la convergence de l'énergie des deux formulations semblent être symétriques. Mais dans notre étude, nous pouvons remarquer que celle-ci semble être plus rapide avec la formulation **A**. En conséquence, pour un maillage donné, la formulation **A** semble plus précise sur cet exemple.

3.6.3.2 Flux magnétiques locaux de trois dents

On se propose, dans la suite, d'effectuer une comparaison entre les flux calculés et mesurés circulant dans des dents du stator. La source de champ est encore une fois un bobinage, les aimants étant toujours extrais de la machine. Pour l'étude de flux magnétiques locaux, trois contours d'arêtes entourant trois dents du modèle numérique sont définis (fig. 3.22).

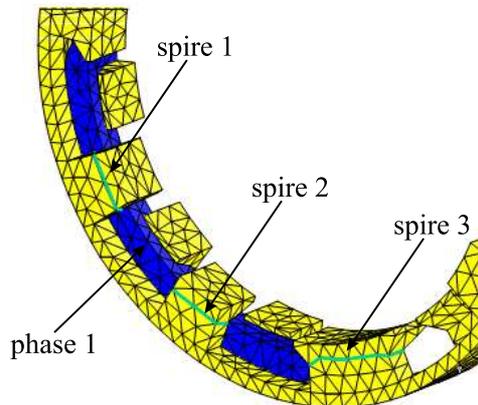


FIG. 3.22 – Localisation des spires

Seule la phase 1 est alimentée par un courant de 1A, les flux locaux sont déterminés par la relation 3.3 pour la formulation **A** et par la méthode de la spire exploratrice développée en 3.4.3 pour la formulation Ω . Le tableau 3.10 présente une comparaison des flux obtenus par les deux formulations.

Les écarts entre les deux formulations sont acceptables et ce pour les deux maillages. Bien entendu, on peut noter toutefois que ces écarts diminuent quand on affine le maillage.

Pour la mesure, un courant sinusoïdal i_{exp} d'amplitude égale à 3,15A alimente la phase 1. La fréquence d'alimentation est de 600Hz. Trois bobines composées de

Formulation	M1			M2		
	\mathbf{A}	Ω	écart %	\mathbf{A}	Ω	écart %
Spire 1 (μWb)	1,34	1,44	7,4	1,39	1,43	2,9
Spire 2 (μWb)	1,3	1,40	5,4	1,35	1,39	3
Spire 3 (μWb)	0,4	0,47	17,5	0,48	0,5	4,2

TAB. 3.10 – Flux magnétique à travers les différentes dents obtenus par les deux formulations

10 spires sont placées sur les dents. Ainsi, en mesurant la tension V aux bornes de chaque bobine, le flux Φ_{exp} traversant chaque dent peut être déduit par :

$$\Phi_{exp} = \frac{V}{2\pi i_{exp} 600} \quad (3.17)$$

Le tableau 3.11 présente une comparaison des flux obtenus par les deux formulations avec ceux issus des mesures expérimentales.

Formulation	M1		M2		Mesure
	\mathbf{A}	Ω	\mathbf{A}	Ω	
Spire 1 (μWb)	1,34	1,44	1,39	1,43	1,7
Spire 2 (μWb)	1,3	1,40	1,35	1,39	1,66
Spire 3 (μWb)	0,4	0,47	0,48	0,5	0,39
Ecart max. simul./mes. (%)	22	20,5	23	28,2	

TAB. 3.11 – Flux magnétique à travers les différentes dents - Comparaison simulation/expérience

Dans cette étude, les valeurs de flux obtenus par les deux formulations n'encadrent plus les mesures. En effet, ces flux ne sont plus des valeurs globales mais des valeurs locales. Les écarts entre la simulation et la mesure augmentent même quand le maillage est affiné. Par rapport à la précédente étude, ces écarts sont plus importants. Dans le modèle numérique, la valeur d'un flux local est très sensible par rapport à la position de la spire. En pratique, ce type de flux est déterminé par un bobinage constitué de 10 spires qui ne sont pas filaires mais volumiques. De plus, ce bobinage n'est pas exactement "collé" autour d'une dent contrairement à une spire filaire du modèle numérique.

Au vu des précédentes remarques, aucune conclusion ne peut être faite sur l'utilisation d'une formulation par rapport à l'autre. Toutefois, les flux locaux calculés à l'aide des deux formulations sont acceptables par rapport aux mesures.

3.6.4 Synthèse

Les deux formulations magnétostatiques ont été testées dans le but d'étudier une machine synchrone constituée de matériau magnétique composite. Au travers des différents résultats obtenus, la formulation \mathbf{A} conduit à un flux magnétique associé à une phase plus proche de la réalité comparé à la formulation Ω . Néanmoins, le temps de calcul et la taille de la matrice de raideur sont plus importants par cette première formulation. En ce qui concerne les flux magnétiques locaux, les deux formulations présentent des résultats acceptables.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le calcul d'un flux magnétique local à travers des surfaces internes au domaine et supportées par les facettes du maillage. Dans le cas de la formulation \mathbf{A} , ce type de flux est directement lié aux circulations du potentiel vecteur \mathbf{A} le long d'un contour d'une surface. Dans le cas de la formulation Ω , la méthode basée sur la notion de spire exploratrice a montré une bonne concordance des résultats par rapport à la formulation \mathbf{A} pour un système contractile ou non.

Pour l'étude de la machine synchrone à base d'un matériau composite, les flux magnétiques globaux et locaux obtenus par les diverses simulations sont en accord avec les mesures expérimentales.

La méthode de calcul d'un flux magnétique local basée sur la notion de spire exploratrice a également été utilisée pour la détermination de flux de têtes de bobine sur un moteur linéaire. Cette étude est développée par [1].

Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire traitent de l'introduction des grandeurs globales, électriques et magnétiques, dans les formulations en potentiels utilisées pour la résolution des problèmes de magnétodynamique.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé le modèle mathématique basé sur les équations de Maxwell et les lois de comportement ainsi que la discrétisation de ces équations. Comme l'ensemble des équations de Maxwell ne peut être résolu sur un même maillage (primal), un second (dual) issu du premier est introduit. Ainsi, les champs magnétiques et électriques sont représentés sur des éléments géométriques des deux maillages. Les équations de Maxwell s'écrivent alors sous formes matricielles en utilisant des opérateurs différentiels discrets. Un diagramme de Tonti discret peut alors être obtenu, le passage d'un maillage à l'autre s'effectue par les lois de comportement. Celles-ci prennent en compte le comportement des différents milieux mais également la métrique du système. Nous avons montré comment la méthode des éléments finis s'intègre dans une telle approche. Enfin, les formulations en potentiels résolvant les problèmes magnétodynamique, magnétostatique et électrocinétique ont été développées en considérant comme terme source un seul inducteur bobiné alimenté en courant.

Dans le second chapitre, nous avons introduit les outils permettant de calculer ou d'imposer des grandeurs globales quand celles-ci ne sont pas associées aux potentiels introduits. Ainsi, deux fonctions supplémentaires, l'une scalaire et l'autre vectorielle, ont été définies. Pour la fonction scalaire, la méthode se base sur les travaux de P. Dular [47]. En ce qui concerne la définition des fonctions vectorielles, celles-ci se basent sur les travaux de Y. Le Menach [60], où ces fonctions étaient utilisées pour la détermination d'un champ source associé à un inducteur bobiné. Dans notre cas, nous avons réalisé une extension de l'utilisation de cette fonction dans le cas de la magnétodynamique, pour le calcul ou l'imposition d'un courant ou d'un

flux magnétique. Des formulations magnétodynamiques obtenues, les formulations magnétostatiques et électrocinétiques sont alors facilement déduites. Pour vérifier la cohérence et la validité des méthodes employées, celles-ci ont été testées sur des exemples académiques et un dispositif réel dont une comparaison avec l'expérience a été effectuée. Ainsi, comme les deux formulations donnent des résultats proches entre elles et par rapport aux mesures, les méthodes utilisées pour le calcul et l'imposition des grandeurs globales sont validées. Néanmoins, nous pouvons conclure que la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ et sa déclinaison magnétostatique Ω sont plus avantageuses pour l'imposition des grandeurs globales par des temps de calcul et des tailles mémoires moindre qu'avec la formulation $\mathbf{A} - \varphi$.

Dans le troisième chapitre, dans le cas de la magnétostatique, nous avons présenté différentes approches permettant de déterminer un flux magnétique local à travers une surface interne au domaine et supportée par les éléments du maillage. Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} , cette grandeur est simplement déduite par la circulation de \mathbf{A} sur un contour d'arêtes. Dans le cas de la formulation en potentiel scalaire Ω , le flux ne peut être déterminé directement, trois approches ont donc été développées. La première se base sur la formule classique utilisant l'intégrale de l'induction sur une surface. Celle-ci n'est pas adaptée à cause de la non conservation de l'induction magnétique. La seconde, utilisant les propriétés des maillages duaux, est bien adaptée quand les surfaces étudiées sont supportées par des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. La dernière, qui se base sur la notion de spire exploratrice formée d'un contour d'arêtes, semble être la plus adaptée dans le cas général.

En terme de perspectives, il pourrait être intéressant d'implanter les méthodes de calcul et d'imposition de grandeurs globales électriques et magnétiques dans d'autres méthodes numériques comme la technique d'intégration finie. D'autre part, pour l'étude des pertes dans les bobinages alimentés travaillant à hautes fréquences, il serait intéressant d'étudier des méthodes d'homogénéisation, car un modèle représentant l'ensemble des conducteurs devient rapidement très lourd en terme de ressource mémoire et de temps de calcul quand le nombre de spires est important. En utilisant des méthodes d'homogénéisation, l'ensemble des conducteurs d'un bobinage forme un seul et même milieu dont le comportement magnétique et électrique est similaire au bobinage complet.

Annexe A

Formulation $\mathbf{A} - \varphi$ par la méthode des résidus pondérés

Dans le cas de la formulation électrique $\mathbf{A} - \varphi$, l'induction magnétique et le champ électrique sont exprimés en fonction de potentiels :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} \varphi \quad (\text{A.1})$$

avec \mathbf{A} , appartenant à \mathbf{W}^1 , le potentiel vecteur magnétique défini dans tout le domaine et φ , appartenant à W^0 , le potentiel scalaire électrique défini dans le domaine conducteur.

En utilisant les lois de comportement et en remplaçant \mathbf{B} et \mathbf{E} par leurs expressions A.1 dans les équations 1.5 et 1.6, nous obtenons le système d'équations à résoudre :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{rot} \mathbf{A}\right) + \sigma\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi\right) = \mathbf{J}_s \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{div}\sigma\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

avec \mathbf{J}_s , appartenant à \mathbf{W}^2 , la densité de courant supposée connue et uniforme dans un inducteur bobiné. Afin de résoudre le système précédent, la méthode des résidus pondérés est utilisée :

$$\int_D \left[\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{rot} \mathbf{A}\right) + \sigma\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi\right) - \mathbf{J}_s \right] \mathbf{u} dD = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\int_D \left[\mathbf{div}\sigma\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi\right) \right] v dD = 0 \quad (\text{A.5})$$

avec \mathbf{u} et v deux fonctions tests appartenant respectivement à \mathbf{W}^1 et à W^0 .

Dans le domaine discret, le potentiel \mathbf{A} est décomposé dans l'espace des éléments d'arête et φ dans l'espaces des éléments nodaux :

$$\mathbf{A} = \sum_{a=1}^{n_a} A_a \mathbf{w}_a \quad \text{et} \quad \varphi = \sum_{n=1}^{n_n} \varphi_n w_n \quad (\text{A.6})$$

où \mathbf{w}_a est la fonction d'interpolation associée à l'arête a et w_n la fonction nodale associée au noeud n . La densité de courant source \mathbf{J}_s est décomposée dans l'espace des éléments de facette :

$$\mathbf{J}_s = \sum_{f=1}^{n_f} J_{fs} \mathbf{w}_f \quad (\text{A.7})$$

En utilisant comme fonctions tests, la fonction d'interpolation associée à chaque potentiel¹ et en remplaçant \mathbf{A} , φ et \mathbf{J}_s par leurs formes discrètes, nous obtenons :

$$\sum_{a'=1}^{n_a} \int_D \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a'} A_{a'} + \sigma \mathbf{w}_a \frac{\partial \mathbf{w}_{a'} A_{a'}}{\partial t} \right] dD + \sum_{n=1}^{n_n} \int_D \sigma \mathbf{w}_a \mathbf{grad} w_n \varphi_n dD = \int_D \mathbf{w}_a \sum_{f=1}^{n_f} \mathbf{w}_f J_{fs} dD \quad \forall a \in [1, n_a] \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{a=1}^{n_a} \int_D \sigma \mathbf{grad} w_n \frac{\partial \mathbf{w}_a A_a}{\partial t} dD + \sum_{n'=1}^{n_n} \int_D \sigma \mathbf{grad} w_n \mathbf{grad} w_{n'} \varphi_{n'} dD = 0 \quad (\text{A.9})$$

$\forall n \in [1, n_n]$

Les intégrales sur la frontière Γ s'annulent naturellement par des conditions aux limites homogènes imposées sur les potentiels et les champs. A ce niveau du développement, il est possible de réécrire les équations précédentes par les notions de matrices d'incidence :

$$\mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} \mathbf{A}_a + \mathbf{M}_{aa}^\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} + \mathbf{G} \varphi_n \right) = \mathbf{M}_{af} \mathbf{J}_{fs}$$

$$\mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} + \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^\sigma \mathbf{G} \varphi_n = 0$$

Avec $\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}$, \mathbf{M}_{aa}^σ et \mathbf{M}_{af} des matrices de masse définies de la même manière qu'aux paragraphes 1.3.4 et 1.3.5. Si on considère la matrice \mathbf{M}_{aa}^σ , on rappelle que celle-ci est de dimension $n_a \times n_a$ de M , dont les coefficients m_{aa}^σ sont donnés par :

$$m_{aa}^\sigma = \int_D \sigma \mathbf{w}_a \mathbf{w}_{a'} dD \quad \text{avec} \quad 1 \leq a \leq n_a \quad \text{et} \quad 1 \leq a' \leq n_a \quad (\text{A.10})$$

avec \mathbf{w}_a la fonction d'interpolation associée à l'arête a .

1. application de la méthode de Galerkin, $\mathbf{u} = \mathbf{w}_a$ et $v = w_n$

Annexe B

Détermination de champs à rotationnel ou divergence donnée

On considère deux champs : \mathbf{X} (resp. \mathbf{X}_f) et \mathbf{Y} (resp. \mathbf{Y}_a) appartenant respectivement à \mathbf{W}^2 (resp. \mathcal{W}^2) et \mathbf{W}^1 (resp. \mathcal{W}^1). Le champ \mathbf{X} est à flux conservatif et \mathbf{Y} est tel que son rotationnel est égal à \mathbf{X} . On a alors :

$$\mathbf{rot} \mathbf{Y} = \mathbf{X} \quad \mathbf{R}\mathbf{Y}_a = \mathbf{X}_f \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{div} \mathbf{X} = 0 \quad \mathbf{D}\mathbf{X}_f = 0 \quad (\text{B.2})$$

Pour obtenir des champs qui vérifient les relations précédentes, des techniques d'arbres, basées sur la théorie des graphes, peuvent être utilisées. Dans cette annexe, nous rappelons brièvement la technique utilisée au L2EP et développée par [60].

B.1 Arbre d'arêtes

Le vecteur \mathbf{X}_f est connu et \mathbf{Y}_a est recherché, celui-ci doit vérifier la relation B.1. Un arbre d'arêtes est construit en réunissant un ensemble d'arêtes ne formant pas de boucles et reliant tous les noeuds du maillage. Les degrés de liberté associés (i.e. les composantes de \mathbf{Y}_a) à cet arbre sont fixés à des valeurs arbitraires qui peuvent être nulles par exemple. Les autres degrés de liberté associés au co-arbre c'est à dire aux arêtes n'appartenant pas à l'arbre peuvent alors être calculés de manière unique en vérifiant la relation suivante sur chaque facette f du maillage :

$$\int_f \mathbf{X} df = \oint_{\partial f} \mathbf{Y} d\partial f \quad (\text{B.3})$$

On a alors pour chaque facette f , la somme des circulations de \mathbf{Y} le long des arêtes de f qui est égale au flux de \mathbf{X} à travers f . si $(y_a)_{1 \leq a \leq n_a}$ et $(x_f)_{1 \leq f \leq n_f}$ désignent les composantes de \mathbf{Y}_a et \mathbf{X}_f , on a donc :

$$x_f = \sum_{a=1}^{n_a} y_a \delta_a \quad (\text{B.4})$$

avec $\delta_a = +1$ ou -1 si a appartient à la frontière de f et 0 si a n'appartient pas à la frontière de f . On retrouve d'ailleurs la relation B.1.

Pour illustrer cette démarche, nous prenons l'exemple de deux tétraèdres présentés par la figure 1.7. On considère un flux unitaire X_2 entrant par la facette 2 et un flux unitaire X_7 sortant par la facette 7. Les flux des autres facettes externes sont fixés à zéro pour que \mathbf{X}_f soit à flux conservatif. Compte tenu des orientations des facettes, X_2 est égal à 1 et X_7 à -1 . Pour calculer \mathbf{Y}_a , compte tenu de la démarche présentée précédemment, un arbre d'arêtes constitué des arêtes 1, 2, 3 et 4 est construit, les degrés de liberté associés à ces arêtes sont fixés à zéro (Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4). Par conséquent il ne reste plus qu'à calculer les circulations de \mathbf{Y} le long du co-arbre formé par les arêtes de 5 à 9. A titre indicatif les figures B.1 et B.2 illustrent l'arbre et le co-arbre utilisés.

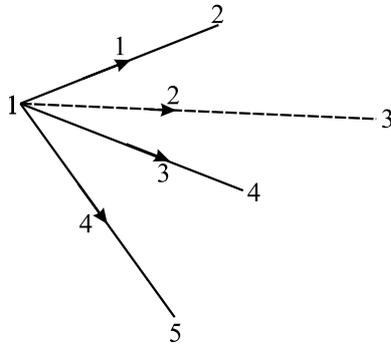


FIG. B.1 – Arbre

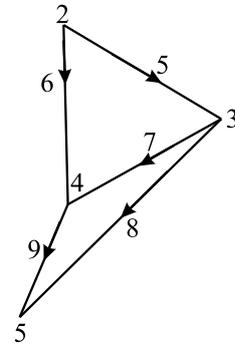


FIG. B.2 – Co-arbre

Pour la facette 1, on a :

$$X_1 = Y_1 + Y_5 - Y_2 = 0 \quad \text{on en déduit} \quad Y_5 = 0 \quad (\text{B.5})$$

Pour la facette 2,

$$X_2 = Y_1 + Y_6 - Y_3 = 1 \quad \text{on en déduit} \quad Y_6 = 1 \quad (\text{B.6})$$

Pour la facette 3,

$$X_3 = Y_2 + Y_7 - Y_3 = 0 \quad \text{on en déduit} \quad Y_7 = 1 \quad (\text{B.7})$$

et ainsi de suite pour toutes les autres facettes.

Par cette technique, l'ensemble du vecteur \mathbf{Y}_a peut être déterminé de manière itérative et très rapidement. Il est à noter que cette technique n'est applicable qu'avec un champ \mathbf{X} à divergence nulle.

B.2 Arbre de facettes

Comme une facette relie deux éléments de la même manière d'une arête relie deux noeuds, par analogie, un arbre de facettes peut être déterminé. Un élément e_{ext} représentant l'extérieur du domaine d'étude est ajouté pour prendre en compte le flux sortant de la frontière. Toutes les facettes constituant la frontière du domaine sont alors reliées à cet élément extérieur. Un exemple de cette transposition facette-élément en arête-noeud est donné par la figure B.3 pour l'exemple de la figure 1.7.

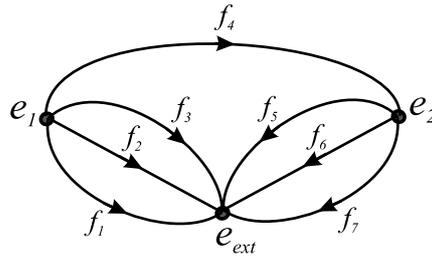


FIG. B.3 – *Graphe facette-élément*

En utilisant le précédent graphe, un arbre (représentant un co-arbre de facettes) peut être calculé. On peut alors fixer les valeurs des flux sur l'arbre de facettes. Les autres flux, à travers les facettes du co-arbre, sont déterminés par une procédure itérative vérifiant la relation B.2.

Un arbre de facettes peut être utilisé pour obtenir un vecteur \mathbf{X}_f ayant une divergence donnée. Pour illustrer la méthode, un exemple en 2D est étudié. Un vecteur \mathbf{X}_f à divergence nulle est recherché dans un sous domaine D_X du domaine d'étude constitué de 6 éléments comme précisé par la figure B.4. Ce sous domaine peut représenter un inducteur bobiné ou massif.

Les deux surfaces extrêmes de D_X sont en contact avec des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

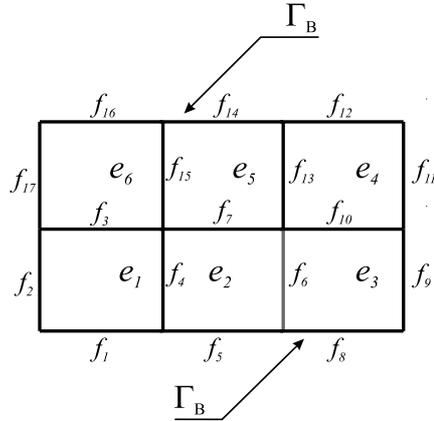


FIG. B.4 – Exemple de domaine D_X

Dans un premier temps, un arbre de facettes est construit, celui-ci doit contenir les facettes extérieures à D_X et celles en contact avec la frontière Γ_B , sauf une pour ne pas former de boucles. La figure B.5 illustre l'arbre et le co-arbre de facettes pour l'exemple étudié. La figure B.6 présente l'arbre et le co-arbre d'arêtes issus de la transposition de la relation facette-élément en arête-noeud.

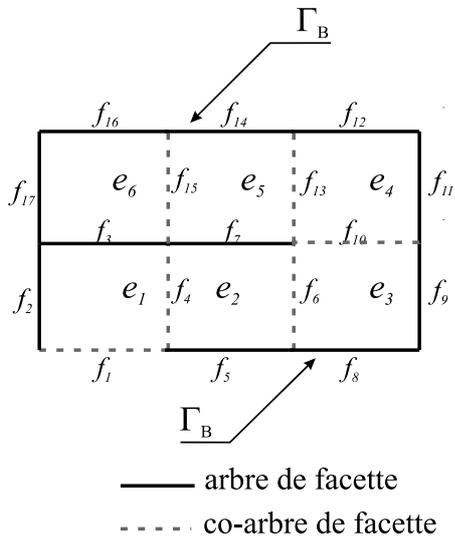


FIG. B.5 – Arbre et co-arbre de facettes

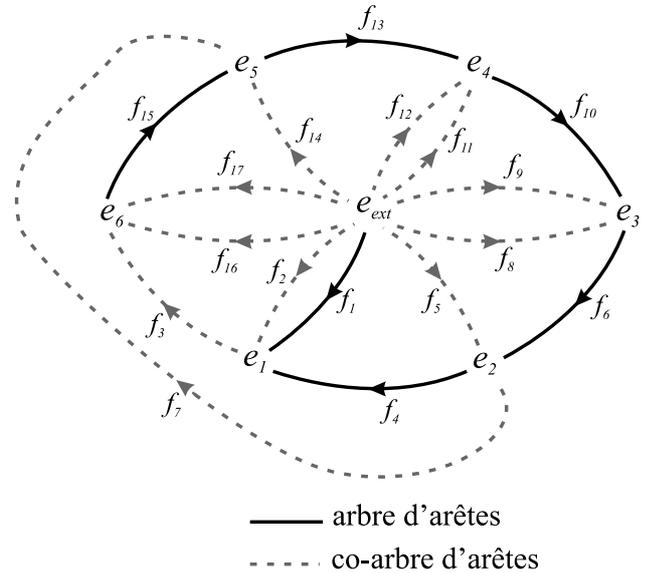


FIG. B.6 – Arbre et co-arbre d'arêtes issus de la transposition facette-élément en arête-noeud

Par les deux précédentes figures, on constate bien que l'arbre d'arêtes est équivalent au co-arbre de facettes.

Dans un second temps, on impose un flux nul sur les facettes externes au domaine D_X pour assurer une divergence nulle, pour l'exemple considéré, on a donc :

$$X_2 = X_9 = X_{11} = X_{17} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Sur les autres facettes de l'arbre, le flux est imposé, celui-ci est calculé par :

$$X_f = \int_{S_f} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}_f dS_f \quad (\text{B.9})$$

avec S_f l'aire de la facette f et \mathbf{n}_f sa normale. Dans notre cas, les facettes où l'on impose les flux sont f_5, f_8, f_{12}, f_{14} et f_{16} .

Dans un dernier temps, il ne reste plus qu'à calculer le flux de \mathbf{X} à travers les facettes du co-arbre par la vérification de la relation B.2. Ainsi, par l'élément 6, comme les flux X_{16} et X_3 sont connus, on en déduit le flux X_{15} . Connaissant ce flux, il est alors possible de déterminer X_{13} dans l'élément 5, etc.... La détermination des flux sur le co-arbre de facettes est obtenue par une méthode itérative.

Annexe C

Bilan de puissance des grandeurs globales électriques

C.1 Problème d'électromagnétisme

On considère un domaine contractile D de frontière S (fig. C.1).

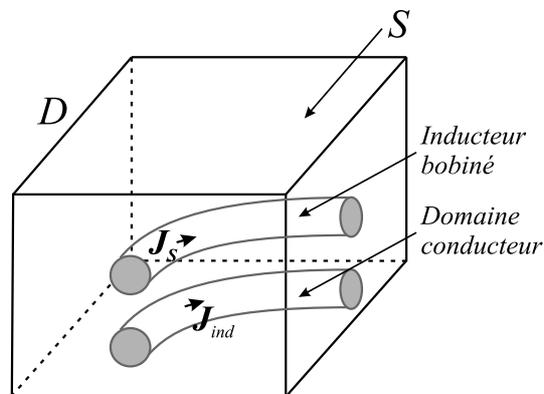


FIG. C.1 – *Domaine d'étude D*

La densité de courant circulant dans l'inducteur bobiné est supposée uniforme et connue, celle-ci est notée \mathbf{J}_s . Dans le domaine conducteur, la densité de courant induite est inconnue, celle-ci est notée \mathbf{J}_{ind} .

Les évolutions des champs magnétiques et électriques sont obtenues par les équations de Maxwell :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{ind} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{C.2})$$

Dans le domaine conducteur, il faut associer au système précédent les deux lois de comportement qui lient les champs magnétiques et électriques entre eux :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{C.4})$$

La surface du domaine conducteur, en contact avec la frontière S du domaine, est notée S_c . Sur S_c , on impose des conditions aux limites qui s'écrivent :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Ce type de condition aux limites permet d'imposer un champ électrique \mathbf{E} normal à la surface. Par conséquent, selon la relation C.4, \mathbf{J}_{ind} est également un champ normal à la surface S_c . Les deux surfaces du domaine conducteur en contact avec S sont notées S_{c1} et S_{c2} ($S_c = S_{c1} \cup S_{c2}$) (fig. C.2). Compte tenu de la relation C.5, ces deux surfaces sont équipotentielles. Ainsi, on note V_1 et V_2 les potentiels situés respectivement sur S_{c1} et S_{c2} .

Dans les zones non conductrices du domaine d'étude, seule la loi de comportement magnétique (équation C.3) est définie. Comme nous nous plaçons dans le cas des régimes quasi stationnaires, le champ \mathbf{E} ne peut plus être calculé de manière unique. En fait, on ne peut déduire qu'une information sur la composante tangentielle de \mathbf{E} . On note S_{nc} , la partie de S qui est ni en contact avec le domaine conducteur ni en contact avec l'inducteur bobiné. Les deux types de conditions aux limites sur S_{nc} sont :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{grad} \varphi \quad \text{sur } S_{nc} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{C.7})$$

où \mathbf{E}_t correspond à la composante tangentielle du champ électrique. Comme indiqué précédemment, la seule information que l'on dispose sur ce champ est qu'il est défini à partir d'un gradient. Dans la suite, on prend comme conditions aux limites la relation C.6. Cependant, on peut remarquer que l'expression C.7 impose une contribution nulle dans le vecteur de Poynting.

La surface de l'inducteur bobiné en contact avec la frontière S du domaine est notée S_b . Comme pour le domaine conducteur, on définit deux surfaces S_{b1} et S_{b2} ($S_b = S_{b1} \cup S_{b2}$) (fig. C.2). Comme $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, la composante tangentielle de \mathbf{E} est donnée par la relation C.6. De plus, pour l'inducteur bobiné, la composante normale de \mathbf{J}_s est connue, celle-ci vérifie :

$$\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{I_b}{S_b} \quad (\text{C.8})$$

avec I_b le courant circulant dans l'inducteur et S_b la surface de S_{b1} et S_{b2} .

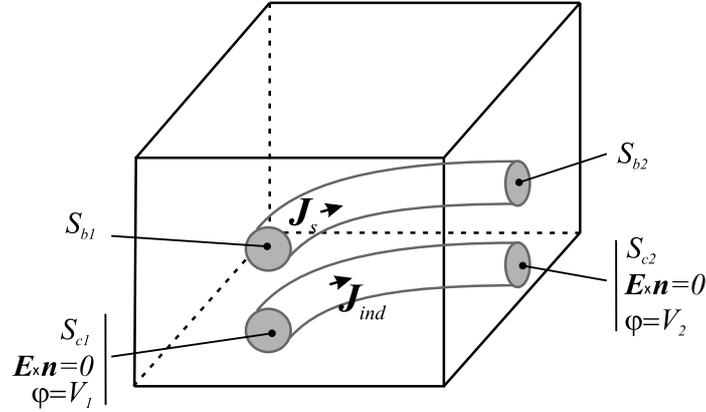


FIG. C.2 – *Domaine d'étude D*

C.2 Bilan de puissance

On cherche à exprimer la puissance fournie à l'aide du vecteur de Poynting :

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{nc}+S_b} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{C.9})$$

On a des produits mixtes qui permettent d'écrire :

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} dS + \int_{S_{nc}+S_b} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} dS \quad (\text{C.10})$$

Compte tenu de la relation C.5, le premier terme est nul. A l'aide de la relation C.6 et après modification du produit mixte, on a :

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_{nc}+S_b} \mathbf{grad} \varphi \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) dS$$

En utilisant une formule de Green, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S_{nc}+S_b} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) dS \\ &\quad - \int_{\partial S_{c1}} \varphi (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_{\partial S_{c1}} dl - \int_{\partial S_{c2}} \varphi (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_{\partial S_{c2}} dl \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

avec ∂S_{c1} et ∂S_{c2} les contours des surfaces S_{c1} et S_{c2} . Dans ces conditions, $\mathbf{n}_{\partial S_{c1}}$ et $\mathbf{n}_{\partial S_{c2}}$ sont deux normales comme précisées sur la figure C.3. On déduit également

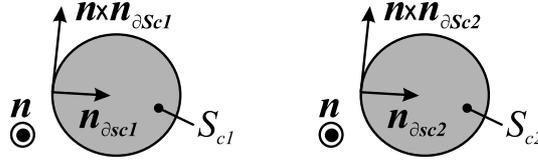


FIG. C.3 – Composantes normales

de cette figure l'orientation du produit vectoriel des deux normales. Le potentiel φ étant constant sur les surfaces S_{c1} et S_{c2} , il l'est aussi sur les contours ∂S_{c1} et ∂S_{c2} . Les intégrales de contour de la relation C.11 s'écrivent alors :

$$-V_1 \int_{\partial S_{c1}} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_{\partial S_{c1}} dl - V_2 \int_{\partial S_{c2}} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}_{\partial S_{c2}} dl \quad (\text{C.12})$$

que l'on peut également écrire :

$$-V_1 \int_{\partial S_{c1}} (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{\partial S_{c1}}) \cdot \mathbf{H} dl - V_2 \int_{\partial S_{c2}} (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{\partial S_{c2}}) \cdot \mathbf{H} dl \quad (\text{C.13})$$

Les vecteurs $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{\partial S_{c1}}$ et $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{\partial S_{c2}}$ représentent les vecteurs tangents normalisés aux contours ∂S_{c1} et ∂S_{c2} . Le théorème d'Ampère nous donne donc, à partir des conventions choisies sur les figures C.1 et C.3 :

$$\int_{\partial S_{c1}} \mathbf{H}_t dl = I_c \quad \text{et} \quad \int_{\partial S_{c2}} \mathbf{H}_t dl = -I_c \quad (\text{C.14})$$

avec I_c le courant circulant dans le domaine conducteur. Finalement, nous obtenons :

$$-V_1 \int_{\partial S_{c1}} \mathbf{H}_t dl - V_2 \int_{\partial S_{c2}} \mathbf{H}_t dl = (V_2 - V_1) I_c \quad (\text{C.15})$$

En développant le terme $\text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{n})$ de la relation C.11, on a :

$$\int_{S_{nc}+S_b} \varphi \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) dS = \int_{S_{nc}+S_b} \varphi (\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{n}) dS \quad (\text{C.16})$$

Comme la surface S de D est formée de surfaces planes, on a $\text{rot} \mathbf{n} = 0$ et comme $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ en dehors de S_{b1} et S_{b2} , l'expression précédente s'écrit :

$$\int_{S_{nc}+S_b} \varphi \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) dS = \int_{S_{b1}} \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_s) dS + \int_{S_{b2}} \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_s) dS \quad (\text{C.17})$$

Comme $\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{I_b}{S_b} = \text{cste}$ sur S_{1b} et S_{2b} , il est possible de sortir ce terme des intégrales précédentes, on a alors :

$$\int_{S_{nc}+S_b} \varphi \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) dS = \frac{I_b}{S_b} \left(- \int_{S_{b1}} \varphi dS + \int_{S_{b2}} \varphi dS \right) \quad (\text{C.18})$$

En définissant les tensions V_1' et V_2' comme les valeurs moyennes du potentiel sur S_{b1} et S_{2b} , l'expression précédente s'écrit :

$$\int_{S_{nc}+S_b} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) dS = (V_2' - V_1') I_b \quad (\text{C.19})$$

Finalement, la puissance fournie au modèle s'écrit :

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = (V_2 - V_1) I_c + (V_2' - V_1') I_b \quad (\text{C.20})$$

La puissance instantanée est alors fonction de la différence de potentiel électrique et du courant associé à un inducteur bobiné ou/et à un conducteur massif (domaine conducteur).

On peut remarquer que pour imposer une différence de potentiel électrique, on agit sur le potentiel scalaire φ que ce soit pour un inducteur bobiné ou pour un conducteur massif.

Annexe D

Détermination de \mathbf{K} en tout point du domaine

Dans la suite, nous détaillons la méthode numérique utilisée pour le calcul de \mathbf{K} créé par une spire supportée par les arêtes de la frontière d'une surface S à travers laquelle on cherche à calculer le flux. Pour simplifier le développement, nous considérons une spire formée de 4 arêtes, la méthode peut facilement être étendue pour un nombre quelconque d'arêtes en utilisant le théorème de superposition. Le vecteur \mathbf{K} peut être déterminé en tout point du domaine par la loi de Biot et Savart. Celui-ci est égal au champ magnétique créé par la spire alimentée par un courant de 1A. Comme exemple, nous calculons \mathbf{K} en un point M (fig. D.1).

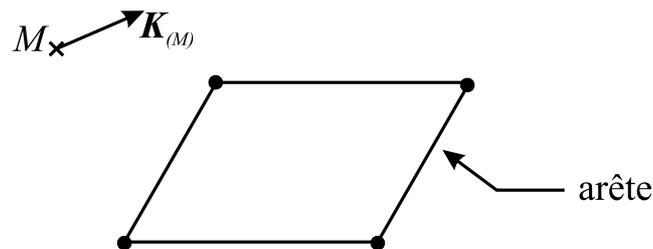
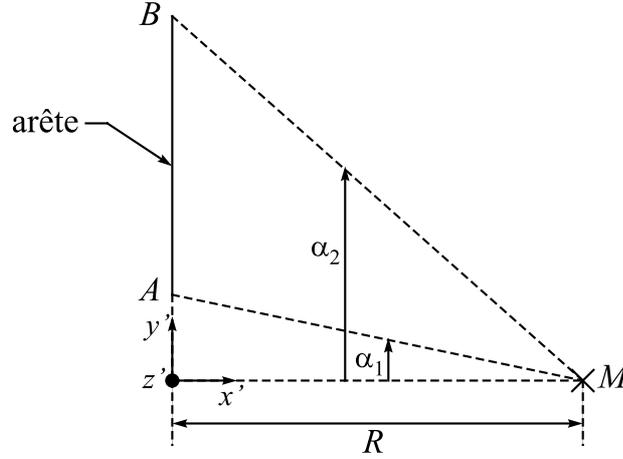


FIG. D.1 – Exemple de spire exploratrice

Pour chaque arête a_i de la spire, nous déterminons un vecteur $\mathbf{K}_{(M)}^i$ en M . En appliquant le théorème de superposition, la somme de ces vecteurs est égale à \mathbf{K} en M . Pour notre exemple, nous avons :

$$\mathbf{K}_{(M)} = \mathbf{K}_{(M)}^1 + \mathbf{K}_{(M)}^2 + \mathbf{K}_{(M)}^3 + \mathbf{K}_{(M)}^4 \quad (\text{D.1})$$

Pour obtenir le vecteur $\mathbf{K}_{(M)}^i$ produit par une arête a_i , un second repère $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ associé à l'arête est à définir (fig. D.2).

FIG. D.2 – Définition de \mathfrak{R}'

Ce second repère $\mathfrak{R}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ est construit à partir des coordonnées des points A , B et M dans le repère principal $\mathfrak{R} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (avec A et B les extrémités de l'arête).

Dans \mathfrak{R}' , les vecteurs unitaires sont calculés tels que :

$$\mathbf{i}' = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} \quad \mathbf{j}' = \frac{\mathbf{AM} \times \mathbf{AB}}{\|\mathbf{AM} \times \mathbf{AB}\|} \quad \mathbf{k}' = \mathbf{i}' \times \mathbf{j}' \quad (\text{D.2})$$

Une matrice de passage P peut alors être définie entre \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{\mathfrak{R}'} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathfrak{R}} \quad \text{avec} \quad P = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Les coordonnées de M dans \mathfrak{R}' sont déterminées par la matrice P . Dans ce second repère, les composantes de \mathbf{K} le long des axes x' et y' sont nulles, seule la composante selon z' existe. On a alors :

$$K_{(M)z'} = \frac{1}{4\pi R} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \quad \text{sur} \quad z' \quad (\text{D.4})$$

avec R la distance entre M et l'axe z' et α_1 et α_2 deux angles comme indiqués sur la figure D.2. Finalement, le vecteur \mathbf{K} en M dans \mathfrak{R} créé par une arête est obtenue par :

$$\mathbf{K}_{(M)\mathfrak{R}} = P \mathbf{K}_{(M)\mathfrak{R}'} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{(M)\mathfrak{R}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{(M)z'} \end{bmatrix}_{\mathfrak{R}'} \quad (\text{D.5})$$

Avec P^{-1} la matrice inverse de P .

Par cette méthode, nous pouvons facilement calculer les vecteurs \mathbf{K} en chaque point de Gauss.

Annexe E

Système à deux types d'inducteur

Dans cet annexe, nous présentons les systèmes matriciels des deux formulations magnétodynamiques dans le cas d'un système composé d'un inducteur bobiné et d'un inducteur massif.

On considère un domaine D contenant deux sous-domaines D_1 et D_2 . Le sous-domaine D_1 représente un inducteur bobiné et D_2 un inducteur massif. On note i^{D_1} et V^{D_1} respectivement le courant et la tension aux bornes de D_1 et i^{D_2} et V^{D_2} le courant et la tension de D_2 (fig. E.1).

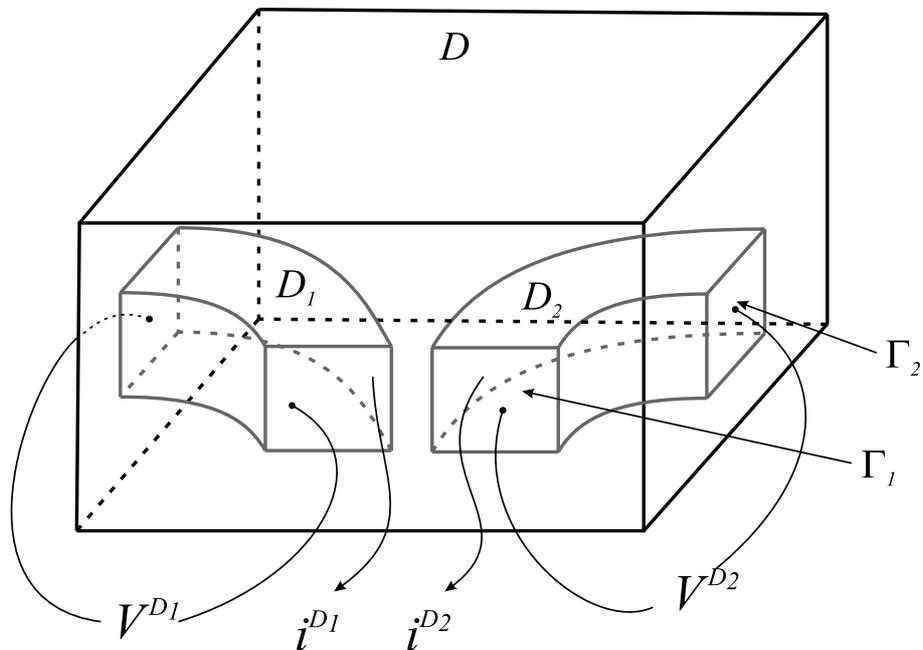


FIG. E.1 – Définition de D

Des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sont appliquées sur les frontières de D . Pour les sous-domaines D_1 et D_2 , les champs de vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} sont définis, \mathbf{N}^{D_1} et \mathbf{K}^{D_1} sont associés à D_1 et \mathbf{N}^{D_2} et \mathbf{K}^{D_2} à D_2 . La fonction scalaire α^{D_2} utilisant la surface Γ_1 de D_2 est également déterminée.

Nous présentons les systèmes matriciels des deux formulations magnétodynamiques dans le cas où le courant i^{D_1} est imposé dans l'inducteur bobiné et où la tension V^{D_2} est appliquée aux bornes de l'inducteur massif.

Dans le cas de la formulation $\mathbf{T} - \Omega$, le système matriciel s'écrit :

$$\left| \begin{array}{cc|c} \tilde{\mathbf{R}}^t M_{ff}^{\sigma^{-1}} \tilde{\mathbf{R}} + \frac{\partial}{\partial t} M_{aa}^\mu & -\frac{\partial}{\partial t} M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} & A^t \\ \tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu & -\tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} & B^t \\ A & -\frac{\partial}{\partial t} B & C \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{T}}_a \\ \tilde{\Omega}_n \\ i^{D_2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -(\tilde{\mathbf{R}}^t M_{ff}^{\sigma^{-1}} \tilde{\mathbf{R}} + \frac{\partial}{\partial t} M_{aa}^\mu) \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_1} i^{D_1} \\ -\tilde{\mathbf{G}}^t M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_1} i^{D_1} \\ V^{D_2} - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_1} M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_1} i^{D_1} \end{array} \right| \quad (\text{E.1})$$

$$A = \tilde{\mathbf{R}}^t M_{ff}^{\sigma^{-1}} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_2} + \frac{\partial}{\partial t} M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_2} \quad B = M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_2}$$

$$C = \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_2} \tilde{\mathbf{R}}^t M_{ff}^{\sigma^{-1}} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_2} + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_2} M_{aa}^\mu \tilde{\mathbf{K}}_a^{D_2}$$

Dans le cas de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, le système est donné par :

$$\left| \begin{array}{cc|c} \mathbf{R}^t M_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial t} M_{aa}^\sigma & M_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \mathbf{A}_a \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G}^t M_{aa}^\sigma & \mathbf{G}^t M_{aa}^\sigma \mathbf{G} & \varphi_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -M_{aa}^\sigma \mathbf{G} \alpha_n^{D_2} V^{D_2} + M_{af} \mathbf{N}^{D_1} i^{D_1} \\ -\mathbf{G}^t M_{aa}^\sigma \mathbf{G} \alpha_n^{D_2} V^{D_2} \end{array} \right| \quad (\text{E.2})$$

Bibliographie

- [1] **A. Tounzi, T. Henneron, Y. Le Menach, R. Askour, E. Dumetz, F. Piriou.** "3-D approaches to determine the end winding inductances of a permanent-magnet linear synchronous motor". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 40, No 2, pp 758-761, 2004.
- [2] **A. Albanese, G. Rubinacci.** "Magnetostatic field computations in terms of two component vector potentials". *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 49, pp 573-598, 2000.
- [3] **A. Benabou, S. Clénet, F. Piriou.** "Comparison of the Preisach and Jiles-Atherton models to take hysteresis phenomenon into account in finite element analysis". *EPNC 2002, Belgique, Louvain*, pp. 27-30, 2002.
- [4] **A. Bossavit.** "Whitney's forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism". *IEE Proceedings*, Vol. 135, Part A, No 8, pp 493-499, 1988.
- [5] **A. Bossavit.** "Electromagnétisme en vue de la modélisation". édition Springer-Verlag, 1993.
- [6] **A. Bossavit.** "Computational electromagnetism". Academic Press, Boston, 1998.
- [7] **A. Bossavit.** "How weak is the "weak solution" in finite element methods?". *IEEE Trans. Mag*, Vol. 34, No 5, pp 2429-2434, 1998.
- [8] **A. Bossavit.** "Mixed-hybrid methods in magnetostatics: complementarity in one stroke". *IEEE Trans. Mag*, Vol. 39, No 3, pp 1099-1102, 2003.
- [9] **A. Bossavit, L. Kettunen.** "Yee-likes schemes on staggered cellular-grids: a synthesis between FIT and FEM approaches". *IEEE Trans. Mag*, Vol. 36, No 4, pp 861-867, 2000.
- [10] **A. Kameari, K. Koganezawa.** "Convergence of ICCG method in FEM using edge elements without gauge condition". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 33, No 2, pp 1958-1961, 1993.

- [11] **A. Marrocco.** *"Analyse numérique des problèmes en électrotechnique"*. *Ann. Cs. Math, Quebec, Vol. 1, pp 271-296, 1977.*
- [12] **B. Boualem.** *"Contribution à la modélisation des systèmes électrotechniques à l'aide des formulations en potentiels: application à la machine asynchrone"*. *Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, 1997.*
- [13] **C. Daveau, F. Rioux-Damidau.** *"New (e,h) formulation coupling a finite element method and a boundary integral method for the computation of the interaction of waves with a conducting domain"*. *IEEE Trans. Mag, Vol. 35, No 2, pp 1014-1018, 1999.*
- [14] **C. Golovanov, Y. Marechal, G. Meunier.** *"3D edge element based formulation coupled to electric circuits"*. *IEEE Trans. Mag., vol. 34, No 5, pp 3162-3165, 1998.*
- [15] **C. Johnson.** *"Numerical solution of partial differential equations by the finite element method"*. *Cambridge University Press, Cambridge, 1987.*
- [16] **C. R. Sullivan.** *"Computationally efficient winding loss calculation with multiple windings, arbitrary waveforms, and two-dimensional or three-dimensional field geometry"*. *IEEE Trans. Power Electronics, Vol. 16, No 1, pp 142-150, 2001.*
- [17] **D. Shen, G. Meunier, J. Coulomb, J. Sabonnadiere.** *"Solution of magnetic fields and electrical circuits combined problems"*. *IEEE Trans. Mag., vol. 21, No 6, pp 2288-2291, 1985.*
- [18] **D.C. Jiles, J.L. Atherton.** *"Theory of ferromagnetic hysteresis"*. *Journal of magnetism and magnetic materials, Vol. 61, pp 48-60, 1986.*
- [19] **E. Durand.** *"Magnétostatique"*. *Edition Masson et Cie, 1968.*
- [20] **E. Tonti.** *"Algebraic topology and computational electromagnetism"*. *In International Workshop on Electric and Magnetic Fields, pp 20-21, 2000.*
- [21] **E. Tonti.** *"A discrete formulation of field laws: The cell method"*. *CMES, vol. 1, No 1, 2001.*
- [22] **E. Tonti.** *"Finite Formulation of Electromagnetic fields"*. *In ICS Newsletter, vol. 8, No 1 pp 5-12, 2001.*
- [23] **F. Fournet.** *"Electromagnétisme à partir des équations locales"*. *Edition Masson, 1985.*
- [24] **F. Piriou, A. Razek.** *"A non-linear coupled 3D model for magnetic field and electric circuit equations"*. *IEEE Trans. Mag., vol. 28, No 2, pp 1295-1298, 1992.*

- [25] **F. Preisach.** "*Über die magnetische nachwirkung*". *Zeitschrift für Physik* 94, pp 277-302.
- [26] **G. Dhatt, G. Touzot.** "*Une présentation de la méthode des éléments finis*". *Collection universitaire de Compiègne, Editeur Maloine*, 1984.
- [27] **G. Golovanov.** "*Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement*". *Thèse de doctorat, Institut national Polytechnique de Grenoble*, 1997.
- [28] **H. De Gersem.** "*Simulation of field-circuit coupled motional eddy current problems by krylov subspace methods and multilevel techniques*". *Thèse de doctorat, Katholieke universiteit Leuven*, 2001.
- [29] **I. D. Mayergoyz.** "*A new approach to the calculation of three-dimensional skin effect problems*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 19, No 5, pp 2198-2200, 1983.
- [30] **J. Chavanne.** "*Contribution à la modélisation des systèmes statiques à aimants permanents*". *Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1988.
- [31] **J. Cros, P. Viarouge.** "*New structures of polyphase claw-pole machines*". *37th Annual Conf. of Industrial Applications Society, IAS'02, Pittsburg*, 2002.
- [32] **J. Gyselinck, P. Dular .** "*Frequency-domain Homogenisation of Bundles of Wires of Arbitrary Cross-section in 2D Magnetodynamic FE Calculations*". *CEFC 2004, Seoul, Corée*, 2004.
- [33] **J-P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger.** "*Electromagnétisme*". *édition Masson*, 1990.
- [34] **J. Rikabi, C.F. Bryant, E.M. Freeman.** "*An error based approach to complementary formulations of static field solutions*". *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp 1963-1987, 1988.
- [35] **K. Fujiwara, T. Nakata, H. Fusayasu.** "*Acceleration of convergence characteristic of the ICCG method*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 29, No 2, pp 1958-1961, 1993.
- [36] **L. Kettunen, K. Forsman, A. Bossavit.** "*Gauging in Whitney spaces*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 35, No 3, pp 1466-1469, 1999.
- [37] **L.P. Lefevre, S. Pelletier, C. Gélinas.** "*Effect of electrical resistivity on core losses in soft magnetic iron powder materials*". *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 176, pp 93-96, 1997.

- [38] **M. Clemens, T. Weiland.** *"Discrete electromagnetics: Maxwell's equations tailored to numerical simulations"*. *Compumag 1987, Graz, Autriche*, pp 13-20, 1987.
- [39] **M. Marrone.** *"Properties of constitutive matrices for electrostatic and magnetostatic problems"*. *IEEE Trans. Mag.*, vol. 40, pp 1045-1048, 2004.
- [40] **O. Biro, K. Preis.** *"An edge finite element eddy current formulation using magnetic and a current vector potential"*. *IEEE Trans. Mag.*, vol. 36, No 5, pp 3128-3130, 2000.
- [41] **Ouvrages collectifs sous la direction de G. Meunier.** *"Modèles et formulations en électromagnétisme"*. Edition Lavoisier, 2002.
- [42] **P. Alotto, I. Perugia.** *"Matrix properties of a vector potential cell method for magnetostatics"*. *IEEE Trans. Mag*, Vol. 40, No 3, 2004.
- [43] **P. Dular.** *"Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires"*. Thèse de doctorat, Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées, 1994.
- [44] **P. Dular, F. Robert, J.F Remacle, M. Umé, W. Legros.** *"Computation of the source current density in inductors of any shape using a mixed formulation"*. *Third International Workshop on Electric and Magnetic Field*, pp 107-112, 1996.
- [45] **P. Dular, J. Gyselinck, T. Henneron, F. Piriou.** *"Dual Finite Element Formulations for Lumped Reluctances Coupling"*. *CEFC 2004, Seoul, Corée*, 2004.
- [46] **P. Dular, P. Kuo-Peng, C. Geuzaine, N. Sadowski, J.P.A. Bastos.** *"Dual magnetodynamic formulations and their source fields associated with massive and stranded inductors"*. *IEEE Trans. Mag*, Vol. 36, No 4 pp 1293-1299, 2000.
- [47] **P. Dular, W. Legros.** *"Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics"*. *IEEE Trans. Mag*, Vol. 34, No 5, pp 3078-3081, 1998.
- [48] **Quebec Metal Powder ltee.** *"Atomet EM-1 Ferromagnetic composite powder"*. *datasheet*, 2000.
- [49] **S. Bouissou, F. Piriou.** *"Comparison between two formulations in terms of potential for the coupling of magnetic and electric circuit equations"*. *IEE Proceedings-Science, Measurement and Technology*, vol. 141, No 6, pp 486-490, 1994.

- [50] **T. Henneron, F. Bouillault, C. Clénet, F. Piriou.** "*Comparison of different methods to estimate numerical errors in finite element problem coupled with external circuit equations*". *CEM 2004, Stratford-upon-Avon, UK*, pp 83-84, 2004.
- [51] **T. Henneron, S. Clénet, F. Piriou.** "*Comparison of 3D magnetodynamic formulations in term of potential with imposed electric global quantities*". *EMF 2003, Aachen, Allemagne*, pp 223-227, 2003.
- [52] **T. Henneron, S. Clénet, F. Piriou.** "*Estimation of numerical errors due to time and space discretizations*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 40, No 2, pp 1061-1064, 2004.
- [53] **T. Henneron, S. Clénet, J. Cros, P. Viarouge.** "*Evaluation of 3-D finite element method to study and design a soft magnetic composite machine*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 40, No 2, pp 786-789, 2004.
- [54] **T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, Y. Okada.** "*A new potentiel formulation for 3D magnetostatic necessitating no field computation*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 24, No 1, pp 274-277, 1988.
- [55] **T. Tarhasaari, L. Kettunen, A. Bossavit.** "*Some realizations of a discrete Hodge operator: a reinterpretation of finite element techniques*". *IEEE Trans. Mag*, Vol. 35, No 3, pp 1494-1497, 1999.
- [56] **V. Gradinaru, R. Hiptmair.** "*Whitney elements on pyramids*". *Electronic Transaction on Numerical Analysis*, pp 154-168, 1999.
- [57] **Y. Kawase, T. Mori, T. Ota.** "*Magnetic field analysis of coupling transformers for electric vehicle using 3-D finite element method*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 34, No 5, pp 3186-3189, 1998.
- [58] **Y. Le Floch.** "*Développement de formulations 3D éléments finis pour la prise en compte de conducteurs massifs et bobinés avec un couplage circuit*". *Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2002.
- [59] **Y. Le Floch, G. Meunier, C. Guerin, P. Labie, X. Brunotte, D. Boudaud.** "*Coupled problem computation of 3-D multiply connected magnetic circuits and electrical circuits*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 39, No 3, pp 1725-1728, 2003.
- [60] **Y. Le Menach.** "*Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques: Prise en compte des inducteurs*". *Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille*, 1999.

- [61] **Y. Le Menach, S. Clénet, F. Piriou.** "*3D compatible magnetostatic potential formulations coupled with electrical circuit*". *COMPEL*, Vol. 19, No 3, pp 776-786, 2000.
- [62] **Y. Le Menach, S. Clénet, F. Piriou.** "*Numerical model to discretize source fields in the 3D finite element method*". *IEEE Trans. Mag*, Vol. 34, No 4, 2000.
- [63] **Z. Ren.** "*Influence of the R.H.S on the convergence behavior of the curl-curl equation*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 32, No 3, pp 655-658, 1996.
- [64] **Z. Ren, F. Bouillault, A. Razek, A. Bossavit, J-C. Verite.** "*A new hybrid model using electric field formulation for 3-D eddy current problems*". *IEEE Trans. Mag*, Vol. 26, No 2, pp 470-473, 1990.
- [65] **Z. Ren, N. Ida.** "*High-order differential form-based elements for the computation of electromagnetic field*". *IEEE Trans. Mag.*, vol. 36, No 3, pp 746-750, 2000.